Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

MIRCEA GANGA

# MATEMATICĂ

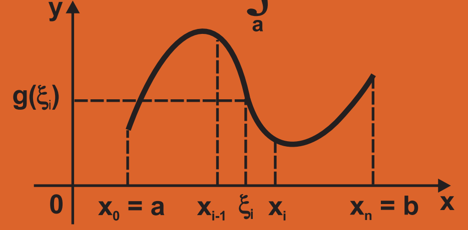
## MANUAL PENTRU CLASA a XII-a

## PROFIL M1

## ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

$$\int g(x)dx = G(x) + C$$




$$\int_a^b g(t)dt = G(b) - G(a)$$

EDITURA MATHPRESS

# CUPRINS

# ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

# 1. PRIMITIVE

**În acest capitol se evidențiază că diferențierea și integrarea sunt procese inverse și în plus a determina o primitivă înseamnă a determina aria de sub o curbă. Se definesc conceptele de primitivă a unei funcții, definită pe un interval din $\mathbb{R}$, precum și cel de integrală nedefinită. Se dau condiții ca o funcție să admită primitive pe un interval și se prezintă metode de determinare a lor: metoda directă, metoda integrării prin părți și metoda substituției.**

**Istoric. G. W. Leibniz (1646-1716) a fost cel care a utilizat, în 29 octombrie 1645, semnul $\int$ pentru integrare, derivat din prima literă a cuvântului latin „summa” (sumă). În articolul lui despre calculul diferențial, apărut în 1684, apar scrise diferențialele așa cum le utilizăm și azi. Leibniz a introdus terminologia de „calcul diferențial” și „calcul integral”, deoarece determinarea dreptelor tangente la curbe implică diferențele și determinarea ariilor implică sumele.**

**Istoric, ideea de calcul integral a fost dezvoltată cu mult înainte de cea legată de calculul diferențial. Dacă diferențierea a fost creată plecând de la problema tangentelor la curbe și de probleme de minim și maxim pentru funcții, integrarea s-a dezvoltat ca proces de sumare pentru calculul ariilor unor suprafețe sau calculul volumelor unor corpuri. Calculul diferențial studiază cât de repede se schimbă o funcție într-un punct, în timp ce calculul integral studiază ariile delimitate de curbe și este utilizat la calculul sumării continue (în opoziție cu sumarea discretă).**

**Arhimede (287-212 Î.C.) a avut ideea ingenioasă, în dorința de a calcula aria unei regiuni plane, de a impărți această regiune într-un număr mare de „benzi înguste” și de a însuma ariile acestor regiuni pentru a obține aria figurii date. Această idee a fost redescoperită în Europa în secolul al XVII-lea, când legătura inversă între determinarea ariei sub curbă și construirea tangentei la curbe a fost stabilită. Sir I. Newton (1642-1727) a fost primul matematician care a tratat integrarea ca proces „invers” al diferențierii.**

**„the method of tangents ... extends itself not only to the drawing of tangents to any curved lines ... but also to the resolving... of problems about areas, lengths, centres of gravity etc.”**

**(Newton, Principia, 1687)**

**„Les élements de calcul différential que M. Euler publia il y a quelques années, faisoinent désirer depuis longtemps le calcul intégral qui devoit en être la suite...”**

**(Journal des Sçavans, 1769)**

## 1.1. PRELIMINARII

Noțiunea de primitivă leagă între ele două concepte fundamentale ale Analizei matematice, derivata şi integrala.
**Integrarea este considerată ca operație inversă** (într-un anumit sens) **a derivării.**

Propunem în continuare câteva exemple de operații inverse pentru a ilustra unele caracteristici ale acestora.

**Exemple.**

**1.** Find date două numere reale oarecare a,b, atunci se poate calcula suma lor $s = a + b$.Invers, se pot determina perechile de numere $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ cu suma $s$ cunoscută.
Există o infinitate de astfel de cupluri (sunt situate pe o dreaptă de ecuație $x + y = s$). Deci în acest caz problema are o infinitate de soluții.

**2.** Dat fiind numărul real $b$, atunci se poate calcula $b^2$ (pătratul lui b).
Invers, se poate găsi un număr real pozitiv $r$, al cărui pătrat să fie $c \geq 0$. Deci $r^2 = c$, iar de aici $r = \sqrt{c}$ (rădăcina pătrată a numărului pozitiv $c$). Aici dacă $c < 0$, nu există număr real $r$ pentru care $r^2 = c$. Deci problema n-are soluție. Pentru $c \geq 0$. avem răspuns favorabil (numărul $r$ este unic).

**3.** Fiind dată o dreaptă $d$ în plan şi $A \notin d$, prin proiecția ortogonală a lui $A$ pe $d$ se înțelege punctul $A^* \in d$ astfel încât $AA^* \perp d$. Invers, se poate cerceta dacă există aplicația inversă celei descrise. Adică pentru $A^* \in d$, există un punct $A$ din plan pentru care proiecția lui să fie $A^*$? Se constată că există o infinitate de puncte (toate punctele de pe dreapta $d'$, care trece prin $A^*$ şi $d' \perp d$).

## 1.2. DERIVATE

În orice curs de Analiză matematică capitolul **Primitive** urmează celui care se referă la **Derivate.** Este deci util să fie cunoscut acest din urmă capitol.
Vom reaminti principalele operații cu funcții derivabile.
Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, două funcții derivabile. Atunci:

1) $f+g$ este derivabilă şi $(f+g)'=f'+g'$
**(Sumă de funcții derivabile este o funcție derivabilă)**

2) $\alpha f$ este derivabilă şi $(\alpha f)'=\alpha f'$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
**(Înmulțirea unei funcții derivabile cu o constantă este o funcție derivabilă)**

3) $fg$ este derivabilă şi $(fg)'=f'g+fg'$
**(Produs de funcții derivabile este o funcție derivabilă)**

4) $\frac{f}{g}$ este o funcție derivabilă şi $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$, $g\neq 0$
**(Cât de funcții derivabile este o funcție derivabilă în punctele $x, g(x)\neq 0$)**

5) $f\circ g$ este o funcție derivabilă şi $(f\circ g)'=f'(g)\cdot g'$
**(Compunere de funcții derivabile este o funcție derivabilă)**

## Exerciții rezolvate

**Să se calculeze derivatele funcțiilor de mai jos:**

**1.** $f(x)=(2x+1)^{10}, x\in\mathbb{R}$.

**R.** $f'(x)=10(2x+1)^9(2x+1)'=10(2x+1)^9\cdot 2=20(2x+1)^9$.

**2.** $f(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5, x\neq -1$.

**R.** $f(x)=5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=$

$=5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=10\frac{(x-1)^4}{(x+1)^6}$.

**3.** $f(x)=\sqrt{x^2-1}, x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

**R.** $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(x^2-1\right)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

**4.** $f(x)=\ln\left(x^4+1\right), x\in\mathbb{R}$.

**R.** $f'(x)=\dfrac{\left(x^4+1\right)'}{x^4+1}=\dfrac{4x^3}{x^4+1}$.

**5.** $f(x)=\sin x^5,\ x\in\mathbb{R}$.

**R.** $f'(x)=\cos x^5\cdot\left(x^5\right)'=5x^4\cos x^5$.

## Probleme propuse

**1. Să se calculeze derivatele următoarelor funcții, indicând domeniul de definiție şi de derivabilitate.**

1) $f(x)=\left(3x^2+1\right)^4$; 2) $f(x)=x^2\left(3x^5+x^2+1\right)^3$; 3) $f(x)=\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^5$;

4) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$; 5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; 6) $f(x)=\ln\dfrac{x}{x^2+1}$; 7) $f(x)=e^{\frac{x}{x+1}}$;

8) $f(x)=2^{x^2}+e^{x^3}$; 9) $f(x)=\sin^3 x$; 10) $f(x)=\sin\sqrt{x}$; 11) $f(x)=\sin x^3\cdot\cos^2 x$;

12) $f(x)=\cos e^x$; 13) $f(x)=\operatorname{tg}(\sin x)$; 14) $f(x)=\left(\sin^3 x+\cos^2 x\right)\cdot\ln x$;

15) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$; 16) $f(x)=\arcsin\dfrac{1}{x^2}$; 17) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

18) $f(x)=\operatorname{arctg} e^x$; 19) $f(x)=\ln^2\sqrt{x}$; 20) $f(x)=e^{\sin\left(x^2+x\right)}$;

21) $f(x)=\sin^3\left(\operatorname{arctg}\left(x^2+2x\right)\right)$; 22) $f(x)=\sin^3\left(\sqrt{x^2-x}\right)$; 23) $f(x)=\sqrt{3^{x^2+2x}}$;

24) $f(x)=2^{\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$; 25) $f(x)=\left(x^2+2x\right)e^{\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)}$.

**2.** Se consideră $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; funcții derivabile şi

$f(0)=0, f'(0)=1, f(1)=1, f'(1)=0, f(2)=2, f'(2)=1, g(0)=1, g'(0)=2,$

$g(1)=1, g'(1)=0, g(2)=2, g'(2)=1, h(0)=2, h'(0)=1, h(1)=1, h'(1)=2,$

$h(2)=0, h'(2)=2$. Să se calculeze:

1) $(f\circ g)'(0)$; 2) $(f\circ g)'(1)$; 3) $(f\circ g)'(2)$; 4) $(g\circ h)'(0)$; 5) $(g\circ h)'(1)$;

6) $(g\circ h)'(2)$; 7) $(f\circ g\circ h)'(0)$; 8) $(f\circ g\circ h)'(1)$; 9) $(f\circ g\circ h)'(2)$;

10) $(g\circ f\circ h)'(1)$; 11) $(h\circ f\circ g)'(1)$; 12) $(f\circ h\circ g)'(2)$.

## 1.3. PROBLEME CARE CONDUC LA NOȚIUNEA DE PRIMITIVĂ

Anul trecut la analiză matematică, la calcul diferențial problema centrală a fost de a determina $f'$ dacă se cunoaşte $f$ funcție derivabilă (**operația directă**). În acest an la calcul integral problema fundamentală este de a determina funcția $F$ derivabilă dacă se cunoaşte derivata sa $F'=f$ (**operația inversă**). La operația directă pentru o funcție derivabilă $f$ avem o unică funcție $f'$(derivata lui $f$ ). La operația inversă pentru o derivată dată $f$ se obține o mulțime infinită de funcții $F$ cu $F'=f$ (orice funcție $F+c, c$ constantă, verifică egalitatea $(F+c)'=f$ ).

Trei probleme, două de geometrie şi alta de mecanică, au condus la noțiunea de primitivă

**1) Problema inversă a tangentelor.**
**2) Exprimarea ariei printr-o integrală.**
**3) Legea de mişcare a unui punct material.**

Le analizăm în continuare.

### 1) Problema inversă a tangentelor

Următoarea problemă de natură geometrică ne conduce la noțiunea de primitivă a unei funcții:

**Să se determine funcțiile $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care panta tangentei la graficul lui $G$ în punctul $M(x,G(x))$ este $g(x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$.**

Ştim din anul precedent că panta tangentei în $M$ la graficul lui $G$ este dată de formula $m_x=G'(x)$. Deci trebuie determinată funcția $G$ care verifică egalitatea $G'(x)=x^2 = g(x)$. În cazul în care există $G$, ea se numeşte **o primitivă** a lui $g$ pe $\mathbb{R}$.

Aici se constată uşor că $G(x)=\dfrac{x^3}{3}$ este una din funcțiile căutate.

De asemenea, $G_1(x)=\dfrac{x^3}{3}+1$ este soluție pentru $G'(x)=x^2$ şi mai general

$\boldsymbol{G_c(x)=\dfrac{x^3}{3}+c}$, $\boldsymbol{c\in\mathbb{R}}$ este soluție. Ecuația $G'(x)=x^2$ se **numeşte ecuație diferențială**, iar $G_1$ este **o soluție particulară** a ei, şi $G_c$ este **soluția generală** a ecuației diferențiale.

**Schematic:**

| Funcția dată | | Se caută funcția |
|---|---|---|
| $x \to g(x)$ | $\longrightarrow$ | $x \to G(x)$ astfel încât $G'(x) = g(x), \forall x$ |

Să observăm că:

1) funcția $G$ trebuie să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi în plus $G'(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

2) funcția $G_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G_1(x) = G(x) + c$, $c$ constantă reală, este, de asemenea, o primitivă a lui $g$ ($G_1'$ este derivabilă şi $G_1' = (G+c)' = G' + 0 = g$ ).

## 2) Exprimarea ariei printr-o integrală

Exemplul care urmează leagă noțiunea de arie cu primitivele unei funcții şi constituie un suport pentru înțelegerea proprietăților integralei.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, iar graficul acestei funcții este parabola $\mathcal{P}$ (Fig.1.a)

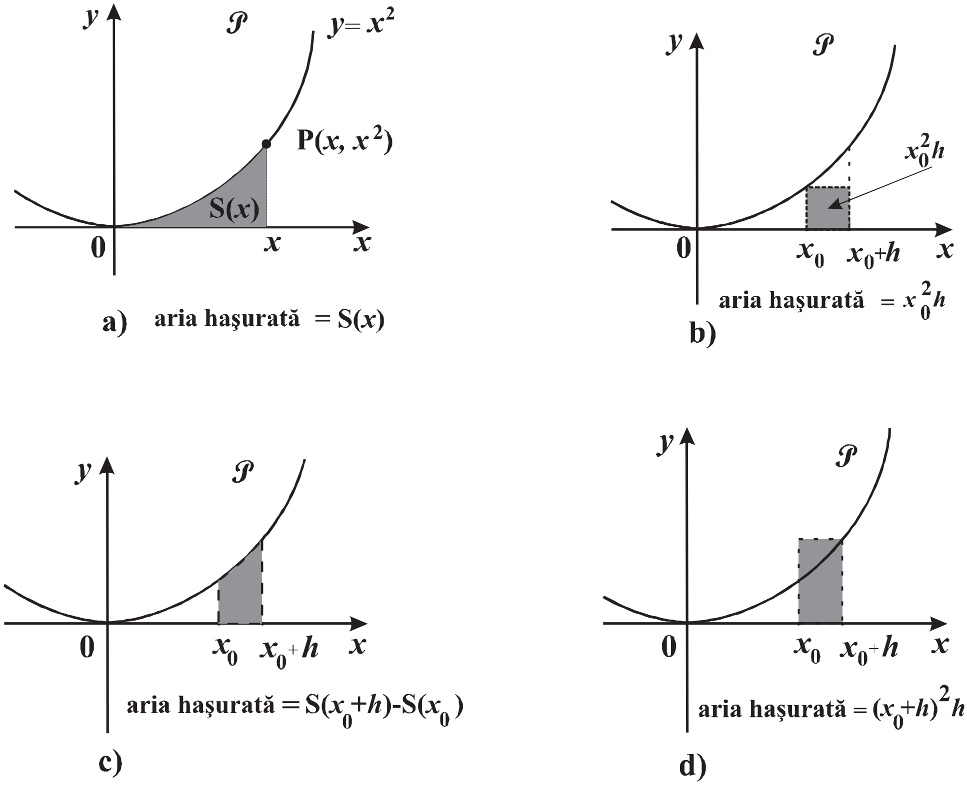



**Fig. 1**

Pentru orice $x \geq 0$, notăm cu $S(x)$ aria domeniului delimitat de axa O*x*, de parabola $\mathscr{P}$ şi dreapta paralelă cu O*y* dusă prin punctul *P* (de pe parabolă) de abscisă *x* (pe figură domeniul apare haşurat). Fie $x_0 \geq 0$, un număr real fixat şi $h > 0$. Atunci: $x_0^2 h \leq S(x_0 + h) - S(x_0) \leq (x_0 + h)^2 h$ (Fig. 1. b,c,d) sau

$$x_0^2 \leq \frac{S(x_0 + h) - S(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} \leq (x_0 + h)^2, (1).$$

Trecem în (1) la limită după $h \to 0$ şi se obţine (criteriul „cleştelui”) $S_d^{'}(x_0) = x_0^2$.

Pentru $h < 0$ cu $x_0 + h \geq 0$ au loc inegalităţile de sens contrar şi deci $S_d^{'}(x_0) = x_0^2$. Din $S_d^{'}(x_0) = S_d^{'}(x_0) = x_0^2$ rezultă $S'(x_0) = x_0^2 = f(x_0)$. Cum $x_0 \in [0, \infty)$ a fost ales arbitrar deducem că $S : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă cu $S'(x) = f(x),\ \forall x \geq 0$ şi în plus $S(0) = 0$. Această funcţie este $S(x) = \dfrac{x^3}{3}$. Spunem că *S* este o primitivă a lui $f$ ($S$ derivabilă şi $S' = f$ ).

**Schematic:**

| $x \to f(x)$<br>Funcţia dată | $\longrightarrow$ | Se caută funcţia<br>$x \to S(x)$<br>astfel încât $S'(x) = f(x), \forall x$ |
|---|---|---|

Mai general, vom prezenta o schiţă a interpretării funcţiei primitive ca arie a unei figuri curbilinii. Deoarece noţiunea de primitivă este legată istoriceşte în mod foarte strâns de problema determinării ariei, o vom ilustra în cele ce urmează.

Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$ o funcţie continuă. Figura mărginită de graficul funcţiei, axa O*x* şi de dreptele $x = a$, $x = b$ o vom numi **trapez curbiliniu** (Fig. 2.a)

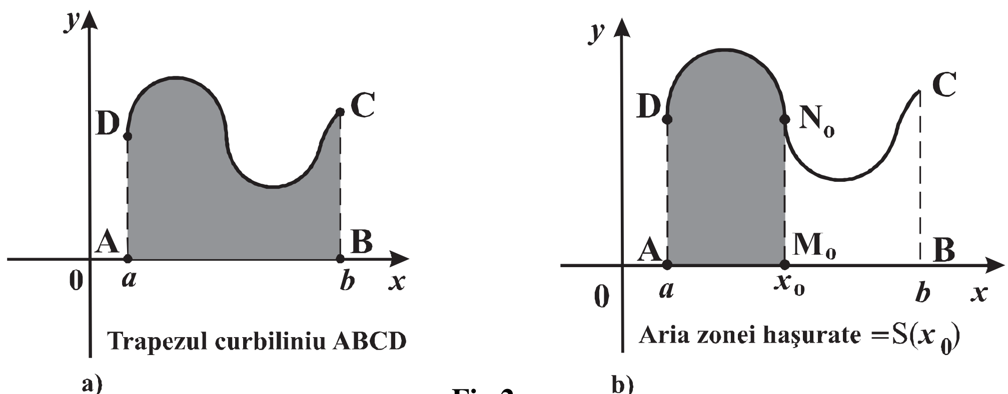
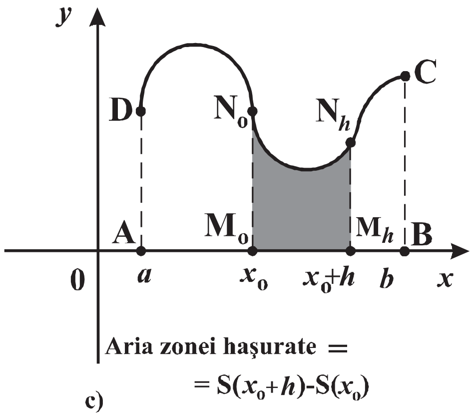



**Fig.2**



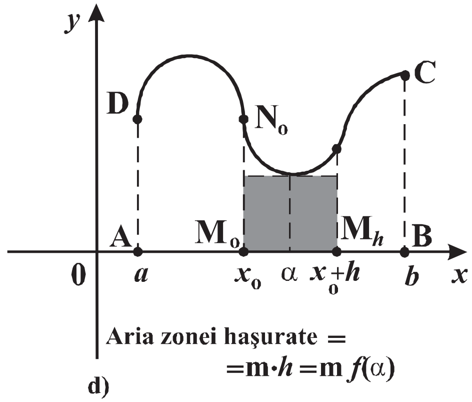
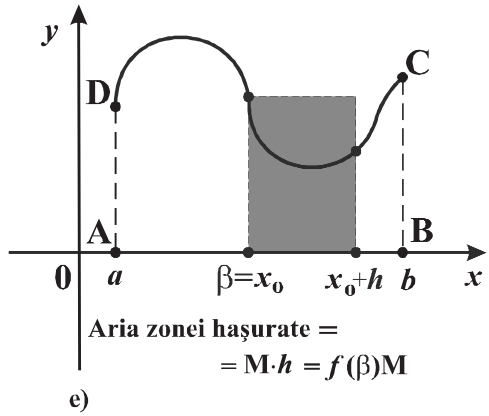




**Fig. 2**




Studiind aria figurii variabile $AM_0N_0D$ (Fig.2.b) cuprinsă între graficul funcției $f$, axa O$x$ şi dreptele $x=a, x=x_0$ (unde $x_0$ este abscisa punctului $M_0$ situate între A şi B) vom încerca să determinăm aria figurii ABCD. Când $x_0$ variază, aria figurii $AM_0N_0D$ va lua diferite valori, dar de fiecare dată **o valoare bine precizată**, ceea ce arată că aria trapezului curbiliniu $AM_0N_0D$ este o anumită funcție de $x_0$ definită pe intervalul $[a,b]$, pe care o vom nota cu $S(x_0)$.

