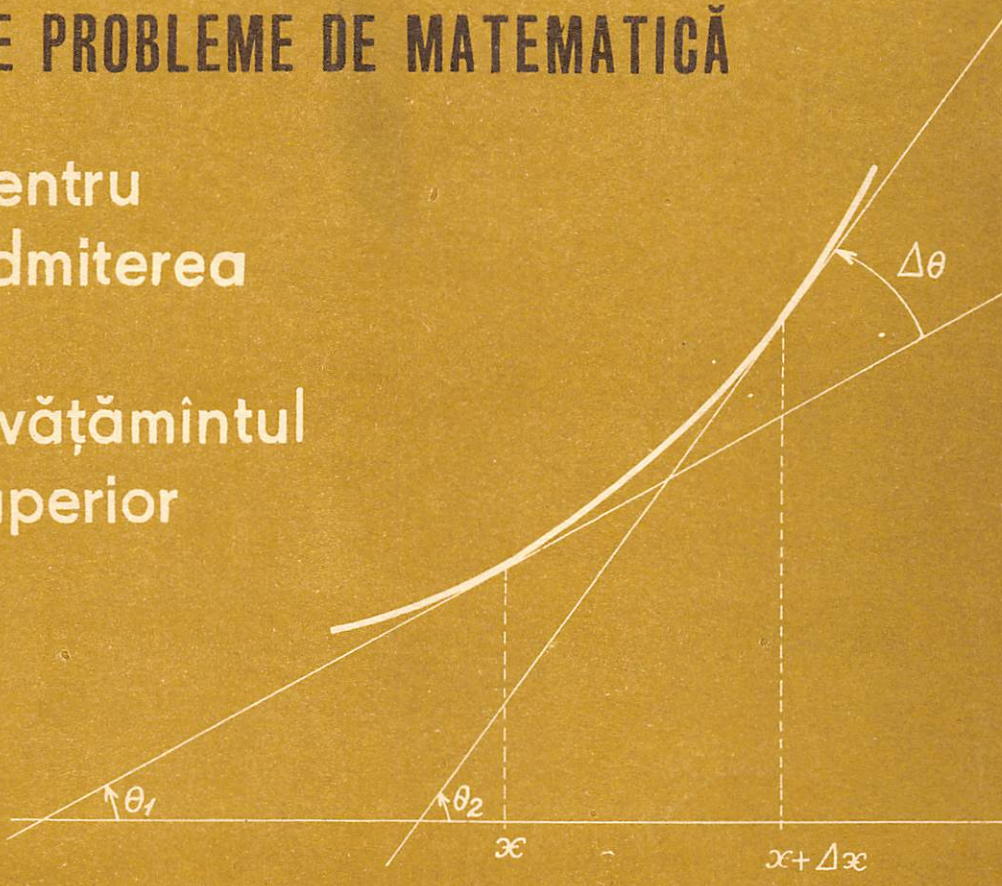
A. CORDUNEANU
GH. RADU
I. POP
V. GRĂMADĂ

CULEGERE
DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

pentru admiterea în învățămîntul superior



EDITURA JUNIMEA

CULEGERE

DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

PENTRU ADMITEREA

ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR

Coperta : M. BERNESCU

Redactor : MIHAIL GRADINARU
Tehnoredactor : CONST. PETRESCU

Apărut 1972. Format 70 × 100/16
Coli de tipar 12.
Tiraj 73.140 exemplare
EDITURA JUNIMEA IAȘI
Palatul Culturii
România

Tiparul executat la Întreprinderea poligrafică Bacău

GH. RADU • A. CORDUNEANU • V. GRĂMADĂ • I. POP

CULEGERE
DE PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU ADMITEREA ÎN ÎNVĂŢĂMÎNTUL SUPERIOR

JUNIMEA, 1972

CUPRINS

PREFAȚĂ

Prezenta culegere de probleme se adresează în primul rînd candidaților la examenul de admitere în facultăți și elevilor claselor speciale de matematică, însă poate fi consultată și de către studenții anului I din învățămîntul tehnic superior sau universitar.

Culegerea cuprinde trei capitole : algebră, analiză matematică și geometrie, problemele fiind originale în cea mai mare parte. La capitolul algebră, autorii au considerat că este util să se prezinte și probleme din cele mai reprezentative date în ultimii ani la examenul de admitere în învățămîntul superior, precum și probleme în care intervin structurile algebrice (grup, inel, corp). Capitolul de analiză se ocupă cu chestiuni mai puțin tratate în alte culegeri (de ex. funcții convexe, schimbarea de variabilă), dar conține și unele probleme clasice cărora li se dă rezolvarea cea mai simplă cu putință. În capitolul de geometrie s-a insistat mai mult asupra aplicațiilor unor teoreme mai puțin cunoscute (Menelaus, Ceva, Simpson etc.).

Autorii au considerat că este bine să nu se dea rezolvarea tuturor problemelor, ci numai a celor mai dificile. Pentru anumite probleme sînt date indicații, suficiente însă pentru un bun rezolvitor.

Autorii

ALGEBRĂ

1. a) Se dă polinomul

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + mx + p.$$

Să se determine m și p astfel ca $P(x)$ să fie divizibil cu $x^2 + 1$. Fie $Q(x)$ cîtul obținut cu m și p determinați la punctul precedent. Să se calculeze suma $S = Q(1) + Q(2) + ... + Q(n)$.

(*Şt. ec. București, 1970*)

b) Să se determine p și q reali din polinomul $P(x) = x^2 + px + q$ astfel încît $P(x^2 + 1)$ să se dividă prin $P(x)$.

(*Şt. ec. București, 1969*)

2. Să se demonstreze că $(1 + x)^{6m+1} - (1 + x)^{6p+1}$ se divide cu $x^2 + x + 1$, unde $m, p \in N$.

(*Inst. pedagogic de 3 ani, Oradea, 1970*)

3. Fie z un număr complex astfel încît, $|z - a| = \sqrt{a^2 - b^2}$ unde a, b sînt două numere reale care satisfac inegalitățile, $a > b > 0$.

Să se arate că $\left|\dfrac{b - z}{b + z}\right| = \sqrt{\dfrac{a - b}{a + b}}$.

4. Să se rezolve în corpul numerelor complexe, ecuațiile:

a) $x^{2n} - 1 = 0$

b) $x^{2n} + 1 = 0$; unde n este un număr natural oarecare și apoi să se arate că,

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) \text{ și}$$

$$x^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1\right).$$

5. Să se rezolve în corpul complex ecuația,

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)+1=0.$$

6. Fie numerele complexe,

$$A=1+i,\ B=3+2i,\ C=-1+2i,\ D=-3+6i.$$

Să se determine a, b încît prin transformarea $f(z)=az+b$ perechea (A, B) să treacă în perechea (C, D).

7. Să se arate că $E(x, y, z)=x^2+5y^2+11z^2-4xy-2xz+10yz$, se poate exprima ca o sumă de pătrate ale unor polinoame de gradul întîi în nedeterminatele x, y, z, și apoi să se deducă că $E(x, y, z)\geqslant 0$, oricare ar fi x, y, z, numere reale. Să se determine x, y, z, încît $E(x, y, z)=0$.

8. Se consideră, polinomul,

$$E(x, y, z)=x^3+x^2y-2x^2z-2xyz+2xz+2yz-x-y$$

a) Să se arate că $E(1, y, z)$ este identic zero.

b) Folosind rezultatul de la punctul precedent să se descompună $E(x, y, z)$ într-un produs de polinoame de gradul întîi în x, y, z.

9. Se consideră polinomul, $E=x^2-y^2-z^2+2ayz+x-y+z$, unde a este un parametru real.

a) Să se determine o valoare a lui a încît polinomul $E(x, y, z)$ să admită o descompunere în factori liniari în x, y, z și apoi să se scrie această descompunere.

b) Să se determine a încît $E(x, y, z,)$ să fie pătratul unui polinom de gradul întîi în x, y, z cu coeficienți reali.

10. Să se rezolve următoarele inecuații:

a) $|x^2-3x-3|<1.$

b) $|x-1|+|x^2-4|-1<0$

c) $\dfrac{\log_a^2 x-3\log_a x+2}{x^2-4}>0,\quad 0<a<1.$

d) $\dfrac{\log_a(x^2-3x-3)}{\log_b(x^2-5x-5)}>0,\quad 0<a<1,\quad b>1.$

11. Fie sistemul de ecuaţii,

$x^3 + y^3 - 2(x + y) = 25\,a$

$x^2 - xy + y^2 = 7$ unde a este un parametru real.

a) Să se rezolve sistemul pentru $a = 1$

b) Să se determine a astfel încît,

$\frac{xy}{x+y} < 0$ unde (x, y) este o soluţie oarecare a sistemului dat.

c) Să se determine a încît pentru orice soluţie (x, y) a sistemului să avem $x > 0,\ y > 0$.

12. Fie polinomul $P(x) = (3 - m)x^2 + 2mx + m$ unde m este un parametru real, $m \neq 3$. Să se determine valorile lui m astfel încît:

1°. Polinomul $P(x)$ să fie pozitiv oricare ar fi x real.

2°. Polinomul $P(x)$ să fie negativ pentru orice valoare reală a lui x.

3°. Ecuaţia $P(x) = 0$ să admită o singură rădăcină în intervalul $(0,3)$.

4°. Ecuaţia $P(x) = 0$ să admită două rădăcini distincte sau egale în intervalul $(0,3)$.

5°. Ecuaţia $P(x) = 0$ să admită o rădăcină mai mică decît zero şi cealaltă să fie mai mare decît trei.

6°. Rădăcinile ecuaţiei $P(x) = 0$, fie acestea x_1, x_2, să satisfacă relaţia $x_1 = 2\,x_2$.

7°. Dacă x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $P(x) = 0$ să se formeze ecuaţia în y ale cărei rădăcini sînt $y_1 = x_1 + 3\,x_2$, $y_2 = 3x_1 + x_2$.

8°. Să se studieze realitatea şi semnul rădăcinilor ecuaţiei $P(x) = 0$ în raport cu valorile parametrului m.

9°. Să se calculeze fără a rezolva ecuaţia $P(x) = 0$ diferenţa dintre cea mai mare şi cea mai mică rădăcină ale acestei ecuaţii, (cînd admite rădăcini reale).

10°. Să se rezolve inecuaţia,

$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} < 1$ unde x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $P(x) = 0$ cînd aceasta admite rădăcini reale.

13. Fie ecuaţia,

$x^2 - (3m + 4)x + (m + 1)^2 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2.

a) Să se discute natura şi semnul rădăcinilor ecuaţiei considerate în raport cu diversele valori pe care le ia parametrul m.

b) Să se determine o relaţie independentă de m între rădăcinile x_1, x_2.

14. Să se discute, după valorile reale ale parametrului m, natura și semnele rădăcinilor ecuațiilor ;

a) $2mx^3 + (2 - 7m)x^2 - (2 - 7m)x - 2m = 0$
b) $2(m - 1)x^3 - (m^2 + 3)x^2 + (m^2 + 3)x - 2(m - 1) = 0$
c) $(2m - 1)x^4 - 2(m + 1)x^2 + m + 1 = 0$
d) $(3m - 2)x^4 + (2m + 1)x^2 - m = 0$

(Șt. ec. București, 1969)

15. Să se discute ecuația :

$$x^6 + (m + 1)(x^2 + 1) + 1 = 0$$

(A. S. E. București, 1971)

16. Se consideră ecuația,

$3x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$ unde a, b sînt parametri reali.

a) Să se determine parametrii a, b încît ecuația considerată să admită rădăcina $2 + i$.

b) Să se determine condițiile pe care trebuie să le satisfacă parametri a, b astfel încît ecuația considerată să admită o rădăcină egală cu -2, iar celelalte să fie reale și pozitive.

17. Se dă polinomul

$$P(z) = 2(m + 1)^2z^4 - 2(m + 1)(4m + 1)z^3 + (11m^2 - 8)z^2 -$$
$$- (7m^2 - 10m - 8)z + 2m(m - 2) \text{ unde } m \in R - \{-1\}.$$

a) Să se arate că $P(z)$ este divizibil cu $Q(z) = z^2 - 3z + 2$ și să se afle cîtul.

b) Să se discute natura și semnul rădăcinilor ecuației $P(z) = 0$ în funcție de valorile lui m.

(Inst. politehnic, Galați, 1970)

18. Se dă ecuația

$$f(x) = (m^2 - 1)x^2 - 2(m^2 + 2)x + m^2 - 4 = 0$$

unde m este un parametru real.

a) Să se discute natura și semnele rădăcinilor ecuației și să se rezolve.

b) Să se afle valorile lui m astfel încît ecuația dată să aibă numai o rădăcină cuprinsă în intervalul $[-1, 1]$.

c) Pentru ce valori ale lui m,

$$(m^2 - 1)x^2 - 2(m^2 + 2)x + m^2 - 7 \leqslant 0$$

oricare ar fi x real ?

(I. P. Brașov, 1971)

19. Pentru ce valori ale parametrului α ecuaţia în x: $f(x) = x^2 \cos\alpha - 2x \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha - 1 = 0$ are rădăcini reale?

Pentru ce valori ale lui α, punctul $x = 1$ separă rădăcinile reale ale ecuaţiei?

(Fac. matematică-mecanică, Cluj, 1971).

20. a) Se dă ecuaţia

$$x^3 + px + q = 0,$$

se cere să se găsească relaţia dintre p şi q astfel ca două rădăcini să fie $\sin\alpha$ şi $\cos\alpha$.

b) Se dă ecuaţia

$$x^3 + px^2 + q = 0$$

să se găsească relaţia dintre p şi q astfel ca două rădăcini să fie $\operatorname{tg}\alpha$ şi $\operatorname{ctg}\alpha$.

. Ec. Bucureşti, 1970)

21. Se dă ecuaţia

$$4(1 + a^2)x^4 - 8(a^2 + a + 1)x^3 - (a^2 - 16a + 1)x^2 + \\ + 2(a^2 + a + 1)x - 4a = 0$$

unde a este un parametru.

a) Să se rezolve ecuaţia ştiind că admite rădăcini raţionale independente de a.

b) Să se arate că oricare ar fi a real ecuaţia are trei rădăcini reale cuprinse în intervalul $[-1, 1]$.

c) Să se găsească valorile lui a pentru care ecuaţia dată are o rădăcină dublă.

d) Să se determine valorile lui a pentru care avem relaţia

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{17}{2}$$

(I. P. Bucureşti, 1970)

22. a) Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 - x^3 + mx^2 + 13x + n = 0,$$

cu coeficienţi raţionali, ştiind că admite rădăcina $3 + \sqrt{2}$.

b) Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 + ax^3 + 3x^2 + 2x + b = 0,$$

cu coeficienţi reali, ştiind că admite ca rădăcină $1 + i$.

(Şt. ec. Bucureşti, 1970)

23. a) Să se rezolve ecuația

$$4x^4 - 20x^3 + 35x^2 - ax + 6 = 0$$

știind că între rădăcini există relația,

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

b) Să se rezolve ecuația

$$x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + m = 0,$$

știind că produsul a două rădăcini este egal cu produsul celorlalte rădăcini.

c) Să se determine parametrul real m și să se rezolve ecuația

$$x^4 - 8x^3 + mx^2 - 19x + 6 = 0,$$

știind că $x_1 + x_2 = 5$.

d) Să se determine parametrul real m și să se rezolve ecuația

$$x^4 - 2x^3 - 6x^2 + mx - 3 = 0,$$

știind că $x_1x_2 = 3$.

(Șt. Ec. București, 1970)

24. a) Să se determine parametrii reali a, b și m și să se rezolve ecuațiile

$$x^4 + ax^2 + bx + 2 = 0 \quad \text{și} \quad x^3 - 4x + 2m = 0$$

știind că au o rădăcină dublă comună.

b) Să se determine parametrii m și n astfel ca ecuațiile

$$x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x + m = 0 \quad \text{și} \quad x^3 - 7x + n = 0$$

să aibă două rădăcini comune și să se rezolve ecuațiile.

(Șt. Ec. București, 1970)

25. Fie $P(x) = x^3 - 6x^2 + a$ unde a este un parametru real și fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $P(x) = 0$.

a) Să se calculeze expresia

$$E = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1^2} + \frac{x_3^2 + x_1^2}{x_2^2}$$

cu ajutorul coeficienților polinomului $P(x)$.

b) Să se rezolve ecuația $P(x) - 2x = 0$ știind că produsul a două rădăcini este -2.

c) Să se determine parametrul a astfel încît ecuația $P(x) + 10 = 0$ să admită o rădăcină egală cu $1 + i$.

d) Să se determine parametrul a încît ecuația $P(x) = 0$ să admită o rădăcină egală cu $1 + \sqrt{3}$.

26. Se dă polinomul $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avînd coeficienții a, b, c, d (în această ordine) în progresie geometrică cu rația $q > 0$.

a) Să se arate că ecuația $P(x) = 0$ are o singură rădăcină reală și că toate rădăcinile acestei ecuații au același modul.

b) Notînd cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ să se arate că oricare ar fi numărul natural n suma $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ este reală.

În ce caz $S_n > 0$?

c) Pentru $a = 1$, să se determine rația q astfel ca ecuația $P(x) + P\left(\frac{1}{x}\right) = 16$ să admită rădăcina $x = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ și apoi să se rezolve această ecuație.

(I. P. București, 1970)

27. Se consideră ecuația

$$6 \cos 2\alpha - 7x \cos^2 \alpha + x^3 = 0 \tag{1}$$

și se cere:

1°. Considerînd ecuația (1) ca avînd necunoscuta α și parametrul x, să se determine valorile lui x pentru care ecuația admite soluții.

2°. Considerînd ecuația (1) ca avînd necunoscuta x și parametrul α, să se determine valorile lui α astfel încît una din rădăcinile ecuației să fie dublul alteia.

3°. Pentru valorile lui α determinate la punctul 2° să se afle efectiv rădăcinile x ale ecuației (1).

(Inst. politehnic București, 1971)

28. Se dau ecuațiile:

$$x^3 - 27x + a = 0\,; \quad x^4 - 4x^3 + mx^2 - nx + 18 = 0$$

a) Să se separe rădăcinile reale ale primei ecuații în funcție de parametrul real a.

b) Să se determine m și n din ecuația a II-a astfel ca rădăcina dublă pozitivă a primei ecuații să fie rădăcină dublă comună a ambelor ecuații și să se rezolve ecuația a II-a.

(Inst. politehnic, Galați, 1970)

29. Să se discute realitatea rădăcinilor ecuației,

$$2x^3 - 3(3m - 1)x^2 + 12m(m - 1)x + m(m - 1) = 0$$

după diferitele valori ale parametrului real m.

30. Se dă ecuația

$$(m+1)x^3-(m^2+5m-5)x^2+(m^2+5m-5)x-(m+1)=0.$$

a) Să se arate că pentru orice valoare a parametrului real m, rădăcinile ecuației sînt în progresie geometrică.

b) Notînd cu x_2 acea rădăcină care nu depinde de m să se afle m astfel ca x_1, x_2, x_3 să formeze o progresie aritmetică.

c) Să se arate că pentru m găsit, ecuația are toate rădăcinile confundate.

(I. P. Brașov, 1971)

31. a) Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației

$$x^3+2x^2+x+2=0,$$

se cere să se formeze și să se rezolve ecuația care are ca rădăcini pe

$$y_3=\frac{x_1x_2x_3+1}{x_1x_2},\qquad y_2=\frac{x_1x_2x_3+1}{x_1x_3},\qquad y_1=\frac{x_1x_2x_3+1}{x_2x_3}$$

b) Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației

$$2x^3+2x^2-3x-1=0$$

se cere să se formeze și să se rezolve ecuația care are ca rădăcini pe

$$y_1=\frac{x_2+x_3}{x_1},\quad y_2=\frac{x_1+x_3}{x_2},\quad y_3=\frac{x_1+x_2}{x_3}$$

(Șt. ec. București, 1970)

32. Se dă polinomul

$$P(x)=2x^3+mx^2+nx+p$$

a) Să se determine parametrii m, n, p astfel ca să fie divizibil cu polinomul $2x^3+3x^2-1$.

b) Să se rezolve inecuația $P(|x-1|)>0$, cu valorile lui m, n, p determinate la punctul a).

c) Să se formeze ecuația care are rădăcinile,

$$y_1=\frac{x_2x_3}{x_1},\quad y_2=\frac{x_1x_3}{x_2},\quad y_3=\frac{x_1x_2}{x_3}$$

unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $P(x)=0$ cu valorile lui m, n, p determinate la punctul a).

(I. P. Brașov, 1971)

33. Se dau polinoamele:

$$P(x, m) = 2mx^3 + (2m^2 + 2m + 1)x^2 + (2m^2 + m + 1)x + m$$
$$Q(x, m) = 2mx^2 + (2m^2 + 1)x + m$$

$m \neq 0$ fiind un parametru.

a) Să se arate că polinomul $P(x, m)$ se divide prin $Q(x, m)$.

b) Să se determine valorile lui m pentru care ecuaţia $P(x, m) = 0$ admite rădăcina $x = m$.

c) Dacă se notează cu x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei $Q(x, m) = 0$, să se formeze, folosind relaţiile între rădăcini şi coeficienţi, ecuaţia care admite rădăcinile:

$$y_1 = \frac{1}{x_1} - mx_2; \quad y_2 = \frac{1}{x_2} - mx_1$$

(Inst. de construcţii, Bucureşti, 1971)

34. Ecuaţia $x^4 + 4x^3 - 34x^2 + mx + 105 = 0$ (1) are rădăcinile în progresie aritmetică.

a) Să se scrie ecuaţia care are rădăcini inversele rădăcinilor ecuaţiei (1).

b) Să se arate că cele două ecuaţii au o rădăcină comună.

c) Să se rezolve ecuaţia dată.

(I. P. Cluj, 1970)

35. Se consideră ecuaţia

$$x^4 - (2a + 1)x^3 + (a^2 + 2a - 3)x^2 - (a^2 - 4a - 1)x - 2a^2 + 2 = 0$$

unde a este un parametru real şi se cere:

a) Să se rezolve ecuaţia ştiind că admite şi rădăcini întregi independente de a.

b) Să se determine valorile lui a pentru care

$$x_1x_2x_3x_4 \leqslant x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 \leqslant x_1 + x_2 + x_3 + x_4.$$

c) Să se arate cu ajutorul teoremei lui Rolle rădăcinile reale ale ecuaţiei în a,

$$x_1x_2x_3x_4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 12 \ln a = 0$$

unde x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuaţiei date.

(Inst. politehnic, Bucureşti, 1971)

36. Se dă ecuaţia

$$2x^5 + x^4 \sin 4a - x^3 \sin 3a + x^2 \sin 2a - x \sin a + 2 = 0.$$

a) Să se afle valorile parametrului a pentru care această ecuaţie admite rădăcina $x = -1$.

b) Folosind teorema lui Rolle să se determine numărul rădăcinilor ecuației date în cazul particular cînd $a = \frac{\pi}{2}$.

c) Să se arate că oricare ar fi $a \in R$ ecuația dată nu admite pe $x = -1$ ca rădăcină dublă. (Se poate folosi și rezultatul de la punctul a).

(I. P. București, 1970)

37. Fie $P(x) = x^2 - x \log_a y + 3 \log_a y - 8$ (cu coeficienți reali) unde y este un parametru real pozitiv și $0 < a < 1$.

Convenim să notăm cu x_1, x_2 rădăcinile ecuației $P(x) = 0$, în corpul complex.

Să se determine valorile parametrului m pentru care:

1°. $P(x)$ este pozitiv oricare ar fi $x \in R$.

2°. Ecuația $P(x) = 0$ să admită o singură rădăcină în intervalul $(0, 3)$.

3°. Ecuația $P(x) = 0$, admite o rădăcină dublă în intervalul $(0, 3)$.

4°. Ecuația $P(x) = 0$ are două rădăcini reale distincte în intervalul $(0, 3)$.

5°. Rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ satisfac egalitatea $x_1 = 2x_2$.

6°. Rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ sînt ambele negative.

38. Fie funcția $f(x) = \frac{2x^2 - 3mx + 6}{x^2 + 1}$ definită pe toată axa reală, m fiind un parametru real.

a) Să se determine m astfel încît funcția să nu ia nici o valoare mai mică decît $3/2$ sau mai mare decît $\frac{13}{2}$.

b) Să se arate că nu pentru orice $q \in [3/2, 13/2]$ și orice m determinat la punctul a) ecuația

$f(x) = q$ are soluții.

39. Fie ecuația,

$x^2 + 2(m - a)x + 3am - 2 = 0$ unde a și m sînt parametri reali.

a) Există valori ale lui a astfel încît ecuația dată să aibă rădăcini reale oricare ar fi m?

b) Există valori ale lui m astfel încît ecuația dată să aibă rădăcini reale oricare ar fi a?

40. Fie ecuația,

$x^2(1 - m) + 2x(a - m) + 1 - am = 0$ unde a și m sînt parametri reali.

Pentru ce valori ale lui a, ecuația admite rădăcini reale oricare ar fi valoarea parametrului m.

41. Să se rezolve sistemele:

1.
$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+y} + \left(\frac{5}{2}\right)^{x+y} = \frac{29}{10}$$
$$x + y - 3xy = 7$$

2.
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{65}{36}$$
$$xy - x + y = 118$$

(Şt. ec. Bucureşti, 1970)

42. Să se rezolve sistemele:

1. $\lg x + 2\lg y = 0{,}25 + \lg 5$

$3(\lg x - 1) - 2(\lg y - \lg 5) = 0$

2. $xy = a^2$

$(\log x)^2 + (\log y)^2 = \frac{5}{2}(\log a^2)^2$

unde $a = 0$.

3. $\log_a x - \log_a y = 1$

$\log_b x - \log_b y = 1$

4. $\log_a x + \log_a y = \frac{3}{2}$

$\log_b x + \log_b y = \frac{3}{2}$

(Şt. economice Bucureşti, 1971)

43. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii:

1. $x^3y^2 = a^{13}$

$(\log x)^2 + (\log y)^2 = \frac{130}{9}(\log a)^2$

(Institutul de mine, Petroşani, 1971)

2. $\log_a x - \log_{a^2} x = m$

$\log_{a^2} x - \log_{a^2} y = n$

(Institutul pedagogic de 3 ani, Cluj, 1970)

3. $\log_3(\log x + \log y) - \log_9(\log y) = 1$

$\log_9(\log x - \log y) - \log_3(\log y) = 0$

(Institutul politehnic, Braşov, 1970)

44. Să se rezolve ecuația,

$$\log_{\cos x} \sin x + 4 \log_{\sin x} \cos x = 4$$

45. Să se rezolve ecuația,

$$\sqrt{\log_a \sqrt[a^2]{ax} + \log_x ax} = a - \sqrt{\log_a \sqrt[a^2]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[a^2]{\frac{a}{x}}}.$$

unde $a > 0$, $a \neq 1$.

(I. P. Brașov, 1970)

46. Să se găsească valorile lui m pentru care ecuația:

$$\log(x + m - 4) + \log(8 - m) - \log(-x^2) + 2(m + 1)x - m^2 - 2m = 0$$

are cel puțin o soluție.

(I. P. Brașov, 1971)

47. Să se determine x și n, știind că al șaselea termen al dezvoltării binomului:

$$[\sqrt{2^{\log(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{(x-2)\log 3}}]^n$$

este egal cu 21, și că, coeficienții termenilor de rang doi, trei și patru sînt respectiv primul, al treilea și al cincilea termen ai unei progresii aritmetice.

(I. P. Brașov, 1970)

48. Fie $P(a, b) = (a + b)^n$

Dacă $a = \sqrt{2^{\lg(10-3x)}}$, $b = \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}$
să se determine valoarea lui x astfel încît termenul din dezvoltarea binominală a lui $(a + b)^n$ care conține pe b^5 să fie 21 și în plus, coeficienții binominali ai celui de al doilea, al treilea și al patrulea să fie în progresie aritmetică.

49. Se consideră ecuațiile,

$$ax^2 - (a + 2)x + 2 = 0 \quad \text{și}$$
$$ax^2 - (a + 3)x + a + 2 = 0$$

unde a este un parametru real.

a) Să se arate că nu există nici o valoare reală a lui a încît ecuațiile să aibă ambele rădăcini respectiv egale.

b) Să se determine a încît ecuațiile să aibă o rădăcină comună.

50. Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ este o matrice pătratică de ordinul n (cu elemente numere reale) notăm cu $S(A)$ suma elementelor de pe diagonala principală și numim $S(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ urma matricei A.

a) Să se arate că $S(A.B)=S(B.A)$ pentru oricare două matrici pătratice de ordinul n (de un același ordin).

b) Dacă A este o matrice pătratică de ordin n și B este o matrice pătratică nesingulară de același ordin n, atunci $S(B^{-1}AB)=S(A)$.

c) În aceleași ipoteze ca la punctul precedent despre A, să se arate că dacă $S(AX)=0$ oricare ar fi matricea pătratică de ordin n, X atunci $A=0$ (matricea nulă).

51. Dacă $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix}$ este o matrice cu elemente dintr-un inel comutativ A cu unitate 1, atunci

$$X^2 - (x+v)X + (xv - yz)I_2 = 0,$$

unde zero din partea dreaptă a egalității reprezintă matricea nulă de ordinul al doilea.

52. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ cu elemente din corpul numerelor reale. Să se calculeze A^n unde n este un număr natural oarecare.

53. Să se calculeze determinanții următoarelor matrici pătratice (cu elemente reale)

1°. $$A = \begin{pmatrix} \cos^2 a & \cos^2 b & \cos^2 c \\ 1 & 1 & 1 \\ \cos 2a & \cos 2b & \cos 2c \end{pmatrix}$$

2°. $$A = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2-(b-c)^2 & b^2-(c-a)^2 & c^2-(a-b)^2 \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$

3°. $$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & a & -1 \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & a & -1 \\ a_0 & a_1 \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

$$4°.\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ C_n^1 & C_{n-1} & \cdots & C_{n-k+1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_n^{k-1} & C_{n-1}^{k-1} & \cdots & C_{n-k+1}^{k-1} \end{pmatrix}, \quad n > 2(k-1)$$

$$5°.\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

54. Fie $p_1(x) = x + a$, $p_2(x) = x^2 + bx + c$ două polinoame (cu coeficienți reali) și x_1, x_2 două numere reale arbitrare.
Să se calculeze determinantul,

$$D^{(x)} = \begin{vmatrix} 1 & p_1(x_1) & p_2(x_1) \\ 1 & p_1(x_2) & p_2(x_2) \\ 1 & p_1(x) & p_2(x) \end{vmatrix}$$

(G.M.B. 12. 1971)

55. Fie matricea:

$$A = \begin{bmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{bmatrix}$$ (cu elemente numere reale)

Să se arate că,

$$\det A = (b - a)(a + b + c + x)(x + c - b - a)(x + a - b - c).$$

56. Să se calculeze valoarea determinantului,

$$D = \begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & z+1 \end{vmatrix}.$$

unde z este o soluție a ecuației.

a) $z^5 - 1 = 0$,
b) $z^3 - 1 = 0$

57. Se consideră matricele,

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\\ 4 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

a) Să se verifice dacă sînt singulare sau nu.
b) Să se calculeze rangul celor două matrici.
c) Să se arate că $AB \neq BA$.

58. Să se arate că o matrice cu m linii și n coloane cu rangul unu este de forma,

$$\begin{bmatrix}a_1 b_1 & a_1 b_2 \ldots\ldots & a_1 b_n\\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \ldots\ldots & a_2 b_n\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_m b_1 & a_m b_2 \ldots\ldots & a_m b_n\end{bmatrix} \text{unde}$$

$a_1, a_2, \ldots a_m$ sînt convenabil aleși

59. Să se studieze rangul matricei,

$$A=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & x^3\\ a & a & a & a\\ a & a+1 & a+2 & a+3\\ 1 & 4 & 9 & 16\end{bmatrix}$$

unde a, x sînt parametri reali.

60. Se consideră următoarele sisteme de relații,

$$\begin{aligned} x &= 2x_1 + y_1 \\ y &= -x_1 + 2y_1 \end{aligned}\ ,\quad \begin{aligned} x_1 &= x_2 + 3y_2 \\ y_1 &= -x_2 + y_2 \end{aligned}$$

unde, x, y, x_1, y_1, x_2, y_2 sînt mărimi reale.
Să se exprime mărimile x, y funcție de mărimile x_2, y_2 și invers, folosind calculul cu matrici.

61. Să se calculeze inversele următoarelor matrici:

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

și apoi să se rezolve (folosind calculul cu matrici) ecuațiile matriciale,

(*) $A_1X = B$, $A_2Y = B$, $A_3Z = B$ unde

$X' = (x_1, x_2)$, $Y' = (y_1, y_2, y_3)$, $Z'(z_1, z_2, z_3)$

$B' = (1, 0, 2)$.

62. Fie matricea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Să se arate că matricea A este nesingulară și calculînd inversa acesteia să se rezolve ecuația matricială, $AX = B$ unde

$$X' = (x, y, z), \quad B' = (1, 2, 0).$$

63. Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ o matrice cu elemente numere reale și $b \neq 0$. Să se arate că singurele matrici (de ordinul al doilea) care comută cu A în raport cu înmulțirea sînt cele de forma

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} \text{ unde } x, y \text{ sînt numere reale.}$$

64. Fie matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \quad \text{unde } a, b, c \text{ sînt parametri reali}$$

a) Să se calculeze A^{-1} (inversa matricei A).

b) La ce condiții trebuie să satisfacă a, b, c astfel încît să existe trei numere reale m, n, p pentru ca să avem egalitatea, (*) $A^3 = mA^2 + nA + pI_3$, unde cu I_3 am notat matricea unitate de ordin trei.

65. Se consideră matricea $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ unde a, b, c, d sînt numere reale și matricea unitate $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Să se calculeze matricea $E = M^2 - pM - qI_2$, unde p, q sînt parametri reali.

b) Să se determine parametri p,q astfel încît matricea E să fie matricea nulă (cu toate elementele egale cu zero).

c) Să se determine relația între a, b, c, d astfel încît soluția găsită la punctul b) să fie unică

(Facultatea de chimie industrială, București, 1971)

66. Se dau matricele,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} m & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

cu elemente numere reale și m parametru real.

a) Să se determine valoarea parametrului real m astfel încît să existe trei constante nu toate nule a, b, c cu condiția $aA + bB + cC = 0$ (0 din partea dreaptă a egalității notează matricea nulă).

b) Cu m astfel determinat să se găsească aceste constante.

(G. M. B. Nr. 5 1972)

67. Se consideră ecuația $AX = XA'$ cu necunoscuta X în inelul matricelor pătratice de ordinul al doilea cu elemente reale. Să se arate că ecuația admite soluții nebanale oricare ar fi matricea pătratică A, de ordinul al doilea. (A' este transpusa matricei A).

68. Fie $R^3 = (x, y, z)$ $x, y, z \in R$ și $f: R^3 - R^3$ o funcție care asociază tripletului ordonat, (x, y, z), tripletul (x', y', z') unde

$$(S) \qquad \begin{aligned} x' &= 7x + 3y \\ y' &= 3x + 7y + 4z \\ z' &= 4y + 7z. \end{aligned}$$

Să se arate că funcția f este o funcție bijectivă și să se determine apoi inversa acesteia, f^{-1}.

69. Fie $P(x)$ un polinom cu coeficienți reali și gradul mai mare sau egal cu patru.

Resturile împărțirii polinomului $P(x)$ la $x - 1$, $x - 2$, $x + 2$ sînt respectiv, 1, 2, 3.

a) Să se arate că restul împărțirii polinomului $P(x)$ la polinomul $(x - 1)(x - 2)(x + 2)$ nu poate fi un polinom de gradul al doilea, fără a determina restul efectiv.

b) Să se determine restul împărțirii polinomului $P(x)$ la $(x - 1)(x - 2)$ $(x + 2)$.

70. Să se arate că polinomul,

$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ se poate pune sub forma,

(1) $P(x) = Ax(x-1)(x-2)(n-3) + Bx(x-1)(x-2) + Cx(x-1) +$
$+ Dx + E$

71. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații liniare:

1°.
$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$
$$-x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$

2°.
$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 9$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 7$$
$$5x_1 - 10x_2 + 10x_3 + 17x_4 = 47$$

3°.
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 7$$

4°.
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$$
$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4$$
$$x_1 + 2x_3 = 2.$$

72. Să se studieze compatibilitatea următoarelor sisteme de ecuații liniare, considerînd pe a, b, c, d acolo unde apar, ca fiind parametri reali.

1°.
$$x + y = 1$$
$$2x + 3y = 2$$
$$3x + 4y = 3$$

2°.
$$2x + ay = 1$$
$$ax + 3y = 0$$
$$x - y = 0$$

3°.
$$2x - 3y + 6z = 3$$
$$4x - y + z = 1$$
$$3x - 2y + 3z = 4$$

4°.
$$x + 2y - z = 2$$
$$2x - 3y + 7z = -1$$
$$-x + y + 3z = 6$$
$$5x + y - 2z = 0$$

5°.
$$x + y + z = 2$$
$$2x + y - 2z = 2$$
$$ax + y + 4z = 2$$

6°.
$$ax + y + z = 1$$
$$x + 2ay + z = -1$$
$$(a + 1)x + y + 2az = 0$$

7°. $$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 4z &= a \\ x + 4y + 10z &= a^2 \end{aligned}$$

8°. $$\begin{aligned} (1 - a)x + (2a + 1)y + & \\ + (2a + 2)z &= a \\ ax + ay &= 2a + 2 \\ 2x + (a + 1)y + (a - 1)z &= \\ &= a^2 - 2a + 9 \end{aligned}$$

9°. $$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned}$$

10°. $$\begin{aligned} ax + by &= 1 \\ ay + bz &= 0 \\ bx + az &= 0 \end{aligned}$$

11°. $$\begin{aligned} ax + by + z &= 1 \\ bx + ay + bz &= a \\ x + y + az &= b \end{aligned}$$

12°. $$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ ax + by + cz &= d \\ a^2x + b^2 + c^2z &= d^2 \end{aligned}$$

73. Se consideră sistemele de ecuaţii liniare (şi omogene)

1° $$\begin{aligned} ax + (3a + 4)y + 2(a + 1)z &= 0 \\ ax + (4a + 2)y + (a + 4)z &= 0 \\ 2x + (3a + 4)y + 3az &= 0 \end{aligned}$$

2° $$\begin{aligned} (a + b)x + by + az &= 0 \\ bx + (a + b)y + az &= 0 \\ ax + by + (a + b)z &= 0 \end{aligned}$$

unde a, b, sînt parametri reali.

Să se determine parametrii a, (resp. a, b sau relaţii între aceştia), încît sistemele să admită soluţii diferite de soluţia banală şi apoi să se determine soluţia generală.

74. Fie (S) un sistem liniar şi omogen de m ecuaţii cu n necunoscute (cu coeficienţi reali),

$$(S) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

O soluţie a acestui sistem este o n-uplă ordonată $s = (x_1, \dots, x_n)$ de numere reale care înlocuite în ecuaţiile sistemului le verifică.

Să se arate că,

a) Dacă $s = (s_1, ..., s_n)$ este o soluţie a sistemului (S) atunci $-s = (-x_1, ..., -x_n)$ este de asemeni soluţie.

b) Dacă $t = (t_1, ..., t_n)$, $s = (s_1, ..., s_n)$ sînt două soluţii ale sistemului (S) atunci şi $s + t = (s_1 + t_1, ..., s_n + t_n)$ este soluţie a sistemului (S).

c) Dacă $s = (s_1, ..., s_n)$ este soluţie a sistemului (S) şi a este un număr real oarecare, atunci şi $as = (as_1, ..., as_n)$ este soluţie a sistemului (S).

75. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii (liniare şi omogene) şi să se precizeze soluţii particulare suficiente pentru a se determina orice soluţie pentru acestea:

$$1^\circ \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$2^\circ \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

76. Fie A o mulţime dată şi $P(A)$ mulţimea părţilor lui A (mulţimea vidă şi însăşi A se consideră elemente ale mulţimii $P(A)$). Se obţin pe mulţimea $P(A)$ patru operaţii binare, dacă la orice pereche ordonată (A_1, A_2) de elemente din $P(A)$ asociem submulţimea definită prin:

1. $A_1 \cup A_2 = \{a \mid a \in A, \quad a \in A_1 \text{ sau } a \in A_2\}$
2. $A_1 \cap A_2 = \{a \mid a \in A, \quad a \in A_1 \text{ şi } a \in A_2\}$
3. $A_1 - A_2 = \{a \mid a \in A, \quad a \in A_1 \text{ şi } a \notin A_2\}$
4. $A_1 \ominus A_2 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_1)$.

a) Să se arate că operaţiile 1°, 2°, 4°, sînt asociative (comutative) şi că operaţia 3° nu este asociativă (comutativă).

b) Operaţia dată prin egalitatea 4° admite un element neutru şi orice element $A_1 \in P(A)$ are un simetric.

c) Să se precizeze elementele neutre şi asimetrizabile pentru operaţiile definite.

d) Să se arate că numai operaţiile definite prin egalităţile 1° şi 2° sînt distributive una faţă de cealaltă.

77. Fie R corpul numerelor reale. La orice pereche ordonată (a, b) de numere reale, asociem numărul real, $a * b = a + b - ab$.

a) Să se arate că operaţia „*" este comutativă, asociativă cu element neutru.

b) Orice număr real $a \neq 1$ are un element simetric în raport cu operația „ * ".

c) Operația „ * " nu este distributivă față de operația de adunare și de adunare și înmulțire a numerelor reale și nici operațiile de adunare și înmulțire a numerelor reale nu sînt distributive față de operația „ * ".

d) Să se rezolve ecuația $2 * x = 1$ și sistemul

$$x * y = 1$$

$$2x * y = 0.$$

78. În mulțimea N a numerelor naturale se consideră legea de compoziție *, astfel că:

$$a * b = a + b + ab, \quad \text{oricare ar fi} \quad a, b \in \mathrm{N},$$

unde operațiile din partea dreaptă a egalității sînt operațiile obișnuite de adunare și înmulțire a numerelor.

a) Să se observe că operația „ * " este peste tot definită, comutativă și asociativă și să se verifice dacă admite element neutru.

b) Se definește $a^{(n)}$ pt $n \geqslant 1$ prin $a^{(1)} = a$, $a^{(n)} = a^{(n-1)} a$. Să se exprime $a^{(2)}$, $a^{(4)}$ funcție de a și să se deducă expresia generală a lui $a^{(n)}$.

(Bacalaureat, Franța, 1971)

79. Fie R mulțimea numerelor reale și a_1, a_2 două numere reale fixate diferite ambele de zero, $a_1 + a_2 \neq 0$ și $a_1 \neq a_2$. Dacă la oricare pereche ordonată de numere reale (x, y) asociem numerele reale, $x * y = \dfrac{a_1x + a_2y}{a_1 + a_2}$, (resp. $x \circ y = x$) obținem pe R două operații binare, „ * " și „$\circ$".

a) Să se arate că operația „ * " nu este comutativă, nu este asociativă și nu are nici element neutru.

b) Operația „$\circ$" nu este comutativă, nu are element neutru, dar este asociativă.

c) Operația „ * " este distributivă la stînga și la dreapta față de operația „$\circ$" și la fel operația „$\circ$" este distributivă la stînga și la dreapta față de operația „ * ".

80. În mulțimea numerelor reale, R se definește o lege de compoziție asociind la orice pereche ordonată de numere reale (x, y) numărul $x * y = 2x + y$.

a) Să se verifice dacă legea de compoziție „ * " este comutativă sau asociativă.

b) Fie a un număr real dat. Să se calculeze:

$a_2 = a * a$, $a_3 = a_2 * a$ și $a_4 = a_3 * a$ și apoi să se arate că, $a_n = (2^n - 1)a$

(Bacalaureat, Franța, 1971
G.M.B. 4. 1972)

81. Se consideră operația algebrică,

$$x * y = \frac{x + y}{1 - xy}; \quad x, y \in R.$$

Să se studieze proprietățile și să se vadă dacă operația „ * " definește o structură cunoscută.

(Facultatea de fizică, Timișoara, 1971)

82. Fie M mulțimea matricelor pătratice nesingulare de tipul (2, 2) și pe M legea de compoziție „ * " definită astfel: $A * B = A \cdot B + B \cdot A$ unde, A, $B \in M$ și operațiile din partea dreaptă a egalității sînt operațiile obișnuite de adunare și înmulțire a matricelor.

Să se arate că operația „ * ":

a) nu este asociativă;
b) este comutativă;
c) admite un element neutru care se cere;
d) orice element este simetrizabil.

Să se precizeze simetricul unui element $A \in M$.

(G. M. B. 11 — 1971)

83. Fie R mulțimea numerelor reale. Definim pe R o operație binară asociind la orice pereche (a, b) ordonată de numere reale numărul real $a * b$ definit prin egalitatea; $a * b = 2a + b + ab$ (în partea dreaptă a egalității este vorba de operațiile ce definesc corpul real).

a) Operația „ * " nu este comutativă și nici asociativă.

b) Operația „ * " nu este distributivă față de operațiile ce definesc corpul real.

c) Să se rezolve ecuațiile $a * x = a$, $x * a = a$, $x * a = 0$ cu necunoscuta x.

d) Să se determine parametrul λ încît operația definită pe R prin, $a * b = 2a + \lambda b + ab$ să fie comutativă și să se arate că pentru λ determinat operația nu este asociativă.

e) Să se determine parametrii λ, μ (reali) încît operația definită pe R prin,

$a * b = 2\lambda a + \mu b + ab$ să fie comutativă și asociativă.

Să se precizeze proprietățile operațiilor determinate la punctul precedent.

84. O mulţime E este înzestrată cu o lege de compoziţie notată multiplicativ care este comutativă şi satisface următoarele două axiome:

1. Dacă $ab = c$ atunci $ac = b$, $a, b, c \in E$

2. $a.a = a$, oricare ar fi $a \in E$.

a) Să se arate că orice element $a \in E$ este regulat (adică dacă $ac = ab$ atunci $b = c$).

b) Să se arate că ecuaţia $ax = b$, admite o soluţie unică, oricare ar fi $a, b \in E$.

c) Să se arate că dacă E este finită atunci ea are un număr impar de elemente.

(Journal de mathematiques élémentaires, 1969)

85. Fie A o mulţime pe care s-au definit două legi de compoziţie „ $*$ " şi „$\circ$" cu acelaşi element neutru e.

Să se arate că dacă pentru oricare elemente $x, y, a, b \in A$ are loc egalitatea,

1. $(x * y) \circ (a * b) = (x \circ a) * (y \circ b)$ atunci cele două operaţii coincid. În plus, cele două operaţii sînt comutative şi asociative.

86. Fie $(G, *, e)$ un grup. Dacă $a \in G$, notăm cu a' simetricul elementului a în raport cu legea de compoziţie „ $*$ ".

a) Elementele e, a' sînt unic determinate prin relaţiile, $e * a = a * e = a$ oricare ar fi $a \in G$, (respectiv, $a * a' = a' * a = e$)

b) Dacă $a, b, x \in G$ şi $a * x = b * x$ sau $x * a = x * b$ atunci, $a = b$. (într-un grup se poate simplifica la stînga sau la dreapta)

c) Dacă $a \in G$, atunci $(a')' = a$.

d) Dacă $a, b \in G$, atunci $(a * b)' = b' * a'$.

e) Fie $a \in G$. Convenim să notăm $a^0 = e$, $a^m = a * a * \ldots * a$ (= compunerea a m elemente egale cu a) dacă m este pozitiv şi $a^m = (a')^{-m}$ dacă m este negativ. Să se arate că,

$a^m * a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = (a')^{mn}$ pentru oricare de numere întregi, m, n.

f) Dacă grupul $(G, *, e)$ este abelian şi $a, b \in G$ atunci pentru orice întreg m avem,

$$(a * b)^m = a^m * b^m, \quad (a^m)' = (a')^m$$

g) Să se transcrie toate rezultatele precedente în cazul cînd se foloseşte pentru legea de grup notaţia multiplicativă „$\cdot$" respectiv notaţia aditivă „$+$".

87. Fie $(G, \cdot, e)$ un grup şi S o submulţime a lui G. Pentru un element $a \in G$ notăm $aS = \{ax \mid x \in S\}$ şi $Sa = \{xa \mid x \in S\}$

Să se arate că aplicația,

$$f: aS \to Sa \text{ definită prin,}$$

$f(ax) = xa$ este o aplicație bijectivă.

88. Fie $(G, \cdot, e)$ un grup dat.

a) Pentru orice element $a \in G$, aplicația $f_a: G \to G$ definită prin, $f_a(x) = a^{-1}xa$ este un automorfism.

b) Aplicația $f: G \to G$ definită prin, $f(x) = x^{-1}$ (x^{-1} este simetricul elementului x) este automorfism dacă G este un grup abelian.

c) Să se precizeze inversele aplicațiilor definite la punctele a), b).

89. a) Într-un grup $(G, ., e)$ ecuațiile $ax = b$, $ya = b$ cu necunoscutele x, y au soluție unică oricare ar fi a, b.

b) Fie G, o mulțime pe care este definită o lege de compoziție binară, „ * " asociativă astfel încît ecuațiile $ax = b$, $ya = b$ au soluții oricare ar fi a și b din G.

În aceste condiții în G există un element neutru pentru legea de compoziție „ * " și orice element $a \in G$, are un simetric în raport cu această lege.

90. Dacă $(G, \cdot, e)$ este un grup comutativ și n este un număr întreg fixat, atunci aplicația $f: G \to G$ definită prin, $f(x) = x^n$ pentru orice $x \in G$ este un omomorfism de grupuri.

91. Dacă $(G, \cdot, e)$ este un grup și a un element fixat, dar altfel oarecare, în G atunci aplicația f: $Z_+ \to (G, \cdot, e)$ definită prin

$$f(n) = a^n \text{ este un omomorfism de grupuri}$$

(Z_+ = grupul aditiv al numerelor întregi).

92. Aplicația $f: C \to R_{>0}$ definită prin, $f(z) = |z|$ este un omomorfism al grupului multiplicativ al numerelor complexe nenule pe grupul multiplicativ al numerelor reale negative, dar nu este un omomorfism injectiv.

93. Fie $(G, \cdot, e)$, $(G', \cdot, e')$ două grupuri date.

a) Să se arate că aplicația $u: G \to G'$ definită prin $u(x) = e'$, pentru orice element $x \in G$ este un omomorfism de grupuri.

b) Dacă $f: G \to G'$ este un izomorfism de grupuri, atunci funcția inversă a lui f, $f^{-1}: G' \to G$ este de asemeni un izomorfism de grupuri.

c) Dacă $(G'', \cdot, e'')$ este un al treilea grup și $f: G \to G'$, $g: G' \to G''$ sînt două omomorfisme de grupuri atunci, $g \circ f: G \to G''$ definită prin $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pentru orice element x din G este omomorfism de grupuri.

În plus, dacă f, g sînt ambele injective, surjective sau bijective la fel este și $g \circ f$.

94. Să se arate că mulțimea tuturor rădăcinilor de ordinul n ale unității (în corpul complex) este un grup G, în raport cu operația de înmulțire și că există un element $\varepsilon \in G$, încît rădăcinile unității să fie $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$.

95. Fie R mulțimea numerelor reale. Definim pe mulțimea R o operație binară asociind la orice pereche ordonată de numere reale, (a, b) numărul real $a \circ b = a + b + ab$ (în membrul al doilea al egalității este vorba de operațiile ce definesc corpul numerelor reale).

a) Să se arate că mulțimea $R - \{-1\}$ este un grup abelian în raport cu operația „$\circ$".

b) Operația „$\circ$" nu este distributivă față de operațiile de adunare și înmulțire ce definesc corpul numerelor reale și nici operațiile ce definesc corpul numerelor reale nu sînt distributive față de operația „$\circ$".

c) Să se rezolve ecuația $x \circ x = x$.

