Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

MIRCEA GANGA

MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA a XII-a

PROFIL M2

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$$

$$\begin{aligned} * : M \times M &\longrightarrow M \\ (x, y) &\longrightarrow x * y \end{aligned}$$

$$\int g(x)dx = G(x) + \mathcal{C} \ ; \quad \int_a^b g(x)dx = G(b) - G(a)$$

EDITURA MATHPRESS

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

MIRCEA GANGA

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a M2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii (TC + CD)
Filiera tehnologică, toate calificările profesionale (TC)

EDITURA MATHPRESS

Manualul este aprobat prin Ordinul ministrului Educaţiei, Cercetării şi Tineretului nr. 1262/38 din 6.06.2007 şi este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al ministrului Educaţiei, Cercetării şi Tineretului nr. 5959 din 22.12.2006.

Referenţi: prof.gr. I ION NEDELCU, Colegiul Naţional „Mihai Viteazul", Ploieşti
prof.gr. I RADU SIMION, Colegiul Naţional „Mihai Viteazul", Ploieşti

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
GANGA, MIRCEA
Matematică : manual pentru clasa a XII-a M2 /
Mircea Ganga. – Ploieşti : Mathpress, 2007
ISBN 978-973-8222-27-4

51(075.35)

Editura MATHPRESS, Ploieşti
Tel./fax: 0244.592.118
e-mail: mirceaganga@yahoo.com

<u>Comenzi ţară</u>
Tel: 0244.592.118
021.351.01.11
0722.745.965
0723.955.444

<u>Comenzi Bucureşti</u>
Tel.: 021.327.26.23
021.351.01.11
0721.679.326

CUPRINS

ELEMENTE
DE
ALGEBRĂ

1. GRUPURI

Acest capitol conține informații despre noțiunea de lege de compoziție (notată generic „ $*$ “) pe o mulțime nevidă (M) și principalele proprietăți ale acesteia. Acest concept este ilustrat prin exemple întâlnite în anii precedenți. Cuplul $(M,*)$ este o structură algebrică: monoid, grup.

Noțiunea de grup este una fundamentală în matematică, având aplicații în diverse domenii: teoria ecuațiilor algebrice și a ecuațiilor diferențiale, teoria relativității, cristalografiei, teoria informației, etc.

Ca grupuri remarcabile figurează: grupurile de matrice, grupurile de transformări (care sunt grupuri infinite), grupuri de permutări, grupul claselor de resturi, grupul rădăcinilor de ordin n ale unității (care sunt grupuri finite) etc.

Se definește conceptul de izomorfism de grupuri. Două astfel de grupuri se bucură de aceleași proprietăți algebrice. Pentru grupurile finite izomorfe tablele lor sunt la fel organizate.

Fiecare concept introdus beneficiază de probleme rezolvate diverse precum și de un set consistent de probleme propuse (cele mai multe fiind date la bacalaureat sau admitere în facultăți în ultimii ani).

Istoric. Noțiunea de grup a fost utilizată pentru prima dată de matematicianul francez Evariste Galois (1811-1832) (mort în duel la vârsta de 21 ani), care este adevăratul creator al teoriei grupurilor. Ideile teoriei grupurilor „erau în aer“ (cum se întâmplă adesea cu ideile matematice fundamentale) înainte de Galois, și anumite teoreme ale teoriei grupurilor au fost demonstrate sub o formă naivă de Lagrange (1736-1813). Contemporanii lui Galois n-au înțeles și deci nici apreciat lucrările sale geniale. Ei nu s-au interesat decât după apariția în 1870 a cărții lui Jordan „Traité des substitutions et des équations algébriques“. De abia la sfârșitul secolului al XIX-lea în teoria grupurilor, „fantezia a fost definitiv abandonată pentru a face loc unei pregătiri atente a scheletului logic“ (F. Klein „Conferințe asupra dezvoltării matematicilor secolului al XIX-lea“).

PIONIER AL MATEMATICII

Evariste GALOIS (1811 – 1832)
Matematician francez

Matematicianul englez Arthur Cayley (1821-1895), unul dintre cei mai prolifici matematicieni (cu studii la celebrul Trinity College of Cambridge University, a scris peste 200 de articole) a fost printre primii care a descris grupurile abstracte.

1.1. LEGE DE COMPOZIȚIE INTERNĂ

Conceptul care urmează a fi prezentat l-am întâlnit încă din gimnaziu, fără a-l defini în termenii folosiți în acest paragraf, iar mai târziu, în anii de liceu precedenți, l-am

extins pentru alte categorii de mulțimi. Acum vom interpreta lucrurile învățate în ceilalți ani dintr-un punct de vedere mai abstract.
Reamintim că dată fiind o mulțime nevidă M prin produsul cartezian $M \times M$ înțelegem mulțimea tuturor perechilor de elemente (x, y) (prima componentă este x, iar cea de-a doua este y) când $x, y \in M$, adică $M \times M = \{(x, y) | x, y \in M\}$.

Definiție. Fie M o mulțime nevidă. Se numeşte **operație algebrică binară** (sau **lege de compoziție internă** sau simplu **lege de compoziție**) definită pe M o aplicație $f : M \times M \to M$, care asociază fiecărei perechi $(x, y) \in M \times M$ un unic element $f(x, y) \in M$.

Elementul $f(x, y)$ se numeşte **compusul lui** x **cu** y.

Aşadar, la orice pereche (cuplu) $(x, y) \in M \times M = M^2$, această operație face să corespundă în mod unic elementul $f(x, y)$ **din aceeaşi mulțime** M. Uneori în loc de $f(x, y)$ se scrie xfy, dar cel mai des se desemnează operația binară pe M printr-un simbol special:

$$*, \circ, \perp, \top, \cup, \cap, \oplus, \bullet, \ldots .$$

Urmând această cale vom numi $x \cdot y$ (sau simplu xy, fără nici un semn între x şi y) **produsul şi** $x + y$ **suma** elementelor $x, y \in M$.
În primul caz vom spune că legea este dată **multiplicativ**, iar în al doilea **aditiv**.
Se înțelege că, în majoritatea cazurilor, aceste denumiri sunt convenționale.
În general, pe o mulțime M se pot defini mai multe operații diferite. Când dorim să punem în evidență una dintre ele vom utiliza parantezele $(M, *)$ şi vom spune că operația $*$ conferă mulțimii M o **structură algebrică** sau că $(M, *)$ este un **sistem algebric**.
De exemplu, pe mulțimea $\mathbb{Z}$ pe lângă operațiile $+, \cdot$ (adunarea şi înmulțirea numerelor întregi) putem defini şi alte operații „derivate":
$x \circ y = x + y - 2xy$, $x * y = -x + y$, $x \perp y = -x - y + xy$ etc. care se obțin cu ajutorul operațiilor $+$ (sau $-$) şi $\cdot$. Rezultă astfel structuri algebrice diferite: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \circ)$, $(\mathbb{Z}, *)$, $(\mathbb{Z}, \perp)$.
Aşa cum vom vedea în capitolele care urmează, vom clasifica structurile algebrice după:

- **numărul de legi de compoziție;**
- **proprietățile acestor operații.**

Exemple cunoscute de legi de compoziție

1. Adunarea pe $\mathbb{N}$ (mulțimea numerelor naturale) este aplicația $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care asociază cuplului (x, y) elementul $x + y$ (suma dintre x şi y). Vom marca această corespondență prin $(x, y) \to x + y$.

2. Înmulțirea pe $\mathbb{N}$ este aplicația $\cdot : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ dată de corespondența $(x,y)\to x\cdot y$.

3. Adunarea pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (mulțimea matricelor pătratice de ordin n cu elemente numere complexe) este definită prin $+ : \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \ (A,B)\to A+B$.

4. Înmulțirea pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este aplicația definită prin $\cdot : \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \ (A,B)\to AB$.

5. Reuniunea pe $\mathcal{P}(M)$ (mulțimea părților lui M; reprezintă toate submulțimile lui M) este definită prin: $\cup : \mathcal{P}(M)\times\mathcal{P}(M)\to\mathcal{P}(M),\ (A,B)\to A\cup B$.

6. Intersecția pe $\mathcal{P}(M)$ este definită prin $\bigcap : \mathcal{P}(M)\times\mathcal{P}(M)\to\mathcal{P}(M),\ \ (A,B)\to A\bigcap B$.

7. Compunerea pe $\mathcal{F}(M)$ (mulțimea funcțiilor definite pe M cu valori în M) este aplicația $\circ : \mathcal{F}(M)\times\mathcal{F}(M)\to F(M),\ \ (f,g)\to f\circ g$.

Desigur că exemplele pot continua cu alte legi de compoziție întâlnite în anii precedenți.

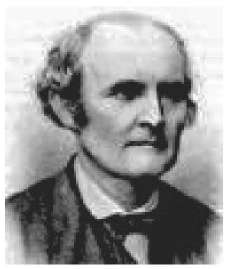
Tabla operației (legii)

Dacă mulțimea M este **finită**, atunci operația algebrică $*$ pe M poate fi dată prin așa numita **tablă a operației** (sau **tabla lui Cayley**). Într-adevăr, dacă $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, atunci tabla operației arată astfel:

$*$	a_1	a_2	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$	$\cdots$	$a_1 * a_j$	$\cdots$	$a_1 * a_n$
a_2	$a_2 * a_1$	$a_2 * a_2$	$\cdots$	$a_2 * a_j$	$\cdots$	$a_2 * a_n$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_i	$a_i * a_1$	$a_i * a_2$	$\cdots$	$a_i * a_i$	$\cdots$	$a_i * a_n$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_n	$a_n * a_1$	$a_n * a_2$	$\cdots$	$a_n * a_j$	$\cdots$	$a_n * a_n$

UN PIONIER AL MATEMATICII

Arthur CAYLEY (1821 – 1895)
Matematician englez



CONTRIBUȚII

• ***teoria matricelor***
• ***teoria grupurilor***

În acest tabel elementul $a_i * a_j$ este situat pe linia i și coloana j. Dacă notăm $a_{ij} = a_i * a_j$, atunci putem gândi tabla operației ca o matrice $A=\left(a_{ij}\right)_{ij=\overline{1,n}}$.

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Dacă luăm $M=\{1,-1,i,-i\}$ cu operația de înmulțire, atunci avem tabla legii prezentată alăturat. Alcătuiți tabla legii pe mulțimea M în cazurile:

1) $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $x * y = \min\{x, y\}$;

2) $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $x\circ y = \text{c.m.m.d.c.}\{x, y\}$.

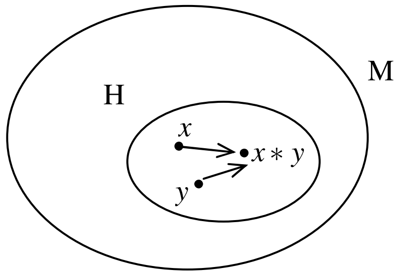
1.2. PARTE STABILĂ

Dacă $(M,*)$ este o structură algebrică, iar H este o submulțime nevidă a lui M, atunci pentru $x.y \in H$ elementul $x * y$ poate să fie în mulțimea H sau să fie în afara ei, adică în $M - H$.

Definiție. Dacă pentru orice $x, y \in H$, compusul $x * y$ aparține tot lui H, atunci spunem că H este **parte stabilă a lui M în raport cu operația** $*$ **.**

Deci, H este parte stabilă a lui M în raport cu $* \Leftrightarrow \left[\forall x, y \in H \Rightarrow \right.$ $\left.\Rightarrow x * y \in H\right]$ (fig. 1)

În raport cu adunarea, $\mathbb{N}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Q}$ etc.
Analog, în raport cu adunarea matricelor $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ etc.
Dacă $\mathcal{I}(M), \mathcal{S}(M)$ sunt mulțimea funcțiilor injective definite pe M cu valori în M şi respectiv mulțimea funcțiilor surjective de la M la M, atunci acestea sunt părți stabile ale lui $\mathcal{F}(M)$ în raport cu operația de compunere a funcțiilor.



$x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$

Fig. 1

Observații. **1)** Adjectivul „stabilă“ din noțiunea de „parte stabilă“ pentru o submulțime H a lui M în raport cu $*$ vine să precizeze că dacă $x, y \in H$ (sunt două elemente arbitrare din H), atunci şi compusul lor $x * y$ rămâne în H.

2) Dacă $H \subset M$ şi se consideră o aplicație $*$ pentru H, atunci aceasta nu este neapărat o lege de compoziție. Acest lucru trebuie dovedit. Deci enunțul nu poate fi de forma:

„Fie H o mulțime şi legea de compoziție pe H, $x * y = \ldots$“.

Exemplificăm acest lucru prin următoarea problemă:
Fie $H = [0,2]$ şi aplicația $x * y = xy - x - y + 2$, $(\forall)x, y, \in H$.
Arătați că $*$ este o lege de compoziție pe H.
Deci trebuie să arătăm că $(\forall)x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$. Ori avem $x * y = (x-1)(y-1)+1$.
Cum $x, y \in H \Rightarrow |x-1| \le 1, |y-1| \le 1$.
Prin urmare faptul că $x \in H \Leftrightarrow |x-1| \le 1$. Deci $x * y \in H \Leftrightarrow |x * y - 1| \le 1 \Leftrightarrow |(x-1)(y-1)| \le 1 \Leftrightarrow$ $|x-1||y-1| \le 1$, ceea ce este adevărat pentru că $|x-1| \le 1, |y-1| \le 1$.

3) Dacă H *este parte stabilă* a lui M în raport cu $*$, atunci $H \times H \subset M \times M$ şi deci putem vorbi de restricţia legii $*$ la $H \times H$, care este tot o lege de compoziţie. Pentru comoditate vom nota şi restricţia tot cu $*$.
Deci, dacă H este parte stabilă a lui M în raport cu $*$, atunci legea de compoziţie $*: H \times H \to H$ se spune că este indusă de legea de compoziţie de pe M. Se mai spune că legea de pe M induce pe H o lege de compoziţie.

Probleme rezolvate

1. Fie $M = \mathbb{Z}$, iar $H = 2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (mulţimea numerelor întregi pare) şi $H' = 2\mathbb{Z}+1 = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (mulţimea numerelor întregi impare) avem $H, H' \subset \mathbb{Z}$.
R. Pe $\mathbb{Z}$ considerăm legea de compoziţie adunarea numerelor întregi. Se constată uşor că H este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu adunarea deoarece din $x, y \in H$, $x = 2k, y = 2l$, $k, l \in \mathbb{Z}$ avem $x + y = 2(k+l) \in 2\mathbb{Z}$ în timp ce H' nu este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu adunarea pentru că dacă $x, y \in 2\mathbb{Z}+1$, $x = 2k+1$, $y = 2l+1$, $k, l \in \mathbb{Z}$, atunci $x + y = 2(k+l+1) \notin 2\mathbb{Z}+1$.

2. Pentru $M = \mathbb{Z}$ considerăm legea de compoziţie $x * y = \max(x, y)$. Fie $H = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Atunci H este o parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu $*$.
R. Într-adevăr, acest lucru va reieşi din tabla legii pentru H.
Observăm că toate elementele (rezultate din compunere) ce figurează în tablă aparţin lui H. Prin urmare H este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea $*$.

$*$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	2	3	4
2	2	2	2	3	4
3	3	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4

3. Fie $M = \mathbb{R}$ şi legea de compoziţie $x * y = xy - x - y + 2$. Considerăm intervalele H = (1, 2), H' = (2, 3) submulţimi ale lui $\mathbb{R}$. Să probăm că H este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu $*$, în timp ce H' nu are această proprietate.
R. Într-adevăr, fie $x, y \in H$. Atunci trebuie probat că $x * y \in H \Leftrightarrow 1 < xy - x - y + 2 < 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 < (x-1)(y-1) + 1 < 2 \Leftrightarrow 0 < (x-1)(y-1) < 1$ ceea ce este evident, deoarece $x, y \in H \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 < x, y < 2 \Leftrightarrow 0 < x-1, y-1 < 1$, iar de aici $0 < (x-1)(y-1) < 1$.

Pentru afirmaţia relativă la H' este de observat că luând $x = \frac{5}{2}, y = \frac{5}{2}$ din H', rezultă $x * y = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{5}{2} - \frac{5}{2} + 2 = \frac{13}{4} \notin H'$. Deci nu pentru orice $x, y \in H' \Rightarrow x * y \in H'$.

Probleme propuse

1. Pe $\mathbb{N}^*$ se consideră legea de compoziţie $x * y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$. Fie $H = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \text{ divide } 10\}$.

Arătaţi că H este parte stabilă a lui $\mathbb{N}^*$ în raport cu $*$, construind tabla legii.
2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ definim legile de compoziţie:
$x \oplus y =$ restul împărţirii lui $x + y$ prin 5,
$x \otimes y =$ restul împărţirii lui $x \cdot y$ prin 5.
Arătaţi că $H = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu fiecare din cele două legi, alcătuind tablele legilor.
3. Fie $H = \{-3, -1, 0, 1\} \subset \mathbb{Z}$ şi $x * y = \min(x, y)$ o lege de compoziţie pe $\mathbb{Z}$. Probaţi că H este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu $*$, alcătuind tabla legii.
4. Arătaţi că $\mathbb{Z}[\sqrt{p}] = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}^* \text{ prim}\}$,

$\mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right]=\{a+b\sqrt{p}|a,b\in\mathbb{Q},\ p\in\mathbb{N}^*\text{ prim}\}$

sunt părți stabile ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu adunarea și înmulțirea.

5. Să se arate că $H=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu operația de înmulțire. Este finită mulțimea H ?

6. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=xy-2(x+y)+6$. Să se arate că H = (1,3) este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$.

7. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea $x\perp y=5xy-20(x+y)+84$. Să se arate că $H=[4,\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$.

8. Pe $\mathbb{R}$ considerăm legea de compoziție $x*y=\sqrt{x^2+y^2-9}$. Arătați că $H=[3,\infty)$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu $*$.

9. Arătați că următoarele submulțimi ale lui $\mathbb{C}$ sunt părți stabile în raport cu înmulțirea numerelor complexe:

a) $\left\{2^n|n\in\mathbb{Z}\right\}$; **b)** $\left\{a+b\sqrt{3}|a,b\in\mathbb{Z}, a^2+b^2\neq 0\right\}$; **c)** $\left\{z|\,|z|\leq 1\right\}$;

d) $\left\{z\mid |z|>1\right\}$; **e)** $\left\{z\mid |z|\geq 2\right\}$; **f)** $\left\{z\mid |z|<\frac{1}{2}\right\}$

10. Pe $\mathcal{F}(\mathbb{R}-\{0,1\})$ considerăm operația de compunere a funcțiilor. Fie $H=\{f_1,f_2,f_3\}$,

$f_i:\mathbb{R}-\{0,1\}\to\mathbb{R}-\{0,1\},\ i=1,2,3,\ f_1(x)=x,\ f_2(x)=\frac{x-1}{x},\ f_3(x)=\frac{1}{1-x}, x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$.

Probați că H este parte stabilă a lui $\mathcal{F}(\mathbb{R}-\{0,1\})$ în raport cu operația de compunere, alcătuind tabla legii.

11. Pe $\mathcal{F}(\mathbb{R}-\{0\})$ se consideră operația de compunere a funcțiilor.

Fie $H=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}\subset\mathcal{F}(\mathbb{R}-\{0\})$, unde $f_1(x)=x,\ f_2(x)=-x,\ f_3(x)=\frac{1}{x}, f_4(x)=-\frac{1}{x}$.

Arătați că H este parte stabilă a lui $\mathcal{F}(\mathbb{R}-\{0\})$ în raport cu $\circ$, alcătuind tabla legii.

12. Determinați părțile finite ale lui $\mathbb{R}$ stabile în raport cu adunarea din $\mathbb{R}$ și părțile finite ale lui $\mathbb{R}$ stabile în raport cu înmulțirea din $\mathbb{R}$.

13. Fie $H=\left\{A_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\middle|\alpha\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Să se arate că H este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire.

14. Fie $H=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\middle|a,b,c,d\in\mathbb{Z}, a+b=c+d\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. **Arătați că H este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.**

15. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $*$ prin $x*y=x+y+xy$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât mulțimea $H=[a,\infty)$ să fie parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$.

16. Pentru ce valori ale parametrului real *a*, intervalul *I* este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „$*$" în cazurile:

1) $x*y=xy-2x-2y+a, I=(2,\infty)$; **2)** $x*y=x+y+axy, I=[-1,\infty)$.

1.3. PROPRIETĂŢI GENERALE ALE LEGILOR DE COMPOZIŢIE

În cele ce urmează vom considera structura algebrică $(M,*)$. Pentru legea notată $*$ vom folosi denumirea de legea star (sau stea).

P1. Asociativitatea

Definiţie. Legea $*$ se numeşte **asociativă** dacă:
$$(x*y)*z=x*(y*z),\ (\forall)x,y,z\in M .$$

În membrul stâng, $(x*y)*z$, se efectuează mai întâi calculul din paranteză, $x*y$ şi apoi rezultatul acestuia se „compune" cu z. În membrul drept efectuăm operaţia din paranteză, $y*z$ şi apoi calculăm $x*(y*z)$.

Definiţia spune că indiferent cum am efectua calculele algebrice în cei doi membri obţinem acelaşi rezultat.

Din acest motiv dacă legea $*$ este asociativă, atunci se omit în scriere parantezele şi se scrie simplu $x*y*z$.

Vom da acelaşi nume structurii algebrice $(M,*)$ definită prin $*$, adică vom spune că este o structură algebrică asociativă, sau spunem simplu că legea $*$ este asociativă pe *M*.

Dacă *H* **este o parte stabilă** a lui *M* în raport cu legea $*$ şi dacă $*$ **este asociativă** pe *M,* atunci $*$ rămâne asociativă şi pe *H*.

Altfel spus $(H,*)$ devine o structură algebrică asociativă.

Spre exemplu adunarea şi înmulţirea matricelor din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt operaţii asociative. Dacă *H* este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ în raport cu cele două operaţii, atunci $(H,+)$, $(H,\cdot)$ sunt structuri algebrice asociative.

Pentru $H=\{-1,1\}\subset\mathbb{R}$, înmulţirea este asociativă pe *H,* deoarece este asociativă pe $\mathbb{R}$.

Observaţii. 1) O lege $*$ **nu este asociativă** dacă **există** $x,y,z\in M$ pentru care $(x*y)*z\neq x*(y*z)$.

2) Dacă $x_1, x_2, ..., x_n\in M$ şi pe *M* legea $*$ este asociativă, atunci prin compunerea elementelor date (în acea ordine) înţelegem $x_1*x_2*...*x_n$ element din *M* obţinut prin recurenţă. Pentru $n = 1$ el este x_1.

Dacă am obţinut elementul $x_1*x_2*...*x_{n-1}$, atunci $x_1*x_2*...*x_n=(x_1*x_2*...*x_{n-1})*x_n$.

Dacă legea de compoziție pe M este multiplicativă, atunci $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1x_2...x_n = (x_1x_2...x_{n-1})x_n$, iar în notația aditivă în loc de produsul elementelor $x_1, x_2, ..., x_n$ avem suma lor $x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Exemple cunoscute de legi asociative

1. Adunarea şi înmulțirea pe $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sunt legi asociative.
2. Reuniunea, intersecția pe $\mathcal{P}(M)$ sunt legi asociative.
3. Adunarea şi compunerea funcțiilor pe $\mathcal{F}(M)$ sunt legi asociative.
4. Adunarea şi înmulțirea matricelor pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt legi asociative.

Exemple de legi neasociative

1. Scăderea pe $\mathbb{R}$. Arătăm că există $x, y, z \in \mathbb{R}$ pentru care $(x-y)-z \neq x-(y-z)$. Fie $x = 5, y = 1, z = -3$. Atunci $(x-y)-z = (5-1)-(-3) = 4+3 = 7$ şi $x-(y-z) = 5-(1+3) = 1$. Cum $7 \neq 1$, deducem că scăderea pe $\mathbb{R}$ nu este asociativă.
2. Diferența de mulțimi pe $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
Fie $A = \mathbb{R}$, $B = (0,\infty)$, $C = (-\infty,0)$. Atunci $(A-B)-C = (-\infty,0]-(-\infty,0) = \{0\}$ şi $A-(B-C) = \mathbb{R}-(0,\infty) = (-\infty,0]$. Deci $(A-B)-C \neq A-(B-C)$.

Probleme rezolvate

1. Fie $H = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ şi aplicația $x * y = |x-y|$, $x, y \in H$. Arătați că $*$ este lege de compoziție şi stabiliți dacă este asociativă.

$*$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	0	1	2	3
2	2	1	0	1	2
3	3	2	1	0	1
4	4	3	2	1	0

R. Tabla aplicației este dată alăturat și se constată că $x * y \in H$, $(\forall) x, y \in H$. Prin urmare aplicația este o lege de compoziție pe H. Legea nu este asociativă deoarece există $x = 1$, $y = 2$, $z = 4$ pentru care $(x * y) * z = 3 \neq x * (y * z) = 1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{xy}$. Arătați că această lege nu este asociativă.

R. Va trebui să găsim trei numere $x, y, z \in \mathbb{R}$ pentru care $(x * y) * z \neq x * (y * z)$. Alegem $x=1, y=-2, z=3$ pentru care $(x * y) * z = \sqrt[3]{-2} * 3 = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{-2}}$ şi $x * (y * z) = 1 * \sqrt[3]{-6} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{-6}} = \sqrt[9]{-6}$.

Evident $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{-2}} = \sqrt[9]{-54} \neq \sqrt[9]{-6}$.

3. Definim pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție $x * y = xy - x - y + 2$.
Arătați că legea $*$ induce pe (1,2) o lege de compoziție asociativă.

R. Am văzut la problema rezolvată 3 din paragraful de la parte stabilă că (1,2) este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$.

Pentru a proba asociativitatea legii trebuie să demonstrăm că

$$(x * y) * z = x * (y * z),\ (\forall) x, y, z \in (1,3). \quad (1)$$

Calculăm membrul stâng al egalității şi avem:

$$(x*y)*z=(xy-x-y+2)*z=(xy-x-y+2)\cdot z-(xy-x-y+2)-z+2=$$
$$=xyz-(xy+yz+xz)+x+y+z\,. \qquad (2)$$

Membrul drept al egalității (1) se scrie:

$$x*(y*z)=x*(yz-y-z+2)=x(yz-y-z+2)-x-(yz-y-z+2)+2=$$
$$=xyz-(xy+xz+yz)+x+y+z\,. \qquad (3)$$

Din (2) şi (3) se deduce (1). Prin urmare legea este asociativă.

Probleme propuse

1. Stabiliți care din următoarele aplicații sunt operații algebrice asociative pe submulțimea $(0,\infty)$ a lui $\mathbb{R}$:

a) $a*b=\dfrac{a+b}{2}$; b) $a\circ b=a+b-1$; c) $a\top b=ab^2$;d) $a\perp b=a^b$; e) $a*b=\sqrt{ab}$;

f) $a\circ b=\log_b a$; g) $a\top b=\max\{a,b\}$; h) $a\top b=|a-b|$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definesc următoarele legi de compoziție:

a) $x*y=x+y+2$; b) $x\circ y=4xy$; c) $x\top y=x+y-7xy$; d) $x\perp y=xy-4x-4y+20$;

e) $x*y=x+y-\dfrac{xy}{2}$; f) $x\circ y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$. Care din aceste legi este asociativă?

3. Fie $H=\{f_a:(2,\infty)\to(2,\infty),\ f_a(x)=2+(x-2)^a,\ a>0\}$. Arătați că $(H,\circ)$ este structură algebrică asociativă, unde $\circ$ este compunerea funcțiilor.

4. Fie $H=\left\{A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbb{R},\ \det(A)=1\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că:

1) H este parte stabilă infinită a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

2) $(H,\cdot)$ este structură algebrică asociativă.

5. Fie $H=\left\{f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,\middle|\, f_a(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ ax, & x\geq 0\end{cases},\ a>0\right\}\subset\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Arătați că:

1) H este parte stabilă a lui $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ în raport cu operația de compunere a funcțiilor; 2) legea $\circ$ pe H este asociativă.

6. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=mx+y,\ m\in\mathbb{R}$. Să se determine m astfel încât legea să fie asociativă.

7. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=xy+2a(x+y), a\in\mathbb{R}$. Determinați a astfel încât legea să fie asociativă.

8. Pe $\mathbb{R}$ definim legile de compoziție

$$x*y=ax+by-1,\quad x\circ y=2xy-2x-2y+c,\ x,\quad y=axy+y+b, a,b,c\in\mathbb{R}\,.$$

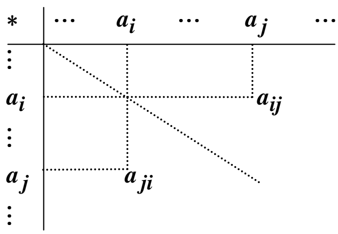
Determinați *a, b, c* astfel încât operațiile să fie asociative.

P2. Comutativitatea

Definiție. Legea $*$ se numește **comutativă** dacă:

$$x * y = y * x, (\forall)x, y \in M .$$

Din această definiție deducem că pentru o lege comutativă nu contează ordinea în care compunem. În membrul stâng primul element în compunere este *x,* al doilea fiind *y,* în timp ce în membrul drept primul element din compunere este *y,* iar al doilea este *x.* Rezultatul este același. Dacă mulțimea *M* este finită, $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, atunci comutativitatea legii se traduce prin $a_{ij} = a_{ji}$, $(\forall)i, j = \overline{1,n}$, unde $a_{ij} = a_i * a_j$. Gândită tabla legii ca o matrice pătratică înseamnă că elementul a_{ij} este simetricul lui a_{ji}, în raport cu diagonala principală (vezi tabla de mai jos). Pentru $n = 4$, tabla legii comutative este următoarea:



$*$	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_2	a_{12}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_3	a_{13}	a_{23}	a_{33}	a_{34}
a_4	a_{14}	a_{24}	a_{34}	a_{44}

Ca și în cazul terminologiei folosite pentru legea asociativă și aici vom da același nume structurii algebrice $(M,*)$ definită prin $*$ spunând că dacă $*$ este comutativă, atunci structura algebrică este comutativă sau mai simplu spunem că $*$ este comutativă pe *M.*

Un alt element important utilizat în aplicații este următorul:

Dacă *H* **este o parte stabilă** a lui M în raport cu legea $*$ și dacă $*$ **este comutativă** pe *M,* atunci $*$ rămâne comutativă și pe *H.*

Altfel spus $(H,*)$ devine la rândul ei o structură algebrică comutativă. De exemplu adunarea și înmulțirea pe $\mathbb{R}$ sunt operații comutative întotdeauna. Atunci aceste operații rămân la fel de exemplu pe $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \middle| a,b \in \mathbb{Q}\right\}$ dacă am arătat în prealabil că $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu cele două operații.

Observație. O lege $*$ **nu este comutativă** dacă există $x, y \in M$ astfel încât $x * y \neq y * x$.

Exemple cunoscute de legi comutative

1. Adunarea și înmulțirea pe $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sunt legi de compoziție comutative.

2. Reuniunea, intersecția pe $\mathcal{P}(M)$ sunt legi comutative.

3. **Adunarea şi înmulţirea funcţiilor pe $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ sunt legi comutative.**

4. **Adunarea matricelor pe $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ este o lege comutativă.**

Exemple de legi necomutative

1. **Scăderea pe $\mathbb{R}$ nu este comutativă.**

Luăm $x = 3$, $y = 5$ şi avem $x - y = -2$, iar $y - x = 2$. Avem $2 \neq -2$.

2. **Compunerea funcţiilor pe $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ nu este comutativă. Luăm $f(x) = x^2, g(x) = x - 1$. Avem $(f \circ g)(x) = (x-1)^2$ pe când $(g \circ f)(x) = x^2 - 1$. Evident nu pentru orice $x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 = x^2 - 1$.**

Observaţie. **Totuşi dacă se dă o submulţime finită $H \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ şi ni se cere să arătăm că $(H, \circ)$ este structură algebrică comutativă, atunci se face tabla legii care trebuie să fie simetrică în raport cu diagonala principală.**

3. **Înmulţirea matricelor pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nu este comutativă. Pentru $n = 2$, de exemplu, luăm $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pentru care $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi deci $AB \neq BA$.**

Probleme rezolvate

1. **Pe mulţimea $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definim aplicaţia $x \top y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$.**

Arătaţi că structura algebrică $(H, \top)$ este comutativă.

R. Arătăm că aplicaţia $\top$ este o lege de compoziţie pe H construind tabla legii. Avem alăturat tabla legii.

$\top$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3
4	1	2	1	4	1	2
5	1	1	1	1	5	1
6	1	2	3	2	1	6

Cum tabla legii este simetrică în raport cu diagonala principală se deduce că legea de compoziţie este comutativă.

Este clar că $\text{c.m.m.d.c.}(x, y) = \text{c.m.m.d.c.}(y, x)$.

2. **Fie $H = \{1, 2, 3, 4\}$ şi pe $\mathbb{R}$ legea de compoziţie: $x * y = \begin{cases} y - x, & \text{dacă } x \leq 2 \text{ şi } y > 2 \\ 5 - y, & \text{în rest} \end{cases}$.**

Arătaţi că $(H, *)$ este structură necomutativă.

R. Mulţimea H fiind finită vom face tabla legii. Obţinem alăturat tabla.

$*$	1	2	3	4
1	4	3	2	3
2	4	3	1	2
3	4	3	2	1
4	4	3	2	1

Se vede că pentru orice $x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$, ceea ce arată că aplicaţia $*$ este lege de compoziţie pe H.

Legea este necomutativă deoarece tabla legii nu este simetrică în raport cu diagonala principală. De exemplu pentru $x = 1$, $y = 4$ avem $1 * 4 = 3 \neq 4 * 1 = 4$.

3. **Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x \circ y = xy - 4(x + y) + 20$. Fie $H = (3, 5)$. Arătaţi că $(H, \circ)$ este o structură algebrică comutativă.**

R. Arătăm mai întâi că $(H, \circ)$ este structură algebrică, adică $(\forall) x, y \in (3,5) \Rightarrow x \circ y \in (3,5)$

Dacă $x \in (3,5)$ atunci $3 < x < 5 \Leftrightarrow -1 < x - 4 < 1 \Leftrightarrow |x - 4| < 1$.

Deci $x \circ y \in (3,5) \Leftrightarrow |x \circ y - 4| < 1 \Leftrightarrow |(x-4)(y-4)| < 1 \Leftrightarrow |x-1||y-1| < 1$, adevărat deoarece $|x-1| < 1, |y-1| < 1$.

Avem: $x \circ y = xy - 4(x + y) + 20 = yx - 4(y + x) + 20 = y \circ x, (\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

4. **Fie** $H=\left\{A_a\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\middle|A_a=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}\right\}$**. Arătați că** $(H,\cdot)$ **este structură algebrică comutativă, unde** $\cdot$ **este înmulțirea obişnuită a matricelor.**

R. Arătăm mai întâi că $\cdot$ este lege de compoziție pe *H*.

Fie $A_a, A_b\in H$. Atunci $A_a\cdot A_b=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+b\\0 & 1\end{pmatrix}=A_{a+b}\in H$.

Înmulțirea pe *H* este comutativă deoarece $A_a\cdot A_b=A_{a+b}=A_{b+a}=A_b\cdot A_a, (\forall)A_a, A_b\in H$.

(În a doua egalitate am folosit comutativitatea adunării numerelor reale $a+b=b+a$).

Probleme propuse

1. **Pe mulțimea** H **= {1, 2, 3, 4, 5} definim aplicația** $x\perp y$ **= restul împărțirii lui** xy **prin 6. Arătați că** $(H,\perp)$ **este o structură algebrică comutativă.**

2. **Pe mulțimea** $H=\{1,2,3,4\}$ **se consideră aplicația** $x*y$ **= restul împărțirii lui** x^y **prin 5. Demonstrați că** $(H,*)$ **este structură algebrică necomutativă.**

3. **Pe** $\mathbb{R}$ **se defineşte legea de compoziție** $x\circ y=3x+y$ **. Arătați că „** $\circ$ **“ este o lege necomutativă.**

4. **Pe mulțimea** $H=(2,\infty)$ **se consideră aplicația** $x*y=xy-2x-2y+6$ **.**
Arătați că *(H, *)* este structură algebrică comutativă.

5. **Pe mulțimea** $H=(-\infty,1)$ **se defineşte aplicația** $x*y=\dfrac{xy-2}{x+y-3}$ **.**
Demonstrați că $(H,*)$ **este o structură algebrică comutativă.**

6. **Pe mulțimea** $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ **se defineşte operația algebrică** $(x,y)\circ(x',y')=(xy'+x'y,yy')$**. Arătați că „** $\circ$ **“ este lege comutativă.**

7. **Fie** $H=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**, unde** $A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$.
Arătați că $(H,\cdot)$ **este o structură algebrică comutativă, unde „** $\cdot$ **“ este operația de înmulțire a matricelor.**

8. **Se consideră** $H=\left\{A_a=\begin{pmatrix}2-a & a-1\\2(1-a) & 2a-1\end{pmatrix}\middle|a\in\mathbb{R}^*\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**. Demonstrați că structura algebrică** $(H,\cdot)$ **este comutativă, unde „** $\cdot$ **“ este operația de înmulțire a matricelor.**

9. **Fie** $H=\left\{\begin{pmatrix}x+4y & 2y\\-7y & x-4y\end{pmatrix}\middle|x,\in\mathbb{R},x^2-2y^2=1\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**. Arătați că** $(H,\cdot)$ **este structură algebrică comutativă.**

10. **Fie** $H=\{f_1,f_2,f_3\}\subset\mathcal{F}(\mathbb{R}-\{0,1\})$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=1-\dfrac{1}{x}$, $f_3(x)=\dfrac{1}{1-x}$**. Demonstrați că** $(H,\circ)$ **este o structură algebrică comutativă, unde „** $\circ$ **“ este compunerea funcțiilor.**

11. **Se consideră** $H=(0,\infty)-\{1\}$ **şi aplicația** $x*y=x^{\ln\sqrt[3]{y}}$ **. Arătați că** $(H,*)$ **este o structură algebrică comutativă.**

12. **Pe** $\mathbb{R}$ **se defineşte legea de compoziție definită prin** $x*y=xy+2ax+by, a,b\in\mathbb{R}$ **. Determinați *a, b* pentru care legea este asociativă şi comutativă.**

P3. Element neutru

Definiție. Un element $e \in M$ se numeşte **element neutru** pentru legea $*$ dacă **pentru orice** $x \in M$ **avem**
$$x * e = e * x = x .$$

Uneori se mai spune că legea $*$ admite pe $e \in M$ ca element neutru dacă
$$x * e = e * x = x, (\forall) x \in M .$$

Faptul că o structură algebrică $(M,*)$ are elementul neutru e se notează uneori prin $(M,*,e)$.

Dacă în plus legea $*$ este comutativă, atunci condiția ca $e \in M$ să fie element neutru pentru legea $*$ se reduce la $x * e = x, (\forall) x \in M$ (sau $e * x = x, (\forall) x \in M$).

Atragem atenția că elementul neutru e al unei legi $*$ pe M **trebuie să aparțină mulțimii** *M*. Deci $e \in M$. Nu orice lege de compoziție pe o mulțime admite element neutru.

Teoremă. Dacă o lege de compoziție admite element neutru, atunci acesta este unic.

Demonstrație. Vom arăta că dacă ar exista două elemente neutre $e_1, e_2 \in M$ pentru legea $*$ atunci acestea coincid. Avem:

$x * e_1 = e_1 * x = x, (\forall) x \in M$, (1)

$x * e_2 = e_2 * x = x, (\forall) x \in M$, (2).

În (1) punem $x = e_2$ şi rezultă $e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2$, (3)

iar în (2) facem $x = e_1$ şi obținem $e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1$, (4).

Din (3) şi (4) rezultă $e_1 = e_2$. ■

Observație. Dacă *H* este o parte stabilă a lui *M* în raport cu legea $*$ şi dacă $e \in M$ este element neutru pentru $*$, atunci dacă $e \in H$, acesta este element neutru al legii induse de $*$ pe mulțimea *H*.

Astfel numărul 0 este element neutru pentru adunarea pe $\mathbb{R}$ Cum $0 \in \mathbb{Z}$, acesta va fi element neutru şi pentru adunarea pe $\mathbb{Z}$ (A se vedea problema rezolvată 4).

Definiție. Un element $e_s \in M$ se numeşte **element neutru la stânga** pentru legea $*$ dacă $e_s * x = x, (\forall) x \in M$.

Un element $e_d \in M$ se numeşte **element neutru la dreapta** pentru legea $*$ dacă $x * e_d = x, (\forall) x \in M$.

Aşadar un element $e \in M$ este element neutru pentru legea $*$ dacă şi numai dacă e este element neutru atât la stânga cât şi la dreapta.
Dacă o lege de compoziție este notată multiplicativ, elementul neutru, dacă există, se numeşte **element unitate** şi se notează de obicei cu **simbolul** 1. Dacă legea este notată aditiv, elementul neutru, dacă există, se numeşte **element nul** şi se notează de obicei cu **simbolul** 0.

Fie M o mulțime pe care am definit o lege de compoziție asociativă şi cu element neutru $e \in M$. Pe o astfel de mulțime am definit compusul a n elemente, $n \geq 1$. Operația dată, având şi element neutru, definim acest compus şi pentru $n = 0$ ca fiind e.
Dacă operația algebrică pe M este scrisă multiplicativ atunci definim puterea a n-a a lui $x \in M$ prin $x^n = \begin{cases} x \cdot x \cdot ... \cdot x (n \text{ factori}), \text{ dacă } n > 0 \\ e, \qquad\qquad\qquad \text{dacă } n = 0. \end{cases}$

Avem evident pentru orice $x \in M$ şi orice $m, n \in \mathbb{N}$

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}, \left(x^m\right)^n = x^{mn}.$$

Dacă M este înzestrată cu o lege de compoziție scrisă aditiv, asociativă şi cu element neutru $0 \in M$, atunci pentru orice $x \in M$ şi orice $n \in \mathbb{N}$, definim nx prin:

$nx = \begin{cases} x + x + ... + x (n \text{ termeni}), \text{ dacă } n > 0 \\ 0, \qquad\qquad\qquad \text{dacă } n = 0. \end{cases}$

Au loc egalitățile:
$mx + nx = (m+n)x,\ n(mx) = (mn)x, (\forall) x \in M, (\forall) m, n \in \mathbb{N}.$

Exemple cunoscute de legi cu element neutru

1. Adunarea pe $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ are ca element neutru numărul zero, când avem:

$$\boldsymbol{x + 0 = 0 + x = x, (\forall) x}.$$

2. Înmulțirea pe $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ are ca element neutru numărul unu, când avem:

$$\boldsymbol{1 \cdot x = x \cdot 1 = x, (\forall) x}.$$

3. Compunerea pe $\mathcal{F}(M)$ admite ca element neutru funcția identică de la M la M, $1_M : M \to M$, $1_M(x) = x, x \in M$.

4. Adunarea matricelor pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are ca element neutru matricea nulă (cu toate elementele egale cu zero) notată simplu O_n.

5. Matricea unitate $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ reprezintă elementul neutru pentru operația de înmulțire a matricelor din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

6. Pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$ a părților unei mulțimi M elementul neutru față de reuniune este mulțimea vidă, $X \cup \varnothing = \varnothing \cup X = X, (\forall) X \in \mathcal{P}(M)$, iar elementul neutru față de intersecție este mulțimea totală M, $M \cap X = X \cap M = X, (\forall) X \in \mathcal{P}(M)$

Probleme rezolvate

$\top$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

1. Pe mulțimea $M = \{e, a, b, c\}$ se consideră legea de compoziție $\top$ dată prin tabla legii (alăturat).
Să se arate că legea $\top$ admite element neutru.

R. Din egalitățile: $e \top e = e,\ a \top e = e \top a = a, b \top e = e \top b = b, c \top e = e \top c = c$ se deduce că $e \in M$ este elementul neutru pentru $\top$.

2. Pe mulțimea $M = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ se consideră aplicația $x * y = xy - 2(x + y) + 6$. Arătați că $(M, *)$ este o structură algebrică fără element neutru.

R. Faptul că $x \in M \Leftrightarrow |x - 2| > 1$. Probăm că $(M, *)$ este structură algebrică, adică $*$ este o lege de compoziție pe *M*, ceea ce revine la a arăta că $(\forall) x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$. Avem $x * y \in M \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |x * y - 2| > 1 \Leftrightarrow |(x-2)(y-2)| > 1 \Leftrightarrow |x-2||y-2| > 1$, evident.

Presupunem acum că $e \in M$ este elementul neutru. Trebuie să avem:

$$x * e = e * x = x, (\forall) x \in M$$

Se vede ușor că legea este comutativă și deci prima egalitate de mai sus se verifică. Deci trebuie ca $x * e = x, (\forall) x \in M \Leftrightarrow xe - 3(x + e) + 6 = x, (\forall) x \in M \Leftrightarrow (x-2)(e-3) = 0, (\forall) x \in M \Leftrightarrow e = 3$.

Observăm că $3 \notin M$ și prin urmare legea $*$ nu admite element neutru.

3. Se consideră mulțimea de matrice $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in 2\mathbb{Z} + 1 \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. Arătați că $(H, \cdot)$ este o structură algebrică cu element unitate.

R. Mai întâi arătăm că înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ induce pe *H* o lege de compoziție. Într-adevăr fie:

$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$. Atunci: $A_a A_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+b+1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{a+b+1} \in H$, deoarece $a + b + 1 \in 2\mathbb{Z} + 1$.

Mai mult înmulțirea pe *H* este comutativă deoarece $A_a \cdot A_b = A_{a+b+1} = A_{b+a+1} = A_b \cdot A_a$.

Fie $A_e \in H$ elementul unitate pentru înmulțire. Trebuie să avem $A_e \cdot A_a = A_a, (\forall) A_a \in H$ sau $A_{a+e+1} = A_a, (\forall) A_a \in H$.

Este clar că $A_a = A_b \Leftrightarrow a = b$. Deci din $A_{a+e+1} = A_a$ rezultă $a + e + 1 = a$ sau $e = -1 \in 2\mathbb{Z} + 1$.

Elementul neutru este $A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Este oare vreo contradicție între faptul că I_3 este element neutru pentru înmulțirea din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ (în cazul acesta) și faptul că A_{-1} este element neutru pentru $H \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$? Nu, pentru că I_3 nu aparține mulțimii *H*.

Probleme propuse

1. **Pe mulţimea H = {0, 1, 2, 3, 4} definim aplicaţia „$\circ$" astfel** $x \circ y = \begin{cases} x+y, \ x<y\le 2 \\ x-y, \ x\ge y \\ y-x, \ x\le 3 \text{ şi } y>2. \end{cases}$

Arătaţi că $(H,\circ)$ este o structură algebrică neasociativă, necomutativă, dar cu element neutru.

2. **Pe mulţimea H = [5, 7] definim aplicaţia $x * y = xy - 6x - 6y + 42$.**

Arătaţi că $(H,*)$ este o structură algebrică având elementul neutru e = 7.

3. **Fie $H=\mathbb{C}-\{-i\}$ o submulţime a lui $\mathbb{C}$. Definim pe $\mathbb{C}$ legea de compoziţie $x \top y = xy + i(x+y) - (1+i)$.**

Arătaţi că $(H,\top)$ este o structură algebrică asociativă, comutativă cu element neutru $e=1-i$.

4. **Considerăm $H=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| a_i\in\mathbb{R}, a_1a_4\ne 0\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi legea de compoziţie pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2+a_1b_2 \\ a_3+a_4b_3 & a_4b_4 \end{pmatrix}$. **Demonstraţi că $(H,*)$ este o structură algebrică asociativă, cu element neutru.**

5. **Fie $H=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Să se arate că $(H,\cdot)$ este structură algebrică asociativă cu elemente neutre la stânga.**

6. **Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y = xy - 2x - 2y + m, m\in\mathbb{R}$. Să se determine valorile lui m pentru care $H=[2,\infty)$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „$*$". Determinaţi apoi elementul neutru al legii „$*$" pe H.**

7. **Fie $H=\left\{A(x)=\begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \middle| x\in R, x\ne\frac{1}{2}\right\}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Arătaţi că $(H,\cdot)$ este structură algebrică asociativă, comutativă, cu element neutru.**

8. **Să se determine valorile parametrului real a, astfel încât legea de compoziţie pe $\mathbb{R}$ definită prin $x*y=a(x+y)-xy$ să fie asociativă şi comutativă. Determinaţi elementul neutru.**

9. **Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=2xy-2x-2y+c, x\in\mathbb{R}$. Fie $H=\mathbb{R}-\{1\}$. Determinaţi pe c pentru care $(H,*)$ este o structură algebrică asociativă şi apoi precizaţi elementul neutru.**

10. **Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x*y=xy+ax+by+c$. Să se arate că legea„$*$" este asociativă dacă şi numai dacă admite element neutru.**

P4. Element simetric

> **Definiţie.** Fie $(M,*)$ o structură algebrică **cu element neutru** $e\in M$ şi $x\in M$. Spunem că un element $x'\in M$ este **un simetric** al lui x în raport cu legea $*$ dacă $x*x'=x'*x=e$.

Dacă există x' cu această proprietate, spunem că x este **element simetrizabil**, în raport cu legea $*$.

Să observăm că x' este simetricul lui x, adică $(x')' = x$.
Facem precizarea şi în acest caz că simetricul lui x, elementul x' **trebuie să aparţină mulţimii** M. Deci odată găsit x', **acesta trebuie să fie în** M. Dacă legea $*$ este comutativă, atunci $x' \in M$ este simetricul lui x dacă $x * x' = e$ (sau $x' * x = e$).
Când legea este notată **multiplicativ**, vom spune element **inversabil** în loc de simetrizabil şi element **invers** în loc de simetric; inversul lui x se va nota cu x^{-1} sau $\frac{1}{x}$.
Dacă legea de compoziţie este notată **aditiv**, vom spune **opusul** lui x în loc de simetricul lui x; opusul lui x se va nota cu $-x$.

Exemple cunoscute de legi cu elemente simetrice

1. Elementul neutru e este element simetrizabil, un simetric al său este el însuşi, $e' = e$.
2. Faţă de adunarea numerelor naturale, singurul element simetrizabil este 0 (zero), când –0 = 0.
3. Faţă de adunare pe $\mathbb{Z}$ (elementul neutru este 0), orice element este simetrizabil (orice element $x \in \mathbb{Z}$ are un opus $-x$) deoarece $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
4. Faţă de înmulţirea pe $\mathbb{Z}$ (elementul neutru este 1), singurele elemente inversabile sunt 1 (având simetricul 1) şi –1 (având simetricul –1) când $1^{-1} = 1$ şi $(-1)^{-1} = -1$.
5. Faţă de înmulţirea pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (elementul neutru este I_n) elementele simetrizabile sunt matricele A cu $\det(A) \neq 0$, simetricul matricei A fiind matricea inversă A^{-1}, când $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.
6. Faţă de compunerea pe $\mathcal{F}(M)$ (elementul neutru este 1_M) elementele simetrizabile sunt funcţiile bijective, deoarece o aplicaţie f este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă când $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_M$.

> **Teoremă**. Fie $(M, *)$ o structură algebrică **asociativă** şi **cu element neutru** e.
> Dacă $x \in M$ are un element simetric, atunci acesta este unic.

Demonstraţie. Fie x', x'' două elemente simetrice pentru x. Avem
$x * x' = x' * x = e$, (1) şi
$x * x'' = x'' * x = e$, (2).
Atunci $x' = x' * e \overset{(2)}{=} x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' \overset{(1)}{=} e * x'' = x''$ şi teorema este demonstrată. ■

Notaţie. Dacă $(M, *)$ este structură algebrică **asociativă** şi cu **element neutru**, atunci notăm $U(M)$ submulţimea elementelor din M simetrizabile în raport cu $*$. Aşadar $U(M) = \{x \in M \mid (\exists) x' \in M,\ x * x' = x' * x = e\}$.
Pentru o lege de compoziţie pe M, notată **multiplicativ** şi pentru un element inversabil $x \in M$, definim puterea negativă x^{-n}, $n \geq 1$, prin $\boxed{x^{-n} = (x^{-1})^n,\ n \in \mathbb{N}^*}$.

Este clar că x^{-n} este invers pentru x^n, $\left(x^n\right)^{-1}=x^{-n}$.

Analog, dacă legea de compoziție pe M, este **aditivă** şi $x \in M$ are un opus $-x$, atunci definim $(-n)x, n \geq 1$, prin $\boxed{(-n)x=n(-x),\ n \in \mathbb{N}^*}$.

Este clar că $n(-x)$ este un opus al lui nx, $-(nx)=n(-x)$.

Teoremă. Fie $(M,*)$ o structură algebrică **asociativă** şi cu **element neutru**. Atunci:

1) Dacă elementele $x, y \in M$ sunt simetrizabile, atunci compusul lui x cu y este simetrizabil şi mai mult $(x*y)'=y'*x'$.

2) Dacă elementul $x \in M$ este simetrizabil, simetricul său, x', este, de asemenea, simetrizabil şi $(x')'=x$.

3) Dacă $x \in M$ este simetrizabil, iar $y \in M$ nu este simetrizabil, atunci $x*y,\ y*x \in M$ nu sunt simetrizabile.

Demonstrație. **1)** Trebuie să probăm că $(x*y)*(y'*x')=(y'*x')*(x*y)=e$. Avem (folosind asociativitatea legii $*$):

$(x*y)*(y'*x')=x*(y*y')*x'=x*e*x'=x*x'=e$ şi analog

$(y'*x')*(x*y)=y'*(x'*x)*y=y'*e*y=y'*y=e$.

Deci $x*y$ este simetrizabil şi $y'*x'$ este unicul său simetric (vezi teorema precedentă).

2) Rezultă din definiția elementului simetric (observând că x şi x' au rol simetric în această definiție) şi din unicitatea sa.

3) Presupunem prin reducere la absurd, că elementul $z=x*y$ este simetrizabil. Atunci şi elementul $x'*z$ (de la punctul 1)) este simetrizabil.

Dar avem $x'*z=x'*(x*y)=(x'*x)*y=e*y=y$, ceea ce înseamnă că y ar fi simetrizabil. Contradicție.

Prin urmare $x*y$ nu este simetrizabil. Analog se arată că $y*x$ nu este simetrizabil. ■

Observații. **1)** Afirmația **1)** din teoremă spune că $(U(M),*)$ este o structură algebrică, adică $*$ este lege de compoziție indusă pe $U(M)$ de legea de compoziție de pe M.

2) Dacă legea este notată multiplicativ, atunci această afirmație se transcrie $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$.

Dacă legea este notată aditiv, atunci $-(x+y)=(-y)+(-x)$.

Definiție. Fie $(M,*)$ o operație algebrică având $e_s \in M$ element neutru la stânga ($e_d \in M$ element neutru la dreapta) şi $x \in M$.
Spunem că $x'_s \in M$ ($x'_d \in M$) este un simetric al lui x la stânga (la dreapta) în raport cu legea $*$ dacă

$$x'_s * x = e_s \quad (x * x'_d = e_d).$$

Se mai spune că $x \in M$ este **simetrizabil la stânga (la dreapta) în raport cu** $*$ dacă există $x'_s \in M$ ($x'_d \in M$) pentru care $x'_s * x = e_s$ ($x * x'_d = e_d$).

Probleme rezolvate

1. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziție $x \oplus y =$ restul împărțirii lui $x + y$ la 6. Fie H = {0, 1, 2, 3, 4, 5} $\subset \mathbb{Z}$. Arătați că $(H,\oplus)$ este o structură algebrică. Determinați elementele simetrizabile din H în raport cu $\oplus$.

R. Tabla legii este dată alăturat.

$\oplus$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Se observă că elementul neutru al legii este $e = 0$.
Pentru a determina simetricul unui element x utilizând tabla se procedează astfel: se urmăreşte pe orizontala lui x elementul neutru $e = 0$. Elementul corespunzător coloanei pe care se găseşte $e = 0$ reprezintă simetricul lui x.
Având notația aditivă pentru lege în loc de simetricul elementului x vom utiliza denumirea de opusul lui x şi scriem $-x$.
Deci $-0=0,\ -1=5,\ -2=4,\ -3=3,\ -4=2,\ -5=1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x \top y = xy - 3(x+y) + 12$. Arătați că legea $\top$ este asociativă, comutativă, admite element neutru. Stabiliți elementele simetrizabile din $\mathbb{R}$ în raport cu $\top$.

R. Se verifică prin calcul asociativitatea şi comutativitatea legii. Pentru determinarea elementului neutru $e \in \mathbb{R}$ utilizăm definiția acestuia $x * e = x, (\forall) x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow xe - 3(x+e) + 12 = x,\ (\forall) x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e(x-3) = 4(x-3), (\forall) x \in \mathbb{R}$.

Dacă $x \neq 3$ rezultă $e = 4$. Pentru $x = 3$ se verifică imediat egalitatea $3 * 4 = 3$. Aşadar $e = 4$ reprezintă elementul neutru pentru legea $\top$.
Să determinăm acum elementele simetrizabile. Fie $x \in \mathbb{R}$ şi $x' \in \mathbb{R}$ simetricul lui x în raport cu $\top$. Avem:
$x * x' = 4 \Leftrightarrow xx' - 3(x+x') + 12 = 4 \Leftrightarrow x'(x-3) = 3x+8$. Dacă $x \neq 3$, atunci $x' = \dfrac{3x-8}{x-3} \in \mathbb{R}$

Deci orice $x \in \mathbb{R}, x \neq 3$ admite un simetric $x' = \dfrac{3x-8}{x-3}$.

Probleme propuse

1. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziție $x \otimes y =$ restul împărțirii lui xy la 6. Fie H = {0, 1, 2, 3, 4, 5} $\subset \mathbb{Z}$. Arătați că $(H,\otimes)$ este o structură algebrică comutativă, cu element unitate. Determinați elementele din H simetrizabile în raport cu „$\otimes$“.

2. **Pe mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ se definește legea „$*$" prin $z_1 * z_2 = z_1 + z_2 - z_1 z_2$. Fie $H = \mathbb{C} - \{1\}$. Arătați că „$*$" induce pe H o lege de compoziție asociativă, comutativă, cu element neutru. Determinați elementele din H simetrizabile în raport cu legea dată.**

3. **Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x \top y = 3xy + 6(x+y) + 10$. Fie $H = (-2, \infty)$. Arătați că $(H, \top)$ este o structură algebrică comutativă, cu element neutru și că orice element din H este simetrizabil în raport cu legea „$\top$".**

4. **Fie $H = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x = a - b\sqrt{10},\ a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 - 10b^2 = 1 \right\}$ și operația de înmulțire pe $\mathbb{R}$. Demonstrați că $(H, \cdot)$ este o structură algebrică asociativă, comutativă, cu element neutru și orice element din H admite un simetric (invers) în raport cu operația de înmulțire.**

5. **Fie $H = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ și aplicația $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Arătați că $(H, *)$ este o structură algebrică asociativă, comutativă, cu element neutru și orice element din H este simetrizabil în raport cu „$*$".**

6. **Se consideră $H = (0, \infty) - \{1\}$ și aplicația $x * y = x^{5 \ln y}$. Arătați că $(H, *)$ este o structură algebrică asociativă, comutativă, cu element neutru și că orice element din H este simetrizabil în raport cu legea dată.**

7. **Considerăm mulțimea de matrice $H = \left\{ X^n \middle| n \in \mathbb{N}, n \geq 1,\ X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ împreună cu operația de înmulțire. Demonstrați că $(H, \cdot)$ este o structură algebrică asociativă, comutativă, cu element neutru și orice element din H este simetrizabil în raport cu înmulțirea.**

8. **Fie $H = (0, 1)$ și aplicația $x \circ y = \dfrac{xy}{2xy + 1 - (x+y)}$. Arătați că $(H, \circ)$ este o structură algebrică asociativă, comutativă, cu element neutru și orice element din H este simetrizabil în raport cu „$\circ$".**

9. **Fie $\left\{ A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că înmulțirea matricelor de pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ induce pe H o lege de compoziție asociativă, comutativă, cu element neutru și orice element din H este simetrizabil în raport cu această lege.**

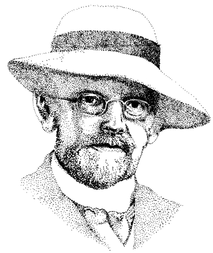
10. **Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $H = \{ aA + B \mid a \in \mathbb{R}^* \}$.**
Arătați că H este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor și *U(H) = H*.

1.4. STRUCTURI ALGEBRICE

Am văzut că dacă pe mulțimea nevidă M definim o lege de compoziție $*$, atunci cuplul $(M, *)$ l-am numit sistem algebric.

În general, dacă $M \neq \varnothing$, atunci numim **structură algebrică pe mulțimea** M, orice structură determinată pe M de una sau mai multe legi de compoziție, aceste legi fiind

supuse unor condiții (asociativitate, comutativitate, ...), sau fiind legate una de alta prin anumite relații (distributivitatea unei legi de compoziție față de alta).
Condițiile la care sunt supuse legile ce definesc o structură algebrică şi relațiile de legătură ce există între aceste legi constituie axiomele structurii respective. Numărul legilor de compoziție şi axiomele caracterizează specia de structură considerată.

PIONIERI AI MATEMATICII	
EUCLID (330? – 375 î.C.) **Matematician grec**	**David HILBERT (1862-1943)** **Matematician german**
	
CONTRIBUȚII	**CONTRIBUȚII**
• ***„Părintele“ geometriei***	• ***algebră*** • ***analiză*** • ***geometrie***

Notă istorică. Istoric, problema axiomatizării începe cu lucrările lui Euclid în domeniul geometriei. Matematicienilor secolului al XIX-lea le revine meritul de a elucida această problemă plecând de la dezvoltarea geometriei elementare. Marele matematician german David Hilbert (1862-1943) a reuşit să rezolve (1899) de o manieră satisfăcătoare dificila problemă a axiomatizării geometriei (20 axiome). Axiomatizarea aritmeticii (1889) a fost realizată de matematicianul italian Giuseppe Peano (1858-1932) (5 axiome). Teoria mulțimilor a fost axiomatizată de matematicianul german Zermelo (1871-1953) (7 axiome), reluată şi precizată de matematicianul german Fraenkel (1891-1965).
Ca număr de exemplare tipărite pe plan mondial, *Elementele* lui Euclid se situează pe locul doi după Biblie.

1.4.1. Monoizi

Definiție. Cuplul $(M,*)$, unde $M \neq \varnothing$ şi $*$ este o lege de compoziție pe *M,* se numeşte monoid dacă legea $*$ satisface următoarele două axiome:
M_1) Legea $*$ este **asociativă**.
M_2) Legea $*$ **are element neutru**.

Dacă , în plus, legea $*$ verifică şi axioma:
M_3) Legea $*$ este **comutativă**,
atunci cuplul $(M,*)$ se numeşte **monoid comutativ**.

Dacă $(M,*)$ este monoid, atunci $M' \subset M$, $M' \neq \varnothing$ pentru care $(M',*)$ este monoid îl numim **submonoidul** monoidului $(M,*)$.

Exemple cunoscute de monoizi

1. Mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ cu operaţia de adunare (respectiv de înmulţire este monoid comutativ cu elementul neutru 0 (zero) (respectiv 1 (unu)).
2. Mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ cu operaţia de adunare (respectiv de înmulţire) este monoid comutativ cu elementul neutru zero (respectiv 1 (unu)).
Submulţimea lui $\mathbb{Z}$ formată din numerele întregi impare (notată $2\mathbb{Z}+1$) cu operaţia de înmulţire este un submonoid al lui $(\mathbb{Z},\cdot)$

3. Fie $X \neq \varnothing$. Atunci $(\mathcal{P}(X),\cup),(\mathcal{P}(X),\cap)$ sunt monoizi comutativi, cu element neutru $\varnothing$ şi respectiv *X*.
4. Fie $X \neq \varnothing$ şi $\mathcal{B}(X)=\{f : X \to X,\ f \text{ bijectivă}\} \subset \mathcal{F}(X)$. Cuplul $(\mathcal{B}(X),\circ)$ este monoid necomutativ cu element neutru aplicaţia identică a mulţimii $X, 1_X : X \to X, 1_X(a)=a, (\forall)a \in X$.

5. Mulţimea matricelor de ordin *n* cu elemente din $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), n \geq 2$, împreună cu operaţia de înmulţire este un monoid necomutativ. Elementul neutru este matricea unitate I_n.

6. Dacă $(M,\cdot)$ este monoid multiplicativ şi $x \in M$, fixat, atunci $H_x=\{e=x^0, x^1, x^2,...,x^n,...\}$ cu înmulţirea este submonoid al lui *M*, numit submonoidul ciclic generat de *x*.

Elementele $x \in M$ simetrizabile în raport cu legea $*$ le numim **elemente simetrizabile ale monoidului**. Notăm mulţimea aceasta cu *U*(*M*). Deci:

$$\boxed{U(M)=\{x \mid x \in M,\ x \text{ simetrizabil}\}}$$

Evident $U(M) \neq \varnothing$, deoarece elementul neutru $e \in M$ aparţine lui *U*(*M*).

Exemple

1. Pentru monoidul $(\mathbb{N},+)$, avem $U(\mathbb{N})=\{0\}$, iar pentru $(\mathbb{N},\cdot)$ avem $U(\mathbb{N})=\{1\}$.
2. Pentru $(\mathbb{Z},+)$ avem $U(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$, iar pentru $(\mathbb{Z},\cdot)$ avem $U(\mathbb{Z})=\{-1,1\}$.
3. Pentru $(\mathcal{F}(X),\circ)$ avem $U(\mathcal{F}(x))=\mathcal{B}(X)$.

Am văzut în paragrafele precedente (la element neutru şi la elemente simetrice), pentru o lege multiplicativă pe *M* ce înseamnă x^n şi $x^{-n}=\left(x^{-1}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Analog în cazul legii aditive am precizat ce înseamnă *nx* şi respectiv $(-nx)$.
Pentru monoid are loc

> **Teorema.** Fie $(M,\cdot)$ monoid şi $x \in M$. Atunci:
>
> **1)** $x^n \cdot x^m = x^{n+m}, (\forall)n,m \in \mathbb{N}$.
>
> **2)** $(x^n)^m = x^{nm}, (\forall)n,m \in \mathbb{N}$.
>
> Dacă $x \in U(M)$, atunci egalităţile 1), 2) au loc $(\forall)n,m \in \mathbb{Z}$.

Probleme propuse

1. **Fie** $M = \{(n,f) \mid f \in \mathbb{C}[X],\ \text{grad}(f) = n \in \mathbb{N}\}$. **Pe mulţimea** M **se defineşte legea de compoziţie:** $(n,f)*(m,g) = (n+m, f\cdot g)$, $(\forall)(n,f),(m,g)\in M$. **Arătaţi că** $(M,*)$ **este monoid comutativ.**

2. **Fie** $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, a+c = b+d \right\}$.

1) Arătaţi că $(M,\cdot)$ **este monoid, unde „** $\cdot$ **“ este înmulţirea uzuală a matricelor.**

2) Arătaţi că elementele $A_k = \begin{pmatrix} k & k-1 \\ 1-k & 2-k \end{pmatrix} \in M, k \in \mathbb{Z}$, **sunt simetrizabile.**

3. **Se defineşte pe** $\mathbb{R}$ **legea de compoziţie** $x*y = xy - ax + by,\ a,b\in\mathbb{R}$. **Să se determine** $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ **astfel încât,** $(\mathbb{R},*)$ **să fie monoid.**

1.4.2. Grupuri

Prin intermediul noţiunii de grup se pot aplica aceleaşi teoreme la mulţimi diferite înzestrate cu legi de compoziţie diferite.
Marele matematician francez Henri Poincaré (1854-1912) spunea în legătură cu acest subiect: „La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes“. Acest aforism subliniază un aspect esenţial al matematicii secolului nostru.

Definiţie. Fie $G \neq \varnothing$ şi $*$ o lege de compoziţie pe G. Cuplul $(G,*)$ se numeşte **grup** dacă au loc următoarele axiome:

G_1) Legea $*$ este **asociativă**, adică
$$(x*y)*z = x*(y*z),\ (\forall)x,y,z\in G.$$

G_2) Legea $*$ are **element neutru**, adică $(\exists)e\in G$ astfel încât $(\forall)x\in G$ să avem $x*e = e*x = x$.

G_3) Orice element din G este simetrizabil în raport cu $*$, adică pentru fiecare $x\in G$, există $x'\in G$ astfel încât
$$x*x' = x'*x = e.$$

Dacă, în plus, legea $*$ verifică şi axioma

G_4) Legea $*$ este **comutativă**, adică
$$x*y = y*x,\ (\forall)x,y\in G$$

atunci cuplul $(G,*)$ se numeşte **grup comutativ (abelian)**.

Ştim că elementul neutru dacă există este unic. De asemenea simetricul unui element este unic.
Ansamblul de condiţii G_1, G_2, G_3 poartă numele de **axiomele grupului**. Cât priveşte adjectivul abelian el derivă de la numele celebrului matematician norvegian Niels Abel (1802-1829).

Din definiție se deduce că un grup este un monoid în care orice element este simetrizabil, altfel spus $U(G) = G$. Reciproca nu este adevărată ($(\mathbb{N},+)$ când $U(\mathbb{N})=\{0\}$). Pentru uşurința prezentării părții teoretice considerăm că legea $*$ este înlocuită cu cea dată de înmulțire (când vorbim de **grup multiplicativ**) sau de adunare (când grupul îl **numim aditiv**).

Exemple cunoscute de grupuri

1. Grupuri numerice. Exemple de grupuri abeliene:

- **grupul aditiv al numerelor întregi $(\mathbb{Z},+)$;**
- **grupul aditiv al numerelor raționale $(\mathbb{Q},+)$;**
- **grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R},+)$);**
- **grupul aditiv al numerelor complexe $(\mathbb{C},+)$;**
- **grupul multiplicativ al numerelor raționale nenule $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$;**
- **grupul multiplicativ al numerelor reale nenule $(\mathbb{R}^*,\cdot)$;**
- **grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.**
- **grupuri multiplicative cu un element $(\{1\},\cdot)$, $(\{0\},\cdot)$;**
- **grupul multiplicativ cu două elemente $(\{-1,1\},\cdot)$;**
- **grupul multiplicativ cu trei elemente $(\{1,\varepsilon,\varepsilon^2\},\cdot)$ unde $\varepsilon=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.**

UN PIONIER AL MATEMATICII
Niels ABEL (1802 – 1829) Matematician norvegian

CONTRIBUȚII
• *algebră abstractă* • *analiză*

2. Grupul aditiv comutativ al matricelor de tip (m,n), $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),+)$.

3. Exemple de grupuri necomutative:

- **grupul aplicațiilor bijective în raport cu operația de compunere, $(\mathcal{B}(M),\circ)$.**

Grupul $(\mathcal{B}(M),\circ)$ el însuşi şi mai ales diversele sale subgrupuri numite grupuri de transformări constituie un punct de plecare pentru toate aplicațiile practice posibile ale teoriei grupurilor. Este suficient de a menționa „Programul de la Erlangen“, devenit celebru, de Felix Klein (1872), care a adoptat noțiunea de grup de transformări ca bază pentru clasificarea diferitelor tipuri de geometrii.

- **grupul matricelor pătratice de ordin n cu coeficienți reali şi cu determinantul nenul, notat $(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)$. Acest grup se numeşte grupul liniar complet de ordin n pe R.**
- **grupul cuaternionilor. Mulțimea $G=\{1,i,j,k,-1,-i,-j,-k\}$ cu operația de înmulțire necomutativă dată de $(-1)^2=1$, $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=-ji=k$, $jk=-kj=i$, $ki=-ik=j$, $-x=(-1)x=x(-1)$, $(\forall)x\in G$ şi având elementul neutru pe 1.**

Definiție. Un grup G se numeşte **grup finit** dacă mulțimea G este **finită** şi **grup infinit**, în caz contrar.

Se numeşte **ordinul grupului G**, notat $|G|$, cardinalul lui G (numărul de elemente din G).

Grupurile de la exemplul 1 de mai sus sunt infinite (cu excepția ultimelor trei). Dacă M este finită, atunci grupurile de la exemplul 2 de mai sus sunt finite.

Probleme rezolvate

1. Pe mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ se defineşte aplicația $x * y = x + y - 2$. Să se arate că $(\mathbb{Z}, *)$ este un grup comutativ.

R. Dacă $x, y \in \mathbb{Z}$, evident că $x * y = x + y - 2 \in \mathbb{Z}$, ceea ce arată că $*$ este o lege de compoziție pe $\mathbb{Z}$. Verificăm axiomele grupului comutativ.

G_1) Asociativitatea legii $*$. Trebuie probat că $(x * y) * z = x * (y * z), (\forall) x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Avem:

$(x * y) * z = (x + y - 2) * z = (x + y - 2) + z - 2 = x + y + z - 4$, (1)

şi

$x * (y * z) = x * (y + z - 2) = x + (y + z - 2) - 2 = x + y + z - 4$, (2).

Din (1) şi (2) rezultă că legea $*$ este asociativă.

G_2) Elementul neutru. Să arătăm că există $e \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x * e = e * x = x, (\forall) x \in \mathbb{Z}$.

Din $x * e = x, (\forall) x \in \mathbb{Z}$ rezultă $x + e - 2 = x$ sau $e = 2 \in \mathbb{Z}$.

G_3) Elemente simetrizabile. Fie $x \in \mathbb{Z}$. Să arătăm că există $x' \in \mathbb{Z}$ pentru care $x * x' = x' * x = e$. Din $x * x' = e \Rightarrow x + x' - 2 = 2$ sau $x' = 4 - x \in \mathbb{Z}$. Deci $x' = 4 - x$ este simetricul lui x în raport cu $*$.

G_4) Comutativitatea legii $*$. Avem de demonstrat că $x * y = y * x, (\forall) x, y \in \mathbb{Z}$. Relația de demonstrat se rescrie $x + y - 2 = y + x - 2, (\forall) x, y \in \mathbb{Z}$, ceea ce este adevărat deoarece adunarea pe $\mathbb{Z}$ este comutativă $(x + y = y + x)$. Aşadar $(\mathbb{Z}, *)$ este grup abelian.

Observație. Atunci când ni se cere să arătăm că un grup este comutativ, după asociativitate se demonstrează comutativitatea legii deoarece pentru celelalte axiome scriem relațiile mai simplu

- pentru element neutru $x * e = x, (\forall) x \in \mathbb{Z}$ (sau $e * x = x, (\forall) x \in \mathbb{Z}$).
- pentru element simetric $x * x' = e$ (sau $x' * x = e$).

2. Se consideră funcțiile $f_i : \mathbb{R} - \{0,1\} \to \mathbb{R} - \{0,1\}, i = \overline{1,6}$ definite prin $f_1(x) = x, f_2(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_3(x) = 1 - x$, $f_4(x) = \dfrac{x-1}{x}$, $f_5(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $f_6(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Să se arate că pe mulțimea $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ compunerea funcțiilor determină o structură de grup necomutativ.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_6	f_5	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5
f_4	f_4	f_3	f_5	f_6	f_2	f_1
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_5	f_2	f_1	f_3	f_4

R. Tabla legii este dată alăturat.

Se constată că legea $\circ$ este lege de compoziție pe G.

Întotdeauna compunerea funcțiilor este asociativă şi deci această proprietate se păstrează şi pe G. Elementul neutru este f_1. Orice element din G este inversabil,

$f_1^{-1}=f_1,\ f_2^{-1}=f_2,\ f_3^{-1}=f_3,\ f_4^{-1}=f_6,\ f_5^{-1}=f_5,\ f_6^{-1}=f_4$. Compunerea nu este comutativă pe G deoarece $f_3\circ f_2=f_4\neq f_2\circ f_3=f_6$.

3. Se consideră mulțimea de matrice: $G=\left\{\begin{pmatrix}1-x & x\\ x & 1-x\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$. Arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

R. Arătăm mai întâi că înmulțirea pe G este lege de compoziție.

Notăm $A_x=\begin{pmatrix}1-x & x\\ x & 1-x\end{pmatrix}, x\neq\frac{1}{2}$. Dacă $A_x,A_y\in G,\ x,y\neq\frac{1}{2}$, atunci

$A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix}1-(x+y-2xy) & x+y-2xy\\ x+y-2xy & 1-(x+y-2xy)\end{pmatrix}=A_{x+y-2xy}\in G$ dacă $x+y-2xy\neq\frac{1}{2}$ adevărat, deoarece:

$x+y-2xy=\frac{1}{2}-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)$.

Cum $x\neq\frac{1}{2},\ y\neq\frac{1}{2}$ rezultă $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)\neq 0$ şi deci $x+y-2xy\neq\frac{1}{2}$ .Verificăm axiomele grupului.

G₁) Asociativitatea înmulțirii. Înmulțirea matricelor în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este asociativă şi deci rămâne la fel pe o submulțime G a sa.

G₂) Comutativitatea înmulțirii. Fie $A_x,A_y\in G$. Atunci $A_x\cdot A_y=A_{x+y-2xy}=A_{y+x-2yx}=A_y\cdot A_x$, ceea ce arată că înmulțirea matricelor este comutativă pe G.

G₃) Element neutru. Există $A_e\in G$ astfel încât $A_x\cdot A_e=A_x, (\forall)A_x\in G$ sau $A_{x+e-2xe}=A_x$, $(\forall)A_x\in G$. Se vede că două matrice $A_x,\ A_y$ sunt egale $A_x=A_y\Leftrightarrow x=y$ (deci dacă indicii matricelor coincid). Din relația de mai sus deducem $x+e-2xe=x$, iar de aici $e=0$. Aşadar elementul neutru este $A_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$.

G₄) Elemente simetrizabile. Fie $A_x\in G$. Să arătăm că există simetricul $A_{x'}\in G$ pentru care $A_x\cdot A_{x'}=A_0\Leftrightarrow A_{x+x'-2xx'}=A_0$. De aici: $x+x'-2xx'=0$ şi deci $x'=\frac{x}{2x-1}\neq\frac{1}{2}, x\neq\frac{1}{2}$. Deci orice element $A_x\in G$ este inversabil (pentru că $A_0=I_2$) în raport cu operația de înmulțire obişnuită a matricelor. În final, $(G,\cdot)$ este grup abelian.

Grupuri remarcabile

1) Grupuri de matrice

Anul trecut am văzut că mulțimea matricelor de tip (m,n) cu elemente din $\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, **cu operația de adunare formează grup abelian** $\left(A,B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\Rightarrow A+B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R});\right.$ elementul neutru este $O_{m,n}$ – matricea nulă; $-A=\left(-a_{ij}\right)$ este opusul lui $\left.A=\left(a_{i,j}\right)\right)$.

Pentru $m=n$ are sens produsul oricăror matrice $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Fie mulțimea de matrice pătratice de ordin n cu elemente reale şi cu determinant nenul.

Vom nota această mulțime prin $GL(n,\mathbb{R})=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,|\det(A)\neq 0\}$ şi considerăm **operația de înmulțire** pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Are loc următoarea:

> **Teoremă**. Cuplul $(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)$ este un grup infinit, numit **grupul liniar complet de ordin n pe $\mathbb{R}$**.

Demonstrație. Să observăm mai întâi că înmulțirea determină pe $GL(n,\mathbb{R})$ **o lege de compoziție**. Într-adevăr, din $A,B\in GL(n,\mathbb{R})$ să arătăm că $AB\in GL(n,\mathbb{R})$, adică să arătăm că $\det(AB)\neq 0$, ceea ce este adevărat deoarece $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$.
Verificăm axiomele grupului.
G_1) **Asociativitatea înmulțirii** are loc pe $GL(n,\mathbb{R})$, deoarece are loc întotdeauna pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
G_2) **Elementul neutru** este matricea unitate $I_n\in GL(n,\mathbb{R})$ (are $\det(I_n)=1\neq 0$).
G_3) **Orice matrice** $A\in GL(n,\mathbb{R})$ **are o inversă** (simetric) notată $A^{-1}\in GL(n,\mathbb{R})$ pentru care $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$.
Aici A^{-1} este chiar inversa matricei *A*. Ştim că *A* are inversă dacă $\det(A)\neq 0$ (*A* este o matrice nesingulară). Evident $A^{-1}\in GL(n,\mathbb{R})$ deoarece din $A\cdot A^{-1}=I_n$ şi $\det\left(A\cdot A^{-1}\right)=\det(A)\cdot\det\left(A^{-1}\right)=1$ rezultă $\det\left(A^{-1}\right)\neq 0$.
În final $(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)$ este grup infinit.■

2) Grupuri de permutări de ordin *n*

Fie *M* mulțime finită cu *n* elemente. Natura acestor elemente fiind pentru noi fără importanță, este comod să luăm $M=\{1, 2, \ldots, n\}$.
Am văzut că $\mathcal{F}(M)=\{f:M\to M\}$ împreună cu operația de compunere a funcțiilor este un monoid. Considerăm o submulțime a lui $\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{B}(M)$ formată din **aplicații bijective** (de fapt este destul să cerem ca *f* să fie injectivă (surjectivă) căci atunci *f* este bijectivă !).
Un element din $\mathcal{B}(M)$ îl numim **permutare de gradul** *n*.
Elementele lui $\mathcal{B}(M)$ le desemnăm prin litere mici ale alfabetului grec $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$.
În loc de $\mathcal{B}(M)$ vom folosi notația S_n.
Sub o formă dezvoltată şi sugestivă permutarea $\sigma:M\to M$ o reprezentăm prin simbolul $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n)\end{pmatrix}\begin{matrix}\to \text{ domeniul de definiție}\\ \to \text{ mulțimea de valori.}\end{matrix}$

unde se indică **in extenso** toate imaginile:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma: & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{array}$$

$\sigma(k)$, $k=\overline{1,n}$ sunt simbolurile 1,2, ... , *n,* eventual în altă ordine.

Pe mulțimea S_n a permutărilor de grad *n* am definit, anul precedent, operația de **compunere** (sau **produs**) a permutărilor.

Fie $\sigma,\tau\in S_n$, atunci $\sigma\circ\tau\in S_n$ se defineşte (compunerea obişnuită a funcțiilor) prin: $\sigma\circ\tau(k)=\sigma(\tau(k))$, $k=\overline{1,n}$

Vom scrie în loc de $\sigma\circ\tau$ simplu $\sigma\tau$. Are loc următoarea:

Teoremă. Cuplul $(S_n,\circ)$ este un grup finit de ordin *n*!, numit **grupul simetric de grad** *n.*

Demonstrație. Verificăm axiomele grupului.

Este clar că dacă $\sigma,\tau\in S_n$, atunci $\sigma\tau\in S_n$, adică **legea de compunere a permutărilor este o lege de compoziție pe** S_n.

Trebuie observat astfel **că se pot compune permutări de acelaşi grad**.

G_1) **Asociativitatea compunerii** pe S_n rezultă din faptul că această lege este asociativă pe mulțimea funcțiilor $\mathcal{F}(M)$.

G_2) **Elementul neutru** este aplicația identică a mulțimii *M*, pe care o notam cu *e* şi are forma: $e=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}$.

G_3) **Orice element** $\sigma\in S_n$, are un **invers** (simetric) notat $\sigma^{-1}\in S_n$ (σ^{-1} este aplicația inversă a lui σ) pentru care $\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=e$.

De exemplu, dacă $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$, atunci $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ (σ^{-1} este funcția care „acționează“ invers decât σ; prin σ, 1 este dus în 3; invers, prin σ^{-1}elementul 3 este dus în 1 etc.). Dacă $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, atunci $\sigma\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ şi $\tau\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$. Deci $\sigma\tau\neq\tau\sigma$.

Aşadar $(S_n,\circ)$, $n\geq 3$, este grup necomutativ.

Să determinăm ordinul grupului. Fie $\sigma \in S_n$ un element oarecare din grup. Prin σ elementul 1 este dus în $\sigma(1)$ care poate fi oricare din elementele 1,2, ... , *n*. Deci poziția $\sigma(1)$ se poate completa în *n* moduri. Elementul $\sigma(2)$ se poate completa în (*n* – 1) moduri cu cele *n* – 1 elemente rămase după completarea lui $\sigma(1)$. În fine ultima poziție se poate completa într-un singur mod cu ultimul element rămas după completarea pozițiilor $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n-1)$. Aşadar numărul de astfel de permutări σ este egal cu $n \cdot (n-1) ... 2 \cdot 1 = n!$ (regula produsului de la combinatorică) şi acesta este ordinul grupului S_n .■

Grupurile de permutări joacă un rol fundamental în studiul grupurilor (vezi *Excursie matematică* de la sfârşitul acestui capitol).

3) Grupul claselor de resturi modulo *n*, $\mathbb{Z}_n$

Fie $\mathbb{Z}$ mulțimea numerelor întregi şi $n \in \mathbb{N}^*$ un număr fixat. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim următoarea relație: pentru $x, y \in \mathbb{Z}$ spunem că *x* **este congruent cu** *y* **modulo** *n* dacă şi numai dacă *x* – *y* se divide prin *n*.

Această relație se notează prin: $x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow x - y \vdots n$. (citim: $x - y$ se divide prin *n*).

Faptul că $x - y \vdots n$ este echivalent cu *x, y* dau acelaşi rest la împărțirea prin *n* (demonstrați !).

Relația de congruență pe $\mathbb{Z}$ are următoarele proprietăți:

1) $\equiv$ este **reflexivă**, adică $x \equiv x \pmod{n}$, $(\forall) x \in \mathbb{Z}$, deoarece $x - x = 0 \vdots n$.

2) $\equiv$ este **simetrică**, adică dacă $x \equiv y \pmod{n} \Rightarrow y \equiv x \pmod{n}$, ceea ce este imediat deoarece dacă $x - y \vdots n$, atunci şi $y - x = -(x - y) \vdots n$.

3) $\equiv$ este **tranzitivă**, adică dacă $x \equiv y \pmod{n}$ şi $y \equiv z \pmod{n}$, atunci $x \equiv z \pmod{n}$, ceea ce se verifică uşor deoarece din $x - y \vdots n$ şi $y - z \vdots n$ rezultă $x - z = (x - y) + (y - z) \vdots n$.

Relația $\equiv$ (de congruență modulo *n)* cu proprietățile 1), 2), 3) este o **relație de echivalență.**

Două numere întregi *x, y* pentru care $x \equiv y \pmod{n}$ spunem că sunt **echivalente** în raport cu relația $\equiv$.

Clase de echivalență şi mulțime cât

Pentru un număr întreg $x \in \mathbb{Z}$ definim **clasa sa de echivalență** în raport cu $\equiv$ mulțimea notată *C*(*x*) (sau $\hat{x}$) a tuturor numerelor întregi echivalente cu *x* față de relația $\equiv$. Aşadar $C(x) = \hat{x} = \{ y \in \mathbb{Z} \mid y \equiv x \pmod{n} \}$.

Proprietăți ale claselor de echivalență

1) Dacă $x, y \in C(a)$, atunci $x \equiv y \pmod{n}$ (**două elemente aparținând aceleiaşi clase de echivalență sunt echivalente între ele**). Într-adevăr dacă $x \in C(a) \Rightarrow x \equiv a \pmod{n}$ şi dacă $y \in C(a) \Rightarrow y \equiv a \pmod{n}$.

Din $x \equiv a \pmod{n}$ şi $a \equiv y \pmod{n} \Rightarrow x \equiv y \pmod{n}$ (am aplicat tranzitivitatea relației $\equiv$).

2) Dacă $x \equiv y \pmod{n} \Rightarrow \hat{x} = \hat{y}$ (sau $C(x) = C(y)$, adică **clasele de echivalență a două elemente echivalente coincid** – pentru demonstrație utilizați dubla incluziune $\hat{x} \subset \hat{y},\ \hat{y} \subset \hat{x}$).

3) $\hat{x} \cap \hat{y} \neq \varnothing \Rightarrow \hat{x} = \hat{y}$ (**Două clase de echivalență, care au cel puțin un element în comun sunt egale**).

Într-adevăr dacă $a \in \hat{x} \cap \hat{y}$, atunci $a \in \hat{x}$ şi $a \in \hat{y}$. De aici $a \equiv x \pmod{n}$ şi $a \equiv y \pmod{n}$, adică $x \equiv y \pmod{n}$. Conform cu 2) $\Rightarrow \hat{x} = \hat{y}$.

Această relație de echivalență pe $\mathbb{Z}$, determină o partiție a sa în sensul care urmează: **$\mathbb{Z}$ se scrie ca o reuniune de submulțimi nevide ale sale, disjuncte de două câte două.**

Mai precis, mulțimea claselor de echivalență determinate de relația de congruență modulo n pe $\mathbb{Z}$ se numeşte **mulțime cât** a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu $\equiv$, şi se notează cu $\mathbb{Z}/\equiv$ sau încă $\mathbb{Z}_n$.

Dacă $x \in \mathbb{Z}$, atunci din teorema împărțirii pe $\mathbb{Z}$, $(\exists) k, r \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r < n$ astfel încât $x = nk + r$, relație pe care o mai scriem sub forma $x - r = nk$. Deci $x - r \vdots n$ adică $x \equiv r \pmod{n}$ şi deci $\hat{x} = \hat{r}$, unde $r \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

Să reținem deci: clasa oricărui $x \in \mathbb{Z}$ este de fapt una din clasele $\hat{r},\ r = 0, 1,.., n-1$.

Prin urmare relația de congruență modulo n pe $\mathbb{Z}$ determină mulțimea cât $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, ..., \widehat{n-1}\}$ numită **mulțimea claselor de resturi modulo** n (denumire justificată de faptul că numerele 0, 1, …, n – 1 reprezintă resturile la împărțire prin n a numerelor întregi). Scrise explicit acestea sunt:

$$\hat{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 \pmod{n}\} = \{nh \mid h \in \mathbb{Z}\} \overset{\text{notație}}{=} n\mathbb{Z}$$

$$\hat{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \pmod{n}\} = \{nh + 1 \mid h \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} + 1,$$

…………………………………………………

$$\widehat{n-1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv n-1 \pmod{n}\} = \{nh + n - 1 \mid h \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} + n - 1.$$

Numerele 0, 1, ..., n – 1 prin care am definit clasele $\hat{0}, \hat{1}, ..., \widehat{n-1}$ se vor numi **reprezentanții canonici** ai acestor clase.

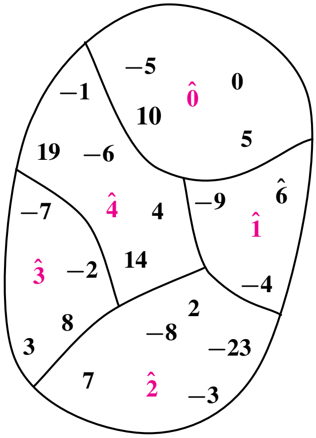
Pentru $\mathbb{Z}$ avem partiția dată de $\mathbb{Z}_n$.

$\mathbb{Z} = \hat{0} \cup \hat{1} \cup ... \cup \widehat{n-1}$ şi evident (de mai sus) $\hat{i} \cap \hat{j} = \varnothing$ dacă $i \neq j$.

Pentru $n = 5$, $\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$, dacă dorim să vedem cărei clase îi aparține un număr întreg $x \in \mathbb{Z}$ se efectuează împărțirea lui x prin 5 şi se ia restul acestei împărțiri r. Atunci $x \in \hat{r}$. În Fig. 2 pentru fiecare clasă sunt date câteva elemente.

De exemplu $x = 19$ pentru care avem: $19 = 5 \cdot 3 + 4$ şi deci $r = 4$. Prin urmare $19 \in \hat{4}$. Analog dacă $x = -23$, atunci $-23 = 5(-5) + 2$ şi deci $-23 \in \hat{2}$.

Observație. Să fim atenți la scrierea claselor modulo n. De exemplu, $\hat{0} \in \mathbb{Z}_3$, $\hat{0} \in \mathbb{Z}_5$ **nu reprezintă aceeaşi mulțime** (descrieți-le). Pentru a ne feri de confuzii se poate scrie $\hat{0}_3 \in \mathbb{Z}_3$ şi $\hat{0}_5 \in \mathbb{Z}_5$, sau $\mathbb{Z}_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$, iar $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$. O scriere superficială poate conduce **greşit** la $\mathbb{Z}_3 \subset \mathbb{Z}_5$!



$n = 5, \mathbb{Z} = \hat{0} \cup \hat{1} \cup \hat{2} \cup \hat{3} \cup \hat{4}$

Fig. 2

Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n$ a claselor de resturi modulo n definim două operații:

> $+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$
>
> $\left(\hat{a}, \hat{b}\right) \to \hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b}$, numită **adunarea claselor** (suma claselor este clasa sumei). Clasa $\widehat{a+b}$ se obține adunând a cu b şi luând apoi clasa restului de la împărțirea lui $a + b$ prin n.

şi

> $\cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$
>
> $\left(\hat{a}, \hat{b}\right) \to \hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \cdot b}$, numită **produsul claselor** (produsul claselor este prin definiție clasa produsului).
>
> Clasa $\widehat{a \cdot b}$ se obține înmulțind a cu b şi luând apoi clasa restului de la împărțirea lui $a \cdot b$ prin n.

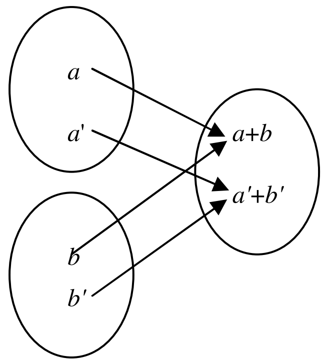
Trebuie să arătăm că aplicațiile „+“ şi „·“ sunt corect definite, în sensul că fiecărui cuplu $\left(\hat{a},\hat{b}\right)\in\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ îi corespunde un unic element $\widehat{a+b}\in\mathbb{Z}_n$, şi respectiv $\widehat{a\cdot b}\in\mathbb{Z}_n$.

Fie: $\hat{a}=\hat{a}'$ şi $\hat{b}=\hat{b}'$(Fig. 3). Atunci $\hat{a}+\hat{b}=\hat{a}'+\hat{b}'$, deoarece
din $\hat{a}=\hat{a}'\Rightarrow a\equiv a'(\bmod n)\Rightarrow\ a-a'\,\vdots\, n$, (1)

şi din $\hat{b}=\hat{b}'\Rightarrow b\equiv b'(\bmod n)\Rightarrow b-b'\,\vdots\, n$, (2).

Acum, adunând (1) cu (2) rezultă $a+b-(a'+b')\,\vdots\, n$, adică $\widehat{a+b}=\widehat{a'+b'}$.

Analog se arată că înmulțirea claselor este bine definită.



Contururile închise=clase de resturi

Fig. 3

Pentru n = 6 tablele operațiilor de adunare şi înmulțire sunt

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Are loc următoarea:

Teoremă. a) $\left(\mathbb{Z}_n,+\right)$ este un grup abelian, numit **grupul aditiv al claselor de resturi modulo** ***n***.
b) $\left(\mathbb{Z}_n,\cdot\right)$ este un monoid comutativ, în care grupul elementelor inversabile este $U(\mathbb{Z}_n)=\{\hat{k}\in\mathbb{Z}_n\,|(k,n)=1\}$.

Demonstrație. a) Se verifică axiomele grupului abelian.

G_1) **Asociativitatea adunării**. Avem: $\hat{x}+(\hat{y}+\hat{z})=\hat{x}+\widehat{y+z}=\widehat{x+(y+z)}=\widehat{(x+y)+z}=$
$=\widehat{x+y}+\hat{z}=(\hat{x}+\hat{y})+\hat{z},\ (\forall)\hat{x},\hat{y},z\in\mathbb{Z}_n$.
(am ținut seama în a treia egalitate de asociativitatea adunării pe $\mathbb{Z}$).

G_2) **Elementul neutru**. Clasa $\hat{0}\in\mathbb{Z}_n$ este elementul neutru în raport cu adunarea deoarece $\hat{x}+\hat{0}=\hat{0}+\hat{x}=\hat{x},\ (\forall)\hat{x}\in\mathbb{Z}_n$.

G$_3$) **Elemente opuse**. Orice clasă $\hat{x}\in\mathbb{Z}_n$ are ca element simetric (opus) clasa notată $-\hat{x}=\widehat{-x}$ deoarece $x+\left(\widehat{-x}\right)=\widehat{-x}+\hat{x}=\widehat{x+(-x)}=\hat{0}$.

Mai precis avem: $-\hat{0}=\hat{0}$

$$-\hat{1}=\widehat{n-1} \quad (\widehat{n-1}+\hat{1}=\widehat{n-1+1}=\hat{0})$$
$$-\hat{2}=\widehat{n-2}$$
$$\vdots$$
$$-\hat{k}=\widehat{n-k}$$
$$\vdots$$
$$-(\widehat{n-1})=\hat{1}.$$

G$_4$) **Comutativitatea adunării**. Adunarea claselor este comutativă deoarece $(\forall)\hat{x},\hat{y}\in\mathbb{Z}_n$ avem: $\hat{x}+\hat{y}=\widehat{x+y}=\widehat{y+x}=\hat{y}+\hat{x}$ (am folosit în a doua egalitate comutativitatea adunării pe Z).

Cu acestea am arătat că $(\mathbb{Z}_n,+)$ este grup abelian.

b) Asemănător se verifică asociativitatea, comutativitatea înmulțirii claselor. Clasa $\hat{1}\in\mathbb{Z}_n$ este elementul neutru.

Se arată uşor că $\left(U(\mathbb{Z}_n),\cdot\right)$ este un grup abelian.

Să găsim acum elementele inversabile din acest monoid. Mai precis arătăm că avem: $\hat{k}\in U(\mathbb{Z}_n)\Leftrightarrow(k,n)=1$.

Pentru n = 1 avem $\mathbb{Z}_1=\{\hat{0}\}=U(\mathbb{Z}_1)$, când (0,1) = 1 şi echivalența are loc.

Fie acum $n\geq 2$.

Demonstrăm implicația „$\Rightarrow$“. Presupunem $\hat{k}\in U(\mathbb{Z}_n)$ şi să arătăm că avem (k, n) = 1.

Din $\hat{k}\in U(\mathbb{Z}_n)\Rightarrow(\exists)\,\hat{p}\in\mathbb{Z}_n$ astfel încât $\hat{k}\cdot\hat{p}=\hat{1}\Leftrightarrow\widehat{kp}=\hat{1}\Leftrightarrow kp\equiv 1(\operatorname{mod} n)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow kp-1\,\vdots\,n\Leftrightarrow kp-1=nq,\ q\in\mathbb{Z}$. Fie acum $d=(k,n)\in N^*$. Deci $d\,|\,kp-nq$, adică $d\,|\,1\Rightarrow d=1$. Aşadar (k, n) = 1.

Demonstrăm acum că dacă (k, n) = 1, atunci $\hat{k}\in U(\mathbb{Z}_n)$.

Se ştie că dacă (k, n) = 1, atunci există $p,q\in\mathbb{Z}$ astfel încât $kp+nq=1$ sau $kp-1=nq\Rightarrow kp-1\,\vdots\,n$, adică $kp\equiv 1(\operatorname{mod} n)$ sau în final $\widehat{kp}=\hat{k}\cdot\hat{p}=\hat{1}$, arată că avem $\hat{k}\in U(\mathbb{Z}_n)$.■

Observații. 1) Grupul $U(\mathbb{Z}_n)$ are ordinul φ(n) = numărul numerelor naturale cel mult egale cu n, relativ prime cu n.

Funcția $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $n \to \varphi(n)$ se numeşte **indicatorul lui Euler**.

Dacă $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$, atunci

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)$$

Dacă $n = p, p$ prim, atunci $\varphi(p) = p - 1$. Se arată că $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$.

Pentru $n = 6$, avem $\varphi(6) = 2$ când $U(\mathbb{Z}_6) = \{\hat{1}, \hat{5}\}$.

2) Din tablele celor două legi, în cazul $n = 6$, se constată că acestea sunt simetrice în raport cu diagonala principală. Deci legile sunt comutative.

Din tabla înmulțirii se vede că doar pe liniile claselor $\hat{1}$ şi $\hat{5}$ apare elementul $\hat{1}$, ceea ce înseamnă că doar aceste clase au inverse.

Citind pe coloanele care-l conțin pe $\hat{1}$ găsim inversele: $\hat{1}^{-1} = \hat{1}$, $\hat{5}^{-1} = \hat{5}$.

3) Pe $\mathbb{Z}_n$ nu există relație de ordine similară relației $\leq$ de pe $\mathbb{Z}$.

Am identificat elementele lui $\mathbb{Z}$ cu punctele întregi de pe dreapta reală care se extind infinit la stânga şi la dreapta (Fig. 4).

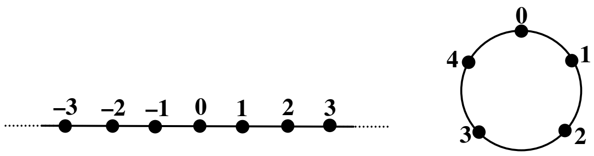


Fig. 4

Pe $\mathbb{Z}_n$ avem în schimb un fel de **ordine ciclică**, reprezentată printr-o mulțime de puncte de pe cerc cu o anumită regularitate. Din acest motiv aritmetică pe $\mathbb{Z}_n$ se mai numeşte **aritmetică modulară** sau **aritmetica cercului.**

Probleme rezolvate

Să se rezolve în $\mathbb{Z}_7$ sistemele

a) $\begin{cases} \hat{4}x + \hat{6}y = \hat{5} \\ \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{4} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \hat{3}x + y = \hat{1} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{6} \end{cases}$

şi în $\mathbb{Z}_5$ sistemele:

c) $\begin{cases} x + y + z = \hat{1} \\ \hat{2}x + \hat{3}y + z = \hat{1} \\ \hat{4}x + \hat{4}y + \hat{3}z = \hat{1} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y + z = \hat{0} \\ x^2 + y^2 + z^2 = \hat{1} \\ x^3 + y^3 + z^3 = \hat{1}. \end{cases}$

R. Rezolvarea sistemelor în clase de resturi $\mathbb{Z}_n$ de regulă, utilizează aceleaşi metode de rezolvare cunoscute de pe $\mathbb{C}$ (reducerii, substituției, Cramer etc.) dar ținând seamă de operațiile permise pe $\mathbb{Z}_n$ (de pildă regula lui Cramer se scrie $x = \Delta_x \cdot \Delta^{-1}$, $y = \Delta_y \cdot \Delta^{-1}$,... unde $\Delta =$ determinantul sistemului trebuie să fie element invers abil în $\mathbb{Z}_n$ în raport cu înmulțirea).

a) Dacă adunăm ecuațiile, membru cu membru, rezultă $y = \hat{2}$ (s-a redus *x*). Din prima ecuație $x = \hat{0}$. Deci soluția este $(\hat{0}, \hat{2})$.

b) Se poate utiliza metoda substituției scriind sistemul succesiv

$$\begin{cases} y = \hat{1} + \hat{4}x \\ \hat{2}x + \hat{3}(1 + \hat{4}x) = \hat{6} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} y = \hat{1} + \hat{4}x \\ \hat{0} \cdot x = \hat{3} \end{cases}$$

Ori ultima ecuație este imposibilă. Prin urmare sistemul dat este imposibil.

Altfel. Se înmulțește prima ecuație cu $\hat{3}$ și din membrii drepți ai celor două ecuații rezultă $\hat{3} = \hat{6}$, fals.

c) Determinantul sistemului este $\Delta = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{4} & \hat{3} \end{vmatrix} = \hat{4}$ (se pot aplica proprietățile determinanților, dar ținând seama de operațiile pe $\mathbb{Z}_5$). Să observăm că $\Delta = \hat{4}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_5$ ($(4,5) = 1$) și $\hat{4}^{-1} = \hat{4}$. Deci se poate aplica regula lui Cramer în rezolvare. Găsim $\Delta_x = \hat{4}$, $\Delta_y = \hat{3}$, $\Delta_z = \hat{2}$, când $x = \Delta_x \cdot \Delta^{-1} = \hat{4} \cdot \hat{4} = \hat{1}$, $y = \Delta_y \cdot \Delta^{-1} = \hat{3} \cdot \hat{4} = \hat{2}$, $z = \Delta_z \cdot \Delta^{-1} = \hat{2} \cdot \hat{4} = \hat{3}$. Așadar $(\hat{1}, \hat{2}, \hat{3})$ este soluția sistemului.

d) Observăm că sistemul este simetric în *x, y, z*.

Vom rezolva sistemul utilizând ecuația de gradul trei.

Notăm $S_1 = x + y + z = \hat{0}$, $S_2 = xy + xz + yz$, $S_3 = xyz$. Se ridică prima ecuație la pătrat și rezultă $x^2 + y^2 + z^2 + \hat{2}(xy + yz + xz) = \hat{0}$. Aici ținând seama de ecuația a doua găsim $\hat{2}(xy + yz + xz) = \hat{4}$ și deci $xy + yz + zx = \hat{2}$. Așadar $S_2 = \hat{2}$. Scriem ecuația de gradul al treilea care are ca rădăcini pe *x, y, z,* cunoscând sumele simetrice fundamentale S_1, S_2, S_3. Aceasta este: $t^3 - S_1 t^2 + S_2 t - S_3 = 0$ sau $t^3 + \hat{2}t - S_3 = \hat{0}$.

Dar *x, y, z* verifică această ecuație. Atunci avem:

$x^3 + \hat{2}x - S_3 = \hat{0}$, $y^3 + \hat{2}y - S_3 = \hat{0}$, $z^3 + \hat{2}z - S_3 = \hat{0}$, care adunate dau $x^3 + y^3 + z^3 + \hat{2}(x + y + z) - \hat{3}S_3 = \hat{0}$, adică, via a treia ecuație a sistemului, $\hat{3}S_3 = \hat{1}$ și deci $S_3 = \hat{2}$. Ecuația $t^3 + \hat{2}t - \hat{2} = \hat{0}$ are soluțiile $t_1 = \hat{2}$, $t_2 = \hat{4}$, $t_3 = \hat{4}$.

Soluțiile sistemului sunt: $(\hat{2}, \hat{4}, \hat{4})$, $(\hat{4}, \hat{2}, \hat{4})$, $(\hat{4}, \hat{4}, \hat{2})$.

Probleme propuse

1. 1) Arătați că fiecare din următoarele mulțimi cu legea de compoziție dată de tablele de mai jos este grup:

1) $\{e, a\}$ **2)** $\{e, a, b\}$ **3)** $\{1, \omega, \omega^2\}$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

$\circ$	e	a
e	e	a
a	a	e

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$\circ$	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

2) Dacă $(M,\cdot)$ este un grup, $M = \{a, b, c, d\}$, atunci există un singur mod de a completa tabelul:

a)

$\cdot$	a	b	c	d
a		d		
b				
c			c	
d				c

;

b)

$\cdot$	a	b	c	d
a				
b	b	c		
c				
d				

;

c)

$\cdot$	a	b	c	d
a				
b		a		
c	a			
d				

.

2. Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte aplicaţia $x * y = x + y - 1$. Arătaţi că $(\mathbb{Z},*)$ este grup abelian.

3. Fie $G = (-1,\infty)$ şi aplicaţia pe G, $x \circ y = x + y + xy$. Să se arate că $(G,\circ)$ este grup abelian.

4. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie $x * y = x + y - xy$. Să se arate că $R_1 = \mathbb{R} - \{1\}$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$ şi $(R_1,*)$ este grup abelian.

5. Pe mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ se defineşte legea de compoziţie $x \top y = x + y - \frac{xy}{2}$. Să se arate că $Q_2 = \mathbb{Q} - \{2\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Q}$ în raport cu $\top$ şi $(Q_2,\top)$ este grup comutativ.

6. Să se demonstreze că pe mulţimea $(0,\infty) - \{1\}$ aplicaţia $x \top y = x^{3\ln y}$ determină o structură de grup abelian.

7. Să se arate că pe mulţimea $G = (1,\infty) - \{2\}$ aplicaţia $x * y = (x-1)^{\frac{1}{2}\ln(y-1)} + 1$ determină o structură algebrică de grup comutativ.

8. Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\mathbb{Z}$ împreună cu aplicaţia $x \circ y = x + y - axy$ să fie un grup abelian.

9. a) Să se determine cea mai mică valoare a lui $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care intervalul $(1,\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie de pe $\mathbb{R}$, $x * y = xy - x - y + \lambda$.

b) Pentru λ de la punctul a), calculaţi $x^n = \underbrace{x * x * ... * x}_{n}$ şi arătaţi că $(G,*)$ este grup abelian, unde $G = (1,\infty)$.

10. Pe intervalul (m,∞) se consideră aplicaţia $x * y = xy - m(x + y) + m^2 + m$. Arătaţi că $((m,\infty),*)$ este grup comutativ.

11. Fie mulţimea $G=(-1,\infty)$ pe care se consideră aplicaţia $x \top y = a(x^2 + y^2) + 2xy + 2(m^2 - 3) + 2y + m - 1$, $a,m \in \mathbb{R}$ Determinaţi a, m pentru care $(G,\top)$ este grup abelian.

12. Se consideră $G = (-1,1)$ pe care definim aplicaţia $x * y = \frac{ax + by}{1 + xy}$. Arătaţi că $(G,*)$ este grup $\Leftrightarrow a = b = 1$.

13. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte operaţia $x * y = ax + by, a,b \in \mathbb{R}$. Determinaţi a, b pentru care $(\mathbb{R},*)$ este grup.

14*. Fie $G=(1,\infty)$ şi pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție $x\circ y=xy+ax+by+c, a,b,c\in\mathbb{R}$. Determinați $a,b,c\in\mathbb{R}$ dacă $(G,\circ)$ este grup.

15. Arătați că următoarea mulțime de funcții: $G=\{g_1,g_2,g_3,g_4\}$, unde $g_i:\mathbb{R}-\{0,\pm1\}\to\mathbb{R}-\{0,\pm1\}$, $g_1(x)=x,\ g_2(x)=\dfrac{x-1}{x+1},\ g_3(x)=-\dfrac{1}{x},\ g_4(x)=\dfrac{x+1}{1-x}$, împreună cu operația de compunere formează grup comutativ.

16. Arătați că următoarele mulțimi de matrice pătratice de ordin doi sunt grupuri împreună cu operația de înmulțire:

1) $\left\{\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}, a^2+b^2>0\right\}$;

2) $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Q}, a^2+b^2>0\right\}$;

3) $\left\{\begin{pmatrix} a & -3b\\ b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Q}, a^2+b^2>0\right\}$;

4) $\left\{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\middle| \alpha\in[0,2\pi)\right\}$;

5) $\left\{\begin{pmatrix} \cos\dfrac{2k\pi}{n} & -\sin\dfrac{2k\pi}{n}\\ \sin\dfrac{2k\pi}{n} & \cos\dfrac{2k\pi}{n}\end{pmatrix}\middle| k=\overline{0,n-1}\right\}$;

6) $\left\{\begin{pmatrix} 2-a & a-1\\ 2(1-a) & 2a-1\end{pmatrix}\middle| a\in\mathbb{R}^*\right\}$;

17. Să se arate că mulțimea matricelor $G=\left\{A=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

18. Fie $G=\left\{M_{a,b}=\begin{pmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}\middle| M_{a,b}\in M_3(\mathbb{R}), \det(M_{a,b})=1\right\}$. Să se arate că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

19. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $G=\{A^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$. Arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian. Câte elemente are G ?

20. 1) Fie mulțimea de matrice de ordinul doi:

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\right\}.$$

Să se arate că G împreună cu înmulțirea matricelor formează un grup necomutativ.

2) (Matrice permutare) O astfel de matrice se obține din matricea unitate I_n prin interschimbarea liniilor odată sau de mai multe ori (permutări de linii). Pentru $n=3$ avem matricele:

$$P_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, P_3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, P_4=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, P_5=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Arătați că $G=\{I_3,P_1,P_2,...,P_5\}$ este grup cu înmulțirea matricelor.

3) Fie $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Arătați $G=\left\{I_2, A, A^2, A^3, B, C, D, E\right\}$ este grup cu operația de înmulțire a matricelor. Scrieți tabla legii.

21. Arătați că mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{4}a\\ \hat{6}a & \hat{1}\end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{Z}_{12}\right\}$ împreună cu operația de înmulțire obişnuită a matricelor este grup abelian.

22. Fie $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{2}\\ \hat{5} & \hat{1}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{10})$ şi mulțimea $G=\{A^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$.

1) Arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian.
2) Arătați că dacă $AX=AY$, atunci $X=Y$.
3) Rezolvați ecuația $XA=AX$.

23. Să se rezolve sistemele:

1) $\begin{cases}\hat{3}x+y+\hat{2}z=\hat{3}\\ x+\hat{2}y+\hat{3}z=\hat{1}\\ \hat{2}x+\hat{3}y+z=\hat{2}\end{cases}$ în $\mathbb{Z}_5$; 2) $\begin{cases}x+y+\hat{3}z=\hat{1}\\ \hat{2}x+y+z=\hat{2}\\ \hat{3}x+\hat{4}y=\hat{4}\end{cases}$ în $\mathbb{Z}_5$; 3) $\begin{cases}x+\hat{2}y+\hat{3}z=\hat{1}\\ \hat{4}x+y+\hat{2}z=\hat{2}\\ \hat{2}x+\hat{4}y+\hat{3}z=3\end{cases}$ în $\mathbb{Z}_5$;

4) $\begin{cases}\hat{3}x+\hat{3}y+z=\hat{2}\\ x+\hat{2}y+\hat{3}z=\hat{3}\\ \hat{2}x+y+\hat{3}z=\hat{5}\end{cases}$ în $\mathbb{Z}_7$; 5) $\begin{cases}\hat{2}x+\widehat{10}y+z=\hat{4}\\ x+\hat{3}z=\hat{2}\\ \widehat{10}x+\hat{2}y+\hat{2}z=\hat{1}\end{cases}$ în $\mathbb{Z}_{11}$; 6) $\begin{cases}x+y+z=\hat{0}\\ \hat{3}x+\hat{2}y+z=\hat{1}\\ \hat{5}x+\hat{3}y+\hat{2}z=\hat{4}\end{cases}$ în $\mathbb{Z}_{11}$;

24. Arătați că matricele (X,Y) sunt o soluție pentru fiecare din sistemele:

a) $\begin{cases}X\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{2}\\ \hat{1} & \hat{3}\end{pmatrix}+Y=\begin{pmatrix}\hat{3} & \hat{4}\\ \hat{2} & \hat{1}\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{1}\\ \hat{1} & \hat{0}\end{pmatrix}X+Y\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{2}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{4} & \hat{3}\\ \hat{3} & \hat{4}\end{pmatrix}\end{cases}$ în $\mathbb{Z}_5$; $\quad X=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{2}\\ \hat{2} & \hat{3}\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{1}\\ \hat{2} & \hat{3}\end{pmatrix}$

b) $\begin{cases}X\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{2}\\ \hat{3} & \hat{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{2} & \hat{4}\end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix}\hat{6} & \hat{5}\\ \hat{1} & \hat{1}\end{pmatrix}\\ X\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{3}\\ \hat{2} & \hat{0}\end{pmatrix}-Y\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{3}\\ \hat{2} & \hat{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{4}\\ \hat{5} & \hat{1}\end{pmatrix}\end{cases}$ în $\mathbb{Z}_7$; $\quad X=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{4}\\ \hat{3} & \hat{2}\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$

25. Alcătuiți tabla legii de compunere a permutărilor pe S_3.

26. Arătați că mulțimea de permutări $S=\{e,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$, unde:

$e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}, \sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1\end{pmatrix}, \sigma_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 6\end{pmatrix}, \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$,

împreună cu operația de compunere a permutărilor formează un grup.

27. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; b) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

28. Să se rezolve ecuația $\sigma x = x\sigma$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Reguli de calcul într-un grup

Am văzut pentru monoizi anumite posibilități de efectuare a unor calcule algebrice. Cum orice grup este monoid, se înțelege că toate regulile de calcul valabile pentru monoizi se păstrează şi pentru grupuri. În plus pentru grupuri există reguli care le sunt specifice (şi țin de existența pentru fiecare element a inversului).

Teoremă. (**Reguli de simplificare**) Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $x, y \in G$ arbitrare. Au loc echivalențele:
1) $zx = zy \Leftrightarrow x = y$ („simplificare“ la stânga), $z \in G$.
2) $xz = yz \Leftrightarrow x = y$ („simplificare“ la dreapta), $z \in G$.

Demonstrație. 1) „$\Rightarrow$“ Fie $zx = zy$. Prin înmulțire la stânga cu z^{-1} rezultă $z^{-1}(zx) = z^{-1}zy \Leftrightarrow (z^{-1}z)y \Leftrightarrow ex = ey \Leftrightarrow x = y$.
„$\Leftarrow$“ Presupunem că $x = y$. Se înmulțeşte la stânga cu z şi avem $zx = zy$.
2) Analog. ■
Observații. 1) Dacă legea este dată aditiv atunci teorema se scrie:

1) $z + x = z + y \Leftrightarrow x = y$;
2) $x + z = y + z \Leftrightarrow x = y$.

2) Proprietatea de a împărți o egalitate printr-un număr real nenul rezultă din această teoremă. La fel, proprietatea de a reduce termenii egali situați în membri diferiți rezultă de aici.

Teoremă. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $x \in G$ fixat. Atunci:
1) $x^n x^m = x^{n+m}$,
2) $\left(x^n\right)^m = x^{nm}$, $(\forall)n, m \in \mathbb{Z}$.

Demonstrație. Analogă celei de la monoizi. ■
Observație. Dacă grupul G este aditiv, atunci rezultatele din teoremă au forma: 1) $nx + mx = (n + m)x$; 2) $n(mx) = (nm)x$, $(\forall)n, m \in \mathbb{Z}$.

Următorul rezultat simplu pentru elementele unui grup poate stabili dacă acesta este comutativ. Mai precis are loc

Teorema. Dacă în grupul $(G,\cdot)$ avem $x^2 = e, (\forall) x \in G$, atunci grupul este **abelian**.

Demonstrație. Fie $x, y \in G$, arbitrare. Să probăm că $xy = yx$.

Din $x, y \in G$ rezultă $xy \in G$ şi deci $x^2 = e,\ y^2 = e,\ (xy)^2 = e$.

Scriem egalitatea $(xy)^2 = e$ succesiv astfel:

$(xy)(xy) = x^2 y^2 \Leftrightarrow x(yx)y = x(xy)y \Leftrightarrow yx = xy$ (după simplificare la stânga cu x şi la dreapta cu y). ■

Probleme propuse

1. **Fie $(G,\cdot)$ un grup cu element neutru e. Arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian dacă este adevărată una din condițiile de mai jos:**

1) $x^3 = e, \forall x \in G,\ x^2 y^2 = y^2 x^2, \forall x, y \in G$;

2) $x^3 = e, \forall x \in G,\ (xy)^2 = (yx)^2, \forall x, y \in G$;

3) există $n \in N^*$ astfel încât pentru orice $x, y \in G$ avem: $(xy)^n = x^n y^n, (xy)^{n+1} = x^{n+1} y^{n+1}$ şi $(xy)^{n+2} = x^{n+2} y^{n+2}, \forall x, y \in G$.

2. **Se consideră $(G,\cdot)$ un grup abelian cu n elemente. Să se arate că $x^n = e, \forall x \in G$, unde e este elementul neutru al grupului.**

3. **Fie $(G,\cdot)$ grup şi $x, y \in G$, astfel încât: 1) $x^5 = y^4 = e$; 2) $xy = yx^3$. Arătați că: $yx = x^2 y$ şi $xy^3 = y^3 x^2$.**

4. **Fie $(G,\cdot)$ un grup cu element neutru e. Arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian dacă este adevărată una din condițiile de mai jos:**

1) $x = x^{-1}, \forall x \in G$; 2) $(xy)^{-1} = x^{-1} y^{-1}, \forall xy \in G$; 3) $xy^{-1} = yx^{-1}, \forall x, y \in G - \{e\}$.

5. **Fie $(G,\cdot)$ grup şi $x, y \in G$, astfel încât $x^2 = y^2 = (xy)^2$. Să se arate că $x^4 = y^4 = e$.**

6. **Pe $G = \mathbb{C} - \{i\}$ se consideră aplicația $x * y = x + y + ixy, \forall x, y \in G$.**

1)Arătați că $(G,*)$ este grup comutativ.

2) Calculați $(-i)^3, (1+i)^2, x^n, n \in N^*, n \geq 2$.

7. **Pe $G = (3,\infty)$ se consideră aplicația $x * y = xy - 3x - 3y + 12, x, y \in G$.**

1)Arătați că $(G,*)$ este grup abelian.

2) Arătați că $\underbrace{a * a * \ldots * a}_{n \text{ ori}} = (a-3)^n + 3, \forall a \in G, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

8. **Fie** $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & 3a\\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{Z}\right\}$.

1) Arătați că $(G,\cdot)$ **este grup abelian.**

2) Fie $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 3a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. **Calculați** $A^2(1)$, $A^3(-3)$, $A(a)A(b)$, $A^n(a)$, $A(a)+A^2(a)+..+A^n(a)$.

1.5. GRUPURI FINITE

Tabla operației

Un grup finit *G*, format din elementele $g_1, g_2, ..., g_n$ poate fi descris cu ajutorul tablei lui Cayley. Aceasta este o tabelă pătrată în care la intersecția liniei *i* cu coloana *j* se află elementul $g_i g_j$. De exemplu, dacă ordinul grupului este 2 şi grupul este format din elementele *e* (unitatea) şi $g\neq e$, atunci g^2 poate fi egal doar cu *e* (în caz contrar $g^2=g \Rightarrow g=e$!). De aceea tabla lui Cayley are forma:

$\cdot$	e	g
e	e	g
g	g	e.

Dacă ordinul grupului este 3, *e* este elementul unitate al său iar $g\neq e$, atunci se constată uşor că $g^2\neq g$ şi $g^2\neq e$, de aceea G = {*e, g, h*} cu $g^2=h$. La fel de simplu se arată că *gh* = e. Tabla lui Cayley are forma:

$\cdot$	e	g	h
e	e	g	h
g	g	h	e
h	h	e	g

Din tabla grupului se poate deduce comutativitatea lui (dacă tabla este simetrică în raport cu diagonala principală); **se poate determina elementul unitate, inversul pentru fiecare element al grupului. Existența unui izomorfism între două grupuri** (aşa cum apare la izomorfisme de grupuri) **înseamnă că** (abstracție făcând de notațiile elementelor) **tablele Cayley corespunzătoare lor coincid**. Tablele Cayley pot fi scrise efectiv doar pentru grupuri cu ordinul mic.

În cazul grupului multiplicativ finit cu *n* elemente, $G=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ în tabla legii (Cayley) **pe fiecare linie sau coloană, fiecare element al lui *G* apare o dată şi numai o singură dată.**

Într-adevăr fie $x_i\in G$, fixat $i\in\{1,2,...,n\}$. În linia lui x_i din tabla operației se găsesc elementele: $x_ix_1, x_ix_2, ..., x_ix_n$.

Pentru $k \neq l$ avem $x_i x_k \neq x_i x_l$. În caz contrar din $x_i x_k = x_i x_l$ prin compunere la stânga cu x_i^{-1} ar rezulta $x_k = x_l$, fals.

Aşadar elementele $x_i x_1, x_i x_2, ..., x_i x_n$ sunt distincte două câte două şi în plus sunt în G.

Cum G are exact n elemente înseamnă că $G = \{x_i x_1, x_i x_2, ..., x_i x_n\}$, altfel spus aceste elemente sunt chiar $x_1, x_2, ..., x_n$ eventual în altă ordine.

Exemple remarcabile de grupuri finite

1) Grupul rădăcinilor de ordin n ale unității

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ mulțimea rădăcinilor de ordinul n ale unității. Se ştie că acestea sunt date de relația $z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, ..., n-1$.

Pe U_n considerăm operația de înmulțire de pe $\mathbb{C}$.

Are loc următoarea:

> **Teoremă.** Cuplul $(U_n, \cdot)$ este grup abelian finit, numit grupul **rădăcinilor de ordin n ale unității**.

Demonstrație. Verificăm axiomele grupului.

G_1) Înmulțirea de pe $\mathbb{C}$ este **lege de compoziție** pe U_n, adică să arătăm că $(\forall) z_k, z_l \in U_n \Rightarrow z_k \cdot z_l \in U_n$.

Avem $(z_k z_l)^n = z_k^n \cdot z_l^n = 1 \cdot 1 = 1$.

G_2) **Asociativitatea înmulțirii** are loc, deoarece înmulțirea pe $\mathbb{C}$ este asociativă.

G_3) **Elementul neutru**. Cum 1 este element neutru pentru înmulțirea de pe $\mathbb{C}$ şi $1 \in U_n$ (pentru $k = 0$, $z_0 = 1$) se deduce că 1 este element unitate şi față de înmulțirea de pe U_n.

G_4) **Elemente inverse** (simetrizabile). Pentru $x \in U_n$, există $x' \in U_n$ astfel încât $xx' = 1 = x'x$. De aici $x' = \frac{1}{x} \in U_n$ deoarece $\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{1} = 1$, ceea ce arată că inversul lui x din U_n (adică $\frac{1}{x}$) se menține în U_n.

G$_5$) **Comutativitatea înmulțirii** are loc pe U_n deoarece înmulțirea este comutativă pe $\mathbb{C}$.

Observație. Elementele lui U_n au ca imagini geometrice în plan vârfurile unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul unitate.

În Fig. 5 avem ilustrate cazurile $n = 3$, $n = 4$.

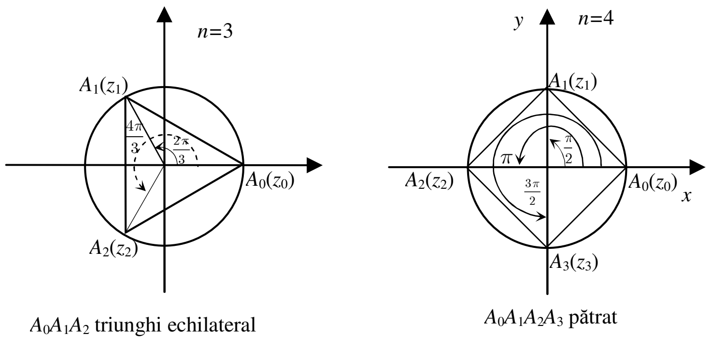


Fig. 5

2) Grupul lui Klein

Fie planul $\mathcal{P} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ în care avem reperul cartezian xOy. Considerăm următoarele transformări geometrice ale planului.

1) $i : \mathcal{P} \to \mathcal{P}, M(x, y) \to M(x, y)$

$i((x, y)) = (x, y)$, aplicația identică a planului.

2) $s_x : \mathcal{P} \to \mathcal{P}, M(x, y) \to M'(x, -y) =$ simetricul lui M în raport cu Ox (Fig. 6),

$s_x((x, y)) = (x, -y)$, s_x este simetria în raport cu Ox.