Deci $S:[a,b]\to[0,\infty)$. Pentru $x=x_0+h, h>0$, obținem aria $S(x_0+h)$. Atunci $S(x_0+h)-S(x_0)$ (Fig. 2.c) reprezintă creşterea ariei în punctul $x=x_0+h$, corespunzătoare creşterii argumentului, $x_0+h-x_0=h$. Funcția $f$ fiind continuă pe $[x_0,x_0+h]$ este mărginită şi îşi atinge marginile pe acest interval (Weierstrass). Deci există numerele $m$, $M$ pentru care $m=\inf\limits_{x_0\le x\le x_0+h} f(x)=f(\alpha)$, $M=\sup\limits_{x_0\le x\le x_0+h} f(x)=f(\beta)$, $\alpha,\beta\in[x_0,x_0+h]$ şi $m\le f(x)\le M, \forall x\in[x_0,x_0+h]$.

De aici $mh\le S(x_0+h)-S(x_0)\le M\cdot h$ (Fig. 2.c), d), e)) sau

$m\le\dfrac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h}\le M$. Dacă $h\to 0$, atunci datorită continuității lui $f,m,M$

vor tinde către $f(x_0)$ şi deci $S'_d(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{S(x_0+h) - S(x_0)}{x_0 + h - x_0} = f(x_0)$. Analog se arată că $S'_s(x_0) = f(x_0)$ şi deci $S'(x_0) = f(x_0)$.

**Schematic**, derularea raționamentului de mai sus poate fi redat ca în Fig. 3.

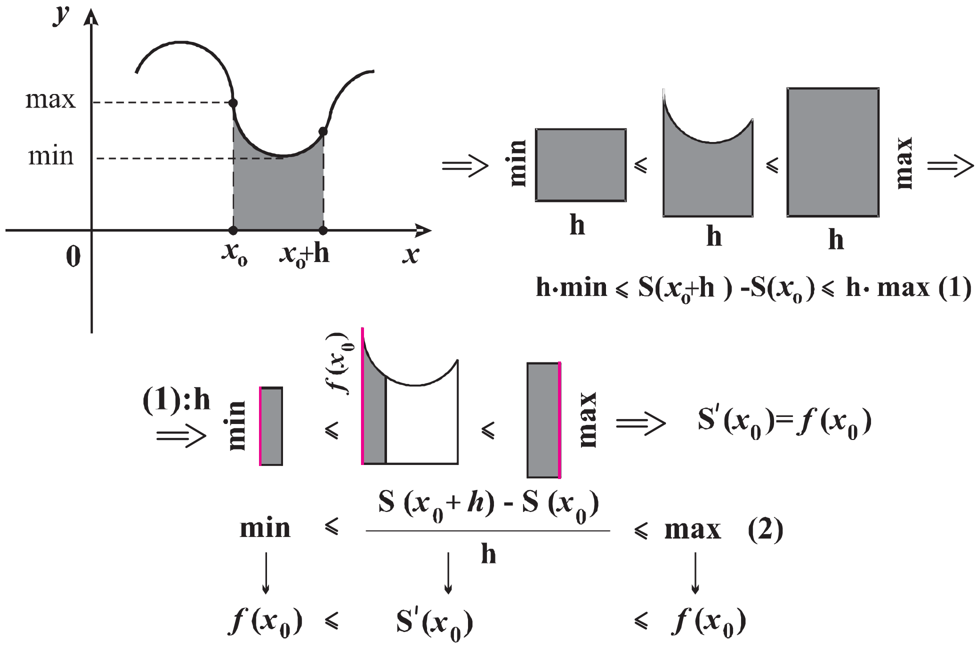



**Fig. 3**

Dacă $x_0 = a$ sau $x_0 = b$, atunci se va calcula o singură derivată laterală (la dreapta şi respectiv la stânga). S-a ajuns astfel la următoarea teoremă remarcabilă (numită de obicei teorema Leibniz-Newton).

**Derivata ariei variabile $S(x)$ în raport cu abscisa $x$ este egală cu ordonata $y = f(x)$, adică $S'(x) = f(x)$.**

Această funcție primitivă $S$ ( $S$ este o primitvă a lui $f$ dacă: 1) $S$ ***derivabilă*** pe $[a,b]$; 2) $S'(x) = f(x), \forall x \in [a,b,]$) se distinge dintre toate celelalte funcții primitive prin faptul că devine egală cu zero când $x = a$. De aceea, dacă se cunoaşte o primitivă $F$ oarecare a lui $f$ şi dacă $S(x) = F(x) + k$, $k =$ constantă, atunci $k$ se determină din

cerința $S(a)=0$ când $S(a)=F(a)+k$ şi de aici $k=-F(a)$. Aşadar $S(x)=F(x)-F(a)$.
În particular, pentru a găsi aria *S* a întregului trapez *ABCD* trebuie ca $x=b$, când avem: $S=F(b)-F(a)$.

Se notează $S(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (citim: integrală definită de la *a* la *x* din *f* ).

Din cele spuse mai sus $S'(x)=f(x), \forall x\in[a,b]$. Atunci aria trapezului curbiliniu *ABCD* este egală cu $S=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$, unde *F* este o primitivă a funcției *f* pe $[a,b,]$ (*F* are proprietățile: 1)*F* derivabilă pe $[a,b]$ şi 2) $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in[a,b]$ ).

### 3) Legea de mişcare a unui punct material

Rezolvarea unei probleme de fizică ne conduce, de asemenea, la conceptul de primitivă a unei funcții.

**Un punct mobil se deplasează pe o axă cu viteza $v(t), t\in[0,t_0]$. Să se determine spațiul $s(t)$ parcurs în $t$ unități de timp, dacă $s(0)=0$ (*condiție inițială*).**

Am văzut anul precedent, la derivate, că $s'(t)=v(t), \forall t\geq 0$ şi în acest fel ajungem ca şi în cazurile discutate mai sus **(1)** şi **2)**) la acelaşi tip de problemă:
Să determinăm o funcție derivabilă $s:[0,t_0]\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $s'(t)=v(t), \forall t\geq 0$ şi $s(0)=0$. **Funcția spațiu** *s* **de determinat** reprezintă o primitivă pentru **funcția viteză** *v* dată.

**Schematic:**

| $t\to v(t)$<br>Funcția dată | → | Se caută funcția<br>$t\to s(t)$<br>astfel încât $s'(t)=v(t), \forall t\geq 0, s(0)=0$ |
|---|---|---|

**Exemplu.** **Fie** $v(t)=t^2-t+1, t\in[0,5]$. **Atunci** $s(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t+c$ **este funcția spațiu.** **Funcția** $s$ **este derivabilă pe** $[0,5]$ **și** $s'(t)=v(t), \forall t\in[0,5]$.

**Din** $s(0)=0$ **rezultă** $c=0$ **și în final** $s(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t$ .

Analog, dacă $a$ este accelerația, atunci $v'(t)=a(t)$. Și aceasta este o problemă de tipul de mai sus.

**Schematic:**

| $t\to a(t)$ Funcția dată | $\rightarrow$ | Se caută funcția $t\to v(t)$ astfel încât $v'(t)=a(t), \forall t\geq 0, v(0)=v_0$ |
|---|---|---|

**Exemplu.** **O particulă pleacă din originea** $O$ **cu viteza** $5m/s$ **și se mișcă de-a lungul axei** $Ox$ **cu accelerația** $-3t^2$ **la momentul** $t$ **secunde după ce pleacă din** $O$.
**Să descriem mișcarea ei după 1s, 2s, 3s.**
**Din** $a(t)=v'(t)=-3t^2$ **rezultă** $v(t)=-t^3+c_1$. **Din** $v(0)=5\Rightarrow c_1=5$ **și deci** $v(t)=-t^3+5$.

**Din** $v(t)=s'(t)=-t^3+5$, **deducem** $s(t)=-\frac{t^4}{4}+5t+c_2$, **iar din** $s(0)=0$ **rezultă** $c_2=0$.

**Deci** $s(t)=-\frac{t^4}{4}+5t$ . **După** $t$ **secunde avem:** $a(t)=-3t^2, v(t)=-t^3+5, s(t)=-\frac{t^4}{4}+5t$ .

**După 1s,** $a=-3, v=4, s=\frac{19}{4}$. **După 2s,** $a=-12, v=-3, s=6$, **iar după 3s,** $a=-27$,

$v=-22, s=-\frac{21}{4}$ **(vezi Fig. 4).**

**Valoarea negativă pentru** $s$ **arată că particula se deplasează la stânga lui** $O$.

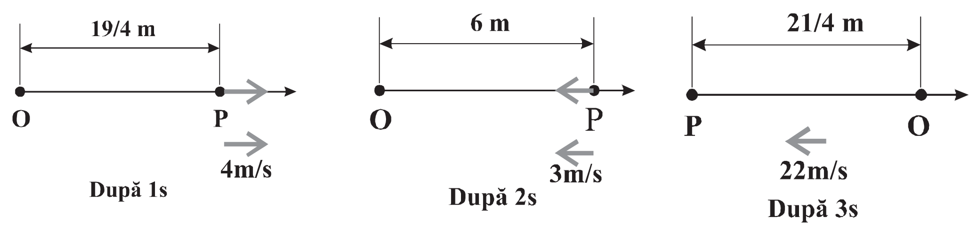
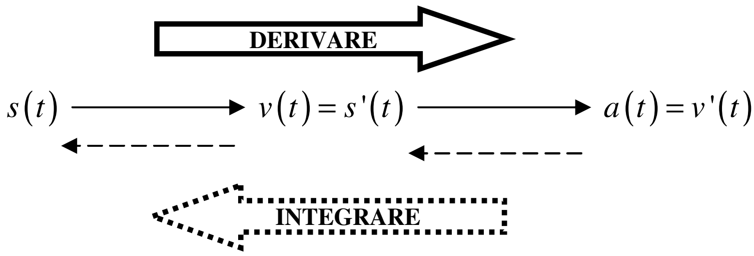


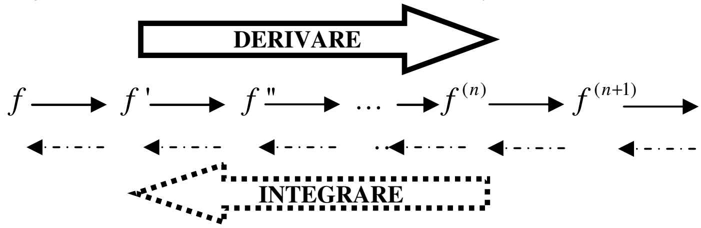

**Fig. 4**

Plecând de la legea de mișcare $t\to s(t)$, **prin derivare** se obțin $v(t)$ și respectiv $a(t)$, iar plecând de la $a(t)$, **prin integrare** se determină $v(t)$ și $s(t)$.

**Schematic:**

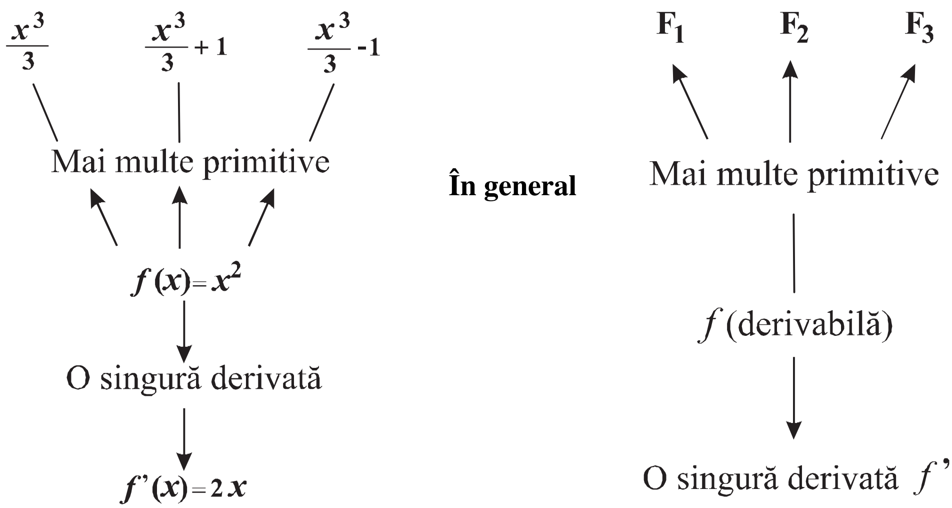



În general, dacă $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$, I interval, este, este o funcție indefinit derivabilă atunci




**Să reținem că: prin derivarea unei funcții se obține o funcție unică, iar prin integrarea unei funcții se obțin o infinitate de funcții (dacă este dată o condiție pentru primitive, atunci primitiva este unică).**

**Exemplu.**



## *Excursie matematică* (facultativ)

* * * * *

### 1) Dobânda compusă

*Am văzut în clasa a X-a, la “Creştere şi descreştere exponențială”, că dacă o sumă* $S_0$ *este depusă la o bancă cu dobânda anuală de d %, cu capitalizare, atunci după n ani suma din bancă este* $S(n)=S_0\cdot(1+d\%)^n$.

*Să analizăm cazul continuu, când suma* $S_0$ *este depusă la o bancă unde dobânda este egală cu r. Dacă dobânda după fiecare an se adaugă sumei din cont, atunci dobânda se numeşte compusă; dacă se adaugă de două ori pe an, atunci dobânda este semianuală; dacă se adaugă de patru ori pe an, atunci dobânda este trimestrială etc. Dobânda poate fi creditată în fiecare zi, fiecare oră, fiecare secundă etc. În cazul limită, dobânda poate fi creditată instantaneu. Este ceea ce economiştii numesc* ***compunere continuă****. Formula este dată de* $S(t)=S_0\cdot e^{rt}$, *unde t este măsurat în ani,* $S(t)$ *este suma din bancă după t ani,* $S_0=S(0)=$ *suma (investiția) inițială, iar r este dobânda anuală, r = dobânda nominală şi se exprimă de regulă în procente.*

*Pentru t fixat şi h o creştere mică de timp avem:*
$r\cdot h\cdot S(t)\le S(t+h)-S(t)\le r\cdot h\cdot S(t+h)$, *unde* $S(t+h)-S(t)=$ *dobânda câştigată în intervalul de timp* $[t,t+h]$.

*De aici* $r\cdot S(t)\le\dfrac{S(t+h)-S(t)}{h}\le r\cdot S(t+h)$.*Presupunem că S este funcția continuă de t. Trecând în ultimile inegalități la limită după* $h\to 0$ *rezultă* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{S(t+h)-S(t)}{h}=r\cdot S(t)$ *sau* $S'(t)=r\cdot S(t)$. *Dacă* $S(t)>0,\forall t$, *atunci* $\dfrac{S'(t)}{S(t)}=r$ *implică* $\ln S(t)=r\cdot t+c$ *sau* $S(t)=e^c\cdot e^{rt}=k\cdot e^{rt}$, *unde* $k=S(0)=S_0$.

*Deci* $S(t)=S_0\cdot e^{rt}$.

*Altfel din* $S'(t)=r\cdot S(t)$, *avem:* $S'(t)-r\cdot S(t)=0$ *sau* $S'\cdot e^{-rt}-$
$-r\cdot e^{-rt}\cdot S=0$ *sau* $\left(S\cdot e^{-rt}\right)'=0$ *sau* $S\cdot e^{-rt}=c, c=$*constantă. Deci* $S(t)=c\cdot e^{rt}$.

*Pentru* $t=0$ *rezultă* $S(0)=c$. *Deci* $S(t)=S_0\cdot e^{rt}$.

## 2) Utilizarea integrării şi derivării într-o situaţie de afaceri

*Venitul total (în mii € ) obţinut din vânzarea a $x$ (în sute) obiecte într-o anume zi este dat de $V$ , care este o funcţie de variabilă $x$ . Se ştie că $V'(x) = 20 - 4x$ .*

*a) Să se determine funcţia venit total $V$ .*

*b) Să se determine numărul de obiecte vândute într-o anume zi care maximizează venitul total.*

*R. Precizăm că $V : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ este o funcţie reală.*

*a) Din $V'(x) = 20 - 4x$, prin integrare rezultă $V(x) = 20x - 2x^2 + c$. Pentru $x = 0$, evident $V(0) = 0$. Deci $c = 0$ şi $V(x) = 20x - 2x^2$.*

*b) Se rezolvă ecuaţia $V'(x) = 0$ şi avem $20 - 4x = 0$, adică $x = 5$. Deci pentru $x = 500$ obiecte vândute într-o zi, $\max V(x) = V(5) = 50$, adică $\max V = 50000$ €.*

## 3) Creştere şi descreştere exponenţială

*Am văzut în clasa a X-a că funcţia N, care creşte sau descreşte, cu un procent constant, poate fi descrisă sub forma $N : [0,\infty) \to \mathbb{R}, N(t) = N_0 e^{kt}$,*
*$N_0 = N(0), k =$ rata de creştere. Pentru $k > 0$, N arată o **creştere exponenţială**, iar pentru $k < 0$, N descrie o **descreştere exponenţială**. În cele ce urmează găsim forma funcţiei N, din ecuaţia pe care o verifică.*

*În condiţii ideale (spaţiu nelimitat, hrană abundentă, imunitate la boli etc.) viteza de creştere a populaţiei P la momentul t este proporţională cu mărimea populaţiei la momentul t. Deci $P'(t) = kP(t), k > 0$ (numită creştere constantă – în unele cazuri dată în procente – (de exemplu $k = 3\%$ se scrie $k = 0,03$ ). Din $P(t) \neq 0 \Rightarrow \frac{P'(t)}{P(t)} = k$,*

*iar de aici prin integrare $\ln|P(t)| = kt + c$ sau $P(t) = e^c \cdot e^{kt} = P(0)e^{kt}$.*

*Altfel din $P'(t) - kP(t) = 0$ rezultă $P'(t)e^{-kt} - ke^{-kt} \cdot P(t) = 0$ sau $\left(P(t)e^{-kt}\right)' =$ $= 0$, iar de aici $P(t)e^{-kt} = c$, $c =$ constantă. Deci $P(t) = ce^{kt}$. Pentru $t = 0$, avem $P(0) = P_0 = c$. Deci $P(t) = P_0 e^{kt}$.*

*Se spune că populaţia creşte exponenţial. Modelul prezentat este un model ideal, dar în realitate (lipsă de hrană, boli etc.) viteza de creştere a populaţiei nu este continuă, proporţională cu mărimea populaţiei.*

**Exemplu.** *Numărul de bacterii într-o anumită cultură are o viteză de creştere proporțională cu numărul lor la momentul prezent. Ştiind că la momentul* $t=0$ *sunt 1000 bacterii şi că după 2 ore sunt 1500 să se determine:*

1) *numărul de bacterii din cultură la momentul* $t$.
2) *după cât timp numărul lor se va dubla.*

*R.*1) *Avem* $P(t)=1000e^{kt}$. *Din* $P(2)=1500$ *rezultă* $k=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\approx 0,203$. *De aici* $P(t)=1000e^{0,203t}$.

2) *Din* $P(t)=2000$ *rezultă* $t=\frac{\ln 2}{0,203}\approx 3,4$ *ore.*

## Probleme propuse

1.*Într-un liceu sunt 1000 elevi. Viteza cu care se răspândeşte un zvon printre ei este exponențială. Notăm* $N(t)$ *numărul elevilor din liceu care au auzit zvonul după* $t$ *zile,* $N(t)=2e^{1,24t}$.