96. Fie $M = \{(a, b) \mid a, b \in R;\ a \neq 0$ și $b \neq 0\}$ mulțimea perechilor ordonate de numere reale cu ambele componente diferite de zero.

a) Să se arate că dacă pentru oricare două elemente (a_1, b_1), (a_2, b_2) din M definim, $(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$ se obține pe M o lege de compoziție internă în raport cu care M este un grup abelian.

b) Aplicația $f: M \to R.$ definită prin, $f((a_1 b)) = ab$ este un omomorfism surjectiv de grupuri dar nu și injectiv. (R. notează grupul multiplicativ al numerelor reale diferite de zero).

c) Aplicația $g: M \to R$ definită prin $g(a, b) = \frac{a}{b}$ este omomorfism surjectiv dar nu este injectiv.

97. Fie R mulțimea numerelor reale. La orice pereche ordonată de numere reale (x, y) asociem numărul real, $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

a) Să se arate că mulțimea R în raport cu operația „$\circ$" este un grup abelian R_0 care este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale, R_+.

b) Ce se poate spune despre legea de compoziție definită pe R prin $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$ (radicalul aritmetic); dar dacă se consideră această lege pe mulțimea $R_{\geq 0}$ a numerelor reale nenegative?

98. Fie E mulţimea numerelor reale mai mari sau egale cu unu. Definim pe E o lege de compoziţie asociind la orice pereche de numere reale (x, y).

$$x \geqslant 1, \quad y \geqslant 1 \text{ numărul } x * y = xy + \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}.$$

Să se arate că am obţinut astfel pe E o structură de grup.

(G. M. Seria B. 2. 1971)

99. Fie $R_{>0}$ mulţimea numerelor reale pozitive. Să se arate că dacă la orice pereche ordonată de numere reale pozitive (x, y) asociem numărul

$$x * y = x^{\frac{y}{\ln \theta}},$$

$\theta > 0$ fixat se obţine pe $R_{>0}$ o structură de grup abelian.

100. Fie R mulţimea numerelor reale şi

$$f_1 : R \to R, \qquad f_2 : R - \left\{\frac{1}{3}\right\} \to R, \qquad f_0 : R - \left\{-\frac{1}{3}\right\} \to R$$

trei funcţii definite prin,

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = \frac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}}, \qquad f_3(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{1 + x\sqrt{3}}.$$

a) Să se arate că mulţimea $M = \{f_1, f_2, f_3\}$ este un grup în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor dacă se consideră acţiunea celor trei funcţii pe domeniul lor comun de definiţie,

$$D = R - \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$$

b) Grupul M este izomorf cu grupul rădăcinilor de ordinul trei ale unităţii.

101. Fie R^2 mulţimea punctelor unui plan (P) în care s-au fixat două drepte perpendiculare (D_1), (D_2) şi care se intersectează în punctul O. Definim funcţiile $f_0, f_1, f_2, f_3 : R^2 \to R^2$ după cum urmează:

Dacă $M \in R^2$, atunci

$f_0(M) = M$, $f_1(M)$ (resp. $f_2(M)$) este simetricul punctului M faţă de dreapta (D_1) (resp. (D_2)), $f_3(M)$ este simetricul punctului M faţă de punctul O.

a) Să se arate că mulţimea $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ este un grup comutativ în raport cu operaţia de compunere obişnuită a funcţiilor.

b) Să se precizeze punctele din plan care sînt lăsate pe loc atunci cînd li se aplică funcțiile f_1, f_2, f_3.

c) Fie $T_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ mulțimea primelor patru numere naturale și următoarele permutări ale mulțimii T_4,

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că mulțimea $\{g_1, g_2, g_3, g_4\} = G'$ este un grup în raport cu operația de compunere obișnuită a funcțiilor, izomorf cu grupul G, cel construit la punctul a).

102. Fie G mulțimea tuturor rotațiilor unui plan, cu același centru O.

a) Să se arate că G este un grup în raport cu operația de compunere obișnuită a două funcții.

b) Există un omomorfism canonic surjectiv, dar nu și injectiv, $f: R_+ \to G$.

c) Există un izomorfism canonic $g: G \to G'$ al grupului G cu grupul G' al matricelor de forma, $A(a) = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$, $a \in R$.

103. Fie R^2 mulțimea punctelor unui plan (P) în care s-a fixat un punct O și fie a un parametru real nenul.

Notăm cu f_a funcția $f_a : R^2 \to R^2$ care la orice punct M din planul (P) asociază punctul M' definit prin următoarele condiții:

1°. $\dfrac{OM}{OM'} = |a|$

2°. Segmentele $\overline{OM}$, $\overline{OM'}$ sînt la fel orientate cînd $a > 0$ și invers orientate cînd $a < 0$.

a) Să se arate că mulțimea $G = \{f_a \mid a \in R\}$ este un grup în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

b) Aplicația $f: R \to G$ definită prin $f(a) = f_a$ realizează un izomorfism al grupului multiplicativ al numerelor reale nenule cu grupul G.

104. Dacă $(G, \cdot, e)$ este un grup, atunci mulțimea $A_{m \times n}(G)$ ale cărei elemente sînt matrici cu m linii și n coloane și cu elemente din G, se poate înzestra canonic cu o structură de grup, de aceeași natură cu G (dacă G este comutativ (necomutativ) atunci și $A_{m \times n}(G)$ este comutativ (necomutativ)).

105. Fie A un inel. Notăm prin $M_{m\times n}(A)$ grupul aditiv al matricelor cu m linii și n coloane ale căror elemente sînt din inelul A.

a) Dacă $f: A \to A_1$ este un omomorfism de inele, acesta induce în mod canonic un omomorfism de grupuri

$$f_{m\times n}: M_{m\times n}(A) \to M_{m\times n}(A_1).$$

b) Aplicația $g_A: M_{m\times n}(A) \to M_{n\times m}(A)$ care asociază unei matrici $M \in M_{m\times n}(A)$ transpusa acesteia, realizează un izomorfism de grupuri

c) Să se arate că are loc egalitatea,

$f_{n\times m} \circ g_A = g_{A_1} \circ f_{m\times n}$, unde „$\circ$" notează compunerea obișnuită a două funcții, iar g_{A_1} este funcția care se definește ca funcția g_A.

106. Fie M mulțimea matricelor de forma,

$$M(a) = \begin{bmatrix} 2-a & a-1 \\ 2(1-a) & 2a-1 \end{bmatrix}$$

unde a este un parametru real diferit de zero.

a) Să se arate că mulțimea M este un grup comutativ în raport cu înmulțirea izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale diferite de zero.

b) Să se exprime $M(a)$ sub forma,

$M(a) = A + aB$ unde A și B sînt matrici care nu conțin parametrul a.

107. Să se arate că mulțimea matricelor cu elemente numere reale de forma

$$M(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

este un grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

108. Fie să considerăm matricele de forma,

$$M(a, \lambda) = \begin{bmatrix} a^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Să se arate că pentru fiecare număr real fixat $a > 0$ și λ parametru real (mulțimea matricelor $M(a, \lambda)$ este un grup G în raport cu operația de înmulțire) care este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

b) Dacă a, b sînt două numere reale pozitive există un izomorfism canonic al grupului M_a, (grupul matricelor $M(a, \lambda)$; a fixat, λ parametru real) cu grupul M_b (grupul matricelor $M(b, \lambda)$; b fixat, λ parametru real).

c) Operaţia de înmulţire a matricelor defineşte pe mulţimea $\{M(a, \lambda) \mid a > 0, \lambda \geqslant 0\}$ o structură de grup.

109. Fie M mulţimea matricelor de forma,

$$M(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

unde a este un parametru real.

a) Să se arate că M este un grup în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

b) Dacă $\det M(a) = 1$, atunci $\det M(-a) = 1$

c) Aplicaţia $f: R_+ \to M$ definită prin $f(a) = M(a)$ este un izomorfism de grupuri.

d) Folosind rezultatul de la punctul precedent să se calculeze $(M(a))^n$.

110. Fie M mulţimea matricelor de forma,

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 1 & \frac{-\lambda^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

unde λ este un parametru real

a) Să se arate că mulţimea M este un grup abelian în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

b) Dacă determinantul matricei $M(\lambda)$ este unu atunci şi determinantul matricii $M(-\lambda)$ este unu.

c) Aplicaţia $f: R_+ \to M$ definită prin $f(\lambda) = M(\lambda)$ este un izomorfism de grupuri.

d) Folosind rezultatul de la punctul precedent, să se calculeze $[M(\lambda)]^n$.

111. Fie M mulţimea matricelor pătratice de ordinul al doilea de forma,

$$M(a) = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{bmatrix},$$

a parametru real.

a) Să se arate că mulțimea M este un grup comutativ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

b) Dacă R_+ este grupul aditiv al numerelor reale, aplicația $f: R_+ \to M$ definită prin, $f(a) = M(a)$ pentru orice $a \in R$ este un omomorfism surjectiv de grupuri, dar nu și injectiv.

c) Mulțimea numerelor complexe cu modulul egal cu unitatea este un grup G în raport cu operația de înmulțire a numerelor complexe.

d) Aplicația $g: G \to M$ definită prin,

$g(\cos a + i \sin a) = M(a)$ este un izomorfism de grupuri.

e) Folosind rezultatul de la punctul precedent, să se calculeze $(M(a))^n$ unde n este un număr natural oarecare.

112. Fie $(G_1, +, 0)$ și $(G_2, +, 0)$ două grupuri abeliene (am notat cu același simbol „+" legea de compoziție în ambele grupuri și cu același simbol „0" elementul neutru în cele două grupuri).

a) Pe mulțimea $G_1 \times G_2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 \in G_1, x_2 \in G_2\}$ se definește o operație binară „ * " dacă la orice pereche ordonată (x, y) de elemente din $G_1 \times G_2$ asociem perechea $x * y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$. Să se arate că $G_1 \times G_2$ este un grup abelian în raport cu operația „ * ".

b) Aplicațiile, $i_1: G_1 \to G_1 \times G_2$, $i_2: G_2 \to G_1 \times G_2$ definite prin, $i_1(x_1) = (x_1, 0)$ și respectiv, $i_2(x_2) = (0, x_2)$, pentru oricare elemente, $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$ sînt omomorfisme injective de grupuri.

c) Aplicațiile, $p_1: G_1 \times G_2 \to G_1$, $p_2: G_1 \times G_2 \to G_2$ definite prin, $p_1((x_1, x_2)) = x_1$ și respectiv, $p_2((x_1, x_2)) = x_2$ pentru orice element (x_1, x_2) din $G_1 \times G_2$, sînt omomorfisme surjective de grupuri.

113. Se consideră ecuația diferențială :

$$y'' + 9y = 0.$$

Fie M mulțimea tuturor soluțiilor reale ale ecuației date, definite pe R.

a) Să se arate că M se poate echipa cu o structură de grup.

b) Mulțimea $M' = \{(a, b) \mid a, b \in R\}$ se poate echipa cu o structură de grup.

c) Există un izomorfism canonic al grupului M cu grupul M'.

114. Fie P_3 mulțimea polinoamelor cu gradul mai mic sau egal cu doi (cu coeficienți numere reale).

a) Să se observe că P_3 este un grup abelian în raport cu operația de adunare a polinoamelor.

b) Pentru orice număr întreg m, definim

$$f_m: P_3 \to P_3 \text{ prin,}$$

$f_m(P) = x^2 P''(x) + (x + 3) P'(x) + mP$ unde P', P'' sînt derivate de ordinul întîi (resp. al doilea, pentru polinomul P. Să se arate că f_m este un endomorfism de grupuri.

c) Pentru ce valori ale lui m, f_m este automorfism?

d) Dacă f_{m_1}, f_{m_2} sînt două automorfisme, atunci $f_{m_1} \circ f_{m_2}$ este de asemeni un automorfism

e) Să se determine mulţimea $\ker f_m$ a polinoamelor $P \in P_3$ cu proprietatea că $f_m(P) = 0$. (În partea dreaptă a acestei egalităţi este vorba de polinomul nul).

f) Să se determine un număr întreg m şi un polinom $P \in P_3$ încît $f_m(P) = P$.

115. Fie $(G, \cdot, e)$ un grup şi S o mulţime (nevidă). Notăm cu $M(S, G)$ mulţimea funcţiilor cu domeniul de definiţie S şi codomeniul G. Mulţimea $M(S, G)$ se poate echipa canonic cu o structură de grup şi dacă $u : (G, \cdot, e) \to (G', \cdot, e')$ este un omomorfism de grupuri, atunci $u : M(S, G) \to M(S, G')$ definită prin $u(f) = u \circ f$ este un omomorfism de grupuri care este injectiv în cazul cînd u este injectiv.

116. Fie G o mulţime, $(G', \cdot, e')$ un grup şi $f : G \to G'$ o aplicaţie bijectivă.

a) Să se construiască pe G o structură de grup astfel încît f să fie izomorfism de grupuri.

b) Să se construiască pe o mulţime cu cinci elemente (problema are sens pentru orice număr de elemente) o structură de grup.

117. Fie $E = (-\pi/2, \pi/2)$.

Să se arate că dacă la orice pereche ordonată de numere reale (x, y), $x, y \in E$ asociem numărul $x * y = \text{arc tg}(\text{tg}\, x + \text{tg}\, y)$ se obţine pe mulţimea E o structură de grup abelian şi grupul astfel obţinut este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale, R_+.

118. Fie $E_1 = (-\pi/2, \pi/2) - \{0\}$ şi $E_2 = (0, \pi) - \{\pi/2\}$ Dacă la orice pereche ordonată (x, y) de numere reale, $x, y \in E_1$ (resp. $x, y \in E_2$) asociem numărul real $x * y = \text{arc tg}(\text{tg}\, x \cdot \text{tg}\, y)$, (resp. $x \circ y = \text{arc ctg}(\text{ctg}\, x \cdot \text{ctg}\, y)$) obţinem pe E_1 (resp. E_2) o structură de grup abelian.

119. Fie R mulţimea numerelor reale şi pe R operaţia binară „ $*$ " definită prin $x * y = ax + by$ unde a şi b sînt doi parametri reali.

Să se determine parametrii a, b astfel încît operaţia corespunzătoare să definească pe R o structură de grup, nu neapărat comutativ.

120. Fie R mulţimea numerelor reale, $M = \{(a, b) | a, b \in R, a \neq 0\}$ şi $f : R \to R$ o aplicaţie de mulţimi.

a) Care sînt condiţiile la care trebuie să satisfacă funcţia f astfel încît asociind la orice pereche ordonată (x, y) de elemente din M, $x = (a_1, b_1)$, $y = (a_2, b_2)$, perechea, $(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1a_2 + b_2f(a_1))$ să se obţină pe M o structură de grup.

b) Să se arate că pentru a avea la punctul a) un grup abelian este necesar şi suficient ca funcţia f să coincidă cu aplicaţia identitate a lui R, adică $f(x) = x$, pentru orice $x \in R$.

121. Fie $(G, \cdot, e)$ un grup şi H o submulţime nevidă a lui G. Să se arate că dacă pentru oricare două elemente x, y din H, $xy^{-1} \in H$ (unde y^{-1} este simetricul elementului y în G) atunci, următoarele condiţii sînt satisfăcute :

a) $e \in H$

b) dacă $x \in H$ atunci $x^{-1} \in H$

c) dacă $x, y \in H$ atunci $xy \in H$.

şi reciproc, dacă condiţiile a), b), c) se îndeplinesc atunci pentru oricare două elemente $x, y \in H$ se are $xy^{-1} \in H$.

O submulţime nevidă H a unui grup $(G, \cdot, e)$ cu proprietatea că pentru oricare două elemente x, y din H, rezultă că, $xy^{-1} \in H$, se numeşte subgrup al lui G.

122. Fie $(G, \cdot, e)$ un grup şi H un subgrup al lui G. Pentru orice element $a \in G$ prin aH notăm mulţimea, $aH = \{ax | x \in H\}$
Să se arate că :

a) $G = \bigcup\limits_{a \in G} aH$

b) $aH = bH$ dacă şi numai dacă $b^{-1}a \in H$.

c) $aH = H$ dacă şi numai dacă, $a \in H$.

d) Două mulţimi aH, bH sau coincid sau n-au nici un element comun.

e) Pentru oricare două elemente $a, b \in G$, aplicaţia $f : aH \to bH$ definită prin, $f(ax) = bx$ este o bijecţie.

f) Să se formuleze ceva analog, considerînd mulţimile, $Ha = \{xa | x \in H\}$.

123. Dacă $(G, \cdot, e)$ este un grup cu un număr finit de elemente, atunci o submulţime H nevidă a lui G este subgrup al lui G dacă oricare ar fi elementele $x, y \in H$ rezultă că $xy \in H$.

124. Se consideră mulţimea matricelor pătratice M_2 de forma $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ unde a_1, a_2, a_3, a_4 sînt numere reale, iar $a_1 \neq 0$, $a_4 \neq 0$.

Se defineşte următoarea lege de compoziţie,

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2 + a_1b_2 \\ a_3 + a_4b_3 & a_4b_4 \end{bmatrix}.$$

a) Să se arate că această lege determină pe M_2 o structură de grup. Este acest grup abelian ?

b) Să se arate că mulţimea matricelor M_0 de forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ unde $a, b \in R$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ formează un subgrup al lui M_2.

(Gh. Vernic, Constanţa G. M. B., 1. 1970)

125. Fie $(G, \cdot, e)$, $(G', \cdot, e')$ două grupuri şi $f: G \to G'$ un omomorfism de grupuri. Să se arate că :

a) Mulţimea $\ker f = \{x, | x \in G, f(x) = e'\}$ este un subgrup al lui G.

b) Mulţimea $Im(f) = \{f(x) | x \in G\}$ este un subgrup al grupului G',

c) Dacă G_1 este un subgrup al lui G, atunci $f(G_1) = \{f(x) | x \in G_1\}$ este subgrup al lui G'.

d) Dacă G_1' este subgrup al lui G',atunci şi $G_1 = \{f^{-1}(G_1') = \{x | x \in G, f(x) \in G_1'\}$ este un subgrup al lui G.

126. Fie $(G, \cdot, e)$ un grup. Să se arate că mulţimea $Z(G) = \{g | g \in G, gx = xg, \forall x \in G\}$ este un subgrup al lui G, (centrul grupului G).

127. Fie $(G_1, +, 0)$, $(G_2, +, 0)$ două grupuri abeliene şi $(G_1 \times G_2, +(0, 0))$ grupul abelian construit la exerciţiul nr. 112.

Să se arate că dacă $f_1 : G_1 \to G$, $f_2 : G_2 \to G$ sînt omomorfisme de grupuri abeliene, atunci mulţimea H a elementelor din $G_1 \times G_2$, ale cărei elemente sînt perechile (x_1, x_2) pentru care, $f_1(x_1) = f_2(x_2)$ este un subgrup al lui $G_1 \times G_2$.

128. Fie E o mulţime oarecare şi $S(E)$ mulţimea permutărilor acestei mulţimi.

a) Să se arate că dacă la orice pereche ordonată (f, g) de elemente din $S(E)$ asociem funcţia $g \circ f : E \to E$ definită pentru orice element x din E prin egalitatea, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ se obţine pe $S(E)$ o structură de grup.

b) Dacă E are cel puţin trei elemente, grupul $S(E)$ nu este comutativ.

c) Dacă x_0 este un element fixat în E atunci mulţimea $M_{x_0} = \{f | f \in S(E), f(x_0) = x_0\}$ este un subgrup al grupului $S(E)$.

d) Dacă x_0, y_0 sînt două elemente fixate în E există un izomorfism canonic de grupuri, $u : M_{x_0} \to M_{y_0}$

e) Dacă E_0 este o submulţime a mulţimii E atunci mulţimea $M_{E_0} = \{f | f \in S(E), f(E_0) = E_0\}$ este un subgrup al grupului $S(E)$.

129. Fie $(G, \cdot, e)$ un grup (necomutativ).

a) Să se arate că pentru orice element $a \in G$, funcţiile $T_a : G \to G$ (respectiv $T^a : G \to G$) definite prin $T_a(x) = ax$ (resp. $T^a(x) = xa$) pentru orice $x \in G$ sînt permutări ale mulţimii G şi apoi să se precizeze elementele lui G pentru care T_a (resp. T^a) sînt izomorfisme de grupuri (automorfisme ale grupului G).

b) Mulţimile $M_1 = \{ T_a \mid a \in G \}$, $M_2 = \{ T^a \mid a \in G \}$ sînt subgrupuri ale grupului $S(G)$.

c) Aplicaţia $\lambda_1 : G \to M_1$ (resp. $\lambda_2 : G \to M_2$) definită prin $\lambda_1(a) = T_a$ (resp. $\lambda_2(a) = T^a$) este izomorfism de grupuri, (resp. antiizomorfism de grupuri).

130. Fie $f : E \to F$ o aplicaţie bijectivă între două mulţimi şi S_E (resp. S_F) grupul permutărilor mulţimii E (resp. mulţimii F). Aplicaţia, $f_* : S_E \to S_F$ definită prin

$f_*(u) = f \circ u \circ f^{-1}$ este un izomorfism de grupuri.

131. Fie Z mulţimea numerelor întregi,

$$Z^n = Z \times Z \times \dots \times Z = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in Z\} \text{ şi}$$

$f \in S_n$. Notăm cu $p_f : Z^n \to Z^n$ funcţia care asociază la orice n-uplă $(x_1, \dots, x_n)$ n-upla $(x_{f(2)}, x_{f(1)}, \dots, x_{f(n)})$.

Să se arate că,

a) Dacă $f, g \in S_n$ atunci $p_f \circ p_g = p_{g \circ f}$

b) Dacă $u : Z^n \to Z$ şi $u^f = u \circ p_f$ atunci,

$$u^{f \circ g} = (u^g)^f$$

c) Dacă $u, v : Z^n \to Z$ atunci

$$(u + v)^f = u^f + v^f \text{ şi } (uv)^f = u^f \cdot v^f.$$

d) $(-u)^f = -(u^f)$.

132. Fie $A(+, \cdot; 0, 1)$ un inel cu unitate. Notăm cu A^* mulţimea elementelor inversabile ale lui A (adică mulţimea elementelor lui A care admit simetric în raport cu operaţia „$\cdot$").

a) Să se arate că mulţimea A este grup în raport cu operaţia „$\cdot$".

b) Dacă $f : A \to A_1$ este un omomorfism de inele cu unitate, atunci f induce un omomorfism $\bar{f} : A^* \to A_1^*$.

133. Fie A un inel comutativ (cu unitate)

a) Să se arate că mulţimea $M_n(A)$ a matricelor pătratice de ordin n cu elemente din A are o structură de inel necomutativ (cu unitate) în raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire a matricelor.

b) O matrice, $M \in M_n(A)$ este permutabilă cu toate celelalte matrici pătratice de ordin n dacă și numai dacă este de forma, $M = aI_n$ (am considerat inelul A cu unitate).

c) Dacă A este un corp, atunci mulțimea $G_n(A)$ a matricelor pătratice de ordin n, nesingulare și cu elemente din A este un grup în raport cu operația de înmulțire a matricilor, iar mulțimea matricelor de forma aI_n cu $a \neq 0$ este un subgrup $G'_n(A)$ al lui $G_n(A)$.

Aplicația $f : G_n(A) \to G'_n(A)$ definită prin $f(M) = \det(M).\ I_n$ pentru orice $M \in G_n(A)$ este un omomorfism surjectiv de grupuri dar nu și injectiv.

134. Fie $A\ (+, \cdot\,; 0,1)$ un inel comutativ cu unitate.

Să se arate că,

1. Pentru orice element $x \in A$, $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

2. Dacă x, y sînt două elemente arbitrare din A atunci,

a) $(-x)y = -(xy)$

b) $(-x)(-y) = xy$

c) $x(-y) = (xy)$

3. a) Dacă x, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in A$ atunci,

$$x(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = xy_1 + \ldots + xy_n$$

b) Dacă $x_1, \ldots, x_n$ și $y_1, \ldots, y_m$ sînt două sisteme de elemente din inelul A, atunci,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right) = \sum_{(i,\, j) \in I \times J} x_i y_j \text{ unde}$$

$$I = \{1, \ldots, n\},\ J = \{1, \ldots, m\}.$$

135. Fie $A(+, \cdot, 0)$ un inel (asociativ) oarecare.

a) Dacă la orice pereche ordonată (a, b) de elemente din A asociem elementul $a * b = ab - ba$ se obține pe A o lege de compoziție care împreună cu legea de compoziție „+" definește pe mulțimea A o nouă structură de inel, $A\ (+, *, 0)$.

b) Pentru orice element $a \in A$, $a * a = 0$

c) Oricare ar fi trei elemente $a, b, c \in A$ avem egalitatea, $(a * b) * c + (b * c) * a + (c * a) * b = 0$

136. Fie $A\ (+, \cdot, 1)$ un inel cu unitate.

a) Dacă x și y sînt două elemente din A astfel încît $xy = yx$ atunci,
$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-2} + y^{n-1})$
pentru orice număr natural $n \geqslant 1$).

b) (Un element x dintr-un inel A se numește nilpotent dacă există un număr natural $n \geqslant 1$ astfel încît $x^n = 0$). Să se arate că dacă x este un element nilpotent al lui A, atunci $1 - x$ este inversabil.

c) Dacă x și y sînt două elemente nilpotente astfel că $xy = yx$ atunci $x + y$ și xy sînt de asemeni nilpotente.

d) Mulțimea elementelor nilpotente într-un inel A comutativ, este un grup în raport cu operația „+" a inelului A, subgrup al grupului $(A, +)$.

137. Fie R mulțimea numerelor reale și $R \times R = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$. Definim pe mulțimea $R \times R$ două operații binare pe care le notăm prin „+" și „." asociind la oricare două perechi (x_1, y_1), (x_2, y_2) perechile,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 y_2 + x_2 y_1, y_1 y_2)$$

(în partea dreaptă a acestor egalități este vorba de operațiile ce definesc corpul real).

a) Să se arate că mulțimea $R \times R$ este un inel comutativ cu unitate în raport cu cele două operații.

b) Să se precizeze mulțimea divizorilor lui zero.

c) Mulțimea $M = \{(x, y) \mid y \neq 0\}$ este un grup în raport cu operația „·".

d) Aplicația $f: M \to R_+$, definită prin $f((x, y)) = \dfrac{x}{y}$ este un omomorfism surjectiv dar nu și injectiv. (R_+ = grupul aditiv al numerelor reale).

138. Fie $M = R \times R = \{(a, b) \mid a, b \in R\}$, unde R este mulțimea numerelor reale. Pe mulțimea M definim două operații binare prin egalitățile,

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 + b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

(În membrul al doilea al egalităților precedente este vorba de operațiile ce definesc corpul real)

a) Mulțimea M este un inel în raport cu cele două operații definite, comutativ și cu element unitate.

b) Elementul $(a, b) \in M$ pentru care $a^2 - b^2 \neq 0$ admite un simetric în raport cu operația „·" și mulțimea, $G = \{(a, b), a^2 - b^2 \neq 0\}$ este un grup în raport cu operația „·".

c) Elementul $(a, b) \in M$, $(a, b) \neq (0, 0)$ pentru care $a^2 - b^2 = 0$ este un divizor al lui zero în inelul considerat la punctul a).

139. Fie R mulțimea numerelor reale și $M = R \times R = \{(a, b) \mid a, b \in R\}$. Definim pe M două operații binare prin egalitățile; $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

a) Să se arate că M este un inel comutativ cu unitate în raport cu cele două operații definite.

b) Să se precizeze mulțimea divizorilor lui zero pentru inelul considerat la punctul a).

c) Submulțimea N a lui M definită prin, $N = \{(a, b) \mid a \neq 0\}$ formează un grup față de operația a doua.

d) Aplicația $f: M \to R$ definită prin $f((a, b)) = a$ este un omomorfism de inele surjectiv dar nu și injectiv (am notat cu R, inelul numerelor reale).

e) Aplicația $g: N \to R^+$ definită prin, $g((a,b)) = \dfrac{b}{a}$ este un omomorfism al grupului N pe grupul daitiv al numerelor reale dar nu este injectiv.

f) Aplicația $h: N \to R$ definită prin, $h((a, b)) = |a|$ este un omomorfism al grupului N pe grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive.

140. Fie $M = R \times R = \{(a, \cdot b) \mid a,b \in R\}$ unde R este mulțimea numerelor reale. Definim pe M două operații prin egalitățile,

$$(a_1,b_1) + (a_2,b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$(a_1,b_1) \cdot (a_2,b_2) = (a_1a_2, b_1b_2 + a_1b_2 + a_2b_1)$$

oricare ar fi elementele (a_1,b_1), (a_2,b_2) din M.

a) Să se arate că, mulțimea M are o structură de inel comutativ cu unitate în raport cu cele două operații definite.

b) Să se precizeze mulțimea divizorilor lui zero pentru inelul considerat la punctul a).

c) Submulțimea N a lui M definită prin, $N = \{(a, b) \mid a \neq 0, a + b \neq 0\}$ este grup în raport cu operația a doua.

d) Aplicația $f: M \to R$ definită prin, $f(a, b) = a$ este un omomorfism de inele surjectiv dar nu injectiv. (R este aici, inelul numerelor reale).

141. Fie $Z[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Z\}$, inelul numerelor întregi.

a) Să se arate că $Z[\sqrt{2}]$ este un inel comutativ, cu unitate, în raport cu operațiile de adunare și înmulțire ce definesc corpul real.

b) Notăm $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$. Să se arate că

$$N((a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2})) = N(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot N(a_2 + b_2\sqrt{2})$$

c) Să se determine elementele inversabile în inelul $Z[\sqrt{2}]$, (elementele care admit simetric în raport cu operația de înmulțire).

d) Aplicația $f: Z[\sqrt{2}] \to Z[\sqrt{2}]$ definită prin $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ este un izomorfism de inele.

142. Fie $A(+,.;1)$ un inel comutativ cu unitate și fie E o submulțime a lui A definită prin,

$$E = \{e \mid e \in A,\ e^2 = e\}.$$

a) Să se arate că dacă la orice pereche ordonată (e_1, e_2) de elemente din E, asociem elementul $e_1 * e_2 = e_1 + e_2 - e_1e_2$ se obține pe E o lege de compoziție asociativă, comutativă, cu element neutru și nici un element din E diferit de elementul zero (elementul neutru al operației „+") nu admite un element simetric în raport cu operația „ * ".

b) Dacă pentru orice element $e \in E$ notăm $\bar{e} = 1 - e$ atunci, $\overline{e_1 * e_2} = \bar{e}_1 * \bar{e}_2$, $\bar{1} = 0$, $\bar{0} = 1$, $\bar{\bar{e}} = e$.

143. Fie M mulțimea matricilor de forma,

$$M(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} -a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \quad \text{unde } a, b, c, d$$

sînt numere reale, iar i este unitatea imaginară.

a) Să se arate că M este un inel în raport cu operațiile obișnuite de adunare și înmulțire a matricilor.

b) Să se arate că produsul,
$E = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2)$ se poate exprima ca o sumă de patru pătrate.

144. Să se arate că mulțimea

$$M = \left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{bmatrix},\quad x \in R \right\}$$

înzestrată cu adunarea și înmulțirea matricelor constituie inel fără divizori ai lui zero și să se rezolve ecuația

$$(1,\ 1,\ 1)\,.\,(A^n\,.\,(1,\ 1,\ 1)') = (1).$$

(G. M. B. 4. 1972 Martin Mettler, Lugoj)

145. Fie $(G, +)$ un grup abelian dat și fie End (G) mulțimea endomorfismelor grupului G (adică, mulțimea tuturor omomorfismelor de grupuri cu domeniul și codomeniul G).

Să se arate că dacă la orice pereche ordonată, (f_1, f_2) de elemente din End(G) asociem elementele $f_1 + f_2$ (resp. $f_1 \circ f_2$) definite prin,

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \text{ și } (f_1 \circ f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

pentru orice element x din G, se obțin pe End (G) două legi de compoziție în raport cu care este un inel cu unitate.

146. Fie S o mulţime fixată (nevidă), A $(+, .)$ un inel şi $\text{Ens}(S, A)$ mulţimea funcţiilor cu domeniul de definiţie (sursa) S şi codomeniul (co-sursa) A.

a) Dacă la orice pereche ordonată (f_1, f_2) de elemnete din $\text{Ens}(S, A)$ asociem elementele $f_1 + f_2$, (resp. $f_1 \circ f_2$) din $\text{Ens}(S, A)$ definite, pentru orice element x din S prin egalităţile,

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \text{ şi } (f_1 \circ f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x);$$

se obţine pe mulţimea $\text{Ens}(S, A)$ o structură de inel cu divizori ai lui zero în raport cu cele două operaţii definite.

b) Dacă $u : A_1 \to A_2$ este un omomorfism de inele, atunci aplicaţia $u_* : \text{Ens}(S, A_1) \to \text{Ens}(S, A_2)$ definită prin, $u_*(f) = u \circ f$ pentru orice $f \in \text{Ens}(S, A_1)$ este un omomorfism de inele.

147. Fie A un inel comutativ şi $M_{4\times 4}$ mulţimea matricilor de forma.

$$M(a, b, c, d) = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}$$

a) Să se arate că mulţimea $M_{4\times 4}$ este un inel în raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire a matricilor.

b) Să se arate că inelul $M_{2\times 2}$ al matricelor patratice de ordin doi cu elemente din inelul A este izomorf cu inelul $M_{4\times 4}$ considerat la punctul precedent.

148. Fie A un inel cu unitate necomutativ.

a) Pentru un element fixat $a \in A$ definim o aplicaţie $u : A \to A$ prin egalitatea, $u(x) = ax - xa$, pentru orice element $x \in A$.

Să se arate că $u(x + y) = u(x) + u(y)$.

b) Notăm prin u^2 aplicaţia definită prin $u^2(x) = u(u(x))$ iar prin u^n aplicaţia $u^n(x) = u(u^{n-1}(x))$ pentru orice element x din A. Să se arate că dacă $a^2 = 0$ atunci $u^3(y) = 0$ pentru orice element $x \in A$ şi că dacă $a^n = 0$ $(n \geqslant 1)$ atunci există un întreg $q > n$ astfel încît $u^q(x) = 0$ oricare ar fi $x \in A$.

149. Fie A $(+, . , 1)$ un inel comutativ cu unitate şi $M = \{S \mid S \subseteq A\}$ unde S este definită prin următoarele condiţii :

1°. S nu este vidă

2°. Dacă $x, y \in S$ atunci $x - y \in S$

3°. Dacă $x \in S$, atunci oricare ar fi $a \in A$, $ax \in S$.

Să se arate că,

a) $\{0\}$ şi A sînt elemente ale lui M.

b) dacă $a \in A$ atunci $aA = \{ax \mid x \in A\}$ este element al mulţimii M.

c) Dacă M este o mulţime numai cu două elemente (cele consemnate la punctul a) atunci inelul A este un corp.

d) Dacă A este corp, atunci M este o mulţime cu două elemente.

150. Definim în mulţimea numerelor complexe, K, două legi de compoziţie astfel :

$$(x, y) \in K \times K ; \; x * y = x + y - i,$$

$$x \circ y = mixy + m(x + y) + i(1 - m) ; \; m \in K - \{0\} ; \; i^2 = -1$$

a) Să se arate că în raport cu aceste două legi de compoziţie K este un corp.

b) Să se rezolve şi să se discute sistemul :

$$\left(x \circ \frac{1}{x}\right) * \left(y \circ \frac{1}{y}\right) = m^2 i$$

$$x * y = mi$$

(G. M. B. Nr. 12. 1971 Valeriu Breaza, Ploieşti)

151. Fie Q mulţimea numerelor raţionale, M mulţimea matricelor de forma, $M(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}$ cu elemente din Q iar $Q(\sqrt{2})$ mulţimea numerelor reale de forma $a + b\sqrt{2}$ unde a, b sînt de asemeni numere raţionale.

Să se arate că :

a) Mulţimea M are o structură de corp în raport cu adunarea şi înmulţirea obişnuită a matricelor.

b) Mulţimea $Q(\sqrt{2})$ este un corp în raport cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire a numerelor reale.

c) Aplicaţia $f: Q(\sqrt{2}) \to M$ definită prin egalitatea, $f(a + b\sqrt{2}) = M(a, b)$ este un izomorfism de corpuri.

152. Fie M mulţimea matricelor de forma,

$M(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ unde a este un parametru real.

Să se arate că mulţimea M este un corp în raport cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire a matricelor, izomorf cu corpul R al numerelor reale.

153. Se consideră M mulţimea matricelor pătratice de ordin doi cu elemente reale de forma,

$$M(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

a) Să se arate că M este un corp în raport cu operațiile de adunare a matricelor.

b) Dacă C este corpul numerelor complexe, aplicația $f : C \to M$ definită prin, $f(a + bi) = M(a,b)$ este un izomorfism de corpuri.

c) Folosind rezultatul de la punctul precedent să se deducă faptul că înmulțirea matricelor de forma considerată este comutativă.

154. Fie M mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi, de forma, $M(a, b) = \begin{bmatrix} a + b & 4b \\ -b & a - b \end{bmatrix}$ unde a, b, sînt numere raționale arbitrare; $a, b \in Q$.

Să se arate că mulțimea M are o structură de corp comutativ în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a matricelor.

155. Fie M mulțimea matricelor de forma,

$$M(a, b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ cu elemente numere reale}$$

și P mulțimea matricelor de forma,

$$P(c, d) = \begin{bmatrix} c & -5d \\ d & 3d + c \end{bmatrix}$$

a) Să se arate că M și P sînt corpuri în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a matricelor.

b) Corpul M este izomorf cu corpul C al numerelor complexe.

c) Orice matrice $M(a, b)$, element al mulțimii M, se poate reprezenta sub forma, $M(a, b) = aI + bJ$ unde $J^2 = -I$ și orice matrice $P(c, d)$ element al mulțimii P se poate reprezenta sub forma, $P(c, d) = cI + dV$ unde V satisface egalitatea, $V^2 = 3V - 5I$.

d) Să se determine izomorfismele $f : P \to M$ de forma $f(V) = pI + qJ$ și inversele acestora și apoi un izomorfism $h : P \to C$.

e) Folosind rezultatul de la punctul b) să se calculeze A^n unde

$$A = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{bmatrix}.$$

156. Pe mulțimea R a numerelor reale se consideră două legi de compoziție, „$*$" și „$\circ$" definite prin,

$$x * y = ax + by - 1 \text{ și}$$

$$x \circ y = 2xy - 2x - 2y + c \text{ unde } a, b, c,$$

sînt parametri reali.

a) Să se determine parametrii a, b, c, încît prima lege de compoziție să definească pe R o structură de grup abelian, iar împreună cu a doua lege de compoziție să definească pe R o structură de corp.

b) Să se arate că există o funcție $f: R \to R$ de forma $f(x) = px + q$ care să realizeze un izomorfism între corpul construit la punctul a) și corpul numerelor reale.

157. Orice domeniu de integritate cu un număr finit de elemente este corp.

158. Fie Z inelul numerelor întregi, m un întreg fixat, dar altfel oarecare și Z/mz, inelul claselor de resturi de întregi modulo m.

a) Dacă $x \in Z$ și $(x, m) = 1$ atunci oricare ar fi $y \in \bar{x}$, ($\bar{x}$ = clasa de resturi modulo m cu reprezentantul x) avem egalitatea $(y, m) = 1$.

b) Singurele elemente inversabile în inelul Z/mz, sînt acele clase $\bar{x}$ pentru care reprezentanții acestora sînt numere prime cu m.

c) Notăm cu $\varphi(m)$ numărul elementelor inversabile din inelul Z/mz, adică $\varphi(m)$ notează numărul elementelor grupului $(Z/mz)^+$.

Atunci pentru orice element $x \in Z$ cu proprietatea că $(x, m) = 1$, are loc relația, $x^{\varphi(m)} \equiv 1$ (modulo m).

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Şiruri. Calcularea limitei.

1. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}\right)$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}\right)$.

2. Se dă şirul $a_n=\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)-1}{4}$.

a) Să se studieze natura şirului (a_n).

b) Să se arate că $\{a_n;\ n\in N\}=Z$, unde Z este mulţimea numerelor întregi.

3. Se dă şirul $a_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.

a) Să se arate că şirul este monoton şi mărginit.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

4. Se dă şirul $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$.

a) Să se determine două constante A şi B încît să avem

$$\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\frac{A}{\sqrt{k}}+\frac{B}{\sqrt{k+1}},\ k\in N.$$

b) Să se demonstreze că $a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ şi să se afle $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

5. Se consideră şirul $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$.

a) Să se arate că $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}$

pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Să se arate prin inducţie că $a_{2^k} \geqslant \frac{k+1}{2}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

c) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

6. Se dă şirul $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \alpha\sqrt{n}$.

a) Să se demonstreze inegalităţile:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1},\ \forall\, n \in N$$

b) Să se arate că există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ pentru orice α fixat.

7. Se dă şirul $a_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{3}} + \frac{1}{1+\sqrt{4}} + \frac{1}{1-\sqrt{5}} + \cdots +$

$$+\ \frac{1}{1+(-1)^{n-1}\sqrt{n+1}}.$$

a) Să se demonstreze identitatea:

$$a_{2n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{1} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{4}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \cdots + \frac{\sqrt{2n}}{2n-1} - \frac{\sqrt{2n+1}}{2n}\right) -$$

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

b) Să se arate că

$$b_n = \frac{\sqrt{2}}{1} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{4}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \cdots + \frac{\sqrt{2n}}{2n-1} - \frac{\sqrt{2n+1}}{2n}$$

este un şir monoton crescător şi mărginit superior.

c) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

8. Să se arate prin inducție că $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$, dacă $a \geqslant -1$ iar n = număr natural. În ce caz are loc egalitatea ?

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = \begin{cases} +\infty, & b > 1 \\ 0 & , 0 \leqslant b < 1 \end{cases}$.

9. Dacă $-1 < a < 1$, să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} (a^n + a^{n+1} + \cdots + a^{2n}) = 0.$$

10. a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c^n}{n} = \begin{cases} +\infty & \text{dacă } c > 1 \\ 0 & \text{dacă } -1 \leqslant c \leqslant 1 \end{cases}$.

Există limita precedentă dacă $c < -1$?

b) Să se afle $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c^n}{n^2}$.

c) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$, oricare ar fi c real, observînd că $\frac{|c|}{n} < \frac{1}{2}$ pentru $n > N_1$.

11. a) Dacă $\alpha > 1$, să se arate că are loc inegalitatea $(1 - \varepsilon)^n < \alpha < (1 + \varepsilon)^n$ pentru $n > N(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ fiind un număr dat, suficient de mic.

b) Să se deducă de mai sus $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$, α fiind un număr pozitiv oarecare.

12. Se dă șirul $a_n = [a + (n - 1)\, r]\, q^{n-1}$ unde a, r și q sînt niște constante fixate.

a) Ce reprezintă șirul a_n pentru $r \neq 0$ și $q = 1$?
Dar pentru $r = 0$ și $q \neq 1$?

b) Să se arate că $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \frac{a}{1 - q} + r \cdot q \frac{1 - q^n}{(1 - q)^2} - \frac{(a + nr)\, q^n}{1 - q}$ pentru $q \neq 1$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)$.

13. Se dă șirul (a_n) prin :

$a_0 = 1$, $a_1 = 0$ și $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ pentru $n \geqslant 2$.

Să se studieze natura acestui șir.

14. Fie $x_0 \geqslant 1$ un număr real, iar $x_{n+1} = \dfrac{2}{1+x_n^2}$ $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ Să se arate că șirul (x_n) este convergent și să se afle limita sa.

15. Să se arate că $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x$ în toate punctele unde cele trei funcții sînt finite.

b) Să se calculeze $S_n(x) = \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{2} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2^n}$.

c) Să se afle $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x)$.

16. Plecînd de la identitatea $2 + \cos x - 4 \cos^2 x = \cos x - 2\cos 2x$, să se afle

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\left(2 + \cos\frac{x}{2^k} - 4\cos^2\frac{x}{2^k}\right) \text{ și } \lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

17. a) Plecînd de la relația $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, să se calculeze suma

$$S_n(x) = \sin^3 x + 3\sin^3\frac{x}{3} + \cdots + 3^n \sin^3\frac{x}{3^n} = \sum_{k=0}^{n} 3^k \sin^3\frac{x}{3^k} \text{ și } \lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

b) Să se calculeze, prin derivarea lui $S_n(x)$ suma

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{2x}{3^k}\sin\frac{x}{3^k}.$$

Șiruri intercalate

18. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}} + \dfrac{1}{(n+1)^{3/2}} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)^{3/2}}\right) = 0.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{(2n)^2} + \dfrac{1}{(2n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-1)^2}\right) = 0.$

19. Să se stabililească relațiile următoare:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6^n + 7^n} = 7.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n + 6^n + 9^n} = 9.$

20 Să se arate că :

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+1}}+\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+n}}\right)=1.$

$p\geqslant 2$ natural.

21. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{n+1}+\cdots+\cos\frac{\pi}{2n}}{n+1}=1.$$

22. a) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin^2\frac{\pi}{n+1}+\sin^2\frac{\pi}{n+2}+\cdots+\sin^2\frac{\pi}{n+n}\right)=0.$$

b) Să se obţină de mai sus

$$\lim_{n\to\infty}\left[n-\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi}{n+k}\right]=0.$$

23. Folosind inegalităţile $e<n<e^n$ pentru $n\geqslant 3$, să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}$.

Şiruri monotone.

24. a) Să se arate că şirul $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ este monoton descrescător la e.

b) Să se deducă inegalităţile $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, n natural.

25. Se ia şirul $a_n=\frac{2^n\cdot n^n}{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}$, $n=1,\ 2,\ 3\ldots$

Să se arate că $a_{n+1} = a_n \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n(2n+1)}$, de unde să se deducă că (a_n) este monoton crescător și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

26. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{3}\right)^n = 0$, stabilind o relație de recurență între doi termeni consecutivi ai șirului corespunzător.

27. Se dă șirul $a_n = a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$ cu $\alpha_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; (adică a_n este o fracție zecimală).

a) Să se arate că șirul (a_n) este monoton și mărginit.

b) Să se aproximeze limita șirului (a_n) cu o eroare cel mult egală cu $\dfrac{1}{10^5}$.

28. a) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$, stabilind o relație de recurență între doi termeni consecutivi ai șirului $a_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$.

b) Prin același procedeu să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{n^n} = 0$.

29. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)^n}{(2n)!} = 0$.

30. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n \cdot n!}{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)} = 0$.

31. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n!)^2}{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)} = +\infty$.

32. a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n} = 0$.

b) Mai general, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n \cdot n!}{n^{n-p}} = 0$, p = număr natural fix.

c) Să se arate că șirul $a_n = \dfrac{e^n \cdot n!}{n^n}$ este convergent.

33. Se dă şirul $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$.

a) Să se arate că $a_n \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

34. Se dă şirul (a_n) prin: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{1 + 3a_n} - 1$ pentru $n = 0, 1, 2, ...$

a) Să se arate că

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{(\sqrt[3]{1+3a_n})^2 + \sqrt[3]{1+3a_n}\sqrt[3]{1+3a_{n-1}} + (\sqrt[3]{1+3a_{n-1}})^2}(a_n - a_{n-1}).$$

b) Să se arate că şirul (a_n) este monoton şi mărginit.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

35. Se dă şirul $a_n = \frac{\ln n}{n}$ pentru $n > 2$.

a) Să se arate că şirul (a_n) este monoton şi mărginit.

b) Să se verifice relaţia $a_{2n} = \frac{1}{2} a_n + \frac{\ln 2}{2n}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

36. Se dă şirul $a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$, pentru care:

1. $b_k b_{k+1} < 0$ pentru $\forall k \in N$.

2. $|b_1| \geqslant |b_2| \geqslant ... \geqslant |b_n| \geqslant ...$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

a) Să se arate că şirul (a_n) este convergent.

b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, atunci $|a - a_n| < |b_{n+1}|$, $\forall n \in N$.

c) Să se aplice rezultatele de mai sus şirului

$$a_n = \frac{1}{\ln \sin 1} + \frac{1}{\ln^2 \sin \frac{1}{2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\ln^n \sin \frac{1}{n}}.$$

37. I fiind un interval oarecare și f o funcție $I \to I$, definim un șir (x_n) prin relația de recurență $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, x_0 fiind un punct fixat din I. Să se arate că:

a) Dacă $f(x) - x > 0$ pe I, șirul (x_n) este monoton crescător.

b) Dacă $f(x) - x < 0$ pe I, șirul (x_n) este monoton descrescător.

c) Dacă $x_n = x_{n-1}(2x_{n-1}^2 + x_{n-1} + 1)$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ rezultă

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} -\infty & \text{pentru } x_0 < -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \text{pentru } x_0 = -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{pentru } -\dfrac{1}{2} < x_0 \leqslant 0 \\ +\infty & \text{pentru } x_0 > 0 \end{cases}$$

38. Fie (a_n) și (b_n) două șiruri de numere pozitive. Să se arate că:

a) Dacă $0 < \alpha \leqslant \dfrac{a_n}{b_n} \leqslant \beta < +\infty$ pentru orice n, șirurile

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \text{ și } \sigma_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$$

sînt sau ambele convergente, sau ambele divergente la $+\infty$.

b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ este finită și pozitivă, concluzia precedentă se menține adevărată.

39. Se dă șirul $a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}$, $a > 0$ (n radicali).

a) Să se arate că șirul este monoton crescător și mărginit superior.

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

40. Să se arate că dacă (a_n) este un șir mărginit de numere pozitive, șirul

$$b_1 = \sqrt{a_1},\ b_2 = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2}}, \ldots, b_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_n}}}, \ldots$$

este convergent.

41. Se dă șirul $a_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$, $n = 1, 2, 3 \ldots$

a) Să se arate că $-2 < a_n < -1$ pentru $n \geqslant 2$, iar $a_1 = -1$.

b) Să se arate că (a_n) este un șir convergent.

c) Cît trebuie să fie α pentru ca să avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}-\alpha\sqrt{n}\right)=0\ ?$$

42. a) Din inegalitatea $1+x\leqslant e^x$ pentru x real, să se obțină că șirul

$$p_n=\left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-\frac{x}{1}}\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\cdots\cdots\left(1+(-1)^{n-1}\frac{x}{n}\right)e^{(-1)^n\frac{x}{n}},$$

$-1<x<1$, este monoton și mărginit; se notează $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p$.

b) Să se arate că șirul $g_n=\dfrac{(1+x)(2-x)\cdots\cdots(n+(-1)^{-n}x)}{2^x\cdot n!}$

$-1<x<1$, este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}g_n=p$.

43. a) Să se arate că $p_n=\left(1+\dfrac{x^2}{1^2}\right)e^{-\frac{x^2}{1^2}}\left(1+\dfrac{x^2}{2^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2^2}}\cdots\left(1+\dfrac{x^2}{n^2}\right)e^{-\frac{x^2}{n^2}}$ este un șir convergent. Se notează $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p$.

b) Dacă notăm $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)$ să se arate că șirul

$$g_n=\frac{(1^2+x^2)(2^2+x^2)\cdots(n^2+x^2)}{e^{lx^2}(n!)^2}$$

este de asemeni convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}g_n=p$.

44. Să se arate că șirul dat prin legea

$$x_1=1,\ x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{2}{x_{n-1}}\right)$$

pentru $n\geqslant 2$, este monoton descrescător și mărginit inferior. Să se afle limita sa.

Șiruri. Exerciții diverse.