3) $s_y : \mathcal{P} \to \mathcal{P}, M(x, y) \to M''(-x, y)$

$s_y((x, y)) = (-x, y), s_y$ este simetria în raport cu Oy.

4) $s_O : \mathcal{P} \to \mathcal{P}, M(x, y) \to M'''(-x, -y)$, $s_O((x, y)) = (-x, -y)$, s_O este simetria în raport cu O.

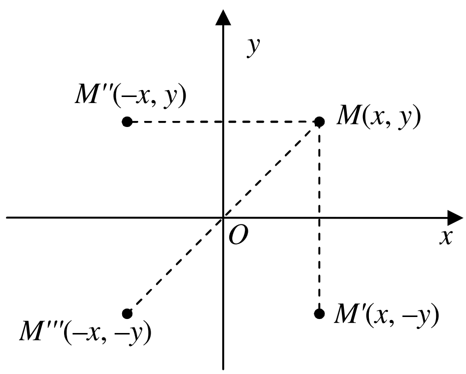


Fig. 6

Notăm prin $\mathcal{K} = \{i, s_x, s_y, s_O\}$ și considerăm operația de compunere a funcțiilor pe $\mathcal{K}$.

Atunci are loc următorul rezultat:

Teoremă. Cuplul $(\mathcal{K},\circ)$ este un grup abelian, numit **grupul lui Klein**.

$\circ$	i	s_x	s_y	s_O
i	i	s_x	s_y	s_O
s_x	s_x	i	s_O	s_y
s_y	s_y	s_O	i	s_x
s_O	s_O	s_y	s_x	i

Demonstrație. Tabla operației este dată alăturat.
Verificăm axiomele grupului comutativ.
G_1) **Asociativitatea compunerii**. Întotdeauna compunerea funcțiilor este asociativă, deci este la fel și în acest caz particular.
G_2) **Elementul neutru** este funcția identică a planului, *i*.
G_3) **Elemente inversabile**. Avem imediat (din tabla legii) $i^{-1}=i,\ s_x^{-1}=s_x,\ s_y^{-1}=s_y,\ s_O^{-1}=s_O$.
G_4) **Comutativitatea compunerii** rezultă din faptul că tabla legii este simetrică față de diagonala principală.
Așadar cuplul $(\mathcal{K},\circ)$ este un grup abelian, având ordinul 4.

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Observații. 1) Mai general considerăm mulțimea $K = \{e, a, b, c\}$ pe care definim o operație multiplicativă dată de tabla alăturată. Atunci $(K,\cdot)$ este grupul lui Klein. Observăm că într-un astfel de grup avem: $a^2=b^2=c^2=e,\ ab=ba=c,\ ac=ca=b, bc=cb=a$.

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

2) Dacă se consideră $G = \{e, a, b, c\}$ împreună cu o lege multiplicativă dată de tabla alăturată atunci se constată că $(G,\cdot)$ este un grup tot de ordin 4. Numai că în acest caz observăm că $a^2=b,\ a^3=c$ și $a^4=e$, adică elementele acestui grup sunt generate de elementul *a*.
Deci $G=\{e,a,a^2,a^3\}$ și se numește **grup ciclic generat** de elementul *a*.
3) Se poate demonstra că nu există decât două grupuri diferite de ordin 4. Altfel spus, nu există decât două moduri de a aranja cele patru elemente *e*, *a, b, c* în tabla legii „·“ astfel încât $(G,\cdot)$ să fie grup. Primul mod generează grupul lui Klein, iar cel de-al doilea mod din **2)** furnizează grupul ciclic de ordin 4.
4) Determinați $C(g),\ g\in K$.

3) Grupul de simetrii ale triunghiului echilateral

Printr-o **mișcare rigidă** a triunghiului înțelegem o bijecție de la mulțimea punctelor triunghiului (de pe cele trei laturi ale sale) pe ea însăși care păstrează distanța între orice două puncte ale sale. O astfel de mișcare trebuie să ducă un vârf pe un alt vârf al triunghiului şi întreaga aplicație este determinată de imaginile vârfurilor A, B, C. Aceste mişcări rigide se numesc **simetrii**, care împreună cu operația de compunere formează grup.

Fie mulțimea $E=\{A,B,C\}$ a vârfurilor unui triunghi echilateral ABC. Notăm cu l_1, l_2, l_3 mediatoarele laturilor triunghiului echilateral care trec prin A, B şi respectiv C şi cu O punctul de intersecție al mediatoarelor (Fig. 7).

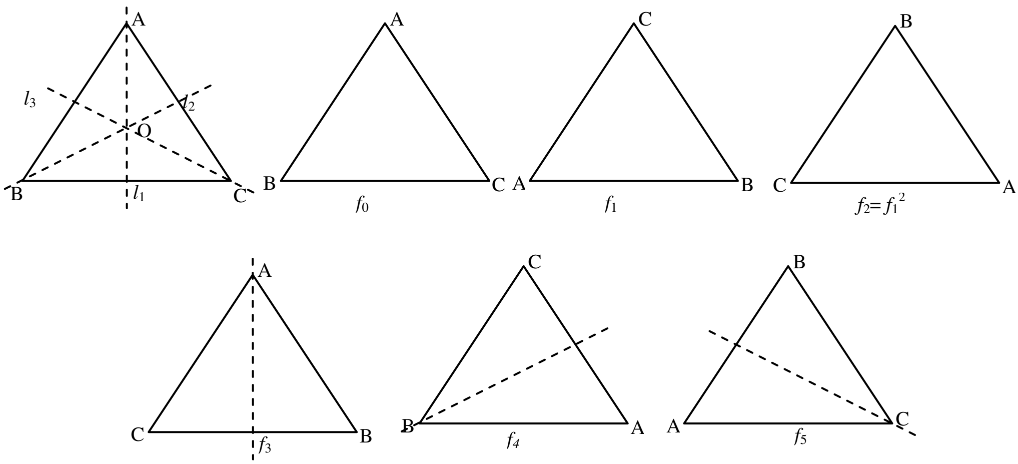


Fig. 7

Considerăm mulțimea: $S=\{f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5\}$, $f_i : E \to E$, $i=\overline{0,5}$, f_i bijecții definite astfel:

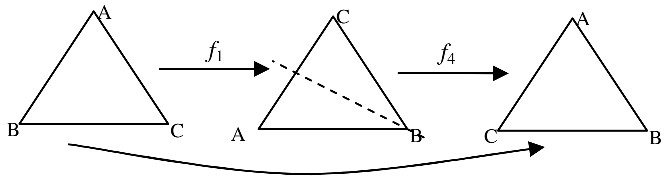
- $f_0(A)=A$, $f_0(B)=B$, $f_0(C)=C$

(f_0 aplicația identică a lui E lasă punctele neschimbate);

- $f_1(A)=B$, $f_1(B)=C$, $f_1(C)=A$ (f_1 este rotația de unghi 120^0 în sens trigonometric în jurul lui O);
- $f_2(A)=C$, $f_2(B)=A$, $f_2(C)=B$ (f_2 este rotația de unghi 240^0 în sens trigonometric în jurul lui O);
- $f_3(A)=A$, $f_3(B)=C$, $f_3(C)=B$ (f_3 este simetria în raport cu mediatoarea l_1);
- $f_4(A)=C$, $f_4(B)=B$, $f_4(C)=A$ (f_4 este simetria în raport cu mediatoarea l_2);
- $f_5(A)=B$, $f_5(B)=A$, $f_5(C)=C$ (f_5 este simetria în raport cu mediatoarea l_3);.

Compunând elementele două câte două obținem tabla:

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	f_0	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	f_0	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_5	f_4	f_0	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_5	f_1	f_0	f_2
f_5	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f_0



$f_4 \circ f_1 = f_3$

Fig. 8

Teoremă. Cuplul $(S,\circ)$ este un grup de ordin 6 şi se numeşte **grupul de simetrii ale triunghiului echilateral.**

Demonstrație. Verificăm axiomele grupului.

G$_1$) **Asociativitatea compunerii** are loc deoarece întotdeauna compunerea funcțiilor are această calitate.

G$_2$) **Elementul neutru** este aplicația identică f_0.

G$_3$) **Elemente inverse**. Avem $f_0^{-1}=f_0$, $f_1^{-1}=f_2$, $f_2^{-1}=f_1$, $f_3^{-1}=f_3$, $f_4^{-1}=f_4$, $f_5^{-1}=f_5$.

Observații. **1)** Grupul nu este abelian deoarece, de exemplu $f_2\circ f_5=f_4\neq f_5\circ f_2=f_3$.

2) Se poate asocia, în acelaşi mod, un grup D_n, numit **grup diedral**, la fiecare poligon regulat cu n laturi; se demonstrează că el are ordinul $2n$.

3) Arătați că $H=\{f_0,f_1,f_2\}$ este subgrup al grupului $(S,\circ)$, iar $S=\left\{f_0,f_1,f_1^2,f_3,\right.$ $\left.f_3\circ f_1,f_3\circ f_1^2\right\}$, ultimele trei elemente având ordinul 2, iar f_1,f_1^2 au ordinul 3. De regulă, S se notează cu D_3 şi se numeşte **grupul diedral** cu 6 elemente.

4) Dacă A, B, C le identificăm prin 1, 2, 3, atunci asociați fiecărei funcții o permutare din S_3. De exemplu: $f_0\to e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, $f_1\to\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$.

5) Asociați pătratului de vârfuri 1, 2, 3, 4 şi axe de simetrie d_1,d_2,l_1,l_2 (Fig. 9) grupul de simetrii (numit **grupul octic**) şi realizați tabla operației. Scrieți simetriile ca permutări din S_4.

Arătați că grupul octic

$D_4=\left\{I,R,R^2,R^3,S,RS,R^2S,R^3S\right\}$, unde I este aplicația identică, R este rotația de unghi 90^0, iar S este simetria față de diagonala AC a pătratului. Transformările R^kS au ordinul

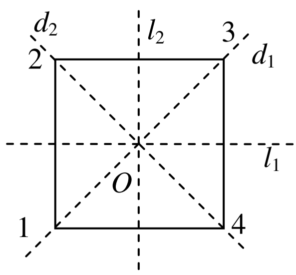


Fig. 9

2 şi sunt simetrii în raport cu „diametrele“ ce trec prin vârfurile poligonului (aici diagonalele pătratului d_1, d_2) sau în raport cu mediatoarele laturilor $\left(l_1, l_2\right)$. Verificați că $R^4 = S^2 = I$, $SR = R^3 S$.

Aplicații în diverse domenii

Noțiunea de grup a apărut mai întâi sub forma noțiunii de grup de permutări (transformări) şi tot în această formă se întâlneşte aproape întotdeauna în matematică şi în fizica matematică. Transformările bijective ale spațiului euclidian ce păstrează distanța între puncte formează grupul izometriilor spațiului. Dacă toate păstrează fix un acelaşi punct al spațiului, atunci avem de-a face cu grupul transformărilor ortogonale. Grupul format din transformările ce păstrează (invariază) un obiect poate fi interpretat ca fiind grupul simetriilor sale. Faptul că un triunghi este neisoscel (oarecare), este isoscel şi nu este echilateral, sau este echilateral, se poate „măsura“ prin grupul izometriilor planului ce invariază triunghiul. În primul caz acest grup este format doar din transformarea identică, în al doilea caz apare şi o simetrie față de o dreaptă (axa de simetrie a triunghiului), iar în al treilea caz grupul este format din următoarele şase transformări: cea identică, rotațiile de unghi 120^0 sau 240^0 în jurul centrului O al triunghiului, şi simetriile în raport cu cele trei axe (cele trei mediatoare ale triunghiului).

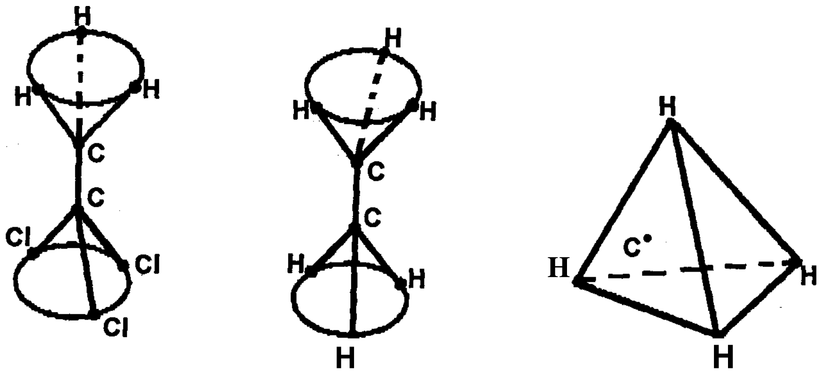
Prin **simetrie a unei molecule** se înțelege o transformare a spațiului ce transformă fiecare atom al moleculei într-un atom de acelaşi tip, păstrând totodată valențele între atomi. Astfel o moleculă de fosfor este formată din patru atomi, repartizați în vârf urile unui tetraedru regulat, iar grupul simetriilor ei coincide cu grupul simetriilor tetraedrului regulat.

Grupul simetriilor unui cristal este una dintre caracteristicile importante ale cristalului. Aici prin simetrie se înțelege o transformare a spațiului, încât se păstrează poziția atomilor cristalului precum şi legăturile între atomi (deci transformând fiecare atom într-unul de acelaşi tip).

Simetriile intervin uneori şi în **fenomene fizice**. De exemplu, conform unei teoreme a lui E. Noether, dacă un sistem dinamic X este descris de funcția lui Lagrange $\mathcal{L}$ ce are ca grup de simetrii un grup de transformări depinzând de un parametru, atunci sistemul are o integrală care se descrie simplu. Astfel, în cazul mişcării unui sistem de puncte materiale, faptul că rămâne invariant față de translații conduce la legea de mişcare a centrului maselor, iar faptul că rămâne invariant față de rotații conduce la legea momentului cinetic.

Exemple clasice de grupuri finite de rotații ale spațiului sunt legate de poliedrele regulate (cunoscute încă din antichitate, din care cauză se mai numesc şi corpuri platonice): fiecărui poliedru regulat M îi corespunde grupul G_M al tuturor transformărilor ce invariază poliedrul. „Regularitatea“ poliedrului se reflectă în faptul că el are multe simetrii. Fiecărui poliedru regulat îi este asociat un dual, ale cărui vârfuri sunt centrele fețelor poliedrului original. Evident, poliedrul dual are acelaşi grup G_M ca şi poliedrul *M*. Tetraedrul este autodual, cubul are ca dual octaedrul, iar dodecaedrul are ca dual icosaedrul. În acest fel se obțin trei grupuri ale poliedrelor regulate: cel al tetraedrului (notat cu **T**), cel al octaedrului (*O*) şi cel al icosaedrului (*Y*) pentru care $|T| = 12, |O| = 24, |Y| = 60$.

Grupurile poliedrelor regulate se întâlnesc în natură ca grupuri de simetrie ale moleculelor. De exemplu grupul de simetrie al moleculei $H_3C - CCl_3$ (Fig. 10.a)) este grupul rotațiilor în jurul unui punct cu unghiuri $\frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$.



a) b) c)

Fig. 10

Grupul de simetrie al moleculei C_2H_6 (Fig. 10.b)) este grupul triunghiului echilateral. Grupul moleculei de metan CH_4 (Fig. 10.c)) este grupul **T** (atomul *C* se află în centrul tetraedrului, iar atomii *H* în vârfuri).

Spre deosebire de cristale, grupurile de simetrie ale moleculelor nu conțin translații. Ele se mai numesc grupuri punctuale.

Forme de simetrie apar şi în muzică sau dans, ritmul fiind o repetare la intervale egale a unui motiv muzical.

Aplicații ale teoriei grupurilor le întâlnim la ornamente, în clasificarea scoarțelor, etc.

Ordinul unui element

Definiție. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $x \in G$. Cel mai mic număr natural nenul $n \in N^*$ cu proprietatea $x^n = e$ se numeşte **ordinul elementului** *x* în grupul *G*. Dacă pentru orice $n \in N^*, x^n \neq e$, atunci se spune că ordinul elementului *x* este ∞.

Notație. Dacă *n* este ordinul elementului *x*, atunci notăm acest lucru prin ord(*x*) = *n*.

Observație. În orice grup ordinul unui element este egal cu ordinul inversului acestui element $\left(x^k = e \Leftrightarrow x^{-k} = e\right)$.

Exemple. 1. În grupul $(\{1,-1,i,-i\},\cdot)$ elementul –1 are ordinul 2 deoarece $(-1)^2 = 1$. Așadar ord(–1) = 2. Analog ord(i) = ord(–i) = 4. Atunci $i^{2006} = i^{4\cdot 501+2} = \left(i^4\right)^{501} \cdot i^2 = -1$.

2. În grupul $(\mathbb{Z}_5^*,\cdot)$ avem $\text{ord}(\hat{2}) = 4$ pentru că $\hat{2}^4 = \hat{1}$, $\text{ord}(\hat{3}) = 4$, $(\hat{3}^4 = \hat{1})$, $\text{ord}(\hat{4}) = 2$, $(\hat{4}^2 = \hat{1})$.

Pentru a calcula $\hat{2}^{2007}$ utilizăm $\hat{2}^4 = \hat{1}$, când avem $\hat{2}^{2007} = \left(\hat{2}^4\right)^{501+3} = \left(\hat{2}^4\right)^{501} \cdot \hat{2}^3 = \hat{1}\cdot\hat{3} = \hat{3}$ (am folosit teorema împărțirii cu rest pentru 2007 și 4, $2007 = 4\cdot 501 + 3$).

3. În grupul lui Klein $\mathcal{K} = \{i, s_x, s_y, s_0\}$ cum $s_x^2 = s_y^2 = s_0^2 = i$ rezultă $\text{ord}(s_x) = \text{ord}(s_y) = \text{ord}(s_0) = 2$.

4. Fie S_3 grupul permutărilor de grad 3 și $\sigma \in S_3$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculăm puterile lui σ și avem: $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \sigma^2 \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$. Așadar ord(σ) = 3.

Pentru calculul permutării σ^{2008}, ținem seama de $\sigma^3 = e$ și $2008 = 3\cdot 669 + 1$, când avem $\sigma^{2008} = \sigma^{3\cdot 669+1} = \left(\sigma^3\right)^{669} \cdot \sigma^1 = e\sigma = \sigma$.

Fie $(G,\cdot)$ un grup și $x \in G$. Atunci $\left\{x^k \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \overset{\text{not.}}{=} \langle x \rangle$ cu operația „·“ este grup, cum ușor se verifică (numit **grup cilindric general de** x). Dacă grupul este aditiv, $(G,+)$, atunci $\langle x \rangle = \left\{kx \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exemple. 1. Pentru $\left(\mathbb{Z}_5^*,\cdot\right)$, $\langle \hat{2} \rangle = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{2}^2, \hat{2}^3\} = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$, iar $\langle \hat{4} \rangle = \{\hat{1}, \hat{4}\}$.

2. Pentru $(\mathbb{Z}_8,+)$, $\langle \hat{2} \rangle = \left\{\widehat{2k} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\}$.

3. Pentru $(\mathbb{Z},+)$, $\langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle = \mathbb{Z}$.

Observație. Dacă $(G,\cdot)$ este grup, iar $H \subseteq G$ și $(H,\cdot)$ are structură de grup, atunci H se numește **subgrup al lui** G și se notează $H \le G$.
În cazul de mai sus $\langle x \rangle$ este subgrup al lui G și anume **subgrupul cilindric al lui** G.

Am văzut că pentru un element $x \in G$ subgrupul ciclic generat de x este $\langle x \rangle = \{x^k | k \in \mathbb{Z}\}$. Care este forma acestui sub grup dacă x are ordin finit?

Răspunsul este dat de:

Teoremă. Cuplul $(G,\cdot)$ este un grup şi $x \in G$ un element de ordin *n*. Atunci $<x> = \{e, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$ şi $\operatorname{ord}(<x>) = n$.

Probleme propuse

1. Să se determine ordinul elementului $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ în grupul $\left(G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{Z}_8 \right\}, \cdot\right)$ şi A^{2007}.

2. Fie $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \det A = 1 \right\}$. Arătați că:

a) $(G,\cdot)$ este grup; b) dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, atunci ord($A$) = 4, ord($B$) = 6 şi $\operatorname{ord}(AB) = \infty$. Calculați A^{2007}, B^{2008}.

3. Să se verifice ordinele elementelor pentru fiecare caz în parte: 1) $\operatorname{ord}(\sigma) = 3$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\operatorname{ord}(\delta) = 2, \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; Calculați σ^{2007}, δ^{2008};

2) $\operatorname{ord}(P_1) = 2$, unde $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\operatorname{ord}(P_5) = 3$, unde $P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, cu înmulțirea matricelor; calculați P_1^{2007}, P_5^{2008}.

1.6. MORFISME ŞI IZOMORFISME DE GRUPURI

Existența unui morfism între două grupuri poate dezvălui informații importante şi interesante relative la structura grupurilor. Un morfism „conservă“ operația de grup. Două consecințe ale acestei condiții sunt:

1) elementele neutre se corespund prin morfism;
2) simetricul unui element, se aplică în simetricul imaginii elementului.

Definiție. Fie $(G,*)$ şi $(G',\circ)$ două grupuri. O funcție $f : G \to G'$ se numeşte **morfism** (sau **omomorfism**) de grupuri dacă are loc condiția:

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y), (\forall) x, y \in G.$$

Mulțimea morfismelor de la *G* la G' se notează cu $\operatorname{Hom}(G, G')$.

Observații. 0) Schematic, acțiunea morfismului *f* este redată mai jos (Fig. 11).

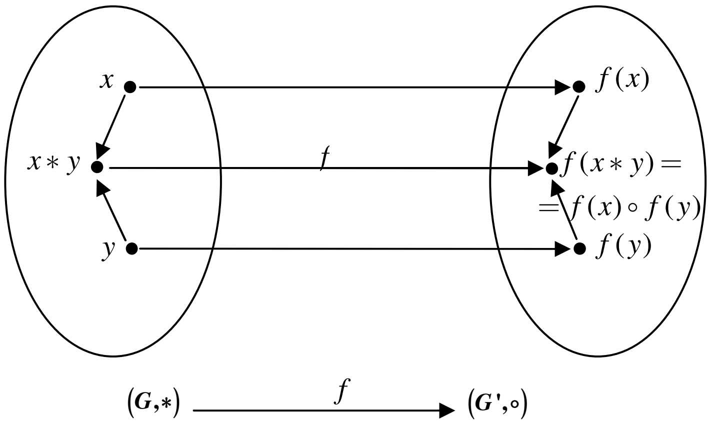
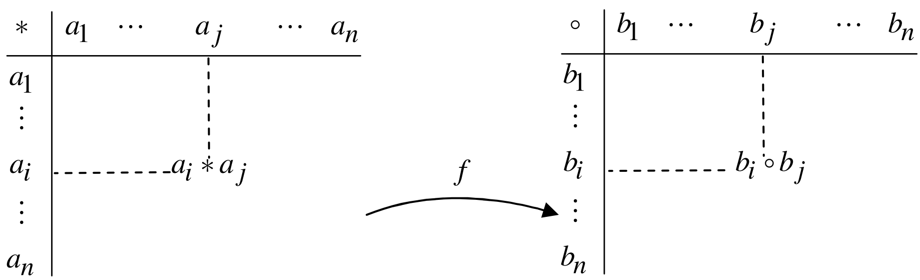


Fig. 11

În cazurile când G, G' sunt finite, avem reprezentarea:



$f(a_i)=b_i$

1) Un morfism de grupuri de la un grup la el însuşi se numeşte **endomorfism** al acelui grup. Pentru grupul G mulțimea tuturor endomorfismelor se notează cu End(G).

2) Un morfism de grupuri $f:G\to G'$ se numeşte **morfism injectiv** (sau **monomorfism**) dacă aplicația *f* este injectivă.

Un morfism de grupuri $f:G\to G'$ se numeşte morfism **surjectiv** (sau **epimorfism**) dacă aplicația *f* este surjectivă.

3) Orice grup fiind față de aceeaşi lege şi monoid, din definiție rezultă că orice morfism de grupuri este şi morfism de monoizi.

Exemple cunoscute de morfisme de grupuri

1. Funcția $f_n:(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{Z},+)$, $n\in\mathbb{Z}$, fixat $f_n(x)=nx$, $x\in\mathbb{Z}$ este endomorfism al grupului $\mathbb{Z}$, deoarece: $f_n(x+y)=n(x+y)=nx+ny=f_n(x)+f_n(y)$, $(\forall)x,y\in\mathbb{Z}$.

2. Funcția $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $f(x)=e^x$ este morfism de grupuri pentru că

$f(x+y)=e^{x+y}=e^{x}\cdot e^{y}=f(x)\cdot f(y), (\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

3. Funcția $f:(\mathbb{R}_{+}^{*},\cdot)\to(\mathbb{R},+),\ f(x)=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$, este morfism de grupuri deoarece:

$f(x\cdot y)=\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y=f(x)+f(y), (\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

4. Funcția $\varepsilon:(S_n,\cdot)\to(\{1,-1\},\cdot),\ \varepsilon(\sigma)=\begin{cases}1, \sigma= \text{ permutare pară}\\ -1, \sigma=\text{permutare impară}\end{cases}$ este morfism de grupuri pentru că $\varepsilon(\sigma\tau)=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau), (\forall)\sigma,\tau\in S_n$.

5. Funcția $f:(\mathbb{Z},+)\to(G,\cdot),\ f(n)=a^{n}, a\in G$, fixat este morfism de grupuri deoarece $f(n+m)=a^{n+m}=a^{n}\cdot a^{m}=f(n)f(m), (\forall)m,n\in\mathbb{Z}$.

6. Funcția $f:(\mathbb{Z},+)\to(<a>,\cdot), (<a>$ grup ciclic infinit) $f(n)=a^{n}$ este (ca mai sus) morfism de grupuri.

7. Funcția $f:(\mathbb{R}^{*},\cdot)\to\left(\left\{\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}^{*}\right\},\cdot\right),\ f(x)=\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}$, este morfism de grupuri pentru că:

$$f(xy)=\begin{pmatrix}xy&0\\0&xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y&0\\0&y\end{pmatrix}=f(x)f(y), (\forall)x,y\in\mathbb{R}^{*}.$$

8. Funcția $f:(G,\cdot)\to(G,\cdot)$ G grup comutativ, $f(x)=x^{-1}$ este endomorfism al grupului G deoarece: $f(xy)=(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}=x^{-1}y^{-1}=f(x)f(y), (\forall)x,y\in G$.

9. Funcția $f:(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)\to(\mathbb{R}^{*},\cdot),\ f(A)=\det A$ este morfism de grupuri pentru că:

$f(AB)=\det(AB)=\det(A)\det(B)=f(A)f(B), (\forall)A,B\in GL(n,\mathbb{R})$.

10. Funcția $f:(G,*)\to(G,\circ),\ f(x)=e'$, unde e' este elementul neutru al lui G', se numește morfismul constant, fiindcă: $f(xy)=e'=e'\circ e'=f(x)\circ f(x), (\forall)x,y\in G$.

Observație. Morfismul de la 1 $(n\neq 0)$, 2, 3, 5, 6, 7, 8 sunt injective, iar morfismele de la 1 (pentru $n\neq\pm 1$), 3, 4, 6, 7, 8 sunt morfisme surjective.

Vom utiliza din nou notația multiplicativă pentru grupurile care apar, dacă nu se face o altă precizare.

> **Teoremă**. Compunerea a două morfisme de grupuri este tot un morfism de grupuri.

Demonstrație. Fie $f:G\to G'$, $g:G'\to G''$ morfisme de grupuri.
Atunci $g\circ f:G\to G''$ este de asemenea un morfism pentru că
$(g\circ f)(xy)=g(f(xy))=g(f(x)f(y))=g(f(x))g(f(y))=(g\circ f)(x)(g\circ f)(x)$,
$(\forall)x,y\in G$. ■

Teoremă. Fie $f:(G,\cdot)\to(G',\cdot)$ un morfism de grupuri. Dacă e, e' sunt elementele neutre din grupurile G şi respectiv G', atunci:

1) $f(e)=e'$;

2) $f(x^{-1})=(f(x))^{-1}, (\forall)x\in G$;

3) $f(x^n)=(f(x))^n, (\forall)x\in G, (\forall)n\in\mathbb{Z}$.

Demonstrație. Mai întâi reformulăm în cuvinte cerințele teoremei (Fig. 12):
1) morfismul duce elementul neutru al unui grup în elementul neutru al celuilalt grup;
2) imaginea simetricului unui element printr-un morfism de grupuri $(f(x^{-1}))$ este simetricul imaginii acelui element $((f(x))^{-1})$;
3) imaginea puterii unui element printr-un morfism de grupuri $(f(x^n))$ este puterea imaginii elementului $((f(x))^n)$.
1) Avem $f(e)=f(e\cdot e)=f(e)f(e)$. Prin simplificare cu $f(e)$ rezultă $e'=f(e)$.

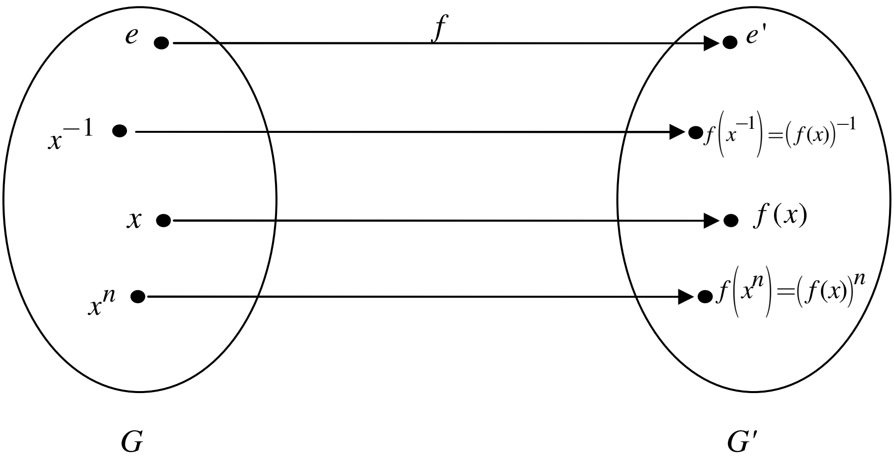


Fig. 12

2) Avem: $e'=f(e)=f(xx^{-1})=f(x)f(x^{-1})$. Înmulțim aici la stânga cu $(f(x))^{-1}$ şi avem $(f(x))^{-1}=f(x^{-1})$.
3) Dacă $n=0$ se verifică **1)**.

Dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $f(x^n)=f(\underbrace{x...x}_{n})=\underbrace{f(x)...f(x)}_{n}=(f(x))^n$.

Dacă $n<0$, atunci punem $n=-n', n'\in\mathbb{N}^*$ şi deci $f(x^n)=f(x^{-n'})=f((x^{-1})^{n'})=$
$=(f(x^{-1}))^{n'}=((f(x))^{-n'})=(f(x))^{-n'}=(f(x))^n$. ■

Observație. Reformulați teorema în cazul grupurilor aditive.

Definiție. Fie $f:(G,\cdot)\to(G',\cdot)$ un morfism de grupuri. Submulțimea lui G definită prin $\text{Ker} f=\{x\in G \mid f(x)=e'\}$ se numeşte **nucleul** morfismului f.
Submulțimea lui G' definită prin $\text{Im} f=\{f(x) \mid x\in G\}$ se numeşte **imaginea** morfismului f.

Observație. $\text{Ker} f\neq\varnothing$ pentru că $e\in\text{Ker} f$ $(f(e)=e')$.

Exemple. 1. Morfismul constant $f_0:(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{Z},+)$, $f_0(x)=0$, are $\text{Ker} f=\mathbb{Z}$ şi $\text{Im} f=\{0\}$.

2. Morfismul $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$, $f(x)=e^x$ are $\text{Ker} f=\{0\}$ şi $\text{Im} f=(0,\infty)$.

3. Morfismul $\varepsilon:(S_n,\cdot)\to(\{-1,1\},\cdot)$, ε fiind funcția semn pentru permutări are $\text{Ker}\,\varepsilon=A_n$ (grupul altern) şi $\text{Im}\,\varepsilon=\{-1,1\}$.

4. Morfismul $f:(\mathbb{Z},+)\to(<a>,\cdot)$, $\text{ord}(<a>)=q$, $f(n)=a^n$ are $\text{Ker} f=\{l\cdot q \mid l\in\mathbb{Z}\}$ şi $\text{Im} f=<a>$.

5. Morfismul $f:(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)\to(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $f(A)=\det(A)$ are $\text{Ker} f=SL(n,\mathbb{R})$, $\text{Im} f=\mathbb{R}^*$.

6. Morfismul $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{C}^*,\cdot)$, $f(x)=\cos 2\pi x+i\sin 2\pi x$ are $\text{Ker} f=\mathbb{Z}$ şi $\text{Im} f=\{z\in\mathbb{C}^* \mid |z|=1\}$.

Ideea fundamentală care stă în „spatele“ cuvântului izomorfism este următoarea: grupurile care sunt izomorfe au aceeaşi structură relativ la operațiile respective ale grupurilor. Grupurile sunt din punct de vedere algebric aceleaşi, deşi elementele lor pot diferi sau legile să fie diferite.
Deoarece izomorfismul conservă operațiile între două grupuri, atunci este de aşteptat ca elementele neutre din cele două grupuri să se conserve, imaginea inversului să fie inversul imaginii, ordinul unui element să fie egal cu ordinul imaginii acelui element, etc.
Mai precis, formulăm următoarea:

Definiție. Fie $(G,*)$ şi $(G',\circ)$ două grupuri. O aplicație $f:G\to G'$ se numeşte **izomorfism de grupuri** dacă:

1) f este **morfism de grupuri**;
2) f este bijecție.

Dacă între două grupuri G, G' există cel puțin un izomorfism spunem că grupurile sunt izomorfe şi scriem $G\simeq G'$.

Observații. 1) Un izomorfism de grupuri este un izomorfism de monoizi.
2) Un izomorfism de grupuri $f:G\to G$ se numeşte **automorfism** al lui G. Altfel spus, un endomorfism bijectiv al lui G se numeşte automorfism al lui G. Mulțimea tuturor automorfismelor lui G se notează cu Aut (G). Arătați că $(\text{Aut}(G),\circ)$ este grup, unde „$\circ$“ este operația de compunere a funcțiilor.

3) Dacă $f: G \to G'$ este izomorfism de grupuri, atunci şi $f^{-1}: G' \to G$ are aceeaşi calitate (demonstraţi !).

Exemple cunoscute de izomorfisme de grupuri

1. Aplicaţia identică $1_G: G \to G, 1_G(x) = x$ este izomorfism de grupuri, deci este un automorfism al lui *G*.

2. Aplicaţia $f: (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}_+^*,\cdot)$, $f(x) = e^x$ este izomorfism de grupuri, deoarece am văzut la morfisme de grupuri că această aplicaţie este morfism şi în plus este bijectiv.

3. Morfismul $f: (\mathbb{Z},+) \to (<a>,\cdot), <a>$ grup ciclic infinit, $f(n) = a^n$ este izomorfism, deoarece această aplicaţie este bijectivă. Aşadar orice grup ciclic infinit este izomorf cu grupul aditiv al numerelor întregi.

4. Aplicaţiile $f_1, f_{-1}: (\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Z},+)$, $f_1(x) = x$, $f_{-1}(x) = -x$ sunt automorfisme ale lui $\mathbb{Z}$ (şi sunt singurele !).

5. Aplicaţia $f: (\mathbb{Z}_n,+) \to (U_n,\cdot)$, $f(\hat{k}) = \omega^k$, unde $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ (este bine definită adică dacă $\hat{l} = \hat{k} \Rightarrow f(\hat{l}) = f(\hat{k})$) este izomorfism de grupuri. Cum $f(\hat{k}+\hat{l}) = f(\widehat{k+l}) = \omega^{k+l} =$ $= \omega^k \cdot \omega^l = f(\hat{k})f(\hat{l})$ rezultă *f* este morfism.

De asemenea *f* este surjectiv (elementele lui U_n sunt puteri întregi ale lui ω) şi cele două mulţimi $\mathbb{Z}_n$ şi U_n au acelaşi număr de elemente rezultă *f* este bijectivă. Deci *f* este izomorfism.

Observaţie. Se poate arăta uşor că orice două grupuri ciclice finite având acelaşi ordin sunt izomorfe.

Dacă două grupuri sunt izomorfe, atunci ele se bucură de aceleaşi proprietăţi algebrice (dacă unul este comutativ, atunci şi celălalt este la fel; dacă unul este ciclic, la fel este şi celălalt). Prin urmare toate grupurile izomorfe între ele se comportă la fel. Clasa tuturor acestor grupuri formând ceea ce se numeşte tipul grupului.

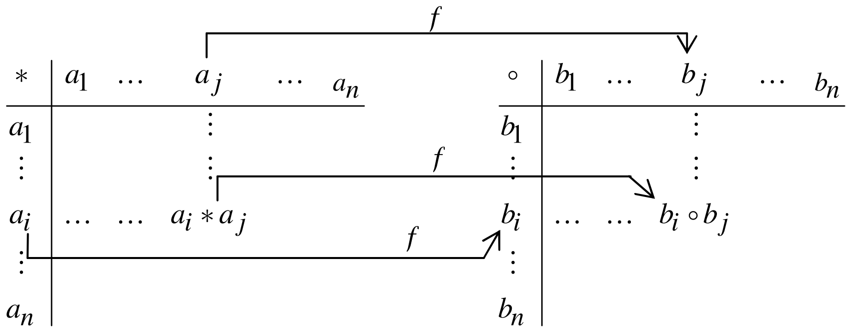
Pentru studiul algebric al acestor grupuri se alege unul dintre ele. Noţiunile de „grupuri izomorfe“ şi „tipul unui grup“ sunt analoge cu noţiunile de „mulţimi echipotente“ (două mulţimi *A*, *B* se numesc echipotente dacă există o aplicaţie bijectivă $f: A \to B$) şi „cardinalul unei mulţimi“ (cardinalul unei mulţimi *A* este clasa tuturor mulţimilor echipotente cu *A*) din teoria mulţimilor.

De exemplu, toate grupurile ciclice de ordin *n* constituie un tip de grupuri, iar un reprezentant al acestui tip este $(\mathbb{Z}_n,+)$ sau $(U_n,\cdot)$.

Grupul $(\mathbb{Z},+)$ este un reprezentant pentru toate grupurile ciclice infinite.

În cazul a două grupuri finite, de acelaşi ordin, izomorfismul între ele poate fi dedus utilizând tablele operaţiilor. Dacă cele două table sunt la fel organizate, adică un element dintr-un grup şi imaginea sa în celălalt grup prin izomorfism să ocupe în cele două table aceleaşi poziţii.

Dacă $(G,*)$, $(G',\circ)$, $G=\{a_1,...,a_n\}$, $G'=\{b_1,...,b_n\}$ sunt două grupuri izomorfe, atunci $f:G\to G'$, $f(a_i)=b_i$, $i=\overline{1,n}$ este izomorfism dacă şi numai dacă pentru orice $1\le i,\ j\le n$, imaginea prin f a elementului $a_i * a_j$ de la intersecția liniei lui a_i cu coloana lui a_j din tabla operației lui G coincide cu elementul $b_i \circ b_j$ de la intersecția liniei lui $b_i = f(a_i)$ cu coloana lui $b_j = f(a_j)$ din tabla operației lui G'.



Un element ajutător pentru aranjarea mai rapidă a tablelor este furnizat de următoarea:

Teoremă. Fie $(G_1,\cdot),(G_2,\cdot)$ două grupuri finite, iar $f:G_1\to G_2$ un izomorfism de grupuri. Dacă $x_1\in G_1$ şi $x_2=f(x_1)\in G_2$, atunci:

$$\operatorname{ord}(x_1)=\operatorname{ord} f(x_1).$$

Ordinul unui element este egal cu ordinul imaginii acestuia printr-un izomorfism de grupuri finite.

Deci, date fiind două grupuri finite se determină ordinele elementelor din cele două grupuri. Izomorfismul de construit între ele trebuie să ducă un element x_k din grupul G_1 în imaginea $f(x_k)$ din G_2, astfel încât $\operatorname{ord}(x_k)=\operatorname{ord}(f(x_k))$ şi $f(e_1)=e_2$, e_1,e_2 elementele neutre din cele două grupuri.

Aplicăm această schemă pentru a demonstra că grupul $(G=\{1,-1,i,-i\},\cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_4,+)$. Definim $f:G\to\mathbb{Z}_4$, prin $f(1)=\hat{0}$, $f(-1)=\hat{2}$, $f(i)=\hat{1}$, $f(-i)=\hat{3}$. Evident f este bijectivă. Pentru a arăta că f este izomorfism de la G la $\mathbb{Z}_4$, vom utiliza tabla operațiilor pe G şi $\mathbb{Z}_4$. Fiecărui element $x\in G$ îi construim imaginea

$f(x)$ din $\mathbb{Z}_4$. Deoarece tabla rezultată astfel este chiar tabla adunării pe $\mathbb{Z}_4$, deducem că are loc egalitatea $f(xy)=f(x)+f(y), (\forall)x,y\in G$. Deci f este izomorfism de grupuri, $G\simeq\mathbb{Z}_4$.

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Tabla lui G

$\xrightarrow{f}$

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

Tabla lui $f(xy)$

Altfel, pentru evidențierea izomorfismului să observăm că $\mathrm{ord}(i)=\mathrm{ord}(\hat{1})=4$ şi deci putem pune $f(i)=\hat{1}$. Analog, $\mathrm{ord}(-1)=$ $=\mathrm{ord}(\hat{2})=2$ şi avem $f(-1)=\hat{2}$. În fine, $\mathrm{ord}(-i)=\mathrm{ord}(\hat{3})=4$ şi punem $f(-i)=\hat{3}$, iar $f(1)=\hat{0}$. Altfel, izomorfismul îl realizăm uşor dacă observăm că $G=<i>=\left\{i^k \middle| k=\overline{0,3}\right\}$. Deci $f:G\to\mathbb{Z}_4$ este dat de $f\left(i^k\right)=\hat{k},\ k=\overline{0,3}$.

Probleme rezolvate

1. Să se demonstreze că: a) toate grupurile de ordin doi sunt izomorfe; b) toate grupurile de ordinul trei sunt izomorfe.

R. a) Fie $(G,\cdot)$ grup cu două elemente $G=\{e,a\}$. Tabla legii este:

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	e

Considerăm acum $(\mathbb{Z}_2,+)$ grupul aditiv al claselor de resturi modulo doi. Tabla legii este:

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$

Observăm că dacă notăm $f:G\to\mathbb{Z}_2,\ f(e)=\hat{0},\ f(a)=\hat{1}$, atunci cele două table sunt la fel de structurate (pozițiilor ocupate de *e* în prima tablă le corespunde $\hat{\mathbf{0}}$ în a doua tablă – am marcat elementele *e* şi $\hat{0}$ cu roşu în cele două table – şi lui *a* din prima tablă elementul $\hat{1}$ din a doua tablă), ceea ce arată că cele două grupuri sunt izomorfe.

Aşadar orice grup de ordinul doi este izomorf cu $(\mathbb{Z}_2,+)$ şi deci toate grupurile de ordin doi sunt izomorfe.

b) Se consideră grupul multiplicativ $(G=\{e,a,b\},\cdot)$ şi grupul aditiv $(\mathbb{Z}_3,+)$. Fie $f:G\to\mathbb{Z}_3$, $f(e)=\hat{0},\ f(a)=\hat{1},\ f(b)=\hat{2}$. Tabla grupului G şi cea rezultată înlocuind fiecare element $x\in G$ cu elementul $f(x)\in\mathbb{Z}_3$ sunt date mai jos.

$\cdot$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Tabla lui G

$\xrightarrow{f}$

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$

Tabla lui $f(xy)$

Observăm că tabla rezultată $(f(xy))$ este chiar tabla pentru adunarea pe $\mathbb{Z}_3$. Deci f este morfism. Cum f este și bijecție, deducem că f este izomorfism.

Se constată că cele două table sunt la fel structurate (pozițiilor lui e din prima tablă le corespunde $\hat{0}$ în a doua tablă, pozițiilor lui a din prima tablă le corespunde $\hat{1}$ din a doua tablă etc.), ceea ce arată că orice grup cu trei elemente este izomorf cu $(\mathbb{Z}_3,+)$. Așadar, toate grupurile de ordin trei sunt izomorfe.

Observație. Grupul $(G=\{f_1,f_2,f_3\},\circ)$ unde $f_i:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $f_3(x)=\dfrac{x-1}{x}$, este izomorf cu $(\mathbb{Z}_3,+)$.

2. Fie mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$. Să se arate că:

a) G formează grup comutativ în raport cu operația de înmulțire a matricelor; b) $(G,\cdot)\simeq(\mathbb{Z},+)$.

R. a) Fie $A_n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Atunci avem: $A_n\cdot A_m=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n+m\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A_{n+m}$, $n,m\in\mathbb{Z}$, ceea ce arată că înmulțirea pe G este lege de compoziție.
Să observăm că $A_n=A_m\Leftrightarrow n=m$.
Înmulțirea, matricelor întotdeauna este *asociativă*, deci și în acest caz particular. Din $A_nA_m=A_{n+m}=$ $=A_{m+n}=A_mA_n$ rezultă că înmulțirea este *comutativă* pe G.
Element neutru. Să arătăm că există $A_e\in G$ astfel încât $A_a\cdot A_e=A_a,(\forall)A_a\in G$ sau $A_{a+e}=A_a\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a+e=a,(\forall)a\in\mathbb{Z}$. De aici $e=0$. Așadar elementul neutru este $A_a=I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. *Elemente inversabile*. Fiind vorba de înmulțirea obișnuită și cum fiecare element A_n din G are $\det(A_n)=1\neq 0$ rezultă că fiecare A_n este inversabilă. Rămâne de arătat că și inversa lui A_n este tot în G. Din $A_n\cdot A_{n'}=A_0$ rezultă $A_{n+n'}=A_0$, adică $n+n'=0$ și deci $n'=-n\in\mathbb{Z}$. Așadar $(A_n)'=A_{-n}\in G$. Deci $(G,\cdot)$ este grup abelian.
b) Definim $f:\mathbb{Z}\to G, f(n)=A_n$ aplicația care realizează izomorfismul. Într-adevăr f este *morfism de grupuri* pentru că $f(n+m)=A_{n+m}=A_n\cdot A_m=f(n)f(m),\ (\forall)n,m\in\mathbb{Z}$.
Funcția f este *injectivă* deoarece din $f(n)=f(m)\Rightarrow A_n=A_m\Rightarrow n=m$.
Funcția f este *surjectivă* deoarece $(\forall)A_n\in G$, există $n\in\mathbb{Z}$ pentru care $f(n)=A_n$. Deci f este și bijectivă. În concluzie f este izomorfism de grupuri.

Probleme propuse

1. 1) Să se arate că aplicația $f:(\mathbb{Z},+)\to(U_n,\cdot),\ f(k)=\varepsilon^k$, unde $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ este morfism de grupuri.

2) Arătați că aplicația $f:(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{R}^*,\cdot),\ f(n)=\begin{cases}1, & n \text{ par}\\ -1, & n \text{ impar}\end{cases}$ este morfism de grupuri.

2. Să se arate că:
1) aplicația $x * y = x + y - 2$ determină pe $\mathbb{Z}$ o structură de grup abelian;
2) aplicația $x \circ y = x + y + 1$ determină pe $\mathbb{Z}$ o structură de grup abelian;
3) între grupurile de la 1) şi 2) există un izomorfism de forma $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x + a,\ a \in \mathbb{Z}$ ce se va determina.

3. Pe mulțimea $G = (-1,1)$ se consideră aplicația $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Arătați că:

a) $(G,*)$ este grup comutativ;

b) Între grupurile $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ şi $(G,*)$ se poate stabili un izomorfism de forma $f(x) = \dfrac{ax-1}{x+1}$ cu $a \in \mathbb{R}$ convenabil determinat.

4. 1) Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $*$ dată de $x * y = \sqrt[1995]{x^{1995} + y^{1995}}$. Arătați că $(\mathbb{R},*)$ este grup abelian izomorf cu $(\mathbb{R},+)$.

2) Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} x * y * (-2) = 1 \\ x^3 - y^3 = -7. \end{cases}$

5. Să se arate că: 1) aplicația $x \perp y = x^{\ln y}$ defineşte pe $G = (0,\infty) - \{1\}$ o structură de grup abelian. 2) $(G,\perp) \simeq (\mathbb{R}^*,\cdot)$.

6. a) Fie $a,b \in \mathbb{R}^*$. Se consideră pe $\mathbb{R}$ aplicația $x * y = ax + by + 1$.
1) Determinați pe a şi b astfel încât $(\mathbb{R},*)$ să fie grup.
2) Pentru a, b găsiți la 1), arătați că $(\mathbb{R},*)$ este izomorf cu $(\mathbb{R},+)$.
b) Pe $\mathbb{C}$ definim operațiile $x * y = x + y + ai,\ x \circ y = x + y - a,\ x,y \in \mathbb{C},\ a \in \mathbb{R}$. Arătați că:
1) $(\mathbb{C},*), (\mathbb{C},\circ)$ sunt grupuri abeliene.
2) $f : (\mathbb{C},*) \to (\mathbb{C},\circ),\ f(z) = iz$ este izomorfism de grupuri.

7. Fie $\mathbb{Z}_{12}$ grupul aditiv al claselor de resturi modulo 12 şi G mulțimea elementelor inversabile. Arătați că înmulțirea pe G determină o structură de grup abelian izomorf cu grupul lui Klein.

8. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in [-\pi,\pi) \right\}$. Arătați că G are o structură de grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor, izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor complexe de modul 1.

9. Se consideră mulțimile:

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & 3b \\ 2b & a-2b \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{Q}, a^2 - 10b^2 = 1 \right\},$$

$$G_2 = \{ a + b\sqrt{10} \mid a,b \in \mathbb{Q}, a^2 - 10b^2 = 1 \}.$$

a) Arătați că $(G_1,\cdot), (G_2,\cdot)$ sunt grupuri abeliene infinite;

b) $(G_1,\cdot) \simeq (G_2,\cdot)$.

10. 1) Se consideră mulțimile: $G_1 = \left\{ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$,

$$G_2 = \left\{ e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Arătați că: a) G_1 este grup în raport cu înmulțirea matricelor; b) G_2 este grup în raport cu compunerea permutărilor. c) $(G_1,\cdot) \simeq (G_2,\circ)$

2) Să se arate următoarele izomorfisme de grupuri:

a) $(\mathbb{Z}_4,+) \simeq (\mathbb{Z}_5^*,\cdot)$; b) $(G=\{\pm 1,\pm i\},\cdot) \simeq (H,\cdot)$, unde $H=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$;

c) $(G=\{I_2, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\},\cdot) \simeq (H=\{e,\rho,\rho^2,\sigma,\gamma,\delta\},\circ)$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $M_1=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$, $M_3=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $M_4=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}$, $M_5=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, iar $e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, $\rho=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $\gamma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, $\delta=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$; d) $(\mathbb{Z}(\sqrt{3}),+) \simeq (\mathbb{Z}(\sqrt{5}),+)$.

11. Fie mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}1&1&x\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\middle| x\in 2\mathbb{Z}+1\right\}$.

a) Arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian. b) $(G,\cdot)\simeq(2\mathbb{Z},+)$; c) $(2\mathbb{Z},+)\simeq(3\mathbb{Z},+)$; d) Determnați $\mathrm{Aut}(3\mathbb{Z},+)$.

12. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\{A^k \mid k\in N^*\}$. Considerăm $G_1=\{e, \sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$, unde

$e=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$, $\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$, $\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$, $\sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$.

Arătați că: a) G este grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor; b) G_1 este grup abelian în raport cu operația de compunere a permutărilor; c) $G\simeq G_1$; d) G este izomorf cu grupul multiplicativ $G_2=\left\{\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4};\ k\in\overline{1,4}\right\}$?

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noțiuni. Proprietăți	Explicitare. Notații	Exemple
Lege de compoziție internă $M \neq \varnothing$ $f : M \times M \to M$	$(x,y) \to f(x,y)$. **Pentru** f **se utilizează diverse notații:** $*, \circ, \top, \bigcup, \oplus ...$ (M, f) = **structură algebrică**	**1)** $M = (1,2)$ **cu** $x * y = xy - x - y + 2$. **Pentru** $x, y \in M$ **să arătăm că** $x * y \in M$. **Observăm că** $x \in M \Leftrightarrow 1 < x < 2 \Leftrightarrow 0 < x - 1 < 1$, **evident. Deci,** $x * y \in M \Leftrightarrow 0 < x * y - 1 < 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0 < (x-1)(y-1) < 1$ **evident.** **2)** $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle\| a \in \mathbb{R} \right\}$ **cu operația de înmulțirea a matricelor.** **Pentru** $A(a), A(b) \in M$ **să arătăm că** $A(a)A(b) \in M$. **Avem:** $A(a)A(b) = A(a+b) \in M$.
	M **finită, legea se dă prin tabla legii (Cayley):** $\begin{array}{c\|ccc} * & \cdots & a_j & \cdots \\ \hline \vdots & & \vdots & \\ a_i & \cdots & a_i * a_j & \\ \vdots & & & \end{array}$	$M = \{1,2,3\}$ **cu** $x * y = \min(x,y)$ $\begin{array}{c\|ccc} * & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}$
Parte stabilă $(M, *)$ **structură algebrică,** $H \subset M$, $H \neq \varnothing$ **este parte stabilă a lui** M **în raport cu „** $*$ **“**	$\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$	**1)** $M = \{0,1,2,3\}$ **cu** $x * y$ = **restul împărțirii lui** $x + y$ **la 4, este parte stabilă a lui** N. **Rezultă din tabla legii** $\begin{array}{c\|cccc} \oplus & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{array}$ **2)** $M = \left\{ A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \middle\| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ **este parte stabilă a lui** $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **în raport cu înmulțirea matricelor.** **Trebuie probat că pentru** $A(\alpha), A(\beta) \in M \Rightarrow$ $\Rightarrow A(\alpha)A(\beta) \in M$. **Avem** $A(\alpha)A(\beta) =$ $= A(\alpha + \beta) \in M$.
Proprietăți generale ale legilor de compoziție:	$(M, *)$ **structură algebrică**	$M = \mathbb{R}$ **cu** $x * y = x + y - 1$
P$_1$. Asociativitatea	$(x * y) * z = x * (y * z)$, $(\forall) x, y, z \in M$	**Avem:** $(x * y) * z = (x + y - 1) * z =$ $= x + y - 1 + z - 1 =$ $= x + y + z - 2$ **(1)**

		$x*(y*z)=x*(y+z-1)=$ $=x+y+z-1-1=$ $=x+y+z-2$ (2) **Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ „ $*$ “ este asociativă**
P_2. Comutativitatea	$x*y=y*x, \forall x,y\in M$	$M=\left\{A(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle\| \alpha\in\mathbb{R}\right\}$ **cu înmulțirea matricelor. Trebuie arătat că :** $A(\alpha), A(\beta)\in M \Rightarrow A(\alpha)A(\beta)=A(\beta)A(\alpha)$ **Avem:** $A(\alpha)A(\beta)=A(\alpha+\beta)=A(\beta+\alpha)=A(\beta)A(\alpha)$ **deoarece** $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
P_3. Elementul neutru	**$e\in M$ este element neutru pentru „ $*$ “ dacă** $x*e=e*x=x, \forall x\in M$	$M=\mathbb{R}$ **cu** $x*y=xy+x+y$ $x*e=x, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow xe+x+e=x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x(e+1)=0 \Rightarrow e=-1$
P_4. Elemente simetrizabile $(x')'=x$ $(x*y)'=y'*x'$	**$x\in M$ este simetrizabil în raport cu „ $*$ “ dacă există $x'\in M$ cu** $x*x'=x'*x=e$ **• Dacă $*=+$, atunci x' este opusul lui x, $x'=-x$** **• Dacă $*=\cdot$, atunci x' este inversul lui x, $x'=x^{-1}$**	$M=\mathbb{Z}$ **cu** $x*y=x+y-xy$ **Se obține: $e=0$.** **Din** $x*x'=0 \Rightarrow x+x'-xx'=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x'(1-x)=-x \Rightarrow x'=-\dfrac{x}{1-x}, x\neq 1$ **Din** $x'\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\{0,2\}$. **Pentru $x=0 \Rightarrow x'=0$; pentru $x=2 \Rightarrow x'=2$**
Monoid $(M,*), M\neq\varnothing$ **cu axiomele:** **M_1) „ $*$ “ asociativă** **M_2) element neutru**	M_1) $(x*y)*z=x*(y*z)$, $\forall x,y,z\in M$ M_2) $\exists e\in M$ **, astfel încât** $x*e=e*x=x$, $\forall x\in M$	$(\mathbb{Z},+)$ **= monoid aditiv al numerelor întregi.** **M_1) + este asociativă pe $\mathbb{Z}$** **M_2) $e=0$, deoarece** $x+0=0+x=x, \forall x\in\mathbb{Z}$
Grup $(G,*), G\neq\varnothing$ **cu axiomele:** **G_1) „ $*$ “ asociativă** **G_2) element neutru** **G_3) elemente simetrizabile**	G_1) $(x*y)*z=x*(y*z)$, $\forall x,y,z\in G$ G_2) $\exists e\in G, x*e=e*x=x$, $\forall x\in G$ G_3) $x\in G, \exists x'\in G, x*x'=$ $=x'*x=e, \forall x\in G$.	$G=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}, x*y=2xy-x-y+1$ G_1) $(x*y)*z=(2xy-x-y+1)*z=$ $=2(2xy-x-y+1)z-2xy+x+y-1-z+1=$ $=4xyz-2(xy+xz+yz)+x+y+z,$ (1) $x*(y*z)=x*(2yz-y-z+1)=$ $=2x(2yz-y-z+1)-x-(2yz-y-z+1)+1=$ $=4xyz-2(xy+xz+yz)+x+y+z$ (2) **1) şi (2) $\Rightarrow$ „ $*$ “ asociativă;** G_2) $x*e=x, \forall x\in G \Leftrightarrow 2xe-x-e+1=x,$ $\forall x\in G \Leftrightarrow e(2x-1)=2x-1, \forall x\in G \Rightarrow$ $\Rightarrow e=1\in G$ G_3) $x\in G, \exists x'\in G, x*x'=e \Rightarrow$ $2xx'-x-x'+1=1 \Leftrightarrow x'=\dfrac{x}{2x-1}$ **Avem** $x'\neq\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x\neq 2x-1$

Grupuri speciale: **1) Grup abelian** **Grupul $(G,*)$ este abelian (comutativ) dacă: G$_4$) „ $*$ “ comutativă**	**G$_4$) $x * y = y * x, \forall x, y \in G$**	**G$_4$)** $x * y = 2xy - x - y + 1 = 2yx - y - x + 1 =$ $= y * x, \forall x, y \in G$
2) Grup ciclic generat de $x \in G$. **Ordinul unui element $x \in G$**	$< x >= \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, **puterile întregi ale lui x.** **ord(x) = n dacă $x^n = e$ şi $n \in N$ este cel mai mic număr cu această proprietate.**	$i \in \mathbb{C} \Rightarrow < i >= \{i^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{-1, 1, -i - i\}$. **ord (–1) = 2 pentru că $(-1)^2 = 1$, ord (i)=4 deoarece $i^4 = 1$**
3) Grup finit **G are un număr finit de elemente. Acest număr este ordinul grupului**		**1) Grupul rădăcinilor de ordin n ale unității** $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}, (U_n, \cdot)$ **2) grupul claselor de resturi modulo n în raport cu adunarea:** $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, ..., \widehat{n-1}\}, (\mathbb{Z}_n, +)$
Morfism de grupuri	$(G_1, *)$, $(G_2, \circ)$ **grupuri.** $f : G_1 \to G_2$ **este morfism de grupuri dacă** $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$ $\forall x, y \in G_1$	$f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot), f(x) = e^x$ $f(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x)f(y),$ $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$
Izomorfism de grupuri	$f : G_1 \to G_2$ **, dacă** **1) f este bijectivă;** **2) f este morfism de grupuri**	$(\mathbb{R}, +) \simeq ((0, \infty), \cdot)$ $f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = e^x$. **1) f este bijectivă** **2) f este morfism de grupuri** $f(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x)f(y),$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Teste de evaluare

TESTUL 1

VARIANTA A

1. Fie $G=(2,\infty)$ şi pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție: $x*y=xy-2x-2y+a,\ x,y,a\in\mathbb{R}$. Să se determine a astfel încât G să fie parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$".

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se consideră legea de compoziție internă $x*y=xy+x+my$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât legea să fie asociativă.

3. Fie $a,b\in\mathbb{R}^*$. Pe mulțimea $(0,\infty)$ definim operația $x*y=e^{a\ln x-b\ln y},\quad \forall x,y>0$. Să se determine a şi b astfel încât legea să fie comutativă şi asociativă.

4. Pe mulțimea $E=\{1,2,3,4\}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=$ restul împărțirii lui x^y la 5, pentru orice $x,y\in E$. Fie $A=\{x\in E\,|\,4*x=1\}$, $S=\sum\limits_{x\in A}x$, $B=\{x\in E\,|\,x*4=3\}$. Să se determine S şi B.

5. Fie mulțimea matricelor:

$$M=\left\{A(a)\,\middle|\,A(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}\right\}.$$

1) Demonstrați că M împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează grup abelian.
2) Arătați că grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(M,\cdot)$ sunt izomorfe.
3) Calculați $A^n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

6. Se consideră în $\mathbb{Z}_7$ sistemul :

$$\begin{cases} ax+\hat{3}y+\hat{3}z=\hat{2}\\ \hat{6}x+\hat{4}y+\hat{2}z=\hat{6}\\ \hat{3}x+\hat{2}y+\hat{4}z=\hat{3}.\end{cases}$$

Fie $A=\{a\in\mathbb{Z}_7\,|\,\text{sistemul este compatibil}\}$, $S=\sum\limits_{a\in A}a$ şi $V=\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2$, unde $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ este soluția sistemului pentru $a=\hat{2}$. Să se determine S şi V.

VARIANTA B

1. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care mulțimea $A=[a,\infty)$ este parte stabilă față de operația $x*y=xy+x+y$.

2. Să se determine valorile parametrului real a, astfel încât legea de compoziție pe $\mathbb{R}$, definită prin $x*y=a(x+y)-xy, \forall x,y\in\mathbb{R}$ să fie asociativă.

3. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=xy+2ax+by,\ x,y,a,b\in\mathbb{R}$. Determinați toate valorile lui a şi b astfel încât legea să fie comutativă şi asociativă.

4. Pe mulțimea $G=(2,\infty)$ se defineşte legea de compoziție $x*y=xy-2x-2y+6$, $\forall x,y\in G$. Fie S_1 suma elementelor nesimetrizabile în raport cu legea „$*$" şi S_2 suma soluțiilor ecuației $x*x=11$. Să se precizeze S_1 şi S_2.

5. Fie mulțimea matricelor:

$$G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^x\end{pmatrix}\,\middle|\,x\in\mathbb{R}\right\}.$$

1) Arătați că G împreună cu operația de înmulțire a matricelor este grup comutativ.
2) Arătați că grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(G,\cdot)$ sunt izomorfe.
3) Să se calculeze $A^n(2)$.

6. Se consideră sistemul de ecuații cu coeficienți în $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} x+y+z=\hat{1}\\ \hat{2}x+\hat{3}y+z=\hat{1}\\ \hat{4}x+\hat{4}y+\hat{3}z=\hat{1}.\end{cases}$$

Fie Δ, S determinantul sistemului şi respectiv suma soluțiilor. Să se determine Δ şi S.

7. Să se arate că mulţimea:

$$H=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$$

este subgrup al matricelor pătratice de ordin doi inversabile în raport cu înmulţirea.

7. Să se arate că mulţimea:

$$H=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$$

este subgrup al matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversabile în raport cu înmulţirea.

TESTUL 2

VARIANTA A

1. Pe $\mathbb{C}$ definim operaţia $z_1 * z_2 = (1-i)z_1 z_2$.

1) Este asociativă legea „ $*$ “?

2) Să se determine elementul neutru al operaţiei.

3) Să se rezolve ecuaţia $z*(1+i)=2i$, $z\in\mathbb{C}$.

2. Pe intervalul $(1,\infty)$ se consideră operaţia: $x*y=1+(x-1)^{\lg(y-1)}$. Să se arate că:

1) legea „ $*$ “ este o lege de compoziţie pe $(1,\infty)$;

2) legea „ $*$ “ este asociativă şi comutativă.

3. Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legea:

$x*y=xy+ax+7y+b$, $a,b\in\mathbb{R}$

Să se determine a, b pentru care legea „ $*$ “ este asociativă.

4. Să se determine valorile parametrului real λ astfel încât intervalul $(1,\infty)$ să fie parte stabilă a mulţimii $\mathbb{R}$ în raport cu legea: $x*y=xy-x-y+\lambda-2$.

5. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie:

$a*b=3a+3b+5ab+2$,

$a\circ b=2a+2b+2ab+1$.

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}(x+y)*4=60\\(x-y)\circ 3=39.\end{cases}$$

6. Fie $t\in\mathbb{R}$ fixat. Pentru $a>0$ definim

$$f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}ax+t-at,\ x<t\\ \dfrac{1}{a}x+r-\dfrac{t}{a},x\geq t.\end{cases}$$

1) Să se arate că $M=\{f_a \mid a>0\}$ are structură de grup în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor.

2) Să se arate izomorfismul de grupuri: $(M,\circ)\simeq(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

VARIANTA B

1. Pe $\mathbb{C}$ se defineşte operaţia: $z_1*z_2= =z_1z_2+i(z_1+z_2)-1-i$.

1) Să se arate că „ $*$ “ este asociativă.

2) Să se determine elementul neutru.

3) Să se rezolve ecuaţia $z*(2-i)=3+i$, $z\in\mathbb{C}$.

2. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care legea $x*y=xy+3x+5y+m$ este asociativă pe $\mathbb{R}$.

3. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea :

$x*y=xy+a(x+y), a\in\mathbb{R}$.

Să se determine a pentru care „ $*$ “ este asociativă.

4. Pe $\mathbb{R}$ definim operaţia $x*y=xy- -4(x+y)+\alpha$. Să se determine $\alpha\in\mathbb{R}$ pentru care mulţimea $G=[4,\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „ $*$ “.

5. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $a*b=ab-2(a+b)+6$. Fie S suma elementelor din $\mathbb{R}$ care coincid cu simetricele lor faţă de legea „ $*$ “ şi

$A=\{x\in\mathbb{R} \mid x*x*x+25=0\}$.

Precizaţi S şi A.

6. Se consideră funcţiile:

$$f_i:\mathbb{R}-\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}\to\mathbb{R}, f_1(x)=x,\ f_2(x)=\frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}},$$

$$f_3(x)=\frac{x-\sqrt{3}}{1+x\sqrt{3}}.$$

1) Să se arate că $G=\{f_1,f_2,f_3\}$ este grup în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor.

2) Să se demonstreze izomorfismul de grupuri: $(G,\circ)\simeq\left(\left\{1,\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\},\cdot\right)$.

7. Fie $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}_7\right\}$. Să se determine ord (A), unde $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{1}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$.

7. Fie $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}_7\right\}$. Să se determine ord (A), unde $A=\begin{pmatrix}\hat{3} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$.

TESTUL 3 (grilă)

VARIANTA A

1. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-2x-2y+m, m\in\mathbb{R}$. Legea de compoziţie admite element neutru pentru:
a) $m=4$; b) $m=6$; c) $m=-6$.

2. Fie $M=\left\{A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & x\end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}^*\right\}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

şi operaţia de înmulţire a matricelor. Atunci elementul neutru din M în raport cu înmulţirea este:

a) I_3; b) nu există; c) $A\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. Pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=\ln(e^x+e^y)$. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $(x*x)*x=0$ este:

a) $\{-\ln 3\}$; b) $\{\ln\sqrt{3}\}$; c() $\left\{-\ln\frac{1}{3}\right\}$.

4. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_7$ a claselor de resturi modulo 7 definim legea de compoziţie $a*b=ab+\hat{5}(a+b)+\hat{6}$. Dacă x' este simetricul lui x în raport cu legea de compoziţie „$*$", notăm $A=\{x\in\mathbb{Z}_7 \mid x'=x\}$. Atunci:

a) $A=\{\hat{1},\hat{2}\}$; b) $A=\{\hat{1},\hat{3}\}$; c) $A=\{\hat{2},\hat{4}\}$.

5. În $\mathbb{Z}_8$ se consideră sistemul:

$$\begin{cases}\hat{2}x+y+\hat{4}z=\hat{2}\\ \hat{3}x+\hat{2}y+z=\hat{4}\\ \hat{6}x+\hat{4}y+\hat{5}z=\hat{1}.\end{cases}$$

Dacă Δ este determinantul matricei sistemului, $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ soluţia sistemului şi $\alpha=\tilde{x}^2+$

VARIANTA B

1. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-ax+by$. Valorile lui a, b pentru care $(\mathbb{R},*)$ este monoid sunt:

a) $(a=b=0$ sau $a=-1, b=1)$; b) $a=1$, $b=-1$; c) $a=1, b=2$.

2. Fie $M=\left\{A(x)=\begin{pmatrix} 3^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x & 1\end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

şi operaţia de înmulţire a matricelor. Atunci elementul neutru din M în raport cu înmulţirea este:

a) $A(1)$ b) $A(0)$; c) $A\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. Pe $\mathbb{C}$ se consideră legea de compoziţie: $x*y=xy-i(x+y)-1+i$. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $(x*x)*x=1+i$ este:

a) $\{\pm 1,\pm i\}$; b) $\{\pm i, 1\pm i\}$; c) $\{1\pm i, 0, 2i\}$.

4. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie: $x*y=2xy-3x-3y+6$. Dacă p este numărul elementelor simetrizabile în raport cu legea „$*$", atunci:

a) $p=1$; b) $p=2$; c) $p=3$.

5. În $\mathbb{Z}_5$ se consideră sistemul:

$$\begin{cases}\hat{3}x+\hat{2}y+z=\hat{1}\\ x+\hat{3}y+\hat{2}z=\hat{3}\\ \hat{2}x+y+\hat{3}z=\hat{0}.\end{cases}$$

Dacă Δ este determinantul matricei sistemului, $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ este soluţia sistemului, iar

$+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2$, atunci:

a) $\Delta=\hat{3}, \alpha=\hat{2}$; b) $\Delta=\hat{5}, \alpha=\hat{4}$; c) $\Delta=\hat{3}$, $\alpha=\hat{5}$.

6. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie:

$$x*y=2xy-6x-6y+21.$$

Atunci: $\underbrace{x*x*...*x}_{n}$, $x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$ este egal cu:

a) $2^{n-1}(x-3)^n+3$;

b) $2^{n-1}(x-6)^n+3$; c) $2^{n-1}(x-2)^n+3$.

7. Fie $G=(2,\infty)$ şi legea $x\circ y=xy-2x-y+6$ şi $G'=(3,\infty)$ şi legea $x*y=xy-3x-3y+12$, iar $f:G\to G'$ izomorfism de grupuri, $f(x)=mx+n$. Atunci:

a) $m=n=1$; b) $m=n=-1$; c) $m=1$, $n=-1$.

$\beta=\bar{x}^{-2}+\bar{y}^{-2}+\bar{z}^{-2}$, atunci:

a) $\Delta=\hat{3}, \beta=\hat{3}$; b) $\Delta=\hat{3}, \beta=\hat{1}$; c) $\Delta=\hat{5}$, $\beta=\hat{3}$.

6. Pe $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ se defineşte legea de compoziţie: $x*y=2xy-x-y+1$. Atunci: $\underbrace{x*x*...*x}_{n}$, $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}, n\in\mathbb{N}^*$ este egal cu:

a) $\frac{1}{2}(2x-1)^n+1$; b) $\frac{1}{2}(2x-1)^n+\frac{1}{2}$;

c) $\frac{1}{2}(2x-1)^n+\frac{1}{3}$.

7. Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legile: $x\circ y=x+y+5$, $x*y=x+y-5$, iar $f:(\mathbb{Z},\circ)\to(\mathbb{Z},*)$, $f(x)=x+m, m\in\mathbb{R}$ un izomorfism de grupuri. Atunci:

a) $m=1$; b) $m=10$; c) $m=9$.

2. INELE ŞI CORPURI

În acest capitol se studiază două structuri algebrice mai complexe decât cele abordate în capitolul precedent şi anume cele de inel şi corp. Se consideră o mulţime nevidă împreună cu două operaţii şi un set de axiome pentru aceste operaţii. Sunt ilustrate exemple semnificative de inele şi corpuri. Se dau reguli generale de calcul într-un inel şi corp. O atenţie specială este acordată inelului de polinoame, de nedeterminată X, cu coeficienţi în corpul $K \in \left\{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, p \text{ prim}\right\}$, $K[X]$.

Este prezentată aritmetica acestui inel în care domină cele două teoreme fundamentale: teorema împărţirii cu rest şi teorema de descompunere în factori ireductibili. Numeroasele exemple vin să ilustreze partea teoretică. Sunt prezentate, în particular, polinoame cu coeficienţi în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$ şi se dau caracterizări ale rădăcinilor acestora; se evidenţiază relaţiile între rădăcinile polinomului şi coeficienţii acestuia (relaţiile lui Viète).

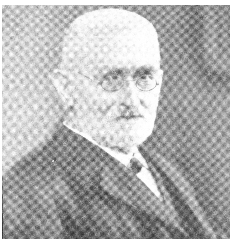
Ultima parte a capitolul se referă la rezolvarea ecuaţiilor cu coeficienţi întregi, raţionali, reali, complecşi. Problemele rezolvate conţin una sau mai multe metode de abordare prezentate detaliat.

Problemele propuse ilustrează prin varietate toate conceptele teoretice discutate, ele având corespondent în problemele rezolvate.

Istoric. **Conceptele de inel şi corp s-au impus în secolele XIX–XX. Matematicianul german Dedekind (1831–1916) – şi-a luat doctoratul sub conducerea lui Gauss (1777–1855) – este considerat „fondatorul algebrei abstracte". El a introdus conceptele de inel şi corp. Dedekind este cunoscut în analiza matematică prin tehnica de construcţie a numerelor reale utilizând conceptul de „tăietură" (a lui Dedekind). Contribuţii remarcabile în domeniul algebrei abstracte a avut matematiciana germană Emmy Noether (1882–1935).**

Problema rezolvabilităţii ecuaţiilor a fost tratată de Lagrange, Ruffini şi Abel.

Dar cel care o abordează aprofundat este E. Galois (1811–1832). F. Viète (1540–1603, matematician francez) este considerat unul dintre creatorii algebrei, stabilind relaţii între rădăcinile şi coeficienţii unei ecuaţii algebrice.

PIONIERI AI MATEMATICII	
R. DEDEKIND (1831–1916)	A.E. NOETHER (1882–1935)
Matematicieni germani	
	
CONTRIBUŢII	CONTRIBUŢII
• *algebră abstractă* • *analiză matematică*	• *algebră abstractă* • *teoria relativităţii*

2.1. INELE

1. DISTRIBUTIVITATE

Structurile algebrice ($\mathbb{Z}$, +), ($\mathbb{Z}, \cdot$) au fost pentru noi primele exemple de monoizi. Mai mult ($\mathbb{Z}$, +) a devenit mai târziu grup abelian (chiar ciclic). Totuşi, aşa cum aţi avut ocazia să studiaţi până acum în liceu, aceste structuri sunt reunite împreună pentru a da ceea ce se numeşte în matematică structura de inel. Una din legile importante ale aritmeticii elementare este distributivitatea înmulţirii în raport cu adunarea $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$, $(\forall)a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Dacă se încearcă să se reunească, de exemplu, structurile algebrice ($\mathbb{Z}$, +), ($\mathbb{Z}, \circ$), unde $a \circ b = a + b + ab$ nu mai are loc distributivitatea legii $\circ$ în raport cu legea +

deoarece $\quad a \circ (b + c) = a + b + c + a(b + c) = a + b + c + ab + ac$, $\quad$ (1)

iar $\quad a \circ b + a \circ c = a + b + ab + a + c + ac = 2a + b + c + ab + ac$, $\quad$ (2)

ceea ce arată că $(\exists)a, b, c \in \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ (b + c) \neq a \circ b + a \circ c$.

> **Definiţie.** Fie $*$ şi $\circ$ două operaţii pe aceeaşi mulţime *M*.
> Se spune că operaţia $*$ este **distributivă la stânga** faţă de operaţia $\circ$ dacă:
> $$x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z),\ (\forall)x, y, z \in M, \qquad (1).$$
> Se spune că operaţia $*$ este **distributivă la dreapta** faţă de operaţia $\circ$ dacă:
> $$(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x),\ (\forall)x, y, z \in M, \qquad (2).$$
> Se spune că operaţia $*$ este **distributivă** faţă de operaţia $\circ$ dacă este **distributivă la dreapta şi la stânga,** adică dacă au loc (1) şi (2).

Pentru a arăta că legea „$*$“ nu este distributivă în raport cu legea „$\circ$“ găsim $x, y, z \in M$ pentru care $x * (y \circ z) \neq (x * y) \circ (x * z)$ sau $(y \circ z) * x \neq (y * x) \circ (z * x)$.

Observaţii. 1) Dacă operaţia $*$ este **comutativă,** atunci (1) şi (2) sunt evident echivalente şi deci se reţine ca definiţie una din ele.

2) Dacă $H \subset M$ stabilă faţă de operaţiile $*$ şi $\circ$ iar $*$ este distributivă în raport cu $\circ$ atunci proprietatea se păstrează şi pe submulţimea *H*.

Exemple cunoscute

1. Înmulţirea este distributivă în raport cu adunarea pe $\mathbb{C}$ (şi evident pe submulţimile lui $\mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$).

2. În mulţimea matricelor pătratice $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ înmulţirea este distributivă în raport cu adunarea (cum înmulţirea matricelor nu este comutativă; aici putem vorbi de distributivitate laterală, la stânga şi la dreapta a înmulţirii faţă de adunare).

3. **Pe $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ considerăm adunarea şi compunerea funcţiilor. Atunci se ştie compunerea funcţiilor este distributivă în raport cu adunarea funcţiilor (Cum prima operaţie, compunerea, nu este comutativă şi aici se poate vorbi de distributivitate laterală) când avem:**

$$f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h \text{ şi } (g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f, (\forall) f, g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}).$$

4. **Pe mulţimea $\mathcal{P}(M)$ a părţilor lui M, am definit operaţiile $\cup$ (reuniune) şi $\cap$ (intersecţie). Ştim că una din legi este distributivă în raport cu cealaltă, adică**

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\ (\forall) A, B, C \in \mathcal{P}(M).$

Alte exemple

1. **Pe mulţimea numerelor reale se consideră legile de compoziţie:**

a) $x \circ y = x + y - 1,\quad x * y = x + y - xy$;

b) $x \circ y = x + y - 5,\quad x * y = 3xy - 15(x+y) + 80$;

Arătaţi că pentru fiecare caz a doua lege este distributivă în raport cu prima lege.

R. Pentru fiecare caz trebuie să verificăm egalitatea (deoarece $*$ este comutativă):

$$x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z), (\forall) x,\ y,\ z \in \mathbb{R}.$$

Se calculează separat fiecare membru şi apoi se compară.

a) Avem: $x * (y \circ z) = x * (y + z - 1) = x + y + z - 1 - x(y + z - 1) = 2x + y + z - xy - xz - 1$ (1) şi $(x * y) \circ (x * z) = (x + y - xy) \circ (x + z - xz) = (x + y - xy) + (x + z - xz) - 1 = 2x + y + z - xy - xz - 1$ (2).

Din (1) şi (2) se deduce egalitatea celor doi membri. Prin urmare $*$ este distributivă în raport cu $\circ$.

b) Exerciţiu.

Probleme propuse

1. **Arătaţi că a doua lege de compoziţie este distributivă în raport cu prima lege pe mulţimea M în cazurile:**

a) $x \circ y = x + y + 1, x * y = xy + x + x, M = \mathbb{Z}$;

b) $x \circ y = x + y - 3, x * y = xy + 3(x + y) + 6, M = \mathbb{Z}$;

c) $x \circ y = x + y - 3, x * y = 3(x + y) - xy - 6, M = \mathbb{R}$;

d) $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2, z_1 * z_2 = a_1a_2 + ib_1b_2, M = \mathbb{C}, z_k = a_k + ib_k, k = 1,2$.

2. **Pe $\mathbb{R}$ se consideră legile de compoziţie: $x \circ y = x + y + a, x * y = xy + 2x + 2y + b,\ a,b \in \mathbb{C}$**
Să se determine a, b, astfel încât a doua lege să fie distributivă în raport cu prima lege.

3. **Pe $\mathbb{C}$ se consideră legile de compoziţie: $x \circ y = x + y + i, x * y = xy + ax + by + c,\ a, b, c \in \mathbb{C}$.**
Să se determine a, b, c astfel încât a doua lege să fie distributivă în raport cu prima lege.

4. Pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se definesc legile de compoziţie: $A \circ B = A + B + cI_2,\ A * B = AB + a(A+B) + bI_2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determinaţi a, b, c pentru care a doua lege este distributivă în raport cu prima lege.

2. INELE

Definiție. Se numeşte **inel unitar** un triplet $(A, +, \cdot)$, $A \neq \varnothing$ unde + şi $\cdot$ sunt două operații pe *A*, numite **adunarea** şi respectiv **înmulțirea** pentru care:

$A_1)$ $(A, +)$ este grup abelian;

$A_2)$ $(A, \cdot)$ este monoid;

$A_3)$ Înmulțirea este **distributivă** față de adunare.

Dacă, în plus, înmulțirea pe *A* este **comutativă**, adică $xy = yx, (\forall) x, y \in A$, atunci spunem că inelul este comutativ.

Observații. 1) Folosim pentru inel ca mulțime litera *A* de la cuvântul *anneau* (din franceză) care înseamnă inel.

2) Inelul va fi notat de regulă cu $(A, +, \cdot)$ punând în evidentă în acest fel rolul diferit al celor două operații; prima operație va fi totdeauna cea față de care mulțimea *A* are structură de grup comutativ. Structura $(A, +)$ se numeşte **grupul aditiv al inelului**. Elementul neutru al grupului $(A, +)$, notat cu 0, se numeşte **elementul nul al inelului**. A doua operație este cea distributivă față de prima şi în plus $(A, \cdot)$ este monoid numit **monoidul multiplicativ al inelului**. Se vede că mulțimea *A* are o structură mai săracă față de cea de-a doua operație, cea multiplicativă. Pentru un inel unitar, elementul neutru în raport cu înmulțirea va fi notat cu simbolul 1, numit **element unitate** al inelului. Axioma $A_3)$ face legătura între cele două operații.

3) Explicitând condițiile din definiția inelului avem:

$A_1)$ $(A, +)$ **grup abelian** $\Leftrightarrow \begin{cases} G_1)\ + \text{ este asociativă;} \\ G_2)\ + \text{ este comutativă;} \\ G_3)\ + \text{ admite element neutru, notat cu 0, numit} \\ \qquad \textbf{element nul;} \\ G_4)\ \text{Orice element din } A \text{ are un opus față de } +. \end{cases}$

$A_2)$ $(A, \cdot)$ **monoid** $\Leftrightarrow \begin{cases} M_1)\ \text{Înmulțirea este asociativă;} \\ M_2)\ \text{Înmulțirea are element neutru.} \end{cases}$

$A_3)$ înmulțirea este distributivă față de adunare. Grupul de axiome $G_1) - G_4)$, $A_2)$ şi $A_3)$ se numesc **axiomele inelului**.

Definiție.* Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. O submulțime A' nevidă a inelului *A* se numeşte **subinel** al inelului *A*, dacă legile de compoziție din *A* induc legi de compoziție pe A' împreună cu care A' formează un inel.

* Facultativ.

Observație. Putem reformula definiția şi astfel:

Dacă $(A,+,\cdot)$ este inel, iar $A' \neq \varnothing$, $A' \subset A$, atunci A' este subinel al lui A dacă:

1) $(A',+)$ este subgrup al grupului $(A, +)$.
2) $(A',\cdot)$ este submonoid al monoidului $(A,\cdot)$.

Condițiile 1), 2) se rescriu echivalent:

1') $(\forall)x, y \in A' \Rightarrow x - y \in A'$;

2') $(\forall)x, y \in A' \Rightarrow xy \in A', 1 \in A'$.

Definiție. Într-un inel $(A,+,\cdot)$ cu element unitate, grupul $(U(A),\cdot)$ al elementelor inversabile din monoidul $(A,\cdot)$ se numeşte **grupul elementelor inversabile** (sau încă **grupul unităților**) din inelul A.

Exemple cunoscute de inele

1. Mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ cu adunarea şi înmulțirea obişnuită formează un inel numit inelul numerelor întregi notat $(\mathbb{Z},+,\cdot)$. Acesta este un inel comutativ. Elementul nul este 0, iar elementul unitate este 1.
În cazul inelului $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ avem $U(\mathbb{Z}) = \{-1,1\}$.

2. $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ este inel comutativ, numit inelul numerelor raționale. Elementul nul este 0, iar elementul unitate este 1. Pentru inelul $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $U(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^*$.

3. $(\mathbb{R},+,\cdot)$ este inel comutativ, numit inelul numerelor reale. Elementul nul este 0, iar elementul unitate este 1. Aici $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$.

4. $(\mathbb{C},+,\cdot)$ este inel comutativ, numit inelul numerelor complexe. Pentru $(\mathbb{C},+,\cdot)$ avem $U(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.
Inelele din exemplele 1 – 4 se numesc inele numerice.

5. Inelul format dintr-un singur element (elementul nul) se numeşte inel nul. Orice inel care conține cel puțin două elemente se numeşte inel nenul.

6. Dacă $M \neq \varnothing$ este o mulțime, atunci tripletul $(\mathcal{P}(M),\Delta,\cap)$ este un inel comutativ, unde Δ se numeşte diferența simetrică definită astfel $A\Delta B = (A - B)\cup(B - A), (\forall)A,B \in \mathcal{P}(M)$.
Elementul nul este $\varnothing$, iar elementul unitate este M.
Verificați axiomele inelului comutativ. În acest inel $U(\mathcal{P}(M)) = \{M\}$.

7. (Inele de matrice pătratice). Mulțimea matricelor pătratice de ordin n, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ împreună cu operațiile obişnuite de adunare şi înmulțire a matricelor formează inelul matricelor pătratice de ordin n cu elemente din $\mathbb{C}$. Elementul nul este O_n (matricea nulă). Acest inel este unitar, $1 = I_n$ (matricea unitate de ordin n). Cum pentru $n \geq 2$ înmulțirea matricelor este necomutativă, inelul $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +, \cdot)$ este necomutativ. Aici $U(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | \det(A) \neq 0\}$.

Să observăm că se poate construi un inel de matrice pătratice $\mathcal{M}_n(A)$ pe un inel comutativ arbitrar A deoarece şi înmulţirea matricelor $X,Y \in \mathcal{M}_n(A)$ dau o nouă matrice cu elemente în A şi distributivitatea înmulţirii în raport cu adunarea este consecinţă a legii analoge din A.

8. (Inele de funcţii reale). Mulţimea $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ împreună cu operaţiile de

1) adunare,

dacă $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, atunci $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in \mathbb{R}$

şi

2) înmulţire

dacă , $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ atunci $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (fg)(x) = f(x)g(x),\ x \in \mathbb{R}$, formează un inel numit inelul funcţiilor reale.

Acest inel conţine ca subinele:

- $(\mathcal{M}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ - inelul funcţiilor mărginite,
- $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ - inelul funcţiilor continue,
- $(\mathcal{D}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ - inelul funcţiilor derivabile.

Pentru inelul $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +, \circ)$ avem

$U(\mathcal{F}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ bijecţie}\}$.

Această problemă se poate trata într-un cadru mai general considerând $\mathcal{F}(X, A) = \{f : X \to A\}$, unde $X \neq \varnothing$, iar $(A, \oplus, \odot)$ este un inel oarecare. Pe această mulţime de funcţii introducem două legi numite adunarea şi înmulţirea funcţiilor şi definite după cum urmează:

$$(f+g)(x) = f(x) \oplus g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x) \odot g(x),\ x \in X.$$

Dacă 0, 1 sunt elementul nul şi respectiv unitate din A, atunci

$$O_X : X \to A,\ O_X(x) = 0 \in A, \quad 1 : X \to A,\ 1(x) = 1,\ x \in X.$$

Dacă A este comutativ, atunci şi $\mathcal{F}(X, A)$ are aceeaşi proprietate.

9. (Inelul claselor de resturi modulo n). Pe mulţimea claselor de resturi modulo n, $n \geq 2$, $\mathbb{Z}_n$, am definit operaţiile de adunare şi înmulţire astfel: $\hat{a} + \hat{b} \overset{\text{def}}{=} \widehat{a+b}$, $\hat{a} \cdot \hat{b} \overset{\text{def}}{=} \widehat{ab}$. Am arătat că $(\mathbb{Z}_n, +)$ este grup abelian.

Evident înmulţirea pe $\mathbb{Z}_n$ este asociativă căci

$$(\hat{a} \cdot \hat{b})\hat{c} = \widehat{ab} \cdot \hat{c} = \widehat{a(bc)} = \hat{a} \cdot \widehat{bc} = \hat{a}(\hat{b} \cdot \hat{c}),\ (\forall)\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_n.$$

(am utilizat că înmulţirea pe $\mathbb{Z}$ este asociativă).

Distributivitatea în raport cu adunarea se verifică imediat deoarece

$$\hat{a}(\hat{b} + \hat{c}) = \hat{a}(\widehat{b+c}) = \widehat{a(b+c)} = \widehat{ab+ac} = \widehat{ab} + \widehat{ac} = \hat{a} \cdot \hat{b} + \hat{a} \cdot \hat{c}, (\forall)\hat{a}, \hat{b},\ \hat{c} \in \mathbb{Z}_n.$$

Tripletul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este un inel comutativ, numit inelul claselor de resturi modulo n. Elementul nul este $\hat{0}$, iar elementul unitate este $\hat{1}$. Aici $U(\mathbb{Z}_n) = \{\hat{k} \in \mathbb{Z}_n \mid (k, n) = 1\}$.

Prezentăm mai jos trei exemple simple de inele, indicând pentru fiecare tabelele legilor de adunare şi înmulţire:

$$\mathbb{Z}_2: \begin{array}{c|cc} + & \hat{0} & \hat{1} \\ \hline \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & \hat{0} & \hat{1} \\ \hline \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{1} \end{array}; \quad \mathbb{Z}_3: \begin{array}{c|ccc} + & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hline \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{2} & \hat{0} & \hat{1} \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hline \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{0} & \hat{2} & \hat{1} \end{array}; \quad \mathbb{Z}_4: \begin{array}{c|cccc} + & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hline \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{3} & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} \cdot & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hline \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{0} & \hat{2} & \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{0} & \hat{3} & \hat{2} & \hat{1} \end{array}$$

Inelul $\mathbb{Z}_n$ al claselor de resturi modulo n a atras de mult timp atenţia specialiştilor în teoria numerelor şi a servit în algebră ca punct de plecare pentru tot felul de generalizări.

Observaţie. **Atragem atenţia că $\hat{0} \in \mathbb{Z}_3$ şi $\hat{0} \in \mathbb{Z}_4$ nu reprezintă aceeaşi mulţime, deoarece: $\hat{0} = \{... - 6, -3, 0, 3, 6, ...\} \in \mathbb{Z}_3$ şi respectiv $\hat{0} = \{... - 8, -4, 0, 4, 8, ...\} \in \mathbb{Z}_4$. Corect scris este $\hat{0}_3$ şi respectiv $\hat{0}_4$ pentru a indica clasa de resturi modulo 3 şi respectiv modulo 4. Scrierea fără indici $\mathbb{Z}_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}, \mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ poate conduce la o concluzie falsă, gen $\mathbb{Z}_3 \subseteq \mathbb{Z}_4$!**

10. (Inelul întregilor lui Gauss). Pe mulţimea $\mathbb{Z}[i], i^2 = -1, \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ se definesc operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire ale numerelor complexe. Tripletul $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ este un inel comutativ, numit inelul întregilor lui Gauss. Elementul nul este $0 = 0 + 0i$, iar elementul unitate $1 = 1 + 0 \cdot i$. Aici $U(\mathbb{Z}[i]) = \{\pm 1, \pm i\}$. Evident $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este subinel al lui $\mathbb{Z}[i]$, iar $\mathbb{Z}[i]$ este subinel al lui $\mathbb{C}$. Mai general dacă $d \in \mathbb{Z}$ este un întreg liber de pătrate (nu se divide prin pătratul nici unui număr natural diferit de 1), atunci $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,] = \{a + b\sqrt{d}, a, b \in \mathbb{Z}\}$ cu adunarea şi înmulţirea este inel comutativ. Dacă $d = -1$ obţinem inelul întregilor lui Gauss.

Reguli generale de calcul într-un inel

Am văzut că tripletul $(A, +, \cdot)$ este inel dacă $(A, +)$ este grup abelian, $(A, \cdot)$ este monoid şi are loc distributivitatea celei de-a doua legi $(\cdot)$ în raport cu prima $(+)$. Aceasta înseamnă că regulile de calcul de la grupuri rămân valabile şi pentru $(A, +)$. De asemenea regulile de calcul de la monoizi se păstrează şi pentru $(A, \cdot)$. În plus apar noi reguli de calcul în inel ţinând seamă de legătura dintre cele două legi (distributivitatea).

Mai precis are loc:

Teorema. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Atunci:

1) $(\forall) x \in A \Rightarrow x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

2) Într-un inel cu cel puţin două elemente $1 \neq 0$.

3) (**regula semnelor**). Pentru orice $x, y \in A$ avem:

$$(-x)y = x(-y) = -xy,\ (-x)(-y) = xy,\ (-x)^n = \begin{cases} x^n, \text{ dacă } n \text{ este par} \\ -x^n, \text{ dacă } n \text{ este impar}, n \in N^* \end{cases}$$

4) (**distributivitatea înmulțirii față de scădere**). Pentru orice $x, y, z \in A$ avem:

$$x(y-z) = xy - xz,$$
$$(y-z)x = yx - zx.$$

Demonstrație. **1)** Fie $x \in A$. Atunci $x + 0 = 0 + x = x$ şi deci (distributivitate) $x \cdot 0 = x(0+0) = x0 + x0$ şi $0x = (0+0)x = 0x + 0x$, de unde, adunând în prima relație opusul lui $x0$ şi în a doua opusul lui $0x$ se obține $x0 = 0x = 0$.

2) Prin absurd, dacă 1 = 0, atunci avem:

$x = 1x = 0x \overset{1)}{=} 0$ pentru orice $x \in A$, ceea ce dă A = {0}, fals.

3) Avem $xy + (-x)y = [x + (-x)]y = 0 \cdot y = 0$ şi $xy + x(-y) = x[y + (-y)] = x0 = 0$, de unde elementul opus fiind unic, rezultă $(-x)y = x(-y) = -(xy)$.

Din egalitatea $x(-y) = (-x)y$ şi din faptul că $-(-x) = x$, rezultă $(-x)(-y) = [-(-x)]y = xy$.

Relația se demonstrează prin inducție matematică.

4) Avem $$x(y-z) = x[y + (-z)] = xy + x(-z) \overset{3)}{=} xy - xz$$

$$(y-z)x = [y + (-z)]x = yx + (-z)x \overset{3)}{=} yx - zx. \ \blacksquare$$

Observații. **1)** Într-un inel A suma unui element $x \in A$ cu opusul unui element $y \in A$, $x + (-y) = (-y) + x$ se notează cu x – y. Deoarece la orice două elemente $x, y \in A$ corespunde un element unic $x - y \in A$, am definit pe A încă o operație algebrică, numită **scădere.**

2) Să remarcăm că dat fiind un inel, calculele permise pe acesta sunt: **adunarea, scăderea** şi **înmulțirea** (luați inelul ($\mathbb{Z}, +, \cdot$)).

Reguli de calcul într-un inel comutativ

Prezentăm aici câteva proprietăți remarcabile pentru un inel comutativ. Evident că proprietățile generale discutate mai sus rămân valabile şi aici.

Teoremă. Fie $(A, +, \cdot)$ un **inel comutativ.** Atunci $(\forall) a\ b \in A, (\forall) n \in \mathbb{N}$ avem: $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1}\right)$,

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - ... + b^{2n}\right).$$

3. INEL INTEGRU

Definiție. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Un element $x \in A$, $x \neq 0$, (0 este elementul neutru pentru +) se numeşte **divizor la stânga (la dreapta) al lui zero** dacă există $y \in A,\ y \neq 0$ astfel încât $xy = 0$ (respectiv $yx = 0$).

Observație. Dacă inelul este comutativ noțiunile de divizor al lui zero la stânga respectiv la dreapta coincid.

Exemple. 1. În inelul matricelor pătratice de ordinul doi, cu elemente din $\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matricele

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A \neq O_2$ **(matricea nulă - elementul nul al inelului $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)**

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B \neq O_2$**, sunt divizori ai lui zero deoarece** $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

În general în inelul $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \bullet)$ există divizori ai lui zero.

2. În inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, $\hat{2} \neq \hat{0}$, $\hat{3} \neq \hat{0}$ şi totuşi $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{0}$, ceea ce arată că elementele $\hat{2}$, $\hat{3}$ sunt divizori ai lui zero.

3. Inelele $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ nu au divizori ai lui zero.

Definiție. Inelul $(A, +, \cdot)$ **are divizori ai lui zero** dacă A conține cel puțin un divizor al lui zero.
Un inel **care nu are divizori ai lui zero, comutativ,** se numeşte **inel integru** (sau **domeniu de integritate).**

Observație. Dacă $(A, +, \cdot)$ este un inel şi dacă $x \in A$ este inversabil (deci $x \in U(A)$) atunci x nu este divizor al lui zero. (Arătați acest lucru prin reducere la absurd).

Exemple. 1. Inelele $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot), (\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ sunt cu divizori ai lui zero. Mai general inelele $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot), (\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ (aici n = număr compus (neprim)) sunt cu divizori ai lui zero.

2. Inelul $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ este cu divizori ai lui zero. N-avem decât să luăm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 1, x>0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1, x\le 0\\ 0, x>0\end{cases}$ **pentru care** $f\neq 0, g\neq 0$ **şi totuşi** $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=0, (\forall)x\in\mathbb{R}$.

3. Inelele $(\mathbb{Z},+,\cdot),(\mathbb{Q},+,\cdot),(\mathbb{R},+,\cdot),(\mathbb{C}+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ **(cu** p **– număr prim) sunt inele integre.**

Reguli de calcul într-un inel integru

Faptul că inelul $(A,+,\cdot)$ nu are divizori ai lui zero furnizează noi reguli de calcul prezentate în următoarele două teoreme.
Următoarea propoziție are un caracter de generalitate pentru un inel integru şi oferă explicații în legătură cu rezolvarea unor ecuații date printr-un produs egal cu zero.

Teoremă. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) A este inel integru.

2) $(\forall)x,y\in A,\ x\neq 0$ şi $y\neq 0 \Rightarrow xy\neq 0$.

3) $(\forall)x,y\in A$ cu $xy=0\Rightarrow x=0$ sau $y=0$.

Demonstrație. 1) $\Rightarrow$ **2)**. Dacă **1)** este adevărată atunci să probăm **2)**.
Vom face acest lucru prin reducere la absurd. Presupunem că există $x,y\in A,\ x\neq 0,\ y\neq 0$ cu $xy = 0$. Dar aceasta înseamnă că x şi y sunt divizori ai lui zero, fals (A fiind inel integru).
2) $\Rightarrow$ **3)** De fapt aceste afirmații sunt echivalente pentru că $p\Rightarrow q$ este echivalentă cu non $q\Rightarrow$ non p.
3) $\Rightarrow$ **1)** Prin reducere la absurd. ■

Teoremă. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel integru. Pentru orice trei elemente $a,x,y\in A$, cu $a\neq 0$, avem echivalențele:

1) $ax=ay\Leftrightarrow x=y$ **(simplificare la stânga printr-un element nenul)**

2) $xa=ya\Leftrightarrow x=y$ **(simplificare la dreapta printr-un element nenul)**

Demonstrație. 1) „$\Rightarrow$“ Avem (ținând seamă de **3)** de la teorema precedentă): $ax=ay\Leftrightarrow a(x-y)=0\Leftrightarrow a=0$ sau $x-y=0$. Cum $a\neq 0$ rezultă cu necesitate $x-y=0$, adică $x = y$.
Această proprietate, într-un inel integru, este cunoscută sub denumirea de simplificare la stânga, printr-un element diferit de elementul nul al inelului.

„$\Leftarrow$" Evidentă.
Analog se procedează pentru **2)**. ■

Probleme rezolvate

1. Să se arate că pe mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$, legile: $x \oplus y = x + y + 1$, $x \odot y = xy + x + y$ determină o structură de inel comutativ şi fără, divizori ai lui zero. Determinați elementele inversabile ale inelului.
R. Verificăm axiomele inelului.
1) $(\mathbb{Z},\oplus)$ grup abelian.
G_1) $\oplus$ *este lege de compoziție* deoarece din $x, y \in \mathbb{Z}$, rezultă $x \oplus y = x + y + 1 \in \mathbb{Z}$ (adunări de numere întregi).
G_2) $\oplus$ *este asociativă*, adică $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z), (\forall) x, y, z \in \mathbb{Z}$. Într-adevăr avem pentru membrul stâng: $(x \oplus y) \oplus z = (x + y + 1) \oplus z = (x + y + 1) + z + 1 = x + y + z + 2$, (1), iar pentru membrul drept: $x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (y + z + 1) = x + (y + z + 1) + 1 = x + y + z + 2$, (2).
Din (1) şi (2) rezultă egalitatea celor doi membri, adică legea este asociativă.
G_3) $\oplus$ *este comutativă* deoarece $x \oplus y = y \oplus x, (\forall) x, y \in \mathbb{Z}$, adică $x + y + 1 = y + x + 1, (\forall) x, y \in \mathbb{Z}$ (adunarea pe $\mathbb{Z}$ fiind comutativă).
G_4) *Element neutru* pentru $\oplus$. Să arătăm că există $e \in \mathbb{Z}$ astfel încât $e \oplus x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{Z}$. Avem $e + x + 1 = x, (\forall) x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e = -1 \in \mathbb{Z}$.
G_5) *Elemente simetrizabile*. Pentru $x \in \mathbb{Z}$, arbitrar, să găsim $x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x \oplus x' = -1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + x' + 1 = -1 \Leftrightarrow x' = -2 - x \in \mathbb{Z}$.
2) $(\mathbb{Z},\odot)$ monoid comutativ.
M_1) $\odot$ *este lege de compoziție* pe $\mathbb{Z}$ deoarece din $x, y \in \mathbb{Z}$ rezultă $x \odot y = xy + x + y \in \mathbb{Z}$ (înmulțire şi adunări de numere întregi).
M_2) $\odot$ *este asociativă*, adică $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z), (\forall) x, y, z \in \mathbb{Z}$. Calculăm pe rând cei doi membri ai egalității. Pentru membrul stâng avem:
$(x \odot y) \odot z = (xy + x + y) \odot z = (xy + x + y) z + xy + x + y + z = xyz + xz + yz + xy + x + y + z$, (1).
Pentru membrul drept obținem:
$x \odot (y \odot z) = x \odot (yz + y + z) = x(yz + y + z) + x + (yz + y + z) = xyz + xy + xz + yz + x + y + z$, (2).
Din (1) şi (2) rezultă egalitatea celor doi membri şi deci legea $\odot$ este asociativă.
M_3) $\odot$ *este comutativă* deoarece $x \odot y = y \odot x, (\forall) x, y \in \mathbb{Z}$ sau $xy + x + y = yx + y + x, (\forall) x, y \in \mathbb{Z}$ (înmulțirea şi adunarea pe $\mathbb{Z}$ sunt comutative).
M_4) *Element neutru* pentru $\odot$. Să arătăm că există $u \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x \odot u = x, (\forall) x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow xu + x + u = x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow u(x + 1) = 0, (\forall) x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow u = 0 \in \mathbb{Z}$.
3) Legea $\odot$ este distributivă în raport cu legea $\oplus$.
Într-adevăr $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z), (\forall) x, y, z \in \mathbb{Z}$.
Pentru aceasta calculăm, pe rând, cei doi membri.
Pentru membrul stâng avem: $x \odot (y \oplus z) = x \odot (y + z + 1) = x(y + z + 1) + x + (y + z + 1) =$ $= xy + xz + 2x + y + z + 1$, (1).

Membrul drept devine $(x\odot y)\oplus(x\odot z)=(xy+x+y)\oplus(xz+x+z)=(xy+x+y)+(xz+x+z)+1=$
$=xy+xz+2x+y+z+1$, (2).
Din (1) şi (2) rezultă egalitatea propusă spre demonstrat.
În fine, să probăm că inelul este fără divizori ai lui zero, adică să arătăm că dacă $x, y\neq -1$ (–1 este elementul nul al inelului), atunci $x\odot y\neq -1$. Într-adevăr $x\odot y\neq -1 \Leftrightarrow xy+x+y\neq -1 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)\neq 0$, ceea ce-i adevărat deoarece $x\neq -1,\ y\neq -1$.
Din cele de mai sus rezultă $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$) este inel comutativ şi fără divizori ai lui zero.
Să determinăm elementele inversabile ale inelului. Fie $x\in\mathbb{Z}$. Să găsim $x'\in\mathbb{Z}$ pentru care $x\odot x'=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow xx'+x+x'=0 \Leftrightarrow x'(1+x)=-x$.
Dacă $x\neq -1$, atunci $x'=-\dfrac{x}{1+x}=-\dfrac{x+1-1}{x+1}=-1+\dfrac{1}{x+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x+1$ divide pe 1, adică dacă $x+1\in\{\pm 1\}$. De aici x + 1 = 1 dă x = 0, iar pentru x + 1 = –1 avem x = –2. Deci doar x = 0 şi x = –2 sunt elemente inversabile când x' = 0 şi respectiv x' = –2. Deci $U(\mathbb{Z})=\{-2;0\}$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x*y=ax+by+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$.
1) Determinaţi *a*, *b* şi *c* astfel ca $(\mathbb{R},*)$ să fie grup abelian.
2) Considerând înmulţirea uzuală pe $\mathbb{R}$ ca a doua operaţie determinaţi parametrul *c* astfel încât $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ să fie inel.

R. 1) Trebuie să verificăm axiomele grupului.
G_1) *Asociativitatea legii* $*$ înseamnă $(x*y)*z=x*(y*z), (\forall)x,y,z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow a^2x+aby+bz+ac+c=$
$=ax+aby+b^2z+bc+c, (\forall)x,y,z\in\mathbb{R}$.

De aici rezultă sistemul: $\begin{cases} a^2=a\\ b=b^2\\ ac=bc.\end{cases}$

G_2) *Legea* $*$ *este comutativă* dacă $x*y=y*x, (\forall)x,y\in\mathbb{R}\Leftrightarrow ax+by+c=ay+bx+c, (\forall)x,y\in\mathbb{R}$. De aici *a* = *b*.
G_3) *Elementul neutru pentru* $*$ este $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=x, (\forall)x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow ax+ae+c=x,(\forall)x\in\mathbb{R}$. De aici $a=1, e=-c$ (*c* fixat arbitrar din $\mathbb{R}$).
G_4) *Elemente simetrizabile*. Pentru $x\in\mathbb{R}$, există $x'\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*x'=-c\Leftrightarrow ax+bx'+c=-c$. Cum $a=b=1$ rezultă $x'=-2c-x$. Deci pentru $a=b=1, c\in\mathbb{R}$ cuplul $(\mathbb{R},*)$ este grup abelian.
2) Înmulţirea uzuală este asociativă, având pe 1 ca element neutru. Trebuie să impunem condiţia ca înmulţirea obişnuită să fie distributivă în raport cu legea $*$. Mai precis trebuie să avem egalităţile:
$x(y*z)=(xy)*(yz), (x*y)z=(xz)*(yz), (\forall)x,y,z\in\mathbb{R}$ sau $x(y+z+c)=xy+xz+c$, $(x+y+c)z=$
$=xz+yz+c, (\forall)x,y,z\in\mathbb{R}$. De aici se deduce $c=0$.

3. Fie $\mathcal{A}=\left\{M_{a,x}=\begin{pmatrix} a & x\\ 0 & a\end{pmatrix}\middle| a\in\mathbb{Q}, x\in\mathbb{R}\right\}$. Arătaţi că $\mathcal{A}$ este un inel comutativ în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

R. Trebuie să verificăm axiomele inelului comutativ.
1) $(\mathcal{A}, +)$ este grup abelian deoarece au loc axiomele:

G_1) + *este lege de compoziție* pe $\mathcal{A}$.

Fie $M_{a,x}, M_{b,y} \in \mathcal{A}$. Atunci $M_{a,x} + M_{b,y} = \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & y \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & x+y \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = M_{a+b,x+y} \in \mathcal{A}$.

G_2) Întotdeauna *adunarea matricelor* pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *este asociativă*. Deci rămâne la fel și pe submulțimea $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

G_3) *Adunarea matricelor* pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *este comutativă*. Proprietatea se conservă și pe $\mathcal{A}$.

G_4) *Elementul neutru* este $M_{e_1,e_2} \in \mathcal{A}$ astfel încât $M_{a,x} + M_{e_1,e_2} = M_{a,x}, (\forall) M_{a,x} \in \mathcal{A}$.

De aici $M_{a+e_1,x+e_2} = M_{a,x} \Leftrightarrow a + e_1 = a$ și $x + e_2 = x \Leftrightarrow e_1 = 0, e_2 = 0$. Prin urmare $M_{0,0} = O_2$ (matricea nulă) este elementul neutru.

Aici am folosit că $M_{a,x} = M_{b,y} \Leftrightarrow a = b$ și $x = y$ (ceea ce-i imediat din egalitatea matricelor).

G_5) *Elemente simetrizabile*. Pentru $M_{a,x} \in \mathcal{A}$, există $M_{a',x'} \in \mathcal{A}$ astfel încât $M_{a,x} + M_{a',x'} = M_{0,0} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow M_{a+a',x+x'} = M_{0,0} \Leftrightarrow a + a' = 0$ și $x + x' = 0 \Leftrightarrow a' = -a, x' = -x$.

Deci simetricul lui $M_{a,x}$ este $M_{-a,-x} \in \mathcal{A}$ adică matricea $M_{-a,-x} = \begin{pmatrix} -a & -x \\ 0 & -a \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a \end{pmatrix} = -M_{a,x}$ rezultat de așteptat, pentru că operația este cea de adunare obișnuită a matricelor. Prin urmare simetricul lui $M_{a,x} \in \mathcal{A}$ este chiar opusa matricei $M_{a,x}$.

2) $(\mathcal{A}, \cdot)$ este monoid comutativ, adică se verifică axiomele:

M_1) *înmulțirea matricelor este lege de compoziție* pe $\mathcal{A}$ pentru că oricare ar fi $M_{a,x}, M_{b,y} \in \mathcal{A}$ avem:

$M_{a,x} \cdot M_{b,y} = \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & y \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & ay+bx \\ 0 & ab \end{pmatrix} = M_{ab,\, ay+bx} \in \mathcal{A}$ (evident din $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow ab \in \mathbb{Q}$ și $ay + bx \in \mathbb{R}$ dacă $x, y \in \mathbb{R}$).

M_2) *Înmulțirea matricelor* pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *este întotdeauna asociativă*. Deci rămâne la fel și pe submulțimea $\mathcal{A}$ a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

M_3) *Înmulțirea* pe $\mathcal{A}$ *este comutativă* deoarece avem $M_{a,x} \cdot M_{b,y} = M_{ab,ay+bx} = M_{ba,bx+ay} =$, $= M_{b,y} \cdot M_{a,x}, (\forall) M_{a,x}, M_{b,y} \in \mathcal{A}$.

M_4) *Elementul neutru*. Să arătăm că există $M_{u_1,u_2} \in \mathcal{A}$ astfel încât $M_{a,x} \cdot M_{u_1,u_2} = M_{a,x}, (\forall) M_{a,x} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow M_{au_1,au_2+xu_1} = M_{a,x}, (\forall) M_{a,x} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow au_1 = a$ și $au_2 + xu_1 = x, (\forall) a \in \mathbb{Q}, (\forall) x \in \mathbb{R}$. De aici $u_1 = 1, u_2 = 0$. Deci $M_{1,0} \in \mathcal{A}$ este elementul neutru, care coincide cu $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matricea unitate.

3) Înmulțirea matricelor este distributivă în raport cu adunarea pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, deci rămâne la fel și pe $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Observăm că inelul este cu divizori ai lui zero. N-avem decât să luăm $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A, B \neq O_2$ pentru care $AB = O_2$.

Probleme propuse

1. Stabiliți care din următoarele mulțimi de numere împreună cu operațiile obişnuite de adunare şi înmulțire sunt inele:

1) $\mathbb{Z}$; 2) $2\mathbb{Z}$ (numerele întregi pare); 3) $m\mathbb{Z}$ (numerele întregi, multiplu de m); 4) $\mathbb{Q}$; 5) $\{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$

6) $\{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in 2\mathbb{Z}\}$; 7) $\{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$; 8) $\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ (inelul întregilor lui Gauss);

9) $\{a+bi \mid a,b\in 3\mathbb{Z}\}$; 10) $\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$; 11) $\{a+b\sqrt{3}i \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$;

12) $\left\{\frac{a+bi\sqrt{3}}{2} \,\middle|\, a,b\in\mathbb{Z}, a,b \text{ au aceeaşi paritate}\right\}$; 13) $\{a+bi\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$.

Determinați pentru fiecare inel elementele inversabile.

2. Stabiliți care din următoarele mulțimi de matrice împreună cu operațiile obişnuite de adunare şi înmulțire sunt inele:

1) $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$; 2) $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$; 3) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; 4) $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; 5) $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}\right\}$; 6) $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in 2\mathbb{Z}\right\}$;

7) $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Q}\right\}$; 8) $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}\right\}$; 9) $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in 3\mathbb{Z}\right\}$; 10) $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Q}\right\}$;

11) $\left\{\begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}\right\}$; 12) $\left\{\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{3b}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z} \text{ de aceeaşi paritate}\right\}$; 13) $\left\{\begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Q}\right\}$;

14) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}\right\}$; 15) $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}\right\}$; 16) $\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$.

Care din aceste inele sunt comutative? Precizați elementele inversabile. În inelele cu divizori ai lui zero precizați toți divizorii lui zero.

3. Arătați că fiecare din următoarele mulțimi de funcții reale definite pe $[-1,1]$ împreună cu operațiile obişnuite de adunare şi înmulțire este un inel comutativ:
1) mulțimea tuturor funcțiilor continue; 2) mulțimea tuturor funcțiilor pare; 3) mulțimea tuturor funcțiilor polinomiale; 4) mulțimea tuturor funcțiilor derivabile; 5) mulțimea tuturor funcțiilor mărginite. Determinați în aceste inele elementele inversabile. În care din aceste inele există divizori ai lui zero ?

4. Să se arate că mulțimea $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ cu următoarele operații este inel comutativ în fiecare din cazurile:

1) $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$, $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2,b_1b_2)$. (Se obține *produsul direct de inele al inelului $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ cu el însuşi*).

2) $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$, $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2+b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1)$.

3) $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$, $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2+3b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1)$.

4) $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$, $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2-3b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1)$.

Determinați în aceste inele elementele inversabile. În inelele cu divizori ai lui zero găsiți acești divizori ai lui zero. (Două elemente $(a,x),(b,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ sunt egale dacă și numai dacă $a=b$ și $x=y$).

5. Arătați că următoarele mulțimi împreună cu aplicațiile considerate în dreptul lor au structurile indicate:

1) $\mathbb{Z}$; $x\top y=x+y-3,\ x\perp y=xy-3(x+y)+12$; $(\mathbb{Z},\top,\perp)$ **este domeniu de integritate. Determinați elementele inversabile și inversele lor.**

2) $\mathbb{Z}$; $x\oplus y=x+y+3;\ x\odot y=xy+3(x+y)+6$; $(\mathbb{Z},\otimes,\odot)$ **este domeniu de integritate. Determinați elementele inversabile și inversele lor.**

3) $\mathbb{Z}$; $x\top y=x+y+2,\ x\perp y=xy+2(x+y)+2$; $(\mathbb{Z},\top,\perp)$ **este domeniu de integritate. Determinați elementele inversabile și inversele lor.**

4) $2\mathbb{Z}+1;\ x*y=x+y-1,\ x\circ y=\frac{1}{2}(xy-x-y+3),\ (2\mathbb{Z}+1,*,\circ)$ **este domeniu de integritate. Determinați elementele inversabile și inversele lor.**

5) $\mathbb{Z}[i];\ z_1*z_2=z_1z_2+\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)$ **unde** $\operatorname{Im}(a+ib)=b,\ a,b\in\mathbb{R}$, $(\mathbb{Z}[i],+,*)$ **este domeniu de integritate. Determinați elementele inversabile.**

6) $\mathcal{P}(M),\ M=\{a,b\};\ A\Delta B=(A-B)\cup(B-A),\ A\cdot B=A\cap B,\ (\mathcal{P}(M),\Delta,\cdot)$ **este inel comutativ cu divizori ai lui zero.**

7) $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}\middle|\, x,y\in\mathbb{Z}\right\};(\mathcal{A},+,\cdot)$ **este inel comutativ, în raport cu adunarea și înmulțirea obișnuită a matricelor.**

8) $\mathcal{M}_a=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,\middle|\, A\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}A,\ a\in\mathbb{R}\right\};(\mathcal{M}_a,+,\cdot)$ **este un inel în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor;**

9) $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}a+ib & c+id\\ -c+id & a-ib\end{pmatrix}\middle|\, a,b,c,d\in\mathbb{R},\ i^2=-1\right\};(\mathcal{A},+,\cdot)$ **este inel în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.**

10) $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & x\end{pmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\};(\mathcal{A},+,\cdot)$ **este domeniu de integritate în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.**

11) $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\middle|\, a,b,c\in\mathbb{R}\right\};(\mathcal{A},+,\cdot)$ **este inel comutativ cu divizori ai lui zero.**

12) $\mathcal{A}=\left\{A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,\middle|\, A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & d\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix},\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\};(\mathcal{A},+,\cdot)$ **inel necomutativ. Determinați elementele inversabile din inel.**

13) a) $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d,e \in \mathbb{Z}_2\right\}; (\mathcal{A},+,\cdot)$ **este inel necomutativ în raport cu operațiile uzuale.**

b) $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{R}\right\}; (\mathcal{A},+,\cdot)$ **este inel comutativ cu divizori ai lui zero.**

14) $\mathcal{A}=\left\{M = xI_2 + yJ \middle| J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x,y \in \mathbb{R}\right\}; (\mathcal{A},+,\cdot)$ **este un inel în raport cu operațiile uzuale.**

15) $\mathcal{A}=\left\{M = xI_2 + yA \middle| A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}; (\mathcal{A},+,\cdot)$ **este inel comutativ în raport cu operațiile uzuale.**

16) $\mathcal{A}=\{f:\{0,1\}\to\mathbb{R}\}; (\mathcal{A},+,\cdot)$ **este un inel comutativ cu divizori ai lui zero în raport cu adunarea și înmulțirea funcțiilor.**

17) $\mathbb{Q}\times\mathbb{R}; (a,x)+(b,y)=(a+b,\ x+y), (a,x)\cdot(b,y)=(ab, ay+bx+xy); (\mathbb{Q}\times\mathbb{R},+,\cdot)$ **este inel comutativ. Determinați elementele inversabile. (Două elemente** $(a,x),(b,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$ **sunt egale dacă și numai dacă** $a=b$ **și** $x=y$ **).**

18) $\mathcal{A}=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| x=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}, a,b,c,d\in\mathbb{Q}\right\}; (\mathcal{A},+,\cdot)$ **este inel comutativ.**

2.2. CORPURI

Am văzut că pentru inelul $(A,+,\cdot)$, mulțimea A are o structură mai săracă cu privire la cea de-a doua operație, cea multiplicativă. S-a putut constata ca proprietăți suplimentare pentru înmulțire (comutativitate, element unitate) dau mai multe proprietăți pentru inel.

În cele ce urmează vom studia inele (cu cel puțin două elemente) în care cât mai multe elemente nenule ale sale sunt simetrizabile (inversabile) în raport cu operația de înmulțire (elementul neutru la adunare 0 nu poate fi inversabil deoarece $x\cdot 0=0\cdot x\neq 1$, $(\forall)x\in A$).

Deci existenta simetricului poate fi pusă pentru mulțimea $A^* = A-\{0\}$, nu și pentru elementul nul.

Definiție. Se numeşte **corp** un triplet $(K, +, \cdot)$, în care K este o mulțime cu cel puțin două elemente, iar „+“ şi „$\cdot$“ două operații pe K (numite „adunare“ şi respectiv „înmulțire“), satisfăcând următoarele trei axiome:

K_1) $(K,+)$ este grup abelian, cu elementul neutru 0.

K_2) $(K-\{0\},\cdot)$ este grup, cu elementul neutru 1.

K_3) Înmulțirea este distributivă față de adunare.

Dacă, în plus, este satisfăcută şi axioma:

K_4) Înmulțirea este comutativă,

atunci $(K, +, \cdot)$ se numeşte **corp comutativ** (sau **câmp**).

Observații. 1) Grupul $(K,+)$ se numeşte **grupul aditiv** al corpului, iar $(K-\{0\},\cdot)$ se numeşte **grupul multiplicativ al elementelor nenule** ale corpului (sau cu notația cunoscută $U(K)=K-\{0\}$).

2) Dacă corpul K este **comutativ**, atunci $(K-\{0\},\cdot)$ este **grup comutativ**.

3) Orice corp K conține cel puțin două elemente distincte, un element neutru față de adunare şi un element neutru față de înmulțire, deci pe 0 şi 1.

Reciproc, pe orice mulțime formată din două elemente distincte există o singură structură de corp. Dacă notăm aceste elemente cu 0 şi 1, atunci adunarea şi înmulțirea nu pot fi definite decât în modul următor:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Acest corp cu două elemente joacă un rol important în teoria informației unde fiecare literă se codifică utilizând simbolurile 0 şi 1. Se arată că receptarea unui mesaj este mai bună (corectă) cu cât fiecărei litere i se asociază un vector cu mai multe componente (formate din 0 şi 1), influența factorilor parazitari (de perturbare a mesajului transmis) fiind mult redusă (Shannon).

4) Toate proprietățile puse în evidență la inele sunt valabile şi pentru corpuri.

5) Definiția dată corpului poate fi reformulată şi astfel:

Un inel K se numeşte **corp** dacă orice element nenul al lui K este inversabil, adică dacă $x\in K$, $x\neq 0$, $(\exists)x^{-1}\in K$ astfel încât $xx^{-1}=x^{-1}x=1$.

Definiție*. O submulțime nevidă K' a unui corp K se numeşte **subcorp al lui *K*** dacă legile de compoziție interne din K induc legi de compoziție interne pe K', împreună cu care K' este corp.

Să observăm că fiind dat un corp, calculele permise pe acesta sunt: **adunarea**, **scăderea**, **înmulțirea** şi **împărțirea** (prin elemente nenule $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$).

Exemple cunoscute de corpuri

1. Mulțimea numerelor raționale împreună cu operațiile obişnuite de adunare şi înmulțire, formează, un corp comutativ, numit corpul numerelor raționale şi notat $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

2. Mulțimea numerelor reale cu aceleaşi operații de adunare şi înmulțire formează un corp comutativ, numit corpul numerelor reale şi notat $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

3. Mulțimea numerelor complexe cu adunarea şi înmulțirea formează un corp comutativ, numit corpul numerelor complexe şi notat $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Corpurile de la 1, 2, 3 se numesc corpuri numerice.

Alte exemple remarcabile de corpuri

1) Corpul claselor de resturi modulo *p*. Am văzut la inele că tripletul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este un inel pentru $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Se pune problema pentru ce $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}_n$ este corp, adică pentru ce $n \in N^*$, $(\forall) x \in \mathbb{Z}_n$, $x \neq \hat{0}$ este inversabil? Răspunsul este dat de următoarea:

Teoremă. Inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ al claselor de resturi modulo n este corp dacă şi numai dacă n este număr prim.

Demonstrație. Într-adevăr dacă n este număr prim, atunci $(\forall) x \in \mathbb{Z}_n$, $x \neq \hat{0}$ este inversabil pentru că $(x, n) = 1$.

Reciproc, s-a văzut (la grupul claselor de resturi modulo n) că dacă $x \in \mathbb{Z}_n$, $x \neq \hat{0}$, există $x^{-1} \in \mathbb{Z}_n$ pentru $(x, n) = 1$. ■

De fapt $\mathbb{Z}_n$ este corp dacă şi numai dacă $U(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n - \{\hat{0}\} = \{\hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}\}$ dacă şi numai dacă $(n, k) = 1$, $k = \overline{1, n-1}$.

Ultima afirmație are loc dacă $n = p$ este un număr prim.

Evident $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este corp comutativ.

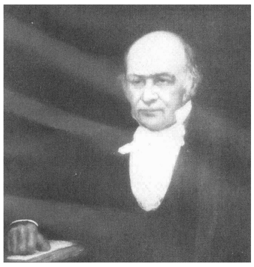
2)* Corpul cuaternionilor. Fie $i \in \mathbb{C}$, unitatea imaginară ($i^2 = -1$). Considerăm j, k două obiecte matematice între care introducem o înmulțire (ce prelungește pe cea obișnuită din $\mathbb{C}$) astfel: $i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,$ $ik = -ki = j$.

Expresia formală $a + bi + cj + dk,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se numește **cuaternion**. Fie H mulțimea tuturor cuaternionilor. Evident $\mathbb{C} \subset H$, pentru că $(\forall) z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$ se poate scrie $z = a + bi + 0j + 0k \in H$. Pe mulțimea H se definesc două operații astfel:

UN PIONIER AL MATEMATICII

W.R. HAMILTON (1805–1865)

Matematician irlandez



CONTRIBUȚII

- ***teoria numerelor complexe***
- ***teoria cuaternionilor***

1) **Adunarea cuaternionilor**

Dacă $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k,\ q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k \in H$, atunci $q_1 + q_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k \in H$ reprezintă **suma** cuaternionilor q_1 și q_2.

2) **Înmulțirea cuaternionilor**

Dacă $q_1, q_2 \in H$ atunci $q_1 \cdot q_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)i + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + a_2 c_1 + b_2 d_1)j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - b_2 c_1 + a_2 d_1)k \in H$ reprezintă **produsul** cuaternionilor q_1 și q_2. (Practic la înmulțirea lui q_1 cu q_2 funcționează distributivitatea înmulțirii față de adunare la care se ține seamă de definițiile date pentru i, j, k – se înmulțește fiecare termen al lui q_1 cu fiecare termen al lui q_2, în această ordine).