1) *Determinați ecuația diferențială pe care o verifică* $N$.
2) *Câți elevi au aflat zvonul la început,* $t=0$*?*
3) *Câți elevi au aflat zvonul după 5 zile?*

2. *Viteza de descreştere a unei substanțe radioactive este proporțională cu cantitatea de substanță prezentă. O treime din substanța radioactivă scade la fiecare 5 ani. Astăzi avem* $A(0)=A_0$ *grame de substanță.*

1) *Să se determine constanta de descreştere şi să se determine cantitatea de substanță care rămâne după* $t$ *ani.*
2) *Să se determine timpul de înjumătățire al substanței radioactive (=timpul necesar pentru ca jumătate din substanța radioactivă să se reducă).*

3. *Din cauza inflației, prețurile cresc anual. Prețul* $P$ *după* $t$ *ani este dat de* $P(t)=P_0e^{0,05t}$*, unde* $P_0$ *este prețul inițial.*

1) *Arătați că P verifică ecuația* $P'(t)=0,05P(t)$.
2) *Dacă un litru de lapte costă* 1€*, cât va costa după un an?*
3) *Dar după 3 ani?*

4. *O casă costă 100 000€, iar valoarea ei creşte cu 5% pe an.*

1) *Determinați valoarea ei după* $t$ *ani.*
2) *Care va fi valoarea ei după 10 ani?*
3) *După câți ani casa îşi va dubla valoarea?*

*5. Producătorul unei emisiuni de televiziune doreşte să ştie cum va evolua numărul celor care-i urmăresc emisiunea. Un matematician i-a propus formula $V(t)=100\,000e^{0,095t}$, unde $t$ este numărul de săptămâni.*

*1) Câți telespectatori a avut emisiunea la început, $t=0$?*

*2) După câte săptămâni vor fi de cinci ori mai mulți telespectatori decât la început?*

* * * * *

## Exerciții propuse

**1. Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2-x$. Să se determine funcția $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care panta tangentei la graficul lui $G$ în punctul $(x,G(x))$ este $g(x), \forall x\in\mathbb{R}$ şi $G$ conține punctul $(-1,1)$.**

**2. Fie $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{1}{x}$, iar $S:[1,\infty)\to[0,\infty)$, aria domeniului delimitat de graficul lui *g*, axa *Ox* şi dreptele paralele cu *Oy*, care trec prin punctele A şi M de pe graficul lui *g* de abscise 1 şi $x(\geq 1)$. Fie $x_0\geq 1$, număr fixat.**

**1) Pentru $h>0$, arătați că $\frac{1}{x_0+h}\leq\frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h}\leq\frac{1}{x_0}$, (1).**

**2) Dacă $h<0$ şi $x_0+h\geq 1$ stabiliți o relație similară cu (1).**

**3) Deduceți că *S* este derivabilă în $x_0$ şi $S'(x_0)=\frac{1}{x_0}=g(x_0)$.**

**4) Arătați că *S* este o primitivă pe $[1,\infty)$ a lui *g*. Deduceți că $S(x)=\ln x, x\geq 1$.**

**3. Un obiect se mişcă de-a lungul unei axe cu viteza $v(t)=t^2-3t+2$ unități pe secundă. În poziția inițială (la $t=0$) obiectul se află la 2 unități la dreapta originii. Determinați poziția obiectului după 4 secunde.**

**4. Un obiect se mişcă de-a lungul unei axe cu accelerația $a(t)=2t-2$ unități pe secundă. În poziția inițială (la $t=0$) se află la 5 unități la dreapta originii. O secundă mai târziu se mişcă la stânga cu viteza de 4 unități pe secundă.
Determinați poziția obiectului după *t*=4 secunde.**

**5. Fie *a, v, s* accelerația, viteza şi respectiv spațiul parcurs de o particulă care pleacă din *O* şi se deplasează de-a lungul axei *Ox*. Determinați *v* şi *s* după timpul $t$, în cazurile:**

**1) $a=t+1, s(0)=0, v(0)=2$; 2) $a=\sin t, s(0)=2, v(0)=\frac{1}{3}$;**

**3) $a=e^t, s(0)=0, v(0)=3$; 4) $a=\frac{1}{t+1}, s(0)=1, v(0)=5$.**

**6.** **În exercițiul de mai jos, determinați $g$ dacă (pe rând)**

**1)** $g'(x)=-x+3, g(1)=0$; **2)** $g'(x)=2x+3, g(-1)=2$;

**3)** $g'(x)=x^2-3x, g(2)=1$; **4)** $g'(x)=\sin x, g(0)=3$;

**5)** $g''(x)=x+1, g'(0)=1, g(0)=-1$; **6)** $g''(x)=x^2-x, g'(0)=0, g(0)=1$;

**7)** $g''(x)=\sin x, g'(0)=-2, g(0)=1$.

**7.** **Determinați ecuația curbei $y=g(x)$ dacă se dă panta $y'$ și punctul $A(x_0,y_0)$ aparține curbei (în cazurile):**

**1)** $y'(x)=2x+1,(1,3)$; **2)** $y'(x)=e^x,(0,5)$; **3)** $y'(x)=\dfrac{1}{x^2+1},(0,1)$.

**8.** **Să se determine soluțiile generale ale ecuațiilor diferențiale:**

**1)** $y'=3x+1$; **2)** $y'=2x^2-3x$; **3)** $y'=2x^3-3x^2+x$.

## 1.4. PRIMITIVELE UNEI FUNCȚII. INTEGRALA NEDEFINITĂ A UNEI FUNCȚII

Fie $g: I\to\mathbb{R}, I$ interval. Ne propunem să determinăm o funcție derivabilă $G: I\to\mathbb{R}$, care să aibă proprietatea că în fiecare punct al intervalului *I* derivata ei să fie $G'(x)=g(x), \forall x\in I$. Funcția *G* se numeşte **funcție primitivă** a funcției $g$ pe intervalul *I*.

Problema determinării primitivei unei funcții date conține alte trei probleme:

**a) O problemă de existență.** Trebuie să arătăm că problema pusă nu este fără obiect, adică astfel de funcții *G* există.

**b) Gradul de generalitate al soluției.** Trebuie cercetat, în cazul când există, dacă soluția este unică sau sunt mai multe soluții; în cazul când soluția nu este unică să găsim forma ei generală.

**c) Determinarea funcției *G*.** Trebuie să stabilim metodele pentru determinarea funcției *G* a cărei derivată este *g*.

Pentru punctul **b)** răspundem acum. Să presupunem că există funcții *G* şi fie $G_1, G_2$ două primitive. Avem $G_1'(x)=G_2'(x)=g(x), \forall x\in I$. De aici $(G_1-G_2)'(x)=0, \forall x\in I$. Atunci (o consecință a teoremei lui Lagrange) $G_1(x)-G_2(x)=c, \forall x\in I$, unde *c* este o constantă arbitrară.

Aşadar am obținut rezultatul următor:

> **Dacă există o primitivă *G*, atunci există o infinitate care diferă de *G* printr-o constantă arbitrară.**

Toate primitivele se obțin dintr-una (din $G$) printr-o deplasare paralelă cu axa $Oy$ (Fig. 5), deci soluția generală (dacă există) este formată dintr-o **familie de curbe paralele,** numite astfel deoarece tangentele la curbele din familie în punctele de intersecție cu o paralelă la axa $Oy$, $x = x_0$ sunt paralele, $\operatorname{tg}\theta = \left[G(x)+C\right]'_{x=x_0} = g(x_0)$. S-a văzut la capitolul Derivate că dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcție cunoscută (dată) derivabilă pe $I$, atunci $f' : I \to \mathbb{R}$ se poate calcula (afla) şi se numeşte funcția derivată a lui $f$.

Este posibil să inversăm această problemă în sensul schimbării rolurilor funcțiilor cunoscute (date) şi calculate (aflate).

Într-adevăr dacă se consideră o funcție $g : I \to \mathbb{R}$ cunoscută ca o derivată, atunci să se găsească (afle, determine) o funcție $G : I \to \mathbb{R}$ derivabilă cu proprietatea $G' = g$.

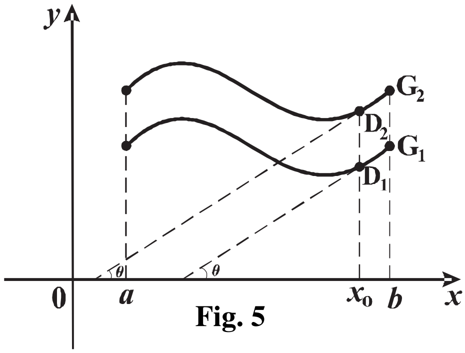


**Fig. 5**

O astfel de funcție $G$ se numeşte **primitivă (antiderivată)** a lui $g$ pe $I$. De obicei $I$ este interval din $\mathbb{R}$.

**Procedeul (operația) prin care se determină primitivele unei funcții se numeşte integrare (antiderivare).**

A cunoaşte o funcție ca derivată revine la a cunoaşte "o primitivă" a funcției.
Într-adevăr fie:

1) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^3$ (funcția dată), pentru care $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g'(x) = 3x^2$ (funcția aflată);
2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 1 - \sin x$, pentru care $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g'(x) = -\cos x$;
3) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \operatorname{arctg} x$, pentru care $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Atunci "o primitivă" pentru

1') $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}$ (funcția dată), este $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G(x) = x^3$ (funcția aflată) ($G$ este derivabilă şi $G'(x) = \left(x^3\right)' = 3x^2 = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$);

2') $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -\cos x$ este $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G(x) = 1 - \sin x$ ($G$ este derivabilă şi $G'(x) = (1 - \sin x)' = \cos x = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$); 3') $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, este $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G(x) = \operatorname{arctg} x$ ($G$ este derivabilă şi $G'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

Utilizarea articolului nehotărât în exprimarea “o primitivă” a lui $g$ nu este o neglijență gramaticală, ci vine să atragă atenția că este vorba de o primitivă a lui $g$ din mai multe posibile (altfel spus primitiva unei funcții **nu este unic determinată**). De exemplu, pentru funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2$, funcțiile $G_1,G_2,G_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ G_1(x)=\frac{x^3}{3}$, $G_2(x)=\frac{x^3}{3}+1,\ G_3(x)=\frac{x^3}{3}-1$ sunt trei primitive ale lui $g$.

**Mulțimea tuturor primitivelor unei funcții $g:I\to\mathbb{R}$ se notează prin simbolul $\int g(x)dx$ (citim: integrală nedefinită din *g* de *x* de *x*).**

**Observații. 1)** Determinarea unei primitive pentru o funcție dată poate avea mai multe soluții.

Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x$. Atunci funcțiile $G_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ G_k(x)=\frac{x^2}{2}+k,\ \ k\in\mathbb{R}$ sunt primitive ale lui $g$ pe $\mathbb{R}$ şi sunt o infinitate.

**2)** Determinarea unei primitive pentru o funcție poate fi dificilă sau foarte dificilă (**în orice caz operația de integrare este de cele mai multe ori mai dificilă decât cea de derivare**). De exemplu pentru $g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{1}{\cos x}$, avem $G:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ G(x)=\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}$ este o primitivă a lui $g$ pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, care nu este uşor de găsit dacă nu se cunoaşte forma lui $G$.

**3)**Determinarea unei primitive poate fi o problemă fără soluție. Cele mai multe funcții pe care le analizăm sunt funcții continue, care vom vedea mai târziu, sunt funcții care admit primitive (pe domeniul de continuitate). Existența unei primitive nu garantează exprimarea ei cu ajutorul funcțiilor uzuale (polinomiale, raționale, radical, exponențială, logaritmică, trigonometrice (directe şi inverse) etc.).

Aşa sunt funcțiile continue: $g_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g_1(x)=\cos x^2,\ g_2:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $g_2(x)=\frac{\sin x}{x},\ g_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g_3(x)=e^{-x^2},\ g_4:(1,\infty)\to\mathbb{R},\ g_4(x)=\frac{1}{\ln x}$.

Cu aceste elemente putem defini riguros noțiunea de primitivă a unei funcții.

**Definiție.** Fie $g:I\to\mathbb{R}$, $I$ interval. Funcția $g$ **admite primitive pe** $I$ (se mai spune că $g$ este **antiderivabilă pe** $I$) dacă există $G:I\to\mathbb{R}$ cu proprietățile:

1) $G$ este derivabilă pe $I$;
2) $G'(x)=g(x),\ \forall x\in I$

**Observații: 1)** Întotdeauna **trebuie precizată** mulțimea pe care funcția dată admite primitive.
**2)** Funcția *G*, din definiție, se numește o **primitivă** a lui *g* (sau încă se mai spune că *G* este o **antiderivată** a lui *g* pe *I*). Dacă *G* există se spune că *g* este **primitivabilă** pe *I*. Noi vom folosi exprimarea "*g* admite primitive pe *I*", iar "*G* este o primitivă a lui *g*".
**3)** Dacă $I=[a,b]$, atunci $G'(a)=G_d'(a)$ (se ia derivata la dreapta în $x=a$) şi $G'(b)=G_s'(b)$ (derivata lui *G* la stânga în $x=b$).
Să reținem că integrarea are un avantaj. Ne permite să verificăm rezultatul. Dacă derivăm funcția $(G)$ obținută prin integrare, atunci trebuie să obținem funcția ***g***.
Operația de integrare o reprezentăm prin simbolul $\int$ care , este litera "s" alungită, fiind prima literă a cuvântului sumă, care aşa cum vom vedea are legătură cu integrarea, fiind un alt aspect al ei.
Diferențiala $dx$ este scrisă după funcția care se integrează, pentru a indica variabila independentă utilizată pentru diferențiere şi variabila care este utilizată pentru integrare. Deci, $\int f(x)dx$ spune că $f(x)$ este integrată în raport cu $x$.
**4)** Dacă *G*=*g* , atunci egalitatea $g'=g$ reprezintă o **ecuație diferențială liniară de ordinul întâi.**

**Exemple. 1. Pentru funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2$, o primitivă a ei pe $\mathbb{R}$ este funcția $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, G(x)=\frac{x^3}{3}$, deoarece *G* este funcție derivabilă şi $G'(x)=x^2=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$.**

**2. Funcția $g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ are ca primitivă pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ funcția $G:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, g(x)=\operatorname{tg} x$, deoarece *G* este derivabilă şi în plus**

$$G'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=g(x), \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

**Definiție.** Fie $g:I\to\mathbb{R}$ (*I* interval) o funcție care admite primitive pe $I$.
Mulțimea primitivelor lui *g* se numeşte **integrala nedefinită a lui *g*** şi se notează prin

$$\int g(x)dx=\{G:I\to\mathbb{R} \mid G=\text{primitivă a lui } g\}$$

Operația de detereminare a primitivelor unei funcții se numeşte **integrare.**

**Observații. 1)** Să reținem că **integrala nedefinită este o mulțime infinită de funcții**, în timp ce primitiva este o funcție.
**2)** Expresia $g(x)dx$ se numeşte **element de integrare**, $g(x)$ este **integrandul** iar $x$ **variabila de integrare** şi în plus $g(x)dx = G'(x)dx = dG(x)$ este diferențiala funcției $G$ (despre diferențiala unei funcții derivabile vom vorbi la Metode de integrare – integrarea prin părți).
Avem: 1) $d\int g(x)dx = g(x)dx$ (sau cum $\int g(x)dx$ este o funcție de $x$, $\left(\int g(x)dx\right)' = g(x)$); 2) $\int dG(x) = G(x) + c$ sau $\int G'(x)dx = G(x) + c$ ($\int$ şi $d$ se "reduc" reciproc, numai că la $G$ trebuie să adunăm o constantă $c$. În acest sens cele două operații de diferențiere şi integrală sunt operații inverse una alteia).
Într-adevăr, pentru 1), $d\int g(x)dx = d(G(x)+c) = dG(x) = G'(x)dx = g(x)dx$, iar pentru 2) avem $\int dG(x) = \int G'(x)dx = G(x) + c$.
**Să reținem că:**

$$\text{g (dată derivabilă)} \xrightarrow[\text{determinăm derivata}]{\text{Derivare}} g'\text{(unică)}$$

$$\int g(x)dx \xleftarrow[\text{determinăm primitivele}]{\text{Integrare}} g\ \text{(dată)}$$

**Exemple. 1. O primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = x^3$ este $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,**

**$F(x) = \dfrac{x^4}{4}, x\in\mathbb{R}$, deoarece $F$ este derivabilă şi $F'(x) = \left(\dfrac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.**

**2. O primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2^x$ este $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x) = \dfrac{2^x}{\ln 2}$, pentru că $F$ este derivabilă şi $F'(x) = \left(\dfrac{2^x}{\ln 2}\right)' = 2^x = f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.**

**3. O primitivă pe $(-a,a), a>0$ a funcției $f:(-a,a)\to\mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ este funcția**

**$F:(-a,a)\to\mathbb{R}, F(x) = \arcsin\dfrac{x}{a}$ deoarece $F$ este derivabilă pe $(-a,a)$ şi**

$$F'(x)=\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)'=\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=f(x),\forall x\in(-a,a).$$

**4. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția *G* să fie o primitivă a funcției *g*, unde $g,G:\left(-\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{1+2x}, G(x)=(ax+b)\sqrt{1+2x}$.**

**R. *G* este o funcție derivabilă. Fiind produs de funcții derivabile, avem:**

**$G'(x)=a\sqrt{1+2x}+\frac{ax+b}{\sqrt{1+2x}}$. Din $G'(x)=g(x),\forall x>-\frac{1}{2}$ se obține egalitatea**

**$a\sqrt{1+2x}+\frac{ax+b}{\sqrt{1+2x}}=\sqrt{1+2x},\forall x>-\frac{1}{2}\Leftrightarrow a(1+2x)+ax+b=1+2x,\forall x>-1\Leftrightarrow 3ax+$**

**$+a+b=1+2x,\forall x>-\frac{1}{2}$. De aici $3a=2, a+b=1$ când $a=\frac{2}{3}, b=\frac{1}{3}$.**

**Deci $G(x)=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}$.**

Următorul rezultat ne dă informații despre două primitive ale unei funcții pe un interval şi cum se pot genera toate primitivele funcției dacă se cunoaşte una din ele. Mai precis are loc următoarea:

**Teoremă.** Fie $g:I\to\mathbb{R}$, $I$ interval din $\mathbb{R}$.

**1)** Dacă $G_1,G_2:I\to\mathbb{R}$ sunt două primitive ale lui *g* pe *I*, atunci $G_1(x)-G_2(x)=c,\forall x\in I, c=$ constantă reală.

**Două primitive ale unei funcții *pe un interval* diferă printr-o constantă.**

**2)** Dacă *G* este o primitivă a lui *g* pe *I*, atunci orice altă primitivă a lui *g* este de forma $G+c, c\in\mathbb{R}$.

**Dacă se cunoaşte o primitivă a unei funcții *pe un interval*, atunci orice altă primitivă se obține prin adăugarea unei constante reale.**

**Demonstrație. 1)** Din ipoteză $G_1,G_2$ sunt funcții derivabile pe *I* şi $G_1'=G_2'=g$. De aici $(G_1-G_2)'=0$. Atunci, via corolar al teoremei lui Lagrange, există o constantă $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $G_1-G_2=c$.

**2)** Fie $H:I\to\mathbb{R}$ o altă primitivă a lui *g* pe *I*. Deci *H* este derivabilă şi $H'=g=G'$. Conform cu **1)** există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $H-G=c$ sau $H=G+c$. ■

**Observații. 1)** Din prima parte a teoremei deducem că pentru o funcție **definită pe un interval, dacă există două primitive, atunci ele diferă printr-o constantă.**
Dacă se extinde definiția primitivelor pentru funcții definite pe reuniune de intervale, atunci afirmația din teoremă nu mai este adevărată.
Într-adevăr, fie $g:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R},\ g(x)=x$.
Atunci funcțiile:

$G_1,G_2:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R},\ G_1(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+1, & x<0\\ \frac{x^2}{2}-1, & x>0\end{cases},\ \mathrm{G}_2(x)=\frac{x^2}{2}$ sunt primitive pentru $g$ pe $\mathbb{R}-\{0\}$, dar $G_1(x)-G_2(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$, care evident nu este o funcție constantă pe $\mathbb{R}-\{0\}$.