45. Se dă șirul $a_n=n(\sqrt[n]{a}-1)$ pentru $0<a\neq 1$.

a) Să se arate că $\dfrac{a_n}{n}\neq 0$, $\forall n\in N$ iar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=0$.

b) Să se arate că se poate scrie $a_n = \dfrac{\ln a}{\ln\left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)^{\frac{n}{a_n}}}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

46. Se dă șirul $a_n = n(\sqrt[n]{n} - 1)$.

a) Să se arate că $\dfrac{a_n}{n} > 0$, $\forall n \in N - \{1\}$ iar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$.

b) Să se verifice că se poate scrie $a_n = \dfrac{\ln n}{\ln\left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)^{\frac{n}{a_n}}}$.

c) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

47. Se dă șirul $a = n(\sqrt[n]{\ln n} - 1)$.

a) Să se arate că pentru $n \geqslant 3$, $\dfrac{a_n}{n} > 0$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$.

b) Să se verifice că $a_n = \dfrac{\ln(\ln n)}{\ln\left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)^{\frac{n}{a_n}}}$.

c) Folosind relația (b) să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

48. Se dă șirul $\left(1+\dfrac{(-1)}{n}\right)^{\frac{1}{\sin(\pi\sqrt{n^2+1})}}$.

a) Să se arate că $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) \neq 0$, $\forall n \in N$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

c) Să se verifice identitatea $\sqrt{n^2+1} = n + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n(n+\sqrt{n^2+1})^2}$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{1}{\sin(\pi\sqrt{n^2+1})}}$

49. Se consideră numerele complexe $a_n(z) = \left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ unde $z = x + iy$ cu $x, y \in R$, iar $n \in N$. Se consideră apoi șirurile $b_n = |a_n(z)|$, $c_n = \arg a_n(z)$. Să se studieze natura șirurilor (b_n) și (c_n).

50. Plecînd de la relațiile $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ și

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1,$$

să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=e.$$

51. Plecînd de la relațiile $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, să se arate că :

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=\sqrt{e}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1^2}{n^3}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^3}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^3}\right)=\sqrt[3]{e}$.

52. Știind că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{4n^2}\right)=0$,
să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)=1.$$

53. Are loc relația $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a^n)(1+a^{n+1})\cdots(1+a^{2n})=1$, dacă $-1<a<1$.

54. Plecînd de la relația $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{x}=\pi$, să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sin\frac{\pi}{n^2}+\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n^2}\right]=\frac{\pi}{2}.$$

55. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right]=\pi.$$

56. Ştiind că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$, să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots\cdots + \arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1.$$

57. Să se deducă relaţiile:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{1^2}{n^3} + \operatorname{tg}\frac{2^2}{n^3} + \cdots\cdots + \operatorname{tg}\frac{n^2}{n^3}\right) = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1^2}{n^3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{2^2}{n^3} + \cdots + \operatorname{arc\,tg}\frac{n^2}{n^3}\right) = \frac{1}{3}.$$

58. a) Dacă α_i, $\beta_i > 0$ $i=1,2,\ldots,k$ şi $m \leqslant \dfrac{\alpha_i}{\beta_i} \leqslant M$ pentru $i=1, 2, \ldots, k$ rezultă

$$m \leqslant \sqrt[k]{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{\alpha_2}{\beta_2}\cdots\cdots\frac{\alpha_k}{\beta_k}} \leqslant M.$$

b) Dacă (a_n) este un şir de numere pozitive şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ şi în plus $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$.

c) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

d) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin\dfrac{\pi}{2}\,\sin\dfrac{\pi}{3}\cdots\sin\dfrac{\pi}{n}}$.

59. a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c^n}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, c fiind un număr oarecare.

b) Să se studieze şirul $a_n = \dfrac{c^n}{\sqrt[n]{n!}}$, punînd în evidenţă cazurile $|c| \leqslant 1$, $c > 1$ şi $c < -1$.

60. a) Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Notînd $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, să se arate că dacă $|b_n| < \varepsilon/2$ pentru $n > N(\varepsilon)$, are loc inegalitatea

$$\frac{S_N}{n} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{S_n}{n} < \frac{S_N}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru } n > N(\varepsilon).$$

b) Din inegalitatea precedentă să se deducă $-\varepsilon < \frac{S_n}{n} < \varepsilon$ pentru $n \geqslant N_1(\varepsilon)$. Ce concluzie rezultă din ultima inegalitate?

c) Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ (finită), rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = l$, folosind observația că $a_n = l + b_n$, unde $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

d) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) = 0.$

61. Fie (a_n) și (b_n) două șiruri de numere și $b_n > 0$, $n = 1, 2, 3 \ldots$ iar $\lim\limits_{n\to\infty} (b_1 + b_2 + \ldots b_n) = +\infty$.

a) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, să se arate că și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = l$.

b) Să se deducă de mai sus că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, implică

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = l.$$

c) Să se afle $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n}$

62. a) Dacă (a_n) este un șir de numere pozitive, să se arate că

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \quad \forall n \in N.$$

b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l > 0$ să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = l.$$

63. Se consideră șirul (x_n) definit prin relația $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta$, $n = 1, 2, 3 \ldots$. α și β fiind două constante, iar x_0 un număr real oarecare. Să se arate că

a) $|x_{n+1} - x_n| \leqslant |\alpha| \cdot |x_n - x_{n-1}|$, $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $|x_{n+1} - x_n| \leqslant |\alpha|^n \cdot |x_1 - x_0|$, $\quad n = 1, 2, 3 \ldots$

c) $|x_{n+p} - x_n| \leqslant (|\alpha|^n + |\alpha|^{n+1} + \ldots + |\alpha|^{n+p-1})\, |x_1 - x_0|,$
$n,\ p = 1,\ 2,\ 3, \ldots.$

d) Dacă $|\alpha| < 1$, șirul (x_n) este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

Funcții. Limite. Derivate. Grafice.

64. a) Să se afle domeniul maxim de existență al funcției $y = \ln \dfrac{x-1}{x+1}$ și să se găsească funcția reciprocă.

b) Să se verifice relațiile $f^{-1}(f(x)) \equiv x,\ f(f^{-1}(x)) \equiv x$.

65. Se dă funcția $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

a) Să se arate că este strict crescătoare în tot domeniul său de definiție și impară în raport cu originea.

b) Să se afle funcția reciprocă și să se verifice relațiile $f^{-1}(f(x)) \equiv x$, $f(f^{-1}(x)) \equiv x$.

66. Se dă funcția $f(x) = 1 + x + \dfrac{2x \ln|x|}{1-x}$.

a) Să se determine domeniul de existență al funcției $f(x)$.

b) Să se găsească asimptotele graficului funcției $y = f(x)$.

c) Să se calculeze $f'(x)$.

67. a) Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile (distincte sau confundate) polinomului $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $\quad a_0 \neq 0$.

Să se arate că:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{1}{x-x_n}.$$

b) Să se arate că:

$$\frac{2nx^{2n-1}}{x^{2n}-1} = \frac{2x}{x^2-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2x - 2\cos\dfrac{k\pi}{n}}{x^2 - 2x\cos\dfrac{k\pi}{n} + 1}$$

c) Să se arate că:

$$\frac{(2n+1)x^{2n}}{x^{2n+1}+1} = \frac{1}{x+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2x - 2\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n+1}}{x^2 - 2x\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1}.$$

68. a) Dacă există două constante c_1 și c_2 nu ambele nule, încît $c_1y_1(x)+ + c_2y_2(x) \equiv 0$ pe un interval I, $y_1(x)$ și $y_2(x)$ fiind derivabile, are loc relația $y_1(x)\,y_2'(x) - y_2(x)\,y_1'(x) \equiv 0$ pe I.

b) Reciproca acestei afirmații este adevărată ? A se vedea cazul

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}, \qquad y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}.$$

69. a) Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$, $\beta(x) \neq 0$ și există una din limitele $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sin\alpha(x)}{\beta(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\sin\beta(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sin\alpha(x)}{\sin\beta(x)}$, atunci există toate aceste limite și sînt egale între ele.

b) Să se arate că

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} - \dfrac{\pi}{2}}{x-1} = -1,$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} - \dfrac{\pi}{2}}{x-1} = 1.$$

70. Să se afle derivata funcției $y = \arcsin x$ (determinarea principală), ținînd seama de exercițiul precedent.

71. Să se calculeze derivata funcției $y = \arccos x$ (determinarea principală). (A se vedea exercițiile precedente).

72. a) Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$, $\beta(x) \neq 0$ și există una din limitele

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\beta(x)}, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\operatorname{tg}\beta(x)}, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\operatorname{tg}\beta(x)},$$

atunci există toate aceste limite și sînt egale între ele.

b) Plecînd de la definiție, să se calculeze derivata funcției $y = \operatorname{arc\,tg} x$, într-un punct oarecare $x_0 \in R$.

73. Se dă funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} \text{ pentru } x \in (-\infty, -1] \\ \frac{1}{x} - x \text{ pentru } x \in (-1,0) \cup (0, 1) \\ \frac{1}{x} - x + \frac{5}{128}(x-1)^4 \text{ pentru } x \in [1, +\infty), \end{cases}$$

a) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea pînă la ordinul IV în punctul $x = 1$.

b) Să se reprezinte grafic funcţia $y = f(x)$.

74. Se dă funcţia $f(x) = x + \frac{1}{x} \sin \pi x$ pentru $x \neq 0$.

a) Să se găsească asimptotele graficului funcţiei $f(x)$.

b) Să se calculeze punctele de intersecţie a graficului funcţiei $y = f(x)$ cu fiecare din graficele funcţiilor $y = x$; $y = x + \frac{1}{x}$, $y = x - \frac{1}{x}$.

c) Să se reprezinte grafic pe acelaşi sistem de axe:

$$y = f(x),\ y = x + \frac{1}{x},\ y = x - \frac{1}{x},\ y = x.$$

75. Se consideră funcţia $f(x) = \frac{1}{x}\left(2 + \sin \frac{\pi}{x}\right)$ pentru $x > 0$.

a) Să se găsească asimptotele la graficul funcţiei $f(x)$.

b) Să se arate că $\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{x}$ şi să se găsească punctele în care are loc egalitatea fie cu $\frac{1}{x}$ fie cu $\frac{3}{x}$.

c) Să se scrie într-un singur şir descrescător (x_n) abscisele punctelor de intersecţie determinate la punctul (b) şi apoi să se studieze şirul $a_n = |f(x_{n+1}) - f(x_n)|$.

d) Să se reprezinte grafic pe acelaşi sistem de axe

$$y = f(x),\ y = \frac{1}{x},\ y = \frac{3}{x} \text{ pentru } x > 0.$$

76. Se dau funcţiile $f(x) = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$, $\varphi(x) = \ln(1 + \sqrt{1 - x^2})$ $\Psi(x) = \ln(1 - \sqrt{1 - x^2})$.

a) Să se reprezinte grafic cele trei funcții pe același sistem de axe.

b) Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} (f(x) - \ln x)$.

c) Să se arate că pentru $x > 0$, $\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - x < 0$.

d) Să se calculeze aria delimitată de graficele $y=f(x)$, $y = \varphi(x)$ și $x = 1$ situată în primul cadran.

Teoremele lui Rolle, Lagrange, Cauchy.

77. a) Dacă funcțiile derivabile $f(x)$ și $g(x)$ au proprietatea că $f'(x)g(x)-f(x)g'(x) \neq 0$ pe un interval I, între două rădăcini ale lui $f(x)$ se află cel puțin o rădăcină a lui $g(x)$ și reciproc.

b) Dacă $f'(x)\cos x + f(x)\sin x \neq 0$, în orice interval de lungime mai mare decît π se află cel puțin o rădăcină a lui $f(x)$.

78. Să se arate că dacă $f(x)$ și $g(x)$ sînt continui pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b) și $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, din relația

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f(a)}{g(a)}, \text{ rezultă că există } c \in (a, b) \text{ încît } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(c)}{g(c)}.$$

79. Dacă $f(x)$ și $g(x)$ sînt continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b), $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, din relația $f(a) = f(b) = 0$ rezultă că există $c_n \in (a, b)$ încît $\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = n\frac{f(c_n)}{g(c_n)}$, oricare ar fi numărul natural n fixat.

80. Dacă $f(x)$ este de n ori derivabilă în intervalul I și are $(n + 1)$ rădăcini distincte în I, să se arate că $f^{(n)}(x)$ are cel puțin o rădăcină în acest interval.

81. a) Să se arate că ecuația $na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2} + \dots + 2a_{n-2}x + a_{n-1} = 0$, $n \geqslant 2$ număr natural, are cel puțin o rădăcină în $(0, 1)$ dacă $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = 0$.

b) Aceeași ecuație are cel puțin o rădăcină în $(-1, 0)$ dacă $a_0(-1)^n + a_1(-1)^{n-1} + a_2(-1)^{n-2} + \dots + a_{n-2} - a_{n-1} = 0$.

82. Să se arate că ecuația $a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $(-1, +1)$, dacă are loc relația

$$\frac{a_0}{2n+1} + \frac{a_2}{2n-1} + \frac{a_4}{2n-3} + \dots + \frac{a_{2n}}{1} = 0.$$

83. Să se arate că ecuația $a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \ldots + a_{2n}x + a_{2n+1} = 0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $(-1, +1)$, dacă are loc relația

$$\frac{a_1}{2n+1} + \frac{a_3}{2n-1} + \frac{a_5}{2n-3} + \cdots + \frac{a_{2n+1}}{1} = 0 .$$

84. Fie $f(x) = ax^2 + bx + c$. Să se aplice formula creșterilor finite pe intervalul $[x_1, x_2]$, găsindu-se punctul intermediar ξ. Să se deducă de aici un mod de a construi tangenta la parabolă într-un punct dat al ei.

85. Să se calculeze valoarea lui θ dat de teorema lui Lagrange aplicată funcției $f(x) = x \ln x$ pe intervalul $[a, b]$, $0 < a < b$.

86. Folosind teorema creșterilor finite (a lui Lagrange) să se demonstreze inegalitatea $|\sin x| \leqslant |x|$, $\forall x \in R$, apoi să se arate că șirul $a_1 = \sin x$, $a_2 = \sin \sin x, \ldots, a_n = \sin \sin \cdots \sin x$ este monoton și mărginit oricare ar fi x, iar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

87. a) Să se arate că dacă $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|^{1+\alpha}$ cu $\alpha > 0$, oricare ar fi x, y dintr-un interval, funcția $f(x)$ este constantă pe acest interval.

b) Dacă $|f(x) - f(y) - A(x - y)| \leqslant M|x - y|^{1+\alpha}$ cu $\alpha > 0$, oricare ar fi x, y dintr-un interval, rezultă $f(x) \equiv Ax + B$ pe acest interval, unde $B =$ const.

88. Folosind observația că $g'(x) \equiv 0$ implică $g(x) \equiv c$, să se arate că:

a) $xf'(x) + 2f(x) = 0$ implică $f(x) = \dfrac{c}{x^2}$.

b) $(1 + x^2)f'(x) + 2xf(x) = 0$ implică $f(x) = \dfrac{c}{1+x^2}$.

c) $f'(x) + \lambda f(x) = 0$ implică $f(x) = c\,e^{-\lambda x}$.

89. Să se afle funcțiile $f(x)$ pentru care $(a - f(x))f'(x) = \sqrt{2af(x) - f^2(x)}$ pe un interval I, a fiind o constantă nenulă.

90. Dacă $\alpha(x)$ și $\beta(x)$ sînt derivabile pe un interval I și $\alpha(x) \not\equiv 0$, să se arate că relația $y(x) = c\alpha(x) + \beta(x)$ und. $c =$ const., este echivalentă cu $\alpha(x)y'(x) - \alpha'(x)\,y(x) = \alpha(x)\,\beta'(x) - \alpha'(x)\,\beta(x)$ pentru $x \in I$.

91. a) Dacă $x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 0$, să se arate că $y(x) = \frac{c_1x + c_2}{x^2}$.

b) Dacă $xy''(x) + y'(x) = 0$, rezultă $y = c_1 \ln |x| + c_2$.

92. Dacă $xy''(x) - y'(x) = 0$ să se arate că $y(x) = c_1x^2 + c_2$, unde c_1 și c_2 sînt două constante.

93. Pentru ce valori ale lui m funcția

$$f(x) = \frac{me^x - (1 + m)e^{-x}}{1 + e^x}$$

este monotonă în tot domeniul său de definiție ?

94. a) Dacă $f(x)$ continuă pe $[a, b]$ este derivabilă pe (a, b) și $f(a) < f(b)$, există măcar un $c \in (a, b)$ încît $f'(c) > 0$.

b) Dacă $f(a) > f(b)$ există măcar un $c \in (a, b)$ încît $f'(c) < 0$.

95. Să se arate că dacă $m \leqslant |f'(x)| \leqslant M$ pentru x din intervalul I, au loc relațiile :

α) $m |x - y| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant M |x - y|, \ \forall x, y \in I$

β) $m^k |x - y| \leqslant |f^{[k]}(x) - f^{[k]}(y)| \leqslant M^k |x - y|, \ \forall x,y \in I$,

unde $f^{[k]}(x) = f(f \cdots f(x))$ = iterata de ordinul k a funcției $f(x)$. Se presupune că domeniul valorilor lui $f(x)$ este inclus în I.

Dacă $f(x)$ este derivabilă și are loc (α), rezultă $m \leqslant |f'(x)| \leqslant M$?

96. a) Dacă $f(x)$ e derivabilă pe $[a, b]$ și $|f'(x)| \leqslant L$, oricare ar fi n natural și $x_i \in [a, b]$ cu $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, are loc inegalitatea $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant L(b - a)$.

b) Funcția

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \cos \frac{\pi}{x^2}, & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

este derivabilă pe $[0, \pi]$, totuși sumele corespunzătoare partițiilor $0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n-1}} < \cdots < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ nu sînt mărginite.

Care este explicația ?

97. Dacă $f(x)$ şi $g(x)$ sînt continui pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b), $f(a) = g(a) = 0$ şi $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, rezultă oare de aici că $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$? A se vedea cazul $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ şi $g(x) = x$.

98. Dacă $f(x)$ are derivată de ordinul II pe intervalul I, şi $a, b \in I$, să se arate că există $c \in (a, b)$ încît

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2} f''(c),$$

aplicînd formula lui Cauchy funcţiilor

$$g(x) = f(x) + (b - x)f'(x) \text{ şi } h(x) = (b - x)^2.$$

99. Funcţia $f(x)$ admite derivată de ordinul II pe intervalul $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $f''(x)$ este continuă în punctul $x = a$, iar $f''(a) \neq 0$. Din formula lui Lagrange $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$, $0 < \theta < 1$ şi $|h| < \varepsilon$, rezultă că θ este funcţie de h. Să se arate că $\lim\limits_{h \to 0} \theta = \frac{1}{2}$.

100. Aplicînd formula lui Cauchy pe $[a, b]$ funcţiilor $g(x) = f(x) + \frac{(b - x)}{1!} f'(x) + \frac{(b - x)^2}{2!} f''(x)$ şi $h(x) = (b - x)^3$, să se arate că dacă $f(x)$ are derivată de ordinul trei pe un interval I, iar $a, b \in I$, atunci există $c \in (a, b)$ încît

$$f(b) = f(a) + \frac{(b - a)}{1!} f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(b - a)^3}{3!} f'''(c).$$

Generalizare.

Formula lui Leibniz.

101. a) Să se demonstreze prin inducţie formula derivatei de ordinul n a unui produs:

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \cdot g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x) \cdot g'(x) + \dots + C_n^k f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) + \dots + C_n^n f(x) \cdot g^{(n)}(x)$$

b) Să se calculeze $(x \ln x)^{(n)}$, $(x^2 \sin x)^{(100)}$ şi $(x \sin^2 x)^{(73)}$.

102. Să se calculeze $f^{(n)}(x)$ dacă $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$, $x \neq 1, -1$.

103. a) Să se arate că $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ şi $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Să se afle $(e^x \cos x)^{(n)}$ şi $(e^x \sin x)^{(n)}$; n = număr natural.

104. Dacă $y(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, plecînd de la relaţia $(1 + x^2)y'(x) = 1$, să se stabilească o relaţie de recurenţă între trei derivate consecutive ale lui $y(x)$.

105. Se dă funcţia $y = \frac{1}{x} e^{x^2}$, $x \neq 0$.

a) Să se arate că $xy'(x) = (2x^2 - 1)y(x)$

b) Să se deducă relaţia

$xy^{(n+1)}(x) + (n + 1 - 2x)y^{(n)}(x) - 4nxy^{(n-1)}(x) - 2n(n-1)y^{(n-2)}(x) \equiv 0$, $n \geqslant 2$, n fiind număr natural.

106. Se dă funcţia $y(x) = \frac{1}{x^2} e^{-x^2}$, $x \neq 0$. Plecînd de la relaţia $xy' + (2x + 2)y = 0$, să se stabilească o relaţie de recurenţă între 4 derivate succesive ale acestei funcţii.

107. a) Se dă funcţia $y = e^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$. Plecînd de la relaţia $y = -x^2 y'$ să se arate că $x^2 y^{(n+1)}(x) + (2nx + 1)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$, n fiind un număr natural oarecare.

b) Să se arate prin două metode că

$$(x^2 e^{\frac{1}{x}})^{(n+1)} = (2x - 1)(e^{\frac{1}{x}})^{(n)} + 2n(e^{\frac{1}{x}})^{(n-1)},$$

n fiind număr natural.

Funcţii convexe şi funcţii concave.

Definiţia 1: Funcţia $f(x)$ continuă pe intervalul I (închis sau deschis) se numeşte convexă pe I, dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, graficul ei pe $[x_1, x_2]$ se află sub graficul secantei ce trece prin punctele $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.

Definiţia 2: Funcţia $f(x)$ continuă pe intervalul I (închis sau deschis) se numeşte concavă pe I, dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$ graficul ei pe $[x_1, x_2]$ se află deasupra graficului secantei ce trece prin punctele $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$

108. a) Observînd că un punct $x \in [x_1, x_2]$ se scrie în forma $x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ cu $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, să se arate că condiția de convexitate pe un interval I este echivalentă cu

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1 - \lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2),$$

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

b) Condiția de concavitate pe intervalul I este echivalentă cu

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \geqslant (1 - \lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

109. Fie $f(x)$ derivabilă pe intervalul I.

a) Condiția de convexitate pe I este echivalentă cu următoarea condiție: graficul funcției pe intervalul I se află situat deasupra oricărei tangente într-un punct de pe acest interval.

b) Condiția de concavitate pe I este echivalentă cu următoarea: graficul funcției pe intervalul I se află situat sub orice tangentă într-un punct de pe acest interval.

110. a) Dacă $\varphi(x)$ este derivabilă pe $[a, b]$, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ și $\varphi'(x)$ este crescătoare, rezultă $\varphi(x) \leqslant 0$ pe $[a, b]$.

b) Dacă $\varphi(x)$ este derivabilă pe $[a, b]$, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ și $\varphi'(x)$ este descrescătoare, rezultă $\varphi(x) \geqslant 0$ pe $[a, b]$.

111. a) Dacă $f(x)$ este convexă și derivabilă pe $[a, b]$, rezultă $f'(x)$ crescătoare pe $[a, b]$.

b) Invers, dacă $f'(x)$ este crescătoare pe $[a, b]$, rezultă $f(x)$ convexă pe $[a, b]$.

c) Dacă $f''(x) \geqslant 0$ pe $[a, b]$, rezultă $f(x)$ convexă pe $[a, b]$.

112. a) Dacă $f(x)$ este concavă și derivabilă pe $[a, b]$, rezultă $f'(x)$ descrescătoare pe $[a, b]$.

b) Dacă $f(x)$ este derivabilă și $f'(x)$ este descrescătoare pe $[a, b]$, rezultă $f(x)$ concavă pe $[a, b]$.

c) Dacă $f''(x) \leqslant 0$ pe $[a, b]$, rezultă $f(x)$ concavă pe $[a, b]$.

d) Considerînd funcția $f(x) = \ln x$ pe $(0, \infty)$, să se arate că dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$ are loc relația

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

113. Dacă $f(x)$ este convexă pe $[a, b]$ și $f(a) f(b) < 0$, rezultă că $f(x)$ are o singură rădăcină în (a, b).

114. a) Dacă $f(x)$ este convexă pe intervalul I, plecînd de la inegalitatea $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, $\forall x_1, x_2 \in I$ să se arate că

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)}{4},$$

$$\forall x_i \in I, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

b) Să se arate prin inducție că oricare ar fi $m = 2^k$, are loc inegalitatea

$$f\left(\frac{\sum\limits_1^m x_i}{m}\right) \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^m f(x_i)}{m}, \quad \forall x_i \in I, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

c) Dacă $f(x)$ este convexă și are loc inegalitatea precedentă pentru un m natural $\geqslant 2$, rezultă că are loc și inegalitatea corespunzătoare pentru $m - 1$.

d) Să se arate că dacă $f(x)$ este convexă pe I și n este un număr natural oarecare, atunci

$$f\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i}{n}\right) \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^n f(x_i)}{n}, \qquad \forall x_i \in I, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

e) Știind că $f(x) = x^\alpha$, $\alpha > 1$ este convexă pentru $x \geqslant 0$, să se arate că

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^\alpha \leqslant n^{\alpha - 1}(x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha),$$

$$x_i \geqslant 0, \qquad i = i, 2, \ldots, n.$$

Integrala. Exerciții diverse.

115. Să se calculeze:

a) $\int x \sin x \cos x \, dx.$

b) $\int \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} \, dx.$

c) $\int \sqrt{e^x - 1} \, dx.$

d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}.$

116. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx.$

b) $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$

c) $\int \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\,dx.$

117. Să se calculeze $I = \int te^t \cos t\,dt$ și $J = \int te^t \sin t\,dt.$

118. Să se calculeze integralele $I_n = \int t^n \cos(\ln t)dt$ și $J_n = \int t^n \sin(\ln t)dt$, n fiind număr întreg.

119. a) Să se arate că funcțiile continui pentru $x \geqslant 0$ și derivabile pentru $x > 0$ care satisfac relația

$$2xf(x) - x^2f'(x) = 3\int_0^x f(t)dt,\quad x > 0$$

satisfac și ecuația $x^2f''(x) + f(x) = 0,\ x > 0.$

b) Să se verifice că $f(x) = \sqrt{x}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$ satisfac ultima ecuație, c_1 și c_2 fiind constante.

c) Să se arate că

$$\int_0^x \sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right)dt = \frac{1}{2}x\sqrt{x}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right] \text{ și}$$

$$\int_0^x \sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right)dt = \frac{1}{2}x\sqrt{x}\left[\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right].$$

d) Să se arate că funcțiile $f(x)$ satisfac și prima ecuație de la punctul a).

120. Aplicînd definiţia derivatei şi formula mediei pentru integrala definită, să se arate că dacă $F(x) = \int_a^{b(x)} f(t)dt$, rezultă $F'(x) = b'(x)\, f(x)$ în ipoteza $b(x)$ derivabilă şi $f(x)$ continuă.

121. a) Dacă $f(x)$ şi $g(x)$ sînt continui pe $[a, b]$ şi $g(x) \geqslant 0$, să se arate că există $c \in [a, b]$ încît

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)\, dx.$$

(Prima teoremă a mediei).

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = 0.$

122. Dacă $f(x)$ şi $g(x)$ sînt continui pe $[a, b]$, $f'(x)$ este continuă şi păstrează semn constant pe $[a, b]$, există un punct $c \in [a, b]$ încît

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(a)\int_a^c g(x)\, dx + f(b)\int_c^b g(x)\, dx.$$

(Teorema a doua a mediei).

123. Dacă $f'(x) \leqslant 2\alpha x + \beta$ pentru $a \leqslant x \leqslant b$, să se arate că

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \alpha(b + a) + \beta.$$

124. Dacă $f(x)$ are derivată continuă pe $[0, 1]$ şi satisface inegalitatea $(2f(x) - 1)f'(x) \leqslant 3x^2 + 2x - 2$ pe acest interval, rezultă $f(0) + f(1) \leqslant 1$ dacă $f(0) < f(1)$ şi $f(0) + f(1) \geqslant 1$ dacă $f(0) > f(1)$.

125. Se dă şirul $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}x\, dx.$

a) Să se arate că şirul (a_n) este monoton şi mărginit, fără a calcula integrala.

b) Integrînd prin părţi să se arate că

$$a_n = \frac{2n-1}{2n} a_{n-1} \text{ pentru } n \geqslant 2.$$

c) Folosind formula de recurenţă să se calculeze integrala dată.

126. Funcţia $f(x)$ este definită şi continuă într-un interval I care conţine originea. Definim $f_1(x) = \int_0^x f(t)dt$ şi $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)dt$ pentru $n \geqslant 2$.

a) Dacă $f(x) = x^\alpha$ pentru $x \geqslant 0$, α fiind pozitiv fixat, să se calculeze $f_n(x)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

b) Dacă $f(x) = e^{\alpha x}$. α fiind pozitiv fixat, să se scrie $f_n(x)$ sub forma unei sume.

c) În cazul general, să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f_n(x)}{x}$, $n = 1, 2, 3 \ldots$

127. a) Să se obţină relaţiile

$$2\cos nx = (\cos x + i \sin x)^n + (\cos x - i \sin x)^n$$

$$2i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n - (\cos x - i \sin x)^n$$

oricare ar fi numărul natural n.

b) Să se deducă din a doua relaţie de mai sus (sau altfel) că:

$$\frac{\sin 2nx}{2 \sin x} = \cos(2n-1)x + \cos(2n-3)x + \ldots + \cos x, \; x \neq k\pi, \; n = \text{natural}$$

$$\frac{\sin(2n-1)x}{2 \sin x} = \cos(2n-2)x + \cos(2n-4)x + \ldots + \cos 2x + 1, \; x \neq k\pi, \; n = \text{natural}$$

c) Să se arate că punînd $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx$, avem $I_{2n} = 0$ şi $I_{2n-1} = 2\pi$, oricare ar fi n natural.

d) Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{2\cos x} dx = (-1)^n \frac{\pi}{4}$, n fiind natural.

128. a) Dacă funcţia $y = y(x)$ este strict crescătoare pentru $x \geqslant 0$ şi $y(0) = 0$, să se arate folosind graficul că oricare ar fi numerele $a, b \geqslant 0$ are loc inegalitatea:

$$ab \leqslant \int_0^a y(x)\,dx + \int_0^b x(y)\,dy$$

Pin $x = x(y)$ s-a notat funcția inversă (reciprocă) lui $y = y(x)$.
b) Luînd $y = x^{p-1}$, $1 < p < +\infty$ să se obțină pentru $a, b \geqslant 0$ inegalitatea

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{unde} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

c) Dacă $x_i, y_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, luînd în inegalitatea precedentă

$$a = \frac{x_i}{\sqrt[p]{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}}, \qquad b = \frac{y_i}{\sqrt[q]{y_1^q + y_1^q + \dots + y_n^q}}, \; i=1,2, \dots, n$$

să se obțină inegalitatea lui Hölder

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \leqslant \sqrt[p]{x_2^p + \dots + x_n^p} \cdot \sqrt[q]{y_1^q + y_2^q \dots + y_n^q},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

d) Ce inegalitate cunoscută se regăsește de mai sus dacă $p = 2$?
e) Să se afle minimul expresiei

$$E = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p, \qquad p > 1$$

dacă

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b > 0 \text{ și } a_i, x_i \geqslant 0,$$
$$i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Integrarea prin părți.

129. Să se demonstreze egalitățile:

a) $$\int_1^e (t + 1)e^t \ln t \, dt = e^e (e - 1).$$

b) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x \cos x + \sin x) \ln x \, dx = -\left(1 + \frac{\pi}{2} \ln 2\right).$$

130. Să se arate că dacă $f(x)$ are derivată continuă de ordinul doi și $f(a)=f(b)=0$, atunci $\int_a^b f(x)f''(x)dx \leqslant 0$.

În ce caz are loc egalitatea?

131. Să se arate că dacă $f(x)$ și $g(x)$ au derivată secundă continuă în $[a, b]$, are loc relația

$$\int_a^b f(x)\, g''(x)\, dx = \int_a^b f''(x)\, g(x) dx,$$

dacă una din următoarele condiții este satisfăcută:

α) $f(a)=f(b)=0, \quad f'(a)=f'(b)=0.$

β) $g(a)=g(b)=0, \quad g'(a)=g'(b)=0.$

Generalizare.

132. Să se arate că dacă $f(x)$ are derivată de ordinul III continuă pe $[a, b]$, rezultă $\int_a^b f(x)f'''(x)\, dx = 0$ în ipoteza că are loc una din condițiile următoare:

(i) $f(a)=f(b), \quad f'(a)=f'(b), \quad f''(a)=f''(b)$ sau

(ii) $f(a)=f(b)=0, \quad f'(a)=f'(b).$

133. Se dă $\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx$, unde n este un număr natural.

a) Dacă se notează $\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx = I_n$, să se deducă o formulă de recurență pentru această integrală.

b) Folosind formula dedusă la punctul (a) să se calculeze integrala dată.

c) Să se calculeze suma: $1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{2n+1}$.

Schimbarea de variabilă în integrala definită.

134. Dacă $f(x)$ e integrabilă pe $[a, b]$ iar $F'(x) = f(x)$ pe $[a, b]$, $g(y)$ este derivabilă pe $[c, d]$ şi $g(c) = a$, $g(d) = b$, rezultă că $F(g(y))$ este o primitivă pentru $f(g(y))g'(y)$ pe $[c, d]$ şi în plus

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(y))g'(y)dy.$$

135. Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă şi periodică cu perioada T, atunci $\int_a^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$, unde n este un număr natural oarecare. În particular, să se calculeze

$$\int_a^{a+2n\pi} \sin x dx \quad \text{şi} \quad \int_a^{a+2n\pi} \cos x dx$$

folosind această formulă.

136. Să se arate că dacă $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$ şi

$$f(a + b - x) = f(x), \ \forall x \in [a, b], \text{ atunci}$$

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx = (a+b)\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx.$$

137. Să se arate că $\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$, unde $f(u)$ este o funcţie continuă pe un interval ce conţine $[0, 1]$.

Aplicaţie: să se afle $\int_0^\pi \frac{x \sin x\, dx}{1 + \sin^2 x}$.

138. Să se arate că dacă $f(x)$ este o funcţie pară şi continuă pe $[-1, +1]$, au loc egalităţile:

a) $\int_0^\pi xf(\cos x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$

b) $\int_0^{2\pi} xf(\sin x)dx = 2\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$

139. Să se arate că $\int_0^{2\pi} xf(\cos x)dx = 2\pi \int_0^{\pi} f(\cos x)\,dx$, unde $f(u)$ este o funcție continuă pe un interval ce conține $[-1.\,1]$.

Aplicație: să se afle $\int_0^{2\pi} \frac{x \cos x\,dx}{5 + 2\cos^2 x}$.

140. Dacă funcția impară $f(u)$ este definită pe un interval ce conține $[-1, +1]$, rezultă

$$\int_0^{2\pi} x^2 f(\sin x)\,dx = -4\pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx.$$

141. Dacă funcția $f(u)$ este impară și definită cel puțin pe $[-2, +2]$, rezultă

$$\int_0^{2\pi} xf(\cos x - \sin x)\,dx = -\pi \int_0^{\pi} f(\cos x - \sin x)\,dx.$$

Integrala definită ca limita unor sume.

142. a) Dacă $f(x)$ este integrabilă pe $[a, b]$, să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

b) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) = \ln 2.$$

c) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

143. a) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n+1}+\sin\frac{\pi}{n+2}+\cdots+\sin\frac{\pi}{2n}\right)=\pi\ln 2.$$

b) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n+1}+\cdots+\sin\frac{\pi}{2n}+\cdots+\sin\frac{\pi}{3n}\right)=\pi\ln 3.$$

144. Plecînd de la faptul că $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}$, să afle următoarele limite :

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{1}}{n\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}\right)\cdots\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right)$.

145. Ştiind că $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx=\ln\frac{4}{e}$, să se obţină cu ajutorul sumelor integrale că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}}{n}=\frac{4}{e}.$$

146. a) Calculînd $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x+1}}$ direct şi cu ajutorul sumelor integrale, să se arate că :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)=2(\sqrt{2}-1).$$

b) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)=e^{2(\sqrt{2}-1)}.$$

147. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right).$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right).$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+1^p}}+\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+2^p}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+n^p}}\right),$

$p =$ fix, natural.

Ecuaţii diferenţiale.

148. a) Să se arate că soluţia ecuaţiei $\dot\varphi(x)=\varphi(x)+\alpha$ este $\varphi(x) = ce^x-\alpha$, iar soluţia ecuaţiei $\dot\varphi(x)=-\varphi(x)+\alpha$ este $\varphi(x)=ce^{-x}+\alpha$, unde c este o constantă arbitrară.

b) Să se rezolve ecuaţia $\cos\dot\varphi(x)=\sin\left(\varphi(x)+\frac{\pi}{4}\right).$

c) Să se rezolve ecuaţia $\sin^2\varphi(x)+\cos^2\dot\varphi(x)=\cos^2\varphi(x)+\sin^2\dot\varphi(x).$

149. Să se afle $u(x)$ derivabilă încît $y(x)=u(x)(1+x^2)$ să verifice ecuaţia $y'(x)-\frac{2x}{1+x^2}y(x)=2\operatorname{arc\,tg}x,\ x\in R.$

150. a) Să se afle funcţiile $f(x)$, pentru care $u(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$, $x\neq 0$ verifică ecuaţia $u'(x)+\frac{1}{1+x^2}u(x)=0.$

b) Să se afle funcţiile $f(x)$ care satisfac relaţia

$$f(e^x)+\int_0^x f(e^t)dt=1.$$

151. Funcţia $f(x)$, definită, diferită de zero şi de două ori derivabilă pentru $x > 0$, satisface relaţia $xf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f'(x)}$.

a) Să se arate că relaţia precedentă este echivalentă cu

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{f(x)}.$$

b) Derivînd una din aceste relaţii în raport cu x, să se arate că $f(x)$ satisface ecuaţia diferenţială $\frac{f''(x)}{f'(x)} = -\frac{1}{x} + \frac{f'(x)}{f(x)}$.

c) Integrînd ecuaţia de la punctul b), să se afle toate funcţiile $f(x)$ care satisfac relaţia dată iniţial.

152. Se dă ecuaţia $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ unde a, b, c sînt constante reale, $a \neq 0$ şi $b^2 - 4ac > 0$.

a) Dacă r_1 şi r_2 sînt cele două rădăcini (reale şi distincte) ale ecuaţiei caracteristice $ar^2 + br + c = 0$, să se arate că $y_1(x) = e^{r_1x}$ şi $y_2(x) = e^{r_2x}$ sînt soluţii particulare ale ecuaţiei ecuaţiei diferenţiale date.

b) Este $y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ soluţie a ecuaţiei date?

153. Se dă ecuaţia $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ unde a, b, c sînt constante reale, $a \neq 0$ şi $b^2 - 4ac = 0$.

a) Dacă r este rădăcină dublă a ecuaţiei caracteristice $ar^2 + br + c = 0$, să se arate că $y_1 = e^{rx}$ şi $y_2 = xe^{rx}$ sînt soluţii particulare ale ecuaţiei diferenţiale date.

b) Este $y(x) = e^{rx}(c_1x + c_2)$ soluţie a ecuaţiei date?

154. Se dă ecuaţia diferenţială $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ unde a, b, c sînt constante şi $b^2 - 4ac < 0$.

a) Dacă $r_1 = \alpha + i\beta$ şi $r_2 = \alpha - i\beta$ sînt rădăcinile ecuaţiei caracteristice $ar^2 + br + c = 0$, să se arate că $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ şi $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ sînt soluţii particulare ale ecuaţiei date.

b) Este $y(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$ soluţie a ecuaţiei date?

155. a) Funcţia continuă $y(x)$ satisface relaţia $y(x) = x^2 + \int_0^x (x - t)y(t)dt$. Să se arate că există $y''(x)$ şi în plus $y''(x) - y(x) = 2$.

b) Să se afle funcţiile care verifică prima condiţie de la punctul a),

156. Funcţiile $y_1(x)$ şi $y_2(x)$ verifică ecuaţia

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

pe intervalul I, $a(x)$ și $b(x)$ fiind două funcții continui pe I. Notînd $W(x) =$
$= y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$, are loc relația $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$, $x_0 \in I$ fiind un punct fixat, dar oarecare.

157. Să se afle $x = x(t)$ și $y = y(t)$ care verifică sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}y - x\dot{y} = -a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

unde $a = \text{const}$.

158. Dacă $x = x(t)$ și $y(t)$ verifică sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}y - x\dot{y} = -ab \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

rezultă $x = a\cos(t + c)$, $y = b\sin(t + c)$, unde $c = \text{const}$.

159. Să se afle $x = x(t)$ și $y = y(t)$ care verifică sistemul:

$$\begin{cases} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 \\ x\dot{y} - \dot{x}y = b^2 \end{cases}$$

a și b fiind constante.

160. Să se afle $x(t)$ și $y(t)$ dacă

$$\begin{cases} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 \\ \ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} = -a^2 \end{cases}$$

unde $a = \text{const}$.

161. Dacă funcțiile derivabile $x(t)$ și $y(t)$ verifică relațiile

$$\begin{cases} x\dot{y} - \dot{x}y = 3a^{2/3}x^{2/3}y^{2/3} \\ x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \end{cases}$$

rezultă $x = a\cos^3(t + c)$, $y = a\sin^3(t + c)$, unde $c = \text{const}$.

162. Dacă funcțiile derivabile $x(t)$ și $y(t)$ verifică relațiile:

$$\begin{cases} x\dot{x}^2 + y\dot{y}^2 = \frac{16}{9}a^3t^2 \\ x^3 + y^3 = a^3 \end{cases}$$

rezultă $x = a\cos^{2/3}(c \pm t^2)$, $y = a\sin^{2/3}(c \pm t^2)$, unde $c = \text{const}$.

163. Funcțiile $x = x(t)$ și $y = y(t)$ definite pe un interval I satisfac condiția $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Punînd $x = \Psi(t)\cos\varphi(t)$ și $y = \Psi(t)\sin\varphi(t)$, să se arate că relația de mai sus este echivalentă cu

$$x = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi(t)}\cos\varphi(t), \quad y = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi(t)}\sin\varphi(t).$$

b) Să se afle $x(t)$ și $y(t)$ derivabile, dacă:

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \\ (x^2 + y^2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = a^4. \end{cases}$$

164. a) Fie $x = x(t)$ și $y = y(t)$ două funcții derivabile pe intervalul I, satisfăcînd relația $x^3 + y^3 = 3xy$. Punînd $y = x\varphi$ unde $\varphi = \varphi(t)$, să se arate că relația este echivalentă cu $x = \dfrac{3\varphi}{1 + \varphi^3}$, $y = \dfrac{3\varphi^2}{1 + \varphi^3}$.

b) Să se arate că dacă $x = x(t)$ și $y = y(t)$ satisfac relațiile:

$$\begin{cases} \dot{x}y - 2x\dot{y} = 0 \\ x^3 + y^3 = 3xy \end{cases}$$

rezultă $x = \dfrac{3c}{1 + c^3}$, $y = \dfrac{3c^2}{1 + c^3}$ unde $c = \text{const}$.

c) Dacă cele două funcții satisfac relațiile

$$\begin{cases} \dot{x}y - 2x\dot{y} = \frac{9}{2} \\ x^3 + y^3 = 3xy \end{cases}$$

avem în mod necesar $x = 3\sqrt[3]{(t + c)(1 - \sqrt{t + c})}$, $y = 3\sqrt[3]{\sqrt{t + c}(1 - \sqrt{t + c})}$ sau $x = 3\sqrt[3]{(t + c)(1 + \sqrt{t + c})}$, $y = -3\sqrt[3]{\sqrt{t + c}(1 + \sqrt{t + c})^2}$ unde $c = \text{const}$ și $t + c > 0$ pentru $t \in I$.

165. Fie

$$\begin{cases} y'(x) = a_{11}(x)y + a_{12}(x)z \\ z'(x) = a_{21}(x)y + a_{22}(x)z \end{cases}$$

şi (y_1, z_1), (y_2, z_2) două perechi de funcţii ce satisfac relaţiile de mai sus pe un interval I. Dacă notăm $W(x) = y_1(x)z_2(x) - y_2(x)z_1(x)$, să se arate că $W(x) = W(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} [a_{11}(t)+a_{22}(t)]dt}$ pe intervalul I, x_0 fiind un punct fixat din I.

166. Dacă funcţiile derivabile pe intervalul I, $y = y(x)$ şi $z = z(x)$ satisfac sistemul

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)\, y(x) - b(x)\, z(x) \\ z'(x) = b(x)\, y(x) + a(x)\, z(x) \end{cases}$$

unde $a(x)$ şi $b(x)$ sînt continui pe I, notînd $f(x) = y^2(x) + z^2(x)$ are loc relaţia $f(x) = f(x_0)e^{2\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$ $x_0 \in I$ fiind un punct fixat, dar oarecare.

167. Dacă funcţiile derivabile $y = y(x)$ şi $z = z(x)$ satisfac pe intervalul I sistemul

$$\begin{cases} (y(x) + z(x))^2 \cdot y'(x) = a(x)\, y(x) - b(x)\, z(x) \\ (y(x) + z(x))^2 \cdot z'(x) = -\, b(x)\, y(x) + a(x)\, z(x) \end{cases}$$

unde $a(x)$ şi $b(x)$ sînt continui pe I, să se arate că funcţia $f(x) = (y(x) + z(x))^2$ satisface pe intervalul I condiţia $f(x) = f(x_0) + 2\int_{x_0}^{x} (a(t) - b(t))dt$, x_0 fiind un punct fixat din I, dar oarecare.

168. Dacă funcţiile derivabile $y = y(x)$ şi $z = z(x)$ satisfac pe intervalul I sistemul

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)\, y(x) - b(x)\, z^2(x) \\ z'(x) = b(x)\, y^2(x) + a(x)\, z(x) \end{cases}$$

unde $a(x)$ şi $b(x)$ sînt funcţii continui, pe I, să se arate că funcţia $f(x) = y^3(x) + z^3(x)$ satisface pe intervalul I condiţia $f(x) = f(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} 3a(t)dt}$, x_0 fiind un punct fixat din I, dar oarecare.

Schimbarea de variabilă independentă.

169. Făcînd în ecuația $4xy''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$, $x > 0$ schimbare de variabilă independentă $x = t^2$, adică punînd $z(t) = y(t^2)$, să se arate că soluția sa generală este $y(x) = c_1 \cos \sqrt{x} + c_2 \sin \sqrt{x}$.

170. a) Funcția $y(x)$ verifică ecuația $a_0x^2y''(x) + a_1xy'(x) + a_2y(x) = 0$ pentru $x > 0$. Să se arate că funcția $z(t) = y(e^t)$, $-\infty < t < \infty$ verifică o ecuație diferențială liniară de ordinul doi cu coeficienți constanți.

b) Să se afle funcțiile $y(x)$ care satisfac ecuația

$$x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0, \qquad x > 0.$$

171. Făcînd în ecuația $xy''(x) - y'(x) - 4x^3y(x) = 0$, $x > 0$ schimbarea de variabilă independentă $x = \sqrt{t}$, să se arate că soluția sa generală este $y = c_1e^{x^2} + c_2e^{-x^2}$.

172. Știind că $y(x)$ satisface ecuația

$$(x - x^3)y''(x) + (1 - 3x^2)\, y'(x) - xy(x) = 0$$

pe intervalul $0 < x < 1$, să se afle ecuația la care satisface $z(t) = y(\sqrt{1 - t^2})$ pe intervalul $0 < t < 1$.

173. a) Funcția $y(x)$ verifică ecuația

$$y''(x) + 2\,\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}\,y'(x) + \frac{4\omega^2y(x)}{(e^{2x} + e^{-2x})^2} = 0,$$

pentru x real. Dacă notăm $z(t) = y\left(\frac{1}{2}\ln(\operatorname{tg} 2t)\right)$ să se afle ecuația la care satisface această funcție pe intervalul $0 < t < \frac{\pi}{4}$.

b) Să se scrie soluția ecuației obținute pentru $z(t)$ și apoi soluția ecuației inițiale.

174. Se consideră ecuația diferențială liniară de ordinul doi cu coeficienți variabili $x(x^2 - 1)\,y''(x) + y'(x) + x^3\,y(x) = 0$.

a) Punînd $z(t) = y(\sqrt{1 - t^2})$, $0 < t < 1$, să se arate că

$$z''(t) - z(t) = 0.$$

b) Punînd $z(t) = y(-\sqrt{1 - t^2})$, $0 < t < 1$, se obține din nou

$$z''(t) - z(t) = 0.$$

c) Să se arate că pentru $-1 < x < 1$, $y(x) = c_1\, e^{\sqrt{1-x^2}} + c_2\, e^{\sqrt{1-x^2}}$, c_1 și c_2 fiind constante oarecare.

d) Punînd $z(t) = y(\sqrt{1+t^2}), t > 0$ să se arate că $z''(t) + z(t) = 0$. Același rezultat se obține dacă se pune $z(t) = y(-\sqrt{1+t^2}), t > 0$.

e) Să se arate că pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty), y(x) = c_1 \cos \sqrt{x^2-1} + c_2 \sin \sqrt{x^2-1}$, c_1 și c_2 fiind constante oarecare.

f) Se observă din c) și e) că soluția $y(x)$ a ecuației date nu are aceeași formă în toate punctele x. Au loc astfel de situații în cazul ecuațiilor cu coeficienți constanți $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$?

175. Să se arate că transformările de forma $u = ax + by$, $v = \alpha x + \beta y$, $a\beta - b\alpha \neq 0$ lasă invariantă ecuația $xy'(x) - y(x) = 0$, dacă se consideră $v = v(u)$.

Exerciții și probleme de tip combinat.

176. Fie $f(x)$ definită pe un interval I și derivabilă în $x_0 \in I$. Să se arate că:

a) Dacă $f'(x_0) > 0$, există o vecinătate $V = (x_0 - h, x_0 + h)$ a punctului x_0, încît $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ dacă $x_1 < x_0 < x_2$, $x_1, x_2 \in V$.

b) Dacă $f'(x_0) < 0$ există o vecinătate $V = (x_0 - h, x_0 + h)$ a punctului x_0, încît $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$ dacă $x_1 < x_0 < x_2$, $x_1, x_2 \in V$.

177. a) Fie $f(x)$ derivabilă pe $[a, b]$ și $f'(a) < 0 < f'(b)$. Să se arate că minimul lui $f(x)$ pe $[a, b]$ este luat într-un punct $c \in (a, b)$.

b) În aceleași ipoteze asupra lui $f(x)$, să se arate că $f'(x)$ se anulează măcar într-un punct din (a, b).

c) Dacă $f'(a) < f'(b)$ să se arate că oricare ar fi λ cu $f'(a) < \lambda < f'(b)$, există măcar un $c \in (a, b)$ încît $f'(c) = \lambda$. (Se va considera $g(x) = f(x) - \lambda x$ și se va aplica b).

d) Dacă $f'(x) \neq 0$ pe (a, b) să se arate că $f(x)$ este strict monotonă pe $[a, b]$.

178. a) Dacă $f''(x) \geqslant 0$ pe $[a, b]$ și $f'(a)f'(b) > 0$, rezultă $f(x)$ strict monotonă pe $[a, b]$.

b) Dacă $f''(x) > 0$ pe $[a, b]$ și $f'(a)f'(b) < 0$ rezultă că există un $c \in (a, b)$ încît $f(x)$ este strict monotonă pe intervalele $[a, c]$ și $[c, b]$.

179. Dacă funcția $f(x)$ este definită și continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe $(a, b) - \{x_0\}$, există $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ și $f(a) = f(b)$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încît $f'_-(c)f'_+(c) \leqslant 0$.

180. Se dă funcţia $f(x) = \cos\,(n \arccos x)$ pentru $x \in [-1,1]$ şi n număr natural fixat.

a) Să se arate că $f(x)$ este un polinom de gradul n în x cu toate rădăcinile reale.

b) Să se determine punctele de maxim local ale lui $f(x)$.

c) Dacă se notează $f(x)$ cu $P_n(x)$, să se verifice

$$P_{n+1}(x) - 2xP_n(x) + P_{n-1}(x) = 0 \text{ pentru } n \geqslant 2.$$

181. a) Să se afle $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n} + \lambda \sin\frac{x}{n}\right)^n$, unde x şi λ sînt două constante reale.