Dacă $q = a + bi + cj + dk \in H$, atunci $\overline{q} = a - bi - cj - dk \in H$ se numește **conjugatul** lui q.

Definim funcția $N : H \to \mathbb{R}_+,\ N(q) = q \cdot \overline{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, care se numește funcție **normă**.

Are loc următoarea:

Teoremă. Tripletul $(H, +, \cdot)$ este un corp necomutativ numit **corpul cuaternionilor**.

Demonstrație. Se arată ușor că $(H, +, \cdot)$ este inel $(0 = 0 + 0i + 0j + 0k, 1 = 1 + 0i + 0j + 0k)$.

Să arătăm că $(\forall) q \in H,\ q \neq 0$ este inversabil.

Dacă $q = a + bi + cj + dk \neq 0$, atunci cel puțin unul din numerele *a*, *b*, *c*, *d* este nenul. Prin urmare $N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$.

Avem egalitățile: $q \cdot \frac{\bar{q}}{N(q)} = \frac{\bar{q}}{N(q)} \cdot q = 1$, ceea ce arată că q este inversabil şi $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N(q)} = \frac{a}{N(q)} - \frac{b}{N(q)}i - \frac{c}{N(q)}j - \frac{d}{N(q)}k \in H$.■

3)* Corpuri pătratice. Fie $d \in \mathbb{Z} - \{1\}$ un întreg liber de pătrate (deci d nu se divide prin pătratul nici unui număr întreg diferit de unu). Definim mulțimea $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$, pe care se consideră operațiile obişnuite de adunare şi înmulțire a numerelor complexe.
Are loc următoarea

> **Teoremă.** Tripletul $\left(\mathbb{Q}(\sqrt{d}), +, \cdot\right)$ este un corp comutativ, numit **corp pătratic**.

Demonstrație. Se verifică uşor că adunarea şi înmulțirea sunt legi interme pe $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.
Într-adevăr fie $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{d}$, $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{d}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. Atunci:

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$$

şi

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 d + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$$

Se verifică uşor axiomele inelului comutativ $\left(\mathbb{Q}[\sqrt{d}], +, \cdot\right)$.

Elementul nul este $0 = 0 + 0\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, iar elementul unitate este $1 = 1 + 0\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

Să verificăm că dacă $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, $z \neq 0$, atunci $z^{-1} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.
Într-adevăr fie $z = a + b\sqrt{d} \neq 0$, adică *a* sau *b* este nenul. Atunci:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + b\sqrt{d}} = \frac{a - b\sqrt{d}}{a^2 - b^2 d} = \frac{a}{a^2 - b^2 d} - \frac{b}{a^2 - b^2 d}\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$$

Se verifică cerința $a^2 - b^2 d \neq 0$ dacă $a \neq 0$ sau $b \neq 0$.
Numerele de forma $a + b\sqrt{d}$, $a, b \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, d întreg liber de pătrate, se numesc **numere pătratice**. Pentru $z = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, numărul $\bar{z} = a - b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ se numeşte **conjugatul pătratic** a lui *z*.

Corpul $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ este o extindere a corpului $\mathbb{Q}$ (orice $x \in \mathbb{Q}$ se scrie $x = x + 0\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$) sau mai spunem că $\mathbb{Q}$ este un subcorp al corpului pătratic $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

De exemplu în $\mathbb{Q}$ ecuația $x^2 = 2$ nu are soluții, dar în $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ are soluția $x = \sqrt{2}$. Iată de ce apare natural procesul de extindere al unui corp.

Câteva observații generale asupra regulilor de calcul dintr-un corp.

Produsul $ab^{-1}, b \neq 0$ cu $a, b \in K$, se mai scrie şi sub formă de fracție (sau raport) $\frac{a}{b}$.

Deci, fracția $\frac{a}{b}$, care n-are sens decât pentru $b \neq 0$ este soluția unică a ecuației $bx = a$. Regulile de calcul ale fracțiilor sunt următoarele:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc, b, d \neq 0$; $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, b, d \neq 0$; $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}, b \neq 0,$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, b,\ d \neq 0$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}, a,\ b \neq 0$.

Acestea sunt regulile uzuale din gimnaziu pentru operațiile pe $\mathbb{Q}$. Raționamentele care se fac pentru a le proba în cazul corpului *K* țin de operațiile din *K*. Aşa de pildă pentru a obține a doua relație dintre cele scrise mai sus se poate proceda astfel: fie $x = \frac{a}{b},\ y = \frac{c}{d}$ soluții ale ecuațiilor $bx = a$ şi respectiv $dy = c$. Atunci $dbx = da$, $dby = bc \Rightarrow bd(x + y) = da + bc$ şi deci $t = x + y = \frac{da + bc}{bd}$ este unica soluție a ecuației $bdt = da + bc$.

Am abordat, anul precedent, sistemele de ecuații liniare cu coeficienți în $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. De asemenea teoria determinanților am realizat-o pentru matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q}), \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sau $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Nimic nu ne împiedică acum de a lua în locul acestor numere (raționale, reale sau complexe), elemente dintr-un corp comutativ arbitrar *K*.

În acest caz, rezultatele obținute trebuie enunțate în termenii corpului *K:* componentele soluției unui sistem liniar şi valorile funcției **det** vor aparține corpului *K.* Metoda lui Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare, teoria determinanților, formulele lui Cramer rămân valabile (fără modificări importante) pentru un corp comutativ oarecare *K*, cu precizarea că în corpul *K* scrierea $\frac{a}{b}$ înseamnă ab^{-1}.

Mulțimea matricelor pătratice de ordin *n* cu coeficienți într-un corp arbitrar *K* formează un inel de matrice $\mathcal{M}_n(K)$, iar submulțimea tuturor matricelor $A \in \mathcal{M}_n(K)$

pentru care $\det(A) \neq 0$ (elementul nul al corpului *K)* conduce la noțiunea de **grup liniar complet** $\mathrm{GL}(n, K)$ pe *K*. Făcând să varieze corpul *K* se poate obține natural toată seria de grupuri importante.

Corpurile de tipul $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{R}$ etc. sunt în general numite **corpuri numerice**. Corpul $\mathbb{Z}_p$, p – prim este un exemplu de corp nenumeric: ar fi incorect să numim elementele sale numere pentru singura rațiune că uneori se identifică cu elementele mulțimii $\{0, 1, ..., p-1\}$.

Probleme propuse

1. Pentru *A*, *B*, matrice date mai jos, să se calculeze A + *B*, *A* – *B*, det(*A*) și rang(*A*).

1) $A = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{4} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{3} \end{pmatrix}, A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$; 2) $A = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}, A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_4)$;

3) $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{2} & \hat{4} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}, A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5)$; 4) $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{0} & \hat{3} \\ \hat{0} & \hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}, A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_4)$

2. Să se rezolve ecuațiile matriceale:

1) $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$ în $M_2(\mathbb{Z}_3)$; 2) $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$ în $M_2(\mathbb{Z}_4)$; 3) $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$ în $M_2(\mathbb{Z}_3)$.

3. Să se calculeze inversa matricei *A* și rezolvați ecuația matricală *XA* = *B*, în cazurile:

1) $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}, A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_4)$; 2) $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{4} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{4} \\ \hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}, A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_4)$;

3) $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{6} & \hat{4} & \hat{5} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{6} \\ \hat{2} & \hat{4} & \hat{7} \\ \hat{1} & \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix}, A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_8)$; 4) $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{4} & \hat{3} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{0} & \hat{4} \\ \hat{1} & \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5)$

4. Să se rezolve sistemele de ecuații:

1) $\begin{cases} \hat{2}x + y + z = \hat{1} \\ x + \hat{2}y + z = \hat{2} \\ x + y + \hat{2}z = \hat{3} \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_5$; 2) $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{3}y + z = \hat{3} \\ \hat{4}x + \hat{2}y + \hat{3}z = \hat{1} \\ \hat{6}x + \hat{3}y + \hat{2}z = \hat{2} \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_8$; 3) $\begin{cases} x + \hat{2}y + \hat{3}z = \hat{4} \\ x + y + \hat{3}z = \hat{1} \\ \hat{2}x + \hat{3}y + \hat{5}z = \hat{2} \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_9$;

5. Să se rezolve și discute sistemele:

1) $\begin{cases} mx + y + z = \hat{1} \\ x + my + z = \hat{2} \\ x + y + mz = \hat{3} \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_5, m \in \mathbb{Z}_5$; 2) $\begin{cases} x + y - \hat{2}mz = \hat{0} \\ x - y + mz = \hat{1} \\ \hat{2}x + y + \hat{3}z = \hat{2} \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_5, m \in \mathbb{Z}_5$;

Probleme rezolvate

1. Să se arate că aplicațiile $x * y = x + y + 2,\ x \circ y = xy + 2(x + y) + 2$ determină pe mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale o structură de corp comutativ.

R. Verificăm axiomele corpului comutativ.

K_1) $(\mathbb{Q} *)$ este grup abelian, adică au loc axiomele:

G_1) *Legea* $*$ *este asociativă*, adică $(x * y) * z = x * (y * z), (\forall) x, y, z \in \mathbb{Q}$. Într-adevăr avem:

$(x * y) * z = (x + y + 2) * z = (x + y + 2) + z + 2 = x + y + z + 4$, (1)

şi

$x * (y * z) = x * (y + z + 2) = x + (y + z + 2) + 2 = x + y + z + 4$, (2)

Din (1) şi (2) se deduce că legea $*$ este asociativă.

G_2) *Legea* $*$ *este comutativă*, adică are loc egalitatea $x * y = y * x, (\forall) x, y \in \mathbb{Q}$.

Avem: $x + y + 2 = y + x + 2, (\forall) x, y \in \mathbb{Q}$, deoarece adunarea pe $\mathbb{Q}$ este comutativă ($x + y = y + x$).

G_3) *Elementul neutru*. Să arătăm că există $e \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x * e = x, (\forall) x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x + e + 2 = x, (\forall) x \in \mathbb{Q}$. De aici $e = -2 \in \mathbb{Q}$ este elementul neutru.

G_4) *Elemente simetrizabile*. Să arătăm că pentru $x \in \mathbb{Q}$, arbitrar ales, există $x' \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x * x' = e \Leftrightarrow x + x' + 2 = -2 \Leftrightarrow x' = -4 - x \in \mathbb{Q}$. Deci orice $x \in \mathbb{Q}$ are un simetric $x' = -4 - x \in \mathbb{Q}$.

K_2) $(\mathbb{Q} - \{-2\}, \circ)$ este grup abelian, adică se verifică axiomele:

G_1) *Aplicația* $\circ$ *este lege de compoziție* pe $\mathbb{Q} - \{-2\}$, adică $(\forall) x, y \in \mathbb{Q} - \{-2\} \Rightarrow x \circ y \in \mathbb{Q} - \{-2\}$.

Într-adevăr $x \circ y \in \mathbb{Q} - \{-2\} \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{Q} - \{-2\},\ x \circ y \neq -2 \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{Q} - \{-2\},\ xy + 2(x + y) + 2 \neq -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x, y \in \mathbb{Q} - \{-2\}, (x + 2)(y + 2) \neq 0$, evident.

G_2) *Legea* $\circ$ *este asociativă*, $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), (\forall) x, y, z \in \mathbb{Q} - \{-2\}$. Avem succesiv:

$(x \circ y) \circ z = [xy + 2(x + y) + 2] \circ z = [xy + 2(x + y) + 2] z + 2[xy + 2(x + y) + 2 + z] + 2 = xyz +$

$+ 2(xy + xz + yz) + 4(x + y + z) + 6$, (1)

$x \circ (y \circ z) = x \circ [yz + 2(y + z) + 2] = x[yz + 2(y + z) + 2] + 2[x + yz + 2(y + z) + 2] + 2 = xyz +$

$+ 2(xy + xz + yz) + 4(x + y + z) + 6$, (2).

Din (1) şi (2) se deduce asociativitatea legii $\circ$.

Observăm că $x \circ y = (x + y)(y + 2) - 2$ şi atunci s-ar fi scris mai simplu:

$(x \circ y) \circ z = [(x + 2)(y + 2) - 2] \circ z = (x + y)(y + 2)(z + 2) - 2$ etc.

G_3) *Legea* $\circ$ *este comutativă*, deoarece $x \circ y = y \circ x, (\forall) x, y \in \mathbb{Q} - \{-2\} \Leftrightarrow xy + 2(x + y) + 2 =$ $= yx + 2(y + x) + 2, (\forall) x, y \in \mathbb{Q} - \{-2\}$, adevărat dacă ținem seama că, adunarea şi înmulțirea pe $\mathbb{Q}$ sunt comutative.

G_4) *Elementul neutru* (unitate). Arătăm că există $u \in \mathbb{Q} - \{-2\}$ astfel încât $x \circ u = x, (\forall) x \in \mathbb{Q} - \{-2\}$. De aici $xu + 2(x + u) + 2 = x \Leftrightarrow u(x + 2) = -(x + 2) \Leftrightarrow u = -1 \in \mathbb{Q} - \{-2\}$.

G_5) *Elemente simetrizabile*. Fie $x \in \mathbb{Q} - \{-2\}$. Să arătăm că există $x'' \in \mathbb{Q} - \{-2\}$ astfel încât $x \circ x'' = -1$.

De aici avem: $xx'' + 2(x + x'') + 2 = -1 \Leftrightarrow x'' = -\dfrac{2x + 3}{x + 2}$.

Trebuie verificat că $x''\in\mathbb{Q}-\{-2\}$. Evident $x''\in\mathbb{Q}$. Rămâne să arătăm că $x''\neq-2\Leftrightarrow-\frac{2x+3}{x+2}\neq-2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2x-3\neq-2x-4$, evident.

K$_3$) Să verificăm distributivitatea legii $\circ$ în raport cu $*$, adică să arătăm că $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$, $(\forall)x,y,z\in\mathbb{Q}$.

Calculăm fiecare membru şi avem:

$x\circ(y*z)=x\circ(x+z+2)=x(y+z+2)+2(x+y+z+2)+2=xy+xz+4x+2y+2z+6$, (1)

şi

$(x\circ y)*(x\circ z)=[xy+2(x+y)+2]*[xz+2(x+z)+2]=xy+2(x+y)+2+xz+2(x+z)+2+2=$
$=xy+xz+4x+2y+2z+6$, (2).

Din (1) şi (2) rezultă egalitatea propusă.

Cum cele trei axiome K$_1$), K$_2$), K$_3$) s-au verificat rezultă că tripletul $(\mathbb{Q},*,\circ)$ este un corp comutativ.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc două legi de compoziție $x*y=ax+by-1$, $x\circ y=2xy-2(x+y)+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Să se determine numerele a,b,c astfel încât tripletul $(\mathbb{R},*,\circ)$ să fie corp comutativ.

R. Și în acest caz se verifică cele trei axiome K$_1$, K$_2$, K$_3$ din definiția corpului comutativ.

K$_1$) $(\mathbb{R},*)$ este grup abelian, adică au loc axiomele:

G$_1$) *Legea $*$ este asociativă*, adică $(x*y)*z=x*(y*z)$, $(\forall)x,y,z\in\mathbb{R}$. Scriem explicit egalitatea şi obținem: $(ax+by-1)*z=x*(ay+bz-1)$, $(\forall)x,y,z\in\mathbb{R}$, sau $a(ax+by-1)+bz-1=ax+$ $+b(ay+bz-1)-1$, $(\forall)x,y,z\in\mathbb{R}$.

De aici rezultă sistemul: $\begin{cases}a^2=a\\ b=b^2\\ -a-1=-b-1\Rightarrow a=b.\end{cases}$

G$_2$) *Legea $*$ este comutativă*, adică $x*y=y*x$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}\Leftrightarrow ax+by-1=ay+bx-1$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$, adevărată deoarece $a=b$ de mai sus.

G$_3$) *Elementul neutru.* Să găsim $e\in\mathbb{R}$ pentru care $x*e=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$. De aici $ax+ae-1=c$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ sau $ae=1+x-ax$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$. Cum elementul neutru al legii $*$ este unic (deci nu depinde de x) trebuie ca $a=1$, când $e=1$. Ținând seama de cele de mai sus avem $a=b=1$. Deci legea este $x*y=x+y-1$.

G$_4$) *Elemente simetrizabile.* Pentru $x\in\mathbb{R}$, arbitrar ales, să arătăm că există $x'\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*x'=1\Leftrightarrow x+x'-1=1\Leftrightarrow x'=2-x\in\mathbb{R}$. Deci orice $x\in\mathbb{R}$ este simetrizabil în raport cu legea $*$ şi are simetricul $x'=2-x$.

K$_2$) $(\mathbb{R}-\{1\},\circ)$ este grup abelian, adică se verifică axiomele:

G$_4$) *Aplicația „$\circ$“ este lege de compoziție* pe $\mathbb{R}-\{1\}$, adică din $x,y\in\mathbb{R}-\{1\}\Rightarrow x\circ y\in\mathbb{R}-\{1\}$.

Este clar că $x\circ y\in\mathbb{R}$. Rămâne de verificat că $x\circ y\neq1\Leftrightarrow 2xy-2(x+y)+c\neq1\Leftrightarrow 2(x-1)(y-1)\neq3-c.$

Cum $x,y\neq1$ rezultă $x-1,\ y-1\neq0$. Deci $c-3=0$ dă $c=3$.

G$_2$) *Asociativitatea legii „$\circ$“* se verifică prin calcul.

Observație. De obicei valoarea parametrului c se determină din cerința de asociativitate sau comutativitate a legii $\circ$.

G_3) Comntativitatea legii „ $\circ$ “ se verifică uşor.

G_4) *Elementul neutru* (unitate) al legii „ $\circ$ “ este $u=\frac{3}{2}$.

G_5) *Elemente simetrizabile*. Pentru $x\in\mathbb{R}-\{1\}$, există $x''\in\mathbb{R}-\{1\}$ pentru care $x\circ x''=-\frac{3}{2}$. De aici $x''=\frac{4x-3}{4x-4}\in\mathbb{R}-\{1\}$.

K_3) Prin calcul se verifică distributivitatea legii „ $\circ$ “ în raport cu legea „ $*$ “. Acum putem concluziona că tripletul $(\mathbb{R},*,\circ)$ este corp comutativ

Probleme propuse

1. Arătaţi că următoarele de numere împreună cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire sunt corpuri:

1) $\mathbb{Q}$; **2)** $\{a+b\sqrt{3}\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}$; **3)** $\{a+bi\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}$; **4)** $\{a+b\sqrt{3}i\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}$;

5) $\left\{a+b\varepsilon\,\middle|\,\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, a,b\in\mathbb{R}\right\}$; **6)** $\left\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\,\middle|\,a,b,c\in\mathbb{Q}\right\}$.

2. Arătaţi că următoarele mulţimi de matrice împreună cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire sunt corpuri:

1) $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Q}\right\}$; **2)** $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Q}\right\}$; **3)** $\left\{\begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Q}\right\}$; **4)** $\left\{\begin{pmatrix} a+b & 4b \\ -b & a-b\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Q}\right\}$;

5) $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0\end{pmatrix}\middle| a\in\mathbb{R}\right\}$; **6)** $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$; **7)** $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$; **8)** $\left\{\begin{pmatrix} a & -5b \\ b & a+3b\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$;

9) $\left\{\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0}\end{pmatrix}\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$; **10)** $\left\{A_{x,y}=\begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x\end{pmatrix}\middle| A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)\right\}$;

3. Arătaţi că următoarele mulţimi împreună cu aplicaţiile considerate în dreptul lor sunt corpuri:

1) $\mathbb{R}$; $x*y=x+y-4$, $x\circ y=xy-4(x+y)+20$; $(\mathbb{R},*,\circ)$;

2) $(0,\infty)$; $x*y=xy$, $x\circ y=x^{\ln y}$; $((0,\infty),*,\circ)$;

3) $\mathbb{R}$; $x*y=x+y-2$, $x\circ y=2xy-4(x+y)+10$; $(\mathbb{R},*,\circ)$;

4) $\mathcal{K}=\left\{f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,\middle|\,f_a(x)=ax, a\in\mathbb{R}\right\}$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f\circ g)(x)=f(g(x))$; $(\mathcal{K},+,\circ)$;

5) $\mathcal{K}=\left\{f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,\middle|\,a\in\mathbb{Q}, f_a(x)=\begin{cases} ax, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}\right\}$ **împreună cu adunarea şi compunerea funcţiilor.**

6) $\mathbb{C}$; $x*y=x+y-i$, $x\circ y=mixy+m(x+y)+i(1-m)$, $m\in\mathbb{C}^*$, $(\mathbb{C},*,\circ)$;

7) $\mathbb{R}$; $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$, $x\circ y=xy$; $(\mathbb{R},*,\circ)$.

4. Arătaţi că următoarele mulţimi împreună cu operaţiile considerate în dreptul lor sunt corpuri comutative:

1) $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$; $(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$, $(a,b)\circ(a',b')=(aa'+2bb', ab'+a'b)$;

2) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$, $(a,b)\circ(a',b')=(aa'-bb', ab'+a'b)$.

5. **Fie $a,b \in \mathbb{R}$ şi legile de compoziţie: $x \perp y = ax + by - 2,\ x \top y = xy - 2(x+y) + 6$. Să se determitie a, b astfel încât tripletul $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ să fie corp.**

6. **1) $\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire a matricelor este corp cu 9 elemente.**

2) Fie mulţimea $\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\}$. Arătaţi tripletul $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ este un corp comutativ cu 49 de elemente.

2.3. MORFISME ŞI IZOMORFISME DE INELE ŞI CORPURI

Conceptul de izomorfism (morfism) de la grupuri poate fi aplicat la fel de bine la inele şi corpuri. Definiţia care urmează este o extindere a conceptului de izomorfism (morfism) de grupuri. Deoarece în definiţia inelului şi a corpului sunt două operaţii binare, vom cere ca izomorfismul (morfismul) să conserve aceste operaţii. Mai precis formulăm următoarea:

Definiţie. Fie $(A, +, \cdot)$ şi $(A', \oplus, \odot)$ două inele. O aplicaţie $f : A \to A'$ se numeşte **morfism** (sau **omomorfism**) **de inele** dacă satisface următoarele două condiţii:

1) $f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$, pentru orice $x, y \in A$;

2) $f(xy) = f(x) \odot f(y)$, pentru orice $x, y \in A$.

Observaţii. **1)** Din definiţie rezultă că orice morfism de inele este şi un morfism de grupuri, de la grupul aditiv al lui A la grupul aditiv al lui A'. Atunci, dacă $f : A \to A'$ este morfism de inele, din proprietăţile morfismelor de grupuri, rezultă:

1°) $f(0) = 0'$ (unde 0 este elementul nul al lui A, iar $0'$ este elementul nul al lui A') (spunem simplu că un morfism de inele „duce" elementul nul în elementul nul)

2°) $f(-x) = -f(x), (\forall) x \in A$ (imaginea opusului prin morfism este opusul imaginii).

2) Pentru inelele A şi A' din condiţia **2)** nu se poate deduce că $f(1) = 1'$ (1 este elementul unitate pentru A, iar $1'$ este elementul unitate al lui A'). Dacă în plus A' este domeniu de integritate, atunci $f(1) = 1'$.

Definiție. Fie $(A, +, \cdot)$ şi $(A', \oplus, \odot)$ două inele. Un morfism de inele $f : A \to A'$ cu proprietatea $f(1) = 1'$

se numeşte **morfism unitar** de inele (1, respectiv 1' sunt elementele unitate din *A* şi respectiv *A'*).

Un morfism de inele de la un inel la el însuşi se numeşte **endomorfism** al inelului respectiv.
Compunerea a două morfisme de inele este încă morfism de inele (Verificați!).

Exemple. 1. Fie *A* şi *A'* două inele. Aplicația $f : A \to A'$ definită prin $f(x) = 0', (\forall) x \in A$ este un morfism de inele, numit morfismul nul. Se verifică uşor cele două condiții din definiție:

1) $f(x+y) = 0' = 0' \oplus 0' = f(x) \oplus f(y), (\forall) x, y \in A$ **şi**

2) $f(xy) = 0' = 0' \odot 0' = f(x) \odot f(y), (\forall) x, y \in A$ **.**

2. Fie *A* un inel. Aplicația identică $1_A : A \to A, 1_A(x) = x$ este un morfism unitar de inele, aparținând endomorfismelor lui *A*.

3. Fie inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Atunci aplicația $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ definită prin $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ este un morfism de inele pentru că avem:

1) $f(a_1 + b_1\sqrt{2} + a_2 + b_2\sqrt{2}) = f(a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\sqrt{2}) = a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)\sqrt{2} = (a_1 - b_1\sqrt{2}) +$
$+ (a_2 - b_2\sqrt{2}) = f(a_1 + b_1\sqrt{2}) + f(a_2 + b_2\sqrt{2})$

şi

2) $f((a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2})) = f(a_1a_2 + 2b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}) = a_1a_2 + 2b_1b_2 - (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} =$
$= a_2(a_1 - b_1\sqrt{2}) + \sqrt{2}b_2(\sqrt{2}b_1 - a_1) = (a_1 - \sqrt{2}b_1)(a_2 - \sqrt{2}b_2) = f(a_1 + b_1\sqrt{2}) f(a_2 + b_2\sqrt{2})$.

4. Aplicația $f : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_n, +, \cdot), n \geq 2, n \in \mathbb{N}, f(x) = \hat{x}$, este un morfism de inele, numit morfismul canonic. Într-adevăr avem:

1) $f(x+y) = \widehat{x+y} = \hat{x} + \hat{y} = f(x) + f(y), (\forall) x, y \in \mathbb{Z}$ **şi**

2) $f(xy) = \widehat{xy} = \hat{x}\hat{y} = f(x) f(y), (\forall) x, y \in \mathbb{Z}$.

Dacă f are proprietate particulară, atunci morfismul se numeşte conform următoarelor:

Definiţii. 1) Un morfism de inele $f: A \to A'$ se numeşte **morfism injectiv**, dacă f este injectivă.

2) Un morfism de inele $f: A \to A'$ se numeşte **morfism surjectiv**, dacă f este surjectivă. În acest cau $A' = f(A) = \operatorname{Im} f$.

3) Un morfism de inele $f: A \to A'$ se numeşte **izomorfism**, dacă f este bijectivă.

Dacă între două inele *A, A'*, există cel puţin un izomorfism de inele spunem că inelele sunt **izomorfe** şi scriem $A \simeq A'$ (citim: inelul *A* este izomorf cu inelul *A'*).

Să reţinem conceptul important de izomorfism de inele.
Aplicaţia $f: A \to A'$ este **izomorfism de inele** dacă:
1) f este morfism de inele;
2) f este bijectivă.
Dacă două inele sunt izomorfe, atunci grupurile aditive $(A, +), (A', \oplus)$ sunt izomorfe, iar monoizii $(A, \cdot), (A', \odot)$ sunt de asemenea izomorfi.
Un izomorfism de la inelul *A* la el însuşi se numeşte **automorfism**. Compunerea a două izomorfisme de inele este încă izomorfism de inele (Verificaţi !).

Exemple. 1. Fie *A* un inel. Aplicaţia identică $1_A : A \to A, 1_A(x) = x$ este un automorfism al inelului A. Am arătat mai sus (exemplul 3)) că 1_A este endomorfism al inelului *A*. Cum 1_A este o aplicaţie bijectivă, se deduce că 1_A este automorfism al inelului *A*.

2. Funcţia $f: (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_n, +, \cdot), f(x) = \hat{x}, (\forall) x \in \mathbb{Z}$ este un morfism surjectiv de inele.

3. Morfismul $f: \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{2}], f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ este bijectiv deoarece *f* este injectiv, adică dacă $f(a_1 + b_1\sqrt{2}) = f(a_2 + b_2\sqrt{2}) \Rightarrow a_1 - b_1\sqrt{2} = a_2 - b_2\sqrt{2} \Rightarrow a_1 = a_2$ şi $b_1 = b_2$ ceea ce dă $a_1 + b_1\sqrt{2} = a_2 + b_2\sqrt{2}$.

(Se ştie că dacă $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}, a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$, atunci $a = a', b = b'$, deoarece scriind relaţia sub forma $(b - b')\sqrt{2} = a' - a$, atunci dacă $b \neq b'$, s-ar obţine $\sqrt{2} = \frac{a' - a}{b - b'}$, fals deoarece $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ în timp ce $\frac{a' - a}{b - b'} \in \mathbb{Q}$. Deci $b = b'$ şi atunci evident $a = a'$. Reciproca este imediată).

Aplicaţia *f* este surjectivă deoarece pentru $z = a + b\sqrt{2}$, atunci există $\bar{z} = a - b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ pentru care $f(\bar{z}) = z$.

Definiție. Fie $(K,+,\cdot)$ și $(K',\oplus,\odot)$ două corpuri. O aplicație $f:K\to K'$ se numește:

a) **morfism de corpuri** dacă:

1) $f(x+y)=f(x)\oplus f(y), (\forall)x,y\in K$;

2) $f(xy)=f(x)\odot f(y), (\forall)x,y\in K$.

b) **izomorfism de corpuri**, dacă

1) f este morfism de corpuri;

2) f este bijectiv.

Observăm din definiția de la a) că morfismul de corpuri fiind un morfism între domenii de integritate avem $f(1)=1'$.

Un morfism de corpuri de la un corp la el însuşi se numeşte **endomorfism** al acelui corp.

Un izomorfism de corpuri de la un corp la el însuşi se numeşte **automorfism** al acelui corp.

Exemple. 1. Aplicația $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{C}, f(x)=x$ este un morfism de corpuri numit morfismul-incluziune.

2. Aplicația $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=\overline{z}$ este un automorfism al lui $\mathbb{C}$ (Verificați!).

Probleme rezolvate

1. Să se arate că aplicația $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_2, f(x)=\begin{cases}\hat{0}, \text{ dacă } x \text{ este par}\\ \hat{1}, \text{ dacă } x \text{ este impar}\end{cases}$, este morfism de inele.

R. Trebuie să verificăm cele două condiții ale morfismului de inele.

1) $f(x+y)=f(x)+f(y), (\forall)x,y\in\mathbb{Z}$,

2) $f(xy)=f(x)f(y), (\forall)x,y\in\mathbb{Z}$.

Pentru verificarea condiției 1) analizăm cazurile:

a) x, y numere întregi pare $(x,y\in 2\mathbb{Z})$. Atunci: $f(x+y)=\hat{0}$ (deoarece $x+y$ este par) şi $f(x)+f(y)=\hat{0}+\hat{0}=\hat{0}$. Deci în acest caz, 1) are loc.

b) $x,y\in\mathbb{Z}$ de parități diferite. Să spunem $x\in 2\mathbb{Z}, y\in 2\mathbb{Z}+1$. Atunci $f(x+y)=\hat{1}$ ($x+y$ este impar) şi $f(x)+f(y)=\hat{0}+\hat{1}=\hat{1}$.

Şi în acest caz, 1) se verifică. Analog se tratează cazul $x\in 2\mathbb{Z}+1, y\in 2\mathbb{Z}$.

c) x,y numere întregi impare $(x,y\in 2\mathbb{Z}+1)$. Avem: $f(x+y)=\hat{0}$ ($x+y$ este par) şi $f(x)+f(y)=\hat{1}+\hat{1}=\hat{0}$, ceea ce arată că 1) are loc.

Pentru verificarea condiției 2) se analizează aceleași cazuri.

Avem: a) $x,y\in 2\mathbb{Z}$, $f(xy)=\hat{0}$ şi $f(x)f(y)=\hat{0}\cdot\hat{0}=\hat{0}$, adică 2) are loc.

b) $x\in 2\mathbb{Z}$ şi $y\in 2\mathbb{Z}+1$ când $f(xy)=\hat{0}$ şi $f(x)f(y)=\hat{0}\cdot\hat{1}=\hat{0}$, adică 2) se verifică.

c) $x,y\in 2\mathbb{Z}+1$, când $f(xy)=\hat{1}$ şi $f(x)f(y)=\hat{1}\cdot\hat{1}=\hat{1}$, şi din nou 2) are loc.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră operațiile: $x \top y = x + y - 1$, $x \perp y = x + y - xy$. Să se arate că $(\mathbb{R}, \top, \perp)$ este inel izomorf cu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ prin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$.

R. Lăsăm în seama cititorului să verifice că tripletul $(\mathbb{R}, \top, \perp)$ este un domeniu de integritate.

Probăm că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$ este izomorfism de inele. Trebuie să verificăm că:

1) *f este morfism de inele,*
2) *f este bijectivă.*

1) Funcția *f* este morfism de inele dacă:

a) $f(x \top y) = f(x) + f(y), (\forall) x, y \in \mathbb{R}$, b) $f(x \perp y) = f(x) f(y), (\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

Verificăm a). Avem $f(x \top y) = f(x + y - 1) = 1 - (x + y - 1) = 2 - x - y = 1 - x + 1 - y = f(x) + f(y)$.

Verificăm b). Avem: $f(x \perp y) = f(x + y - xy) = 1 - (x + y - xy) = 1 - x - y + xy = (1 - x)(1 - y) = f(x) f(y)$.

Cum a) și b) au fost verificate deducem că *f* este morfism de inele.

2) Funcția liniară $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ se știe că este bijectivă dacă, $a \neq 0$. Deci în cazul nostru $a = -1, b = 1$, funcția f este și bijectivă. Deoarece condițiile 1) și 2) au fost verificate rezultă că f realizează izomorfismul între cele două inele.

Probleme propuse

1. 1) Arătați că $f : (\mathbb{Z}_6, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_6, +, \cdot), f(\hat{x}) = \widehat{4x}$ este morfism de inele.

2) Fie $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire. Aplicatia $f : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$, $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = a - b$ este un morfism de inele. Determinați nucleul morfismului.

3) Arătați că aplicațiile de mai jos sunt morfisme de inele:

a) $S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$, $f : (S, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $f\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = z$ și *f* surjecție;

b) $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{Z} \right\}$, $f : (A, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $f\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = x$ și *f* surjecție;

c) $f : (\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \cdot) \to (\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2), +, \cdot)$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}$;

d) $A = \left\{ \begin{pmatrix} m & 2n \\ n & m \end{pmatrix} \middle| m, n \in \mathbb{Z} \right\}$, $f : (A, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$, $f\begin{pmatrix} m & 2n \\ n & m \end{pmatrix} = m + n\sqrt{2}$ și *f* bijecție.

2. Se consideră $\mathcal{C}([-1,1])$ inelul funcțiilor continue pe [–1,1] cu valori reale determinat de operațiile de adunare și înmulțire a funcțiilor. Să se arate că aplicația $F : \mathcal{C}([-1,1]) \to \mathbb{R}, F(f) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ este morfism. Determinați nucleul morfismului.

3. Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definim pe *A* două aplicații:

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), (a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

împreună cu care devine inel.

Arătați că aplicația $f:\mathcal{A}\to\mathbb{R},\ f\left((a,b)\right)=a$ este morfism surjectiv de inele, dar nu este injectiv.

4. 1) Pe mulțimea $\mathcal{A}=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ se definesc aplicațiile: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),\ (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ împreună cu care devine inel. Arătati că $\mathcal{A}\simeq\mathbb{Z}[i]$.

2) Fie $M=\{a,b\}$ şi $(\mathcal{P}(M),\Delta,\bigcap)$, unde $A\Delta B=(A-B)\bigcup(B-A)$ şi $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ unde: $(x,y)+(x',y')=(x+x',\ y+y');(x,y)\cdot(x',y')=(xx',\ yy')$. Arătați că $(\mathcal{P}(M),\Delta,\bigcap)$ şi $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ sunt inele izomorfe. Construiți tablele operațiilor.

3) Fie $A=\{a,b,c\}$ cu operațiile de adunare şi înmulțire date în tabelele:

$+$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	c	b
c	a	b	c

Arătați că $(A,+,\cdot)\simeq(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$.

4) Fie $A=\{a,b,c,d\}$ cu operațiile de adunare şi înmulțire date în tabelele:

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	c	a	c
c	a	a	a	a
d	a	c	a	c

şi $A'=\{\hat{0},\ \hat{2},\ \hat{4},\hat{6}\}\subset\mathbb{Z}_8$. Arătați că $(A,+,\cdot)\simeq(A',+,\cdot)$.

5. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim aplicațiile: $x*y=x+y-2,\ x\circ y=xy-2(x+y)+6$, împreună cu care devine domeniu de integritate. Arătați că $(\mathbb{Z},*,\circ)\simeq(\mathbb{Z},+,\cdot)$, unde izomorfismul este dat de $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ f(x)=\alpha x+\beta$.

6. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc perechile de aplicații: $\begin{cases}x\oplus y=x+y+1,\\ x\odot y=xy+x+y,\end{cases}\qquad\begin{cases}x*y=x+y-1\\ x\circ y=xy-x-y+2\end{cases}$.

Arătați că inelele $(\mathbb{Z},\oplus,\odot)$, $(\mathbb{Z},*,\circ)$ sunt izomorfe, printr-un izomorfism de forma $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ f(x)=\alpha x+\beta$.

7. Arătați că inelele $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{A}'$ cu operațiile de adunare şi înmulțire uzuale sunt izomorfe, în cazurile:

1) $\mathcal{A}=\left\{x+y\sqrt{7}\,|\,x,y\in\mathbb{Z}\right\},\quad \mathcal{A}'=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ 7y & x\end{pmatrix}\middle|\,x,y\in\mathbb{Z}\right\}$;

2) $\mathcal{A}=\left\{x+y\sqrt{5}\,|\,x,y\in\mathbb{Z}\right\},\quad \mathcal{A}'=\left\{\begin{pmatrix}x & -5y\\ -y & x\end{pmatrix}\middle|\,x,y\in\mathbb{Z}\right\}$;

3) $\mathcal{A}=\left\{x+y\sqrt{2}\,|\,x,y\in\mathbb{Z}\right\},\quad \mathcal{A}'=\left\{\begin{pmatrix}x+2y & 2y\\ -2y & x-2y\end{pmatrix}\middle|\,x,y\in\mathbb{Z}\right\}$;

8. Pe $A=(0,\infty)$ se definesc aplicațiile $x\oplus y=xy,\ x\odot y=x^{\ln y}$. Arătăți că tripletul $(A,\oplus,\odot)$ este un corp comutativ izomorf cu corpul numerelor reale $\mathbb{R}$, printr-un izomorfism dat de $f:\mathbb{R}\to(0,\infty),\ f(x)=\alpha e^{\beta x}$.

9. **Să se arate că aplicațiile** $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$, $x\circ y=xy$ **, determină pe** $\mathbb{R}$ **o structură de corp comutativ, izomorf cu corpul numerelor reale, printr-un izomorfism** $f:(\mathbb{R},+,\cdot)\to(\mathbb{R},*,\circ)$, $f(x)=\sqrt[3]{\alpha x+\beta}$ **.**

10. **Definim pe** $\mathbb{R}$ **aplicațiile:** $x\top y=x+y-2,\ x*y=2xy-4(x+y)+10$**. Arătați că tripletul** $(\mathbb{R},\top,*)$ **este un corp izomorf cu** $(\mathbb{R},+,\cdot)$**.**

11. **Să se demonstreze că** $x\oplus y=x+y-7,\ x\odot y=xy-7(x+y)+56$**, determină pe** $\mathbb{Q}$ **o structură de corp comutativ, izomorf cu corpul numerelor raționale** $(\mathbb{Q},+,\cdot)$**.**

12. **Arătați că pe mulțimea** $(0,\infty)$ **aplicațiile:** $x*y=xy,\ x\circ y=x^{\ln\sqrt[3]{y}}$ **determină o structură de corp comutativ, izomorf cu corpul numerelor reale** $(\mathbb{R},+,\cdot)$ **printr-un izomorfism de forma** $f:\mathbb{R}\to(0,\infty),\ f(x)=e^{mx}+n$ **.**

2.4. INELE DE POLINOAME CU COEFICIENȚI ÎNTR-UN CORP COMUTATIV

1. POLINOAME DE O NEDETERMINANTĂ. FORMA ALGEBRICĂ A UNUI POLINOM. OPERAȚII CU POLINOAME

Paragraful pe care-l prezentăm reprezintă un domeniu important şi bine studiat al algebrei tradiționale. Numeroase probleme de matematică dintre cele mai diverse, sunt enunțate şi rezolvate în termeni de polinoame.

Fie K un corp comutativ (ne interesează cazurile în care K este unul din corpurile $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$, p prim). Vom considera $\mathcal{F}(\mathbb{N}, K) = \{f : \mathbb{N} \to K\}$, mulțimea tuturor funcțiilor definite pe $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$ cu valori în K. O astfel de funcție se numeşte **şir de elemente** din K. Funcția este bine definită, dacă ştim cum acționează pe fiecare element din $\mathbb{N}$, adică ce înseamnă $f(k) = a_k \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$. Am notat acest şir prim mulțimea ordonată $(a_k)_{k \geq 0}$. Deci $f = (a_0, a_1, a_2, ...)$.

Din această mulțime de şiruri $\mathcal{F}(\mathbb{N}, K)$ ne interesează o submulțime $\mathcal{P}$, formată din şirurile $(a_k)_{k \geq 0}$ pentru care termenii lui sunt nuli cu excepția unui număr finit dintre ei. Deci, elementele lui $\mathcal{P}$ au forma $(a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)$, notat $(a_0, a_1, ..., a_n, 0_\infty)$, cu $a_n \neq 0$ şi îl numim polinom cu coeficienți în K, unde a_n (elementul de rang maxim nenul) se numeşte **coeficientul dominant** al polinomului, la care se adaugă elementul $(0, 0, ..., 0, ...)$ (**polinomul nul**).

Pe mulțimea $\mathcal{P}$ a polinoamelor definim două operații algebrice interne şi una externă. Înainte de a trece la operațiile algebrice propriu-zise, pentru polinoame, prezentăm următoarea:

Definiție. (**Egalitatea a două polinoame**). Fie $f = (a_0, a_1, ..., a_n, 0_\infty)$, $g = (b_0, b_1, ..., b_m, 0_\infty)$ două polinoame. **Polinomul *f* este egal cu polinomul *g*** şi scriem $f = g$ dacă şi numai dacă $a_i = b_i, (\forall) i \geq 0$.

Două polinoame sunt egale dacă ele coincid pe componente.

1) Adunarea polinoamelor

Are loc următoarea:

Definiție. Fie $f=(a_0,a_1,...,a_n,\, a_\infty)$ şi $g=(b_0,b_1,...,b_m,0_\infty)$ două polinoame. Polinomul $f+g=(a_0+b_0,\, a_1+b_1,a_2+b_2,...)$ se numeşte **suma polinoamelor *f*, *g*.**

Spunem că adunarea polinoamelor se face pe componente.

Operația prin care oricărui cuplu de polinoame (f,g) îi asociem polinomul $f+g$ se numeşte **adunarea polinoamelor**.

Deci $+:\mathcal{P}\times\mathcal{P}\to\mathcal{P},\,(f,g)\to f+g$.

Observații. **1)** $f+g\in\mathcal{P}$ deoarece doar un număr finit de coeficienți sunt nenuli. Pentru $k>\max(n,m)$ avem $a_k=0$.

2) Din definiție se deduce că pentru $K=\mathbb{Z}\left(\mathbb{Q},\,\mathbb{R},\,\mathbb{C},\mathbb{Z}_p\right)$ pentru $f,g\in\mathcal{P}$ rezultă $f+g$ polinom cu coeficienți întregi (respectiv raționali, reali, complecşi sau clase de resturi modulo *p*).

Exemple. 1. Fie $f=(0,2,i,-1,0_\infty),\, g=(-i,1+i,0,3,0_\infty),\, K=\mathbb{C}$. **Atunci** $f+g=(-i,3+i,i,2,0_\infty)$.

2. Fie $f=\left(\hat{1},\,\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{0}_\infty\right),\, g=\left(\hat{2},\hat{3},\hat{3},\hat{1},\hat{0}_\infty\right),\, K=\mathbb{Z}_5$. **Atunci** $f+g=\left(\hat{3},\hat{0},\hat{1},\hat{0}_\infty\right)$.

Proprietățile adunării polinoamelor

Următoarele proprietăți se verifică uşor dacă se ține seama de proprietățile adunării de pe *K* şi de egalitatea a două polinoame. Are loc următoarea:

Teoremă. **A$_1$) (Comutativitatea adunării)** Adunarea polinoamelor este comutativă, adică $f+g=g+f,\,(\forall)f,g\in\mathcal{P}$.

A$_2$) (Asociativitatea adunării) Adunarea polinoamelor este asociativă, adică $(f+g)+h=f+(g+h),\,(\forall)f,g,h\in\mathcal{P}$.

A$_3$) (Elementul neutru) Adunarea polinoamelor admite polinomul nul (0) ca element neutru, adică $0+f=f+0=f,\,(\forall)f\in\mathcal{P}$.

A$_4$) (Elemente opuse) Orice polinom *f* admite un element opus, notat cu $(-f)$ astfel încât $f+(-f)=(-f)+f=0$.

Observații. 1) Dacă $f=(a_0,a_1,...,a_n,0_\infty)$, atunci $-f=(-a_0,-a_1,...,-a_n,0_\infty)$ ($-f$ se obține din f prin schimbarea semnelor tuturor elementelor nenule din f).

2) Dacă $f,g\in\mathcal{P}$, atunci $f+(-g)$ se notează simplu $f-g$ şi se numeşte **diferența** dintre polinomul f şi polinomul g. Se scad pe componente elementele din f şi g.

3) Mulțimea $\mathcal{P}$ a polinoamelor cu coeficienți în K împreună cu operația de adunare şi proprietățile **A$_1$) – A$_4$)** formează **grup comutativ**.

Exemple. 1. Fie $f=(3,2\sqrt{2},-5,0_\infty)$, $g=(-1,\sqrt{2},0_\infty)$. Atunci $f-g=(4,\sqrt{2},-5,0_\infty)$.

2. Fie $f=(\hat{1},\hat{3},\hat{2},\hat{2},\hat{0}_\infty)$, $g=(\hat{2},\hat{4},\hat{2},\hat{4},\hat{0}_\infty)$, $K=\mathbb{Z}_5$. Atunci $f-g=(\hat{4},\hat{4},\hat{0},\hat{3},\hat{0}_\infty)$.

2) Înmulțirea polinoamelor

Înmulțirea a două polinoame este, sub această formă, mai dificilă.
Are loc următoarea:

Definiție. Fie $f=(a_0,a_1,...,a_n,0_\infty)$, $g=(b_0,b_1,...,b_m,0_\infty)$ două polinoame. Polinomul $f\cdot g=(c_0,c_1,c_2,...,c_k,...,c_{n+m},0_\infty)$, unde:

$$c_0=a_0b_0,\ c_1=a_0b_1+a_1b_0,...,c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+...+a_kb_0,...,c_{n+m}=a_nb_m,$$

se numeşte **produsul polinoamelor** f, g.

Operația prin care asociem fiecărui cuplu de polinoame (f,g) polinomul $f\cdot g$ se numeşte **înmulțirea (produsul) polinoamelor.**

Deci $\cdot:\mathcal{P}\times\mathcal{P}\to\mathcal{P},\ (f,g)\to f\cdot g$.

Observații. 1) În loc de $f\cdot g$ vom scrie simplu fg şi $fg\in\mathcal{P}$ deoarece pentru $k>m+n,\ c_k=0$.

2) Să remarcăm că elementele c_k din structura produsului sunt sume de produse de forma a_ib_j cu $i+j=k,\ i,j\in\mathbb{N}$. Deci $c_k=\sum\limits_{i+j=k}a_ib_j=a_0b_k+a_1b_{k-1}+...+a_kb_0$.

Exemple. 1. Fie $f=(-1,i,1-i,3,0_\infty)$, $g=(0,1,-1,i,0_\infty)$, $K=\mathbb{C}$. Atunci:

$c_0=a_0b_0=(-1)\cdot 0=0$, $c_1=a_0b_1+a_1b_0=(-1)\cdot 1+i\cdot(0)=-1$, $c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=(-1)(-1)+$ $+i\cdot 1+(1-i)\cdot 0=1+i$, $c_3=a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0=(-1)\cdot i+i\cdot 1+(1-i)\cdot 1+3\cdot 0=1-i$, $c_4=a_0b_4+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_4b_0=i$, $c_5=a_0b_5+a_1b_4+...+a_5b_0=i-2$, $c_6=a_0b_6+a_1b_5+...+$ $+a_6b_0=a_3b_3=3i$, $c_k=0$, $k\geq 7$. Deci $fg=(0,-1,1+i,1-i,i,i-2,3i,0_\infty)$.

2. **Fie** $f=\left(\hat{1},\hat{2},\hat{1},\hat{0}_{\infty}\right)$, $g=\left(\hat{3},\hat{4},\hat{0}_{\infty}\right)$, $K=\mathbb{Z}_5$. **Atunci:**

$c_0=a_0b_0=\hat{1}\cdot\hat{3}=\hat{3}$, $c_1=a_0b_1+a_1b_0=\hat{1}\cdot\hat{4}+\hat{2}\cdot\hat{3}=\hat{4}+\hat{1}=\hat{0}$, $c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=\hat{1}\cdot\hat{0}+$ $+\hat{2}\cdot\hat{4}+\hat{1}\cdot\hat{3}=\hat{3}+\hat{3}=\hat{1}$, $c_3=a_0b_3+...+a_3b_0=\hat{4}$, $c_k=\hat{0}$, $k\geq 4$. **Deci** $fg=\left(\hat{3},\hat{0},\hat{1},\hat{4},\hat{0}_{\infty}\right)$.

Proprietățile înmulțirii polinoamelor

Are loc următoarea:

Teoremă. I$_1$) (**Comutativitatea înmulțirii**) Înmulțirea polinoamelor este comutativă, adică $fg=gf$, $(\forall)f,g\in\mathcal{P}$.

I$_2$) (**Asociativitatea înmulțirii**) Înmulțirea polinoamelor este asociativă, adică $(fg)h=f(gh)$, $(\forall)f,g,h\in\mathcal{P}$.

I$_3$) (**Elementul unitate**) Înmulțirea polinoamelor admite polinomul constant $1=(1,0_{\infty})$ ca element neutru, adică $f\cdot 1=1\cdot f=f$, $(\forall)f\in\mathcal{P}$.

Mulțimea $\mathcal{P}$ a polinoamelor cu coeficienți din K împreună cu înmulțirea și proprietățile **I$_1$) – I$_3$)** formează **monoid comutativ.**
Cele două operații introduse mai sus, adunarea și înmulțirea, sunt legate între ele prin proprietatea de:

Distributivitate. Înmulțirea este distributivă în raport cu adunarea polinoamelor, adică

$$f(g+h)=fg+fh,\ (f+g)h=fh+gh,\ (\forall)f,g,h\in\mathcal{P}.$$

Cu aceste elemente putem formula următoarea:

Teoremă. Mulțimea polinoamelor cu coeficienți în corpul comutativ K, împreună cu operațiile de adunare și înmulțire formează un inel comutativ.

Deci $(\mathcal{P},+,\cdot)$ este inel comutativ.

Observații. 1) Pentru acest caz cu K corp comutativ, inelul polinoamelor este domeniu de integritate.
2) De obicei construcția inelului de polinoame se realizează plecând de la un inel A cu $0\neq 1$.

3) Înmulțirea cu scalari a polinoamelor

Are loc următoarea:

Definiție. Fie $k \in K$ şi polinomul $f = (a_0, a_1, ..., a_n, 0_\infty)$. Produsul dintre scalarul k şi polinomul f este polinomul $k \cdot f = (ka_0, ka_1, ..., ka_n, 0_\infty)$.

A înmulți un polinom cu un scalar înseamnă a-i înmulți toate componentele cu acel scalar.

Operația prin care asociem fiecărui cuplu (k, f) polinomul $k \cdot f$ se numeşte **înmulțirea cu scalari a polinoamelor.**

Deci $\cdot : K \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}, (k, f) \to k \cdot f$.

Observații. 1) Operația definită mai sus se numeşte **lege de compoziție externă** pe mulțimea $\mathcal{P}$ cu domeniul de operatori (scalari) K.
2) În loc de $k \cdot f$ vom scrie kf şi este clar $kf \in \mathcal{P}$.

Exemple. 1. Fie $K = \mathbb{C}, k = 3i, f = (0, i, 1-i, \sqrt{3}, 0_\infty)$. Atunci $3if = (0, -3, 3+3i, 3\sqrt{3}i, 0_\infty)$.

2. Fie $K = \mathbb{Z}_3, k = \hat{2}, f = (\hat{1}, \hat{2}, \hat{0}, \hat{1}, \hat{0}_\infty)$. Atunci $\hat{2}f = (\hat{2}, \hat{1}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{0}_\infty)$.

Proprietăți ale înmulțirii polinoamelor cu scalari

Au loc proprietățile date de următoarea:

Teoremă.
S₁) $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu) f, (\forall)\lambda, \mu \in K, (\forall) f \in \mathcal{P}$.

S₂) $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g, (\forall)\lambda \in K, (\forall) f, g \in \mathcal{P}$.

S₃) $(\lambda + \mu) f = \lambda f + \mu f, (\forall)\lambda, \mu \in K, (\forall) f \in \mathcal{P}$.

S₄) $1 f = f, 1 \in K, (\forall) f \in \mathcal{P}$.

Verificarea proprietăților este imediată (se apelează la asociativitatea înmulțirii de pe K, a distributivității înmulțirii în raport cu adunarea de pe K, a egalității a două polinoame).
Mulțimea $\mathcal{P}$ împreună cu adunarea polinoamelor şi înmulțirea polinoamelor cu scalari şi proprietățile **A$_1$) – A$_4$)**, **S$_1$) –S$_4$)** formează ceea ce se cheamă un **spațiu vectorial peste** K, numit **spațiul vectorial al polinoamelor peste corpul** K.

2. FORMA ALGEBRICĂ A UNUI POLINOM

Să observăm că polinoamele de forma $(a, 0_\infty)$, $a \in K$ se adună şi se înmulțesc în acelaşi mod ca elementele lui *K*. Într-adevăr avem: $(a, 0_\infty) + (b, 0_\infty) = (a + b,\ 0_\infty)$, $(a, 0_\infty) \cdot (b, 0_\infty) = (ab, 0_\infty)$.

Aceasta ne permite să identificăm (modulo *un* izomorfism) astfel de polinoame cu elementele corespunzătoare din *K*, adică $(a, 0_\infty) = a$, $(\forall) a \in K$.

Desemnăm elementul $(0, 1, 0_\infty) = X$ şi numim *X* **nedeterminata** pe *K*. Utilizând operația de înmulțire din $\mathcal{P}$ rezultă:

$$X = (0, 1, 0_\infty),\ X^2 = (0, 0, 1, 0_\infty),\ X^3 = (0, 0, 0, 1, 0_\infty), ...,\ X^n = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, 1, 0_\infty).$$

De asemenea pentru $a \in K$ avem: $(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, a, 0_\infty) = aX^n = X^n a$.

Cu aceste observații polinomul $f = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, 0_\infty)$ se scrie succesiv:

$$f = (a_0, 0_\infty) + (0, a_1, 0_\infty) + (0, 0, a_2, 0_\infty) + ... + (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, a_n, 0_\infty) =$$

$$= a_0 + a_1 (0, 1, 0_\infty) + a_2 (0, 0, 1, 0_\infty) + ... + a_n (0, 0, ..., 0, 1, 0_\infty) =$$

$$= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n.$$

Am obținut următoarea:

Definiție. Scrierea polinomului *f*

$$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + .. + a_n X^n = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \text{, unde } X^0 = 1,$$

reprezintă **forma algebrică a lui** *f*, ordonat după puterile crescătoarea ale nedeterminatei *X*.

Mulțimea polinoamelor de nedeterminată *X* cu coeficienți în *K* se notează $K[X]$.

Polinoamele de forma $f = a_0, a_0 \in K$ se numesc **polinoame constante.** Polinomul $f = 0$ se numeşte **polinomul nul.**

Uneori vom folosi pentru *f* scrierea (numită de asemenea, forma algebrică):

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 ,$$

unde am ordonat polinomul după puterile descrescătoare ale lui *X*.

Observații. 1) Elementele $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ se numesc **coeficienții polinomului**, iar monoamele $a_k X^k$, $k = \overline{0,n}$ se numesc **termenii polinomului**.

Dacă $a_k = 0$, atunci termenul $0 \cdot X^k$ nu se mai scrie ($f = 2 - 3X + X^3$, aici $a_2 = 0$), iar dacă $a_k = 1$, atunci în loc de $1 \cdot X^k$ se scrie simplu X^k.

2) Dacă $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = \ldots = a_n = 0$, atunci $f = X$ reprezintă un polinom.

3) Inelul $K[X]$ conține, atât pe *K* (polinoamele constante) cât şi pe *X*. Inelul $K[X]$ este „cel mai mic" inel care conține pe *K* şi pe *X*, în sensul că orice inel care conține pe *K* şi *X* trebuie să conțină toate polinoamele $a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$.

4) În forma algebrică a unui polinom simbolurile $X,\ X^2,\ X^3, \ldots$ pot fi privite ca „etichete" pentru pozițiile coeficienților.

5) Se impune să avem grijă în a nu considera litera *X* ca reprezentând un element variabil din *K*; litera *X* desemnează un **polinom particular** (obs. **2)**). Ideea că *X* reprezintă un element variabil din *K* provine din confuzia ce se face între un polinom cu coeficienți în *K* şi funcția polinomială definită pe *K* cu valori în *K*, ataşată polinomului respectiv (despre care vorbim mai jos).

6) Pentru $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p,\ p \text{ prim}\}$ se obțin mulțimile de polinoame:

$\mathbb{Q}[X]$ = mulțimea polinoamelor de nedeterminată *X* cu coeficienți în $\mathbb{Q}$ (sau peste $\mathbb{Q}$),

$\mathbb{R}[X]$ = mulțimea polinoamelor de nedeterminată *X* cu coeficienți în $\mathbb{R}$ (sau peste $\mathbb{R}$),

$\mathbb{C}[X]$ = mulțimea polinoamelor de nedeterminată *X* cu coeficienți în $\mathbb{C}$ (sau peste $\mathbb{C}$),

$\mathbb{Z}_p[X]$ = mulțimea polinoamelor de nedeterminată *X* cu coeficienți în $\mathbb{Z}_p$ (sau peste $\mathbb{Z}_p$),

Au loc incluziunile: $\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Exemple. $f_1 = \frac{1}{2} - 3X + \frac{3}{5}X^3 \in \mathbb{Q}[X]$, $f_2 = 1 + \sqrt{2}X - \frac{1}{3}X^2 \in \mathbb{R}[X]$,

$f_3 = 1 + i - 2X^2 + iX^3 - (1-i)X^4 \in \mathbb{C}[X]$, $f_4 = \hat{1} + \hat{2}X^2 + \hat{3}X^4 \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f_5 = -1 + 3X^2 - 5X^3 \in \mathbb{Z}[X]$.

3. OPERAȚIILE CU POLINOAME SCRISE SUB FORMĂ ALGEBRICĂ

Reformulăm operațiile cu polinoame descrise mai sus, ținând seama de forma algebrică a acestora, în următoarea:

Teoremă. Fie $f, g \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$,

$$g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + ... + b_mX^m.$$

1) (Egalitatea a două polinoame) Polinomul f **este egal cu polinomul** g şi scriem $f = g \Leftrightarrow a_i = b_i, (\forall) i \geq 0$. În particular $f = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, (\forall) i \geq 0$.

Două polinoame sunt egale dacă coeficienţii termenilor care conţin pe X **la aceleaşi puteri sunt egali.**

În particular, un polinom este nul dacă toţi coeficienţii săi sunt nuli.

2) (Adunarea a două polinoame) Suma polinomului f **cu polinomul** g este polinomul notat $f + g$ şi egal cu:

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + ... \overset{\text{notaţie}}{=} \sum_{i \geq 0} (a_i + b_i)X^i.$$

Adunarea polinoamelor se face adunând între ei termenii asemenea (cu puteri egale ale lui X).

3) (Înmulţirea a două polinoame) Produsul polinomului f **cu polinomul** g este polinomul notat $f \cdot g$, sau simplu fg şi egal cu:

$$fg = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)X + (a_ob_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 + ...$$

Înmulţirea a două polinoame se face înmulţind fiecare termen din primul polinom cu fiecare termen din al doilea polinom, după care se adună termenii asemenea.

4) (Înmulţirea cu scalari a polinoamelor) Produsul dintre scalarul $k \in K$ **şi polinomul** f este polinomul kf egal cu:

$$kf = ka_0 + ka_1X + ... + ka_nX^n.$$

A înmulţi un scalar cu un polinom înseamnă a înmulţi fiecare termen al polinomului cu acel scalar.

În fine, mulţimea $K[X]$ înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţire a polinoamelor are o structură algebrică precizată de următoarea:

Teoremă. Tripletul $(K[X], +, \cdot)$ este inel comutativ numit **inelul polinoamelor de nedeterminată** X **cu coeficienţi în corpul** K (sau simplu **inelul polinoamelor peste corpul** K).

Demonstrație. Se verifică ușor axiomele inelului comutativ.

Elementul nul al inelului $K[X]$ este polinomul nul $0(0 \in K)$, iar **elementul unitate** este polinomul constant $1(1 \in K)$.■

Să observăm că avem $K \subset K[X]$ și $(K, +, \cdot)$ este un subinel al lui $(K[X], +, \cdot)$.

Probleme rezolvate

1. Să se determine parametrii reali *a, b, c, d* astfel încât polinomul: $f = (a-1)X^3 + 2bX^2 + (c-2)X + 3d + 1$ să fie egal cu polinomul $g = (X-1)(X+2)(X-3)$.

R. Se aduce polinomul g la forma $g = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

Deci $f = g \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} X^3 & a-1=1 \\ X^2 & 2b=-2 \\ X & c-2=-5 \\ X^0 & 3d+1=6 \end{array}$ (am identificat coeficienții lui X^3, X^2, X, X^0 din cele două polinoame).

De aici găsim $a = 2, b = -1, c = -3, d = \frac{5}{3}$.

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 3X^2 + 2X - 5$, $g = a + b(X+1) + c(X+1)^2 + d(X+1)^3$. Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ pentru care $f = g$.

R. Se scrie g sub forma (ordonăm după puterile descrescătoare ale lui X):

$$g = dX^3 + (c+3d)X^2 + (b+2c+3d)X + a+b+c+d$$

Din condiția $f = g$ rezultă sistemul: $\begin{array}{l|l} X^3 & 1=d \\ X^2 & -3=c+3d \\ X & 2=b+2c+3d \\ X^0 & -5=a+b+c+d \end{array}$ cu soluția $a=-11, b=11, c=-6, d=1$.

3. Să se calculeze $f+g$ și $f \cdot g$ în cazurile:

a) $f = 1 + X + X^2, g = 1 - X$; b) $f = 1 - X + X^2, g = 1 + X$;

c) $f = iX + (1-i)X^2, g = 1 + i - iX + 2iX^2$; d) $f = \hat{3} + \hat{2}X, g = X^2 + \hat{4}X, f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$

R. a) Pentru $f+g$ avem: $f + g = 2 + X^2$, iar pentru a calcula $f \cdot g$ aplicăm distributivitatea înmulțirii în raport cu operația de adunare și avem:

$$f \cdot g = (1 + X + X^2)(1 - X) = (1 + X + X^2) \cdot 1 - (1 + X + X^2)X = 1 + X + X^2 - X - X^2 - X^3 =$$
$$= 1 - X^3.$$

b) Avem: $f + g = 2 + X^2$ și $f \cdot g = 1 - X + X^2 + (1 - X + X^2)X = 1 - X + X^2 + X - X^2 + X^3 = 1 + X^3$.

c) $f+g=1+i+(1+i)X^2$ şi $f\cdot g=\left[iX+(1-i)X^2\right](1+i)+\left[iX+(1-i)X^2\right](-iX)+$

$+\left[iX+(1-i)X^2\right]2iX^2=(i-1)X+2X^2+X^2+(-i-1)X^3-2X^3+(2i+2)X^4=(i-1)X+$

$+3X^2+(-3-i)X^3+(2i+2)X^4$.

d) $f+g=\hat{3}+X+X^2$, $f\cdot g=\hat{2}X+X^2+\hat{2}X^3$, $f+g,\ fg\in\mathbb{Z}_5[X]$.

4. GRADUL UNUI POLINOM

Fie polinomul $f=a_0+a_1X+...+a_nX^n\in K[X]$. Are loc următoarea:

Definiție. Se numeşte **gradul polinomului** $f\neq 0$, notat grad (*f*) , cel mai mare număr natural *n* cu proprietatea $a_n\neq 0$.
Dacă $f=0$, atunci $\text{grad}(f)=-\infty$.

Deci, $\text{grad}: K[X]\to\mathbb{N}\cup\{-\infty\}$, unde

$$-\infty+n=-\infty,\ (\forall)n\in\mathbb{N},\ -\infty-\infty=-\infty$$

$$\text{grad}(f)=\begin{cases}\max\{i\,|\,a_i\neq 0\},\ f\neq 0\\ -\infty,\ f=0.\end{cases}$$

Să observăm că gradul unui polinom este dat de cel mai mare exponent al nedeterminatei *X*, al cărei coeficient este nenul. În particular, gradul unui polinom constant nenul este zero.

Dacă $\text{grad}(f)=n$, atunci $f=a_0+a_1X+...+a_nX^n$, $a_n\neq 0$. Termenul a_0 se numeşte **termenul liber** al polinomului *f*, iar coeficientul $a_n\neq 0$ se numeşte **coeficientul dominant** al polinomului *f*. Polinoamele $f\in K$ se numesc **polinoame constante**. Din definiție rezultă că **elementele nenule ale lui** *K* sunt polinoame de grad zero.

Exemple. 1. Polinomul $f=-3-\frac{4}{5}X^3+5X\in\mathbb{Q}[X]$ îl scriem $f=-3+5X-\frac{4}{5}X^3$ şi deci $\text{grad}(f)=3$. Termenul liber este $a_0=-3$ şi coeficientul dominant este egal cu $-\frac{4}{5}$. Termenul care îl conține pe X^2 lipsind, are coeficientul zero.

2. Polinomul $g=\sqrt{3}-5X^2+2X^4\in\mathbb{R}[X]$ are gradul egal cu 4 şi coeficientul dominant egal cu 2. Termenul liber este $\sqrt{3}$. Termenii care conțin pe *X* şi X^3 are coeficienții zero.

3. Polinomul $f=-3$ are $\text{grad}(f)=0$.

4. **Polinomul** $f = 1 + 2X - (m+1)X^2 + (m^2 - 1)X^3 \in \mathbb{R}[X]$ **are** $\text{grad}(f) = 3$ **dacă** $m \neq \pm 1$; $\text{grad}(f) = 1$ **dacă** $m = -1$ **când** $f = 1 + 2X$; $\text{grad}(f) = 2$ **dacă** $m = 1$ **când** $f = 1 + 2X - 2X^2$.

Proprietăți ale gradului

Gradul fiind o funcție pe mulțimea polinoamelor (nenule) este interesant de văzut comportarea ei față de operațiile cu polinoame. Formulăm următoarea:

Teoremă. Fie $f, g \in K[X]$. Avem:

1) $\text{grad}(f+g) \leq \max(\text{grad}(f), \text{grad}(g))$.

Gradul sumei a două polinoame este cel mult maximul dintre gradele celor două polinoame.

2) $\text{grad}(fg) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$.

Gradul produsului a două polinoame este egal cu suma gradelor celor două polinoame.

Demonstrație. Fie $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$, $a_n \neq 0$, $g = b_0 + b_1X + ... + b_mX^m$, $b_m \neq 0$.

1) Dacă $n > m$, atunci $\text{grad}(f+g) = n$, deoarece a_nX^n este termenul de grad cel mai mare din $f+g$. Deci $\text{grad}(f+g) = \text{grad}(f)$.

Dacă $m = n$, atunci $(a_n + b_n)X^n$ este termenul de grad cel mai mare dacă $a_n + b_n \neq 0$ și deci $\text{grad}(f+g) = n = \text{grad}(f)$, iar dacă $a_n + b_n = 0$, atunci $\text{grad}(f+g) < n = \text{grad}(f) = \text{grad}(g)$.

Cazul $m > n$ este analog cazului $n > m$.

2) Pentru $f \cdot g$ termenul de grad maxim este $a_nb_mX^{n+m}$, $a_nb_m \neq 0$, deoarece $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ și K este inel fără divizori ai lui zero.

Deci $\text{grad}(f \cdot g) = n + m = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$. ■

Corolar. Inelul $(K[X], +, \cdot)$ este un domeniu de integritate.

Deci, $[f \neq 0, g \neq 0, f, g \in K[X] \Rightarrow f \cdot g \neq 0] \Leftrightarrow [fg = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ sau } g = 0]$.

Demonstrație. Din $f \neq 0$, $g \neq 0$ rezultă $\text{grad}(f) \geq 0$, $\text{grad}(g) \geq 0$, iar din teorema (**2**)) se deduce $\text{grad}(fg) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g) \geq 0$. De aici $fg \neq 0$. ■

Aplicație (Elemente inversabile din $K[X]$). Un polinom $f \in K[X]$ **este inversabil** dacă şi numai dacă există $g \in K[X]$ astfel încât $fg = 1$.

Să arătăm că $U(K[X]) = K^* = K - \{0\}$.

Este clar că avem $K^* \subset U(K[X])$, (1). Reciproc, fie $f \in U(K[X])$. Deci există $g \in K[X]$ astfel încât $fg = 1$. Trecând în această egalitate la grad obținem $\text{grad}(f) + \text{grad}(g) = 0$, iar de aici $\text{grad}(f) = \text{grad}(g) = 0 \Rightarrow f \in K^*$. Prin urmare $U(K[X]) \subset K^*$, (2).

Din (1) şi (2) rezultă $U(K[X]) = K^*$.

5. EVALUAREA POLINOAMELOR. FUNCȚIA POLINOMIALĂ. RĂDĂCINI ALE UNUI POLINOM

Fie $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ şi $\alpha \in K$. Atunci formulăm următoarele:

Definiții. 1) Se numeşte **valoarea polinomului** *f* în α elementul:

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + ... + a_n\alpha^n.$$

$f(\alpha)$ se obține din *f* **înlocuind nedeterminata** X **cu** α.

A calcula $f(\alpha)$ înseamnă **a evalua** polinomul *f* în α.

2) Elementul α **este o rădăcină a polinomului** *f* dacă $f(\alpha) = 0$.

Evaluarea sumei şi produsului a două polinoame este dată de următoarea:

Teoremă. Fie $f, g \in K[X]$ şi $\alpha \in K$. Atunci

1) $(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + f(\alpha)$.

Valoarea sumei este egală cu suma valorilor.

2) $(fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$.

Valoarea produsului este egală cu produsul valorilor.

Pentru calculul valorii polinomului $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n1} + ... + a_1 X + a_0$ în α se utilizează scrierea $f(\alpha) = a_o + \alpha\left[a_1 + \alpha(a_2 + ... + a_n\alpha^{n-2})\right]$, evitându-se astfel ridicările la putere ale lui α.

Exemplu. **Fie polinomul** $f = 5X^3 + 2X^2 - 3X + 1$. **Aducem polinomul la forma** $f = X\left(5X^2 + 2X - 3\right) + 1$ **sau** $f = X\left[X(5X+2) - 3\right] + 1$ **și deci** $f(3) = 3\left[3(5\cdot 3 + 2) - 3\right] + 1 = 145$.

Calculele pot fi aranjate ca în schema de mai jos (utilizând coeficienții termenilor polinomului și adunând numerele din fiecare coloană). Se coboară coeficientul dominant în linia 3.

	X^3	X^2	X	X^0	
	5	**2**	**– 3**	**1**	**Coeficienții polinomului** ***f***
3	$\downarrow$	$\times 3 = 15$ $\downarrow +$	$\times 3 = 51$ $\downarrow +$	$\times 3 = 144$ $\downarrow +$	**Coeficienții din următoarea linie înmulțiți cu 3**
	5	**15 + 2 = 17** ①	**51 – 3 = 48** ②	**144 + 1 = 145** ③ **=** ***f*(3)**	**Valoarea parantezelor**

$$f(3) = 3[3(\underbrace{5\cdot 3 + 2}_{①}) - 3] + 1 = 3(\underbrace{17\cdot 3 - 3}_{②}) + 1 = \underbrace{3\cdot 48 + 1}_{③} = 145$$

Urmăriți cum se corespund parantezele din schemă cu cele din ***f*** **(3). Ele sunt marcate cu același număr închis într-un cerculeț.**
În final aranjarea calculelor se face pe două linii:

	X^3	X^2	X	X^0
	5	**2**	**– 3**	**1**
3	**5**	$3\cdot 5 + 2 = 17$	$3\cdot 17 - 3 = 48$	$3\cdot 38 + 1 = 145 = f(3)$

Schema descrisă mai sus se numeşte ***schema lui Horner*****.**

Fie $f \in K[X]$ și $\alpha \in K$. Atunci $f(\alpha) \in K$. Am pus astfel în evidență funcția $\overline{f} : K \to K$, $\overline{f}(\alpha) = f(\alpha)$, $(\forall)\alpha \in K$. Are loc următoarea:

> **Definiție.** Funcția $\overline{f} : K \to K$, $\overline{f}(\alpha) = f(\alpha)$, $(\forall)\alpha \in K$ se numeşte **funcția polinomială asociată polinomului** *f* sau simplu **funcția polinomială.**

Se vede că un polinom *f* și funcția polinomială sunt noțiuni distincte. Ele **nu se confundă.** Fiecare polinom $f \in K[X]$ defineşte o funcție polinomială. De exemplu, polinomul $f = X$ defineşte funcția $\overline{f} : K \to K$, $\overline{f}(x) = x$, $(\forall)x \in K$, motiv pentru care se confundă uneori argumentul $x \in K$ cu polinomul X. În descrierea polinomului *f* apare **litera mare** *X*, **care desemnează necunoscuta**, iar în descrierea funcției *f* apare **litera mică** *x* **care precizează argumentul funcției** *f*. De aceea vom nota funcția asociată tot cu *f*.
Reamintim că în anii precedenți de liceu am introdus noțiunea de funcție polinomială plecând de la cea de polinom, gândit ca o sumă finită de monoame de forma $a_k X^k$, așa cum se poate vedea din tabelul de mai jos.

Polinomul f	Funcția polinomială asociată $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	Ecuația asociată
$aX+b$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$	Funcția de gradul întâi $f(x)=ax+b$	Ecuația de gradul întâi $ax+b=0$
aX^2+bX+c, $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$	Funcția de gradul doi $f(x)=ax^2+bx+c$	Ecuația de gradul doi $ax^2+bx+c=0$
aX^3+bX^2+cX+d, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$	Funcția cubică $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	Ecuația de gradul trei $ax^3+bx^2+cx+d=0$
X = **nedeterminată**	x = **variabilă**	x = **necunoscută**

Gradul polinomului dă gradul funcției polinomiale. Coeficienții polinomului sunt coeficienții funcției polinomiale. **A determina funcția polinomială înseamnă a-i preciza coeficienții.** Dacă $\alpha\in K$ este rădăcină a polinomului *f*, atunci α **se numeşte zero al funcției polinomiale** $f:K\to K$.

Întotdeauna pentru un polinom $f\in K[X]$ trebuie precizată mulțimea în care se determină rădăcinile. Polinomul $f=2X+1\in\mathbb{Z}[X]$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}$, dar are rădăcina $x_0=-\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}$; polinomul $g=X^2-2\in\mathbb{Q}[X]$ nu are rădăcini în $\mathbb{Q}$, dar are rădăcinile $\pm\sqrt{2}$ în $\mathbb{R}$.

Probleme rezolvate

1. Se consideră polinoamele $f=1-3X^2+2X^3\in\mathbb{Q}[X]$ şi $g=1-\sqrt{3}X+5X^3\in\mathbb{R}[X]$.

a) Calculați $f\left(1-\sqrt{3}\right)$, $f\left(1+\sqrt{3}\right)$ şi observați legătura între cele două valori. Generalizați.

b) Calculați $g(1-i)$, $g(i+1)$ şi observați legătura între cele două valori. Generalizați.

R. a) Avem: $f\left(1-\sqrt{3}\right)=1-3\left(1-\sqrt{3}\right)^2+2\left(1-\sqrt{3}\right)^3=1-3\left(1-2\sqrt{3}+3\right)+2\left(1-3\sqrt{3}+9-3\sqrt{3}\right)=9-6\sqrt{3}$.

$f\left(1+\sqrt{3}\right)=1-3\left(1+\sqrt{3}\right)^2+2\left(1+\sqrt{3}\right)^3=1-3\left(1+2\sqrt{3}+3\right)+2\left(1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}\right)=9+6\sqrt{3}$.

Un număr de forma $a+b\sqrt{p}$, $a,b\in\mathbb{Q}$, $p\in N$, p prim, se numeşte număr pătratic. Numărul $a-b\sqrt{p}$ se numeşte conjugatul pătratic al numărului $a+b\sqrt{p}$. De remarcat că numerele $a\pm b\sqrt{p}\notin\mathbb{Q}$ dacă $b\neq 0$.

Polinomul dat *f* are însă coeficienții din $\mathbb{Q}$.

Deci, dacă un polinom are coeficienții raționali şi calculăm valorile lui în două puncte conjugat pătratice de forma $a\pm b\sqrt{p}$, atunci valorile obținute sunt de asemenea numere conjugat pătratice de forma $A\pm B\sqrt{p}$, unde $A,B\in\mathbb{Q}$.

Mai precis dacă $f\left(a+b\sqrt{p}\right)=A+B\sqrt{p}$, atunci $f\left(a-b\sqrt{p}\right)=A-B\sqrt{p}$. Este uşor de văzut că utilizând dezvoltarea binomului lui Newton avem: $\left(a+b\sqrt{p}\right)^n=X+Y\sqrt{p}$, $X,Y\in\mathbb{Q}$ şi $\left(a-b\sqrt{p}\right)^n=X-Y\sqrt{p}$, iar de aici rezultatul anunțat mai sus este foarte simplu.

b) Avem: $g(1-i)=1-\sqrt{3}(1-i)+5(1-i)^3=1-\sqrt{3}(1-i)+5(1-3i-3+i)=-9-\sqrt{3}+(-10+\sqrt{3})i$ şi

$g(1+i)=1-\sqrt{3}(1+i)+5(1+i)^3=1-\sqrt{3}(1+i)+5(1+3i-3-i)=-9-\sqrt{3}-(-10+\sqrt{3})i$.

Am calculat valoarea polinomului cu coeficienți reali g în punctele $1-i, 1+i$ care sunt complex conjugate. Valorile obținute în aceste puncte $g(1-i), g(1+i)$ sunt de asemenea numere complex conjugate.

Mai general dacă $g\in\mathbb{R}[X]$ şi $z=a+bi, b\neq 0, a,b\in\mathbb{R}$ atunci $g(a+bi)=A+Bi, A,B\in\mathbb{R}$ iar $g(a-bi)=\overline{g(a+bi)}=\overline{A+Bi}=A-Bi$ (am utilizat proprietățile conjugatului unui număr complex pentru sumă şi produs (putere)).

2. Se consideră polinomul $f=(1+X)^{30}=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_{30}X^{30}$.

a) Să se calculeze $a_0+a_2+a_4+...+a_{30}$;

b) Să se calculeze $a_1+a_3+...+a_{29}$;

c) Să se calculeze a_{19}, a_{27} .

R. a)-b) Calculând valoarea polinomului f în $x=1$ obținem suma tuturor coeficienților acestuia:

$f(1)=2^{30}=a_0+a_1+a_2+a_3+...+a_{29}+a_{30}$, (1).

Pentru $x=-1$ avem $f(-1)=0=a_0-a_1+a_2-a_3+....-a_{29}+a_{30}$, (2).

Adunând (1) cu (2) rezultă $2^{30}=2(a_0+a_2+...+a_{30})$, adică $a_0+a_2+...+a_{30}=2^{29}$.

Ținând seama de această ultimă egalitate şi de (1) rezultă: $a_1+a_3+...+a_{29}=2^{29}$.

c) Să observăm că a_{19} este coeficientul lui X^{19} Scriem formula termenului de rang $k+1$ din binomul lui Newton şi avem: $T_{k+1}=C_{30}^kX^{30-k}$. Impunând condiția ca $30-k=19$ rezultă $k=11$. Deci $a_{19}=C_{30}^{11}$. Analog $a_{27}=C_{30}^3$.

6. TEOREMA ÎMPĂRȚIRII CU REST

1) Împărțirea polinoamelor

Aritmetica inelelor de polinoame $K[X]$ este similară aritmeticii inelului $\mathbb{Z}$ al numerelor întregi în care avem două teoreme remarcabile: **teorema împărțirii cu rest** şi **teorema de descompunere în factori primi**.

Teorema împărțirii cu rest din $\mathbb{Z}$ ne spune că fiind date două numere întregi a şi b, $b\neq 0$, există exact două numere întregi unice q şi r astfel încât are loc egalitatea: $a=bq+r$, unde $0\leq r<|b|$, unde a este deîmpărțitul, b împărțitorul, q câtul, iar r restul.

În teoria împărțirii polinoamelor se întâlneşte o proprietate analogă. Reamintim că am notat prin K unul din corpurile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, p prim.

Are loc următoarea:

Teoremă. (**Teorema împărțirii cu rest a polinoamelor**). Fie $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$. Atunci există polinoamele unice $q, r \in K[X]$ astfel încât: $f = gq + r$ şi $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$ (*).

Polinomul f se numeşte **deîmpărțit**, polinomul g este **împărțitorul**, polinomul q este **câtul**, iar polinomul r se numeşte **restul** împărțirii polinomului f la polinomul g.

Dacă $r = 0$, adică dacă $f = gq$, atunci spunem că polinomul f **se divide** prin polinomul g (sau că f este **multiplu** de polinomul g) sau g **divide** polinomul f (sau că g **este divizor** al polinomului f).

Dacă f se divide prin g, atunci scriem: $f \,\vdots\, g$ (citim: f se divide prin g) sau $g \mid f$ (citim: g divide f).

Demonstrație. 1) Existența polinoamelor q, r. Dacă $f = 0$, atunci se iau $q = r = 0$ şi (*) se verifică.

Dacă $f \neq 0$, $\text{grad}(f) < \text{grad}(g)$, atunci luăm $q = 0$, $r = f$ şi (*) este verificată.

Fie $f \neq 0$, $\text{grad}(f) \geq \text{grad}(g)$, unde $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$, $a_n \neq 0$, $g = b_0 + b_1 + \ldots + b_m X^m$, $b \neq 0$.

În cele ce urmează descriem **algoritmul împărțirii lui** f la g (însoțit de un caz particular; etapele sunt numerotate)

1) Pentru aceasta scriem cele două polinoame ordonate după puterile descrescătoare ale lui X.

2) Se dispun polinoamele ca mai jos:

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \quad \Big| \; \underline{b_m X^m + \ldots + b_1 X + b_0 = g}$$

Exemplu: 2) $f = 6X^5 - 17X^3 - X^2 + 3$, $g = 3X^2 - 6X + 2$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$

$$f = 6X^5 + 0X^4 - 17X^3 - X^2 + 0X + 3 \quad \Big| \; \underline{3X^2 - 6X + 2 = g}$$

3) Se împarte primul termen al lui f la primul termen al lui g şi avem $a_n X^n : a_m X^m = a_n a_m^{-1} X^{n-m}$. Acest termen se pune în schemă sub împărțitor.

Se înmulţeşte rezultatul astfel obţinut cu împărţitorul g şi se scade acest produs din deîmpărţitorul f (adică, se adună acest produs cu semn schimbat la f) şi se obţine polinomul $f_1 = f - a_n b_m^{-1} X^{n-m} g$.

$$\begin{array}{l|l} f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0 & b_m X^m + \ldots + b_1 X + b_0 = g \\ \quad -a_n X^n - \ldots & \overline{a_n b_m^{-1} X^{n-m}} \\ \hline f_1 = f - a_n b_m^{-1} X^{n-m} & \end{array}$$

Polinomul f_1 are gradul cel mult $n-1$

3) $\mathbf{6X^5 : 3X^2 = 2X^3}$

$$\begin{array}{l|l} f = 6X^5 + 0X^4 - 17X^3 - X^2 + 0X + 3 & 3X^2 - 6X + 2 = g \\ \quad \underline{-6X^5 + 12X^4 - 4X^3} & \overline{2X^3} \\ \quad / \ f_1 = 12X^4 - 21X^3 - X^2 + 0X + 3 & \end{array}$$

$\mathbf{grad}(f_1) = 4$

4) Dacă $\text{grad}(f_1) \geq m = \text{grad}(g)$, atunci se repetă pasul 3) cu f_1 în locul lui f. Fie $f_1 = a'_{n_1} X^{n_1} + \ldots + a'_0,\ n_1 < n$.

Se obţine: $f_2 = f_1 - a'_{n_1} b_m^{-1} X^{n_1 - m}$, unde $\text{grad}(f_2) = n_2$ şi $n_2 < n_1$.

4) $\mathbf{grad}(f_1) = 4 > \mathbf{grad}(g) = 2$, $f_1 = 12X^4 - 21X^3 - X^2 + 0X + 3$, $g = 3X^2 - 6X + 2$

$\mathbf{12X^4 : 3X^2 = 4X^2}$

$$\begin{array}{l|l} f_1 = 12X^4 - 21X^3 - X^2 + 0X + 3 & 3X^2 - 6X + 2 = g \\ \quad \underline{-12X^4 + 24X^3 - 8X^2} & \overline{4X^2} \\ \quad / \qquad 3X^3 - 9X^2 + 0X + 3 = f_2 & \end{array}$$

5) Dacă $\text{grad}(f_2) \geq m = \text{grad}(g)$, atunci pentru f_2 şi g se aplică 3) $f_2 = a''_{n_2} X^{n_2} + \ldots + a''_0$, atunci $f_3 = f_2 - a''_{n_2} b_m^{-1} X^{n_2 - m}$, unde $\text{grad}(f_3) = n_3$ şi $n_3 < n_2$.

5) $\mathbf{grad}(f_2) = 3 > \mathbf{grad}(g) = 2$, $f_2 = 3X^3 - 9X^2 + 3$, $g = 3X^2 - 6X + 2$; $3X^3 : 3X^2 = X$

$$\begin{array}{l|l} f_2 = 3X^3 - 9X^2 + 0X + 3 & 3X^2 - 6X + 2 = g \\ \quad \underline{-3X^3 + 6X^2 - 2X} & \overline{X} \\ \qquad\quad -3X^2 - 2X + 3 = f_3 & \end{array}$$

6) După un număr finit de paşi se obține numărul $n_p < m$. Algoritmul se termină când gradul restului (pentru f_p, grad$(f_p) = n_p$) este strict mai mic decât gradul împărțitorului.

6) $\mathbf{grad}(f_3) = 2 = \mathbf{grad}(g) = 2$, $f_3 = -3X^2 - 2X + 3$, $g = 3X^2 - 6X + 2$; $-3X^2 : 3X^2 = -1$

$$\begin{array}{l|l} f_3 = -3X^2 - 2X + 3 & 3X^2 - 6X + 2 = g \\ \cline{2-2} \quad\ \underline{3X^2 - 6X + 2} & -1 \\ \qquad\qquad -8X + 5 = f_4 & \end{array}$$

Unde $\mathbf{grad}(f_4) = 1 < \mathbf{grad}(g) = 2$

Din egalitățile de mai sus rezultă:

$$f = a_n b_m^{-1} X^{n-m} g + f_1,$$
$$f_1 = a'_{n_1} b_m^{-1} X^{n_1 - m} g + f_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_p = a_{n_{p-1}} b_m^{-1} X^{n_{p-1}-m} g + f_p.$$

Prin adunarea lor, membru cu membru, rezultă:

$$f = \left(a_n b_m^{-1} X^{n-m} + a'_{n_1} b_m^{-1} X^{n_1 - m} + \dots + a_{n_{p-1}} b_m^{-1} X^{n_{p-1}-m} \right) g + f_p.$$

Punem $q = a_n b_m^{-1} X^{n-m} + a'_{n_1} b_m^{-1} X^{n_1 - m} + \dots + a_{n_{p-1}} b_m^{-1} X^{n_{p-1}-m}$, $r = f_p$ şi avem: $f = gq + r$ cu grad$(r) <$ grad(q)

În exemplul nostru reunim etapele precedente într-o singură schemă şi avem:

$$\begin{array}{l|l} f = 6X^5 + 0X^4 - 17X^3 - X^2 + 0X + 3 & 3X^2 - 6X + 2 = g \\ \cline{2-2} \ \ \underline{-6X^5 + 12X^4 - 4X^3} & 2X^3 + 4X^2 + X - 1 = q \\ \quad / \qquad 12X^4 - 21X^3 - X^2 + 0X + 3 & \\ \qquad\ \ \underline{-12X^4 + 24X^3 - 8X^2} & \\ \qquad\quad / \qquad 3X^3 - 9X^2 + 0X + 3 & \\ \qquad\qquad\quad \underline{-3X^3 + 6X^2 - 2X} & \\ \qquad\qquad\quad / \qquad -3X^2 - 2X + 3 & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{3X^2 - 6X + 2} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad / \quad -8X + 5 = r & \end{array}$$

Am arătat că există polinoamele q şi r pentru care (*) are loc.

2) Unicitatea polinoamelor q, r. Prin metoda reducerii la absurd. Presupunem că mai există q_1, r_1, două polinoame care verifică (*) cu $q_1 \neq q$ şi $r_1 \neq r$.

Deci: $f = gq + r$, $f = gq_1 + r_1$, iar de aici prin scădere rezultă $g(q - q_1) = r - r_1$, fals, deoarece $\text{grad}(r - r_1) \leq \max\{\text{grad}(r), \text{grad}(r_1)\} < \text{grad}(g) \leq \text{grad}\left(g(q - q_1)\right)$. Deci q, r din (*) sunt unice. ■

Observaţie. Teorema enunţată este adevărată şi în $A[X]$, unde A este inel comutativ cu element unitate cu condiţia ca b_m, coeficientul dominant al lui g, să fie inversabil.

Exemplu. Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului *f* la polinomul *g* în cazurile:

1) $f = 3X^3 + 2X^2 - X + 5,\ g = X^2 - X,\ f, g \in \mathbb{Z}[X]$;

2) $f = \hat{2}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{1},\ g = \hat{5}X^2 + \hat{2}X,\ f, g \in \mathbb{Z}_6[X]$;

3) $f = \hat{4}X^4 + \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{2},\ g = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1},\ f, g \in \mathbb{Z}_6[X]$.

R. 1) Avem schema de împărţire cunoscută (observaţi coeficientul dominant al lui *g* este 1, inversabil în $\mathbb{Z}$; $U(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$):

$$
\begin{array}{r|l}
3X^3 + 2X^2 - X + 5 & X^2 - X \\ \cline{2-2}
-3X^3 + 3X^2 \phantom{{}- X + 5} & 3X + 5 = q \\ \cline{1-1}
5X^2 - X + 5 & \\
-5X^2 + 5X \phantom{{}+ 5} & \\ \cline{1-1}
4X + 5 = r &
\end{array}
$$

2) Să observăm că ne plasăm cu împărţirea într-un inel cu divizori ai lui zero. Dar elementul dominant al lui *g* este $\hat{5}$, care este inversabil în $\mathbb{Z}_6[X]$ şi $\hat{5}^{-1} = \hat{5}$.

$$
\begin{array}{r|l}
\hat{2}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{1} & \hat{5}X^2 + \hat{2}X \\ \cline{2-2}
-\hat{2}X^3 - \hat{2}X^2 \phantom{{}+ \hat{2}X + \hat{1}} & \hat{4}X + \hat{5} \\ \cline{1-1}
X^2 + \hat{2}X + \hat{1} & \\
-X^2 - \hat{4}X \phantom{{}+ \hat{1}} & \\ \cline{1-1}
-\hat{2}X + \hat{1} = \hat{4}X + \hat{1} &
\end{array}
$$

Deci $q = \hat{4}X + \hat{5}$ şi $r = \hat{4}X + 1$.

Pentru a găsi coeficientul primului element al câtului trebuie să avem egalitatea $\hat{2} = \hat{5} \cdot c_1$. De aici $\hat{2} \cdot \hat{5}^{-1} = c_1$, adică $c_1 = \hat{4}$.

Pentru a găsi coeficientul celui de-al doilea termen al câtului rezolvăm ecuaţia $\hat{1} = \hat{5} \cdot c_2$. De aici $c_2 = \hat{5}^{-1} = \hat{5}$.

3) Să remarcăm că în acest caz coeficientul dominant al lui *g* este egal cu $\hat{2}$, care însă nu este inversabil în $\mathbb{Z}_6[X]$ şi deci nu mai funcţionează algoritmul de la teorema împărţirii cu rest, când

câtul şi restul erau unice. Totuşi, scriem pentru f, g egalitatea $\hat{4}X^4+\hat{3}X^2+\hat{3}X+\hat{2}=\left(\hat{2}X^2+\hat{3}X+\right.$ $\left.+\hat{1}\right)\left(aX^2+bX+c\right)+mX+n, a, b, c, m, n\in\mathbb{Z}_6$.

Efectuăm calculele în membrul drept şi avem: $\hat{4}X^4+\hat{3}X^2+\hat{3}X+\hat{2}=\hat{2}aX^4+\left(\hat{2}b+\hat{3}a\right)X^3+$ $+\left(\hat{2}c+\hat{3}b+a\right)X^2+\left(\hat{3}c+b+m\right)X+c+n$. Prin identificare rezultă sistemul:

$$\begin{cases}\hat{2}a=\hat{4}\\ \hat{2}b+\hat{3}a=\hat{0}\\ \hat{2}c+\hat{3}b+a=\hat{3}\\ \hat{3}c+b+m=\hat{3}\\ c+n=\hat{2}\end{cases}$$

. Găsim cel puţin două soluţii ale sistemului: $a_1=\hat{2}, b_1=\hat{3}, c_1=\hat{2}, m_1=\hat{0}, n_1=\hat{0};$ $a_2=\hat{2}, b_2=\hat{3}, c_2=\hat{5}, m_2=\hat{3}, n_2=\hat{3};$

Deci *f* se poate scrie la împărţirea prin *g* în cel puţin două moduri:

$$f=g\left(\hat{2}X^2+\hat{3}X+\hat{2}\right),\quad f=g\left(\hat{2}X^2+\hat{3}X+\hat{5}\right)+\hat{3}X+\hat{3}.$$

Probleme rezolvate

1. Să se efectueze împărţirea polinomului $f=6X^3-7X^2+3X+2$ la polinomul $g=2X^2-3X+2$ şi apoi să se facă proba.

R. *Metoda* 1. Aplicăm algoritmul descris mai sus şi avem:

$$\begin{array}{rrrr|l} 6X^3 & -7X^2 & +3X & +2 & 2X^2-3X+2 \\ \cline{5-5} -6X^3 & +9X^2 & -6X & & 3X+1 \\ \cline{1-3} / & 2X^2 & -3X & +2 & \\ & -2X^2 & +3X & -2 & \\ \cline{2-4} & / & / & / & \end{array}$$

Deci câtul împărţirii este $q=3X+1$, iar restul este polinomul nul $r=0$, ceea ce înseamnă că polinomul f se divide prin polinomul g.

Proba are loc deoarece $\left(2X^2-3X+2\right)\left(3X+1\right)=6X^3-7X^2+3X+2$.

Metoda 2 (*Metoda identificării*). Evident apelează la teorema împărţirii cu rest

$$\boxed{f=g\cdot q+r\text{, unde } \operatorname{grad}(r)<\operatorname{grad}(g), \qquad (1)}$$

Este clar că $\operatorname{grad}(f)=\operatorname{grad}(g)+\operatorname{grad}(q)$, adică

$$\boxed{\operatorname{grad}(q)=\operatorname{grad}(f)-\operatorname{grad}(g), \qquad (2)}$$

Pentru q se ia un polinom cu coeficienţi literali (coeficienţi nedeterminaţi) care să satisfacă relaţia (2), iar pentru r se ia un polinom cu coeficienţi nedeterminaţi de grad mai mic cu o unitate decât gradul lui g (împărţitorul). Se introduc aceste polinoame în egalitatea împărţirii cu rest şi se efectuează calculele în membrul drept al relaţiei. Se identifică coeficienţii termenilor de acelaşi grad în *X* din cei doi membri şi se obține un sistem având ca necunoscute coeficienții lui q şi r. Se rezolvă acest sistem şi se obțin q şi r. În cazul nostru $q = aX + b$, iar $r = cX + d$ $(\text{grad}(r) < \text{grad}(g))$.

Din identitatea împărțirii cu rest, avem: $6X^3 - 7X^2 + 3X + 2 = (2X^2 - 3X + 2)(aX + b) + cX + d$ sau după efectuarea calculelor în membrul drept şi ordonarea descrescătoare după puterile lui X, $6X^3 - 7X^2 + 3X + 2 = 2aX^3 - (3a - 2b)X^2 + (2a - 3b + c)X + (2b + d)$.

De aici prin identificare rezultă sistemul:

$$\begin{array}{l|l} X^3 & 6 = 2a \\ X^2 & -7 = -3a + 2b \\ X & 3 = 2a - 3b + c \\ X^0 & 2 = 2b + d \end{array}$$ cu soluția $a = 3, b = 1, c = 0, d = 0$, adică $q = 3X + 1, r = 0$.

2. **Să se afle câtul şi restul împărțirii polinomului $f = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2$ prin polinomul $g = X - i$.**

R. Efectuăm împărțirea directă a polinomului f prin polinomul g când avem:

$$\begin{array}{l|l} X^6 - 5X^5 + X^4 - X^3 + X^2 + 0X + 0 & X - i \\ \hline -X^6 + iX^5 & X^5 + (i-1)X^4 - iX^3 + X + i \\ \hline /\ (i-1)X^5 + X^4 - X^3 + X^2 & \\ -(i-1)X^5 + i(i-1)X^4 & \\ \hline /\quad -iX^4 - X^3 + X^2 & \\ \quad iX^4 + X^3 & \\ \hline /\quad X^2 & \\ \hline \quad -X^2 + iX & \\ \hline /\quad iX & \\ \quad -iX - 1 & \\ \hline /\quad -1 & \end{array}$$

Deci $q = X^5 + (i-1)X^4 - iX^3 + X + i$ şi $r = -1$.

3. **Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului $f = \hat{3}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{3}X + \hat{2}$ la $g = \hat{2}X^2 + \hat{3}X$, $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$.**

R. Suntem în inelul $\mathbb{Z}_5[X]$, care este un domeniu de integritate în care are loc teorema împărțirii cu rest, cu q (câtul) şi r (restul) unice. Avem:

$$\begin{array}{l|l} \hat{3}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{3}X + \hat{2} & \hat{2}X^2 + \hat{3}X \\ \hline -\hat{3}X^3 - \hat{2}X^2 & c_1(=\hat{4})X + c_2(=\hat{1}) \\ \hline /\quad \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{2} & \\ \quad -\hat{2}X^2 - \hat{3}X & \\ \hline /\quad /\quad \hat{2} & \end{array}$$

Deci $q = \hat{4}X + \hat{1}$ şi $r = \hat{2}$.

Pentru determinarea lui c_1 rezolvăm ecuația $\hat{3} = \hat{2}c_1$, când găsim $c_1 = \hat{4}$.

Pentru determinarea lui c_2 se rezolvă ecuația $\hat{2} = \hat{2}c_2$, când $c_2 = \hat{1}$.

2) Împărțirea polinoamelor prin *X*-a. Teorema restului. Teorema factorului

În cazul particular când împărțitorul $g = X - a \in K[X]$, restul se poate determina simplu. Are loc următoarea:

Teoremă (Teorema restului). Restul împărțirii polinomului $f \in K[X], f \neq 0$, prin polinomul $g = X - a \in K[X]$ este egal cu valoarea numerică a polinomului f pentru $x = a$, adică $r = f(a)$.

Demonstrație. Conform teoremei împărțirii cu rest a polinomului f prin polinomul g putem scrie $f = (X - a)q + r$, unde $\text{grad}(r) < 1$. De aici $\text{grad}(r) = 0$ sau $\text{grad}(r) = -\infty$, adică r este un polinom constant sau respectiv $r = 0$. Prin urmare: $f(x) = (x - a)q(x) + r$, $(\forall) x \in K$. Pentru $x = a$ rezultă $f(a) = r$.■

Această teoremă precizează că în cazul în care un polinom f se împarte la polinomul $X - a$, atunci restul acestei împărțiri se poate calcula luând valoarea funcției polinomiale asociate lui f în $x = a$, adică $f(a)$.

Dacă g are forma $g = aX + b, a \neq 0$ atunci se aduce la forma $g = a\left[X - \left(-\frac{b}{a}\right)\right]$ şi restul este $r = f\left(-\frac{b}{a}\right)$. Din teorema restului se obține cunoscuta **teoremă a lui Bézout** (**teorema factorului**), care stabileşte legătura între divizorii de gradul întâi ai polinomului $f \in K[X]$ şi rădăcinile din *K* ale acestui polinom. Mai precis are loc:

Teorema factorului (Bézout). Un element $a \in K$ este rădăcină a polinomului $f \in K[X]$ dacă şi numai dacă $X - a$ divide pe *f*.

Deci, $f \vdots X - a \Leftrightarrow f(a) = 0$.

Demonstrație. Din teorema restului $r = f(a)$. Elementul a este rădăcină a polinomului dacă $f(a) = 0$. Dacă $f \vdots X - a$, atunci $f = (X - a)g$, $g \in K[X]$, iar de aici $f(a) = 0$, adică a este rădăcină pentru *f*.■

Observații. 1) Dacă $a_1, a_2 \in K$ sunt rădăcini ale lui *f*, atunci $f = (X - a_1)(X - a_2)q$, $q \in K[X]$.

2) Dacă $\text{grad}(f) = n$ şi $f(a_i) = 0,\ i = \overline{1,n}$, atunci $f = a(X - a_1)(X - a_2)...(X - a_n)$.
Mai general are loc următoarea:

Definiție. Elementul $a \in K$ **este rădăcină de ordin** $p \in \mathbb{N}^*$ **pentru polinomul** $f \in K[X]$ dacă *f* se divide prin $(X - a)^p$, dar nu se divide prin $(X - a)^{p+1}$.

Pentru funcția polinomială asociată elementul *a* este zero de ordin *p*.

Dacă $p = 1$, atunci *a* este **rădăcină simplă** pentru $f\left(f \vdots X - a \text{ şi } f \not\vdots (X - a)^2\right)$.

Dacă $p = 2$, atunci *a* este **rădăcină dublă** pentru $f\left(f \vdots (X - a)^2 \text{ şi } f \not\vdots (X - a)^3\right)$.

Dacă $p = 3$, atunci *a* este **rădăcină triplă** pentru $f\left(f \vdots (X - a)^3 \text{ şi } f \not\vdots (X - a)^4\right)$.

Rădăcinile multiple ale unei funcții polinomiale $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pot fi caracterizate cu ajutorul derivatelor de ordin superior ale lui *f* prin următoarea:

Teoremă. Funcția *f* are pe *a* ca zero multiplu de ordin *p* dacă şi numai dacă $f(a) = f'(a) = ... = f^{(p-1)}(a) = 0$ şi $f^{(p)}(a) \neq 0,\ p \in \mathbb{N}^*$.

În particular: 1) $x = a$ este **zero simplu** pentru *f* dacă: $f(a) = 0,\ f'(a) \neq 0$.
2) $x = a$ este **zero dublu** pentru *f* dacă: $f(a) = f'(a) = 0,\ f''(a) \neq 0$.
3) $x = a$ este **zero triplu** pentru *f* dacă: $f(a) = f'(a) = f''(a) = 0,\ f'''(a) \neq 0$.

Exemple. 1. Să se determine restul împărțirii polinomului *f* prin $g = X - a$ în cazurile:

1°) $f = 2X^3 - 3X^2 + 4X - 4,\ g = X - 1$;

2°) $f = X^4 - 3X^2 + 5,\ g = 2X + 1$;

3°) $f = \hat{3}X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{4},\ g = X + \hat{2},\ f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$.

R. 1°) Avem: $r = f(1) = 2 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 - 5 = 2 - 3 + 4 - 5 = -2$.

2°) Scriem pe g sub forma: $g = 2\left[X - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ şi atunci $r = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{69}{16}$.

3°) Se pune g sub forma $g = X - \left(-\hat{2}\right) = X - \hat{3}$ (deoarece $-\hat{2} = \hat{3}$) şi deci restul împărțirii lui f la g este egal cu $r = f(\hat{3}) = \hat{3}$.

2. Să se arate că a scris în dreptul polinomului f este rădăcină a acestuia în cazurile:

1°) $f = X^3 - 2X^2 + 3X - 2, a = 1$

2°) $f = \hat{2}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}, a = \hat{2}, f \in \mathbb{Z}_5[X]$.

R. 1°) Avem $f(1) = 0$, ceea ce arată că $a = 1$ este rădăcină pentru f.

2°) Calculăm $f(\hat{2}) = \hat{2}\cdot\hat{3} + \hat{3}\cdot\hat{4} + \hat{2} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$. Deci $a = \hat{2}$ a este rădăcină a lui f.

3. Să se precizeze pentru polinomul $f = X^6 - 7X^5 + 15X^4 - 40X^2 + 48X - 16$ ordinul de multiplicitate al rădăcinii $a = 2$.

R. Considerăm funcția polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^6 - 7x^5 + 15x^4 - 40x^2 + 48x - 16$, pentru care $f'(x) = 6x^5 - 7x^4 + 60x^3 - 80x + 48$, $f''(x) = 30x^4 - 28x^3 + 180x^2 - 80$, $f'''(x) = 120x^3 - 84x^2 + 360x$, $f^{(4)}(x) = 360x^2 - 168x + 360$.

Avem $f(2) = f'(2) = f''(2) = f'''(2) = 0$ şi $f^{(4)}(2) \neq 0$, ceea ce arată că $a = 2$ este rădăcină multiplă de ordin patru pentru f.

Altfel, se împarte f la $X - 2$. Câtul se împarte din nou la $X - 2$, etc. Vom reveni asupra acestei probleme la Schema lui Horner.

3) Schema lui Horner (1786-1837)

Am întâlnit mai sus schema lui Horner (William Georges, 1786-1837, matematician englez, publică în 1819 metoda care-i poartă numele) când a trebuit să calculăm valoarea unui polinom într-un punct, utilizând pentru funcția polinomială o anumită scriere. Am văzut că la împărțirea unui polinom prin $X - a$, restul este dat de $r = f(a)$, deci el se poate determina prin schema lui Horner. Mai mult, în acest caz, schema ne dă şi coeficienții câtului de la împărțire.

Fie $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ şi

$$q = b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + ... + b_1X + b_0.$$

Din $f = (X - a)q + r$, prin identificare, rezultă egalitățile: $a_n = b_{n-1}, b_k = ab_{k+1} + a_{k+1}$, $0 \le k \le n-2$.

Schema lui Horner arată astfel:

Deîmpărțitorul f

	X^n	X^{n-1}	X^{n-2}	$\dots$	X^2	X	X^0
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
a	$a_n = b_{n-1}$	$a \cdot b_{n-1}$ $\downarrow +$ $ab_{n-1}+a_{n-1} = b_{n-2}$	ab_{n-2} $\downarrow +$ $ab_{n-2}+a_{n-2} = b_{n-3}$	$\dots$	b_1	ab_1 $\downarrow +$ $ab_1+a_1 = b_0$	ab_0 $\downarrow +$ $ab_0+a_0 = r$
	X^{n-1}	X^{n-2}	X^{n-3}	$\dots$	X	X^0	Restul

Câtul q

Coeficientul dominant al câtului, b_{n-1}, coincide cu coeficientul dominant al deîmpărțitului, a_n.

Formula $b_{k-1} = ab_k + a_k$, $k = \overline{1, n-1}$, ne spune că dacă am aflat coeficientul b_k al lui X^k din cât, atunci coeficientul lui X^{k-1}, tot din cât se obține înmulțind pe b_k cu a şi rezultatul se adună cu a_k (coeficientul lui X^k din deîmpărțit).

Se trec puterile lui X, de la deîmpărțit în ordine descrescătoare (inclusiv puterile care lipsesc – acestea au coeficienții egali cu zero). Sub fiecare putere a lui X se trece coeficientul cu care apare în scrierea lui f. Pe linia următoare se coboară coeficientul dominant (a_n care este b_{n-1}, primul coeficient al câtului). Pe această linie, în fața lui a_n, se scrie termenul a din binomul $X - a$. Această linie se completează cu ceilalți coeficienți ai câtului după relațiile:

$b_{n-2} = a \cdot b_{n-1} + a_{n-1}$, $b_{n-3} = ab_{n-2} + a_{n-2}$ etc. Sub coeficienții $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots$, se scriu puterile lui X : X^{n-1}, X^{n-2},.... pentru a scrie mai uşor polinomul q.

Exemple. **1)** $f = 3X^5 - 2X^3 + 3X^2 - 5$, $g = X - 2$

	X^5	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	3	0	– 2	3	0	– 5
	$\downarrow$	6 $\downarrow +$	12 $\downarrow +$	20 $\downarrow +$	46 $\downarrow +$	92 $\downarrow +$
2	3	6	10	23	46	$87 = r$
	X^4	X^3	X^2	X	X^0	

Deci, $q = 3X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 23X + 46$, $r = 87$

2) $f = 2X^3 - 3X^2 + 4X - 6$, $g = X + 1$

	X^3	X^2	X	X^0
	2	**– 3**	**4**	**– 6**
– 1	**2**	**– 5**	**9**	**– 15 =** r
	X^2	X	X^0	

Deci, câtul este $q = 2X^2 - 5X + 9$ **şi restul** $r = -15$.

3) $f = 2X^3 + 8X^2 - 4X + 2$, $g = 2X + 1$

În acest caz, teorema împărțirii cu rest este $f = (2X+1)q + r$ **sau împărțind la 2 avem:** $\frac{1}{2}f = \left(X + \frac{1}{2}\right)q + \frac{r}{2}$. **Deci pentru polinomul** $\frac{1}{2}f$ **şi** $g = X + \frac{1}{2} = X - \left(-\frac{1}{2}\right)$ **se aplică schema lui Horner. Avem:**

	X^3	X^2	X	X^0
	1	**4**	**– 2**	**1**
$-\frac{1}{2}$	**1**	$\frac{7}{2}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{23}{8} = \frac{r}{2}$
	X^2	X	X^0	

Deci: $q = X^2 + \frac{7}{2}X - \frac{15}{4}$, **iar** $\frac{r}{2} = \frac{23}{8}$ **dă** $r = \frac{23}{4}$.

4) $f = \hat{2}X^3 + \hat{3}X^2 + 1$, $g = \hat{3}X + \hat{1}$, $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$

Avem: $g = \hat{3}\left(X + \hat{2}\right) = \hat{3}\left(X - (-\hat{2})\right) = \hat{3}\left(X - \hat{3}\right)$ **şi deci** $f = \hat{3}\left(X - \hat{3}\right)q + r$ **sau** $\hat{2}f = \left(X - \hat{3}\right)q + \hat{2}r$.

Aplicăm schema lui Horner pentru $\hat{2}f$ **şi** $X - \hat{3}$. **Avem:**

	X^3	X^2	X	X^0
	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{4} = \hat{2}r$
	X^2	X	X^0	

Deci: $q = \hat{4}X^2 + \hat{3}X + \hat{4}$, **iar** $\hat{2}r = \hat{4}$, **adică** $r = \hat{2}$.

Probleme rezolvate

1. Utilizând schema lui Horner să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii $a = 2$ **pentru polinomul** $f = X^6 - 7X^5 + 15X^4 - 40X^2 + 48X - 16$.

R. Se aplică repetat schema lui Horner (pentru fiecare cât).

Avem:

	X^6	X^5	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	1	– 7	15	0	– 40	48	– 16
2	1	– 5	5	10	– 20	8	$0=r_1 \Rightarrow a=2$ rădăcină simplă
2	1	– 3	–1	8	– 4	$0=r_2 \Rightarrow a=2$ rădăcină dublă	
2	1	– 1	– 3	2	$0=r_3 \Rightarrow a=2$ rădăcină triplă		
2	1	1	– 1	$0=r_4 \Rightarrow a=2$ rădăcină de ordin patru			
2	1	3	$5\neq 0 \Rightarrow a=2$ nu este rădăcină de ordin cinci				
	X^2	X	X^0				

Deci, $f=(X-2)^4\left(X^2+3X+5\right)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^{60}+X^{40}+X^{20}+2$. Să se determine restul împărțirii acestui polinom prin polinomul $g=X\left(X^2-1\right)$.

R. Scriem teorema împărțirii cu rest pentru polinoamele f și g când avem: $f=X\left(X^2-1\right)q+r$, $\text{grad}(r)<\text{grad}(g)=3$. Deci $\text{grad}(r)$ este cel mult 2. Fie $r=aX^2+bX+c$. A determina acest rest revine la a găsi coeficienții *a, b, c.*

Din egalitatea de funcții polinomiale $f(x)=x\left(x^2-1\right)q(x)+ax^2+bx+c, (\forall)x\in\mathbb{R}$ rezultă prin particularizare următoarele ecuații în *a*, *b*, *c*:

– dacă $x=0$ avem: $f(0)=0\cdot q(0)+c=2$, adică $c=2$;

– dacă $x=1$ se obține $5=a+b+c$ sau $a+b=3$;

– dacă $x=-1$ găsim $5=a-b+c$ sau $a-b=3$.

Din ultimele două ecuații se obțin valorile $\boldsymbol{a=3, b=0}$. Așadar restul căutat este $\boldsymbol{r=3X^2+2}$.

3. Fie $f\in\mathbb{R}[X]$, $\text{grad}(f)\geq 2$. Să se determine restul împărțirii lui *f* prin polinomul X^2-1, dacă suma coeficienților termenilor de grad impar ai polinomului f este 3, iar suma coeficienților termenilor de grad par ai aceluiași polinom este – 5.

R. Din teorema împărțirii avem egalitatea $f=\left(X^2-1\right)q+aX+b$. (*)

Fie $f=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n$ polinomul dat. Avem: $f(1)=a_0+a_1+a_2+...+a_n$ și $f(-1)=a_0-a_1+a_2+...+(-1)^n a_n$. De aici prin adunare și scădere rezultă egalitățile: $\frac{f(1)+f(-1)}{2}=a_0+a_2+a_4+...$ și $\frac{f(1)-f(-1)}{2}=a_1+a_3+a_5+...$.

Din ipoteză avem $\frac{f(1)+f(-1)}{2}=-5, \frac{f(1)-f(-1)}{2}=3$, (**).

Din (*) pentru $x=1$ rezultă $f(1)=a+b$, iar pentru $x=-1$ se deduce $f(-1)=-a+b$.

Cu acestea relațiile (**) dau $b=-5$ și $a=3$. Deci $r=3X-5$.

7. DESCOMPUNEREA ÎN FACTORI IREDUCTIBILI ÎN INELUL $K[X]$

1) Polinoame ireductibile

Reamintim că studiem inelul de polinoame de nedeterminată *X* cu coeficienți în corpul comutativ *K*, unde $K \in \{\mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{Z}_p,\ p\ \text{prim}\}$.

Am văzut că dacă $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$, atunci *f* se divide prin *g* (şi notăm $f \,\vdots\, g$) dacă există un polinom $q \in K[X]$, astfel încât $f = gq$ (se mai spune că *g* divide pe *f* şi scriem $g \mid f$). Polinomul *g* se mai spune că este un divizor (sau factor) al lui *f*, iar polinomul *f* este un multiplu al lui *g*.

Am găsit că pentru $f \in K[X]$, $X - a$ este factor al lui *f* dacă $f(a) = 0$ (teorema Bézout), adică dacă *a* este rădăcină a lui *f*.

Este imediat că pentru $f \in K[X], a \in K^*$ şi *af* sunt divizori ai lui $f\left(f = a\left(a^{-1}f\right);\ f = a^{-1}(af)\right)$. Cu aceasta putem formula următoarea:

> **Definiție.** Divizorii de forma *a* şi *af*, $a \in K^* = K - \{0\}$ se numesc **divizori improprii** ai lui *f*. Ceilalți divizori ai lui *f*, dacă există, se numesc **divizori proprii.**

Problema care ne interesează, în continuare, este de a vedea cum se scrie un polinom $f \in K[X]$ ca un produs de factori de un anumit tip. Vom formula o proprietate similară celei din $\mathbb{Z}$ în care orice număr întreg se exprimă ca produs de numere prime. Pentru clarificare formulăm următoarea:

> **Definiție.** Un polinom $f \in K[X]$ se numeşte **ireductibil peste corpul** K (sau încă **ireductibil în inelul** $K[X]$) dacă are gradul cel puțin unu şi dacă nu are divizori proprii.
>
> În caz contrar, el se numeşte **reductibil peste** *K* (sau încă **reductibil în** $K[X]$)
>
> ---
>
> *f* reductibil peste $K \Leftrightarrow (\exists)\, g, h \in K[X]$, grad($g$), grad($h$) ≥ 1, $f = gh$.

Am văzut că se pot construi polinoame şi pe structuri care nu sunt corpuri (de exemplu inele). Dacă luăm $K' \subset K$, K' cu aceleaşi legi de pe K, atunci se poate construi familia de polinoame $K'[X] \subset K[X]$.

În $K'[X]$ se pot defini analog relația de divizibilitate şi noțiunea de polinom ireductibil. Este posibil ca un polinom $f \in K'[X]$ să fie ireductibil în această mulțime, dar reductibil în $K[X]$.

Exemple. 1. $f = X - 1$ **este ireductibil în** $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$.

2. $f = X^2 - 3$ **este ireductibil în** $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X]$, **dar reductibil în** $\mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$, **deoarece** $f = (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})$, **unde** $g = X - \sqrt{3}, h = X + \sqrt{3}$ **sunt polinoame din** $\mathbb{R}[X]$ **(şi respectiv** $\mathbb{C}[X]$**).**

3. Polinomul $f = X^2 + 1$ **este ireductibil în** $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$, **dar este reductibil în** $\mathbb{C}[X]$, **deoarece** $f = (X - i)(X + i)$, **unde** $g = X - i, h = X + i \in \mathbb{C}[X]$.

Probleme rezolvate

1. Arătați că polinomul $f \in \mathbb{Z}[X], f = 6X^2 + 13X - 5$ **este reductibil peste** $\mathbb{Z}$.

R. Într-adevăr observăm că $f = (3X - 1)(2X + 5)$ unde factorii $3X - 1, 2X + 5$ sunt polinoame din acelaşi inel $\mathbb{Z}[X]$.

2. Arătați că polinomul $f = X^2 + 1 \in \mathbb{N}[X]$ **este ireductibil peste** $\mathbb{N}$, **dar este reductibil în** $\mathbb{C}[X]$.

R. Presupunem, prin absurd, că f ar fi reductibil peste $\mathbb{N}$. Deci există $g = aX + b$, $h = mX + n$, $a, b, m, n \in \mathbb{N}, a \neq 0, m \neq 0$, astfel încât $f = (aX + b)(mX + n)$.

De aici (după calcule): $X^2 + 1 = amX^2 + (an + bm)X + bn$.

Ținând cont de egalitatea a două polinoame, se obține sistemul: $\begin{cases} am = 1 \\ an + bm = 0 \\ bn = 1 \end{cases}$.

Din prima şi ultima ecuație rezultă $a = m = b = n = 1$, care însă nu verifică a doua ecuație. Deci nu există $g, h \in \mathbb{N}[X]$ cu $f = gh$.

În final polinomul $f = X^2 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{N}[X]$.

Acest polinom însă este reductibil peste $\mathbb{C}$ deoarece $f = (X - i)(X + i)$.

3. Arătați că polinomul $f = X^2 - 5 \in \mathbb{Z}[X]$ **este ireductibil peste** $\mathbb{Z}$, **dar este reductibil peste** $\mathbb{R}$.

R. Presupunem că f ar fi reductibil peste $\mathbb{Z}$, deci ar admite o scriere de forma $f = (aX + b)(mX + n)$, $a, b, m, n \in \mathbb{Z}, a, m \neq 0$, sau după calcule $X^2 - 5 = amX^2 + (an + bm)X + bn$.

De aici rezultă sistemul $\begin{cases} am = 1 \\ an + bm = 0 \\ bn = -5 \end{cases}$, sistem care nu are soluții în $\mathbb{Z}$. Deci *f* este ireductibil peste $\mathbb{Z}$.

Cum $X^2 - 5 = \left(X - \sqrt{5}\right)\left(X + \sqrt{5}\right)$, unde $X - \sqrt{5},\ X + \sqrt{5} \in \mathbb{R}[X]$, se deduce că *f* este reductibil peste $\mathbb{R}$.

4. Arătați că polinomul $f = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_4[X]$ este reductibil în inelul $\mathbb{Z}_4[X]$.

R. Ca *f* să fie reductibil, va trebui să arătăm că există $g = aX + b,\ h = cX + d,\ g, h \in \mathbb{Z}_4[X],\ a, c \neq \hat{0}$, astfel încât $f = gh \Leftrightarrow \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1} = acX^2 + (ad + bc)X + bd$. De aici rezultă, sistemul: $\begin{cases} ac = \hat{2} \\ ad + bc = \hat{3} \\ bd = \hat{1} \end{cases}$ cu soluția $a = \hat{1},\ c = \hat{2},\ b = d = \hat{1}$. Deci $f = \left(X + \hat{1}\right)\left(\hat{2}X + \hat{1}\right)$, ceea ce arată că *f* este reductibil peste $\mathbb{Z}_4[X]$.

Altfel observăm că $f(\hat{3}) = \hat{0}$ și deci $f \,\vdots\, X + \hat{1}$ și se aplică schema lui Horner pentru a găsi câtul $\hat{2}X + 1$.

Următoarea propoziție precizează o clasă de polinoame ireductibile în $K[X]$.

Teoremă. Orice polinom de gradul unu cu coeficienți într-un corp comutativ este ireductibil.

Demonstrație. Imediat. ■

Rezultatul de mai jos este important pentru că asigură existența unei exprimări a unui polinom *f* în funcție de polinoame ireductibile. Mai precis are loc:

Teorema (de descompunere în factori ireductibili). Fie $f \in K[X]$. Atunci *f* se poate scrie ca un produs finit de polinoame ireductibile din inelul $K[X]$.

Observație. Mai mult scrierea este unică (abstracție făcând, eventual de factori constanți).

Legătura între proprietatea de a avea divizori ireductibili și proprietatea de a avea rădăcini în *K* pentru polinoamele din *K*[*X*], *K* corp comutativ este dată de:

Teorema. Fie *K* corp comutativ. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) Orice polinom ireductibil din *K*[*X*] are gradul unu.

2) Orice polinom din *K*[*X*] de grad mai mare sau egal cu unu are rădăcini în *K*.

Definiție. Un corp comutativ K se numeşte **algebric închis** dacă orice polinom $f \in K[X]$, grad$(f) \geq 1$ are în K cel puțin o rădăcină (adică dacă pentru K afirmația **2)** din teoremă este adevărată).

Corpul $\mathbb{Q}$ nu este algebric închis, deoarece, de exemplu, polinomul $X^2 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ nu are rădăcini în $\mathbb{Q}$; nici $\mathbb{R}$ nu este algebric închis, deoarece, de exemplu, polinomul $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ nu are rădăcini în $\mathbb{R}$. Corpul $\mathbb{C}$ este algebric închis. Acest rezultat foarte important este cunoscut sub numele de **teorema fundamentală a algebrei**.
Avem:

Teorema (**d'Alembert-Gauss**). Orice polinom cu coeficienți complecşi de grad mai mare sau egal cu unu are cel puțin o rădăcină în $\mathbb{C}$.

UN PIONIER AL MATEMATICII

C.F. GAUSS (1777 – 1855)

Matematician german

CONTRIBUȚII

- ***algebră (teorema fundamentală)***
- ***teoria numerelor***
- ***astronomie***

Până acum nu s-a găsit o demonstrație pur algebrică a acestei teoreme importante. Pentru demonstrația ei se utilizează aparatul analizei matematice.
Următoarea teoremă pune în evidență polinoamele ireductibile de grad mai mare sau egal cu doi dintr-un inel oarecare $K[X]$.

Vom preciza acum polinoamele ireductibile în principalele inele de polinoame: $\mathbb{C}[X]$ şi $\mathbb{R}[X]$. Are loc următoarea:

Teoremă. 1) Un polinom $f \in \mathbb{C}[X]$ este **ireductibil**, dacă şi numai dacă

$$f = aX + b, \quad a,b \in \mathbb{C}, \ a \neq 0$$

2) Un polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ este **ireductibil**, dacă şi numai dacă

$$f = aX + b, \ a, \ b \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$$

sau

$$f = aX^2 + bX + c, \ a, \ b, \ c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0, \ b^2 - 4ac < 0.$$

Demonstrație. 1) Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinom ireductibil. Deoarece $\text{grad}(f) \geq 1$, din teorema fundamentală a algebrei rezultă că f admite o rădăcină $x_0 \in \mathbb{C}$. Conform teoremei lui Bézout avem: $f = (X - X_0)g,\ g \in \mathbb{C}[X]$. De aici $g \mid f$ și cum f este ireductibil rezultă divizorul g este de forma a sau af, unde $a \in \mathbb{C}^*$. Dacă g ar fi de forma af atunci $f = (X - X_0)af$ sau $(f \neq 0)\ 1 = (X - x_0)a$, adică $X - x_0$ ar fi inversabil, adică ar avea gradul zero, fals.

Prin urmare $g = a \in \mathbb{C}^*$, adică $\text{grad}(f) = 1$. Ori am văzut că toate polinoamele de grad unu sunt ireductibile.

2) Conform teoremei precedente, polinoamele de gradul unu și cele de gradul doi care nu au rădăcini în $\mathbb{R}$ sunt ireductibile peste $\mathbb{R}$. Să arătăm că nu mai există altele.

Pentru aceasta arătăm că orice polinom ireductibil din $\mathbb{R}[X]$ de grad mai mare sau egal cu doi „se reduce“ la un polinom de gradul doi fără rădăcini reale.