**2)** A doua parte a teoremei ne precizează că dacă o funcție are o primitivă, atunci din această primitivă se pot obține toate primitivele prin adăugarea unei constante arbitrare la primitiva dată.
Deci, integrala nedefinită a funcției $g:I\to\mathbb{R}$ este mulțimea $\int g(x)dx=G+\mathcal{C}$, unde $G$ este o primitivă a lui $g$ pe $I$, iar $\mathcal{C}$ se numeşte **constantă de integrare**, $\mathcal{C}=\{c:I\to\mathbb{R}, c(x)=c, \forall x\in I, c\in\mathbb{R}\}$ (reprezintă mulțimea funcțiilor constante definite pe $I$). Sunt uşor de demonstrat egalitățile de mulțimi:
1) $\mathcal{C}+\mathcal{C}=\mathcal{C}$; 2) $\lambda\mathcal{C}=\mathcal{C}, \forall\lambda\in\mathbb{R}, \lambda\neq 0$.
Vom adopta scrierea $\int g(x)dx=G(x)+\mathcal{C}$ şi deci $\int G'(x)dx=G(x)+\mathcal{C}$.
Avem $\int g(x)dx+\mathcal{C}=\int g(x)dx$.

**3)** Dacă $g$ este o funcție care admite primitive, atunci am văzut că mulțimea primitivelor este infinită. În ce condiții o primitivă poate fi individualizată?
Dacă $x_0\in I$ şi $y_0\in\mathbb{R}$ atunci există o unică primitivă $G:I\to\mathbb{R}$, cu proprietatea $G(x_0)=y_0$.
Într-adevăr, dacă $H:I\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui $g$ pe $I$, atunci o altă primitivă $G:I\to\mathbb{R}$ a lui $g$ este $G=H+c$. Cum $G(x_0)=y_0$ se obține $c=y_0-H(x_0)$.
Condiția $G(x_0)=y_0$ este numită adesea **condiție inițială**, cu referiri la anumite situații din fizică. Rezultatul obținut corespunde situației grafice când printr-un punct ($x_0, y_0=G(x_0)$) trece o singură curbă din mulțimea celor care reprezintă primitivele lui $g$.

**Exemplu.** Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2$, pentru care $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+\mathcal{C}$, (1).

În Fig. 6 sunt specificați câțiva membrii din familia (1) pentru diferite valori ale lui *c*. Fie $G(x)=\frac{x^3}{3}+c$ o primitivă a lui *g*, cu proprietatea $G(1)=\frac{4}{3}$. Atunci $c=1$.

**Pentru determinarea mulțimii primitivelor unei funcții care admite primitive utilizăm unele constante, mai simple.**

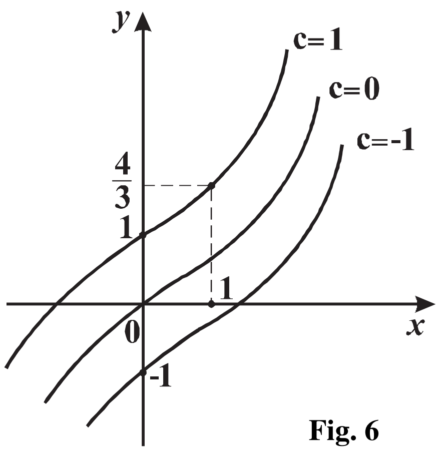



Fig. 6

Plecând de la formulele de derivare ale funcțiilor elementare, obținem "prin inversarea lor" integralele nedefinite uzuale. De exemplu

$(\sin x)'=\cos x, x\in\mathbb{R}\Rightarrow\int\cos x dx=$

$\sin x+\mathcal{C}, x\in\mathbb{R}$.

Egalitățile din tabelul de mai jos al integralelor nedefinite uzuale se verifică prin derivare. Este indicată o primitivă *G* a lui *g*, unde *c* din structura lui *G* este o funcție constantă din $\mathcal{C}, c\in\mathcal{C}$.

**Tabel de integrale nedefinite**

| | Funcția *g* | Primitiva *G* | Interva-lul | Integrala nedefinită |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $a$ (funcția constantă) | $ax+c$ | $\mathbb{R}$ | $\int adx=ax+\mathcal{C}$ |
| 2 | $x^\alpha,\alpha\neq-1$ (funcția putere cu exponent real) | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$ | $(0,\infty)$ | $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\mathcal{C}$ |
| 3 | $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert+c$ | $(0,\infty)$ sau $(-\infty,0)$ | $\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+\mathcal{C}$ |
| 4 | $a^x,a>0,a\neq1$ (funcția exponențială) | $\frac{a^x}{\ln a}+c$ | $\mathbb{R}$ | $\int a^xdx=\frac{a^x}{\ln a}+\mathcal{C}$, $\int e^xdx=e^x+\mathcal{C}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | $\dfrac{1}{x^2-a^2}, a\neq 0$ | $\dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{x-a}{x+a}\right\|+c$ | $(-\infty,-a)$ sau $(-a,a)$ sau $(a,\infty)$ | $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}= =\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+\mathcal{C}$ |
| 6 | $\dfrac{1}{x^2+a^2}, a\neq 0$ | $\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+c$ | $\mathbb{R}$ | $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\mathcal{C}$ |
| 7 | $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a\neq 0$ | $\arcsin\dfrac{x}{a}+c$ | $(-a,a)$ | $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+\mathcal{C}$ |
| 8 | $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}, a\neq 0$ | $\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c$ | $\mathbb{R}$ | $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\mathcal{C}$ |
| 9 | $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, a\neq 0$ | $\ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|+c$ | $(-\infty,-a)$ sau $(a,\infty)$ | $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|+ +\mathcal{C}$ |
| 10 | $\sin x$ | $-\cos x+c$ | $\mathbb{R}$ | $\int\sin x dx=-\cos x+\mathcal{C}$ |
| 11 | $\cos x$ | $\sin x+c$ | $\mathbb{R}$ | $\int\cos x dx=\sin x+\mathcal{C}$ |
| 12 | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\operatorname{tg} x+c$ | $\left((2k+1)\frac{\pi}{2},(2k+3)\frac{\pi}{2}\right)$ $k\in\mathbb{Z}$ | $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+\mathcal{C}$ |
| 13 | $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ | $-\operatorname{ctg} x+c$ | $(k\pi,(k+1)\pi)$ $k\in\mathbb{Z}$ | $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+\mathcal{C}$ |
| 14 | $\operatorname{tg} x$ | $-\ln\|\cos x\|+c$ | $\left((2k+1)\frac{\pi}{2},(2k+3)\frac{\pi}{2}\right)$ $k\in\mathbb{Z}$ | $\int\operatorname{tg} x dx=-\ln\|\cos x\|+\mathcal{C}$ |
| 15 | $\operatorname{ctg} x$ | $\ln\|\sin x\|+c$ | $(k\pi,(k+1)\pi)$ $k\in\mathbb{Z}$ | $\int\operatorname{ctg} x dx=\ln\|\sin x\|+\mathcal{C}$ |

**Observații. 1)** De obicei primitiva $G$ se ia cu funcția constantă egală cu zero, $c=0$, dacă asupra lui $G$ nu sunt condiții inițiale.

**2)** Probați că funcția $G$ este o primitivă a lui $g$, observând că $G$ este funcție derivabilă și că verifică egalitatea $G'=g$.

De exemplu, pentru integrala de la **6** (vezi tabelul de integrale nedefinite), $G(x)=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c$ .Avem $G'(x)=\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)'+c'=\frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}+0=$

$=\frac{1}{x^2+a^2}=g(x)$.

**3)** Următoarele integrale nu se pot exprima prin intermediul funcțiilor elementare: $\int e^{-x^2}dx$ (intergrala lui Poisson), $\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx$ (integralele lui Fresnel), $\int \frac{dx}{\ln x}, \int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{\cos x}{x}dx$. Totuşi ele se pot exprima prin serii infinite de puteri $\left(\int \frac{\sin x}{x}dx = c + x - \frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}+...\right)$. În acest capitol vom studia funcții pentru care primitivele se exprimă cu ajutorul funcțiilor elementare. Pentru a găsi primitivele vom utiliza tabelul de integrale nedefinite, câteva tehnici de integrare şi operațiile algebrice cu primitive.

**Problema existenței primitivelor. Proprietăți ale integralei nedefinite**

În acest paragraf evidențiem o clasă largă de funcții care admit primitive pe un interval. În acelaşi timp vedem care sunt operațiile algebrice pe mulțimea funcțiilor care admit primitive, care generează de asemenea funcții ce admit primitive.
Mai precis are loc următoarea

**Teoremă.** Orice funcție continuă $g: I \to \mathbb{R}$ , *I* interval, admite primitive pe *I.*

Demonstrația acestui rezultat va fi dată în capitolul următor. Teorema dă o condiție suficientă ca o funcție să admită primitive.
În determinarea unei primitive *F* a lui *f* continuă, *f* funcție multiformă, trebuie să ținem seamă că orice primitivă este continuă. Din această condiție, numită "lipirea constantelor" se obține legătura care apare între constantele din expresia primitivei. Condiția $F'=f$ (consecință a teoremei lui Lagrange) are loc în punctele de trecere de la o formă la alta a lui *f.* Dacă *f* nu este continuă, atunci trebuie arătat că $F'=f$ .
Reciproca acestei teoreme este falsă, adică există funcții discontinue care admit primitive.

**Aşadar, o modalitate de a stabili dacă o funcţie admite primitive pe un interval este de a-i studia continuitatea. Dacă funcţia este continuă, atunci admite primitive.**

**Exemplu.** **Să se arate că $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases} e^x, x\ge 0 \\ x+1, x<0 \end{cases}$, admite primitive pe $\mathbb{R}$. Să se determine o astfel de primitivă.**

**R.** Evident $g$ este continuă pe $\mathbb{R}^*$, fiind definită pe $[0,\infty)$ prin intermediul funcţiei exponenţiale (care este continuă pe $\mathbb{R}$, deci şi pe restricţia $[0,\infty)$ ) iar pe $(-\infty,0)$ prin funcţie polinomială (care este continuă pe $\mathbb{R}$, deci şi pe restricţia $(-\infty,0)$ ).

Studiem continuitatea în $x=0$.

Din $\lim\limits_{x\nearrow 0} g(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} g(x)=g(0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\nearrow 0}(x+1)=\lim\limits_{x\searrow 0} e^x=g(0)=1$, se deduce că $g$ este continuă şi în $x=0$. Deci $g$ este continuă pe $\mathbb{R}$. Prin urmare $g$ admite primitive pe $\mathbb{R}$. Pentru a calcula o primitivă $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se calculează pe $[0,\infty), \int e^x dx$ iar pe $(-\infty,0), \int (x+1)dx$.

Avem $G(x)=\begin{cases} e^x+k_1, x\ge 0 \\ \dfrac{x^2}{2}+x+k_2, x<0 \end{cases}$. Legătura între constantele $k_1,k_2$ se obţine din cerinţa de continuitate în $\boldsymbol{x=0}$ a funcţiei $G$ ($G$ fiind derivabilă în $x=0$, implică $G$ este continuă în $x=0$ ).

Avem: $G$ este continuă în $x=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\nearrow 0} G(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} G(x)=G(0)\Leftrightarrow k_2=1+k_1$.

Se poate lua $k_1=0$ şi deci $k_2=1$. Prin urmare forma finală a unei primitive $G$ pentru $g$ este $G(x)=\begin{cases} e^x, x\ge 0 \\ \dfrac{x^2}{2}+x+1, x<0 \end{cases}$.

Din construcţie avem că $G$ este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ şi $G'(x)=g(x), x\in\mathbb{R}^*$. Se verifică simplu că $G'(0)=g(0)=1$. (De fapt ultima verificare nemaifiind necesară, pentru că $g$ fiind continuă, admite primitive. Deci este necesar să găsim doar relaţia dintre constantele $k_1,k_2$ ).

**Observaţie.** După cum se observă din acest exemplu, pentru a calcula o primitivă a funcţiei $g$ pe întreaga mulţime $\mathbb{R}$, a trebuit să calculăm primitive ale lui $g$ pe submulţimile $(-\infty,0),[0,\infty)$ din $\mathbb{R}$ şi apoi să realizăm "lipirea" lor în punctul $x=0$ pentru a obţine o primitivă $G$ a lui $g$ pe întreaga mulţime $\mathbb{R}$.

Legătura între constantele $k_1$ şi $k_2$ se realizează din cerinţa de continuitate a lui $G$ în punctul $x=0$ (dacă ştim că $g$ admite primitive, atunci $G$ este derivabilă şi prin urmare continuă). Verificarea derivabilităţii lui $G$ în punctul de "lipire" $x=0$ nu mai este necesară (are loc imediat), aceasta având loc deoarece $g$ fiind continuă pe $\mathbb{R}$, $g$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Atragem atenția că, în acest caz, integrala nedefinită a lui $g$ este $\int g(x)dx = G(x) + \mathcal{C}$, cu $G$ determinată mai sus.

În general dacă $g : I \to \mathbb{R}$, unde $I = [a,b]$

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), x \in [a, x_1] = I_1 \\ g_2(x), x \in (x_1, x_2] = I_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_k(x), x \in (x_{k-1}, b] = I_k \end{cases}$$

, este o funcție continuă pe $I$, atunci pentru a calcula o primitivă $G$ a lui $g$ se calculează: pe $I_1, \int g_1(x)dx$; pe $I_2, \int g_2(x)dx$; …; pe $I_k, \int g_k(x)dx$ şi se alege câte o primitivă dintre mulțimile de mai sus:

$G_1 \in \int g_1(x)dx, G_2 \in \int g_2(x)dx, ..., G_k \in \int g_k(x)dx$, după care "arhitectura" lui $G$

este: $$G(x) = \begin{cases} G_1(x) + c_1, \ x \in I_1 \\ G_2(x) + c_2, \ x \in I_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ G_k(x) + c_k, \ x \in I_k \end{cases}$$

, unde constantele $c_1, c_2, ..., c_k$ se determină din condiția de continuitate a lui $G$ în punctele de "lipire" $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$. Uneori se utilizează în determinarea constantelor, condiția ca $G$ să fie continuă la capete: $G(a) = \lim\limits_{x \searrow a} G(x)$, $G(b) = \lim\limits_{x \nearrow b} G(x)$.

Facem precizarea că se poate lua constanta $c_1 = 0$ (dacă nu este o altă condiție pentru $G$ şi punctele din $\boldsymbol{I_1}$). Acum integrala nedefinită este:

$\boxed{\int g(x)dx = G(x) + \mathcal{C}}$ cu $G$ precizată mai sus.

Înainte de a prezenta următorul rezultat important precizăm că dacă $\mathcal{F}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\}$, iar $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{F}(I)$, atunci $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{f + g \mid f \in \mathcal{A}, g \in \mathcal{B}\}$, $\lambda\mathcal{A} = \{\lambda f \mid f \in \mathcal{A}\}, \lambda \in \mathbb{R}$. Rezultatul următor ne spune că adunarea şi înmulțirea cu scalari nenuli a funcțiilor care admit primitive dau tot funcții care admit primitive. Mai precis are loc următoarea

**Teoremă. (Operații algebrice cu funcții care admit primitive)**
Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I$ interval, două funcții care admit primitive pe $I$ şi $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
Atunci:
**1)** $f+g$ admite primitive pe $I$ şi $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

**Integrala sumei este egală cu suma integralelor.**

**2)** $\alpha f$ admite primitive pe $I$ şi $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$

**Constanta iese de sub integrală.**

**Demonstrație*.** **1)** Fie $F, G : I \to \mathbb{R}$ primitive pentru $f$ şi respectiv $g$ pe $I$. Atunci este clar că $F+G$ este derivabilă şi în pus $(F+G)' = F' + G' = f + g$. Deci $F+G$ este o primitivă a lui $f+g$ pe $I$. Deci pe de o parte $\int [f(x)+g(x)]dx = F(x)+G(x)+\mathcal{C}$ **(1)**, iar pe de altă parte $\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x)+\mathcal{C}+G(x)+\mathcal{C} = F(x)+G(x)+\mathcal{C}+\mathcal{C} = F(x)+G(x)+\mathcal{C}$ **(2)**.
Din **(1)** şi **(2)** rezultă $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
**2)** Fie $F : I \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui $f$ pe $I$. Atunci $\alpha F$ este o primitivă a lui $\alpha f$ pe $I$, deoarece $\alpha F$ este derivabilă şi $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f$. Prin urmare $\int \alpha f(x)dx = \alpha F(x) + \mathcal{C}$ **(1)**. Pe de altă parte $\alpha \int f(x)dx = \alpha(F(x)+\mathcal{C}) = \alpha F(x) + \alpha\mathcal{C} = \alpha F(x) + \mathcal{C}$ **(2)**.
Din **(1)** şi **(2)** rezultă egalitatea $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$. ■

**Observații.** **1)** Rezultate similare au loc pentru funcții derivabile $f, g : I \to \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}^* : (f+g)' = f' + g'$ şi $(\alpha f)' = \alpha f'$.
**Schematic:**

| $(f+g)' = f' + g'$ |
|---|
| **Derivata sumei egală cu suma derivatelor** |

→

| $\int (f+g) = \int f + \int g$ |
|---|
| **Integrala sumei este egală cu suma integralelor** |

| $(\alpha f)' = \alpha f'$ |
| --- |
| **Constanta iese de sub derivare** |

$\rightarrow$

| $\int \alpha f = \alpha \int f$ |
| --- |
| **Constanta iese de sub integrală** |

**Sunt greşite scrierile:**

$$\int f(x)\, g(x)\, dx = \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx,$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx = \frac{\int f(x)\, dx}{\int g(x)\, dx}$$

$$\left(\int f(x)\, dx\right)^n = \int f^n(x)\, dx$$

**2)** Dacă $f_i : I \to \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$ sunt funcţii care admit primitive şi $\alpha_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0$, atunci $\int \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x)\, dx$.

În particular: $\int (-f) = -\int f$ şi $\int (f - g) = \int f - \int g$.

**3)** Suma dintre o funcţie care admite primitive ( $f$ ) şi o funcţie care nu admite primitive ($g$) pe acelaşi interval $I$ este o funcţie care nu admite primitive pe $I$.

Într-adevăr, fie $h : I \to \mathbb{R}, h(x) = f(x) + g(x), x \in I$. Dacă, prin absurd $h$ ar admite primitive, atunci, $g = h - f$ ar admite primitive pe $I$, fals.

**4)** Se verifică uşor că dacă $F$ este o primitivă a lui $f$, atunci $x \to \frac{1}{\lambda} F(\lambda x), \lambda \neq 0$ este o primitivă a funcţiei $x \to f(\lambda x), x \in \mathbb{R}^*$

**Exemplu.** **Fie funcţia $f(x) = x^2 + 2x$ cu primitiva $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$. Dacă $f_1(x) = f(2x) =$ $= 4x^2 + 4x$, atunci o primitivă a ei este $F_1(x) = \frac{1}{2} F(2x) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}x^3 + 4x^2\right) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$.**

**Un mod de a arăta că o funcţie admite primitive pe un interval este de a o scrie ca o combinaţie liniară de funcţii care admit primitive pe acest interval.**

**5)** Produs de funcţii care admit primitive pe $I$ nu este obligatoriu o funcţie care admite primitive pe *I*. Într-adevăr, fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

Această funcție nu este continuă pe $\mathbb{R}$ ( nefiind continuă în $x=0$ ) admite primitive pe $\mathbb{R}$. Pentru a determina o primitivă a lui *g* considerăm funcția

$G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, G(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, care este derivabilă pe $\mathbb{R}$ (în $x=0, G'(0)=$

$=0$ ) şi avem: $G'(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. De aici $\sin\frac{1}{x}=G'(x)-2x\cdot\cos\frac{1}{x}$,

$x\neq 0$ şi $g(x)=f_1(x)-2f_2(x)$, unde $f_1=G'$, iar $f_2(x)=\begin{cases}x\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. Evident

$f_1$ admite primitive (pe *G*), iar $f_2$ fiind continuă are, de asemenea, primitive. Ținând seama de observația precedentă deducem că $g=f_1-2f_2$ admite primitive. Totuşi

funcția $g^2(x)=\begin{cases}\sin^2\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$ deoarece

$g^2(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\frac{2}{x}}{2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}-\begin{cases}\cos\frac{2}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, unde prima funcție nu admite primitive, în timp ce a doua funcție admite primitive (se procedează ca la *g*, considerând funcția $F(x)=x^2\cdot\sin\frac{2}{x}, x\neq 0$ şi $F(0)=0$ ).