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2}\right)^n = e^\alpha$, unde α şi β sînt două constante reale.

182. Se dă funcţia $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$, unde pentru arc sin s-a luat determinarea principală.

a) Să se arate că domeniul de definiţie este $(-\infty, +\infty)$.

b) Să se arate că în punctele $x = 1$, $x = -1$ y nu are derivată, dar are derivate laterale finite.

c) Să se calculeze $y'(x)$ în punctele unde ea există.

d) Să se facă graficul funcţiei date.

183. Se dă funcţia $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$.

a) Să se afle domeniul de existenţă al lui $y(x)$.

b) Să se cerceteze derivabilitatea în origine şi să se calculeze derivata în punctele unde ea există.

c) Să se stabilească relaţiile:

$$y(x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin x \qquad \text{pentru } -1 \leqslant x \leqslant 0$$

$$y(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \qquad \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

d) Să se facă graficul lui $y = y(x)$.

184. Studiind variaţia funcţiei $f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln t}{t}$ (t este parametru), să se arate că ecuaţia $\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln t}{t} = 0$, $x \neq t$ are o singură rădăcină dacă $t \in (1, e) \cup (e, \infty)$ şi nu are rădăcini dacă $t \in (0, 1] \cup \{e\}$.

185. Studiind variaţia funcţiei $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) e^x + m$, să se discute rădăcinile ecuaţiei $(1 + x^2)e^x + mx = 0$, unde m este un parametru real.

186. Se consideră funcţia $f(x) = \frac{sh\, x}{x^\alpha}$ pentru $x > 0$, α fiind un parametru fixat. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$ b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x)$.

187. Dacă funcţia $f(x)$, $x \in [a, b]$ are proprietatea că pentru $\forall x \in [a, b]$, $f(x) = f(2x_0 - x)$ unde $x_0 = \frac{a+b}{2}$ atunci $f(x)$ se numeşte funcţie pară pe $[a, b]$: dacă însă $\forall x \in [a, b]$, $f(x) = -f(2x_0 - x)$ atunci $f(x)$ se numeşte funcţie impară pe $[a, b]$. Se cere:

a) Care este echivalentul geometric (interpretarea geometrică) a acestei noţiuni.

b) Ce se poate spune despre produsul a două funcţii de aceeaşi paritate? Dar de parităţi diferite?

c) Să se arate că dacă $f(x)$ este derivabilă atunci $f'(x)$ este pară dacă $f(x)$ este impară şi $f'(x)$ este impară dacă $f(x)$ este pară.

d) $$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx & \text{dacă } f(x) \text{ este pară pe } [a, b] \\ 0 & \text{dacă } f(x) \text{ este impară pe } [a, b] \end{cases}$$

e) $\int_{\frac{a+b}{2}}^{x} f(t)\,dt$ pentru $x \in [a, b]$ este o funcţie pară dacă $f(x)$ este impară şi este impară dacă $f(x)$ este pară.

188. a) Dacă funcţia $f(x)$ definită pentru $x > x_0$ satisface condiţia, $|f(x) - f(\bar{x})| \leqslant L\,|x - \bar{x}|$ oricare ar fi $x, \bar{x} > x_0$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ există şi este finită.

b) Dacă $g(x)$ este derivabilă pentru $x > x_0$, iar $xg'(x)$ şi $g(x)$ sînt mărginite pentru $x > x_0$, să se arate că $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} xg(x)$ există şi este finită.

c) Este reciproca propoziției de la punctul b) adevărată ? A se vedea cazul $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ pentru $x \neq 0$.

189. Fie $0 < a < 1$.

(i) Să se arate că punînd $f(x) = \begin{cases} a^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ se obține o funcție continuă pentru $x \geqslant 0$.

(ii) Să se arate că $f(x)$ are derivată la dreapta în $x = 0$ și că $f'_+(0) = 0$.

(iii) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\frac{1}{n}\right) = f'_+(0) = 0$, de unde să se deducă $\lim\limits_{n\to\infty} na^n = 0$.

(iv) Considerăm $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$. Să se pună $S_n(x)$ sub o formă prescurtată, observînd că este derivata unui anumit polinom. Cît este $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, dacă $0 < x < 1$?

(v) Să se afle $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^2}\right)$.

190. Se consideră $f(x) = e^x - (1 + x)$;

a) Observînd că $f(0) = f'(0) = 0$ iar $f''(x) > 0$, să se deducă $e^x > 1 + x$ pentru $x > 0$.

b) Luînd $g(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$ să se arate că $g(0) = g'(0) = \cdots = g^{(n)}(0) = 0$ iar $g^{(n+1)}(x) > 0$, de unde să se obțină

$$e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, x > 0.$$

c) Să se arate (folosind binomul lui Newton) că

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, n \geqslant 2$$

de unde să se obțină $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e$.

d) Notînd $a_n = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$ și

$$b_n = \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!},$$

să se exprime b_n în funcție de a_n și să se afle $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

191. a) Luînd $f(x) = \text{arc tg}\, x - x$ și $g(x) = \text{arc tg}\, x - x + \frac{x^3}{3}$, să se arate că pentru $x > 0$ avem $x - \frac{x^3}{3} < \text{arc tg}\, x < x$.

b) În mod analog, pentru $x > 0$ găsim

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} < \text{arc tg}\, x < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}.$$

c) Pentru $x > 0$ și n natural, are loc relația :

$$x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} - \frac{x^{4n-1}}{4n-1} < \text{arc tg}\, x < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$$

d) Se poate deduce de mai sus $\text{arc tg}\, x = \lim\limits_{n\to\infty} \left(x - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^{4n-1}}{4n-1}\right)$ dacă $0 \leqslant x \leqslant 1$?

e) Să se calculeze π cu două zecimale exacte folosind rezultatul dela punctul c).

192. Fie funcția $f(x)$ definită pe $[a, b]$ și $x_0 \in (a, b)$. Prin definiție derivata simetrică $Df(x_0) \stackrel{\perp}{=} \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$, dacă limita există și este finită.

a) Să se arate că dacă există $f'_+(x_0)$ și $f'_-(x_0)$, atunci există și $Df(x_0) = \frac{f'_+(x_0) + f'_-(x_0)}{2}$. În particular, dacă există $f'(x_0)$, exixtă și $Df(x_0) = f'(x_0)$.

b) Dacă $Df(x_0)$ există, este necesar ca f să fie continuă în x_0? A se vedea cazul

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \text{ unde } x_0 = 0. \end{cases}$$

c) Dacă $f(x)$ e continuă pe $[a, b]$, $f(a) = f(b)$ și $Df(x)$ există pe (a, b), putem afirma că există $c \in (a, b)$ încît $Df(c) = 0$? A se vedea cazul

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

d) Analogul formulei creșterilor finite este valabil în cazul cînd $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$ și $Df(x)$ există pe (a, b)?

193. Fie a și b două numere reale fixate. Derivînd funcția $f(t) = (at + b)^n$, să se calculeze sumele $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k a^k b^{n-k}$ și $S_2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 C_n^k a^k b^{n-k}$.

194. Funcţia $f(x)$ este crescătoare pe (a, b) şi din relaţia $x_1 < x_2 < x_3$ rezultă $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$, oricare ar fi $x_i \in (a, b)$, $i = 1, 2, 3$. Să se arate că $f(x)$ este continuă pe (a, b).

195. Funcţia $y=y(x)$ are derivată de ordinul doi continuă pe intervalul I. Fie θ_1 şi θ_2 unghiurile făcute de tangentele la graficul acestei funcţiiît punctele x şi $x + \Delta x$, cu direcţia pozitivă a axei Ox. Fie $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ şi Δs lungimea arcului de curbă dintre punctele de abscise x şi $x + \Delta x$.

a) Să se calculeze $\operatorname{tg}(\Delta\theta)$.

b) Să se arate că $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta\theta|}{\Delta s} = \frac{|y''(x)|}{[1 + y'^2(x)]^{3/2}}$.

Această limită se numeşte curbura graficului lui $y=y(x)$ în puncl·n de abscisă x şi se notează cu K sau cu $\frac{1}{R}$. R se numeşte rază de curbură

c) Singurele curbe cu $K = 0$ sînt dreptele $y = mx + n$.

d) Singurele curbe cu $K = \frac{1}{R}$ = constant sînt cercurile de rază R.

196. Ştiind că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2}\right) = \frac{\pi}{4}$ să se arate că :

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{n}{n^2 + 1^2} + \cdots + \sin\frac{n}{n^2 + n^2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{n}{n^2 + 1^2}\right)\left(1 + \frac{n}{n^2 + 2^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{n}{n^2 + n^2}\right) = e^{\frac{\pi}{4}}$.

197. Să se determine o funcţie derivabilă $f(t)$ astfel încît să aibă loc relaţia :

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^3$$

unde

$$\begin{cases} x = \int f(t) \sin t \, dt \\ y = \int f(t) \cos t \, dt \\ z = \int f(t) \operatorname{tg} t \, dt \end{cases}$$

198. Se dă şirul $a_n = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + 2x}}}}$ (n radicali).

a) Să se arate că şirul a_n este monoton şi mărginit.
b) Să se demonstreze inegalităţile

$$\frac{1}{2} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \quad (n \text{ radicali})$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

c) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

199. a) Folosind inegalitatea $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ oricare ar fi n natural (a se vedea ex. nr. 24), să se arate că şirul

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

este monoton descrescător.

b) Majorînd $\int\limits_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$ cu o sumă de arii de dreptunghiuri, să se arate că $\gamma_n > 0$ oricare ar fi n natural. Se notează $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$ (constanta lui Euler).

c) Să se arate că şirul $p_n = \left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-\frac{x}{1}}\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$ $x > 0$ este convergent. Se notează $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$.

d) Să se arate că şirul $g_n = \frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{n^x \cdot n!}$, $x > 0$ este deasemeni convergent şi $\lim\limits_{x\to\infty} g_n = e^{\gamma x} p$.

200. a) Să se verifice identitatea

$$\frac{x^{2n+1}+1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{2n-1} + x^{2n}, \text{ pentru } x \neq -1.$$

b) Notînd $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x+1}dx$, să se deducă relaţia

$$I_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \ln 2.$$

c) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$

d) Să se arate că și

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\,2n}\right)=\ln 2.$$

e) Notăm cu $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ rădăcinile ecuației $x^{2n+1}+1=0$. Să se arate că rădăcinile egal depărtate de extremi sînt complex conjugate, iar $x_n=-1$.

f) Să se deducă

$$\frac{x^{2n+1}+1}{x+1}=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2\,x\cos\frac{(2k+1)\,\pi}{2n+1}+1\right),\ x\neq-1.$$

g) Făcînd în relația precedentă $x\to-1$, să se obțină,

$$\prod_{k=0}^{n-1}\cos\frac{(2k+1)\,\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

GEOMETRIE

1. Fie două cercuri (C_1) și (C_2) cu centrele în O_1, și respectiv O_2 iar A un punct exterior fiecăruia din cercurile date. Din punctul A se duc tangentele AT_1 și AT_1' la cercul (C_1) și tangentele AT_2 și AT_2' la cercul (C_2).

a) Să se arate că mijloacele segmentelor T_1T_2, T_1T_2', $T_1'T_2$ și $T_1'T_2'$ sînt vîrfurile unui paralelogram.

b) Să se afle locul geometric al punctului A încît paralelogramul de mai sus să fie un dreptunghi.

c) Să se discute problema de la punctul b) după poziția celor două cercuri date.

2. Fie AB un diametru într-un cerc cu centrul în punctul O. Fie G un punct arbitrar al cercului dat, diferit de punctele A și B.

a) Să se construiască un triunhgi ABC în care punctul G să fie centru de greutate.

b) Să se afle locul geometric al punctului C cînd punctul G descrie cercul dat iar diametrul AB rămîne fix.

c) Ce se întîmplă dacă punctul G coincide cu A sau cu B?

d) Să se arate că $AC^2 + BC^2 = 20\,R^2$

3. Se dau două puncte fixe A și B astfel încît $AB = a$. Să se afle locul geometric al punctelor M din plan pentru care are loc relația $MA^2 + MB^2 = ka^2$ unde k este o constantă.

Ce valori poate lua k?

4. Se consideră triunghiul ABC înscris într-un cerc. Perpendiculara în B pe AB întîlnește dreapta AC în punctul M. Să se afle locul geometric al punctului M cînd:

a) BC este fixă și punctul A descrie cercul,

b) A este fix și $\sphericalangle A =$ constant.

5. Fie (C) un cerc cu centrul în O, A un punct fix pe cerc și M un punct variabil pe cerc.

Se duce $ON \perp AM$ și $ON = AM$ (N nu este deci pe AM).

Să se afle locul geometric al punctului N cînd M descrie cercul.

6. Se dau trei puncte coliniare O, A, B. Fie $OA = a$ și $OB = b$. Să se determine locul geometric al punctelor M din plan încît $\frac{MA}{MB} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

7. Se dă un cerc (C) și un punct fix A exterior cercului (C). Să se afle locul geometric al punctelor M din plan astfel încît punctele de intersecție ale tangentelor duse din A și M la cercul dat să determine un patrulater inscriptibil.

8. Se dau două drepte perpendiculare D_1 și D_2 care se intersectează în O. Pe dreapta D_2 se ia un punct fix A și fie M un punct mobil pe D_1. Din O se duce perpendiculara pe AM și se ia pe aceasta un punct N încît $ON = AM$.

Să se afle locul geometric al punctului N.

9. Într-un triunghi ABC se duce linia mijlocie $MN \parallel AB$ și fie P mijlocul segmentului MN.

Să se afle locul geometric al punctului P cînd AB rămîne fixă iar unghiul C este constant. Discuție.

10. Fie H ortocentrul unui triunghi ABC. Fie M mijlocul segmentului AH și N mijlocul segmentului BH.

Să se afle locul geometric al mijlocului P al segmentului MN atunci cînd AB este fixă și $\sphericalangle C$ = constant.

11. Fie un triunghi ABC și A' mijlocul laturii BC.

Să se afle locul geometric al vîrfului A al triunghiului dacă latura BC este fixă și $AA'^2 \pm AB.AC$ = constant.

12. a) Ce relație trebuie să fie între laturile unui triunghi ABC încît raza cercului exînscris tangent laturii BC să fie 1/2 din înălțimea corespunzătoare laturii BC?

b) BC fiind constantă să se afle locul geometric al vîrfului A încît să aibă loc condiția de mai sus.

13. Se dă un triunghi ABC și fie A' piciorul înălțimii dusă din vîrful A.

Să se afle locul geometric al vîrfului A al triunghiului dacă latura BC este fixă și $BA' = AC$.

14. Printr-un punct M al unui cerc se duc corzile AM, BM și $A'M$, $B'M$ încît $\sphericalangle AMB = \sphericalangle A'MB' = \alpha$.

Să se afle locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor AA' si BB' cînd unghiul α variază. și $A'B \perp OM$.

15. Într-un cerc cu centrul în O se dă o coardă fixă AB și un diametru variabil MN.

a) Să se afle locul geometric al punctelor P de intersecție al dreptelor AM și BN.

b) Să se arate că dacă Q este punctul de intersecție al dreptelor AN și BM atunci dreapta PQ trece printr-un punct fix cînd MN variază.

16. Se dă un patrulater $ABCD$ care este convex.

Pe laturile opuse BC și AD se iau punctele M și N încît $\frac{MB}{MC}=\frac{ND}{NA}$.

Fie P, Q, R mijloacele segmentelor AB, MN și respectiv CD.

Să se arate că punctele P, Q, R sînt coliniare.

Să se generalizeze rezultatul de mai sus.

17. Se dau două triunghiuri ABC și $A'B'C'$.

Fie A'', B'', C'' trei puncte situate pe dreptele AA', BB' și respectiv CC' încît

$$\frac{A''A}{A''A'}=\frac{B''B}{B''B'}=\frac{C''C}{C''C'}=k.$$

Fie G, G', G'' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, $A'B'C'$ și respectiv $A''B''C''$. Să se arate că punctele G', G'', G sînt coliniare și $\frac{G''G}{G''G'}=k$

18. Într-un triunghi ABC se duc trei ceviene concurente AA_1, BB_1, CC_1. Cercul circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ taie laturile BC, AC și AB a doua oară în punctele A_2, B_2, C_2.

Să se arate că dreptele AA_2, BB_2 și CC_2 sînt de asemenea trei drepte concurente.

19. O dreaptă D taie laturile unui patrulater convex $ABCD$ în punctele M, N, P, Q (M pe AB, N pe BC, P pe CD și Q pe DA).

Să se arate că are loc relația

$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PD}\cdot\frac{QD}{QA}=1.$$

Reciproca acestei afirmații este adevărată ?

20. Se dă un triunghi ABC. Fie punctele B_1 și B_2 situate pe AC și simetrice față de mijlocul laturii AC iar C_1 și C_2 două puncte situate pe AB și simetrice față de mijlocul acestei laturi.

Dreptele B_1C_1 și B_2C_2 taie latura BC în A_1 și respectiv A_2.

Să se arate că punctele A_1 și A_2 sînt simetrice față de mijlocul laturei BC.

21. Fie ABC un triunghi oarecare. Se iau punctele M și N pe AB respectiv AC încît $MN \parallel BC$.

Fie M_1 și N_1 proiecțiile punctelor M și N pe latura BC.

Să se arate că perpendicularele din M_1 și N_1 pe AC și respectiv AB sînt concurente pe înălțimea dusă din vîrful A.

22. Se dă un triunghi ABC și fie A', B', C' și A'', B'', C'' picioarele bisectoarelor interioare și respectiv exterioare ale triunghiului.

Să se arate că vîrfurile triunghiului $A''B''C''$ se găsesc pe laturile triunghiului $A'B'C'$.

23. Fie ABC un triunghi oarecare și fie $MN \parallel BC$ (M pe AB și N pe AC)

Să se arate că punctul de intersecție al dreptelor BN și MC se află pe mediana dusă din vîrful A al triunghiului.

24. Fie A_1, B_1, C_1 punctele de tangență ale cercului înscris într-un triunghi ABC cu laturile triunghiului.

Să se arate că dreptele AA_1, BB_1, și CC_1 sînt trei drepte concurente.

25. Intr-un triunghi ABC se duce o secantă care taie laturile BC, AC și AB în punctele A_1, B_1 și respectiv C_1.

Dreptele izogonale (simetrice față de bisectoarele unghiurilor interioare) cu AA_1, BB_1, CC_1 au picioarele A_2, B_2 C_2. Să se arate că punctele A_2, B_2 și C_2 sînt puncte coliniare.

26. Cum trebuie să fie triunghiul ABC încît simediana vîrfului A (simetrica medianei din A față de bisctoarea aceluiași vîrf), să fie și înălțime ?

27. Pe latura BC a unui triunghi ABC se ia un punct A'. Din A' se duc paralelele $A'B'$ cu AB și $A'C'$ cu AC.

Să se arate că dacă triunghiul $A'B'C'$ este asemenea cu triunghiul ABC atunci AA' este mediană sau simediană în triunghiul ABC.

28. Fie M un punct situat pe cercul circumscris unui triunghi ABC. Fie A_1, B_1, C_1 proiecţiile punctului M pe laturile BC, AC şi respectiv AB ale triunghiului. Să presupunem că punctul A_1 este exterior cercului şi B_1 şi C_1 interioare.

Dreptele BB_1 şi CC_1 se intersctează în I iar dreapta AI taie latura BC în punctul A_2.

Din punctul A_1 se duc tangentele A_1T_1 şi A_1T_2 la cerc. Să se arate că dreapta T_1T_2 trece prin punctul A_2.

29. Fie $ABCD$ un patrulater convex înscris într-un cerc şi M un punct situat pe cerc. Fie P, Q, R, S proiecţiile punctului M pe laturile AB, BC, CD, DA.

Să se arate că dreptele PQ, RS şi AC sînt concurente şi de asemenea dreptele QR, SP şi DB.

30. Fie ABC un triunghi oarecare. Fie A_1 un punct pe dreapta BC şi M şi N proiecţiile pe AA_1 a vîrfurilor B şi C.

Să se arate că AA_1 este bisectoarea unghiului A (interioară sau exterioară) dacă şi numai dacă

$$\frac{AM}{A_1M} = \frac{AN}{A_1N}$$

31. Fie ABC un triunghi oarecare şi AM şi AN două ceviene izogonale exterioare triunghiului.

Să se arate că dacă triunghiurile ABC şi AMN au acelaşi centru al cercurilor înscrise atunci

$$\frac{MB}{NC} = \frac{AC}{AB}$$

32. Fie un cerc (C) de centru O şi rază R iar A un punct exterior cercului.

Fie O' mijlocul segmentului OA. Cu centrul în O' şi de rază $R/2$ se duce un cerc (C').

a) Să se arate că tangentele comune exterioare la cercurile (C) şi (C') trec prin punctul A.

b) Prin A se duce o secantă variabilă care taie cercurile (C') şi (C) M', N' şi respectiv M şi N. Să se arate că M' este mijlocul segmentului AM şi N' mijlocul segmentului AN.

33. Fie ABC un triunghi oarecare. Se consideră cercurile care au ca diametre laturile triunghiului şi cercurile care au ca diametre înălţimile.

Să se arate că punctele de intersecţie ale celor şase cercuri determină şase drepte concurente.

34. Se dă un cerc (C) și o dreaptă exterioară (D).

Se consideră toate cercurile (Γ) care au în raport cu cercul (C) drept axă radicală dreapta (D) (fasciculul de cercuri determinat de (C) și (D)).

a) Unde se găsesc centrele cercurilor (Γ)? (se va preciza care este distanța minimă față de dreapta (D) pînă la care se află centre ale cercurilor (Γ)).

b) Ce poziție relativă au două cercuri din familia (Γ)?

c) Fie M un punct situat pe dreapta (D). Se duce o tangentă MT la cercul (C). Să se arate că cercul (γ) cu centrul în M și de rază MT intersectează fiecare din cercurile familiei (Γ).

d) Să se arate că dreptele determinate prin intersecția cercului (Γ) cu cercurile (γ) trec prin același punct.

35. Într-un cerc se duce o coardă AB și fie I un punct în planul cercului.

Cercurile de diametre AI și BI taie cercul dat în punctele M și N respectiv. Fie J punctul de intersecție al dreptelor AM și BN. Să se arate că $IJ \perp AB$.

36. Printr-un punct A al unui cerc se duc două coarde egale AM și AN. Paralela dusă prin M la AN taie dreapta AO în P. Să se arate că patrulaterul $AMPN$ este un romb.

37. Se dau două drepte paralele (D_1) și (D_2). O dreaptă perpendiculară (D), pe cele două drepte le taie în M și N. Se consideră între M și N două puncte A și B. Fie A' și A'' puncte pe (D_1) și respectiv pe (D_2) încît $\sphericalangle A'AA'' = 90°$ și B', B'' pe D_1, D_2 cu $\sphericalangle B'BB'' = 90°$. Fie A_1 proiecția punctului A pe $A'A''$ și B_1 proiecția lui B pe $B'B''$. Să se arate că patrulaterul MA_1B_1N este inscriptibil.

38. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($\sphericalangle A = 90°$) cu $AB < AC$. Fie D mijlocul laturii BC. Perpendiculara în D pe BC taie cateta AC în punctul E și prelungirea catetei BA în punctul F.

a) Să se arate că are loc relația

$$\frac{DE}{DF} = \mathrm{tg}^2 C$$

b) Fie G mijlocul segmentului BE și H mijlocul segmentului CF. Să se arate că triunghiurile AGD și AHD sînt isoscele.

c) Să se arate că $\sphericalangle GAD = \sphericalangle C$

d) Să se arate că patrulaterul $AGDH$ este inscriptibil.

39. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC, mijloacele laturilor, picioareloe înălţimilor şi mijloacele segmentelor superioare ale înălţimilor (mijloacele segmentelor dintre ortocentru şi vîrfuri) sînt nouă puncte situate pe acelaşi cerc-cercul lui Euler. Să se facă demonstraţia numai prin considerarea de unghiuri drepte.

b) Dacă ρ_A, ρ_B, ρ_C sînt puterile vîrfurilor A, B, C ale triunghiului faţă de cercul lui Euler, să se arate că

$$\frac{\rho_A}{\operatorname{ctg} A} = \frac{\rho_B}{\operatorname{ctg} B} = \frac{\rho_C}{\operatorname{ctg} C}$$

c) Ce se întîmplă dacă $\sphericalangle A = 90°$? Să se explice rezultatul.

40. Un patrulater convex $ABCD$ are laturile $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ şi $DA = d$.

a) Să se arate că dacă aria patrulaterului $ABCD$ este egală cu $1/2$ $(ad + bc)$ atunci $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 90°$

b) Să se arate că în condiţia de la punctul a) $AC = BD \sin B$

41. Printr-un punct A al unui cerc de rază R se duc, de aceeaşi parte a centrului, corzile AB, AC şi AD respectiv egale cu latura hexagonului regulat, patrulaterului şi triunghiului echilateral înscris în cerc.

Fie M punctul de intersecţie al dreptelor AC şi BD.

a) Să se determine segmentele MD şi MB funcţie de raza cercului.

b) Să se arate că $AM = \dfrac{R\sqrt{6}}{2}$

c) Să se deducă de aici mărimea laturii dodecagonului regulat înscris în cerc.

42. Fie ABC un triunghi oarecare.

a) Să se arate pe cale vectorială că medianele triunghiului ABC pot forma un triunghi.

b) Notînd cu $A'B'C'$ triunghiul avînd mărimile laturilor egale cu mărimile medianelor triunghiului ABC şi $A''B''C''$ triunghiul avînd mărimile laturilor egale cu mărimile medianelor triunghiului $A'B'C'$, să se arate că triunghiul $A''B''C''$ este asemenea cu triunghiul ABC.

43. Fie ABC un triunghi oarecare şi fie R raza cercului circumscris triunghiului. Să se arate că raza cercului circumscris triunghiului ortic (format de picioarele înălţimilor) este egală cu $R/2$.

44. Într-un triunghi dreptunghic ABC se duce bisectoarea unghiului drept care taie ipotenuza în punctul M.

Să se arate că segmentele MB și MC pot fi catetele unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza $\dfrac{AC^2+AB^2}{AC+AB}$

45. În triunghiul ABC se duc înălțimile BB_1 și CC_1 și fie H ortocentrul triunghiului ABC.

a) Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor HBC, HBC_1, HC_1B_1 și HB_1C sînt vîrfurile unui paralelogram.

b) În ce caz paralelogramul de mai sus este un romb ?

c) Să se calculeze diagonalele rombului de la b) și aria acestuia, funcție de laturile triunghiului ABC.

d) În ce caz rombul de la b) are centrul H ?

46. Se dă un dreptunghi $OM'MM''$ cu laturile a și b. Se proiectează M pe $M'M''$ în M_1 și apoi M_1 pe OM' și OM'' în M_1' și M_1''. Se obține astfel dreptunghiul $OM_1'M_1M_1''$. Se continuă procedeul. Să se exprime în funcție de a și b aria dreptunghiului $OM_n' M_n M_n''$.

47. Se dă un cerc de rază R și avînd centrul în punctul O. Pe un diametru AB se ia un punct M între O și B încît $OM = R/2$. Din B se duce o tangentă la cercul de diametru AM care taie cercul dat în punctul N. Să se arate că $AN = \dfrac{6R}{5}$

48. Să se construiască un triunghi cunoscînd simetricele ortocentrului față de laturile triunghiului.

49. Se dă un triunghi ABC. Se duce un cerc cu centrul în C tangent laturii AB în punctul T. Acest cerc taie laturile AC și BC în punctele M și respectiv N. Să se arate că :

a) $\dfrac{AT-BT}{AM-BN}=\dfrac{a+b}{c}$

b) dacă $AM > BN$ atunci $AT + BN > BT + AM$

50. Fie M un punct situat pe o elipsă avînd focarele F și F' și directoarea corespunzătoare focarului F dreapta (D). Dacă P este proiecția punctului M pe (D) și N este piciorul bisectoarei unghiului FMF', să se arate că MF este medie geometrică între segmentele MP și NF.

51. Fie ABC un triunghi echilateral de latură a și considerăm cercul (γ) înscris în triunghi. Fie M un punct oarecare al cercului (γ). Pe dreapta

AM se ia punctul N de aceeași parte cu M astfel încît $AM.AN = 3a^2/4$. Să se arate că atunci cînd punctul M descrie cercul (γ) punctul N descrie cercul (γ_a) exînscris. corespunzător laturii BC.

52. Fie (O_1) și (O_2) două cercuri tangente exterior în T. Fie (d_1) și (d_2) transformatele printr-o inversiune de pol T ale celor două cercuri. Fie apoi T_1T_2 o tangentă comună exterioară cercurilor (O_1) și (O_2). Dreapta TT_1 taie dreapta (d_1) în punctul M_1 iar dreapta TT_2 taie dreapta (d_2) în punctul M_2. Să se arate că dreapta M_1M_2 este perpendiculară pe dreptele (d_1) și (d_2).

53. Se dau două cercuri cu centrele în punctele O_1 și O_2 și exterioare. Dreapta O_1O_2 taie cele două cercuri în punctele A_1, B_1 și A_2, B_2 (B_1 și A_2 punctele mai apropiate).

Să se determine un punct O între B_1 și A_2 astfel încît să existe o inversiune de pol O care transformă fiecare din cele două cercuri în el însuși. Să se arate atunci că $\dfrac{OB_1}{OA_2} = \dfrac{B_1B_2}{A_1A_2}$

54. Se poate construi un cerc tangent la trei cercuri care trec prin același punct. Discuție.

55. Într-un plan P se duc două drepte d_1 și d_2 concurente în Q.

Dintr-un punct M exterior planului P se duc perpendicularele pe d_1 și d_2 cu picioarele M_1 și M_2. Fie N proiecția punctului M pe planul P. Să se arate că patrulaterul M_1QM_2N este inscriptibil.

56. Se dă un cerc (C) cu centrul în O și de rază R. Fie AB o coardă fixă. Se consideră un cerc(C') concentric cu (C) și interior acestuia. a) Se cere locul geometric al intersecției unei tangente din A și unei tangente din B la cercul (C'), cînd raza cercului C' variază. b) Dacă M este un punct al locului geometric care nu se află pe mediatoarea segmentului AB avem $MA.MB = OA^2 - OM^2$.

c) Dacă M este un punct ca la b), să se afle locul geometric al punctului N, extremitatea unui segment egal cu MA, luat din M pe MB.

57. Se dă un cerc (C) cu centrul în O și de rază R. Fie AB și CD doi diametri perpendiculari. O coardă variabilă CM intersectează mediatoarea corzii AM în punctul P.

a) Să se arate că locul geometric al punctului P este un cerc (C').

b) Să se arate că tangenta în M la cercul (C) face cu tangenta în P cercul (C') un unghi constant cînd M variază.

c) Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor tangente cercurilor (C) și (C'), interior unuia și exterior celuilalt.

58. Se dă o parabolă cu axa de simetrie dreapta $x'x$. Normala într-un punct M al parabolei intersectează axa acesteia în punctul P. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului MP cînd M descrie parabola.

59. Se dă un cub $ABCDA'B'C'D'$ de latură a. Dacă M este mijlocul laturii AB, N mijlocul diagonalei DB' și P mijlocul laturii BC să se arate că : a) $MN \perp AB$ și $MN \perp DB'$. b) DB' este perpendiculară pe planul triunghiului MNP. c) triunghiul MNP este echilateral. d) volumul tetraiedrului $B'MNP$ este egal cu $a^3/_{16}$.

60. Două cercuri O_1 și O_2 situate în plane diferite, sînt tangente în punctul T. Să se arate că există o sferă care conține cele două cercuri. b) Notînd cu d distanța dintre centrele celor două cercuri și cu α unghiul dintre planele în care sînt situate cele două cercuri, să se determine raza sferei de mai sus în funcție de d și α.

61. Se dă un con circular drept. Într-o secțiune axială ABV (V vîrful conului) se duc medianele AA' și BB'. Se consideră două secțiuni prin AA' și respectiv BB' încît curbele de secțiune să aibă tangente comune în A și B cu cercul de bază.

a) Să se arate că planele celor două secțiuni se taie după o dreaptă paralelă cu planul bazei. b) Cînd A și B variază rămînînd diametral opuse, segmentul MN din dreapta de mai sus și limitat de con descrie o secțiune circulară. Să se afle aria laterală și volumul trunchiului de con obținut în acest fel, funcție de elementele conului.

62. Să se arate că dreptele ce unesc vîrfurile unui tetraedru cu centrele de greutate ale fețelor opuse și dreptele ce unesc mijloacele muchiilor opuse sînt șase drepte concurente.

63. Din O pleacă trei semidrepte Ox, Oy, Oz încît $\sphericalangle xOy = \sphericalangle yOz = \sphericalangle zOX = \alpha < \pi/2$. În interiorul unghiului $Oxyz$ se ia un punct M egal depărtat de planele xOY, yOz, zOx și prin M se duce un plan variabil care taie Ox, Oy, Oz respectiv în A, B, C.

Să se arate că :

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \text{constant.}$$

64. Se dau două tetraedre $A_1A_2A_3A_4$ și $B_1B_2B_3B_4$ încît

$$\frac{A_iA_j}{B_iB_j} = k\,;\ i,\ j = 1, 2, 3, 4$$

a) Să se arate că cele două tetraedre au unghiurile diedre corespunzătoare egale. b) Raportul volumelor celor două tetraedre este k^3. c) Să se deducă că volumul tetraedrului care are ca vîrfuri centrele de greutate ale fețelor unui tetraedru, este egal cu $1/27$ din volumul acestuia.

65. Se dă un tetraedru $A_1A_2A_3A_4$ cu $\sphericalangle A_1A_4A_2 = A_{12}$, $\sphericalangle A_2A_4A_3 = A_{23}$, $\sphericalangle A_1A_4A_3 = A_{13}$ și unghiul plan al diedrului $(A_1A_3A_4, A_1A_4A_2) = \varphi$

a) Să se arate că

$$\cos\varphi = \frac{\cos A_{23} - \sin A_{13}\sin A_{12}}{\cos A_{12}\cos A_{13}}$$

b) Să se deducă că două tetraedre care au fețele respective asemenea au unghiurile diedre egale. c) Notînd $\overline{A_iA_j} = a_{ij}$ să se exprime volumul tetraedrului numai cu ajutorul acestora. d) Cum se exprimă volumul dacă muchiile opuse sînt egale ?

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

ALGEBRĂ

1. a) $m = -2$, $p = 0$, $Q(x) = x^2 - 2x$, $S = \dfrac{n(n+1)(2n-5)}{6}$.

b) $(p_1 = -1,\ q_1 = 1)$ și $(p_2 = 1,\ q_2 = 2)$.

2. Rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$ sînt $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ adică rădăcinile cubice ale unității, deci dacă a este rădăcina ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, atunci cealaltă este a^2 și avem: $a^3 = 1$, $(a^2)^3 = a^6 = 1$ și $a^2 + a + 1 = 0$. Pentru $x = a$ avem $(1 + a)^{6m+1} - (1 + a)^{6p+1} = (-a^2)^{6m+1} - (-a^2)^{6p+1} = (-a^2)(a^2)^{6m} - (-a^2)(a^2)^{6p} = -a^2 - (-a^2) = 0$ iar pentru $x = a^2$, $(1+a^2)^{6m+1} - (1+a^2)^{6p+1} = (-a)^{6m+1} - (-a)^{6p+1} = (-a)(a)^{6m} - (-a)(a)^{6p} = (-a) - (-a) = 0$.

3. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ (unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului z). Avem succesiv, $|z - a|^2 = (z - a) \cdot (\bar{z} - a) = z\bar{z} - a(z + \bar{z}) + a^2 = a^2 - b^2$ sau $z\bar{z} = a(z + \bar{z}) - b^2$.

4. Dacă notăm cu x_k, $(k = 0, 1, \ldots, 2n - 1)$ rădăcinile acestor ecuații, atunci pentru prima ecuație avem, $x_k = \cos\dfrac{k\pi}{n} + i\sin\dfrac{k\pi}{n}$ iar pentru a doua $x_k = \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n} + i\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ și apoi scriem de exemplu, $x^{2n} + 1 = (x - x_0)(x - \bar{x}_0) \ldots (x - xn-1)(x - \bar{x}n-1)$ unde prin $\bar{x}_k$ am notat conjugatul numărului complex x_k.

5. Făcînd uz de identitatea, $u^4 - v^4 = (u - v)(u^3 + u^2v + uv^2 + v^3)$ se observă că $u = \dfrac{z - i}{z + i}$ este soluție a ecuației $u^4 - 1 = 0$ și deci z este soluție a uneia din ecuațiile, $\dfrac{z-i}{z+i} = -1$, $\dfrac{z+i}{z+i} = i$, $\dfrac{z-i}{z+i} = -i$, adică $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$.

6. Fie $z = x + iy$, $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$. Atunci, $f(z) = a_1x - a_2y + b_1 + i(a_2x + a_1y + b_2)$. Dezvoltînd, $f(1 + i) = -1 + 2i$, $f(3 + 2i) = -3 + 6i$ se ajunge la faptul că a_1, a_2, b_1, b_2 sînt unic determinate ca soluţii ale unui sistem liniar cu patru ecuaţii şi patru necunoscute conform cu teorema lui Cramer.

7. $E(x, y, z) = (x^2 - 4xy - 2xz) + 5y^2 + 11z^2 + 10yz = (x - 2y - z)^2 - 4y^2 - z^2 - 4yz + 5y^2 + 11z^2 + 10yz = (x - 2y - z)^2 + (y^2 + 6yz) + 10z^2 = (x - 2y - z)^2 + (y + 3z)^2 - 9z^2 + 10z^2 = (x - 2y - z)^2 + (y + 3z)^2 + z^2$. $E(x, y, z) = 0$ dacă şi numai dacă, $x - 2y - z = 0$, $y + 3z = 0$, $z = 0$ ceea ce conduce la, $(z = 0, y = 0, x = 0)$ singurul triplet de valori reale pentru care $E(x, y, z) = 0$.

8. b) $E = (x - 1)(x^2 + xy - 2xz - 2yz + x + y) = (x - 1)P(x, y, z)$. Se consideră $P(x, y, z)$ cu un trinom de gradul al doilea în x şi ecuaţia $P(x, y, z) = 0$ are soluţiile, $x_1 = 2z - 1$ şi $x_2 = -y$. Deci, $E(x, y, z) = (x - 1)(x - 2z + 1)(x + y)$.

9. a) Se consideră $E = 0$ ca o ecuaţie în x al cărui discriminant este, $\Delta = (2y - 2z + 1)^2 + 8(1 - a)yz$. Pentru ca Δ să fie un pătrat perfect este suficient să luăm $a = 1$ şi avem, $E(x, y, z) = (x - y + z)(x + y - z + 1)$. b) Problema pusă nu are soluţii.

10. a) $x \in \left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$. b) Nu are soluţii. c) $x \in (-\infty, -2) \cup (z, +\infty)$ sau $x \in (a^2\ a)$.
d) $x \in \left(\frac{5+\sqrt{45}}{2}, 6\right)$.

11. a) Sistemul dat se mai poate scrie şi sub forma,

$$(x + y)^3 - 3xy(x + y) - 2(x + y) = 25$$
$$(x + y)^2 - 3xy = 7$$

de unde rezultă că x, y sînt soluţii ale ecuaţiei $z^2 - 5z - 6 = 0$.

b) $x + y = 5a$, $xy = \dfrac{25\,a^2 - 7}{3}$ şi inecuaţia propusă este verificată dacă $a < -\dfrac{7}{5}$ sau $a \in \left(0, \dfrac{7}{5}\right)$. c) $a > \dfrac{\sqrt{7}}{5}$.

12. 1°. $m \in (0, 3/2)$. 2°. Nu există nici o valoare a lui m astfel încît trinomul să fie pozitiv oricare ar fi x. 3°. $m < 0$ sau $m > \dfrac{27}{2}$. 4° $m \in (3/2, 3)$. 5°. $m \in (3, 27/2)$. 6°. $m \in \left\{0, \dfrac{27}{17}\right\}$. 7°. $(3 - m)^2y^2 + 8m(3 - m)y + 8m^2 +$

$+ 12m = 0$. 8°. Dacă $m \in (0, 3/2)$ ecuația are rădăcini imaginare. Dacă $m < 0$ ecuația are rădăcini reale distincte, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $x_2 > |x_1|$. Dacă $m \in (3/2, 3)$ ecuația are rădăcini reale distincte ambele negative. Dacă $m > 3$ ecuația are două rădăcini reale distincte $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ și $x_2 > |x_1|$. Dacă $m = 0$, $x_1 = x_2 = 0$; dacă $m = 3/2$, $x_1 = x_2 = -1$. 9°. Se folosește identitatea $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$. 10°. Inecuația propusă nu are sens căci pentru nici o valoare a lui m ecuația nu are ambele rădăcini pozitive.

13. b) După eliminarea lui m dintre relațiile între rădăcini și coeficienți, se găsește: $x_1^2 + x_2^2 - 7x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1 = 0$.

14. a) Ecuația admite rădăcina întreagă $x_1 = 1$, celelalte două rădăcini sînt date de ecuația de gradul doi $2mx^2 + (2 - 5m)x + 2m = 0$. b) $x_1 = 1$ este rădăcină. Ecuația de gradul doi este $2(m - 1)x^2 - (m^2 - 2m + 5)x + 2m - 2 = 0$. c) Prin substituția $y = x^2$, devine ecuația de gradul doi în y care se discută folosind Δ, P, S apoi se trag concluzii asupra lui x ținînd cont de substituția $y = x^2$. Avem: $m \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$; toate cele patru rădăcini sînt complex conjugate două cîte două $m = -1$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. $m \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$; două complex conjugate, x_3, x_4, reale $x_3 > 0$, $x_4 < 0$ și $|x_3| = |x_4|$, $m = \frac{1}{2}$; ecuația devine $2x^2 = 1$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, $m \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$: toate reale

$$x_1 > 0,\ x_2 < 0,\ |x_1| = |x_2|$$
$$x_3 > 0,\ x_4 < 0,\ |x_3| = |x_4|$$

15. $x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$; $x = \pm i$ soluții independente de m. Pentru ecuația bipătrată $x^4 - x^2 + m + 2 = 0$ se obține: Pentru $m < -2$, două rădăcini reale și două imaginare $m = -2$, $x_1 = x_2$, $x_3 = -x^4$ $-2 < m < -\frac{7}{4}$, ecuația bipătrată are toate rădăcinile reale $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $m = -\frac{7}{4}$ ecuația bipătrată are rădăcinile reale, $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $x_3 = x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $m > -\frac{7}{4}$ toate rădăcinile ecuației bipătrate sînt imaginare.

16. a) Ecuația admite rădăcina $x_1 = 2 - i$ dacă și numai dacă admite și rădăcina $x_2 = 2 + i$. Se găsește $a = -41$, $b = 70$.

b) Ecuația admite rădăcina -2 dacă $b = 16 + 2a$. Celelalte două rădăcini sînt date de ecuația $3x^2 - 4x + a + 8 = 0$. Condițiile $\Delta \geqslant 0$, $P > 0$, $S > 0$ conduc la $a \in \left[-8, -\frac{20}{3}\right]$.

17. Deoarece $P(1) = P(z) = 0$ rezultă că $P(z)$ se divide la $z - 1$, $z - 2$ și deci la $(z - 1)(z - 2) = Q(z)$. Folosind schema lui Horner se găsește cîtul împărțirii lui $P(z)$ la $Q(z)$ ca fiind polinomul $2(m + 1)^2 z^2 - 2(m^2 - m - 2)z + m(m - 2)$.

18. b) $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. c) $m \in (-1, 1)$.

19. $\Delta = (1 - \cos a)(1 + 3\cos a)$. Trebuie să avem $\Delta \geqslant 0 : 1 - \cos a \geqslant 0$ oricare ar fi a, iar din $1 + 3\cos\ 0$ rezultă $-\varphi + 2k\pi \leqslant a \leqslant \varphi + 2k\pi$, unde $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. Dacă $\cos a \geqslant 0$; $f(1) < 0$ dă $3\cos a - 2 < 0$ deci $0 < \cos a < \frac{2}{3}$ și deci $\arccos\frac{2}{3} + 2k\pi < a < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Dacă $\cos\ 0$, condiția $f(1) > 0$ conduce la $\cos a > \frac{2}{3}$ și nu avem soluții pentru a. Dacă $\cos a = 0$ ecuația devine o ecuație de gradul I cu rădăcin $ax = -1$.

20. a) Se elimină a din relațiile $\sin^3 a + p\sin a + q = 0$, $\cos^3 a + p\cos a + q = 0$, se obține $(2p + 1)(p + 1)^2 + q^2 = 0$.. b) $\frac{1}{q} = q - p$.

21. a) Scriind ecuația după puterile descrescătoare ale lui a avem $(4x^3 - 8x^2 - x + 2)(x - 2a + a^2x) = 0$, de unde $x_1 = 2$, $x_{2,3} = \pm\frac{1}{2}$, $x^4 = \frac{2a}{1 + a^2}$. b) $x_{2,3} \in [-1, 1]$, pentru x_4 se verifică $-1 \leqslant \frac{2a}{1 + a^2} \leqslant 1$, pentru orice a. c) Trebuie să avem sau $\frac{2a}{1 + a^2} = 2$, sau $\frac{2a}{1 + a^2} = -\frac{1}{2}$ deci $a = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ sau $a = 2 \pm \sqrt{3}$, sau $a = -2 \pm \sqrt{3}$. d) $a_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ și $a_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

22. a). Ecuația admite și rădăcina $3 - \sqrt{2}$, deci polinomul din membrul I se divide prin $x^2 - 6x + 7$. Din anularea restului avem $m = -\frac{58}{3}$, $n = \frac{77}{3}$, $x_{3,4} = \frac{-15 \pm\sqrt{93}}{6}$. b) Ecuația admite și rădăcina $1 - i$. Anulînd restul împărțirii la $x^2 - 2x + 2$, se găsește $a = -4$, $b = -6$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$

23. a) $a = 25$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{3}{2}$. b) $m = 16$, $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$. c) Două soluţii $m_1 = 20$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$, $m_2 = \frac{302}{15}$, $x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{105}}{6}$, $x_{3,4} = \frac{15 \pm 3\sqrt{5}}{10}$. d) Două soluţii $m_1 = 10$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$ şi $m_2 = -14$, $x_{1,2} = -1 \pm i2$, $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{5}$.

24. a). Două soluţii $a = -1$, $b = -2$, $m = 1$; $x_1 = x_2 = 1$, $x_{3,4} = -1 \pm i$, $x_1' = x_2' = 1$, $x_3' = -2$; $a = -1$, $b = 2$, $m = -1$, $x_1 = x_2 = -1$, $x_{3,4} = 1 \pm i$, $x_1 = x_2' = -1$, $x_3' = 2$. (aici $x_{1,2,3,4}$ sînt rădăcinile primei ecuaţii iar $x_{1,2,3}$ rădăcinile ecuaţiei a doua) b) $m = -6$, $n = 6$; $x_1 = 2$, $x_2 - 3$, $x_3 = x_4 = -1$ $x_1' = 2$, $x_2 = -3$, $x_3' = 1$.

25. Se aduce la acelaşi numitor, apoi cu ajutorul relaţiilor între rădăcini şi coeficienţi, şi cu relaţia $x_i^3 - 6x_i^2 + a = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ se calculează produsele $(x_1^2 + x_2^2)x_1^2x_2^2, \ldots$ se găseşte $(x_1^2 + x_2^2)x_1^2x_2^2 = a(2)6 - 36x_3 - a)$ şi $E = \frac{3(144 - a)}{a}$.

b) $a_1 = 0$; $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{11}$, $x_3 = 0$ $a_2 = 12$; $x_{1,2} = \pm \sqrt{2}$, $x_3 = 6$
c) Problema nu are soluţii. d) Problema nu are soluţii.

26. Punem $b = aq$, $c = aq^2$, $d = aq^3$ şi ecuaţia devine $(x + q)(x^2 + q^2) = 0$ cu rădăcinile $x_1 = -q$, $x_2 = \pm iq$ şi $x_1 = x_2 = x_3 = q$. b) $S_n = (-q)^n + (iq)^n + (-iq)^n$. Pentru $n = 2k$, $S_n = q^{2k} + 2(-1)^k q^k$ număr real. Pentru $n = 2k + 1$, $S_n = -q^{2k+1}$ număr real $S_n > 0$ pentru $n = 4k$.

c) $q = 2$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-3 + i\sqrt{7} \pm (\sqrt{-7 + 4\sqrt{7}} - i\sqrt{7 + 4\sqrt{7}})}{4}$

$$x_{5,6} = \frac{-3 - i\sqrt{7} \pm (\sqrt{-7 + 4\sqrt{7}} + i\sqrt{7 + 4\sqrt{7}})}{4}$$

27. 1°. Din (1) rezultă $\cos 2\varphi = \frac{2x^3 - 7x}{7x - 12}$ şi deci trebuie să avem: $-1 \leqslant \frac{2x^3 - 7x}{7x - 12} \leqslant 1$, adică, $x \in [-3, 1] \cup [\sqrt{6}, 2]$. 2°. Relaţiile lui Viète conduc la ecuaţiile în $\cos^3\varphi - 2\cos^2\varphi + 1 = 0$, $\cos^3\varphi + 2\cos^2\varphi - 1 = 0$, de unde $\cos\varphi = 1$, $\varphi = 2k_1\pi$, $\cos\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\varphi = \pm \arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2k_2\pi$, $\cos\varphi = -1$, $\varphi = (2k_3 + 1)\pi$ $\cos\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\varphi = \pm \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + 2k_4\pi$ cu $k_{1,2,3,4} \in Z$. 3°. Pentru $\varphi = 2k_1\pi$ şi $\varphi = (2k_2 + 1)\pi$ avem $x_1 =$

$= 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3$ iar pentru $\varphi = \pm \arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + (2k_2+1)\pi$ și $\varphi = \pm \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + 2k_4\pi$, avem $x_1 = 1 - \sqrt{5}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}$.

28. a) Pentru $a < -54$ o rădăcină pozitivă $x \in (3, +\infty)$ și 2 complexe conjugate. Pentru $-54 < a < 54$, 3 rădăcini reale în $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$, $(3, +\infty)$. Pentru $a = 54$, $x = 3$ dublă și $x \in (-\infty, -3)$. Pentru $a > 54$, una reală $x \in (-\infty, -3)$. b) Rădăcina dublă pozitivă a primei ecuații este $x = 3$ pentru $a = 54$, $m = -1$, $n = -6$, $x_{3,4} = \pm i$.

29. Dacă notăm cu $f(x)$ primul membru al ecuației atunci $f'(x) = 0$ are rădăcinile $x_1 = 2m$, $x_2 = m - 1$. Pentru $m < -1$, $x_1 < x_2$ și avem următoarele rezultate:

Dacă $m < \frac{3-\sqrt{29}}{10}$ ecuația are o singură rădăcină reală $x_1 > m - 1$.

Dacă $m = \frac{3-\sqrt{29}}{10}$ atunci $x = m - 1$ este rădăcină dublă.

Dacă $m \in \left(\frac{3-\sqrt{29}}{10}, -1\right)$ ecuația are o singură rădăcină reală $x_1 \in (2m, m-1)$.

Pentru $m > -1$ avem următoarele rezultate:

Dacă $m \in \left(-1, \frac{11-\sqrt{137}}{8}\right) \cup \left(0, \frac{3+\sqrt{29}}{10}\right) \cup \left(1, \frac{11+\sqrt{137}}{8}\right)$, ecuația are toate rădăcinile reale, $x_1 < m - 1$, $x_2 \in (m-1, 2m)$, $x_3 > 2m$.