Fie deci $f \in \mathbb{R}[X]$ ireductibil, cu $\text{grad}(f) \geq 2$. Conform teoremei fundamentale a algebrei polinomul f are o rădăcină $x_0 \in \mathbb{C}$. Să observăm că $x_0 \notin \mathbb{R}$, conform cu teorema precedentă pct. **1)**. Prin urmare $x_0 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Cum f are coeficienți reali, va admite și rădăcina complex conjugată $\overline{x}_0 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Aplicând teorema lui Bézout, deducem că f se divide prin $g = (X - x_0)(X - \overline{x}_0) = X^2 - (x_0 + \overline{x}_0)X + x_0\overline{x}_0 \in \mathbb{R}[X]$ în $\mathbb{C}[X]$. Deci $f = g \cdot h,\ h \in \mathbb{C}[X]$. Cum f este ireductibil, divizorul său h ar trebui să fie de forma a sau af, $a \in \mathbb{C}^*$. Dacă $h = af$, atunci din $f = gh$, ar rezulta $1 = ag$, adică g ar fi inversabil și deci de grad zero, contradicție. Rămâne $h = a,\ a \in \mathbb{C}^*$ când $f = ag$ și deci $\text{grad}(f) = 2$, f având rădăcinile complex conjugate x_0 și $\overline{x}_0$. ■

Aplicând teorema de descompunere în factori ireductibili și teorema precedentă se obține următoarea:

Teoremă. 1) Orice polinom $f \in \mathbb{C}[X],\ f \neq 0$, f neinversabil, **se descompune în mod unic în factori liniari** în inelul $\mathbb{C}[X]$.

2) Orice polinom $f \in \mathbb{R}[X],\ f \neq 0$, f neinversabil, se **descompune în mod unic în inelul $\mathbb{R}[X]$ într-un produs de factori liniari sau factori de gradul doi fără rădăcini reale.**

Exemple. 1. $f = X^2 + 2 \in \mathbb{C}[X]$, $f = \left(X - \sqrt{2}i\right)\left(X + \sqrt{2}i\right)$;

2. $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^2 + X + 1 - i = (X - i)(X + i + 1)$;

3. $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$;

4. $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - X^2 - X - 2 = (X - 2)\left(X^2 + X + 1\right)$.

Din această teoremă rezultă următoarele consecințe:

> **Corolar**. Fie $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ un polinom care are rădăcinile distincte $x_1, ..., x_n$.
>
> Atunci $f = a_n(X - x_1)(X - x_2)...(X - x_n)$.

Exemple. 1. $f = 2X^2 + X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$, **are rădăcinile** $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -1$. **Deci** $f = 2\left(X - \frac{1}{2}\right)(X + 1)$;

2. $f = \sqrt{2}X^2 + \left(2\sqrt{2} + 1\right)X + 2 \in \mathbb{R}[X]$, **are rădăcinile** $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -2$ **și deci** $f = \sqrt{2}\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(X + 2)$;

3. $f = 2iX^2 + (6 + i)X + 3 \in \mathbb{C}[X]$, **are rădăcinile** $x_1 = 3i$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ **și deci** $f = 2i(X - 3i)\left(X + \frac{1}{2}\right)$.

> **Corolar**. Dacă un polinom $f \in \mathbb{C}[X]$ cu gradul cel mult n se anulează pentru $n + 1$ valori distincte, atunci $f = 0$.

Demonstrație. Dacă $\text{grad}(f) = n \geq 1$, atunci $f = a(X - x_1)(X - x_2)...(X - x_n)$ se anulează în n valori distincte. Dacă în plus $f(x_{n+1}) = 0$, $x_{n+1} \neq x_k$, $k = \overline{1,n}$, atunci $a = 0$, adică $f = 0$.■

Probleme rezolvate

1. Să se descompună în factori ireductibili peste *K* polinomul *f*, în cazurile:

1) $f = X^4 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$, $K = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$;

2) $f = X^3 + X + \hat{3} \in \mathbb{Z}_5[X]$, $K = \mathbb{Z}_5$.

R. 1) Să observăm că $f = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 = \left(X^2 + 1\right)^2 - \left(\sqrt{2}X\right)^2 = \left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right) =$
$= (X - x_1)(X - \overline{x}_1)(X - x_2)(X - \overline{x}_2)$, unde $x_1 = \frac{-1 - i}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1 - i}{\sqrt{2}}$.

Polinomul $f$este ireductibil peste $\mathbb{Z}$ şi peste $\mathbb{Q}$. Probăm că este ireductibil peste $\mathbb{Z}$. Cum f nu are rădăcini întregi sau raționale, el nu se poate scrie ca un produs dintre un factor de gradul întâi şi altul de gradul trei. Scrierea lui f ca produs de două polinoame de gradul doi este $f=\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)$. Dar cele două polinoame nu au coeficienții în $\mathbb{Z}$ (sau în $\mathbb{Q}$).

Altfel. Prin reducere la absurd. Dacă $f=\left(aX^2+bX+c\right)\left(\alpha X^2+\beta X+\gamma\right), a, b, c, \alpha, \beta, \gamma\in\mathbb{Z}$, atunci prin identificare sistemul obținut în numere întregi nu are soluții.

Polinomul f este reductibil peste $\mathbb{R}$ din scrierea $f=\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)$, cei doi factori fiind din $\mathbb{R}[X]$. De asemenea aceşti doi factori fiind de gradul doi cu discriminantul $\left(\pm\sqrt{2}\right)^2-4=-2<0$, sunt ireductibili.

În fine f este reductibil peste $\mathbb{C}$, având descompunerea în factori ireductibili:

$$f=(X-x_1)(X-\overline{x}_1)(X-x_2)(X-\overline{x}_2).$$

2) Să observăm că $f(\hat{1})=\hat{0}$, adică $x=\hat{1}$ este rădăcină a polinomului f când avem: $f=\left(X-\hat{1}\right)\left(X^2+X+\hat{2}\right)=\left(X+\hat{4}\right)\left(X^2+X+\hat{2}\right)$.

Polinomul $g=X^2+X+\hat{2}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_5[X]$, deoarece are gradul doi şi nu are rădăcini în corpul $\mathbb{Z}_5$, pentru că: $g(\hat{0})=\hat{2}, g(\hat{1})=\hat{4}$, $g(\hat{2})=\hat{3}, g(\hat{3})=\hat{4}, g(\hat{4})=\hat{2}$.

Deci $f=\left(X+\hat{4}\right)\left(X^2+X+\hat{2}\right)\in\mathbb{Z}_6[X]$ reprezintă descompunerea lui f în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$.

2. Să se arate că polinomul $f=\hat{2}X^3+X^2+X+\hat{3}\in\mathbb{Z}_4[X]$ nu are nici o rădăcină în $\mathbb{Z}_4$, dar este reductibil în $\mathbb{Z}_4[X]$,

R. Se verifică prin calcul că $f(\hat{0}), f(\hat{1}), f(\hat{2}), f(\hat{3})\neq\hat{0}$

Punem $f=(aX+b)\left(cX^2+dX+e\right), a,b,c,d,e\in\mathbb{Z}_4$.

Dezvoltând în membrul drept şi apoi identificând găsim $a=\hat{2}, b=\hat{1}, c=d=e=\hat{3}$, ceea ce arată că $f=\left(\hat{2}X+\hat{1}\right)\left(\hat{3}X^2+\hat{3}X+\hat{3}\right)$ şi deci f este reductibil peste $\mathbb{Z}_4$.

3. Determinați parametrii reali *a, b* astfel încât polinomul *f* să se dividă prin polinomul *g* în cazurile:

1) $f=X^3+aX^2+6X+6, g=X^2-X-2$;

2) $f=X^4+(a-1)X^3+(b+2)X^2+X+c-3, g=(X-1)^3$.

R. 1) *Metoda* 1. Să observăm că împărțitorul se poate scrie, descompus în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ sub forma $g=(X-2)(X+1)$, ceea ce arată că – 1 şi 2 sunt rădăcinile polinomului *g*.

Cum f se divide prin g rezultă că rădăcinile lui g trebuie să fie rădăcini şi pentru f, adică:

$$\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a-b+5=0 \\ 4a+2b+14=0 \end{cases}$$

sistem din care rezultă valorile lui a şi b. Găsim uşor $a=-4, b=1$.

Metoda 2. (*Prin împărțire directă*). Efectuând împărțirea lui f la g avem $f = g(X + a + 1) +$ $+(a + b + 3)X + 2a + 8$.

Dar $f \vdots g$ şi deci restul împărțirii trebuie să fie polinomul nul, adică $(a + b + 3)X + 2a + 8 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a + b + 3 = 0,\ 2a + 8 = 0) \Leftrightarrow (a = -4,\ b = 1)$.

Metoda 3. (*Metoda coeficienților nedeterminați*). Polinomul *f* se divide prin *g* dacă există $h \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât *f* = *gh.* Trecând în această egalitate la grade rezultă $\text{grad}(f)(= \text{grad}(g \cdot h)) = \text{grad}(g) +\ \text{grad}(h)$ sau $3 = 2 + \text{grad}(h)$. Deci $\text{grad}(h) = 1$. Se ia $f = X + \alpha$. Se identifică coeficienții lui *X* la aceeaşi putere şi se obține un sistem în a, b, α.

Metoda 4. (*Schema lui Horner*). Se aplică schema lui Horner pentru *f* şi $\mathbf{X - 2}$ şi apoi pentru cât şi $X + 1$.

	X^3	X^2	X	X^0
	1	a	b	6
2	1	$a + 2$	$b + 2a + 4$	$4a + 2b + 14 = 0$
-1	1	$a + 1$	$b + a + 3 = 0$	

Sistemul $\begin{cases} 4a + 2b + 14 = 0 \\ b + a + 3 = 0 \end{cases}$ are soluția $a = -4,\ b = 1$.

2) Metoda de rezolvare *utilizează derivatele*. Remarcăm că împărțitorul *g* are rădăcina triplă *x* = 1. Dacă *f* se divide prin *g,* atunci *x* = 1 este rădăcină triplă şi pentru *f,* adică $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f''(1) = 0 \\ f'''(1) \neq 0 \end{cases}$.

Calculăm derivatele formale ale polinomului f şi avem: $D(f) = 4X^3 + 3(a-1)X^2 + 2(b+2)X + 1$, $D^2(f) = 12X^2 + 6(a-1)X + 2(b+2)$.

Prin urmare se obține sistemul: $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + 6 = 0 \\ 6a + 2b + 10 = 0 \end{cases}$ cu soluția $a = -\dfrac{4}{3},\ b = -2,\ c = \dfrac{10}{3}$.

Observație. Se pot aplica şi celelalte metode descrise la problema precedentă.

2) Divizibilitatea polinoamelor

Am văzut că dacă $f, g \in K[X],\ g \neq 0$, atunci *f* se divide prin *g* dacă există $q \in K[X]$ astfel încât $f = gq$ (mai spune că *f* este multiplu de *g* sau că *g* este divizor al lui *f*). Deci *f* se divide prin *g* dacă şi numai dacă $r = 0$ (acesta devine un criteriu prin care probăm că polinomul *f* se divide prin *g* – se face împărțirea celor două polinoame şi se constată că restul împărțirii este polinomul nul).

În cazul particular când $g = X - a$, atunci *f* se divide prin $X - a$, dacă şi numai dacă $f(a) = 0$ (Bézout).

Exemple: 1. $f = X^2 - 1, g = X + 1$ **. Atunci** $f = (X+1)(X-1)$**, cu** $q = X - 1$ **;**

2. $f = X^3 + 1, g = X^2 - X + 1$**. Atunci** $f = (X^2 - X + 1)(X + 1)$**, cu** $q = X + 1$ **.**

Pentru polinoamele numerice o proprietate de importanță este următoarea:

> **Teoremă.** Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$. Polinomul *f* este divizibil prin polinomul *g* dacă și numai dacă orice rădăcină a polinomului *g* este rădăcină și a polinomului *f* având și pentru acesta un ordin de multiplicitate cel puțin egal cu cel pe care îl are pentru polinomul *g*.

Exemplu. Să se determine parametrii reali *a, b, c* pentru care polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ **se divide cu polinomul** $g = X^3 - 2X^2 + X$ **.**

R. Împărțitorul are rădăcinile $x_1 = 0$ **(rădăcină simplă) și** $x_2 = 1$ **(rădăcină dublă). Pentru ca *f* să se dividă prin *g* se impune condiția ca aceste rădăcini să fie și pentru *f*.**

Deci $f(0) = 0, f(1) = 0$ **și** $f'(1) = 0$ **. De aici obținem** $a = -2, b = 1, c = 0$ **și deci** $f = g$ **. *Altfel*, cu schema lui Horner, aplicată de trei ori (pentru** $x = 0$ **și de două ori pentru** $x = 1$ **).**

***Altfel*, prin împărțirea directă se impune condiția ca restul** $r = 0$ **.**

Proprietăți ale relației de divizibilitate

Fie *K* un **corp comutativ**. Vom prezenta în continuare unele proprietăți ale relației de divizibilitate.

> **P₁.** Relația divizibilitate este: 1) **reflexivă** (adică $f \mid f, (\forall) f \in K[X]$) și 2) **tranzitivă** (adică dacă $f \mid g,\ g \mid h$, atunci $f \mid h,\ f, g, h \in K[X]$).

Demonstrație. 1) Avem $f \mid f, (\forall) f \in K[X]$ deoarece $f = 1 \cdot f$.

2) Din $f \mid g$ se deduce că există $f_1 \in K[X]$ pentru care $g = f \cdot f_1$, (1)

Din $g \mid h$ se deduce că există $g_1 \in K[X]$ astfel încât $h = g \cdot g_1$, (2).

Din (1) și (2) rezultă $h = f \cdot f_1 \cdot g_1 = f(f_1 \cdot g_1)$. Cum $f_1, g_1 \in K[X]$ rezultă $f_1 \cdot g_1 \in K[X]$ și deci $f \mid h$.■

> **P₂.** Fie $f,\ g_i,\ i = \overline{1,m}$ polinoame din $K[X]$.
>
> Dacă $f \mid g_i,\ i = \overline{1,m}$, atunci $f \mid \sum\limits_{i=0}^{m} q_i g_i$, cu $q_i \in K[X],\ i = \overline{1,m}$.

Demonstrație. Proprietatea spune că dacă un polinom *f* divide polinoamele g_i, $i=\overline{1,m}$, atunci *f* divide orice „combinație“ de aceste polinoame, adică $f \Big| \sum_{i=0}^{m} q_i g_i$.

Într-adevăr din $f|g_i$ se deduce că există $f_i \in K[X]$ pentru care $g_i = f \cdot f_i$, $i=\overline{1,m}$.

Atunci $\sum_{i=0}^{n} q_i g_i = \sum_{i=0}^{m} q_i f \cdot f_i = f\left(\sum_{i=0}^{m} q_i f_i\right)$. Din această relație și din faptul că $\sum_{i=0}^{m} q_i f_i \in K[X]$ rezultă că $f \Big| \sum_{i=0}^{m} q_i g_i$. ■

> **P₃.** Fie $f, g \in K[X]$, $f|g$ și $g \neq 0$. Atunci $f \neq 0$ și $\operatorname{grad}(f) \leq \operatorname{grad}(g)$.
>
> **Un divizor** (*f*) al unui polinom nenul (*g*) este un polinom nenul de grad cel mult egal cu al polinomului.

Demonstrație. Din $f|g$ rezultă că există $f_1 \in K[X]$ astfel încât $g = f \cdot f_1$. Evident $f \neq 0$, $f_1 \neq 0$ și deci $\operatorname{grad}(f) \geq 0$, $\operatorname{grad}(f_1) \geq 0$.

Cum *K*[*X*] este domeniu de integritate avem din $f \cdot f_1 = g$, $\operatorname{grad}(g) = \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(f_1)$, iar de aici $(\operatorname{grad}(f_1) \geq 0)$ deducem $\operatorname{grad}(f) \leq \operatorname{grad}(g)$. ■

> **P₄.** Fie $f, g \in K[X]$, $f \neq 0$, astfel încât $f|g$ și $g|f$. Atunci există $a \in K$, $a \neq 0$, astfel încât $f = ag$.

Demonstrație. Din $f \neq 0$ și $g|f$ rezultă $g \neq 0$ și există $g_1 \in K[X]$ astfel încât $f = gg_1$. Din $f|g$ rezultă că există $f_1 \in K[X]$ astfel încât $g = ff_1$. Din $f = gg_1$ și $g = ff_1$ se obține $f = ff_1 g_1$ sau $(f \neq 0)$, $g_1 f_1 = 1$. Trecând în această relație la grad rezultă $0 = \operatorname{grad}(1) = \operatorname{grad}(f_1) + \operatorname{grad}(g_1)$.

Cum $f_1, g_1 \neq 0$ rezultă $\operatorname{grad}(f_1), \operatorname{grad}(g_1) \geq 0$, adică (via relația de mai sus) $\operatorname{grad}(f_1) = \operatorname{grad}(g_1) = 0$, ceea ce înseamnă că $f_1, g_1 \in K - \{0\}$.

Așadar $f = g_1 \cdot g$ unde $g_1 = a \in K - \{0\}$. ■

Observații. 1) Această proprietate afirmă că dacă două polinoame se divid reciproc, atunci ele „diferă“ printr-o constantă nenulă $a(f = ag)$ sau coincid abstracție făcând de o constantă nenulă *a*..

2) Dacă *f* și *g* au același coeficient dominant și dacă $f|g$ și $g|f$, atunci $f = g$.

Definiție. Spunem că polinoamele $f, g \in K[X]$ **sunt asociate în divizibilitate** dacă $f \mid g$ şi $g \mid f$ (deci dacă se divid reciproc) şi scriem $f \sim g$.

Conform proprietății P_4, dacă $f \neq 0$, atunci *g* este asociat în divizibilitate cu *f* dacă şi numai dacă există $a \in K - \{0\}$ astfel încât $g = af$; dacă $f = 0$, atunci $g \sim f$ dacă şi numai dacă $g = 0$, caz în care $g = af$, este banal verificată.

P_5. Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$. Atunci $f \mid g$, dacă orice rădăcină a polinomului *f* (cu ordinul de multiplicitate respectiv) este rădăcină şi pentru polinomul *g* (cu acelaşi ordin de multiplicitate, cel puțin) .

Această proprietate este deosebit de utilă în problemele de divizibilitate a polinoamelor.

Probleme rezolvate

1. Să se determine parametrii reali *m, n, p* astfel încât polinomul *f* să se dividă prin polinomul *g*, în cazurile:

a) $f = X^3 + (m+1)X^2 - 2X + 3m,\ g = X + 1$;

b) $f = X^3 + (2n+1)X^2 + mX - m - n,\ g = (X-1)(X+1)$;

c) $f = X^4 + (m+n)X^3 + (m-1)X^2 + X + 1 + 2n,\ g = X^2 + 2X + 3$;

d) $f = X^4 + 5X^3 + mX^2 + nX + p + 1,\ g = (X^2 - 1)(X + 2)$.

R. a) Polinomul *f* se divide prin polinomul $g = X - (-1)$ dacă restul împărțirii lui *f* la *g* este $r = 0$. Cum $r = f(-1)$ deducem $f(-1) = 4m + 2$. Din $f(-1) = 0$ rezultă $m = -\dfrac{1}{2}$.

b) *Metoda* 1 (*Metoda coeficienților nedeterminați*). Dacă *f* se divide prin *g*, atunci trebuie să aibă loc egalitatea $f = g(X + \alpha) \Leftrightarrow X^3 + (2n+1)X^2 + mX - m - n = X^3 + \alpha X^2 - X - \alpha$. De aici, prin identificare, rezultă sistemul: $\begin{array}{l|l} X^2 & 2n + 1 = \alpha \\ X & m = -1 \\ X^0 & -m - n = -\alpha \end{array}$ cu soluția $m = -1,\ n = -2,\ \alpha = -3.$

Metoda 2. Din P_5 rezultă că orice rădăcină a împărțitorului este rădăcină și pentru deîmpărțit. În cazul nostru $x_1 = 1, x_2 = -1$ sunt rădăcinile împărțitorului. Aceste valori trebuie să fie rădăcini și pentru *f*, adică $f(1) = 0,\ f(-1) = 0$. Acest sistem are soluția $m = -1, n = -2$.

Metoda 3 (*Prin împărțire directă*). Aplicând algoritmul de împărțire a lui f prin g avem: $f = g(X + 2n + 1) + (m+1)X - m + n + 1$.

Polinomul f se divide prin g dacă restul $r = (m+1)X - m + n + 1$ este polinomul nul, adică dacă $m+1 = 0$ și $-m + n + 1 = 0$, ceea ce dă $m = -1, n = -2$.

Metoda 4 (*Schema lui Horner*). Se aplică de două ori schema lui Horner: o dată pentru *f* și rădăcina $x = 1$ și apoi pentru câtul obținut și rădăcina $x = -1$.

	X^3	X^2	X	X^0
	1	$2n+1$	m	$-m-n$
1	1	$2n+2$	$2n+m+2$	$n+2=0$
– 1	1	$2n+1$	$m+1=0$	

Găsim $n = -2, m = -1$.

c) Aplicăm algoritmul de împărțire celor două polinoame și avem:

$$f = g\left[X^2 + (m+n-2)X - m - 2n\right] + (n - m + 7)X + 3m + 8n + 1$$

Condiția $g \mid f$ se traduce prin restul egal cu polinomul nul, adică $\begin{cases} n - m + 7 = 0 \\ 3m + 8n + 1 = 0 \end{cases}$ cu condiția $m = 5, n = -2$.

d) Rădăcinile împărțitorului fiind $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2$ se impune condiția să fie rădăcini și pentru deîmpărțit, adică $f(-1) = 0,\ f(1) = 0,\ f(-2) = 0$ ceea ce conduce la sistemul:

$$\begin{cases} m - n + p = 3 \\ m + n + p = -7 \\ 4m - 2n + p = 23 \end{cases} \quad \text{cu soluția } m = 5, n = -5,\ p = -7.$$

2. Arătați că polinomul $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1, n \in \mathbb{N}^*$ se divide la polinomul $g = (X-1)^2$ și determinați câtul acestei împărțiri.

R. Vom aplica schema lui Horner de două ori: o dată pentru *f* și rădăcina $x = 1$ și apoi pentru câtul obținut și rădăcina $x = 1$. Avem:

	X^{n+1}	X^n	X^{n-1}	X^{n-2}	...	X^2	X	X^0
	n	$-(n+1)$	0	0	...	0	0	1
1	n	– 1	– 1	– 1	...	– 1	– 1	0
1	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	...	1	0	

Deci câtul la împărțirea lui *f* prin *g* este: $g = nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + ... + 2X + 1$.

3) Cel mai mare divizor comun a două polinoame. Algoritmul lui Euclid

Definițiile, teoremele și chiar demonstrațiile de la această secțiune și următoarea sunt similare celor de la divizibilitatea din $\mathbb{Z}$.

Fie *K* un corp comutativ.

Definiție. Fie $f, g \in K[X]$. Spunem că polinomul $d \in K[X]$ este **un cel mai mare divizor comun al polinoamelor** f, g dacă:

1) *d* este divizor comun pentru *f, g*, adică $d \mid f$ şi $d \mid g$;

2) orice alt divizor comun pentru *f* şi *g* îl divide pe *d*, adică $(\forall) d' \in K[X], d' \mid f, d' \mid g \Rightarrow d' \mid d$.

Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) al polinoamelor *f, g* va fi notat cu (*f,g*).
Vom arăta că oricare ar fi două polinoame din $f, g \in K[X]$, există *c.m.m.d.c.* al lor şi-l vom construi efectiv prin aşa numitul **algoritm al lui Euclid**.
Pentru început prezentăm următoarea:

Lemă. Dacă $f, g, q, r \in K[X]$ astfel încât $f = gq + r$, şi dacă există (g, r), atunci există (f, g) şi mai mult $(f, g) = (g, r)$.

Demonstrație. Fie $d = (g, r)$. Deci $d \mid g, d \mid r$ şi $d \mid gq + r$ (combinație de *g* şi *r*). Prin urmare $d \mid f$, adică *d* este un divizor pentru *f* şi *g*. Dacă *d'* este un alt divizor comun pentru *f* şi *g*, atunci avem $d' \mid f - gq$, adică $d' \mid r$. Deci *d'* este un divizor comun pentru *g* şi *r*. Cum $d = (g, r)$ rezultă $d' \mid d$. În final $d = (f, g)$. ■

Teoremă. Orice două polinoame din $K[X]$ au un c.m.m.d.c.

Demonstrație. Fie $f, g \in K[X]$. Dacă $f = 0$, atunci $(0, g) = g$, deoarece $g \mid 0$, $g \mid g$, iar dacă *d'* este un divizor pentru 0 şi *g*, atunci evident $d' \mid g$. Deci am arătat că $(0, g) = g$. Analog dacă $f \neq 0$, $g = 0$, $(f, 0) = f$.

Presupunem acum că $f \neq 0$ şi $g \neq 0$. Considerăm următorul lanț de împărțiri cu rest

$f = gq_1 + r_1, \qquad \text{grad}(r_1) < \text{grad}(g)$

$g = r_1q_2 + r_2, \qquad \text{grad}(r_2) < \text{grad}(r_1)$

$r_1 = r_2g_3 + r_3, \qquad \text{grad}(r_3) < \text{grad}(r_2)$

....

$r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}, \text{grad}(r_{n-1}) < \text{grad}(r_{n-2})$

$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + 0.$

Să observăm că resturile obținute în împărțirile de mai sus au proprietatea $\text{grad}(r_1) > \text{grad}(r_2) > \cdots$.

Gradele sunt distincte două câte două şi aparțin mulțimii $\{0, 1, 2, ..., \text{grad}(r_1)\}$. Prin urmare în inegalitățile de mai sus cu grade întâlnim o egalitate care să aibă restul zero. Fie acesta $r_n = 0$.

Să arătăm că ultimul rest nenul r_{n-1} reprezintă cel mai mare divizor comun al polinoamelor *f, g*.

Aplicăm lema în mod repetat (de jos în sus în lanțul de relații) şi avem:

$$r_{n-1} = (r_{n-1}, 0) = (r_{n-2}, r_{n-1}) = (r_{n-3}, r_{n-2}) = ... = (r_1, r_2) = (g, r_1) = (f, g). \ \blacksquare$$

Prin urmare, date fiind două polinoame $f, g \in K[X]$, $f, g \neq 0$ (cazul interesant) pentru a determina c.m.m.d.c. al polinoamelor *f, g* se realizează lanțul de împărțiri cu rest de mai sus dacă $\text{grad}(f) \geq \text{grad}(g)$. Dacă $\text{grad}(g) \geq \text{grad}(f)$, atunci se inversează rolul lui *f* cu *g*.

Modul de a obține c.m.m.d.c. a două polinoame se numeşte **algoritmul lui Euclid**.

Să observăm că c.m.m.d.c. a două polinoame **este unic până la o asociere în divizibilitate**. În sensul că dacă $d = (f, g)$ şi $d' = (f, g)$, atunci $d \sim d'$, adică există $a \in K - \{0\}$, astfel încât $d = ad'$.

Într-adevăr din $d = (f, g)$ şi $d' | f$, $d' | g \Rightarrow d' | d$.

Analog din $d' = (f, g)$ şi $d | f$, $d | g \Rightarrow d | d'$. Acum din $d' | d$ şi $d | d' \Rightarrow d \sim d'$.

Observații. 1) Dacă *f, g* sunt descompuse în factori ireductibili, atunci (f, g) se obține luând factori comuni la puterea cea mai mică (similar cu determinarea c.m.m.d.c a două numere naturale din aritmetică).

2) Dacă în lanțul de împărțiri o egalitate se înmulțeşte cu $a \in K - \{0\}$, atunci, în final c.m.m.d.c. nu se modifică, acesta fiind unic până la o constantă nenulă din *K*, adică $(f, g) = (af, ag), (\forall) a \in K - \{0\}$.

3) Dacă $f_1, f_2, f_3 \in K[X]$ atunci se arată uşor că $(f_1, f_2, f_3) = ((f_1, f_2), f_3) = (f_1, (f_2, f_3))$ indicând astfel cum se determină cel mai mare divizor comun pentru trei polinoame. Analog se procedează şi pentru mai multe polinoame.

Corolar. Fie $f, g \in K[X]$, $d = (f, g)$. Atunci există $u, v \in K[X]$ astfel încât

$$d = uf + vg .$$

Această consecință a teoremei precedente afirmă că c.m.m.d.c. pentru polinoamele *f, g* se exprimă ca o combinație de ele. Demonstrația este imediată începând de jos în sus cu exprimarea ultimului rest nenul r_{n-1}.

Definiție. Fie $f, g \in K[X]$. Spunem că polinoamele f și g sunt **prime între ele** dacă $(f, g) = 1$.

Ținând seama de corolarul precedent dacă două polinoame $f, g \in K[X]$ sunt prime între ele atunci există $u, v \in K[X]$ astfel încât $1 = uf + vg$.

O propoziție utilă în rezolvarea unor probleme cu polinoame este următoarea:

Teoremă. Fie $f, g \in K[X]$ astfel încât $f \mid gh$, $(f, g) = 1$. Atunci $f \mid h$.

Demonstrație. Cum $(f, g) = 1$, atunci există $u, v \in K[X]$ astfel încât $1 = uf + vg$. Înmulțind această relație cu h rezultă $h = ugh + vgh$. Deoarece $f \mid gh$, există $f_1 \in K[X]$ astfel încât $gh = ff_1$, iar egalitatea precedentă devine $h = ufh + vff_1$ sau $h = f(uf + vf_1)$. De aici $f \mid h$. ■

Să observăm că dacă $f, g \in \mathbb{Z}[X]$, atunci $(f, g) \in \mathbb{Z}[X]$; dacă $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, atunci $(f, g) \in \mathbb{Q}[X]$.

Se demonstrează ușor următoarea:

Teoremă. Rădăcinile comune a două polinoame sunt rădăcinile celui mai mare divizor comun al lor (cu ordinele de multiplicitate respective).

Probleme rezolvate

1. Să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor f, g în cazurile următoare:

1) $f = X^4 + X^3 - 7X^2 - X + 6$, $g = X^3 - X^2 - 4X + 4$, $f, g \in \mathbb{Z}[X]$;

2) $f = \frac{1}{3}X^3 - X^2 - \frac{1}{12}X + \frac{1}{4}$, $g = \frac{1}{9}X^3 - \frac{1}{18}X^2 - X + \frac{1}{2}$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$;

R. 1) Aplicăm algoritmul lui Euclid și avem:

Prima împărţire.

$$\begin{array}{rr|l} & X^4+X^3-7X^2-X+6 & X^3-X^2-4X+4 \\ & -X^4+X^3+4X^2-4X & \overline{X+2} \\ \hline / & 2X^3-3X^2-5X+6 & \\ & -2X^3+2X^2+8X-8 & \\ \hline & / \quad -X^2+3X-2 & \end{array}$$

A doua împărţire. Se împarte câtul X^3-X^2-X+4 la noul rest X^2-3X+2 (c.m.m.d.c. este unic până la o constantă nenulă din $\mathbb{Z}$ – deci se poate înmulţi restul obţinut $-X^2+3X-2$ cu (–1)). Avem:

$$\begin{array}{rr|l} & X^3-\ X^2-4X+4 & X^2-3X+2 \\ & -X^3+3X^2-2X & \overline{X+2} \\ \hline / & 2X^2-6X+4 & \\ & -2X^2+6X-1 & \\ \hline & / \quad / \quad / & \end{array}$$

Cum ultimul rest nenul este X^2-3X+2, acesta reprezintă c.m.m.d.c. pentru *f, g*.

Observaţie. Dacă am fi descompus în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}$, atunci $f=(X-1)(X-2)(X+1)$, $g=(X-1)(X-2)(X+2)$ şi deci $(f,g)=(X-1)(X-2)=X^2-3X+2$.

2) Pentru că c.m.m.d.c. a două polinoame este unic până la o constantă, atunci în loc de f luăm $12f=4X^3-12X^2-X+3$, iar în locul lui g luăm $18g=2X^3-X^2-18X+9$.

Algoritmul lui Euclid este descris mai jos

Prima împărţire.

$$\begin{array}{rr|l} & 4X^3-12X^2-\quad X+\ 3 & 2X^3-X^2-18X+9 \\ & -4X^3+\ 2X^2+36X-18 & \overline{\mathbf{2}} \\ \hline / & -10X^2+35X-15 & \end{array}$$

A doua împărţire. Noul rest îl împărţim cu (– 5) şi avem $2X^2-7X+3$ şi continuăm algoritmul

$$\begin{array}{rr|l} & 2X^3-\ X^2-18X+9 & 2X^2-7X+3 \\ & -2X^3+7X^2-3X & \overline{X+3} \\ \hline / & 6X^2-21X+9 & \\ & -6X^2+21X-9 & \\ \hline & / \quad / \quad / & \end{array}$$

Deci $(f,g)=2X^2-7X+3$.

Dacă am fi descompus în factori am fi obţinut $12f=(2X-1)(2X+1)(X-3)$

$$18g=(2X-1)(X-3)(X+3)$$

şi deci $(12f,18g)=(2X-1)(X-3)=2X^2-7X+3$.

2. Să se arate că următoarele polinoame sunt prime între ele:

1) $\boldsymbol{f=4X^3+8X^2-X-2,\ g=X^2+X+1,\ f,g\in\mathbb{Z}[X]}$;

2) $\boldsymbol{f=X^3+X^2+\hat{3},\ g=X^2+\hat{2}X,\ f,g\in\mathbb{Z}_6[X]}$.

R. 1) Aplicăm algoritmul lui Eudid şi avem:

Prima împărțire.

$$
\begin{array}{l|l}
4X^3+8X^2-\ \ X-2 & X^2+X+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-4X^3-4X^2-4X} & 4X+4 \\
/\qquad 4X^2-5X-2 & \\
\qquad\underline{-4X^2-4X-4} & \\
\qquad /\quad -9X-6=-3(3X+2) &
\end{array}
$$

A doua împărțire. Noul deîmpărțit X^2+X+1 îl înmulțim cu 3, iar restul obținut îl împărțim prin (-3). Continuăm algoritmul cu împărțirea:

$$
\begin{array}{l|l}
3X^2+3X+3 & 3X+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-3X^2-2X} & X \\
\qquad\quad X+3 &
\end{array}
$$

A treia împărțire. Noul rest $X+3$ îl înmulțim cu 3 și avem

$$
\begin{array}{r|l}
3X+9 & 3X+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-3X-2} & 1 \\
7 &
\end{array}
$$

A patra împărțire.

$3X+2=7\left(\frac{3}{7}X+\frac{2}{7}\right)+0$.

Deci ultimul rest nenul este 1 și reprezintă c.m.m.d.c. al polinoamelor *f, g*. Cum $(f,g)=1$, se deduce că polinoamele *f, g* sunt prime între ele. Dacă s-ar fi descompus în factori am fi obținut $f=(2X+1)(2X-1)(X+2)\in\mathbb{Z}[X]$, iar $g=X^2+X+1\in\mathbb{Z}[X]$ (este ireductibil peste $\mathbb{Z}$ cum ușor se poate vedea). Acum este clar că $(f,g)=1$.

2) Aici fiind vorba de $\mathbb{Z}_5$, căutăm eventuale rădăcini ale celor două polinoame în $\mathbb{Z}_5$. Avem $f(\hat{1})=\hat{0},\ f(\hat{2})=\hat{0}$ și se obține descompunerea $f=\left(X+\hat{4}\right)^2\left(X+\hat{3}\right)$. Pentru *g,* găsim $g(\hat{0})=\hat{0},\ g(\hat{3})=\hat{0}$, când $g=X\left(X+\hat{2}\right)$. Ori este clar că $(f,g)=1$ și deci *f* și *g* sunt prime între ele.

Cu algoritmul lui Eudid am fi obținut același lucru după cum se vede mai jos:

Prima împărțire.

$$
\begin{array}{l|l}
X^3+\ \ X^2+\qquad\quad \hat{3} & X^2+\hat{2}X \\ \cline{2-2}
\underline{-X^3-\hat{2}X^2\qquad\qquad} & X+\hat{4} \\
\qquad\quad \hat{4}X^2+\qquad \hat{3} & \\
\qquad\underline{-\hat{4}X^2+\hat{2}X} & \\
\qquad\qquad\quad \hat{2}X+\hat{3} &
\end{array}
$$

A doua împărțire.

$$
\begin{array}{l|l}
X^2+\hat{2}X & \hat{2}X+\hat{3} \\ \cline{2-2}
\underline{-X^2-\hat{4}X} & \hat{3}X+\hat{4} \\
/\qquad \hat{3}X & \\
\quad\underline{-\hat{3}X-\hat{2}} & \\
\qquad /\quad \hat{3} &
\end{array}
$$

A treia împărțire.

$$\begin{array}{rl|l} & \hat{2}X+\hat{3} & \hat{3} \\ \cline{3-3} & \underline{-\hat{2}X} & \hat{4}X+\hat{1} \\ & +\hat{3} & \\ & \underline{-\hat{3}} & \\ & / & \end{array}$$

Ultimul rest nenul este: $\hat{3}\sim\hat{1}$, ceea ce arată că $(f,g)=\hat{1}$.

4) Cel mai mic multiplu comun

Fie K un corp comutativ. Are loc următoarea:

Definiție. Fie $f,g\in K[X]$. Spunem că polinomul m **este un cel mai mic multiplu comun al polinoamelor** f, g dacă

1) m este multiplu pentru f, g (adică $f\,|\,m$, $g\,|\,m$);

2) Orice alt multiplu comun m' pentru f, g este multiplu şi pentru m (adică, dacă $f\,|\,m'$, $g\,|\,m'$ atunci $m\,|\,m'$).

Cel mai mic multiplu comun al polinoamelor f, g se notează prin $[f,g]$.

Observații. **1)** Dacă polinoamele f, g sunt descompuse în factori ireductibili, atunci $[f,g]$ se obține analog determinării c.m.m.m.c. a două numere naturale, luând produsul factorilor comuni şi necomuni, luați o singură dată, la puterea ce mai mare.

Exemple. 1. $f=X(X-1)^2$, $g=(X+1)^3(X-1)$. **Atunci** $[f,g]=X(X-1)^2(X+1)^3$.

2. $f=(X+\hat{1})^2(X+\hat{2})$, $g=X(X+\hat{1})(X+\hat{3})$, $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$. **Atunci** $[f,g]=X(X+\hat{1})^2(X+\hat{2})(X+\hat{3})$.

2) Ca şi în teoria numerelor relația dintre polinoamele $f,g,(f,g)$ şi $[f,g]$ este dată de egalitatea $f\cdot g=(f,g)[f,g]$. De aici $[f,g]=\dfrac{fg}{(f,g)}$, egalitate care ne spune cum se poate determina $[f,g]$ dacă am calculat (f,g).

3) Pentru $f_1,f_2,f_3\in K[X]$ se stabileşte uşor că avem: $[f_1,f_2,f_3]=[[f_1,f_2],f_3]=$ $=[f_1,[f_2,f_3]]$, precizând astfel cum se determină cel mai mic multiplu comun pentru trei polinoame. Analog se procedează pentru mai multe polinoame.

8. RĂDĂCINI ALE POLINOAMELOR. RELAȚIILE LUI VIÈTE

1) Polinoame cu coeficienți reali

Pentru polinoamele cu coeficienți reali următorul rezultat (fără demonstrație) este important.

Teoremă. Fie $f \in \mathbb{R}[X],\ f \neq 0$. Dacă $x_0 = a + ib,\ b \neq 0$ este o rădăcină, complexă a lui *f,* atunci:

1) $\overline{x_0} = a - ib$ este, de asemenea, o rădăcină complexă a lui *f*;

2) x_0 şi $\overline{x_0}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.

Am văzut că pentru $f \in \mathbb{R}[X]$ şi $x_0 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, avem $f\left(\overline{x_0}\right) = \overline{f\left(x_0\right)}$, ceea ce arată că dacă x_0 este rădăcină a lui *f,* atunci $\overline{x_0}$ este de asemenea, rădăcină a lui *f.*

Din teoremă rezultă că, dacă *f* **este un polinom cu coeficienți reali** care are o rădăcină complexă $x_0 = a + ib,\ b \neq 0$, atunci mai are ca rădăcină şi conjugata $\overline{x_0} = a - ib$ şi cele două rădăcini au acelaşi ordin de multiplicitate Dacă x_0 este o rădăcină simplă, atunci polinomul *f* se divide prin $X - x_0$. Cum şi $\overline{x_0}$ este de asemenea rădăcină rezultă, că *f* se divide şi prin $X - \overline{x_0}$.

Deci *f* se divide prin $\left(X - x_0\right)\left(X - \overline{x_0}\right) = \left(X - a - ib\right)\left(X - a + ib\right) = \left(X - a\right)^2 - \left(ib\right)^2 =$

$= X^2 - 2aX + a^2 + b^2$.

Din teoremă rezultă următorul:

Corolar. 1) Orice polinom cu coeficienți reali are un număr par de rădăcini complexe (care nu sunt reale).

2) Orice polinom cu coeficienți reali de grad impar are cel puțin o rădăcină, reală.

Am văzut că în mulțimea $\mathbb{R}[X]$ singurele polinoame ireductibile sunt cele de gradul întâi $aX + b,\ a,b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ precum şi cele de gradul al doilea $aX^2 + bX + c,\ a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0,\ b^2 - 4ac < 0$.

Ținând seamă de teorema de descompunere în factori ireductibili avem următoarea:

Teoremă. Orice polinom $f = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$, $a_n \neq 0$ se poate scrie ca un produs de polinoame de gradul întâi sau doi cu coeficienți reali:

$$f = a_n (X - x_1)^{k_1} ... (X - x_i)^{k_i} \left(X^2 + b_1 X + c_1\right)^{l_1} ... \left(X^2 + b_p X + c_p\right)^{l_p},$$

unde $b_s^2 - 4c_s < 0$, $s = \overline{1, p}$.

Probleme rezolvate

1. Să se determine parametrii reali m, n dacă polinomul $f = X^4 - 3X^3 + mX^2 - (n+2)X + 1$ are rădăcina complexă $x_0 = 1 - i$.

R. Cum polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, atunci odată cu rădăcina complexă $x_0 = 1 - i$ va admite şi rădăcina complex conjugată $\overline{x_0} = 1 + i$.

Prin urmare *f* se divide prin produsul $(X - x_0)\left(X - \overline{x_0}\right) = (X - 1 + i)(X - 1 - i) = X^2 - 2X + 2$.

Efectuând împărțirea lui *f* prin $X^2 - 2X + 2$, se impune condiția ca restul să fie polinomul nul. Avem: $f = \left(X^2 - 2X + 2\right)\left(X^2 - X + m - 4\right) + (2m - n - 8)X - 2m + 9$.

Deci $(2m - n + 8)X - 2m + 9 = 0 \Leftrightarrow (2m - n - 8 = 0$ şi $-2m + 9 = 0)$ când $m = \frac{9}{2}, n = 1$.

2. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$. Dacă $f\left(X^3\right) + Xg\left(X^3\right)$ se divide prin $X^2 + X + 1$, atunci *f* şi *g* au rădăcina 1.

R. Fie α rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$. Deci $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ şi $\alpha^3 = 1$. Atunci $\alpha \in \left\{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right\}$. Considerăm $\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ (analog se tratează celălalt caz). Deci α este zero al funcției polinomiale $x \to f\left(x^3\right) + xg\left(x^3\right)$, adică $f\left(\alpha^3\right) + \alpha g\left(\alpha^3\right) = 0 \Leftrightarrow f(1) + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} g(1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f(1) - g(1) + i\sqrt{3} g(1) = 0 \Leftrightarrow (2f(1) - g(1) = 0,\ g(1) = 0)$. De aici $f(1) = g(1) = 0$, ceea ce arată că polinoamele *f*, *g* au rădăcina comună $x = 1$.

3. Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ polinomul $f = X^4 + X^2 + 1$.

R. Factorii ireductibili ai unui polinom cu coeficienți reali sunt cei de gradul întâi şi de gradul al doilea cu coeficienți reali, cei de gradul al doilea având discriminantul negativ.

Observăm că $f = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = \left(X^2 + 1\right)^2 - X^2 = \left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 + X + 1\right)$.

Cum fiecare din factorii de gradul al doilea $X^2 - X + 1$, $X^2 + X + 1$ are discriminantul negativ $(\Delta = -3)$, aceştia sunt factori ireductibili din $\mathbb{R}[X]$ pentru *f*.

2) Polinoame cu coeficienți raționali

Cum $\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X]$, înseamnă că rezultatele stabilite referitoare la polinoamele cu coeficienți reali rămân valabile şi pentru polinoamele cu coeficienți raționali sau întregi. Teorema următoare precizează proprietăți specifice polinoamelor cu coeficienți raționali sau întregi.

Teoremă. Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f \neq 0$. Dacă $x_0 = a + \sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $b > 0$, $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$ este o rădăcină pătratică a lui *f*, atunci

1) $\widetilde{x_0} = a - \sqrt{b}$ este, de asemenea, o rădăcină (numită conjugata pătratică a lui x_0) a lui *f*;

2) x_0, $\widetilde{x_0}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.

Teorema afirmă că dacă polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, are ca rădăcină pe $x_0 = a + \sqrt{b}$ (număr pătratic), atunci *f* are ca rădăcină şi pe $\widetilde{x_0} = a - \sqrt{b}$ (conjugatul pătratic al lui x_0), şi mai mult cele două rădăcini au acelaşi ordin de multiplicitate. Dacă x_0 este rădăcină simplă a lui *f*, atunci *f* se divide $X - x_0$. Cum şi $\tilde{x}_0$ este rădăcină simplă a lui *f* rezultă că *f* se divide şi cu $X - \tilde{x}_0$. Deci *f* se divide prin produsul $(X - x_0)(X - \tilde{x}_0) =$

$$= \left(X - a - \sqrt{b}\right)\left(X - a + \sqrt{b}\right) = (X - a)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = X^2 - 2aX + a^2 - b.$$

Probleme rezolvate

1. Să se determine parametrii raționali *m*, *n* dacă polinomul $f = X^4 - X^3 + mX^2 + 13X + n$ are rădăcina $x_0 = 3 + \sqrt{2}$.

R. Polinomul fiind cu coeficienți raționali odată cu rădăcina pătratică $x_0 = 3 + \sqrt{2}$, va admite şi rădăcina pătratică conjugată $\tilde{x}_0 = 3 - \sqrt{2}$. Prin urmare polinomul dat se divide prin:

$$(X - x_0)(X - \tilde{x}_0) = \left(X - 3 - \sqrt{2}\right)\left(X - 3 + \sqrt{2}\right) = (X - 3)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = X^2 - 6X + 7.$$

Efectuând împărțirea cu rest a lui *f* prin $X^2 - 6X + 7$ găsim restul $r = (6m + 116)X + n - 7m - 161$ care trebuie să fie polinomul nul. De aici $6m + 116 = 0$ şi $n - 7m + 161 = 0$ cu soluția $m = -\dfrac{58}{3}$, $n = \dfrac{77}{3}$.

2. Există polinoame $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grad impar care să nu aibă rădăcini în $\mathbb{Q}$?

R. Da. Polinomul $f = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ nu are nici o rădăcină în $\mathbb{Q}$.

3) Polinoame cu coeficienți întregi

Următorul rezultat vizează mulțimea $\mathbb{Z}[X]$ şi ne oferă un mod de a descoperi rădăcinile raționale sau întregi ale unui polinom.

Mai precis are loc următoarea:

Teoremă. Fie $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n, a_n \neq 0,\ f \in \mathbb{Z}[X]$.

1) Dacă $x_0 = \frac{p}{q}$ (*p, q* numere prime între ele) este o **rădăcină rațională** a lui *f,* atunci:

a) *p* **divide termenul liber** (adică $p|a_0$);

b) *q* **divide coeficientul dominant al polinomului** *f* (adică $q|a_n$).

2) În particular, dacă $x_0 = p$ este o **rădăcină întreagă** a lui *f,* atunci p este **divizor al termenului liber** (adică $p|a_0$).

Demonstrație. 1) Din $f(x_0) = 0$ rezultă egalitatea

$a_0 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + ... + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n = 0$ sau $a_0q^n + a_1pq^{n-1} + ... + a_np^n = 0$ sau încă $a_0q^n = -p\left(a_1q^{n-1} + ... + a_np^{n-1}\right)$. De aici se deduce $p|a_0q^n$ şi cum $(p,q) = 1$ rezultă că $p|a_0$. Tot din scrierea de mai sus rezultă $a_np^n = -q\left(a_0q^{n-1} + a_1q^{n-2} + ...\right)$ şi deci $q|a_np^n$. Dar $(p,q) = 1$ şi deci $q|a_n$.

2) Rezultă din **1)** când $q = 1$. ■

Teorema afirmă că pentru un polinom *f* cu coeficienți întregi, rădăcinile raționale posibile se află printre fracțiile $\frac{p}{q}$, unde *p* este un divizor (în $\mathbb{Z}$) al termenului liber a_0, iar *q* este un divizor (în $\mathbb{Z}$) al coeficientului dominant a_n al polinomului. În particular, dacă pentru $f \in \mathbb{Z}[X]$ se caută rădăcinile întregi, atunci acestea se află printre divizorii întregi ai termenului liber a_0.

$a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ $p\|a_0$ $\quad$ $q\|a_n$ $x_0 = \frac{p}{q}$	$a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ $p\|a_0$ $x_0 = p \in \mathbb{Z}$

Probleme rezolvate

1. Determinați rădăcinile raționale ale polinomului $f = 12X^4 - 16X^3 + X^2 + 4X - 1$.

R. Polinomul având coeficienți întregi, căutăm soluții întregi printre divizorii întregi al lui -1. Aceştia sunt ± 1. Cu schema lui Horner (de exemplu) găsim că $x = 1$ este rădăcină a lui *f*. În continuare căutăm rădăcini raționale ale lui *f* realizând fracții de forma $\frac{p}{q}$, unde *p* este divizor al lui (-1), deci $p \in \{\pm 1\}$, iar *q* este divizor întreg al coeficientului dominant 12, adică, $q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$. Deci avem fracțiile $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{12}$.

Aplicăm schema lui Horner pentru câtul rezultat din împărțirea lui *f* prin $X - 1$. Pentru acest cât şi fracțiile de mai sus testăm care este rădăcină.

	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	12	– 16	1	4	– 1
1	12	– 4	– 3	1	0; $x = 1$ este rădăcină
$\frac{1}{2}$	12	2	– 2	0	$x = \frac{1}{2}$ este rădăcină
$-\frac{1}{2}$	12	– 4	0	$x = -\frac{1}{2}$ este rădăcină	

Ultimul cât $12X - 4$ are rădăcina $x = \frac{1}{3}$.

Deci polinomul *f* are rădăcinile $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = \frac{1}{3}$.

2. Să se arate că nu există $f \in \mathbb{Z}[X]$ pentru care $f(1) = 5$, $f(3) = 8$.

R. Pentru $f \in \mathbb{Z}[X]$ şi $a \neq b,\ a, b \in \mathbb{Z}$ se verifică uşor că $f(a) - f(b) \vdots a - b$. Dacă, în cazul nostru, ar exista $f \in \mathbb{Z}[X]$, atunci $f(3) - f(1) \vdots (3 - 1)$ sau $8 - 5 \vdots 2$, fals.

3. Să se arate că, dacă polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$ are două rădăcini întregi de parități diferite, atunci $f(k)$ este par, $(\forall) k \in \mathbb{Z}$.

R. Fie $x_1 = 2p,\ x_2 = 2q + 1,\ p, q \in \mathbb{Z}$ cele două rădăcini de parități diferite ale lui *f*.

Deci $f = (X - 2p)(X - 2q - 1)g,\ g \in \mathbb{Z}[X]$.

Fie acum $k \in \mathbb{Z}$. Dacă luăm $k = 2m,\ m \in \mathbb{Z}$, atunci:

$$f(k) = (2m - 2p)(2m - 2q - 1)g(k) = 2(m - p)(2m - 2q - 1)g(2m).$$

ceea ce arată că $f(k)$ este par.

Dacă luăm $k = 2m + 1,\ m \in \mathbb{Z}$, atunci factorul $X - 2q - 1 = 2(m - q)$ din $f(k)$ este par şi deci $f(k)$ este la fel.

4. Să se arate că dacă polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$ ia valoarea unu pentru trei numere întregi, atunci *f* nu are nici o rădăcină întreagă.

R. Dacă $a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq b$ atunci $f(a) - f(b) \vdots a - b$, ceea ce se verifică uşor prin calcul.

Fie $f(a)=f(b)=f(c)=1,\ a,b,c\in\mathbb{Z}$. Presupunem, prin absurd, că există $x_0\in\mathbb{Z}$ pentru care $f(x_0)=0$. Atunci $f(a)-f(x_0)=f(b)-f(x_0)=f(c)-f(x_0)=1$ şi deci 1 se divide prin $a-x_0$, $b-x_0,\ c-x_0$, ceea ce atrage cel puţin două, numere egale, să zicem, $a-x_0=b-x_0$, adică $a=b$, fals (*a, b, c* fiind diferite două câte două).

4) Relaţiile lui Viète

Ultimul rezultat al acestui paragraf stabileşte legătura între coeficienţii polinomului $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0\in\mathbb{C}[X],\ a_n\neq 0$ şi rădăcinile sale $x_1,x_2,...,x_n$. Mai precis are loc următoarea

Teoremă. Numerele complexe $x_1,x_2,...,x_n$ sunt rădăcinile polinomului $f\in\mathbb{C}[X],\ f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+a_{n-2}X^{n-2}+...+a_1X+a_0,\ a_n\neq 0$, dacă şi numai dacă au loc relaţiile (lui Viète):

$$\begin{cases} x_1+x_2+...+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2+x_1x_3+...+x_1x_n+x_2x_3+...+x_2x_n+...+x_nx_{n-1}=\dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1x_2...x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Demonstraţie. Dacă $x_1,x_2,...,x_n$ sunt rădăcinile polinomului f de grad *n,* atunci $f=a_n(X-x_1)(X-x_2)...(X-x_n)$ sau după efectuarea calculelor şi ordonarea termenilor după puterile descrescătoare ale lui *X*,

$$f=a_n\Big[X^n-(x_1+x_2+...+x_n)X^{n-1}+(x_1x_2+...+x_1x_n+x_2x_3+...+x_2x_n+....+$$
$$+x_{n-1}x_n)X^{n-2}+...+(-1)^n x_1x_2...x_n\Big].$$

Cum $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+a_{n-2}X^{n-2}+....+a_1X+a_0$, prin identificarea celor două polinoame rezultă relaţiile dorite.
Reciproca este imediată. ■
Particularizăm acum acest rezultat pentru $f\in\mathbb{C}[X]$ în cazul în care $\text{grad}(f)\in\{2,3,4\}$.

● Dacă $f = aX^2 + bX + c,\ a \neq 0$, are rădăcinile x_1, x_2 atunci relațiile lui Viète sunt:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

● Dacă $f = aX^3 + bX^2 + cX + d,\ a \neq 0$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, atunci relațiile lui Viète sunt:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1 x_2 x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}.$$

● Dacă $f = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e,\ a \neq 0$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4, atunci relațiile lui Viète sunt:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = \dfrac{c}{a} \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -\dfrac{d}{a} \\ x_1 x_2 x_3 x_4 = \dfrac{e}{a} \end{cases}.$$

Observații. 1) Relațiile a doua şi a treia sunt uneori convenabil să se scrie sub forma $x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = \dfrac{c}{a}$ şi respectiv $x_1x_2(x_3 + x_4) + (x_1 + x_2)x_3x_4 = -\dfrac{d}{a}$.

2) Relațiile lui Viète se dovedesc deosebit de importante pentru un polinom (determinarea: unor parametri din structura lui, a rădăcinilor) ori de câte ori se dă o relație (sau mai multe) între unele dintre rădăcinile polinomului. Practic ori de câte ori avem o informație despre rădăcinile unui polinom, acesteia i se ataşează relațiile lui Viète.

Nu vom insista prea mult aici cu astfel de probleme deoarece le vom regăsi la rezolvarea ecuațiilor algebrice de grad superior.

Probleme rezolvate

1. Fie polinomul $f = X^3 + 2X^2 - 23X + m \in \mathbb{R}[X]$. Să se determine parametrul m şi să se afle rădăcinile polinomului dacă $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$.

R. Fiind dată relația $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$ între rădăcinile polinomului, acesteia îi vom asocia relațiile lui Viète

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -23 \\ x_1x_2x_3 = -m \end{cases}$$

În felul acesta avem un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute (x_1, x_2, x_3, m).

Avem egalitatea $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ sau $\left(x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\right)$.

$2x_1^2 = (-2)^2 - 2(-23)$, adică $x_1^2 = 25$. De aici $x_1 = \pm 5$.

Dacă $x_1 = 5$, atunci $x_2 + x_3 = -7,\ x_2x_3 = 12$, de unde $x_2 = -3,\ x_3 = -4$.

Din ultima relație Viète rezultă $m = -60$.

Dacă $x_1 = -5$, atunci $x_2 + x_3 = 3,\ x_2x_3 = -8$ când $x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{41}}{2},\ x_3 = \dfrac{3 + \sqrt{41}}{2}$ și $m = -40$.

2. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 - 3iX^2 - 4X + 2i$.

a) Să se formeze polinomul de gradul al treilea în Y care are ca rădăcini pe $y_1 = x_1^2,\ y_2 = x_2^2,\ y_3 = x_3^2$.

b) Determinați rădăcinile x_1, x_2, x_3.

R. a) Pentru a forma polinomul în Y vor trebui calculate sumele

$S_1 = y_1 + y_2 + y_3,$ $\qquad S_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3,$ $\qquad S_3 = y_1y_2y_3$.

Polinomul Y este $g = Y^3 - S_1Y^2 + S_2Y - S_3$.

Mai întâi scriem relațiile lui Viète pentru f și avem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3i, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -4, \quad x_1x_2x_3 = -2i$$

Acum avem $S_1 = y_1 + y_2 + y_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -1$.

$S_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = (x_1x_2)^2 + (x_1x_3)^2 + (x_2x_3)^2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 4,$

$S_3 = y_1y_2y_3 = (x_1x_2x_3)^2 = -4$.

Deci: $g = Y^3 + Y^2 + 4Y + 4$.

b) Polinomul $g = (Y+1)\left(Y^2 + 4\right)$ are rădăcinile $y_1 = -1,\ y_2 = 2i,\ y_3 = -2i$. Deci $x_1^2 = -1,\ x_2^2 = 2i,\ x_3^2 = -2i$.

Cum $-1 = i^2,\ 2i = (1+i)^2,\ -2i = (1-i)^2$ deducem $x_1 \in \{-i, i\},\ x_2 \in \{1+i, -1-i\},\ x_3 \in \{1-i, -1+i\}$. Verificând în ecuație găsim $x_1 = i,\ x_2 = 1+i,\ x_3 = -1+i$.

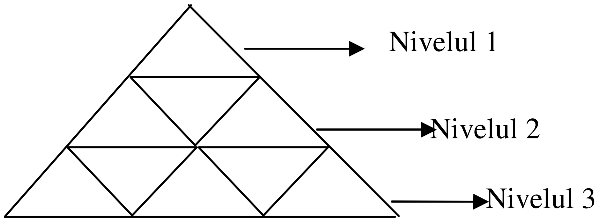
5) Polinoame în aplicații practice

1 (Căsătoria și polinoamele) Funcția $C(t) = 3t + 500$ (în €) modelează costul mediu al costumației mirilor, iar $N(t) = 23t^2 + 125t + 1000$ (în €) modelează costul mediu al nunții, unde $t = 0$ reprezintă anul 2000 și $0 \le t \le 10$.

Utilizând teorema restului stabiliți costul mediu al costumației, costul mediu al nunții în anul 2007 și anul 2010.

R. Anul 2007 corespunde la $t=7$. Obținem $C(7)=521$ € reprezintă costul mediu al costumației mirilor, iar $N(7)=2002$ € este costul mediu al nunții. Pentru anul 2010 se face $t=10$ și se calculează $C(10)$ și respectiv $N(10)$.

2 (Casă din cărți de joc și polinoame) Numărul de cărți necesar pentru a construi o casă din cărți de joc (figura alăturată) cu n nivele este dată de formula $C(n)=\frac{n}{2}(3n+1)$. Să se determine numărul de cărți necesar pentru a construi o astfel de casă cu $n=8$ nivele.



R. Se face $n=8$ și se calculează $C(8)=100$.

3 (Comitetul de elevi și polinoamele) O clasă de elevi trebuie să-și aleagă un șef de clasă, un adjunct și un casier. Numărul de moduri în care se poate face aceasta este dat de formula $P(n)=A_n^3=n^3-3n^2+2n$. Să se determine acest număr dacă în clasă sunt 20 elevi.

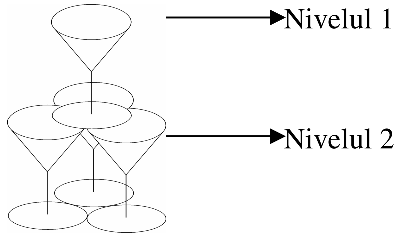
4 (Densitatea populației și polinoamele) Densitatea D a populației unui oraș (număr de persoane pe km^2) este legată de distanța x, în km, de la centrul orașului prin formula $D(x)=-30x^2+150x+500,\ 0<x<3$. Să se determine densitatea populației orașului la distanța de: 1) 1 km; 2) 2 km; 3) 3 km.

5 (Profitul și polinoamele) O companie de soft produce jocuri pe calculator. Conducerea companiei a determinat că profitul companiei, în €, de la fabricarea și vânzarea a x jocuri este dat de formula $P(x)=-0{,}00001x^3+78x-30.000,\ 0<x<3.000$. Care este profitul companiei dacă ea produce și vinde 20.000 de jocuri?

6 (Populația de gazele și polinoamele) Un număr de 200 de gazele africane au fost aduse într-un parc pentru animale sălbatice. Populația de gazele după t ani este dată de formula $P(t)=-0{,}5t^3+12{,}3t^2-43{,}2t+200,\ 0<t\le 15$. Care este populația de gazele după: 1) 5 ani; 2) 10 ani?

7 (Piramida paharelor și polinoamele) La o petrecere un grup de prieteni au construit o piramidă cu ajutorul paharelor. Primul rând de pahare așezate pe masă sunt dispuse astfel încât să formeze un triunghi, iar cupele paharelor vecine sunt tangente. Următorul etaj de pahare se formează astfel: piciorul unui pahar se așează pe zona delimitată de 3 pahare vecine (având cupele tangente) deja așezate pe masă. Următorul etaj se construiește în același mod.

Se ajunge la un etaj alcătuit din 3 pahare, iar deasupra acestora este etajul alcătuit dintr-un singur pahar (figura alăturată).



Considerând în sens invers nivelele: nivelul 1 format dintr-un pahar, nivelul 2 format din 3 pahare etc., găsim că numărul total de pahare dintr-o astfel de piramidă este dat de formula $P(k)=\frac{1}{6}\left(k^3+3k^2+2k\right)$, unde k este numărul de nivele ale piramidei. Care este numărul de pahare utilizate în piramidă, dacă acestea are: 1) 5 nivele; 2) 10 nivele?

9. ECUAȚII ALGEBRICE DE GRAD SUPERIOR

Definiție. Se numeşte **ecuație algebrică de necunoscută** *x*, o ecuație de forma $f(x)=0$, unde *f* este un polinom nenul.

Gradul polinomului *f* dă gradul ecuației algebrice. Dacă $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_0$ $a_n\neq 0$, atunci ecuația are gradul *n*, iar coeficienții $a_n, a_{n-1},...,a_0$ se numesc **coeficienții ecuației algebrice**. Dacă coeficienții sunt numere reale, atunci ecuația algebrică se spune că este cu coeficienți reali: dacă polinomul are coeficienți raționali, atunci ecuația se numeşte cu coeficienți raționali etc.
O ecuație care nu poate fi redusă la o ecuație algebrică prin operațiile de: adunare, înmulțire, ridicare la putere etc. se numeşte **ecuație transcendentă** (de exemplu ecuațiile: $\sin x = x^2 + x, \lg x + x - 1 = 0$). Noi ne vom ocupa în cele ce urmează de ecuații algebrice.

Definiție. Se spune că $a\in\mathbb{C}$ este **soluție** (sau **rădăcină**) a ecuației $f(x)=0$, dacă punând $x=a$ în ecuație, aceasta se verifică, adică $f(a)=0$.

Să observăm că dacă *a* este rădăcină a ecuației $f(x)=0$, atunci *a* este rădăcină şi pentru polinomul *f* şi reciproc. Prin urmare rezultatele stabilite pentru rădăcinile polinoamelor rămân valabile şi pentru ecuațiile algebrice definite de acestea.
A rezolva o ecuație algebrică înseamnă a-i determina soluțiile. Am văzut cum se rezolvă ecuațiile de gradul întâi ($ax+b=0, a\neq 0$), de gradul al doilea ($ax^2+bx+c=0, a\neq 0$). **Ecuațiile algebrice de grad superior vor fi acele ecuații algebrice având gradul mai mare sau egal cu trei**.
Pentru ecuația de gradul trei matematicianul italian Tartaglia a determinat formula de rezolvare, iar matematicianul italian Ferrari a determinat formula de rezolvare pentru ecuația de gradul patru (în secolul al XVI-lea).
Atât pentru ecuația de gradul trei cât şi pentru cea de gradul patru formulele care dau rădăcinile ecuațiilor se exprimă cu ajutorul radicalilor. Ecuațiile generale de grad strict mai mare decât patru nu pot fi rezolvate prin radicali (rezultat datorat matematicienilor H. Abel (norvegian) şi A. Ruffini). În continuare vom rezolva ecuații de grad mai

mare decât patru în cazuri particulare (de fapt am rezolvat, deja, ecuații binome sau trinoame care au gradul mai mare decât patru).

1) Ecuații binome. Ecuații bipătrate

Reamintim din clasa a X-a, următoarele:

Definiții. 1) O ecuație de forma $z^n - a = 0,\ n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq 2,\ a \in \mathbb{C}$ se numeşte **ecuație binomă**.

2) O ecuație de forma $az^4 + bz^2 + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$ se numeşte **ecuație bipătrată.**

Metodă de rezolvare pentru ecuația binomă. Se scrie ecuația sub forma $z^n = a$, iar numărul complex a se pune sub formă trigonometrică (a se vedea clasa a X-a) $a = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dacă $a = x + iy$. Are loc următoarea:

Teoremă. 1) Rădăcinile ecuației binome $z^n - a = 0$ sunt numerele complexe

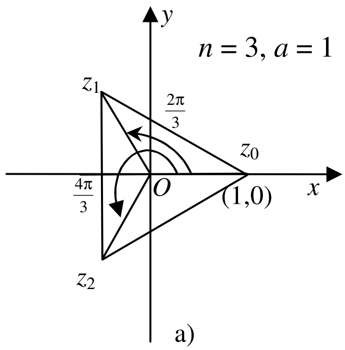
$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right],\ k = \overline{0, n-1}.$$

În particular, rădăcinile ecuației $z^n = 1$ se numesc **rădăcinile de ordin *n*** ale unității.

2) Imaginile geometrice ale rădăcinilor z_k, $k = \overline{0, n-1}$, sunt vârfurile unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul de centru O (originea reperului cartezian) şi de rază $\sqrt[n]{r}$ $\left(|z_k| = \sqrt[n]{r}\right)$.

În particular, imaginile geometrice ale rădăcinilor de ordin n ale unității sunt vârfurile unui poligon regulat înscris în cercul unitate (de centru O şi rază 1).

În Fig. 1 am reprezentat imaginile geometrice pentru $a = 1$ şi $n = 3$, $n = 4$.



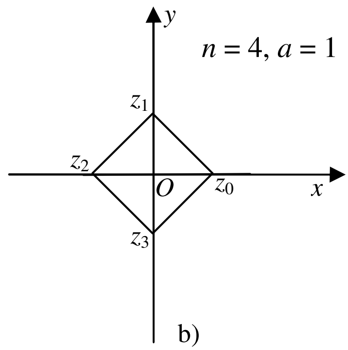


Fig.1

Exemplu. **Să se rezolve ecuațiile binome: 1)** $z^5=1$ **; 2)** $z^3=\frac{1-i}{1+i}$ **.**

R. 1) Avem $1=\cos 0+i\sin 0$ **şi deci** ***rădăcinile ecuației binome*** **(sunt rădăcinile de ordin 5 ale unității)** ***sunt*****:** $z_k=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$, $k=\overline{0,4}$ **sau scrise desfăşurat** $z_0=1$, $z_1=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, $z_2=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$, $z_3=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$, $z_4=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$.

Imaginile geometrice ale acestor numere sunt vârfurile pentagonului regulat înscris în cercul unitate.

2) Observăm că $\frac{1-i}{1+i}=-i$ **, iar** $-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$ **.** ***Soluțiile ecuației binome sunt*****:** $z_k=\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$, $k=0,1,2$ **sau explicitate** $z_0=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$, $z_1=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$, $z_2=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}$ **. Imaginile geometrice ale acestor rădăcini sunt vârfurile unui triunghi echilateral înscris în cercul unitate (** $|-i|=1$ **).**

Metodă de rezolvare pentru ecuația bipătrată. Se notează $z^2=y$ şi se rezolvă ecuația $ay^2+by+c=0$. Se obțin soluțiile $y_1,y_2\in\mathbb{C}$. Se revine la substituție şi se rezolvă ecuațiile binome $z^2=y_1$, $z^2=y_2$. Reuniunea acestor soluții constituie mulțimea de soluții a ecuației date.

Similar se rezolvă ecuația trinomă $az^{2n}+bz^n+c=0$.

Se notează $z^n = y$ şi se obţine ecuaţia $ay^2 + by + c = 0$ cu soluţiile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$, după care se rezolvă ecuaţiile binome $z^n = y_1$, $z^n = y_2$ etc.

Exemple. 1. Să se rezolve ecuaţiile: a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$; b) $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$.

R. a) Se notează $x^2 = y$ şi avem $y^2 - 4y + 3 = 0$, cu soluţiile $y_1 = 1, y_2 = 3$.

Revenind la substituţie avem de rezolvat ecuaţiile: $x^2 = 1, x^2 = 3$.

Prima ecuaţie are soluţiile $x_{1,2} = \pm 1$, iar a doua ecuaţia are soluţiile $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$.

***Ecuaţia dată are soluţiile*: $\pm 1, \pm\sqrt{3}$.**

b) Notăm $x^3 = y$ şi obţinem ecuaţia $y^2 - 2y - 3 = 0$ cu soluţiile $y_1 = -1, y_2 = 3$.

Ecuaţiile $x^3 = -1, x^3 = 3$ dau soluţiile $x_k = \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2$ şi respectiv

$$x'_k = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2.$$

***Ecuaţia dată are soluţiile*: $x_k, x'_k, k = 0, 1, 2$.**

2. Să se determine natura rădăcinilor ecuaţiei: $mx^4 + 2(m-1)x^2 + m - 2 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

R. Notăm $x^2 = y$ şi avem ecuaţia de gradul doi în $y: my^2 + 2(m-1)y + m - 2 = 0$ pentru care $\Delta_y = 1, P_y = \frac{m-2}{m}, S_y = -\frac{2(m-1)}{m}$. Se rezolvă ecuaţiile $x^2 = y_1, x^2 = y_2$.

Tabelul de discuţie este cel de mai jos (funcţie de semnul expresiilor Δ_y, P_y, S_y):

m	Δy	P_y	S_y	Rădăcinile ecuaţiei în y	Rădăcinile ecuaţiei în x
$m < 0$	+	+	–	$y_1, y_2 \in \mathbb{R}, y_1 < 0, y_2 < 0$	$x_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1,4}$
$m = 0$	+	\	\	Ecuaţia de gradul întâi: $y + 1 = 0$	$x_{1,2} \in \mathbb{C}$
$m \in (0,1)$	+	–	+	$y_1, y_2 \in \mathbb{R}, y_1 > 0, y_2 < 0$	$x_{1,2} \in \mathbb{R}, x_{3,4} \in \mathbb{C}$
$m = 1$	+	–	0	$y_1, y_2 \in \mathbb{R}, y_1 > 0, y_2 < 0$	$x_{1,2} \in \mathbb{R}, x_{3,4} \in \mathbb{C}$
$m \in (1,2)$	+	–	–	$y_1, y_2 \in \mathbb{R}, y_1 > 0, y_2 < 0$	$x_{1,2} \in \mathbb{R}, x_{3,4} \in \mathbb{C}$
$m = 2$	+	0	–	$y_1, y_2 \in \mathbb{R}, y_1 = 0, y_2 < 0$	$x_{1,2} = 0, x_{3,4} \in \mathbb{C}$
$m > 2$	+	+	–	$y_1, y_2 \in \mathbb{R}, y_1 < 0, y_2 < 0$	$x_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1,4}$

2) Ecuaţii reciproce

Definiţie. O ecuaţie de forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0, a_n \neq 0$ pentru care $a_{n-i} = a_i$, $0 \le i \le n$ (termenii egali depărtaţi de extremi au coeficienţii egali) se numeşte **ecuaţie reciprocă de gradul *n*.**

Iată forma ecuațiilor reciproce pe care le rezolvăm:

- $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0$, dacă $n = 3$;
- $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0$, dacă $n = 4$;
- $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0$ dacă $n = 5$.

Metodă de rezolvare a euațiilor reciproce. Dacă gradul ecuației reciproce este *impar,* atunci ea admite soluția $x = -1$, iar rezolvarea acestei ecuații se reduce la rezolvarea ecuației $x + 1 = 0$ (cu soluția $x = -1$) și a unei ecuații reciproce de grad par.

Rezolvarea ecuației reciproce de grad patru se face împărțind ecuația prin x^2 când obținem (se poate împărți prin x^2, deoarece $x = 0$ nu este soluție a ecuației):

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0, \qquad (1).$$

Acum se notează $x + \frac{1}{x} = y$ când $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ și (1) se scrie în funcție de y: $ay^2 + by + c - 2a =$ cu soluțiile y_1, y_2. Revenim la substituție și rezolvăm ecuațiile $x + \frac{1}{x} = y_1,\ x + \frac{1}{x} = y_2$. Toate soluțiile acestor ecuații sunt soluțiile ecuației date.

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve ecuațiile reciproce :

a) $\mathbf{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0}$ **; b)** $\mathbf{2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 7x + 2 = 0}$**; c)** $\mathbf{2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 0}$**.**

R. a) Să observăm că este o ecuație reciprocă de grad impar.

Rezolvarea ei se reduce la rezolvarea ecuației $x + 1 = 0$ (când $x = -1$) și a unei ecuații (reciproce) de gradul al doilea. Pentru a găsi coeficienții acestei ecuații utilizăm schema lui Horner (coeficienții din ultima linie cu roșu sunt coeficienții căutați).

	x^3	x^2	x	x^0
	2	3	3	2
–1	2	1	2	0

Din schemă, rezultă ecuația $2x^2 + x + 2 = 0$ cu rădăcinile $\frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{4}$.

Ecuația dată are soluțiile: $-1, \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{4}$.

b) Este o ecuație reciprocă de gradul patru. Tehnica de rezolvare a acesteia este de a împărți ecuația prin x^2, când avem:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0, \qquad (*).$$

Notăm $x+\dfrac{1}{x}=y$, iar de aici prin ridicare la pătrat $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$.

Ecuația (*) devine $2y^2+y=0$ cu soluțiile: $y_1=0,\ y_2=-\dfrac{7}{2}$.

Revenim la substituție şi avem ecuațiile $x+\dfrac{1}{x}=0,\ x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{7}{2}$ cu soluțiile $x_{1,2}=\pm i$ şi respectiv $\dfrac{-7\pm\sqrt{41}}{4}$. *Ecuația dată are soluțiile*: $\pm i,\ \dfrac{-7\pm\sqrt{41}}{4}$.

c) Ecuația propusă, este reciprocă de grad impar. Prin urmare rezolvarea ei se reduce la rezolvarea ecuației $x+1=0$ şi a unei ecuații reciproce de grad patru, ai cărei coeficienți se determină din schema lui Horner cerând că $x=-1$ să fie rădăcină a ecuației date.

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0
	2	3	2	2	3	2
– 1	2	1	1	1	2	0

Coeficienții din ultima linie a schemei (cu roşu) sunt coeficienții ecuației reciproce de gradul patru. Deci avem de rezolvat ecuația: $2x^4+x^3+x^2+x+2=0$.

Prin împărțire cu x^2 găsim $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1=0$, (*).

Punem $x+\dfrac{1}{x}=y$, iar de aici $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$.

Cu acestea ecuația (*) devine $2y^2+y-3=0$ cu soluțiile $y_1=1, y_2=-\dfrac{3}{2}$.

Ecuațiile $x+\dfrac{1}{x}=1,\ x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{3}{2}$ au soluțiile $x_{1,2}=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ şi respectiv $x_{3,4}=\dfrac{-3\pm i\sqrt{7}}{4}$.

Ecuația dată are soluțiile: $-1,\ \dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-3\pm i\sqrt{7}}{4}$.

2. Să se rezolve ecuația $x^4-x^3-10x^2+2x+4=0$.

R. Fără a fi o ecuație reciprocă de gradul patru, utilizează pentru rezolvare o tehnică asemănătoare. Se împarte ecuația prin x^2 şi se scrie sub forma $x^2+\dfrac{4}{x^2}-\left(x-\dfrac{2}{x}\right)-10=0$. Se notează $x-\dfrac{2}{x}=y$ etc.

Ecuația dată are soluțiile: $\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2},\ -1\pm\sqrt{3}$.

3) Ecuații în probleme practice

1 (Numărul de exemplare de ziar şi ecuațiile). Valoarea V (în mii €) a unui ziar vândut în anul n este dată de formula $V(n)=n^3-6n^2+11n+4$. Deteminați anii în care valoarea vânzărilor a fost de 10 mii €.

R. Punând condiția $V(n)=10$ se ajunge la rezolvarea ecuației de gradul trei $n^3-6n^2+11n-6=0$. Soluțiile ei sunt $n_1=1, n_2=2, n_3=3$.

2 (Parapetul de protecție şi ecuațiile) O furgonetă loveşte parapetul de protecție de pe partea de deplasare determinând deformarea d (în cm) dată de formula: $d(t)=15t\left(t^3-6t-9\right)$, t fiind timpul exprimat în secunde. După câte secunde de la impact parapetul va reveni la poziția inițială?

R. Se impune condiția $d=0$, care conduce la rezolvarea ecuației $t^3-6t-9=0$. Se obține soluția (nebanală, $t>0$) $t=3$. Deci, după $t=3s$, deformarea este zero.

3 (Încălzirea planetei şi ecuațiile). O planetă a Soarelui se încălzeşte. Temperatura T (în ^{0}C) a planetei după n milioane de ani este dată de formula $T(n)=10n^3-100n^2+270n-180$. După câți ani se va topi gheața de pe planetă? După câți ani va începe o nouă eră glaciară?

R. $T(n)=0 \Rightarrow n=1$ milion de ani; $T(3)=0 \Rightarrow$ după 2 milioane de ani.

4 (Topirea ghețarului şi ecuațiile). Volumul unui ghețar tractat din Antartica spre Africa are volumul V după n zile, dat de formula $V=\frac{500\pi}{3}\left(2000-100n+20n^2-n^3\right)$.

După câte zile se va topi complet ghețarul?

R. $V=0$ dacă $n=20$.

5 (Piscina şi ecuațiile). O curte dreptunghiulară de 150 m lungime şi 80 m lățime are în interior o piscină dreptunghiulară, având laturile paralele cu ale curții şi situată la distanța x de margini. Aria piscinei este egală cu aria porțiunii rămase din curte. Determinați valoarea lui x.

R. $(150-2x)(80-2x)=600 \Rightarrow x=\frac{35}{2}$.

6. O cutie are forma unui paralelipiped dreptunghic cu laturile $x, x+1, x+2$ (exprimate în m). Să se determine x astfel încât volumul cutiei să fie egal cu 24 m^3.

R. Volumul cutiei are expresia $V(x)=x(x+1)(x+2)$. Egalitatea $V(x)=24$ conduce la ecuația $x(x+1)(x+2)=24 \Leftrightarrow x^3+3x^2+2x-24=0$ cu unica soluție reală $x=2$ m. Deci cutia are dimensiunile: 2 m, 3 m, 4 m.

7. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x^3+4x^2-x-1$. Să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției cu axa Ox.

R. Punctele graficului situate pe axa Ox au coordonaele $\left(x,\ f(x)=0\right)$. Ecuația $f(x)=0$ are soluțiile $x_1=-1,\ x_2=-\dfrac{1}{2},\ x_3=\dfrac{1}{2}$. Deci punctele căutate sunt: $(-1,0)$, $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$, $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

8. Să se rezolve inecuația $x^3+2\le x(2x+1)$.

R. Se aduce inecuația la forma $x^3-2x^2-x+2\le 0$ și se consideră funcția continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-2x^2-x+2$. O astfel de funcție păstrează semn constant pe un interval pe care nu se anulează. Vom determina valorile în care funcția se anulează, rezolvând ecuația $f(x)=0$. Găsim soluțiile $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=2$.

Tabelul de semn al funcției este:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-$ $-$	$-$ $-$ $-$	0	$+$ $+$ $+$ $+$	0	$-$ $-$ $-$	0	$+$ $+$ $+$	$+$ $+$

De aici $f(x)\le 0$ dacă $x\in(-\infty,-1]\cup[1,2]$.

REZUMATUL CAPITOLULUI

Definiții. Proprietăți	Explicitare. Notații	Exemple
1) Inel **Tripletul $(A,+\cdot)$ este inel unitar dacă:** **A$_1$) $(A,+)$ este grup comutativ;** **A$_2$) $(A,\cdot)$ este monoid;** **A$_3$) $\cdot$ este distributivă în raport cu $+$** **Dacă în plus $\cdot$ este comutativă, atunci inelul este comutativ**	**A$_1$)** $\begin{cases} \text{G}_1)\ + \text{ este asociativă} \\ \text{G}_2)\ + \text{ este comutativă} \\ \text{G}_3)\ + \text{ admite element neutru} \\ \text{G}_4) \text{ orice element din } A \text{ are un opus față de } + \end{cases}$ **A$_2$)** $\begin{cases} \text{M}_1)\ \cdot \text{ este asociativă} \\ \text{M}_2)\ \cdot \text{ admite element neutru} \end{cases}$ **A$_3$) (D)** $\begin{cases} x(y+z)=xy+xz \\ (x+y)z=xz+yz, (\forall)x,y,z\in A \end{cases}$ **M$_3$) $\cdot$ este comutativă** $xy=yx, (\forall)x,y\in A$	**1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ = inelul numerelor întregi** **2) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),+,\cdot)$ = inelul matricelor pătratice de ordin n, $n\geq 2$, cu elemente din $\mathbb{C}$.** **3) $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$) inelul claselor de resturi modulo n, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.** **4) $(\mathbb{Z}[i],+,\cdot)$, $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ este inelul întregilor lui Gauss.**
Inelul integru (fără divizori ai lui zero)	$\left.\begin{matrix} xy=0 \\ x\neq 0 \end{matrix}\right] \Rightarrow y=0$	**1) $(\mathbb{Z},+,\cdot),(\mathbb{Z}[i],+,\cdot)$ sunt inele integre** **2) $(A,+,\cdot)$ unde $A=\{f:\{0,1\}\to\mathbb{R}\}$, este inel cu divizori ai lui zero. Într-adevăr, fie $f(0)=0, f(1)=1, f\neq 0$, $g(0)=1, g(1)=0, g\neq 0$. Atunci $fg=0$ $\big((fg)(0)=f(0)g(0)=0$ $(fg)(1)=f(1)g(1)=0\big)$; $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$**
2) Corp **Tripletul $(K,+,\cdot)$ este corp dacă:** **K$_1$) $(K,+,\cdot)$ este inel unitar** **K$_2$) Orice element nenul din K este inversabil** **Dacă în plus $\cdot$ este comutativă, atunci copul este comutativ**	**K$_1$) K$_2$)** $\begin{cases} (K,+) \text{ este grup abelian} \\ (K-\{0\},\cdot) \text{ este grup} \\ D)\ \cdot \text{este distributivă în raport cu } + \end{cases}$	**1) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ = corpul numerelor raționale** **2) $(\mathbb{R},+,\cdot)$ = corpul numerelor reale** **3) $(\mathbb{C},+,\cdot)$ = corpul numerelor complexe** **4) $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$, p prim, este corpul claselor de resturi modulo p** **5) $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}),+,\cdot), d \nmid p^2, p\in\mathbb{Z}, p\neq 1$** **$\mathbb{Q}(\sqrt{d})=\{a+b\sqrt{d} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ corp pătratic**
3) Morfisme de inele (corpuri) **$(A,+,\cdot),(A',\oplus,\odot)$ inele (corpuri)** **$f:A\to A'$ este morfism de inele (corpuri) dacă:**	**1) $f(x+y)=f(x)\oplus f(y)$** **2) $f(x\cdot y)=f(x)\odot f(y), (\forall)x,y\in A$**	$\left(A=\{x+y\sqrt{2} \mid x,y\in\mathbb{Z}\},+,\cdot\right)$, $\left(A'=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} \middle\vert\, x,y\in\mathbb{Z}\right\},+,\cdot\right)$ $f:A\to A'$, $f(x+y\sqrt{2})=\begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}$ **este morfism deoarece:** **1) $f(z_1+z_2)=f(z_1)+f(z_2), z_1,z_2\in A$** $z_1=x_1+y_1\sqrt{2}, z_2=x_2+y_2\sqrt{2}\Rightarrow$
4) Izomorfism de inele (corpuri) **$f:A\to A'$ este izomorfism de inele**	**1)** $\begin{cases} f(x+y)=f(x)\oplus f(y) \\ f(x\cdot y)=f(x)\odot f(y), (\forall)x,y\in A \end{cases}$	

Definiții. Proprietăți	Explicitare. Notații	Exemple
(corpuri) dacă: 1) f este morfism; 2) f este bijecție	2) $\begin{cases} f \text{ este injectivă} \\ f \text{ este surjectivă} \end{cases}$	$\Rightarrow z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)\sqrt{2} \Rightarrow$ $f(z_1 + z_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ 2(y_1 + y_2) & x_1 + x_2 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 2y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 2y_2 & x_2 \end{pmatrix} = f(z_1) + f(z_2)$ 2) $f(z_1 z_2) = f(z_1) f(z_2), z_1, z_2 \in A$. $f(z_1 z_2) = f(x_1 x_2 + 2y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\sqrt{2}) =$ $= \begin{pmatrix} x_1 x_2 + 2y_1 y_2 & x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ 2(x_1 y_2 + x_2 y_1) & x_1 x_2 + 2y_1 y_2 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 2y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 2y_2 & x_2 \end{pmatrix} = f(z_1) f(z_2)$.
5) Forma algebrică a unui polinom de nedeterminată X peste corpul K, $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p\}$, p prim	$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n =$ $= \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^n$ (ordonată după puterile crescătoare ale lui X) $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ (ordonat după puterile descrescătoare ale lui X) $K[X]$ = mulțimea polinoamelor de nedeterminată X cu coeficienți în K. $f = a_0 \in K$, sunt polinoame constante.	$f = \frac{1}{2} - 3X^2 + \frac{5}{3} X^3 \in \mathbb{Q}[X]$ $f = \sqrt{3} X^4 - \frac{2}{3} X^2 + X - \frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}[X]$ $f = \sqrt{3} \in \mathbb{R}[X]$, $f = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 0 \in \mathbb{Z}[X]$
6) Gradul unui polinom	$\text{grad}(f) = \begin{cases} n, a_n \neq 0, a_i = 0, i \geq n \\ -\infty, f = 0 \end{cases}$ $\text{grad}(f + g) \leq \max\{\text{grad}(f), \text{grad}(g)\}$ $\text{grad}(fg) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$	$f = 2X + X^3 - 3X^4$, $\text{grad}(f) = 4$; $f = 5$, $\text{grad}(f) = 0$; $f = 0$, $\text{grad}(f) = -\infty$.
7) Valoarea unui polinom într-un punct	$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n$, $\alpha \in K \Rightarrow f(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha + ... + a_n \alpha^n$. 1) $(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$ 2) $(fg)(\alpha) = f(\alpha) g(\alpha)$, $(\forall) f, g \in K[X]$, $\alpha \in K$.	$f = 1 + X + X^2 + X^3$, $\alpha = i \in \mathbb{C} \Rightarrow$ $f(i) = 1 + i + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0$
8) Funcția polinomială asociată polinomului $f = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$	$f : K \to K$, $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, $x =$ variabila	1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ este funcție de gradul întâi. 2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, este funcția de gradul al doilea.

Definiții. Proprietăți	Explicitare. Notații	Exemple
9) Teorema împărțirii cu rest în $K[X]$ pentru două polinoame *f*, *g*	$f,g\in K[X],\ g\neq 0 \Rightarrow (\exists!)q,r\in K[X]$ astfel încât $f=gq+r$, $\text{grad}(r)<\text{grad}(g)$ *f* = deîmpărțitul, *g* = împărțitorul, *q* = câtul, *r* = restul Dacă $r=0$, atunci *g* divide pe *f* ($g\mid f$) sau ($f\,\vdots\, g$ (*f* se divide prin *g*)	1) $f=X^4+3X^2+2X-5$, $g=X^2-3X$, $f,g\in\mathbb{R}[X]$ $X^4+\quad 3X^2+2X-5 \mid X^2-3X$ $\underline{-X^4+3X^3} \quad\quad \mid X^2+3X+12=q$ $/ \quad 3X^3+3X^2$ $\quad \underline{-3X^3+9X^2}$ $\quad / \quad 12X^2+2X$ $\quad\quad \underline{-12X^2+36X}$ $\quad\quad\quad 38X-5=r$ $X^4+3X^2+2X-5=\left(X^2-3X\right)\cdot$ $\cdot\left(X^2+3X+12\right)+38X-5$. 2) $f=X^3+\hat{2}X+\hat{1},\ g=X^2+\hat{1}$, $f,g\in\mathbb{Z}_3[X]$ $X^3+\quad \hat{2}X+\hat{1} \mid X^2+\hat{1}$ $\underline{2X^2+\hat{2}} \quad\quad \mid X=q$ $/ \quad \hat{2}X=r$ $X^3+\hat{2}X+\hat{1}=\left(X^2+\hat{1}\right)X+\hat{2}X$
Teorema restului Împărțirea prin $X-a$	Restul împărțirii polinomului $f\neq 0$ prin $X-a$ este egal cu $f(a)$	
$x=a$ este rădăcină a unui polinom *f* dacă	$f(a)=0$	1) $f=X^2-2\in\mathbb{R}[X],\ x=\sqrt{2}$ este rădăcină a lui *f* deoarece $f(\sqrt{2})=2-2=0$ 2) $f=X^2+1\in\mathbb{C}[X]$, $x=i$ este rădăcină a lui *f* deoarece $f(i)=i^2+1=-1+1=0$
Teorema factorului (Bézout) *f* se divide prin $X-a$	$\Leftrightarrow f(a)=0 \Leftrightarrow f=(X-a)g$, $f,g\in K[X]$	1) $f=X^3-1,\ f(1)=0\Rightarrow$ $\Rightarrow f=(X-1)\left(X^2+X+1\right)$ 2) $f=X^4-16,\ f(2)=0\Rightarrow$ $\Rightarrow f=(X-2)\left(X^3+2X^2+4X+8\right)$
$x=a$ este rădăcină de ordin *p*, $p\in\mathbb{N}^*$, pentru polinomul *f*	$\Leftrightarrow\begin{cases} f(a)=0 \\ f'(a)=f''(a)=...=f^{(p-1)}(a)=0 \\ f^{(p)}(a)\neq 0\end{cases}$ $\Leftrightarrow f\,\vdots\,(X-a)^p$ și $f\,\not\vdots\,(X-a)^{p+1}$	$x=1$ este rădăcină de ordin 2 pentru polinomul $f=X^3-3X+2$ deoarece $f(1)=0,\ f'(1)=0,\ f''(1)\neq 0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f=(X-1)^2(X+2)$.

Probleme propuse

1. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât polinomul *f* să fie egal cu polinomul *g* în cazurile:

1) $f = 2X^3 - X^2 + 3X + 6,\ g = a + b(X-1) + c(X-1)^2 + d(X-1)^3$;

2) $f = X^3 + (a-2b)X^2 + (b+3c)X + a + b + 2c,\ g = (X-1)^2(X+3)$;

2. Să se calculeze $f + g$ și $f \cdot g$ în cazurile:

1) $f = 3X^2 - 5X + 6,\ g = -3X^2 + 2X - 3,\ f, g \in \mathbb{Z}[X]$;

2) $f = \frac{1}{2}X + \sqrt{3},\ g = 2X^2 + \sqrt{3}X,\ f, g \in \mathbb{R}[X]$;

3) $f = (1+i)X^2 - 2iX + 3 - i,\ g = iX + 1 - i,\ f, g \in \mathbb{C}[X]$;

4) $f = \hat{2}X + 3,\ g = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1},\ f, g \in \mathbb{Z}_4[X]$;

5) $f = 3X^2 + \hat{2}X + \hat{1},\ g = \hat{2}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{4},\ f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$.

3. În raport cu parametrul *m* discutați gradul următoarelor polinoame:

1) $f = \left(m^2 - 3m + 2\right)X^3 + \left(m^2 - 4m + 3\right)X^2 + \left(m^2 - 1\right)X + 6$;

2) $f = \left(m^2 + 1\right)X^4 + \left(m^4 - 1\right)X^2 + iX$;

3) $f = \left(\hat{2}m^2 + \hat{5}m + \hat{3}\right)X^3 + \left(m + \hat{5}\right)X^2 + \left(\hat{2}m + \hat{3}\right)X + \hat{3} \in \mathbb{Z}_7[X], m \in \mathbb{Z}_7$.

4. Fie $f, g \in \mathbb{Q}[X],\ f = \left(m^3 - 2\right)X^3 + mX + 5,\ g = \left(m^6 - 1\right)X^4 + (m-1)X^3 + 2mX^2 + 1$. Pentru ce valori ale lui *m* polinoamele au același grad?

5. Fie $f, g, h \in \mathbb{C}[X],\ f = X^4 - iX^2 - 1,\ g = X^4 + iX^2 - 1,\ h = f \cdot g$. Să se calculeze $h(1+i) - h(1-i)$.

6. Să se calculeze:

a) $(X-1)(X+1)\left(X^2+1\right)\left(X^4+1\right)\ldots\left(X^{2^n}+1\right)$;

b) $\left(X^2 + X + 1\right)\left(X^2 - X + 1\right)\left(X^4 - X^2 + 1\right)\ldots\left(X^{2^{n+1}} - X^{2^n} + 1\right)$.

7. Fie polinoamele: $f = 10X^{10} + 9X^9 + 8X^8 + \ldots + 2X^2 + X,\ g = 100X^{100} + 99X^{99} + 98X^{98} + \ldots + 2X^2 + X$.

a) Calculați $f(1), f(-1), g(1), g(-1)$.

b) Aflați coeficientul lui X^{110} și coeficientul lui X^{109} din $f \cdot g$.

8. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(1) = 0$, unde $f = X^3 + mX^2 + 2X + m - 1$.

9. Fie $f \in \mathbb{C}[X],\ f = X^4 + aX^3 + bX^2 + 3X + 1$. Să se determine a, b dacă $f(i) = f(-i) = 0$.

10. Să se determine două polinoame de gradul întâi $f, g \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât:

$$\left(X^2 - 2X + 1\right)f + \left(X^2 + X - 1\right)g = 1.$$

11. Să se determine polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ de gradul al doilea astfel încât pe rând: 1) $f(-1)=1$, $f(0)=-4$, $f(2)=-2$; 2) $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$; 3) $f(1)=f(2)=2$, $f(3)=-2$.

12. Pentru ce valori reale ale parametrilor p şi q polinomul $X^4+4X^3-2X^2+pX+q$ este un pătrat perfect.

13. Să se determine constantele a, b, c astfel încât polinomul $f=a\left(X^3+2X\right)+b\left(X^3+4X-1\right)+$
$+c\left(X^3+2X^2+2\right)$ să fie un cub perfect.

14. Să se determine polinoamele $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât să avem: $f(x+1)-f(x)=(3x+1)^2, (\forall)x \in \mathbb{R}$.

15. Să se determine polinoamele:

1) de gradul al doilea $f \in \mathbb{R}[X]$ pentru care pe rând:

a) $f\left(x^3\right)=\left(f(x)\right)^3, (\forall)x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x)f(-x)=f\left(x^2\right), (\forall)x \in \mathbb{R}$.

2) de gradul al treilea $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f(x)f(-x)=f\left(x^2\right)$.

16. Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$, grad$(f)=n$, atunci funcţia polinomială $g(x)=f(x+2)-2f(x+1)+f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ este o funcţie polinomială de gradul $(n-2)$.

Găsiţi mulţimea polinoamelor *f* pentru care $g(x)=x^2+x+1, (\forall)x \in \mathbb{R}$.

17. Să se determine $f \in \mathbb{R}[X]$, grad$(f)=3$ astfel încât $f(1)+f(2)+...+f(n)=n^4, (\forall)n \in \mathbb{N}$.

18. Demonstraţi egalităţile de polinoame $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$:

a) $\left(X+2X^2+3X^3+...+nX^n\right)(X-1)^2=nX^{n+2}-(n+1)X^{n+1}+X$;

b) $1+\frac{X}{1!}+\frac{1}{2!}X(X+1)+...+\frac{1}{n!}X(X+1)...(X+n-1)=\frac{1}{n!}(X+1)...(X+n)$.

19. În inelul $\mathbb{Z}_4[X]$ să se determine $f=aX^2+bX+c$ astfel încât $\left(\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{3}\right)f=\hat{1}$.

20. Să se arate că dacă $f \in \mathbb{R}[X]$, grad$(f)=n$, atunci există numerele reale $a_0, a_1, ..., a_n$ unic determinate astfel încât $f=a_0+a_1X+a_2X(X-1)+...+a_nX(X-1)....(X-n+1)$.

21. Fie $f \in \mathbb{Z}_4[X], f=X^3+\hat{2}X^2+X+\hat{1}$. Să se determine toate polinoamele $g=aX^3+bX^2+cX+d \in \mathbb{Z}_4[X]$ cu proprietatea că $\overline{f}=\overline{g}$ (unde $\overline{f}:\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ este funcţia polinomială asociată lui *f*).

22. Se consideră funcţia $f:\mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ definită prin $f(\hat{0})=\hat{2}$, $f(\hat{1})=\hat{0}$, $f(\hat{2})=\hat{3}$, $f(\hat{3})=\hat{4}$, $f(\hat{4})=\hat{1}$. Să se arate că *f* este o funcţie polinomială.

23. a) Să se arate că dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, grad$(f)\geq 1$, atunci funcţia polinomială $\overline{f}:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este surjectivă.

b) Care sunt polinoamele $f \in \mathbb{R}[X]$ de grad impar pentru care funcţia $\overline{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este surjectivă ?

c)* Există $f \in \mathbb{C}[X]$ de grad$(f)=n$ astfel încât funcţia $\overline{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ să fie injectivă ?

24. **Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului *f* la polinomul *g* în cazurile:**

1) $f = 3X^3 - 2X^2 + 5X + 5, \quad g = X - 1, \quad f, g \in \mathbb{Z}[X]$;

2) $f = 2X^5 - X^4 + 6X^3 + 5X^2 - 3, \qquad g = X + 1, \quad f, g \in \mathbb{Z}[X]$;

3) $f = 3X^2 - 2X + 3, \quad g = 2X - 1, \quad f, g \in \mathbb{Q}[X]$;

4) $f = iX^3 + (1 - i)X^2 + 3X - i, \quad g = X^2 - (i + 1)X + 3, \quad f, g \in \mathbb{C}[X]$;

5) $f = \hat{3}X^5 + \hat{2}X^3 + X^2 + \hat{1}, \ g = X + \hat{1}, \ f, g \in \mathbb{Z}_4[X]$;

6) $f = \hat{2}X^4 + \hat{3}X^2 + \hat{4}X + \hat{3}, \ g = \hat{3}X + \hat{2}, \ f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$;

7) $f = X^4 + X^2 + X + \hat{1}, \ g = X^2 + \hat{1}, \ f, g \in \mathbb{Z}_4[X]$;

8) $f = \hat{6}X^4 + \hat{2}X^3 + \hat{5}X^2 + 4X + \hat{1}, \ g = \hat{5}X^2 + \hat{2}X + \hat{4}, \ f, g \in \mathbb{Z}_7[X]$;

9) $f = x^6 + \hat{4}X^4 + \hat{2}X^2 + \hat{3}, \ g = X^3 + \hat{5}X^2 + \hat{3}, \ f, g \in \mathbb{Z}_{11}[X]$.

25. **Să se determine parametrul *m* astfel încât polinomul *f* să se dividă prin polinomul *g* în cazurile următoare:**

1) $f = X^3 + (m + 1)X^2 - 2mX + 3m - 1, \ g = X - 1, \ f, g \in \mathbb{R}[X], m \in \mathbb{R}$;

2) $f = mX^4 + (2m - 1)X^3 - 3mX + m - 2, \ g = X + 2, \ f, g \in \mathbb{R}[X], m \in \mathbb{R}$.

3) $f = (m + 1)X^3 - (2m + i)X^2 + mX + m - i, \ g = X + i, \ f, g \in \mathbb{C}[X], m \in \mathbb{C}$;

4) $f = X^3 + mX^2 + X + 1, \ g = X + i, \ f, g \in \mathbb{C}[X]$;

5) $f = X^6 + 4X^2 + mX, \ g = iX + 2, \ f, g \in \mathbb{C}[X]$;

6) $f = X^4 + \hat{2}X^3 + mX^2 + m + \hat{1}, \ g = X + \hat{2}, \ f, g \in \mathbb{Z}_4[X], m \in \mathbb{Z}_4$;

7) $f = \hat{4}X^5 + (m + 1)X^4 + \hat{3}X^2 + \hat{3}, \ g = X + \hat{3}, \ f, g \in \mathbb{Z}_5[X], m \in \mathbb{Z}_5$.

26. **Să se determine parametrul *m* astfel încât polinomul *f* împărţit la polinomul *g* să dea restul *r* în cazurile:**

1) $f = 3X^3 - (2m + 1)X^2 + 5X - m, \ g = X - 2, \ r = 3$;

2) $f = 3X^4 + (2i - 1)X^3 + mX^2 + 2m + i, \ g = X + i, \ r = 1 - 3i$;

3) $f = \hat{5}X^3 + \left(m + \hat{1}\right)X^2 + \hat{3}m + 2, \ g = X + \hat{4}, \ r = \hat{2}, \ f, g \in \mathbb{Z}_7[X], m \in \mathbb{Z}_7$.

27. **Să se determine parametrii *m*, *n* astfel ca polinomul $f = 2X^3 - 3X^2 + mX + n$ împărţit cu $X - 1$ şi $X + 2$ să dea resturi egale respectiv cu 4 şi cu – 5.**

28. **Să se determine *m*, *n*, *p* astfel încât polinomul $f = X^5 + mX^2 + nX + p$ împărţit cu $X - 1$, $X + 1$ şi $X - 2$ dă resturile 1, – 1 şi respectiv 41.**

29. **Fără a efectua împărţirea să se determine restul împărţirii polinomului *f* la polinomul *g* în cazurile:**

1) $f = X^{100} - 3X^{99} + 5, \ g = (X - 1)(X + 1)$;

2) $f = X^{1000} + X + 1, \ g = (X + 1)(X + 2)$;

3) $f = X^5 + X^4 + X^3 - X - 1,\ \ g = (X-1)(X+1)(X-2)$;

4) $f = X^{200} + X^{101} + X,\ g = X\left(X^2 - 1\right)$.

30. **Un polinom împărțit prin $X-1$, $X-3$, $X+1$ dă resturile 2, 3 și respectiv 4. Să se afle restul împărțirii polinomului prin $(X-1)(X-3)(X+1)$.**

31. **Determinați valorile parametrilor m, n dacă polinomul f se divide cu polinomul g în cazurile:**

1) $f = X^6 + mX^5 + nX^2 + 4,\ g = X^2 - 1,\ f, g \in \mathbb{R}[X]$;

2) $f = X^4 + X^3 + mX^2 - m^2X + n,\ g = X^2 + X,\ f, g \in \mathbb{R}[X]$.

3) $f = X^4 + nX^3 + (n-2m)X^2 + 5X - 3m,\ g = X^2 + X + 2,\ f, g \in \mathbb{R}[X]$;

4) $f = mX^4 + nX^3 - 1,\ g = (X-1)^2,\ f, g \in \mathbb{R}[X]$;

5) $f = X^4 + 1,\ g = X^2 + mX + n,\ f, g \in \mathbb{R}[X]$;

6) $f = X^4 + X^3 + X^2 + mX + n,\ \ g = X^2 + X + \hat{4},\ f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$.

32. **Arătați că polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$ nu se poate descompune în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}$, în cazurile următoare:**

1) $f = X^4 + X + 1$; 2) $f = X^4 + +X^3 - X^2 - X + 2$.

33. **Descompuneți polinomul f în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ și respectiv $\mathbb{C}$ în cazurile:**

1) $f = X^3 - 8$; 2) $f = X^3 + 8$; 3) $f = X^4 - 16$;

4) $f = X^4 + 16$; 5) $f = X^4 - X^2 + 1$; 6) $f = X^6 - 27$.

34. **Arătați că polinomul $f = X^4 + X^2 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_5[X]$ este reductibil peste $\mathbb{Z}_5$, dar nu are nici o rădăcină în $\mathbb{Z}_5$.**

35. **Descompuneți în factori ireductibili polinoamele:**

1) $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{3} \in \mathbb{Z}_5[X]$; 2) $f = \hat{3}X^4 + 5X^3 + \hat{6}X^2 + \hat{4}X + \hat{4} \in \mathbb{Z}_7[X]$;

3) $f = X^3 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$; 4) $f = X^4 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$;

5) $f = X^3 + X^2 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$; 6) $f = X^4 + 1 \in K[X],\ K = \mathbb{R}, K = \mathbb{C},\ K = \mathbb{Z}_4$.

36. **Să se determine cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al polinoamelor f, g în cazurile următoare:**

1) $f = X^3 - 2X^2 - 5X + 6,\ \ g = X^4 + 4X^3 + 3X^2 - 4X - 4$;

2) $f = X^4 + 3X^3 + 2X^2 - 2,\ \ g = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$;

3) $f = 2X^4 + 5X^3 - 5X^2 - 5X + 3,\ \ g = X^4 - X^3 - 7X^2 + X + 6$;

4) $f = X^4 + 2X^3 - X,\ \ g = X^4 + 2X^3 + X^2 - 1$;

5) $f = X^3 + X + \hat{2},\ \ g = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{2},\ f, g \in \mathbb{Z}_4[X]$;

6) $f = X^4 + \hat{4}X^3 + \hat{2}X,\ \ g = X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{3}X,\ f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$.

37. **Să se arate că următoarele polinoame f, g sunt prime între ele:**

1) $f = 3X^3 - 2X^2 + X + 2,\ \ g = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$;

2) $f = X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X$, $g = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 6X^2 + 2X - 4$;

3) $f = X^3 + \hat{1}$, $g = X^4 + X^3 + X^2$, $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$.

38. **Să se determine α și β astfel ca polinoamele $f = 2X^3 - 7X^2 + \alpha X + 3$, $g = X^3 - 3X^2 + \beta X + 3$ să aibă un divizor comun de gradul doi.**

39. **Dacă d este cel mai mare divizor comun al polinoamelor f, g, atunci determinați o relație liniară de forma $d = \alpha f + \beta g$ în cazurile:**

1) $f = X^4 + 4X^3 - 7X + 2$, $g = X^3 + 3X^2 - 2$;

2) $f = X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 2$, $g = X^5 - 1$;

3) $f = 3X^5 + 6X^4 + 3X^3 - X^2 - 2X - 1$, $g = X^4 - 2X^2 + 1$.

40. **Să se arate că polinomul f se divide cu polinomul $g = X^2 + X + 1$ în cazurile următoare:**

1) $f = X\left(X^2 + 1\right)^{6n+1} + X^{3n+2}, n \in \mathbb{N}$; 2) $f = X^{6n-1} + X + 1, n \in \mathbb{N}^*$.

41. **Să se arate că polinomul f se divide cu polinomul $g = X^2 - X + 1$ în cazurile următoare:**

1) $f = (X - 1)^{n+3} + X^{2n+3}, n \in \mathbb{N}$; 2) $f = (X - 1)^{2n+1} + (-1)^{n+1} X^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

3) $f = (X - 1)^{n+2} - X^{2(n-1)}, n \in \mathbb{N}^*$.

42. **Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}^*$ polinomul f se divide cu polinomul $g = X^2 + X + 1$, în cazurile următoare:**

1) $f = (X + 1)^n + X^n + 1$; 2) $f = X^n + X^{n+1} + X^{n+2}$.

43. **Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$ polinomul f se divide cu polinomul $g = X^2 - X + 1$, în cazurile următoare:**

1) $f = (X - 1)^n + X^n + 1$; 2) $f = (X - 1)^{2n} + X^n + 1$.

44. **Arătați că polinomul $f = X^{4n+3} + X^{4n+2} + X + 1, n \in \mathbb{N}$ se divide cu polinomul $g = X^3 + X^2 + X + 1$.**

45. **Să se rezolve ecuațiile:**

1) $x^9 = 1$; 2) $x^9 = -1$; 3) $x^{10} = i$;

4) $x^6 = -i$; 5) $x^4 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$; 6) $x^8 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$;

7) $x^5 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$; 8) $(x + 1)^n - (x - 1)^n = 0$; 9) $(1 + ix)^n - (1 - ix)^n = 0$.

46. **Să se rezolve ecuațiile:**

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; 2) $x^{10} - 3x^5 - 4 = 0$; 3) $x^8 + 4x^4 + 3 = 0$;

4) $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$; 5) $x^{100} - (1 + i)x^{50} + i = 0$.

47. **Să se determine natura rădăcinilor ecuațiilor:**

1) $x^4 - (2m - 1)x^2 + m^2 - 1 = 0$; 2) $(m - 1)x^4 + 2(m - 1)x^2 + m = 0$; 3) $x^4 - x^2 + m + 1 = 0$.

48. **Să se rezolve ecuațiile reciproce:**

a) 1) $3x^3+2x^2+2x+3=0$ **; 2)** $x^3-5x^2-5x+1=0$ **;**

b) 1) $3x^4+2x^3-11x^2+2x+3=0$ **; 2)** $2x^4+x^3-2x^2+x+2=0$ **;**

c) 1) $2x^5+x^4+x^3+x^2+x+2=0$ **; 2)** $3x^3+x^4-3x^3-3x^2+x+3=0$ **.**

49. **Să se determine parametrul real** a **astfel încât ecuațiile de mai jos să aibă toate rădăcinile reale:**

1) $x^4+3x^3+ax^2+3x+1=0$ **; 2)** $x^4+3x^3-2ax^2+3x+1=0$ **;**

3) $3x^4-5x^3+ax^2-5x+3=0$ **.**

50. **Să se rezolve ecuațiile:**

I.

1) $5x^3+10x^2-3x-6=0$ **; 2)** $2x^3-13x^2+28x-20=0$ **.**

II.

1) $3x^3-11x^2-x+1=0$ **, dacă are rădăcina** $x_1=2+\sqrt{3}$ **;**

2) $x^3-3x^2-5x+7=0$ **, dacă are rădăcina** $x_1=1-2\sqrt{2}$ **;**

3) $x^4-2x^3-2x-1=0$ **, dacă are rădăcina** $x_1=1-\sqrt{2}$ **;**

4) $x^4-6x^3+8x^2-2x-1=0$ **, dacă are rădăcina** $x_1=2+\sqrt{5}$ **.**

III.

1) $x^5-3x^4-x^3+7x^2-2x-2=0$ **, dacă are rădăcinile** $x_1=-\sqrt{2},\ x_2=1+\sqrt{2}$ **.**

IV.

1) $x^3+x+10=0$ **, dacă are rădăcina** $x_1=1-2i$ **;**

2) $x^3-5x^2+7x+13=0$ **, dacă are rădăcina** $x_1=3+2i$ **.**

V.

1) $x^6-4x^5+10x^4-10x^3-x^2+14x-10=0$ **, dacă are rădăcinile** $x_1=1+i, x_2=1-2i$ **;**

2) $x^6-2x^5+x^4+2x^3-4x^2+4x-4=0$ **, dacă are rădăcinile** $x_1=i, x_2=1-i$ **.**

51. **a) Să se rezolve ecuațiile de mai jos dacă au cel puțin o rădăcină reală:**

1) $z^3+(2-i)z^2-(2i+15)z+15i=0$ **;** **2)** $z^3+(3-i)z^2-(1+4i)z-3i-3=0$ **.**

b) Să se rezolve ecuațiile următoare știind că admit cel puțin o rădăcină întreagă:

1) $x^3-(8-\sqrt{3})x^2+2(\sqrt{3}-3)x+108-48\sqrt{3}=0$ **; 2)** $x^3+(\sqrt{3}-3)x^2+(2-3\sqrt{3})x+2\sqrt{3}=0$ **.**

c) Să se rezolve ecuațiile de mai jos știind că admit rădăcini independente de m**:**

1) $x^3+(m+2)x^2+(m-5)x-6m-6=0$ **;**

2) $-2x^3+(m+13)x^2-(7m+14)x+12(m+1)=0$ **.**

d) Să se arate că ecuațiile de mai jos au ca rădăcini numerele înscrise în dreptul lor:

1) $x^3+3\sqrt[3]{2}x-2=0,\ x=\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$ **;**

2) $x^3-3x-4=0,\ x=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$ **;**

3) $x^3-9x-2\sqrt{31}=0,\ x=\sqrt[3]{\sqrt{31}+2}+\sqrt[3]{\sqrt{31}-2}$ **.**

e) Să se arate că următoarele numere sunt întregi:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ **; 2)** $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}$ **;**

3) $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ **.**

52. **Să se determine parametrii raționali m, n şi să se rezolve ecuațiile de mai jos dacă acestea au soluțiile indicate în dreptul fiecăreia:**

1) $x^3+(m+2)x^2-(n-1)x+1=0,\ x=1-\sqrt{2}$;

2) $x^3+(m+1)x^2+nx-1=0,\ x=1+\sqrt{2}$.

53. **Să se determine parametrii reali m, n şi să se rezolve ecuațiile dacă acestea au soluțiile indicate în dreptul fiecăreia:**

1) $x^4-2x^3+4x^2+2mx-n=0,\ x=1+i$;

2) $x^4-2mx^3+2(m+n)x^2+4x-20=0,\ x=1+3i$.

54. **Să se determine parametrii reali m, n astfel încât ecuațiile de mai jos să aibă *rădăcina dublă* indicată:**

1) $x^4-mx^3+2mx^2+(m+n)x-m+4=0,\ x=-1$;

2) $x^3+x^2+mx-n=0,\ x=-1$.

85. **Să se determine parametrii reali m, n, p astfel încât ecuațiile de mai jos să aibă *rădăcina triplă* indicată:**

1) $x^4+8x^3-(m+3)x^2+(n+p)x+p-3=0,\ x=1$;

2) $x^4+3x^3-mx^2+(n+2)x+p-1=0,\ x=-1$.

56. **Pentru fiecare din ecuațiile de mai jos să se calculeze sumele indicate (x_i fiind rădăcinile ecuației):**

1) $x^3+2x^2+3x+4=0$;

a) $\sum x_1^2$; b) $\sum x_1^3$; c) $\sum x_1^4$; d) $\sum x_1^5$; e) $\sum \frac{1}{x_1}$; f) $\sum \frac{1}{x_1^2}$; g) $\sum \frac{1}{x_1+1}$;

h) $\begin{vmatrix} x_{\sigma(1)} & x_{\sigma(2)} & x_{\sigma(3)} \\ x_{\sigma(2)} & x_{\sigma(3)} & x_{\sigma(1)} \\ x_{\sigma(3)} & x_{\sigma(1)} & x_{\sigma(2)} \end{vmatrix},\ \sigma\in S_3$.

2) $x^3-3x^2+2x-6=0$;

a) $\sum x_1^2$; b) $\sum x_1^3$; c) $\sum x_1^4$; d) $\sum \frac{1}{x_1}$; e) $\sum \frac{1}{x_1^2}$; f) $\sum \frac{1}{x_1+1}$.

57. **Să se determine parametrul real m şi să se rezolve ecuațiile ştiind că rădăcinile reale sunt în progresie aritmetică:**

1) $x^3-12x^2+mx-28=0$;

2) $x^3-mx^2-2mx+8=0$;

3) $x^3-3mx^2+(2m-1)x+5m=0$;

4) $x^4+(m-5)x^3-2mx^2+2m-1=0$;

5) $x^4-(m+4)x^3+5(m+1)x^2-(8m+2)x+4m=0$.

58. **Să se determine parametrii reali m, n pentru care rădăcinile ecuațiilor de mai jos sunt în progresie aritmetică:**

1) $x^4-8x^3+(2m-n)x^2+(m-3n)x+41=0$;

2) $x^4-4x^3+(m-2n)x^2+(m+3n)x+17=0$;

3) $x^4-4x^3+(m+n)x^2+(m-n)x+52=0$.

59. **Să se determine parametrul real m dacă rădăcinile reale ale ecuațiilor de mai jos sunt în progresie geometrică:**

1) $x^3-(2m+5)x^2+(4m+3)x-27=0$; 2) $x^3+3mx^2+(5m-1)x+8=0$;

3) $x^3-31x^2+155x-m-5=0$.

60. **Să se determine parametrul real m şi să se rezolve ecuațiile de mai jos, dacă între rădăcini are loc relația indicată:**

I.

1) $2x^3+x^2-13x+m=0,\ x_1x_2=1$;

2) $x^3-mx^2-4x+2=0,\ x_1+x_2=0$;

3) $x^3-mx^2+2mx-1=0, \sum x_1^2=0$;

4) $x^3+mx^2+11x+m=0,\ x_1+x_2=x_3^2$;

5) $mx^3-(m+2)x^2+9x-1=0,\ \dfrac{2}{x_2}=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_3}$;

6) $x^3-(m+2)x^2+(2m+1)x-m=0,\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{3}{2x_3}$.

II.

1) $x^4+mx^3-3x^2-4x+4=0,\ \ x_1=x_2,\ x_3=x_4$;

2) $x^4-2x^3+mx^2+8x+12=0,\ \ x_1x_2=-4$;

3) $x^4-4x^3+mx^2+4x-3=0,\ \ x_1+x_2=x_3+x_4$;

4) $x^4-2x^3-23x^2-12x+m=0,\ \ x_1x_2=x_3x_4$;

5) $x^4-x^3-2x^2+mx+m+2=0,\ \ x_1+x_2=x_3x_4$.

61. **Să se determine parametrul real m dacă între rădăcinile ecuațiilor de mai jos există o relație indicată:**

I.

1) $x^3-(m+1)x^2+2x+m-2=0$;

1°) $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3>(x_1+x_2+x_3)^2$; 2°) $(x_1+x_2+x_3)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}\right)\geq 9$;

3°) $\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)<\dfrac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}$; 4°) $x_1^3+x_2^3+x_3^3\geq(m+1)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-3m+6$;

5°) $\dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_1x_2x_3}<2(x_1+x_2+x_3)$; 6°) $x_1^3+x_2^3+x_3^3\geq(x_1+x_2+x_3)^3$.

2) $x^3+mx^2+x+m-1=0$,

1°) $\left(\sum x_1\right)^2\leq\sum x_1^2$; 2°) $2m\left(\sum x_1\right)^2+\sum x_1^3\geq m^2-1$;

3°) $(m-1)\sum\dfrac{1}{x_1^2}>3\sum\dfrac{1}{x_1}$; 4°) $\sum\dfrac{1}{x_1+1}>\dfrac{1}{3}\sum x_1$;

5°) $\sum\dfrac{x_1+x_2}{x_3}\leq\prod x_1$; 6°) $\left(\sum x_1\right)\left(\sum x_1^2\right)\geq\sum x_1^3$.

II.

1) $x^4+(m+1)x^3-2mx+m+3=0$,

1°) $\left(\sum x_1\right)^2+\sum x_1^2 \geq x_1x_2x_3x_4\left(\sum x_1x_2x_3\right)$; 2°) $\left(\sum x_1\right)\left(\sum \frac{1}{x_1}\right)\geq \sum \frac{1}{x_1^2}$;

3°) $-m\left(\sum x_1^2\right)<\sum x_1^3$; 4°) $\left(\sum x_1\right)^3 \leq \sum x_1^3$; 5°) $\left(\sum x_1\right)\left(\sum \frac{1}{x_1^2}\right)>\sum \frac{1}{x_1}$.

3) $x^4-(m+1)x^2+m=0$,

1°) $\left(\sum x_1x_2\right)^2>\sum x_1^2$; 2°) $\sum x_1^2+\sum x_1^3 \leq \sum \frac{1}{x_1^2}$; 3°) $\sum x_1^4 \geq \sum x_1^3$;

4°) $\sum x_1^4 \geq \sum x_1^6$; 5°) $\sum \frac{1}{x_1^3}<\sum \frac{1}{x_1^2}$.

62. **Să se formeze ecuațiile de gradul trei având rădăcinile:**

1) $-1; 1; 3$; 2) $-2; 0; 1$; 3) $-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1$; 4) $-5; 1; 5$; 5) $2; 4; 6$.

63. **Să se formeze ecuația de gradul patru de rădăcini:**

1) $0; -1; 1; 2$; 2) $-3; -1; 1; 3$; 3) $-2; -1; 2; 3$; 4) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; 1$; 5) $1; 1; 1; 2$.

64. **Utilizând ecuațiile de gradul trei să se rezolve sistemele simetrice de ecuații:**

1) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ xy+yz+zx=-1 \\ xyz=-2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x+y+z=9 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ xyz=27 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+yz+xz=-4 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$.

65. **Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației în x, $x^3+2x^2+3x-2=0$, atunci să se formeze ecuațiile în y de rădăcini y_1, y_2, y_2 pentru cazurile de mai jos:,**

1°) $y_1=x_2+x_3;\ y_2=x_1+x_3;\ y_3=x_1+x_2$; 2°) $y_1=\frac{x_1}{x_2+x_3};\ y_2=\frac{x_2}{x_1+x_3};\ y_3=\frac{x_3}{x_1+x_2}$;

3°) $y_1=\frac{1}{x_1};\ y_2=\frac{1}{x_2};\ y_3=\frac{1}{x_3}$; 4°) $y_1=\frac{1}{x_1^2};\ y_2=\frac{1}{x_2^2};\ y_3=\frac{1}{x_3^2}$;

5°) $y_1=\frac{x_2+x_3}{x_1+1};\ y_2=\frac{x_1+x_3}{x_2+1};\ y_3=\frac{x_1+x_2}{x_3+1}$; 6°) $y_1=x_1^2; y_2=x_2^2;\ y_3=x_3^2$.

66. **Să se determine parametrul real a pentru care ecuațiile de mai jos au o singură rădăcină reală comună:**

1) $x^2+ax-2=0;\ x^3+x^2-2x+a-1=0$;

2) $x^2+(a+1)x-2=0;\ 2x^3+ax^2-x-1=0$.

67. **Să se determine parametrul real a pentru care ecuațiile de mai jos au o singură rădăcină reală comună:**

1) $x^3-6x^2+11x+a=0;\ x^3+4x^2+x+a=0$;

2) $x^3+ax^2-x-1=0;\ x^3+ax-2=0$.

68. **Să se determine** $a, b \in \mathbb{Z}$ **ştiind că ecuaţiile** $x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$, $x^3 - x^2 + bx + a = 0$ **admit o rădăcină comună întreagă.**

69. **Să se determine parametrul real** a **pentru care ecuaţiile de mai jos să aibă două rădăcini comune:**

1) $x^3 - 4x^2 + x + a = 0$; $x^3 + x^2 - (a+1)x - 4 = 0$;

2) $x^3 + (a+7)x^2 + x - 6 = 0$; $x^3 - (a-2)x^2 + 2x - 5 + a = 0$;

3) $x^3 - x^2 - (a+10)x + 24 = 0$; $x^3 - ax^2 + x + 6 = 0$.

Teste de evaluare

TESTUL 1

VARIANTA A

1. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim legile de compoziție $x \perp y = x + y - 3$, $x \top y = xy - 3(x+y) + 12$, $(\forall) x, y \in \mathbb{Z}$. Arătați că $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este un inel integru și determinați elementele inversabile ale inelului.

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pe $\mathbb{R}$ definim legile de compoziție $x \perp y = ax + by - 2$, $x \top y = xy - 2(x+y) + c$, $(\forall) x, a \in \mathbb{R}$.

1) Să se determine a, b, c astfel încât $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ să fie corp;

2) Arătați că există un izomorfism de corpuri $f : (\mathbb{R}, +, \cdot) \to (\mathbb{R}, \perp, \top)$, $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. a) Să se determine $a \in \mathbb{Z}_3$ astfel încât polinomul: $P = \hat{2}X^3 + (a + \hat{2})X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ să fie ireductibil pe $\mathbb{Z}_3$.

b) Să se rezolve sistemul următor în $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} \hat{3}x + 2y = \hat{3} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{2}. \end{cases}$$

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ definită prin următoarele condiții: $f(\hat{0}) = \hat{2}$, $f(\hat{1}) = \hat{0}$, $f(\hat{2}) = \hat{3}$, $f(\hat{3}) = \hat{4}$, $f(\hat{4}) = \hat{1}$. Să se determine funcția polinomială.

5. Să se determine parametrul real a astfel încât ecuația $x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + 1 = 0$ să aibă toate rădăcinile reale.

6. a) Se consideră cilindrul circular drept cu raza bazei x și înălțimea h. Dacă aria totală este 300π cm^2, iar volumul este de 500π cm^3, să se determine x și h.

b) Să se rezolve ecuația $x^3 + 24 < x(x + 14)$.

VARIANTA B

1. Fie $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ împreună cu operațiile: $(f+g)(x) = f(x) + g(x), (fg)(x) = f(x)g(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. Să se arate cp $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ este inel comutativ cu divizori ai lui zero.

2. Să se arate că structurile de inel definite prin mulțimile $A = \left\{x + y\sqrt{2} \middle| x, y \in \mathbb{Z}\right\}$ și $B = \left\{x + y\sqrt{3} \middle| y, x \in \mathbb{Z}\right\}$ nu sunt izomorfe.

3. a) Să se arate că polinomul $f = X^4 + mX^3 + (2m^2 + 1) + nX + p$, $m, n, p \in \mathbb{R}$ are cel mult două rădăcini reale.

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât polinomul $f = (X^5 + 1)^{3n} + (X^4 + X)^n$ să se dividă la polinomul $g = X^3 - X^2 + 1$.

4. a) Să se arate că ecuația $(x+i)^n + (x-i)^n = 0$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ are toate rădăcinile reale.

b) Fie ecuația $x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 iar $f = X^6 + 5X^5 - 2X^4 + X^3 - 3X^2 + 1$. Să se calculeze:

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4).$$

5. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + \widehat{10}x + z = 4 \\ x + \hat{3}z = \hat{2} \\ \widehat{10}x + \hat{2}y + \hat{2}z = \hat{1} \end{cases}$

în $\mathbb{Z}_{11}$.