Funcția *G* a fost aleasă derivabilă astfel încât prin derivare să obținem în structura ei şi pe *g*. Considerăm pe $G(x)=h(x)\cos\frac{1}{x}$ şi calculăm

$G'(x)=h'(x)\cos\frac{1}{x}+\frac{h(x)}{x^2}\sin\frac{1}{x}$. Pentru ca al doilea termen să fie $\sin\frac{1}{x}$ se alege $h(x)=x^2$.

Dacă însă considerăm $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu *f* derivabilă şi $f'$continuă, iar *g* admite primitive, atunci produsul $f\cdot g$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Într-adevăr, fie *G* o primitivă a lui *g*, atunci $(Gf)'=G'f+Gf'=gf+Gf'$

şi deci $fg=(Gf)'-Gf'$ este diferenţă de funcţii care admit primitive.

**Exemple. 1. Să se determine o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2\sin x-3e^x$.**

**R.** Se determină câte o primitivă pe $\mathbb{R}$ pentru funcţiile $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=2\sin x$, $f_3(x)=-3e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Acestea sunt $F_1, F_2, F_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F_1(x)=\frac{x^3}{3}$, $F_2(x)=-2\cos x$ şi respectiv

$F_3(x)=-3e^x$ $(F_1'=f_1, F_2'=f_2, F_3'=f_3)$. Deci o primitivă pe $\mathbb{R}$ a lui *f* este

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=F_1(x)+F_2(x)+F_3(x)=\frac{x^3}{3}-2\cos x-3e^x$.

**2. Să se detrmine o primitivă pe $(0,\infty)$ a funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\sqrt{x}-\frac{5}{x}$.**

**R.** Se determină câte o primitivă pe $(0,\infty)$ pentru fiecare din funcţiile $f_1(x)=2x$, $f_2(x)=\sqrt{x}$, $f_3(x)=-\frac{5}{x}, x>0$.

Acestea sunt $F_1, F_2, F_3:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F_1(x)=x^2$, $F_2(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $F_3(x)=-5\ln x$. Funcţia

$F:(0,\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=F_1(x)+F_2(x)+F_3(x)=x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-5\ln x$ este o primitivă a lui *f* pe $(0,\infty)$.

## *Excursie matematică* (facultativ)

* * * * *

### *Funcţii care nu admit primitive*

*Vom indica aici câteva rezultate utile în a preciza că o funcţie nu admite primitive pe un interval. Are loc următoarea*

***Teoremă.*** *Fie $g:I\to\mathbb{R}$, I interval, o funcţie care admite primitive pe I. Atunci g are proprietatea lui Darboux.*

*De aici deducem*

***Corolar 1.*** *Dacă $g:I\to\mathbb{R}$ **nu are proprietatea lui Darboux** pe I, atunci g nu admite primitive pe I.*

*Acest corolar evidențiază faptul că **o condiție necesară** ca o funcție să aibă primitive pe o mulțime I este ca aceasta să aibă proprietatea lui Darboux.*

***Exemplu.*** *Să se arate că* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases} x, x\in\mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{x}, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$ *nu are primitive pe* $\mathbb{R}$.

***R.*** *Spunem că* $g:I\to\mathbb{R}, I$ *interval, are proprietatea lui Darboux pe I, dacă* $\forall a,b\in I, a<b$ *şi* $\forall\lambda\in(g(a),g(b))$ *sau* $\lambda\in(g(b),g(a))$ *atunci există* $x_\lambda\in(a,b)$ *astfel încât* $g(x_\lambda)=\lambda$.

*Fie* $a=\sqrt{2}<b=\sqrt{5}$. *Avem:* $g(\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}, g(\sqrt{5})=\frac{1}{\sqrt{5}}$. *Fie* $\lambda=\frac{1}{2}\in\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. *Să arătăm că nu există* $x_\lambda\in(\sqrt{2},\sqrt{5})$ *astfel încât* $g(x_\lambda)=\lambda$.

*Dacă ar exista* $x_\lambda\in(\sqrt{2},\sqrt{5})\cap\mathbb{Q}$, *atunci* $g(x_\lambda)=x_\lambda=\frac{1}{2}$. *Dar* $\frac{1}{2}\notin(\sqrt{2},\sqrt{5})$.

*Dacă ar exista* $x_\lambda\in(\sqrt{2},\sqrt{5})\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ *atunci* $g(x_\lambda)=\frac{1}{x_\lambda}=\frac{1}{2}$, *ceea ce dă* $x_\lambda=2$, *care însă este număr rațional! Deci g nu are proprietatea lui Darboux şi prin urmare nu are primitive pe* $\mathbb{R}$.

> ***Corolar 2.*** *Fie* $g:I\to\mathbb{R}$. *Dacă* $g(I)=\{g(x)|x\in I\}$ ***nu este interval, atunci g nu admite primitive pe I.***

***Exemple. 1.*** *Să se arate că funcția* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x=0 \\ -1, x<0 \end{cases}$ *nu admite primitive pe* $\mathbb{R}$ *(g se numeşte funcția semn,* $g\overset{not}{=}\operatorname{sgn}$ *).*

***R.*** *Cum* $g(\mathbb{R})=\{-1,0,1\}$ *nu este interval, se deduce că g nu are primitive pe* $\mathbb{R}$.

***2.*** *Fie P un polinom nenul cu coeficienți reali, un interval* $I\subset\mathbb{R}$, *şi o funcție neconstantă* $f:I\to\mathbb{R}$ *cu proprietatea* $(P\circ f)(x)=0,\forall x\in I$. *Să se arate că f nu admite primitive pe I.*

***R.*** *Fie S mulțimea rădăcinilor reale ale polinomului P. deoarece* $P(f(x))=0,\forall x\in I$ *rezultă că* $f(I)\subseteq S$, *adică* $f(I)$ *este finită. Cum* $f(I)$ *nu este interval înseamnă că f nu admite primitive pe I.*

***Corolar 3.*** *Dacă $g : I \to \mathbb{R}$ are discontinuități de prima speță, atunci g nu admite primitive.*

***Exemplu.*** *Funcția* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, x \leq 1 \\ x+1, x > 1 \end{cases}$ *nu admite primitive pe* $\mathbb{R}$, *deoarece* $x = 1$ *este punct de discontinuitate de prima speță pentru f,* $l_s(1) = 1 \neq l_d(1) = 2$, $f(1) = 1$.

***Corolar 4.*** *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$, admite primitive pe I, atunci funcția obținută din aceasta prin modificarea valorii într-un punct din I nu mai admite primitive pe I.*

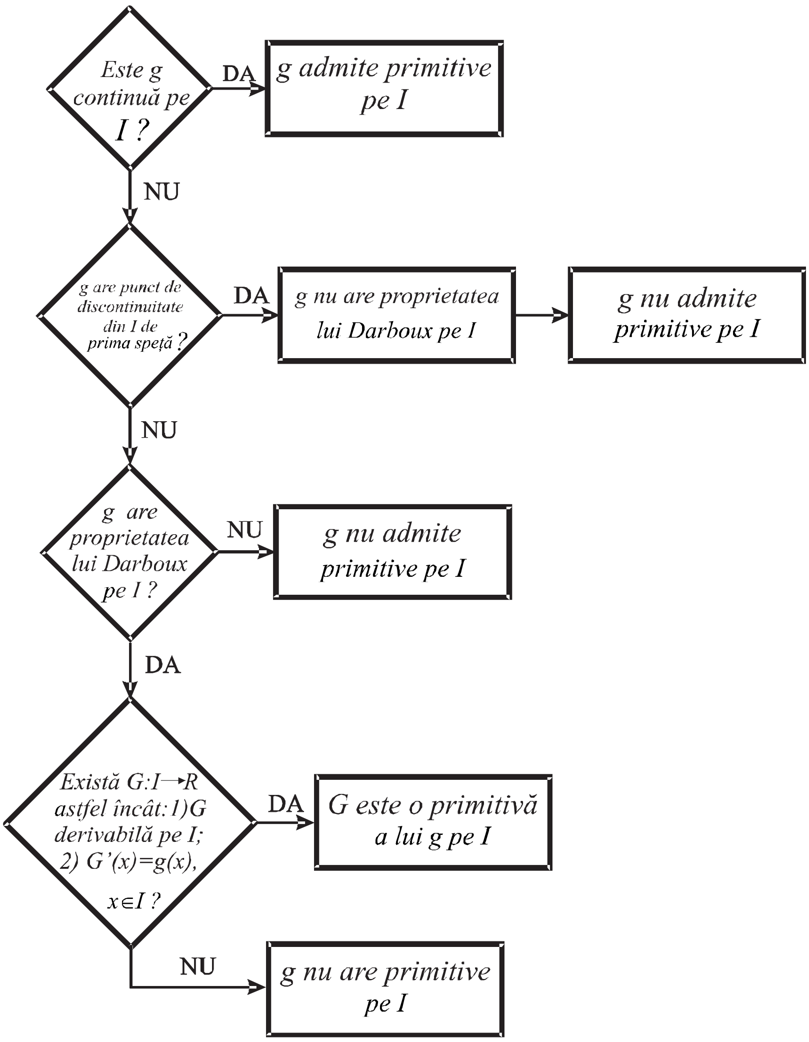
**Demonstrație.** *Fie* $x_0 \in I$ *şi* $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} f(x), x \in I - \{x_0\} \\ y_0 \neq f(x_0), x = x_0 \end{cases}$

*Fie* $J \subset I$, *interval cu* $x_0 \in J$. *Dacă, prin absurd g ar admite primitive, atunci şi* $h = f - g$ *ar avea aceeaşi calitate. Ori* $h(J) = (f-g)(J) = \{0, f(x_0) - g(x_0)\}$ *nu este interval, ceea ce arată că h nu admite primitive. Contradicția a provenit din presupunerea că g ar admite primitive.* ■

***Exemplu.*** *Funcția* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2+1, x \neq 1 \\ 0, x = 1 \end{cases}$ *nu admite primitive pe* $\mathbb{R}$, *deoarece* $f(x) = \begin{cases} x^2+1, x \neq 1 \\ 2, x = 1 \end{cases} + \begin{cases} 0, x \neq 1 \\ -2, x = 1 \end{cases} = f_1(x) + f_2(x)$. *Funcția* $f_1$ *este continuă, deci admite primitive pe* $\mathbb{R}$, *în timp ce* $f_2$ *nu are proprietatea lui Darboux pe* $\mathbb{R}\left(f(\mathbb{R}) = \{0, -2\}\right)$.

*Rezultatele din corolarele 1 – 4 sunt tot atâtea modalități de a arăta că o funcție nu are primitive pe un interval.*

*O schemă de lucru utilă pentru a stabili dacă o funcție* $g : I \to \mathbb{R}$ *(I interval) admite primitive pe I este prezentată pe pagina următoare.Dată fiind o funcție pe I, prima problemă pe care ne-o punem este aceea dacă funcția este continuă pe I. Dacă este continuă, atunci se ştie că ea admite primitive pe I. Dacă însă g nu este continuă, atunci studiem dacă g are punct de discontinuitate de prima speță din I. Dacă are, atunci g nu are proprietatea lui Darboux pe I şi deci g nu va admite primitive pe I. Dacă g nu are un astfel de punct în I, atunci studiem dacă g are proprietatea lui Darboux pe I. Dacă g nu are această proprietate pe I, atunci g nu admite aici* *primitive. Dacă însă se poate găsi* $G:I \to \mathbb{R}$ *cu proprietățile: 1) G este derivabilă pe I; 2)* $G'(x)=g(x), x\in I$ *, atunci G este primitivă a lui g pe I. În cazul în care G nu verifică 1) sau 2), atunci g nu admite primitive pe I. Dacă g nu este continuă, atunci se încearcă construcția unei primitive G (deci se sar prima şi a doua etapă).*




* * * * *

## Probleme rezolvate

**1.Fie** $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ ax+b, & x>0, \end{cases}$ $a,b\in\mathbb{R}$.

**Să se determine $a,b$ astfel încât $g$ să aibă primitive pe $\mathbb{R}$.**

**R.** O primitivă $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a lui $g$ are forma (se integrează $g$ pe $(-\infty,0]$ şi pe $(0,\infty)$ ).

$$G(x)=\begin{cases} e^x+k, & x\le 0 \\ \dfrac{ax^2}{2}+bx+k', & x>0 \end{cases}.$$

Cum $G$ este derivabilă în $x=0$, rezultă $G$ continuă în $x=0$, adică

$\lim\limits_{x\nearrow 0}G(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}G(x)=G(0)\Leftrightarrow 1+k=k'$.

Dacă luăm $k=0$, atunci $k'=1$.

Funcția $G$ este derivabilă în $x=0\Leftrightarrow G_s'(0)=G_d'(0)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\nearrow 0}e^x=\lim\limits_{x\searrow 0}(ax+b)\Leftrightarrow b=1$.

În final $G(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ \dfrac{ax^2}{2}+x+1, & x>0 \end{cases}$ este primitivă pentru $g$ pe $\mathbb{R}$, deoarece $G$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $G'(x)=g(x), x\in\mathbb{R}$ ( $G'(x)=g(x), x\in\mathbb{R}^*$ din construcția lui $G$ şi $G'(0)=g(0)=1$ de mai sus).

Deci $a\in\mathbb{R}, b=1$.

**Altfel.** Se scrie $g$ sub forma $g(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ 1+ax, & x>0 \end{cases}+\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ b-1, & x>0 \end{cases}$.

Prima funcție este continuă şi deci admite primitive (pe $\mathbb{R}$ ). Pentru a doua funcție, dacă $b-1\ne 0$, atunci $x=0$ ar fi punct de discontinuitate de prima speță şi deci funcția nu admite primitive. Deci trebuie ca $b-1=0$, iar $a\in\mathbb{R}$, caz în care $g$ apare ca sumă de funcții ce admit primitive.

**2. Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=e^{-3x}\cos x$. Să se determine numerele reale $m,n$ pentru care funcția $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, G(x)=e^{-3x}(m\cos x+n\sin x)$ este o primitivă a lui $g$ (pe $\mathbb{R}$ ).**

**R.** Este clar că $G$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Funcția $G$ este primitivă a lui $g$ pe $\mathbb{R}$, dacă $G'(x)=g(x), \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow e^{-3x}\left[(n-3m)\cos x-(m+3n)\sin x\right]=e^{-3x}\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$. Cum egalitatea este adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$, ea se verifică şi pentru $x=0$, cand $n-3m=1$ şi pentru $x=\dfrac{\pi}{2}$ când $m+3n=0$. Rezolvând sistemul în $m$ şi $n$ rezultă $m=-\dfrac{3}{10}, n=\dfrac{1}{10}$.

**3. Fie $g:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{15x\sqrt{x+1}}{2}$. Să se determine $a,b,c$ astfel încât $G:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, G(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{x+1}$ să fie o primitivă a lui $g$ pe $(-1,\infty)$.**

**R.** Funcția $G$ fiind produs de funcții derivabile pe $(-1,\infty)$, este o funcție derivabilă. Această funcție este primitivă pentru $g$ (pe $(-1,\infty)$ ) dacă $G'(x)=g(x), \forall x>-1$.

Avem: $(2ax+b)\sqrt{x+1}+\dfrac{ax^2+bx+c}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{15x\sqrt{x+1}}{2}, x>-1$ sau

$$(5a-15)x^2+(4a+3b-15)x+2b+c=0, x>-1.$$

Dând lui $x$ trei valori distincte din intervalul $(-1,\infty)$ rezultă sistemul

$\begin{cases}5a-15=0\\4a+3b-15=0\\2b+c=0\end{cases}$, cu soluția $a=3, b=1, c=-2$.

**4. Fie $g:[a,b]\to\mathbb{R}, c\in(a,b)$. Dacă $g$ admite primitive pe $[a,c]$ și pe $[c,b]$, atunci să se arate că $g$ admite primitive pe $[a,b]$.**

**R.** Fie $G_1:[a,c]\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui $g$ pe $[a,c]$, iar $G_2:[c,b]\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui $g$ pe $[c,b]$. Atunci luăm $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ o posibilă primitivă a lui $g$ (pe $[a,b]$) astfel:

$G(x)=\begin{cases}G_1(x), & x\in[a,c]\\G_2(x)+k, & x\in(c,b]\end{cases}$, unde $k$ se determină din cerința de continuitate a lui $G$ în $x=c$.

Avem: $G$ este continuă în $x=c \Leftrightarrow \lim\limits_{x\nearrow c}G(x)=\lim\limits_{x\searrow c}G(x)=G(c)\Leftrightarrow G_1(c)=G_2(c)+k$. De aici $k=G_1(c)-G_2(c)$.

Evident $G'(x)=g(x), \forall x\in[a,b]-\{c\}$. Avem de arătat că $G'(c)=g(c)$.

Avem: $G_s'(c)=\lim\limits_{x\nearrow c}\dfrac{G(x)-G(c)}{x-c}=\lim\limits_{x\nearrow c}\dfrac{G_1(x)-G_1(c)}{x-c}=(G_1)_s'(c)=g(c)$,

$G_d'(c)=\lim\limits_{x\searrow c}\dfrac{G(x)-G(c)}{x-c}=\lim\limits_{x\searrow c}\dfrac{G_2(x)+k-G_1(c)}{x-c}=\lim\limits_{x\searrow c}\dfrac{G_2(x)-G_2(c)}{x-c}=(G_2)_d'(c)=g(c)$ ceea ce arată că $G_s'(c)=G_d'(c)=g(c)$.

**5. Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases}(x+1)\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\0, & x=0\end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.**

**R.** Scriem funcția $g$ sub forma:

$$g(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\0, & x=0\end{cases}+\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\0, & x=0\end{cases}=g_1(x)+g_2(x), x\in\mathbb{R}.$$

Prima funcție $(g_1)$ este continuă pe $\mathbb{R}^*$, iar din $0\le\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$ se deduce $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=g_1(0)$, ceea ce arată că $g_1$ este continuă și în $x=0$. Deci $g_1$ este continuă pe $\mathbb{R}$ și prin urmare admite primitive pe $\mathbb{R}$. Funcția $g_2$, am arătat că admite primitive pe $\mathbb{R}$. Deci funcția $g$ fiind suma a două funcții care au primitive pe $\mathbb{R}$, are de asemenea primitive pe $\mathbb{R}$ ($g_2$ este un exemplu de funcție care nu este continuă, dar admite primitive).

**6*. Să se arate că $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=[x]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real $x\left([x]\in\mathbb{Z},[x]\le x<[x]+1\right)$, nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.**

**R.** Cum $g(\mathbb{R})=\mathbb{Z}$ nu este interval, rezultă că $g$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

**7*. Să se arate că $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x-[x]$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.**

**R.** Aplicăm metoda reducerii la absurd. Dacă am presupune că $g$ ar admite primitive pe $\mathbb{R}$, atunci $(-g(x)+x)=[x]$ ar admite primitive pe $\mathbb{R}$ (ca sumă de funcții, care admit primitive pe $\mathbb{R}$) în contradicție cu problema precedentă. Contradicția a provenit din presupunerea făcută. Deci $g$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

**8.* Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.**

**R.** Dacă $f$ ar admite o primitivă, atunci aceasta ar fi de forma:

$$F(x)=\begin{cases}k, & x\le 0\\ x\sin\frac{1}{x}+k', & x>0\end{cases}.$$

Din $F$ continuă în $x=0$ rezultă $k=k'$. Se poate lua $k=0$.

Deci $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x\sin\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$. Este clar că $F$ este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ și $F'(x)=f(x), x\in\mathbb{R}^*$.

Să vedem dacă $F'(0)=f(0)$. Avem: $F_s'(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=0, F_d'(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=$

$\lim\limits_{x\searrow 0}\sin\frac{1}{x}$, care nu există. Deci $F$ nu este derivabilă în $x=0$.