Dacă $m \in \left(\frac{11-\sqrt{137}}{8}, 0\right) \cup \left(\frac{11+\sqrt{137}}{8}, +\infty\right)$ ecuația are o singură rădăcină reală $x_1 < m - 1$ și dacă $m \in \left(\frac{3+\sqrt{29}}{10}, 1\right)$ ecuația are de asemenea o singură rădăcină reală $x_1 > 2m$.

Dacă $m \in \left\{\frac{11-\sqrt{137}}{8}, 0, \frac{3+\sqrt{29}}{10}, 1\right\}$ ecuația are o rădăcină dublă.

Dacă $m = -1$ ecuația are o singură rădăcină reală $x_1 > -2$.

30. a) Ecuația dată admite rădăcina întreagă $x_1 = 1$ iar celelalte două sînt date de ecuația $(m+1)x^2 - (m^2 + 4m - 6)x + m + 1 = 0$. De aici $x_2 \cdot x_3 = 1$ deci $x_2 \cdot x_3 = x_1^2$, ceea ce exprimă că x_2, x_1, x_3 sînt în progresie geometrică. b) Condiția $x_1 + x_3 = 2x_2$; $(x_2 = 1)$ dă $\frac{m^2 + 4m - 6}{m + 2} = 2$,

$m_1 = 2$, $m_2 = -4$, (am considerat $m \neq 2$; pentru $m = -2$ problema nu are soluţii). c) Discriminantul ecuaţiei de gradul II cu rădăcinile x_1, x_3 se anulează pentru $m_1 = 2$ şi $m_2 = -4$ şi $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

31. a). Folosind relaţiile între rădăcini şi coeficienţi obţinem ecuaţia $4y^3 + 4y^2 + y + 1 = 0$ cu rădăcinile $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{i}{2}$, $y_3 = -\frac{i}{2}$. b) Din prima relaţie între rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei în x avem $x_2 + x_3 = -1 - x_1$, $x_1 + x_3 = -1 - x_2$, $x_1 + x_2 = -1 - x_3$ deci $y_1 = -\frac{1+x_1}{x_1}, \ldots$ Ecuaţia în y este $y^3 - 5y - 2 = 0$ cu rădăcinile $y_1 = -2$, $y_2 = 1 + \sqrt{2}$, $y_3 = 1 - \sqrt{2}$.

32. a) Din anularea identică a restului împărţirii lui $P(x)$ la $2x^3 + 3x^2 - 1$ se obţine $m = 3$, $n = 0$, $p = -1$. b) Inecuaţia se scrie $2|x - 1| \cdot |x - 1|^2 + 3(x - 1)^2 - 1 > 0$ (pentru $x = 1$, nu-i satisfăcută). Pentru $x > 1$; $|x - 1| = x - 1$ şi avem $x^2(2x - 3) > 0$ deci $x > \frac{3}{2}$ şi inecuaţia este satisfăcută pentru $x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$. Pentru $x < 1$; $|x - 1| = -(x - 1)$ şi se obţine $(x - 2)^2(2x - 1) < 0$ deci $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ c) $4y^3 - 12y^2 + 9y - 2 = 0$.

33. a) Ordonînd după puterile descrescătoare ale lui m, $P(x, m) = 2m^2(x^2 + x) + m(2x^3 + 2x^2 + x + 1) + x^2 + x = (x + 1)[2m^2x + m(2x^2 + 1) + x] = (x + 1)[2mx^2 + (2m^2 + 1)x + m] = (x + 1)Q(x, m)$. b) $(m + 1)(4m^3 + 2m) = 0$, $m_1 = -1$, $m_2 = 0$, $m_{3;4} = \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$. c) $y_1 + y_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} - m(x_1 + x_2)$ şi $y_1 \cdot y_2 = \frac{1}{x_1x_2} + m^2x_1x_2 - 2m$ şi ecuaţia în y este: $2my^2 - (2m^3 - 4^2m + m - 2)y + m(m - 2)^2 = 0$.

34. a) $105x^4 + mx^3 - 34x^2 + 4x + 1 = 0$. b) Rădăcinile comune verifică în mod necesar diferenţa celor două ecuaţii, adică $104(x^4 - 1) + x(m - 4)(x^2 - 1) = 0$ de unde $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$. $x = 1$ este rădăcină comună pentru $m = -76$ iar $x = -1$ pentru $m = 68$. c) ($x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$, $x_4 = -7$).

35. a) Divizorii independenţi de a, ambii $2(1 - a^2)^1$ sînt -1, ± 2, se obţine $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = a - 1$, $x_4 = a + 1$. b)] cu relaţiile lui Viète, dubla inegalitate se scrie $2(1 - a^2) \leqslant a^2 + 2a - 3 \leqslant 2a + 1$, $a \in$

$\in \left[-2, -\frac{5}{3}\right] \cup [1, 2]$. c) Ecuația în a este $f(a) = 2a^3 + a^2 - 2a - 1 - 6 \ln a = 0$, cu $a > 0$ șirul lui Rolle arată că, ecuația are o singură rădăcină reală $a_1 = a_2 = 1$ (dublă).

36. a) Pentru $x = -1$ ecuația conduce la $\cos a \sin \frac{5a}{2} \cos \frac{a}{2} = 0$, adică $a = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ sau $a = 2k\frac{\pi}{5}$, sau $a = (2k+1)\pi$, $(k \in Z)$. b) $x = -1$ rădăcină reală, celelalte 4 complexe. c) Din $f(-1) = 0$ și $f'(-1) = 0$ ar trebui să avem (1) $\sin 4a + \sin 3a + \sin 2a + \sin a = 0$, (2) $4(1-\sin 4a) + 3(1 - \sin 3a) + 2(1 - \sin 2a) + 1 - \sin a = 0$, pentru orice a. Deci, din (2), $\sin a = \sin 2a = \sin 3a = \sin 4a = 1$ imposibil, deoarece din $\sin a = 1$, rezultă $a = (4k+1)\frac{\pi}{2}$ și atunci $\sin 4a = 0$, $\sin 3a = 1$, și $\sin 2a = 0$. (Se poate folosi rezultatul de la punctul a) înlocuind valorile lui a găsite în ecuația (2) și nici una nu verifică).

37. 1°. $y \in (a^8, a^4)$ 2°. $y > a^{8/3}$. 3°. $y = a^4$ 4°. $y \in (a^4, a^{8/3})$. 5°. y este soluție a ecuației, $2 \log_a^5 y - 27 \log_a y + 72 = 0$. 6°. Nu există nici o valoare pentru parametrul y astfel încît ecuația $P(x) = 0$ să aibă ambele rădăcini negative.

38. a) Se determină m astfel încît, $3/2 \leqslant f(x) \leqslant 13/2$ oricare ar fi x real. Se găsește $m \in [-1, 1]$. b) Discriminantul ecuației $f(x) = q$ este $D = 9m^2 + 16 - (2q - 8)^2$ și în condițiile impuse parametrilor m și q se găsește $-9 \leqslant D \leqslant 25$.

39. a) Nu. b) Nu.

40. Dacă $a < -5/4$, ecuația are rădăcini reale oricare ar fi valoarea parametrului m.

41. 1. $(2, -1)$, $(-1, 2)$, $\left(\frac{-3+\sqrt{105}}{6}, \frac{-3-\sqrt{105}}{6}\right)$ și $\left(\frac{-3-\sqrt{105}}{6}, \frac{-3+\sqrt{105}}{6}\right)$ 2. $(12, 10)$; $(-10, -12)$.

42. 1. $x = 10$, $y = 5$ 2. $x = a^3$, $y = \frac{1}{a}$ 3. $x = \frac{a}{b}\sqrt[3]{ab}$, $y = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{ab}}$ 4. $x = \frac{a^2}{b}$, $y = \frac{b^2}{a}$

43. 1°. Logaritmînd prima egalitate și notînd $\log x = u$, $\log y = v$ se obține sistemul cu necunoscute u, v, $\begin{cases} 3u + 2v = 13 \log a \\ u^2 + v^2 = \dfrac{130}{9} \log^2 a \end{cases}$ care conduce la următoarele soluții pentru sistemul dat, $(x = a^{7/3},\ y = a^3)$, $(x = a^{11/2},\ y = a)$. 2°. $(x = a^{4m-6n},\ y = a^{6m-12n})$. 3°. $(x = 100,\ y = 10)$.

44. Mai întîi să observăm că dacă ecuația admite soluție, aceasta se află în intervalul $(0, \pi/2)$ sau mai general, $(2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$, $k \in Z$. Dacă notăm $u = \log_{\cos x} \sin x$ avem ecuația $u^2 - 4u + 4 = 0$ sau $\sin x = \cos^2 x$, sau $x = \arcsin \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$.

45. Dacă ecuația admite soluții acestea sînt pozitive și diferite de unu. Ținînd seama de egalitatea $\log_a x \cdot \log_x a = 1$ ecuația se poate scrie sub forma $|\log_a x + 1| + |\log_a x - 1| = a^3 \sqrt{\log_a x}$. Dacă $a \in (1, \sqrt{2})$, $x = a^{4/a} \in (1, a)$ dacă $a > \sqrt{2}$, $x = a^{a^4/4} > a$; dacă $a = \sqrt{2}$, $x = a$; dacă $a \in (0, 1)$ ecuația are două soluții, $x = a^{a^4/4} \in (0, a)$ și $x = a^{4/a} \in (a, 1)$.

46. Ecuația se poate scrie sub forma, $x^2 + (1 - 3m)x + 9m - 12 = 0$ cu soluțiile $x_1 = 3$, $x_2 = 3m - 4$. Pentru ca acestea să fie efectiv soluții trebuie să facă pozitive expresiile de sub logaritimi și anume, $x_1 = 3$ este soluție dacă $m \in (1, 3)$ și $x_2 = 3m - 4$ este soluție dacă $m > 3$.

47. Fie a_1, a_3, a_5 termenii progresiei aritmetice conform enunțului: $a_1 = C_n^1 = n$, $a_3 = C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $a_5 = C_n^3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ dar $a_1 + a_5 = 2a_3$, de unde $n_1 = 2$ și $n_2 = 7$ (convine numai $n = 7$). Egalînd termenul al șaselea, $C_7^5 (\sqrt{2 \log (10 - 3^x)})^2 \cdot (\sqrt{2^{(x-2)\log 3}})^5$, cu 21 se obține ecuația $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ de unde $x = 2$; $x = 0$.

48. Condițiile problemei conduc la ecuațiile $2C_n^2 = C_n^1 + C_n^3$; $C_n^5 a^2 b^5 = 21$. Prima dă $n_1 = 7$, $n_2 = 2$. Evident numai $n = 7$ convine. A doua ecuație este atunci $2^{\lg(10-3x)+(x-2)\lg 3} = 1$, deci x este dat de ecuația $(10 - 3x)3^{x-2} = 1$.

49. Dacă x_0 este rădăcină pentru cele două ecuații în mod necesar aceasta este rădăcină și pentru ecuația care se obține scăzînd cele două ecuații adică pentru ecuația $x - a = 0$. Înlocuind pe x cu a în cele două ecuații se obține condiția pe care trebuie s-o satisfacă a astfel încît $x = a$ să fie rădăcină comună și anume $(a^2 - 2)(a - 1) = 0$ sau $a \in \{-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\}$.

50. a) Fie $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. $S(AB) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{n} a_{il} b_{li} = \sum\limits_{l=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} b_{li} a_{il} = S(BA)$. b) $S(B^{-1}AB) = S(B^{-1}(AB)) = S((AB)B^{-1}) = S(AI_n) = S(A)$.

I_n = matricea unitate de ordinul n. c) Se consideră relaţia $S(AX) = 0$ pentru toate matricele pătratice de ordin n $X^{i,j}$ definite prin $x_{ij} = 1$ şi $x_{kt} = 0$ dacă $(i, j) \neq (k, t)$, (numărul matricelor de acest tip este n^2) şi rezultă afirmaţia.

52. Practicînd inducţia completă referitor la n, se găseşte
$$A^{2n} = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}, \quad A^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{n+1} \\ (-1)^n & 0 \end{bmatrix}.$$

53. 1°. Se observă că linia treia se obţine înmulţind prima linie cu doi şi apoi scăzînd din ceea ce s-a obţinut linia a doua (adică linia a treia) este o combinaţie liniară de celelalte linii) şi deci, valoarea determinantului este zero.

2°. Se scade din linia a doua prima linie, apoi se scade din linia a doua a treia multiplicată cu doi, păstrăm prima coloană şi o scădem din coloana a doua şi a treia; se poate acum, scoate factor $(b - a)$ de pe coloana a doua şi $(c - a)$ de pe coloana a treia. În sfîrşit, se scade linia a doua din prima şi avem $\det A = (b - a)(c - a)(c - b)(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$.

3°. Se adună la prima coloană, fiecare coloană de indici k, $(2 \leqslant k \leqslant n + 1)$ multiplicată cu a^{k-1} şi apoi se dezvoltă determinantul după prima coloană şi se găseşte, $\det(A) = a_0 + a_1 a + \ldots + a_n \cdot a^n$. 4°. Scăzînd coloana de indice i din coloana de indice $i - 1$, $(i = 2, 3, \ldots, k)$ şi folosind relaţia, $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ se poate arăta (prin inducţie) că $\det A = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$.

54. Dacă se dezvoltă determinantul după elementele primei coloane se observă că $D(x)$ este un polinom de gradul al doilea în x. În plus, $D(x_1) = D(x_2) = 0$ şi deci, $D(x) = m(x - x_1)(x - x_2)$. Dar, coeficientul lui x^2 este $p_1(x_2) - p_1(x_1) = x_2 - x_1$ şi atunci, $D(x) = (x_2 - x_1)(x - x_1)(x - x_2)$.

56. $D = z^4 + z^3 + z^2 + z$; a) Dacă $z = 1$, atunci $D = 4$, iar dacă $z \neq 1$ şi $z^5 = 1$, avem, $D = \dfrac{z^5 - z}{z - 1} = -1$. b) Dacă $z = 1$ atunci $D = 4$, iar dacă $z \neq 1$ şi $z^3 = 1$, avem $D = z$.

57. a) Matricea A este nesingulară şi B este singulară.
b) Rangul matricei A este trei şi rangul matricei B este doi.

58. Se ţine seama de faptul că rangul unei matrici este egal cu unu dacă toţi minorii de ordinul al doilea sînt nuli şi matricea este nenulă. Acest lucru se întîmplă dacă liniile (coloanele) sînt proporţionale două cîte două.

59. Dacă $x \neq 1$ şi $a \neq 0$ rang $A = 4$. Dacă $x = 1$, oricare ar fi $a \in R$ rang $A = 3$.

60. Convenim ca transpusa unei matrici A s-o notăm cu A'. Considerăm acum următoarele matrici, $X' = (x, y)$, $X_1' = (x_1, y_1)$, $X_2' = (x_2, y_2)$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Cu ajutorul acestor matrici, cele două sisteme de relații se scriu, $X = AX_1$, $X_1 = BX_2$. De aici rezultă că, $X = (AB)X_2$ și cum matricele A, B sînt nesingulare, avem, $X_2 = (AB)^{-1}X = (B^{-1}A^{-1})X$, etc.

61. $A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2, \end{bmatrix}$, $A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & -1/8 & 2/8 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/8 & 1/8 & 1/8 \end{bmatrix}$

$A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Pentru rezolvarea ecuațiilor propuse, se înmulțesc egalitățile (*) cu $A_i^{-1} (i = 1, 2, 3)$ la stînga.

62. det $(A) = 4$, ceea ce exprimă că matricea A este nesingulară.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}, X = A^{-1} B$$

Făcînd calculele, se găsește $X' = (1, 1/2, 3/2)$.

63. Scriind că matricea A comută cu matricea $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ se găsește $z = 0$, $x = w$ și y poate să fie arbitrar.

64. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac - b & -c & 1 \end{bmatrix}$

b) Scriind dezvoltat egalitatea (*) se obține următorul sistem de patru ecuații cu trei necunoscute; m, n, p.

$$m + n + p = 1$$
$$2am + na = 3a$$
$$(2b + ac)m + nb = 3b + 3ac$$
$$2cm + nc = 4c.$$

Dacă $ac \neq 0$ problema nu are soluție. Dacă $a = 0$ și $bc \neq 0$, problema, de asemenea nu are soluție. Pentru $a = 0$, $b = 0$, oricare ar fi c problema are o dublă infinitate de soluţii. Dacă $a = 0$, $b \neq 0$ şi c este arbitrar sau $c = 0$, $a \neq 0$ şi b este arbitrar problema are o infinitate de soluţii.

65. a) $E = \begin{bmatrix} a^2 + bc - pa - q & ab + bd - pb \\ ac + cd - pc & bc + d^2 - pd - q \end{bmatrix}$

b, c) Dacă $b = c = 0$ şi $a = d$ atunci $q = a^2 - pa$ unde p poate lua orice valoare (reală). Dacă $b \neq 0$ sau $c \neq 0$ sau $a + d \neq 0$ atunci p, q sînt unic determinaţi şi avem, $p = (a + d$, $q = bc - ad)$.

66. a) $m = \frac{5}{4}$. b)$\left(a = -\frac{5}{4}c,\ b = \frac{11\,c}{2},\ c\right)$ unde c poate lua orice valoare reală.

67. Dacă $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ şi $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ şi traducem egalitatea matricelor AX şi XA' se ajunge la un sistem liniar şi omogen cu patru ecuaţii şi patru necunoscute x, y, z, w despre care se arată că admite soluţii diferite de soluţia banală pentru oricare numere reale, a, b, c, d.

68. Dacă $(x_1, y_1, z_1) \neq (x_2, y_2, z_2)$ atunci tripletele corespunzătoare acestora (x_1', y_1', z_1') resp. (x_2', y_1', z_2') sînt diferite altfel sistemul mogen

$$zx + 3y = 0$$
$$3x + 7y + 4z = 0$$
$$4y + 7z = 0$$ ar admite soluţie nebanală.

Am arătat astfel că funcţia f este injectivă. Dacă (x', y', z') este dat atunci considerînd sistemul de relaţii dat ca un sistem de ecuaţii necunoscutele x, y, z acesta au soluţie unică conform cu teorema lui Cramer. Rezolvînd acest sistem în raport funcţie de x', y', z' se găseşte funcţia inversă.

69. a) Presupunînd că restul este de forma $ax + b$ se ajunge la sistemul de ecuaţii,
$$a + b = 1$$
$$2a + b = 2$$
$$-2a + b = 3$$ care este incompatibil.

b) Se caută restul sub forma $ax + bx^2 + c$ şi a, b, c verifică următorul sistem
$$a + b + c = 1$$
$$4a + 2b + c = 2$$
$$4a - 2b + c = 3$$ care are soluţie unică, conform cu teorema lui Cramer.

70. Făcînd calculele în partea dreaptă a egalității (1) și identificînd coeficienții se găsește,

$A = a$, $B = 6a + b$, $C = 7a + 3b + c$, $D = a + b + c + d$, $E = e$.

71. Soluția generală este, $s = \left(\dfrac{5 - 23x_4}{10}, \dfrac{-2x_4}{5}, \dfrac{5 + 9x_4}{10}, x_4\right)$ unde x_4 poate lua orice valoare reală. 2°. Soluția generală este, $s = \left(\dfrac{23 - x_4}{5}, \dfrac{5x_3 + 7x_4 - 12}{5}, x_3, x_4\right)$ unde x_3, x_4 pot lua orice valoare reală independent una de alta. 3°. Soluția generală este, $s = \left(\dfrac{x_4 + 10}{12}, \dfrac{2 - x_4}{4}, \dfrac{14 - 19x_4}{12}, x_7\right)$

4°. Soluția generală este, $s = (2 - 2x_3, x_3 - 1, x_3)$ unde x_3 poate lua orice valoare reală.

72. 1°. Sistemul este compatibil cu soluție unică. 2°. Dacă $a \neq -3$ sistemul este incompatibil, iar pentru $a = -3$, sistemul are soluție unică. 3°. Sistem compatibil cu soluție unică. 4°. Sistem incompatibil. 5°. Pentru $a \neq 0$ sistemul are soluție unică, iar pentru $a = 0$ o infinitate de soluții. 6°. Dacă $a \notin \{-1, 1/2, 1\}$ sistemul are soluție unică. Dacă $a \in \{-1, 1\}$ sistemul admite o infinitate de soluții. Dacă $a = 1/2$ sistemul este incompatibil. 7°. Dacă $a \in \{1, 2\}$ sistemul este incompatibil și dacă $a \in \{1, 2\}$ sistemul este compatibil cu o infinitate de soluții. 8°. Dacă $a \notin \{0, 1, 2\}$ sistemul are soluție unică. Dacă $a = 1$ sistemul are o infinitate de soluții. Dacă $a \in \{0, 2\}$ sistemul este incompatibil. 9°. Pentru $a = 1$ sistemul admite o dublă infinitate de soluții; pentru $a = -2$ sistemul este incompatibil și dacă $a \notin \{1, -2\}$ sistemul are soluție unică. 10°. Dacă $a \neq -b$ sistemul admite soluție unică, iar dacă $a = -b$ sistemul este incompatibil. 11°. Calculînd determinantul matricei coeficienților necunoscutelor se găsește $\Delta = (a + b + 1)(a - 1)(a - b)$. Dacă $\Delta \neq 0$ sistemul are soluție unică conform cu teorema lui Cramer. Oricare ar fi numerele reale a, b pentru care $a + b + 1 = 0$ sistemul are o infinitate de soluții. Dacă $a=1$ și $b \notin \{1, -1, 2\}$ sistemul este incompatibil, iar dacă $a = 1$, $b \in \{-1, 2\}$ sistemul are o infinitate de soluții. Dacă $a = b = 1$ sistemul are o dublă infinitate de soluții. În sfîrșit, dacă $a = b \neq 1$ sistemul are o dublă infinitate de soluții. 12°. Dacă $a \neq b$ și $a \neq c$ și $b \neq c$ sistemul admite soluție unică oricare ar fi d. Dacă $a = b$ și ($a \neq c$, $c \neq d$, $a \neq d$) sistemul este incompatibil. Dacă $a = c$ și ($a \neq d$, $a \neq b$, $b \neq d$) sistemul este incompatibil. Dacă $b = c$ și ($a \neq b$, $a \neq d$, $b \neq d$) sistemul este incompatibil. Dacă $a = b = c = d$ sistem compatibil cu o dublă infinitate de soluții. Dacă $a = b = c \neq d$ sistemul este incompatibil.

73. 1°. Sistemul are soluții diferite de soluția banală dacă $a \in \{-1, 2\}$. Pentru $a = 2$ sistemul se reduce la ecuația $x + 5y + 3z = 0$ cu soluția generală $s = (-5y - 3z, y, z)$ unde y, z sînt parametrii. Pentru $a = -1$

sistemul are o infinitate de soluţii şi soluţia generală este $s = (z, z, z)$ unde z poate lua orice valoare reală. 2°. Sistemul admite soluţie diferită de soluţia banală dacă $a = 0$, sau $b = 0$, sau $a + b = 0$, sau $a = b = 0$. Dacă $a = b = 0$ sistemul este satisfăcut de orice triplet de valori date necunoscutelor. Dacă $a = 0$, $b \neq 0$ sistemul admite o infinitate de soluţii şi soluţia generală este $s = (z, -z, z)$ unde z este parametru. Dacă $b = 0$ şi $a \neq 0$ sistemul are o infinitate de soluţii şi soluţia generală este $s = (-z, -z, z)$ unde z este parametru real. Dacă $a + b = 0$ şi $b \neq 0$ sistemul admite o infinitate de soluţii şi soluţia generală este $s = (z, z, z)$ unde z este parametru real.

74. Dacă notăm cu A matricea coeficienţilor necunoscutelor sistemului, $X' = (x_1, \ldots, x_n)$, $0' = (0, 0, \ldots, 0)$ sistemul se poate scrie $A \cdot X = 0$. a) Dacă s este soluţie, rezultă că $As' = 0$ de unde $-(As') = A(-s') = A \cdot (-s)' = 0$.

b) $A \cdot s' = 0$, $A \cdot t' = 0$; $A(s' + t') = A(s + t)' = A \cdot s' + At' = 0$.

c) $A \cdot (as)' = A(a \cdot s') = a(A \cdot s') = a \cdot 0 = 0$

75. Soluţia generală este $s = (-x_4, x_4, 7x_4, 8x_4)$ unde x_4 poate lua orice valoare reală. Orice soluţie a sistemului se obţine din soluţia $s_0 = (-1, 1, 7, 8)$ după ce se multiplică cu un factor convenabil. 2°. Soluţia generală a sistemului este, $s = \left(\frac{-x_3 - x_4}{3}, \frac{2x_3 + 5x_4}{3}, x_3, x_4\right)$ unde x_3, x_4 pot lua oricare valori reale. Sistemele, $s_1 = (-1/3, 2/3, 1, 0)$ şi $s_2 = (-1/3, 5/3, 0, 1)$, sînt soluţii pentru sistemul dat şi soluţia generală se poate scrie sub forma, $s = x_3 s_1 + x_4 s_2$.

76. b) Pentru a demonstra asociativitatea operaţiilor 3° şi 4° se foloseşte egalitatea, $A_1, - A_2 = A_1 \cap \bar{A}_2$ unde $\bar{A}_2$ notează complementara submulţimii A_2 în A şi apoi $\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$, $\overline{A_1 \cap A_2} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$. Elementul neutru este mulţimea vidă, iar simetricul unui lement A_1 este el însăşi. c) Elementul neutru pentru prima operaţie este mulţimea vidă, pentru a doua înăşi mulţimea A, iar a treia, nu are element neutru. Nici-o parte nevidă a lui A nu admite simetric în raport cu prima operaţie şi nici o parte a lui A definită de A însăşi nu admite simetrie în raport cu operaţia a II-a.

77. a) Elementul neutru este numărul zero. b) Dacă $a \neq 1$, ecuaţia $ax = 0$ are soluţia, $x = -\frac{a}{1-a}$. c) Dacă verifică, de exemplu că pentru $a = 2$, $b = 0$, $c = 2$ nu avem, $a * (bc) = (a * b) \cdot (a * c)$, $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$, $a(b * c) = (ab) * (ac)$, $a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$; d) $x = 1$; $(x = 1, y = 2)$.

78. a). Dacă zero se consideră 0 ca fiind număr natural, atunci operaţia îl admite pe acesta ca element neutru altfel nu are element neutru. b) $a^{(2)} = 2a + a^2$; $a^{(4)} = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a$. Se arată practicînd inducţia completă în raport cu n că $a^{(n)} = (a + 1)^n - 1$.

79. a) Dacă se consideră $x = 1$, $y = 0$, avem $1 * 0 = \dfrac{a_1}{a_1 + a_2} \neq \dfrac{a_2}{a_1 + a_2} = 0 * 1$ ce a ce exprimă că operaţia „$*$" nu este comutativă. Dacă $x \neq z$ atunci $x * (y * z) \neq (x * y) * z$ ceea ce exprimă că operaţia „$*$" nu este asociativă. c) Se arată uşor că $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$, $(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x)$ şi $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ y)$, $(y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)$ pentru oricare trei lemente x, y, $z \in R$.

80. Dacă $x \neq y$ atunci $x * y \neq y * x$ ceea ce exprimă că operaţia „$*$" nu este comutativă. De asemeni, dacă $x \neq 0$, oricare ar fi y, $z \in R$ nu avem $(x * y) * z = x * (y * z)$ ceea ce exprimă că operaţia „$*$" nu este asociativă. b) $a_2 = 3a$, $a_3 = 7a$, $a^4 = 15\,a$. Partea a doua a afirmaţiei se dovedeşte practicînd inducţia completă relativ la n. Dacă $a_n = (a^n - 1)a$ atunci, $a_{n+1} = 2a_n \neq a_n = (2^{n+1} - 1)\,a$.

81. Mai întîi facem observaţia că operaţia nu este peste tot definită. Mai precis, $x * y$ se poate calcula numai pentru acele perechi de numere reale (x, y) pentru care $xy \neq 1$. Dacă x, y, $z \in R$ şi $(x * y) * z$, $x * (y * z)$ sînt ambele definite, atunci $(x * y) * z = x * (y * z)$. Dacă $x * y$ este definit atunci şi $y * x$ este definit şi în plus, $x * y = y * x$. Compunerea oricărui element $x \in R$ cu zero există şi în plus, $x * 0 = x$. Compunerea unui element x cu $(-x)$ există şi în plus, $x * (-x) = 0$. Operaţia „$*$" defineşte „parţial" pe R o structură de grup. Facem observaţia că dacă $(x * y) * z$ este definită nu rezultă că $x * (y * z)$ este definit. De exemplu, aceasta se întîmplă dacă $x = 4$, $y = 2$, $z = 1/2$.

82. a) Dacă $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ atunci, $(A * B) * C \neq A * (B * C)$ ceea ce exprimă că operaţia „$*$" nu este asociativă. b) Fie $E = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$. Arătăm că există x, y, z, v încît $A * E = A$, pentru orice element $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ din M. Scriind dezvoltat ultima egalitate, x, y, u, v verifică un sistem de patru ecuaţii cu patru necunoscute şi soluţie unică oricare ar fi A, $E = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$. c) Ecuaţia $A \cdot X = E$ admite soluţia $X = \dfrac{1}{4(ad - bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

83. a) Se arată că relația $a * b = b * a$ nu are loc pentru $a \neq b$ și că relația $(a * b) * c = a * (b * c)$ nu are loc dacă $a(2 + c) \neq 0$. b) Se verifică faptul că relația $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ nu are loc pentru $a \neq 0$ și de asemeni, relația $a * (bc) = (a * b) \cdot (a * c)$ nu se satisface pentru $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$. c) Prima ecuație are pentru orice $a \neq -1$ soluția $x = -\dfrac{a}{a+1}$, iar pentru $a = -1$ nu are soluții. A doua ecuație are ca soluție orice valoare a lui x dacă $a = -2$ și soluție unică $x = 0$ cînd $a \neq -2$. Ecuația a doua are soluție unică pentru $a \neq -2$, $x = \dfrac{-a}{a+2}$ și nici o soluție dacă $a = -2$. d) Pentru $\lambda = 2$ operația $a * b = 2a + 2b + ab$ este comutativă sau nu este asociativă. Se verifică faptul că relația $(a * b) * c = a * (b * c)$ are loc numai dacă $a = c$. e) Problema are două soluții; $(\lambda = 0, \mu = 0)$ și $(\lambda = 1/2, \mu = 1)$. f) Pentru $\lambda = 0$, $\mu = 0$ avem operația $a * b = ab$ adică înmulțirea numerelor reale care definește pe mulțimea numerelor reale nenule o structură de grup. Pentru $\lambda = 1/2$, $\mu = 1$ avem, $a * b = a + b + ab$ această operație este comutativă, asociativă, are pe zero ca element neutru și orice număr real $a \neq -1$ admis simetric pe $a' = -\dfrac{a}{a+1}$.

84. Fie $ab = ac = d$ atunci conform cu axioma 1°, rezultă că $ad = b$, $ad = c$ adică $b = c$. b) Ecuația $ax = b$ admite soluția $x = ab$ căci dacă $ab = d$, atunci $ad = b$ și evident este unică. c) Fie $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Din axiomele 1° și 2° rezultă că pentru orice $i \neq 1$ avem $a_1 a_i = a_j \neq a_i$ și $a_1 a_j = a_i$. Rezultă elementele mulțimii E cu excepția lui a_1 se pot grupa în perechi (a_i, a_j) caracterizate prin, $a_1 a_i = a_j$, cu $a_j = a_i$ și deci, numărul elementelor lui E este impar.

85. Dacă în egalitatea 1 se înlocuiesc elementele y și a cu e se obține $x \circ b = x * b$ ceea ce exprimă că cele două operații coincid. Transcriind egalitatea 1 numai cu semnul „$*$“ și făcînd $x = b = e$ se obține $y * a = a * y$ și apoi, în aceeași egalitate, făcînd $y = e$ se obține $x * (a * b) = (x * a) * b$.

86. a) Fie a', a_1' două elemente simetrice pentru a. Atunci, $a' = a' * e = a' * (a * a_1') = (a' * a) * a_1' = e * a_1' = a_1'$. b) Din egalitatea, $a * x = b * x$ rezultă, $(a * x) * x' = (b * x) * x'$ și folosind proprietatea de asociativitate a operației rezultă $a = b$. d) Se verifică egalitățile, $(a * b) * (b' * a') = (b' * a') * (a * b) = e$. e), f). Demonstrația se poate face folosind metoda inducției complete. g) Dacă se folosește simbolul „$\cdot$“ pentru legea de grup „$*$“ atunci elementul neutru se notează de obicei cu 1, iar simetricul unui element a prin a^{-1}. În cazul unei notații aditive „+“ elementul neutru se notează de obicei cu 0, iar simetricul unui element a se notează cu „$-a$“ și se numește opusul lui a. Așa dar, reformulînd rezultatele precedente avem: b) Dacă $ax = bx$ sau $xa = xb$ atunci $a = b$ (respectiv, dacă $a + x = b + x$ sau $x + a = x + b$, atunci $a = b$) c) $(a^{-1}) = a$ (resp. $-(-a) = a$. d) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ (resp. $-(a + b) = (-b) + (-a)$; e) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$. (resp. $ma + na = (m + n)a$ și $n(ma) = (mn)a$; f) $(ab)^m = a^m b^m$, (resp. $m(a + b) = ma + mb$ $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1}$, (resp. $m(-a) = -(ma)$).

88. a) f_a este injectivă căci într-un grup se poate simplifica și la stînga și la dreapta. Dacă $y \in G$, este suficient să luăm $x = aya^{-1}$ pentru ca să avem $f(x) = y$, ceea ce exprimă că f_a este o aplicație surjectivă; $f_a(x_1x_2) = a^{-1}(x_1x_2)a = (a^{-1}x_1a)(a^{-1}x_2a) = f_a(x_1) \cdot f_a(x_2)$. b) Deoarece $(x^{-1})^{-1} = x$, rezultă imediat că f este bijecție. Dacă x_1, $x_2 \in G$, avem succesiv, $f(x_1x_2) = (x_1x_2)^{-1} = x_2^{-1} x_1^{-1} = f(x_2) \cdot f(x_1)$ ceea ce exprimă că f este în general un antiizomorfism și dacă grupul G este abelian, atunci f este chiar izomorfism. c) f_a^{-1}: $G \to G$ se definește prin $f_a^{-1}(x) = aya^{-1}$ și $f^{-1}: G \to G$ coincide cu f.

89. a) Dacă $(G.,e)$ este grup, atunci pentru orice element $a \in G$ există un simetric a^{-1} și din $ax = b$, rezultă folosind asociativitatea operației că $(aa^{-1})x = a^{-1}b$ sau $x = a^{-1}b$. În plus, dacă $ax_1 = b$ și $ax_2 = b$ atunci $ax_1 = ax_2$ de unde (dacă înmulțim la stînga cu a^{-1} această egalitate) rezultă că $x_1 = x_2$. b) Pentru orice element $a \in G$, există un element la $\in G$ încît, $a \cdot e_a = a$. Dacă b este un element oarecare din G, există $y \in G$ încît $ya = b$ și $b \cdot e_a = (ya)e_a = y(ae_a) = ya = b$. Există deci un element $e_d \in G$ încît $a \cdot e_d = a$ oricare ar fi $a \in G$. În mod analog se arată că există un element $e_s \in G$ încît, $e_s \cdot a = a$ oricare ar fi $a \in G$. În sfîrșit, $e_s = e_s \cdot e_d = e_d = e$ și e este element neutru pentru operația considerată. Dacă $a \in G$ există $a' \in G$ și $a'' \in G$ încît $aa' = e$, $a''a = e$ și $a' = ea' = (a''a)a' = a''(aa') = a''e = a''$ ceea ce arată că orice element $a \in G$ admite un simetric.

93. a) Demonstrația este evidentă. Un asemenea omomorfism se numește omomorfismul nul cu sursa G și cosursa G'.. b) $f^{-1}: G' \to G$ se definește prin, $f^{-1}(y) = x$ unde x este unic determinat prin $f(x) = y$. Aplicația f este evident injectivă și dacă $x \in G, f(x) = y \in G'$ și deci, $f^{-1}(y) = x$ ceea ce exprimă că f^{-1} este o aplicație surjectivă și deci bijectivă. În plus, dacă y_1, y_2 G' și $f^{-1}(y_1) = x_1$, $f^{-1}(y_2) = x_2$ atunci $f(x_1) = y_1$ și $f(x_2) = y_2$. Funcția f fiind omomorfism de grupuri, avem, $y_1 \cdot y_2 = f(x_1 \cdot x_2)$ sau, $f^{-1}(y_1y_2) = x_1x_2 = f^{-1}(y_1 \cdot f^{-1}(y_2)$ și deci f^{-1} este izomorfism de grupuri. c) Fie x_1, $x_2 \in G$. În ipoteza că f, g sînt omomorfisme avem succesiv, $(g \circ f)(x_1 + x_2) = g(f(x_1 + x_2)) = g(f(x_1) + f(x_2)) = g(f(x_1)) + g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_1) + (g \circ f)(x_2)$ ceea ce exprimă că $g \circ f$ este omomorfism. Dacă f, g sînt surjective și $x'' \in G''$ atunci, există $x' \in G'$ încît $g(x') = x''$ și există $x \in G$ încît $f(x) = x'$. Rezultă că $(g \circ f)(x) = x''$ adică, $g \circ f$ este surjecție. Celelalte chestiuni sînt evidente.

94. Prima parte se verifică urmărind condițiile ce definesc un grup. Pentru partea a doua reamintim că rădăcinile unității sînt date de egalitatea, $z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ unde $k = 0, 1, \ldots, n-1$ și se observă că $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ are proprietatea cerută de problemă.

95. a) Elementul neutru este numărul zero. Orice element $a \neq -1$ are simetric și anume $a' = -\frac{a}{a+1}$. b) Se arată de exemplu, că relațiile $a \circ (bc) = (a \circ b) \cdot (a \circ c)$, $a \circ (b + c) = (a \circ b) + (a \circ c)$, $a(b \circ c) = (ab) \circ (ac)$, $a + (b \circ c) = (a + b) \circ (a + c)$ nu sînt adevărate dacă se consideră $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. c) $x \circ x = x$ conduce la ecuația $x + x^2 = 0$ cu rădăcinile $x = 0$, $x = -1$.

96. a) Operația este, evident, peste tot definită, asociativă, perechea $(1, 1)$ este element neutru și dacă $(a, b) \in M$ atunci, $(a, b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$. b) $f((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) = f(a_1a_2, b_1b_2) = a_1a_2b_1b_2 = (a_1b_1) \cdot (a_2 b_2) = f((a_1, b_1)) \cdot f((a_2, b_2))$. Dacă b este un număr real pozitiv, $b = 1.b = b.1$ și $b = f(1, b) = f(b, 1)$ ceea ce justifică și afirmația că f nu este injectivă dacă se consideră $b \neq 1$. c) Aceeași justificare ca la punctul b).

97. a) Operația este asociativă, elementul neutru este numărul zero, iar simetricul unui număr real x este $-x$. Aplicația $f: R_0 \to R_+$ definită prin $f(x) = x^3$ este un izomorfism de grupuri. Într-adevăr, f este evident bijecție și dacă $x, y \in R_0$ atunci, $f(x \circ y) = (\sqrt[3]{x^3 + y^3})^3 = x^3 + y^3 = f(x) + f(y)$. b) Operația este asociativă, comutativă, fără element neutru. Dacă $e \in R$ ar fi element neutru am avea $x * e = x$, pentru orice x din R adică $\sqrt{x^2 + e^2} = x$ ceea ce ar conduce la $e = 0$. Dar, $x * 0 = \sqrt{x^2} = |x|$ care este diferit de x dacă x este negativ. Pe mulțimea $R_{>}$ egalitatea $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$ definește o operație asociativă, comutativă cu element neutru, numărul zero și nici un element nenul nu admite simetric.

98. Verificarea asociativității este calculatorie. Numărul unu este element neutru, iar simetricul unui număr x este el însăși.

99. Elementul neutru este numărul θ. Dacă $x \in R_{>0}$, simetricul acestuia în raport cu legea de compozițe „ * " este $x' = e^{\frac{\ln^2\theta}{\ln x}}$

100. a) Pentru a putea defini compunerea funcțiilor date trebuie ca pentru orice $x \in D$ să avem $f_2(x)$, $f_3(x) \in D$. Fie $x \in D$ și $f_2(x) = -\frac{1}{\sqrt{8}}$ sau $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8}}$; aceste două egalități conduc la $4 = 0$ sau $x = -\frac{1}{\sqrt{8}}$

ambele imposibile. În mod analog se arată că dacă $x \in D$ atunci $f_3(x) \in D$. În plus, $f_2 \circ f_2 = f_3$, $f_2^{-1} = f_3$, $f_3^{-1} = f_2$. b) Fie $G = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$ grupul rădăcinilor de ordin trei ale unităţii. Funcţia $f: M \to G$ definită prin, $f(f_1) = 1$, $f(f_2) = \varepsilon$, $f(f_3) = \varepsilon^2$ este un izomorfism de grupuri.

101. c) Aplicaţia $u: G \to G'$ definită prin, $u(f_0) = g_1$, $u(f_1) = g_2$, $u(f_2) = g_3$, $u(f_3) = g_4$ este un izomorfism de grupuri.

102. a) Dacă notăm cu R_a rotaţia cu centrul 0 şi unghiul de rotaţie a avem, $R_a \circ R_b = R_b \circ R_a = R_{a+b}$. Rotaţia definită de unghiul nul este elementul neutru şi simetricul elementului R_a este R_{-a}. b) Aplicaţia $f: R \to G$ definită prin, $f(a) = R_a$ este un omomorfism surjectiv, dar nu şi injectiv căci de exemplu, $f(a) = f(a + 2\pi)$. c) Aplicaţia $g: G \to G'$ definită prin $g(a) = A(a)$ este un izomorfism de grupuri.

103 a) $f_a \circ f_b = f_{ab}$, f_1 este elementul neutru şi $(f_a)^{-1} = f_{a^{-1}}$.

104. Dacă $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ sînt două elemente din mulţimea $A_{mxn}(G)$ definim $A \circ B = C$ unde $C = (c_{ij})$ se defineşte prin, $c_{ij} = a_{ij}.\, b_{ij}$, ($i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$). Compunerea din partea dreaptă a ultimei egalităţi, este compunerea din grupul G. Elementul neutru în $A_{mxn}(G)$ este matricea cu m linii şi n coloane ale cărei toate elemente sînt egale cu e. Simetricul unui element $A = (a_{ij})$ este $A^{-1} = (a_{ij}^{-1})$.

105. a) Dacă $M = (a_{ij})$ este un element din $M_{mxn}(A)$ se defineşte $f_{mxn}(M) = (f(a_{ij}))$. c) Dacă $M = (a_{ij})$ este un element oarecare din $M_{mxn}(A)$, atunci $(f_{nxm} \circ g_A)(M) = f_{nxm}(g_A(M)) = f((a_{ji})) = (f(a_{ji})) = (g_{A_1} \circ g_{mxn}(M))$.

106. a) Se arată că dacă a_1, a_2 sînt două numere reale, atunci $M(a_1).M(a_2) = M(a_1.a_2)$; dacă $a \neq 0$ atunci $[M(a)]^{-1} = M\left(\frac{1}{a}\right)$. Aplicaţia, $f: R \to M$ definită prin $f(a) = M(a)$ este izomorfism de grupuri ($R.$ = grupul multiplicativ al numerelor reale diferite de zero). b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

107. $M(x_1, y_1, z_1).M(x_2, y_2, z_2) = M(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + x_1y_2)$ Elementul neutru în raport cu înmulţirea este matricea $M(0, 0, 0)$ şi simetricul elementului $M(x, y, z)$, este $M(x, y, xy - z)$.

108. a) $M(a, \lambda_1).M(a, \lambda_2) = M(a, \lambda_1 + \lambda_2)$. Elementul neutru este matricea $M(a, 0)$; $(M(a, \lambda))^{-1} = M(a, -\lambda)$. Aplicaţia $f: R_+ \to G$ definită prin, $f(\lambda) = M(a, \lambda)$ este un iromorfism de grupuri. b) Aplicaţia

$g: M_a \to M_b$ definită prin $g(M(a, \lambda)) = M(b, \lambda)$ este un izomorfism de grupuri. c) $M(a_1, \lambda_1).M(a_2, \lambda_2) = M(b, \lambda_1 + \lambda_2)$ unde b este dat de relația, $b^{\lambda_1+\lambda_2} = a_1^{\lambda_1} . a_2^{\lambda_2}$ $M(b, 0) = M(1, 0)$ este elementul neutru și $M(a, -\lambda) = (M(a, \lambda))^{-1}$.

109. a) $M(a_1).M(a_2) = M(a_1 + a_2)$; $M(0)$ este element neutru și $(M(a))^{-1} = M(-a)$. b) $M(a).M(-a) = I_3$ și deci, $\det M(a).\det M(-a) = 1$. c) Rezultă imediat dacă se folosește a). d) $(M(a))^n = (f(a))^n = f(na) = M(na)$.

110. a) $M(\lambda_1) . M(\lambda_2) = M(\lambda_1 + \lambda_2)$; $M(0)$ este element neutru și $[M(\lambda)]^{-1} = M(-\lambda)$. b) $M(\lambda).M(-\lambda) = I_3$ (matricea unitate de ordin trei) $|M(\lambda)| . |M(-\lambda)| = |M(\lambda) . M(-\lambda)| = |I_3| = 1$. c) Rezultă folosind a). d) $[M(\lambda)]^n = [f(\lambda)]^n = f(n\lambda) = M(n\lambda)$.

111. a) $M(a_1)M(a_2) = M(a_1 + a_2)$, $M(0)$ este elementul neutru și $(M(a))^{-1} = M(-a)$. b) Dacă $a_1, a_2 \in R$, $f(a_1 + a_2) = M(a_1 + a_2) = M(a_1).M(a_2) = f(a_1).f(a_2)$, ceea ce exprimă că f este omomorfism de grupuri. Deoarece $f(a) = f(a + 2k\pi)$, $k \in Z$, rezultă că f nu este injectiv. c) Un număr complex cu modulul egal cu unu este de forma, $z = \cos a + i \sin a$, $a \in R$. d) Dacă $z_1 = \cos a_1 + i \sin a_1$, $z_2 = \cos a_2 + i \sin a_2$ atunci, $z_1 \cdot z_2 = \cos(a_1 + a_2) + i \sin(a_1 + a_2)$, $z_1z_2 \in G$. $g(z_1z_2) = M(a_1 + a_2) = M(a_1).M(a_2) - g(z_1).g(z_2)$. e) Avem succeviv, $(M(a))^n = (g(\cos a + i \sin a))^n = g(\cos a + i \sin a)^n = g(\cos na + i \sin na) = M(na)$.

112. a) Asociativitatea operației „ $*$ “ rezultă imediat din asociativitatea operațiilor „+“. Perechea (0, 0) este element neutru, iar opusul unei perechi (x_1, x_2) este $-(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$.

113. a) O soluție arbitrară pentru ecuația dată este de forma, $y = a \cos 3x + b \sin 3x$. Dacă $y_1 = a_1 \cos 3x + b_1 \sin 3x$, $y_2 = a_2 \cos 3x + b_2 \sin 3x$ atunci $y_1 + y_2 = (a_1 + a_2) \cos 3x + (b_1 + b_2) \sin 3x$ este soluție pentru ecuația dată. Funcția $y: R \to R$ definită prin $y(x) = 0$, oricare ar fi $x \in R$ este element neutru. Dacă $y = a \cos 3x + b \sin 3x$, $y \in M$ atunci, $-y = -a \cos 3x - b \sin 3x$ este element al lui M. b) Dacă definim $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ se obține pe M' o structură de grup abelian. c) Aplicația $f: M' \to M$ definită prin, $f((a, b) = a \cos 3x + b \sin 3x$ este un izomorfism de grupuri.

114. a) Elementul neutru în P_3 este polinomul de gradul al doilea identic nul (cu toți coeficienții zero). b) Rezultă imediat dacă se ține seama de faptul că $(P + Q)' = P' + Q'$. c) $m \notin \{0, -4, -1\}$. d) $f_{m_1} \circ f_{m_2}$ este automorfism dacă și numai dacă $m_1^2 m_2(m_2 + 1)(4 + m_1)(4 + m_2) \neq 0$ ceea ce se întîmplă dacă f_{m_1} și f_{m_2} sînt automorfisme. e) Dacă $m \notin \{0, -4, -1\}$ atunci mulțimea $\{P \mid f_m(P) = 0\}$ este formată din singurul element, polinomul nul. Dacă $P \in P_3$ și $P = ax^2 + bx = c$, atunci

$$f_m(P) = x^2(4a + ma) + x(b + mb + 6a) + 3b + mc \text{ și}$$

$$\ker f_0 = \{c \mid c \text{ număr real}\}$$

$$\ker f_{-1} = \left\{\frac{c}{3}x + c \mid c \in R\right\}$$

$$\ker f_{-4} = \left\{\frac{2c}{3}x^2 + \frac{4c}{3}x + c \mid c \in R\right\}$$

Pentru $m = 1$ se poate lua $P(x) = c$, oricare ar fi $c \in R$.

Pentru $m = 1$ se poate lua $P(x) = \frac{c}{3}x + c$, oricare ar fi $c \in R$.

Pentru $m = -3$ se poate lua $P(x) = \frac{2c}{3}x^2 + \frac{4c}{3}x + c$, oricare ar fi $c \in R$

115. La orice pereche ordonată (f, g) de elemente din $M(S, G)$ asociem funcția $f \circ g : S \to G$ definită prin, $(f \circ g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, oricare ar fi $x \in S$. Elementul neutru este funcția $f_e : S \to G$ definită prin $f_2(x) = e$ oricare ar fi $x \in S$; Dacă $f \in M(S, G)$ simetricul acestui element, fie să-l notăm cu f', se definește prin, $f'(x) = (f(x))^{-1}$. Fie, $f_1, f_2 \in M(S, G)$ și x un element oarecare din S. Avem succesiv, $u \circ (f_1 \circ f_2)(x) = (u \circ (f_1 . f_2))(x) = u(f_1(x) \cdot f_2(x)) = (u \circ f_1)(x)) \cdot (u \circ f_2)(x) = (u_*(f_1))(x) \cdot (u_*(f_2))(x) = (u_*(f_1) \cdot u_*(f_2)7(x)$. Deci, $u_*(f_1 \cdot f_2) = (u_*(f_1)) \cdot (u_*(f_2))$, adică u_* este omomorfism de grupuri. Dacă u este un omomorfism injectiv și $f_1, f_2 \in M(S, G)$ $f_1 \neq f_2$, rezultă că există $x \in S$ încît $f_1(x) \neq f_2(x)$ și atunci $(u_*(f_1)(x) = u(f_1(x)) \neq u(f_2(x)) = (u_*(f_2))(x)$, ceea ce exprimă că $u_*(f_1) \neq u_*(f_2)$ și deci u_* este un omomorfism injectiv.