6. a) Volumul unui ghețar tractat din Antarctica spre Africa este de V după n zile dat de formula $V(n) = \frac{400\pi}{3}(30 + 29n + 29n^2 - n^3)$. După câte zile se va topi complet ghețarul?

b) Să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt{x-3}$.

TESTUL 2

VARIANTA A

1. Fie $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{1}\\ \hat{1} & \hat{0}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$. Să se arate că mulțimea $\mathcal{K}=\{O_2, I_2, A, A^2\}$ înzestrată cu operațiile de adunare şi înmulțire ale matricelor formează un corp.

2. Fie mulțimea $A=\{aX+b \mid a,b\in\mathbb{R}\}$. Pe $A\subset\mathbb{R}[X]$ considerăm operația de adunare obişnuită şi operația „$*$“ definită astfel: dacă $f,g\in A$, atunci $f*g$ este restul împărțirii lui $f\cdot g$ la X^2-1.

a) Să se arate că $(A,+,*)$ este inel comutativ cu divizori ai lui zero;

b) Este $\varphi:(A,+,*)\to(\mathbb{C},+,\cdot), \varphi(aX+b)=a+bi$ izomorfism de inele?

3. Să se descompună în factori ireductibili polinoamele:

a) $f=X^3+\hat{2}X^2+\hat{4}X+\hat{3}\in\mathbb{Z}_5[X]$;

b) $f=X^4+1\in\mathbb{Q}[X]$ (peste $\mathbb{Q}$).

4. a) Să consideră matricea:

$$A=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{1} & \hat{4}\\ \hat{3} & \hat{2} & \hat{1}\\ \hat{6} & \hat{4} & \hat{5}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_8).$$

Să se arate că A este inversabilă şi să se calculeze A^{-1}.

b) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_8$ sistemul:

$$\begin{cases}\hat{2}x+y+\hat{4}z=\hat{2}\\ \hat{3}x+\hat{2}y+z=\hat{4}\\ \hat{6}x+\hat{4}y+\hat{5}=\hat{1}\end{cases}.$$

5. Să se determine parametrul real m pentru care ecuațiile $x^3+mx^2-2x-8=0$, $x^3+mx-10=0$ au o singură rădăcină reală comună.

6. a) Să se rezolve ecuația

$$3\left(27^x+27^{-x}\right)-5\sqrt{2}\left(9^x+9^{-x}\right)=0.$$

b) Să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=6x^3-7x^2+1$ cu axa Ox.

VARIANTA B

1. Fie $a,b,c,m,n\in\mathbb{Z}$. Pe $\mathbb{Z}$ definim legile de compoziție $x*y=ax+by+c$,

$$x\circ y=xy+m(x+y)+n.$$

a) Să se determine a,b,c,m,n astfel încât $(\mathbb{Z},*,\circ)$ să fie inel.

b) Este inelul $(\mathbb{Z},*,\circ)$ corp?

c) Arătați că inelul $(\mathbb{Z},*,\circ)$ este domeniu de integritate izomorf cu $(\mathbb{Z},+,\cdot)$.

2. Să se determine parametrii $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^4+x^3+ax+b=0$ să admită o rădăcină triplă nenulă.

3. Se consideră ecuația $x^3-x+a=0$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1^6+x_2^6+x_3^6\geq x_1^5+x_2^5+x_3^5$.

4. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f=X^4+2X^3+mX^2+nX+p$.

a) Să se determine parametrii reali m,n,p astfel încât polinomul f împărțit la $X-1$ să dea restul -15, iar ecuația $f(x)=0$ să aibă o rădăcină $x_1=-1+i$;

b) Să se rezolve ecuația $f(x)=0$, pentru m,n,p determinați la a).

5. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc legile $x*y=ax+by-1$, $x\circ y=2(xy-x-y)+c$, $x,y\in\mathbb{R}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Să se determine parametrii a,b,c astfel încât $(\mathbb{R},*\circ)$ să fie corp comutativ izomorf cu $(\mathbb{R},+,\cdot)$, printr-un izomorfism de forma $f(x)=px+q$.

6. a) Să se rezolve inecuația: $A_x^5\leq 12A_x^3$, $x\in\mathbb{N}$;

b) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}2^x+y=5\\ y^2+4y+11=2^{6-x}.\end{cases}$$

TESTUL 3 (grilă)

VARIANTA A

1. Pe $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziție $x\perp y=ax+by-2, x\top y=xy-2(x+y)+6$ $a\neq 0,\ x,y\in\mathbb{R}$. Valorile lui a, b pentru care tripletul $(\mathbb{R},\perp,\top)$ este inel comutativ sunt:
a) $a=b=-1$; b) $a=b=1$; c) nu există.

2. Fie $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\left\{a+b\sqrt{2}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ și $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 2b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Q}\right\}$. Atunci funcția $f:(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+,\cdot)\to(\mathcal{M},+,\cdot),\ f(a+b\sqrt{2})=\begin{pmatrix}a & b\\ \alpha b & a\end{pmatrix}$ este izomorfism de corpuri pentru:
a) $\alpha=2$; b) $\alpha=\sqrt{2}$; c) $\alpha=3$

3. Fie $f=X^3+aX^2+bX+c\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile x_1,x_2,x_3. Atunci $S=\dfrac{x_1}{f'(x_1)}+\dfrac{x_2}{f'(x_2)}+\dfrac{x_3}{f'(x_3)}$ este egal cu:
a) 0; b) 1; c) – 1.

4. Polinomul $f=X^3-2\in\mathbb{Q}[X]$ este reductibil
a) peste $\mathbb{Z}$; b) peste $\mathbb{Q}$; c) peste $\mathbb{R}$.

5. Polinomul $f=X^4-4X^3+4X^2+aX+b$ se divide prin polinomul $g=X^2-4X+3$, dacă:
a) $a=b=3$; b) $a=b=-4$; c) $a=-4, b=3$.

6. Rădăcinile ecuației $x^3+3x^2-x+m=0$, $m\in\mathbb{R}$ sunt în progresie aritmetică dacă:
a) $m=3$; b) $m=-3$; c) $m=2$.

7. Fie sistemul de ecuații în $\mathbb{Z}_5$:
$$\begin{cases}x+y+z=\hat{1}\\ \hat{2}x+\hat{3}y+z=\hat{1}\\ \hat{4}x+\hat{4}y+\hat{3}z=\hat{1}\end{cases}$$
cu soluția (x_0,y_0,z_0). Dacă $\alpha=x_0^2+y_0^2+z_0^2$, atunci: a) $\alpha=\hat{4}$; b) $\alpha=\hat{3}$; c) $\alpha=\hat{2}$.

8. Ecuația $x^3-6x^2+ax-8=0, a\in\mathbb{R}$ are toate rădăcinile reale și pozitive dacă:
a) $a=12$; b) $a=10$; c) $a=-12$.

VARIANTA B

1. Mulțimea $\mathcal{M}=\left\{M_a=\begin{pmatrix}a & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\\ a & 0 & a\end{pmatrix}\middle| a\in\mathbb{C}\right\}$ cu adunarea și înmulțirea matricelor este:
a) inel cu divizori ai lui zero; b) corp; c) nici una din variante.

2. Pe $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziție $x\perp y=x+y-2$ și $x\top y=\dfrac{xy}{4}-\dfrac{1}{2}(x+y)+3$ $x,y\in\mathbb{R}$. Atunci $(\mathbb{R},\perp,\top)$ este corp izomorf $(\mathbb{R},+,\cdot)$ prin izmorfismul dat de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=x-\dfrac{1}{2}$; b) $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)$;
c) $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$.

3. Restul împărțirii polinomului: $f=1+X^2+X^4+...+X^{28}+X^{30}$ la polinomul $f=X^2-X$ este polinomul:
a) $r=15X+1$; b) $r=15X-1$; c) $r=15X$.

4. Polinomul $f=X^3+\hat{3}X^2+\hat{2}X+\hat{1}\in\mathbb{Z}_5[X]$ este:
a) ireductibil peste $\mathbb{Z}_5$; b) reductibil peste $\mathbb{Z}_5$.

5. Polinomul $f=X^4+aX^3+bX+c, a,b,c\in\mathbb{R}$ se divide prin polinomul $g=X^3-X$, dacă:
a) $a=0, b=1, c=-1$; b) nu există;
c) $a=-1, b=0, c=1$.

6. Fie ecuația $x^3+x+1=0$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$. Atunci $\Delta=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_3 & x_1 & x_2\\ x_2 & x_3 & x_1\end{vmatrix}$ este egal cu: a) 1; b) –1; c) 0.

7. Dacă a,b,c sunt zerourile funcției polinomiale $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-mx^2+nx-p, m,n,p\in\mathbb{R}$, iar $S=\dfrac{(b+c)bc}{f'(a)}+\dfrac{(c+a)ca}{f'(b)}+\dfrac{(a+b)ab}{f'(c)}$, atunci:
a) $S=m$; b) $S=m+n$; c) $S=m+n+p$.

9. Matricea $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \alpha\\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{1} & \alpha & \hat{2}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$ este inversabilă dacă:

a) $\alpha=\hat{1}$; b) $\alpha\in\{\hat{0},\hat{2}\}$; c) nu există α.

10. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel cu proprietatea $a^2=a,(\forall)a\in\mathbb{R}$. Atunci:

a) A este inel comutativ şi $a^2=a$;

b) A este inel necomutativ şi $a+a=0,(\forall)a\in A$;

c) A este inel comutativ şi $a+a=0,(\forall)a\in A$.

8. Sistemul de ecuaţii: $\begin{cases}ax+y+z=\hat{1}\\ \hat{2}x+\hat{3}y+az=a\\ x+ay+z=a^2\end{cases}$ cu coeficienţi în $\mathbb{Z}_7$ este compatibil nedeterminat dacă:

a) $a\in\{\hat{2},\hat{4}\}$; b) $a\in\{\hat{5},\hat{6}\}$; c) $a\in\{\hat{1},\hat{3}\}$.

9. Matricea $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \alpha\\ \alpha & \hat{1} & \hat{2}\\ \hat{4} & \hat{3} & \hat{1}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_6)$ este inversabilă dacă:

a) $\alpha=\hat{2}$; b) $\alpha=\hat{3}$; c) $\alpha=\hat{4}$.

10. Fie $(A,+,\cdot)$ inel în care $a^6=a,(\forall)a\in A$. Atunci:

a) $a^2=a,(\forall)a\in A$;

b) $a^2\neq a,(\forall)a\in A$;

c) $a+a\neq 0,(\forall)a\in A, a\neq 0$.

ELEMENTE
DE
ANALIZĂ
MATEMATICĂ

1. PRIMITIVE

În acest capitol se evidențiază că diferențierea și integrarea sunt procese inverse și în plus a determina o primitivă înseamnă a determina aria de sub o curbă. Se definesc conceptele de primitivă a unei funcții, definită pe un interval din $\mathbb{R}$, precum și cel de integrală nedefinită. Se dau condiții ca o funcție să admită primitive pe un interval și se prezintă metode de determinare a lor: metoda directă, metoda integrării prin părți și metoda substituției.

Istoric. G. W. Leibniz (1646-1716) a fost cel care a utilizat, în 29 octombrie 1645, semnul $\int$ pentru integrare, derivat din prima literă a cuvântului latin „summa" (sumă). În articolul lui despre calculul diferențial, apărut în 1684, apar scrise diferențialele așa cum le utilizăm și azi. Leibniz a introdus terminologia de „calcul diferențial" și „calcul integral", deoarece determinarea dreptelor tangente la curbe implică diferențele și determinarea ariilor implică sumele.

Istoric, ideea de calcul integral a fost dezvoltată cu mult înainte de cea legată de calculul diferențial. Dacă diferențierea a fost creată plecând de la problema tangentelor la curbe și de probleme de minim și maxim pentru funcții, integrarea s-a dezvoltat ca proces de sumare pentru calculul ariilor unor suprafețe sau calculul volumelor unor corpuri. Calculul diferențial studiază cât de repede se schimbă o funcție într-un punct, în timp ce calculul integral studiază ariile delimitate de curbe și este utilizat la calculul sumării continue (în opoziție cu sumarea discretă).

Arhimede (287-212 Î.C.) a avut ideea ingenioasă, în dorința de a calcula aria unei regiuni plane, de a impărți această regiune într-un număr mare de „benzi înguste" și de a însuma ariile acestor regiuni pentru a obține aria figurii date. Această idee a fost redescoperită în Europa în secolul al XVII-lea, când legătura inversă între determinarea ariei sub curbă și construirea tangentei la curbe a fost stabilită. Sir I. Newton (1642-1727) a fost primul matematician care a tratat integrarea ca proces „invers" al diferențierii.

„the method of tangents ... extends itself not only to the drawing of tangents to any curved lines ... but also to the resolving... of problems about areas, lengths, centres of gravity etc."

(Newton, Principia, 1687)

„Les élements de calcul différential que M. Euler publia il y a quelques années, faisoinent désirer depuis longtemps le calcul intégral qui devoit en être la suite..."

(Journal des Sçavans, 1769)

1.1. PRELIMINARII

Noțiunea de primitivă leagă între ele două concepte fundamentale ale Analizei matematice, derivata şi integrala.
Integrarea este considerată ca operație inversă (într-un anumit sens) **a derivării.**

Propunem în continuare câteva exemple de operații inverse pentru a ilustra unele caracteristici ale acestora.

Exemple.

1. Find date două numere reale oarecare a,b, atunci se poate calcula suma lor $s = a + b$.Invers, se pot determina perechile de numere $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ cu suma s cunoscută.
Există o infinitate de astfel de cupluri (sunt situate pe o dreaptă de ecuație $x + y = s$). Deci în acest caz problema are o infinitate de soluții.

2. Dat fiind numărul real b, atunci se poate calcula b^2 (pătratul lui b).
Invers, se poate găsi un număr real pozitiv r, al cărui pătrat să fie $c \geq 0$. Deci $r^2 = c$, iar de aici $r = \sqrt{c}$ (rădăcina pătrată a numărului pozitiv c). Aici dacă $c < 0$, nu există număr real r pentru care $r^2 = c$. Deci problema n-are soluție. Pentru $c \geq 0$. avem răspuns favorabil (numărul r este unic).

3. Fiind dată o dreaptă d în plan şi $A \notin d$, prin proiecția ortogonală a lui A pe d se înțelege punctul $A^* \in d$ astfel încât $AA^* \perp d$. Invers, se poate cerceta dacă există aplicația inversă celei descrise. Adică pentru $A^* \in d$, există un punct A din plan pentru care proiecția lui să fie A^*? Se constată că există o infinitate de puncte (toate punctele de pe dreapta d', care trece prin A^* şi $d' \perp d$).

1.2. DERIVATE

În orice curs de Analiză matematică capitolul **Primitive** urmează celui care se referă la **Derivate.** Este deci util să fie cunoscut acest din urmă capitol.
Vom reaminti principalele operații cu funcții derivabile.
Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, două funcții derivabile. Atunci:

1) $f+g$ este derivabilă şi $(f+g)' = f' + g'$

(Sumă de funcții derivabile este o funcție derivabilă)

---

2) αf este derivabilă şi $(\alpha f)' = \alpha f'$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(Înmulțirea unei funcții derivabile cu o constantă este o funcție derivabilă)

---

3) fg este derivabilă şi $(fg)' = f'g + fg'$

(Produs de funcții derivabile este o funcție derivabilă)

---

4) $\dfrac{f}{g}$ este o funcție derivabilă şi $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$, $g \neq 0$

(Cât de funcții derivabile este o funcție derivabilă în punctele $x, g(x) \neq 0$)

---

5) $f \circ g$ este o funcție derivabilă şi $(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$

(Compunere de funcții derivabile este o funcție derivabilă)

Exerciții rezolvate

Să se calculeze derivatele funcțiilor de mai jos:

1. $f(x) = (2x+1)^{10}, x \in \mathbb{R}$.

R. $f'(x) = 10(2x+1)^9 (2x+1)' = 10(2x+1)^9 \cdot 2 = 20(2x+1)^9$.

2. $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^5, x \neq -1$.

R. $f(x) = 5\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^4 \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)' = 5\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^4 \dfrac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} =$

$= 5\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^4 \dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = 10\dfrac{(x-1)^4}{(x+1)^6}$.

3. $f(x) = \sqrt{x^2-1}, x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$.

R. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(x^2-1\right)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

4. $f(x) = \ln\left(x^4+1\right), x \in \mathbb{R}$.

R. $f'(x)=\dfrac{\left(x^4+1\right)'}{x^4+1}=\dfrac{4x^3}{x^4+1}$.

5. $f(x)=\sin x^5,\ x\in\mathbb{R}$.

R. $f'(x)=\cos x^5\cdot\left(x^5\right)'=5x^4\cos x^5$.

Probleme propuse

1. Să se calculeze derivatele următoarelor funcții, indicând domeniul de definiție și de derivabilitate.

1) $f(x)=\left(3x^2+1\right)^4$; 2) $f(x)=x^2\left(3x^5+x^2+1\right)^3$; 3) $f(x)=\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^5$;

4) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$; 5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; 6) $f(x)=\ln\dfrac{x}{x^2+1}$; 7) $f(x)=e^{\frac{x}{x+1}}$;

8) $f(x)=2^{x^2}+e^{x^3}$; 9) $f(x)=\sin^3 x$; 10) $f(x)=\sin\sqrt{x}$; 11) $f(x)=\sin x^3\cdot\cos^2 x$;

12) $f(x)=\cos e^x$; 13) $f(x)=\mathrm{tg}(\sin x)$; 14) $f(x)=\left(\sin^3 x+\cos^2 x\right)\cdot\ln x$;

15) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$; 16) $f(x)=\arcsin\dfrac{1}{x^2}$; 17) $f(x)=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$.

2. Se consideră $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; funcții derivabile și

$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f(1)=1,\ f'(1)=0,\ f(2)=2,\ f'(2)=1,\ g(0)=1,\ g'(0)=2,$

$g(1)=1,\ g'(1)=0,\ g(2)=2,\ g'(2)=1,\ h(0)=2,\ h'(0)=1,\ h(1)=1,\ h'(1)=2,$

$h(2)=0,\ h'(2)=2.$ **Să se calculeze:**

1) $(f\circ g)'(0)$; 2) $(f\circ g)'(1)$; 3) $(f\circ g)'(2)$; 4) $(g\circ h)'(0)$; 5) $(g\circ h)'(1)$;

6) $(g\circ h)'(2)$; 7) $(f\circ g\circ h)'(0)$; 8) $(f\circ g\circ h)'(1)$; 9) $(f\circ g\circ h)'(2)$;

10) $(g\circ f\circ h)'(1)$; 11) $(h\circ f\circ g)'(1)$; 12) $(f\circ h\circ g)'(2)$.

1.3. PROBLEME CARE CONDUC LA NOȚIUNEA DE PRIMITIVĂ

Anul trecut la analiză matematică, la calcul diferențial problema centrală a fost de a determina f' dacă se cunoaște f funcție derivabilă (**operația directă**). În acest an la calcul integral problema fundamentală este de a determina funcția F derivabilă dacă se cunoaște derivata sa $F'=f$ (**operația inversă**). La operația directă pentru o funcție derivabilă f avem o unică funcție f'(derivata lui f). La operația inversă pentru o derivată dată f se obține o mulțime infinită de funcții F cu

$F' = f$ (orice funcție $F + c, c$ constantă, verifică egalitatea $(F + c)' = f$).

Trei probleme, două de geometrie şi alta de mecanică, au condus la noțiunea de primitivă

1) Problema inversă a tangentelor. **2) Exprimarea ariei printr-o integrală.** **3) Legea de mişcare a unui punct material.**

Le analizăm în continuare.

1) Problema inversă a tangentelor

Următoarea problemă de natură geometrică ne conduce la noțiunea de primitivă a unei funcții:

Să se determine funcțiile $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care panta tangentei la graficul lui G în punctul $M(x, G(x))$ este $g(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ştim din anul precedent că panta tangentei în M la graficul lui G este dată de formula $m_x = G'(x)$. Deci trebuie determinată funcția G care verifică egalitatea $G'(x) = x^2 = g(x)$. În cazul în care există *G,* ea se numeşte **o primitivă** a lui *g* pe $\mathbb{R}$.

Aici se constată uşor că $G(x) = \frac{x^3}{3}$ este una din funcțiile căutate.

De asemenea, $G_1(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ este soluție pentru $G'(x) = x^2$ şi mai general $G_c(x) = \frac{x^3}{3} + c$, $c \in \mathbb{R}$ este soluție. Ecuația $G'(x) = x^2$ se **numeşte ecuație diferențială**, iar G_1 este **o soluție particulară** a ei, şi G_c este **soluția generală** a ecuației diferențiale.

Schematic:

$x \to g(x)$ Funcția dată	$\longrightarrow$	Se caută funcția $x \to G(x)$ astfel încât $G'(x) = g(x), \forall x$

Să observăm că:

1) funcția *G* trebuie să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi în plus $G'(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

2) funcția $G_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G_1(x) = G(x) + c$, c constantă reală, este, de asemenea, o primitivă a lui g (G_1' este derivabilă şi $G_1' = (G+c)' = G' + 0 = g$).

2) Exprimarea ariei printr-o integrală

Exemplul care urmează leagă noțiunea de arie cu primitivele unei funcții şi constituie un suport pentru înțelegerea proprietăților integralei.
Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, iar graficul acestei funcții este parabola $\mathscr{P}$ (Fig.1.a)

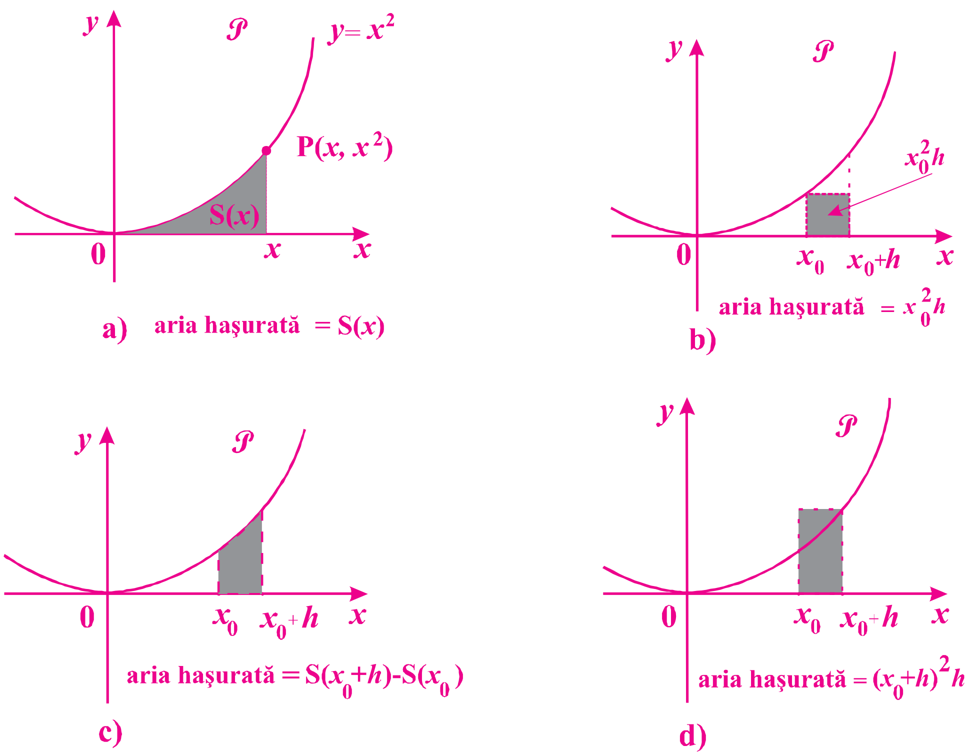


Fig. 1

Pentru orice $x \geq 0$, notăm cu $S(x)$ aria domeniului delimitat de axa Ox, de parabola $\mathscr{P}$ şi dreapta paralelă cu Oy dusă prin punctul P (de pe parabolă) de abscisă x (pe figură domeniul apare haşurat). Fie $x_0 \geq 0$, un număr real fixat şi $h > 0$. Atunci: $x_0^2 h \leq S(x_0 + h) - S(x_0) \leq (x_0 + h)^2 h$ (Fig. 1. b,c,d) sau

$$x_0^2 \leq \frac{S(x_0+h) - S(x_0)}{(x_0+h) - x_0} \leq (x_0+h)^2, (1).$$

Trecem în (1) la limită după $h \to 0$ şi se obține (criteriul „cleştelui”) $S_d^{'}(x_0) = x_0^2$.
Pentru $h < 0$ cu $x_0 + h \geq 0$ au loc inegalitățile de sens contrar şi deci $S_d^{'}(x_0) = x_0^2$.
Din $S_d^{'}(x_0) = S_d^{'}(x_0) = x_0^2$ rezultă $S'(x_0) = x_0^2 = f(x_0)$. Cum $x_0 \in [0, \infty)$ a fost ales arbitrar deducem că $S : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă cu $S'(x) = f(x), \ \ \forall x \geq 0$ şi în plus $S(0) = 0$. Această funcție este $S(x) = \dfrac{x^3}{3}$. Spunem că S este o primitivă a lui f (S derivabilă şi $S' = f$).

Schematic:

$x \to f(x)$ Funcția dată	$\longrightarrow$	Se caută funcția $x \to S(x)$ astfel încât $S'(x) = f(x), \forall x$

S-a ajuns astfel la următoarea teoremă remarcabilă (numită de obicei teorema Leibniz-Newton).

Derivata ariei variabile $S(x)$ în raport cu abscisa x este egală cu ordonata $y = f(x)$, adică $S'(x) = f(x)$.

Această funcție primitivă S (S este o primitvă a lui f dacă: 1) S ***derivabilă*** pe $[a,b]$; 2) $S^{'}(x) = f(x), \forall x \in [a,b,])$ se distinge dintre toate celelalte funcții primitive prin faptul că devine egală cu zero când $x = a$. De aceea, dacă se cunoaşte o primitivă F oarecare a lui f şi dacă $S(x) = F(x) + k, k =$ constantă, atunci k se determină din cerința $S(a) = 0$ când $S(a) = F(a) + k$ şi de aici $k = -F(a)$. Aşadar $S(x) = F(x) - F(a)$.

Se notează $S(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (citim: integrală definită de la a la x din f).

3) Legea de mişcare a unui punct material

Rezolvarea unei probleme de fizică ne conduce, de asemenea, la conceptul de primitivă a unei funcții.

Un punct mobil se deplasează pe o axă cu viteza $v(t), t \in [0, t_0]$. Să se determine spațiul $s(t)$ parcurs în t unități de timp, dacă $s(0) = 0$ (*condiție inițială*).

Am văzut anul precedent, la derivate, că $s'(t) = v(t), \forall t \geq 0$ şi în acest fel ajungem ca şi în cazurile discutate mai sus **(1)** şi **2)**) la acelaşi tip de problemă:
Să determinăm o funcție derivabilă $s : [0, t_0] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $s'(t) = v(t), \forall t \geq 0$ şi $s(0) = 0$. **Funcția spațiu** s **de determinat** reprezintă o primitivă pentru **funcția viteză** v dată.

Schematic:

$t \to v(t)$ Funcția dată	$\longrightarrow$	Se caută funcția $t \to s(t)$ astfel încât $s'(t) = v(t), \forall t \geq 0, s(0) = 0$

Exemplu. **Fie $v(t) = t^2 - t + 1, t \in [0,5]$. Atunci $s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t + c$ este funcția spațiu. Funcția s este derivabilă pe $[0,5]$ şi $s'(t) = v(t), \forall t \in [0,5]$.**

Din $s(0) = 0$ rezultă $c = 0$ şi în final $s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t$.

Analog, dacă a este accelerația, atunci $v'(t) = a(t)$. Şi aceasta este o problemă de tipul de mai sus.
Schematic:

$t \to a(t)$ Funcția dată	$\longrightarrow$	Se caută funcția $t \to v(t)$ astfel încât $v'(t) = a(t), \forall t \geq 0, v(0) = v_0$

Plecând de la legea de mişcare $t \to s(t)$, **prin derivare** se obțin $v(t)$ şi respectiv $a(t)$, iar plecând de la $a(t)$, **prin integrare** se determină $v(t)$ şi $s(t)$.

Schematic:

DERIVARE

$$s(t) \longrightarrow v(t)=s'(t) \longrightarrow a(t)=v'(t)$$

INTEGRARE

În general, dacă $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$, I interval, este, este o funcție indefinit derivabilă atunci

DERIVARE

$$f \longrightarrow f' \longrightarrow f'' \longrightarrow \cdots \longrightarrow f^{(n)} \longrightarrow f^{(n+1)} \longrightarrow$$

INTEGRARE

Să reținem că: prin derivarea unei funcții se obține o funcție unică, iar prin integrarea unei funcții se obțin o infinitate de funcții (dacă este dată o condiție pentru primitive, atunci primitiva este unică).

Exemplu.

$\frac{x^3}{3}$ $\quad$ $\frac{x^3}{3}+1$ $\quad$ $\frac{x^3}{3}-1$

Mai multe primitive

$f(x)=x^2$

O singură derivată

$f'(x)=2x$

În general

F_1 $\quad$ F_2 $\quad$ F_3

Mai multe primitive

f (derivabilă)

O singură derivată f'

Exerciții propuse

1. **Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2-x$. Să se determine funcția $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care panta tangentei la graficul lui G în punctul $(x,G(x))$ este $g(x), \forall x\in\mathbb{R}$ și G conține punctul $(-1,1)$.**

2. **Fie $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{1}{x}$, iar $S:[1,\infty)\to[0,\infty)$, aria domeniului delimitat de graficul lui *g*, axa *Ox* și dreptele paralele cu *Oy*, care trec prin punctele A și M de pe graficul lui *g* de abscise 1 și $x(\geq 1)$. Fie $x_0\geq 1$, număr fixat.**

1) Pentru $h>0$, arătați că $\frac{1}{x_0+h}\leq\frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h}\leq\frac{1}{x_0}$, (1).

2) Dacă $h<0$ și $x_0+h\geq 1$ stabiliți o relație similară cu (1).

3) Deduceți că *S* este derivabilă în x_0 și $S'(x_0)=\frac{1}{x_0}=g(x_0)$.

4) Arătați că *S* este o primitivă pe $[1,\infty)$ a lui *g*. Deduceți că $S(x)=\ln x, x\geq 1$.

3. **Un obiect se mișcă de-a lungul unei axe cu viteza $v(t)=t^2-3t+2$ unități pe secundă. În poziția inițială (la $t=0$) obiectul se află la 2 unități la dreapta originii. Determinați poziția obiectului după 4 secunde.**

4. **Un obiect se mișcă de-a lungul unei axe cu accelerația $a(t)=2t-2$ unități pe secundă. În poziția inițială (la $t=0$) se află la 5 unități la dreapta originii. O secundă mai târziu se mișcă la stânga cu viteza de 4 unități pe secundă.**
Determinați poziția obiectului după *t*=4 secunde.

5. **Fie *a, v, s* accelerația, viteza și respectiv spațiul parcurs de o particulă care pleacă din *O* și se deplasează de-a lungul axei *Ox*. Determinați *v* și *s* după timpul t, în cazurile:**

1) $a=t+1, s(0)=0, v(0)=2$; 2) $a=\sin t, s(0)=2, v(0)=\frac{1}{3}$;

1) $a=e^t, s(0)=0, v(0)=3$; 4) $a=\frac{1}{t+1}, s(0)=1, v(0)=5$.

6. **În exercițiul de mai jos, determinați *g* dacă (pe rând)**
1) $g'(x)=-x+3, g(1)=0$; 2) $g'(x)=2x+3, g(-1)=2$;
3) $g'(x)=x^2-3x, g(2)=1$; 4) $g'(x)=\sin x, g(0)=3$;
5) $g''(x)=x+1, g'(0)=1, g(0)=-1$; 6) $g''(x)=x^2-x, g'(0)=0, g(0)=1$;
7) $g''(x)=\sin x, g'(0)=-2, g(0)=1$.

1.4. PRIMITIVELE UNEI FUNCȚII. INTEGRALA NEDEFINITĂ A UNEI FUNCȚII CONTINUE

Fie $g: I \to \mathbb{R}, I$ interval. Ne propunem să determinăm o funcție derivabilă $G: I \to \mathbb{R}$, care să aibă proprietatea că în fiecare punct al intervalului *I* derivata ei să fie $G'(x) = g(x), \forall x \in I$. Funcția *G* se numeşte **funcție primitivă** a funcției g pe intervalul *I*. Mai precis formulăm următoarea:

Definiție. Fie $g: I \to \mathbb{R}$, *I* interval. Funcția *g* **admite primitive pe** *I* (se mai spune că *g* este **antiderivabilă pe** *I*) dacă există $G: I \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:

1) *G* este derivabilă pe *I*;
2) $G'(x) = g(x), \forall x \in I$.

Observații: **1)** Întotdeauna **trebuie precizată** mulțimea pe care funcția dată admite primitive.
2) Funcția *G*, din definiție, se numeşte o **primitivă** a lui *g* (sau încă se mai spune că *G* este o **antiderivată** a lui *g* pe *I*). Dacă *G* există se spune că *g* este **primitivabilă** pe *I*. Noi vom folosi exprimarea "*g* admite primitive pe *I*", iar "*G* este o primitivă a lui *g*".
3) Dacă $I = [a,b]$, atunci $G'(a) = G_d'(a)$ (se ia derivata la dreapta în $x = a$) şi $G'(b) = G_s'(b)$ (derivata lui *G* la stânga în $x = b$).
Să reținem că integrarea are un avantaj. Ne permite să verificăm rezultatul. Dacă derivăm funcția (G) obținută prin integrare, atunci trebuie să obținem funcția *g*.
Operația de integrare o reprezentăm prin simbolul $\int$ care , este litera "s" alungită, fiind prima literă a cuvântului sumă, care aşa cum vom vedea are legătură cu integrarea, fiind un alt aspect al ei.
Diferențiala *dx* este scrisă după funcția care se integrează, pentru a indica variabila independentă utilizată pentru diferențiere şi variabila care este utilizată pentru integrare. Deci, $\int f(x)dx$ spune că $f(x)$ este integrată în raport cu x.

Problema determinării primitivei unei funcții date conține alte trei probleme:
a) O problemă de existență. Trebuie să arătăm că problema pusă nu este fără obiect, adică astfel de funcții *G* există.

b) Gradul de generalitate al soluției. Trebuie cercetat, în cazul când există, dacă soluția este unică sau sunt mai multe soluții; în cazul când soluția nu este unică să găsim forma ei generală.

c) Determinarea funcției *G*. Trebuie să stabilim metodele pentru determinarea funcției G a cărei derivată este g.

Pentru punctul **b)** răspundem acum. Să presupunem că există funcții G şi fie G_1, G_2 două primitive. Avem $G_1'(x) == G_2'(x) = g(x), \forall x \in I$. De aici $(G_1 - G_2)'(x) = 0,\ \forall x \in I$. Atunci (o consecință a teoremei lui Lagrange) $G_1(x) - G_2(x) = c, \forall x \in I$, unde c este o constantă arbitrară.

Aşadar am obținut rezultatul următor:

> **Dacă există o primitivă *G*, atunci există o infinitate care diferă de *G* printr-o constantă arbitrară.**

Răspunsul la prima problemă este afirmativ dacă funcția g este continuă pe I. Cum noi vom lucra numai cu funcții continue g, deducem că pentru astfel de funcții există primitive G pe I.

Exemple. 1. Pentru funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$, o primitivă a ei pe $\mathbb{R}$ este funcția $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G(x) = \frac{x^3}{3}$, deoarece G este funcție derivabilă şi $G'(x) = x^2 = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Funcția $g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ are ca primitivă pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ funcția $G : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, g(x) = \operatorname{tg} x$, deoarece G este derivabilă şi în plus

$$G'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = g(x), \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

> **Definiție.** Fie $g : I \to \mathbb{R}$ (I interval) o funcție care admite primitive pe I. Mulțimea primitivelor lui g se numeşte **integrala nedefinită a lui *g*** şi se notează prin
>
> $$\int g(x)\,dx = \{G : I \to \mathbb{R} \mid G = \text{primitivă a lui } g\}$$
>
> ---
>
> Operația de detereminare a primitivelor unei funcții se numeşte **integrare.**

Observații. 1) Să reținem că **integrala nedefinită este o mulțime infinită de funcții**, în timp ce primitiva este o funcție.

2) Expresia $g(x)dx$ se numeşte **element de integrare**, $g(x)$ este **integrandul** iar x **variabila de integrare** şi în plus $g(x)dx = G'(x)dx = dG(x)$ este diferențiala funcției G (despre diferențiala unei funcții derivabile vom vorbi la Metode de integrare – integrarea prin părți).

Avem: 1) $d\int g(x)dx = g(x)dx$ (sau cum $\int g(x)dx$ este o funcție de x, $\left(\int g(x)dx\right)' = g(x)$); 2) $\int dG(x) = G(x)+c$ sau $\int G'(x)dx = G(x)+c$ ($\int$ şi d se "reduc" reciproc, numai că la G trebuie să adunăm o constantă c. În acest sens cele două operații de diferențiere şi integrală sunt operații inverse una alteia).

Într-adevăr, pentru 1), $d\int g(x)dx = d\left(G(x)+c\right) = dG(x) = G'(x)dx = g(x)dx$, iar pentru 2) avem $\int dG(x) = \int G'(x)dx = G(x)+c$.

Să reținem că:

$$\text{g (dată derivabilă)} \xrightarrow[\text{determinăm derivata}]{\text{Derivare}} g'\text{(unică)}$$

$$\int g(x)dx \xleftarrow[\text{determinăm primitivele}]{\text{Integrare}} g\ \text{(dată)}$$

Exemple. 1. O primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$ este $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$F(x)=\dfrac{x^4}{4}, x\in\mathbb{R}$, deoarece F este derivabilă şi $F'(x)=\left(\dfrac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x), \forall x\in \mathbb{R}$.

2. O primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x$ este $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}$, pentru că F este derivabilă şi $F'(x)=\left(\dfrac{2^x}{\ln 2}\right)' = 2^x = f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

3. O primitivă pe $(-a,a), a>0$ a funcției $f:(-a,a)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ este funcția

$F:(-a,a)\to\mathbb{R}, F(x)=\arcsin\dfrac{x}{a}$ deoarece F este derivabilă pe $(-a,a)$ şi

$$F'(x)=\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)'=\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=f(x),\forall x\in(-a,a).$$

4. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția G să fie o primitivă a funcției g, unde $g,G:\left(-\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{1+2x}, G(x)=(ax+b)\sqrt{1+2x}$.

R. G este o funcție derivabilă. Fiind produs de funcții derivabile, avem:

$G'(x)=a\sqrt{1+2x}+\frac{ax+b}{\sqrt{1+2x}}$. Din $G'(x)=g(x),\forall x>-\frac{1}{2}$ se obține egalitatea

$a\sqrt{1+2x}+\frac{ax+b}{\sqrt{1+2x}}=\sqrt{1+2x},\forall x>-\frac{1}{2}\Leftrightarrow a(1+2x)+ax+b=1+2x,\forall x>-1\Leftrightarrow 3ax+$

$+a+b=1+2x,\forall x>-\frac{1}{2}$. De aici $3a=2, a+b=1$ când $a=\frac{2}{3}, b=\frac{1}{3}$.

Deci $G(x)=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}$.

Următorul rezultat ne dă informații despre două primitive ale unei funcții pe un interval şi cum se pot genera toate primitivele funcției dacă se cunoaşte una din ele. Mai precis are loc următoarea:

Teoremă. Fie $g:I\to\mathbb{R}$, I interval din $\mathbb{R}$.

1) Dacă $G_1,G_2:I\to\mathbb{R}$ sunt două primitive ale lui g pe I, atunci $G_1(x)-G_2(x)=c,\forall x\in I, c=$constantă reală.

Două primitive ale unei funcții *pe un interval* diferă printr-o constantă.

2) Dacă G este o primitivă a lui g pe I, atunci orice altă primitivă a lui g este de forma $G+c, c\in\mathbb{R}$.

Dacă se cunoaşte o primitivă a unei funcții *pe un interval*, atunci orice altă primitivă se obține prin adăugarea unei constante reale.

Plecând de la formulele de derivare ale funcțiilor elementare, obținem "prin inversarea lor" integralele nedefinite uzuale. De exemplu $(\sin x)'=\cos x, x\in\mathbb{R}\Rightarrow\int\cos x dx=\sin x+\mathcal{C}, x\in\mathbb{R}$.

Egalitățile din tabelul de mai jos al integralelor nedefinite uzuale se verifică prin derivare. Este indicată o primitivă G a lui g, unde c din structura lui G este o funcție constantă din $\mathcal{C}, c \in \mathcal{C}$.

Tabel de integrale nedefinite

	Funcția g	**Primitiva G**	**Interva-lul**	**Integrala nedefinită**
1	a **(funcția constantă)**	$ax + c$	$\mathbb{R}$	$\int a\,dx = ax + \mathcal{C}$
2	$x^{\alpha}, \alpha \neq -1$ **(funcția putere cu exponent real)**	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$(0,\infty)$	$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}$
3	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$(0,\infty)$ **sau** $(-\infty,0)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + \mathcal{C}$
4	$a^{x}, a > 0, a \neq 1$ **(funcția exponențială)**	$\frac{a^{x}}{\ln a} + c$	$\mathbb{R}$	$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + \mathcal{C}$, $\int e^{x}dx = e^{x} + \mathcal{C}$
5	$\frac{1}{x^2 - a^2}, a \neq 0$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$	$(-\infty,-a)$ **sau** $(-a,a)$ **sau** (a,∞)	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + \mathcal{C}$
6	$\frac{1}{x^2 + a^2}, a \neq 0$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$	$\mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \mathcal{C}$
7	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, a \neq 0$	$\arcsin\frac{x}{a} + c$	$(-a,a)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + \mathcal{C}$
8	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}, a \neq 0$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c$	$\mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + \mathcal{C}$
9	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}, a \neq 0$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + c$	$(-\infty,-a)$ **sau** (a,∞)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + \mathcal{C}$

10	$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$	$\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}$
11	$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$	$\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}$
12	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + c$	$\left((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2}\right)$ $k \in \mathbb{Z}$	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}$
13	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + c$	$(k\pi, (k+1)\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}$
14	$\operatorname{tg} x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$\left((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2}\right)$ $k \in \mathbb{Z}$	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + \mathcal{C}$
15	$\operatorname{ctg} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + c$	$(k\pi, (k+1)\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + \mathcal{C}$

Observații. 1) De obicei primitiva G se ia cu funcția constantă egală cu zero, $c = 0$, dacă asupra lui G nu sunt condiții inițiale.
2) Probați că funcția G este o primitivă a lui g, observând că G este funcție derivabilă și că verifică egalitatea $G' = g$.
De exemplu, pentru integrala de la **6** (vezi tabelul de integrale nedefinite), $G(x) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$. Avem $G'(x) = \left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)' + c' = \frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} + 0 =$

$$= \frac{1}{x^2 + a^2} = g(x).$$

3) Următoarele integrale nu se pot exprima prin intermediul funcțiilor elementare: $\int e^{-x^2} dx$ (intergrala lui Poisson), $\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx$ (integralele lui Fresnel), $\int \frac{dx}{\ln x}, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx$. Totuşi ele se pot exprima prin serii infinite de puteri $\left(\int \frac{\sin x}{x} dx = c + x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} + \ldots\right)$. În acest capitol vom studia funcții pentru care primitivele se exprimă cu ajutorul funcțiilor elementare. Pentru a găsi primitivele vom utiliza tabelul de integrale nedefinite, câteva tehnici de integrare şi operațiile algebrice cu primitive.

Problema existenței primitivelor. Proprietăți ale integralei nedefinite

În acest paragraf evidențiem o clasă largă de funcții care admit primitive pe un interval. În acelaşi timp vedem care sunt operațiile algebrice pe mulțimea funcțiilor care admit primitive, care generează de asemenea funcții ce admit primitive.
Mai precis are loc următoarea

Teoremă. Orice funcție continuă $g: I \to \mathbb{R}$, *I* interval, admite primitive pe *I*.

În determinarea unei primitive *F* a lui *f* continuă, *f* funcție multiformă, trebuie să ținem seamă că orice primitivă este continuă. Din această condiție, numită "lipirea constantelor" se obține legătura care apare între constantele din expresia primitivei. Condiția $F' = f$ (consecință a teoremei lui Lagrange) are loc în punctele de trecere de la o formă la alta a lui *f*. Dacă f nu este continuă, atunci trebuie arătat că $F' = f$.
Reciproca acestei teoreme este falsă, adică există funcții discontinue care admit primitive.

Aşadar, o modalitate de a stabili dacă o funcție admite primitive pe un interval este de a-i studia continuitatea. Dacă funcția este continuă, atunci admite primitive.

Exemplu. Să se arate că $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} e^x, x \geq 0 \\ x+1, x < 0 \end{cases}$, admite primitive pe $\mathbb{R}$. Să se determine o astfel de primitivă.

R. Evident g este continuă pe $\mathbb{R}^*$, fiind definită pe $[0,\infty)$ prin intermediul funcției exponențiale (care este continuă pe $\mathbb{R}$, deci şi pe restricția $[0,\infty)$) iar pe $(-\infty,0)$ prin funcție polinomială (care este continuă pe $\mathbb{R}$, deci şi pe restricția $(-\infty,0)$).
Studiem continuitatea în $x = 0$.
Din $\lim_{x \nearrow 0} g(x) = \lim_{x \searrow 0} g(x) = g(0) \Leftrightarrow \lim_{x \nearrow 0}(x+1) = \lim_{x \searrow 0} e^x = g(0) = 1$, se deduce că g este continuă şi în $x = 0$. Deci g este continuă pe $\mathbb{R}$. Prin urmare g admite primitive pe $\mathbb{R}$. Pentru a calcula o primitivă $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se calculează pe $[0,\infty)$, $\int e^x dx$ iar pe $(-\infty,0)$, $\int (x+1)dx$.

Avem $G(x) = \begin{cases} e^x + k_1, x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + x + k_2, x < 0 \end{cases}$. Legătura între constantele k_1, k_2 se obține din cerința de continuitate în $\boldsymbol{x = 0}$ a funcției *G* (*G* fiind derivabilă în $x = 0$, implică *G* este continuă în $x = 0$).
Avem: *G* este continuă în $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \nearrow 0} G(x) = \lim_{x \searrow 0} G(x) = G(0) \Leftrightarrow k_2 = 1 + k_1$.

Se poate lua $k_1 = 0$ şi deci $k_2 = 1$. Prin urmare forma finală a unei primitive G pentru g este

$$G(x) = \begin{cases} e^x, x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + x + 1, x < 0 \end{cases}.$$

Din construcţie avem că G este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ şi $G'(x) = g(x), x \in \mathbb{R}^*$. Se verifică simplu că $G'(0) = g(0) = 1$. (De fapt ultima verificare nemaifiind necesară, pentru că g fiind continuă, admite primitive. Deci este necesar să găsim doar relaţia dintre constantele k_1, k_2).

Înainte de a prezenta următorul rezultat important precizăm că dacă $\mathcal{F}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\}$, iar $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{F}(I)$, atunci $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{f + g \mid f \in \mathcal{A}, g \in \mathcal{B}\}$, $\lambda\mathcal{A} = \{\lambda f \mid f \in \mathcal{A}\}, \lambda \in \mathbb{R}$. Rezultatul următor ne spune că adunarea şi înmulţirea cu scalari nenuli a funcţiilor care admit primitive dau tot funcţii care admit primitive. Mai precis are loc următoarea

Teoremă. (Operaţii algebrice cu funcţii care admit primitive)

Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, I interval, două funcţii care admit primitive pe I şi $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Atunci:

1) $f + g$ admite primitive pe I şi $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Integrala sumei este egală cu suma integralelor.

2) αf admite primitive pe I şi $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$

Constanta iese de sub integrală.

Observaţii. 1) Rezultate similare au loc pentru funcţii derivabile $f, g : I \to \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}^* : (f + g)' = f' + g'$ şi $(\alpha f)' = \alpha f'$.

Schematic:

$(f+g)' = f' + g'$

Derivata sumei egală cu suma derivatelor

→

$\int (f+g) = \int f + \int g$

Integrala sumei este egală cu suma integralelor

$(\alpha f)' = \alpha f'$		$\int \alpha f = \alpha \int f$
Constanta iese de sub derivare	$\longrightarrow$	**Constanta iese de sub integrală**

Sunt greşite scrierile:

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx,$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$$

$$\left(\int f(x)\,dx\right)^n = \int f^n(x)\,dx$$

2) Dacă $f_i : I \to \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$ sunt funcţii care admit primitive şi $\alpha_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0$, atunci $\int \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x)\,dx$.

În particular: $\int (-f) = -\int f$ şi $\int (f - g) = \int f - \int g$.

3) Suma dintre o funcţie care admite primitive (f) şi o funcţie care nu admite primitive (g) pe acelaşi interval I este o funcţie care nu admite primitive pe I.

Într-adevăr, fie $h : I \to \mathbb{R}, h(x) = f(x) + g(x), x \in I$. Dacă, prin absurd h ar admite primitive, atunci, $g = h - f$ ar admite primitive pe I, fals.

Exemple. 1. Să se determine o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2\sin x - 3e^x$.

R. Se determină câte o primitivă pe $\mathbb{R}$ pentru funcţiile $f_1(x) = x^2, f_2(x) = 2\sin x, f_3(x) = -3e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Acestea sunt $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F_1(x) = \frac{x^3}{3}, F_2(x) = -2\cos x$ şi respectiv $F_3(x) = -3e^x$ $(F_1' = f_1, F_2' = f_2, F_3' = f_3)$. Deci o primitivă pe $\mathbb{R}$ a lui f este $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) = \frac{x^3}{3} - 2\cos x - 3e^x$.

2. Să se detrmine o primitivă pe $(0,\infty)$ a funcţiei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + \sqrt{x} - \frac{5}{x}$.

R. Se determină câte o primitivă pe $(0,\infty)$ pentru fiecare din funcţiile $f_1(x) = 2x, f_2(x) = \sqrt{x}$,

$f_3(x) = -\frac{5}{x}, x > 0$.

Acestea sunt $F_1, F_2, F_3 : (0,\infty) \to \mathbb{R}, F_1(x) = x^2, F_2(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}, F_3(x) = -5\ln x$. Funcţia $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) = x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 5\ln x$ este o primitivă a lui *f* pe $(0,\infty)$.

Probleme rezolvate

1.Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ ax + b, x > 0, & a,b \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Să se determine a,b astfel încât *g* să aibă primitive pe $\mathbb{R}$.

R. O primitivă $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a lui *g* are forma (se integrează *g* pe $(-\infty,0]$ şi pe $(0,\infty)$).

$$G(x) = \begin{cases} e^x + k, & x \le 0 \\ \frac{ax^2}{2} + bx + k', & x > 0 \end{cases}.$$

Cum *G* este derivabilă în $x = 0$, rezultă *G* continuă în $x = 0$, adică

$\lim_{x \nearrow 0} G(x) = \lim_{x \searrow 0} G(x) = G(0) \Leftrightarrow 1 + k = k'$.

Dacă luăm $k = 0$, atunci $k' = 1$.

Funcţia *G* este derivabilă în $x = 0 \Leftrightarrow G_s'(0) = G_d'(0) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \nearrow 0} e^x = \lim_{x \searrow 0}(ax + b) \Leftrightarrow b = 1$.

În final $G(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ \frac{ax^2}{2} + x + 1, & x > 0 \end{cases}$ este primitivă pentru *g* pe $\mathbb{R}$, deoarece *G* este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $G'(x) = g(x), x \in \mathbb{R}$ ($G'(x) = g(x), x \in \mathbb{R}^*$ din construcţia lui *G* şi $G'(0) = g(0) = 1$ de mai sus).

Deci $a \in \mathbb{R}, b = 1$.

Altfel. Se scrie *g* sub forma $g(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ 1 + ax, & x > 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ b - 1, & x > 0 \end{cases}$.

Prima funcţie este continuă şi deci admite primitive (pe $\mathbb{R}$). Pentru a doua funcţie, dacă $b - 1 \ne 0$, atunci $x = 0$ ar fi punct de discontinuitate de prima speţă şi deci funcţia nu admite primitive. Deci trebuie ca $b - 1 = 0$, iar $a \in \mathbb{R}$, caz în care *g* apare ca sumă de funcţii ce admit primitive.

2. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = e^{-3x}\cos x$. Să se determine numerele reale *m,n* pentru care funcţia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G(x) = e^{-3x}(m\cos x + n\sin x)$ este o primitivă a lui *g* (pe $\mathbb{R}$).

R. Este clar că *G* este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Funcţia *G* este primitivă a lui *g* pe $\mathbb{R}$, dacă $G'(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^{-3x}\left[(n - 3m)\cos x - (m + 3n)\sin x\right] = e^{-3x}\cos x, \forall x \in \mathbb{R}$. Cum egalitatea este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ea se verifică şi pentru $x = 0$, cand $n - 3m = 1$ şi pentru $x = \frac{\pi}{2}$ când

$m + 3n = 0$. Rezolvând sistemul în m şi n rezultă $m = -\frac{3}{10}, n = \frac{1}{10}$.

Probleme propuse

Primitiva unei funcții

0. **1) Dați definiția unei primitive a funcției $f : I \to \mathbb{R}$, pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$.**
2) Dați exemple de funcții care au primitive.
3) Dați trei exemple de primitive pentru o funcție.
4) Orice funcție are o primitivă? Analizați exemplul $f(x) = \begin{cases} 1, \geq 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$.

5) Două primitive ale funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2}$ diferă în $x = 1$ prin e. Cu cât diferă cele două primitive în $x = 10$?

1. **1°) Fie $g, G : D \to \mathbb{R}$, unde G este o primitivă a lui g. Precizați g dacă:**

a) $G(x) = x^3 - 5x^2 + 1$; b) $G(x) = x(x^2 - 3)$; c) $G(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$; d) $G(x) = \sqrt{x^2+1}$;

e) $G(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(\ln x)^3}$; f) $G(x) = x - 2\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$; g) $G(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1)$; h) $G(x) =$

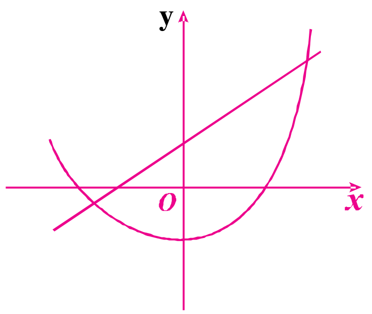
$= e^{\sin x}$; i) $G(x) = \frac{3^{3x}}{3\ln 3} + e^x$; j) $G(x) = \arcsin\frac{x}{3}$; k) $G(x) = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2}$;

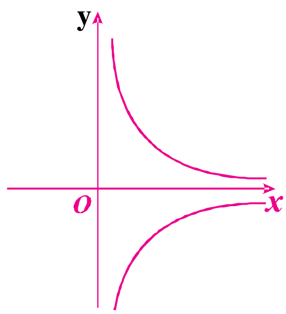
l) $G(x) = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$; m) $G(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 - \frac{1}{4}\ln(x^4+1)$;

n) $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$; p) $G(x) = \frac{x}{2} + 3^x + \frac{\sin 2x}{4}$; q) $G(x) = 2x + \sin 2x +$

$\frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin 6x$; r) $G(x) = x\sin x + \cos x$; s) $G(x) = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$;

2°) În reperul xOy de mai jos sunt redate graficele funcției g și a unei primitive G a lui g. Precizați care este graficul fiecărei funcții?





2. **Să se determine f dacă pe rând:**
1) $f'(x) = x^3 + 2$ și $f(0) = 1$; 2) $f'(x) = 3x^2 + 2x, f(1) = 3$;
3) $f''(x) = 6x - 2, f'(1) = -5, f(1) = 3$; 4) $f''(x) = \cos x, f'(0) = 1, f(0) = 2$.

3.1) Să se determine primitiva G a funcției $g:D\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $G(x_0)=y_0$ în cazurile: *a)* $D=\mathbb{R}, g(x)=(x-1)^2, G(2)=3;$ *b)* $D=\mathbb{R}, g(x)=\sin x+1, G(0)=2;$ *c)* $D=(0,\infty)$, $g(x)=\dfrac{3}{x}-2\sqrt{x}+e^x, G(1)=e+1$.

2) Arătați că funcția $G:D\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $g:D\to\mathbb{R}$, unde D este intervalul indicat:

a) $D=\mathbb{R}, G(x)=(x-2)(x^2+2x+3), g(x)=3x^2-1;$

b) $D=(0,\infty), G(x)=\dfrac{2}{3}(x\sqrt{x}+1), g(x)=\sqrt{x}.$

3) Fie funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=3\sin 2x$. Care din funcțiile de mai jos reprezintă o primitivă a lui g pe $\mathbb{R}$:

a) $G(x)=\dfrac{3}{2}\sin 2x;$ *b)* $H(x)=-\dfrac{3}{2}\cos 2x+1;$ *c)* $K(x)=-3\cos^2 x;$ *d)* $L(x)=\ 3\sin^2 x-5$? .

4. 1°) Arătați fără a calcula derivata, că F şi G sunt două primitive pe $\mathbb{R}$ ale unei funcții în cazurile:

a) $F(x)=\dfrac{1}{1+x^6}, G(x)=\dfrac{-x^6}{1+x^6};$ *b)* $F(x)=\dfrac{x^3+3x^2-1}{x^2+1}, G(x)=\dfrac{x^3+x^2-3}{x^2+1}$.

2°) Fie funcția $f(x)=x^2-2x$, iar F,G,H trei primitive ale acestei funcții. Calculați $F(3)-F(1), G(3)-G(1)$ şi $H(3)-H(1)$. Ce constatați?

5. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\cos x, g(x)=x\sin x$. Determinați primitivele funcțiilor, calculând în prealabil derivatele lor.

6. Dacă F este o primitivă alui f pe $\mathbb{R}$, atunci funcția $G(x)=F(x-2)$ este o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției $g(x)=f(x-2)$? Dar $H(x)=F(2x)$ este o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției $g(x)=f(2x)$?

7. Fie funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x\cos(3x+1)$

a) Calculați $g'(x)$; b) Deduceți o primitivă (pe $\mathbb{R}$) pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sin(3x+1)$.

8. a) Să se determine o primitivă pe $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ a funcției $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

b) Fie $G:\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}, G(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$; Arătați că $G'(x)=\dfrac{3}{\cos^4 x}-\dfrac{2}{\cos^2 x}$;

c) Deduceți o primitivă pe $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ a funcției $g(x)=\dfrac{1}{\cos^4 x}$.

9. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\cos^2 x, g(x)=x\sin^2 x$.

a) Să se determine o primitivă pentru $f+g$ pe $\mathbb{R}$.

b) Arătați că există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $H(x)=ax\sin 2x+b\cos 2x$ să fie o primitivă pe $\mathbb{R}$ pentru $f-g$.

c) Deduceți câte o primitivă pentru *f* şi respectiv *g* pe $\mathbb{R}$.

10. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x+\sin^3 x$

a) Calculați $f'(x), f''(x)$ şi arătați că există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f''(x)+af(x)=$ $=b\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Deduceți o primitivă pentru *f*.

11. a) Arătați că funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\sqrt{x-1}$ are pe $(1,\infty)$ o primitivă de forma $F(x)=P(x)\sqrt{x-1}$, unde $P(x)$ este o funcție polinomială de gradul trei care se va preciza.

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția *G* să fie o primitivă a lui *g*

$g,G:\left(-\frac{1}{3},\infty\right)\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{1+3x}, G(x)=(ax+b)\sqrt{1+3x}$.

c) Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția *G* să fie o primitivă a lui *g* în cazurile:

i) $g,G:\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}, g(x)=x\sqrt{3-2x}, G(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{3-2x}$;

ii) $g,G:(-\infty,4)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{1}{2}(5x+4)\sqrt{4-x}, G(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{4-x}$.

12. Dată fiind o funcție *g* să se determine o primitivă *G* a lui *g* al cărei grafic să conțină punctul A, în cazurile:

$a)\ g(x)=4x^3-2x+3, A(1,3);\ b)\ g(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}, A(1,0);\ c)\ g(x)=\sin x+\cos 2x, A\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.

13. a) Arătați că există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1-\sin x}+\frac{b\cos x}{1+\sin x}, \ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

b) Deduceți o primitivă pe $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ pentru funcția $g:\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\to\mathbb{R}, \ g(x)=\frac{1}{\cos x}$.

14. Fie $f,g:\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}, g(x)=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$.

Să se determine o primitivă pe $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ pentru $f+g, f-g$ şi apoi pentru *f* şi *g*.

15. Un producător de obiecte artizanale realizează pe săptămână *x* obiecte. Funcția de profit săptămânal $P(x)$, în €, verifică ecuația $P'(x)=15-0,2x$.

1) Dacă $P(0)=-100$ (costurile fixe sunt de 100 €/săptămână), să se determine $P(x)$.
2) Să se determine profitul în săptămâna în care realizează $x=10$ obiecte.
3) Care este numărul de obiecte lucrate săptămânal care face maxim profitul?

16. Se doreşte umplerea unei piscine cu apă. Se ştie că volumul $V(t)$ în m^3 al apei din piscină după *t* ore verifică ecuația $V'(t)=3+10t$.

1) Dacă $V(0)=0$, atunci să se determine $V(t)$.
2) Pentru $t=1h$, să se determine $V(1)$.

3) După câte ore se umple piscina, dacă aceasta are volumul 140 m^3.

17. Într-un orăşel medicul depistează 12 persoane bolnave de un anumit virus. Se estimează că numărul N al persoanelor infestate după n zile va fi dat de ecuația $N'(n)=3+2n$.

1) Să se determine funcția N;
2) Câte persoane vor fi bolnave după 3 zile?

18. Un şoarece cântăreşte 15 g la naştere, iar greutatea sa $G(t)$, în grame, după t săptămâni creşte cu viteza (rata) de $\frac{2}{5}(3+t)$ grame pe săptămână.

1) Scrieți ecuația diferențială şi apoi determinați formula care dă creşterea după t săptămâni.
2) Care este greutatea şoarecelui după 5 săptămâni?

19. Să se calculeze următoarele integrale: 1) $\int dx, x\in\mathbb{R}$; 2) $\int \pi dx$; 3) $\int x^2dx, x\in\mathbb{R}$;

4) $\int \frac{1}{x^2}dx, x>0$; 5) $\int x\sqrt{x}dx, x\geq 0$; 6) $\int (x^2-3x)dx, x\in\mathbb{R}$; 7) $\int x^2(x-2)dx, x\in\mathbb{R}$;

8) $\int (x-1)^2(x^2+5)dx, x\in\mathbb{R}$; 9) $\int\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)dx, x<0$; 10) $\int\left(\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}\right)dx, x>0$;

11) $\int\left(\frac{1}{3}-2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}\right)dx, x\geq 0$; 12) $\int\frac{(x^2-2)^2}{x^3}dx, x>0$; 13) $\int\frac{dx}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$;

14) $\int\frac{x^2dx}{x^2+1}$; 15) $\int\left(\frac{1-x}{x^2}\right)^2dx, x>0$; 16) $\int(2^x-3e^x)dx, x\in\mathbb{R}$; 17) $\int 2^{2x}e^xdx, x\in\mathbb{R}$;

18) $\int\frac{2^x+5^x}{10^x}dx, x\in\mathbb{R}$; 19) $\int\frac{dx}{x^2-9}, x\in(-3,3)$; 20) $\int\frac{x^2}{x^2-9}dx, x>3$; 21) $\int\frac{dx}{4x^2-9}$, $x\in\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$; 22) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}, x\in\mathbb{R}$; 23) $\int\frac{\sqrt{x^2+25}+3}{\sqrt{x^2+25}}dx, x\in\mathbb{R}$; 24) $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$; 25) $\int\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}, x\in(-4,4)$; 26) $\int\frac{\left(\sqrt{x^2+9}-5\right)dx}{x^2+9}, x\in\mathbb{R}$; 27) $\int\frac{(3-x^2)dx}{\sqrt{16-x^2}}, x\in(-4,4)$;

Problema existenței primitivelor. Funcții care admit primitive

1. Arătați că funcțiile de mai jos admit primitive pe domeniile de definiție şi determinați o primitivă pentru fiecare funcție.

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x, x\geq 0\\ 2x, x<0\end{cases}$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x+1, x<1\\ \frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}, x\geq 1\end{cases}$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}, x\ge 1\\ \sin(x-1), x<1\end{cases}$; 4) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}$;

5) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}, x\in[0,1)\\ \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x\ge 1\end{cases}$; 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{x}, x>0\\ \frac{1}{x^2+1}, x\le 0\end{cases}$;

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2-1}, x\le -2\\ -\frac{x}{6}, x>-2\end{cases}$; 8) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x-2|$; 9) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x^2-4|$; 10) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+|x|$; 11) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+\sqrt{x^2-2x+1}$;

12) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}$; 13) $f:[-2\pi,2\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=|\cos x|$;

14) $f:(-2,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+3^x}{2}, x\ge 0\\ \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, x\in(-2,0)\end{cases}$; 15) $f:\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x<0\\ \frac{1}{\cos^2 x}, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$; 16) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sin x, x\le 0\\ x^2, x>0\end{cases}$; 17) $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}\sin x+\cos x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\\ 1+\operatorname{tg} x, x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\end{cases}$; 18) $f:(-2,2)\to\mathbb{R}, f(x)=\max(x,x^3)$.

2. Pentru fiecare din funcțiile de mai jos să se determine o primitivă al cărei grafic conține punctul A indicat.

1) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases}x-1, x\le -2\\ -x^2+1, x\in(-2,2]\\ -3, x>2\end{cases}, A(1,1)$;

2) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases}-2x, x>0\\ -x, x\in(0,2]\\ x-4, x>2\end{cases}, A(0,0)$.

3. Să se determine parametrul real *m* pentru care funcțiile de mai jos admit primitive pe domeniul de definiție.

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+m, x\ge 1\\ x^2+1, x<1\end{cases}$; 2) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x\ln x+x, x>0\\ m, x=0\end{cases}$.

1.5 METODE DE CALCUL ALE PRIMITIVELOR

Acest paragraf conține câteva reguli și sfaturi pentru integrare. Nu este posibil să formulăm un set de reguli prin care orice funcție să poată fi integrată. Metodele care vor urma ne vor permite, în general, nu să integrăm direct ci să transformăm funcția de integrat astfel încât ea să ia forma unor integrale standard așa cum apar în tabelul de integrale uzuale.

1) Metoda integrării directe (prin formule)

Această metodă utilizează integralele nedefinite din tabelul cu integrale precum și operațiile cu acestea (sumă și înmulțirea cu scalari).

Exerciții rezolvate

Să se calculeze integralele următoare:

1. $\boldsymbol{I=\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx, x<0}$.

R. Avem $I=\int x^2dx+\int 2xdx+\int\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}+x^2+\ln(-x)+\mathcal{C}$.

2. $\boldsymbol{I=\int\frac{x-3}{x^5}dx, x>0}$.

R. $I=\int\left(\frac{x}{x^5}-\frac{3}{x^5}\right)dx=\int\frac{dx}{x^4}-3\int\frac{dx}{x^5}=\int x^{-4}dx-3\int x^{-5}dx=-\frac{1}{3x^3}+\frac{3}{4x^4}+\mathcal{C}$.

3. $\boldsymbol{I=\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)dx, x\geq 0}$.

R. Se obține: $I=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{4}}\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{3}}\,dx+\int x^{\frac{1}{4}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+$

$+\frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}+\mathcal{C}=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}+\mathcal{C}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+\mathcal{C}$.

Observație. Am scris radicalii ca puteri cu exponent raționali și am aplicat formula

$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\mathcal{C}, \alpha\neq -1$.

4. $\boldsymbol{I=\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx,\ x>0}$.

R. Se obține:

$$I=\int\left(2x^{-\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=2\int x^{-\frac{1}{2}}dx-3\int x^{-\frac{1}{3}}dx=2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-3\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+\mathscr{C}=4x^{\frac{1}{2}}-\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}+$$

$$+\mathscr{C}=4\sqrt{x}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\mathscr{C}.$$

5. $\boldsymbol{I=\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}},\ x\in\mathbb{R}}$.

R. Se scrie I sub forma $I=\int\frac{dx}{2\sqrt{x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right)+\mathscr{C}$.

6. $\boldsymbol{I=\int\frac{dx}{9x^2-4},\ x\in\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)}$.

R. Avem: $I=\int\frac{dx}{9\left[x^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{2}{3}}\ln\left|\frac{x-\frac{2}{3}}{x+\frac{2}{3}}\right|+\mathscr{C}=\frac{1}{12}\cdot\ln\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right|+$

$$+\mathscr{C}=\frac{1}{12}\ln\left(\frac{2-3x}{3x+2}\right)+\mathscr{C}.$$

7. $\boldsymbol{I=\int\frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}},\ x\in\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)}$.

R. Se scrie I astfel: $I=\int\frac{dx}{3\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{\frac{4}{3}}+\mathscr{C}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+\mathscr{C}$.

8. $\boldsymbol{I=\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}$.

R. Avem:

$$I=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x+\mathscr{C}$$

9. $\boldsymbol{I=\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx,\ x\in(-1,1)}$.

R. Avem: $I=\int\frac{2dx}{1+x^2}-\int\frac{3dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\operatorname{arctg} x-3\arcsin x+\mathscr{C}$.

10. $\boldsymbol{I=\int\left(2e^x-3^x\right)dx,\ x\in\mathbb{R}}$.

R. Se obține: $I=2\int e^{x}dx-\int 3^{x}dx=2e^{x}-\frac{3^{x}}{\ln 3}+\mathcal{C}$.

11. $I=\int\frac{\left(x^{2}-1\right)^{2}}{x^{4}}dx,\ x>0$.

R. Găsim: $I=\int\frac{x^{4}-2x^{2}+1}{x^{4}}dx=\int\left(1-\frac{2}{x^{2}}+\frac{1}{x^{4}}\right)dx=\int dx-2\int\frac{dx}{x^{2}}+\int\frac{dx}{x^{4}}=x-$
$-2\int x^{-2}dx+\int x^{-4}dx=x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^{3}}+\mathcal{C}$.

12. $I=\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^{2}dx,\ x\in\mathbb{R}$.

R. Avem: $I=\int\left(\sin^{2}\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^{2}\frac{x}{2}\right)dx=\int(1-\sin x)dx=\int dx-\int\sin xdx=$
$=x+\cos x+\mathcal{C}$.

13. $I=\int\frac{1-\sin^{3}x}{\sin^{2}x}dx,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

R. Se obține: $I=\int\left(\frac{1}{\sin^{2}x}-\sin x\right)dx=\int\frac{dx}{\sin^{2}x}-\int\sin xdx=-\operatorname{ctg}x+\cos x+\mathcal{C}$.

14. $I=\int\frac{1-\sqrt{1-x^{2}}}{1-x^{2}}dx,\ x\in(-1,1)$.

R. Găsim: $I=\int\left(\frac{1}{1-x^{2}}-\frac{\sqrt{1-x^{2}}}{1-x^{2}}\right)dx=-\int\frac{dx}{x^{2}-1}-\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\arcsin x+\mathcal{C}=$
$=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)-\arcsin x+\mathcal{C}$.

15. $I=\int\frac{3+\sqrt{x^{2}+4}}{x^{2}+4}dx,\ x\in\mathbb{R}$.

R. Avem: $I=\int\left(\frac{3}{x^{2}+4}+\frac{\sqrt{x^{2}+4}}{x^{2}+4}\right)dx=3\int\frac{dx}{x^{2}+4}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^{2}+4}}=\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+4}\right)+\mathcal{C}$.

Exerciții propuse

Să se calculeze integralele nedefinite ale următoarelor funcții:

1) $f(x)=x^{2}-2x+3,\ x\in\mathbb{R}$; **2)** $f(x)=x+\frac{5}{x},\ x<0$; **3)** $f(x)=2x-\frac{3}{x}+\sqrt{x},\ x>0$;

4) $f(x)=\left(1+\sqrt{x}\right)^{2},\ x\geq 0$; **5)** $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}},\ x>0$; **6)** $f(x)=x-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^{2}},\ x<0$;

7) $f(x)=x-3\sqrt{x}+5\sqrt[4]{x},\ x\geq 0$; **8)** $f(x)=\frac{x-1}{x^{3}},\ x<0$; **9)** $f(x)=x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x},\ x\geq 0$;

10) $f(x)=\dfrac{x-3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}, x>0;$ **11)** $f(x)=\dfrac{9-x}{3+\sqrt{x}}, x\ge 0;$ **12)** $f(x)=x-3e^{x}, x\in\mathbb{R};$

13) $f(x)=\dfrac{1}{x}-2^{x}+\dfrac{1}{x^{2}}-3^{x}, x>0;$ **14)** $f(x)=\dfrac{(x-1)^{3}}{x^{3}}, x<0;$ **15)** $f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^{2}}{x},$

$x>0;$ **16)** $f(x)=\dfrac{1}{x^{2}-4}, x>2;$ **17)** $f(x)=\dfrac{x}{x^{2}-4}, x<-2;$ **18)** $f(x)=\dfrac{x^{2}}{x^{2}-4}, x>2;$

19) $f(x)=\dfrac{x^{2}+3}{x^{2}-4}, x>2;$ **20)** $f(x)=\dfrac{1}{3x^{2}-4}, x>\dfrac{2}{\sqrt{3}};$ **21)** $f(x)=\dfrac{1}{x^{2}+4}, x\in\mathbb{R};$

22) $f(x)=\dfrac{x^{2}}{x^{2}+4}, x\in\mathbb{R};$ **23)** $f(x)=\dfrac{2x^{2}+1}{x^{2}+4}, x\in\mathbb{R};$ **24)** $f(x)=\dfrac{1}{3x^{2}+5}, x\in\mathbb{R};$

25) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^{2}}}, x\in(-3,3);$ **26)** $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{9-x^{2}}}, x\in(-3,3);$ **27)** $f(x)=$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}-4}}, x>2;$ **28)** $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^{2}-4}}, x>2;$ **29)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x^{2}-5}}, x>\dfrac{\sqrt{5}}{2};$

30) $f(x)=\dfrac{2x^{2}+3}{(x^{2}-1)(x^{2}+4)}, x>1;$ **31)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^{2}-3}+1}{x^{2}-3}, x>\sqrt{3};$

32) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^{2}x\cos^{2}x}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right);$ **33)** $f(x)=-\dfrac{2}{\sin^{2}x}+\dfrac{3}{\cos^{2}x}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right);$

34) $f(x)=\sin^{2}\dfrac{x}{2}, x\in\mathbb{R};$ **35)** $f(x)=\mathrm{tg}^{2}x, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right);$ **36)** $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2},$

$x\in\mathbb{R};$ **37)** $f(x)=\dfrac{\sin x}{3\sin x+4\cos x}, g(x)=\dfrac{\cos x}{3\sin x+4\cos x}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right).$

2) Metoda intergrării prin părți

Intergrala nedefinită şi diferențiala

Un rol deosebit de important în calculul integral îl joacă diferențiala unei funcții. Fie $f:I\to\mathbb{R}, I$ interval, o funcție derivabilă şi $x_0\in I$. Funcția f este derivabilă în x_0 dacă există şi este finită limita (raportului) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)\in\mathbb{R}$. Aceasta înseamnă că pentru *h* mic, $h\neq 0$, raportul $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se poate aproxima cu numărul $f'(x_0)$, adică putem scrie $f(x_0+h)-f(x_0)\approx f'(x_0)h$, unde membrul stâng se notează de obicei cu $\Delta f=f(x_0+h)-f(x_0)$ (Δf îl citim: delta *f*) şi reprezintă creşterea lui f de la x_0 la x_0+h (Fig. 2).

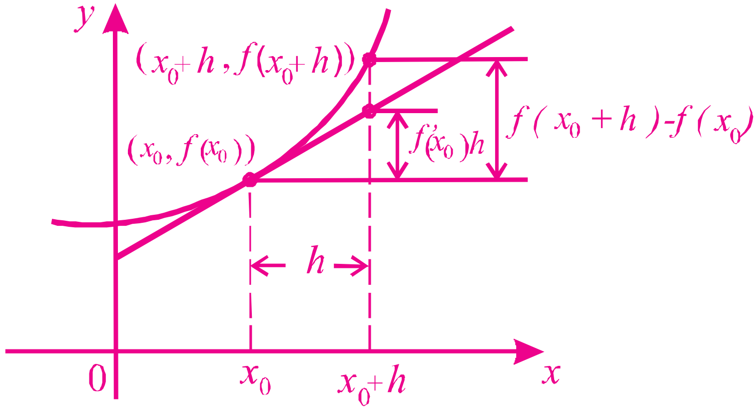


Fig. 2

Aproximarea de mai sus este bună în sensul că pentru h mic, diferența dintre cele două expresii $\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]-f'(x_0)h$ este mică comparativ cu h, adică raportul $\dfrac{\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]-f'(x_0)h}{h}$ tinde la zero dacă h tinde la zero.

Într-adevăr, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]-f'(x_0)h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-$

$-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x_0)h}{h}=f'(x_0)-f'(x_0)=0$.

Fie $x\in I$, arbitrar. Atunci avem următoarea:

Definiție. Fie $h\neq 0$. Diferența $f(x+h)-f(x)$ se numește **creșterea lui** f **de la** x **la** $x+h$ și se notează $\Delta f=f(x+h)-f(x)$.

Produsul $f'(x)h$ se numește **diferențiala lui** f **în** x **cu creșterea** h și se notează $df=f'(x)h$.

Așadar $\Delta f\approx df$.

Exemplu. **Să calculăm diferențiala funcției $f(x)=x^2, x>0$. Funcția dă aria pătratului de latură x (Fig. 3).**

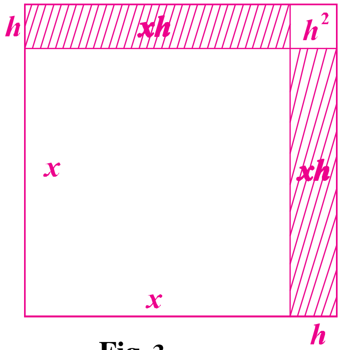


Fig. 3

Dacă lungimea fiecărei laturi crește de la x la $x+h$, atunci aria crește de la $f(x)$ la $f(x+h)$ și deci

$$\Delta f = f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2 = =2xh+h^2.$$

Ca estimare a acestei schimbări putem utiliza diferențiala $df = f'(x)h = 2xh$. Eroarea comisă ca urmare a acestei aproximări este egală cu $\Delta f - df = h^2$, care este mică în raport cu h, în sensul că

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f - df}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0.$$

Uneori în locul lui h folosim notația Δx și deci $df = f'(x)\Delta x$. Diferențiala variabilei independente x este egală cu $dx = \Delta x$. Cu acestea $df = f'(x)dx$, ceea ce arată legătura strânsă dintre diferențială și derivata unei funcții. Mai precis are loc următoarea:

> **Teoremă (Legătura derivatei cu diferențiala). Fie $f: I \to \mathbb{R}, I$ interval și $x \in I$. Funcția f are diferențială în punctul x și în plus $df = f'(x)dx$ sau $f' = \frac{df}{dx}$.**

În virtutea acestei teoreme, via operațiile cu funcții derivabile, au loc următoarele reguli pentru diferențiale:

Dacă f, g sunt derivabile pe un interval deschis, atunci:

$d(f \pm g) = df \pm dg$ (diferențiala sumei – diferenței este egală cu suma – diferența diferențialelor).

1) $d(kf) = kdf, k -$ constantă.

2) $d(fg) = gdf + fdg$.

3) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}, g \neq 0$.

4) $d(\varphi \circ f) = \varphi'(f)df, \forall \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcție derivabilă.

De exemplu, pentru 3) avem:

$d(fg) = (fg)'dx = (f'g + fg')dx = g(f'dx) + f(g'dx) = gdf + fdg$.

Integrarea prin părți

O metodă ce permite calcularea integralelor unor funcții date este oferită de metoda integrării prin părți (este operația inversă derivării produsului $(uv)'=u'v+uv'$, u,v funcții derivabile). Are loc următoarea:

Teoremă. Fie $u,v:I\to\mathbb{R}, I$ interval, două funcții derivabile cu derivatele continue. Atunci funcțiile $u'v, uv'$ admit primitive și mulțimile lor de primitive sunt legate prin relația: $\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$.

Demonstrație. Funcțiile $u'v$ și uv' fiind continue pe I (ca produs de funcții continue), admit primitive pe I. Funcțiile u,v fiind derivabile rezultă uv este o funcție derivabilă și avem $(uv)'=u'v+uv'$ sau $uv'=(uv)'-u'v$. De aici, prin integrare, rezultă $\int u(x)v'(x)dx=\int (u(x)v(x))'dx-\int u'(x)v(x)dx$ sau $\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)+\mathcal{C}-\int u'(x)v(x)dx$ $\left(\int u'=u+\mathcal{C}\right)$ sau $\int u(x)v'(x)dx=$ $=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$ $\left(\int u=\int u+\mathcal{C}\right)$. ■

Observații. 1) Faptul că integrarea prin părți este operația inversă a derivării produsului, se reprezintă schematic ca mai jos.

$$\boxed{f(x)=u(x)v(x)}$$

$$\boxed{f'(x)} = \boxed{u'(x)v(x)} + \boxed{u(x)v'(x)} \quad \textbf{(Derivare)}$$

$$\boxed{\int f'(x)dx} = \boxed{\int u'(x)v(x)dx} + \boxed{\int u(x)v'(x)dx} \quad \textbf{(Integrare)}$$

$$||$$

$$\boxed{f(x)+\mathcal{C}}$$

Observați că membrul drept al formulei integrării prin părți este simetric în u și v. Din acest motiv se iau u și v astfel încât dată fiind una din integrale de calculat, atunci cea de-a doua să fie mai simplă.
Formula are forma
$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$, fiind cunoscută și sub denumirea de **integrare a produsului.**

2) Formula care apare în teoremă este cunoscută sub numele de **formula integrării prin părți (pentru integrala nedefinită).** Funcțiile u, v se numesc **părți** ale integrandului.

3) De obicei se ia u funcția mai complicată de sub semnul integrală astfel încât a doua integrală din formulă să fie mai simplă decât prima integrală. Dacă integrala din membrul drept al formulei este mai dificilă, atunci se face o altă alegere pentru u şi v'. În a doua integrală apare v obținut din v' prin integrere. De aceea, în prima integrală, alegem pe v' o funcție mai simplă, ca prin integrare să determinăm pe v. Am văzut că integrarea este mai dificilă decât derivarea.

Exemplu. Să se calculeze $\int xe^x dx$.

R. Dacă punem $u(x) = e^x$ şi $v'(x) = x$, atunci $u'(x) = e^x$ şi $v(x) = \frac{x^2}{2}$, iar formula integrării prin părți are forma $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx$. Observăm că a doua integrală este mai complicată decât prima!

Luăm atunci $u(x) = x$ şi $v'(x) = e^x$, când $u'(x) = 1, v(x) = e^x$. Deci $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + \mathcal{C}$.

4) Deoarece $v'(x)dx = dv(x)$ şi $u'(x)dx = du(x)$, iar diferențiala produsului este $d(uv) = udv + vdu$, formula integrării prin părți scrisă cu ajutorul diferențialelor are forma

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Cele două părți ale integrandului sunt "$u(x)$" şi "$v'(x)dx$" sau "u" şi "dv". Pentru a aplica integrarea prin părți este necesar să calculăm $u'(x)$ (**prin derivare**) şi $v(x)$ (**prin integrare**).

În general, egalitatea $\int udv + \int vdu = uv$, arată că dacă este cunoscută o integrală din membrul stâng atunci se poate calcula şi cealaltă.

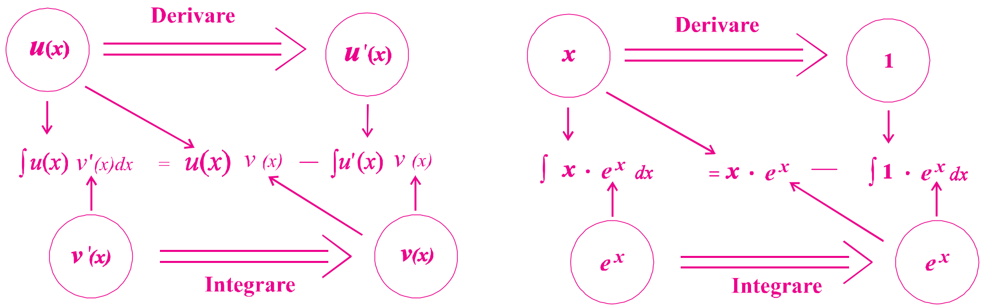
Pentru a aplica uşor formula integrării prin părți, aranjăm funcțiile sub forma:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \begin{cases} u(x) = \\ \\ v'(x) = \end{cases} & \Rightarrow & \begin{cases} u'(x) = & (\textit{prin derivare}) \\ v(x) = & \begin{pmatrix} \textit{prin integrare;} \\ v \textit{ este o primitivă} \end{pmatrix} \end{cases} \\ (\textit{din prima integrală}) & & (\textit{din a doua integrală}) \end{array}}$$

Pentru simplitate vom scrie u în loc de $u(x)$ şi v' în loc de $v'(x)$.
În scriere diferenţială

$$\begin{cases} u = \\ \\ dv = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = & (\text{prin diferențiere}) \\ v = & \left(\begin{matrix}\text{prin integrare;} \\ v \text{ este o primitivă}\end{matrix}\right). \end{cases}$$
$$(\text{din prima integrală}) \qquad (\text{din a doua integrală})$$

Sugestiv formula integrării prin părţi poate fi redată prin diagrama următoare (alăturat este un caz particular)



unde prima integrală este luată din produsul funcţiilor de pe prima verticală a diagramei $(u(x)v'(x))$ este egală cu produsul funcţiilor de pe diagonala principală a diagramei $(u(x)v(x))$ minus integrală din produsul funcţiilor de pe a doua verticală a diagramei $(u'(x)v(x))$.

Exemplu. **Să se calculeze** $\int xe^x dx, x \in \mathbb{R}$.

R. Notăm: $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \left(\int e^x dx = e^x + \mathcal{C}\right) \end{cases}$.

Deci $\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + \mathcal{C} = (x-1)e^x + \mathcal{C}$

$\int uv' \quad = uv \quad - \int u'v$

În scriere diferenţială avem:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \quad \left(\int dv = v + \mathcal{C} = \int e^x dx = e^x + \mathcal{C}\right)$$

alegem $v = e^x$

Deci $\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v} \underbrace{dx}_{du} = xe^x - e^x + \mathcal{C} = (x-1)e^x + \mathcal{C}$.

$$\int u \cdot dv = u\, v - \int v\, du$$

În alegerea lui u şi dv în formula integrării prin părţi ne ghidăm, atunci când este posibil, după următoarele consideraţii:

1) Alegem dv astfel încât $\int dv$ este uşor de determinat.

2) Alegem u astfel încât u' să fie mai simplă decât u pentru integrare.

Este posibil de aplicat integrarea prin părţi de două sau mai multe ori pentru a evalua integrala dată.

Exemplu. **Să se calculeze: 1) $I = \int x^2 e^x dx,\ x \in \mathbb{R}$; 2) $I = \int e^x \sin x dx,\ x \in \mathbb{R}$.**

R. 1) Notăm: $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = e^x \end{cases}$ şi deci

$$I = \int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v} \underbrace{(2xdx)}_{du} = x^2 e^x - 2\int xe^x dx, \quad (1).$$

Pentru $I_1 = \int xe^x dx$ aplicăm, din nou, formula integrării prin părţi. Punem:

$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$ şi deci $I_1 = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\, \underbrace{dx}_{du} = xe^x - e^x + \mathcal{C} =$

$= (x-1)e^x + \mathcal{C}$.

Revenim în (1) cu I_1 şi obţinem:

$$I = x^2 e^x - 2\left[(x-1)e^x + \mathcal{C}\right] = x^2 e^x - 2(x-1)e^x + \mathcal{C} = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + \mathcal{C}.$$

Dacă am fi făcut alegerea

$\begin{cases} u = e^x \\ dv = x^2 dx \end{cases}$, atunci $\begin{cases} du = e^x dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$ şi integrala I devine:

$$I = \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{x^2 dx}_{dv} = \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v} \cdot \underbrace{e^x}_{u} - \int \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v} \underbrace{e^x dx}_{du}.$$

Constatăm că a doua integrală e mai complicată decât cea dată!

2)Notăm $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$ şi de aici

$I = \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx, \quad (1)$.

Pentru $\int e^x \cos x dx$, aplicăm formula integrării prin părți şi avem:

$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases}$. Deci $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx, \quad (2)$.

A doua integrală din (2) este chiar *I*. Din (1) şi (2) rezultă:

$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$ sau $2I = (\sin x - \cos x)e^x$, adică $I = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + \mathcal{C}$.

5) Integrarea prin părți se aplică în cazul integralelor de forma (acolo unde au sens):

• $\int x^n \begin{Bmatrix} \boldsymbol{e^{\alpha x}} \\ \boldsymbol{\sin \alpha x} \\ \boldsymbol{\cos \alpha x} \end{Bmatrix} dx, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ unde sub integrală avem produsul dintre x^n şi una din funcțiile din paranteza acoladă. În acest caz se ia $u = x^n$ şi $v' = e^{\alpha x} (\sin \alpha x, \cos \alpha x)$.

Se aplică de *n* ori integrarea prin părți.

Rezultatul final este $\begin{Bmatrix} Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \\ P_n(x)\sin \alpha x + R_n(x)\cos \alpha x \end{Bmatrix} + \mathcal{C}$, unde $Q_n(x), P_n(x), R_n(x)$ sunt funcții polinomiale de grad n .

Deci $\left(\begin{Bmatrix} Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \\ P_n(x)\sin \alpha x + R_n(x)\cos \alpha x \end{Bmatrix} \right)' = x^n \begin{Bmatrix} e^{\alpha x} \\ \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{Bmatrix}, \forall x$ (Forma a doua din membrul stâng corespunde la ultimele forme din membrul drept).

Primitivele funcției date se pot obține din ultima egalitate prin identificare. Se determină coeficienții lui Q_n, P_n, R_n prin **metoda coeficienților nedeterminați.**

Exemplu. Să se calculeze: 1) $\boldsymbol{I = \int x^2 e^x dx, x \in \mathbb{R}}$**; 2)** $\boldsymbol{I = \int x \sin x dx, x \in \mathbb{R}}$ **.**

R. 1) Am calculat, mai sus, prin părți această integrală. Acum o vom calcula ținând seama de egalitatea

$\int x^2 e^x dx = (ax^2 + bx + c)e^x + \mathcal{C}$.

Coeficienţii a,b,c se determină din cerinţa $\left[\left(ax^2+bx+c\right)e^x\right]'=x^2e^x, \forall x\in\mathbb{R}$, adică $\left[ax^2+(2a+b)x+b+c\right]e^x=x^2e^x, \forall x\in\mathbb{R}$. De aici, $a=1, 2a+b=0, b+c=0$, adică $a=1, b=-2, c=2$.

Aşadar, $\int x^2e^xdx=\left(x^2-2x+2\right)e^x+\mathcal{C}$.

În general $\boxed{\int P_n(x)e^{\alpha x}dx=Q_n(x)e^{\alpha x}+\mathcal{C}}$, unde $P_n(x), Q_n(x)$ sunt funcţii polinomiale de grad n.

2) Punem $\begin{cases} u=x \\ v'=\sin x \end{cases}$ şi obţinem $\begin{cases} u'=1 \\ v=-\cos x \end{cases}$. Deci $\int x\sin x dx=-x\cos x+\int \cos x\,dx=$
$=-x\cos x+\sin x+\mathcal{C}$.

Altfel, punem $\int x\sin x\,dx=(ax+b)\sin x+(cx+d)\cos x+\mathcal{C}$.

Din $\left[(ax+b)\sin x+(cx+d)\cos x\right]'=x\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă $\left[a-d-(c+1)x\right]\sin x+$
$+(b+c+ax)\cos x=0, \forall x$. De aici deducem $a-d-(c+1)x=0, b+c+ax=0, \forall x$. În fine, din ultimile egalităţi găsim $a=d=0, c=-1, b=1$.

Aceeaşi notaţie o facem dacă în locul lui x^n avem funcţia polinomială de grad $n, P_n(x)$. La fiecare integrare prin părţi, în a doua integrală din formulă scade cu o unitate gradul funcţiei polinomiale.

• $\int x^n \begin{Bmatrix} \mathbf{\ln x} \\ \mathbf{\arcsin x} \\ \mathbf{arctg\, x} \end{Bmatrix} dx, n\in\mathbb{N}$, unde sub integrală avem produsul dintre x^n şi una din funcţiile din paranteza acoladă. Se alege $u=\ln x(\arcsin x, \operatorname{arctg} x)$, iar $v'(x)=x^n$ sau sub formă diferenţială $u=\ln x, dv=x^n dx$.

Aceeaşi notaţie se face şi pentru integrala în care în locul lui x^n avem $P_n(x)$ funcţie polinomială de grad n.

Exemplu. Să se calculeze: 1) $\int \ln x\,dx, x>0$; 2) $\int \arcsin x\,dx, -1\le x\le 1$.

R. 1) Avem: $\begin{cases} u=\ln x \\ v'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=\dfrac{1}{x} \\ v=x \end{cases}$ şi avem: $\int \ln x\,dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+\mathcal{C}$.

2)Vom determina, mai întâi, o primitivă a funcţiei $f(x)=\arcsin x$ pe $(-1,1)$, utilizând formula integrării prin părţi.

Punem $\begin{cases} u=\arcsin x \\ v'=1 \end{cases}$ şi avem $\begin{cases} u'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v=x \end{cases}$. Observaţi că u este derivabilă pe $(-1,1)$, dar nu şi pe $[-1,1]$. Deci $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \int \left(\sqrt{1-x^2}\right)' dx =$

$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + \mathcal{C}, x \in (-1,1)$.

Vom genera o primitivă G a funcţiei $f(x) = \arcsin x$ pe $[-1,1]$ (fiind continuă există G !) cu ajutorul primitivei $F:(-1,1) \to \mathbb{R}, F(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, punând

$$G(x) = \begin{cases} k_1, x = -1 \\ F(x), x \in (-1,1) \\ k_2, x = 1 \end{cases}$$

unde constantele k_1, k_2 se determină din cerinţa ca G să fie continuă la dreapta în $x=-1$ şi la stânga în $x=1$. Obţinem: $k_1 = \lim\limits_{x \searrow -1} F(x) = \frac{\pi}{2}, k_2 = \lim\limits_{x \nearrow 1} F(x) = \frac{\pi}{2}$.

Acum $\int \arcsin x\,dx = G(x) + \mathcal{C}, \forall x \in [-1,1]$.

- $\int \begin{Bmatrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{\beta x} \\ \ln x \\ \arcsin x \\ \text{arctg}\, x \end{Bmatrix} dx, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se ia u una din funcţiile din a doua paranteză acoladă, $u = e^{\beta x}(\ln x, \arcsin x, \text{arctg} x)$ şi v' una din funcţiile din prima paranteză acoladă, $v' = \sin \alpha x(\cos \alpha x)$. După aplicarea de două ori a formulei integrării prin părţi se obţine integrala iniţială cu un anumit coeficient. Relaţia obţinută este o ecuaţie liniară de necunoscută integrala cerută!

Exemplu. **Să se calculeze $I = \int e^x \sin x\,dx, x \in \mathbb{R}$.**

R. Din $\begin{cases} u = e^x \\ v' = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = e^x \\ v = -\cos x \end{cases}$ şi formula integrării prin părţi dă

$I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx3$.

Pentru integrala din dreapta se aplică, din nou, integrarea prin părţi punând

$\begin{cases} u = e^x \\ v' = \cos x \end{cases}$ când $\begin{cases} u' = e^x \\ v = \sin x \end{cases}$. Deci $\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - I$.

În final, $I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$ sau $I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \mathcal{C}$.

Observaţii. **1)** Dacă $J = \int e^x \cos x\,dx$, din formula integrării prin părţi rezultă $I = -e^x \cos x + J$ **(1)**, iar din a doua integrare prin părţi $J = e^x \sin x - I, (\mathbf{2})$.

Din **(1)** şi **(2)** rezultă un sistem de necunoscute *I* şi *J*.

2) Are loc egalitatea

$$\boxed{\int e^x \sin x\,dx = e^x\left(a\cos x + b\sin x\right) + \mathcal{C}}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$ se determină din egalitatea $\left[e^x\left(a\cos x + b\sin x\right)\right]' = e^x \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, adică $\left(a+b\right)\cos x + \left(b-a\right)\sin x = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$.

Pentru $x = 0$ rezultă $a + b = 0$, iar pentru $x = \frac{\pi}{2}$ rezultă $b - a = 1$.

Găsim $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$. Deci $\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x\left(-\cos x + \sin x\right) + \mathcal{C}$.

Probleme propuse

1. Să se calculeze integralele:

a).1) $\int x \ln x\,dx, x > 0;$ **2)** $\int x^2 \ln x\,dx, x > 0;$ **3)** $\int \ln^2 x\,dx, x > 0;$ **4)** $\int x^3 \ln^2 x\,dx, x > 0;$

5) $\int \left(x^2 - 3x\right)\ln x\,dx, x > 0;$ **6)** $\int \ln\left(x^2 + 1\right)dx, x \in \mathbb{R};$ **7)** $\int \frac{\ln x}{x^2}dx, x > 0;$ **8)** $\int \sqrt{x}\ln x\,dx, x > 0.$

.b) 1) $\int x\,e^{-x}dx, x \in \mathbb{R};$ **2)** $\int x^2 e^{2x}dx, x \in \mathbb{R};$ **3)** $\int x \cdot 3^x\,dx, x \in \mathbb{R};$ **4)** $\int x^2 5^x\,dx, x \in \mathbb{R};$

5) $\int \left(x^2 - 2x - 1\right)e^x\,dx, x \in \mathbb{R};$ **6)** $\int \left(x^3 + 5x^2 - 2\right)e^{2x}\,dx;$ **7)** $\int \left(x^2 + 2x\right)e^{3x}dx, x \in \mathbb{R};$

8) $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx, x \in \mathbb{R}$.

c) 1) $\int x \arcsin x\,dx, x \in \left(-1,1\right)$ **şi apoi** $x \in \left[-1,1\right]$; **2)** $\int \arccos x\,dx, x \in \left(-1,1\right)$ **şi apoi** $x \in [-1,1];$ **3)** $\int \operatorname{arctg} x\,dx, x \in \mathbb{R};$ **4)** $\int x \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R};$ **5)** $\int \left(\arcsin x\right)^2 dx, x \in \left(-1,1\right).$

d) 1) $\int e^x \sin x\,dx, x \in \mathbb{R};$ **2)** $\int e^x \cos x\,dx, x \in \mathbb{R};$ **3)** $\int 2^x \sin x\,dx, x \in \mathbb{R};$ **4)** $\int e^{2x}\sin 3x\,dx,$ $x \in \mathbb{R};$ **5)** $\int e^x \sin^2 x\,dx, x \in \mathbb{R};$ **6)** $\int e^{2x}\cos^2 x\,dx, x \in \mathbb{R}.$

e) 1) $\int x \sin x\,dx, x \in \mathbb{R};$ **2)** $\int x^2 \sin x\,dx, x \in \mathbb{R};$ **3)** $\int x \cos x\,dx, x \in \mathbb{R};$ **4)** $\int x \sin 3x\,dx,$ $x \in \mathbb{R};$ **5)** $\int x \sin^2 x\,dx, x \in \mathbb{R};$ **6)** $\int x^2 \cos 2x\,dx, x \in \mathbb{R};$ **7)** $\int \left(x^2 - 3x + 5\right)\sin 2x\,dx,$ $x \in \mathbb{R};$ **8)** $\int x^3 \sin x\,dx, x \in \mathbb{R}.$

f) 1) $\int \sqrt{x^2 + 9}\,dx, x \in \mathbb{R};$ **2)** $\int \sqrt{x^2 - 9}\,dx, x \in \left(3,\infty\right)$ **şi apoi** $x \in \left[3,\infty\right);$ **3)** $\int \sqrt{16 - x^2}\,dx,$ $x \in \left(-4,4\right)$ **şi apoi** $x \in \left[-4,4\right];$ **4)** $\int x\sqrt{x^2 - 9}\,dx, x > 3;$ **5)** $\int x^2\sqrt{x^2 - 9}\,dx, x > 3;$ **6)** $\int x\sqrt{x^2 + 1}\,dx,$ $x \in \mathbb{R}.$

2. Să se arate că următoarele funcții admit primitive pe domeniul de definiție și să se calculeze o primitivă a lor:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}, x\ge 1\\ x^2-x, x<1\end{cases}$; 2) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x\ln x, x>0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+4}, x\le 0\\ 2+\sin x, x>0\end{cases}$; 4) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2}, x\in[0,3]\\ x^2-3x, x>3\end{cases}$;

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}xe^x, x\le 0\\ x^2\ln x, x>0\end{cases}$; 6) $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x\,\mathrm{arctg}\, x, x\ge 0\\ \arcsin x, x\in(-1,0)\end{cases}$;

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\ln(x^2+1), x>0\\ xe^{2x}, x\le 0\end{cases}$; 8) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^x\sin x, x\le 0\\ xe^x, x>0\end{cases}$;

9) $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x\arcsin x, x\in[0,1]\\ x\ln(-x), x<0\end{cases}$; 10) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=$

$=\begin{cases}x\sqrt{x^2+1}, x\le 0\\ \sqrt{x}-x^2, x>0\end{cases}$; 11) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\max(e^x,1+xe^x)$; 12) $f:(0,2)\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\sqrt{1+x^2}\min(x,x^3)$; 13) $f:(0,2)\to\mathbb{R}, f(x)=\max(x,x^2)\sqrt{4-x^2}$.

3. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^3\ln x$. Să se determine primitiva F a lui f care verifică $F(1)=0$.

4. 1) Fie $I=\int e^x\sin^2 x\,dx, J=\int e^x\cos^2 x\,dx$. Să se calculeze $I+J, J-I$ și să se deducă I și J.

2) Fie $I=\int e^x\cos x\,dx, J=\int e^x\sin x\,dx$. Să se arate că $I+J=e^x\sin x, I-J=e^x\cos x$ și să se deducă I, J.

5. 1) Să se determine funcția derivabilă $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietățile $f'(x)=\ln^3 x$ și $f(1)=0$.

2) Să se determine funcția derivabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietățile $e^x f'(x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$ și $f(0)=3$. Calculați $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

1) Metoda integrării prin substituție (Schimbare de variabliă)

Există situații în care funcția de integrat nu figurează în tabelul cu primitive uzuale și nici nu se poate integra utilizând formula integrării prin părți deși este vorba **tot de integrarea unui produs**. Totuşi realizând o substituție convenabilă (u - substituție) integrala noii funcții să se realizeze cu unul din mijloacele enunțate. Dacă $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă, atunci am văzut în paragraful precedent că diferențiala lui f este egală cu produsul dintre derivata lui f și diferențiala argumentului, adică $df(x)=f'(x)dx$. În cele ce urmează se prezintă două tehnici de lucru, **ambele implicând substituția**, care permit calcularea integralelor unor funcții date, când acestea se pot aduce la o formă convenabilă. Este operația inversă a derivării compunerii $(f\circ g)'=f'(g)\cdot g'$, unde f,g sunt funcții derivabile. Metoda se mai numeşte şi a **schimbării de variabilă deoarece de la integrarea în raport cu variabila veche x se trece la integrarea în raport cu noua variabilă** u. Se disting aici substituțiile algebrice şi cele trigonometrice.

Prima metodă a substituției (a schimbării de variabilă)

Teoremă. Fie $I,J\subseteq\mathbb{R}$ intervale şi $I\xrightarrow{\varphi}J\xrightarrow{h}\mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:
1) φ este derivabilă; **2)** h admite primitive (H o primitivă a sa).
Atunci funcția $(h\circ\varphi)\cdot\varphi'$ admite primitive pe I şi mai mult

$$\int h(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=H(\varphi(x))+\mathcal{C}.$$

Demonstrație. Să observăm că $H\circ\varphi$ este o funcție derivabilă (fiind compunere de funcții derivabile). Din $(H\circ\varphi)'=H'(\varphi)\cdot\varphi'=h(\varphi)\cdot\varphi'=(h\circ\varphi)\cdot\varphi'$ rezultă că $H\circ\varphi$ este o primitivă pentru $(h\circ\varphi)\cdot\varphi'$. ■

Observații. 1) Spunem că φ **este funcția care schimbă variabila**.
Vom înlocui formal $\varphi(x)=u$ şi $\varphi'(x)dx=du$ (spunem că am făcut substituția $u=\varphi(x)$ şi apoi calculăm diferențiala $du=\varphi'(x)dx$) în $I=\int h(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ când obținem **integrala asociată** $I_1=\int h(u)\,du$, mai uşor de calculat (fie cu tabelul de integrale uzuale, fie folosind formula integrării prin părți).
Din I_1 obținem I înlocuind u cu $\varphi(x)$. Prin această metodă **integrarea în raport cu variabila veche x a fost înlocuită cu integrarea în raport cu noua variabilă** u.
Se mai spune că φ este "funcția interioară", iar h este "funcția exterioară".

Schematic

Avem de calculat
$I=\int h(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$
→
Se face substituția
$u=\varphi(x)\Rightarrow du=\varphi'(x)\,dx$
→

→
Noua integrală de calculat
$I_1=\int h(u)\,du=H(u)+\mathcal{C}$
(integrala asociată)
→
Se înlocuieşte u cu $\varphi(x)$
→

→
Integrala de calculat
$I=H(\varphi(x))+\mathcal{C}$

Pentru a-l obține pe I_1, în integrala I se înmulțește după semnul integrală cu o constantă pentru a evidenția $\varphi'(x)\,dx$ și se împarte în fața semnului integrală cu același număr.

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze $I = \int xe^{x^2}\,dx, x \in \mathbb{R}$.

R. Notăm $u = x^2$ și deci $du = 2x\,dx$. Se rescrie I sub forma $I = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(2x)\,dx$ și deci integrala asociată este $I_1 = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + \mathcal{C}$.

Revenim la integrala inițială punând în locul lui u, x^2 și deci avem: $I = \frac{1}{2}e^{x^2} + \mathcal{C}$.De obicei se trece de la I la I_1 scriind $I = \int e^{x^2} x\,dx$ și utilizând egalitatea $\frac{1}{2}du = x\,dx$ (din $du = 2x\,dx$). De aici $I_1 = \int e^u \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + \mathcal{C}$ și $I = \frac{1}{2}e^{x^2} + \mathcal{C}$.

2. Să se calculeze $I = \int \sin\left(\frac{x}{5}\right)dx, x \in \mathbb{R}$.

R. Punem $u = \frac{x}{5}$ și deci $du = \frac{1}{5}dx$ sau $5du = dx$. Deci integrala asociată este $I_1 = \int (\sin u)5\,du = 5\int \sin u\,du = -5\cos u + \mathcal{C}$. Înlocuind aici u cu $\frac{x}{5}$ se obține $I = -5\cos\left(\frac{x}{5}\right) + \mathcal{C}$.

3. Să se calculeze $I = \int x^2\sqrt{2x^3+5}\,dx, x > 0$.

R. Substituim $u = 2x^3 + 5$ și obținem $du = \left(6x^2\right)dx$ sau $\frac{1}{6}du = x^2dx$. Integrala asociată este $I_1 = \int \sqrt{u}\cdot\frac{1}{6}du = \frac{1}{6}\int\sqrt{u}\,du = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}u\sqrt{u} + \mathcal{C} = \frac{1}{9}u\sqrt{u} + \mathcal{C}$.

Integrala dată este egală cu $I = \frac{1}{9}\left(2x^3+5\right)\sqrt{2x^3+5} + \mathcal{C}$.

4. Să se calculeze $I = \int \frac{2x+1}{(x+1)^2}dx, x > -1$.

R. Punem $u = x + 1$ și deci $du = dx$, iar integrala asociată este $I_1 = \int \frac{2(u-1)+1}{u^2}du =$

$$= \int \frac{2u-1}{u^2}du = 2\int\frac{1}{u}du - \int\frac{du}{u^2} = 2\ln|u| + \frac{1}{u} + \mathcal{C}.$$

De aici $I = 2\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + \mathcal{C}$.

2) Nu se poate pune egalitate între mulțimile $I = \int h(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ şi $I_1 = \int h(u)\,du$ deoarece prima este mulțimea primitivelor funcției $(h \circ \varphi) \cdot \varphi'$, care sunt funcții definite pe *I*, în timp ce a doua mulțime reprezintă primitivele funcției h, care sunt funcții definite pe J. Chiar dacă $I = J$, în general cele două mulțimi sunt distincte.
Punând în locul funcției *h* funcțiile uzuale se obține un tabel similar celui de la primitive uzuale. Se obține din primul tabel înlocuind *x* cu φ şi înmulțind funcția obținută cu φ'. În tabel am evidențiat transformările indicate în schema de la observația **1)**.

Tabel de integrale nedefinite

	Integrala inițială	$u=\varphi(x)$ $du=\varphi'(x)dx$	**Integrala asociată**	$u=\varphi(x)$	**Integrala inițială**
1	$\int \varphi^{\alpha}(x)\varphi'(x)dx$ $\alpha \neq -1, \varphi(I) \subset (0,\infty)$	$\longrightarrow$	$\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}$	$\longrightarrow$	$\frac{(\varphi(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}$
2	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx$ $\varphi(x) \neq 0, x \in I$	$\longrightarrow$	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + \mathcal{C}$	$\longrightarrow$	$\ln\lvert\varphi(x)\rvert + \mathcal{C}$
3	$\int a^{\varphi(x)}\varphi'(x)dx$ $a > 0, a \neq 1$	$\longrightarrow$	$\int a^{u}\,du = \frac{a^{u}}{\ln a} + \mathcal{C}$	$\longrightarrow$	$\frac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + \mathcal{C}$
4	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) - a^2}dx$ $\varphi(x) \neq \pm a, x \in I, a \neq 0$	$\longrightarrow$	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} =$ $\frac{1}{2a} \cdot \ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + \mathcal{C}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{\varphi(x)-a}{\varphi(x)+a}\right\rvert + \mathcal{C}$
5	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)+a^2}dx, a \neq 0$	$\longrightarrow$	$\int \frac{du}{u^2+a^2} =$ $= \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg}\frac{u}{a} + \mathcal{C}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi(x)}{a} + \mathcal{C}$
6	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2 - \varphi^2(x)}}dx$ $a > 0, \varphi(I) \subset (-a,a)$	$\longrightarrow$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} =$ $= \arcsin\frac{u}{a} + \mathcal{C}$	$\longrightarrow$	$\arcsin\frac{\varphi(x)}{a} + \mathcal{C}$
7	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+a^2}}dx, a \neq 0$	$\longrightarrow$	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} =$ $= \ln\left(u + \sqrt{u^2+a^2}\right) +$ $+\mathcal{C}$	$\longrightarrow$	$\ln\left(\varphi(x) +\right.$ $\left.+\sqrt{\varphi^2(x)+a^2}\right) + \mathcal{C}$

8	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)-a^2}}dx$ $a>0, \varphi(I)\subset(-\infty,-a)$ sau (a,∞)	$\longrightarrow$	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} =$ $=\ln\left\lvert u+\sqrt{u^2-a^2}\right\rvert +$ $+\mathcal{C}$	$\longrightarrow$	$\ln\left\lvert\varphi(x)+\sqrt{\varphi^2(x)-a}\right\rvert+$ $+\mathcal{C}$
9	$\int \sin\varphi(x)\cdot\varphi'(x)dx$	$\longrightarrow$	$\int \sin u du =$ $=-\cos u+\mathcal{C}$	$\longrightarrow$	$-\cos\varphi(x)+\mathcal{C}$
10	$\int \cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x)dx$	$\longrightarrow$	$\int \cos u\, du =$ $=\sin u+\mathcal{C}$	$\longrightarrow$	$\sin\varphi(x)+\mathcal{C}$
11	$\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2\varphi(x)}dx,$ $\varphi(x)\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},$ $k\in\mathbb{Z}, x\in I$	$\longrightarrow$	$\int \frac{du}{\cos^2 u} =$ $=\operatorname{tg} u+\mathcal{C}$	$\longrightarrow$	$\operatorname{tg}\varphi(x)+\mathcal{C}$
12	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2(x)}dx,$ $\varphi(x)\neq k\pi,$ $k\in\mathbb{Z}, x\in I$	$\longrightarrow$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} =$ $=-\operatorname{ctg} u+\mathcal{C}$	$\longrightarrow$	$-\operatorname{ctg}\varphi(x)+\mathcal{C}$
13	$\int \operatorname{tg}\varphi(x)\cdot\varphi'(x)dx$ $\varphi(x)\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $k\in\mathbb{Z}, x\in I$	$\longrightarrow$	$\int \operatorname{tg} u\, du =$ $=-\ln\lvert\cos u\rvert+\mathcal{C}$	$\longrightarrow$	$-\ln\lvert\cos\varphi(x)\rvert+\mathcal{C}$
14	$\int \operatorname{ctg}\varphi(x)\cdot\varphi'(x)dx$ $\varphi(x)\neq k\pi, k\in\mathbb{Z},$ $x\in I$	$\longrightarrow$	$\int \operatorname{ctg} u\, du =$ $=\ln\lvert\sin u\rvert+\mathcal{C}$	$\longrightarrow$	$\ln\lvert\sin\varphi(x)\rvert+\mathcal{C}$

Probleme propuse

1. Să se calculeze integralele de mai jos utilizând substituția indicată

a) 1) $\int (x-1)^5\, dx, x\in\mathbb{R}, u=x-1$; 2) $\int (3x+2)^6\, dx, x\in\mathbb{R}, u=3x+2$;

3) $\int x(2x-1)^9\, dx, x\in\mathbb{R}, u=2x-1$; 4) $\int x\left(x^2+1\right)^3 dx, x\in\mathbb{R}, u=x^2+1$;

5) $\int\left(x^2-1\right)\left(x^3-3x+1\right)^5 dx, x\in\mathbb{R}, u=x^3-3x+1$; 6) $\int x^2\left(x^3+1\right)^5 dx, x\in\mathbb{R}, u=x^3+1$.

b) 1) $\int \frac{dx}{x+3}, x>-3, u=x+3$; 2) $\int \frac{dx}{2x+1}, x<-\frac{1}{2}, u=2x+1$; 3) $\int \frac{dx}{1-4x}, x>\frac{1}{4}$, $u=1-4x$; 4) $\int \frac{dx}{(2x+1)^5}, x>-\frac{1}{2}, u=2x+1$; 5) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}, u=x^2+1$;

6) $\int \frac{2x-1}{x^2+9}dx, x\in\mathbb{R}, u=x^2+9$; 7) $\int \frac{x^3dx}{(x-1)^{10}}, x>1, u=x-1$; 8) $\int \frac{x^2dx}{2x^3+1}, x>0,$ $u=2x^3+1$; 9) $\int \frac{x^2dx}{(x^3+2)^3}, x>0, u=x^3+2$; 10) $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}, x\in\mathbb{R}, u=x^2$.

c) 1) $\int \sqrt{2x+1}\,dx, x>-\frac{1}{2}, u=2x+1$; 2) $\int x\sqrt{1+x}\,dx, x\geq -1, u=1+x$; 3) $\int \sqrt[3]{(2x+1)^2}\,dx,$ $x\in\mathbb{R}, u=2x+1$; 4) $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx, x\in\mathbb{R}, u=x^2+3$; 5) $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx, x>-1,$ $u=x^3+1$; 6) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx, x<-1, u=x^2-1$; 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{(5x-1)^3}}, x>\frac{1}{5}, u=5x-1$.

d) 1) $\int e^{3x}\,dx, x\in\mathbb{R}, u=3x$; 2) $\int \frac{dx}{e^{2x}}, x\in\mathbb{R}, u=2x$; 3) $\int x^2e^{x^3}dx, x\in\mathbb{R}, u=x^3$;

4) $\int \frac{x\,dx}{e^{x^2}}, x\in\mathbb{R}, u=x^2$; 5) $\int \sqrt{x}\,e^{x\sqrt{x}}dx, x\geq 0, u=x\sqrt{x}$; 6) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx, x>0, u=\sqrt{x}$;

7) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx, x>0, u=\frac{1}{x}$; 8) $\int\left(e^{3x}-2e^{2x}+5e^x\right)dx, x\in\mathbb{R}, u=e^x$; 9) $\int x2^{3x^2}dx, x\in\mathbb{R},$ $u=3x^2$; 10) $\int x2^{-3x^2+1}dx, x\in\mathbb{R}, u=-3x^2+1$; 11) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}dx, x\in\mathbb{R}, u=e^x$.

e) 1) $\int \frac{\ln x}{x}dx, x>0, u=\ln x$; 2) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx, x>0, u=\ln x$; 3) $\int \frac{(1+\ln x)^5}{x}dx, x>0,$ $u=1+\ln x$; 4) $\int \frac{dx}{x\ln x}, x>1, u=\ln x$; 5) $\int \frac{dx}{x(\ln x+1)}, x>1, u=\ln x+1$.

f) 1) $\int \sin^2 x\cdot\cos x\,dx, x\in\mathbb{R}, u=\sin x$; 2) $\int \sin^k x\cos x\,dx, k\in\mathbb{N}^*, x\in\mathbb{R}, u=\sin x$;
3) $\int \cos^3 x\sin x\,dx, x\in\mathbb{R}, u=\cos x$; 4) $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx, x\in\mathbb{R}, u=\cos x, \left(\sin^2 x=1-\cos^2 x\right)$;
5) $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx, x\in\mathbb{R}, u=\sin x$; 6) $\int \sin^3 x\,dx, x\in\mathbb{R}, u=\cos x$; 7) $\int \cos^3 x\,dx, x\in\mathbb{R},$ $u=\sin x$; 8) $\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx, x\in\mathbb{R}, u=\sin x$; 9) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), u=\cos x$.

g) 1) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx, x\in(-1,1), u=\arcsin x$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}, x\in(0,1)$;
3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}, x\in(0,1), u=\arcsin x$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin^2 x+1}}, x\in(-1,1),$ $u=\arcsin x$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\arcsin^2 x}}, x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), u=\arcsin x$.

2. Pentru $m\in\mathbb{R}$ fie funcția $f_m:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f_m(x)=\frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+m^2}$.

1) Să se determine primitivele funcției f_0

2) Să se calculeze $\int f_m(x)\,dx, m \neq 0$

3. Să se calculeze $I = \int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx, J = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Alte substituții

Exemple 1. (Substituțiile trigonometrice) Am evaluat la integrarea prin părți integralele:
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx, x \in [-a, a], a > 0; \int \sqrt{a^2 + x^2} dx, x \in \mathbb{R}, a \neq 0; \int \sqrt{x^2 - a^2} dx, x \in I,$
cu $I \subset (-\infty, -a]$ sau $I \subset [a, \infty)$.

În continuare vom găsi expresiile acestor integrale utilizând substituțiile trigonometrice prin care "eliminăm" radicalii de sub semnul integrală.

a) Pentru $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ se pune $x = a \sin u, a > 0, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. De aici $dx = a \cos u\, du$,

$a^2 - x^2 = a^2 \cos^2 u, \sqrt{a^2 - x^2} = a|\cos u| = a \cos u, \frac{x}{a} = \sin u \Rightarrow u = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right),$

$\cos u = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$. Integrala asociată este

$$I_1 = \int a^2 \cos^2 u\, du = a^2 \int \frac{1 + \cos 2u}{2} du = a^2 \left(\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}\right) + \mathcal{C}.$$

De aici $I = \frac{a^2}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right] + \mathcal{C} =$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right] + \mathcal{C} = \frac{1}{2}\left[a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + x\sqrt{a^2 - x^2}\right] + \mathcal{C}.$$

Comparativ cu integrarea prin părți a funcției $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, x \in [-a, a]$, unde o primitivă se determina pe $(-a, a)$ (interval deschis), aici prin transformarea considerată am determinat o primitivă a funcției pe intervalul închis $[-a, a]$.

a) Pentru $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$ se pune $x = a \operatorname{tg} u, a > 0, u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, iar de aici

$dx = \frac{a\, du}{\cos^2 u}, \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{|\cos u|} = \frac{a}{\cos u}, u = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right), \sin u = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \cos u = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}},$

$\operatorname{tg} u = \frac{x}{a} \Rightarrow u = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right).$

Integrala asociată este $I_1 = a^2 \int \frac{du}{\cos^3 u} = a^2 \int \frac{\cos u\, du}{\cos^4 u} = a^2 \int \frac{\cos u\, du}{\left(1 - \sin^2 u\right)^2}$.

În ultima integrală, schimbăm din nou variabila $t = \sin u \Rightarrow dt = \cos u\, du$ și

avem de calculat integrala asociată lui $I_1, I_2 = a^2\int\frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}$, tip de integrală ce se va studia la paragraful următor.

c) Pentru $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ se pune $x=\frac{a}{\cos u}, a>0, u\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ sau $u\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

De aici $dx=\frac{a\sin u}{\cos^2 u}du$ etc.

2. Să se calculeze $I=\int\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx, x>1$.

R. Funcția de integrat are în structura sa $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$ (adică radicali de ordine diferite din aceeaşi expresie), aici x.

Se face substituția $x=u^6\left(x>1\Rightarrow u>1\Rightarrow u=\sqrt[6]{x}\right)$, unde exponentul 6 reprezintă cel mai mic multiplu comun, al ordinelor radicalilor. De aici $dx=6u^5\,du$ şi integrala asociată devine

$$I_1=\int\frac{6u^5\,du}{u^3-u^2}=6\int\frac{u^3\,du}{u-1}=6\int\frac{u^3-1+1}{u-1}du=6\left(\int\left(u^2+u+1+\frac{1}{u-1}\right)\right)du=$$

$=2u^3+3u^2+6u+6\ln(u-1)+\mathcal{C}$, iar integrala inițială $I=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left(\sqrt[6]{x}-1\right)+\mathcal{C}$.

3. Să se calculeze $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}, x>0$.

R. Punem $x=\frac{1}{u}(\text{din } x>0\Rightarrow u>0)$ şi $dx=-\frac{du}{u^2}$. Integrala asociată este

$$I_1=\int\frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u^2}\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}}=-\int\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+1}}=-\int\left(\sqrt{u^2+1}\right)'du=-\sqrt{u^2+1}+\mathcal{C}.$$

În final, $I=-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\mathcal{C}$.

Probleme propuse

Să se calculeze integralele de mai jos, utilizând substituțiile indicate:

1) $\int\frac{\sqrt{x}}{x+2}dx, x\geq 2, x=u^2$; 2) $\int\frac{dx}{2+\sqrt{x}}, x\geq 0, x=u^2$; 3) $\int\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx, x\geq 0, x=u^2$;
4) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}, x>0, x=u^4$; 5) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}, x>0, x=u^6$; 6) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}}, x>-\frac{1}{2}$,
$\sqrt{2x+1}=u$; 7) $\int\frac{\sqrt{x-2}}{x}dx, x>2, \sqrt{x-2}=u$; 8) $\int x\sqrt{x+1}\,dx, x\geq -1, \sqrt{x+1}=u$;

1.6. INTEGRAREA FUNCȚIILOR RAȚIONALE

Definiție. O funcție $f: I \to \mathbb{R}$, I interval, se numeşte **rațională** dacă $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, unde P, Q sunt funcții polinomiale cu coeficienți reali şi $Q(x)\neq 0, \forall x\in I$.

1. Descompunerea funcțiilor raționale în funcții raționale simple

Definiție. O funcție rațională se numeşte **simplă** dacă are una din formele:

1) $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ (funcția polinomială);

2) $f(x)=\frac{A}{(x-a)^n}, n\in\mathbb{N}^*, x\in I\subset(-\infty,a)$ sau $I\subset(a,\infty)$;

3) $f(x)=\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}, n\in\mathbb{N}^*, b^2-4c<0$.

Următoarea teoremă de algebră este fundamentală pentru integrarea funcțiilor raționale.

Teoremă. Orice funcție rațională poate fi reprezentată sub forma unei sume finite de funcții raționale simple. Mai precis, dacă

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_p)^{\alpha_p}\left(x^2+b_1x+c_1\right)^{\beta_1}\ldots\left(x^2+b_qx+c_q\right)^{\beta_q},$$

unde $b_i^2-4c_i<0, i=\overline{1,q}$, atunci $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=L(x)+\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{A_k^1}{x-a_k}+\right.$

$$\left.+\frac{A_k^2}{(x-a_k)^2}+\ldots+\frac{A_k^{\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}}\right]+\sum_{k=1}^{q}\left[\frac{B_k^1x+C_k^1}{x^2+b_kx+c_k}+\ldots+\frac{B_k^{\beta_k}x+C_k^{\beta_k}}{\left(x^2+b_kx+c_k\right)^{\beta_k}}\right], \textbf{(1)}$$

unde L este o funcție polinomială cu coeficienți reali, iar $p,q\in\mathbb{N}^*$, $a_k, b_k, c_k, A_k^i, B_k^i, C_k^i$ sunt numere reale.

Observație. Problema care se pune în cazul în care Q este descompus în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ (se ştie din algebră că factorii ireductibili peste $\mathbb{R}$ sunt polinoamele de gradul întâi $X-a$ şi cele de gradul doi $X^2+bX+c, a,b,c\in\mathbb{R}$ cu $b^2-4c<0$) este de a determina coeficienții A_k^i, B_k^i, C_k^i ce apar în membrul drept al egalității **(1)**.

Dacă grad $P \geq$ grad Q, atunci se face împărțirea lui P la Q conform teoremei împărțirii cu rest când obținem $P = LQ + R$, unde grad $R <$ grad Q și deci $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$. Acum pentru $\frac{R(x)}{Q(x)}$ avem descompunerea în funcții raționale simple (de formele 2) și 3)) și corespunde celor două sume din membrul drept al egalității **(1)**. În egalitatea astfel obținută se aduce, în membrul drept, la același numitor. Numitorul comun este Q. Dacă se elimină Q din ambii membrii se ajunge la egalitatea a două polinoame, iar de aici la un sistem de ecuații în care necunoscutele sunt coeficienții A_k^i, B_k^i, C_k^i. Acesată metodă de a determina coeficienții A_k^i, B_k^i, C_k^i se numește **metoda coeficienților nedeterminați**.