Prin urmare $f$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

## Probleme propuse

### Primitiva unei funcții

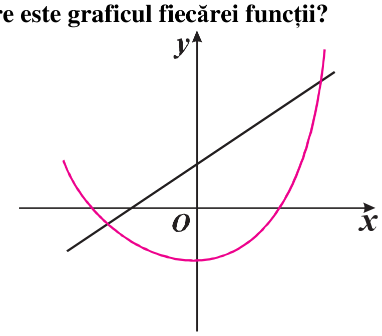
**0. 1) Dați definiția unei primitive a funcției $f:I\to\mathbb{R}$, pe intervalul $I\subseteq\mathbb{R}$.**
**2) Dați exemple de funcții care au primitive.**
**3 ) Dați trei exemple de primitive pentru o funcție.**
**4) Orice funcție are o primitivă? Analizați exemplul $f(x)=\begin{cases}1, \ge 0\\ -1, x<0\end{cases}$.**
**5) Două primitive ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{x^2}$ diferă în $x=1$ prin $e$. Cu cât diferă cele două primitive în $x=10$?**

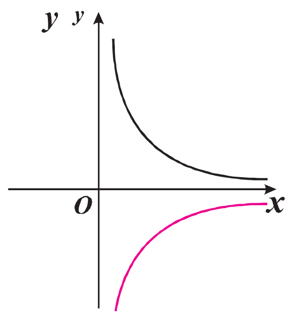
**1. 1°) Fie $g,G:D\to\mathbb{R}$, unde $G$ este o primitivă a lui $g$. Precizați $g$ dacă:**

**a) $G(x)=x^3-5x^2+1$; b) $G(x)=x(x^2-3)$; c) $G(x)=\frac{2x-1}{x^2+1}$; d) $G(x)=\sqrt{x^2+1}$;**

*e)* $G(x)=\frac{1}{3}\sqrt{(\ln x)^3}$; *f)* $G(x)=x-2\sqrt{x}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$; *g)* $G(x)=\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+1)$; *h)* $G(x)=$
$=e^{\sin x}$; *i)* $G(x)=\frac{3^{3x}}{3\ln 3}+e^x$; *j)* $G(x)=\arcsin\frac{x}{3}$; *k)* $G(x)=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2}$;
*l)* $G(x)=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$; *m)* $G(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)$;
*n)* $G(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$; *p)* $G(x)=\frac{x}{2}+3^x+\frac{\sin 2x}{4}$; *q)* $G(x)=2x+\sin 2x+$
$\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin 6x$; *r)* $G(x)=x\sin x+\cos x$; *s)* $G(x)=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$;
*t)* $G(x)=x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$; *u)* $G(x)=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;
*v)* $G(x)=2\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}\right)$; *z)* $G(x)=x\ln(x^2+1)-\frac{x}{2(1+x^2)}+2\operatorname{arctg} x$.

$2^\circ$) **În reperul $xOy$ de mai jos sunt redate graficele funcției $g$ și a unei primitive $G$ a lui $g$. Precizați care este graficul fiecărei funcții?**




**2. Să se determine *f* dacă pe rând:**
1) $f'(x)=x^3+2$ și $f(0)=1$; 2) $f'(x)=3x^2+2x$, $f(1)=3$;
3) $f''(x)=6x-2$, $f'(1)=-5$, $f(1)=3$; 4) $f''(x)=\cos x$, $f'(0)=1$, $f(0)=2$.

**3.1) Să se determine primitiva *G* a funcției $g:D\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $G(x_0)=y_0$ în cazurile:** *a)* $D=\mathbb{R}$, $g(x)=(x-1)^2$, $G(2)=3$; *b)* $D=\mathbb{R}$, $g(x)=\sin x+1$, $G(0)=2$; *c)* $D=(0,\infty)$,
$g(x)=\frac{3}{x}-2\sqrt{x}+e^x$, $G(1)=e+1$.

**2) Arătați că funcția $G:D\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $g:D\to\mathbb{R}$, unde *D* este intervalul indicat:**
*a)* $D=\mathbb{R}$, $G(x)=(x-2)(x^2+2x+3)$, $g(x)=3x^2-1$;
*b)* $D=(0,\infty)$, $G(x)=\frac{2}{3}(x\sqrt{x}+1)$, $g(x)=\sqrt{x}$;

$c) D=\mathbb{R}, G(x)=x\cos x, g(x)=\cos x - x\sin x;$

$d) D=(1,\infty), G(x)=\sqrt{x^2-1}, g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$

**3) Fie funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=3\sin 2x$. Care din funcțiile de mai jos reprezintă o primitivă a lui *g* pe $\mathbb{R}$:**

$a) G(x)=\dfrac{3}{2}\sin 2x; b) H(x)=-\dfrac{3}{2}\cos 2x+1; c) K(x)=-3\cos^2 x; d) L(x)=\ 3\sin^2 x-5$**?**.

**4. $1^\circ$) Arătați fără a calcula derivata, că *F* şi *G* sunt două primitive pe $\mathbb{R}$ ale unei funcții în cazurile:**

$a) F(x)=\dfrac{1}{1+x^6}, G(x)=\dfrac{-x^6}{1+x^6}; b) F(x)=\dfrac{x^3+3x^2-1}{x^2+1}, G(x)=\dfrac{x^3+x^2-3}{x^2+1}.$

**$2^\circ$) Fie funcția $f(x)=x^2-2x$, iar *F,G,H* trei primitive ale acestei funcții. Calculați $F(3)-F(1), G(3)-G(1)$ şi $H(3)-H(1)$. Ce constatați?**

**5. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\cos x, g(x)=x\sin x$. Determinați primitivele funcțiilor, calculând în prealabil derivatele lor.**

**6. Dacă *F* este o primitivă a lui *f* pe $\mathbb{R}$, atunci funcția $G(x)=F(x-2)$ este o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției $g(x)=f(x-2)$? Dar $H(x)=F(2x)$ este o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției $g(x)=f(2x)$?**

**7. Fie funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x\cos(3x+1)$**

**a) Calculați $g'(x)$; b) Deduceți o primitivă (pe $\mathbb{R}$) pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sin(3x+1)$.**

**8. a) Să se determine o primitivă pe $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ a funcției $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.**

**b) Fie $G:\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}, G(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$; Arătați că $G'(x)=\dfrac{3}{\cos^4 x}-\dfrac{2}{\cos^2 x}$;**

**c) Deduceți o primitivă pe $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ a funcției $g(x)=\dfrac{1}{\cos^4 x}$.**

**9. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\cos^2 x, g(x)=x\sin^2 x$.**

**a) Să se determine o primitivă pentru $f+g$ pe $\mathbb{R}$.**

**b) Arătați că există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $H(x)=ax\sin 2x+b\cos 2x$ să fie o primitivă pe $\mathbb{R}$ pentru $f-g$.**

**c) Deduceți câte o primitivă pentru *f* şi respectiv *g* pe $\mathbb{R}$.**

**10. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x+\sin^3 x$**

**a) Calculați $f'(x), f''(x)$ şi arătați că există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f''(x)+af(x)=$ $=b\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$.**

**b) Deduceți o primitivă pentru *f*.**

**11.** a) Arătați că funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\sqrt{x-1}$ are pe $(1,\infty)$ o primitivă de forma $F(x)=P(x)\sqrt{x-1}$, unde $P(x)$ este o funcție polinomială de gradul trei care se va preciza.

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $G$ să fie o primitivă a lui $g$ în cazurile:

i) $g,G:\left(-\frac{1}{3},\infty\right)\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{1+3x}, G(x)=(ax+b)\sqrt{1+3x}$;

ii) $g,G:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x\;+1}}, G(x)=(ax+b)\sqrt{x+1}$;

iii) $g,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}, G(x)=(ax+b)\sqrt{x^2+1}$.

c) Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $G$ să fie o primitivă a lui $g$ în cazurile:

i) $g,G:\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}, g(x)=x\sqrt{3-2x}, G(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{3-2x}$;

ii) $g,G:(-\infty,4)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{1}{2}(5x+4)\sqrt{4-x}, G(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{4-x}$;

iii) $g,G:(-2,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{5x}{2}\sqrt{x+2}, G(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{x+2}$ ;

iv) $g,G:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\ln^2 x, G(x)=x\left(a\ln^2 x+b\ln x+c\right)$;

v) $g,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2e^x, G(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$.

**12.** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, G(x)=x^2|x-a|-|x-b|$ să fie primitiva unei funcții $g;\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

**13.** Dată fiind o funcție $g$ să se determine o primitivă $G$ a lui $g$ al cărei grafic să conțină punctul A, în cazurile:

$a)\, g(x)=4x^3-2x+3, A(1,3); b)\, g(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}, A(1,0); c)\, g(x)=\sin x+\cos 2x, A\left(\frac{\pi}{2},1\right)$;

$d)\, g(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^3}, A(-2,0)$.

**14.** Fie $f:I\to\mathbb{R}, 0\in I$, o funcție impară. Arătați că o primitivă $F:I\to\mathbb{R}$ pe $I$ a lui $f$ este funcție pară.

Dacă $f$ este pară, atunci o primitivă $F:I\to\mathbb{R}, F(0)=0$, pe $I$ a lui $f$ este impară.

**15.** a) Arătați că funcția $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(\mathrm{tg}x)$ este derivabilă pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și calculați $f'(x)$.

b) Deduceți o primitivă pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru funcția $g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{1}{\sin x}$.

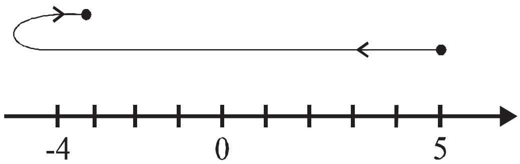
**16.** a) Arătați că există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{a\cos x}{1-\sin x}+\dfrac{b\cos x}{1+\sin x},\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

b) Deduceți o primitivă pe $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ pentru funcția $g:\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{1}{\cos x}$.

17. Fie $f,g:\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}, g(x)=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$.

Să se determine o primitivă pe $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ pentru $f+g, f-g$ şi apoi pentru $f$ şi $g$.

18. Un obiect se mişcă de-a lungul axei cu accelerația $a(t)=2t-2$ unități/$s^2$.




Poziția sa inițială (la $t=0$ ) este 5 unități la dreapta originii. O secundă mai târziu obiectul se mişcă la stânga cu viteza de 4 unități/s. Determinați poziția obiectului după $t=4s$ .

19. Viteza de creştere a populației $(P(t))$ pe lună $(t)$ într-un oraş este dată de ecuația diferențială $P'(t)=3+2\sqrt[3]{t}$ .

1) Să se determine soluția generală a acestei ecuații.
2) Să se precizeze soluția particulară, dacă în prezent $(t=0), P(0)=100$ .
3) Care va fi populația oraşului peste 8 luni?

20. Un producător de obiecte artizanale realizează pe săptămână $x$ obiecte. Funcția de profit săptămânal $P(x)$, în €, verifică ecuația $P'(x)=15-0,2x$ .

1) Dacă $P(0)=-100$ (costurile fixe sunt de 100 €/săptămână), să se determine $P(x)$ .
2) Să se determine profitul în săptămâna în care realizează $x=10$ obiecte.
3) Care este numărul de obiecte lucrate săptămânal care face maxim profitul?

21. Se doreşte umplerea unei piscine cu apă. Se ştie că volumul $V(t)$ în $m^3$ al apei din piscină după $t$ ore verifică ecuația $V'(t)=3+10t$ .

1) Dacă $V(0)=0$, atunci să se determine $V(t)$ .
2) Pentru $t=1h$, să se determine $V(1)$.
3) După câte ore se umple piscina, dacă aceasta are volumul 140 $m^3$ .

22. Într-un orăşel medicul depistează 12 persoane bolnave de un anumit virus. Se estimează că numărul $N$ al persoanelor infestate după $n$ zile va fi dat de ecuația $N'(n)=3+2n$ .

1) Să se determine funcția $N$ ;
2) Câte persoane vor fi bolnave după 3 zile?

23. Un şoarece cântăreşte 15 g la naştere, iar greutatea sa $G(t)$, în grame, după $t$ săptămâni creşte cu viteza (rata) de $\frac{2}{5}(3+t)$ grame pe săptămână.

1) Scrieți ecuația diferențială şi apoi determinați formula care dă creşterea după $t$ săptămâni.

2) Care este greutatea şoarecelui după 5 săptămâni?

**24.** Un elev şi-a depus suma de 1000 € într-o bancă cu dobânda compusă continuă de 5 %. Câţi bani va avea în cont după 5 ani şi care este dobânda câştigată în această perioadă?

**25.** Să se calculeze următoarele integrale: 1) $\int dx, x\in\mathbb{R}$; 2) $\int \pi dx$; 3) $\int x^2dx, x\in\mathbb{R}$;

4) $\int \frac{1}{x^2}dx, x>0$; 5) $\int x\sqrt{x}dx, x\geq 0$; 6) $\int (x^2-3x)dx, x\in\mathbb{R}$; 7) $\int x^2(x-2)dx, x\in\mathbb{R}$;

8) $\int (x-1)^2(x^2+5)dx, x\in\mathbb{R}$; 9) $\int\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)dx, x<0$; 10) $\int\left(\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}\right)dx, x>0$;

11) $\int\left(\frac{1}{3}-2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}\right)dx, x\geq 0$; 12) $\int\frac{(x^2-2)^2}{x^3}dx, x>0$; 13) $\int\frac{dx}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$;

14) $\int\frac{x^2dx}{x^2+1}$; 15) $\int\left(\frac{1-x}{x^2}\right)^2dx, x>0$; 16) $\int(2^x-3e^x)dx, x\in\mathbb{R}$; 17) $\int 2^{2x}e^xdx, x\in\mathbb{R}$;

18) $\int\frac{2^x+5^x}{10^x}dx, x\in\mathbb{R}$; 19) $\int\frac{dx}{x^2-9}, x\in(-3,3)$; 20) $\int\frac{x^2}{x^2-9}dx, x>3$; 21) $\int\frac{dx}{4x^2-9}$, $x\in\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$; 22) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}, x\in\mathbb{R}$; 23) $\int\frac{\sqrt{x^2+25}+3}{\sqrt{x^2+25}}dx, x\in\mathbb{R}$; 24) $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$; 25) $\int\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}, x\in(-4,4)$; 26) $\int\frac{(\sqrt{x^2+9}-5)dx}{x^2+9}, x\in\mathbb{R}$; 27) $\int\frac{(3-x^2)dx}{\sqrt{16-x^2}}, x\in(-4,4)$;

28) $\int\frac{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^4-4}}dx, x>\sqrt{2}$; 29) $\int\frac{x^4dx}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$; 30) $\int\frac{x^2-1}{x^2+1}dx, x\in\mathbb{R}$;

31) $\int\frac{x^3+1}{x^2-x+1}dx, x\in\mathbb{R}$; 32) $\int\frac{13x^2+2}{(4x^2+1)(9x^2+1)}dx$; 33) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx, x\in\mathbb{R}$;

34) $\int\frac{1-\sin^3x}{\sin^2x}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 35) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx, x\in\mathbb{R}$; 36) $\int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

37) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2x}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 38) $\int \mathrm{tg}^2x\,dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 39) $\int(1+\mathrm{tg}^2x)dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

40) $\int\left(2\sin^2\frac{x}{2}+4\cos^2\frac{x}{2}\right)dx, x\in\mathbb{R}$; 41) $\int\frac{dx}{\sin(x+2)\sin(x+3)}, \sin(x+k)\neq 0, k=2,3$;

42) $\int\arcsin(\sin x)dx, x\in[0,2\pi]$; 43) $\int \mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{tg}2x\cdot\mathrm{tg}3x\,dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$.

## Problema existenţei primitivelor. Funcţii care admit primitive

**1.** Arătaţi că funcţiile de mai jos admit primitive pe domeniile de definiţie şi determinaţi o primitivă pentru fiecare funcţie.

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x, x\ge 0 \\ 2x, x<0 \end{cases}$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} 2x+1, x<1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}, x\ge 1 \end{cases}$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}, x\ge 1 \\ \sin(x-1), x<1 \end{cases}$; 4) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}$;

5) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}, x\in[0,1) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, x\ge 1 \end{cases}$; 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} 1-\sqrt{x}, x>0 \\ \dfrac{1}{x^2+1}, x\le 0 \end{cases}$;

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2-1}, x\le -2 \\ -\dfrac{x}{6}, x>-2 \end{cases}$; 8) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x-2|$; 9) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x^2-4|$; 10) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+|x|$; 11) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+\sqrt{x^2-2x+1}$;
12) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}$; 13) $f:[-2\pi,2\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=|\cos x|$;

14) $f:(-2,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3^x}{2}, x\ge 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}, x\in(-2,0) \end{cases}$; 15) $f:\left(-\infty,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x<0 \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$; 16) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} \sin x, x\le 0 \\ x^2, x>0 \end{cases}$; 17) $f:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases} \sin x+\cos x, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right) \\ 1+\operatorname{tg} x, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right) \end{cases}$; 18) $f:(-2,2)\to\mathbb{R}, f(x)=\max(x,x^3)$.

**2. Pentru fiecare din funcțiile de mai jos să se determine o primitivă al cărei grafic conține punctul A indicat.**

1) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases} x-1, x\le -2 \\ -x^2+1, x\in(-2,2] \\ -3, x>2 \end{cases}$, $A(1,1)$;

2) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases} -2x, x>0 \\ -x, x\in(0,2] \\ x-4, x>2 \end{cases}$, $A(0,0)$.

**3. Să se determine parametrul real *m* pentru care funcțiile de mai jos admit primitive pe domeniul de definiție.**

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x+m, x\geq 1 \\ x^2+1, x<1\end{cases}$; 2) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 2x\ln x+x, x>0 \\ m, x=0\end{cases}$.

**4*. Să se arate că următoarele funcții (fără a fi continue pe domeniul de definiție) admit primitive:**

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x, x\leq 0 \\ 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, x>0\end{cases}$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \cos\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0\end{cases}$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \sin\frac{m}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0\end{cases}, m\in\mathbb{N}^*$; 4) $f(x)=\begin{cases} \cos\frac{m}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0\end{cases}, m\in\mathbb{N}^*$.

## Funcții care nu admit primitive

**1*. Să se arate că nu există $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ să admită primitive pe $\mathbb{R}$ în cazurile:**

1) $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ m, x=0\end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases} x+m, x\leq 0 \\ \sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, x>0\end{cases}$.

**2*. Să se arate că următoarele funcții nu admit primitive pe domeniul de definiție.**

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 2x+1, x<-1 \\ x^2+3x, x\geq -1\end{cases}$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x\neq 0 \\ 3, x=0\end{cases}$.

**3*. Să se arate că următoarele funcții nu admit primitive pe $\mathbb{R}$, în cazurile:**

1) $g(x)=\begin{cases} x, x\in\mathbb{Q} \\ x^3, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$; 2) $g(x)=\begin{cases} |x|, x\in\mathbb{Q} \\ x^2, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$; 3) $g(x)=\begin{cases} x^2+x+1, x\in\mathbb{Q} \\ 2^x, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$.

**4*. Să se arate că următoarele funcții nu admit primitive pe $\mathbb{R}$.**

1) $g(x)=\operatorname{sgn}(3x)$; 2) $g(x)=[2x]$; 3) $g(x)=x-[2x]$; 4) $g(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ -1, x=0\end{cases}$.

# 1.5 METODE DE CALCUL ALE PRIMITIVELOR

Acest paragraf conține câteva reguli și sfaturi pentru integrare. Nu este posibil să formulăm un set de reguli prin care orice funcție să poată fi integrată. Metodele care vor urma ne vor permite, în general, nu să integrăm direct ci să transformăm funcția de integrat astfel încât ea să ia forma unor integrale standard așa cum apar în tabelul de integrale uzuale.

## 1) Metoda integrării directe (prin formule)

Această metodă utilizează integralele nedefinite din tabelul cu integrale precum și operațiile cu acestea (sumă și înmulțirea cu scalari).

### Exerciții rezolvate

**Să se calculeze integralele următoare:**

**1.** $I=\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx, x<0$.

**R.** Avem $I=\int x^2dx+\int 2xdx+\int\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}+x^2+\ln(-x)+\mathcal{C}$.

**2.** $I=\int\frac{x-3}{x^5}dx, x>0$.

**R.** $I=\int\left(\frac{x}{x^5}-\frac{3}{x^5}\right)dx=\int\frac{dx}{x^4}-3\int\frac{dx}{x^5}=\int x^{-4}dx-3\int x^{-5}dx=-\frac{1}{3x^3}+\frac{3}{4x^4}+\mathcal{C}$.

**3.** $I=\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)dx, x\geq 0$.

**R.** Se obține: $I=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{4}}\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{3}}dx+\int x^{\frac{1}{4}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+$

$+\frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}+\mathcal{C}=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}+\mathcal{C}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+\mathcal{C}$.

**Observație.** Am scris radicalii ca puteri cu exponent raționali și am aplicat formula

$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\mathcal{C}, \alpha\neq -1$.