116. a) Fie $x, y \in G$; $f(x) = x'$, $f(y) = y'$ elementul din G imagini ale elementelor x, y prin funcția f. Definim $x \circ y = f^{-1}(x', y')$ și deja avem, (1) $f(x \circ y) = x'y' = f(x) \cdot f(y)$. Operația „$\circ$" este asociativă căci pentru oricare trei elemente $x, y, z \in G$ avem succesiv, $(x \circ y) \circ z = f^{-1}(x'y') \circ z = f^{-1}(x'y'z')$ și $x \circ (y \circ z) = f^{-1}(x' \cdot (y'z'))$ unde $f(2) = x'$, $f(y) = y'$, $f(z) = z'$. Elementul $e = f^{-1}(e')$ este element neutru căci dacă $x \in G$ și $x' = f(x)$, atunci $x \circ e = f^{-1}(x'e') = f^{-1}(x') = x$ și la fel $e \circ x = x$. Dacă $x \in G$ și $f(x) = x' \in G'$, iar $(x')^{-1}$ este inversul lui x' în G', atunci $x^{-1} = f^{-1}((x')^{-1})$. Egalitatea (1) arată că f este chiar izomorfism de grupuri.
b) Fie $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ și $G = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4\}$ grupul rădăcinilor de ordin cinci ale unității și fie $f : M \to G$ definită prin $f(a_1) = 1$, $f(a_2) = \varepsilon$, $f(a_3) = \varepsilon^2$, $f(a_4) = \varepsilon^3$, $f(a_5) = \varepsilon^4$. Ținînd seama de tabela de înmulțire din G, obținem o structură de grup pe M; legea de compoziție pe M o dăm prin tabela

0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_2	a_1	a_3	a_4	a_5	a_2
a_3	a_3	a_4	a_5	a_1	a_4
a_4	a_4	a_5	a_1	a_2	a_3
a_5	a_5	a_1	a_2	a_3	a_4

117. Se știe că $\mathrm{tg}: (-\pi/2, \pi/2) \to \boldsymbol{R}$ este o funcție bijectivă a cărei inversă este arc tg.

118. Se folosește faptul că $\mathrm{tg}: (-\pi/2, \pi/2) - \{0\} \to \boldsymbol{R} - \{0\}$ și $\mathrm{ctg}: (0, \pi) - \{\pi/2\} \to \boldsymbol{R} - \{0\}$ sînt două funcții bijective.

119. Cerînd ca operația „ $*$ ” să fie asociativă, adică să avem, $(x * y) * z = x * (y * z)$ pentru oricare trei elemente $x, y, z \in \boldsymbol{R}$ se ajunge la relațiile, $a = a^2$, $b = b^2$ care conduc la patru soluții $(a = 0, b = 0)$, $(a = 0, b = 1)$, $(a = 1, b = 0)$, $(a = 1, b = 1)$ și numai operația care corespunde lui $a = 1$, $b = 1$ definește pe $\boldsymbol{R}$ o structură de grup, este chiar grupul aditiv real obișnuit $x * y = x + y$.

120. a) Cerînd ca operația „$\circ$“ să fie asociativă se găsește că funcția f trebuie să satisfacă egalitatea, $f(ab)=f(a)\cdot f(b)$ pentru oricare două elemente a, b din $\boldsymbol{R}$. Dacă $f(1)=1$, atunci perechea $(1, 0)$ este element neutru pentru operația considerată. În sfîrșit, dacă pentru orice $a \neq 0, f(a) \neq 0$ atunci, pentru orice element (a, b) din M există un element simetric și anume, $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{af(a)}\right)=(a, b)'$; b) Pentru ca operația „$\circ$“ să fie comutativă trebuie să avem, $b_1a_2 + b_2f(a_1) = b_2a_1 + b_1f(a_2)$ sau, $b_1(a_2 - f(a_2)) = b_2(a_1 - f(a_1))$ oricare ar fi, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \boldsymbol{R}$ și de aici rezultă afirmația.

121. Dacă H este nevidă, fie $x \in H$, atunci $xx^{-1} = e \in H$. Dacă $x \in H$, cum $e \in H$ rezultă că $ex^{-1} = x^{-1} \in H$. În sfîrșit, dacă $x, y \in H$, rezultă că $y^{-1} \in H$ și deci, $x(y^{-1})^{-1} = xy \in H$. Reciproc, fie că se satisfac condițiile a) — c). Din condiția a) rezultă că H este nevidă. Dacă x, $y \in H$, grație condiției b) rezultă că $y^{-1} \in H$ și folosind condiția c) rezultă că $xy^{-1} \in H$.

122. Fie că $aH = bH$ și $e \in H$. Avem, $ae = a$ $aH = bH$ și există deci un element $h \in H$ încît $a = bh$ sau, $b^{-1}a = h \in H$. Reciproc, dacă $b^{-1}a \in H$, rezultă că există $h \in H$ încît $b^{-1}a = h$, $a = bh$ ceea ce conduce imediat la $aH = bH$ (se arată dubla incluziune). c) Rezultă direct din b). d) Fie $aH \in bH$ și $x_0 \in bH$; există deci, h_1, $h_2 \in H$ încît, $x_0 = ah_1$, $x_0 = bh_2$ ceea ce conduce la, $b^{-1}a \in H$ sau cu b), $aH = bH$.

123. Fie $G = \{x_1, \ldots, x_n\}$ și H o submulțime a lui G cu proprietatea că $xy \in H$ dacă x, $y \in H$. Dacă $y \in H$, rezultă că toate puterile pozitive ale lui y se află în H și cum G este finit, rezultă că există m, număr natural încît $y^m = e$ și deci, $y^{-1} = y^{m-1} \in H$ și deci $xy^{-1} \in H$.

124. a) Elementul neutru este matricea $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dacă $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ este element din M_2 atunci, acesta admite un simetric care este matricea, $\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & -\frac{a_2}{a_1} \\ \frac{-a_3}{a_4} & \frac{1}{a_4} \end{bmatrix}$

b) M_0 este subgrup căci dacă $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$ sînt elemente din M_0, atunci $(A_2)' = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_2} \end{bmatrix}$, $(A_2)' = A_2'$ este simetricul elementului A_2 și $A_1 \cdot A_2' = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{a_2} & 0 \\ 0 & \frac{b_1}{b_2} \end{bmatrix}$ care este element din M_0.

125. a) Se arată mai întîi că dacă $f: G \to G'$ este un omomorfism de grupuri, atunci $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$ și $f(e) = e'$. Dacă x, $y \in \ker f$, atunci $f(x.y^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)[f(y)]^{-1} = e'.e' = e'$ și deci, $xy^{-1} \in \ker f$. b) Fie $f(x_1)$, $f(x_2) \in Im(f)$. Avem succesiv $f(x_1)(f(x_2))^{-1} = f(x_1).f(x_2^{-1}) = f(x_1x_2^{-1}) \in$ $\in Imf$. c) Dacă $f(x_1)$, $f(x_2) \in f(G_1)$, rezultă că $f(x_1).(f(x_2))^{-1} = f(x_1x_2^{-1}) \in f(G_1)$ căci G_1 este subgrup și deci, $x_1x_2^{-1} \in G_1$. d) x_1, $x_2 \in G_1$, adică $f(x_1)$, $f(x_2) \in G'$ și deci, $f(x_1).(f(x_2))^{-1} = f(x_1x_2^{-1}) \in G_1$ ceea ce exprimă că $x_1x_2^{-1} \in G_1$

126. Mai întîi, $e \in Z(G)$. Dacă $xg = gx$ rezultă că $g^{-1}x = xg^{-1}$ și deci $g^{-1} \in Z(G)$ cînd $g \in Z(G)$. În sfîrșit, dacă $g_1 g_2 \in Z(G)$ și x este un element oarecare din G, avem succesiv, $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) = g_1(x g_2) = (g_1 x) g_2 = (x g_1 g_2) = x(g_1 g_2)$ ceea ce exprimă că $g_1 g_2 \in Z(G)$.

127. H este subgrup dacă din faptul că $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ sînt elemente din H rezultă că $x - y$ este element din H. Dar, $x - y = (x_1 - y_2, x_2 - y_2)$ și cum, $f_1(x_1 - y_1) = f_1(x_1) - f_1(y_1) = f_2(x_2) - f_2(y_2) = f_2(x_2 - y_2)$, afirmația este dovedită.

128. a) Dacă E este mulțimea vidă, $S(E)$ este grupul cu un singur element. Este evident că dacă $f, g \in S(E)$ funcția $g \circ f$ este o funcție injectivă. Deoarece f, g sînt surjecții, pentru orice element $y \in E$ există $x_1, x_2 \in E$ încît, $g(x_1) = y$ și $f(x_2) = x_1$ adică $(g \circ f)(x_2) = y$ ceea ce exprimă că $g \circ f$ este și surjecție și deci bijecție dacă f, g sînt astfel. Aplicația $1_E : E \to E$ definită prin $1_E(x) = x$ pentru orice $x \in E$ este o permutare a lui E și este element neutru în $(S(E), \circ)$. Dacă $f \in S(E)$ atunci $f' : E \to E$ definită prin $f'(y) =$ acel x pentru care $f(x) = y$ este o permutare a lui E și este simetricul elementului f în raport cu legea „$\circ$", b) Fie a, b, c trei elemente ale mulțimii E. Dacă definim $f \in S(E)$ prin $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$ și $f(x) = x$, dacă $x \notin \{a, b, c\}$ iar $g \in S(E)$ prin $g(a) = c$, $g(b) = b, g(c) = a$ și $g(x) = x$ dacă $x \notin \{a, b, c\}$ atunci $f \circ g \neq g \circ f$ căci $(f \circ g)(a) \neq (g \circ f)(a)$. c) Dacă $f \in M_{x_0}$ atunci $f^{-1} \in M_{x_0}$ căci dacă $f^{-1}(x_0) = x \neq x_0$ atunci, $f(x) = x_0 = f(x_0)$ ceea ce nu este posibil decît dacă $x = x_0$, f fiind injectivă. d) Definim $h \in S(E)$ prin $h(x_0) = y_0$, $h(y_0) = x_0$ și $h(x) = x$ dacă $x \in \{x_0, y_0\}$. Dacă la orice element $f \in M_{x_0}$ asociem elementul $hfh = = u(f)$ obținem izomorfismul cerut. Mai întîi dacă $f \in M_{x_0}$ atunci $u(f) \in M_{y_0}$ căci, $(hfh)(y_0) = (hf)(h(y_0)) = (hf)(x_0) = h(f(x_0)) = h(x_0) = y_0$. Dacă $f_1, f_2 \in M_{x_0}$ și $f_1 \neq f_2$ atunci $u(f_1) \neq u(f_2)$ și în plus dacă $g \in M_{y_0}$, $g = u(f)$ unde $f = hgh$, ceea ce exprimă că u este o aplicație bijectivă. În sfîrșit, $u(f_1 \circ f_2) = u(f_1) \circ u(f_2)$ căci, $h(f_1 \circ f_2) = (hf_1h) \circ (hf_2h)$. e) Fie $f \in S(E)$ astfel încît $f(E_0) = E_0$. Dacă $y_0 \in f^{-1}(E_0)$ rezultă că $y_0 = f^{-1}(x_0)$, $x_0 \in E_0$, adică $f(y_0) = x_0 = f(z_0)$ unde $z_0 \in E_0$ și cum f este injectivă, rezultăă că $y_0 = z_0 \in E_0$. Am arătat că $f^{-1}(E_0) \subseteq E_0$. Dacă $y_0 \in E_0$, atunci, $f(y_0) = z_0 \in E_0$ sau $y_0 = f^{-1}(z_0)$ ceea ce exprimă că $E_0 \subseteq f^{-1}(E_0)$ și deci, $f^{-1}(E_0) = E_0$.

129. a) Aplicațiile T_a (resp. T^a) sînt evident injecții căci într-un grup se poate simplifica la stînga sau la dreapta. Dacă $y \in G$, există $x \in G$ încît $T_a(x) = y$ și anume $x = a^{-1}y$ (resp. există $x \in G$ încît $T^a(x) = y$ și anume $x = ya'$). Pentru ca T_a să fie izomorfism trebuie să avem, $T_a(xy) = T_a(x) . T_a(y)$ sau, $a(xy) = (ax) \cdot (ay)$ ceea ce conduce la $a = e$.

b) Dacă $T_a, T_b \in M_1$ atunci $T_a \circ T_b = T_{ab}$ ceea ce exprimă că $T_a \circ T_b \in M_1$ și $T_{a^{-1}}$ este simetricul lui T_a adică $(T_a)^{-1} \in M_1$. Pentru mulțimea M_2 avem că $T^a \circ T^b = T^{ba}$ și $(T^a)^{-1} = T^{-1}$.

c) Fie $a \neq b$ și $\sigma_1(a) = \sigma_1(b)$. Oricare ar fi elementul $x \in G$, $ax = bx$ ceea ce este posibil căci $ae = a \neq b = be$ și deci σ_1 este injectiv ; în mod evident σ_1 este surjectiv : în mod evident σ_1 este surjecție. Dacă $a, b \in G$

atunci, $\sigma_1(ab) = T_{ab} = (T_a \circ T_b) = \sigma_1(a) \circ \sigma_1(b)$ ceea ce exprimă că σ_1 este izomorfism. În mod analog, se arată că σ_2 este o bijecție dar nu este izomorfism căci $\sigma_2(ab) = T^{ab} = T^b . T^a = \sigma_2(b) \circ \sigma_2(a)$ (se zice în acest caz că σ_2 este un antiizomorfism).

130. Se observă mai întîi că $f_*(u)$ este element din S_F ca fiind produs de bijecții. $f_*(uv) = f \circ (uv) \circ f^{-1} = (f \circ uf^{-1}) \circ (f \circ v \circ f^{-1}) = f_*(u)$. $f_*(v)$.

131. a) Fie $(x_1, \ldots, x_n) \in Z^n$ și fie $y_i = x_{g(i)}$, $i = 1, \ldots, n$. Avem succesiv, $(p_f \circ p_g)((x_1, \ldots, x_n)) = p_f((x_{g(1)}, x_{g(2)}, \ldots, x_{g(n)})) = p_f(y_1, \ldots, y_n) = (y_{f(1)}, \ldots, y_{f(n)}) = (x_{gf(1)}, \ldots, x_{gf(n)}) = p_{gf}((x_1, \ldots, x))$ ceea ce exprimă că $p_f \circ p_g = p_{g \cdot f}$.
b) Pentru orice element $(x_1, \ldots, x_n)$ din Z^n avem, $u^f((x_1, \ldots, x_n)) = u(x_{f(1)}, \ldots, x_{f(n)}) = (u \circ p_f)(x_1, \ldots, x_n)$. Prin urmare, $u^{f \circ g} = u \circ p_{f \circ g} = u \circ (p_g \circ p_f) = (u \circ p_g) \circ p_f = (u \circ p_g)^f = (u^g)^f$. c) $u, v : Z \to Z^n$ definim $(uv)(x) = u(x).v(x)$ și $(u + v)(x) = u(x. + v(x)$ pentru orice element x din Z^n. Atunci, $(u + v)^f = (u + v) \circ p = u \circ p_f + v \circ p_f = u^f + v^f$, $(uv) = (uv) \circ p_f = (up_f).(vp_f) = u^f . v^f$. d) $(-u)^f = (-u) \circ p_f = -(u \circ p_f) = -(u^f)$.

132. b) Dacă $a \in A^*$, există $a' \in A$ încît $aa' = a'a = 1$ și deci, $f(a).f(a') = f(a').f(a) = f(1) = 1$ ceea ce exprimă că $f(a) \in A_1^*$.
134. 2), a) $(-x)y + xy = ((-x) + x)y = 0y = 0$ și deci, $-(xy) = (-x)y$; 3) Demonstrația se poate face practicînd inducția completă relativ la numărul de elemente din sistemele considerate.

136. b) Fie x un element nilpotent și fie n (cel mai mic) număr natural pentru care $x^n = 0$. Folosind rezultatul de la punctul a) avem, $1 = 1 - x^n = 1^n - x^n = (1 - x)(1 + x + \ldots + x^{n-1}) = (1 + x + \ldots + x^{n-1})(1 - x)$ ceea ce demonstrează afirmația. c) Fie m și n (cele mai mici numere naturale) pentru care $x^m = 0$, $y^n = 0$ atunci $(xy)^{mn} = x^{mn} . y^{mn} = (x^m)^n . (y^n)^m = 0 . (x + y)^{m+n} = 0$ (Pentru a calcula $(x + y)^{m+n}$ se poate aplica formula binomului lui Newton căci $xy = yx$). d) Elementul nul în raport cu operația „+" este nilpotent și dacă a este nilpotent atunci $-a$ este de asemeni nilpotent căci $(-1)x = x(-1)$.

137. a) Elementul neutru în raport cu prima operație este (0, 0) și în raport cu a doua, perechea (0, 1). b) Divizorii lui zero sînt perechile de forma $(a, 0)$ unde $a \neq 0$. c) $(0, 1)$ M și dacă (x, y) M, adică $y \neq 0$ atunci, perechea, $\left(\frac{-x}{y^2}, \frac{1}{y}\right)$ este elementul invers (simetric) pentru elementul (x, y). d) f nu este injectiv căci $f((kx, ky)) = \frac{kx}{ky} = \frac{x}{y} = f(x, y)$ pentru orice

$k \neq 0$. Aplicaţia f este surjectivă căci pentru orice $y \in R_+$ avem $f((y, 1)) = \frac{y}{1} = y$.

138. a) Elementul neutru în raport cu a doua operaţie este perechea (1, 0). b) Dacă $a^2 - b^2 \neq 0$, ecuaţia $(a, b).(x, y) = (1, 0)$ are soluţie unică $x = \frac{a}{a^2-b^2}$, $y = \frac{-b}{a^2 - b^1}$. Dacă (a_1, b_1), (a_2, b_2) sînt două elemente din M pentru care $a_1^2 - b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 - b_2^2 \neq 0$ atunci, $(a_1a_2 + b_1b_2)^2 - (a_1b_2 + a_2b_1)^2 = (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2) \neq 0$ şi deci, $(a_1, b_1).(a_2, b_2) \in G$; $(1, 0) \in G$ şi dacă $(a, b) \in G$ atunci $\left(\frac{a}{a^2 - b^2}, \frac{-b}{a^2 - b^2}\right) \in G$. c) Dacă $(a, b) \in M$ şi $a^2 - b^2 = 0$ atunci ecuaţia $(a, b)(x, y) = (0,0)$ conduce la sistemul omogen $\begin{cases} ax + by = 0 \\ bn + ay = 0 \end{cases}$ care admite soluţii diferite de soluţia banală şi afirmaţia este justificată.

139. a). Elementul neutru pentru prima operaţie este (0,0), iar pentru a doua operaţie este (1, 0). b) Divizorii lui zero sînt perechile (a, b) nu cu ambele componente nule pentru care există perechi (x, y) nu cu ambele componente nule astfel încît $(a, b).(x, y) = (0, 0)$. Orice pereche de forma $(0, b)$ cu $b \neq 0$ este divizor al lui zero şi invers, orice divizor al lui zero este o pereche cu prima componentă nulă şi a doua diferită de zero. c) Dacă $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in N$ atunci $(a_1, b_1).(a_2, b_2) \in N$; $(1, 0) \in N$ şi dacă $(a, b) \in N$ atunci, $(a, b)^{-1} = \left(\frac{1}{a_1}, \frac{-b}{a_1^2}\right) \in N$. e) Fie $g(a_1, b_1) = \frac{b_1}{a_1}$, $g(a_2, b_2) = \frac{b_2}{a_2}$ atunci, $g((a_1, b_1).(a_2, b_2)) = g(a_1a_2, a_1b_2 + a_2b_1) = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_1a_2} = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} = g((a_1, b_1)).g((a_2, b_2))$.

140. a) Mulţimea M este grup abelian în raport cu prima operaţie. Elementul neutru pentru prima operaţie este perechea (0, 0), iar pentru operaţia a doua este perechea (1, 0). b) Divizorii lui zero sînt perechi de forma $(0, b)$ unde $b \neq 0$ şi perechi de forma $(a, -a)$ unde $a \neq 0$. c) Dacă $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in N$ rezultă că $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, $a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$ şi deci, $a_1a_2 \neq 0$ şi $a_1a_2 + b_1b_2 + a_1b_2 + a_2b_1 = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \neq 0$ ceea ce exprimă faptul că $(a_1, b_1).(a_2, b_2) \in N$; $(1, 0) \in N$ şi dacă $(a, b) \in N$ atunci, acesta admite un simetric în N şi anume, $\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a(a+b)}\right)$ d) Demonstraţia este evidentă.

141. c) Dacă $a + b\sqrt{2}$ admite un invers, rezultă că $N(a + b\sqrt{2}) = \pm 1$ ceea ce conduce la $a = \pm 1$ și $b = 0$. d) Fie $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$; $f(z_1 + z_2) = f((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}) = a_1 + a_2-(b_1 + b_2)\sqrt{2}= (a_1 - b_1\sqrt{2})+(a_2 - b_2\sqrt{2}) = f(z_1) + f(z_2)$ și $f(z_1 . z_2) = f(a_1a_2 + ab_1b_2 + (a_1b_2\ b_1a_2)\sqrt{2}) = a_1a_2 + 2b_1b_2 - (a_2b_1 + a_1b_2)\sqrt{2} = (a_1 - b_1\sqrt{2})(a_2 - b_2\sqrt{2}) = f(z_1).f(z_2)$.

142. a) Se arată că dacă $e_1, e_2 \in E$ atunci $e_1 * e_2 \in E$. Elementul neutru pentru operația „ $*$ " este *zero*. Dacă pentru un element $e \in E$, există $e' \in E$ încît $e * e' = 0$, rezultă că $e + e' - ee' = 0$ care după înmulțire cu e conduce la $e = 0$.

143. a) $M(a_1, b_1, c_1, d_1) . M(a_2, b_2, c_2, d_2) = M(a', b', c', d')$ unde, $a' = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2$, $b' = a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1$, $c' = a_1c_2-b_1d_2+ +c_1a_2 + d_1b_2$, $d' = a_1d_2 + b_1c_2 + a_2d_1 + b_2c_1$. b) det $M(a, b, c, d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ și cum, det $(AB) =$ (det A). (det B) rezultă afirmația b).

144. Dacă notăm $A(x) = \begin{bmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{bmatrix}$ se arată că,

$A(x_1) + A(x_2) = A(x_1 + x_2)$; $A(x_1).A(x_2) = A(2x_1x_2)$. Dacă $A(x_1)\neq A(0)$ și $A(x_1).A(x_2)=A(0)$ atunci $A(x_2) = A(0)$ ceea ce exprimă că M nu are divizori ai lui zero. $A^n = A^{n-1}.A(x^n)$. Ecuația propusă se reduce la

$$x^n = \frac{1}{2^{n+1}}, \quad x = \frac{1}{2\sqrt[n]{2}}$$

145. Se arată mai întîi că $f_1 + f_2$ și $f_1 \circ f_2$ sînt elemente din End(G) adică, se verifica faptul că acestea sînt omomorfisme. Elementul neutru în raport cu prima operație este omomorfismul $\theta : G \to G$ definit prin $\theta(x) = 0$, pentru orice $x \in G$ (endomorfismul), iar pentru a doua operație $1_G : G \to G$ definită prin, $1_G(x) = x$, pentru orice $x \in G$.

146. a) Elementul neutru în raport cu prima operație este aplicația $\theta : S \to A$ definită prin $\theta(x) = 0$, pentru orice $x \to S$. Simetricul unui element $f \in$ Ens(S, A) în raport cu prima operație îl notăm cu $-f$ și se definește prin, $(-f)(x) = -f(x)$, $x \in S$. Dacă inelul A are unitate „1" atunci și Ens(S, A) are unitate și anume, este funcția $e : S \to A$ definită prin $e(x) = 1$, pentru orice $x \in S$. Fie $S_0 \subset S$. Definim $f_1 : S \to A$ prin,

$$f_1(x) = \begin{cases} a_1 \neq 0 & \text{dacă } x \in S_0 \\ 0 & \text{dacă } x \notin S_0 \end{cases}$$ și $f_2 : S \to A$ prin,

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in S_0 \\ a_2 \neq 0 & \text{dacă } x \notin S_0. \end{cases}$$ Se observă că $f_1, f_2 \neq \theta$ și $f_1 * f_2 = \theta$ ceea ce exprimă că $\text{Ens}(S, A)$ este un inel cu divizori ai lui zero. b) Dacă $f_1, f_2 \neq \text{Ens}(S, A)$ atunci, pentru un element oarecare $x \in S$ avem succesiv,

$[u_*(f_1 + f_2)](x) = [u \circ (f_1 + f_2)](x) = u(f_1(x) + f_2(x)) = u(f_1(x)) + u(f_2(x)) = (u \circ f_1)(x) + (u \circ f_2)(x) = [u_*(f_1)](x) + [u_*(f_2)](x) = [u_*(f_1) + u_*(f_2)](x)$ și fdeci, $u_*(f_1 + f_2) = u_*(f_1) + u_*(f_2)$. În mod cu totul analog, se arată că $u_*(f_1 * f_2) = [u_*(f_1)] * [u_*(f_2)]$.

147. a) Se arată că $M(a_1, b_1, c_1, d_1).M(a_2, b_2, c_2, d_2) = M(a_1a_2 + b_1c_2, a_1b_2 + b_1d_2, c_1a_2 + d_1c_2, c_1b_2 + d_1d_2)$.

b) Aplicația $f: M_{2 \times 2} \to M_{4 \times 4}$ care asociază matricei $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, matricea $M(a, b, c, d)$ este izomorfismul căutat.

148. Se arată prin metoda inducției complete că $u^n(x) = a^n x - C_n^1 a^{n-1}xa + \ldots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} xa^k + \ldots + (-1)^n xa^n$ pentru orice element $x \in A$. $u^3(x) = a^3x - 3a^2xa + 3axa^2 - xa^3$ și dacă $a^2 = 0$, rezultă $u^3(x) = 0$. Dacă $a^n = 0$, atunci $u^{2n-1}(x) = 0$, oricare ar fi $x \in A$.

149. c) Este suficient să arătăm că orice element $a \in A$, $a \neq 0$ are simetric în raport cu operația „.". Se consideră $aA \in M$. Deoarece $a \neq 0$, rezultă că $aA \neq 0$ și deci, în mod necesar, $aA = A$. Rezultă că există $a' \in A$ încît $aa' = 1$ ceea ce demonstrează afirmația. d) Fie $S \subseteq A$ și $S \neq \{0\}$. Există atunci, în S un element $a \neq 0$ și dacă a' este inversul acestuia atunci conform cu condiția 3° rezultă că $a'a = 1 \in S$. În sfîrșit, dacă x este un element oarecare din A avem $x = x.1 \in S$, ceea ce exprimă că $A \subseteq S$ și deci, în final rezultă că $S = A$.

150. a) Operația „ * " este evident comutativă și asociativă. Elementul neutru pentru această operație este numărul complex i, iar simetricul unui număr x este $x' = 2i - x$. Elementul neutru pentru a doua operație este $e = \dfrac{m_i - i}{m}$. Dacă $x \in K$ și $x \neq i$ aceasta admite un simetric în raport cu operația „∘" și anume, $x' = \dfrac{m^2i - m^2x - i}{m^2(ix + 1)}$ b) Dacă $m \neq -\dfrac{1}{2}$, (x, y) sînt soluții ale ecuației, $(2m + 1)z^2 - (m + 1)iz - m^2 - m = 0$. Dacă $m = -\dfrac{1}{2}$ sistemul nu este compatibil.

151. a). Dacă $M(a_1, b_1)$, $M(a_2, b_2)$ M, atunci
$M(a_1, b_1) + M(a_2, b_2) = M(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$,
$M(a_1, b_1) . M(a_2, b_2) = M(a_1a_2 + 2b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$ și deoarece,
$M(a_1, b_1) = M(a_2b_2)$ dacă și numai dacă $a_1 = a_2$ și $b_1 = b_2$
rezultă că $M(0, 0)$ este element neutru în raport cu adunarea, $M(1, 0)$ element neutru în raport cu înmulțirea. Simetricul unui element $M(a, b)$ în raport cu operația de adunare este $M(-a, -b)$, iar simetricul unui element $M(a, b)$ cu $a^2 + b^2 \neq 0$ este $M\left(\frac{a}{a^2 - 2b^2}, \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\right)$, $a^2 - 2b^2 \neq 0$ pentru orice pereche de numere raționale (a, b) cu $a^2 + b^2 \neq 0$ căci $\sqrt{2}$ este un număr irațional. b) Verificarea este calculatorie. c) Rezultă din cele arătate la a).

152. $M(a_1).M(a_2) = M(a_1a_2)$ și dacă $M(a) \neq M(0)$, $M^{-1}(a) = M\left(\frac{1}{a}\right)$.
Aplicația $f: R \to M$ definită prin, $f(a) = M(a)$ realizează izomorfismul în chestiune.

153. a) $M(a_1, b_1). M(a_2, b_2) = M(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$. Dacă $M(a, b) \neq M(0, 0)$ atunci $[M(a, b)]^{-1} = M\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$ $M(a_1, b_1) + M(a_2, b_2) = M(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.

b) Rezultă imediat din rezultatele indicate la punctul a).

c) $M(a_1, b_1) . M(a_2, b_2) = f(a_1 + ib_1).f(a_2 + ib_2) = f((a_1 + ib_1). (a_2 + ib_2)) = f((a_2 + ib_2).(a_1 + ib_1)) = M(a_2, b_2).M(a_1, b_1)$.

154. $M(a_1, b_1) + M(a_2, b_2) = M(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, $M(a_1, b_1).M(a_2, b_2) = M(a_1a_2 - 3b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$. Deoarece $a^2 + 3b^2$ nu se poate anula pentru nici o pereche (a, b) de numere raționale unde $a \neq 0$, rezultă că dacă $M(a, b) \neq M(0, 0)$ există $(M(a, b))^{-1}$ și $(M(a, b))^{-1} = M\left(\frac{a}{a^2 + 3b^2}, \frac{-b}{a^2 + 3b^2}\right)$.

155. a) $M(a_1, b_1) . M(a_2, b_2) = M(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$. Dacă $M(a, b) \neq M(0,0)$ atunci $M^{-1}(a, b) = M\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$, $P(c_1, d_1)$. $P(c_2, d_2) = P(c_1c_2 - 5d_1d_2, d_1c_2 + 3d_1d_2 + c_1d_2)$. Dacă $P(c, d) \neq P(0, 0)$ atunci $\det P(c, d) = 3cd + c^2 + 5d^2 \neq 0$ și $P^{-1}(c, d) = \frac{1}{3cd + c^1 + 5d^1} P(c+3d, -d)$.

b) Aplicația $g: M \to C$ definită prin $g(M(a, b)) = a + ib$ realizează izomotfismul între cele două corpuri.

c) $M(a, b) = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = aI + bJ$ și

$P(c, d) = c\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Dacă notăm $V = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ are loc egalitatea, $V^2 = 3V - 5I$. Este ușor de verificat că reprezentările de la punctul c) sînt unice. d) Pentru ca f să fie omomorfism de corpuri, trebuie să avem, în particular, $f(V^2) = f(V).f(V)$ ceea ce conduce la $p = 3/2$, $q = \frac{\sqrt{11}}{2}$ și dacă definim $f(P(c, d)) = \left(c + \frac{3}{2}d\right) I + \frac{\sqrt{11}}{2} dJ$ se obține un izomorfism de corpuri. $h(P(c, d)) = c + \frac{3}{2}d + \frac{i\sqrt{11}}{2}d$. Din egalitatea $f(V^2) = f(V).f(V)$ mai rezultă și $p = \frac{3}{2}$, $q = -\frac{\sqrt{11}}{2}$ și $f(P(c, d)) = \left(c + \frac{3}{2}d\right) I - \frac{\sqrt{11}}{2} dJ$ este de asemeni un izomorfism de corpuri, iar $h(P(c, d)) = \left(c + \frac{3}{2}d\right) - \frac{\sqrt{11}}{2} di$, ($i$ unitatea imaginară) Inversa primei aplicații f este definită prin $f^{-1}(M(a, b)) = P\left(a - \frac{3b}{\sqrt{11}}, \frac{2b}{\sqrt{11}}\right)$ și pentru a doua, inversa se definește prin, $f^{-1}(M(a, b)) = P\left(a + \frac{3b}{\sqrt{11}}, \frac{-2b}{\sqrt{11}}\right)$,

e) $g(A^n) = (g(A))^n = (\cos a - i \sin a)^n = (\cos(-a) + i \sin(-a))^n = \cos(-na) + i \sin(-na)$. Deci, $g(M^n(\cos a, -\sin a)) = g(M(\cos(-na), \sin(-na))$ și cum g este aplicație injectivă rezultă că,

$$\begin{bmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos na & \sin na \\ -\sin na & \cos na \end{bmatrix}.$$

156. a) Punînd condiția ca operația „ $*$ " să fie comutativă se găsește $a = b$ și apoi punînd condiția ca operația să fie și asociativă se găsește $a = b = 1$. Se arată apoi că elementul neutru pentru prima operație este 1 și dacă $x \in R$, atunci simetricul lui x (în raport cu prima lege) este $x' = 2 - x$. Impunînd ca legea a doua să fie asociativă se găsește $c = 3$. După aceste determinări se arată că R este un corp în raport cu cele două operații. b) Se știe că funcția $f: R \to R$ definită prin $f(x) = px + q$, unde $p \neq 0$ este o funcție bijectivă. Dezvoltînd egalitățile, $f(x * y) = f(x) + f(y)$ și $f(x \circ y) = f(x)f(y)$ care trebuie să fie adevărate oricare ar fi $x, y \in R$ se găsește $p = 2$, $q = 2$ deci $f(x) = 2x - 2$.

157. Fie $A(+, ., 0, e)$ un domeniu de integritate cu un număr finit de elemente. Dacă $a \in A$; $a \neq 0$ există un întreg natural p astfel încît $a^p = e$, ceea ce exprimă că $a^{-1} = a^{p-1}$.

158. a) Fie $(x, m) = 1$ şi $(y, m) = d \neq 1$, $y \in \bar{x}$. Deoarece $y \in \bar{x}$ rezultă că $m | x - y$ sau altfel scris, $x - y = mq$, $q \in Z$; cum $d | m$, $d | y$ rezultă că $d | x$ şi deci $(x, m) \neq 1$. Deci, dacă $(x, m) = 1$, atunci $(y, m) = 1$ pentru orice $y \in \bar{x}$. b) Dacă $\bar{x} \in Z/mZ$ şi $(x, m) = 1$, există doi întregi u, $v \in Z$ încît $ux + vm = 1$; din această egalitate rezultă că $\overline{ux} = \bar{1}$ sau $\bar{u}.\bar{x} = \bar{1}$ ceea ce exprimă că $(\bar{x})^{-1} = \bar{u}$. Reciproc, dacă $\bar{u}.\bar{x} = \bar{1}$ rezultă imediat că $(x, m) = 1$.

c) Avem, $(\bar{x})^{\varphi(m)} = \bar{1}$ şi deci $\overline{x^{\varphi(m)}} = \bar{1}$ sau, $m | x^{\varphi(m)} - 1$, adică $x^{\varphi(m)} \equiv 1$ (modulo m).

ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. a) 1. b) 3/4, c) 1/2, d) 1/3. Se folosește egalitatea

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+3}\right),\ k=\text{număr natural.}$$

3. b) Se va observa că $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, iar

$$\frac{6}{k(k+1)(2k+1)}=6\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)-24\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right).$$

5. a) Se poate folosi inducția. c) Şirul fiind monoton crescător, are limită. Deoarece există un subșir care tinde la $+\infty$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

6. b) Se arată folosind inegalitățile de punctul (a) că pentru $\alpha<2$, (a_n) este monoton crescător și nemărginit superior. Pentru $\alpha=2$, (a_n) este monoton și mărginit iar pentru $\alpha>2$, (a_n) este monoton descrescător și nemărginit inferior.

8. b) Dacă $b>1$, putem scrie $b=1+a$, $a>0$. Ţinînd seama de inegalitatea de la a) (Bernoulli), rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}b^n=+\infty$. Dacă $0<b<1$, putem scrie $b=\frac{1}{1+a}$, $a>0$, de unde $0<b^n\leqslant\frac{1}{1+na}$, ceea ce implică $\lim\limits_{n\to\infty}b^n=0$.

9. Se calculează suma $a^n+a^{n+1}+\ldots+a^{2n}$. Se trece apoi la limită în expresia obținută.

10. a) Dacă $c>1$, putem scrie $c=1+a$, $a>0$ și deci $c^n\geqslant1+$ $+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2$, oricare ar fi n natural. Se obține $\frac{c^n}{n}\geqslant\frac{1}{n}+a+\frac{(n-1)a^2}{2}$, de unde rezultă afirmaţia. Dacă $-1 \leqslant c \leqslant 1$, rezultă fără dificultate $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c^n}{n} = 0$. Dacă $c < -1$ nu există limită; subşirul termenilor de rang par tinde la $+\infty$, iar subşirul termenilor de rang impar tinde la $-\infty$. b) Se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c^n}{n^2} = +\infty$ dacă $c > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c^n}{n^2} = 0$ dacă $-1 \leqslant c \leqslant -1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c^n}{n^2}$ nu există dacă $c < -1$. c) Se obţine $\frac{|c^n|}{n!} < \frac{2^N |c^N|}{N!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pentru $n > N$, de unde rezultă imediat afirmaţia făcută.

11. a) $(1 - \varepsilon)^n$ este un număr subunitar, deci mai mic decît α. Apoi, avem $\alpha < 1 + n\varepsilon$ dacă n este destul de mare, adică $n > N(\varepsilon)$. Rezultă deci $\alpha < (1 + \varepsilon)^n$ pentru $n > N(\varepsilon)$ b) Dubla inegalitate de la punctul a) poate fi scrisă astfel: $1 - \varepsilon < \sqrt[n]{\alpha} < 1 + \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$. Aceasta înseamnă $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$. Dacă $0 < \alpha < 1$ putem scrie $\alpha = \frac{1}{\beta}$ cu $\beta > 1$ şi rezultă din nou $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$.

12. Pentru $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{k=1}^{n} a_k) = \frac{a}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2}$. Pentru $q \geqslant 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{k=1}^{n} a_k) = \infty \cdot \operatorname{sgn} r$. Pentru $q \leqslant -1$ nu există $\lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{k=1}^{n} a_k)$.

13. Convergent la $\frac{\beta}{\beta+1}$ pentru $|\beta| < 1$ şi divergent la $-\infty$ pentru $\beta \leqslant -1$.

14. Pentru $x_0 = 1$ se obţine şirul constant $x_n = 1$. Dacă $x_0 > 1$, se obţine $x_1 < x_3 < x_5 < \ldots < x_{2n-1} < \ldots < 1 < \ldots < x_{2n} < \ldots < x_4 < x_2 < x_0$. Notînd $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = l_1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = l_2$, se va arăta că $l_1 = l_2 = 1$, de unde rezultă că (x_n) este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

15. Se obţine $S_n(x) = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - 2 \operatorname{ctg} 2x$. c) $\lim\limits_{x\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{x} - 2 \operatorname{ctg} 2x$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$ unde $k =$ întreg.

16. Se obţine $S_n(x) = \frac{1}{2^n} \cos \frac{x}{2^n} - 2 \cos 2x$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = -2 \cos 2x$.

17. a) Se obține $S_n(x) = \frac{1}{4}\left(3^{n+1} \sin \frac{x}{3^n} - \sin 3x\right)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{3x - \sin 3x}{4}$. b) Se obține $T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{x}{3^n} - \cos 3x\right)$.

18. a) Notînd cu a_n termenul general al șirului, se vede că $0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$. b) Notînd cu b_n termenul general, se vede că $0 < b_n < \frac{1}{4n}$.

19. a) $7 < \sqrt[n]{6^n + 7^n} < 7\sqrt[n]{2}$. b) $9 < \sqrt[n]{8^n + 6^n + 9^n} < 9\sqrt[n]{3}$.

20. a) Notînd cu a_n termenul general se constată că $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} < a_n < \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$. b) Notînd cu b_n termenul general, se constată $\frac{n}{\sqrt[p]{n^p + n}} < b_n < \frac{n}{\sqrt[p]{n^p + 1}}$.

21. Termenul de rang n al șirului dat este cuprins între $\cos \frac{\pi}{n}$ și $\cos \frac{\pi}{2n}$.

22. a) Termenul general al șirului este cuprins între 0 și $n \sin^2 \frac{\pi}{n+1}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$.

24. Considerăm raportul $\frac{a_n}{a_{n+1}}$. Se poate arăta că acest raport este mai mare ca 1, folosind inegalitatea lui Bernoulli. Șirul (a_n) este descrescător. Din $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ rezultă imediat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$. b) Se folosește inegalitatea $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

25. Din relația de recurență între doi termeni consecutivi, se constată că șirul este crescător. Dacă presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ este finită, se obține o contradicție.

27. b) a, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$.

30. Se procedează ca la exercițiile precedente. Trecînd la limită în relația de recurență se obține că valoarea limitei este 0.

33. a) Se va folosi faptul că $\sqrt[n]{n} \leqslant \sqrt[3]{3}$, $\forall n \in N$. b). $+\infty$.

34. b) Aplicînd de mai multe ori relația (a) rezultă $a_{n+1} - a_n = k(n)(a_1 - a_0)$ unde $k(n) > 0$, de unde rezultă monotonia. Pentru mărginire se va scrie $a_{n+1} = \dfrac{3}{(\sqrt[3]{1+3a_n})^2 + \sqrt[3]{1+3a_n} + 1} \cdot a_n$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} a = 0$.

35. Se va observa că $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ pentru $n \geqslant 3$. c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

36. a) În privința semnelor termenilor b_n vom avea sau $b_1 > 0$ sau $b_1 < 0$ și în fiecare din aceste cazuri se arată că (a_{2n}) este monoton și mărginit iar $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$. Deoarece subșirurile (a_{2n}), (a_{2n+1}) epuizează șirul dat rezultă (a_n) convergent.

37. c) Se consideră $f(x) = x(2x^2 + x + 1)$. Se arată că intervalele $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ și $(0, +\infty)$ se bucură de proprietatea cerută în enunț și de una din proprietățile de la a) sau b).

38. a) Se obține $\alpha \leqslant \dfrac{S_n}{\sigma_n} \leqslant \beta$, echivalentă cu $\alpha\sigma_n \leqslant S_n \leqslant \beta\sigma_n$, de unde rezultă ușor afirmația. b) Fie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l > 0$. Avem $0 < l - \varepsilon \leqslant \dfrac{a_n}{b_n} \leqslant l + \varepsilon < +\infty$ pentru $n > N$. Modificînd primele N rapoarte (cea ce nu schimbă comportarea șirurilor (S_n) și (σ_n) se poate presupune că inegalitățile obținute au loc pentru orice număr natural. Sîntem deci în cazul a).

39. a) Se arată că $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{\sqrt{a+a_n} + \sqrt{a+a_{n-1}}}(a_n - a_{n-1}) = \dots = K(n) \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+\sqrt{a}} + \sqrt{a}}$ unde $K(n) > 0$. Din monotonie rezultă $a_n < a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$ sau $a_n^2 - a_n - a < 0$, $\forall n \in N$. Rezultă $a_n < \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$ b) Se trece la limită în relația de recurență.

40. Şirul (b_n) este evident monoton crescător. Dacă $a_n < M$, oricare ar fi n natural, $b_n < \sqrt{M + \sqrt{M + \sqrt{M + \ldots + \sqrt{M}}}}$. Se arată că expresia din dreapta este mărginită (este chiar termenul general al unui şir convergent). Şirul (b_n) fiind monoton şi mărginit este convergent.

41. a) Se poate folosi inducţia. b) Se arată că (a_n) este monoton. c) Şirul (a_n) fiind convergent, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n} - a_n) = 0$. Se găseşte pentru α valoarea (unică) $2(\sqrt{2} - 1)$.

42. a) Se vede că $(1 + x)e^{-x} \leqslant 1$, oricare ar fi x real. Şirul (p_n) este deci descrescător şi mărginit inferior de 0. b) Ne folosim de relaţiile $2^x = e^{x \ln 2}$, $\ln 2 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)$.

43. a) Ca la exerciţiul precedent. b) Se pune g_n sub forma:
$g_n = \left(1 + \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)\cdot e^{-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)x^2} e^{-\varepsilon_n x^2}$, unde $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$.
Se vede că $g_n = p_n e^{-\varepsilon_n x^2}$ de unde rezultă uşor afirmaţia.

44. Din inegalitatea $\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) > 1$ pentru $x > 0$, se obţine $x_n > 1$ pentru $n \geqslant 2$. Se vede că $x_3 < x_2$; apoi din $x_k < x_{k-1}$ se deduce cu uşurinţă $x_{k+1} < x_k$, adică şirul descreşte. Trecînd la limită în relaţia de recurenţă se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

45. a) Se ştie că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ pentru $0 < a \neq 1$. c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln a$.

46. c) Se foloseşte expresia (b) în care se trece la limită.

47. c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

48. a) Folosind identitatea $\sqrt{n^2 + 1} = n + \dfrac{1}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$ rezultă $\sin(\pi\sqrt{n^2 + 1}) = (-1)^n \sin\dfrac{\pi}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$ şi cum $0 < \dfrac{\pi}{n + \sqrt{n^2 + 1}} < \dfrac{\pi}{2}$ rezultă că $\sin(\pi\sqrt{n^2 + 1}) \neq 0$. d) $e^{\frac{2}{\pi}}$.

49. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e^x$; $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = y$.

50. Avem $1 - \varepsilon < \dfrac{\ln(1+x)}{x} < 1 + \varepsilon$, dacă $|x| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq 0$. Dăm lui x pe rînd valorile $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Vom obține n fracții cuprinse între $1 - \varepsilon$ și $1 + \varepsilon$, dacă $n > N(\varepsilon)$. Suma numărătorilor supra suma numitorilor va fi o fracție de asemenea cuprinsă între $1 - \varepsilon$ și $1 + \varepsilon$. Prin urmare:

$$1 - \varepsilon < \frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}\right)\cdots\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}} < 1 + \varepsilon$$

dacă $n > N(\varepsilon)$. Aceasta înseamnă că raportul de mai sus are limita 1 cînd $n \to \infty$. Ținînd seama că numitorul are limita 1, rezultă că și numărătorul are aceeași limită, de unde rezultă cu ușurință afirmația din enunț.

51. Se folosește metoda expusă pe larg la exercițiul precedent.

52. Vezi exercițiile precedente.

53. Ne bazăm pe faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n + a^{n+1} + \cdots + a^{2n}) = 0$ și folosim din nou relația $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

54. Vom da lui x pe rînd valorile $\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{2}{n^2}, \ldots \dfrac{n}{n^2}$ și vom proceda ca la ex. 50).

56. Aceeași metodă ca la ex. 50).

57. Se vor folosi relațiile $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = 1$.

58. a) Evident. b) Dacă $l > 0$ este finit, avem $l - \varepsilon < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$ pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$. Se obține $l - \varepsilon < \sqrt[n-N]{\dfrac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}}, \ldots, \dfrac{a_n}{a_{n-1}}} < l + \varepsilon$ pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$ adică $(l - \varepsilon)^{\frac{n-N}{n}} < \sqrt[n]{\dfrac{a_n}{a_N}} < (l + \varepsilon)^{\frac{n-N}{n}}$ pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$. Ținînd seama că termenii laterali ai ultimei inegalități tind la $l - \varepsilon$, respectiv $l + \varepsilon$, rezultă că avem $l - 2\varepsilon < \sqrt[n]{\dfrac{a_n}{a_N}} < l + 2\varepsilon$ pentru $n \geqslant N_1(\varepsilon)$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{a_N}} = l$. Dacă ne amintim că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$, $(\alpha > 0)$ rezultă $\lim\limits_{\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Demonstrație analoagă cînd $l = 0$ sau $l = +\infty$. c) Se consideră șirul $a_n = n$ și se aplică b). d) Se consideră șirul $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$. e) Se consideră șirul $a_1 = 1$, $a_n = \sin\dfrac{\pi}{n}$ pentru $n > 1$.

59. a) Notînd $x_n = \dfrac{c^n}{\sqrt{n!}}$, se observă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 0$. (Vezi ex. nr. 10).
b) Putem scrie $a_n = \dfrac{c^n}{n} \cdot \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ (Vezi ex. nr. 10 și nr. 58).

60. a) Se va scrie $S_n = S_N + b_{N+1} + \ldots + b_n$. b) Se va observa că $-\dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{S_N}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, dacă $n \geqslant N_1(\varepsilon)$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n} = 0$. d) Se aplică c), unde $a_n = \dfrac{1}{n}$.

61. a) Putem scrie $l - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$, de unde $(l - \varepsilon)\, b_n < a_n < (l + \varepsilon) b_n$, pentru $n > N(\varepsilon)$. Sumînd $(n - N)$ inegalități de acestea, se obține

$$l - \varepsilon < \frac{a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_n}{b_{N+1} + b_{N+2} + \ldots + b_n} < l + \varepsilon$$

pentru $n > N(\varepsilon)$. Fixăm numărul N; putem scrie $\dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n} = \dfrac{a_1 + \ldots + a_N}{b_1 + \ldots + b_n} + \dfrac{a_{N+1} + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n}$. Este evident că primul termen din dreapta rămîne cuprins între $-\varepsilon$ și $+\varepsilon$ dacă $n \geqslant N_1(\varepsilon)$. (Reamintim că numărul N este fix). Dacă celui de al doilea termen îi împărțim și numărătorul și numitorul cu $b_{N+1} + \ldots + b_n$, deducem că el este cuprins între $l - 2\varepsilon$ și $l + 2\varepsilon$ dacă $n \geqslant N_2(\varepsilon)$. În final, găsim $l - 3\varepsilon < \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} < l + 3\varepsilon$ dacă $n \geqslant \max\,(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$.

62. a) Cunoscuta inegalitate dintre mediile armonică, geometrică și aritmetică. b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l > 0$, rezultă că șirurile mediilor aritmetice și armonice tind de asemenea la l. Aplicînd teorema șirului intercalat, rezultă că șirul mediilor geometrice tinde la aceeași limită l.

63. b) Rezultă din aplicarea repetată a lui a). c) Se obține scriind $x_{n+p} - x_n = (x_{n+p} - x_{n+p-1}) + \dots + (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n)$ și aplicînd b). d) Se aplică criteriul lui Cauchy de convergență. Limita se obține folosind relația de recurență.

66. a) $x \in R - \{0\ ;\ 1\}$ b) nu are asimptote.

67. a) Se scrie $P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ și se ține seama de regula de derivare a unui produs.

68. a) Se consideră sistemul liniar algebric $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$, $c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) = 0$ cu c_1 și c_2 necunoscute. Sistemul avînd soluție nebanală, determinantul său este nul.

69. a) Se folosește limita fundamentală $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$.

70. Se aplică definiția derivatei: $y'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\arcsin x - \arcsin x_0}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(\arcsin x - \arcsin x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x\sqrt{1 - x^2} - x_0\sqrt{1 - x_0^2}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}}.$$

72. a) Se folosește limita fundamentală $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = 1$.

73. a) Funcția este continuă și admite derivate de ordinul I, II și III în $x = 1$, nu are însă derivată de ordinul IV în $x = 1$. b) Figura nr. 1

75. a) Asimptotele sînt $y = 0$ la $+\infty$ și $x = 0$ la $+\infty$. c) $x_n = \frac{2}{2n - 1}$, $n \in N$; $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$.

76. a) Figura nr. 2 b) 0 . c) Funcția $g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - x$ satisfăcînd $g(0) = 0$ și $g'(x) < 0$ pentru $x > 0$, rezultă $g(x) < g(0)$. d) $\ln(3 + 2\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2}$.

77. a) Fie x_1 și x_2 două rădăcini ale lui $f(x)$. Se observă că $g(x_1)$ și $g(x_2)$ sînt diferite de 0. Dacă $g(x)$ nu se anulează în (x_1, x_2), considerăm $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ care satisface condițiile teoremei lui Rolle. Anularea lui $h'(x)$

ne spune că $f'(x) g(x) - f(x) g'(x)$ trebuie să anuleze într-un punct din I, ceea ce este absurd. Deci $g(x)$ are cel puţin o rădăcină între x_1 şi x_2.