Probleme rezolvate

Să se descompună în funcții raționale simple următoarele funcții raționale:
a) Numitorul are rădăcini reale simple

1) $f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 6}{(x+1)(x^2 + 5x + 6)}, x \neq -3, x \neq -2, x \neq -1;$

2) $f(x) = \frac{3x^3 + x^2 + x + 1}{2x^2 - x - 1}, x \neq -\frac{1}{2}, x \neq 1.$

R. 1) Descompunem numitorul în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$. Avem: $Q(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$. Atunci descompunerea lui f în funcții raționale simple are forma:

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}, \quad (*).$$

Aducând (în dreapta) la același numitor și apoi eliminând numitorul rezultă egalitatea

$$2x^2 + 6x + 6 = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2), \quad (\mathbf{1}) \text{ sau}$$

$$2x^2 + 6x + 6 = (A+B+C)x^2 + (5A + 4B + 3C)x + 6A + 3B + 2C.$$

De aici prin identificarea coeficienților (de la aceleași puteri ale lui x) rezultă sistemul:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 2 = A + B + C \\ x & 6 = 5A + 4B + 3C \\ x^0 & 6 = 6A + 3B + 2C \end{array}.$$

Rezolvând acest sistem găsim $A = 1, B = -2, C = 3$.

Deci $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}$.

Observație. Dacă în **(1)** se trece la limită după $x \to -1$, ceea ce revine la a înlocui pe x cu -1, rezultă $A=1$. Analog pentru $x=-2$ se găsește $B=-2$, iar pentru $x=-3$ avem $C=3$.
Deci în acest caz, al rădăcinilor simple, dacă dorim să-l aflăm pe A, atunci se înmulțește egalitatea **(*)** cu numitorul fracției în care apare A. În membrul stâng se poate simplifica prin $x+1\left(x \neq -1\right)$. Apoi în această egalitate se trece la limită după $x \to -1$. În stânga găsim 1, iar în dreapta doar A deoarece termenii care conțin pe B și C fiind înmulțiți cu $x+1$, prin trecerea la limită după $x \to -1$, aceștia devin zero. Analog pentru a afla pe B se înmulțește **(*)** cu $x+2$ și se trece la limită după $x \to -2$ etc.
2) Observăm că gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului. Se face împărțirea și găsim:
$2x^3+x^2+x+1=\left(x+1\right)\left(2x^2-x-1\right)+3x+2$.

Deci $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x+1\right)\left(2x^2-x-1\right)+3x+2}{2x^2-x-1}=x+1+\dfrac{3x+2}{2x^2-x-1}$.

Acum funcția rațională $\dfrac{3x+2}{2x^2-x-1}$ se descompune în funcții raționale simple. Să observăm că $2x^2-x-1=\left(x-1\right)\left(2x+1\right)$ și deci $\dfrac{3x+2}{2x^2-x-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{2x+1}$, iar de aici $3x+2=\left(2A+B\right)x+A-B$. Se obține sistemul $2A+B=3, A-B=2$ cu soluția $A=\dfrac{5}{3}, B=-\dfrac{1}{3}$. Așadar $f\left(x\right)=x+1+\dfrac{5}{3\left(x-1\right)}-\dfrac{1}{3\left(2x+1\right)}$.

b) Numitorul are rădăcini reale multiple

1) $\boldsymbol{f\left(x\right)=\dfrac{4x+1}{\left(x+1\right)^3}, x \neq -1;}$ **2)** $\boldsymbol{f\left(x\right)=\dfrac{x^2+x+2}{\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^2}, x \neq \pm 1}$.

R. 1) Metoda întâi. Se scrie *f* sub forma:

$$f\left(x\right)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{\left(x+1\right)^2}+\frac{C}{\left(x+1\right)^3}, \text{ iar de aici}$$

$4x+1=A\left(x+1\right)^2+B\left(x+1\right)+C$, (1) sau
$4x+1=Ax^2+\left(2A+B\right)x+A+B+C$.
Deci $A=0, 2A+B=4, A+B+C=1$, când găsim $A=0, B=4, C=-3$. Prin urmare $f\left(x\right)=\dfrac{4}{\left(x+1\right)^2}-\dfrac{3}{\left(x+1\right)^3}$.

Metoda a doua. Dacă în (1) se face $x=-1$ rezultă $C=-3$. Se derivează (1) și rezultă $4=2A\left(x+1\right)+B$, (2) iar aici facem $x=-1$ când avem $B=4$.

Se derivează (2) şi se face $x=-1$, când găsim $A=0$.
Valoarea $x=-1$ este rădăcină multiplă de ordin 3 pentru numitor.
Metoda a treia. Punem $x+1=y$ şi deci $x=y-1$.
Deci $f(y-1)=\dfrac{4y-3}{y^3}=\dfrac{4}{y^2}-\dfrac{3}{y^3}$, iar de aici, revenim la substituție, $f(x)=$
$=\dfrac{4}{(x+1)^2}-\dfrac{3}{(x+1)^3}$.
2) Are loc descompunerea
$f(x)=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x+1}+\dfrac{D}{(x+1)^2}$, iar de aici
$x^2+x+2=A(x-1)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x+1)(x-1)^2+D(x-1)^2$, (1).
Se face $x=-1$ şi apoi $x=1$, când găsim $2=4D$ şi respectiv $4=4B$. Deci
$D=\dfrac{1}{2}, B=1$. Se derivează (1) şi rezultă $2x+1=A(x+1)^2+2A\left(x^2-1\right)+2B(x+1)+$
$+C(x-1)^2+2C\left(x^2-1\right)+2D(x-1)$, şi se face aici din nou $x=-1$ şi apoi $x=1$.
Găsim $-1=4C-4D, 3=4A+4B$. De aici $A=-\dfrac{1}{4}, C=\dfrac{1}{4}$.
Deci $f(x)=-\dfrac{1}{4(x-1)}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{4(x+1)}+\dfrac{1}{2(x+1)^2}$.
Altfel. Din (1) rezultă un sistem în *A,B,C,D* din egalitatea celor două funcții polinomiale.

c) Numitorul are rădăcini complexe simple

$$f(x)=\frac{2x^3-3x^2+2x}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+1\right)}.$$

R. Avem: $f(x)=\dfrac{Ax+B}{x^2+4}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ sau
$2x^3-3x^2+2x=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+4C)x+B+4D$, (1).
De aici rezultă sistemul:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=2 \\ x^2 & B+D=-3 \\ x & A+4C=2 \\ x^0 & B+4D=0 \end{array}$$

cu soluția $A=2, B=-4, C=0, D=1$. Deci $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2+4}+\dfrac{1}{x^2+1}$.

Altfel. Să observăm că numitorul are rădăcinile complexe $\pm i, \pm 2i$. În egalitatea (1) se face $x = i$ şi rezultă $Ci + D = 1$. De aici (egalitatea a două numere complexe) se obține $C = 0, D = 1$.
Tot în (1) se pune $x = 2i$ şi avem $4i - 4 = 2Ai + B$. Din această egalitate se deduce $A = 2, B = -4$.

d) Numitorul are rădăcini complexe multiple

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x^2+1)^2}.$$

R. Funcția se scrie descompusă în funcții raționale simple astfel:

$f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$, iar de aici $2x^2+2x+13 = Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + B + D$.

Egalând coeficienții de la aceleaşi puteri ale lui x din cei doi membri rezultă sistemul:

$$\left.\begin{array}{ll} x^3 & 0 = A \\ x^2 & 2 = B \\ x & 2 = A + C \\ x^0 & 13 = B + D \end{array}\right| \text{ cu soluția } A = 0, B = 2, C = 2, D = 11, E = -4.$$

Deci $f(x) = \frac{2}{x^2+1} + \frac{2x+11}{(x^2+1)^2}$.

2. Integrarea funcțiilor raționale simple

Am văzut că orice funcție rațională se scrie ca o sumă finită de funcții raționale simple. Deci integrarea unei funcții raționale se reduce la integrarea funcțiilor raționale simple.

1) Dacă $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, atunci

$$\int f(x)\,dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + \mathcal{C}.$$

2) Dacă $f(x) = \frac{A}{(x-a)^n}, n \in \mathbb{N}^*, x > a$ sau $x < a$, atunci se consideră cazurile:

2.1) $n = 1$. Avem

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + \mathcal{C} = \left(\ln(x-a) + \mathcal{C}, x > a \; sau \; ln(a\text{-}x) + \mathcal{C}, x < a\right).$$

Exemple. Să se calculeze

a) $\int \frac{dx}{x-1}, x > 1;$ **b)** $\int \frac{dx}{x+1}, x < -1;$ **c)** $\int \frac{dx}{4x+1}, x > -\frac{1}{4}.$

R. a) Avem $\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + \mathscr{C} = \ln(x-1) + \mathscr{C}$.

b) Acum $\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + \mathscr{C} = \ln(-x-1) + \mathscr{C}$.

c) Se scrie integrala sub forma: $\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\ln\left(x+\frac{1}{4}\right) + \mathscr{C}$.

2.2) Pentru $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, găsim:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n} dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + \mathscr{C} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \mathscr{C} \text{ dacă } x \in I,$$

unde $I \subset (a,\infty)$ sau $I \subset (-\infty,a)$.

Exemplu. Să se calculeze

a) $\int \frac{dx}{(x-1)^3}, x>1;$ b) $\int \frac{dx}{(3x+1)^3}, x > -\frac{1}{3}$.

R. a) Scriem integrala sub forma: $\int \frac{dx}{(x-1)^3} = \int (x-1)^{-3} dx = \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + \mathscr{C} = -\frac{1}{2(x-1)^2} + \mathscr{C}$.

.

b) Dacă se notează $3x+1=t$, atunci $dt = 3dx$ şi integrala asociată este $I_1 = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{6t^2} + \mathscr{C}$.

Prin urmare $I = -\frac{1}{6(3x+1)^2} + \mathscr{C}$.

3) Dacă $f(x) = \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}, n \in \mathbb{N}^*, b^2-4c<0$, atunci se analizează cazurile:

3.1) $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}, a \neq 0$. Avem $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \mathscr{C}$.

Observaţie. Dacă $f(x) = \frac{x}{x^2+a^2}$, atunci $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + \mathscr{C}$.

Exemplu. Să se calculeze: $\int \frac{dx}{x^2+3}, x \in \mathbb{R}$.

R. $\int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + \mathscr{C}$.

3.2) $f(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Pentru $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ vom da o formulă de recurenţă.

Avem: $I_n=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(a^2+x^2\right)-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx=\frac{1}{a^2}\left[\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}-\right.$

$\left.-\int\frac{x^2\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}\right]=\frac{1}{a^2}\left[I_{n-1}-\int\frac{x^2\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}\right]$. **Pentru calculul integralei din paranteza dreaptă se aplică integrarea prin părți, când avem:**

$$\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=\int x\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}x+\frac{1}{2(n-1)}\cdot\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}=$$

$$=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}.$$

Deci $I_n=\frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}\right]$.

Observație. Dacă $f(x)=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}$**, atunci** $\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=$

$$=\frac{1}{-2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\mathcal{C}.$$

Exemplu. Să se calculeze $\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}, x\in\mathbb{R}$.

R. Fie $I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^n}$. Avem: $I_2=\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{4dx}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{\left(4+x^2\right)-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx=$

$$=\frac{1}{4}\left[I_1-\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+4\right)^2}\right]=\frac{1}{4}\left[I_1-\int x\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2}dx\right].$$

Pentru integrala din paranteza dreaptă punem (pentru a aplica integrarea prin părți)

$u(x)=x, v'(x)=\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2}$, iar de aici $u'(x)=1, v(x)=-\frac{1}{2\left(x^2+4\right)}$.

Obținem: $\int\frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx=-\frac{x}{2\left(x^2+4\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4}=-\frac{x}{2\left(x^2+4\right)}+\frac{1}{2}I_1$.

Aşadar, $I_2 = \frac{1}{4}\left[I_1 + \frac{x}{2\left(x^2+4\right)} - \frac{1}{2}I_1\right] = \frac{x}{8\left(x^2+4\right)} + \frac{1}{8}I_1$, unde $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+4} =$

$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \mathcal{C}$.

3.3) Dacă $f(x) = \frac{1}{x^2+bx+c}, b^2-4c<0$, atunci se scrie x^2+bx+c ca sumă de pătrate sub forma $x^2+bx+c = x^2+2\frac{b}{2}x+\frac{b^2}{4}+c-\frac{b^2}{4} = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4} = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4c-b^2}{4}}\right)^2$.

În acest caz $I = \int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}+\mathcal{C}$.

Exemple. Să se calculeze integralele:

a) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}, x\in\mathbb{R}$; b) $\int \frac{dx}{3x^2+5x+3}, x\in\mathbb{R}$.

R. a) Se scrie integrala sub forma

$$\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\mathcal{C} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}.$$

b) În acest caz avem

$$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{5}{3}x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{11}{36}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2} =$$

$$= \frac{6}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x+5}{\sqrt{11}}+\mathcal{C} = \frac{2\sqrt{11}}{11}\operatorname{arctg}\frac{6x+5}{\sqrt{11}}+\mathcal{C}.$$

Observaţie. Dacă numitorul funcţiei $f(x)$ este de forma $\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)^n$, $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ cu $\alpha\neq 1$, atunci se forțează factor α^n şi avem $\alpha^n\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)^n = \alpha^n\left(x^2+bx+c\right)^n$, unde $b=\frac{\beta}{\alpha}, c=\frac{\gamma}{\alpha}, b^2-4c<0$. În cazul de mai sus (b) avem $\alpha=3$.

3.4) Dacă $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^n}, b^2-4c<0, n\in\mathbb{N}^*, n\ge 2$, atunci se pune f sub forma

$$f(x)=\frac{1}{\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)^2\right]^n}$$ **şi se substituie $x+\dfrac{b}{2}=t$, ajungând în final la integrala de forma 3.2).**

3.5) Dacă $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+bx+c\right)^n}, b^2-4c<0, n\in\mathbb{N}^*, n\ge 2$, atunci se prelucrează *f* sub forma (se pune în evidență la numărător derivata funcției $x\to x^2+bx+c$ de la numitor):

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+b}{\left(x^2+bx+c\right)^n}-\frac{b}{2}\cdot\frac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^n}$$ **, când** $$\int f(x)dx=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^{n-1}}-\frac{b}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2+bx+c\right)^n}$$ **, ultima integrală fiind de tipul 3.4).**

Probleme propuse

1. Să se determine numerele reale $a,b,c,\dots$ astfel încât să aibă loc egalitățile:

1) $\dfrac{3x+5}{(x-3)\left(x^2-3x+2\right)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{x-3}, \forall x\ne 1,2,3$;

2) $\dfrac{3x^2+12x+11}{x^3+6x^2+11x+6}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}+\dfrac{c}{x+3}, \forall x\ne -1,-2,-3$;

3) $\dfrac{x^4-3x^3-3x^2+10}{(x+1)\left(x^2-2x-3\right)}=ax+b+\dfrac{c}{x+1}+\dfrac{d}{(x+1)^2}+\dfrac{e}{x-3}, \forall x\ne -1,3$;

4) $\dfrac{1}{x^4+1}=\dfrac{ax+b}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}+\dfrac{cx+d}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}$;

5) $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}, \forall x\ne -1$;

6) $\dfrac{1}{x^2\left(x^2+1\right)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{cx+d}{x^2+1}, \forall x\ne 0,1$.

2. Să se calculeze integralele următoarelor funcții:

a) 1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x-1)}, x>1$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)(2x-3)}, x>\frac{3}{2}$; 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4x}, x>0$;

4) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}, x>-\frac{1}{2}$; 5) $\int \frac{(2x-1)\,dx}{(x-1)(x-2)}, x>2$; 6) $\int \frac{x\,dx}{x^2-6x+5}, x>5$.

b) 1) $\int \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 dx, x>-1$; 2) $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^3-2x^2}, x<0$; 3) $\int \frac{(5x-1)\,dx}{x^3-3x-2}, x<-1$.

c) 1) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}, x>0$; 2) $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx, x<0$; 3) $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}, x<1$; 4) $\int \frac{dx}{x^3+8}, x<-2$;

5) $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^3-x^2+x-1}, x<1$; 6) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}, x\in\mathbb{R}$; 7) $\int \frac{(x^3-6)\,dx}{x^4+6x^2+8}, x>0$.

3. Fie $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2-x}$.

1) Arătați că există numere reale a,b,c,d astfel încât $f(x)=ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x-1}, \forall x>1$.

2) Să se calculeze primitivele funcției f pe $(1,\infty)$.

4. Fie $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3+1}{x^3-x^2}$.

1) Arătați că există numerele reale a,b,c,d astfel încât $f(x)=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x-1}, \quad \forall x>1$.

2) Să se calculeze primitivele lui f pe $(1,\infty)$.

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+1}$.

1) Arătați că $f(x)=\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}, \forall x\neq 0$.

2) Substituiți $u=x-\frac{1}{x}$ și calculați integrala asociată integralei $\int f(x)dx$ pe $(-\infty,0)$ sau $(0,\infty)$.

3) Arătați că f admite primitive pe $\mathbb{R}$ și determinați-le.

6. Să se calculeze integralele:

a) 1) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}dx, x>0$; 2) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}, x>1$; 3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}, x\geq -1$.

b) 1) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

c) 1) $\int \frac{e^x}{e^x-1}dx, x>0$; 2) $\int \frac{3^x}{1+3^{2x}}dx, x\in\mathbb{R}$; 3) $\int \frac{e^x}{4+e^{2x}}dx, x\in\mathbb{R}$; 4) $\int \frac{dx}{e^x(1+e^{-x})}, x\in\mathbb{R}$.

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noțiuni. Proprietăți.	Explicitare. Notații	Exemple
Primitiva unei funcții pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$	$F : I \to \mathbb{R}$ **este primitiva funcției** $f : I \to \mathbb{R}$ **dacă:** **1)** F **este derivabilă și** **2)** $F' = f$.	**1) Dacă** $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, **atunci** $F(x) = \frac{x^3}{3}, G(x) = \frac{x^3}{3} - 1$ **sunt primitive pe** $\mathbb{R}$ **pentru** *f*. **2) Dacă** $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$, **atunci** $F(x) = -\cos x$, $G(x) = -\cos x + 1$ **sunt primitive pe** $\mathbb{R}$ **ale lui** *f*.
Două primitive ale unei funcții, ***pe un interval*****, diferă printr-o constantă.**	$F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ **primitive ale lui** $f : I \to \mathbb{R}$, I **interval. Atunci există** $c \in \mathbb{R}$ **(*c*=constantă) astfel încât** $F_2 = F_1 + c$.	**1)** $G(x) = F(x) - 1$; **2)** $G(x) = F(x) + 1$, **unde** *F, G* **sunt funcțiile de la exemplele de mai sus.**
Integrala nedefinită	**Mulțimea tuturor primitivelor funcției** $f : I \to \mathbb{R}$ **se notează** $\int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C}$, *F* **este o primitivă a lui** *f*, $\mathcal{C}$ **este constanta de integrare sau** $\int dF = F + \mathcal{C}$ **sau** $\int f'(x)dx = f(x) + \mathcal{C}$	**1)** $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}, n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ **2)** $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \mathcal{C}, x \in \mathbb{R}$. **3)** $\int \sin x\, dx = -\cos x + \mathcal{C}, x \in \mathbb{R}$
Reguli de integrare **1) Suma**	$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ **(Integrala sumei este suma integralelor) sau** $\int (dF + dG) = \int dF + \int dG$.	$\int (x + \sqrt{x})dx = \int xdx + \int \sqrt{x}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \mathcal{C}, x \geq 0$. **2)** $\int \left(e^x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+4}\right)dx = e^x + \ln x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \mathcal{C}, x > 0$

2) Factor constant	$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$ **(Constanta iese de sub integrală) sau** $\int cdF = c\int dF$.	$\int 3\cos x dx = 3\int \cos x dx = 3\sin x +$ $+\mathcal{C}, x \in \mathbb{R}$.
3) Integrarea prin părți	$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) -$ $-\int v(x)u'(x)dx$ **sau** $\int udv = uv - \int vdu$.	$\int xe^x dx, x \in \mathbb{R}$. $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$ $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x +$ $+\mathcal{C} = (x-1)e^x + \mathcal{C}$.
4) Integrarea prin substituție (*u*-substituție).	$I = \int h(\varphi(x))\varphi'(x)dx,\ u =$ $= \varphi(x) \Rightarrow du = \varphi'(x)dx$ **și se calculează integrala asociată** $I_1 = \int h(u)du = H(u) + \mathcal{C} \Rightarrow I =$ $= H(\varphi(x)) + \mathcal{C}$.	$I = \int x^2\sqrt{x^3+1}dx,\ u = x^3+1 \Rightarrow$ $\Rightarrow du = 3x^2dx.$ $I = \frac{1}{3}\int \sqrt{x^3+1}(3x^2dx) \Rightarrow$ $I_1 = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u\sqrt{u} + \mathcal{C},$ $I = \frac{2}{9}(x^3+1)\sqrt{x^3+1} + \mathcal{C}$.

Teste de evaluare

Testul 1

Varianta A

1. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+e^x, & x\le 0\\ \sqrt{x^2+1}, & x>0\end{cases}$, admite primitive pe $\mathbb{R}$ și să se calculeze o primitivă a sa.

2. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\ln x$. Să se determine o primitivă F a lui f cu proprietatea $F(1)=\frac{8}{9}$.

3. Să se calculeze integralele nedefinite:

a) 1) $\int(2x-1)^3dx, x\in\mathbb{R}$; 2) $\int\frac{x^2-2}{x^2-1}dx$, $x>1$; 3) $\int\frac{dx}{4+\sqrt{x}}, x\ge 0$; 4) $\int\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+1}$.

b) 1) $\int\frac{\sin x}{9-\cos^2 x}dx, x\in\mathbb{R}$;

2) $\int\sin x\cos 2x dx, x\in\mathbb{R}$; 3) $\int e^x\sin x dx$, $x\in\mathbb{R}$; 4) $\int\sin^3 x dx, x\in\mathbb{R}$.

4. Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ este o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x$.

5. Să se determine constantele reale a,b astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(ax+b)e^{-x}$ să fie o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xe^{-x}$.

Varianta B

1. Să se arate că funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x\ln x, & x\ge 1\\ \sqrt{1-x^2}, & x\in[0,1)\end{cases}$ admite primitive pe $[0,\infty)$ și să se calculeze o primitivă a sa.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, iar $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f cu $F(0)=1$. Să se calculeze $F(1)+F(-1)$.

3. Să se calculeze integralele nedefinite:

a) 1) $\int(1-3x)^3dx, x\in\mathbb{R}$;

2) $\int\frac{x^2}{x^2+4}dx, x\in\mathbb{R}$; 3) $\int\frac{xdx}{1+\sqrt{x}}, x\ge 0$;

4) $\int\frac{dx}{x(1+\ln x)}, x>1$.

b) 1) $\int\frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx, x\in\mathbb{R}$;

2) $\int\cos 2x\cos 3x dx, x\in\mathbb{R}$;

3) $\int e^x\cos x dx$; 4) $\int\cos^3 x dx, x\in\mathbb{R}$.

4. Arătați că funcția $F:(-1,1)\to\mathbb{R}, F(x)=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$ este o primitivă a funcției $f:(-1,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\arccos x$.

5. Să se determine constantele reale a, b pentru care are loc egalitatea $\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx=a\sqrt{x^2+1}+b\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Testul 2

Varianta A

1.Să se arate că funcția

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} xe^x,\ x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{1+x},\ x>0 \end{cases}$$, admite

primitive pe $\mathbb{R}$ şi determinați o primitivă a ei.

2.Aflați primitiva funcției $f:[3,\infty)\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$ care se anulează în $x=3$.

3.Să se calculeze integralele:

a) 1) $\int x(x+1)^3dx, x\in\mathbb{R}$;

2) $\int x^2\sqrt{x-1}dx, x\ge 1$; 3) $\int \dfrac{2x}{1+x^4}dx, x\in\mathbb{R}$;

4) $\int \dfrac{2^{2x}dx}{1+2^x}, x\in\mathbb{R}$.

b) 1) $\int \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}dx, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;

2) $\int x\sin 2x\,dx, x\in\mathbb{R}$; 3) $\int \sin x\cos 2x dx$,

$x\in\mathbb{R}$; 4) $\int \operatorname{tg}^3 x dx, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4.Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$F(x)=\dfrac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg}^2 x - x\operatorname{arctg}x + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ este o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\operatorname{arctg}^2 x$.

5.Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $G:(-\infty,2)\to\mathbb{R}$,

$G(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2-x}$ să fie o primitivă a funcției $g:(-\infty,2)\to\mathbb{R}$,

$g(x)=x\sqrt{2-x}$.

Varianta B

1. Să se arate că funcția

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x\sin x, x\le 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1}, x>0 \end{cases},$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi determinați o primitivă a ei.

2. Să se determine parametrul real m pentru care funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}, x\in[0,1] \\ x\sqrt{x^2-1}+m, x>1 \end{cases}$$ să

admită primitive pe $\mathbb{R}$ şi să se calculeze o astfel de primitivă.

3. Să se calculeze integralele:

a) 1) $\int x^2(1-x)^2dx, x\in\mathbb{R}$; 2) $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x}}$, $x<1$; 3) $\int \dfrac{x^2+x+5}{x(x+1)}dx, x>0$;

4) $\int \dfrac{\ln x}{x\ln(ex)}dx, x>1$.

b) 1) $\int \cos x\sqrt{1+\sin x}dx, x\in\mathbb{R}$;

2) $\int x\cos 2x dx, x\in\mathbb{R}$; 3) $\int \cos x\sin 2x dx$,

$x\in\mathbb{R}$; 4) $\int \operatorname{ctg}^3 x dx, x\in(0,\pi)$.

4. Arătați că funcția $F:(-5,5)\to\mathbb{R}$,

$F(x)=\dfrac{25}{2}\arcsin\dfrac{x}{5}+\dfrac{x}{2}\sqrt{25-x^2}$ este o primitivă a funcției $f:(-5,5)\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\sqrt{25-x^2}$.

5. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $G:\left(-\dfrac{3}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}$,

$G(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x+3}$ să fie primitivă a funcției $g:\left(-\dfrac{3}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}$,

$g(x)=(x-2)\sqrt{2x+3}$.

Testul 3 (grilă)
Varianta A

1. O primitivă a funcției $f:\left(-\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2x+1}$ este funcția $F:\left(-\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}$.

a) $F(x)=3(2x+1)^2\sqrt{2x+1}+5(2x+1)\cdot\sqrt{2x+1}$;

b) $F(x)=\frac{1}{10}(2x+1)^2\sqrt{2x+1}-\frac{1}{6}(2x+1)\cdot\sqrt{2x+1}$; c) $F(x)=\frac{1}{5}(2x+1)\cdot\sqrt{2x+1}-\frac{1}{2}(2x+1)^2\sqrt{2x+1}$.

2. Funcția $F:(-3,\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{2}{3}(x-6)\cdot\sqrt{x+3}$ este primitivă pentru funcția $f:(-3,\infty)\to\mathbb{R}$. a) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+3}}$;

b) $f(x)=x\sqrt{x+3}$; c) $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{x}$.

3. Egalitatea $\int\frac{x^2-2}{\sqrt{x^2+1}}dx=(ax+b)\cdot\sqrt{x^2+1}+c\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ are loc dacă:

a) $a=\frac{1}{2}$, $b=1$, c$=\frac{5}{2}$; b) $a=b=\frac{1}{2}$, c$=\frac{3}{2}$; c) $a=\frac{1}{2}$, b=0, c=-$\frac{5}{2}$.

4. Valorile lui $a,b,c\in\mathbb{R}$ pentru care $\int x^2\sin x dx=(ax^2+b)\cos x+cx\sin x+\mathcal{C}$ sunt: a) $a=1,b=2,c=2$; b) $a=-1,b=2,c=2$; c) $a=b=-1,c=2$.

5. Integrala nedefinită:

$I=\int\frac{2x-1}{(x+2)^2}dx$, x>-2 este: a) $I=2\ln(x+2)+\frac{5}{x+2}+\mathcal{C}$; b) $I=-\ln(x+2)+\frac{3}{x+2}+\mathcal{C}$;

Varianta B

1. O primitivă a funcției $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}$ este funcția $F:(1,\infty)\to\mathbb{R}$:

a) $F(x)=\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{x^2-1}$;

b) $F(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2-1}}$; c) $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x^2-1}$.

2. Funcția $F:(0,9)\to\mathbb{R}$, $F(x)=2\sqrt{x}+6\cdot\ln\left|\sqrt{x}-3\right|$ este o primitivă pentru funcția $f:(0,9)\to\mathbb{R}$: a) $f(x)=\left(x+\frac{1}{3}\right)\sqrt{x}$;

b) $f(x)=\frac{5}{\sqrt{x}-3}$; c) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-3}$.

3. Egalitatea $\int\frac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+1}}dx=(ax+b)\cdot\sqrt{x^2+1}+c\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ are loc dacă: a) $a=b=\frac{1}{2}$, $c=-\frac{1}{2}$; b) $a=\frac{1}{2}$, $b=$-2, $c=$-$\frac{1}{2}$; c) $a=\frac{1}{2}$, $b=$-$\frac{1}{2}$,$c=-2$.

4. Valorile lui $a,b,c\in\mathbb{R}$ pentru care $\int x^2\cos x dx=(ax^2+b)\sin x+cx\cos x+\mathcal{C}$ sunt:

a) $a=1,b=-2,c=2$; b) $a=b=-2,c=2$;
c) $a=1,b=2,c=-2$.

5. Integrala nedefinită $I=\int\frac{2x+1}{(2x+3)^2}dx$, $x>-\frac{3}{2}$ este: a) $2\ln(2x+3)+\frac{1}{2x+3}+\mathcal{C}$;

b) $\frac{1}{2}\ln(2x+3)+\frac{2}{2x+3}+\mathcal{C}$;

c) $\frac{1}{2}\ln(2x+3)-\frac{1}{2x+3}+\mathcal{C}$.

6. Primitiva funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+4}$, care conține punctul

c) $I=\frac{1}{2}\ln(x+2)-\frac{1}{x+2}+\mathcal{C}$.

6. **Primitiva funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,**

$f(x)=\frac{3x+2}{x^2+6x+14}$ **care conține punctul** $\left(-3,\frac{3}{2}\ln 5\right)$ **este** $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: a) $F(x)=\frac{1}{2}\cdot$ $\cdot\ln\left(x^2+6x+14\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\text{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{5}}+1$;

b) $F(x)=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+6x+14\right)-\frac{7}{\sqrt{5}}\text{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{5}}$;

c) $F(x)=\frac{3}{\sqrt{5}}\ln\left(x^2+6x+14\right)+\frac{7}{\sqrt{5}}\text{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{5}}$.

$(0,\ln 2)$ **este** $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, :

a) $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{3}{2}\text{arctg}\frac{x}{2}+\ln 2$;

b) $F(x)=\ln\left(x^2+4\right)-\frac{3}{2}\text{arctg}\frac{x}{2}+\ln 2$;

c) $F(x)=\ln\left(x^2+4\right)+\frac{3}{2}\text{arctg}\frac{x}{2}-\ln 2$.

2. INTEGRALA DEFINITĂ

În acest capitol evidenţiem două probleme care duc la noţiunea de integrală definită: exprimarea ariei printr-o integrală definită şi exprimarea ariei ca limita unui şir de sume. Vom defini integrala definită pentru o funcţie continuă în sensul Leibniz-Newton şi se vor da proprietăţile remarcabile ale acestor integrale: linearitatea, aditivitatea la interval, monotonia, mărginirea, etc.

Sunt prezentate cele mai simple tehnici de calcul pentru integrale definite: metoda integrării directe, metoda integrării prin părţi şi metoda substituţiei. Numeroasele exemple însoţesc pas cu pas teoria. Problemele propuse ilustrează şi extind teoria.

Istoric. Atât calculul diferenţial cât şi calculul integral au preluat idei din matematica elementară pe care le-a extins, printr-un proces de trecere la limită, la situaţii mai generale (panta unei drepte $\longrightarrow$ panta unei curbe, tangenta la un cerc $\longrightarrow$ tangenta la o curbă, aria unei regiuni mărginite de segmente de dreaptă $\longrightarrow$ aria unei regiuni mărginite de curbe, o sumă finită de numere $\longrightarrow$ o sumă infinită de numere, lungimea unui segment de dreaptă $\longrightarrow$ lungimea unei curbe, viteza (acceleraţia) medie $\longrightarrow$ viteza (acceleraţia) instantanee, etc.).

PIONIERI AI MATEMATICII

Isaac NEWTON (1642-1727) Matematician englez	G.W. LEIBNIZ (1646-1716) Matematician german
	

FONDATORII CALCULULUI DIFERENŢIAL ŞI INTEGRAL

Fondatorii calculului diferenţial şi integral sunt Sir Isaac Newton (1642-1727) şi G. W. Leibniz (1646-1716). Ei au evidenţiat legătura profundă între noţiunea de integrală definită şi noţiunea de primitivă dată de formula Leibniz-Newton $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, unde F este o primitivă a lui f.

Integrala definită este un concept fundamental al calculului integral. El a fost introdus de A. Cauchy (1789-1857) pentru funcții continue, iar de Bernhard Riemann (1826-1866) în cazul general. Riemann (matematician german, elev al lui Gauss) a fost primul care a găsit condiții necesare şi suficiente ca o funcție mărginită să fie integrabilă. El a separat conceptul de integrare de companionul lui de până atunci, diferențierea, utilizând sumele şi trecerea la limită pentru determinarea ariilor. El a considerat toate funcțiile pe un interval pe care procesul de „integrare" poate fi definit: clasa funcțiilor integrabile. Punctul de vedere al lui Riemann a condus pe alți matematicieni la inventarea altor teorii ale integrării, cea mai importantă fiind a lui H. Lebesque (1875-1941).

"Quand Gauss dit qu'il a démontré quelque chose, cela me parait très probable, quand Cauchy le dit, il y a autant à parier pour et contre, quand Dirichlet le dit, cela est certain."

C. Jacobi

"Je dois payer une certaine somme; je fouille dans mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l'ordre ou elles se présentent jusqu'a atteindre ma dette. C'est l'integrale de RIEMANN."

Henri Lebesque

2.1. PROBLEME CARE CONDUC LA NOȚIUNEA DE INTEGRALĂ DEFINITĂ

1. Exprimarea ariei printr-o integrală

Am văzut în capitolul 1 că noțiunea de primitivă este legată istoric de problema determinării ariei. Mai precis dacă $f:[a,b]\to[0,\infty), a<b$ este o funcție continuă, atunci aria figurii variabile AM_0N_0D (numită şi trapez curbiliniu) (Fig.1)

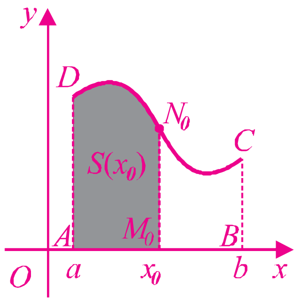


Fig.1

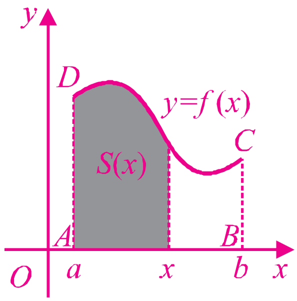


Fig.2

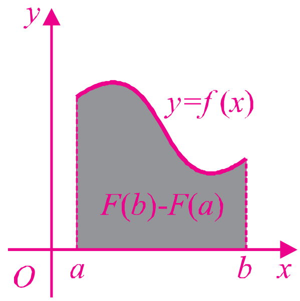


Fig.3

cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele $x=a, x=x_0$ (unde x_0 este abscisa punctului M_0 situat între A şi B) notată $S(x_0)$ are proprietatea: $S'(x_0)=f(x_0)$.
S-a ajuns la următoarea teoremă remarcabilă, numită de obicei

> **Teorema Leibniz-Newton**. Derivata ariei variabile $S(x)$ în raport cu abscisa x este egală cu ordonata $y=f(x)$, adică $S'(x)=f(x)$ (Fig.2).

Această funcție primitivă S se distinge dintre toate celelalte funcții primitive prin faptul că devine egală cu zero dacă $x=a, S(a)=0$ (M_0 coincide cu A). De aceea dacă se cunoaşte o primitivă F, oarecare a lui f, şi dacă
$S(x)=F(x)+k, k=$constantă, atunci $k=-F(a)$ şi deci $S(x)=F(x)-F(a)$.
În particular, pentru a găsi aria întregului trapez curbiliniu $ABCD$ trebuie ca $x=b$, când avem $S=F(b)-F(a)$ (Fig.3).

Se notează $S(x)=\int_a^x f(t)dt$ (citim: integrală definită de la a la x din f).

Din cele de mai sus $S'(x)=f(x), \forall x\in[a,b]$ şi aria trapezului curbiliniu $ABCD$ este egală cu $S(b)=\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$, unde F este o primitivă a funcţiei f pe $[a,b]$ (F are proprietăţile: 1) F este derivabilă pe $[a,b]$ şi
2) $F'(x)=f(x), \forall x\in[a,b]$).

Observaţie. Dacă G este o altă primitivă a lui f, atunci $\int_a^b f(t)\mathrm{dt}=G(b)-G(a)$.

Într-adevăr, ştim că $F(x)=G(x)+c$, şi deci $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)=$
$=(G(b)+c)-(G(a)+c)=G(b)-G(a)$.
Rezultatul înlocuirii lui a şi b în $F(x)=G(x)+c$ este $F(a)=G(a)+c$, $F(b)=G(b)+c$. Prin scăderea acestor numere dispare c. Acesta este motivul pentru care integrala se numeşte "definită".

Notaţie. $F(b)-F(a)$ se scrie $F(x)\Big|_a^b$ (citim : $F(x)$ luat între a şi b).

Procedeu practic.
- Se dă $f(x)\geq 0, x\in[a,b]$;
- Se integrează f şi se determină o primitivă F;
- valoarea ariei este $F(b)-F(a)$.

Exemplu. Fie $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x+1$. 1) Să determinăm aria figurii delimitată de graficul lui f (este dreapta de ecuaţie $y=x+1$, Fig.4) şi dreptele verticale $x=0, x=2$ şi axa Ox.
2) Să determinăm aria figurii delimitată de graficul lui f, dreptele $x=1, x=2$ şi axa Ox (Fig.6).

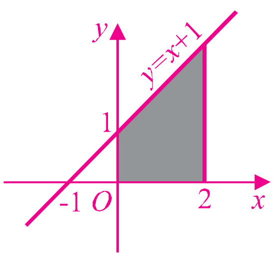


Fig. 4

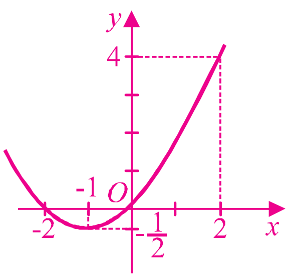


Fig. 5

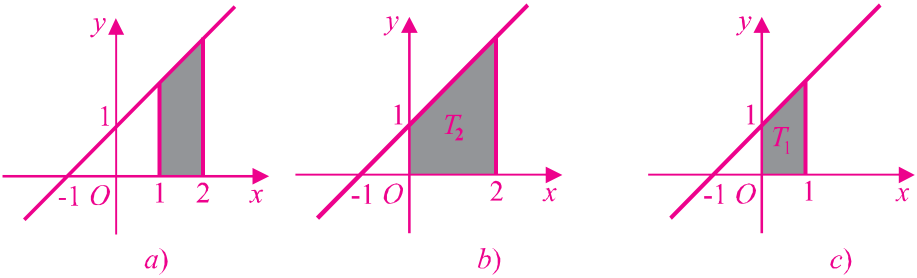


Fig. 6

R. 1) Determinăm o primitivă F a lui f prin integrare. Avem $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + x + \mathscr{C}$.

Luăm $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$. Cu acestea aria cerută este egală cu $S = \int_0^2 f(t)dt = \left.\left[\frac{x^2}{2} + x\right]\right|_0^2 = 4$.

Observație. Aria $S(x)$ are exprimarea $S(x) = F(x) + k$. Din $S(0) = 0$ rezultă

$k = -F(0) = 0$. Deci $S(x) = \frac{x^2}{2} + x$, cu graficul din Fig.5. Aria este egală cu $S = S(2) = 4$.

2) Aria de determinat este egală cu $S = \int_1^2 f(t)dt = F(x)\Big|_1^2 = F(2) - F(1) =$

$= \left(\frac{2^2}{2} + 2\right) - \left(\frac{1^2}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}$.

Observații. 1) În acest caz, $S(x) = \frac{x^2}{2} + x + k$, cu $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$ cu particularitatea că

$S(1) = 0$, adică $0 = F(1) + k \Rightarrow k = -F(1) = -\frac{3}{2}$. Aria cerută este egală cu

$S(2) = F(2) + k = \frac{2^2}{2} + 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, unde $S(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$. De aici $S = S(2) = \frac{5}{2}$.

2) Aria cerută este egală cu aria unui trapez care apare ca diferență a ariilor a două trapeze T_2, T_1 (Fig.6.b), c)) pentru a căror calcul se utilizează formula cunoscută. Avem:

$S = aria(T_2) - aria(T_1) = \frac{3+1}{2} \cdot 2 - \frac{2+1}{2} \cdot 1 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Această arie se poate exprima cu $S(x) = \frac{x^2}{2} + x + k$, unde $S(0) = k = 0$, adică $S = \frac{x^2}{2} + x$.

Cu acestea $aria(T_2) - aria(T_1) = S(2) - S(1) = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

2. Exprimarea ariei ca limită a unei sume. Integrarea ca proces de sumare

Din clasele gimnaziale ştim calcula aria unei suprafeţe triunghiulare, dreptunghiulare, trapezoidale, poligonale (se descompune în suprafeţe triunghiulare). Cum se determină aria unei suprafeţe delimitată de o curbă?

Conceptul de arie a unei figuri (F) reprezentând un domeniu mărginit şi închis este o problemă dificilă, noi mărginindu-ne la a spune că figura (F) are aria S dacă există două şiruri de suprafeţe poligonale $(P_n)_n, (P_n^{'})_n$ conţinute în (F) şi respectiv conţinând pe (F), ale căror arii să aibă limita comună $\lim\limits_{n\to\infty} S(P_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(P_n^{'}) = S$, unde $S(P_n)$ este aria suprafeţei poligonale P_n.

Considerăm funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$. Problema care ne interesează este aceea a determinării ariei delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreapta $x=1$ (Fig.7.a)-zona haşurată). Această figură se numeşte **triunghi curbiliniu**.

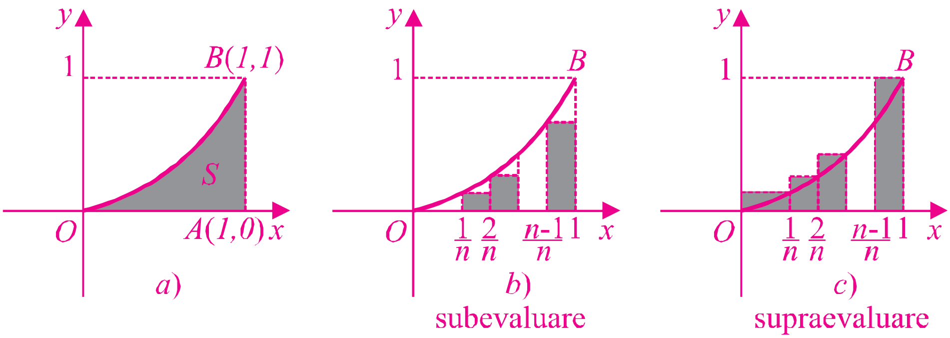


Fig. 7

Pentru a calcula aria triunghiului curbiliniu OAB, notată cu S, vom împărţi segmentul OA în $n\geq 2$ părţi egale prin punctele $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}=1$.

Sistemul ordonat $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right)$ se numeşte diviziune a intervalului $[0,1]$ (aici diviziunea se numeşte echidistantă deoarece intervalele $\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], ..., \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ au aceeaşi lungime $\frac{1}{n}$). Vom construi două tipuri de dreptunghiuri:

1) cu bazele (pe Ox) $\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], ..., \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ şi înălţimi

$f(0), f\left(\frac{1}{n}\right), ..., f\left(\frac{n-1}{n}\right)$ (sunt valorile funcției în capetele din stânga ale intervalelor) (Fig.7.b)).

Aceste dreptunghiuri sunt în număr de $n-1$, iar reuniunea lor este inclusă în interiorul triunghiului curbiliniu OAB ceea ce înseamnă că suma ariilor acestor dreptunghiuri este mai mică decât aria triunghiului curbiliniu. Fie s_n suma ariilor acestor dreptunghiuri. Avem:

$$s_n = \frac{1}{n} f(0) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + ... + \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + ... + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right) =$$

$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2}{n^2} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$, am utilizat formula

$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $s_n \le S, \forall n \in \mathbb{N}^*, (1)$.

2) cu bazele (pe Ox) $\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], ..., \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ şi înălțimi $f\left(\frac{1}{n}\right), f\left(\frac{2}{n}\right), ..., f(1)$ (sunt valorile funcției în capetele din dreapta ale intervalelor) (Fig.7.c)).

Avem n dreptunghiuri a căror reuniune conține interiorul triunghiului curbiliniu OAB, ceea ce înseamnă că suma ariilor acestor dreptunghiuri este mai mare decât aria triunghiului curbiliniu. Fie S_n suma ariilor acestor dreptunghiuri.

Avem:

$$S_n = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{n} f(1) = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + ... + \frac{n^2}{n^2}\right) =$$

$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$. Deci $S \le S_n, \forall n \in \mathbb{N}^*, (2)$.

Din (1) şi (2) rezultă $s_n \le S \le S_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Trecând la limită după $n \to \infty$ găsim, via criteriul „cleştelui”, $\frac{1}{3} \le S \le \frac{1}{3}$, adică $S = \frac{1}{3}$.

Să observăm că f este strict crescătoare pe $[0,1]$, ceea ce înseamnă că pentru intervalul $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, $f\left(\frac{i}{n}\right)$ şi $f\left(\frac{i+1}{n}\right)$ sunt cea mai mică şi respectiv cea mai mare valoare a funcției f.

Sumele s_n, S_n se numesc **suma Darboux inferioară** şi respectiv **suma Darboux superioară**. În plus, observăm că $S_n - s_n = \frac{1}{n}$ reprezintă aria ultimului dreptunghi din Fig.7.c) şi avem $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$.

Observații. **1)** Aceeaşi arie se poate exprima prin suma ariilor unor trapeze. Din acest motiv metoda de calcul se numeşte **metoda trapezelor** (Fig.8).

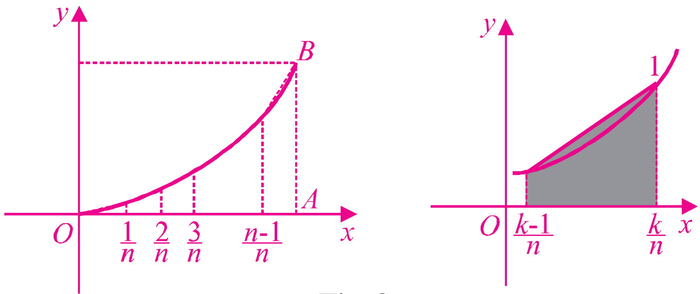


Fig. 8

Primul trapez are bazele egale cu $f(0)$ şi $f\left(\frac{1}{n}\right)$, iar înălțimea egală cu $\frac{1}{n}$, al doilea trapez are bazele egale cu $f\left(\frac{1}{n}\right)$ şi $f\left(\frac{2}{n}\right)$, iar înălțimea egală cu $\frac{1}{n}$, al treilea trapez are bazele egale cu $f\left(\frac{2}{n}\right)$ şi $f\left(\frac{3}{n}\right)$, iar înălțimea egală cu $\frac{1}{n}$, …, ultimul trapez are bazele egale cu $f\left(\frac{n-1}{n}\right)$ şi $f(1)$, iar înălțimea egală cu $\frac{1}{n}$. Suma ariilor acestor trapeze aproximează prin adaos aria triunghiului curbiliniu OAB. Fie T_n suma ariilor acestor trapeze. Avem:

$$T_n = \frac{f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)}{2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)}{2}\cdot\frac{1}{n} + \ldots + \frac{f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)}{2}\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{2n}\left\{f(0) + 2\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] + f(1)\right\} = \frac{1}{2n}\left[2\frac{1^2+2^2+(n-1)^2}{n^2}+1\right] =$$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} + \frac{1}{2n} \text{ şi } \lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{3}.$$

În fine, aceeaşi arie se poate aproxima prin **metoda punctului din mijloc**, care constă în a construi dreptunghiuri de baze $\left[0,\frac{1}{n}\right],\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\ldots,\left[\frac{n-1}{n},1\right]$ (pe axa Ox) şi înălțimi

$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$, unde $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt mijloacele bazelor şi apoi le însumăm ariile. Avem :

$$M_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{2n}\right)^2 + ... + \frac{1}{n}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3}\left[1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2\right] =$$

$= \frac{4n^3 - n}{12n^3}$. Şi în acest caz $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \frac{1}{3}$.

În toate metodele utilizate am folosit dreptunghiul, aria sa, ca element de bază.

În general, putem alege orice punct ξ_k din al $k-$lea interval $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, iar aproximarea ariei este dată de suma Riemann (1826-1866, matematician german) $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$.

2) Având în vedere cele spuse la paragraful precedent, putem exprima aria printr-o integrală şi avem $S = \int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$. Obţinem acelaşi rezultat ca mai sus. În plus, **integrarea apare ca un proces de sumare**.

2.2. INTEGRALA DEFINITĂ A UNEI FUNCŢII CONTINUE. FORMULA LEIBNIZ-NEWTON

Am văzut în primul capitol rolul jucat de integrala nedefinită în determinarea primitivelor unei funcţii. Integrala definită este strîns legată de integrala nedefinită. Am afirmat că **orice funcţie continuă** $f:[a,b]\to\mathbb{R}, a<b$ **admite primitive pe** $[a,b]$. Fie F o astfel de primitivă. Dacă în plus f ia valori pozitive (aceasta înseamnă că graficul lui f este situat deasupra axei Ox), atunci aria S a regiunii delimitate de graficul lui f, axa Ox şi dreptele verticale $x=a, x=b$ se exprimă cu ajutorul unei integrale definite $S = \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Numărul $\int\limits_a^b f(x)dx$ îl citim: integrala definită a funcţiei f de la a la b sau integrala definită a funcţiei f pe $[a,b]$ sau simplu integrală de la a la b din f de x de x.

Are loc următoarea

Definiție. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe $[a,b]$ şi F o primitivă oarecare a lui f. **Se numeşte integrală definită de la** a **la** b **a lui** f expresia $F(b)-F(a)$ şi se notează $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

---

1) Formula $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ se numeşte **formula Leibniz-Newton** (1675).
2) Funcția f care admite primitive pe $[a,b]$ **spunem că este integrabilă (în sensul Newton)**.
3) Dacă $f\geq 0$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ reprezintă aria regiunii delimitate de graficul lui f, axa Ox şi dreptele verticale $x=a, x=b$.

Observații. 1) Pentru a calcula $\int_a^b f(x)dx$ se parcurg 2 paşi:

$\left.1^0\right)$ Se determină o primitivă F a lui f.

$\left.2^0\right)$ Se calculează $F(b)-F(a)$.

2) Din definiție rezultă : 1) $\int_a^a f(x)dx=0$; 2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ (inversarea limitelor de integrare) ; 3) $\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$ (nu scriem $\int_a^b 1dx$ ci $\int_a^b dx$).

3) În loc de $F(b)-F(a)$ se foloseşte notația $F(x)\Big|_a^b$ (citim: $F(x)$ luat între a şi b).

4) Formula Leibniz-Newton dă o regulă simplă de calcul a integralei definite. Formula face legătura între integrala definită $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ şi integrala nedefinită $\int f(x)\mathrm{d}x$ prin primitiva F.

5) Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă, iar F o primitivă a lui f, atunci formula lui Leibniz-Newton are loc. În plus, dacă G este o altă primitivă pentru f, atunci, de asemenea, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(b)-G(a)$.

Într-adevăr, știm că $G(x)=F(x)+c, \forall x\in[a,b], c$ constantă și deci $F(x)=G(x)-c$, iar $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = (G(b)-c)-(G(a)-c) = \ = G(b)-G(a)$.

Aceasta arată că F din formula lui Leibniz-Newton **poate fi orice primitivă a lui** f.

Numărul $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este bine definit. Să reținem că

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = G(b)-G(a) = ...$ unde $F, G, ...$ sunt primitive ale lui f.

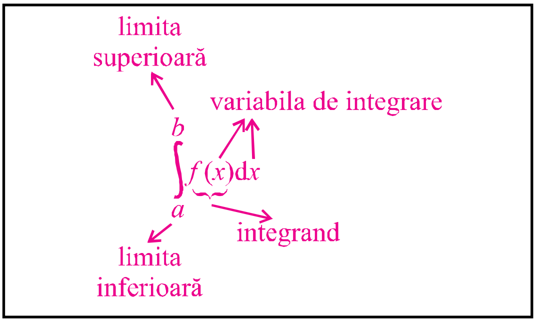
6) Variabila x se numește **variabila de integrare** (variabila „moartă”). Integrala definită a unei funcții continue pe $[a,b]$ **este un număr real**, care nu depinde de variabila de integrare și prin urmare se poate nota cu orice literă (diferită de a sau b) $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(s)\mathrm{d}s = ...$. Integrala nedefinită a lui f pe $[a,b]$ este o mulțime de funcții (mulțimea tuturor primitivelor lui f pe $[a,b]$).

Integrala nedefinită este o mulțime de primitive	**Integrala definită este un număr real**
$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+\mathcal{C}$	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$

Capetele intervalului $[a,b]$, deci a, b se numesc **limitele** (sau **capetele**) **de integrare** în integrala definită, a **limita inferioară**, iar b **limita superioară**.

Intervalul $[a,b]$ se numește **intervalul de integrare**. Funcția f se numește **integrand**. Atragem atenția că terminologia „a, b limite de integrare” nu are nimic în comun cu termenul de limită întâlnit la calculul diferențial!

Deci



7) Simbolul $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a fost dat de G. W. Leibniz. Simbolul $\int$ este un s latin alungit, care provine din $\sum$ grecesc, iar $\mathrm{d}x$ corespunde creşterii Δx de forma $(x_i - x_{i-1})$.

8) Pentru calculul integralelor definite, cu formula Leibniz-Newton, utilizăm calculul de primitive stabilit la integrala nedefinită (integrarea directă utilizând tabelul cu integrale imediate, integrarea prin părţi sau integrarea prin substituţie).

În fizică multe mărimi se exprimă cu ajutorul integralei definite.

1) Integrala definită şi deplasarea unui punct material.

Un punct mobil care se deplasează pe axa Ox cu viteza $v(t)$, unde t este timpul, $v(t)\geq 0, \forall t$, parcurge în intervalul de timp $[t_1, t_2], t_1 < t_2$ spaţiul $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$, iar dacă $a(t)$ este acceleraţia particulei, atunci $v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t$.

2) Lucrul mecanic efectuat de forţa F în intervalul de distanţă $[s_1, s_2]$ este dat de $L = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\mathrm{d}s$.

Exerciţii rezolvate

Să se aplice formula Leibniz-Newton pentru calcularea următoarelor integrale definite:

1) $\int_0^1 (x^2 - x + 3)\mathrm{d}x$; **2)** $\int_1^2 \left(x^3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$; **3)** $\int_1^4 \left(2\sqrt{x} - x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x$; **4)** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$;

5) $\int_4^7 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 5x + 6}$; **6)** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x + 1}$; **7)** $\int_0^1 (2x-1)^9 \mathrm{d}x$; **8)** $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x$; **9)** $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4 + 1}}$;

10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x$ **; 11)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$ **; 12)** $\displaystyle\int_0^2|x-1|\,\mathrm{d}x$ **.**

R. Notăm cu f funcția de integrat, iar cu F o primitivă a lui f.

1) O primitivă a funcției de sub semnul integralei este $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x$.

Conform formulei Leibniz-Newton integrala definită este egală cu

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_0^1=F(1)-F(0)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+3=\frac{17}{6}.$$

2) O primitivă a lui f pe $(0,\infty)$ este $F(x)=\frac{x^4}{4}+2\ln x+\frac{1}{x}$ şi deci

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_1^2=F(2)-F(1)=2\ln 2+\frac{13}{4}.$$

3) O primitivă a lui f pe $(0,\infty)$ este $F(x)=\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ şi deci

$$\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_1^4=F(4)-F(1)=\left(-\frac{32}{15}+3\sqrt[3]{2}\right)-\frac{63}{30}=3\sqrt[3]{2}-\frac{157}{30}.$$

4) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\ln|x+1|\Big|_0^1=\ln 2$.

5) $\displaystyle\int_4^7 f(x)\mathrm{d}x=\int_4^7\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Bigg|_4^7=\ln\frac{8}{5}$.

6) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\Bigg|_0^1=$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

7) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{20}(2x-1)^{10}\Big|_0^1=0$; 8) $\displaystyle\int_1^e f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\ln x}\right)^3\Big|_1^e=\frac{2}{3}$.

9) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; 10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\frac{\sin^4 x}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$.

11) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$; 12)Funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x-1, & x\in[1,2]\\ 1-x, & x\in[0,1)\end{cases}$ fiind continuă admite

primitive. Fie $F:[0,2]\to\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-x, x\in[1,2]\\ x-\dfrac{x^2}{2}-1, x\in[0,1)\end{cases}$ o primitivă a lui f . Atunci:

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(0)=\left(\frac{2^2}{2}-2\right)-\left(0-\frac{0^2}{2}-1\right)=0-(-1)=1.$$

Probleme propuse

1. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$.

1) Să se determine aria figurii delimitată de graficul lui f , axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0, x=1$.

2) Să să se determine aria figurii delimitată de graficul lui f , axa Ox şi dreptele $x=1, x=2$.

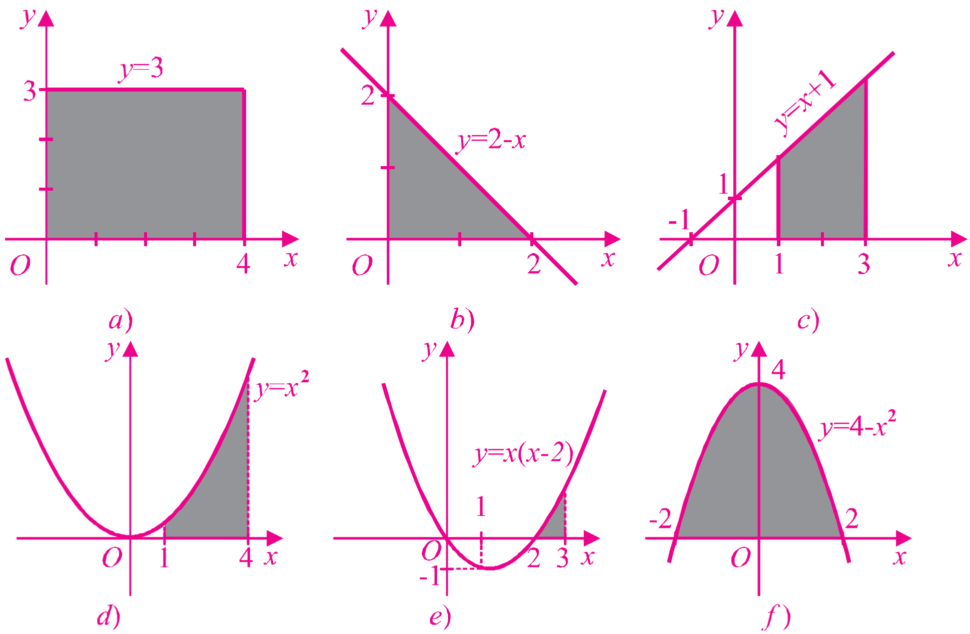
2. 1. Arătați, haşurând pe figură, ariile asociate integralelor de mai jos:

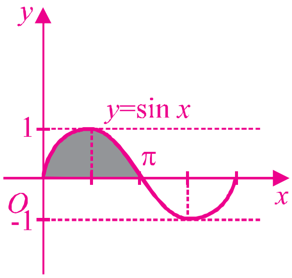
I. 1) $\int_0^2 x\mathrm{d}x$; **2)** $\int_1^3 x\mathrm{d}x$; **3)** $\int_0^1 (x+2)\mathrm{d}x$; **4)** $\int_1^2 (x+2)\mathrm{d}x$.

II. 1) $\int_0^3 x^2\mathrm{d}x$; **2)** $\int_2^4 x^2\mathrm{d}x$; **3)** $\int_{-3}^3 x^2\mathrm{d}x$; **4)** $\int_0^2 (x^2+1)\mathrm{d}x$; **5)** $\int_1^3 (x^2+1)\mathrm{d}x$; **6)** $\int_{-2}^2 (x^2+1)\mathrm{d}x$.

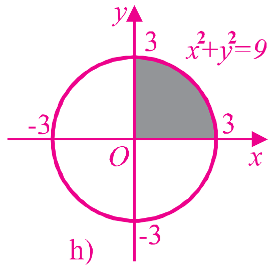
III. 1) $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$; **2)** $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$; **3)** $\int_{-1}^1 (x^3+1)\mathrm{d}x$; **4)** $\int_0^2 (x^3+2)\mathrm{d}x$; **5)** $\int_1^3 (x^3+2)\mathrm{d}x$; **6)** $\int_{-1}^1 (x^3+2)\mathrm{d}x$.

2. Scrieți integralele definite asociate regiunilor haşurate de mai jos:





g)



h)

3. Viteza de creştere a unui brad în primii 60 de ani este dată de legea $v(t)=0{,}01t+0{,}1\left(\frac{m}{an}\right)$.

1) Cât este de înalt bradul după 60 de ani?
2) Care este vârsta bradului când înălţimea sa este de 12 m?
4. Să se aplice formula Leibniz-Newton pentru calcularea următoarelor integrale definite:

I. 1) $\int_{-1}^{1}\left(3x^2-\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x$; 2) $\int_{1}^{3}\left(x-3\sqrt{x}+\frac{5}{x}\right)\mathrm{d}x$; 3) $\int_{-3}^{-2}\frac{\mathrm{d}x}{x-1}$; 4) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; 5) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4}$;
6) $\int_{4}^{5}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-9}}$; 7) $\int_{1}^{3}|x-2|\mathrm{d}x$; 8) $\int_{0}^{2}\left(x^2+|x-1|\right)\mathrm{d}x$.

II. 1) $\int_{1}^{e}x\ln x\mathrm{d}x$; 2) $\int_{0}^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x$: 3) $\int_{0}^{1}x^2e^{2x}\mathrm{d}x$; 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\mathrm{d}x$; 5) $\int_{0}^{\pi}x^2\sin x\mathrm{d}x$; 6) $\int_{0}^{\pi}e^x\cos 2x\mathrm{d}x$;
7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2x\mathrm{d}x$.

III. 1) $\int_{0}^{1}(3x+1)^6\mathrm{d}x$; 2) $\int_{3}^{5}x\sqrt{x^2-9}\mathrm{d}x$; 3) $\int_{0}^{3}x\sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x$; 4) $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$; 5) $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^3}}$;
6) $\int_{1}^{e}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$; 7) $\int_{0}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$; 8) $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$; 9) $\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

IV. 1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$; 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\mathrm{d}x$; 3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x$; 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}$; 5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\mathrm{d}x}{1+\cos x}$;

6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x$; 7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x$; 8) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x$; 9*) $\int_{0}^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{4-3\cos x}$; 10*) $\int_{0}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+2\sin^2 x}$.

V. 1) $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x,\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & x\in(1,2]\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$; 2) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x,\ f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), & x\in[0,1]\\ x^2+x, & x\in[-1,0)\end{cases}$;

3) $\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x,\ f(x)=\max\left(x^2,2x\right),\ x\in[-2,3]$; 4) $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x,\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}, & x\in[0,\pi)\\ 2, & x=\pi\end{cases}$.

5. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea:

1) $\int_a^{a+1}\left(x^3+x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2a-1}{4}$; 2) $\int_0^1\dfrac{x+a}{x+1}\mathrm{d}x=1+\ln 2$; 3) $\int_0^a\left(6x^2-6x-17\right)\mathrm{d}x=-30$.

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^5+bx^2+c$. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ dacă graficul funcției f trece prin punctul $A(0,1)$, panta tangentei la grafic în punctul de abscisă $x=1$ este 36, iar $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3$.

7. Fie $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x-1}+cx$. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ dacă graficul funcției f trece prin punctul $A(2,23)$, tangenta la grafic în puntul de abscisă $x=0$ are panta 4, iar $\int_{-1}^{0}(x-1)f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{37}{6}$.

2.3. PROPRIETĂȚI ALE INTEGRALEI DEFINITE. INTEGRABILITATEA FUNCȚIILOR CONTINUE

În acest paragraf ne ocupăm de funcțiile continue definite pe un interval $[a,b]$, $a<b$. Reamintim că dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt funcții continue, atunci

1) $\alpha f+\beta g$ este o funcție continuă, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; $f\cdot g$ este continuă pe $[a,b]$;

2) $\dfrac{f}{g}$ este continuă pe $[a,b]-\{x\,|\,g(x)=0\}$;

3) f^g este continuă pe $[a,b]\cap\{x\,|\,f(x)>0\}$;

4) $|f|$, $\min(f,g),\max(f,g)$ sunt continue.

De asemenea, să reținem că dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R},\ f$ continuă și $g(x)=f(x),\forall x\in[a,b]-A$, unde A este mulțime finită, atunci și g este integrabilă şi mai mult $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. Altfel spus, modificând o funcţie continuă într-un număr finit de puncte (ale lui A), funcţia obţinută este de asemenea integrabilă şi mai mult integralele definite ale celor două funcţii sunt egale.

Exemplu. Fie funcţia $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=x, x\in[0,1]-\{0,1\}, g(x)=3, x\in\{0,1\}$. Evident g este continuă pe $[0,1]-\{0,1\}$. Considerăm funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x$, care este o funcţie continuă pentru care $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$. Cum g diferă de f într-un număr finit de puncte (două puncte) deducem că şi g este integrabilă şi mai mult $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

În continuare prezentăm principalele proprietăţi ale integralei definite.

P1 (Proprietatea de linearitate). Dacă $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt două funcţii continue şi $\lambda\in\mathbb{R}$, atunci:

1) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

Integrala sumei este egală cu suma integralelor.

2) $\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Constanta multiplicativă iese în faţa integralei.

Observaţii. 1) Egalitatea **1)** din proprietate ne spune că **integrala este aditivă**, în raport cu integrandul, iar egalitatea **2)** spune că **integrala este omogenă**. **Integrala este liniară dacă este aditivă şi omogenă**.

2) Proprietatea se poate scrie sub forma unei singure relaţii astfel :

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Dacă $\alpha=1,\beta=-1$, atunci egalitatea se scrie

$\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (**Integrala diferenței este egală cu diferența integralelor**).

3) Se demonstrează inductiv după $n\in\mathbb{N}^*$ că

$\int_a^b\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n \alpha_i\int_a^b f_i(x)\mathrm{d}x,\ f_i:[a,b]\to\mathbb{R}$ funcții continue.

Exemple. 1. Să se calculeze integrala $I=\int_1^2\left(3x^2-\frac{1}{x}+4\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$.

R. Conform proprietății enunțate putem scrie

$$I=3\int_1^2 x^2\mathrm{d}x-\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}+4\int_1^2\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=x^3\Big|_1^2-\ln x\Big|_1^2+3x\sqrt[3]{x}\Big|_1^2+\operatorname{arctg} x\Big|_1^2=$$

$$=4+6\sqrt[3]{2}-\ln 2+\operatorname{arctg} 2-\frac{\pi}{4}.$$

2. Să se arate că $\int_1^2 \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x+\int_1^2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

R. Se știe că $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},\forall x>0$. **Deci membrul stâng devine**

$$\int_1^2\left(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{\pi}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}x\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}.$$

P2 (Proprietatea de aditivitate la interval). Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ funcție continuă și $c\in(a,b)$.

Atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ (**Relația lui Chasles**).

---

f este integrabilă pe $[a,b]\Leftrightarrow f$ este integrabilă pe $[a,c]$ și pe $[c,b]$ și $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

Demonstrație.* Fie $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f pe $[a,b]$. Membrul drept al relației este egal cu $F(c)-F(a)+F(b)-F(c)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. ■

Interpretare geometrică. Pentru o funcţie continuă, nenegativă $f:[a,b]\to[0,\infty]$ această teoremă este uşor de înţeles în termeni de arie. În Fig.9, aria părţii I este egală cu $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$, iar aria părţii II este egală cu $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$. Aria întregii regiuni haşurate este egală cu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

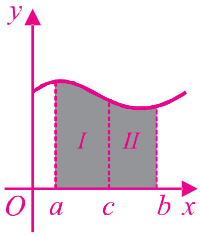


Fig. 9

Teorema afirmă că :

aria (I) + aria (II) = aria (regiune haşurată).

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ **, unde** $f(x)=\begin{cases} x+1, x\in[-1,0) \\ 1+\sin x, x\in[0,1]\end{cases}$.

R. Observăm că f este continuă pe $[-1,1]-\{0\}$. Din $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}(x+1)=1$, $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}(1+\sin x)=1=f(0)$ rezultă că f este continuă şi în $x=0$. Deci, f este continuă pe $[-1,1]$. Atunci

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}(x+1)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(1+\sin x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+2-\cos 1=$$
$$=\frac{5}{2}-\cos 1.$$

2. Să se calculeze $\int_{-2}^{2}\left|x^2-1\right|\mathrm{d}x$ **.**

R. Funcţia $f(x)=\left|x^2-1\right|, x\in[-2,2]$ este continuă şi avem :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, x\in[-2,-1]\cup[1,2] \\ 1-x^2, x\in(-1,1)\end{cases}.$$

Ţinând seamă de proprietatea de aditivitate a integralei avem :

$$\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}\left(x^2-1\right)+\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x+$$
$$+\int_{1}^{2}\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}+2+\frac{4}{3}=\frac{14}{3}.$$

3. Să se determine $I(a)=\int_{1}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{|x-a|+1}, a\in\mathbb{R}$ **.**

R. Cum $x\in[1,3]$ pentru explicitarea modulului $|x-a|, a\in\mathbb{R}$, analizăm cazurile (după poziţia lui a faţă de valorile 1 şi 3) :

$1^0)$ $a \le 1$. În acest caz $|x-a| = x-a$, deoarece $x \ge 1$ şi deci integrala devine

$$I(a) = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-a+1} = \ln|x+1-a|\Big|_1^3 = \ln\frac{4-a}{2-a}.$$

$2^0)$ $1 < a < 3$. În acest caz $x \in [1,3] \Rightarrow (1 \le x \le a$ sau $a \le x \le 3)$, adică

$$|x-a| = \begin{cases} -x+a, \text{ dacă } x \in [1,a] \\ x-a, \text{ dacă } x \in (a,3] \end{cases} \text{ şi deci } I(a) = \int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{-x+a+1} + \int_a^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-a+1} =$$

$$= -\ln|x-a-1|\Big|_1^a + \ln|x-a+1|\Big|_a^3 = \ln a(4-a).$$

$3^0)$ $3 \le a$. În acest caz, din $x \in [1,3]$ rezultă $|x-a| = -x+a$ şi deci

$$I(a) = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{-x+a+1} = -\ln|x-a-1|\Big|_1^3 = \ln\frac{a}{a-2}. \text{ Deci, } I(a) = \begin{cases} \ln\frac{4-a}{2-a}, a \le 1 \\ \ln a(4-a), a \in (1,3) \\ \ln\frac{a}{a-2}, a \ge 3 \end{cases}.$$

Observație. Această proprietate se aplică şi la funcțiile care sunt continue pe porțiuni. Mai precis are loc următoarea

> **Definiție**. Funcția $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ se numeşte **continuă pe porțiuni** dacă este continuă sau dacă are doar un număr finit de puncte de discontinuitate $x_1, x_2, ..., x_p$ în care f are limite laterale finite.

Graficul unei funcții continue pe porțiuni este ilustrat în Fig.10 (a) pentru funcție continuă, b) pentru funcție discontinuă).

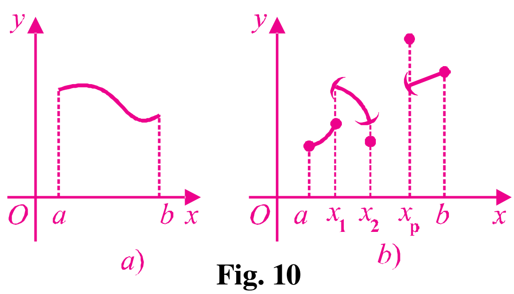


Fig. 10

Probleme rezolvate

1. Fie $f:[-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1+e^x, x \in [-1,0] \\ x+1, x \in (0,1] \end{cases}$.

R. Observăm că f este discontinuă în $x=0$ ($l_s(0) = 2 \ne l_d(0) = 1, f(0) = 2 \Rightarrow x = 0$ punct de discontinuitate de speța întâi). Funcția f restricționată la $[-1,0]$ este integrabilă (fiind continuă) şi

$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 2-\frac{1}{e}$. Pentru a arăta că f este integrabilă pe $[0,1]$ se consideră funcția $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=x+1$. Deoarece g este continuă avem $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}$. Cum $f(x)=g(x),\ \forall x\in(0,1]$ se deduce $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$.

Prin urmare f este integrabilă pe $[-1,0]$ și pe $[0,1]$. Deci f este integrabilă pe $[-1,1]$ și are loc relația lui Chasles

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\left(1+e^x\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x = 2-\frac{1}{e}+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}-\frac{1}{e}.$$

2. Să se calculeze integrala definită:

a) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ **, unde** $f(x)=\left[2^2 x\right], x\in[0,1]$ **; b)** $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\mathrm{d}x$ **, unde** $f(x)=x-[x]$ **.**

R. a) Se explicitează funcția și se obține:

$$f(x)=\begin{cases} 0, 0\le 4x<1, 0\le x<\frac{1}{4} \\ 1, 1\le 4x<2, \frac{1}{4}\le x<\frac{2}{4} \\ 2, 2\le 4x<3, \frac{2}{4}\le x<\frac{3}{4} \\ 3, 3\le 4x<4, \frac{3}{4}\le x<\frac{4}{4} \\ 4, x=1 \end{cases}.$$

Fie funcțiile

$g_1:\left[0,\frac{1}{4}\right]\to\mathbb{R},\ g_1(x)=0,\ g_2:\left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right]\to\mathbb{R},\ g_2(x)=1,,$

$g_3:\left[\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right]\to\mathbb{R},\ g_3(x)=2$, $g_4:\left[\frac{3}{4},1\right]\to\mathbb{R},\ g_4(x)=3$.

Aceste funcții fiind constante sunt continue.

Pe de altă parte f restricționată la intervalele $\left[0,\frac{1}{4}\right],\left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right],\left[\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right],\left[\frac{3}{4},1\right]$ coincide cu g_1, g_2, g_3 și respectiv g_4 în toate punctele cu excepția unui punct din fiecare interval. Deci

$$\int_0^{\frac{1}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}} g_1(x)\mathrm{d}x = 0,\ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}} g_2(x)\mathrm{d}x = x\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}} = \frac{1}{4},$$

$$\int_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} g_3(x)\mathrm{d}x = 2x\Big|_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2},\ \int_{\frac{3}{4}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{3}{4}}^{1} g_4(x)\mathrm{d}x = 3x\Big|_{\frac{3}{4}}^{1} = \frac{3}{4}.$$

Acum $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}} 0\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}} \mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} 2\mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{4}}^{1} 3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$.

b)Explicitând funcția avem $\left(3<2\sqrt{3}<4\right)$

$$f(x)=\begin{cases} x,\ x\in[0,1) \\ x-1,\ x\in[1,2) \\ x-2,\ x\in[2,3) \\ x-3,\ x\in\left[3,2\sqrt{3}\right) \end{cases}.$$

Ca mai sus avem

$$\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x+\int_2^3 (x-2)\mathrm{d}x+\int_3^{2\sqrt{3}} (x-3)\mathrm{d}x=$$

$$=6\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Următoarea proprietate spune că într-o inegalitate de funcții integrabile se poate integra. Mai precis avem :

P3 (Integrarea în inegalități – Proprietatea de ordine).

1) (Inegalitatea fundamentală pentru integrale) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă, $f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$.

Atunci : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$.

Consecință : $f\geq 0$ şi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow f=0$.

---

2) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f continuă, $f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$ şi $[c,d]\subset[a,b], c<d$, atunci : $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Proprietatea de ereditate : f integrabilă pe $[a,b]\Rightarrow f$ integrabilă pe orice compact $[c,d]$ inclus în $[a,b]$.

---

3) (**Monotonia integralei**) Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții continue astfel încât $f(x)\leq g(x), \forall x\in[a,b]$. Atunci : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Consecință (Funcție mărginită). Dacă f continuă şi $m\leq f(x)\leq M$, $\forall x\in[a,b]$, atunci $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq M(b-a)$.

Inegalitățile între funcții se integrează termen cu termen.

Observații. 1) Dacă $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$ **nu rezultă** $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$, adică reciproca lui **1)** din proprietate este falsă.

De exemplu $f:[0,2] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x$, pentru care $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$, dar pe $[0,1]$ $f(x) \leq 0, \forall x \in [0,1]$! (Fig.11)

2) Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă și $f \leq 0$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq 0$.

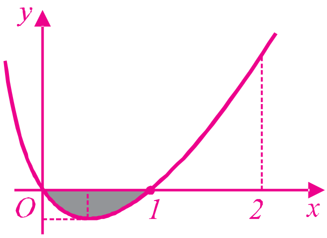


Fig. 11

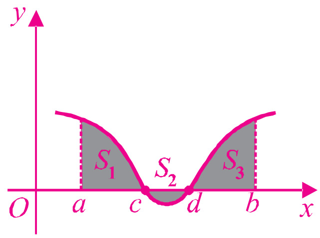


Fig. 12

3) Dacă $f(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0, \forall x \neq 0$, atunci $\int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-2}^{2} = -1$. De unde provine greșeala?

4) Interpretarea geometrică a integralei definite. Integrala definită este egală cu suma algebrică a ariilor trapezelor curbilinii delimitate de graficul funcției, axa Ox și dreptele verticale $x = a, x = b$, unde a, b sunt limitele de integrare.

Din acest motiv aria trapezului curbiliniu așezat deasupra axei Ox se ia cu semnul plus, iar aria trapezului curbiliniu situat sub axa Ox se ia cu semnul minus.

În cazul funcției f cu graficul din Fig.12, avem:

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\mathrm{d}x = S_1 - S_2 + S_3$, deoarece $f \leq 0$ pe $[c,d]$ și $S_2 = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$, unde $S_1, -S_2, S_3$ sunt ariile celor trei zone hașurate.

De aceea pentru calculul ariei Γ_f se utilizează formula $\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

În cazul particular al funcției continue $f:[-a,a] \to [0,\infty)$ și în plus funcție pară $(f(-x) = f(x), \forall x \in [-a,a])$ aria delimitată de graficul lui f, axa Ox și dreptele

$x=-a, x=a$ (Fig.13 a)) este egală cu aria $\left(\Gamma_f\right)=\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ (la nivel intuitiv, trapezele curbilinii I, II prin suprapunere după Oy coincid şi deci trebuie sa aibă arii egale).

Dacă f este impară $\left(f(-x)=-f(x), \forall x\in[-a,a]\right)$, atunci

$$\text{aria}\left(\Gamma_f\right)=\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x=-\text{aria}(I)+\text{aria}(II) \text{ Fig. 13 b).}$$

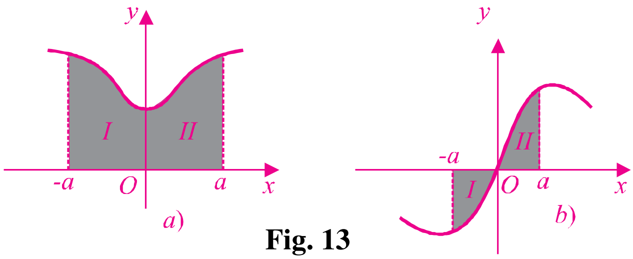


Fig. 13

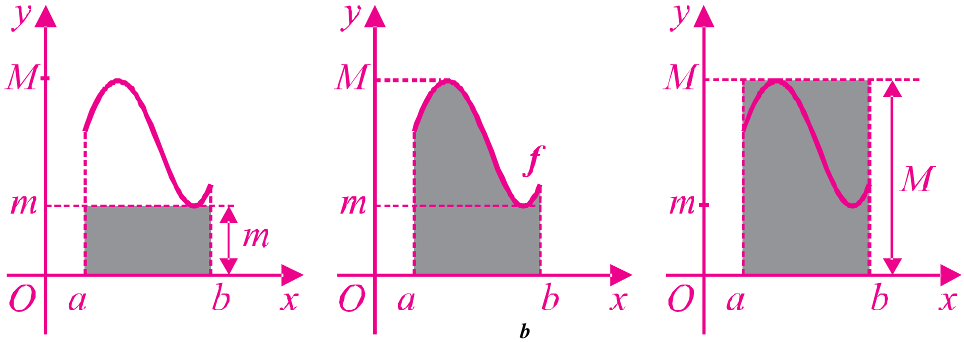
Cum prin rotirea lui I în jurul lui O în sens orar, acesta se suprapune peste II deducem $\text{aria}(I)=\text{aria}(II)$ şi deci $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$.

În concluzie, $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, & f \text{ pară} \\ 0, & f \text{ impară} \end{cases}$.

Demonstrația acestei egalități se va face la metoda substituției.

Dacă de exemplu ni se cere să calculăm $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2007} x\,\mathrm{d}x$, am constata după mai multe calcule că rezultatul este egal cu zero. Acest lucru rezultă uşor observând că funcția integrand $f(x)=\sin^{2007} x$ este impară, iar intervalul de integrare este simetric în zero.

5) Dacă $f\geq 0$, atunci rezultatul din consecință afirmă că aria subgraficului lui f este cuprinsă între ariile a două dreptunghiuri de aceeaşi bază $[a,b]$ şi înălțimi m şi respectiv M ca în Fig. 14.



$$\textbf{\textit{aria haşurată}} = m(b-a) \le \textbf{\textit{aria haşurată}} = \int_a^b f \le \textbf{\textit{aria haşurată}} = M(b-a)$$

Fig.14

6) În plus, această proprietate ne permite să aproximăm $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ în sensul că dacă $g(x) \le f(x) \le h(x), \forall x \in [a,b]$, atunci $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b h(x)\mathrm{d}x$. Dacă integralele g şi h se pot calcula, ele sunt „margini” pentru $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Am văzut că funcţia continuă $f(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$, fiind continuă admite primitive. Dar, nu avem o primitivă exprimabilă prin funcţii elementare. Ne propunem să aproximăm $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$. Au loc inegalităţile $e^{-x} \le e^{-x^2} \le 1, \forall x \in [0,1]$. De aici $\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x \le \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x \le \int_0^1 \mathrm{d}x$ sau $1 - \frac{1}{e} \le \int_0^1 e^{-x^2} \le 1$.

Probleme rezolvate

1. Să se arate că: 1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+3}\mathrm{d}x > 0$ **; 2)** $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\sin^5 x - 5}\mathrm{d}x < 0$ **.**

R. 1)Pentru $x \in [0,1]$ avem $\frac{x^3+1}{x^2+3} > 0$. Deci $\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+3}\mathrm{d}x > 0$.

2) Funcţia integrand pe $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ ia valori negative (strict).

2. Să se demonstreze inegalitățile de mai jos, utilizând proprietatea de ordine a integralei:

1) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\,dx \ge \int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx$ **; 2)** $\frac{1}{3} \le \int_4^7 \frac{x-3}{x+5}dx \le 1$ **; 3)** $2\sqrt{2} \le \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+4x+5}dx \le 2\sqrt{10}$ **;**

4) $\frac{2}{e} \le \int_{-1}^1 e^{-x^2}dx \le 2$**.**

R. 1) Pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avem $0 \le \sin x \le 1$. De aici prin înmulțire cu $\sin^5 x \ge 0$ se deduce $\sin^6 x \le \sin^5 x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Această ultimă inegaliate integrată pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dă inegalitatea dorită.

2) Funcția $f:[4,7] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-3}{x+5} = 1 - \frac{8}{x+5}$ este strict crescătoare. Din $4 \le x \le 7$ rezultă $f(4) = \frac{1}{9} \le f(x) \le f(7) = \frac{1}{3}$. Se integrează pe $[4,7]$ această dublă inegalitate şi rezultă afirmația.

3) Funcția $f:[-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$ are

$f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} > 0, \forall x \in [-1,1]$ şi deci f este strict crescătoare. Din $-1 \le x \le 1$ rezultă $f(-1) \le f(x) \le f(1)$, iar de aici prin integrare se obține inegalitatea dorită.

4) Se ia $f:[-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$. Realizând tabelul de variație pentru f găsim că $\frac{1}{e} \le f(x) \le 1, \forall x \in [-1,1]$, iar de aici prin integrare se deduc inegalitățile propuse.

3. Să se demonstreze inegalitățile: 1) $\frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{N}^*$ **;**

2) $\ln 2 < \int_0^1 \frac{2x}{1+x^{13}}dx < 1$ **; 3)** $\int_0^1 e^{x^2}dx \ge \frac{4}{3}$**.**

R. 1) Se integrează pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ inegalitatea dublă $1 < \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

2) Inegalitatea $\frac{2x}{1+x^2} < \frac{2x}{1+x^{13}} < 2x, x \in (0,1)$ se integrează pe $[0,1]$.

3) Se ştie că $e^x \ge x+1, \forall x \ne 0$. Atunci $e^{x^2} \ge x^2+1$. Se integrează această inegalitate pe $[0,1]$.

4. Să se arate că: 1) $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ **; 2)** $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 [nx]dx = \frac{1}{2}$**.**

R. 1) Au loc inegalitățile $0 < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}, n \le x \le n+1$, care prin integrare dau

$0<\int\limits_{n}^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Trecând la limită după n, via „criteriul cleştelui”, se obţine afirmaţia dorită.

2) Ţinem seama de definiţia părţii întregi şi avem: $(nx-1)<[nx]\leq nx$ şi deci $\int\limits_0^1(nx-1)\mathrm{d}x\leq\int\limits_0^1[nx]\mathrm{d}x\leq\int\limits_0^1 nx\mathrm{d}x$ sau $\frac{n}{2}-1\leq\int\limits_0^1[nx]\mathrm{d}x\leq\frac{n}{2}$. Acum, via „criteriul cleştelui”, se obţine limita dorită.

5. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq1}$, unde $I_n=\int\limits_0^1\frac{x^n}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x, n\in\mathbb{N}^*$.

Să se arate că: a) $I_{n+1}\leq I_n, \forall n\geq1$; b) $I_{n+2}+3I_{n+1}+2I_n=\frac{1}{n+1}, n\in\mathbb{N}^*$;

c) $\frac{1}{6(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{6(n-1)}, n\geq2$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{6}$.

R. a) Din $0\leq x\leq1$ rezultă $x^{n+1}\leq x^n$, iar de aici $\frac{x^{n+1}}{x^2+3x+2}\leq\frac{x^n}{x^2+3x+2}$ sau prin integrare pe $[0,1]$ obţinem $I_{n+1}\leq I_n$. Deci şirul (I_n) este descrescător.

b) Avem $I_{n+2}+3I_{n+1}+2I_n=\int\limits_0^1\frac{x^n\left(x^2+3x+2\right)}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^n\mathrm{d}x=\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{1}{n+1}$.

c) Din b), ţinând seamă de a) obţinem $\frac{1}{n+1}=I_{n+2}+3I_{n+1}+2I_n\leq I_n+3I_n+2I_n=6I_n$, adică $I_n\geq\frac{1}{6(n+1)}$. Analog se obţine şi cealaltă inegalitate.

d) În c) înmulţim cu n şi aplicăm criteriul „cleştelui”.

6. Fie $f:[0,1]\to[1,2]$ o funcţie continuă cu proprietatea $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geq1$. Să se arate că $\int\limits_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leq1$.

R. Cum $1\leq f(x)\leq2, x\in[0,1]$ rezultă $[f(x)-1][f(x)-2]\leq0$, iar de aici

$\frac{[f(x)-1][f(x)-2]}{f(x)}=f(x)-3+\frac{2}{f(x)}\leq0, x\in[0,1]$. De aici prin integrare avem:

$2\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\leq3-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leq3-1=2$.

Probleme propuse

1. 1) Dacă $\int_0^1 f(x)\,dx = 3, \int_0^2 f(x)\,dx = 1, \int_2^5 f(x)\,dx = 4$, **atunci determinați fiecare din integralele:**

a) $\int_0^5 f(x)\,dx$; **b)** $\int_1^2 f(x)\,dx$; **c)** $\int_1^5 f(x)\,dx$; **d)** $\int_5^1 f(x)\,dx$.

2) Se știe că $\int_1^3 g(x)\,dx = 3, \int_2^3 g(x)\,dx = 5, \int_1^6 g(x)\,dx = 4$. **Să se determine integralele:**

a) $\int_3^6 g(x)\,dx$; **b)** $\int_3^2 g(x)\,dx$; **c)** $\int_1^2 g(x)\,dx$; **d)** $\int_3^3 g(x)\,dx$.

2. Arătați că următoarele funcții sunt continue pe porțiuni și determinați $\int_a^b f(x)\,dx$, **în fiecare din cazurile:**

I. 1) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\in[-2,1] \\ 2x^2, x\in(1,2] \end{cases}$; **2)** $f(x)=\begin{cases} e^x-1, x\in[-1,0) \\ x^2-x, x\in[0,2] \end{cases}$;

3) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}, x\in[0,1) \\ \dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x}, x\in[1,2] \end{cases}$; **4)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1}, x\in[-1,0] \\ \ln(x+1)+1, x\in(0,1] \end{cases}$;

5) $f:[-2,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\min\left(x^2-1, x+1\right)$;

6) $f:[0,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\max\left(x^2-x+4, 5x-1\right)$;

7) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x|x-1|$; **8)** $f:[-1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=|x|+|x-1|$.

II. 1) $f(x)=\begin{cases} x, x\in[-1,0] \\ 2x+1, x\in(0,2] \end{cases}$; **2)** $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\in[-1,0) \\ 2-3x, x\in[0,1] \end{cases}$;

3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x}+e^x, x\in[1,2) \\ \dfrac{1}{x^2}+3^x, x\in[2,3] \end{cases}$; **4)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, x\in[0,1) \\ \dfrac{3}{x^2+1}, x\in[1,2] \end{cases}$; **5)** $f(x)=\begin{cases} \sqrt{9-x^2}, x\in[-2,0] \\ \operatorname{tg} x, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right] \end{cases}$.

III. 1) $f(x)=\begin{cases} [x], x\in[2,4] \\ \left[x^2\right], x\in[0,2) \end{cases}$; **2)** $f(x)=\begin{cases} x[x], x\in(2,4] \\ x\left[x^2\right], x\in[1,2] \end{cases}$; **3)** $f(x)=\begin{cases} [2x], x\in[0,2] \\ x[2x], x\in(2,3] \end{cases}$.

IV. 1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n+x^3}{x^n+x^2+1}, x\in[0,2]$; **2)** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}+x^n}{x^n+2^n}, x\in[0,4]$;

3) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+xe^{nx}}{1+e^{nx}}, x\in[-1,1]$; **4)** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}, x\in[-1,1]$.

3. Să se calculeze: a) $\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x+[x]}, n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$; b) $\lim_{n\to\infty} n\int_1^n \frac{x\mathrm{d}x}{n^3+[x]^2}$.

4. 1) Să se determine $I(a), a\in\mathbb{R}$ în cazurile:

$$1^0)\ I(a)=\int_0^1 |x-a|\mathrm{d}x;\ 2^0)\ I(a)=\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{|x-a|+1};\ 3^0)\ I(a)=\int_0^1 |x(x-a)|\mathrm{d}x.$$

2) Să se calculeze $\lim_{a\to\infty}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{|x-a|+1}$.

5. Să se calculeze ($[x]=$ partea întreagă a lui $x\in\mathbb{R}$, $\{x\}=$ partea fracționară a lui x):

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+1}\int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{1+\{x\}}$; 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^n [x]\mathrm{d}x$; 3) $\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{[x]^2+[x]}$; 4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\int_1^{n^2}\left[\sqrt{x}\right]\mathrm{d}x$.

6. Să se demonstreze inegalitățile:

I. 1) $\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\mathrm{d}x > \int_0^{\pi/2}\cos^4 x\mathrm{d}x$; 2) $\int_{-1}^2 (x^2-x)\mathrm{d}x \leq 2\int_{-1}^2 (x+5)\mathrm{d}x$; 3) $\int_{-2}^2 |x+1| \leq$
$\leq \int_{-2}^2 |2x-1|\mathrm{d}x + \int_{-2}^2 |2-x|\mathrm{d}x$; 4) $\int_0^1 e^{-x}\sin x\mathrm{d}x > \int_0^1 e^{-x^2}\sin x\mathrm{d}x$; 5) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} < \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

II. 1) $-2\leq \int_0^1 \frac{x-2}{x+1}\mathrm{d}x \leq -\frac{1}{2}$; 2) $2\leq \int_1^2 \frac{x+4}{x+1}\mathrm{d}x\leq\frac{5}{2}$; 3) $\frac{1}{5}<\int_5^8 \frac{2x-7}{2x+5}\mathrm{d}x<1$;

4) $0\leq \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2+1}\mathrm{d}x \leq \frac{3}{10}$; 5) $2\sqrt{e}\leq \int_0^1 \left(e^{x^2}+e^{1-x^2}\right)dx \leq 1+e$.

III. 1) $\int_1^2 \ln(1+x)\mathrm{d}x > \int_1^2 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$; 2) $\int_1^2 \ln(1+x)\mathrm{d}x < \int_1^2 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}$;

3) $\int_2^{10} x\,\mathrm{arctg}\, x\mathrm{d}x > \int_2^{10} \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$; 4) $\int_1^2 \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x < \int_1^2 \left(\frac{1}{x}+\ln x\right)\mathrm{d}x$.

IV. 1) $\int_0^1 e^x\mathrm{d}x \leq \int_0^1 (1+x)^{1+x}\mathrm{d}x$; 2) $\int_1^2 (a+x)^a\mathrm{d}x < \int_1^2 a^{a+x}\mathrm{d}x, a\geq e$;

3) $\int_1^2 (e+x)^{e-x}\mathrm{d}x > \int_1^2 (e-x)^{e+x}\mathrm{d}x$; 4) $\int_9^{10} x^{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x > \int_9^{10} (x+1)^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

V. 1) $\frac{2}{3}<\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{4}{3}<\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x<\frac{e+4}{3}$.

2.4. METODE DE CALCUL ALE INTEGRALELOR DEFINITE

În aplicațiile calculului integral este necesar să găsim primitive (când astfel de primitive există şi sunt exprimabile în termeni de funcții simple) pentru a calcula integrala definită a unei funcții (în sensul lui Newton) prin formula cunoscută $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, unde $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f:[a,b] \to \mathbb{R}$.

Astfel de calcule vom face atunci când determinăm ariile unor suprafețe plane mărginite, volumele unor corpuri obținute prin rotația unor suprafețe plane în jurul unei drepte, etc.

Metodele pentru calculul integralei nedefinite rămân, în general, valabile şi în calculul integralei definite. Tehnicile pe care le prezentăm în continuare sunt următoarele:

1) **Metoda integrării directe.**
2) **Metoda integrării prin părți.**
3) **Metoda substituției (sau schimbării de variabilă).**

Le analizăm în continuare.

1. **Metoda integrării directe**

Are la bază tabelul de integrale nedefinite din capitolul precedent (pentru a determina o primitivă F a lui f) şi proprietatea de liniaritate a integralei definite $\left(\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g\right)$ şi evident formula Leibniz-Newton $\left(\int_a^b f = F(b) - F(a)\right)$.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze următoarele integrale definite:

1) $\int_1^2 x^2 dx$ **; 2)** $\int_1^3 \frac{dt}{t}$ **; 3)** $\int_0^1 \left(2x + 3\sqrt{x}\right)dx$ **; 4)** $\int_{-1}^1 \frac{du}{u^2 - 4}$ **; 5)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ **; 6)** $\int_0^1 e^t dt$ **.**

R. 1) Avem $F(x) = \frac{x^3}{3}$ o primitivă a funcției $f(x) = x^2$, $x \in [1,2]$. Deci $\int_1^2 x^2 dx = F(2) - F(1) = \frac{7}{3}$.

2) $\int_1^3 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$.

3) $\int_0^1 \left(2x + 3\sqrt{x}\right)dx = 2\int_0^1 xdx + 3\int_0^1 \sqrt{x}dx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 3\frac{2x\sqrt{x}}{3}\Big|_0^1 = 1 + 2 = 3$.

4) $\int_{-1}^{1} \frac{du}{u^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{9}$.

5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1$.

6) $\int_{0}^{1} e^t dt = e^t\Big|_0^1 = e-1$.

2. Calculând în două moduri $\int_{0}^{1} (x+1)^n dx$ să se stabilească egalitatea:

$$\mathbf{1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right).}$$

R. Cu formula Leibnitz-Newton avem: $\int_{0}^{1}(x+1)^n dx = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$, iar cu binomul lui Newton se obține $\int_{0}^{1}(x+1)^n dx = \sum_{k=0}^{n}\int_{0}^{1} C_n^k x^k dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k$.

Probleme propuse

1. Să se calculeze următoarele integrale definite:

1) $\int_0^1 x^3 dx$; 2) $\int_0^1 (2x-3)dx$; 3) $\int_{-1}^1 3x^3 dx$; 4) $\int_{-2}^0 x(x+1)dx$; 5) $\int_0^1 x^2(x+1)dx$; 6) $\int_e^{e^2}\frac{dx}{x}$;

7) $\int_1^3 \frac{dt}{t^2}$; 8) $\int_1^4\left(3x+\frac{1}{x^2}\right)dx$; 9) $\int_0^1 x\sqrt{x}dx$; 10) $\int_1^4\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 11) $\int_1^8\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 12) $\int_1^4\left(x-\frac{2}{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;

13) $\int_0^1 3^x dx$; 14) $\int_0^1\frac{du}{u^2+3}$; 15) $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 16) $\int_2^3\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$; 17) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 2x\,dx$; 18) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 3x\,dx$;

19) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}\operatorname{ctg} x\,dx$; 20) $\int_0^1 e^{3x}dx$; 21) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2 x\,dx$; 22) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{ctg}^2 x\,dx$; 23) $\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$; 24) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$;

25) $\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$.

2. Definiți o funcție $F:[1,8]\to\mathbb{R}$ astfel încât $F'(x)=\frac{1}{x}$ și (pe rând): 1) $F(2)=0$; 2) $F(2)=3$.

3. Definiți o funcție $F:[0,4]\to\mathbb{R}$ astfel încât $F'(x)=\sqrt{1+x^2}$ și (pe rând): 1) $F(3)=0$; 2) $F(3)=1$.

4. Să se calculeze:

1) $\int_1^4 (x\text{-}2)dx$ și $\int_1^4 |x-2|dx$; 2) $\int_{-2}^2 \left(x^2-1\right)dx$ și $\int_{-2}^2 \left|x^2-1\right|dx$; 3) $\int_{-2}^2 \left|x^3-x\right|dx$; 4) $\int_0^4 f(x)dx$,

unde $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\in[0,1]\\ 4-x, & x\in(1,4]\end{cases}$; 5) $\int_{-1}^1 f(x)dx$, unde $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\in[-1,0]\\ \sqrt{x}+1, & x\in(0,1]\end{cases}$; 6) $\int_{-1}^3 f(x)dx$,

unde $f(x)=\begin{cases}x^3+x, & x\in[-1,1]\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}, & x\in(1,3]\end{cases}$; 7) $\int_0^2 f(x)dx$, unde $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x^2+1}, & x\in[0,1]\\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\in(1,2]\end{cases}$;

8) $\int_0^2 \max\left(x, x^2, x^3\right)dx$; 9) $\int_0^2 \min\left(x,x^2,x^3\right)dx$; 10) $\int_0^{2\pi} |\sin x-\cos x|dx$.

5. Să se calculeze: $\int_0^{2\pi} \max(\sin x, \arcsin(\sin x))dx$.

6. Un obiect pleacă din origine şi se mişcă de-a lungul axei Ox cu viteza $v(t)=10t-t^2, 0\le t\le 10$.

1) Care este poziția obiectului la momentul t, $0\le t\le 10$?

2) Când viteza obiectului este maximă, care este poziția lui în acel moment?

7. Să se determine numărul real a pentru care (pe rând):

1) $\int_0^a (x+1)dx=\int_0^a \frac{3}{2}(x+1)^3 dx$; 2) $\int_0^a \left(2-4x+3x^2\right)dx\le a, a>0$; 3) $\int_a^{a+1} \left(x^3+4\right)dx=\frac{31}{4}$.

2. Metoda integrării prin părți

O altă metodă pentru calculul integralelor definite o constituie metoda integrării prin părți, similară metodei integrării prin părți de la integrala nedefinită, fiind o consecință a derivării unui produs de funcții. Mai precis are loc următoarea:

Teoremă (formula de integrare prin părți). Dacă $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt două funcții derivabile, cu derivate continue, atunci

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx . \qquad (1)$$

(1) se numeşte **formula de integrare prin părți pentru integrala definită.**

Forma diferențială a lui (1) este $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$

Demonstrație. Deoarece uv', vu' sunt funcții continue, ele sunt integrabile şi deci are sens scrierea din (1). Din $(u\cdot v)'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$, $x\in[a,b]$ rezultă că funcția $u\cdot v$ este o primitivă a funcției $u'v+uv'$. Conform formulei Leibniz-Newton avem:

$$\int_a^b (u\cdot v)'(x)dx=(u\cdot v)(x)\Big|_a^b=(uv)(b)-(uv)(a). \qquad (*)$$

Pe de altă parte, utilizând linearitatea integralei definite, avem:

$$\int_a^b (u\cdot v)'(x)dx=\int_a^b \left[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\right]dx=\int_a^b u'(x)v(x)dx+\int_a^b u(x)v'(x)dx. \quad (**)$$

Din (*) şi (**) rezultă $(uv)(x)\Big|_a^b=\int_a^b u'(x)v(x)dx+\int_a^b u(x)v'(x)dx$ sau

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=(uv)(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx. \blacksquare$$

Observații. 1) Cele două părți ale integrandului sunt $u(x)$ şi $v'(x)$ sau în scriere diferențială u şi dv. Pentru a aplica formula integrării prin părți trebuie calculate $u'(x)$(prin derivarea lui $u(x)$) şi $v(x)$ (prin integrarea lui $v'(x)$). Se alege de obicei funcția $u(x)$, funcția mai complicată din structura integralei, deoarece derivarea este operație mai simplă decât integrarea (prin care se obține v) şi astfel încât a doua integrală din formula (1) să fie mai simplă decât cea de calculat. Dacă acest lucru nu se întâmplă, atunci se face o nouă alegere pentru $u(x)$ şi $v'(x)$.

2) Formula de integrare prin părți se poate aplica de mai multe ori. Dacă rezultatul obținut în urma integrării de două ori prin părți este $I=I$, atunci înseamnă că munca efectuată (alegerea lui $u(x)$ şi $v'(x)dx$) în a doua integrală din (1) este „inversă" celei din prima integrală.

3) Pentru a aplica uşor formula integrării prin părți vom aranja funcțiile (ca şi în cazul integralei nedefinite) astfel:

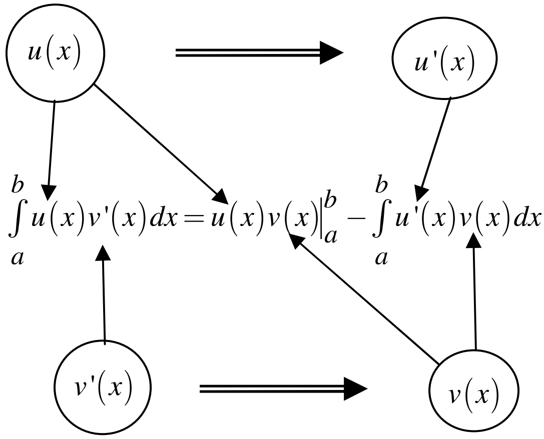
$$\begin{cases} u(x)= \\ v'(x)= \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)= \text{ (prin derivare)} \\ v(x)= \text{ (prin integrare; } v \text{ este o primitivă)} \end{cases}$$

(din prima integrală) (din a două integrală)

sau în scriere diferențială

$$\begin{cases} u= \\ dv= \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du= \\ v= \end{cases}$$

4) Formula integrării prin părți pentru integrala definită poate fi ilustrată prin următoarea diagramă, unde în prima integrală definită avem produsul funcțiilor $u(x)$ și $v'(x)$ (aşa cum indică săgețile), pe diagonală se face produsul funcțiilor $u(x)$ și $v(x)$ luat între *a* şi *b*, iar a doua integrală definită are integrandul alcătuit din produsul funcțiilor $u'(x)$ şi $v(x)$.



5) Reamintim câteva tipuri de integrale care se calculează utilizând formula integrării prin părți (aplicată cel puțin odată):

- $\int_a^b x^n \begin{Bmatrix} \mathbf{\ln x} \\ \mathbf{\arcsin x} \\ \mathbf{arctg\, x} \end{Bmatrix} dx,\ n \in \mathbb{N}$, unde sub integrală este produsul dintre x^n și una din

funcțiile din paranteza acoladă.

Se alege $u = \ln x(\arcsin x,\ \mathrm{arctg}\, x)$ unde se ia $u = x^n$ şi $v' = x^n$. Limitele *a, b* sunt alese astfel încât să aibă sens scrierea.

- $\int_a^b x^n \begin{Bmatrix} \boldsymbol{e^{\alpha x}} \\ \mathbf{\sin \alpha x} \\ \mathbf{\cos \alpha x} \end{Bmatrix} dx,\ n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R},$ unde se ia $u = x^n$ şi $v' = e^{\alpha x}(\sin \alpha x,\ \cos \alpha x)$.

- $\int_a^b \begin{Bmatrix} \mathbf{\sin \alpha x} \\ \mathbf{\cos \alpha x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{\ln x} \\ \mathbf{\arcsin x} \\ \mathbf{arctg\, x} \end{Bmatrix} dx$, $u = \ln x(\arcsin x,\ \mathrm{arctg}\, x),\ v' = \sin \alpha x(\cos \alpha x)$.

- $\int x^n \begin{Bmatrix} \sqrt{x^2+a^2} \\ \sqrt{x^2-a^2} \\ \sqrt{a^2-x^2} \end{Bmatrix} dx,\ n\in\mathbb{N},\ u=\sqrt{x^2+a^2},\ v'=x^n$.

- $\int \begin{Bmatrix} \sin^n \alpha x \\ \cos^n \alpha x \end{Bmatrix} dx,\ n\in\mathbb{N}^*,\ \alpha\in\mathbb{R},\ u=\sin^{n-1}\alpha x, \left(u=\cos^{n-1}\alpha x\right),\ v'=\sin\alpha x, \left(v'=\cos\alpha x\right)$.

Exemple. 1. Să se calculeze: a) $\int_{-1}^{1} xe^x dx$ **; b)** $\int_0^1 \arcsin x dx$ **; c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ **; d)** $\int_0^1 x\sqrt{x^2+4} dx$ **.**

R. a) Punem $\begin{cases} u=x \\ v'=e^x \end{cases}$ şi avem: $\begin{cases} u'=1 \\ v=e^x \end{cases}$. Integrala dată devine, via formula integrării prin părţi $\int_{-1}^{1} xe^x dx = xe^x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx = e+\frac{1}{e}-\left(e-\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}$.

Observaţie. Integrala $\int_{-1}^{1} |x| e^x dx$ nu se poate calcula aplicând formula integrării prin părţi, deoarece $u=|x|$ **nu este derivabilă în** $x=0\in[-1,1]$. Pentru calculul ei se utilizează proprietatea de aditivitate a integralei definite şi avem:
$\int_{-1}^{1} |x|e^x dx = \int_{-1}^{0} (-x)e^x dx + \int_0^1 xe^x dx = -\int_{-1}^{0} xe^x dx + \int_0^1 xe^x dx$ şi pentru fiecare integrală se poate aplica formula integrării prin părţi.
Altfel calculul acestei integrale se poate face aplicând formula Leibniz-Newton.
Funcţia $f(x)=|x|e^x,\ x\in[-1,1]$ este continuă şi deci admite o primitivă $F:[-1,1]\Rightarrow\mathbb{R}$,
$F(x)=\begin{cases} (1-x)e^x,\ x\in[-1,0] \\ (x-1)e^x+2,\ x\in(0,1] \end{cases}$. Atunci $\int_{-1}^{1} |x|e^x dx = F(1)-F(-1)=2-\frac{2}{e}$.

b) Punem $\begin{cases} u=\arcsin x \\ v'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v=x \end{cases}$ şi obţinem că u nu este derivabilă în $x=1$ $\left(u'_s(1)=\infty\right)$.
Deci nu se poate aplica direct formula integrării prin părţi.
Ţinând seama de teorema fundamentală a calculului integral (continuitatea integralei ca funcţie de limitele integrare) vom lua $\varepsilon\in(0,1)$ şi calculând $I(\varepsilon)=\int_0^{\varepsilon} \arcsin x dx$ după care $\int_0^1 \arcsin x dx = \lim_{\varepsilon\nearrow 1} I(\varepsilon)$. Pentru calculul lui $I(\varepsilon)$ punem: $\begin{cases} u=\arcsin x \\ v'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v=x \end{cases}$.

Avem:

$$I(\varepsilon)=\int_0^{\varepsilon}\arcsin x\,dx = x\arcsin x\Big|_0^{\varepsilon}-\int_0^{\varepsilon}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\varepsilon\arcsin\varepsilon+\int_0^{\varepsilon}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'dx=\varepsilon\arcsin\varepsilon+\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\varepsilon}=$$

$$=\varepsilon\arcsin\varepsilon+\sqrt{1-\varepsilon^2}-1.$$

Deci $\lim\limits_{\varepsilon\nearrow 1} I(\varepsilon)=\frac{\pi}{2}-1$.

Altfel, integrala se poate calcula utilizând formula Leibniz-Newton, deoarece funcția $f(x)=\arcsin x$, $x\in[0,1]$ este continuă, admite primitive. O primitivă $G:[0,1]\to\mathbb{R}$ s-a calculat la această metodă pentru integrala nedefinită (probleme rezolvate **1) b**) și am găsit $G(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & x=-1\\ x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}, & x\in(-1,1)\\ \frac{\pi}{2}, & x=1\end{cases}$.

Atunci $\int_0^1 \arcsin x\,dx=G(1)-G(0)=\frac{\pi}{2}-1$. În practică, astfel de integrale se pot calcula fără introducerea simbolului limită, scriind pentru cazul nostru $\int_0^1\arcsin x\,dx=\left(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-1$.

c) Pentru calculul acestei integrale definite se aplică formula integrării prin părți de două ori.

Punem: $\begin{cases}u=x^2\\ v'=\sin x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'=2x\\ v=-\cos x\end{cases}$ și integrala devine: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx=-x^2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$ (*).

A doua integrală se calculează, din nou, cu formula integrării prin părți.

Notăm: $\begin{cases}u=x\\ v'=\cos x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'=1\\ v=\sin x\end{cases}$ și deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$.

Cu aceasta (*) devine: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx=0+2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\pi-2$.

d) Se aduce integrala la forma: $I=\int_0^1 x\sqrt{x^2+4}\,dx=\int_0^1\frac{x^3+4x}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}dx+4\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx=$

$$=\int_0^1 x^2\left(\sqrt{x^2+4}\right)'dx+4\int_0^1\left(\sqrt{x^2+4}\right)'dx=\int_0^1 x^2\left(\sqrt{x^2+4}\right)'dx+4\sqrt{x^2+4}\Big|_0^1 \qquad (*).$$

Ultima integrală se calculează cu formula integrării prin părți, punând $\begin{cases}u=x^2\\ v'=\left(\sqrt{x^2+4}\right)'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'=2x\\ v=\sqrt{x^2+4}\end{cases}$.

Avem: $\int_0^1 x^2\left(\sqrt{x^2+4}\right)' dx = x^2\sqrt{x^2+4}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x\sqrt{x^2+4}dx = \sqrt{5} - 2\int_0^1 x\sqrt{x^2+4}dx = \sqrt{5} - 2I$.

Revenim la (*) şi avem: $I = \sqrt{5} - 2I + 4\left(\sqrt{5} - 2\right)$. De aici $3I = 5\left(\sqrt{5} - 1\right)$ adică $I = \frac{5}{3}\left(\sqrt{5} - 1\right)$.

2. Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1, I_2.

b) Determinaţi o formulă de recurenţă pentru I_n .

c) Arătaţi că şirul $\left(I_n\right)_n$ este descrescător.

R. a) $I_1 = \int_0^1 xe^x dx$ se calculează prin părţi punând $\begin{cases} u = x \\ v' = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = e^x \end{cases}$.

Deci $I_1 = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - (e-1) = 1$.

Analog pentru $I_2 = \int_0^1 x^2 e^x dx$, notăm $\begin{cases} u = x^2 \\ v' = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 2x \\ v = e^x \end{cases}$ şi deci $I_2 = x^2 e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx = e - 2I_1 = e - 2$.

b) Se aplică formula integrării prin părţi, unde $\begin{cases} u = x^n \\ v' = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = nx^{n-1} \\ v = e^x \end{cases}$.

Avem: $I_n = x^n e^x\Big|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1}e^x dx = e - nI_{n-1}$, care reprezintă formula de recurenţă pentru I_n . De aici

pentru $n = 1$ rezultă $I_1 = e - I_0 = e - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1$.

c) Din $x^n \geq x^{n+1}, x \in [0,1]$ rezultă $x^n e^x \geq x^{n+1}e^x$, care prin integrare dă $I_n \geq I_{n+1}$.

Probleme propuse

1. Să se calculeze, utilizând metoda integrării prin părţi, următoarele integrale definite:

I. a) $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$; **b)** $\int_1^{e^2} x\ln x\,dx$; **c)** $\int_1^2 x\log_2 x\,dx$; **d)** $\int_1^e (x+1)\ln x\,dx$; **e)** $\int_0^2 x\ln(x+1)dx$;

f) $\int_1^2 x^2\ln x\,dx$; **g)** $\int_1^2 x^3\ln x\,dx$; **h)** $\int_1^e \ln^3 x\,dx$; **i)** $\int_0^1 x^2\ln^2 x dx$; **j)** $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$.

II. a) $\int_0^1 \frac{x}{e^x}dx$; **b)** $\int_0^1 x2^x dx$; **c)** $\int_1^3 xe^{2x}dx$; **d)** $\int_0^1 (x+1)e^{2x}dx$; **e)** $\int_{-1}^1 |x|e^{-|x|}dx$.

III. a) $\int_0^1 \arccos x\,dx$; b) $\int_0^{\frac{1}{2}} x\arccos x\,dx$; c) $\int_1^{\frac{1}{2}} x^2\arccos x\,dx$; d) $\int_0^1 \arcsin\sqrt{x}dx$; e) $\int_1^3 \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$.

IV. a) $\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$; b) $\int_0^{2\pi} x|\sin x|dx$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx$; e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$.

V. a) $\int_0^1 \sqrt{x^2+4}dx$; b) $\int_2^3 \sqrt{x^2-4}dx$; c) $\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2}dx$; d) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}dx$; e) $\int_0^1 x\sqrt{4-x^2}\,dx$.

2. Să se arate că $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi să se calculeze $\int_a^b f(x)dx$, în cazurile de mai jos.

1) $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} xe^x,\ x\in[-1,0] \\ x\ln(x+1),\ x\in(0,1] \end{cases}$; 2) $f:[0,e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x\ln^2 x,\ x\in(0,e] \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$;

3) $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x\arcsin x,\ x\in[0,1] \\ x\ln(-x),\ x\in[-1,0) \end{cases}$; 4) $f:\left[-\frac{1}{2},1\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x\operatorname{arctg} x,\ x\in(0,1] \\ \arcsin x, x\in\left[-\frac{1}{2},0\right] \end{cases}$;

5) $f:[-2,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} e^x\sin 2x,\ x\in[-2,0) \\ xe^{2x},\ x\in[0,1] \end{cases}$.

3. Metoda substituției (schimbării de variabilă)

Multe funcții sunt constituite prin operația de compunere. Când avem de integrat o astfel de funcție este util să schimbăm variabila (Se spune că facem o substituție)
Are loc următoarea:

Teoremă (Prima formulă a substituției). Fie $[a,b]\xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f}\mathbb{R}$ (J interval din $\mathbb{R}$) două funcții cu proprietățile:

1) f este continuă pe J;

2) φ este derivabilă cu derivata φ' continuă pe $[a,b]$.

Atunci $$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du . \qquad (1)$$

Formula (1) se numeşte prima formulă a substituției.
De la variabila $x\in[a,b]$ se trece la noua variabilă $u=\varphi(x)\in[\varphi(a),\varphi(b)]$.

Demonstrație. Mai întâi să observăm că integralele au sens deoarece integranzii sunt funcții continue.
Pentru a proba egalitatea (1) evaluăm cele două integrale utilizând formula Leibniz-Newton.
Fie $F : J \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f pe J (F există deoarece f este continuă pe J).
Deci membrul drept al egalității (1) devine: $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = F\left(\varphi(b)\right) - f\left(\varphi(a)\right)$, (*).

Pe de altă parte avem (formula de derivare a funcțiilor compuse):
$\left(F \circ \varphi\right)'(x) = F'\left(\varphi(x)\right) \cdot \varphi'(x) = f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x),\ x \in \left[a,b\right]$, ceea ce arată că $F \circ \varphi$ este o primitivă pentru funcția $\left(f \circ \varphi\right) \cdot \varphi'$.
Aplicând, din nou, formula Leibniz-Newton pentru membrul stâng din (1) obținem:
$$\int_a^b f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx = \left(F \circ \varphi\right)(x)\Big|_a^b = F\left(\varphi(b)\right) - F\left(\varphi(a)\right), \qquad (**).$$
Din (*) și (**) rezultă egalitatea (1). ■
Observații. 1) Prin schimbarea de variabilă, noua integrală trebuie să se calculeze mai simplu.
2) Funcția φ este funcția care schimbă variabila, de la x la $u = \varphi\left(x\right)$. Când trecem de la variabila x (din prima integrală) la variabila u (din a doua integrală), atunci în a doua integrală toate elementele se exprimă în funcție de u, inclusiv limitele de integrare!
Este convenabil să folosim notația diferențială. Dacă $u = \varphi(x)$, atunci $du = \varphi'\left(x\right)dx$, iar noile limite de integrare din (1) sunt $u_1 = \varphi(a), u_2 = \varphi(b)$ și formula din teoremă evidențiază aceste transformări.

$$b \xrightarrow{\ \varphi\ } \varphi(b)$$
$$\int_a^b f(\underbrace{\varphi(x)}_{u})\underbrace{\varphi'(x)dx}_{du} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$
$$a \xrightarrow[\ \varphi\ ]{} \varphi(a)$$

Nu trebuie uitată schimbarea limitelor de integrare în a doua integrală (se trece de la limitele $x_1 = a, x_2 = b$ din prima integrală la $u_1 = \varphi(a), u_2 = \varphi(b)$ din a doua integrală).
Pentru calculul ultimei integrale se determină o primitivă F a lui f și se aplică formula Leibniz-Newton. Spre deosebire de calculul integralei nedefinite prin metoda substituției (unde se asocia integralei I integrala I_1 care se determina, iar la I se revine punând $u = \varphi\left(x\right)$ în I_1) rezultatul din integrala a doua din (1) coincide cu integrala definită de calculat, adică prima integrală din (1).
Pentru calculul integralei definite prin metoda substituției se parcurg următorii pași:

• Se substituie $u=\varphi(x)\Rightarrow du=\varphi'(x)dx$
(se trece de la veche variabilă x la noua variabilă u)
• Se calculează noile limite de integrare

$$\begin{cases}x_1=a\\x_2=b\end{cases}\xrightarrow{u=\varphi(x)}\begin{cases}u_1=\varphi(a)\\u_2=\varphi(b)\end{cases}$$

(vechile limite) (noile limite)

• Se rescrie integrala definită

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

• Se calculează noua integrală $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$

Schematic

Avem de calculat $I=\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$	→	1) $u=\varphi(x)\Rightarrow du=\varphi'(x)dx$ 2) $\begin{cases}x_1=a\\x_2=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_1=\varphi(a)\\u_2=\varphi(b)\end{cases}$	→	Avem de calculat $I=\int_{u_1}^{u_2} f(u)du$

Exerciții rezolvate

Să se calculeze integralele:

1) $\int_0^1(2x-1)^5dx$ **; 2)** $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$ **; 3)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 x\,dx$ **; 4)** $\int_0^1\frac{x^2dx}{x^3+1}$ **; 5)** $\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx$ **;**

6) $\int_0^1\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$ **; 7)** $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$ **; 8)** $\int_{-1}^1\frac{x^3dx}{\sqrt{x^8+1}}$ **.**

R. 1) Notăm $u=2x-1$ şi avem $du=(2x-1)'dx=2dx$. Schimbăm limitele de integrare.

$$\begin{cases}x_1=0\\x_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_1=2\cdot x_1-1=-1\\u_2=2\cdot x_2-1=1.\end{cases}$$

Integrala devine: $\int_0^1(2x-1)^5dx=\frac{1}{2}\int_0^1\underbrace{(2x-1)}_{u}{}^5\cdot\underbrace{2dx}_{du}=\frac{1}{2}\int_{-1}^1u^5du=\frac{1}{2}\left.\frac{u^6}{6}\right|_{-1}^{1}=\frac{1}{12}(1-1)=0$.

2) Substituim $u=x^2+1$ şi avem $du=2xdx$. Calculăm noile limite de integrare: $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=0^2+1=1 \\ u_2=1^2+1=2. \end{cases}$

Integrala se scrie: $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\underbrace{x^2+1}_{u}}\cdot\underbrace{2dx}_{du}=\frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}du=\frac{1}{3}u\sqrt{u}\Big|_1^2=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

3) $u=\cos x \Rightarrow du=-\sin xdx;\ \begin{cases} x_1=-\frac{\pi}{2} \\ x_2=\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=0 \\ u_2=0; \end{cases}$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x\,dx=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x(-\sin x)dx=-\int_0^0 u^2du=0.$$

4) $u=x^3+1\Rightarrow du=3x^2dx;\ \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=1 \\ u_2=2; \end{cases}\ \int_0^1 \frac{x^2dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int_1^2 \frac{du}{u}=\frac{1}{4}\ln|u|\Big|_1^2=\ln\sqrt[3]{2}$.

5) $u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x};\ \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=0 \\ u_2=1; \end{cases}\ \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx=\int_0^1 u^2du=\frac{u^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$.

6) $u=\operatorname{arctg} x\Rightarrow du=\frac{dx}{1+x^2};\ \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=0 \\ u_2=\frac{\pi}{4}; \end{cases}\ \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} udu=\frac{u^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{32}$.

7) $u=\operatorname{tg} x\Rightarrow du=\frac{dx}{\cos^2 x};\ \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=0 \\ u_2=\sqrt{3}; \end{cases}\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\sqrt{3}} e^u du=e^u\Big|_0^{\sqrt{3}}=e^{\sqrt{3}}-1$.

8) $u=x^4\Rightarrow du=4x^3dx;\ \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=1 \\ u_2=1; \end{cases}\ \frac{1}{4}\int_{-1}^1 \frac{4x^3dx}{\sqrt{x^8+1}}=\frac{1}{4}\int_1^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=0$.

Alte substituții

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$.

R. Substituim $e^x=t$ şi deci $x=\ln t,\ dx=\frac{dt}{t}$. Schimbăm limitele de integrare $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \end{cases} \overset{t=e^x}{\Rightarrow} \begin{cases} t_1=e^0=1 \\ t_2=e^1=e \end{cases}$

şi avem $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int_1^e \frac{t\cdot\frac{dt}{t}}{t^2+1} = \int_1^e \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t\Big|_1^e = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$.

2. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$.

R. Notăm $\sqrt{x} = t \ge 0 \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$. Noile limite de integrare $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \overset{t=\sqrt{x}}{\Rightarrow} \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{cases}$. Avem:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{t^2\cdot 2t\,dt}{1+t} = 2\int_0^1 \frac{t^3dt}{1+t} = 2\int_0^1 \frac{\left(t^3+1\right)-1}{t+1}dt = 2\int_0^1\left(1-t+t^2-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln|1+t|\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{3} - 2\ln 2.$$

3. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

R. Notăm $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Noile limite de integrare sunt $t_1 = \operatorname{tg}\frac{0}{2} = \operatorname{tg} 0 = 0$, $t_2 = \operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Integrala definită devine: $\int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

4. Să se calculeze $\int_0^1 x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

R. Se substituie $x = 2\sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. De aici $dx = 2\cos t\,dt,\ t = \arcsin\frac{x}{2} \Rightarrow t_1 = \arcsin\frac{0}{2} = 0$, $t_2 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Integrala devine $\int_0^1 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin t)^2\sqrt{4-4\sin^2 t}\,(2\cos t\,dt) =$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 4t}{2}dt = 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{2}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Observaţie. Acest tip de integrală se poate calcula folosind substituţia $x = a\cos t,\ t \in [0,\pi]$, etc.

Calculul integralelor de forma $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$

La capitolul **Primitive**, am abordat în detaliu integrarea funcțiilor raționale, adică am determinat primitivele acestor funcții continue pe domeniul de definiție. Ideea este de a descompune numitorul $Q(x)$ în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ de gradul întâi şi gradul doi (cu discriminantul negativ) şi apoi se descompune funcția $x \to \frac{P(x)}{Q(x)}$ în funcții raționale simple dacă $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q)$. Dacă $\text{grad}(P) \geq \text{grad}(Q)$, atunci efectuăm împărțirea cu rest a lui P la Q când $P = Q \cdot C + R$, $\text{grad}(R) < \text{grad}(Q)$ şi pentru $\frac{R(x)}{Q(x)}$ se aplică pasul precedent. Cu formula Leibniz-Newton determinăm integrala definită. Vom exemplifica cele spuse cu următoarele

Exerciții rezolvate

Să se calculeze integralele definite:

1) $\int_1^2 \frac{x+1}{x(x+2)}\mathrm{d}x$; **2)** $\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{x+1}$; **3)** $\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\mathrm{d}x$; **4)** $\int_0^1 \frac{2x^3-3x^2+2x}{(x^2+4)(x^2+1)}dx$; **5)** $\int_0^1 \frac{2x^2+2x+13}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

R. Notăm $f(x)$ integrandul, iar cu I integrala definită a lui f . Avem:

1) $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}\right)$ şi $I = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = \frac{1}{2}\ln x\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\ln(x+2)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$.