**4.** $I=\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx, x>0$.

**R.** Se obține:

$$I=\int\left(2x^{-\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=2\int x^{-\frac{1}{2}}dx-3\int x^{-\frac{1}{3}}dx=2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-3\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+\mathcal{C}=4x^{\frac{1}{2}}-\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}+$$

$$+\mathcal{C}=4\sqrt{x}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\mathcal{C}.$$

**5.** $I=\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}, x\in\mathbb{R}$.

**R.** Se scrie $I$ sub forma $I=\int\frac{dx}{2\sqrt{x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right)+\mathcal{C}$.

**6.** $I=\int\frac{dx}{9x^2-4}, x\in\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

**R.** Avem: $I=\int\frac{dx}{9\left[x^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{2}{3}}\ln\left|\frac{x-\frac{2}{3}}{x+\frac{2}{3}}\right|+\mathcal{C}=\frac{1}{12}\cdot\ln\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right|+$

$+\mathcal{C}=\frac{1}{12}\ln\left(\frac{2-3x}{3x+2}\right)+\mathcal{C}$.

**7.** $I=\int\frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}, x\in\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

**R.** Se scrie $I$ astfel:

$$I=\int\frac{dx}{3\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{\frac{4}{3}}+\mathcal{C}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+\mathcal{C}.$$

**8.** $I=\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

**R.** Avem:

$$I=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x+\mathcal{C}$$

**9.** $I=\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx, x\in(-1,1)$.

**R.** Avem: $I=\int\frac{2dx}{1+x^2}-\int\frac{3dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\operatorname{arctg} x-3\arcsin x+\mathcal{C}$.

**10.** $I=\int\left(2e^x-3^x\right)dx, x\in\mathbb{R}$.

**R.** Se obține: $I=2\int e^x dx-\int 3^x dx=2e^x-\frac{3^x}{\ln 3}+\mathcal{C}$.

11. $I=\int\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^4}dx, x>0$.

R. Găsim: $I=\int\frac{x^4-2x^2+1}{x^4}dx=\int\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\int dx-2\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x^4}=x-$
$-2\int x^{-2}dx+\int x^{-4}dx=x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}+\mathcal{C}$.

12. $I=\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx, x\in\mathbb{R}$.

R. Avem: $I=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=\int(1-\sin x)dx=\int dx-\int\sin xdx=$
$=x+\cos x+\mathcal{C}$.

13. $I=\int\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

R. Se obține: $I=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\sin x\right)dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\sin xdx=-\operatorname{ctg} x+\cos x+\mathcal{C}$.

14. $I=\int\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}dx, x\in(-1,1)$.

R. Găsim: $I=\int\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\right)dx=-\int\frac{dx}{x^2-1}-\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\arcsin x+\mathcal{C}=$
$=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)-\arcsin x+\mathcal{C}$.

15. $I=\int\frac{3+\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}dx, x\in\mathbb{R}$.

R. Avem: $I=\int\left(\frac{3}{x^2+4}+\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}\right)dx=3\int\frac{dx}{x^2+4}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+\mathcal{C}$.

## Exerciții propuse

**Să se calculeze integralele nedefinite ale următoarelor funcții:**

1) $f(x)=x^2-2x+3, x\in\mathbb{R}$; 2) $f(x)=x+\frac{5}{x}, x<0$; 3) $f(x)=2x-\frac{3}{x}+\sqrt{x}, x>0$;

4) $f(x)=\left(1+\sqrt{x}\right)^2, x\geq 0$; 5) $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}, x>0$; 6) $f(x)=x-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}, x<0$;

7) $f(x)=x-3\sqrt{x}+5\sqrt[4]{x}, x\geq 0$; 8) $f(x)=\frac{x-1}{x^3}, x<0$; 9) $f(x)=x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}, x\geq 0$;

10) $f(x)=\frac{x-3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}, x>0$; 11) $f(x)=\frac{9-x}{3+\sqrt{x}}, x\geq 0$; 12) $f(x)=x-3e^x, x\in\mathbb{R}$;

**13)** $f(x)=\frac{1}{x}-2^x+\frac{1}{x^2}-3^x,\ x>0;$ **14)** $f(x)=\frac{(x-1)^3}{x^3},\ x<0;$ **15)** $f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x},$ $x>0;$ **16)** $f(x)=\frac{1}{x^2-4},\ x>2;$ **17)** $f(x)=\frac{x}{x^2-4},\ x<-2;$ **18)** $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4},\ x>2;$

**19)** $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-4},\ x>2;$ **20)** $f(x)=\frac{1}{3x^2-4},\ x>\frac{2}{\sqrt{3}};$ **21)** $f(x)=\frac{1}{x^2+4},\ x\in\mathbb{R};$

**22)** $f(x)=\frac{x^2}{x^2+4},\ x\in\mathbb{R};$ **23)** $f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2+4},\ x\in\mathbb{R};$ **24)** $f(x)=\frac{1}{3x^2+5},\ x\in\mathbb{R};$

**25)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}},\ x\in(-3,3);$ **26)** $f(x)=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}},\ x\in(-3,3);$ **27)** $f(x)=$ $=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}},\ x>2;$ **28)** $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}},x>2;$ **29)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4x^2-5}},x>\frac{\sqrt{5}}{2};$

**30)** $f(x)=\frac{2x^2+3}{(x^2-1)(x^2+4)},\ x>1;$ **31)** $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-3}+1}{x^2-3},\ x>\sqrt{3};$

**32)** $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right);$ **33)** $f(x)=-\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{3}{\cos^2 x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right);$

**34)** $f(x)=\sin^2\frac{x}{2},\ x\in\mathbb{R};$ **35)** $f(x)=\mathrm{tg}^2x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right);$ **36)** $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2},$ $x\in\mathbb{R};$ **37)** $f(x)=\frac{\sin x}{3\sin x+4\cos x},\ g(x)=\frac{\cos x}{3\sin x+4\cos x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$

## 2) Metoda intergrării prin părți

### Intergrala nedefinită şi diferențiala

Un rol deosebit de important în calculul integral îl joacă diferențiala unei funcții. Fie $f:I\to\mathbb{R}, I$ interval, o funcție derivabilă şi $x_0\in I$. Funcția $f$ este derivabilă în $x_0$ dacă există şi este finită limita (raportului) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)\in\mathbb{R}$. Aceasta înseamnă că pentru $h$ mic, $h\neq 0$, raportul $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se poate aproxima cu numărul $f'(x_0)$, adică putem scrie $f(x_0+h)-f(x_0)\approx f'(x_0)h$, unde membrul stâng se notează de obicei cu $\Delta f=f(x_0+h)-f(x_0)$ ($\Delta f$ îl citim: delta $f$) şi reprezintă creşterea lui $f$ de la $x_0$ la $x_0+h$ (Fig. 7).

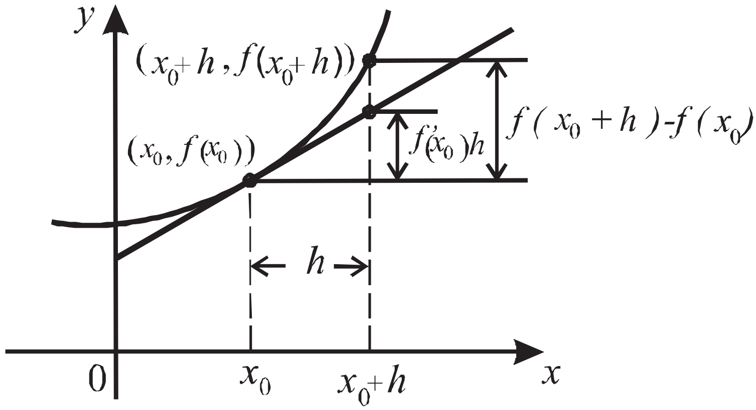



**Fig. 7**

Aproximarea de mai sus este bună în sensul că pentru $h$ mic, diferența dintre cele două expresii $\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]-f'(x_0)h$ este mică comparativ cu $h$, adică raportul $\dfrac{\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]-f'(x_0)h}{h}$ tinde la zero dacă $h$ tinde la zero.

Într-adevăr, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]-f'(x_0)h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-$

$-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x_0)h}{h}=f'(x_0)-f'(x_0)=0$.

Fie $x\in I$, arbitrar. Atunci avem următoarea:

**Definiție.** Fie $h\neq 0$. Diferența $f(x+h)-f(x)$ se numește **creșterea lui $f$ de la $x$ la $x+h$** și se notează $\Delta f=f(x+h)-f(x)$.

Produsul $f'(x)h$ se numește **diferențiala lui $f$ în $x$ cu creșterea $h$** și se notează $df=f'(x)h$.

Așadar $\Delta f\approx df$.

**Exemplu.** **Să calculăm diferențiala funcției $f(x)=x^2, x>0$. Funcția dă aria pătratului de latură $x$ (Fig. 8).**

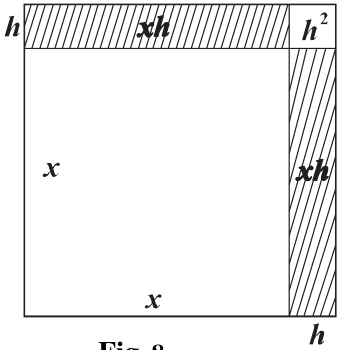


**Fig. 8**

**Dacă lungimea fiecărei laturi crește de la $x$ la $x+h$, atunci aria crește de la $f(x)$ la $f(x+h)$ și deci**

$$\Delta f = f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2 = =2xh+h^2.$$

**Ca estimare a acestei schimbări putem utiliza diferențiala $df = f'(x)h = 2xh$. Eroarea comisă ca urmare a acestei aproximări este egală cu $\Delta f - df = h^2$, care este mică în raport cu $h$, în sensul că**

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f - df}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0.$$

**Uneori în locul lui $h$ folosim notația $\Delta x$ și deci $df = f'(x)\Delta x$. Diferențiala variabilei independente $x$ este egală cu $dx = \Delta x$. Cu acestea $df = f'(x)dx$, ceea ce arată legătura strânsă dintre diferențială și derivata unei funcții. Mai precis are loc următoarea:**

> **Teoremă (Legătura derivatei cu diferențiala). Fie $f: I \to \mathbb{R}, I$ interval și $x \in I$. Funcția $f$ are diferențială în punctul $x$ și în plus $df = f'(x)dx$ sau $f' = \dfrac{df}{dx}$.**

În virtutea acestei teoreme, via operațiile cu funcții derivabile, au loc următoarele reguli pentru diferențiale:

Dacă $f, g$ sunt derivabile pe un interval deschis, atunci:

$d(f \pm g) = df \pm dg$ (diferențiala sumei – diferenței este egală cu suma – diferența diferențialelor).

1) $d(kf) = kdf, k -$ constantă.

2) $d(fg) = gdf + fdg$.

3) $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gdf - fdg}{g^2}, g \neq 0$.

4) $d(\varphi \circ f) = \varphi'(f)df, \forall \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcție derivabilă.

De exemplu, pentru 3) avem:

$d(fg) = (fg)'dx = (f'g + fg')dx = g(f'dx) + f(g'dx) = gdf + fdg$.

**Integrarea prin părți**

O metodă ce permite calcularea integralelor unor funcții date este oferită de metoda integrării prin părți (este operația inversă derivării produsului $(uv)'=u'v+uv'$, $u,v$ funcții derivabile). Are loc următoarea:

**Teoremă.** Fie $u,v:I\to\mathbb{R}, I$ interval, două funcții derivabile cu derivatele continue. Atunci funcțiile $u'v, uv'$ admit primitive şi mulțimile lor de primitive sunt legate prin relația: $\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$.

**Demonstrație.** Funcțiile $u'v$ şi $uv'$ fiind continue pe $I$ (ca produs de funcții continue), admit primitive pe $I$. Funcțiile $u,v$ fiind derivabile rezultă $uv$ este o funcție derivabilă şi avem $(uv)'=u'v+uv'$ sau $uv'=(uv)'-u'v$. De aici, prin integrare, rezultă $\int u(x)v'(x)dx=\int (u(x)v(x))'dx-\int u'(x)v(x)dx$ sau $\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)+\mathscr{C}-\int u'(x)v(x)dx$ $\left(\int u'=u+\mathscr{C}\right)$ sau $\int u(x)v'(x)dx=$ $=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$ $\left(\int u=\int u+\mathscr{C}\right)$. ■

**Observații.** **1)** Faptul că integrarea prin părți este operația inversă a derivării produsului, se reprezintă schematic ca mai jos.

$$\boxed{f(x)=u(x)v(x)}$$

$$\boxed{f'(x)} = \boxed{u'(x)v(x)} + \boxed{u(x)v'(x)} \quad \textbf{(Derivare)}$$

$$\boxed{\int f'(x)dx} = \boxed{\int u'(x)v(x)dx} + \boxed{\int u(x)v'(x)dx} \quad \textbf{(Integrare)}$$

$$||$$

$$\boxed{f(x)+\mathscr{C}}$$

Observați că membrul drept al formulei integrării prin părți este simetric în $u$ şi $v$. Din acest motiv se iau $u$ şi $v$ astfel încât dată fiind una din integrale de calculat, atunci cea de-a doua să fie mai simplă.
Formula are forma
$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$, fiind cunoscută şi sub denumirea de **integrare a produsului.**

**2)** Formula care apare în teoremă este cunoscută sub numele de **formula integrării prin părți (pentru integrala nedefinită).** Funcțiile $u, v$ se numesc **părți** ale integrandului.
**3)** De obicei se ia $u$ funcția mai complicată de sub semnul integrală astfel încât a doua integrală din formulă să fie mai simplă decât prima integrală. Dacă integrala din membrul drept al formulei este mai dificilă, atunci se face o altă alegere pentru $u$ şi $v'$. În a doua integrală apare $v$ obținut din $v'$ prin integrere. De aceea, în prima integrală, alegem pe $v'$ o funcție mai simplă, ca prin integrare să determinăm pe $v$. Am văzut că integrarea este mai dificilă decât derivarea.

**Exemplu. Să se calculeze $\int xe^x dx$ .**

**R.** Dacă punem $u(x)=e^x$ şi $v'(x)=x$, atunci $u'(x)=e^x$ şi $v(x)=\frac{x^2}{2}$, iar formula integrării prin părți are forma $\int xe^x dx=\frac{x^2}{2}e^x-\frac{1}{2}\int x^2e^x dx$. Observăm că a doua integrală este mai complicată decât prima!

Luăm atunci $u(x)=x$ şi $v'(x)=e^x$, când $u'(x)=1, v(x)=e^x$. Deci $\int xe^x dx=xe^x-$ $-\int e^x dx=(x-1)e^x+\mathcal{C}$.

**4)** Deoarece $v'(x)dx=dv(x)$ şi $u'(x)dx=du(x)$, iar diferențiala produsului este $d(uv)=udv+vdu$, formula integrării prin părți scrisă cu ajutorul diferențialelor are forma

$$\boxed{\int udv=uv-\int vdu}$$

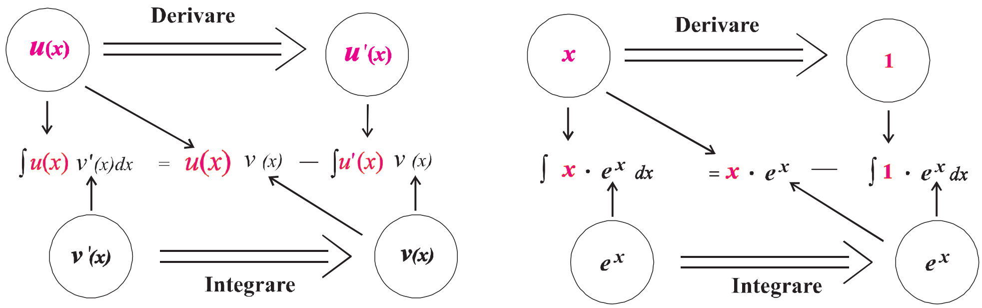
Cele două părți ale integrandului sunt "$u(x)$" şi "$v'(x)dx$" sau "$u$" şi "$dv$". Pentru a aplica integrarea prin părți este necesar să calculăm $u'(x)$ (**prin derivare**) şi $v(x)$ (**prin integrare**).
În general, egalitatea $\int udv+\int vdu=uv$, arată că dacă este cunoscută o integrală din membrul stâng atunci se poate calcula şi cealaltă.
Pentru a aplica uşor formula integrării prin părți, aranjăm funcțiile sub forma:

$$\boxed{\underset{(\textit{din prima integrală})}{\begin{cases} u(x)= \\ \\ v'(x)= \end{cases}} \Rightarrow \underset{(\textit{din a doua integrală})}{\begin{cases} u'(x)= & (\textit{prin derivare}) \\ v(x)= & \begin{pmatrix} \textit{prin integrare;} \\ \textit{v este o primitivă} \end{pmatrix} \end{cases}}}$$

Pentru simplitate vom scrie $u$ în loc de $u(x)$ şi $v'$ în loc de $v'(x)$.
În scriere diferenţială

$$\begin{cases} u = \\ \\ dv = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = & (\text{prin diferenţiere}) \\ v = & \left(\begin{matrix} \text{prin integrare;} \\ v \text{ este o primitivă} \end{matrix}\right). \end{cases}$$
$$(\text{din prima integrală}) \qquad (\text{din a doua integrală})$$

Sugestiv formula integrării prin părţi poate fi redată prin diagrama următoare (alăturat este un caz particular)




unde prima integrală este luată din produsul funcţiilor de pe prima verticală a diagramei $(u(x)v'(x))$ este egală cu produsul funcţiilor de pe diagonala principală a diagramei $(u(x)v(x))$ minus integrală din produsul funcţiilor de pe a doua verticală a diagramei $(u'(x)v(x))$.

**Exemplu.** **Să se calculeze $\int xe^x dx, x \in \mathbb{R}$.**

**R.** Notăm: $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \left(\int e^x dx = e^x + \mathcal{C}\right) \end{cases}.$

Deci $\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + \mathcal{C} = (x-1)e^x + \mathcal{C}$

$\int uv' \quad = uv \quad - \int u'v$

În scriere diferențială avem:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \qquad \left(\int dv = v + \mathcal{C} = \int e^x dx = e^x + \mathcal{C}\right)$$

$$alegem\ v = e^x$$

Deci $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\underbrace{dx}_{du} = xe^x - e^x + \mathcal{C} = (x-1)e^x + \mathcal{C}$.

$$\int u \cdot dv = u\,v - \int v\,du$$

În alegerea lui $u$ şi $dv$ în formula integrării prin părți ne ghidăm, atunci când este posibil, după următoarele considerații:

> **1) Alegem $dv$ astfel încât $\int dv$ este uşor de determinat.**
> **2) Alegem $u$ astfel încât $u'$ să fie mai simplă decât $u$ pentru integrare.**

Este posibil de aplicat integrarea prin părți de două sau mai multe ori pentru a evalua integrala dată.

**Exemplu.** **Să se calculeze: 1) $I = \int x^2 e^x dx,\ x \in \mathbb{R}$; 2) $I = \int e^x \sin x dx,\ x \in \mathbb{R}$.**

**R.** 1) Notăm: $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = e^x \end{cases}$ şi deci

$$I = \int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v} \underbrace{(2xdx)}_{du} = x^2 e^x - 2\int xe^x dx, \quad (1).$$

$$u \cdot dv \ = \ \boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ -\ \boldsymbol{v}\ \cdot\ \boldsymbol{du}$$

Pentru $I_1 = \int xe^x dx$ aplicăm, din nou, formula integrării prin părți. Punem:

$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$ şi deci $I_1 = \int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\,\underbrace{dx}_{du} = xe^x - e^x + \mathcal{C} =$

$= (x-1)e^x + \mathcal{C}$.

Revenim în (1) cu $I_1$ şi obținem:

$$I = x^2 e^x - 2\left[(x-1)e^x + \mathcal{C}\right] = x^2 e^x - 2(x-1)e^x + \mathcal{C} = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + \mathcal{C}.$$

Dacă am fi făcut alegerea

$\begin{cases} u = e^x \\ dv = x^2 dx \end{cases}$, atunci $\begin{cases} du = e^x dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$ şi integrala $I$ devine:

$$I=\int e^x\,\underbrace{x^2dx}=\frac{x^3}{3}\cdot e^x-\int\frac{x^3}{3}\underbrace{e^xdx}.$$

$$u\cdot dv\ =\ v\ \ u\ \ -\ \ v\cdot du$$

Constatăm că a doua integrală e mai complicată decât cea dată!