78. Se aplică teorema lui Rolle funcţiei $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pe $[a, b]$.

79. Se aplică teorema lui Rolle funcţiei $h(x) = \frac{f(x)}{g^n(x)}$ pe $[a, b]$.

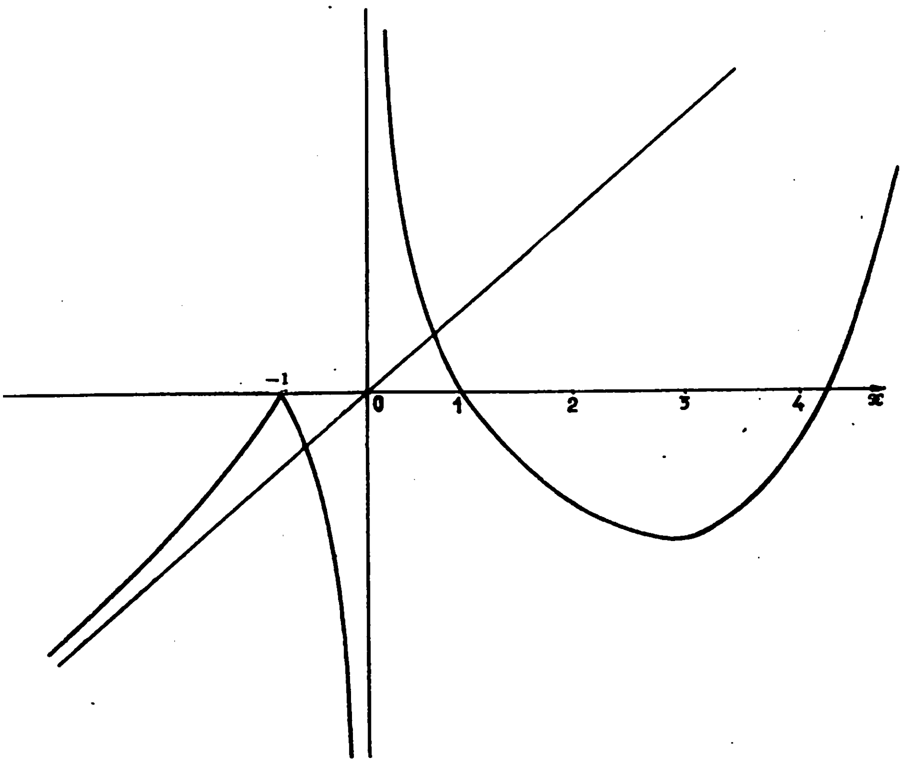


Fig. 1

81. a) Se aplică teorema lui Rolle funcţiei $f(x) = a_0x^n + \dots + a_n$ pe $[0, 1]$. b) Se aplică teorema lui Rolle lui $f(x)$ pe $[-1, 0]$.

82. Aplicaţie a teoremei lui Rolle.

85. $\theta = \frac{a}{a-b} + \frac{1}{(b-a)e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}$

86. Dacă $\sin x > 0$ atunci $a_n > 0$ și din $a_{n+1} = \sin a_n$ rezultă

$$|a^{n+1}| = |\sin a_n| \leqslant |a_n|, \quad \text{sau } a_{n+1} < a_n,\ \forall\, n \in N.$$

Dacă $\sin x < 0$ atunci $a_n < 0$ și deci $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in N$. În toate cazurile însă $-1 \leqslant a_n \leqslant 1$. Trecînd la limită în $a_{n+1} = \sin a_n$ și notînd cu $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ rezultă $a = \sin a$ și cum limita unui șir convergent este unică rezultă $a = 0$.

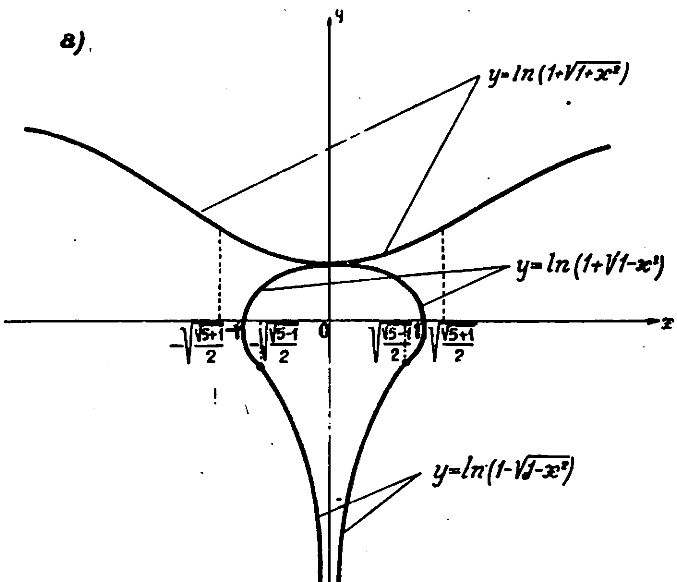


Fig. 2

87. a) Împărțind ambii membri ai inegalității cu $|x - y|$ și făcînd $y \to x$, găsim $f'(x) \equiv 0$. b) Găsim $f'(x) \equiv A$.

88. c) Condiția din enunț implică $(f(x)e^{\lambda x})' \equiv 0$, de unde rezultă $f(x) = ce^{-\lambda x}$, c = constantă.

89. Condiția dată se poate scrie ca $(\sqrt{2af - f^2})' = 1$, de unde deducem $\sqrt{2af - f^2} = x + c$ sau $f^2 - 2af + (x + c)^2 = 0$. Se găsește $f = a \pm$ $\pm \sqrt{a^2 - (x + c)^2}$, unde constanta c este astfel, încît cantitatea de sub radical să fie $\geqslant 0$ pe intervalul I.

91. a) Se observă că $(x^2y(x))'' = 0$ b) Se scrie condiția dată în forma $\frac{y''(x)}{y'(x)} + \frac{1}{x} = 0$, de unde rezultă $\ln|xy'(x)| = \ln|c_1|$, adică $xy'(x) = \pm c_1$

sau $y = c_1 \ln |x| + c_2$. (Semnul $\pm$ din fața lui c_1 nu e nevoie să figureze, deoarece c_1 este o constantă oarecare).

92. Se scrie condiția dată în forma $\frac{y''(x)}{y'(x)} - \frac{1}{x} = 0$.

93. Domeniul de definiție este $(-\infty, +\infty)$ oricare ar fi parametrul real m; $f'(x) = \frac{me^{2x} + 2(1+m)e^x + (1+m)}{e^x \cdot (1+e^x)^2}$. Notînd $e^x = y$, problema se reduce la studierea semnului trinomului $my^2 + 2(1+m)y + (1+m)$ pentru $y > 0$. Pentru $m \leqslant -1$, $f(x)$ este descrescătoare; pentru $-1 < m < 0$, $f(x)$ nu este monotonă; pentru $m \geqslant 0$ $f(x)$ este crescătoare.

94. a) Dacă am avea $f'(x) \leqslant 0$ pe (a, b), ar rezulta $f(a) \geqslant f(b)$ ceea ce nu se poate. b) Raționament asemănător ca la a).

96. a) Se vede că $|f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant L(x_i - x_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots n$. b) Suma corespunzătoare partiției $0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n-1}} < \cdots < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ este $\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2} + 1\right) \to +\infty$ cînd $n \to \infty$. Explicația constă în faptul că derivata funcției date nu este mărginită pe $[0, \pi]$.

97. Răspuns negativ. Deci reciproca teoremei lui l'Hospital nu este adevărată.

99. Se scrie $f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a+\theta_1 h)$ cu $0 < \theta_1 < h$, se egalează cele două expresii ale lui $f(a+h)$ și se aplică formula lui Lagrange lui $f'(x)$. Se obține $\theta = \frac{1}{2} \frac{f''(a+\theta_1 h)}{f''(a+\theta\theta_2 h)}$, $0 < \theta_2 < 1$.

100. Dacă $f(x)$ este de n ori derivabilă pe intervalul I și $a, b \in I$, există un $c \in (a, b)$ încît $f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$. Această formulă a fost dată de Taylor.

101. a) Se va folosi formula $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

102. Se scrie $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ și se găsește $f^{(n)}(x) = (-1)^n\, !\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$.

103. a) Prin inducție. b) Se găsește $(e^x \cos x)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$ și $(e^x \sin x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$. Vom proceda astfel : notăm $(e^x \cos x)^{(n)}$ cu S_1, $(e^x \sin x)^{(n)}$ cu S_2 și calculăm $S_1 + iS_2$.

104. Aplicînd formula lui Leibniz, găsim $(1+x^2)y^{(n+1)}(x) + 2nxy^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$.

108. a) Scriem $f(x) \leqslant y(x)$, unde $y = y(x)$ este ecuația secantei ce trece prin punctele

$$(x_1,\ f(x_1)),\ (x_2,\ f(x_2)),\ \text{adică}\ y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Dînd lui x valoarea $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ găsim tocmai condiția cerută. b) Raționament analog ca la a).

109. a) Dacă $f(x)$ e convexă pe I, graficul său pe I nu poate coborî sub tangenta într-un punct de pe acest interval, căci aceasta ar însemna că pe un anume subinterval din I graficul funcției este deasupra graficului secantei. Reciproc, condiția de la a) implică că pe orice subinterval din I, graficul funcției este sub graficul secantei, adică funcția e convexă pe I. b) Raționament asemănător ca la a).

110. a) Presupunem că există $c \in (a, b)$ cu $\varphi(c) > 0$; Fie c chiar punctul de maxim, deci $\varphi'(c) = 0$. Între c și b există măcar un punct d în care $\varphi'(d) < 0$, căci altfel ar rezulta $\varphi(c) \leqslant \varphi(b) = 0$, ceea ce nu se poate. Dar $\varphi'(c) > \varphi'(d)$ implică că $\varphi'(x)$ nu este crescătoare, ceea ce este absurd. Contradicția obținută arată că $\varphi(x) \leqslant 0$ pe $[a, b]$. b). Raționament asemănător ca la a).

111. a) Luăm $x_1 < x_2$ în $[a, b]$. Dacă $x \in (x_1, x_2)$, putem scrie $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, $0 < \lambda < 1$. Considerăm raportul

$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) - f(x_1)}{\lambda(x_2 - x_1)} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Făcînd $x \to x_1$ găsim $f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Analog găsim $f'(x_2) \geqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, deci $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$, adică $f'(x)$ este crescătoare. b) Fie $x_1 < x_2$ în $[a, b]$; vrem să arătăm că

$$\varphi(\lambda) = f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - (1-\lambda)f(x_1) - \lambda\, f(x_2) \leqslant 0, \qquad [0, 1].$$

Observăm că $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ și $\varphi'(\lambda)$ este crescătoare, deci putem aplica rezultatul de la **109**), punctul a). Condiția de convexitate este deci satisfăcută. c) $f''(x) \geqslant 0$ implică $f'(x)$ crescătoare, deci $f(x)$ convexă.

112. a) Dacă $f(x)$ este concavă, $-f(x)$ este convexă, $-f'(x)$ este crescătoare, deci $f'(x)$ este descrescătoare. b) Rezultă $-f(x)$ convexă, deci $f(x)$ concavă. c) $f''(x) \leqslant 0$ implică $f'(x)$ descrescătoare, deci $f(x)$ concavă. d) $f(x) = \ln x$ este concavă, deci

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

de unde rezultă inegalitatea cerută.

113. Dacă presupunem că există două rădăcini, ajungem la concluzia că există un subinterval în $[a, b]$ pe care graficul funcției este deasupra secantei, ceea ce nu se poate.

115. a) Se reduce la $\frac{1}{2}\int x \sin 2x \, dx$. b) Se face substituția $x = t^2$. c) Se pune $e^x - 1 = t$. d) Se face substituția $x = \frac{1}{t}$ și se ajunge la o integrală cunoscută.

116. a) Integrînd prin părți se ajunge la $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ care este imediată. b) și c) Se raționalizează numitorul.

117. Se integrează prin părți; $I = \frac{1}{2} te^t(\cos t + \sin t) - \frac{1}{2} e^t \sin t + C$, $J = \frac{1}{2} te^t (\sin t - \cos t) + \frac{1}{2} e^t \cos t + C$.

118. Dacă $n \neq -1$, se găsește $I_n = \frac{t^{n+1}}{n+1} \cos (\ln t) + \frac{J_n}{n+1}$ și $J_n = + \frac{t^{n+1}}{n+1} \sin (\ln t) - \frac{I_n}{n+1}$, apoi se rezolvă acest sistem. Dacă $n = -1$, $I_{-1} = = \int \frac{\cos (\ln t)\, dt}{t} = \sin (\ln t) + C$, etc.

121. a) Dacă $m \leqslant f(x) \leqslant M$, rezultă $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$, deci $m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_b^a g(x)dx$. Dacă $\int_a^b g(x)dx = 0$, rezultă că și

$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ și afirmația din enunț devine banală). (Are loc pentru orice $c \in [a, b]$). Dacă $\int_a^b g(x)dx > 0$, împărțim ultima inegalitate la acest număr pozitiv și găsim că raportul dintre $\int_a^b f(x)g(x)dx$ și $\int_a^b g(x)dx$ este cuprins între m și M. Deoarece o funcție continuă are proprietatea lui Darboux, există măcar un $c \in [a, b]$ încît $f(c)$ să fie egal cu raportul amintit. b) Se ia $f(x) = \frac{1}{1+x}$ și $g(x) = x^n$.

122. Notînd $G(x) = \int_a^x g(t)dt$, putem scrie $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dG(x) = = f(x)G(x) \Big|_a^b - \int_a^b G(x)f'(x)dx = f(b)G(b) - G(c)\int_a^b f'(x)dx = f(b)G(b) - G(c)(f(b) - f(a)) = f(a)G(c) + f(b)(G(b) - G(c)) = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx$. În demonstrație am aplicat prima teoremă a mediei pentru $\int_a^b G(x)f'(x)dx$.

124. Se intregrează inegalitatea din enunț pe $[0, 1]$.

125. c) $\frac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{n+1}}$.

126. a) Se găsește $f_n(x) = \frac{x^{\alpha+n}}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots(\alpha+n)}$ și $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
c) $\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{x} = f(0)$, $\lim_{x\to 0} \frac{f_n(x)}{x} = 0$ pentru $n = 2, 3, \ldots$

127. Rezultă imediat din formula lui Moivre. b) Se poate proceda astfel: $\frac{\sin 2nx}{\sin x} = \frac{(\cos x + i\sin x)^{2n} - (\cos x - i\sin x)^{2n}}{(\cos x + i\sin x) - (\cos x - i\sin x)} = \frac{a^{2n} - b^{2n}}{a - b}$ etc.
d) Se va calcula întîi raportul $\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}$ ca la punctul b).

128. b) Dacă se ia $y = x^{p-1}$, se obține $x = y^{q-1}$ și se aplică a). d) Inegalitatea lui Schwarz-Cauchy. e) Valoarea minimă este $\dfrac{b^p}{(a_1^q + \dots + a_n^q)^{p/q}}$.

129. a) Se integrează prin părți $\int\limits_1^e te^t \ln t\, dt$. b) Se integrează prin părți $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \cos \ln x\, dx$.

130. $\int\limits_a^b f(x)f''(x)dx = f(x)f'(x) \Big|_a^b - \int\limits_a^b f'^2(x)dx = -\int\limits_a^b f'^2(x)dx \leqslant 0$. Integrala este 0 numai dacă $f'(x) \equiv 0$, adică $f(x) \equiv 0$.

133. a) Integrînd prin părți se găsește $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} \cdot I_{n-1}$ pentru $n \geqslant 2$. b) $\dfrac{4^n.(n!)^2}{(2n+1)!}$ c) Se dezvoltă $(1-x^2)^n$ și se integrează termen cu termen

134. $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$; $\int\limits_c^d f(g(y))g'(y)dy = F(g(y)) \Big|_c^d =$
$= F(g(d)) - F(g(a)) = F(b) - F(a)$.

135. Se arată mai întîi că $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)dx$, scriind $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx =$
$= \int\limits_a^0 f(x)dx + \int\limits_0^T f(x)dx + \int\limits_T^{T+a} f(x)dx$ iar în $\int\limits_T^{T+a} f(x)dx$ se face substituția $x = t + T$, apoi se va arăta că $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{a+T}^{a+2T} f(x)dx = \dots\dots$

136. În integrala $\int\limits_a^b xf(x)dx$ se face substituția $a + b - x = t$ și apoi se folosește paritatea funcției $f(x)$ pe $[a, b]$.

137. Se scrie $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} xf(\sin x)dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} xf(\sin x)\, dx$, apoi se face în ultima integrală din dreapta substituţia $x = \pi - y$. Găsim că $\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1 + \sin^2 x} = \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{1 + \sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln(3 + 2\sqrt{2})$.

138. a) Ca la exerciţiul precedent. b) Se scrie $\int\limits_0^{2\pi} xf(\sin x)dx = \int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} xf(\sin x)dx$ şi se face în ultima integrală substituţia $x = 2\pi - y$.

139. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{x \cos x dx}{5 + 2\cos^2 x} = 2\pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos x dx}{5 + 2\cos^2 x} = 0$. Valoarea ultimei integrale se deduce fie prin calcul, fie observînd că funcţia de sub integrală este pară în raport cu punctul $\pi/2$.

140. Se scrie $\int\limits_0^{2\pi} x^2 f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\pi} x^2 f(\sin x)dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} x^2 f(\sin x)dx$; în ultima integrală se face substituţia $x = 2\pi - y$ şi se ajunge la concluzia că $\int\limits_0^{2\pi} x^2 f(\sin x)dx = 4\pi \int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\, dx - 4\pi^2 \int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx$. Dacă în prima integrală din dreapta se face substituţia $x = \pi - y$, se obţine că $\int\limits_0^{2\pi} x^2 f(\sin x)dx = -4\pi \int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx$. Se ţine seama apoi de ex. 137.

141. Se scrie integrala dată ca sumă de integrale I_i, $i = 1, 2, 3, 4$ pe intervalele $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, şi $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Apoi se grupează I_1 cu I_3 şi I_2 cu I_4.

142. b) Se ia $f(x) = \frac{1}{1+x}$ $a = 0$, $b = 1$. c) Se ia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $a = 0$, $b = 1$.

143. Se observă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{\pi}{n+1} + \cdots + \sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}} = \pi$. (A se vedea în acest scop ex—54). b) Se va arăta mai întîi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) = \ln 3$.

144. b) A se vedea metoda de rezolvare a ex. nr. 50). Limita cerută are valoarea $e^{2/3}$

147. a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2})$. b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{2}$. c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[p]{1+x^p}}$.

148. b) Se scrie $\dot{\varphi}(x) = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{4} - \varphi(x)\right)$. c) Se obține $\cos 2\dot{\varphi}(x) = \cos 2\varphi(x)$ de unde $\dot{\varphi}(x) = k\pi \pm \varphi(x)$.

149. $u(x) = (\text{arc tg}\, x)^2 + C$.

150. a) $f(x) = ce^{-\text{arctg}\frac{1}{x}}$. b) Se derivează ecuația dată. Se obține $f(x) = \frac{1}{x}$.

151. b) După derivare, se va ține seama de relația de la care s-a plecat. c) $f(x) = c_1 x^{c_2}$ unde c_1 și c_2 sînt constante arbitrare.

154. a) Ca și la cele două exerciții precedente, se face verificarea prin calcul direct. Se va ține seama că $a(\alpha + i\beta)^2 + b(\alpha + i\beta) + c = 0$, deci $a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c = 0$ și $2a\alpha\beta + b\beta = 0$.

155. a) $y'(x) = 2x + \displaystyle\int_0^x y(t)dt$. Mai putem deriva odată și găsim $y''(x) + = 2 + y(x)$ b) Rezolvăm întîi ecuația $y''(x) - y(x) = 2$, găsind $y = c_1e^x +$

$+ c_2e^x - 2$. Introducînd în prima ecuaţie din enunţ, se obţine $c_1 = c_2 = 1$. Singura funcţie ce o verifică este deci $y = e^x + e^x - 2 = 2(\text{ch } x - 1)$.

156. Se calculează derivata $W(x)$, găsindu-se $W'(x) = - a(x)W(x)$. Funcţia $W(x)$ se numeşte wronskianul soluţiilor $y_1(x)$ şi $y_2(x)$ ale ecuaţiei date.

157. Punînd $x = a\cos\varphi(t)$, $y = a\sin\varphi(t)$, ultima ecuaţie este satisfăcută. Derivînd şi înlocuind în prima ecuaţie, găsim $\varphi = t + c$, unde c = constantă. Deci $x = a\cos(t + c)$, $y = a\sin(t + c)$.

158. Punem $x = a\cos\varphi(t)$, $y = b\sin\varphi(t)$.

159. Punînd $x = a\cos\varphi(t)$ şi $y = a\sin\varphi(t)$ prima ecuaţie este verificată. Derivînd a doua ecuaţie, găsim $x\ddot{y} - \ddot{x}y = 0$ care, împreună cu $x\dot{y} - \dot{x}y = b^2$ ne conduce la concluzia $x = \frac{b^2}{a}\sin\varphi$. Derivînd această ultimă egalitate, găsim $\varphi = \frac{a^2}{b^2}t + c_1$, deci $x = \frac{b^2}{a}\sin\left(\frac{a^2}{b^2}t + c_1\right) + c_2$, $y = -\frac{b^2}{a}\cos\left(\frac{a^2}{b^2}t + c_1\right) + c_3$. Prin derivarea unor ecuaţii, s-au introdus şi soluţii străine. Folosind sistemul dat, găsim $c_2 = c_3 = 0$.

160. Punînd $\dot{x} = a\cos\varphi(t)$, $\dot{y} = a\sin\varphi(t)$, găsim $\varphi = t + c_1$ de unde $x = a\sin(t + c_1) + c_2$ şi $y = - a\cos(t + c_1) + c_3$. Aici c_1, c_2 şi c_3 sînt constante arbitrare.

161. Punînd $x = a\cos^3\varphi(t)$, $y = a\sin^3\varphi(t)$ ultima ecuaţie este satisfăcută. Din prima ecuaţie se deduce apoi $\varphi = t + c$.

162. Punînd $x = a\cos^{2/3}\varphi(t)$, $y = a\sin^{2/3}\varphi(t)$ se găseşte $\varphi = c \pm t^2$.

163. b) Prima ecuaţie ne conduce la $x = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi(t)}.\cos\varphi(t)$, $y = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi(t)}.\sin\varphi(t)$. Derivînd şi înlocuind în a doua găsim $\varphi = c \pm t$. Diversele posibilităţi de alegere a semnului + sau − ne arată că există 8 soluţii ale sistemului dat.

165. Se calculează derivata funcţiei $W(x)$ găsindu-se $W'(x) = (a_{11}(x) + a_{22}(x))\, W(x)$.

166. Se calculează $f'(x)$ şi se ţine seama de sistem.

169. Din $z(t) = y(t^2)$ deducem $z'(t) = y'(t^2)2t$. Derivînd egalitatea găsită, deducem

$z''(t)=y''(t^2)4t^2+2y'(t^2)$. Găsim $y'(t^2)=\frac{1}{2t}z'(t)$, $y''(t^2)=\frac{1}{4t^2}\left(z''(t)-\frac{1}{t}z'(t)\right)$. Ţinînd seama de ecuaţia din enunţ, în care facem $x=t^2$, rezultă : $z''(t)+z(t)=0$. Prin urmare, $z(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$, adică $y(t^2)=c_1\cos t+c_2\sin t$, de unde $y(x)=c_1\cos\sqrt{x}+c_2\sin\sqrt{x}$, $x>0$.

170. a) $z'(t)=y'(e^t)e^t$, $z''(t)=y''(e^t)e^{2t}+y'(e^t)e^t$, deci $y'(e^t)=z'(t)e^{-t}$, $y''(e^t)=(z''(t)-z'(t))e^{-2t}$. Ţinînd seama de ecuaţie în care facem $x=e^t$ găsim $a_0z''(t)+(a_1-a_0)z'(t)+a_2z(t)=0$. b) $y=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)$, unde c_1 şi c_2 sînt constante arbitrare.

171. Punînd $z(t)=y(\sqrt{t})$, se găseşte $z''(t)-z(t)\equiv 0$, de unde $z=c_1e^t+c_2e^{-t}$ şi $y(x)=c_1e^{x^2}+c_2e^{-x^2}$.

172. $(t-t^3)z''(t)+(1-3t^2)z'(t)-tz(t)=0$, adică ecuaţia a rămas invariantă.

173. $z''(t)+4\omega^2z(t)=0$. b) $z=c_1\cos 2\omega t+c_2\sin 2\omega t$ şi $y(x)=c_1\cos(\omega\operatorname{arc tg} e^{2x})+c_2\sin(\omega\operatorname{arc tg} e^{2x})$.

175. Dacă se ia v funcţie de u, rezultă $v'(u)=\frac{dv}{du}=\frac{\alpha+\beta y'(x)}{a+by'(x)}$. Calculînd $uv'(u)-v$ găsim $\frac{(a\beta-b\alpha)(xy'(x)-y)}{a+by'(x)}$ de unde rezultă că $xy'(x)-y(x)=0$ este echivalent cu $uv'(u)-v(u)=0$.

176. a) Dacă $f'(x_0)>0$, rezultă $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$ de îndată ce $0<|x-x_0|<h$, h fiind un număr suficient de mic. b) Ca la punctul a).

177. a) Din $f'(a)<0$, rezultă $f(a)>f(x)$, dacă $a<x<a+h$ unde h este suficient de mic. (*A* se vedea ex. precedent). Din $f'(b)>0$ rezultă $f(x)<f(b)$ dacă $b-h<x<b$. Deci în punctele a şi b, $f(x)$ nu ia valoarea minimă. Această valoare este luată în mod obligator într-un punct $c\in(a,b)$. b) $f'(c)=0$ (Fermat). d) Dacă $f'(x)\neq 0$ avem fie $f'(x)>0$ în (a,b), fie $f'(x)<0$ în (a,b), deci $f(x)$ este strict monotonă.

178. a) Din $f''(x)\geqslant 0$ pe $[a,b]$ rezultă $f'(x)$ crescătoare pe $[a,b]$. Deoarece $f'(x_a)$ şi $f'(b)$ au acelaşi semn rezultă fie $f'(x)>0$ pe $[a,b]$, fie $f'(x)<0$ pe $[a,b]$. b) Din $f''(x)>0$ pe $[a,b]$ rezultă $f'(x)$ strict crescătoare pe $[a,b]$. Deoarece $f'(a)$ şi $f'(b)$ sînt de semne contrare, există un singur c în (a,b) cu $f'(c)=0$. Pe $[a,c]$ $f(x)$ este strict descrescătoare, iar pe $[c,b]$ este strict crescătoare.

179. Se demonstrează la fel cu teorema lui Rolle, fără însă a folosi teorema lui Fermat ; în punctul de extrem se calculează direct derivatele laterale.

180. a) Se folosește binomul lui Newton și formula lui Moivre în dezvoltarea $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ unde $\alpha = \arccos x$. b) $\cos\frac{2\pi}{n}$, $\cos\frac{4\pi}{n}$, $\cdots$, $\left\{\cos\frac{2k\pi}{n};\quad 0 < 2k \leqslant n - 1\right\}$.

181. a) $e^{\lambda x}$. b) Se folosește metoda expusă în manualul de analiză.

182. a) $-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$, deci y este definit pentru orice x real.

b) A se vedea ex. nr. 69. c) $y'x) = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|}$ pentru $x \neq \pm 1$

Rezultă $y'(x) = \frac{2}{1+x^2}$ pentru $|x| < 1$ și $y'(x) = \frac{-2}{1+x^2}$ pentru $|x| > 1$

d) Graficul funcției :

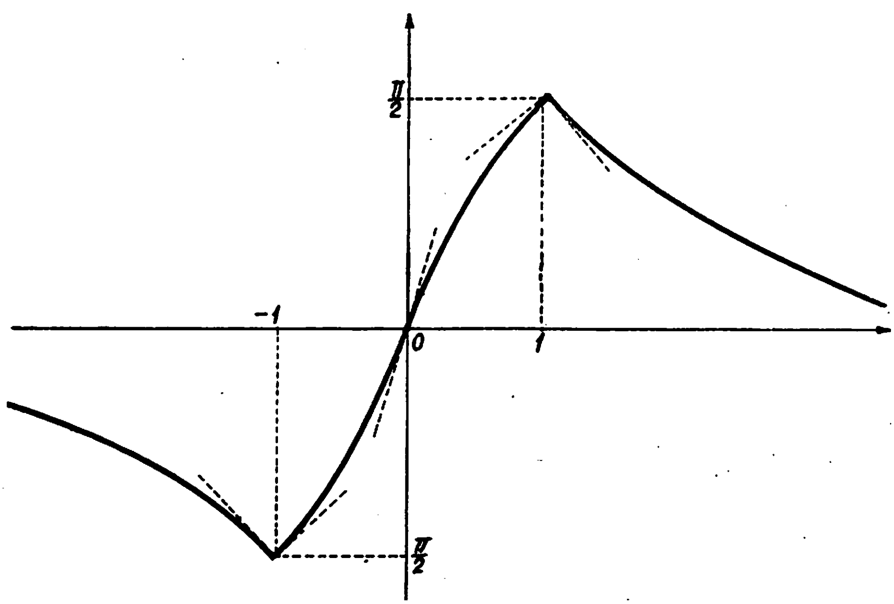


Fig. 3

183. d) Graficul :

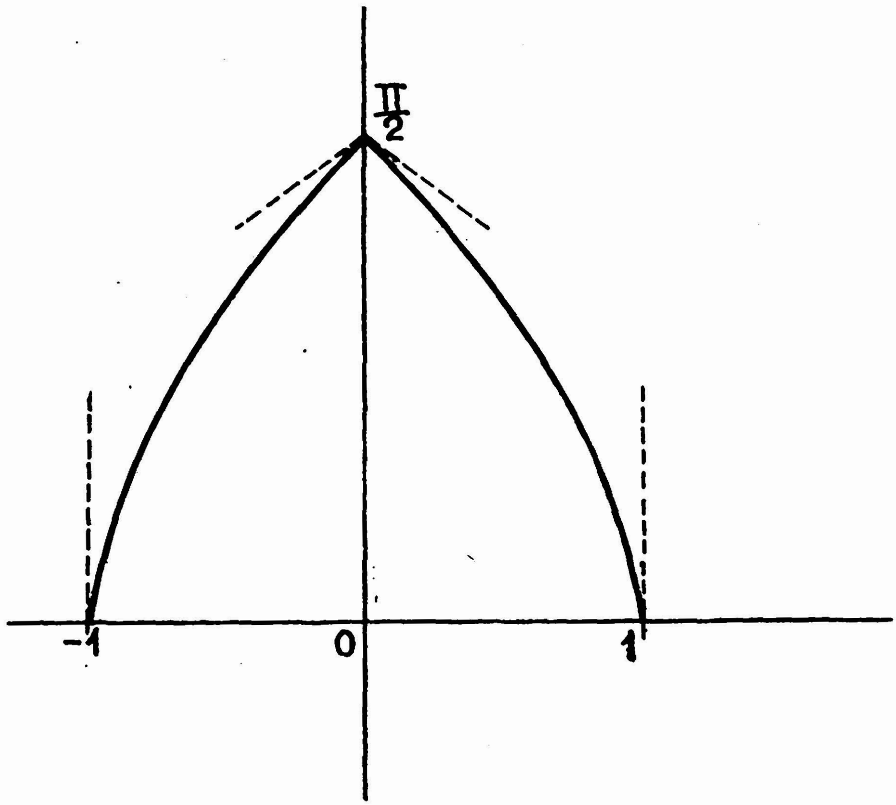


Fig. 4

185. Dacă notăm cu x_1 rădăcina unică a derivatei $f'(x)$ atunci se poate spune că pentru $m < \frac{x_1 - 1}{x_1^2} e^{x_1}$ ecuaţia are 2 rădăcini, una în $(0, x_1)$ iar a doua în $(x_1, +\infty)$. Pentru $m = \frac{x_1 - 1}{x_1^2} e^{x_1}$ ecuaţia are două rădăcini egale cu x_1. Pentru $m > \frac{x_1 - 1}{x_1^2} e^{x_1}$, ecuaţia nu are rădăcini.

186. a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } \alpha < 1. \\ 1 \text{ pentru } \alpha = 1. \\ +\infty \text{ pentru } \alpha > 1. \end{cases}$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } & \alpha < 0 \\ 1 \text{ pentru } & \alpha = 0 \\ +\infty \text{ pentru } & 0 < \alpha < 1, \\ 0 \text{ pentru } & \alpha = 1 \\ \infty \text{ pentru } & \alpha > 1. \end{cases}$ rezultă direct din (a).

187. a) Graficul prezintă simetrie față de mediatoarea segmentului $[a, b]$ în cazul funcției pare și simetrice față de mijlocul segmentului $[a, b]$, pentru funcția impară. b) Produsul este o funcție pară dacă cele două funcții sînt de aceeași paritate și impară dacă sînt de parități diferite.

188. a) Dacă $x_n \to x_0$, rezultă $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{L}$ pentru $m, n \geqslant N(\varepsilon)$. Prin urmare $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ pentru $m, n \geqslant N(\varepsilon)$ adică șirul $(f(x_n))$ este convergent. b) Se aplică a). c) Nu.

189. (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n}} = f'_+(0)$. (iv) $S_n(x) =$ $= \dfrac{1-(n+1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)^2}$. (v)2.

190. a) $f'(x)$ este crescătoare și din $f'(0) = 0$, rezultă $f'(x) > 0$ pentru $x > 0$; deci $f(x)$ este crescătoare și din $f(0) = 0$ rezultă $f(x) > 0$ pentru $x > 0$. c) Rezultă din $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1 + \frac{1}{1!} \cdots + \frac{1}{n!} < e$, oricare ar n natural. d). $b_n = a_{2n} - a_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

191. a) Se arată că pentru $x > 0$, $f(x) < 0$ iar $g(x) > 0$. b). Se ia $f(x) = \text{arc tg} x - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}$ și $g(x) = \text{arc tg}\, x - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}$.

d) Da. Se observă că $0 < \text{arc tg}\, x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^{4n-1}}{4n-1}\right) < \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

e) Se face $x = 1$ și se înmulțește cu 4 inegalitatea dată. Se urmărește ca primele două zecimale din stînga să coincidă cu primele două zecimale din dreapta.

192. a) Se scrie $f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = (f(x_0 + h) - f(x_0)) + (f(x_0) - - f(x_0 - h))$. b) Nu. c) Nu. d). Nu.

193. Se dezvoltă $(at + b)^n$ după binomul lui Newton, se derivează termen cu termen și se face $t = 1$. Pentru aflarea lui S_2 se înmulțește cu t identitatea obținută prin derivare, se mai derivează odată și se face iar $t = 1$.

194. Fie $x_0 \in (a, b)$ și $x_n \to x_0$, $x_n < x_0$. Se vede imediat că avem $0 \leqslant \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leqslant \frac{f(\alpha) - f(x_0)}{\alpha - x_0} = A$, unde $\alpha \in (a, b)$ este un număr fixat, $\alpha > x_0$. Din relația $|f(x_n) - f(x_0)|, \leqslant A\,|x_n - x_0|$, rezultă continuitatea la stînga a lui $f(x)$ în punctul $x = x_0$. Fie acum $x_n \to x_0$, $x_n > x_0$. Se observă că

$$0 \leqslant \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leqslant \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} = B,$$

unde $\beta < \gamma$ sînt două numere din (a, b) pentru care avem $x_n < \beta$, oricare ar fi n natural. În concluzie, $f(x)$ este continuă în punctul x_0 și la stînga și la dreapta, deci este continuă în x_0.

195.

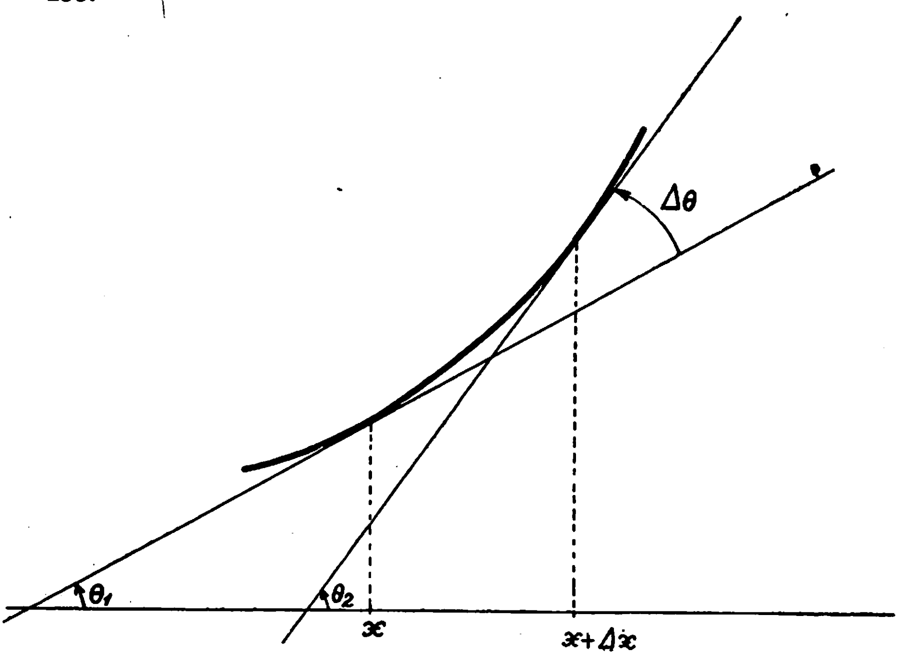


Fig. 5

a) $$\operatorname{tg}(\Delta\theta) = \operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1}{1 + \operatorname{tg}\theta_2 \operatorname{tg}\theta_1} = \frac{y'(x + \Delta x) - y'(x)}{1 + y'(x + \Delta x)y'(x)}$$

b) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\operatorname{tg}(\Delta\theta)}{\Delta s}\right|$. Folosim punctul precedent și observația că $\Delta s = |\Delta x|\,(1 + y'^2(\bar{x}))^{1/2}$,unde $\bar{x}$ este cuprins între x și $x + \Delta x$.
c) $K = 0$ este echivalent cu $y''(x) = 0$, adică $y = mx + n$.

196. Se folosește relația $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ și se procedează ca la ex. nr. 50. b) Se folosește relația $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

197. $f(t) = |\cos t|\,\sqrt{1+\cos^2 t}$.

198. Aplicînd teorema mediei în inegalitatea dată rezultă $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+\sqrt{2+2\theta_n}}}}}$ cu $0 < \theta_n < 1$, de unde prin majorare și minorare obținem inegalitățile (b). c) Se trece la limită în inegalitățile (b).

199. b) Se observă că $\ln n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$, deci $\gamma_n > \frac{1}{n} > 0$. c) A se vedea ex. nr. 48. d) Se scrie $n^x = e^{x\ln n}$ și se înlocuiește $\ln n$ cu $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma_n$.

200. b) Se folosește a). c) Se arată că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ (A se vedea ex. nr. 121). e) Se rezolvă prin metoda cunoscută ecuația binomă $x^{2n+1} + 1 = 0$. f) Se descompune $x^{2n+1} + 1$ în factori și se ține seama de punctul precedent. g) Se aplică regula lui l'Hospital.

GEOMETRIE

1. La b) se va observa că polarele punctului A în raport cu cele două cercuri trebuie să fie perpendiculare și deci $O_1A \perp O_2A$ (fig. 1) adică locul geometric este format din două arce din cercul de diametru O_1O_2 exterioare cercurilor date. c) Dacă r_1 și r_2 sînt razele celor două cercuri și $O_1O_2 = d$ atunci există puncte reale A ale locului geometric dacă cecurile sînt exterioare, deci $d > r_1 + r_2$ sau $d > \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$, cînd cercurile se intersectează sau sînt interioare

2. b) Locul geometric este un cerc cu centru în O și de rază $3R$ (fig. 2). c) Triunghiul degenerează și C este simetricul lui A în raport cu B dacă G este în B. Deci C aparține locului geometric. d) Se folosește teorema medianei în triunghiul ABC

3. Locul geometric este un cerc cu centrul în mijlocul segmentului AB. Se folosește teorema medianei. **4.** a) $\sphericalangle AMB =$ const și BC fixă (fig. 3) deci locul geometric este un arc capabil de unghi dat care subîntinde coarda BC. b) Dacă A_1 este diametrul opus cu A, $\sphericalangle AMA_1 =$ const și AA_1 fixă deci locul geometric este un arc capabil de un unghi dat care subîntinde coarda AA_1.

5. Fie O_1O_2 diametrul perpendicular pe OA (fig. 4) Dacă N este de aceiași parte cu O_2 față de diametru ce trece prin A se arată că $O_2N = R$. Dacă N se află de aceiași parte cu O_1, $O_1N = R$ deci locul geometric se compune din două cercuri cu centrele în O_1 și O_2 și de rază R

6. Locul geometric este cercul cu centru în O și de rază $\sqrt{ab}$. Se aplică teorema lui Stewart pentru a calcula OM adică $MO^2 . AB + MB^2 . OA - MA^2 . OB = OA . OB . AB$.

7. Dacă patrulaterul $PQRS$ (fig. 5) este inscriptibil $\sphericalangle P + \sphericalangle R = 180°$ deci $\frac{\gamma + \delta + \beta - \alpha}{2} + \frac{\gamma + \alpha + \beta - \gamma}{2} = 180°$ deci $\beta + \delta = 180°$, deci $T_1T_2 \perp T_1' T_2'$ Rezultă că locul geometriceste o dreaptă paralelă cu T_1T_2 și care trece prin O și dacă M este interior unghiului T_1AT_2 atunci $\sphericalangle T_1'MT_2' =$ const.; locul geometric este format din 2 arce ale unui cerc cu centrul în O.

8. $OP=OA$ (fig. 6) deci locul geometric este o paralelă la dreapta(D_2).

9. Dacă $\sphericalangle C =$ cost (fig. 7) C descrie un arc de cerc. Fie O centrul acestui arc. Să observăm că P este mijlocul medianei CC_1. Deci O_1 este mijlocul segmentului OC_1 adică $O_1P \parallel OC$ și $O_1P = OC/2 =$ const. Deci locul geometric este un arc din cercul cu centrul în O_1. Întrucît raza cercului $OB > OC_1$ rezultă $O_1P > O_1C_1$ și deci locul geometric este în general numai un arc din cercul cu centrul în O_1; $\sphericalangle C = 90°$ separat.

10. $\sphericalangle AHB =$ const. Locul geometric este un arc de cerc. Să se vadă problema 9.

11. Aplicînd teorema medianei rezultă că

$$\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \pm AB.AC = K \text{ deci}$$

$\dfrac{(AB \pm AC)^2}{2} = K + BC^2 \Rightarrow AB \pm AC =$ const., deci locul geometric este o elipsă sau o hiperbolă cu focarele în B și C.

12. a) $b + c = 3a$. b) Locul geometric este o elipsă cu focarele B și C.

13. Ducem $BM \perp BC$ (fig. 8). Atunci $AM = A'B = AC$ deci $AM = AC$ și cum C este fix și dreapta BM la fel, locul geometric este parabola avînd focarul C și directoarea dreapta perpendiculară în B pe BC.

14. Locul geometric este diametrul ce trece prin M.

15. a) $\sphericalangle APB =$ const. (fig. 9) și AB fixă deci locul geometric este un arc de cerc. b) Se va observa că punctul Q este diametrul opus cu P în cercul căreia aparține, arcul loc geometric de la a).

16. Se duce prin D, $DB_1 \parallel CB$ și $DB_1 = CB$ (fig. 10) Se duce apoi $NM_1 \parallel AB_1$, $MM_1 \parallel BB_1$, $QQ_1 \parallel PP_1 \parallel BB_1$. Punctele D, Q_1, P_1 sînt evident coliniare. Pe de altă parte $DQ_1 \parallel RQ$ și $Q_1P_1 \parallel QP$ deci R, Q, P sînt coliniare. Se poate generaliza problema considerînd punctele P, Q, R încît $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{QN}{QM} = \dfrac{RD}{RC} = K$ și rezultă P, Q, R de asemeni coliniare.

17. Se aplică rezultatul problemei 16.

18. Vom demonstra mai întîi două teoreme care vor fi utilizate și mai departe. Prima din acestea este

Teorema lui Menelaus. Fie ABC un triunghi și M, N, P trei puncte coliniare situate pe dreptele AB, BC și respectiv AC. Atunci $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PA} = +1$ și reciproc, dacă această relație are loc atunci punctele M, N și P sînt coliniare.

Pentru a demonstra această teoremă ducem $BB_1 \parallel AC$ (fig. 11). Atunci $\frac{MA}{MB} = \frac{PA}{BB_1}$, și $\frac{NB}{NC} = -\frac{BB_1}{PC}$ (am considerat segmente orientate) atunci

$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PA} = \frac{PA}{PB_1}\cdot\frac{PB_1 PC}{PC\, PA} = 1.$$

Reciproc, dacă P_1 este punctul în care MN intersectează AC atunci după afirmația directă rezultă $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{P_1C}{P_1A} = 1$ și în baza ipotezei rezultă că $\frac{PC}{PA} = \frac{P_1C}{P_1A}$ de unde $P \equiv P_1$.

Cea de a doua teoremă pe care o demonstrăm este

Teorema lui Ceva. Fie ABC un triunghi și A_1, B_1, C_1 situate pe laturile corespunzătoare ale triunghiului astfel ca dreptele AA_1, BB_1 și CC_1 să fie concurente. Atunci $\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B} = -1$ și reciproc, dacă această relație are loc atunci cele trei drepte sînt concurente.

Pentru demonstrație se aplică teorema lui Menelaus triunghiului ACC_1 și transversalei BB_1 (fig. 12)

Pentru rezolvarea problemei 18 se ține cont de relațiile $AC_1.AC_2 = AB_1.AB_2$, etc. (fig. 13) și se aplică teorema lui Ceva.

19. Cazul unui paralelogram se tratează direct. Dacă două din laturi nu sînt paralele, de exemplu AD și BC (fig. 14) și R este punctul de intersecție al lor atunci se aplică teorema lui Menelaus triunghiurilor ABR și DCR. Reciproca afirmației nu este adevărată cum se vede dacă M, N, P, Q sînt mijloacele laturilor ; relația este satisfăcută dar punctele evident nu sînt coliniare.

20. Se aplică teorema lui Menelaus triunghiului ABC și dreptelor B_1C_1 și respectiv B_2C_2.

21. Se arată că N_1N_2 și M_1M_2 împart înălțimea AA_1 în același raport (fig. 15). Se aplică pentru aceasta teorema lui Menelaus triunghiului AA_1B și transversalei N_1N_2 și respectiv triunghiului CAA_1 și transversalei M_1M_2.

22. Se aplică teorema lui Menelaus.

23. Se aplică teorema lui Ceva.

24. Se aplică teorema lui Ceva.

25. Demonstrăm mai întîi

Teorema lui Steiner. Prin vîrful A al unui triunghi ABC se duc două ceviene izogonale care întîlnesc latura BC în M și N. Atunci are loc relația

$$\frac{CM}{BM}\cdot\frac{CN}{BN}=\frac{AC^2}{AB^2}.$$

Se duce $CQ \parallel AB$ și $BP \parallel AC$ (fig. 16). P fiind pe AM și Q pe AN. Din asemănarea triunghiurilor BMP, AMC; ABN, NCQ; ABP, ACQ se deduce relația. Pentru rezolvarea problemei 25 se aplică teorema lui Menelaus și teorema lui Steiner.

26. Se arată mai întîi, folosind teorema lui Steiner, că dacă A' este piciorul medianei atunci

$$\frac{A'B}{A'C}=\frac{AB^2}{AC^2}.$$

Pe de altă parte

$\dfrac{A'B}{A'C}=\dfrac{AB\cos B}{AC\cos C}$ deci $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\cos B}{\cos C}$. Dar $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sin C}{\sin B}$ și deci $\sin 2C =$

$= \sin 2B$ deci $\hat{B}=\hat{C}$ sau $\hat{B}+\hat{C}=90°$ deci $\hat{A}=90$ deci triunghiul este sau isoscel sau dreptunghic.

27. Avem $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ sau $\sphericalangle B = \sphericalangle C'$. În primul caz AA' este mediană. În al doilea caz se arată că $\dfrac{A'B}{A'C}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$ deci AA' este simediana; să se vadă reciproca afirmației de la problema 26).

28. Demonstrăm mai întîi

Teorema lui Simson. Dintr-un punct M al cercului circumscris unui triunghi ABC se coboară perpendicularele MD, ME, MF pe BC, CA, AB. Să se arate că punctele D, E, F sînt coliniare (dreapta lui Simson a punctului M în raport cu triunghiul ABC).

Trebuie demonstrat că $\sphericalangle DFB = \sphericalangle BFE$ (fig. 17). Se va observa pentru aceasta că în patrulaterul inscriptibil $MAEF$, $\sphericalangle DFB = \sphericalangle DMB$, $\sphericalangle BFE = \sphericalangle AME$; apoi că $\sphericalangle DMB = \sphericalangle AME$; rezultă deci $\sphericalangle DFB =$ $= \sphericalangle EFB$. Pentru rezolvarea problemei 28. folosim teorema lui Simson și teorema lui Menelaus. Deci

$\frac{C_1A}{C_1B}\frac{A_1B}{A_1C}\frac{B_1C}{B_1A} = 1$ (fig. 18). Apoi dreptele AA_2, BB_1, CC_1 fiind concurente, după teorema lui Ceva avem $\frac{C_1A}{C_1B}\frac{A_2B}{A_2C}\frac{B_1C}{B_1A} = -1$. Rezultă că $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A_2B}{A_2C}$ deci punctele A_1 și A_2 sîntarmonic conjugate în raport cu B și C. Dar locul geometric al punctelor armonic conjugate cu punctul A în raport cu cercul este polara punctului A în raport cu cercul, adică dreapta T_1T_2.

29. Se va observa faptul că dreapta PQ este dreapta lui Simson a punctului M în raport cu triunghiul ABC (fig. 19) și deci punctul de intersecție al dreptelor PQ și AC este proiecția lui M pe AC. Analog dreapta RS este dreapta lui Simson a punctului M în raport cu triunghiul ADC și deci punctul de intersecție al dreptelor RS și AC este proiecția lui M pe AC de unde rezultă că PQ și RS se intersectează pe AC. Analog se arată că dreptele QR, SP și DB sînt concurente.

30. Dacă AA_1 este bisectoare atunci triunghiurile AMB și ANC sînt asemenea și la fel triunghiurile A_1NC și A_1MB. De aici rezultă relația cerută. Reciproc, din asemănarea triunhgiurilor A_1MB și A_1NC și din relația dată rezultă asemănarea triunghiurilor AMB și ANC (fig. 20)

31. Dacă A_1 este piciorul bisectoarei unghiului A, se va folosi faptul că bisectoarele unghiurilor B și M sînt bisectoare în triunghiul ABC și respectiv AMC.

33. Se va observa dacă A_1, B_1 C_1 sînt punctele de intersecție ale cercurilor de diametre laturile triunghiului atunci AA_1, BB_1 și CC_1 sînt înălțimile triunghiului și deci cele trei cercuri au centrul radical H. Se arată apoi că H are puteri egale față de celelalte cercuri și anume dacă O_1 este mijlocul înălțimii din A puterea lui H față de cercul avînd această înălțime drept diametru este $O_1H^2 - 1/4\, h^2$. etc.

34. a) Dacă r este raza cercului (C) (fig. 21) și a distanța de la O la dreapta (d), iar x distanța de la centrul unui cerc (Γ) la (d) atunci raza cercului (Γ) este $y = \sqrt{x^2 - d^2 + r^2}$. Deci trebuie să avem $x^2 - d^2 + r^2 \geqslant 0$ adică $x \geqslant \sqrt{d^2 - r^2}$.

b) Oricare două cercuri (Γ) nu se intersectează deoarece în caz contrar dreapta lor de intersecție ar fi (d) și atunci cercul (C) ar trebui de asemenea să taie dreapta (d). c) Cercul (γ) taie orice cerc (Γ) deoarece din M se pot duce tangente egale cu MT la orice cerc (Γ). d) Toate dreptele trec prin punctul de intersecție al dreptei (d) cu dreapta determinată de intersecția cercurilor (C) și (γ).