2) $x^2 = (x+1)(x-1)+1$ şi deci $f(x) = x-1+\frac{1}{x+1}$, iar

$$I = \int_0^1 \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]\Bigg|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

3) $x^3+1 = (x^3-x^2)+x^2+1$ şi $f(x) = 1+\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = 1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}$, iar $I = \frac{7}{4}+\ln 9$;

4) $f(x) = \frac{2x-4}{x^2+4}+\frac{1}{x^2+1}$ şi $I = \int_0^1 \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+4} - 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \ln(x^2+4)\Big|_0^1 - 2\text{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^1 +$

$+\text{arctg}\, x\Big|_0^1 = \ln\frac{5}{4} - 2\text{arctg}\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$;

5) $f(x) = \frac{2}{x^2+1}+\frac{2x+11}{(x^2+1)^2}$ şi $I = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \int_0^1 \frac{2x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} + 11\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = 2\text{arctg}\Big|_0^1 - \frac{1}{x^2+1}\Big|_0^1 +$

$$+11\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^2} \text{ unde } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^2} = \int_0^1 \frac{1+x^2-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \int_0^1 x\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \left[-\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\right] = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}+\frac{1}{4}. \text{ Deci } I = \frac{37\pi}{8}+\frac{9}{4}.$$

Probleme propuse

1. Să se calculeze integralele de mai jos, utilizând substituțiile indicate:

a) 1) $\int_0^1 (2x+1)^4 dx, u=2x+1$; 2) $\int_{-1}^1 \left(x^3+x\right)^7 dx, u=x^2+1$; 3) $\int_{-2}^1 x(1-3x)^5 dx, u=1-3x$;

b) 1) $\int_1^2 \frac{dx}{2x+1}, u=2x+1$; 2) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1-3x}, u=1-3x$; 3) $\int_0^1 \frac{3xdx}{x^2+1}, u=x^2+1$; 4) $\int_1^2 \frac{dx}{1-5x}$, $u=1-5x$; 5) $\int_0^1 \frac{2x^2dx}{3x^3+2}, u=3x^3+2$; 6) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\left(x^3+1\right)^2}, u=x^3+1$; 7) $\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}, u=x^2$.

c) 1) $\int_0^1 \sqrt{3x+1}dx, u=3x+1$; 2) $\int_{-1}^0 x\sqrt{1-x}dx, u=1-x$; 3) $\int_{-1}^2 \sqrt[3]{(1-2x)^2}dx, u=1-2x$.

d) 1) $\int_0^1 x^2e^{x^3}dx, u=x^3$; 2) $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{e^{x^2}}, u=x^2$; 3) $\int_1^4 \sqrt{x}e^{x\sqrt{x}}dx, u=x\sqrt{x}$; 4) $\int_1^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx, u=\sqrt{x}$;

5) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx, u=\frac{1}{x}$; 6) $\int_0^1 \left(2^{2x}-3\cdot 2^x\right)dx, u=2^x$; 7) $\int_0^1 \frac{e^xdx}{1+e^x}, u=1+e^x$; 8) $\int_{-2}^{-1} \frac{2^xdx}{1-4^x}, u=2^x$;

e) 1) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx, u=\ln x$; 2) $\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x}dx, u=1+\ln x$; 3) $\int_e^{e^3} \frac{dx}{x\ln x}, u=\ln x$;

4) $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}, u=1+\ln x$; 5) $\int_{e^{-2}}^e \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}dx, u=3+\ln x$; 6) $\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}, u=\ln x$;

f) 1) $\int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin 5xdx, u=5x$; 2) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos xdx, u=\sin x$;

4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \sin x dx, u = \cos x$; 5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x \cos^2 x dx, u = \cos x (\sin^2 x = 1 - \cos^2 x)$;

6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx, u = \cos x$; 7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x dx, u = \sin x$; 8) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx, u = \cos x$;

g) 1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx, u = \arcsin x$; 2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}, u = \arcsin x$;

3) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\arcsin^2 x}}, u = \arcsin x$; 4) $\int_{0}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx, u = \operatorname{arctg} x$;

5) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)(\operatorname{arctg} x + 1)}, u = \operatorname{arctg} x + 1$; 6) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)(\operatorname{arctg}^2 x + \operatorname{arctg} x)}$, $u = \operatorname{arctg} x$;

2. Să se calculeze integralele:

1) $\int_{-1}^{1} (3^x + 3^{-x}) \operatorname{tg} x\, dx$; 2) $\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{3^x + 3^{-x}} dx$; 3) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x - x \cos x)^3 dx$; 4) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx$;

3. a) Să se calculeze integralele definite:

1) $\int_{2}^{3} \frac{x-1}{x(x+1)} \mathrm{d}x$; 2) $\int_{1}^{2} \frac{x^3 \mathrm{d}x}{x+2}$; 3) $\int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 3x + 2}, n \geq 3$ şi $\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 3x + 2}$;

4) $\int_{1}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + 3x^2 + 2x}$; 5) $\int_{-2}^{-1} \frac{2x^3 + x^2 + x + 1}{2x^2 - x - 1} \mathrm{d}x$; 6) $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + x^2}$; 7) $\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}$;

8) $\int_{0}^{1} \frac{(4x+1)\mathrm{d}x}{(x+1)^3}$; 9) $\int_{-3}^{-2} \frac{x^2+x+2}{(x-1)^2(x+1)^2} \mathrm{d}x$; 10) $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x^2(x^2+1)}{x^2+4} \mathrm{d}x$; 11) $\int_{0}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+3)(x+1)}$;

12) $\int_{0}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+1}$; 13) $\int_{0}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)}$; 14) $\int_{-1}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$; 15) $\int_{-3}^{3} \frac{(x^3+x)\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

b) Să se calculeze integralele:

1) $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{x+2}, t = \sqrt{x}$; 2) $\int_{2}^{7} \frac{xdx}{\sqrt{x+2}}, t = \sqrt{x+2}$; 3) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, t = \sqrt{x}$; 4) $\int_{0}^{1} \frac{(1+x)}{1+\sqrt{x}} dx$,

$t = \sqrt{x}$; 5) $\int_{1}^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}, t = \sqrt[4]{x}$; 6) $\int_{1}^{64} \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}, t = \sqrt[6]{x}$; 7) $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}, t = \sqrt[4]{x}$.

2.5 APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE

1. Aria unei suprafețe plane

Fie $f:[a,b]\to[0,\infty)$ o funcție continuă. Reamintim cele două moduri de abordare a problemei ariei mărginită de curba $y=f(x)$, axa Ox şi dreptele verticale $x=a$ şi $x=b$ (Fig. 1 a)).

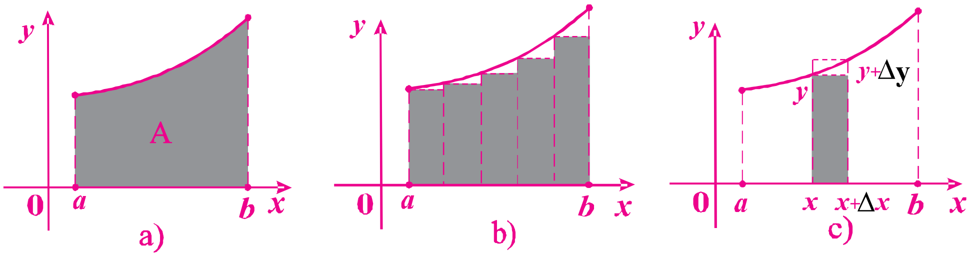


Fig.1

Pentru a calcula aria A se împarte figura în benzi verticale (Fig. 1 b)) şi fiecare bandă se aproximează cu aria unui dreptunghi. În final se face suma ariilor dreptunghiului. Această operație ne dă o aproximare a ariei A, care este cu atât mai bună cu cât numărul dreptunghiurilor este mai mare.

Aria ca primitivă a funcției

În Fig. 1 c), dacă ΔA este aria zonei haşurate, atunci $y\Delta x<\Delta A<(y+\Delta y)\Delta x$ sau $y<\frac{\Delta A}{\Delta x}<y+\Delta y$. Dacă $\Delta x\to 0$ (adică creştem numărul dreptunghiurilor), atunci $\frac{\Delta A}{\Delta x}\to\frac{dA}{dx}$ şi $\Delta y\to 0$. Deci $\frac{dA}{dx}=y$ adică $A=\int ydx$. Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $A(x)=F(x)+c$. Dacă $x=a$, atunci $A(a)=0=F(a)+c$, adică $c=-F(a)$.

În fine, pentru $x=b$, $A(b)=F(b)-F(a)$ este aria căutată. Deci

$A=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

1) Aria unui subgrafic

Fie $f:[a,b]\to[0,\infty)$ o funcție continuă. Atunci mulțimea $\Gamma_f=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$ (Fig. 2) se numeşte **subgraficul lui f** (este mulțimea punctelor din plan cuprinse între graficul lui f, axa Ox şi dreptele verticale $x=a,\ x=b$).

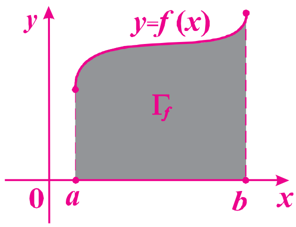


Fig.2

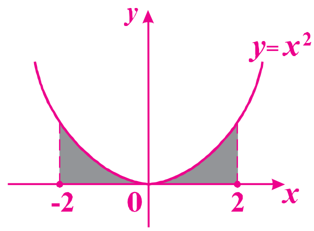


Fig.3

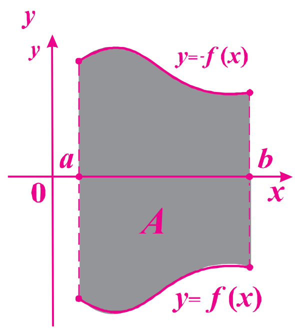


Fig.4

Am vazut că aria$(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$, unde F este o primitivă a lui f.

Exemplu. Să se calculeze aria figurii determinate de graficul funcției $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, axa Ox şi dreptele $x=-2,\ x=2$ (Fig. 3).

R. Aria cerută este egală cu aria $(\Gamma_f)=\int_{-2}^{2}x^2dx=\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2}=\dfrac{16}{3}$.

Observație. Regiunea haşurată este simetrică în raport cu axa Oy (funcția este pară). Deci

aria $(\Gamma_f)=2\int_0^2 x^2dx=2\cdot\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^2=\dfrac{16}{3}$.

2) Aria unei mulțimi situate sub axa Ox

Fie $f:[a,b]\to(-\infty,0]$ o funcție continuă. Cum $f\le 0$, se deduce că graficul ei este situat sub axa Ox (Fig. 4). În plus, $\int_a^b f(x)\,dx\le 0$. Cum aria unei regiuni din plan este pozitivă, atunci convenim ca aria regiunii A să fie egală cu aria$(A)=-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b(-f(x))\,dx=\int_a^b|f(x)|\,dx$ sau aria$(A)=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$. În acest caz mulțimea de puncte delimitată de graficul lui $y = -f(x)$, axa Ox și dreptele $x = a,\ x = b$ este simetrica mulțimii A în raport cu Ox. Deci cele două mulțimi au aceeași arie.

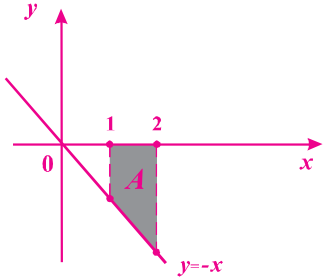


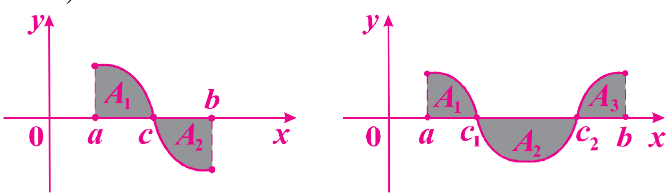
Fig.5

Exemplu. Să se determine aria cuprinsă între graficul lui $f(x) = -x$, axa Ox și dreptele $x = 1,\ x = 2$ (Fig. 5).

R. Observăm că $f(x) < 0$ dacă $x \in [1,2]$.

Deci aria $(A) = \int_1^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = \frac{3}{2}$.

3) Aria regiunii cuprinse între graficul lui f, axa Ox și dreptele $x = a,\ x = b$.



a) **Fig.6** b)

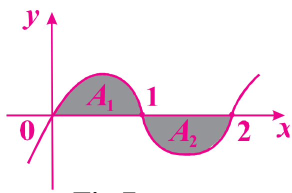


Fig.7

Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci aria mulțimii A delimitată de graficul lui f, axa Ox și dreptele $x = a,\ x = b$ este egală cu

$$\boxed{aria\ (A) = \int_a^b |f(x)|\,dx}$$ (Fig. 6)

Pentru calculul integralei se explicitează $|f(x)|,\ x \in [a,b]$.

Exemplu. Să se calculeze aria mulțimii A determinate de graficul lui $f(x) = x(x-1)(x-2)$, axa Ox și dreptele $x = 0,\ x = 2$ (Fig. 7).

R. Aria cerută este egală cu $aria\,(A) = \int_0^2 |f(x)|\,dx$, unde $|f(x)| = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x, & x \in [0,1] \\ -(x^3 - 3x^2 + 2x), & x \in (1,2] \end{cases}$.

Deci $aria\ (A) = aria\,(A_1) + aria\,(A_2) = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

4) Aria regiunii cuprinse între două curbe f, g şi dreptele $x = a$, $x = b$

Notăm $\Gamma_{f,g}$ regiunea delimitată de graficele funcţiilor f, g şi dreptele $x = a, x = b$.

Atunci $aria\left(\Gamma_{f,g}\right) = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx$. Pentru calculul integralei se explicitează modulul. Ilustrăm formula în mai multe cazuri.

a) Curbe nesecante situate deasupra axei *Ox*.

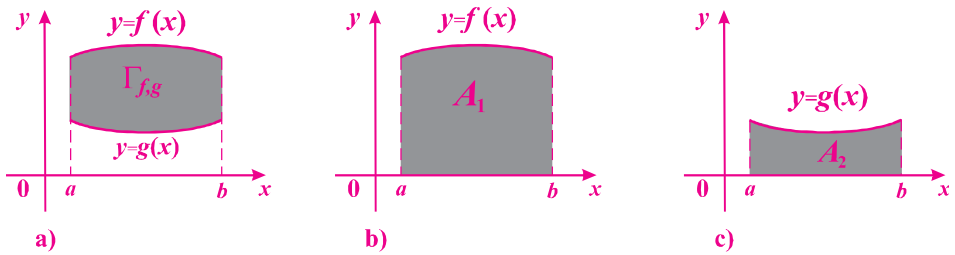


Fig.8

b) Curbe nesecante oarecare

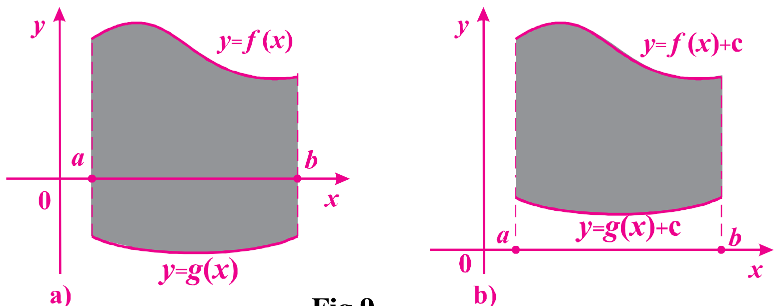


Fig.9

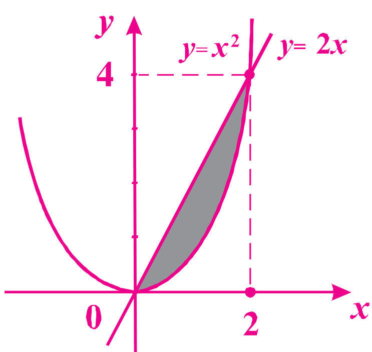


Fig.10

Exemplu. Să se determine aria închisă de parabola $y = x^2$ şi dreapta $y = 2x$ (Fig. 10).

R. Fie $f(x) = 2x, g(x) = x^2$. Se determină punctele de intersecţie ale curbelor, rezolvând sistemul $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$. Se obţin soluţiile $(0,0)$ şi $(2,4)$. Aria cerută este

$$aria\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^2\left|2x-x^2\right|dx.$$

Cum $\left|2x-x^2\right|=2x-x^2$ dacă $x\in[0,2]$, găsim $aria\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=\left.\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2=\frac{4}{3}$.

c) Curbe secante oarecare

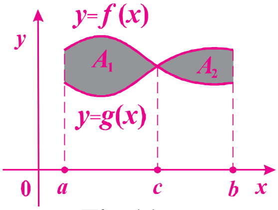


Fig.11

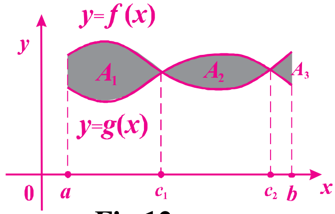


Fig.12

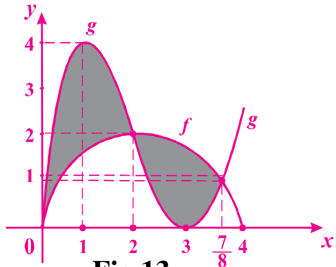


Fig.13

Exemplu. **Să se calculeze aria figurii plane cuprinse între graficele funcțiilor** $f(x)=-\frac{x^2}{2}+2x$ **și** $g(x)=x^3-6x^2+9x$.

R. Graficele funcțiilor f,g în acelaşi reper cartezian sunt date în Fig. 13. Coordonatele punctelor în care se taie cele 2 curbe sunt date de soluțiile sistemului $\begin{cases} y=x^3-6x^2+9x \\ y=-\frac{x^2}{2}+2x \end{cases}$. Găsim uşor soluțiile: $(0,0),(2,2),\left(\frac{7}{2},\frac{7}{8}\right)$. Avem $aria\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^{\frac{7}{2}}\left|f(x)-g(x)\right|dx$ unde

$\left|f(x)-g(x)\right|=\begin{cases} g(x)-f(x), x\in[0,2] \\ f(x)-g(x), x\in\left(2,\frac{7}{2}\right] \end{cases}$. Deci $aria\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^2\left(g(x)-f(x)\right)dx+$

$$+\int_2^{\frac{7}{2}}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\frac{937}{192}.$$

Exemple cunoscute. 1. **Arătați că aria cercului de ecuație** $x^2+y^2-R^2=0$ **este egală cu** $\pi R^2\left(y=\sqrt{R^2-x^2}, x\in[-R,R]; aria=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx=4\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}dx\right)$.

2. Arătați că aria elipsei de ecuație $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ este egală cu πab.

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze aria mulțimii $\Gamma_{f,g}$:

a) $f(x)=-\sqrt{x}, g(x)=\sqrt{x}, x\in[0,4]$; b) $f(x)=x^3, g(x)=x^2, x\in[0,1]$;

c) $f(x)=-1+\sqrt{2-x^2}, g(x)=\sqrt{1-x^2}$.

R. În Fig.14 avem graficele funcțiilor f,g. Ni se cere aria figurii haşurate. Avem:

$$\text{Aria }\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^4\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)dx=2\int_0^4\sqrt{x}dx=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^4=\frac{32}{3}.$$

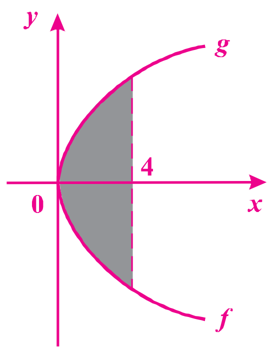


Fig.14

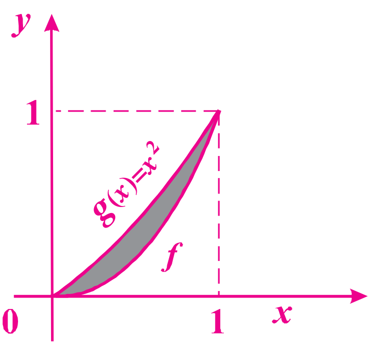


Fig.15

b) Graficele celor două funcții sunt date în Fig. 15. Aria figurii haşurate este

$$\text{Aria }\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^1\left(x^2-x^3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{12}.$$

Observație. Aria $\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^1\left|x^2-x^3\right|dx$, iar $\left|x^2-x^3\right|=\begin{cases}x^2-x^3, \text{dacă } x^2-x^3\geq 0, x^2(1-x)\geq 0\\ x^3-x^2, \text{dacă } x^2-x^3<0, x^2(1-x)<0\end{cases}$.

Cum $x^2(1-x)\geq 0$ implică $x\leq 1$, deducem că $\left|x^2-x^3\right|=x^2-x^3$ pentru $x\in[0,1]$.

Altfel. Se determină punctele de intersecție ale curbelor $y=x^2$, $y=x^3$, prin rezolvarea acestui sistem şi găsim punctele $O(0,0), A(1,1)$. Apoi pentru $x=\frac{1}{2}\in[0,1]$, avem $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}<g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$. De aici deducem că $f(x)\le g(x), \forall x\in[0,1]$ şi deci aria $(\Gamma_{f,g})=\int_0^1\left(x^2-x^3\right)dx$.

c) Din $y=-1+\sqrt{2-x^2}$ rezultă $y+1=\sqrt{2-x^2}$, iar de aici prin ridicare la pătrat $(y+1)^2=2-x^2$ sau $x^2+y^2+2y-1=0,$ care este ecuaţia unui cerc cu centrul în $C(0,-1)\in Oy$ şi de rază $r=\sqrt{2}$.

De asemenea, $y=\sqrt{1-x^2}$ dă $x^2+y^2-1=0$, care este ecuaţia cercului unitate. Primul cerc împarte cercul unitate în două porţiuni. Ni se cere aria porţiunii haşurate (Fig. 16) pentru care $g\ge f$. Deci graficele celor două funcţii sunt arce din cele două cercuri. Zona haşurată se numeşte lunula lui Hipocrat.

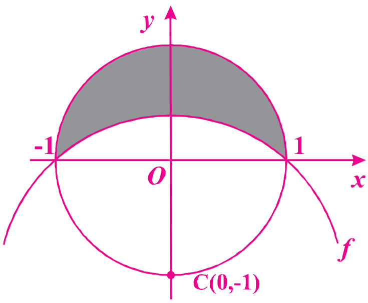


Fig.16

Aria $(\Gamma_{f,g})=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}+1-\sqrt{2-x^2}\right)dx=1$.

Aria porţiunii (nehaşurată) cuprinsă între cele două cercuri este egală cu aria cercului unitate π din care se scade aria porţiunii haşurate. Avem: $\pi-1$.

Altfel. Din condiţiile $2-x^2\ge 0, 1-x^2\ge 0$ rezultă $x\in[-1,1]$. Se determină punctele de intersecţie ale curbelor $y=-1+\sqrt{2-x^2}, y=\sqrt{1-x^2}$ prin rezolvarea acestui sistem. Egalăm membrii drepţi şi se obţine ecuaţia iraţională $-1+\sqrt{2-x^2}=\sqrt{1-x^2}$ cu soluţiile $x_1=-1, x_2=1$. Deci punctele de intersecţie sunt $A(1,0), A'(-1,0)$. Pentru a vedea poziţia curbei lui f în raport cu g se calculează $f(x_0), g(x_0)$ unde $x_0\in[-1,1]$. Pentru $x_0=0$ rezultă

$g(0)=1>f(0)=-1+\sqrt{2}$. Deci pe $[-1,1], g(x)>f(x)$ şi aria $(\Gamma_{f,g})=\int_{-1}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx$.

2. Să se calculeze aria mulţimii cuprinse între curbele de ecuaţii:
a) $y^2=4x, y=2x$; b) $y^2=8x, x^2=y$.

R. a) Se determină mai întâi punctele de intersecţie ale curbelor: $y^2=4x$, care reprezintă o parabolă cu vârful în $O(0,0)$, având axa Ox ca axă de simetrie şi $y=2x$, care reprezintă ecuaţia unei drepte. Pentru aceasta se rezolvă sistemul format din ecuaţiile curbelor $\begin{cases} y^2=4x \\ y=2x \end{cases}$. Se găsesc soluţiile $(x_1=0, y_1=0), (x_2=1, y_2=2)$ (Fig.17).

Se consideră funcţiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=2x, g(x)=2\sqrt{x}$. Atunci

aria $(\Gamma_{f,g})=\int_0^1\left(2\sqrt{x}-2x\right)dx=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^1-x^2\Big|_0^1=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$.

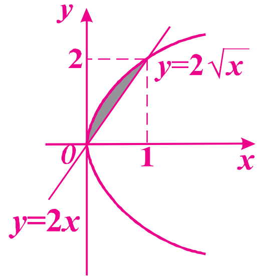


Fig.17

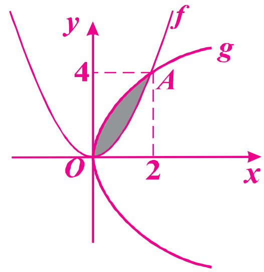


Fig.18

b) Se determină punctele de intersecție ale celor două parabole prin rezolvarea sistemului format de ecuațiile curbelor: $\begin{cases} y^2 = 8x \\ y = x^2 \end{cases}$. Se găsesc punctele $O(0,0), A(2,4)$ (Fig. 18).

Acum se consideră funcțiile $f, g : [0,2] \to \mathbb{R}, f(x) = x$, $g(x) = 2\sqrt{2}\sqrt{x}$.

Aria $(\Gamma_{f,g}) = \int_0^2 \left(2\sqrt{2}\sqrt{x} - x^2\right) dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$.

Probleme propuse

1. Să se calculeze aria mulțimii Γ_f în cazurile: 1) $f(x) = e^x, x \in [0,1]$;

$f(x) = 2x + 1, x \in [1,3]$; 3) $f(x) = \frac{x^2}{2}, x \in [1,2]$; 4) $f(x) = x^2 + 3, x \in [-1,1]$;

5) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1, x \in [-1,2]$; 6) $f(x) = \frac{4}{x+1}, x \in [1,4]$; 7) $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}, x \in [1,2]$;

8) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}, x \in [4,9]$; 9) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1, x \in [0,1]$; 10) $f(x) = \sqrt{2x+1}, x \in [0,1]$.

2. Să se determine aria regiunii cuprinse între graficul funcției și axa *Ox* în cazurile:
a) 1) $f(x) = -x, x \in [0,1]$; 2) $f(x) = x - 1, x \in [-2,0]$; 3) $f(x) = -\sqrt{x} - 1, x \in [0,1]$;
4) $f(x) = x^2 - 4$; 5) $f(x) = 9 - x^2$; 6) $f(x) = x(x-1)$; 7) $f(x) = x^2 - 5x + 6$;
b) 1) $f(x) = 2x + 1, x \in [-1,0]$; 2) $f(x) = x^2 - 1, x \in [0,2]$; 3) $f(x) = x^2 - 3x + 2, x \in [0,2]$;
4) $f(x) = x^3 - 1, x \in [0,2]$; 5) $f(x) = x(x-1)(x+1)$; 6) $f(x) = \cos x, x \in [0,\pi]$.

3. Să se calculeze aria mulțimii $\Gamma_{f,g}$ în cazurile:

a) 1) $f(x) = 2, g(x) = 5, x \in [2,4]$; 2) $f(x) = 1, g(x) = x^2 + 2, x \in [0,2]$; 3) $f(x) = x^2$,
$g(x) = x - 1, x \in [0,1]$; 4) $f(x) = 4 - x^2, g(x) = 3x, x \in [-1,1]$; 5) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 2x$,

$x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$; 6) $f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}, x \in [0,1]$; 7) $f(x) = \frac{1}{x^2}, g(x) = x, x \in [1,3]$;
8) $f(x) = |x|, y = 1, x \in [-1,1]$; 9) $f(x) = x^2 + 1, g(x) = 3 - x, x \in [-2,1]$; 10) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2 - x^2$; 11) $f(x) = x^2 + 1, g(x) = -x^2 + 4$; 12) $f(x) = 2^x, g(x) = 4^x, x = 1$;
13) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}, g(x) = \frac{x^2}{2}$; 14) $f(x) = \frac{2}{x}, g(x) = 3 - x$; 15) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{4-3x}$;
16) $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

b) 1) $f(x) = x^3, g(x) = 2x$; 2) $f(x) = x^2, g(x) = x^3, x \in [0,2]$; 3) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$; 4) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x, g(x) = x^2 - 5x + 8$; 5) $f(x) = x^2, g(x) = -x^3 + 3x^2$, $x \in [0,3]$; 6) $f(x) = x^3 - x, g(x) = -x^3 + x^2$; 7) $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, x \in [0, 2\pi]$.

4. 1) Parabola $y^2 = 2x$ împarte interiorul cercului $x^2 + y^2 - 8 = 0$ în două regiuni ale căror arii se cer.

2) Să se determine aria suprafeței plane determinată de parabolele $y = x^2, y^2 = x$.

3) Să se determine aria mărginită de elipsa $x^2 + 2y^2 = 1$, parabola $y^2 = x + 1$ și dreapta $x = 0$.

4) Să se determine aria determinată de $y = \frac{2}{x^2}$ și dreptele $y = 2x, y = \frac{x}{4}$.

5. Pentru ce valoare a lui a, aria mărginită de parabola $y = a^2x^2 + ax + 1$, axa Ox și dreptele $x = 0, x = 1$ este cea mai mică?

6. Pentru ce valoare a lui $a > 0$, aria delimitată de curba $y = \frac{x}{6} + \frac{1}{x^2}$, axa Ox și dreptele $x = a, x = 2a$ ia cea mai mică valoare?

2. Volumul corpurilor de rotație

O altă aplicație a calculului integral (a integralei definite) o constituie determinarea volumelor unor corpuri obținute prin rotația unor suprafețe în jurul unei axe de rotație.

Corpurile astfel generate se numesc **corpuri de rotație.**

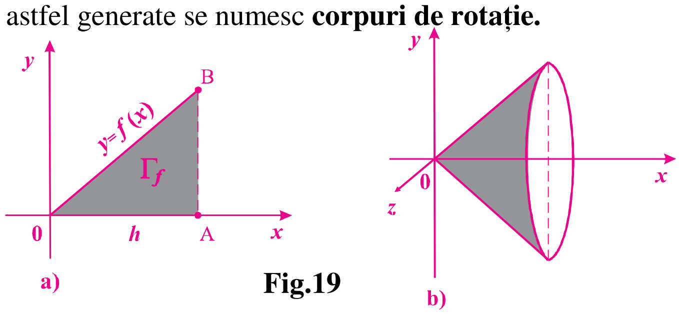
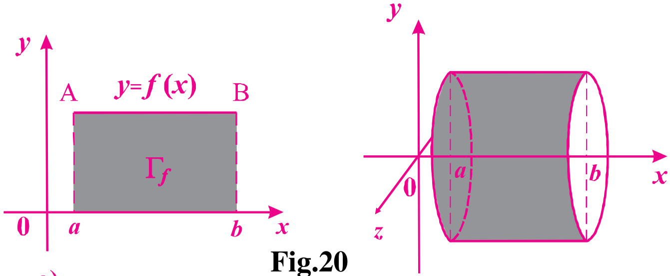


Fig.19



a)
Fig.20
b)

Să considerăm segmentul $[OB](y = f(x))$ şi regiunea determinată de acesta, axa

Ox şi *x*=*h*. Este o suprafaţă triunghiulară pe care o rotim în jurul axei *Ox* cu 360^0. Se obţine conul din Fig. 19.b). În Fig. 20.a) segmentul $[AB](y = f(x))$ delimitează cu axa *Ox* şi dreptele $x = a$, $x = b$ regiunea haşurată. Prin rotirea ei în jurul axei *Ox* cu 360^0 se obţine cilindrul din Fig. 20.b).
Mai general are loc următoarea

Definiţie. Fie $f:[a,b] \to [0,\infty)$ o funcţie continuă. Mulţimea

$$C_f = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x), a \le x \le b \right\},$$

se numeşte **corpul de rotaţie** determinat de funcţia *f* sau corpul obţinut prin rotirea subgraficului lui *f* în jurul axei *Ox* cu 360^0 (Fig.21).

Ilustrăm, şi în acest caz cele două modalităţi de determinare a formulei care dă volumul corpului de rotaţie C_f.

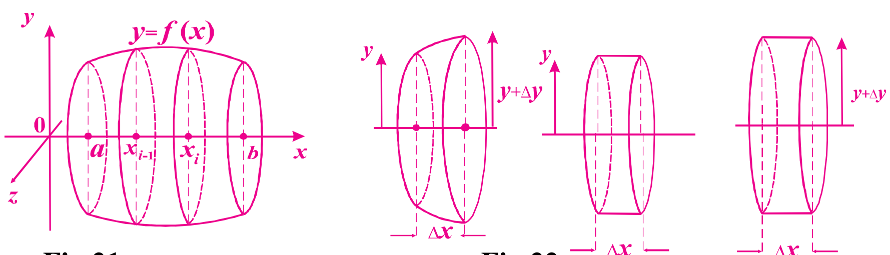


Fig.21
a) **Fig.22** b) c)

Volumul ca primitivă a unei funcții

În Fig. 22.a) ΔV este volumul corpului generat prin rotirea subgraficului lui *f* pe $[x, x+\Delta x]$ în jurul axei *Ox* cu 360^0.
Au loc inegalitățile
$\pi y^2 \Delta x < \Delta V < \pi(y+\Delta y)^2 \Delta x$, unde $\pi y^2 \Delta x$ este volumul cilindrului din Fig. 22.b), iar $\pi(y+\Delta y)^2 \Delta x$ este volumul cilindrului din Fig. 22.c). Am încadrat astfel volumul ΔV între volumele a doi cilindri.

De aici $\pi y^2 \le \frac{\Delta V}{\Delta x} \le \pi(y+\Delta y)^2$. Dacă $\Delta x \to 0$ (adică crește numărul cilindrilor), atunci $\frac{\Delta V}{\Delta x} \to \frac{dV}{dx}$ și $\Delta y \to 0$. Deci $\frac{dV}{dx} = \pi y^2$, adică
$V = \int \pi y^2 dx$.
Cu un raționament similar celui de la arii se obține
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Volumul ca limită a unui şir de sume Riemann

Să considerăm secțiuni perpendiculare pe axa *Ox*. Atunci acestea au formă de disc de arie $\pi f^2(x_i), i=\overline{1,n}$, unde x_i sunt punctele de diviziune ale intervalului $[a,b]$ (Fig.21). volumul corpului poate fi aproximat printr-o sumă de volume de cilindri de raze $f(x_i)$ și înălțimi $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.
Volumul total V se aproximează prin $V \approx \sum \Delta V = \pi \sum f^2(x_i) \Delta x$ (care este o sumă Riemann).

De aici $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Are loc următorul rezultat.

Teoremă. Dacă $f:[a,b] \to [0,\infty)$ este o funcție continuă, atunci
1) corpul de rotație determinat de *f* are volum;
2) vol $(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Exemple cunoscute. **1.** Volumul unui con circular drept de rază R şi înălțime h se obține prin rotația subgraficului funcției $f(x)=\frac{R}{h}x, x\in[0,h]$, în jurul axei Ox (Fig.23) şi are valoarea $V=\pi\int_0^h y^2dx=\pi\frac{R^2}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{\pi R^2h}{3}$.

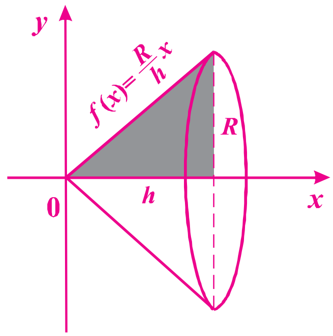


Fig.23

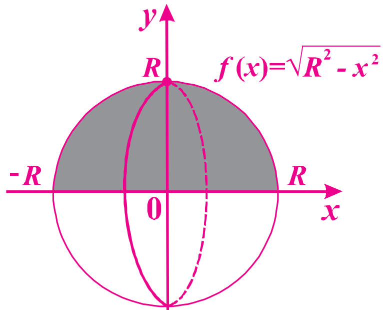


Fig.24

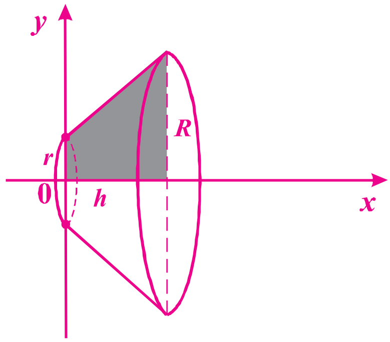


Fig.25

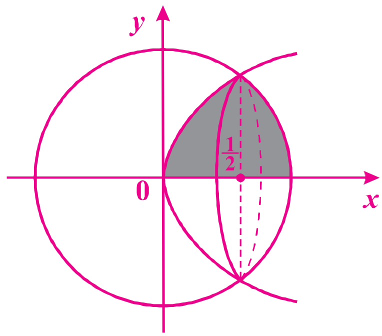


Fig.26

2. Volumul sferei (bilei) de rază R se obține prin rotația subgraficului funcției $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}, x\in[-R,R]$ (semicerc) în jurul axei Ox (Fig. 24) şi are valoarea

$$V=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\frac{4\pi R^3}{3}$$

3. Volumul unui trunchi de con de raze r, R şi înălțime h se obține prin rotația subgraficului funcției $f(x)=\frac{R-r}{h}x+r, x\in[0,h]$ în jurul axei Ox (Fig. 25) şi are expresia

$$\pi\int_0^h\left[\frac{R-r}{h}x+r\right]^2dx=\frac{\pi h}{3}\left(r^2+rR+R^2\right).$$

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze volumele corpurilor de rotație determinate de funcțiile:

a) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=2x-x^2; b)\ f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x; c)\ f:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R},$
$f(x)=\arcsin x; d)\ f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=xe^x; e)\ f:[1,e]\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x;$
$f)\ f:[-2,2]\to\mathbb{R}, f(x)=|x-1|-|x+1|$.

R. a) Avem: $\text{vol}(C_f)=\pi\int_0^2(2x-x^2)^2dx=\frac{16\pi}{15}; b)\ \text{vol}(C_f)=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\frac{\pi^2}{4}$

c) $\text{vol}(C_f)=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin^2 x\,dx=\pi\left(\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-1\right); d)\ \text{vol}(C_f)=\pi\int_0^1 x^2e^{2x}dx=\frac{\pi}{4}(e^2-1);$

e) $\text{vol}(C_f)=\pi\int_1^e x^2\ln^2 x\,dx=\frac{(5e^3-2)\pi}{27}; f)\ \text{vol}(C_f)=\pi\left(\int_{-2}^{-1}4dx+\int_{-1}^{1}4x^2dx+\int_1^2 4dx\right)=\frac{32\pi}{3};$

2. Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul lui *Ox* a mulțimii mărginite de cercul $x^2+y^2=1$ și parabola $y^2=\frac{3}{2}x$.

R. Punctele de intersecție ale cercului cu parabola se obțin rezolvând sistemul

$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ y^2=\frac{3}{2}x\end{cases}$, când obținem $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right), A'\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (Fig. 26). Se consideră funcția

$f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{3}{2}x}, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \sqrt{1-x^2}, x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$. Avem $\text{vol}(C_f)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=$

$$=\pi\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}x\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x^2)dx\right]=\frac{19\pi}{48}.$$

Probleme propuse

1. Să se calculeze volumele corpurilor de rotație determinate de funcțiile:

1) $f(x)=\sin x, x\in[0,\pi];$ **2)** $f(x)=e^{-x}, x\in[0,2];$ **3)** $f(x)=\frac{4}{x}, x\in[1,4];$ **4)** $f(x)=x^2, x\in[0,3];$

5) $f(x)=x^2+1, x\in[2,5];$ **6)** $f(x)=x(x-2), x\in[0,2];$ **7)** $f(x)=\sqrt{x+1}, x\in[0,3];$

8) $f(x)=x\sqrt{1-x}, x\in[0,1]$; **9)** $f(x)=\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}, x\in[0,1]$; **10)** $f(x)=x^2-3|x|+2, x\in[-1,2]$;
11) $f(x)=||x-1|-2|, x\in[0,3]$.

2. Să se determine volumul corpului obținut prin rotația regiunii, în jurul axei Ox, cuprinse între curbă şi axa Ox în fiecare din cazurile:

1) $f(x)=(x+1)(x-3)$; **2)** $f(x)=1-x^2$; **3)** $f(x)=x^2-5x+6$; **4)** $f(x)=x^2-3x$.

3. 1) Regiunea din plan delimitată de arcul de parabolă $y^2=4x$, axa Ox şi dreptele $x=0, x=4$ se roteşte în jurul axei Ox. Să se determine volumul corpului de rotație.

2) Cercul $x^2+y^2=9$ se roteşte în jurul diametrului care coincide cu axa Ox. Să se determine: a) volumul segmentului din sferă determinat de două plane perpendiculare pe Ox duse la 1 şi respectiv 2 unități de centrul sferei, de aceeaşi parte; b) volumul calotei sferice determinate de un plan situat la două unități de centrul sferei.

3) Să se determine volumul generat prin rotația elipsei $x^2+4y^2=16$ în jurul axei mari.

4) Hiperbola echilaterală $xy=1$ se roteşte în jurul axei Ox. Să se determine volumul corpului obținut prin rotația arcului cuprins între $x=1$ şi $x=4$.

5) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a regiunii comune a parabolelor $y^2=4x, x^2=4y$.

4. Să se determine volumele corpurilor obținute prin rotația în jurul axei Ox a mulțimilor mărginite de curbele:

1) $y=x, y=x^2$; **2)** $y=4x, y=x^2$; **3)** $y=x^2, y=\sqrt{x}$; **4)** $y=\sqrt{2x}, y=2(x-1)$;

5) $y=\sqrt{x}, x\in[0,8], y=\sqrt{2x-8}, x\in[4,8]$.

REZUMATUL CAPITOLULUI

Definiții. Proprietăți	**Explicitare. Notații**	**Exemple**
Integrala definită a lui Newton	$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **admite primitive** $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ **o primitivă a lui** f $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \overset{not}{=} F(x)\Big\|_a^b$. **Numarul** $\int_a^b f$ **este integrala definită a funcției** f **pe** $[a,b]$.	$\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big\|_0^1 = \frac{1}{3}$. $\int_{-1}^1 \sin x\,dx = -\cos x\Big\|_{-1}^1 = -\cos 1+\cos 1 = 0$
Reguli de integrare **1) Integrala sumei**	$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx +$ $+\int_a^b g(x)dx$ **(Integrala sumei este egală cu suma integralelor)**	$\int_0^1\left(x^2+\sqrt{x}\right)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 \sqrt{x}dx =$ $= \frac{x^3}{3}\Big\|_0^1 + \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big\|_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{2}{3} = 1$
2) Factor constant	$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ **(Constanta iese de sub integrală)**	$\int_0^1 \frac{2}{5}x\,dx = \frac{2}{5}\int_0^1 x\,dx = \frac{2}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big\|_0^1 = \frac{1}{5}$
3) Integrarea prin părți	$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big\|_a^b -$ $-\int_a^b v(x)u'(x)dx$ **sau scrierea** **diferențială** $\int_a^b udv = uv\Big\|_a^b - \int_a^b v\,du$	$I = \int_0^1 xe^x\,dx$ $\left[\begin{array}{l} u = x \\ v' = e^x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u' = 1 \\ v = e^x \end{array}\right.$ $I = xe^x\Big\|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = xe^x\Big\|_0^1 - e^x\Big\|_0^1 =$ $= e-(e-1) = 1$
4) Integrarea prin substituție (sau schimbare de variabilă)	$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$,	$I = \int_0^1 x^2 2^{x^3}dx$ $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2dx$;

	$t=u(x)$	$\left[\begin{array}{l}x_1=0\\x_2=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}u_1=0\\u_2=1\end{array}\right.$ $I=\frac{1}{3}\int_0^1 2^u du=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^u}{\ln 2}\Big\|_0^1=\frac{1}{3\ln 2}$
Proprietăți ale integralei definite **1) Linearitatea**	$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+$ $+\beta\int_a^b g(x)dx,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$	$\int_{-1}^{1}\left(2x-3e^x\right)dx=2\int_{-1}^{1}x\,dx-3\int_{-1}^{1}e^x dx=$ $=x^2\Big\|_{-1}^{1}-3e^x\Big\|_{-1}^{1}=0-3\left(e-\frac{1}{e}\right)=3\left(\frac{1}{e}-e\right)$
2) Aditivitatea la interval	$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,$ $c\in(a,b)$ **Relația lui Chasles**	$I=\int_0^2\|x-1\|dx;\|x-1\|=\begin{cases}x-1, x\geq 1\\1-x, x<1\end{cases}\Rightarrow$ $\Rightarrow I=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$
Aria regiunii determinate de graficul	$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **continuă. Atunci**	$f(x)=x(x-1), a=-1, b=2$
funcției *f*, axa *Ox* şi dreptele $x=a, x=b, a<b$	**Aria** $=\int_a^b\|f(x)\|dx$	$f(x)\geq 0, x\in[-1,0]\cup[1,2], f(x)\leq 0,$ $x\in[0,1]$. **Atunci: Aria** $=\int_{-1}^{0}f(x)dx-$ $-\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$
Aria delimitată de graficele funcțiilor f,g **şi dreptele** $x=a, x=b$	$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ **continue. Atunci:** **Aria** $=\int_a^b\|f(x)-g(x)\|dx$	$f(x)=x^2, g(x)=x$ $\|f(x)-g(x)\|=\begin{cases}x-x^2, x\in[0,1]\\x^2-x, x\in(1,2]\end{cases}$ **Aria** $=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx+\int_1^2\left(x^2-x\right)dx=$ $=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$

Volumul corpului generat de rotația subgraficului funcției $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ în jurul axei Ox	$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$	$f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$ $V=\pi\int_0^1 x^4dx=\pi\frac{x^5}{5}\Big\|_0^1=\frac{\pi}{5}$

Teste de evaluare

Testul 1

Varianta A

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-x^2}$, iar $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două primitive ale lui f pe $\mathbb{R}$. Să se stabilească relația de ordine între numerele $F(2007)-F(2006), G(2007)-G(2006)$.

2. Unde este greşeala?
Fie

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ 2, x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}.$$ Atunci

o primitivă $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ a lui f este

$$F(x)=\begin{cases}x, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ 2x, x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}.$$ Conform formulei

Leibniz-Newton avem $\int_0^1 f(x)dx=F(x)\Big|_0^1=$

$=F(1)-F(0)=2-0=2, \quad (1)$. Pe de altă

parte $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 2dx=x\Big|_0^{1/2}+(2x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1=$

$=\frac{1}{2}+2-1=\frac{3}{2}, \quad (2)$. Din (1) şi (2) rezultă

$\frac{3}{2}=2!$.

3. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n (x-1)e^{-x}dx$.

4. Să se arate că: $\operatorname{arctg} x > x-\frac{x^3}{3}, \forall x>0$

şi apoi deduceți că $\int_0^1 \operatorname{arctg} x^2\, dx>\frac{2}{7}$.

Varianta B

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x^2$, iar $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două primitive ale lui f pe $\mathbb{R}$. Să se stabilească relația de ordine între numerele $F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F(0), G\left(\frac{\pi}{3}\right)-G(0)$.

2. Unde este greşeala?

Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-1, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ 3, x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$.

Atunci o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$ este

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases}-x, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ 3x, x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}.$$

Conform formulei Leibniz-Newton avem:

$\int_0^1 f(x)dx=F(x)\Big|_0^1=F(1)-F(0)=3-0=3, \ (1).$

Pe de altă parte $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(-1)dx+$

$+\int_{\frac{1}{2}}^1 3dx=-x\Big|_0^{\frac{1}{2}}+(3x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1=-\frac{1}{2}+3-\frac{3}{2}=1, \ (2).$

Din (1) şi (2) rezultă $3=1!$

3. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x^2}$.

4. Să se arate că:

$\operatorname{arctg} x<x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}, x>0$ şi apoi

deduceți că $\int_0^1 \operatorname{arctg} x^2\, dx<\frac{31}{100}$.

5. Să se calculeze: $\int_{-1}^{3} \frac{|x-2|}{1+|x|} dx$.

6. Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^n [t]\, dt$.

7. Să se calculeze: $\lim_{a \searrow 1} \int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1}$.

8. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x-1$.

a) Să se arate că $f(x)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$;

b) Să se arate că: $\frac{1}{e} \le \int_0^1 e^{-x^2} dx \le \frac{\pi}{4}$.

9. Să se determine funcția f pentru care avem: $\int_0^x f(t)\, dt = x^2-2x, x\ge 0$.

10. Să se determine aria cuprinsă între parabolele $y^2=6x, x^2=6y$.

11. Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea subgraficului funcției $f:[0,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{\frac{x(x-3)}{x-4}}$ în jurul axei Ox.

5. Să se calculeze: $\int_{-1}^{1} |x| e^{x^2} dx$.

6. Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \int_2^n \frac{x^3}{(x-1)^2} dx$.

7. Să se calculeze: $\lim_{a\to\infty} \int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1}$.

8. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-(e+1)x-1$

a) Să se arate că $f(x)\le 0, \forall x\in[0,1]$;

b) Să se arate că: $\frac{4}{3} < \int_0^1 e^{x^2} dx < \frac{e+4}{3}$.

9. Fie funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_x^{x^2} \frac{t}{1+t^3} dt$.

Să se calculeze $F'(1)$.

10. Să se determine aria cuprinsă între graficele funcțiilor $f(x)=-x^2+5, g(x)=\frac{4}{x^2}$ și dreptele verticale $x=1, x=2$.

11. Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea regiunii plane delimitate de curba $y=|x^2-1|$, axa Ox, $x=0, x=2$, în jurul axei Ox.

Testul 2

Varianta A

1. **Utilizând aproximarea ariei cu ajutorul sumelor să se arate că** $0{,}5<\int_1^2\frac{dx}{x}<1.$

2. **Se știe că:** $\int_1^5 f(x)dx=3, \int_4^5 f(x)dx=2,$ $\int_1^7 f(x)dx=5.$ **Să se calculeze:** 1) $\int_5^7 f(x)dx;$ 2) $\int_4^7 f(x)dx;$ 3) $\int_1^4 f(x)dx;$ 4) $\int_7^4 f(x)dx.$

3. **Să se calculeze:** $\int_0^{2\pi} x|\sin x|\,dx.$

4. **Se consideră funcția continuă** $f:[-3,3]\to\mathbb{R}$ **cu proprietatea** $f(x)+f(-x)=x^2, \forall x\in[-3,3].$ **Să se calculeze** $\int_{-3}^3 f(x)dx.$

5. **Să se arate că** $e^x\geq 1+x, \forall x\geq 0$ **și apoi să se deducă** $e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}, \forall x\geq 0.$

6. **1) Fie** $f:[0,1]\to[2,3]$ **o funcție continuă cu proprietatea** $\int_0^1 f(x)dx=0.$ **Să se arate că** $\int_0^1 f^2(x)dx\leq -6.$ **2) Să se arate că:** $\frac{3}{2}\leq\int_1^3\frac{x+2}{x+3}dx\leq\frac{5}{3}.$

7. **Să se determine funcția continuă** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ **cu proprietatea** $\int_0^x f(t)dt=$

Varianta B

1. **Utilizând aproximarea ariei cu ajutorul sumelor și să se arate că** $0{,}6<\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}<1.$

2. **Se știe că:** $\int_1^2 f(x)dx=5, \int_1^3 f(x)dx=3,$ $\int_3^5 f(x)dx=2.$ **Să se calculeze:** 1) $\int_1^5 f(x)dx;$ 2) $\int_2^3 f(x)dx;$ 3) $\int_2^5 f(x)dx;$ 4) $\int_3^1 f(x)dx.$

3. **Să se calculeze:** $\int_0^{2\pi} x|\cos x|\,dx.$

4. **Se consideră funcția continuă** $f:[-3,3]\to\mathbb{R}$ **cu proprietatea** $f(x)+f(-x)=1, \forall x\in[-3,3].$ **Să se calculeze** $\int_{-3}^3 f(x)dx.$

5. **Să se arate că** $\sin x\leq x, \forall x\geq 0$ **și apoi să se deducă inegalitatea** $\cos x\leq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!},$ $\forall x\geq 0.$

6. **1) Fie** $f:[0,1]\to[1,3]$ **o funcție continuă cu proprietatea** $\int_0^1 f(x)dx=0.$ **Să se arate că** $\int_0^1 f^2(x)dx\leq -3.$ **2) Să se arate că** $-1\leq\int_2^4\frac{1-x}{x+2}dx\leq-\frac{1}{2}.$

7. **Să se determine funcția continuă** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ **cu proprietatea** $\int_1^x f(t)dt=\frac{x^3}{3}-x^2$

$= \frac{x^4}{4} + x, x \in \mathbb{R}.$

8. Să se determine punctele de extrem ale funcției $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x \frac{t-2}{1+t^2} dt$ și să se determine valorile extreme.

9. Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt.$

10. Să se determine aria regiunii delimitate de graficul funcției $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$, axa Ox și dreptele $x = 0, x = \sqrt{3}.$

8. Să se determine punctele de extrem ale funcției $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x \frac{1-t}{1+t^2} dt.$

9. Să se calculeze: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt.$

10. Să se determine volumul corpului obținut prin rotația subgraficului funcției $f : [0,3] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\frac{x(x-3)}{x-4}}$, în jurul axei Ox.

Testul 3 (grilă)

Varianta A

1. Dacă $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^{x^2}$, atunci între numerele $A = F(4) - F(2)$, $B = G(4) - G(2)$ are loc relația: a) $A > B$; b) $A = B$; c) $A < B$.

2. Dacă $\int_1^2 f(x)dx = 1, \int_0^3 f(x)dx = 4,$ $\int_2^3 f(x)dx = 2,$ atunci $\int_1^0 f(x)dx$ este: a) -1; b) 1; c) 0.

3. Dacă $f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + (x^2 + 2)e^{nx}}{2 + xe^{nx}}$, atunci $\int_1^2 f(x)dx$ este egală cu: a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{1}{2} + \ln 2$; c) $\frac{3}{2} + 2\ln 2.$

Varianta B

1. Dacă $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3^{x^2}$, atunci între numerele $A = F(9) - F(3)$, $B = G(9) - G(3)$ are loc relația: a) $A = B$; b) $A < B$; c) $A > B$.

2. Dacă $\int_0^2 f(x)dx = 3, \int_1^3 f(x)dx = 4,$ $\int_1^2 f(x)dx = 2,$ atunci $\int_0^3 f(x)dx$ este: a) 4; b) 5; c) 2.

3. Dacă $f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + (|x-1| + 3)e^{nx}}{2 + (1+x)e^{nx}}$, atunci $\int_0^2 f(x)dx$ este egală cu: a) $2 + \ln \frac{3}{64}$; b) $1 + \ln \frac{3}{8}$; c) $2 + \ln \frac{3}{16}.$

4. Dacă $I=\int_1^3 \frac{xdx}{x^2+4}$, atunci: a) $I\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$; b) $I\in\left[\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right]$; c) $I\in\left(\frac{3}{4},1\right)$.

5. Dacă $A=\int_1^2 \ln(1+x)dx, B=\int_1^2 \frac{x\,dx}{1+x}$, atunci: a) $A>B$; b) $A=B$; c) $A<B$.

6. Dacă $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx, n\in\mathbb{N}^*$, atunci:

a) $I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n}$; b) $I_n-I_{n-2}=\frac{1}{n-1}$; c) $I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}$.

7. Se consideră funcția $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x \ln(3+t)\,dt$. Atunci: 1) $F(0)$ este: a) $\ln 3$; b) 0; c) 1. 2) $F'(x)$ este: a) $\ln(3+x)$; b) $\frac{1}{3+x}$; c) $3+x$. 3) F este: a) descrescătoare pe $[0,\infty)$; b) crescătoare pe $[0,\infty)$; c) niciun răspuns nu este corect.

8. Limita $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+t)\,dt}{\sin^2 x}$ este egală cu:

a) 0; b) 1; c) $\frac{1}{2}$.

9. Punctul de extrem pentru funcția $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^x \frac{t-1}{1+t^2}dt$ este:

a) $x=1$ punct de minim; b) $x=0$ punct de maxim; c) nu există.

10. Fie $f,g:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2$, $g(x)=2\sqrt{x}$. Aria cuprinsă între graficele funcțiilor f,g și dreptele $x=0, x=2$ este egală cu: a) $\frac{4}{3}\left(3-2\sqrt{2}\right)$; b) $\frac{4}{3}\left(5-2\sqrt{2}\right)$; c) $\frac{4}{3}\left(7-2\sqrt{2}\right)$.

4. Dacă $I=\int_1^4 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$, atunci: a) $I\in(0,1)$; b) $I\in\left[1,\frac{16}{3}\right]$; c) $I\in\left[\frac{17}{3},6\right]$.

5. Dacă $A=\int_1^2 \ln(1+x)dx, B=\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$, atunci: a) $A>B$; b) $A=B$; c) $A<B$.

6. Dacă $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx, n\in\mathbb{N}^*$, atunci:

a) $I_n+I_{n-1}=\frac{1}{n}$; b) $I_n+I_{n-1}=\frac{1}{n+1}$; c) $I_n+I_{n-1}=\frac{1}{n-1}$.

7. Se consideră funcția $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x e^{t^2+1}\,dt$. Atunci: 1) $F(0)$ este: a) e; b) 0; c) 1. 2) $F'(x)$ este: a) e^{x^2+1}; b) $2xe^{x^2+1}$; c) x^2+1. 3) F este: a)descrescătoare; b) crescătoare; c) niciun răspuns nu este corect.

8. Limita $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x \ln(1+t)\,dt}{x^2}$ este egală cu:

a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) 0.

9. Punctul de extrem pentru funcția $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^x \frac{2-t}{1+t^2}dt$ este:

a) $x=2$ punct de maxim; b) $x=0$ punct de minim; c) nu există.

10. Fie $f,g:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2$, $g(x)=3\sqrt{x}$. Aria cuprinsă între graficele funcțiilor f,g și dreptele $x=0, x=2$ este egală cu: a) $2\left(5-2\sqrt{2}\right)$; b) $5-2\sqrt{2}$; c) $3\left(5-2\sqrt{2}\right)$.

3. TESTE DE RECAPITULARE FINALĂ

1. TESTE PENTRU PREGĂTIREA EXAMENULUI DE BACALAUREAT

Testul 1 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore

SUBIECTUL I (30 p.)

► Pentru întrebările 1-5 scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen.

(3 p.) 1. Câte funcții $f:\{a,b\}\to\{1,2,3\}$ au proprietatea $f(a)\neq f(b)$? a) 5; b) 6; c) 8; d) 5.

(3 p.) 2. Câte elemente din mulțimea $\{1,2,...,10\}$ se divid cu 3 sau 5? a) 6; b) 3; c) 4; d) 5.

(3 p.) 3. Care este probabilitatea ca o submulțime a mulțimii $\{1,2,3,4\}$ să conțină simultan elementele 1 și 2? a) 0,5; b) 0,25; c) 0,40; d) 0,75.

(3 p.) 4. Care este valoarea sumei $1+3+5+...+49$? a) 625; b) 600; c) 650; d) 575.

(3 p.) 5. Câte elemente din mulțimea $\{C_7^0, C_7^1, ..., C_7^7\}$ sunt numere impare? a) 8; b) 7; c) 6; d) 5.

► Pentru întrebările 6-10 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$

(3 p.) 6. Cât este $f'(x),\ x\in\mathbb{R}^*$?

(3 p.) 7. Cât este $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$?

(3 p.) 8. Câte asimptote verticale are graficul funcției *f*?

(3 p.) 9. Cât este $\int_1^2 f(x)dx$?

(3 p.) 10. Cât este $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\int_1^x f(t)dt$?

► Pentru subiectele II–IV se cer rezolvările complete.

SUBIECTUL II (20 p.)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(1,n)$ și $B_n(2,n)$, unde $n\in\{1,2,3,4\}$. Notăm cu M mulțimea $\{A_1,A_2,A_3,A_4,B_1,B_2,B_3,B_4\}$.

(4 p.) a) Să se scrie ecuația dreptei A_1A_2.

(4 p.) b) Să se calculeze lungimea segmentului A_2B_1.

(4 p.) c) Care este aria triunghiului $A_1B_2B_3$?

(4 p.) d) Care este numărul dreptelor care trec prin cel puțin două puncte din mulțimea *M*?

(4 p.) e) Câte triunghiuri au toate vârfurile în mulțimea *M*?

SUBIECTUL III (20 p.)

Se consideră mulțimea $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]=\left\{a+b\sqrt{2}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$. Notăm cu F mulțimea tuturor funcțiilor $f:\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\to\mathbb{R}$, monoton crescătoare care verifică $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

(4 p.) **a) Să se verifice că dacă $x,y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, atunci $x+y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.**

(4 p.) **b) Să se verifice că dacă $g:\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\to\mathbb{R},\ g(x)=tx$, cu $t\geq 0$, atunci $g\in F$.**

(4 p.) **c) Să se arate că dacă $f\in F$, atunci $f(0)=0$.**

(4 p.) **d) Să se arate că dacă $f(1)=t\in\mathbb{R}$ și $f\in F$, atunci $t\geq 0$.**

(4 p.) **e) Să se arate că dacă $f\in F$ și $a,b\in\mathbb{Z}$, atunci $f(a+b\sqrt{2})=af(1)+bf(\sqrt{2})$.**

SUBIECTUL IV (20 p.)

Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_0(x)=e^{2x}$ și $f_{n+1}(x)=\left(f_n\right)'(x),\ \forall x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$.

(4 p.) **a) Să se calculeze $f_1(x),\ x\in\mathbb{R}$.**

(3 p.) **b) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x)=2^n e^{2x},\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}$.**

(4 p.) **c) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f_0.**

(3 p.) **d) Să se calculeze suma $f_0(0)+f_1(0)+...+f_n(0),\ n\in\mathbb{N}$.**

(3 p.) **e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)}{f_{n+1}(x)},\ x\in\mathbb{R}$.**

(4 p.) **f) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f_n(t)dt}{f_n(x)},\ n\in\mathbb{N}$.**

(Bacalaureat M_2, varianta 1, filiera tehnologică, iunie-iulie, 2004)

Testul 2 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore

SUBIECTUL I (30 p.)

► Pentru întrebările 1-5 scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen.

(3 p.) **1 Câte numere de două cifre se pot forma utilizând cifrele 1, 2 și 4? a) 6; b) 12; c) 9; d) 8.**

(3 p.) **2. Câte submulțimi cu 3 elemente ale mulțimii {1, 2, ..., 6} are elementele în progresie aritmetică? a) 5; b) 6; c) 4; d) 7.**

(3 p.) **3. Câte elemente din mulțimea $\left\{C_8^0, C_8^1, C_8^2, ..., C_8^8\right\}$ sunt numere impare?**

a) 2; b) 3; c) 4; d) 5.

(3 p.) **4. Care este valoarea sumei $1+2+2^2+...+2^{63}$?**

a) $2^{64}-1$; b) $2^{64}+1$; c) $2^{65}+1$; d) $2^{65}-1$.

(3 p.) **5. Care este partea întreagă a numărului $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{3^{100}}$? a) 3; b) 1; c) 100; d) 0.**

► Pentru întrebările 6-10 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1+\dfrac{1}{x^2+1}$.

(3 p.) **6. Cât este $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$?**

(3 p.) 7. Cât este $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$?

(3 p.) 8. Câte asimptote verticale are graficul funcției *f*?

(3 p.) 9. Cât este $\int_0^1 \left(x^2+1\right) f(x)dx$?

(3 p.) 10. Câte puncte de extrem local are funcția *f*?

► **Pentru subiectele II–IV se cer rezolvările complete.**

SUBIECTUL II (20 p.)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n,n+2), \forall n \in \mathbb{N}$ și $O(0,0)$. Notăm că M mulțimea $\{O, A_0, A_1, ..., A_5\}$.

(4 p.) a) Să se scrie ecuația dreptei A_0A_1.

(4 p.) b) Să se arate că punctele $A_n(n, n+2), \forall n \in \mathbb{N}$ sunt pe dreapta A_0A_1.

(4 p.) c) Să se calculeze aria triunghiului OA_0A_1.

(4 p.) d) Să se calculeze lungimea segmentului OA_n, $n \in \mathbb{N}$.

(2 p.) e) Care este numărul dreptelor care trec prin cel puțin două puncte din mulțimea M ?

(2 p.) f) Să se determine numărul triunghiurilor care au vârfurile în câte 3 puncte din mulțimea M ?

SUBIECTUL III (20 p.)

În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră submulțimile: $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}$ și $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}^* \right\}$.

(4 p.) a) Să se verifice că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$,

(4 p.) b) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.

(4 p.) c) Să se arate că dacă $A, B \in H$, atunci $AB \in H$.

(4 p.) d) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sunt două elemente din *G*, să se calculeze *AB* și *BA*.

(2 p.) e) Să se arate că dacă $X \in H$, atunci există $Y \in H$ astfel încât $XY = YX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2 p.) f) Să se arate că mulțimea *H* înzestrată cu operația de înmulțire a matricelor formează o structură de grup comutativ.

SUBIECTUL IV (20 p.)

Se consideră funcția $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ și șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = f(1)+f(2)+...+f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(4 p.) a) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul lui *f*.

(4 p.) b) Să se verifice că $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x), \forall x > 0$.

(4 p.) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $a_n = \ln(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$,

(2 p.) d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(2 p.) e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$.

(2 p.) f) Să se calculeze $\int\limits_1^2 f(x)dx$.

(Bacalaureat, M$_2$, varianta 2, filiera tehnologică, iunie-iulie, 2004)

Testul 3 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore

SUBIECTUL I (30 p.)

► **Pentru întrebările 1-16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.**

(3 p.) 1. Câte funcții $f:\{a,b\}\to\{1,2,3\}$ au proprietatea $f(a)<f(b)$?

(3 p.) 2. Care este probabilitatea ca un element n din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $n^2<n!$?

(3 p.) 3. Câte soluții reale are ecuația $2^x+2=0$?

(3 p.) 4. Care este valoarea sumei $1+5+9+...+49$?

(3 p.) 5. Dacă funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt $f(x)=2x+3, g(x)=3x+2$, cât este $(g\circ f)(-1)$?

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$.

(3 p.) 6. Cât este $f'(x), x>0$?

(3 p.) 7. Cât este $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$?

(3 p.) 8. Câte asimptote verticale are graficul funcției *f*?

(3 p.) 9. Cât este $\int\limits_0^1 e^x dx$?

(3 p.) 10. Cât este $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{3n+2}$?

SUBIECTUL II (20 p.)

(4 p.) 11. Cât este distanța de la punctul $A(1,1)$ la punctul $B(2,2)$?

(4 p.) 12. Care este ecuația dreptei care trece prin punctele $A(1,1)$ și $B(2,2)$?

(4 p.) 13. Cât este aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{3}$?

(4 p.) 14. Care este conjugatul numărului complex $2+3i$?

(2 p.) 15. Cât este $\cos^2 1+\sin^2 1$?

(2 p.) 16. Dacă în triunghiul ABC, $AB = 2$, $AC = 3$ și $m\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{\pi}{3}$, cât este BC?

► **Pentru subiectele III și IV se cer rezolvările complete.**

SUBIECTUL III (20 p.)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și polinomul $f=X^2-6X+5$.

(4 p.) a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale, ecuația $f(x)=0$.

(4 p.) b) Să se calculeze determinantul matricei A.

(4 p.) c) Să se calculeze matricea A^2.

(2 p.) d) Să se verifice că $f(A)=O_2\left(f(A)=A^2-6A+5I_2\right)$.

(4 p.) e) Să se rezolve sistemul $\begin{cases}3x+2y=0\\2x+3y=0\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{R}$.

(2 p.) f) Să se arate că $A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5^n+1 & 5^n-1\\5^n-1 & 5^n+1\end{pmatrix}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

SUBIECTUL IV (20 p.)

Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$.

(4 p.) a) Să se calculeze $f'(x),\ x\geq 0$

(4 p.) b) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe $[0,\infty)$.

(4 p.) c) Să se verifice că $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$.

(2 p.) d) Să se arate că dacă $x,y\in(0,\infty)$, $x\neq y$, atunci $\left|f(x)-f(y)\right|<\left|x-y\right|$.

(4 p.) e) Să se calculeze $\int_1^0 f(x)dx$.

(2 p.) f) Să se arate că $\left|\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right|>\left|\frac{p+2q}{p+q}-\sqrt{2}\right|, \forall p,q\in\mathbb{N}^*$

(Bacalaureat, M$_2$, varianta 1, filiera tehnologică, iunie-iulie, 2005)

Testul 4 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore

SUBIECTUL I (30 p.)

► **Pentru întrebările 1-5 scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen.**

(3 p.) 1. Câte soluții reale are ecuația $\ln x^2=\ln|x|$? a) 1; b) 2; c) 0; d) 3.

(3 p.) 2. Cât este suma $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{49\cdot 50}$? a) $\frac{49}{50}$; b) $\frac{48}{50}$; c) $\frac{1}{50}$; d) $\frac{1}{2}$.

(3 p.) 3. Care este probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $\left\{C_7^0, C_7^1, C_7^2, ..., C_7^7\right\}$, acesta să fie par? a) $\frac{1}{2}$; b) 0; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{1}{4}$.

(3 p.) 4. Cât este suma $2+7+12+...+47$? a) 135; b) 235; c) 245; d) 255.

(3 p.) 5. Cât este termenul dezvoltării $\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^8$ care nu-l conține pe x? a) T_3; b) T_4; c) T_5; d) T_6.

► **Pentru întrebările 6-10 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.**

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^3-x}$.

(3 p.) 6. Cât sunt numerele a,b,c astfel încât $f(x)=\frac{a}{(x-1)x}+\frac{b}{x(x+1)}, x\in\mathbb{R}-\{\pm 1,0\}$?

Să se arate că $f(x)=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}, \forall x\in\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$.

(3 p.) 7. Cât este $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde $a_n=\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3-k}$?

(3 p.) 8. Cât sunt $f'(x), x\in\mathbb{R}-\{\pm 1,0\}$ şi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$?

(3 p.) 9. Câte asimptote verticale are graficul funcţiei *f* ?

(3 p.) 10. Cât este aria cuprinsă între graficul funcţiei *f*, axa *Ox* şi dreptele $x=2, x=3$?

► **Pentru subiectele II–IV se cer rezolvările complete.**

SUBIECTUL II (20 p.)

În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(2,3), B(\alpha,1), C(-2,-4), \alpha\in\mathbb{R}$.

(4 p.) a) Să se determine coordonatele punctului *D* de pe dreapta *AC* astfel încât $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

(4 p.) b) Fie *E* mijlocul segmentului *AC*. Să se precizeze *B* pentru care $BE\perp AC$.

(4 p.) c) Pentru *B* determinat la b) precizaţi punctul *B'* astfel încât patrulaterul *ABCB'* să fie romb.

(4 p.) d) Calculaţi aria rombului *ABCB'*.

(4 p.) e) Arătaţi că $AC^2+B'B^2=4AB^2$

SUBIECTUL III (20 p.)

Fie *G* mulţimea matricelor $A_x=\begin{pmatrix} x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$.

(4 p.) a) Să se arate că: 1) $A_x=A_y$; 2) $A_x+A_y=A_{x+y}, \forall x,y\in\mathbb{R}$; c) $A_x+A_y=A_y+A_x, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

(4 p.) b) Să se arate că: 1) $A_x\cdot A_y=A_{2xy}, \forall x,y\in\mathbb{R}$; 2) $A_x\cdot A_y=A_y\cdot A_x, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

(4 p.) c) Să se arate că dacă $A_{x_1}\neq A_0$ şi $A_{x_1}\cdot A_{x_2}=A_0$, atunci $A_{x_2}=A_0$.

(4 p.) d) Să se determine elementul $A_u\in G$ astfel încât $A_xA_u=A_x, \forall x\in\mathbb{R}$.

(4 p.) e) Să se rezolve ecuaţia $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}A_x^n\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$.

SUBIECTUL IV (20 p.)

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$.

(4 p.) a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=ax+\frac{bx}{x^2+1}, \forall x\in\mathbb{R}$

(4 p.) b) Să se arate că funcţia *f* este impară şi să se calculeze $\int\limits_{-2007}^{2007} f(x)dx$.

(4 p.) c) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei *f*.

(4 p.) d) Să se calculeze $f'(x)$ şi să se precizeze intervalele de monotonie ale funcţiei *f*.

(4 p.) e) Să se calculeze $\int f(x)dx,\ x\in\mathbb{R}$ şi $\int_0^1 f(x)dx$.

Testul 5 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore

SUBIECTUL I (30 p.)

► Pentru întrebările 1-5 scrieţi litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen.

(3 p.) 1. Câte funcţii surjective de la mulţimea $\{a,b,c\}$ la ea însăşi există?
a) 3; b) 4; c) 5; d) 6.

(3 p.) 2. Câte soluţii are ecuaţia $2^{x^2}=512$? a) 0; b) 2; c) 3; d) 1.

(3 p.) 3. Câte numere de trei cifre au toate cifrele impare? Câte dintre ele au cifrele distincte?
a) (125; 60); b) (60; 125); c) (100, 90); d) (150, 100)

(3 p.) 4. Cât este suma $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+...+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{6}}{\sqrt{72}}$? a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{2}{3}$; d) 1.

(3 p.) 5. Cât este probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $\left\{\log_2 n \middle| n=\overline{1,64}\right\}$ să obţinem numărul natural cel puţin egal cu 3? a) $\frac{1}{16}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{1}{64}$.

► Pentru întrebările 6-10 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen.

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^5+x^3$.

(3 p.) 6. Cum este funcţia *f*: pară sau impară?

(3 p.) 7. Precizaţi monotonia lui *f* pe $\mathbb{R}$ şi stabiliţi numărul punctelor de extrem.

(3 p.) 8. Să se calculeze $f(-10)+f(-9)+...+f(-1)+f(1)+f(2)+...+f(10)$ şi $\int_{-10}^{10} f(x)dx$.

(3 p.) 9. Să se arate că *f* este inversabilă şi să se calculeze $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$.

(3 p.) 10. Câte puncte de inflexiune are graficul funcţiei *f*.

► Pentru subiectele II–IV se cer rezolvările complete.

SUBIECTUL II (20 p.)

În reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$ se consideră vectorii $\vec{r_1}=(\alpha-1)\vec{i}+(2\beta+1)\vec{j},\ \vec{r_2}=(\beta-2)\vec{i}+\alpha\vec{j},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(4 p.) a) Să se determine α,β astfel încât $\vec{r_1}=\vec{r_2}$ şi să se determine $|\vec{r_1}|$.

(4 p.) b) Dacă *A* are vectorul de poziţie de la a), atunci scrieţi ecuaţia dreptei *OA*.

(4 p.) c) Pentru $B(-3,4)$ determinaţi $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ şi $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$.

(4 p.) d) Arătaţi că vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ sunt perpendiculari.

(4 p.) e) Să se determine punctul *C* astfel încât *OACB* să fie dreptunghi şi calculaţi aria sa.

SUBIECTUL III (20 p.)

Pe mulţimea $(2,\infty)$ se consideră operaţia $x*y=xy-2x-2y+6,\ \forall x,y>2$.

(4 p.) a) Să se arate că $\forall x,y>2\Rightarrow x*y>2$.

(4 p.) b) Să se arate că: 1) $(x*y)*z = x*(y*z), \forall x,y,z > 2$.

2) $x*y = y*x, \forall x,y > 2$.

(4 p.) c) Să se arate că există $e > 2$ astfel încât $x*e = x, \forall x > 2$.

(4 p.) d) Să se arate că $\underbrace{x*x*...*x}_{n} = (x-2)^n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(4 p.) e) Funcția $f:\mathbb{R} \to (2,\infty), f(x) = e^x + 2$ are proprietățile:

1) *f* este bijectivă;

2) $f(x+y) = f(x)*f(y), \forall x,y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL IV (20 p.)

Se consideră funcția $f_n:(0,\infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n \ln x, n \in \mathbb{N}^*$.

(4 p.) a) Să se calculeze $f_n'(x), x > 0$.

(4 p.) b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției *f*1.

(4 p.) c) Să se precizeze intervalele de convexitate ale funcție *f*1.

(4 p.) d) Să se calculeze $\int_1^e f_n(x)dx, n \in \mathbb{N}^*$.

(4 p.) e) Să se arate că funcția f_n are un unic punct de extrem, notat a_n și să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Testul 6 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore

SUBIECTUL I (30 p.)

► Pentru întrebările 1-5 scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen.

(3 p.) 1. Cât este $C_7^3 - C_7^4$? Cât este suma $C_9^1 + C_9^3 + C_9^5 + C_9^7 + C_9^9$?

a) 1; 256; b) 0; 256; c) –1; 250; d) 7; 81.

(3 p.) 2. Cât este suma: $\frac{1}{1!+2!} + \frac{1}{2!+3!} + ... + \frac{1}{8!+9!}$?

a) $\frac{1}{10!}$; b) $1 - \frac{1}{10!}$; c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{10!}$; d) $\frac{1}{3} - \frac{1}{10!}$.

(3 p.) 3. Cât este numărul $\log_2 3 \log_3 4 \log_4 5$? a) $\log_2 5$; b) $\log_3 5$; c) 1; d) $\log_5 3$.

(3 p.) 4. Care este probabilitatea ca unul din punctele $A(0,1), B(1,0), C(1,2), D(2,3), E(3,2), F(2,4)$ să aparțină dreptei $y = x + 1$? a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{6}$; d) $\frac{1}{4}$.

(3 p.) 5. Cât este produsul $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot...\cdot\hat{5}$ în $\mathbb{Z}_6$? Câte soluții are ecuația $\hat{3}\hat{x} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_6$?

a) $\hat{0}; 3$; b) $\hat{1}; 2$; c) $\hat{0}; 1$; d) $\hat{0}; 6$.

► Pentru întrebările 6-10 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

(3 p.) 6. Cât sunt $f'(x), x \in \mathbb{R}$ și $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$?

(3 p.) 7. Care este asimptota către $+\infty$ la graficul lui *f*? De ce graficul lui *f* n-are asimptote verticale?

(3 p.) 8. Cât sunt $\lim_{n\to\infty} f(n)$ şi $\lim_{x\to\infty} xf(x)$?

(3 p.) 9. Câte puncte de extrem are funcția ?

(3 p.) 10. Cât este $\int_0^1 f(-x)f(x)dx$?

► **Pentru subiectele II–IV se cer rezolvările complete.**

SUBIECTUL II (20 p.)

În reperul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele $(d)_1 : x+y-2=0$, $(d_2): x-y=0$, $(d_3): y-3=0$. Notăm $d_1 \cap d_2 = \{A\}, d_2 \cap d_3 = \{B\}, d_1 \cap d_3 = \{C\}$.

(4 p.) a) Să se determine coordonatele punctelor *A*, *B*, *C*.

(4 p.) b) Să se calculeze lungimile segmentelor *AB*, *AC*.

(4 p.) c) Arătați că $m\left(\widehat{BAC}\right) = 90^0$ şi calculați aria triunghiului *ABC*.

(4 p.) d) Să se determine raza cercului circumscris triunghiului *ABC*.

(4 p.) e) Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului *ABC*.

SUBIECTUL III (20 p.)

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ -1 & 1 & m \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R}$.

(4 p.) a) Să se calculeze $\det(A)$.

(4 p.) b) Pentru $m=2$ să se calculeze A^{-1}.

c) Se consideră sistemul: $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+my-z=1 \\ -x+y+mz=1, m \in \mathbb{R} \end{cases}$.

(4 p.) 1) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul nu are soluție unică.

(4 p.) 2. Pentru $m=2$ să se rezolve ecuațiua $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, unde *A* este matricea sistemului.

(4 p.) 3) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul omogen $A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ are numai soluția banală $x=y=z=0$.

SUBIECTUL IV (20 p.)

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} - \{-1,-2,-3\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

(4 p.) a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.

(4 p.) b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \dfrac{a}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{b}{(x+2)(x+3)}$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1,-2,-3\}$.

(4 p.) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(1)+f(2)+...+f(n)\right]$.

(4 p.) d) Să se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=\frac{m}{x+1}+\frac{n}{x+2}+\frac{p}{x+3}$, $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1,-2,-3\}$.

(4 p.) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

Testul 7 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.

► La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.

SUBIECTUL I (20 p)

(4 p.) a) Să se calculeze modulul numărului complex $(1+i)^4$.

(4 p.) b) Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}$.

(4 p.) c) Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}$.

(4 p.) d) Să se arate că vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+6\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+9\vec{j}$ sunt coliniari.

(2 p.) e) Să se calculeze distanța de la punctul $A(1,1)$ la dreapta $d: 3x+4y+3=0$.

(2 p.) f) Să se calculeze $\cos 15^0$, aplicând eventual formula $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

SUBIECTUL II (30 p)

1.

(3 p.) a) Să se simplifice fracția $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}, n\in\mathbb{N}$.

(3 p.) b) Să se calculeze suma 1 + 3 + 5 +... + 27 .

(3 p.) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_5 x=\log_5\left(x^2-x+1\right)$.

(3 p.) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x-3^x=6$.

(3 p.) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $n^3\geq 25$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+\sin x$.

(3 p.) a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

(3 p.) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3 p.) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

(3 p.) d) Să se arate că funcția *f* este convexă pe $\mathbb{R}$.

(3 p.) e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^3+2}$.

SUBIECTUL III (20 p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **şi mulţimea** $I(A)=\{aA+bI_2 | a,b\in\mathbb{Q}\}$.

(4 p.) **a) Să se arate că** $O_2 \in I(A)$ **şi** $I_2 \in I(A)$.

(4 p.) **b) Să se arate că** $A^2 - A + I_2 = O_2$.

(4 p.) **c) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei** A.

(2 p.) **d) Să se arate că** $A^3 = -I_2$.

(2 p.) **e) Să se calculeze** A^{2007}.

(2 p.) **f) Să se arate că dacă** $B \in M_2(\mathbb{Q})$ **şi** $AB = BA$, **atunci** $B \in I(A)$.

(2 p.) **g) Să se arate că dacă** $Y \in I(A), Y \neq O_2$, **atunci** Y **este inversabilă.**

SUBIECTUL IV (20 p)

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg} x$.

(4 p.) **a) Să se calculeze** $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

(4 p.) **b) Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

(4 p.) **c) Să se arate că funcţia** f **este strict crescătoare pe intervalul** $(-\infty,-1]$ **şi strict descrescătoare pe intervalul** $[-1,\infty)$.

(2 p.) **d) Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(2 p.) **e) Să se arate că** $0 < f(x) \le \dfrac{\pi}{2}, \forall x\in\mathbb{R}$,

(2 p.) **f) Să se arate că**

$$\int_0^x \operatorname{arctg}(t+a)dt=(x+a)\cdot\operatorname{arctg}(x+a)-\frac{1}{2}\ln\left((x+a)^2+1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(a^2+1\right)-a\cdot\operatorname{arctg} a,$$

$\forall x\in\mathbb{R}, \forall a\in\mathbb{R}$.

(2 p.) **g) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei** f, **axa** Ox **şi dreptele de ecuaţii** $x=0$ **şi** $x=1$.

(Varianta 9, M2, Ştiinţele naturii, 2007)

Testul 8 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.

► La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.

SUBIECTUL I (20 p)

(4 p.) **a) Să se determine** $a\in\mathbb{R}$ **pentru care dreptele** $d_1: x+y-1=0$ **şi** $d_2: 2x+ay+3=0$ **sunt paralele.**

(4 p.) **b) Să se determine numărul diagonalelor unui poligon convex cu 8 laturi.**

(4 p.) **c) Să se calculeze modulul numărului complex** $z=i+i^2+i^3+..+i^{11}$.

(4 p.) **d) Să se calculeze raza cercului de ecuaţie** $x^2+y^2-2x=3$.

(2 p.) e) Să se calculeze suma $\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}$.

(2 p.) f) Să se rezolve ecuaţia $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}, x\in[0,\pi]$.

SUBIECTUL II (30 p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x+3$ şi se notează cu *a, b* rădăcinile ecuaţiei $f(x)=0$.

(3 p.) a) Să se determine valoarea minimă a funcţiei *f*.

(3 p.) b) Să se calculeze suma $\frac{1}{2a-a^2}+\frac{1}{2b-b^2}$.

(3 p.) c) Să se determine numerele reale *y* pentru care $f\left(3^y\right)=6$.

(3 p.) d) Să se calculeze produsul rădăcinilor ecuaţiei $f\left(\log_2 t\right)=11$.

(3 p.) e) Să se arate că determinantul $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ a & b \end{vmatrix}$ este număr natural.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

(3 p.) a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

(3 p.) b) Să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ inecuaţia $f(x)\le\frac{1}{2x}$.

(3 p.) c) Să se determine ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

(3 p.) d) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(n^2\cdot f(n)\right)$.

(3 p.) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

SUBIECTUL III (20 p)

În $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, iar pentru o matrice oarecare $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ se notează $a+d=tr(A)$.

(4 p.) a) Să se arate că pentru orice două matrice $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ este adevărată egalitatea $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$.

(4 p.) b) Să se arate că pentru orice matrice $A\in M_2(\mathbb{R})$ este adevărată egalitatea $A^2-tr(A)\cdot A+(\det A)\cdot I_2=O_2$.

(4 p.) c) Să se găsească o matrice $X\in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $\det(X)=0$ şi $tr(X)=5$.

(2 p.) d) Să se arate că dacă $Y\in M_2(\mathbb{R})$, $\det(Y)=0$ şi $tr(Y)=5$, atunci pentru orice *n* natural, $n\ge 2$ are loc egalitatea $X^n=5^{n-1}\cdot Y$.

(2 p.) e) Să se demonstreze că $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B), \forall A,B\in M_2(\mathbb{R})$.

(2 p.) f) Să se găsească două matrice $X, Y \in M_2(\mathbb{R}),\ X \neq Y,\ X, Y \neq O_2$ care verifică $X^2 = Y^2 = O_2$.

(2 p.) g) Să se arate că dacă $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ *şi* $X^2 = Y^2 = O_2$, atunci $tr(X+Y) = 0$.

SUBIECTUL IV (20 p)

Se consideră funcţiile $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ f(x) = \text{tg}\,x + \sin x - 2x$ şi $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ g(x) = \cos x + \ln(\cos x) + x^2$.

(4 p.) a) Să se calculeze $f(0)$ şi $f'(0)$.

(4 p.) b) Să se arate că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,\ \forall a, b \in (0, \infty)$.

(2 p.) c) Să se arate că $\cos x \geq \cos^2 x,\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(2 p.) d) Să se arate ca funcţia f este crescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(2 p.) e) Să se arate că $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(2 p.) f) Să se arate că $f(x) + g'(x) = 0,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(2 p.) g) Să se arate că funcţia g este descrescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(2 p.) h) Să se arate că $\int_0^1 \left(\cos x + \ln(\cos x)\right) dx \leq \frac{2}{3}$.

(Varianta 19, M2, Ştiinţele naturii, 2007)

Testul 9 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.

► **La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.**

SUBIECTUL I (20 p)

(4 p.) a) Să se calculeze aria triunghiului cu lungimile laturilor 12, 5 şi 13.
(4 p.) b) Să se calculeze distanţa de la punctul $D(1, -2)$ la punctul $E(0, 1)$.
(4 p.) c) Să se calculeze modulul numărului complex $z = -1 - 4i$.
(4 p.) d) Să se arate că punctele $L(1,2),\ M(0,-1)$ şi $N(2,5)$ sunt coliniare.
(2 p.) e) Să se calculeze perimetrul pătratului cu aria 100.
(2 p.) f) Să se calculeze $\cos x$, dacă $\sin x = \frac{1}{4},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL II (30 p)

1.

(3 p.) a) Să se determine restul împărţirii polinomului $f = 2X^3 - 4X^2 + 5X - 1$ la polinomul $X+1$.

(3 p.) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ să verifice relaţia $2^x \leq 10$.

(3 p.) c) Dacă funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 2$ are inversa $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, să se calculeze $g(0)$.

(3 p.) **d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale pozitive ecuația** $\log_2(3x+5)=3$ **.**

(3 p.) **e) Să se calculeze suma cuburilor rădăcinilor polinomului** $f = X^3 + X$ **.**

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+x-2007$ **.**

(3 p.) **a) Să se calculeze** $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$ **.**

(3 p.) **b) Să se arate că *f* este strict crescătoare pe** $\mathbb{R}$ **.**

(3 p.) **c) Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$

(3 p.) **d) Să se rezolve în** $\mathbb{R}$ **, ecuația** $f'(x)=4$ **.**

(3 p.) **e) Să se calculeze** $\int\limits_0^1 f(x)dx$ **.**

SUBIECTUL III (20 p)

(4 p.) **a) Să se verifice identitatea**

$$xy-\frac{1}{xy}-\left(x+y-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=\frac{(x-1)(y-1)(xy-1)}{xy},\ \forall x,y\in\mathbb{R}^*.$$

(4 p.) **b) Să se rezolve în** $\mathbb{R}^*$ **ecuația** $x^3-\dfrac{1}{x^3}=x+x^2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ **.**

(4 p.) **c) Să se arate că** $ab-\dfrac{1}{ab}\geq a+b-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b},\ \forall a,b\in[1,\infty)$ **.**

(2 p.) **d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că** $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall a_1,a_2,...,a_n\in[1,\infty)$**,**

avem $a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n-\dfrac{1}{a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n}\geq a_1+a_2+...+a_n-\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}-...-\dfrac{1}{a_n}$ **.**

(2 p.) **e) Să se arate că, dacă** $a,b,c\in[0,\infty)$**, atunci**

$$2^{a+b+c}-2^{-a-b-c}\geq 2^a+2^b+2^c-2^{-a}-2^{-b}-2^{-c}.$$

(2 p.) **f) Să se arate că, dacă** $x>y>0$**, atunci** $x-\dfrac{1}{x}>y-\dfrac{1}{y}$ **.**

(2 p.) **g) Să se arate că, dacă** $a\in[1,\infty)$**, atunci** $a^n-\dfrac{1}{a^n}\geq n\left(a-\dfrac{1}{a}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ **.**

SUBIECTUL IV (20 p)

Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **, definite prin** $f_0(x)=1$ **și** $f_{n+1}(x)=\int\limits_0^x f_n(t)dt,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}$ **.**

(4 p.) **a) Să se arate că** $f_1(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ **.**

(4 p.) **b) Să se calculeze** $f_2(x),\ x\in\mathbb{R}$

(4 p.) **c) Să se rezolve în** $\mathbb{R}$ **ecuația** $f_1(x)+f_2(x)=0$ **.**

(2 p.) **d) Să se arate că** $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n!},\ \forall x\in\mathbb{R}$ **.**

(2 p.) **e) Să se arate că** $f'_{n+1}(x)=f_n(x),\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}$ **.**

(2 p.) f) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f_3(x)}{f_2(x)}$.

(2 p.) g) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1)$.

(Varianta 25, M2, Ştiinţele naturii, 2007)

Testul 10 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.

► **La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.**

SUBIECTUL I (20 p)

(4 p.) a) Să se determine numerele reale a şi b dacă dreptele $d_1 : y = ax + b$ şi $d_2 : y = bx - a$ trec prin punctul $A(1,1)$.

(4 p.) b) Să se calculeze perimetrul unui triunghi echilateral dacă aria sa este egală cu 3.

(4 p.) c) Să se dea exemplu de un număr complex nereal care are modulul egal cu 3.

(4 p.) d) Să se găsească un număr natural n pentru care $i^n + i^{n+1} = 1 - i$, unde $i^2 = -1$.

(2 p.) e) Să se dea un exemplu de două numere reale x şi y pentru care $\cos(x + y) = 0$.

(2 p.) f) Să se găsească două elemente ale mulţimii $M = \{x \in \mathbb{R} | \sin x = \sin 2x\}$.

SUBIECTUL II (30 p)

1.

(3 p.) a) Să se demonstreze egalitatea $C_{x+1}^{y+1} = \frac{x+1}{y+1} C_x^y, \forall x, y \in \mathbb{N}^*, x \geq y$.

(3 p.) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbb{Z}_8$ să verifice relaţia $\hat{x}^2 = \hat{1}$.

(3 p.) c) Dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 10$, are inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, să se calculeze $g(11)$.

(3 p.) d) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x = 8^x$.

(3 p.) e) Să se calculeze produsul rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X^2 - 2X + 1$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^8 + 1$.

(3 p.) a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.

(3 p.) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3 p.) c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(3 p.) d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

(3 p.) e) Să se calculeze $\int_0^1 (e^x + \sin x)dx$.

SUBIECTUL III (20 p)

În mulţimea $M_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G = \{X \in M_2(\mathbb{C}) | AX = XA\}$.

(4 p.) a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4 p.) b) Să se verifice că $I_2 \in G$ şi $A \in G$.

(4 p.) c) Să se calculeze matricea A^2.

(2 p.) d) Să se arate că $XA^2 = A^2X, \forall X \in M_2(\mathbb{C})$.

(2 p.) e) Să se găsească o matrice $B \in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $AB \neq BA$.

(2 p.) f) Să se arate că, dacă $a,b \in \mathbb{C}$, atunci $aI_2 + bA \in G$.

(2 p.) g) Să se arate că, dacă $X \in G$, atunci există $x, y \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = xI_2 + yA$.

SUBIECTUL IV (20 p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = e^x\left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right), \forall n \in \mathbb{N}$.

(4 p.) a) Să se calculeze $f_1'(x), x \in \mathbb{R}$.

(4 p.) b) Să se verifice că $f_n'(x) = f_{n+1}(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$.

(4 p.) c) Să se calculeze $f_n(0)$.

(2 p.) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că
$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + ... + (n-1)\cdot n = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

(2 p.) e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_1(0) + f_2(0) + ... + f_n(0)}{n^3}$.

(2 p.) f) Să se calculeze $\int_0^1 f_0(x)dx$.

(2 p.) g) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.

(Varianta 51, M2, Ştiințele naturii, 2007)

Testul 11 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.

► La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.

SUBIECTUL I (20 p)

(4 p.) a) Să se determine partea reală a numărului complex $z = i^{2006} + i^{2007}$.

(4 p.) b) Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-2,-2), B(2,0), C(0,4)$.

(4 p.) c) Să se calculeze $\cos^2(75^0) + \cos^2(15^0)$.

(4 p.) d) Să se determine în câte puncte intersectează dreapta de ecuație $y = 1$ cercul cu centrul în $O(0,0)$ şi de rază 1.

(2 p.) e) Să se determine câte puncte cu ambele coordonate întregi aparțin cercului cu centrul în $O(0,0)$ şi de rază 2.

(2 p.) f) Să se dea un exemplu de ecuație a unei drepte paralele cu dreapta $3x - y - 2 = 0$.

SUBIECTUL II (30 p)

1.

(3 p.) **a) Să se determine cel mai mare dintre numerele $a=\sqrt{2}$ şi $b=\sqrt[3]{3}$.**

(3 p.) **b) Să se calculeze câte numere naturale de două cifre scrise în baza 10 nu conțin cifrele 2 şi 3.**

(3 p.) **c) Să se determine câte numere întregi *c* verifică inegalitățile $2<\log_2 c<3$.**

(3 p.) **d) Să se determine numerele întregi *d* care verifică egalitatea $\left[\frac{2d}{3}\right]=2$, unde [*x*] reprezintă partea întreagă a numărului real *x*.**

(3 p.) **e) Să se dea un exemplu de polinom de gradul al treilea cu coeficienți întregi pentru care produsul rădăcinilor sale este 2.**

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2x}{x^2+3}$.

(3 p.) **a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.**

(3 p.) **b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției *f*.**

(3 p.) **c) Să se determine cel mai mare dintre numerele $a=f\left(\sqrt{3}\right)$ şi $b=f(2)$.**

(3 p.) **d) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.**

(3 p.) **e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.**

SUBIECTUL III (20 p)

În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi submulțimea $G=\left\{X\in M(\mathbb{R})\,\middle|\,A\cdot X=X\cdot A\right\}$.

(4 p.) **a) Să se calculeze A^2 şi A^3.**

(4 p.) **b) Să se arate că $\det\left(A^n\right)\neq 0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.**

(4 p.) **c) Să se determine rangul matricei *A*.**

(2 p.) **d) Să se arate că dacă $X\in G$, există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ b & a\end{pmatrix}$.**

(2 p.) **e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\begin{pmatrix}a & 0\\ b & a\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n & 0\\ nba^{n-1} & a^n\end{pmatrix},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.**

(2 p.) **f) Să se arate că dacă $X\in M_2(\mathbb{R})$ şi $X^n=A,\ n\in\mathbb{N}^*$, atunci $X\in G$.**

(2 p.) **g) Să se rezolve ecuația $X^{2007}=A$ în $M_2(\mathbb{R})$.**

SUBIECTUL IV (20 p)

Se consideră funcțiile $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=\ln x,\ g(x)=\frac{2x-2}{x+1}$.

(4 p.) **a) Să se calculeze $f'(1)$ şi $g'(1)$.**

(4 p.) **b) Să se arate că $f'(x)\geq g'(x),\ \forall x\in(0,\infty)$.**

(4 p.) **c) Să se rezolve inecuația $f(x)\geq g(x),\ x\in[1,\infty)$.**

(2 p.) d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

(2 p.) e) Să se calculeze $\int\limits_1^2 f(x)dx$.

(2 p.) f) Să se arate că $\int\limits_1^2 f(x)dx \geq \int\limits_1^2 g(x)dx$.

(2 p.) g) Să se arate că $4 \cdot e^3 < 81$.

(Varianta 64, M2, Ştiinţele naturii, 2007)

Testul 12 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.

► La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.

SUBIECTUL I (20 p)

În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ şi $B(3,4)$.

(4 p.) a) Să se verifice că $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

(4 p.) b) Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$.

(4 p.) c) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

(4 p.) d) Să se scrie ecuaţia mediatoarei segmentului $[AB]$.

(2 p.) e) Să se scrie ecuaţia cercului de diametru $[AB]$.

(2 p.) 1) Să se scrie ecuaţia tangentei la cercul de diametru $[AB]$ în punctul A.

SUBIECTUL II (30 p)

1.

(3 p.) a) Să se determine soluţiile ecuaţiei $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$.

(3 p.) b) Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie „$\circ$”prin $x \circ y = 2xy + x + y + 1$. Să se arate că $\exists x, y \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ astfel încât $x \circ y \in \mathbb{Z}$.

(3 p.) c) Să se rezolve ecuaţia $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} - 6 = 0$.

(3 p.) d) Să se calculeze suma $2 + 4 + 6 + ... + 24 + 26$.

(3 p.) e) Să se determine soluţiile ecuaţiei $\hat{2} \cdot \hat{x} = \hat{4}$ în inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x - 4$.

(3 p.) a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.

(3 p.) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

(3 p.) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(2n)}{f(n)}$.

(3 p.) d) Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei f.

(3 p.) e) Să se calculeze $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

SUBIECTUL III

Se consideră $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^x\end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}\right\}$ **și** $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(4 p.) **a) Să se arate că** $I_3 \in G$

(4 p.) **b) Să se calculeze** $\det A(0)$.

(4 p.) **c) Să se arate că** $A(2)$ **este inversabilă și să se calculeze inversa acesteia.**

(2 p.) **d) Să se arate că** $A(x)\cdot A(y)=A(x+y),\ \forall A(x),A(y)\in G$.

(2 p.) **e) Să se arate că** $\forall A(x)\in G,\ \exists A(x')\in G$ **astfel încât** $A(x)\cdot A(x')=I_3$.

(2 p.) **f) Să se calculeze** $A(1)\cdot A(2)\cdot \ldots\cdot A(2007)$.

(2 p.) **g) Să se arate că** $A^n(x)=A(nx),\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 1, \forall A(x)\in G$.

SUBIECTUL IV (20 p)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x}$.

(4 p.) **a) Să se calculeze** $f'(x),\ x\in\mathbb{R}^*$.

(4 p.) **b) Să se calculeze** $\int_1^e f(x)dx$.

(4 p.) **c) Să se arate că funcția** ***f*** **este strict crescătoare pe** $[2,+\infty)$.

(2 p.) **d) Să se determine punctele de extrem local ale funcției** ***f*****.**

(2 p.) **e) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că**

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 1.$$

(2 p.) **f) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul** $A(1,0)$.

(2 p.) **g) Să se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f'\left(\frac{1}{1}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots+f'\left(\frac{1}{n}\right)}{n^3}$.

(Varianta 76, M2, Științele naturii, 2007)

Testul 13 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.

► La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.

SUBIECTUL I (20 p)

În reperul cartezian xOy **se consideră punctele** $A(2,2), B(2,0), C(0,4)$.

(4 p.) **a) Să se calculeze distanța de la punctul** ***C*** **la dreapta** ***AB*** **.**

(4 p.) **b) Să se determine ecuația medianei din** ***A*** **a triunghiului** ***ABC.***

(4 p.) **c) Să se calculeze** $\cos(\widehat{AOB})$.

(4 p.) **d) Să se calculeze** $\cos 2x$ **, dacă** $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(2 p.) e) Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

(2 p.) 1) Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$, folosind eventual egalitatea $\sin 2t = 2\sin t\cdot\cos t$, adevărată pentru orice $t\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30 p)

1.

(3 p.) a) Să se determine a_6 dacă în progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_2 = 5$ și $a_5 = 14$.

(3 p.) b) Să se determine toate numerele întregi m care verifică relația $|2m-1|\leq 4$

(3 p.) c) Să se determine câte polinoame de gradul al doilea au toți coeficienții în mulțimea {0, 3, 6, 9}.

(3 p.) d) Să se calculeze probabilitatea ca un element x al mulțimii {0, 3, 6 ,9} să fie soluție a ecuației $\sqrt{x-2} = 4 - x$.

(3 p.) e) Să se determine care dintre mulțimile următoare sunt părți stabile ale mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu operația de înmulțire a numerelor reale: $A = \{2n+1 | n\in\mathbb{Z}\}$ sau $B = [0,2]$.

2. Se consideră funcția $f:\left(\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{4x^2-1}$.

(3 p.) a) Să se verifice că $f(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}\right),\ \forall x > \frac{1}{2}$.

(3 p.) b) Să se arate că $f(1) + f(2) + ... + f(n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

(3 p.) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(1) + f(2) + ... + f(n)\right]$.

(3 p.) d) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$.

(3 p.) e) Să se calculeze $\int_1^{\sqrt{2}} 8x\cdot f(x)dx$.

SUBIECTUL III

2. Se ştie că pentru orice număr real x are loc egalitatea $x = [x] + \{x\}$ (adică suma dintre partea sa întreagă şi partea sa fracționară). Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție „$\wedge$" prin $a\wedge b = a + [b],\forall a,b\in\mathbb{R}$

(4 p.) a) Să se arate că $[x+k] = [x] + k,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall k\in\mathbb{Z}$.

(4 p.) b) Să se calculeze $A = \left(\frac{2}{3}\wedge\frac{3}{2}\right)\wedge\frac{4}{3}$ și $B = \frac{2}{3}\wedge\left(\frac{3}{4}\wedge\frac{4}{3}\right)$.

(4 p.) c) Să se arate că legea „$\wedge$" este asociativă.

(2 p.) d) Să se arate că legea „$\wedge$" nu este comutativă.

(2 p.) e) Să se arate că nu există $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $a\wedge e = e\wedge a = a,\ \forall a\in\mathbb{R}$.

(2 p.) f) Să se determine numerele $c\in\mathbb{R}$ pentru care $(c\wedge c)\wedge c = c$.

(2 p.) g) Să se determine mulțimile finite $H\subset\mathbb{Z}$ pe care „$\wedge$" este lege de compoziție.

SUBIECTUL IV (20 p)

Se consideră funcțiile $f, g:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\ln x,\ g(x)=\cos 2\pi x$.

(4 p.) **a) Să se calculeze $f'(x)$ şi $g'(x),\ x\in(0,\infty)$.**

(4 p.) **b) Să se arate că funcția *f* este convexă pe $(0,\infty)$.**

(4 p.) **c) Să se arate că $f(x)\ge 1,\ \forall x\in(0,\infty)$.**

(2 p.) **d) Să se rezolve ecuația $f(x)=g(x),\ x\in(0,\infty)$.**

(2 p.) **e) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției *f,* axa *Ox* şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=e$.**

(2 p.) **f) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-g(x)}{x^2}$.**

(2 p.) **g) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} g(n)$.**

(Varianta 85, M2, Ştiințele naturii, 2007)

Testul 14 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.

► La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.

SUBIECTUL I (20 p)

Se consideră mulțimea *M* formată din punctele $A(1,1), B(1,-1), C(-1,2)$ şi $O(0,0)$.

(4 p.) **a) Să se calculeze lungimea segmentului [*OC*].**
(4 p.) **b) Să se calculeze aria triunghiului *ABC.***

(4 p.) **c) Să se determine raza cercului de ecuație $x^2+y^2=2$.**

(4 p.) **d) Să se calculeze probabilitatea ca alegând un punct din mulțimea *M* acesta să aparțină cercului de ecuație $x^2+y^2=2$.**

(2 p.) **e) Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$.**

(2 p.) **f) Să se calculeze partea reală a numărului complex $(1+2i)^2$.**

SUBIECTUL II (30 p)

1.

(3 p.) **a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{x^2+x}=4$.**
(3 p.) **b) Să se calculeze a_7, dacă în progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge 1}$ se cunosc $a_1=1$ şi $a_3=5$.**

(3 p.) **c) Să se calculeze $C_7^5-C_7^2$.**

(3 p.) **d) Să se arate că numărul $a=\log_2\dfrac{1}{4}+\log_2 8$ este natural.**

(3 p.) **e) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $X^4-2X^3+3X^2-4X+a$ la polinomul $X-1$ să fie 2.**

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to E,\ f(x)=\dfrac{x}{e^x},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

(3 p.) **a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.**
(3 p.) **b) Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției *f.***
(3 p.) **c) Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției *f.***

(3 p.) d) Să se calculeze $\int_{0}^{1} f(-x)dx$.

(3 p.) e) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

SUBIECTUL III (20 p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $B=A-I_3$.

(4 p.) a) Să se demonstreze că $\det(A)=\det(B)$.

(4 p.) b) Să se calculeze rangurile matricelor A şi B.

(4 p.) c) Să se calculeze B^2 şi B^3.

(2 p.) d) Să se demonstreze, folosind metoda inducției matematice, că $A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

(2 p.) e) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=I_3+a\cdot B+b\cdot B^2$.

(2 p.) f) Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, există $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $A^n=I_3+B+B^2+...+B^k$.

(2 p.) g) Se consideră $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$. Să se demonstreze că *nu există* $p\in\mathbb{N}$ astfel încât $A+A^2+...+A^n=I_3+B+B^2+...+B^p$.

SUBIECTUL IV (20 p)

Se consideră funcția $f_k:\left(-\frac{e}{k},\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f_k(x)=\ln(e+kx)$, unde $k\in\mathbb{N}^*$.

(4 p.) a) Să se calculeze $f_k'(x)$, $x\in\left(-\frac{e}{k},\infty\right)$.

(4p) b) Să se demonstreze că $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x)=1, \forall k\in\mathbb{N}^*$.

(4 p.) c) Să se demonstreze că $1-ab=1-a+a(1-b), \forall a,b\in\mathbb{R}$.

(2 p.) d) Să se demonstreze că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_k(x)-1}{x}=\frac{k}{e}, \forall k\in\mathbb{N}^*$.

(2 p.) e) Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f_1(x)f_2(x)}{x}=-\frac{3}{e}$.

(2 p.) f) Să se demonstreze că dacă $n\in\mathbb{N}^*$ şi $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$, atunci $1-a_1a_2...a_n=1-a_1+a_1(1-a_2)+a_1a_2(1-a_3)+...+a_1a_2...a_n(1-a_n)$.

(2 p.) g) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\ln(e+x)\ln(e+2x)...\ln(e+nx)}{x}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

(Varianta 83, M2, Ştiințele naturii, 2007)

Testul 15 **(10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.**
► La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.

SUBIECTUL I (20 p)

(4 p.) a) Să se calculeze conjugatul numărului complex $2-5i$ **.**
(4 p.) b) Să se calculeze lungimea segmentului cu extremitățile în punctele $A(1,5)$ **şi** $C(5,1)$**.**

(4 p.) **c) Să se determine raza cercului de ecuație** $x^2+y^2-25=0$
(4 p.) **d) Să se determine panta dreptei** ***AC,*** **unde** $A(1,5)$ **şi** $C(5,1)$**.**

(2 p.) **e) Să se calculeze** $\sin x$ **dacă** $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ***şi*** $\cos x=\frac{1}{2}$.

(2 p.) **f) Să se determine** $a,b\in\mathbb{R}$ **, astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe** $\frac{11+i}{1-11i}=a+bi$ **.**

SUBIECTUL II (30 p)

1.

(3 p.) **a) Să se calculeze determinantul** $\begin{vmatrix}4 & 2\\ -3 & 1\end{vmatrix}$.

(3 p.) **b) Să se calculeze rangul matricei** $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

(3 p.) **c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația** $\log_3 x=-2$**.**

(3 p.) **d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația** $9^x-3=0$ **.**
(3 p.) **e) Să se calculeze probabilitatea ca un element** $n\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$**, să verifice relația** $n^3<n+6$ **.**

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x+2x+1$ **.**
(3 p.) **a) Să se calculeze** $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$ **.**

(3 p.) **b) Să se calculeze** $\int_0^1 f(x)dx$ **.**

(3 p.) **c) Să se calculeze** $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ **.**

(3 p.) **d) Să se arate că funcția *f* este strict crescătoare pe** $\mathbb{R}$ **.**

(3 p.) **e) Să se calculeze** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{5n^2-2}$ **.**

SUBIECTUL III (20 p)

Se consideră polinoamele $f=X^2+X+1$ **şi** $g=X^2+X$ **.**
(4 p.) **a) Să se determine rădăcinile polinomului *f*.**

(4 p.) **b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația** $x^2+x<0$ **.**

(4 p.) **c) Să se verifice identitatea** $\frac{1}{g(n)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ **.**

(2 p.) **d) Să se calculeze suma** $S=\frac{1}{g(1)}+\frac{1}{g(2)}+...+\frac{1}{g(2007)}$ **.**

(2 p.) e) Să se verifice că $f=\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

(2 p.) f) Să se arate că $g\neq s^2+t^2$, pentru orice două polinoame $s,t\in\mathbb{R}[X]$,

(2 p.) g) Să se găsească două polinoame $u,v\in\mathbb{C}[X]$, astfel încât $g=u^2+v^2$.

SUBIECTUL IV (20 p)

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{2007}+1$.

(4 p.) a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

(4 p.) b) Să se arate că, dacă $x\in[1,2]$, atunci $(x-1)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\geq 0$.

(4 p.) c) Utilizând eventual inegalitatea de la punctul b), să se arate că, dacă $x\in[1.2]$, atunci $\frac{1}{x}+\frac{x}{2}\leq\frac{3}{2}$.

(2 p.) d) Să se verifice că $\frac{1}{f(x)}+\frac{f(x)}{2}\leq\frac{3}{2},\ \forall x\in[0,1]$.

(2 p.) e) Să se arate că, dacă $u,v\in\mathbb{R}$, atunci $(u+v)^2\geq 4uv$.

(2 p.) f) Integrând inegalitatea de la punctul d), să se arate că $\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx\leq\frac{3}{2}$.

(2 p.) g) Utilizând inegalitatea de la punctul e), să se arate că $\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\cdot\left(\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\right)\leq\frac{9}{8}$.

(Varianta 96, M2, Științele naturii, 2007)

2. TESTE PENTRU PREGĂTIREA EXAMENULUI DE ADMITERE ÎN FACULTATE

Testul 1

♦ Analiză matematică
Subiectul 1

Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

a) Să se determine domeniul maxim de definiție.

b) Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)$.

c) Aflați asimptotele la graficul funcției *f*.

d) Calculați $f'(x)$. Studiați monotonia funcției *f* și aflați punctele de extrem.

e) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul de abscisă $x=1$.

Subiectul 2

a) Să se calculeze integralele nedefinite $\int xe^x dx; \int \frac{dx}{x^2+2x}$.

b) Determinați valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} xe^x, x \leq 1 \\ \frac{a}{x^2+2x}, x>1 \end{cases}$

este continuă pe $\mathbb{R}$.

c) Pentru $a=3e$ calculați $\int_0^2 f(x)dx$.

d) Determinați pe $\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f.

♦ **Algebră**
Subiectul 1

Se consideră polinoamele $f = X^3 + aX^2 + bX + 6,\ a,b \in \mathbb{R}$ și $g = X^2 - X - 2$.

a) Rezolvați ecuația $g(x) = 0$.

b) Determinați $a,b \in \mathbb{R}$ astfel încât f se divide prin g.

c) Pentru $a=-4$ și $b=1$ rezolvați inecuația $f(x) \geq 0$.

d) Pentru $a=-4$ și $b=1$ calculați suma $S_n = f(1)+f(2)+...+f(n), n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 2

a) Calculați determinantul $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix}$.

b) Se consideră operația „$*$“ definită prin $a*b = D+1, a,b>1$. Să se arate că $\forall a,b>1$ avem $a*b>1$. Determinați $e>1$ pentru care $e*a = a*e = a, \forall a>1$.

c) Pentru ce valori ale parametrilor $a,b \in \mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+bz=0 \end{cases}$ admite și soluții nebanale.

♦ **Geometrie analitică**
Subiectul 1

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(6,-2)$ și $B(-4,10)$.

a) Scrieți ecuația dreptei AB.

b) Calculați lungimea segmentului $[AB]$.

c) Aflați mijlocul segmentului $[AB]$. Scrieți mediatoarea segmentului $[AB]$.

d) Determinați valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care dreapta de ecuație $ax+6y+21=0$ este perpendiculară pe dreapta AB.

Subiectul 2

Se consideră cercul de ecuație $(x+1)^2 + (y-8)^2 = 160$.

a) Aflați coordonatele centrului și raza acestui cerc.

b) Se consideră punctul $A(-13,4)$. Să se stabilească poziția punctului A față de cerc. Scrieți ecuația tangentei la cerc în punctul A.

c) Arătați că dreapta: $x-3y+25=0$ intersectează cercul în două puncte, ale căror coordonate se cer. Sunt aceste puncte diametral opuse pe cercul dat?
(Admitere, Univ., Facultatea de Ştiințe, Baia Mare, 2004)

Testul 2

1. Fie ecuația $x^2+2(m-1)x+8(m^2-1)=0, m\in\mathbb{R}$. Pentru ce valori ale lui m suma pătratelor rădăcinilor are valoarea maximă.
A) $m=\frac{1}{3}$; B) $m=-\frac{1}{3}$; C) $m=1$; D) $m=-\frac{2}{3}$; E) $m\in\varnothing$.

2. Fie k rangul termenului independent de x din dezvoltarea binomului $\left(x+\frac{1}{x^4}\right)^{2005}$, atunci valoarea lui k este:
A) $k=200$; B) $k=-10$; C) $k=0$; D) $k=402$; E) $k=404$.

3. Să se rezolve ecuația $\frac{\log_2(2x-5)}{\log_2(x^2-8)}=\frac{1}{2}$.

A) $x_1=3$; B) $x_1=-3$; C) $x_1=\frac{11}{3}$; D) $x_1=3, x_2=\frac{11}{3}$; E) $x_1=0$.

4. Fie polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X], f=X+X^3+X^9+X^{27}+X^{81}+X^{2005}, g=X^2-1$. Să se determine restul împărțirii polinomului f prin polinomul g.
A) $6X$; B) $5X-1$; C) $-6X$; D) 0; E) $-5X+1$

5. Să se determine parametrii reali α,β astfel încât sistemul $\begin{cases}4x+3y+z=5\\x+5y-3z=4\\\alpha x+\beta y-2z=\alpha+\beta\end{cases}$ să fie compatibil nedeterminat.
A) $\alpha=-\frac{3}{2},\beta=1$; B) $\alpha=1,\beta\in\mathbb{R}$; C) $\alpha=\frac{3}{2},\beta=0$; D) $\alpha=100,\beta=10$; E) $\alpha=0,\beta=5$.

6. Se defineşte pe $\mathbb{C}$ legea „$*$" $z_1*z_2=z_1z_2+i(z_1+z_2)-1-i$. Să se determine elementul neutru e.
A) $e=i$; B) $e=1$; C) $e=1+i$; D) $e=-i$; E) $e=1-i$.

7. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}-2\sqrt{n^2-n+1}}{n}$. A) 1; B) –1 C) 3; D) $\frac{1}{2}$; E) $\frac{3}{2}$.

8. Să se determine parametrii reali a şi b astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+a, x\le 2\\ax+b, x>2\end{cases}$ să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$. A) $a=1;b=-1$; B) $a=5;b=-5$; C) $a=b=2$; D) $a=4, b=0$; E) $a=0,b=3$.

9. Să se calculeze $I=\int_{-2}^{3}\left|x-|x-2|\right|dx$. A) $I=4$; B) $I=\frac{3}{2}$; C) $I=12$; D) $I=\frac{7}{2}$; E) $I=0$.

10. Să se calculeze $F(2)$ ştiind că $F(x)=\int\sqrt{|1-x|}dx$ şi $F(0)=0$. A) $\frac{4}{3}$; B) 0; C) $\frac{2}{3}$; D) –1; E) 4.

(Admitere, Univ., Matematică şi economie, Braşov, 2005)

Testul 3

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f()x=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Să se calculeze $f'(1)$. a) $\dfrac{1}{2}$; b) $-\dfrac{1}{4}$; c) 0; d) $\dfrac{1}{4}$; e) $-\dfrac{1}{2}$; f) 1.

2. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^4+3x^3+mx^2+nx-10=0$ să admită soluția $x_1=i$.
a) $m=-10, n=3$; b) $m=1, n=-1$; c) $m=-9, n=3$; d) $m=n=0$; e) $m=-3, n=10$;
f) $m=3, n=-10$.

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-2x+m, & x\le 1\\ e^x-e, & x>1\end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$. a) $m=3$; b) $m=1$; c) $m=4$; d) $m=0$; e) nu există; f) $m=\dfrac{3}{2}$.

4. Să se rezolve inecuația $\sqrt{x}<1$. a) $[0,1)$; b) $(0,1)$; c) $[0,1]$; d) $(-1,1)$; e) nu are soluții; f) $[0,\infty)$.

5. Dacă (a, b) este o soluție a sistemului de ecuații $\begin{cases}x+y=2\\ xy=1\end{cases}$, atunci: a) $a^2+b^2=1$; b) $a^2+b^2=2$;
c) $a^2+b^2<0$; d) $a\ne b$; e) $a^2b^2=2$; f) $a^2+b^2=3$.

6. Să se calculeze termenul al zecelea al progresiei aritmetice cu primul termen $a_1=5$ și rația $r=2$. a) 10; b) 25; c) 23; d) 20; e) 30; f) 18.

7. Să se calculeze $\int_0^1 \dfrac{x^2}{x^3+1}dx$. a) $2\ln 2$; b) $\dfrac{\ln 3}{4}$; c) $\dfrac{\ln 3}{2}$; d) $3\ln 2$; e) $\ln 2$; f) $\dfrac{\ln 2}{3}$.

8. Soluțiile ecuației $9^x-4\cdot 3^x+3=0$ sunt: a) $x_1=3$; b) $x_1=0$; $x_2=1$; c) nu există; d) $x_1=0, x_2=3$;
e) $x_1=1, x_2=3$; f) $x_1=-1$; $x_2=-3$.

9. Expresia $E=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, are valoarea: a) $3\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{3}$; c) 2; d) $2\sqrt{2}$; e) $2\sqrt{3}$; f) 3.

10. Fie ecuația $x^2-ax+4=0$, unde $a\in\mathbb{R}$ este un parametru. Dacă soluțiile x_1 și $_2$ ale ecuației verifică egalitatea $x_1+x_2=5$, atunci: a) $x_1=x_2$; b) $a<0$; c) $x_1,x_2\notin\mathbb{R}$; d) $a=0$ e) $a=5$;
f) $a=4$.

11. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)$. a) $-\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) ∞; d) nu există; e) 1; f) –1.

12. Pe $\mathbb{R}$ definește legea de compoziție $x*y=xy+2ax+by$. Să se determine relația dintre a și b astfel încât legea de compoziție să fie comutativă. a) $a-b=2$; b) $a=2b$; c) nu există; d) $a=b$;
e) $a=\dfrac{b}{2}$; f) $a+b=1$.

13. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\int_x^{x+1}\dfrac{t^2}{\sqrt{t^4+t^2+1}}dt$. Decideți: a) *f* este impară; b) *f* are două puncte de extrem; c) graficul lui *f* admite o asimptotă oblică; d) graficul lui *f* admite o asimptotă orizontală; c) $f(0)=0$; f) *f* este convexă.

14. Să se calculeze limita șirului: $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k(k+1)}{2x^{k-1}}$, unde $|x|>1$.

a) $\dfrac{x^3}{(x-1)^3}$; b) $\dfrac{x}{x-1}$; c) $\dfrac{1}{x}$; d) $\dfrac{1}{x-1}$; e) $\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$; f) ∞.

15. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^2-1}{x}$. a) ∞ ; b) 2 ; c) 1; d) nu există; e) –2; f) $-\infty$.

16. Să se calculeze valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{4x^2+28x+85}+\sqrt{4x^2-28x+113}$.
a) $14\sqrt{2}$; b) 20; c) $12\sqrt{3}$; d) 19; e) $9\sqrt{5}$; f) $8\sqrt{6}$.

17. Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ x & -1 & x \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix}=0$. a) $x_1=0, x_2=3$; b) $x_1=-\dfrac{5}{2}$; c) $x_1=3$;
d) $x_1=0, x_2=4$; e) $x_1=0$; f) $x_1=1, x_2=4$.

18. Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=z^2+z+1$. Să se calculeze $f\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$.
a) –1; b) i; c) $1-i$; d) $1+i$; e) $\sqrt{3}$; f) 0.
(Admitere, Univ. Politehnică, Automatică, Electronică, Telecomunicații, Bucureşti, 2006)

Testul 4

1. Fie $a_n=\int_2^{n+1} x\left(\left[\log_{[x]} x\right]\right)dx, n\in\mathbb{N}^*, [\alpha]$ este partea întreagă a numărului real α. Dacă $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$, atunci: a) $L=\dfrac{1}{e}$; b) $L=\dfrac{1}{2}$; c) $L=0$; d) $L=1$; e) $L=e$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\min\left\{x^2+x, 4x-2\right\}$. Dacă $B=f_s'(1)+f_d'(1)+f_s'(2)+f_d'(2)$, atunci: a) $B=4$; b) $B=0$; c) $B=16$; d) $B=1$; e) $B=-2$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{2x^2-mx+1}$, m parametru real. Dacă $M=\left\{m\in\mathbb{Z}\,\middle|\, f \text{ este derivabilă pe } \mathbb{R}\right\}$ şi $S=\sum\limits_{m\in M}|m|$, atunci: a) S = 4; b) S = 7; c) S = 8; d) S = 5; e) S = 6.

4. Dacă $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{x^2+x}>2x-1\right\}$, atunci: a) $B=(-\infty,0]\cup\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{6},\infty\right)$;
b) $B=(-\infty,-1]\cup\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$; c) $B=(-\infty,-1]\cup\left[0,\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}\right)$; d) $B=\left(\dfrac{5-\sqrt{13}}{2},\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$;
e) $B=(-\infty,-1]\cup\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}\right)$.

5. Pentru $m,n\in\mathbb{R}^*$, fie „$\circ$“ lege de compoziție definită pe $\mathbb{R}$, astfel $x\circ y=xy+2mx+ny$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Fie (m_0,n_0) pentru care legea este comutativă, asociativă şi are element neutru. Dacă B este mulțimea tuturor elementelor care nu sunt simetrizabile în raport cu legea „$\circ$“ determinată de perechea (m_0,n_0) şi $S=\sum\limits_{x\in B}|x|$, atunci: a) S = 1; b) S = 4; c) S = 7; d) S = 3; e) S =0.

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care satisface relația $2f(x-1)+f(1-x)=3x, \forall x\in\mathbb{R}$ şi $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln f(x)$. Dacă c este punctul obținut prin aplicarea teoremei Lagrange funcției g pe $[0,1]$, atunci: a) $c=\frac{\ln 2}{2}$; b) $c=\frac{2-\ln 2}{3}$; c) $c=\frac{4+\ln 2}{6}$; d) $c=\frac{2+3\ln 2}{3\ln 3}$; e) $c=\frac{3-2\ln 2}{6\ln 2}$.

7. Fie r restul împărțirii polinomului $f=X^n+X^{n-1}+...+X+1$ la $X(X-1)^2$, unde $n\geq 3$. Dacă A este suma modulelor coeficienților polinomului r, atunci: a) $A=n^2-3$; b) $A=(n-1)^2$; c) $A=n+1$; d) $A=n^2+1$; e) $A=(n+1)^2$.

8. Dacă M este mulțimea soluțiilor ecuației $3^{|x+1|}-2\cdot\left|3^x-1\right|=3^x+2$, atunci: a) $M\in\varnothing$; b) $M=(3,\infty)$; c) $M=[0,\infty)$; d) $M\cap(-\infty,0)\neq\varnothing$; e) $M=(0,\infty)$.

9. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^x+x, a>1$. Dacă $\lambda=f^{-1}(a+1)$, atunci: a) $\lambda=1$; b) $\lambda=-2$; c) $\lambda=0$; d) $\lambda=-1$; e) $\lambda=2$.

10. În dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ raportul dintre coeficientul termenului al cincilea şi coeficientul termenului al treilea este $\frac{7}{2}$. Dacă T_6, termenul al şaselea al dezvoltării este de forma αx^{β}, atunci: a) $\beta=12$; b) $\beta=-\frac{4}{3}$; c) $\alpha=63$; d) $\alpha=128$; e) $\beta=-4$.

(Admitere, A.S.E., Management, Bucureşti, 2005)

Testul 5

1. Soluția ecuației $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}+1=0$ este: a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

2. Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2+1=3x-1$ este: a) $\{1,2\}$; b) $\{-1,-2\}$; c) $\{0,1\}$; d) $\{-1,2\}$; e) $\{1,-2\}$.

3. Derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+x$ este: a) e^x; b) e^{x-1}; c) e^x+1; d) 0; e) 1.

4. Integrala $\int\left(x^2-x\right)dx$ este: a) $x^3-x^2+\mathcal{C}$; b) $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\mathcal{C}$; c) $2x-1+\mathcal{C}$; d) e^x; e) $x^3+x^2+\mathcal{C}$.

5. Soluția ecuației $2\sin^2 x=3\cos x$ din intervalul $[0,\pi]$ este: a) 0; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{\pi}{3}$; e) $\frac{\pi}{2}$.

6. Fie $\lambda\in\mathbb{R}$ şi $P\in\mathbb{R}[X]$ un polinom cu proprietatea $P(1)+P(2)+...+P(n)=n^7+\lambda, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Valoarea lui $P(\lambda)$ este: a) –1; b) 0; c) 1; d) λ^7+7; e) $\lambda+7$.

7. Restul împărțirii polinomului $P=X^{20}+X^{10}+2X+1$ la polinomul $X(X-1)^2$ este: a) $30X^2+1$; b) $28X^2-24X+1$; c) 1; d) $4X^2-20X+1$; e) $X+1$.

8. **Mulțimea valorilor parametrului real m pentru care ecuația $5^{2x\log_{25}2}+7^{x\log_7 3}=mx+2$ are un număr minim de soluții, este: a) $\{\ln 6\}$; b) $(\ln 3,\infty)$; c) $(\ln 6,\infty)$; d) $\mathbb{R}-\{\ln 6\}$; e) $(-\infty,0]\cup\{\ln 6\}$.**

9. **Limita șirului $x_n=\left\{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n\right\}^{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n}$, $n\in\mathbb{N}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x, este: a) 0; b) ln2; c) ln3; d) $\frac{1}{e}$; e) e.**

10. **Fie x_1,x_2,x_3 soluțiile ecuației $2x^3-2x^2-2x=3$. Limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_1^n+x_2^n+x_3^n\right)$, este: a) 0; b) 1; c) $\frac{3}{2}$; d) ∞; e) nu există.**

11. **Mulțimea valorilor parametrului real m pentru care funcția $f:\mathbb{R}-\{1,2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{mx-1}{x^2-3x+2}$, nu are puncte de extrem local este: a) {0}; b) $\left[\frac{1}{2},1\right]$; c) $\left(\frac{1}{2},1\right)$; d) $(-\infty,0)$; e) $(1,\infty)$.**

12. **Aria mulțimii cuprinse între parabola de ecuație $y=x^2$ și tangentele la parabolă duse din punctul $A(1,0)$ este: a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{3}{4}$; e) 1.**

13. **Fie punctele $A(-2,-1)$, $B(-3,-1)$ și dreapta de ecuație (d): $x+2y-1=0$. Valoarea minimă a sumei $S(M)=MA+MB$ pentru $M\in(d)$ este: a) 5; b) $\sqrt{24}$; c) $2\left(\sqrt{2}+1\right)$; d) $\sqrt{26}$; e) 6.**

(Admitere, Univ. Tehnică, Cluj-Napoca, 2004)

Testul 6

Subiectul 1

1. **Să se calculeze $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+\sqrt{n}+1}{n+\sqrt[3]{n}+2}\right)^n$. a) $l=\infty$; b) $l=1$; c) $l=e$; d) $l=\sqrt[3]{e}$.**

2. **Limita $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{(4x+5)^5}$ are valoarea: a) $\frac{1}{12}$; b) $\frac{9}{128}$; c) $\frac{6}{35}$; d) $\frac{8}{17}$.**

3 **Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel ca funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-3x+m, & x\le 2\\ nx-2, & x>2\end{cases}$ să fie derivabilă.**

a) $m=n=2$; b) $m=2, n=1$; c) $m=1, n=2$; d) $m=-1, n=-2$.

Subiectul 2

1. **Funcției $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}a\ln(1+x), & x\in[0,1)\\ 2x^2+x+b, & x\in[1,2], a,b\in\mathbb{R}\end{cases}$ i se poate aplica teorema lui Rolle pentru: a) $a,b\in\varnothing$; b) $a=1, b=0$; c) $a=1, b=-5+\ln 2$; d) $a=\frac{1}{\ln 2}, b=-2$.**

2. Valorile reale ale lui a şi b pentru care funcţia $F(x)=e^{-x}\left(a\sin 7x+b\cos 7x\right)$ este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x}\sin 7x$ sunt:

a) $a=-\frac{1}{50}, b=-\frac{7}{50}$; b) $a=\frac{1}{50}, b=\frac{7}{50}$; c) $a=-\frac{7}{50}; b=\frac{7}{50}$; d) $a=\frac{1}{50}; b=-\frac{7}{50}$.

3. Dacă $I(a)=\int_1^2\frac{dx}{|x-a|+1}$ şi $L=\lim_{a\to\infty}I(a)$, atunci: a) L = 0; b) L nu există; c) L = 2; d) L = 1.

Subiectul 3

1. Să se rezolve ecuaţia: $\sqrt{x+2}=x\sqrt{2}+\sqrt{2-x}$. a) $x=2$; b) $x=0$; c) $x=\sqrt{3}$; d) $x=1$.

2. Să se rezolve inecuaţia $\lg^2 x-2\lg x-3\le 0$.

a) $x\in\left[\frac{1}{1000},10\right]$; b) $x\in\left[\frac{1}{10},1000\right]$; c) $x\in[-1,3]$; d) $x\in\left[10,10^3\right]$.

3 Care din următoarele şiruri este o progresie aritmetică?

a) $x_n=2^n$; b) $x_n=n^2$; c) $x_n=n+4$; d) $x_n=\frac{1}{n+1}$.

Subiectul 4

1. Ecuaţia $x^3+x+m=4x$ are o rădăcină dublă pentru: a) $m\in\{-2,1\}$; b) $m\in\{\pm 2\}$; c) $m\in[-2,2]$; d) $m\in(-2,2)$.

2. Dacă x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3-x+1=0$, atunci valoarea determinantului $D=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{vmatrix}$ este: a) 0; b) –2; c) 1; d) –1.

3. Fiind date matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & -2\\ 3 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$, AB este: a) I_4; b) nu există; c) $3I_4$; d) $\begin{pmatrix}9 & 3 & 4 & -5\\ 7 & 2 & 3 & -4\\ 2 & 1 & 1 & -1\\ 14 & 4 & 6 & -8\end{pmatrix}$.

Subiectul 5

1. Pentru ce valoare a parametrului real m, sistemul omogen $\begin{cases}mx+y+z+t=0\\ x+my+z+t=0\\ x+y+mz+t=0\\ x+y+z+mt=0\end{cases}$ este compatibil simplu nedeterminat?

a) $m\in\varnothing$; b) $m=1$; c) $m=-3$; d) $m=0$.

2. Fie $G=(2,\infty)$ şi legea $x\circ y=xy-2x-2y+6,\ x,y\in G$. Atunci $x\circ x\circ x\circ x$ este: a) $(x+2)^4$; b) $(x-2)^4+2$; c) $(x+2)^4-2$; d) $(x-2)^4$.

3. Ecuația $\hat{9}+\hat{4}x=\hat{5}$ are în $\mathbb{Z}_{12}$:

a) 5 rădăcini; b) 3 rădăcini; c) 4 rădăcini; d) 2 rădăcini.
(Admitere, Univ. Maritimă, Ingineri, Constanța, 2004)

Testul 7

1. Fie $A=\begin{pmatrix}2 & t & 3\\ t & -1 & t\\ 1 & 2 & m\end{pmatrix},\ t,m\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.
b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea A este inversabilă oricare ar fi $t\in\mathbb{R}$.
c) Pentru $m=0$ şi $t=1$ să se calculeze A^{-1} .
d) Pentru $t=1$ să se afle valorile lui m pentru care sistemul $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ admite şi soluții nenule.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-m\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{x+m}$, unde m este parametru real.

a) Să se determine m astfel ca funcția f să admită dreapta $x=-1$ ca asimptotă verticală.
b) Să se reprezinte grafic funcția f pentru $m=1$.
c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2dx}{x+1}$.

3. În plan, în reper cartezian, se dau punctele $A(3,1)$ şi $B(1,-3)$.

a) Să se determine punctul C astfel încât centrul de greutate al triunghiului ABC să fie situat pe axa Ox şi aria triunghiului ABC să fie egală cu 3.
b) Dacă C_1 şi C_2 sunt cele două puncte determinate anterior, să se arate că mijlocul D al segmentului $[C_1C_2]$ se găseşte pe dreapta AB.
c) Fie ABC un triunghi oarecare. Să se arate că $\sin^2 A\geq \sin 2B\cdot\sin 2C$.
(Admitere, Univ., Matematică-Informatică, Craiova, 2004)

Testul 8

1. Se consideră numerele reale şi strict pozitive $a_1,a_2,...,a_n$ care sunt în progresie aritmetică şi suma $S=\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}},\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$. Care din următoarele afirmații este adevărată?

A) $S=\dfrac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}{2}$; B) $S=\dfrac{n+1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$; C) $S=\dfrac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$; D) $S=\dfrac{a_1}{n\sqrt{a_n}}$; E) $S=\dfrac{2n}{\sqrt{a_1}}$.

2. Fie $b_1, b_2, ..., b_n$ o progresie geometrică. Notăm $S = \sum_{k=1}^{2n} b_k$ și $Q = \sum_{i=1}^{n} b_{2i}$. Dacă $S = 5Q$, atunci rația q este: A) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$; B) $\frac{1}{2}$; C) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; D) $\frac{1}{4}$; E) 2.

3. Soluțiile inecuației $3^x + 2^{x-1} - 2^{x+2} - 3^{x-1} + 2^{x-3} \geq 0$ sunt: A) $x \in \varnothing$; B) $x \in (-\infty, 4]$; C) $x \in (-\infty, 4)$; D) $x \in \mathbb{R}$; E) $x \in [4, \infty)$.

4. Ecuația $4\lg^4 x - 5\lg^2(x^2) + 16 = 0$ are soluțiile: A) $x \in \{1,4\}$; B) $x \in \{-1,-2,1,2\}$; C) $x \in \left\{\frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 10, 100\right\}$; D) $x \in \left\{-\frac{1}{100}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}\right\}$; E) $x \in \varnothing$.

5. Dacă $S = \sum_{k=1}^{n} k!k, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, atunci suma S este: A) $(n+1)! - 1$; B) $(n+1)! - 2$; C) $n! - 1$; D) $n! - 2$; E) $(n+1)!$.

6. Dacă în dezvoltarea $\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\log_a x} + x^{-1}\right)^n$ suma coeficienților binomiali de rang par este 64, iar al șaselea termen este $21a^{-4}$, atunci: A) $x \in \{a, a^4\}$; B) $x \in \{a^{-1}, a^4\}$; C) $x \in \{a^{-4}; a\}$; D) $x \in \{a, a^7\}$; E) $x \in \{a^{-7}, a\}$.

7. Dacă numărul complex z este soluție a ecuației $|z| + 4i = z + 2$, atunci $|z|$ este egal cu: A) 2; B) 5; C) 0; D)1; E) $\frac{1}{2}$.

8. Valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$, pentru care ecuația $x^2 - (4m + i)x + 2mi + m + 3 = 0$ are o rădăcină reală, sunt: A) $m \in \left\{-\frac{3}{4}, 1\right\}$; B) $m \in \left\{\frac{3}{4}, -1\right\}$; C) $m \in \left\{-\frac{3}{4}, -1\right\}$; D) $m \in \{1\}$; E) $m = 0$.

9. Determinați numărul soluțiilor $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ale sistemului de ecuații $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - y^2 = -8 \\ 4x^2 - xy + 2y^2 = 10 \end{cases}$.
A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

10. Dacă polinomul $p = 6X^4 + X^3 + aX^2 + bX - 1 \in \mathbb{C}[X]$ se divide prin $X^2 + 1$, atunci suma $a + b$ este egală cu: A) 0; B) 2; C) 4; D) 6; E) 8.

11. Sistemul de ecuații $(S): \begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ (\alpha+1)x_1 + (\beta+1)x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2\beta x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$, unde α și β sunt parametrii reali, este: A) compatibil determinat pentru $\alpha \neq 1$ și $\beta \neq 0$; B) compatibil determinat pentru $\alpha = 1$ și $\beta = 1$; C) compatibil nedeterminat pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; D) compatibil determinat pentru $\alpha = 1$ și $\beta = \frac{1}{2}$; E) incompatibil pentru $\beta \neq 0$.

12. Fie matricea $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&2&2\\3&b&3\end{pmatrix}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$ sunt parametri. Determinanții de ordin 2 și 3 sunt nuli (echivalent cu rangul (M) = 1) dacă suma $a+b$ este egală cu: A) 1; B) 3; C) 2; D) 0; E) 5.

13 Numărul soluțiilor ecuației $\left[\frac{2x+1}{3}\right]=\frac{4x+1}{5}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a, este: A) 6; B) 5; C) 1; D) 2; E) 3.

14. Dacă $M=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x+1}}=2\right\}$, atunci mulțimea M este: A) $[1,\infty)$; B) $\{1,2\}$; C) $[1,2]$; D) $\{3\}$; E) $\{1\}$.

15. Valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\frac{3x^2-mx+3}{x^2-x+1}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ sunt: A) $m\in(-6,6)$; B) $m\in(0,4)$; C) $m\in\{0,4\}$; D) $m\in[0,6)$; E) $m\in(0,4]$.

16. Dacă sistemul de ecuații $\begin{cases}x^2+y^2=z\\z=m+x+y\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$ este un parametru, are o singură soluție $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, atunci valoarea parametrului m și soluția unică corespunzătoare sunt: A) $m=-\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; B) $m=-\frac{1}{2},\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; C) $m=\frac{1}{2},\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; D) $m=-\frac{1}{2},\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$; E) $m=-1$, $(1,1,2)$.

17. Dacă $2^{2n}-2^n-240=0$, atunci termenul al doilea al dezvoltării binomiale $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ este: A) $T_2=4\sqrt{x}$; B) $T_2=-C_4^2\sqrt{x}$; C) $T_2=-4\sqrt{x}$; D) $T_2=-\frac{4}{\sqrt[3]{x}}$; E) $T_2=\frac{4}{\sqrt[3]{x}}$.

18. Coeficientul lui x^5 din dezvoltarea $\left(1+x+x^2\right)^4$ este: A) 19; B) 20; C) 5; D) 15; E) 16.

19. Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului $P=X^3+mX+1$ să verifice relația $(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2=-2$. A) $m=0$; B) $m=1$; C) $m=2$; D) $m=4$; E) $m=5$.

20. Dacă $\alpha=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, atunci α este: A) $10\sqrt{2}$; B) 14; C) $2\sqrt{2}$; D) $5\sqrt{2}$; E) 7.

(Admitere, Univ., Științe Economice, Galați, 2004)

Testul 9

1. Modulul numărului complex $z^2=\frac{1+ai}{1-ai}, a\in\mathbb{R}$ este: a) $|z|=\begin{cases}\left|\frac{1+a}{1-a}\right|, & a\neq 1\\1, & a=1\end{cases}$; b) $|z|=1+a^2$; c) $|z|=1+|a|$; d) $|z|=\frac{|1-a|}{1+a^2}$; e) $|z|=1$.

2. Să se rezolve inecuația: $\log_3 x > \log_9 (5x-4)$.

a) $x \in \left(0, \frac{4}{5}\right) \cup (1, \infty)$; b) $x \in (0,1) \cup (4, \infty)$; c) $x \in \left(\frac{4}{5}, 1\right) \cup (4, \infty)$; d) $x \in \mathbb{R}$; e) $x \in \varnothing$.

3. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă matricea este inversabilă să se calculeze $d = \det\left(A^{-1}\right)$.

a) 1; b) 0; c) $\frac{1}{11}$; d) A nu este inversabilă; e) 11.

4. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se consideră legea de compoziție „$*$" dată prin: $x * y = mx + ny - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$ în care m şi n sunt constante reale. Să se afle m şi n astfel încât $(\mathbb{R}, *)$ să fie grup comutativ.

a) $m = 1, n = 2$; b) $m = 1, n = -1$; c) $m = n = 2$; d) $m = n = 1$; e) $m = 0, n \in \mathbb{R}$.

5. Să se afle valorile lui $a \in \mathbb{R}$ astfel încât: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt{an(a+5)(n+1)+(a+9)(n+3)(n+5)}}{\sqrt{a^2n^2+1}} = 3$.

a) $a \in \left\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$; b) $a = 9$: c) $a \in \{3, 9\}$; d) $a \in \left\{\frac{3}{2}, 3\right\}$; e) $a = \frac{1}{4}$.

6. Să se calculeze derivata funcției $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \arccos(\sin x)$.

a) $-\mathrm{ctg}\, x$; b) $\cos x$; c) $\sin x$; d) 1; e) –1.

7. Să se calculeze $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$. a) $I = 1$; b) $I = \ln 2$; c) $I = \frac{\pi}{2}$; d) $I = \frac{\pi}{4}$; e) $I = -\frac{\pi}{4}$.

8. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC cu centrul O. Dacă M_1, M_2, M_3 sunt proiecțiile lui M pe laturile triunghiului, atunci suma $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_3}$ este: a) $\overrightarrow{MO}$; b) $\frac{1}{4}\overrightarrow{MO}$; c) $2\overrightarrow{MO}$; d) $3\overrightarrow{MO}$; e) $\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

9. Date punctele $A(5,3), B(-1,-2)$, ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$ este: a) $3x + 4y - 8 = 0$; b) $10x + 12y - 26 = 0$; c) $12x + 10y - 29 = 0$; d) $x + 2y - 3 = 0$; e) $5x + 3y - 15 = 0$.

10. Să se rezolve ecuația: $\cos^2 x + \sin^2 2x = 2$. a) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$; b) $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$; c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; d) $x = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; e) $x \in \varnothing$.

(Admitere, Univ. Tehnică, Colegiu, Ingineri, Iaşi, 2003)

Testul 10

1. Se dă ecuația $x^2+(m+2)x+4=0, m\in\mathbb{R}$.

i) Să se determine m astfel încât ecuația să admită soluții complexe.

ii) Să se determine m astfel încât între rădăcinile x_1,x_2 ale ecuației să existe relația $x_1^2+x_2^2+x_1x_2=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+4X^2-20X-48$.

i) Să se calculeze $f(-2)$.

ii) Să se rezolve ecuația $f(x)=0, x\in\mathbb{C}$.

3. Pentru $x\in\mathbb{R}$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{pmatrix}$.

i) Determinați valorile lui x pentru care $\det(A)=0$.

ii) Să se calculeze A^2.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-\operatorname{arctg} x$.

i) Să se calculeze $f(0)$.

ii) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

iii) Să se arate că $f'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

5. Fie $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$.

i) Se cer constantele $A,B,C\in\mathbb{R}$ astfel încât: $\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}, \forall x>0$.

ii) Să se calculeze integrala dată.

(Admitere, Univ., Facultatea de Ştiințe, Oradea, 2003)

Testul 11

1. Dacă pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x*y=-xy+5x+5y-20$, atunci $x*4$ este egal cu: a) $x-4$; b) $x+1$; c) x; d) $2x$.

2. Sistemul $\begin{cases} x-3y=-2 \\ x+2y=3 \\ 3x-y=a \\ 2x+y=b \end{cases}$ este compatibil pentru a) $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$; d) $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$.

3. Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Numărul de inversiuni $m(\sigma)$ şi signatura $\varepsilon(\sigma)$ sunt:

a) $\begin{cases} m(\sigma)=11 \\ \varepsilon(\sigma)=-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} m(\sigma)=12 \\ \varepsilon(\sigma)=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} m(\sigma)=10 \\ \varepsilon(\sigma)=1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} m(\sigma)=12 \\ \varepsilon(\sigma)=-1 \end{cases}$.

4. Valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$, pentru care ecuația $x^2-2(m+2)x+8m+1=0$ admite rădăcini reale şi egale, sunt: a) $m\in\{-1,3\}$; b) $m\in\{1,4\}$; c) $m\in\{1,3\}$; d) $m\in\{2,4\}$.

5. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$. Sistemul $\begin{cases} bx + az = x \\ cx + az = b \\ cy + bz = a \end{cases}$ are o soluție unică pentru: a) $abc = 0$; b) $abc = -1$; c) $a + b + c = 0$; d) $abc \neq 0$.

6. Valoarea parametrului real *a*, pentru care funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 4 \\ ax^2 + 5, & x > 4 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ este: a) $a = \frac{5}{8}$; b) $a = \frac{3}{8}$; c) $a = \frac{5}{16}$; d) $a = 1$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + 3 + ... + n}{n^2 - \sqrt{n}}$ este: a) 0; b) ∞; c) 1; d) $\frac{1}{2}$.

8. Ecuația $x^2 + (m+1)x + 1 = 0$ are soluții reale dacă şi numai dacă $m \in$ a) $(-\infty,-3) \cup (1,\infty)$; b) $(-\infty,3] \cup [1,\infty)$; c) $(-3,-1)$; d) $\varnothing$.

9. Primitivele funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = m\sin x + n\cos x, m,n \in \mathbb{R}$ sunt:

a) $-m\mathrm{tg}\frac{x}{2} + n\mathrm{ctg}\frac{x}{2} + \mathcal{C}$; b) $m\cos x - n\sin x + \mathcal{C}$; c) $-m\cos x + n\sin x + \mathcal{C}$; d) $-\cos mx + \sin nx + \mathcal{C}$.

10. $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x+7}{x^2+1} > 1\right\}$ este: a $(-2,3)$; b) $\mathbb{R}$; c) $(-1,\infty)$; d) $(-1,4)$.

11. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Matricea *A* este inversabilă dacă şi numai dacă:

a) $m \in \mathbb{R} - \{-2\}$; b) $m \in (-\infty,-2)$; c) $m \in \mathbb{R}$; d) $m = -2$.

12. Soluția ecuației $3 \cdot 2^x + 5 \cdot 2^{x-1} = 44$ este: a) $x = 2$; b) $x = 1$; c) $x = 5$; d) $x = 3$.

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} \frac{x+3}{x^2 - 3x + 2}$ este; a) $-\infty$; b) ∞; c) 5; d) 10.

14. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Atunci $A + B$ este: a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Soluția ecuației $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ este: a) $x = 2$; b) $x = 3$; c) $x = 1$; d) $x = 4$.

16. Primitivele funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}, a \neq 0$ sunt: a) $\mathrm{tg}\frac{x}{a} + \mathcal{C}$; b) $\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + \mathcal{C}$; c) $\mathrm{arctg}\, x + \mathcal{C}$; d) $\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + \mathcal{C}$.

17. Dacă $x \in (1,\infty)$, atunci $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ este: a) $\ln(\ln x) + \mathcal{C}$; b) $\frac{x}{\ln x} + \mathcal{C}$; c) $1 + \ln x + \mathcal{C}$; d) $x(1 + \ln x) + \mathcal{C}$.

18. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică în care $a_3 = 11, a_5 = 19$, atunci a_1 este egal cu a) –3; b) 5; c) 3; d) 2.

(Admitere, Univ., Facultatea de Ştiințe Economice, Piteşti, 2004)

Testul 12

1. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x+2, g(x)=x^2+2x$. Să se rezolve ecuația $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$.
a) $x\in\{1,2\}$; v) $x\in\varnothing$; c) $x\in\{2,3\}$; d) $x=2$; e) $x=-1$.

2. Mulțimea soluțiilor inecuației: $\dfrac{\sqrt{3-2x}}{x}\le 1$ este: a) $x\in(-2,2]$; b) $x\in(-\infty,0)$; c) $x\in\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$;
d) $x\in[0,4]$; e) $x\in(-\infty,0)\cup\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$.

3. Să se calculeze: $E=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2002}$. a) $E=1$; b) $E=-1$; c) $E=i$; d) $E=-i$; e) $E=0$.

4. Să se determine valorile lui x pentru care $\log_2 x^2\ge\log_2 8$.
a) $x\in[-3,3]$; b) $(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$; c) $x\in\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$; d) $x\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{2},\infty\right)$; e) nici unul dintre răspunsurile anterioare nu este adevărat.

5. Să se determine n astfel încât $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3=55$. a) 5; b) 6; c) 7; d) 8; e) 9.

6. Fie numerele $x_1=a+2, x_2=2a+5, x_3=4a+8$ unde $a\in\mathbb{R}$. Să se determine a astfel încât x_1,x_2,x_3 să fie în progresie aritmetică. a) $a=0$; b) $a=1$; c) $a=2$; d) $a=-2$; e) $a=3$.

7. Fie $f\in\mathbb{R}[X]$ un polinom de gradul doi care satisface condițiile $f(1)=5, f(2)=10, f(3)=18$. Atunci $f(-2)+f(-1)$ este: a) 12; b) 8; c) 4; d) –3; e) 0.

8. Să se afle mulțimea valorilor parametrului real α pentu care ecuația $x^3-27x+\alpha=0$ are o rădăcină dublă. a) $\varnothing$; b) $\{-3,27\}$; c) $\{27\}$; d) $\{-54,54\}$; e) $\{16,243\}$.

9. Fie ecuația $\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 5\\ 2 & x & 3\\ 4 & 3 & x-1\end{vmatrix}=0$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3. Să se calculeze suma $S=x_1^2+x_2^2+x_3^2$.
a) 53; b) 6; c) 72; d) 9; e) 44.

10. Fie sistemul liniar: $\begin{cases}2x+y-z=-1\\ -x+2y+z=-1\\ x-2y+2z=7\end{cases}$. Soluția sistemului este: a) $(1,0,1)$; b) $(2,-1,-1)$; c) $(1,-1,2)$;
d) $(0,1,2)$; e) $(1,1,1)$.

11. Pe mulțimea $G=(2,\infty)$ se defineşte legea de compoziție „$*$“, $x*y=xy-2x-2y+6, \forall x,y\in G$. Fie S suma soluțiilor ecuației $x*x=11$. Atunci: a) $S=8$; b) $S=4$; c) $S=5$; d) $S=26$; e) $S=10$.

12. Să se calculeze: $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n}}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}}$. a) $L=1$; b) $L=\dfrac{1}{e}$; c) $L=e$; d) $L=2e$; e) $L=e^2$.

13. Să se determine asimptotele orizontale ale funcției $f:\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x-1}$.

a) $y=\frac{1}{2}$; b) $y=-\frac{1}{2}$; c) $y=-\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$; d) $y=2, y=\frac{1}{2}$; e) $y=-\frac{1}{2}$.

14. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left|xe^x-x\right|$. Atunci funcția este: a) continuă pe $\mathbb{R}$; b) discontinuă în $x=1$; c) discontinuă în $x=e$; d) disontinuă în $x=0$; e) celelalte răspunsuri sunt false.

15. Fie $f:[-2,0]\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2-1\right|$. Numărul punctelor din intervalul $(-2,0)$ pentru care tangenta la graficul funcției *f* este paralelă cu axa Ox este egal cu: a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

16. Fie funcția $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3+4}{x^2}$. Atunci funcția are ca extrem local punctul: a) $A(2,3)$; b) $A(3,2)$; c) $A(-2,-3)$; d) $A(-2,3)$; e) $A(2,-3)$.

17. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Dacă *F* este o primitivă a lui *f*, pentru care $F(0)=1$, atunci $F(1)+F(-1)$ este: a) $\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{2}$; c) 2; d) 0; e) –1.

18. Să se afle aria mulțimii mărginită de graficele funcțiilor $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x, g(x)=\frac{1}{x^2}$ şi dreptele $x=1, x=3$. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{5}{3}$; d) $\frac{10}{3}$; e) $\frac{8}{3}$.

(Admitere, U.P.G., Facultatea de Ştiințe, Ploieşti, 2004)

Testul 13

♦ Disciplina: algebră

1. Fie $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}7&4\\-9&-5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$. Verificați egalitatea *AC* = *CB*. Se cer elementele matricei B^n, unde $n>4, n\in\mathbb{N}$.

a) $\begin{pmatrix}6n+1&4n\\-9n&-6n+1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}13&8\\-18&-11\end{pmatrix}$; c) I_2; d) C; e) $\begin{pmatrix}25&16\\-36&-23\end{pmatrix}$.

2. Se consideră ecuația $8mx^2-2\left(m^2+2m+1\right)x+m^2+1=0$. Să se determine toate valorile lui *m* astfel încât $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\le 4$. a) $m\in\mathbb{R}-\{1\}$; b) $m\in(-1,1)$; c) $m\in[2,9)$; d) $m\in\mathbb{R}-\{0\}$; e) alt răspuns.

3. Numărul elementelor mulțimii $M=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|4(x-a)(x-b)+(a-b)^2=0\right\}, a,b\in\mathbb{R}$, este: a) depinde de *a* şi *b*; b) 0; c) 1; d) 2; e)3.

4. Mulțimea tuturor soluțiilor inecuației $\log_x(x+1)+\log_{x^2}(x+1)-\log_{x^4}(x+1)\ge\frac{5}{4}$.

a) $(1,\infty)$; b) $[2,\infty)$; c) $(0,\infty)$; d) $\varnothing$; e) $\mathbb{R}$.

5. Să se determine numerele reale a, b, c astfel încât ecuația $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ să admită rădăcinile a, b, c.
a) $a = b = c = 2$; b) $a \in \mathbb{R}, b = c = 1$; c) $a = -1, b = 3, c = 1$; d) $a = b = 1, c = -1$; e) $(a, b, c) = (-1, -1, 1)$ sau $a \in \mathbb{R}, b = c = 0$.

6. Mulțimea valorilor parametrului real *m* astfel că $4^x + 1 \geq m\left(2^{x+1} - 1\right), \forall x \in \mathbb{R}$, este:

a) $\left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$; b) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$; c) $\left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; d) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$; e) $[0,1)$.

7. Dacă $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ și $x^2 + y^2 + 1 = xyz$, care sunt valorile posibile ale lui z?
a) 2003; b) 5; c) 4; d) 3; e) 2.

8. Fie $p(x) = ax^2 + bx + c$ cu coeficienți reali, astfel că pentru orice număr rațional *r* din $[0,1]$, inegalitatea $|p(r)| \leq 1$ este verificată. Atunci, pentru orice x din $[0,1]$ avem:
a) $|2ax + b| > 8$; b) $|2ax + b| > 9$; c) $8 < |2ax + b| < 9$; d) $|2ax + b| \leq 8$; e) $|2ax + b| \geq 2002$.

9. Mulțimea tuturor numerelor reale *x* pentru care $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} - 2 = 0$, este:
a) $[-1,3]$; b) $[-2,2]$; c) $[3,\infty)$; d) $[2,\infty)$; e) $(-\infty,-2] \cup [3,\infty)$.

10. Egalitatea $C_{n+1}^{k+1} = C_{n-1}^{k+1} + aC_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1}$, $n > k \geq 1$, este adevărată dacă: a) $= 0$; b) $a = -1$; c) $a = -2$; d) $a = 2$; e) $a = k$.

11. Să se determine gradul minim al unui polinom $P \in \mathbb{Z}[X]$ cu toți coeficienții în mulțimea $\{0,1,2,...,9\}$ astfel ca $P(-2) = P(-5) = 2003$.
a) 3; b) 5; c) 7; d) 11; e) alt răspuns.

12. Fie *K* mulțimea matricelor 3×4 cu toate elementele 1 sau –1 și astfel încât produsul elementelor din fiecare linie și fiecare coloană să fie –1. Câte elemente are *K* ?
a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) alt răspuns.

13. Dacă $a \geq 1$, atunci soluțiile reale ale ecuației $x = \sqrt{a - \sqrt{x + a}}$ sunt:
a) $\frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$; b) $\frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}$; c) a; d) $a^2 - a$; e) alt răspuns.

14. Câtul împărțirii lui: $x^{10} + x^9 + x^8$ la $(x-1)^3$ este $Q(x)$. Valoarea lui $Q(1)$ este: a) 3; b) 27; c) $A_{10}^3 + A_9^3 + A_8^3$; d) 0; e) $C_{10}^3 + C_9^3 + C_8^3$.

15. Fie numerele $a, b, c, d \in (0,1) \cup (1,\infty)$. Dacă $(\log_a b)(\log_b c)(\log_c d) = 1$, atunci: a) $a = d$; b) $a = b \in (0,1)$ și $c = d \in (1,\infty)$; c) $a = b \in (1,\infty)$ și $c = d \in (0,1)$; d) $a = c \in (0,1)$ și $b = d \in (1,\infty)$; e) $a = c \in (1,\infty)$ și $b = d \in (0,1)$.

16. Rezolvați ecuația $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x-2}$, $x \in \mathbb{R}$.
a) $-\frac{10}{3}$; b) $\{8,10\}$; c) 20; d) 2; e) $\left\{-\frac{10}{3}, 20\right\}$.

♦ **Disciplina: Analiză matematică**

1. Aria suprafeței cuprinsă între graficele funcțiilor $f,g:R\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$, $g(x)=ex$ și dreapta $x=0$ este: a) $\frac{e-1}{2}$; b) $\frac{e-2}{2}$; c) $e-1$; d) e; e) $e-2$.

2. Fie $f:\left(-\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{10}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(\cos 5x)$. Derivata funcției f este: a) $f'(x)=5\mathrm{tg}5x$; b) $f'(x)=\frac{5}{\mathrm{tg}5x}$; c) $f'(x)=-\frac{1}{\mathrm{tg}5x}$; d) $f'(x)=\mathrm{tg}5x$; e) $f'(x)=-5\mathrm{tg}5x$.

3. Fie funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x^2+mx+m}$, $D\subset\mathbb{R}$ fiind domeniul maxim de definiție, iar *m* un parametru real nenul. Să se determine valorile lui *m* astfel încât *f* să admită o singură asimptotă verticală.
a) $\{2\}$; b) $\{0,4\}$; c) $\{4\}$; d) $\{2,4\}$; e) $\{-4\}$.

4. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}$. a) 0; b) 1; c) –1; d) ∞; e) $-\infty$.

5. Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă. Să se arate că, dacă pe graficul lui *f* există trei puncte coliniare, atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât: a) $f''(c)=1$; b) $f''(c)=0$; c) $f'(c)=f''(c)+1$; d) $f''(c)=-1$; e) $f'(c)+f(c)=0$.

6. Se consideră funcția $f(x)=\frac{x^3-3x^2+m}{x^2}$. Să se determine *m* astfel încât funcția să admită în punctul $x=2$ un extrem. a) 1; b) 2; c) –2; d) –1: e) 4.

7. Valorile parametrului real *a* pentru care $a^x+2^x\le 6^x+1, \forall x\in\mathbb{R}$, sunt: a) $a=8$: b) $a=1$; c) $a=3$; d) $a=2$; e) nu există.

8. Pentru ce valori ale parametrilor reali a,b,c avem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}+an^2-bn-c\right)=\frac{1}{2}$.
a) $a=0, b=c=1$; b) $a=c=1, b=-1$; c) $a=c=0, b=1$; d) $a=b=1, c=0$; e) $a=b=c=1$.

9. Precizați cărei mulțimi aparține parametrul real *m* astfe încât pentru fiecare funcție derivabilă și crescătoare $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ să aibă loc inegalitatea $\int_0^1(x-m)f(x)dx\ge 0$.
a) $\varnothing$; b) $\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$; c) $\left\{0,\frac{2}{3},-1\right\}$; d) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; e) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

10. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție polinomială cu proprietatea $f(1)+f(2)+...+f(n)=n^{2003}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Valoarea integralei $\int_0^1 f(x)dx$ este: a) 0; b) $\frac{1}{1001}$; c) 2003; d) $\frac{1}{2003}$; e) alt răspuns.

11. Fie a,b,k numere pozitive date. Găsiți valoarea maximă P^* a produsului $P=x^a y^b$, Când numerele strict poziție *x*, *y* îndeplinesc condiția $x+2y=k$. a) $P^*=a^a b^b\left(\frac{k}{a+b}\right)^{a+b}$; b) $P^*=a^a\left(\frac{b}{2}\right)^b$; c) $P^*=\left(\frac{a}{2}\right)^a\cdot b^b$; d) $P^*=a^a\left(\frac{b}{2}\right)^b\left(\frac{k}{a+b}\right)^{a+b}$; e) $P^*=\left(\frac{a}{2}\right)^a b^b\left(\frac{k}{a+b}\right)^{a+b}$.

12. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin 2x}\displaystyle\int_{2000x}^{2003x}\dfrac{\ln(1+t)}{\sin t}dt$ este: a) ∞; b) 3; c) 1; d) $\dfrac{2}{3}$; e) $\dfrac{3}{2}$.

13. Valoarea integralei $\displaystyle\int_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\dfrac{\ln\left(2x^2\right)}{1+x^2}dx$ este: a) 0; b) $(\ln 2)\mathrm{arctg}\sqrt{2}$; c) $\ln 2+\mathrm{arctg}\sqrt{2}$; d) $(\ln 2)\mathrm{arctg}\left(2\sqrt{2}\right)$; e) $\ln 2+\mathrm{arctg}\,2\sqrt{2}$.

14. Fie f un polinom de grad $n\geq 2$ cu rădăcinile $x_1<x_2<...<x_n$ şi $f(-1)\neq 0$. Precizați care din următoarele condiții este necesară şi suficientă pentru ca să avem egalitatea $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+x_k}\right)^2=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\left(1+x_k\right)^2}$.

a) $f(1)f'''(-1)=3f'(-1)f''(-1)$; b) $f(-1)+f'(-1)=26$; c) $f''(-1)=0$; d) $f'(-1)=0$; e) $f'(-1)+f''(-1)=0$.

15. Să se calculeze limita şirului (a_n), $a_n=1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{6}+...+\dfrac{1}{3n-2}+\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{2}{3n}$.

a) 0; b) ln2; c) ln3; d) ln4; e) ∞.

(Admitere, Univ., Politehnică, Sibiu, 2003)

Testul 14

1. Produsul rădăcinilor ecuației $x^2=x-2$ aparțin mulțimii: a) $\{1\}$; b) $[-2,0]$; c) $\{-2\}$; d) $[2,4)$; e) $\{-2,-1,1\}$.

2. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\max(3x-1,2x+1)$. Atunci $f(x)$ este: a) $f(x)=\begin{cases}3x-1,\ x\leq 2\\2x+1,\ x>2\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}2x+1,\ x\leq -2\\3x-1,\ x>-2\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases}3x-1,\ x\leq -2\\2x+1,\ x>-2\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases}2x+1,\ x\leq 2\\3x-1,\ x>2\end{cases}$; e) alt răspuns.

3. Valoarea lui $E=(2+7i)^3-(1+i)^3$ este: a) $-261i-284$; b) $-262i-295$; c) $-364i-292$; d) $-241i-292$; e) $-241i-292$.

4. Mulțimea soluțiilor ecuației $5^{-x+1}+5^x=6$ este: a) $\{0\}$; b) $\{0;1\}$; c) $\{1\}$; d) $\{-1;0;1\}$; e) $\{-1;1\}$.

5. Restul împărțirii polinomului $P=(X-1)^{2003}+X^{2003}+1$ prin X^2-X este:

a) 2; b) X; c) $X+2$; d) $2X$; e) $X+\dfrac{1}{2}$.

6. Soluția ecuației matriceale $\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\end{pmatrix}-2X=\begin{pmatrix}1&-2\\2&4\end{pmatrix}$ este: a) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\\-3&0\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}&0\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}1&5\\-3&0\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\\-\frac{3}{2}&0\end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

7. Sistemul $\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+my+z=1 \\ mx+y+z=1 \end{cases}$ este incompatibil, dacă şi numai dacă: a) $m=1$; b) $m=2$: c) $m=-2$; d) $m=0$; e) sistemul nu este incompatibil pentru nici o valoarea $m \in \mathbb{R}$.

8. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-3}{1+2x^2}$. Asimptota graficului funcţiei este: a) $y=x+\dfrac{1}{2}$; b) $y=\dfrac{x}{2}$; c) $y=x-1$; d) $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; e) $y=\dfrac{1}{2}$.

9. Valoarea parametrului real *a* pentru care avem: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+ax+1}{x^2+3x-2}\right)^x=e$ este: a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; d) 4.

10. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3-9mx^2+12m^2x+1$. Dacă x_1 este abscisa punctului de maxim local, iar x_2 este abscisa punctului de minim local pentru funcţia *f*, atunci valoarea parametrului real *m*, pentru care $x_1^2=x_2$, este: a) 2; b) 0; c) $\dfrac{1}{4}$; d) 1; e) 5.

11. O primitivă a funcţiei $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ este: a) $\ln\dfrac{x+2}{x+1}$; b) $\ln(x+1)(x+2)$; c) $\ln\dfrac{x+1}{x+2}$; d) $\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}$; e) $\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{x+1}$.

12. Valoarea integralei $\int\limits_{-1}^{2} 2\sqrt{x^2-2x+1}dx$ este: a) 1; b) 3; c) 7; d) 5; e) 9.

(Admitere, Univ., Ingineri, Tg. Mureş, 2003)

Testul 15

1. Fie $f:D_m\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\left(1-\dfrac{mx}{5}\right), m>0$ unde D_m este domeniul maxim de definiţie. Să se determine toate valorile lui *m* pentru care *f* verifică ipotezele teoremei lui Lagrange pe intervalul $[-5,4]$.

a) $m\in(0,5]$; b) $m\in\left(1,\dfrac{5}{4}\right]$; c) $m\in\left(0,\dfrac{5}{4}\right)$; d) $m\in(0,1)$; e) $m\in\left(\dfrac{5}{4},2\right)$.

2. Să se stabilească o relaţie de recurenţă pentru integralele I_n, unde: $I_n=\int\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

a) $I_n=-x^{n-1}\sqrt{1+x^2}+(n-1)(I_{n-2}-I_n)$; b) $I_n=(n+1)x^n\sqrt{1+x^2}+I_{n-1}$;

c) $nI_n=x^{n-1}\sqrt{1+x^2}-(n-1)I_{n-2}$; d) $I_n=(n-1)I_{n-1}+I_{n-2}$;

e) $I_n=x^{n+1}\sqrt{1+x^2}+n(I_{n-1}-I_{n-2})$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\min\left(x^4,x^5,x^6\right)$. Determinaţi punctele în care *f* nu este derivabilă.

a) $\{1\}$; b) $\{-1,0\}$; c) $\{0,1\}$; d) $\varnothing$; e) $\{-1,1\}$.

4. Să se determine valorile parametrului real m pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\left(1+x^2\right)+mx$ este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$. a) $(-\infty,1]$; b) $[1,\infty)$; c) $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$; d) $(-\infty,-1]$; e) $(-\infty,1]\cup[2,\infty)$.

5. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\right)$. a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) 2; d) $\frac{1}{4}$; e) $\frac{1}{6}$.

6. Să se rezolve inecuația $\left(x^2-5x+6\right)\ln(x+1)>0$. a) $x\in(2,3)$; b) $x\in(1,2)$; c) $x\in(1,2)\cup(2,3)$; d) $x\in(3,\infty)$; e) $x\in(0,2)\cup(3,\infty)$.

7. Să se determine câtul q și restul r al împărțirii polinomului $f=2x^4-3x^3-18x^2+61x-6$ la polinomul $g=x^2-3x+1$. a) $q=2x^2+3x+11, r=25x-5$; b) $q=2x^2+3x-11, r=25x+5$; c) $q=2x^2-3x-7, r=5x-1$; d) $q=2x^2+2, r=x+2$; e) $q=2x^2+3x-6, r=-x+2$.

8. Să se determine mulțimea $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=\frac{z}{|z|}-\frac{|z|}{z}, z\in\mathbb{C}^*\right\}$. a) $\{yi\,|\,y\in[-2,2]\}$; b) $\left\{yi\,\middle|\,y\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right\}$; c) $\{yi\,|\,y\in[-1,1]\}$; d) $\mathbb{R}$; e) $\left\{yi\,\middle|\,y\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]\right\}$.

9. Să se determine distanța celui mai apropiat vârf al graficelor funcțiilor $f_m(x)=x^2+mx-4$, $m\in\mathbb{R}$ față de axa Ox. a) 0; b) 4; c) 2; d) 3; e) 1.

10. Într-o progresie aritmetică termenul al nouălea și al unsprezecelea sunt dați, respectiv, de cea mai mare și mai mică rădăcină a ecuației: $\frac{1}{2}\lg 2+\lg\sqrt{x^2+4x+5}=\frac{1}{2}\left[\lg\sqrt{x^2-4x+5}+1\right]$. Se cere suma primilor zece termeni ai progresiei. a) 15; b) 18; c) 120; d) 30; e) 40.

11. Să se calculeze $I=\int_0^1\left(x^{\frac{3}{2}}+1\right)^2dx$. a) $\frac{7}{5}$; b) $\frac{51}{20}$; c) 5; d) $\frac{2}{5}$; e) $\frac{41}{20}$.

12. Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției $f(x)=\arccos\left(\frac{3x-x^3}{2}\right)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$. a) $3\left(2-\sqrt{3}\right)$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) π; d) $3-\sqrt{3}$; e) $\frac{\pi}{3}$.

(Admitere, Univ., Politehnică, Timişoara, 2005)

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

Elemente de algebră

Capitolul 1. Grupuri

Parte stabilă. 6. $x \in H \Leftrightarrow 1 < x < 3 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 1$; 7. $x = 4+\alpha, y = 4+\beta, \alpha,\beta \geq 0 \Rightarrow \Rightarrow x \perp y = 4 + 5\alpha\beta \geq 4$; 12. $H \subseteq \mathbb{R}, H \neq \varnothing, x \in \mathrm{H} \Rightarrow 2x = x+x, 3x, ..., nx, ... \in H$. Cum H este finită $(\exists) i \neq k$ pentru care $ix = kx$. De aici $x = 0$. Deci $H = \{0\}$. Dacă H este parte stabilă în raport cu înmulțirea, atunci din $x \in H \Rightarrow x^2, x^3, ..., x^n, ... \in H$. Din H finită $(\exists) i < j$ cu $x^i = x^j$ sau $x^i\left(1 - x^{j-i}\right) = 0$, ceea ce dă $x = 0$, $x = 1$ sau $x = -1$. Deci $H = \{-1, 0, 1\}$ sau $H = \{0\}, H = \{1\}, H = \{-1, 1\}$; 15. $f: [a, \infty) \to [a, \infty)$, $f(x) = (y+1)x + y$; $y < -1 \Rightarrow$ f s.d. de la $-\infty$ la $f(a)$ și acest caz nu este bun; $y \geq -1 \Rightarrow$ f crescătoare și $f(a) \geq a, (\forall) y \geq -1$. Deci $(y+1)a + y \geq a \Leftrightarrow y(a+1) \geq 0, (\forall) y \geq -1$. Rezultă $a = -1$; 16. 1) $a \geq 6$; 2) $a = 1$;

Asociativitatea. 2. Toate; 6. $m \in \{0,1\}$; 7. $a \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$; 8. $a = b = 1$; $c = 3$;

Comutativitatea. 2. $2 * 3 = 3 \neq 3 * 2 = 4$; 7. Tabla legii este simetrică în raport cu diagonala principală; 8. $A_a \cdot A_b = A_{ab} = A_{ba} = A_b \cdot A_a$; 12. $x * y = y * x, (\forall) x, y \Rightarrow b = 2a$, iar din asociativitate $\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}$; $a_1 = b_1 = 0 \Rightarrow x * y = xy$;

Element neutru. 1. $1 \circ 2 = 3 \neq 2 \circ 1 = 1, (1 \circ 2) \circ 1 = 2 \neq 1 \circ (2 \circ 1) = 0, e = 0$; 6. $x, y \geq 2 \Rightarrow x * y \geq 2 \Rightarrow \Rightarrow (x-2)(y-2) + m - 4 \geq 2 \Rightarrow m \geq 6$; $e = 3, m = 6$; 8. Din asociativitate rezultă $a_1 = 0, a_2 = 1$; $a = 0 \Rightarrow x * y = -xy$; $e = -1$; $a = 1 \Rightarrow x * y = x + y - xy$, $e = 0$; 9. $c = 3, e = \frac{3}{2}$; 10. Asociativitatea $\Rightarrow a = b$ și $a^2 = a + c$; $x * e = x, (\forall) x \Rightarrow a + e = 1$ și $be + c = 0$.

Element simetric. 1. $e = 1, 1^{-1} = 1, 5^{-1} = 5$; 3. $e = -\frac{5}{3}, x' = -2 + \frac{1}{9(x+2)} > -2$; 5. $x \in H \Leftrightarrow |x| < 1$; $e = 0, x' = x$; 7. $H = \left\{X, X^2, X^3, X^4 = I_4\right\}, I_4^{-1} = I_4, X^{-1} = X^3, \left(X^2\right)^{-1} = X^2, \left(X^3\right)^{-1} = X$; 8. $e = \frac{1}{2}, x' = 1 - x \in (0,1)$; 9. $A_\alpha \cdot A_\beta = A_{\alpha+\beta}, A_0 = I_2 \in H, A_\alpha^{-1} = A_{-\alpha}$.

Grupuri. 2. $e = 1, x' = 2 - x$; 3. $e = 0, x' = -\frac{x}{x+1} > -1$; 4. $e = 0, x' = \frac{x}{x-1} > 1$; 6. $u = e^{\frac{1}{3}}, x' = e^{\frac{1}{9\ln x}} > 0$; 8. $e = 0, x'(1 - ax) = -x$. Dacă $x = 1 \Rightarrow x'(1-a) = -1 \Rightarrow x' = -\frac{1}{1-a} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a - 1 \in \{\pm 1\} \Rightarrow a \in \{0; 2\}$. Dacă $a = 0$, ecuația $x'(2x-1) = x$ nu are soluții $x' \in \mathbb{Z}, (\forall) x \in \mathbb{Z}$. Dacă $a = 0 \Rightarrow x' = -x \in \mathbb{Z}$ și în acest caz $(\mathbb{Z}, \circ)$ este grup abelian; 9. a) $\lambda \geq 2$; b) $x^n = (x-1)^n + 1, (\forall) n \in \mathbb{N}$, inductiv; $e = 2, x' = \frac{x}{x-1} > 1$; 10. $e = m+1, x' = \frac{1 - m^2 + mx}{x - m}$; 11. $x \top e = x, (\forall) x \in G \Rightarrow m_1 = 2, m_2 = -\frac{3}{2}$;

$e \top x = x, (\forall) x \in G \Rightarrow e = -\frac{1}{2}, m = 2$ sau $m = -1$. Din $x \top e = e \top x = x, (\forall) x \in G \Rightarrow a = 0,$ $e = -\frac{1}{2}, m = 2, x' = -\frac{4x+3}{4(x+1)} \in G$; 12. $a = b = 1$; 13. $a = b = 1$; 14*. $x \circ e = e \circ x = x, (\forall) x \Rightarrow$ $\Rightarrow a = b, e = 1 - a > 1 \ (\Rightarrow a < 0)$ şi $c = a^2 - a$. Din $x \circ x = x^2 + 2ax + a^2 - a > 1, (\forall) x \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \searrow 1} (x^2 + 2ax + a^2 - a) = a^2 + a + 1 \geq 1 \Rightarrow a(a+1) \geq 0$. Cum $a < 0 \Rightarrow a + 1 \leq 0 \Rightarrow a \leq -1$. Dacă $a < -1$, atunci $x = \frac{1-a}{2} \circ y > 1, (\forall) y > 1 \Rightarrow y + a - 2 < 0, (\forall) y > 1$, fals. Deci $a = -1$; 19. $G = \left\{I_3, A, A^2, A^3\right\}$; 21. $I_2 = A(\hat{0}), A^{-1}(x) = A(-x)$; 22. 1) $G = \left\{I_2, A, A^2, ..., A^9\right\}$; $\det(A) = \hat{1}$ şi deci A este inversabilă; 23. 1) $\left(\hat{1}, \hat{0}, \hat{0}\right)$; 2) $\left(\hat{3}, \hat{0}, \hat{1}\right)$; 3) $\left(\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}\right)$; 27. a) Ecuaţia nu are soluţii deoarece luând signatura în egalitate $\Rightarrow \varepsilon(x^2) = e(\sigma) \Leftrightarrow \left(\varepsilon(x)\right)^2 = -1 \Leftrightarrow 1 = -1$, fals; b) Se caută soluţii de forma $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$. Se analizează cazurile $a = 1, a = 2, a = 3, a = 4$; $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. 28. Şase soluţii.

Reguli de calcul într-un grup. 1. 1) $(xy)^3 = e = e \cdot e = x^3 \cdot y^3 \Rightarrow xyxyxy = x^3 y^3 \Rightarrow yxyx = x^2 y^2 = y^2 x^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow yx = xy$; 3) $x^{n+2} y^{n+2} = (xy)^{n+1} xy = x^{n+1} y^{n+1} xy \Rightarrow xy^{n+1} = y^{n+1} x$; analog $x^{n+1} y^{n+1} =$ $= (xy)^n xy = x^n y^n xy \Rightarrow xy^n = y^n x$; $y^{n+1} x = xy^{n+1} = xy^n y = y^n xy \Rightarrow yx = xy$; 2. $G = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ şi $x \in G$ arbitrar. Atunci $xx_1, xx_2, ..., xx_n \in G$ şi $xx_i \neq xx_j, i \neq j$. Deci $G = \{xx_1, xx_2, ..., xx_n\}$. De aici $xx_1 xx_2 ... xx_n = x_1 x_2 ... x_n$ sau $x^n (x_1 x_2 ... x_n) = x_1 x_2 ... x_n$ sau $x^n = e$; 3. $x^2 y = x(xy) \overset{2)}{=} xyx^3 \overset{2)}{=} yx^3 \cdot x^3 =$ $= yx^3 \overset{1)}{=} yx$; $x^2 y = yx \Rightarrow y^3 x^2 y = y^4 x = x$ (am înmulţit relaţia cu y^3 şi apoi am utilizat 1)); $y^3 x^2 y = x \Rightarrow y^3 x^2 y = x \Rightarrow y^3 x^2 y^4 = xy^3$ (am înmulţit relaţia cu y^3) $\overset{1)}{\Rightarrow} y^3 x^2 = xy^3$; 4. 1) $xy = (xy)^{-1} =$ $= y^{-1} x^{-1} = yx, (\forall) x, y \in G$; 2) $(xy)^{-1} = x^{-1} y^{-1} \Rightarrow e = x^{-1} y^{-1} xy \Rightarrow x = y^{-1} xy \Rightarrow yx = xy$; 3) $x(y^{-1})^{-1} = y^{-1} x^{-1} \Rightarrow xy = y^{-1} x^{-1} \Rightarrow xy = (xy)^{-1} \Rightarrow (xy)^2 = e$. Aici facem $y = x^2$ şi obţinem $x^6 = e$ şi apoi $y = x$ când găsim $x^4 = e$. Deci $x^2 = e, (\forall) x \in G$.

Morfisme şi izomorfisme de grupuri. 1. 2) Pentru a proba că f este morfism se discută patru cazuri după paritatea lui $m, n \in \mathbb{Z}$; 2. 3) $f(2) = -1 \Rightarrow a = -3$; 3. b) $f(1) = 0 \Rightarrow a = 1$; 4. 2) $(1,2)$; 5. 2) $f : G \to \mathbb{R}^*, f(x) = \ln x$; 6. a) 1) $a = b = 1, e = -1$; 2) $f(x) = x + 1$; 8. $A_\alpha \cdot A_\beta = A_{\alpha+\beta}, f : (C_1, \cdot) \to (G_1, \cdot), f(\cos\alpha + i \sin\alpha) = A_\alpha$; 10. 1)–2) Realizaţi tablele legilor; 11. b) $f : G \to \mathbb{Z}, ((A(x)) = x + 1, A(x) \in G$; 12. $G = \left\{I_4, A, A^2, A^3\right\}, f : G \to G_1, f(I_3) = e, f(A) = \sigma_1,$ $f(A^2) = \sigma_2, f(A^3) = \sigma_3$.

Teste de evaluare. Testul 1. Varianta A. 1. $a>6$; **2.** $m=1$; **3.** $a=1, b=-1$; **4.** $A=\{2,4\}, S=2+4=6$, $B=\varnothing$; **5.** 1) $A(a)\cdot A(b)=A(a+b)$; 2) $f:M\to\mathbb{R}, f(A(a))=a$; 3) $A^n(a)=A(na)$; **6.** $\Delta=\hat{5}a+\hat{5}$, $A=\mathbb{Z}_7, S=\hat{6}, (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=(\hat{1},\hat{0},\hat{0})\Rightarrow V=\hat{1}$; **7.** Tabla legii.

Varianta B. 1. $a\in\{-1\}\cup[0,\infty)$; **2.** $a\in\{0,1\}$; **3.** $a=b=0$ sau $a=\frac{1}{2}, b=1$; **4.** $S_1=2, S_2=4$; **5.** 1) $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$; 2) $f:G\to\mathbb{R}, f(A(x))=x$; 3) $A^n(2)=A(2n)$; **6.** $\Delta=\hat{4}, S=\hat{1}$; **7.** Tabla legii.

Testul 2. Varianta A. 1. 1) Da; 2) $e=\frac{1+i}{2}$; 3) $z=1$; **3.** $a=7, b=42$; **4.** $\lambda\geq 4$; **5.** $x=3, y=-1$; **6.** 1) $f_a\circ f_b=f_{ab}, f_1=1_{\mathbb{R}}, f_a^{-1}=f_{\frac{1}{a}}$; 2) $f:\mathbb{R}_+^*\to M, f(a)=f_a$; **7.** $\text{ord}(A)=7$.

Varianta B. 1. 3) $z=\frac{3}{2}$; **2.** $m\in\varnothing$; **3.** $a\in\{0,1\}$; **4.** $\alpha\geq 20$; **5.** $e=3, a*a=3\Rightarrow a_1=1, a_2=3\Rightarrow$ $\Rightarrow S=4; A=\{-1\}$; **6.** 2) Tablele legilor la fel structurate $f(f_1)=1, f(f_2)=\varepsilon, f(f_3)=\varepsilon^2$; **7.** $\text{ord}(B)=6$.

Testul 3 (grilă). Varianta A. 1. b); **2.** c); **3.** a); **4.** b); **5.** a); **6.** a); **7.** a).

Varianta B. 1. a); **2.** b): **3.** c); **4.** b); **5.** a); **6.** b); **7.** b).

Capitolul 2. Inele şi corpuri

Distributivitatea unei legi în raport cu altă lege. 1. a) „$*$" este lege comutativă şi se verifică prin calcul egalitatea $x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z), (\forall)x,y,z$; **2.** În $x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z), (\forall)x,y,z$ se face $x=0, y=1, z=0\Rightarrow a=b$ şi apoi $x=y=1, z=0\Rightarrow a=b=2$; **3.** $a=b=i, c=-1-i$; **4.** $a=c=\alpha, b=\alpha^2-\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$; **Inele. 1.** Inele: 1), 3) (dacă $m=1$), 4), 5), 7), 8), 10)–13); elemente inversabile: 1), 5), 8) 11) 1, –1; 4) 7) 10), 13) orice număr nenul; 12) **2.** Inele comutative: 5) – 16); elemente inversabile: 1) matricele care au determinantul egal cu – 1 sau 1; 2) –4) orice matrice cu determinantul nenul; 5) $I_2, -I_2$; 7) orice matrice cu determinantul nenul; 8) $I_2, -I_2$; divizori ai lui zero: 1) – 4) generaţi de matrice nenule; 14) $\begin{pmatrix} a & a\\ a & a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -a\\ -a & a\end{pmatrix}, a\neq 0$;

15) $\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}, a,b\neq 0$; etc.; [inel, subinel]: $[5), 6)], [7), 5)], [7), 6)]$ etc.; **3.** Elemente inversabile se află în fiecare inel; divizori ai lui zero se află în inelele: 1), 2), 4), 5), $f(x)=x^2+x|x|, g(x)=x^2-x|x|\Rightarrow f\cdot g=0$; **4.** Elemente inversabile: 1) $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$; 2) –4) $(1,0), (-1,0)$; divizori ai lui zero: 1) $(a,0), (0,b), a,b\neq 0$; 2) $(a,a), (a,-a), a\neq 0$; **5.** $e=$ element neutru în raport cu prima lege şi u = element neutru în raport cu a doua lege; 1) $e=3, u=4$; elemente inversabile $x=4$ şi $x=2$ când $x'=4$ şi respectiv $x'=2$; 2) $e=-3, u=-2$; elemente inversabile $x=-2, x=-4$ când $x'=-2$ şi respectiv $x'=-4$; 3) $e=-2, u=-1$; elemente inversabile $x=-1, x=-3$ când $x'=-1$ şi respectiv $x'=-3$; 5) $e=0+0\cdot i, u=1$; elemente inversabile $U(\mathbb{Z}[i])=\{\pm 1+bi \mid b\in\mathbb{Z}\}$; 6) $e=\varnothing$, $u=M$; inelul are divizori ai lui zero, $A=\{a\}$, $B=\{b\}\Rightarrow AB=A\cap B=\varnothing$; 7) $e=O_2$, $u=I_2$, etc.; **Corpuri.** Notăm prin e şi u elementele neutre în raport cu prima şi respectiv a doua lege de

compoziție. **1.** 2) $e=0=0+0\sqrt{3}, u=1=1+0\sqrt{3}, x^{-1}=\frac{a}{(a^2-3b^2)}-\frac{b\sqrt{3}}{(a^2-3b^2)}$; 5) $e=0, u=1,$ $x=a+b\varepsilon \Rightarrow x^{-1}=\frac{(a-b)}{(a^2-ab+b^2)}-\frac{b\varepsilon}{(a^2-ab+b^2)}$; **2.** 1) $e=O_2, u=I_2, A^{-1}=\begin{pmatrix} a & -3b \\ -b & a\end{pmatrix}/(a^2-3b^2)$; 4) $e=O_2, u=I_2=A_{1,0}, A_{a,b}^{-1}=A_{a/(a^2+3b^2),-b/(a^2+3b^2)}$; 5) $e=O_2, u=A_{1/2}, A_a^{-1}=A_{1/4a}$; 9) Fie $O_2, I_2,$ A, B matricele care apar în descriere. Din tabla legii pentru „$\cdot$“ $\Rightarrow A^{-1}=B, B^{-1}=A$; **3.** e și u sunt elemente neutre în raport cu prima și respectiv a doua lege; 1) $e=4, u=5$; 2) $e=1, u=e$; 3) $e=2, u=\frac{5}{2}$; 4) $e=f_0, u=1_{\mathbb{R}}$; 5) $e=f_0, u=f_1$; 6) $e=i, u=(m-1)i/m$; 7) $e=0, u=1$; **4.** 1)–2) $e=(0,0), u=(1,0)$; **5.** $a=b=1, e=2, u=3$; **6.** $e=O_2, u=I_2$;

Morfisme și izomorfisme de inele și corpuri: **1.** a) $f(\hat{x}+\hat{y})=4(\hat{x}+\hat{y})=\widehat{4x}+\widehat{4y}=f(\hat{x})+f(\hat{y})$, $f(\hat{x}\hat{y})=f(\widehat{xy})=\widehat{4xy}$ și $f(\hat{x})f(\hat{y})=4\hat{x}4\hat{y}=16\hat{x}\hat{y}=16\widehat{xy}=\widehat{4xy}$; **2.** $\mathrm{Ker}(F)=\left\{f\in C([-1,1]) \,\middle|\, f\left(\frac{1}{2}\right)=0\right\}$; **3.** f nu este injectiv, $(\exists)(a,0)\neq(a,1)$ cu $f(a,0)=f(a,1)=a$; **5.** $f(2)=0, f(3)=1\Rightarrow \alpha=1,$ $\beta=-2\Rightarrow f(x)=x-2$; **6.** $f(-1)=1, f(0)=2\Rightarrow \alpha=1, \beta=2\Rightarrow$ $f(x)=x+2$; **7.** $f:\mathcal{A}\to\mathcal{A}'$ 1) $f(x+y\sqrt{7})=\begin{pmatrix} x & y \\ 7y & x\end{pmatrix}$; **8.** $e=1, u=e, f(0)=1, f(1)=e\Rightarrow\alpha=\beta=1$; **9.** $e=0, u=1; f(0)=0,$ $f(1)=1\Rightarrow\alpha=1, \beta=0$; **11.** $f:(\mathbb{Q},+,\cdot)\to(\mathbb{Q},\oplus,\odot), f(x)=\alpha x+\beta$; **12.** $e=1, u=e^3$ $f(0)=1,$ $f(1)=e^3\Rightarrow n=0, m=3$.

Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ. **1.** 1) $a=10, b=7, c=5, d=2$; 2) $a=9, b=4,$ $c=-3$; **3.** 1) $m=1\Rightarrow f=6\Rightarrow \mathrm{grad}(f)=0; m=2\Rightarrow \mathrm{grad}(f)=2$; $m\in\mathbb{R}-\{1,2\}\Rightarrow \mathrm{grad}(f)=3$; 2) $m=\pm i\Rightarrow f=iX\Rightarrow \mathrm{grad}(f)=1; m\neq\pm i\Rightarrow \mathrm{grad}(f)=4$; **4.** $m\in\mathbb{Q}\Rightarrow m^3\neq 2\Rightarrow \mathrm{grad}(f)=3$; $\mathrm{grad}(g)=3\Rightarrow m=-1$; **5.** 0; **6.** a) $X^{2^{n+1}}-1$; b) $X^{2^{n+2}}+X^{2^{n+1}}+1$; **9.** $a=3, b=2$; **10.** $f=3X+5, g=-3X+4$; **11.** 1) $f=2X^2-3X-4$; **12.** $p=-12, q=9$; **13.** $(X+1)^3, (-2X+1)^3, (X-2)^3$; **14.** $f=3X^3-\frac{3}{2}X^2-\frac{1}{2}X+d, d\in\mathbb{R}$; **15.** 1) a) $f=\pm X^2$; b) $f_1=X^2, f_2=X^2-X, f_3=X^2+X+1, f_4=X^2-X+1$; **17.** $f=4X^3-6X^2+4X-1$; **19.** $f=\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{3}$; **21.** Patru polinoame; **22.** $f=\hat{3}X^3+X^2+\hat{4}X+\hat{2}$; **24.** 1) $q=3X^2+X+6, r=1$; 2) $q=2X^4-3X^3+9X^2-4X+4, r=-7$; 4) $q=iX, r=(3-3i)X-i$; 5) $q=\hat{3}X^4+X^3+X^2, r=\hat{1}$; **25.** 1) $f(1)=0\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$; 5) $m=-40i$; 6) $m=\hat{3}$; **26.** 1) $f(2)=3\Rightarrow m=3$; **27.** $f(1)=4,$ $f(-2)=5\Rightarrow m=-6, n=11$; **28.** $f(1)=1, f(-1)=-1, f(2)=41\Rightarrow m=3, n=0, p=-3$; **31.** 1) $m=0, n=-5$; 2) $n=0, m=0$ sau $n=0, m=-1$; **32.** Prin reducere la absurd; **33.** 1) $f=(X-2)(X^2+2X+4)$ (în $\mathbb{R}[X]$) $=(X-2)(X+1+i\sqrt{3})(X+1-i\sqrt{3})$ (în $\mathbb{C}[X]$);

34. $f(\hat{0})=\hat{1}\neq\hat{0},\ f(\hat{1})=\hat{3},\ f(\hat{2})=\hat{1},\ f(\hat{3})=\hat{1},\ f(\hat{4})=\hat{4};\ \ f=\left(X^2+\hat{4}X+\hat{1}\right)\left(X^2+X+\hat{1}\right);$

35. 1) $\left(X+\hat{1}\right)\left(X+\hat{2}\right)\left(X+\hat{3}\right)$; 2) $\hat{3}\left(X+\hat{2}\right)^2\left(X+\hat{3}\right)\left(X+\hat{4}\right)$; 3) ireductibil; **36.** 1) X^2+X-2; 2) X^2+X+1; 3) X^2-1; 4) X^2+X-1; **38.** $\alpha=2, \beta=-1;\ \ (f,g)=X^2-4X+3$;

39. 1) $d=X^3+X-2=-\dfrac{1}{3}f+\dfrac{1}{3}(X+1)g$; **40.** Fie α rădăcină a lui $g\Rightarrow\alpha^2+\alpha+1=0$ şi $\alpha^3=1$;

1) $f(\alpha)=\alpha\left(\alpha^2+1\right)^{6n+1}+\alpha^{3n+2}=\alpha(-\alpha)^{6n+1}+\alpha^{3n}\cdot\alpha^2=\alpha(-\alpha)\left[(-\alpha)^2\right]^{3n}+\alpha^2=-\alpha^2\left(\alpha^3\right)^{2n}+\alpha^2=-\alpha^2+\alpha=0$;

41. Fie α rădăcină a lui $g\Rightarrow\alpha^2-\alpha+1=0$ şi $\alpha^3=-1$; 1) $f(\alpha)=(\alpha-1)^{n+3}+\alpha^{2n+3}=$ $\left(\alpha^2\right)^{n+3}+\alpha^{2n}\cdot\alpha^3=\alpha^{2n}\cdot\alpha^6+\alpha^{2n}(-1)=\alpha^{2n}-\alpha^{2n}=0$; **42.** α rădăcină a lui $g\Rightarrow\alpha^2+\alpha+1=0,$ $\alpha^3=1$ şi se discută cazurile $n\in\{6k, 6k\pm1, 6k\pm2, 6k+3\}$; 1) $n\in\{6k\pm2\}, k\in\mathbb{N}$; **43.** Fie α rădăcină a lui $g\Rightarrow\alpha^2-\alpha+1=0, \alpha^3=-1$ şi se ia $n\in\{6k, 6k\pm1, 6k\pm2, 6k+3\}, k\in\mathbb{N}$; 1) $n\in\{6k\pm2; k\in\mathbb{N}\}$; **44.** α rădăcină a lui $g\Rightarrow\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$ şi $\alpha^4=1\Rightarrow f(\alpha)=0$;

49. $t=x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow f(t)=0$ ecuaţia rezolventă să aibă rădăcini reale $\Rightarrow\Delta_t\geq0$ şi ecuaţiile $x+\dfrac{1}{x}=t_k, k=1,2$ să aibă rădăcinile reale $\Rightarrow\Delta_x\geq0\Leftrightarrow t_k^2-4\geq0\ \Rightarrow t_k\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$; 1) $(-\infty,-8]$; 2) $[4,\infty)$; 3) $(-\infty,-16]$; **51.** a) 1) $z^3+2z^2-15z+\left(-z^2-2z+15\right)i=0\overset{z\in\mathbb{R}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow\left(z^3+2z^2-15z=0\text{ şi }-z^2-2z+15=0\right)\Rightarrow z_1=-5$ rădăcina comună; $\Rightarrow z^2-(3+i)z+3i=0\Rightarrow$

$\Rightarrow z_2=3, z_3=-i$; 2) $-3, -1, 1+i$; b) $x^3-8x^2-6x+108+\left(x^2+x-48\right)\sqrt{3}=0,$ $x\in\mathbb{Q}\Rightarrow\left(x^3-8x^2-6x+108=0\text{ şi }x^2+2x-48=0\right)\Rightarrow x_1=6$; $x_2=5-\sqrt{3}, x_3=-3-\sqrt{3}$;

c) 1) $x^3+2x^2-5x-6+\left(x^2+x-6\right)m=0, (\forall)m\Rightarrow\left(x^3+2x^2-5x-6=0, x^2+x-6=0\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=-3, x_2=2$ rădăcini comune; $x_3=-m+1$; 2) 3; 4; $\dfrac{m-1}{2}$; d) Verificare directă; e) 1) $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ şi se ridică la cub $\Rightarrow x^3+3x-4=0$ cu unica soluţie reală $x=1$; 2) 4; 3) 3; **52.** 1) $m=-5, n=0$; 2) $m=-2, n=-3$; **53.** 1) $m=-2, n=-4$; 2) $m=1, n=3$; **54.** 1) $m=\dfrac{1}{5}, n=\dfrac{26}{5}$; 2) $m=-1, n=1$; **55.** 1) $m=27, n=40, p=-8$; 2) $m=-3, n=-1, p=1$;

56. 1) a)–b) -2; c) 18; d) -22; e) $-\dfrac{3}{4}$; f) $-\dfrac{7}{16}$; g) -1; h) -10; 2) a) 5; b) 27; c) 89; d) $\dfrac{1}{3}$; e) $-\dfrac{8}{9}$; f) $\dfrac{8}{5}$; g) -360; **57.** 1) $m=39; 1; 4; 7$; 2) $m=3, -2; 1; 4$; **58.** 1) $m=-\dfrac{246}{5}$, $n=-\dfrac{362}{5}$; $2-3\sqrt{5}$; $2\pm\sqrt{5}$; **59.** 1) $m=-6; -1; 3; 9$; 2) $m=-1; 1; -2; 4$; **60.** I. 1) $m=-5, \dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$;

$\frac{5}{2}$; $m=6,-3;2;\frac{1}{2}$; 2) $m=\frac{1}{2};2;-2;\frac{1}{2}$; II. 1) $m=2;1;1;-2;-2$; $m=-2;-1;-1;2;2$; 2) $m=-7$; $x_{1,2}=\pm2;-1;3$; 61. I. 1) 1°) $\left(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}\right)$; 2°) $\left[\frac{16}{11},2\right)$; 62. 1) $x^3-3x^2-x+3=0$; 2) $x^3+x^2-2x=0$; 63. 1) $x^4-2x^3-x^2-2x=0$; 64. 1) $\{x,z,y\}==\{-1,1,2\}$; 2) $x=y=z=3$; 3) $\{x,y,z\}=\{-2,1,2\}$; 65. 1°) $x=-2-y$; $y^3+4y^2+7y+8=0$; 2°) $x=\frac{-2x}{1+y},4y^3+5y^2+6y+1=0$; 3°) $x=\frac{1}{y},2y^3-3y^2-2y-1=0$; 66. 1) $a=-1,x=-1$; 2) $a=0,x=1$; 67. 1) $a_1=0,x_1=0$; $a_2=-6,x_2=1$; 68. $\alpha\in\mathbb{Z}$ rădăcina comună; 1) $\alpha=0\Rightarrow a=b=0$; 2) $\alpha=2\Rightarrow(\nexists)a,b\in\mathbb{Z}$; 3) $\alpha=-2\Rightarrow a=-4,b=-8$; 4) $\alpha=4$, imposibil; 69. 1) $a=3,x_1=-1$, $x_2=2$; 2) $a=-3$, $x_1=1$, $x_2=-2$;

Teste de evaluare. Testul 1. Varianta A. 1. $e_\perp=3,e_\top=4,\ x\top x'=4\Rightarrow x'=3+\frac{1}{x-3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{2,4\}$; 2. 1) $\perp$ comutativă $\Rightarrow a=b$; $\perp$ asociativă $\Rightarrow a=1$; $\top$ asociativă $\Rightarrow c=5$; $e_\perp=2,e_\top=3$; 2) $f(0)=2\Rightarrow\beta=2,\ f(1)=3\Rightarrow\alpha=1$; 3. a) $a=\hat{2}$; b) $(\hat{0},\hat{4}),(\hat{1},\hat{0}),(\hat{2},\hat{1}),(\hat{3},\hat{2}),(\hat{4},\hat{3})$; 4. f cu grad$(f)\in\{1,2\}$ nu există; $f=aX^3+bX^2+cX+d\in\mathbb{Z}_5[X]\Rightarrow f=\hat{3}X^3+X^2+\hat{4}X+\hat{2}$; 5. $a\le-6$; 6. a) $x=10,h=5$; b) $x\in(\infty,-4)\cup(2,3)$; Varianta B. 1. $f(x)=1$ dacă $x<0$, $f(x)=0$ dacă $x\ge0$, $g(x)=0$ dacă $x<0$, $g(x)=-1$, dacă $x\ge0$, $f,g\ne0\Rightarrow fg=0$; 2. Prin reducere la absurd; $f:A\to B,\ f(x+y\sqrt{2})=x+y\sqrt{3}$, f bijectivă și $f(u+v)=f(u)+f(v),(\forall)u,v\in A$, dar $f(uv)\ne f(u)f(v)$, $(\forall)u,v\in A$; 3. a) $\sum x_1^2=-3m^2-2<0$; b) $n=2k+1,k\in\mathbb{N}$; 4. $y=\frac{x+i}{x-i}\Rightarrow y^n=-1$ etc.; b) $f(x_1)=16x_1^3-13x_1^2+7x_1+12\Rightarrow\sum f(x_1)=68$; 5. a) Ecuația de gradul trei în t de soluții x,y,z este: $t^3+t^2-4t-4=0;(-2,2,-1)$ și permutările; b) $(\hat{6},\hat{3},\hat{6})$; 6. a) $n=30$ zile; b) $\sqrt[3]{x+1}=u$, $\sqrt{x-3}=v,\ x=7$;

Testul 2. Varianta A. 1. Se construiesc tablele legilor; 2. a) $f=X-1,g=X+1,\ f,g\ne0$ și $f*g=0$; b) φ este bijectivă; $\varphi(f+g)=\varphi(f)+\varphi(g)$ dar $\varphi(f*g)\ne\varphi(f)\varphi(g)$; 3. a) $f=(X+\hat{1})(X+\hat{2})(X+\hat{4})$; b) ireductibil; 4. a) $\det(A)=\hat{3}$ inversabil în $\mathbb{Z}_8$, iar A^{-1} are liniile $(\hat{2}\ \hat{1}\ \hat{3}),(\hat{5}\ \hat{6}\ \hat{0}),(\hat{0}\ \hat{2}\ \hat{3})$; b) $AX=B$, $(\hat{3}\ \hat{0}\ \hat{3})$; 5. $a\in\{1,9\}$; 6. a) $3^x+3^{-x}=y\ge2$; b) $\left(-\frac{1}{3},0\right),\left(\frac{1}{2},0\right),(1,0)$; Varianta B. 1. a) $a=b=1$; $e_0\Rightarrow n=m^2-m$; „$\circ$“ este distributivă față de „$*$“ $\Rightarrow m=c$; c) $f(0)=-c,f(1)=1\Rightarrow$ $\alpha=1,\beta=-c$; 2. $\alpha=-\frac{1}{2},x_1=x_2=x_3=-\frac{1}{2},x_4=\frac{1}{2},a=-\frac{1}{4},b=-\frac{1}{16}$; 3. $a\in(-\infty,-1]\cup\left[-\frac{2}{3},\infty\right)$; 4. a) $m=-2,n=p=-8$; 5. $a=b=1,e=1,x'=2-x,c=3$; $f(x*y)=f(x)+f(y)$, $f(x\circ y)==f(x)f(y)\Rightarrow p=q=2$; 6. a) $x\in\{5,6,7\}$; b) $x\in\{1,2,3\}$.

Testul 3 (grilă). Varianta A. 1. $a=b=1$; b) ; 2. a); 3. a); 4. c); 5. c); 6. b); 7. a); 8. a); 9. b); 10. c); Varianta B. 1. a); 2. c); 3. a); 4. b); 5. b); 6. c); 7. a); 8. b); 9. a); 10. b).

Elemente de analiză matematică

Capitolul 1. Primitive

Derivate. 2.1) $f'(g(0))\cdot g'(0)=f'(1)\cdot 2=0\cdot 2=0;2)\,0;3)\,1;4)\,1;7)\,f'(g(h(0)))\cdot g'(h(0))\cdot h'(0)=$
$=f'(2)\cdot g'(2)\cdot 1=1\cdot 1\cdot 1=1;8)\,0;9)\,0;12)\,2.$

Probleme care conduc la noțiunea de primitivă. 1. $G(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+k, G(1)=-1\Rightarrow$
$\Rightarrow k=-\frac{5}{6}$; 3. $x(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^2+2t+c; x(0)=2\Rightarrow c=2; x(4)=7\frac{1}{3}$ la dreapta originii;
5. 1) $v(t)=\frac{t^2}{2}+t+c; v(0)=2\Rightarrow c=2\Rightarrow v(t)=\frac{t^2}{2}+t+2\Rightarrow s(t)=\frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2}+2t+k;$
$s(0)=0\Rightarrow k=0$; 6. 1) $g(x)=-\frac{x^2}{2}+3x+c; g(1)=0\Rightarrow c=0;$

Primitiva unei funcții. 0. 5) $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitive pentru f pe $\mathbb{R}\Rightarrow F(x)-G(x)=k;$
$x=1\Rightarrow F(1)-G(1)=e=k\Rightarrow F(x)-G(x)=e; x=10\Rightarrow F(10)-G(10)=e;$
1. $g(x)=G'(x); a)\, g(x)=3x^2-10x; i)\, g(x)=3^{3x}+e^x; r)\, g(x)=x\cos x;$
2. 1) $f(x)=\frac{x^4}{4}+2x+1$; 3. 1) $a)\, G(x)=\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{8}{3}; 2)\, G'(x)=g(x),\forall x; 3)\, b), c), d);$
4. 1) $F(x)-G(x)=1,\forall x\in\mathbb{R}$; 2) Se obține același rezultat; 5. $f'(x)=\cos x-x\sin x\Rightarrow$
$\Rightarrow x\sin x=\cos x-(x\cos x)'\Rightarrow G(x)=\sin x-x\cos x+\mathcal{C}$; 6. Da; Nu; 8. c) $G'(x)=\frac{3}{\cos^4 x}-$
$-\frac{2}{\cos^2 x}\Rightarrow\frac{1}{\cos^4 x}=\frac{2}{3\cos^2 x}+\frac{G'(x)}{3}\Rightarrow H(x)=\frac{2\operatorname{tg} x}{3}+\frac{\sin x}{3\cos^3 x}$ este primtivă pentru g;
9. $a)\, f(x)+g(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow H(x)=\frac{x^2}{2}; b)\, H'(x)=f(x)-g(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow a=\frac{1}{2},$
$b=1$; 10. $a=9, b=14$; 11. $b) a=\frac{2}{3}, b=\frac{2}{9}; c) i)\, a=\frac{2}{5},\ b=-\frac{1}{5}, c=-\frac{3}{5}; ii)\, a=1, b=0, c=-16;$
13. $a)\, a=b=\frac{1}{2}; b)\, G(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right);$
14. $f(x)+g(x)=1\Rightarrow F(x)+G(x)=x, F(x)-G(x)=\ln(\cos x+\sin x)\Rightarrow F(x), G(x);$
15. 1) $P(x)=15x-\frac{x^2}{10}-100; 2) P(10)=40;\ 3) P'(x)=0\Rightarrow x=75;$
16. 1) $V(t)=3t+5t^2; 2) V(1)=8m^3; 3) t=5h$; 17. 1) $N(n)=n^2+3n+12;$
2) $N(3)=30$; 18. 1) $G'(t)=\frac{2(3+t)}{5}\Rightarrow G(t)=\frac{t^2}{5}+\frac{6t}{5}+15; 2) G(5)=26g;$

19. 1) $1+\mathcal{C}$, 2) $\pi x+\mathcal{C}$; 3) $\frac{x^3}{3}+\mathcal{C}$;

4) $-\frac{1}{x}+\mathcal{C}$; 23) $x+3\ln\left(x+\sqrt{x^2+25}\right)+\mathcal{C}$; 26) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)-\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)+\mathcal{C}$;

Problema existenței primitivelor. Funcții care admit primitive. 1. 1) $-$ 18) sunt funcții continue; 1) $F(x)=\left(\frac{x^2}{2}\text{dacă } x\geq 0; x^2, \text{dacă } x<0\right)$; 2) $F(x)=\left(x^2+x \text{ dacă } x<1; \ln x-\frac{2}{x}+4 \text{ dacă } x\geq 1\right)$;

3) $F(x)=\left(\ln x+\frac{1}{x}\text{ dacă } x\geq 1; -\cos x+2 \text{ dacă } x<1\right)$; 4) $F(x)=\left(x-\frac{2x\sqrt{x}}{3}, x\in[0,1); \frac{2x\sqrt{x}}{3}-\right.$ $\left.-x+\frac{2}{3}, x\geq 1\right)$; 8) $F(x)=\left(\frac{x^2}{2}-2x, x\geq 2; -\frac{x^2}{2}+2x-4, x<2\right)$; 10) $F(x)=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}, x\in[0,1);\right.$ $\left.\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}, x\in(-1,0)\right)$; 11) $F(x)=\left(x^2-x, x\in[1,2); x-1, x\in(0,1)\right)$; 13) $F(x)=(\sin x-4,$ $x\in\left[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}\right]$; $-\sin x-2, x\in\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$; $\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; $-\sin x+2, x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$; $\left.\sin x+4, x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\right)$; 18) $f(x)=\left(x, x\geq x^3; x^3, x<x^3\right)=\left(x, x\in(-2,-1)\cup(0,1);\right.$ $\left.x^3, x\in(-1,0)\cup(1,2)\right)$; $F(x)=\left(\frac{x^2}{2}, x\in(-2,-1]; \frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}, x\in(-1,0]; \frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}, x\in(0,1]; \frac{x^4}{4}=\frac{1}{2},\right.$ $\left.x\in(1,2)\right)$; **2.** 1) $G(x)=\left(\frac{x^2}{2}-x-3, x\leq -2; -\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{3}, x\in(-2,2]; -3x+\frac{17}{3}, x>2\right)$;

3. 1) $m=1$; 2) $m=0$;

Metoda integrării directe. 1) $\frac{x^3}{3}-x^2+3x+\mathcal{C}$; 2) $x+\ln(-x)+\mathcal{C}$; 3) $x^3-3\ln x+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+\mathcal{C}$;

4) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{4x\sqrt{x}}{3}+\mathcal{C}$; 10) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{6}}$; 11) $9-x=\left(3-\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)$; 17) $f(x)=\frac{1}{x+2}+$ $+\frac{2}{x^2-4}$; 18) $f(x)=1+\frac{4}{\left(x^2-4\right)}$; $x+2\ln\left[\frac{(x-2)}{(x+2)}\right]+\mathcal{C}$; 19) $f(x)=1+\frac{7}{\left(x^2-4\right)}$;

23) $f(x)=2-\frac{7}{\left(x^2+4\right)}$; 30) $2x^2+3=x^2-1+x^2+4 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{\left(x^2+4\right)}+\frac{1}{\left(x^2-1\right)}$;

37) $I=\int f(x)dx, J=\int g(x)dx$; $3I+4J, -4I+3J \Rightarrow I, J$.

Metoda integrării prin părți. 1.a) 1) $x^2 \ln \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \mathcal{C}$; 2) $x^3 \ln x/3 - \frac{x^3}{9} + \mathcal{C}$; 3) $x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) +$
$+\mathcal{C}$; b) 1) $-(x+1)e^{-x} + \mathcal{C}$; 2) $\left(2x^2 - 2x + 1\right)\frac{e^{2x}}{4} + \mathcal{C}$; 3) $x\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{(\ln 3)^2} + \mathcal{C}$;

c) 1) $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + \mathcal{C}$; pe $[-1,1]$ se prelungeşte prin continuitate;

2) $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + \mathcal{C}$; pe $[-1,1]$ se prelungeşte prin continuitate;

3) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \mathcal{C}$; d) 1) $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + \mathcal{C}$; 3) $\frac{2^x}{1+\ln^2 2}(\ln 2 \cdot \sin x - \cos x) + \mathcal{C}$;

4) $e^{2x}\frac{(2\sin 3x - 3\cos 3x)}{13} + \mathcal{C}$; e) 1) $-x\cos + \sin x + \mathcal{C}$; 2) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + \mathcal{C}$;

3) $x\sin x + \cos x + \mathcal{C}$; f) 1) $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+9} + 9\ln\left(x + \sqrt{x^2+9}\right)\right] + \mathcal{C}$; 2) $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-9} - 9\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)\right] + \mathcal{C}$;

3) $\frac{1}{2}\left(16\arcsin\frac{x}{4} + x\sqrt{16-x^2}\right) + \mathcal{C}$; 4) $\frac{1}{3}\left(x^2-9\right)\sqrt{x^2-9} + \mathcal{C}$; 6) $\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} + \mathcal{C}$;

2. Sunt funcții continue pe domeniile de definiție

1) $F(x) = \left(\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right], x \geq 1; \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}, x < 1\right)$;

2) $F(x) = \left(x^2 \ln x/2 - x^4/4, x > 0; 0, x = 0\right)$; 3) $F(x) = \left(\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+4} + 4\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\right]\right.$,

$x \leq 0; 2x - \cos x + 1 + 2\ln 2, x > 0)$; 5) $F(x) = \left(\left(x-1\right)e^x, x \leq 0; x^3 \ln x/3 - \frac{x^3}{9} - 1, x > 0\right)$;

6) $F(x) = \left(x^2 \operatorname{arctg} x/2 + \operatorname{arctg} x/2 - \frac{x}{2}, x \geq 0; x \operatorname{arctg} x + \sqrt{1-x^2} - 1, -1 < x < 0\right)$;

4. 1) $I + J = e^x + \mathcal{C}, J - I = \frac{e^x}{5}(2\sin 2x + \cos 2x) + \mathcal{C} \Rightarrow I, J$;

2) $\left(e^x \sin x\right)' = e^x(\sin x + \cos x) \Rightarrow I + J = e^x \sin x, \left(e^x \cos x\right)' = e^x(\cos x - \sin x) \Rightarrow$

$\Rightarrow I - J = e^x \cos x \Rightarrow I, J.$

Prima metodă a substituției.

1.a) 1) $\frac{(x-1)^6}{6} + \mathcal{C}$; 2) $\frac{(3x+2)^7}{21} + \mathcal{C}$; 3) $\frac{(2x-1)^{11}}{44} + \frac{(2x-1)^{10}}{40} + \mathcal{C}$; 4) $\frac{\left(x^2+1\right)^4}{4} + \mathcal{C}$;

5) $\frac{\left(x^3-3x+1\right)^6}{18} + \mathcal{C}$; b) 1) $\ln(x+3) + \mathcal{C}$; 2) $\frac{1}{2}\ln(-1-2x) + \mathcal{C}$; 3) $-\frac{1}{4}\ln(4x-1) + \mathcal{C}$;

4) $-\frac{1}{8(2x+1)^4}+\mathcal{C}$; c) 1) $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+\mathcal{C}$; 2) $\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+\mathcal{C}$;

3) $\frac{3}{10}(2x+1)^{\frac{5}{3}}+\mathcal{C}$; 4) $\frac{1}{3}\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}+\mathcal{C}$; d) 1) $\frac{1}{3}e^{3x}+\mathcal{C}$; 2) $-\frac{1}{2}e^{-2x}+\mathcal{C}$; 3) $\frac{1}{3}e^{x^3}+\mathcal{C}$;

4) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+\mathcal{C}$; 5) $\frac{2}{3}e^{x\sqrt{x}}+\mathcal{C}$; 6) $2e^{\sqrt{x}}+\mathcal{C}$; 7) $-e^{\frac{1}{x}}+\mathcal{C}$;

e) 1) $\frac{1}{2}\ln^2 x+\mathcal{C}$; 2) $-\cos(\ln x)+\mathcal{C}$; 3) $\frac{(1+\ln x)^6}{6}+\mathcal{C}$; 4) $\ln(\ln x+1)+\mathcal{C}$; 5) $\ln(1+\ln x)+\mathcal{C}$;

f) 1) $\frac{1}{3}\sin^3 x+\mathcal{C}$; 3) $-\frac{1}{4}\cos^4 x+\mathcal{C}$; 4) $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+\mathcal{C}$;

g) 1) $\frac{1}{2}\arcsin^2 x+\mathcal{C}$; 2) $\ln(\arcsin x)+\mathcal{C}$; 3) $-\frac{1}{\arcsin x}+\mathcal{C}$; 5) $\arcsin(\arcsin x)+\mathcal{C}$;

2. 1) $\ln\left(\frac{x^2+3x}{x^2+3x+2}\right)+\mathcal{C}$; 2) $i)\, m=1\Rightarrow-\frac{1}{\left(x^2+3x+1\right)}+\mathcal{C}$;

$ii)\, m>1\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{m-1}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+3x+1}{\sqrt{m-1}}\right)+\mathcal{C}$; $iii)\, m<1\Rightarrow\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+3x+1-\sqrt{1-m}}{x^2+3x+1+\sqrt{1-m}}\right)+\mathcal{C}$;

A doua metodă a substituției. 1) $2\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\right)+\mathcal{C}$; 2) $2\left(\sqrt{x}-2\ln\left(\sqrt{x+2}\right)\right)+\mathcal{C}$;

3) $\frac{2x\sqrt{x}}{3}-x+4\sqrt{x}-4\ln\left(\sqrt{x+1}\right)+\mathcal{C}$; 6) $\frac{1}{3}(x-1)\sqrt{2x+1}+\mathcal{C}$.

Integrarea funcțiilor raționale.

1. 1) $a=4,b=11,c=7$; 3) $a=1,b=-2,c=\frac{17}{16},d=-\frac{11}{4},e=-\frac{17}{16}$; 2. $a)$ 1) $\ln\frac{x-1}{x}+\mathcal{C}$;

2) $\frac{1}{5}\ln\frac{2x-3}{x+1}+\mathcal{C}$; 3) $\frac{1}{4}\ln\frac{x}{x+4}+\mathcal{C}$; 5) $3\ln(x-2)-\ln(x-1)+\mathcal{C}$;

$b)$ 1) $x+2\ln(x+1)-\frac{1}{(x+1)}+\mathcal{C}$; 2) $\frac{1}{x}+\ln(2-x)-\ln(-x)+\mathcal{C}$; 3) $\ln(2-x)-\ln(-x-1)-$

$-\frac{2}{(x+1)}+\mathcal{C}$; $c)$ 1) $\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\mathcal{C}$; 2) $x+\ln\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}+\mathcal{C}$;

3) $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1-x}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}$; 3. 1) $a=1,b=4,c=-1,d=8$;

2) $\frac{1}{2}x^2+4x+8\ln(x-1)-\ln x+\mathcal{C}$; 5. 2) $I_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}+\mathcal{C}$; 2) f continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$ (calculate cu 2) pe $(-\infty,0)$ și interval $[0,\infty)$);

6. a) 1) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\mathcal{C}$; 2) $\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}+2(x-1)^{1/2}+\mathcal{C}$; 3) $t=\sqrt{x+1}$; b) 1) $t=\cos x$;

2) $t=\mathrm{tg}(x/2), \sin x = 2t/\left(1+t^2\right)$; 3) $t=\mathrm{tg}\,x$; c) 1) $t=e^x-1$; 2) $t=3^x$; 3) – 4) $t=e^x$.

Teste de evaluare. Testul 1.

Varianta A. 1. $F(x)=\left(\frac{x^3}{3}+e^x-1, x\le 0; \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), x>0\right)$.

2. $F(x)=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+1$; 3. a) 1) $\frac{1}{8}(2x-1)^4+\mathcal{C}$; 3) $2\sqrt{x}-8\ln\left(4+\sqrt{x}\right)+\mathcal{C}$;

b)2) $-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x+\mathcal{C}$; 4) $\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+\mathcal{C}$; 4. $F'(x)=f(x), x\in\mathbb{R}$; 5. $a=b=-1$;

Varianta B. 1. $F(x)=\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}, x\ge 1; \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right), x\in(0,1)\right)$;

2. $2\sqrt{2}$; .a)2) $x-2\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+\mathcal{C}$; 4) $\ln(\ln x)+\mathcal{C}$; b) 1) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sin x}{2}\right)+\mathcal{C}$; 3) $e^x(\sin x+\cos x)/2+\mathcal{C}$;

5. $a=1, b=2$;

Testul 2. Varianta A. 1. $F(x)=\left((x-1)e^x+1\right), x\le 0; \frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1), x>0$;

2. $F(x)=-\ln(x-1)+2\ln(x-2)+\ln 2$;

3.a)1) $t=x+1$; 3) $t=x^2$; 4) $t=2^x$; b)1) $-2\sqrt{1+\cos x}+\mathcal{C}$; 3) $-\frac{2}{3}\cos^3 x+\cos x+\mathcal{C}$; 4) $t=\mathrm{tg}x$;

4. $F'(x)=f(x), x\in\mathbb{R}$; 5. $a=2/3, b=-4/15, c=-16/15$;

Varianta B. 1. $F(x)=\left(-x\cos x+\sin x, x\le 0; \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right), x>0\right)$;

2. $m=\frac{1}{6}, F(x)=\left(\ln\frac{x+1}{x+2}, x\in[0,1]; \ \frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{3/2}+x/6+\ln(2/3)-1/6, x>1\right)$;

3.a)2) $u=\sqrt{1-x}$; 3) $x+5\ln\left[\frac{x}{x+1}\right]+\mathcal{C}$;

b) 1) $u=1+\sin x$; 2) $\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+\mathcal{C}$; 4) $u=\mathrm{ctg}\,x$; 5. $a=2/5, b=-17/15, c=-13/5$;

Testul 3 (grilă). Varianta A. 1. b); 2. a); 3. c); 4. b); 5. a); 6. b); **Varianta B.** 1. a); 2. c); 3. b); 4. a); 5. b); 6. c).

Capitolul 2. Integrala definită

Integrala definită. Formula Leibniz-Newton. 1. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{15}{4}$; **2.** 2. a) $\int_0^1 3dx$; b) $\int_0^2 (2-x)dx$;

c) $\int_1^3 (x+1)dx$; d) $\int_1^4 x^2 dx$; e) $\int_2^3 x(x-2)dx$; f) $\int_{-2}^2 (4-x^2)dx$; g) $\int_0^\pi \sin x\,dx$; h) $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx$;

3. 1) $h(t)=0{,}01\cdot\frac{t^2}{2}+0{,}1t,\ \ h(60)=24\text{m}$; 2) $12=\int_0^T v(t)dt \Rightarrow T=40$ ani; **4.** I. 1) 2; 2)

$2-6\sqrt{3}+5\ln 3$; 3) $\ln\frac{3}{4}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; II.1) $\frac{(e^2+1)}{4}$; 2) π ; 3) $\frac{e^2-1}{4}$; III. 1) $\frac{4^7-1}{21}$; 2) $\frac{64}{3}$; 3) $\frac{98}{3}$; IV.

1) $\frac{2}{15}$; 2) $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$; V. 1) $2\left(1-\ln\frac{3}{2}\right)$; 2) $\ln 4-\frac{7}{6}$; **5.** 1) $a=-1$; 2) $a=2$; 3) $a\in\left\{2,-3,\frac{5}{2}\right\}$;

6. $a=6, b=3, c=1$; **7.** $a=3, b=1, c=5$;

Proprietăți ale integralei definite. 1. 1) a) 5; b) – 2; c) 2; d) –2; 2) a) 1; b) –5; c) –2; d) 0; **2.** I. Funcțiile sunt continue pe domeniile de definiție; 1) $\frac{32}{3}$; 2) $\frac{2}{3}-\frac{1}{e}$; 3) $\frac{35}{12}-\ln 2$; II. Funcții continue pe porțiuni.

1) $\frac{11}{2}$; 2) $\frac{5}{3}$; III. 1) $10-\sqrt{2}-\sqrt{3}$; 2) $\frac{37}{2}$; 3) $\frac{115}{8}$; IV. 1) $f(x)=\left(\frac{x^3}{x^2+1}, x\in[0,1); \frac{2}{3}, x=1; 1, x\in(1,2]\right)$;

$F(x)=\left(\frac{x^2}{2}-\ln(x^2+1), x\in[0,1); \frac{1}{2}-\ln 2, x=1; x-\frac{1}{2}-\ln 2, x\in(1,2]\right)$; $F(2)-F(0)=\frac{3}{2}-\ln 2$;

2) $f(x)=\left(0, x\in[0,2); \frac{5}{2}, x=2; x^2+1, x\in(2,4]\right)$; $F(x)=\left(0, x\in[0,2]; \frac{x^3}{3}+x-\frac{14}{3}, x\in(2,4]\right)$;

$F(4)-F(0)=\frac{62}{3}$; 3) $\frac{3}{2}$; **3.** a) $\ln\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}\right]$; b) $\frac{1}{2}$;

4. 1) 1^0) $I(a)=\left(\frac{1}{2}-a, a\le 0; a^2-a+\frac{1}{2}, a\in(0,1); a-\frac{1}{2}, a\ge 1\right)$; 2) 0; **5.** 1) $\frac{\ln 2}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1.

6. I. Utilizăm proprietatea de monotonie a integralei $f\le g$ pe $[a,b]\Rightarrow\int_a^b f\le\int_a^b g$; 1)

$0\le\cos x\le 1\Rightarrow \cos^4 x\le\cos^3 x,\ \ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

2) $x^2-x\le 2(x+5)\Leftrightarrow x^2-3x-10\le 0\Leftrightarrow x\in[-2,5]$; 3) $|x+1|=|(2x-1)+(2-x)|\le$ $\le|2x-1|+|2-x|$; II $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă $\Rightarrow f(\alpha)=\min f\le f(x)\le\max f=f(\beta)$ care se integrează;

1) $f(x)=1-\frac{3}{x+1}$ este strict descrescătoare pe $[0,1]\Rightarrow f(0)=-2\le f(x)\le f(1)=-\frac{1}{2}$;

III-IV $f\le g\Rightarrow\int_a^b f\le\int_a^b g$; V. 1) $\frac{1}{1+x^2}>e^{\frac{1}{x^2}}=e^{-x^2}>1-x^2, x\in[0,1]$; 2) $1+x^2\le e^{x^2}\le(e+1)x^2+1$, $x\in[0,1]$;

Metode de calcul ale integralelor definite. Integrarea directă. **5.** $\arcsin(\sin x) =$ $= \left(x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \pi - x, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right); x - 2\pi, x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]\right); \frac{\pi^2}{4} - 2;$ **6.** $x(t) = 5t^2 - \frac{t^3}{3}; v'(t) = 0 \Rightarrow$ $t = 5; x(5) = \frac{250}{3};$ **7.** $1) a \in \left\{0, -2, -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}; 3) a = 1; 4) |a| = 2; 5) a = 6.$

Metoda integrării prin părți. **1.** II a) $1 - 2/e$; III a) 1; d) $\frac{\pi}{4}$; IV a) -2π; b) 4π; c) $\frac{\pi}{2} - 1$; V. $a)\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 4\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; **Metoda substituției.** **1.** $a)$ 2) 0; $d)$ 2) 0; **Calculul ariilor.** **1.** 1) $e - 1$; 2) 10; 3) $\frac{7}{6}$; 4) $\frac{20}{3}$; 5) 15; 6) $4\ln\left(\frac{5}{2}\right)$; **2.** $a)$ $\frac{1}{2}$; $b)$ 4; 3) $\frac{5}{3}$; 4) $\frac{32}{3}$; 5) $\frac{108}{3}$; $b)$ 1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) 1; **3.** $a)$ 1) 6; 2) $\frac{14}{3}$; 3) $\frac{5}{6}$; $b)$ 1) 2; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{937}{192}$; **4.** 1) $2\pi + \frac{4}{2}$; $6\pi - \frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$; **5.** $a = -\frac{3}{4}$ și $\min S = \frac{13}{16}$; **6.** $a = 1$ și $\min S = \frac{3}{4}$.

Volumul corpurilor de rotație. **1.** 1) $\frac{\pi^2}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^4}\right)$; 3) 12π; 4) $\frac{243\pi}{5}$; **2.** 1) $\frac{512\pi}{15}$; 2) $\frac{16\pi}{15}$; 3) $\frac{\pi}{30}$; **3.** 1) 32π; 2) $a)$ $\frac{20\pi}{3}$; $b)$ $\frac{8\pi}{3}$; 3) $\frac{64\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $\frac{96\pi}{5}$.

Teste de evaluare. **Testul 1. Varianta A.** **1.** „=”; **2.** F nu este primitivă a lui f pe $[0,1]$; **3.** $1/e$; **4.** Se integrează pe $[0,1]$, $\operatorname{arctg} x^2 > x^2 - \frac{x^6}{6}$; **5.** $4 - 5\ln 2$; **6.** $[t] = (0, 0 \le t < 1; 1, 1 \le t < 2; \dots\ \dots; n-1, n-1 \le t < n)$; $1/2$; **7.** $\ln 3$; **8.** a) $x = 0$ punct de minim; b) $e^{x^2} \ge 1 + x^2$ și $e^{-x^2} \ge e^{-1}$, $x \in [0,1]$; **9.** $F(x) - F(0) = x^2 - 2x \Rightarrow F'(x) = f(x) = 2x - 1$; **10.** 12; **11.** $\pi\left(\frac{15}{2} - 8\ln 2\right)$; **Varianta B.** **1.** „=”; **3.** 0; **5.** $e - 1$; **6.** $\frac{1}{2}$; **7.** 0; **9.** G primitivă pentru $t/(1+t^3) \Rightarrow F(x) = G(x^2) - G(x)$; $1/2$; **10.** $2/3$; **11.** $\pi\int_0^2 (x^2-1)^2\,dx$;

Testul 2. Varianta A. **1.** $D = \left(1, \frac{3}{2}, 2\right), 0{,}5 < \frac{7}{12} = s_D(f) \le \int_1^2 \frac{dx}{x} \le S_D(f) = \frac{5}{6} < 1$; **2.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) -4; **3.** 4π; **4.** $\int_{-3}^{3} f = \int_{-3}^{0} f + \int_{0}^{3} f$, iar în prima intagrală se face $x = -u$; 9; **5.** Se integrează pe $[0,x]$ inegalitatea dată etc. **6.** 1) $(f-2)(f-3) \le 0 \Rightarrow f^2 - 5f + 6 \le 0$ plus integrare pe $[0,1]$; 2) $f(1) \le f(x) \le f(3)$; **7.** $f(x) = x^3 + 1$; **8.** $x = 2$ punct de minim și

$F(2)=\frac{1}{2}\ln 5-\ \ -2\operatorname{arctg} 2$; 9. 1; 10. $\pi/6$; Varianta B. 1. $D=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$; 2. 1) 5; 2) -2; 3) 0; 4) -3; 3. 4π; 4.3; 6. 2) $f(4)\le f(x)\le f(2)$; 7. $f(x)=x^2-2x$; 8. $x=1$ punct de maxim, $F(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$; 9. -1; 10. $\pi\left(\frac{15}{2}-8\ln 2\right)$;

Testul 3 (grilă). Varianta A. 1.b); 2.a); 3.c); 4. b); 5. a); 6. c); 7. 1)b); 2)a); 3)b). 8. c); 9.a); 10.b); Varianta B. 1. a); 2. b); 3. a); 4. b); 5. c); 6. a); 7. 1)b); 2)a); 3)b); 8. c); 9. a); 10. a).

Capitolul 3. Teste de recapitulare finală

1. Teste pentru pregătirea examenului de bacalaureat

Testul 1. I. 1. a); 2. d); 3. b); 4. a); 5. b); 6. $-\frac{1}{x^2}$; 7. $f'(1)=-1$; 8. $x=0$; 9. $\ln 2$; 10. 1; **II.** a) $x=1$; b) $\sqrt{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) 18; e) 48; **III.** c) Se pune $x=y=0$; d) $f(2)=2t$, $f(2)>f(1)\Rightarrow t\ge 0$ e) $f(n)=nt$, inducție; $f(-n)=-f(n)\Rightarrow f(a)=ta, \forall a\in\mathbb{Z}; b\in\mathbb{N}$, $f\left(b\sqrt{2}\right)=f\left(\sqrt{2}+...+\sqrt{2}\right)=bf\left(\sqrt{2}\right)$, $f\left(-b\sqrt{2}\right)=-f\left(b\sqrt{2}\right)=-bf\left(\sqrt{2}\right)$; **IV.** a) $2e^{2x}$; c) $y=0$; d) $2^{n+1}-1$; e) 1; f) $\frac{1}{2}$.

Testul 2. I. 1. a); 2. b); 3. a); 4. a); 5. d); 6. $-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$; 7. $f'(0)=0$; 8. Nu există; 9. $\frac{7}{3}$; 10. $x_{max}=0$; **II.** a) $y=x+2$; c) 1; d) $\sqrt{2\left(n^2+2n+2\right)}$; e) 7; f) 15; **III.** a) $a=1\Rightarrow I_2\in H$; b), c) Prin calcul; d) $AB=BA=I_2$; **IV.** a) $y=0$; d) ∞; e) 1; f) $\ln\frac{27}{16}$.

Testul 3. I. 1. 9; 2. $\frac{2}{5}$; 3. zero soluții; 4. 325; 5. 5; 6. $\frac{1}{x}$; 7. $f'(1)=1$; 8. $x=0$; 9. $e-1$; 10. $\frac{2}{3}$; **II.** 11. $\sqrt{2}$; 12. $y=x$; 13. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; 14. $2-3i$; 15. 1; 16. $\sqrt{7}$; **III.** a) $\{1, 5\}$; b) 5; e) $x=y=0$; **IV.** a) $-\frac{1}{(x+1)^2}$; b) $f'(x)<0$ pentru $x\ge 0$; e) $1+\ln 2$; f) $x=\frac{p}{2}$, $y=\sqrt{2}$ în d).

Testul 4. I. 1. b); 2. a); 3. b); 4. c); 5. c); 6. $a=-b=\frac{1}{2}$; 7. $\frac{1}{4}$; 8. $f'(2)=-\frac{11}{36}$; 9. $x=\pm 1, x=0$; 10. $\ln\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$; **II.** a) $D\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$; b) $B\left(\frac{21}{8},1\right)$; c) $B'\left(-\frac{21}{8},-2\right)$; d) $AC=\sqrt{65}$, $BB'=\frac{\sqrt{585}}{4}$, $S=\frac{AC\cdot BB'}{2}$; **III.** d) $A_{2xu}=A_x\Rightarrow u=\frac{1}{2}$; e) $x=\frac{1}{2\sqrt[n]{2}}$; **IV.** a) $a=-b=1$; b) 0; c) $y=x$ la $\pm\infty$; d) $f'(x)\ge 0, \forall x\Rightarrow f$ crescătoare pe $\mathbb{R}$; e) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

Testul 5. I. 1. d); **2.** b); **3.** b); **4.** c); **5.** a); **6.** impară; **7.** $f'(x)\ge 0$ dacă $x<0$ şi pentru $x\ge 0$, $x=0$ nu este punct de extrem; **8.** 0; 0; **9.** $\frac{19}{2}$; **10.** $x=0$; **II.** a) $\alpha=-3,\beta=-2$; b) $y=\frac{3}{4}x$; c) $-7\vec{i}+\vec{j}; 5\sqrt{2}$; e) $C(-7,1); 25$; **III.** a) $x*y>2\Leftrightarrow (x-2)(y-2)>0$; c) $e=3$; **IV.** b) $f\searrow$ pe $\left(0,\frac{1}{e}\right]$; $f\nearrow$ pe $\left[\frac{1}{e},\infty\right)$; c) $(0,\infty)$; e) $a_n=e^{-\frac{1}{n}}; a_n\to 1$.

Testul 6. I. 1. b); **2.** c); **3.** a); **4.** b); **5.** a); **6.** $f'(1)=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; **7.** $y=0$; **8.** 0; $\frac{1}{2}$; **9.** 0 puncte de extrem; **10.** 1; **II.** a) $A(1,1), B(3,3), C(-1,3)$; b) $AB=AC=2\sqrt{2}$; c) 4; d) 2; e) $C_0(1,3), R=2, (x-1)^2+(y-3)^2=4$; **III.** a) $\det(A)=m(m^2-1)$; c) 1) $m\in\{\pm1\}$; 3) $\det(A)\neq 0\Rightarrow m\in\mathbb{R}-\{0,\pm1\}$; **IV.** b) $a=-b=\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{12}$; d) $m=\frac{1}{2}, n=1, p=\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{2}\ln\frac{32}{27}$.

Testul 7. I. a) 4; b) 5); c) $\sqrt{2}$; d) $\vec{v}=\frac{3\vec{u}}{2}$ e) 2) f) $\cos 15^0=\cos\left(45^0-30^0\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; **II. 1** a) $(n+2)(n+3)$; b) $a_1=1, r=2$, $n=14$; 196; c) 1) d) $3^x=y>0$; 1; e) $n\in\{3,4,5\}$; $\frac{3}{5}$; 2. b) $\frac{4}{3}-\cos 1$; c) 0; d) $f''(x)>0\Rightarrow f$ convexă; e) 0; **III** a) $O_2\in I(A)$ cu $a=b=0$; $I_2\in I(A)$ cu $a=0,b=1$; c) $\det(A)\neq 0\Rightarrow \operatorname{rang}(A)=2$; e) $A^{2007}=\left(A^3\right)^{669}\overset{d)}{=}(-I_2)^{669}=-I_2$; f) $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}, AB=BA\Rightarrow$ $\Rightarrow(a=d, b=c=0)\Rightarrow B=0\cdot A+aI_2\in I(A)$; g) $Y=aA+bI_2\Rightarrow\det(Y)=a^2-ab+b^2\neq 0$;

IV b) $f'(0)\overset{a)}{=}-\frac{4}{5}$; c) $x<-1\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f$ s.c. pe $(-\infty,-1]$; $x>-1\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f$ s.d. pe $[-1,\infty)$; d) 0; e) $x<x+2\Rightarrow \operatorname{arctg}x<\operatorname{arctg}(x+2)$; $f(x)\overset{c)}{\le} f(-1)=\frac{\pi}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$; g) $\int_0^1 f(x)dx=\left(3\operatorname{arctg}3-\frac{1}{2}\right)\ln 10-2\operatorname{arctg}2+\ln\frac{5}{2}-\frac{\pi}{4}+\ln\frac{2}{2}$.

Testul 8. I. a) $m_2=m_2\Rightarrow -1=-\frac{2}{a}\Rightarrow a=2$; b) $\frac{8\cdot 5}{2}=20$; c) $i^k+i^{k+1}+i^{k+2}+i^{k+3}=0$; $z=-1$; 1; d) $(x-1)^2+y^2-4=0$; $r=2$; e) 0; f) $\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$; **II. 1.** a) $f(1)=2$; b) $2a-a^2=2b-b^2=2$; $\frac{2}{3}$; c) $3^y=x>0$; 1; d) $\log_2 x=7$; 4; e) 2; 3. a) $\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$; b) $(0,\infty)$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0\Rightarrow y=0$, a.v.; d) 1; e) $\frac{\pi}{4}$; **III.** a)–b) calcul; c) $\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}$; d) inducție + b);

f) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; g) $X^2 = Y^2 = O_2 \Rightarrow \ \Rightarrow \det(X) = \det(Y) = 0 \overset{b)}{\Rightarrow} tr(X)X = O_2 =$

$= tr(Y)Y = 0 \Rightarrow tr(X) = tr(Y) = 0$; IV. a) $f(0) = 0, f'(0) = 0$; d) $f'(x) = 1/\cos^2 x + \cos x - 2$;

$t = \cos x; h:(0,1) \to \mathbb{R}, h(t) = 1/t^2 + t - 2 \Rightarrow h'(t) \le 0 \Rightarrow h \searrow \Rightarrow h(t) \ge h(1) = 0$;

e) $0 \le x \overset{d)}{\Rightarrow} f(0) \le f(x)$; h) g.s.d $\Rightarrow g(x) \le g(0) = 1, x \in [0,1]$, care se integrează pe $[0,1]$.

Testul 9. I. a) $\frac{12\cdot 5}{2} = 30$; b) $\sqrt{10}$; c) $\sqrt{17}$; d) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix} = 0$; e) $l^2 = 100 \Rightarrow l = 10; 40$;

II. 1. a) $f(-1) = -12$; b) $x \in \{0,1,2,3\}$, $\frac{4}{5}$; c) $f(2) = 0 \Rightarrow g(0) = f^{-1}(0) = 2$; e) $\sum x_1^3 = -\sum x_1 = 0$;

2. a) $f'(x) = 3x^2 + 1$; b) $f' > 0 \Rightarrow f$ s.c.; c) $f'(-2) = 13$; d) ± 1; e) $-\frac{8025}{4}$; III b) din a) cu $y = x^2; \pm 1$; e) din d) cu $n = 3, a_1 = 2^{-a}, a_2 = 2^{-b}, a_3 = 2^{-c}$; g) d) cu $a_1 = a_2 = ... = a_n = a$;

IV. b) $f_2(x) = \frac{x^2}{2}$; c) -2; 0; d) Inducție; f) ∞; g) 0.

Testul 10. I. a) $a = 0,\ b = 1$; b) $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow l = 2\sqrt[4]{3}; 6\sqrt[4]{3}$; II. c) $f(x) = 11 \Rightarrow x = 1$;

$f(1) = 11 \Rightarrow g(11) = 1$; d) 0; e) -1; 2. a) $8x^7$; b) $\frac{10}{9}$; c) $f''(x) \ge 0$; d) $f'(1) = 8$; e) $e - \cos 1$; III. a) $\det(A) = 0$; $\operatorname{rang}(A) = 1$; e) $B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; f) $X = aI_2 + bA \Rightarrow AX = XA \Rightarrow X \in G$;

g) $X = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, AX = XA \Rightarrow c = -b,\ a = 2b + d, y = b$; IV. e) $\frac{1}{3}$; f) $I = e - 2$.

Testul 11. I. a) $z = -1 - i$; -1; b) 5; c) $\cos 125^0 = \sin 75^0$; 1; d) $y = 1, x^2 + y^2 = 1$, (0, 1); e) $x^2 + y^2 = 4$; $(\pm 2,0), (0,\pm 2)$; f) $3x - y = 0$; II. 1. a) $a = \sqrt[6]{8}$, $b = \sqrt[6]{9}, 8 < 9 \Rightarrow a < b$; b) $7 \cdot 8 = 56$;

c) $2^2 < c < 2^3$; d) $2 \le \frac{2d}{3} < 3 \Leftrightarrow 6 \le 2d < 9 \Rightarrow d_1 = 3, d_2 = 4$; e) $X^3 - 2$; 2. a) $\frac{6 - 2x^2}{\left(x^2 + 3\right)^2}$; $x_{\min} = -\sqrt{3}$,

$x_{\max} = \sqrt{3}$; c) $\left[\sqrt{3}, 2\right]$, f s.d. $\Rightarrow a > b$; d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ a.v. la $+\infty$ e) $\ln\frac{4}{3}$;

III. a) $A^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*$; c) $\det(A) \ne 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2$; d) $X = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, XA = AX \Rightarrow a = d, b = 0$;

f) $X^n = A \Rightarrow X^{n+1} = X^n \cdot X = AX$ și $X^{n+1} = X \cdot X^n = XA \Rightarrow AX = XA \Rightarrow X \in G$; g) $X = \begin{pmatrix}a & 0\\ b & a\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = X^{2007} \Rightarrow a^{2007} = 1 \Rightarrow a = 1$; $2007b \cdot a^{2006} = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2007}$; IV. a) $f'(1) = g'(1) = 1$;

c) $h(x)=f(x)-g(x), h'(x)>0 \Rightarrow f$ s.c. $\Rightarrow (x>1 \Rightarrow h(x)\geq h(1)) \Rightarrow x\geq 1$; d) 0; e) $3\ln 3-2$; f) din c); g) din f):

Testul 12. I. a) $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A)$; b) $\sqrt{10}$; c) $y=3x-5$; d) $x+3y-10=0$; e) $r=\frac{\sqrt{10}}{2}$; $C\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$; f) $x+3y-10=0$; II. 1. a) 0; 1; b) $x=\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{4}$; c) 0; d) 182; e) $\hat{2}$, $\hat{5}$; 2. a) $f'(x)=3\left(x^2-1\right)$; b) $f'(1)=0$; c) 8; d) $x_{\max}=-1, x_{\min}=1$; e) $-\frac{21}{4}$; III. a) $I_3=A(0)\in G$; b) 1; c) $\det(A(2))\neq 0 \Rightarrow A(2)$ inv. și $[A(2)]^{-1}=A(-2)$; e) $A(x)=A(y)\Leftrightarrow x=y$; $A(x)A(x')=A(x+x')=A(0)\Leftrightarrow -x=x'$; f) se aplică d); IV. c) $f'(x)>0$ pentru $x>2$; d) $x_{\max}=-2, x_{\min}=2$; f) $y+3x-3=0$; g) $-\frac{4}{3}$.

Testul 13. I. a) 2; b) $y=2$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) 0; e) $2\sqrt{2}$; f) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; II. 1. a) $a_1=2, r=3$; $a_6=17$, b) $-1,0,1,2$; c) $3\cdot 4\cdot 4=48$; d) $x=3$; $\frac{1}{4}$; e) A; 2. c) $\frac{1}{2}$; e) $\ln\frac{7}{3}$; III: a) $x=[x]+\{x\}, [x]\in\mathbb{Z}, \{x\}\in[0,1)$; b) $A=B=\frac{8}{3}$; d) $1\wedge\frac{1}{2}=1\neq\frac{1}{2}\wedge 1=\frac{3}{2}$; e) $a\wedge e=a, \forall a \Leftrightarrow a+[e]=a \Leftrightarrow e\in[0,1)$; $e\wedge a=a$, $\forall a \Leftrightarrow e=\{a\}\in[0,1)$; f) $c\in[0,1)$; g) $H=\{0\}$; IV. c) $x_{\min}=1$ și $f(x)\geq f(1)=1, \forall x\geq 1$; d) 1; e) $\frac{e^2-3}{2}$; f) $-2\pi^2$; g) $g(n)=1\to 1$.

Testul 14. I. a) $\sqrt{5}$; b) 2; c) $\sqrt{2}$; d) $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$; e) $(0,-2)$; f) $-3+4i;-3$; II. 1) –2; 1; b) $a_1=1, r=2$, $a_7=13$; c) 0; d) 1; e) $P(1)=2\Rightarrow a=4$; 2. a) $(1-x)e^{-x}$; b) $x=1$; c) $(-2+x)e^{-x}$; $x=2$; d) –1; e) 0; III. a) 0; b) 2; e) $a=2, b=1$; f) $B^k=(B$, pentru k impar; B^2 pentru k par) $\Rightarrow A^n=I_3+2^{n-1}B+\left(2^{n-1}-1\right)B^2$ și $k=2^n-1$ cu $A^n=I_3+B+...+B^k$; g) $a_{22}=n$ (în membrul stâng) și $b_{22}=1$ (în dreapta); IV. b) 1; e) $1-\ln(e+x)+\ln(e+x)[1-\ln(e+2x)]$ și d); $-\frac{3}{e}$; g) Se aplică f) unde $a_1=\ln(e+x),...,a_n=\ln(e+nx)$; $-\frac{n(n+1)}{2e}$.

Testul 15. I. a) $2+5i$; b) $4\sqrt{2}$; c) 5; d) –1; e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; f) i; $a=0, b=1$; II: 1. a) 10 b) 1; c) $\frac{1}{9}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $n=1$; $\frac{1}{5}$; 2. a) e^x+2; b) $e+1$; c) $f'(0)=3$; d) $f'>0\Rightarrow f$ s.c.; e) $\frac{1}{5}$; III. d) Se aplică c); $\frac{2007}{2008}$; f) $g=\left(X+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ cu $t^2\neq-\frac{1}{4}$; g) $g=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{i}{2}\right)^2$; IV. d) $x\in[0,1]\Rightarrow f(x)\in[1,2]$ plus c).

2. Teste pentru pregătirea examenului de admitere în facultate.

Testul 1. Analiză matematică. Subiectul 1. a) $\mathbb{R}-\{-1\}$; b) $1; -\infty$; c) $x=-1, y=x-1$ la $\pm\infty$; d) $(-2,-4)$ maxim, $(0,0)$ minim; e) $4y-3x+1=0$; **Subiectul 2.** a) $(x-1)e^x+\mathcal{C}$; $\frac{1}{2}[\ln x-\ln(x+2)]+\mathcal{C}$;

b) $a=3e$; c) $\frac{3e}{2}\ln\frac{3}{2}$; **Algebră. Subiectul 1.** a) $x\in\{-1,2\}$; b) $a=-4, b=1$; c) $x\in[-1,2]\cup[3,\infty)$; **Subiectul 2.** a) $(a-1)(b-1)$; b) $e=2$; c) $a=1, b\in\mathbb{R}$ sau $a\in\mathbb{R}, b=1$. **Geometrie analitică. Subiectul 1.** a) $6x+5y-26=0$; b) $2\sqrt{61}$; c) $M(1,4), 6y-5x-19=0$; d) $a=-\frac{1}{5}$. **Subiectul 2.** a) $C(-1,8)$, $R=4\sqrt{10}$.

Testul 2. 1. B); 2. D); 3. C); 4. A); 5. A); 6. E); 7. B); 8. D); 9. C); 10. A).

Testul 3. 1. a); 2. c); 3. b); 4. a); 5. b); 6. c); 7. f); 8. b); 9. e); 10. e); 11. b); 12. e); 13. d); 14. a); 15. e); 16. a) 17. f); 18. f).

Testul 4. 1. d); 2. c); 3. e); 4. c); 5. a); 6. e); 7. b); 8. d); 9. a); 10. b).

Testul 5. 1. b); 2. a); 3. c); 4. b); 5. d); 6. c); 7. b); 8. e); 9. d); 10. d); 11. b); 12. c); 13. a).

Testul 6. Subiectul 1. 1. a); 2. b); 3. b); **Subiectul 2.** 1. a); 2. a); 3. a); **Subiectul 3.** 1. b); 2. b); 3. c); **Subiectul 4.** 1. b); 2. a); 3. d); **Subiectul 5.** 1. c); 2. b); 3. c).

Testul 7. 1. a) $(1-m)t^2+2t+3-2m$; b) $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup(2,\infty)$; d) $m=2$; 2. a) $m=1$; c) $-\frac{1}{2}+\ln 2$; 3. a) $C_1(2,2), C_2(5,2)$; b) $D\left(\frac{7}{2},2\right)$, $y=2x-5$; c) $1\geq\cos(2B-2C)$.

Testul 8. 1. C); 2. D); 3. E); 4. C); 5. B); 6. A); 7. B); 8. A); 9. E); 10. D); 11. A); 12. E); 13. A); 14. C); 15. A); 16. D); 17. C); 18. E); 19. B); 20. C).

Testul 9. 1. e); 2. c); 3. c); 4. d); 5. a); 6. e); 7. d); 8. e); 9. c); 10. e).

Testul 10. 1. i) $m\in(-6,2)$; ii) $m\in\{-4,0\}$; 2. i) 0; ii) $-2, 4, -6$; 3. i) $\{1,3\}$; 4. i) 0; ii) $\frac{x^2}{x^2+1}$; 5. i) $A=1$, $B=-1, C=0$; ii) $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$.

Testul 11. 1. c); 2. d); 3. b); 4. c); 5. d); 6. b); 7. d); 8. b); 9. c); 10. a); 11. a); 12. d); 13. b); 14. b); 15. a); 16. b); 17. a); 18. c).

Testul 12. 1. b); 2. e); 3. b); 4. d); 5. a); 6. a); 7. a); 8. d); 9. c); 10. c); 11. b); 12. b); 13. c); 14. a); 15. a); 16. a) 17. b); 18. d).

Testul 13. Disciplina: Algebră 1. a); 2. d); 3. c); 4. a); 5. e); 6. a); 7. d); 8. d); 9. d); 10. d); 11. e); 12. e); 13. b); 14. e); 15. a); 16. d).

Disciplina: Analiză matematică 1. b); 2. e); 3. c); 4. d); 5. b); 6. e); 7. c); 8. c); 9. b); 10. e); 11. d); 12. e); 13. b); 14. c); 15. c).

Testul 14. 1. d); 2. d); 3. a); 4. b); 5. d); 6. d); 7. c); 8. e); 9. e); 10. a); 11. c); 12. d).

Testul 15. 1. d); 2. c); 3. a); 4. b); 5. e); 6. e); 7. b); 8. a); 9. b); 10. c); 11. e); 12. a).