35. Se va observa că IJ este axul radical al celor două cercuri de diametre AI şi BI.

37. Se va arăta că patrulaterul este înscris în cercul de diametru MN.

39. Patrulaterele $A''B''A_1B_1$, $A''C_1A_1C''$ (fig. 22) sînt dreptunghiuri şi au diagonala comună $A''A_1$. Deci sînt înscrise în cercul de diametru $A''A_1$ sau de diametru C_1C''. Dar $\sphericalangle\ C''C'C_1 = 90°$ deci C' se află pe cercul de diametru C_1C''. Analog A' se află pe cercul de diametru $A''A_1$ şi B' pe cercul de diametru B_1B''. b) $\rho_A = AC_1.AC' = 1/2$ c. $b \cos A$ şi $S = 1/2bc \sin A$ deci $\rho_A/S = \operatorname{ctg} A$ sau $\rho_A/\operatorname{ctg} A = S$. Analog $\rho_C/\operatorname{ctg} B = \rho_C/\operatorname{ctg} C = S$. c) Dacă $\sphericalangle\ A = 90$, $\operatorname{ctg} A = 0$ deci $\rho_A = 0$. Aceasta deoarece în cazul $\sphericalangle\ A = 90°$ cercul lui Euler trece prin vîrful A al triunghiului.

40. Ţinînd cont că aria patrulaterului este egală cu $1/2\ (ad \sin A + bc \sin C)$ rezultă în baza ipotezei că $ad(\sin A - 1) = bc(1 - \sin C)$. Cum $ad > 0$, $bc > 0$ şi $\sin A - 1 \leq 0$ şi $1 - \sin C \geqslant 0$ rezultă $\sin A = 1$ şi $\sin C = 1$ deci $\sphericalangle\ A = \sphericalangle\ C = 90°$. b) Se ţine cont de a) şi de teorema sinusurilor.

41. Se va observa că AC este bisectoarea unghiului DAB şi pentru c) se utilizează asemănarea triunghiurilor ADM şi BMC.

42. a) Dacă A_1, B_1, C_1 sînt picioarele medianelor, se arată că $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 0$. b) Se exprimă laturile triunghiurilor ABC şi $A''B''C''$ cu ajutorul laturilor triunghiului $A'B'C'$, folosind teorema medianei.

43. Se arată că latura A_1C_1, de ex., a triunghiului ortic este egală cu $R \sin 2B$. Pe de altă parte dacă R' este raza cercului circumscris triunghiului ortic $A_1C_1 = 2R' \sin 2B$.

45. b) Dacă triunghiul ABC este isoscel, d) dacă triunhgiul ABC este echilateral.

48. Se va folosi faptul că simetricul ortocentrului faţă de o latură a triunghiului se află pe cercul circumscris triunghiului.

50. După teorema bisectoarei aplicată triunghiului FMF'(fig. 23) avem $\dfrac{NF}{NF'} = \dfrac{MF}{MF'}$ de unde rezultă $\dfrac{NF}{NF + NF'} = \dfrac{MF}{MF + MF'}$ adică $\dfrac{NF}{FF'} = \dfrac{MF}{AA'}$

deci $\dfrac{NF}{MF} = \dfrac{FF'}{AA'} = \dfrac{2c}{2a} = \dfrac{c}{a} =$ excentricitatea $= \dfrac{MF}{MP}$ deci $MF^2 = NF.\ MP$.

51. Locul geometric al punctelor N (fig. 24) este transformatul cercului (γ) prin inversiunea de pol A și modul $3a^2/4$ adică este un cerc. Pentru a vedea care anume cerc este suficient să vedem care sînt transformatele prin această inversiune a punctelor A_1, B_1, C_1 de tangență a cercului (γ) cu laturile triunghiului. Notînd transformatele acestora prin A'_1, B'_1, C'_1 avem din definiția inversiunii $AA_1 \cdot AA'_1 = 3a^2/4$ deci $a\sqrt{3/2}$. $A_1A'_1 = 3a^2/4$ deci $A_1A'_1 = a\sqrt{3}/2$ deci $A'_1 = A$ deci A_1 este transformat în el însuși. Apoi $AB_1 . AB'_1 = 3a^2/4$ deci $a/2 . AB'_1 = 3a^2/4$ deci $AB'_1 = 3a/2$ și analog $AC'_1 = 3a/2$. Locul geometric este cercul ce trece prin A'_1, B'_1 și C'_1 Dar aceste puncte sînt punctele de tangență ale cercului ex-înscris cu laturile triunhgiului. Deci locul geometric este cercul (γ_a).

52. Dacă se consideră transformata tangentei T_1T_2 (fig. 25) prin inversiune se obține un cerc care trece prin polul T și prin punctele M_1 și M_2 care sînt transformatele punctelor T_1 și T_2. Acest cerc trebuie să fie tangent dreptelor (d_1) și (d_2) în M_1 și M_2 (deoarece inversiunea păstrează unghiurile). Apoi deoarece $(d_1) \,||\, (d_2)$ rezultă $M_2M_1 \perp (d_1)$, (d_2).

53. Notăm $OB_1 = x$, $OA_2 = y$, razele celor două cercuri r_1 și r_2 și $A_2B_1 = d$ (fig. 26). Impunem ca transformatul lui A_1 să fie B_1 și al lui A_2 să fie B_2. Atunci trebuie ca $OA_1.OB_1 = OA_2.OB_2$ deci $x(x + 2r_1) = y(y + 2r_2)$ și $x + y = d$. Obținem $x = \dfrac{d(d + 2r_2)}{2(d + r_1 + r_2)}$ și $y = \dfrac{d(d + 2r_1)}{2(d + r_1 + r_2)}$

deci $\dfrac{OB_1}{OA_2} = \dfrac{d + 2r_2}{d + 2r_1} = \dfrac{B_1B_2}{A_1A_2}$.

54. Fie O punctul de intersecție al celor trei cercuri (fig. 27). Se consideră o inversiune de pol O. Prin aceasta cele trei cercuri se transformă în trei drepte (d_1), (d_2) și (d_3) care prin intersecție dau triunghiul $A_1A_2A_3$. Fie A'_1, A'_2, A'_3 punctele de tangență cu laturile acestui triunghi ale cercului înscris. Dreptele OA'_2, OA'_1 și OA'_3 taie cele trei cercuri în punctele A''_1, A''_2 și respectiv A''_3 care sînt punctele prin care trece cercul căutat.

55. Se arată că patrulaterul are două unghiuri opuse drepte, folosind teorema celor trei perpendiculare.

56. a) Locul geometric este arcul cercului OAB interior cercului (C); c) Punctul N descrie arcul din cercul (C) situat de aceiași parte cu O, față de coarda AB.

57. a) Locul geometric al punctului P este cercul de diametru AC. b) Dacă O' este centrul cercului C' atunci $\sphericalangle\, O'FO = 45$, unde F este punctul de intersecție al dreptelor $O'P$ și OM; c) Locul geometric este elipsa cu focarele O și O' și axa mare $R(2 + \sqrt{2})/2$.

58. Fie F focarul parabolei date și (D) directoarea acesteia iar O vîrful său (fig. 28). Se duce dreapta (D') perpendicular pe (D) încît $\overline{FL} = \overline{OF}/4$ și se ia F' încît $\overline{FF'} = \overline{FL}$. Fie Q mijlocul segmentului MP. Triunghiul MFP fiind isoscel (proprietatea optică a parabolei), dacă notăm $\overline{MN} = \overline{MF} = x$ și $\overline{OF} = a$ se obține $\overline{QN'} = 1/2 \quad (\overline{MR} + \overline{LP}) = x - 3a/4$. Avem apoi $\cos P = \dfrac{x-2a}{x}$ și atunci $\overline{MP}^2 = 4ax$ și atunci se obține $\overline{QF'}^2 = (x - 3a/4)^2$ deci $\overline{QF'} = \overline{QN'}$ și deci locul geometric este o parabolă cu focarul F' și directoarea (D).

59. a) Se aplică teorema „celor trei perpendiculare".

60. Se arată că perpendicularele pe planele celor două cercuri în centrele lor sînt concurente.

61. a) Se procedează prin reducere la absurd ținînd cont că tangentele în A și B sînt paralele (fig. 29).

62. Fie tetraiedrul $ABCD$ (fig. 30), D_1, mijlocul laturii BC, C_1 mijlocul laturei AD și G centrul de greutate al triunghiului BCD. Se arată că dacă M este punctul de intersecție (care există), al dreptelor AG_A și D_1C_1 atunci $\dfrac{MA}{MG} = -3$ (se folosește teorema lui Menelaus pentrutriunghiul $AG_A\,D$ și dreapta D_1C_1). Analog se procedează cu dreptele ce unesc mijloacele celorlalte muchii opuse și analoagele dreptei AG_A, etc.

63. Vol $OABC$ = Vol $OABM$ + Vol $OACM$. Notăm h = distanța lui M la cele trei plane. Atunci $h/3$ (aria AOB + AriaBOC + AriaCOA) = Vol. $OABC$. Aria $AOB = 1/2\ OA.\ OB \sin\alpha$, etc. Deci $h/3.\sin\alpha/2\ (OA.OB + OB.OC + OC.OA) = 1/3$ Aria $AOB.OC.\sin\beta$ unde $\sphericalangle\,\beta = \sphericalangle(OC.$ pr. lui OC pe AOB). Găsim $OA.OB + OB.OC + OC.OA = \dfrac{2\sin\beta}{h\sin\alpha}\cdot\dfrac{OA.OB\sin\alpha}{2}\cdot OC$. Împărțim cu $OA.OB.OC$ și obținem $\dfrac{1}{OA} + \dfrac{1}{OB} + \dfrac{1}{OC} = \dfrac{\sin\beta}{h} =$ constant.

64. Ducem $A_2A_1' \perp A_2A_4$ în planul $A_1A_2A_4$, $A_2A_3' \perp A_2A_4$ în planul $A_2A_3A_4$ și analog $B_2B_1' \perp B_2B_4$ și $B_2B_3' \perp B_2B_4$ (fig. 32). Se deduce mai întîi că $\Delta A_1'A_4A_3' \sim \Delta B_1'B_4B_3'$ și deci $\dfrac{A_1'A_3'}{B_1'B_3'} = k$ și deci se obține că $\Delta A_1'A_2A_3' \sim \Delta B_1'B_2B_3'$ de unde rezultă că $\sphericalangle\, A_1'A_2A_3' = \sphericalangle\, B_1'B_2B_3'$; în mod analog se arată egalitatea celorlalte unghiuri diedre. b) $OP \perp A_1A_2$ și atunci $A_4P \perp A_1A_2$ deci $\sphericalangle A_4PO = \sphericalangle B_4P'O'$ de unde printr-o asemănare rezultă că $\dfrac{A_4O}{B_4O} = k$ c) cele două tetraedre au raportul laturilor egal cu 1/8.

65. a) Construim ca în problema precedentă triunghiurile $A'_1A_1A_4$ și $A'_2A_1A_4$. Atunci se mai formează două triunghiuri $A'_3A'_2A_1$ și $A'_3A'_2A_4$ în care $A'_3A'_1A'_2 = \varphi$. Aplicînd teorema cosinusului în cele două triunghiuri se obține relația cerută. b) Din relația de mai sus (și altele analoage) rezultă că unghiurile diedre se pot exprima numai cu ajutorul unghiurilor fețelor. c) Utilizînd a) se poate calcula $\sin\varphi$ și cu ajutorul acestuia înălțimea tetraedrului. Se obține formula $V = 1/12\sqrt{A}$ unde $A = a_{14}^2a_{23}^2(a_{24}^2 + a_{34}^2 + a_{13}^2 + a_{12}^2 - a_{23}^2 - a_{14}^2) + a_{24}^2a_{13}^2(a_{34}^2 + a_{23}^2 + a_{14}^2 + a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{24}^2) + a_{34}^2a_{12}^2(a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{34}^2 - a_{12}^2) - a_{14}^2a_{24}^2a_{13}^2 - a_{34}^2a_{13}^2a_{14}^2 - a_{23}^2a_{34}^2a_{24}^2 - a_{23}^2a_{13}^2a_{12}^2$.

c) Dacă muchiile opuse sînt egale și egale cu a, b, c atunci $V = 1/12\sqrt{B}$ unde $B = 2(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)$. fig. 38.

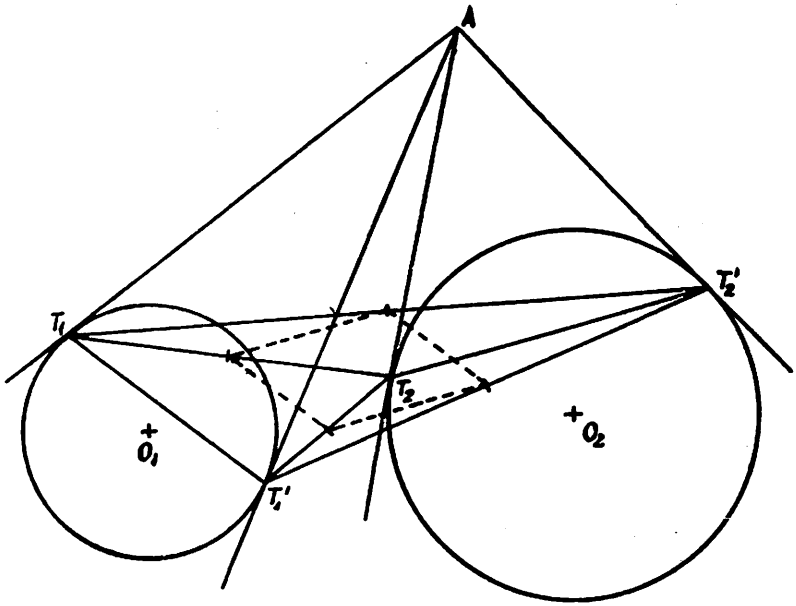


Fig. 1

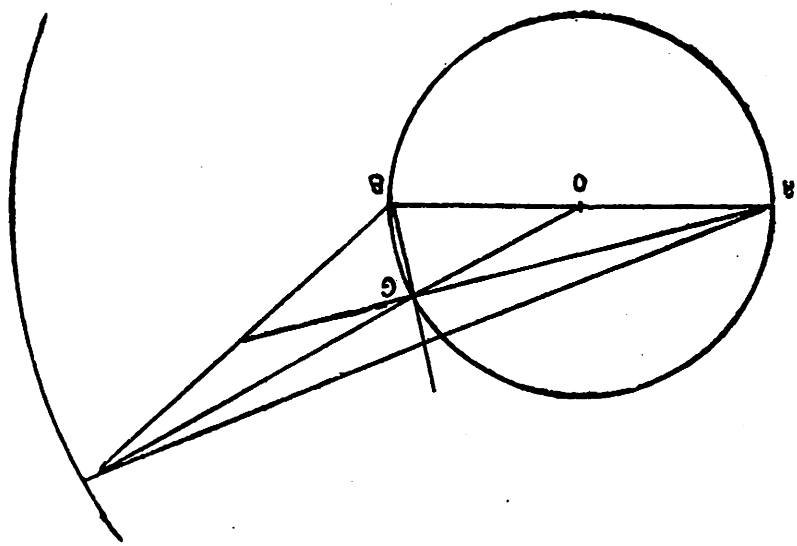


Fig. 2

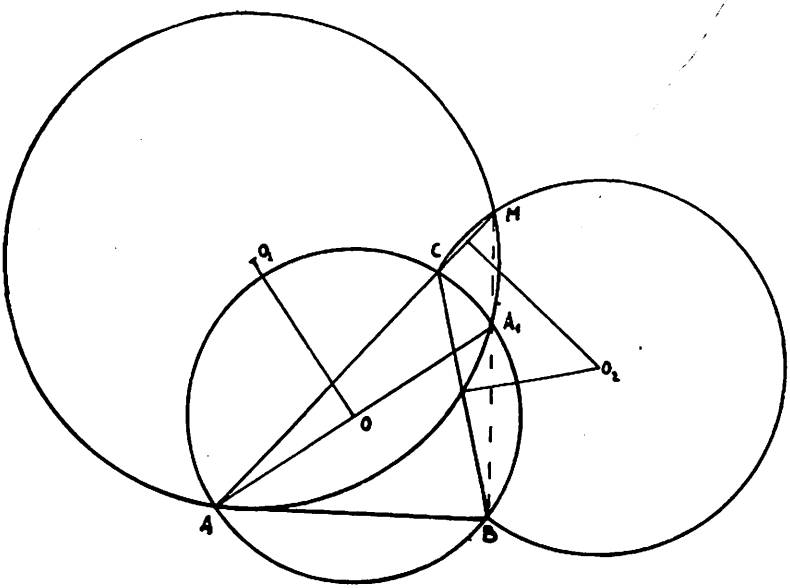


Fig. 3

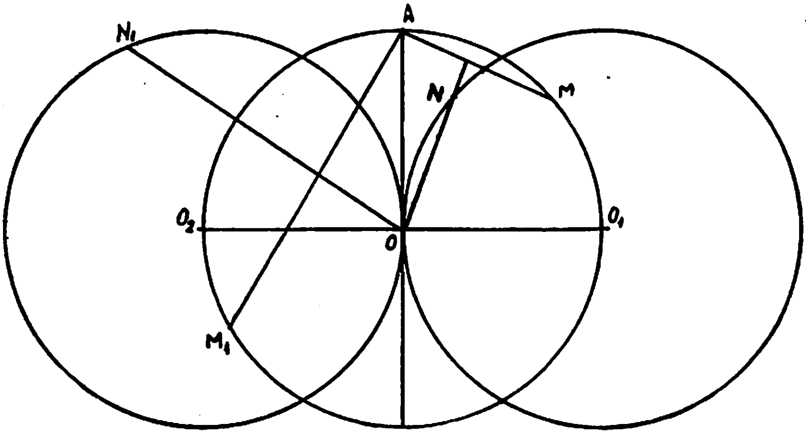


Fig. 4

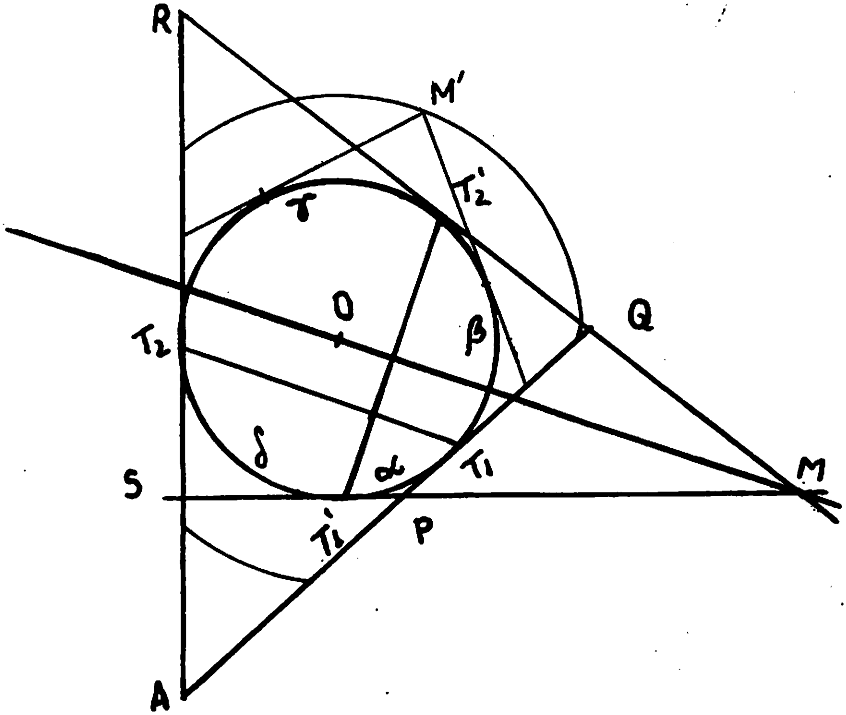


Fig. 5

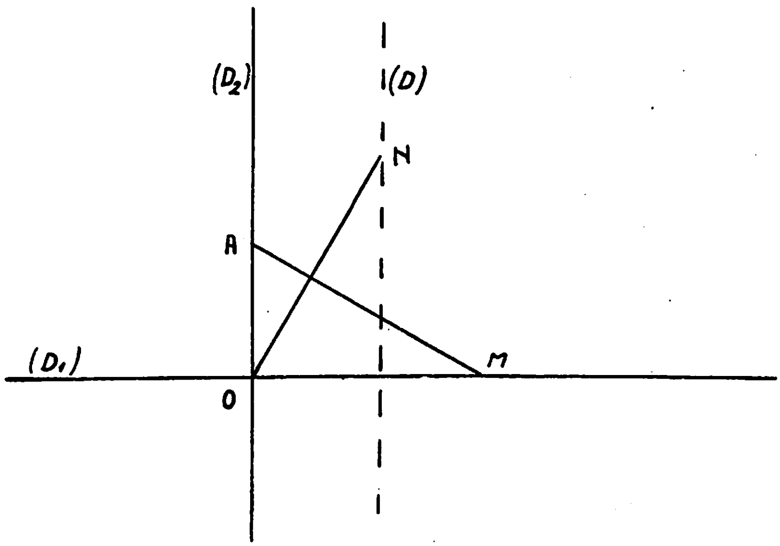


Fig. 6

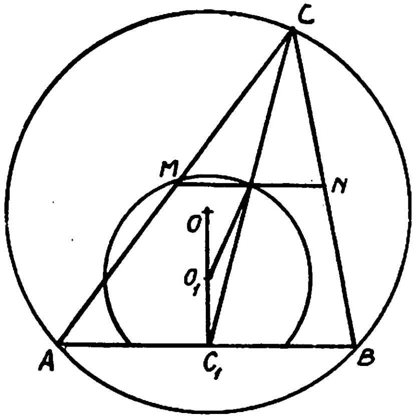


Fig. 7

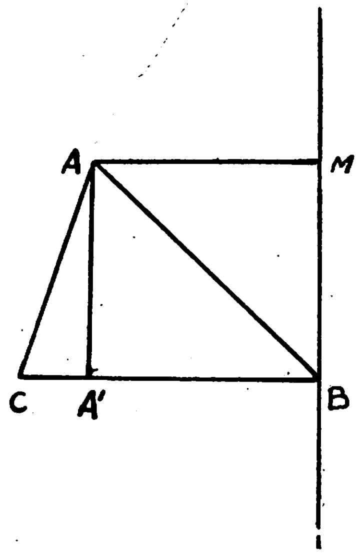


Fig. 8

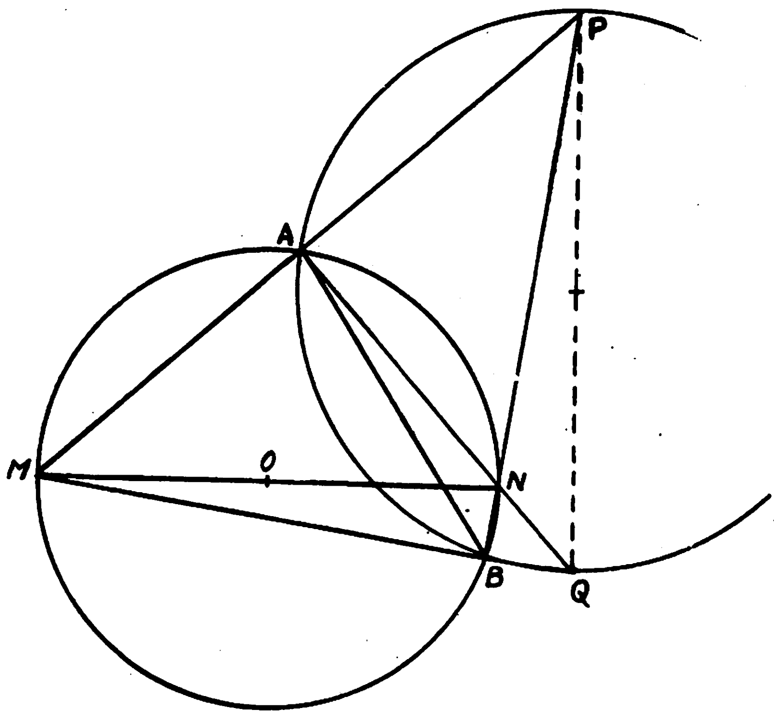


Fig. 9

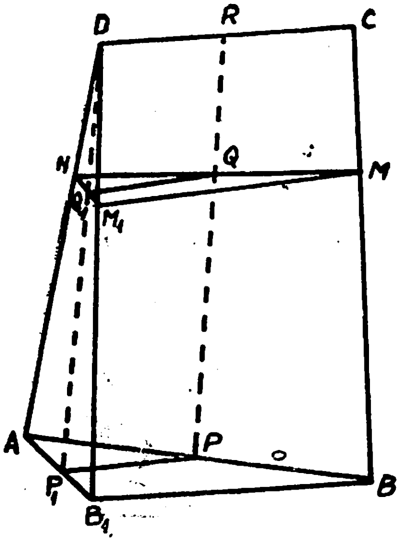


Fig. 10

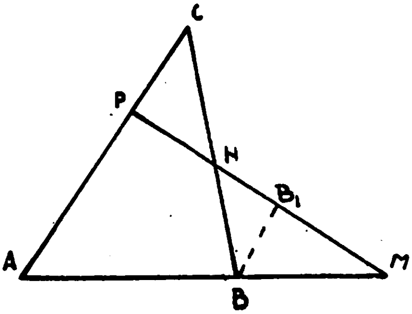


Fig. 11

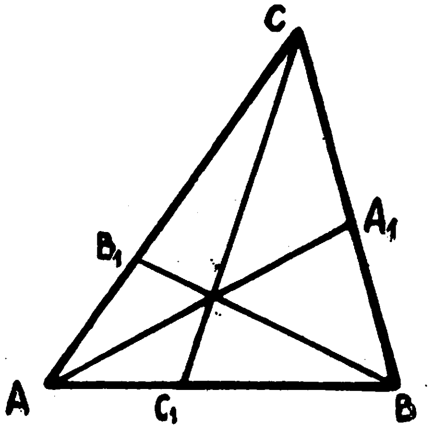


Fig. 12

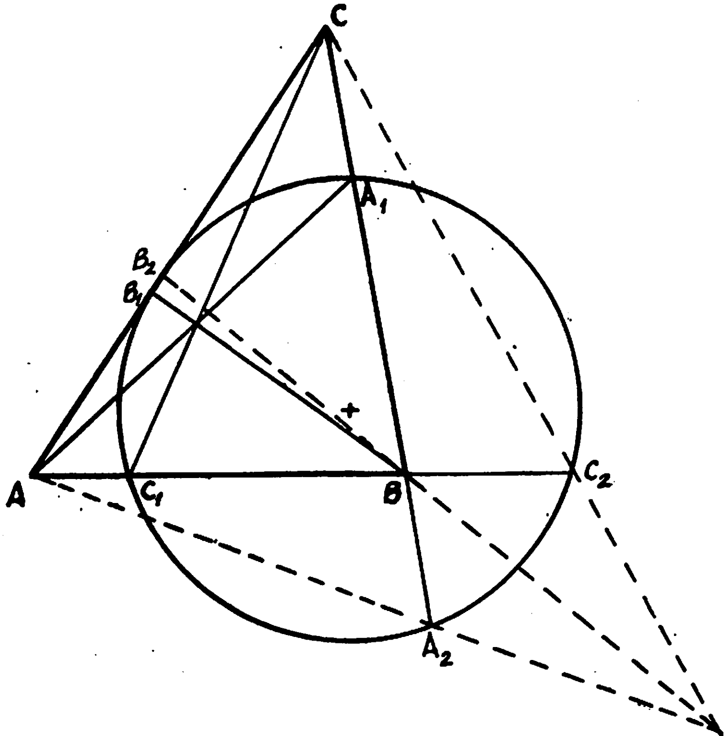


Fig. 18

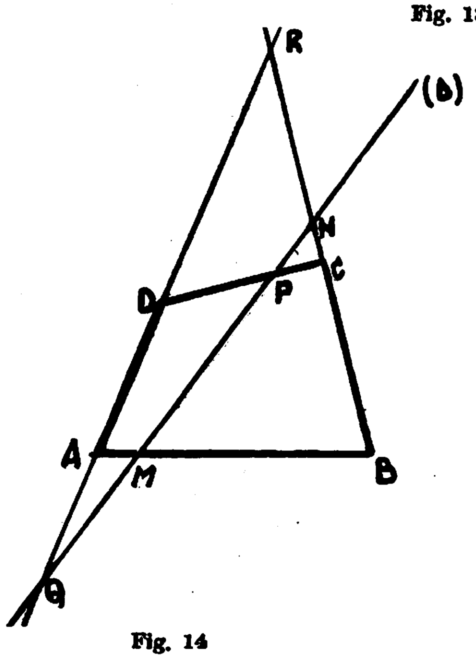


Fig. 14

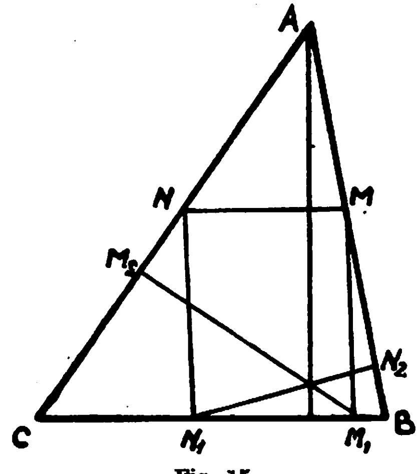


Fig. 15

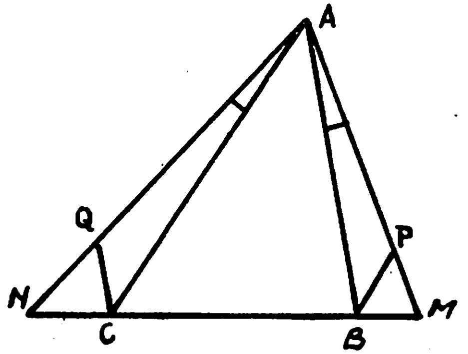


Fig. 16

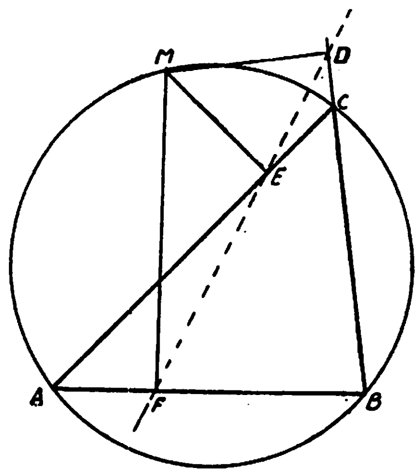


Fig. 17

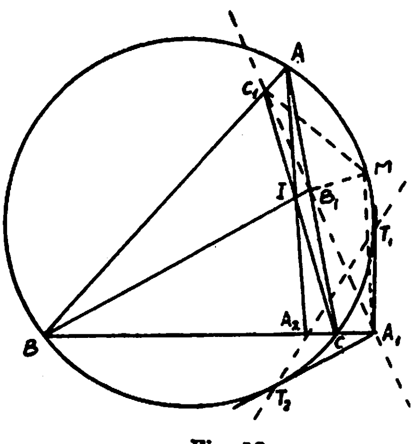


Fig. 18

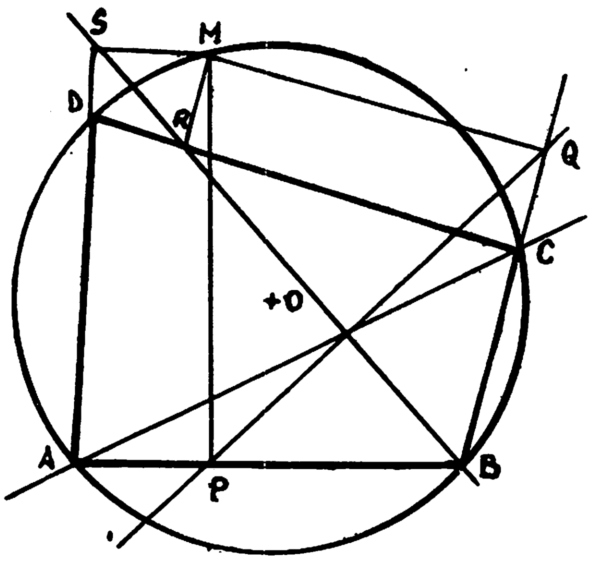


Fig. 19

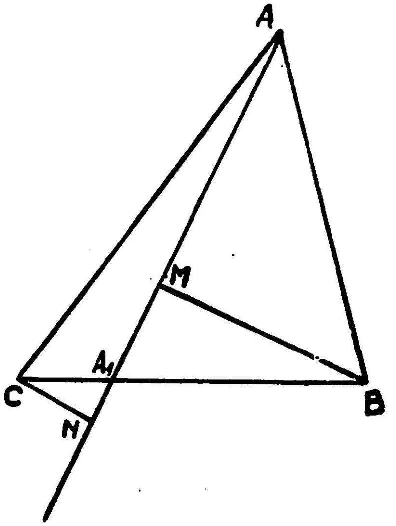


Fig. 20

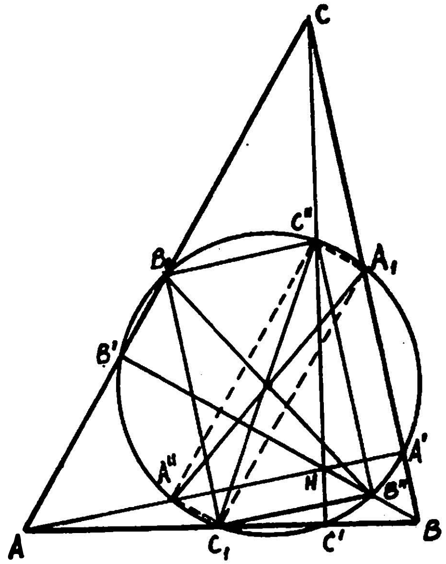


Fig. 22

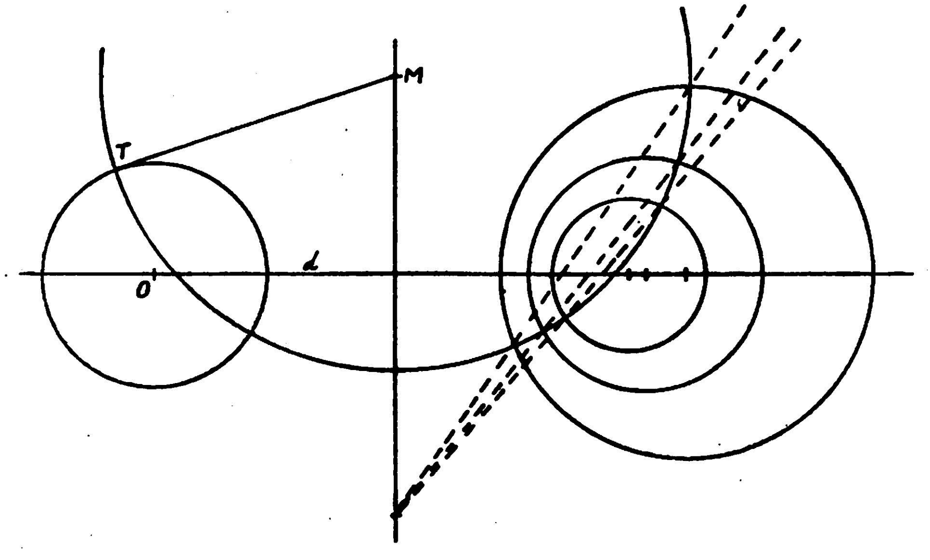


Fig. 21

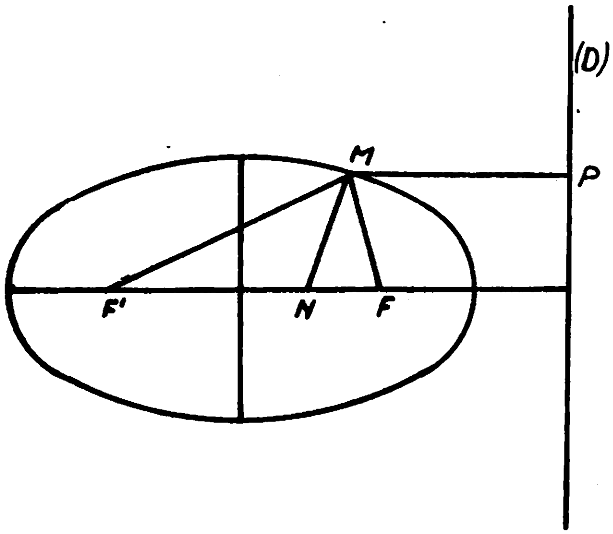


Fig. 23

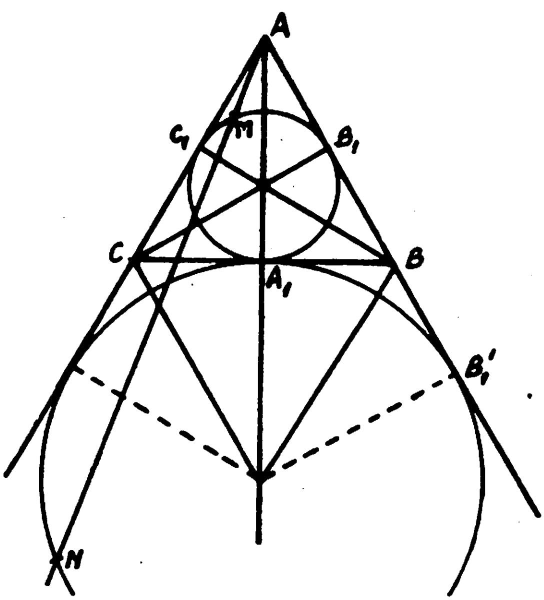


Fig. 24

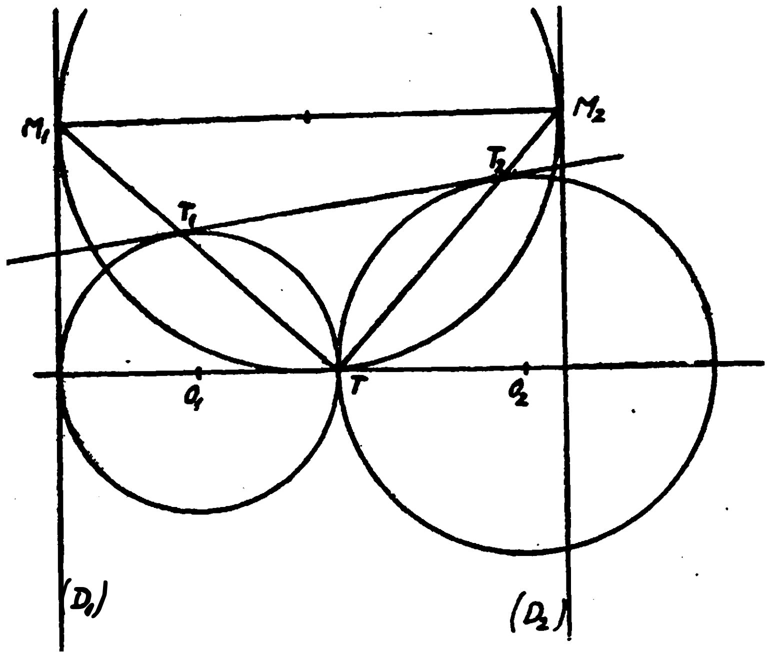


Fig. 25

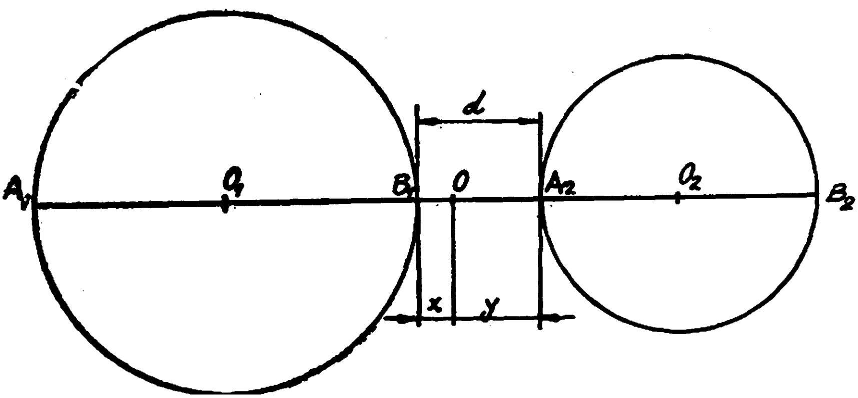


Fig. 26

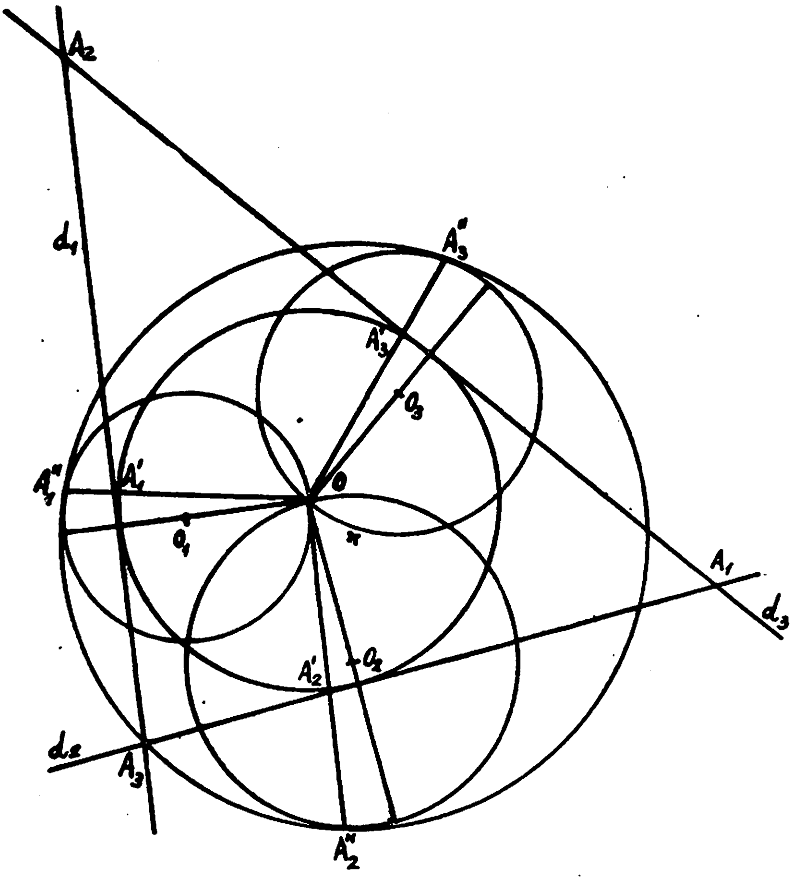


Fig. 27

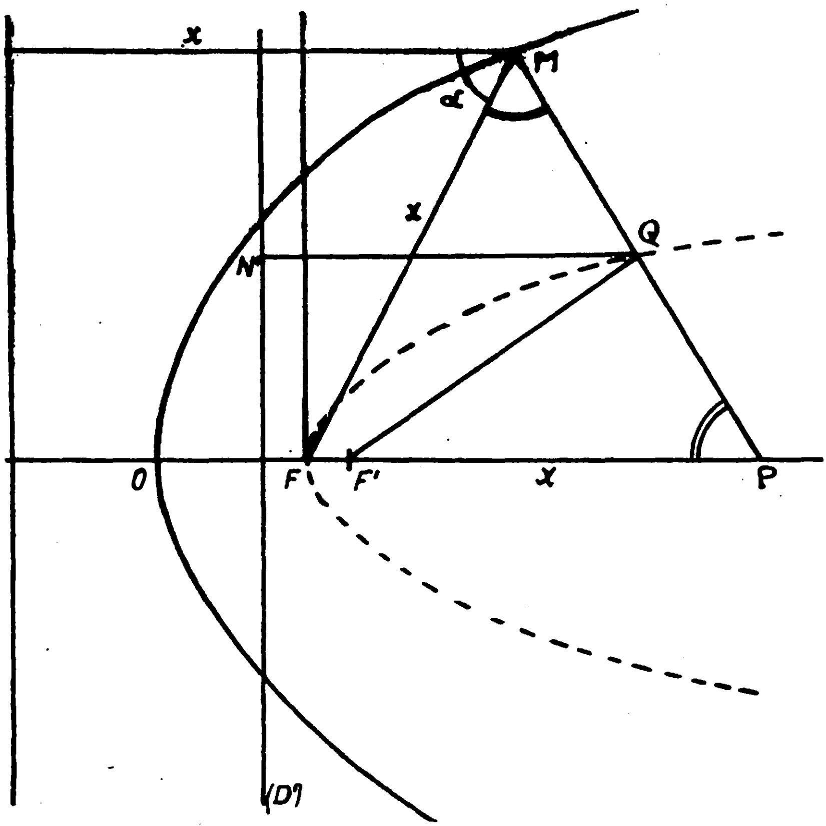


Fig. 28

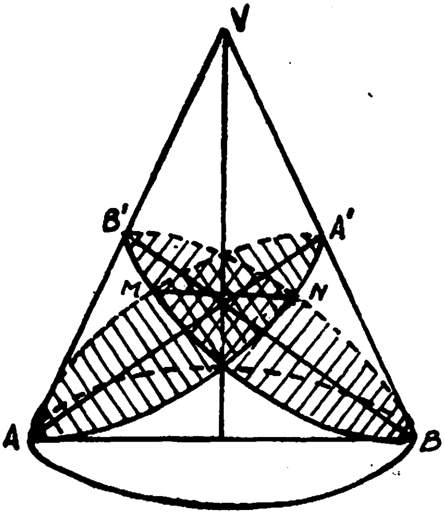


Fig. 29

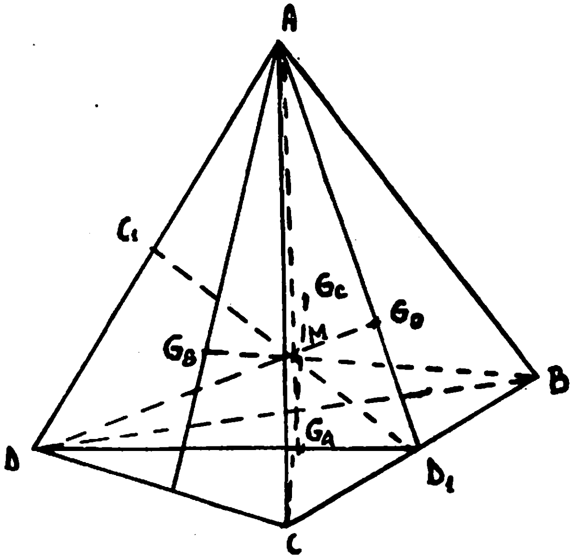


Fig. 80

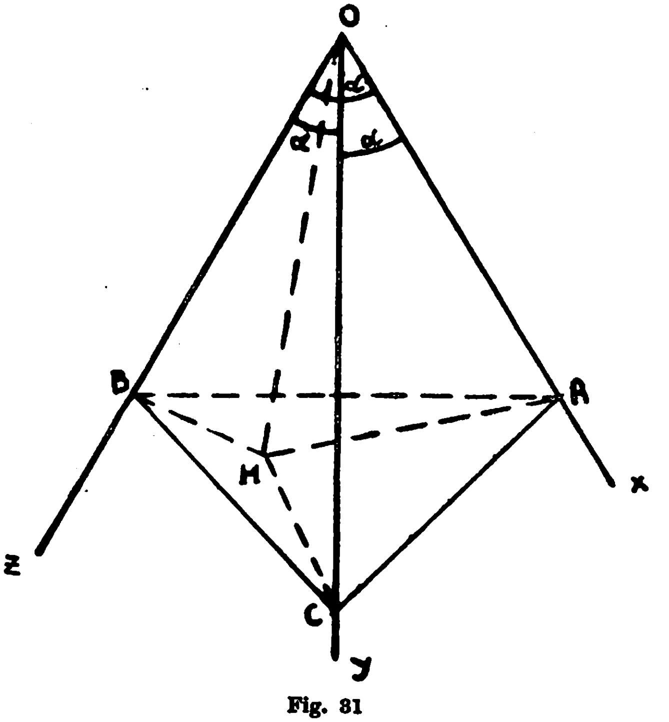


Fig. 81

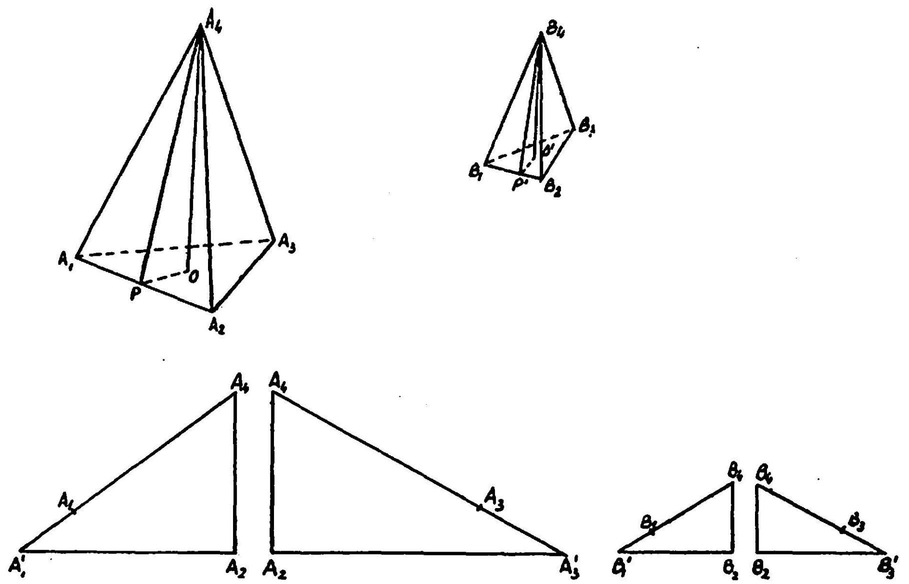


Fig. 32

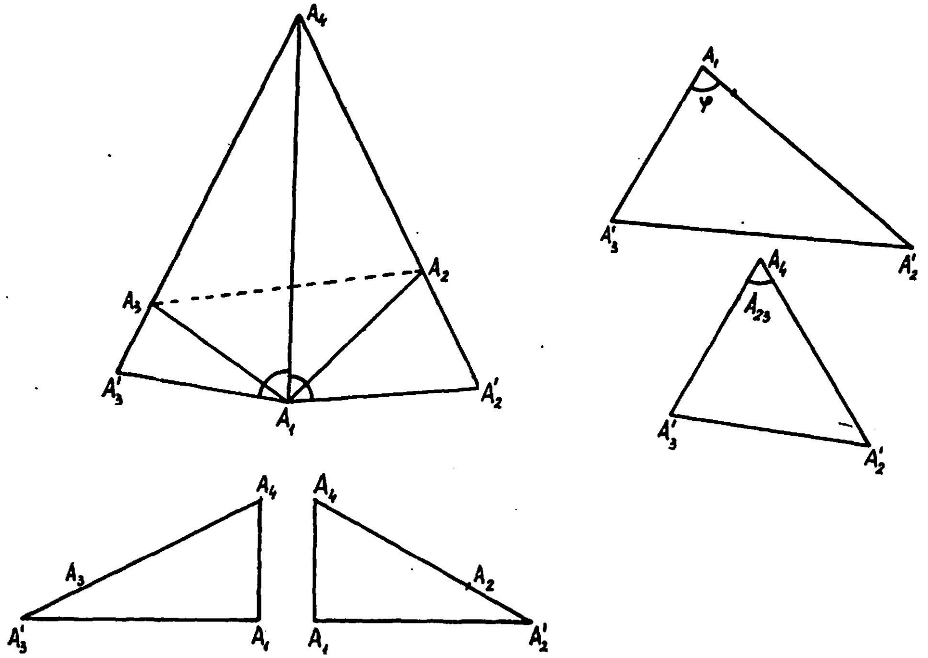


Fig. 33