2)Notăm $\begin{cases}u=e^x\\dv=\sin xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=e^xdx\\v=-\cos x\end{cases}$ şi de aici

$I=\int e^x\sin xdx=-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx,\quad(1)$.

Pentru $\int e^x\cos xdx$, aplicăm formula integrării prin părți şi avem:

$\begin{cases}u=e^x\\dv=\cos xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=e^xdx\\v=\sin x\end{cases}$. Deci $\int e^x\cos xdx=e^x\sin x-\int e^x\sin xdx,\quad(2)$.

A doua integrală din (2) este chiar *I*. Din (1) şi (2) rezultă:

$I=-e^x\cos x+e^x\sin x-I$ sau $2I=(\sin x-\cos x)e^x$, adică $I=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)e^x+\mathcal{C}$.

**5)** Integrarea prin părți se aplică în cazul integralelor de forma (acolo unde au sens):

- $\int x^n\begin{Bmatrix}e^{\alpha x}\\ \sin\alpha x\\ \cos\alpha x\end{Bmatrix}dx,\ n\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathbb{R}$ unde sub integrală avem produsul dintre $x^n$ şi una din funcțiile din paranteza acoladă. În acest caz se ia $u=x^n$ şi $v'=e^{\alpha x}(\sin\alpha x,\cos\alpha x)$.

Se aplică de *n* ori integrarea prin părți.

Rezultatul final este $\begin{Bmatrix}Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\\P_n(x)\sin\alpha x+R_n(x)\cos\alpha x\end{Bmatrix}+\mathcal{C}$, unde $Q_n(x),P_n(x),R_n(x)$ sunt funcții polinomiale de grad $n$.

Deci $\left(\begin{Bmatrix}Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\\P_n(x)\sin\alpha x+R_n(x)\cos\alpha x\end{Bmatrix}\right)'=x^n\begin{Bmatrix}e^{\alpha x}\\ \sin\alpha x\\ \cos\alpha x\end{Bmatrix},\forall x$ (Forma a doua din membrul stâng corespunde la ultimele forme din membrul drept).

Primitivele funcției date se pot obține din ultima egalitate prin identificare. Se determină coeficienții lui $Q_n,P_n,R_n$ prin **metoda coeficienților nedeterminați.**

**Exemplu. Să se calculeze: 1)** $I=\int x^2e^xdx,x\in\mathbb{R}$; **2)** $I=\int x\sin xdx,x\in\mathbb{R}$.

**R. 1**) Am calculat, mai sus, prin părți această integrală. Acum o vom calcula ținând seama de egalitatea

$\int x^2e^xdx=(ax^2+bx+c)e^x+\mathcal{C}$.

Coeficienţii $a,b,c$ se determină din cerinţa $\left[\left(ax^2+bx+c\right)e^x\right]'=x^2e^x, \forall x\in\mathbb{R}$, adică $\left[ax^2+\left(2a+b\right)x+b+c\right]e^x=x^2e^x, \forall x\in\mathbb{R}$. De aici, $a=1, 2a+b=0, b+c=0$, adică $a=1, b=-2, c=2$.

Aşadar, $\int x^2e^xdx=\left(x^2-2x+2\right)e^x+\mathcal{C}$.

În general $\boxed{\int P_n\left(x\right)e^{\alpha x}dx=Q_n\left(x\right)e^{\alpha x}+\mathcal{C}}$, unde $P_n\left(x\right),Q_n\left(x\right)$ sunt funcţii polinomiale de grad $n$.

**2)** Punem $\begin{cases}u=x\\ v'=\sin x\end{cases}$ şi obţinem $\begin{cases}u'=1\\ v=-\cos x\end{cases}$. Deci $\int x\sin xdx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=$
$=-x\cos x+\sin x+\mathcal{C}$.

Altfel, punem $\int x\sin x\,dx=\left(ax+b\right)\sin x+\left(cx+d\right)\cos x+\mathcal{C}$.

Din $\left[\left(ax+b\right)\sin x+\left(cx+d\right)\cos x\right]'=x\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă $\left[a-d-\left(c+1\right)x\right]\sin x+$ $+\left(b+c+ax\right)\cos x=0, \forall x$. De aici deducem $a-d-\left(c+1\right)x=0, b+c+ax=0, \forall x$. În fine, din ultimile egalităţi găsim $a=d=0, c=-1, b=1$.

Aceeaşi notaţie o facem dacă în locul lui $x^n$ avem funcţia polinomială de grad $n, P_n\left(x\right)$. La fiecare integrare prin părţi, în a doua integrală din formulă scade cu o unitate gradul funcţiei polinomiale.

• $\int x^n\begin{Bmatrix}\mathbf{\ln x}\\ \mathbf{\arcsin x}\\ \mathbf{arctg\ x}\end{Bmatrix}dx, n\in\mathbb{N}$, unde sub integrală avem produsul dintre $x^n$ şi una din funcţiile din paranteza acoladă. Se alege $u=\ln x\left(\arcsin x, \text{arctg } x\right)$, iar $v'\left(x\right)=x^n$ sau sub formă diferenţială $u=\ln x, dv=x^ndx$.

Aceeaşi notaţie se face şi pentru integrala în care în locul lui $x^n$ avem $P_n\left(x\right)$ funcţie polinomială de grad $n$.

**Exemplu. Să se calculeze: 1)** $\boldsymbol{\int\ln x\,dx, x>0;}$ **2)** $\boldsymbol{\int\arcsin x\,dx, -1\le x\le 1}$.

**R.** 1) Avem: $\begin{cases}u=\ln x\\ v'=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'=\dfrac{1}{x}\\ v=x\end{cases}$ şi avem: $\int\ln x\,dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+\mathcal{C}$.

2)Vom determina, mai întâi, o primitivă a funcţiei $f\left(x\right)=\arcsin x$ pe $\left(-1,1\right)$, utilizând formula integrării prin părţi.

Punem $\begin{cases}u=\arcsin x\\ v'=1\end{cases}$ şi avem $\begin{cases}u'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ v=x\end{cases}$. Observaţi că $u$ este derivabilă pe $\left(-1,1\right)$, dar nu şi pe $[-1,1]$. Deci $\int \arcsin x\, dx = x \arcsin - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \int \left(\sqrt{1-x^2}\right)' dx =$

$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + \mathcal{C}, x \in (-1,1)$.

Vom genera o primitivă $G$ a funcției $f(x) = \arcsin x$ pe $[-1,1]$ (fiind continuă există $G$ !) cu ajutorul primitivei $F:(-1,1) \to \mathbb{R}, F(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, punând

$$G(x) = \begin{cases} k_1, x = -1 \\ F(x), x \in (-1,1) \\ k_2, x = 1 \end{cases}$$

unde constantele $k_1, k_2$ se determină din cerința ca $G$ să fie continuă la dreapta în $x=-1$ şi la stânga în $x=1$. Obținem: $k_1 = \lim_{x \searrow -1} F(x) = \frac{\pi}{2}, k_2 = \lim_{x \nearrow 1} F(x) = \frac{\pi}{2}$.

Acum $\int \arcsin x\, dx = G(x) + \mathcal{C}, \forall x \in [-1,1]$.

● $\int \begin{Bmatrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{\beta x} \\ \ln x \\ \arcsin x \\ \mathrm{arctg}\, x \end{Bmatrix} dx, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se ia $u$ una din funcțiile din a doua paranteză acoladă, $u = e^{\beta x} (\ln x, \arcsin x, \mathrm{arctg} x)$ şi $v'$ una din funcțiile din prima paranteză acoladă, $v' = \sin \alpha x (\cos \alpha x)$. După aplicarea de două ori a formulei integrării prin părți se obține integrala inițială cu un anumit coeficient. Relația obținută este o ecuație liniară de necunoscută integrala cerută!

**Exemplu. Să se calculeze $I = \int e^x \sin x\, dx, x \in \mathbb{R}$.**

**R.** Din $\begin{cases} u = e^x \\ v' = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = e^x \\ v = -\cos x \end{cases}$ şi formula integrării prin părți dă

$I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx3$.

Pentru integrala din dreapta se aplică, din nou, integrarea prin părți punând

$\begin{cases} u = e^x \\ v' = \cos x \end{cases}$ când $\begin{cases} u' = e^x \\ v = \sin x \end{cases}$. Deci $\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - I$.

În final, $I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$ sau $I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \mathcal{C}$.

**Observații. 1)** Dacă $J=\int e^x \cos x\, dx$, din formula integrării prin părți rezultă $I=-e^x\cos x+J$ **(1)**, iar din a doua integrare prin părți $J=e^x\sin x-I,(\mathbf{2})$.
Din **(1)** şi **(2)** rezultă un sistem de necunoscute *I* şi *J*.
**2)** Are loc egalitatea

$$\boxed{\int e^x \sin x\, dx = e^x\left(a\cos x+b\sin x\right)+\mathcal{C}}$$

unde $a,b\in\mathbb{R}$ se determină din egalitatea $\left[e^x\left(a\cos x+b\sin x\right)\right]'=e^x\sin x,\quad \forall x\in\mathbb{R}$, adică $(a+b)\cos x+(b-a)\sin x=\sin x, x\in\mathbb{R}$.

Pentru $x=0$ rezultă $a+b=0$, iar pentru $x=\frac{\pi}{2}$ rezultă $b-a=1$.

Găsim $a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$. Deci $\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x\left(-\cos x+\sin x\right)+\mathcal{C}$.

- $\displaystyle\int x^n\begin{Bmatrix}\sqrt{x^2+a^2}\\ \sqrt{x^2-a^2}\\ \sqrt{a^2-x^2}\end{Bmatrix}dx$.
- $\displaystyle\int x^n\begin{Bmatrix}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\\ \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\\ \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\end{Bmatrix}dx$

Se prelucrează integrala astfel:

$$I_n=\int x^n\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\int\frac{x^n\left(x^2+a^2\right)}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\int\frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{x^2+a^2}}+a^2\int\frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=\int x^{n+1}\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)'dx+a^2\int x^{n-1}\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)'dx$$ şi apoi se aplică integrarea prin părți pentru calculul fiecărei integrale.

Pentru $\int x^n\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ se procedează ca mai sus pentru $x\in(-\infty,a)$ sau $x\in(a,\infty)$ (Prin continuitate se construiesc din acestea primitivele pe $(-\infty,a]$ sau $[a,\infty)$). Analog, pentru $\int x^n\sqrt{a^2-x^2}\,dx, x\in[-a,a]$.

**Exemplu. Fie $I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx, x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$.**

**Să se calculeze $I_1, I_2$ şi apoi să se stabilească o relație de recurență pentru $I_n, n\geq 2$.**

**R. Avem pentru $n=1$: $I_1=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx=\sqrt{x^2+1}+\mathcal{C}$.**

**Pentru $n=2$ se obține:** $I_2=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx$.

**Pentru ultima integrală aplicăm formula integrării prin părți:** $\begin{cases}u=x\\ v'=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}u'=1\\ v=\sqrt{x^2+1}\end{cases}$ **și de aici** $I_2=x\sqrt{x^2+1}-\int\sqrt{x^2+1}\,dx=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$

$=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=x\sqrt{x^2+1}-I_2-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. **Aşadar**

$I_2=x\sqrt{x^2+1}-I_2-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ **sau** $2I_2=x\sqrt{x^2+1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ **sau**

$I_2=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]+\mathcal{C}$.

**Pentru $n\geq 3$ integrala se scrie:**

$I_n=\int x^{n-1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx=x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-(n-1)\int x^{n-2}\sqrt{x^2+1}\,dx=x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-$

$-(n-1)\int\frac{x^{n-2}\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx=x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-(n-1)\left(\int\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int\frac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+1}}dx\right)=$

$=x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-(n-1)I_n-(n-1)I_{n-2}$. **Deci** $I_n=x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-(n-1)I_n-(n-1)I_{n-2}$,

**adică** $n\,I_n=x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-(n-1)I_{n-2}$ **sau** $I_n=\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2+1}-\frac{n-1}{n}I_{n-2}, n\geq 3$.

**De exemplu, pentru $n=3$ avem:** $I_3=\frac{1}{3}x^2\sqrt{x^2+1}-\frac{2}{3}I_1=\frac{1}{3}x^2\sqrt{x^2+1}-\frac{2}{3}\sqrt{x^2+1}+\mathcal{C}$.

- $\int\begin{Bmatrix}\sin^n\alpha x\\ \cos^n\alpha x\end{Bmatrix}dx, \alpha\in\mathbb{R}^*, n\in\mathbb{N}^*$, unde $\sin^n\alpha x=\sin\alpha x\cdot\sin^{n-1}\alpha x=$

$=-\frac{1}{\alpha}(\cos\alpha x)'\sin^{n-1}\alpha x, \forall x\in\mathbb{R}$. Luăm $u=\sin^{n-1}\alpha x, v'=(\cos\alpha x)'$.

Analog, $\cos^n\alpha x=\cos\alpha x\cdot\cos^{n-1}\alpha x=\frac{1}{\alpha}(\sin\alpha x)'\cos^{n-1}\alpha x$ etc. În calculul acestor integrale utilizăm relația fundamentală a trigonometriei $\sin^2\alpha x+\cos^2\alpha x=1$.

**Exemplu. Se dă $I_n=\int\sin^n dx, n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2, x\in\mathbb{R}$. Să se determine o relație de recurență pentru $I_n$ și apoi calculați $I_3$.**

**R.** Avem scrierea $\sin^n x=\sin x\cdot\sin^{n-1}x=-(\cos x)'\sin^{n-1}x$, iar pentru calculul lui $I_n$, prin părți, punem $\begin{cases}u=\sin^{n-1}x\\ v'=(\cos x)'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'=(n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos x\\ v=\cos x\end{cases}$

Deci $I_n = -\int \sin^{n-1} x(\cos x)' dx = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\, dx =$

$= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\left(1-\sin^2 x\right) dx =$

$= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \sin^{n} x\, dx =$

$= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$.

De aici avem:

$nI_n = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1) I_{n-2}$ sau $I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cdot \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, care reprezintă relația de recurență cerută.

Pentru $n=1, I_1 = -\cos x + \mathcal{C}$, iar pentru $n=2$, din relație rezultă $I_2 = -\frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + \; +\frac{1}{2}x + \mathcal{C}$.

Pentru $n=3$, avem $I_3 = -\frac{1}{3}\sin^2 x \cdot \cos x + \frac{2}{3} I_1 = -\frac{1}{3}\sin^2 x \cdot \cos x - \frac{2}{3}\cos x + \mathcal{C}$.

## Probleme propuse

**1. Să se calculeze integralele:**

**a).1)** $\int x \ln x\, dx, x>0$; **2)** $\int x^2 \ln x\, dx, x>0$; **3)** $\int \ln^2 x\, dx, x>0$; **4)** $\int x^3 \ln^2 x\, dx, x>0$;

**5)** $\int \left(x^2-3x\right)\ln x\, dx, x>0$; **6)** $\int \ln\left(x^2+1\right) dx, x\in\mathbb{R}$; **7)** $\int \frac{\ln x}{x^2} dx, x>0$; **8)** $\int \sqrt{x}\ln x\, dx$, $x>0$; **9)** $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx, x>0$; **10)** $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx, x>e$; **11)** $\int x^2 \ln(1+x) dx, x>-1$;

**12)** $\int x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx, x>0$; **13)** $\int \frac{\ln^2 x}{x^2\sqrt{x}} dx, x>0$; **14)** $\int \frac{\ln x}{(x+2)^2} dx, x>0$;

**15*)** $\int \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2} dx, x>0$.

**b) 1)** $\int x e^{-x} dx, x\in\mathbb{R}$; **2)** $\int x^2 e^{2x} dx, x\in\mathbb{R}$; **3)** $\int x\cdot 3^x\, dx, x\in\mathbb{R}$; **4)** $\int x^2 5^x\, dx, x\in\mathbb{R}$;

**5)** $\int \left(x^2-2x-1\right)e^x\, dx, x\in\mathbb{R}$; **6)** $\int \left(x^3+5x^2-2\right)e^{2x}\, dx$; **7)** $\int \left(x^2+2x\right)e^{3x} dx, x\in\mathbb{R}$;

**8)** $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx, x\in\mathbb{R}$.

**c) 1)** $\int x \arcsin x\, dx, x\in(-1,1)$ și apoi $x\in[-1,1]$; **2)** $\int \arccos x\, dx, x\in(-1,1)$ și apoi $x\in[-1,1]$; **3)** $\int \operatorname{arctg} x\, dx, x\in\mathbb{R}$; **4)** $\int x \operatorname{arctg} x, x\in\mathbb{R}$; **5)** $\int (\arcsin x)^2 dx, x\in(-1,1)$;

**6)** $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, x>0$; **7)** $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx, x\in(-1,1)$; **8)** $\int \arcsin\frac{2x}{1+x^2} dx, x\in\mathbb{R}$;

**9)** $\int x^2 \operatorname{arctg} x\, dx, x\in\mathbb{R}$; **10)** $\int \frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x\, dx, x\in\mathbb{R}$; **11)** $\int \frac{3+2x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x\, dx$;

12) $\int x(\text{arctg}\, x)^2\, dx, x \in \mathbb{R}$; 13) $\int x^3 \text{arctg}\, x\, dx, x \in \mathbb{R}$; 14) $\int x\, \text{arctg}\, x^2\, dx, x \in \mathbb{R}$;

15) $\int x \arccos\frac{1}{x}\, dx, x > 1$; 16) $\int \frac{x\, \text{arctg}\, x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx, x \in \mathbb{R}$; 17) $\int x\, \text{arctg}\, \frac{1}{x}\, dx, x > 0$;

18) $\int \frac{x\, \text{arctg}\, x}{\left(x^2+4\right)^2}\, dx$; 19*) $I_1 = \int e^{\arcsin x}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx, I_2 = \int e^{\arcsin x} dx, x \in (-1,1)$.

d) 1) $\int e^x \sin x\, dx, x \in \mathbb{R}$; 2) $\int e^x \cos x\, dx, x \in \mathbb{R}$; 3) $\int 2^x \sin x\, dx, x \in \mathbb{R}$; 4) $\int e^{2x} \sin 3x\, dx$, $x \in \mathbb{R}$; 5) $\int e^x \sin^2 x\, dx, x \in \mathbb{R}$; 6) $\int e^{2x} \cos^2 x\, dx, x \in \mathbb{R}$; 7) $\int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx, x \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$; 8) $\int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx, x \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$; 9) $\int e^{\alpha x} \sin^2 \beta x\, dx, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$; 10) $\int e^{\alpha x} \cos^2 \beta x\, dx, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

e) 1) $\int x \sin x\, dx, x \in \mathbb{R}$; 2) $\int x^2 \sin x\, dx, x \in \mathbb{R}$; 3) $\int x \cos x\, dx, x \in \mathbb{R}$; 4) $\int x \sin 3x\, dx$, $x \in \mathbb{R}$; 5) $\int x \sin^2 x\, dx, x \in \mathbb{R}$; 6) $\int x^2 \cos 2x\, dx, x \in \mathbb{R}$; 7) $\int \left(x^2 - 3x + 5\right) \sin 2x\, dx$, $x \in \mathbb{R}$; 8) $\int x^3 \sin x\, dx, x \in \mathbb{R}$; 9) $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; 10) $\int x\, \text{tg}^2 2x\, dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$;
11) $\int \sqrt{x} \sin \sqrt{x}\, dx, x > 0$; 12) $\int \cos^2 \sqrt{x}\, dx, x \geq 0$; 13) $\int x \cos^2 x\, dx, x \in \mathbb{R}$;
14) $\int x \sin^3 x\, dx, x \in \mathbb{R}$; 15) $\int \frac{x \sin x}{\cos^2 x}\, dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

f) 1) $\int \sqrt{x^2+9}\, dx, x \in \mathbb{R}$; 2) $\int \sqrt{x^2-9}\, dx, x \in (3,\infty)$ şi apoi $x \in [3,\infty)$; 3) $\int \sqrt{16-x^2}\, dx$, $x \in (-4,4)$ şi apoi $x \in [-4,4]$; 4) $\int x\sqrt{x^2-9}\, dx, x > 3$; 5) $\int x^2\sqrt{x^2-9}\, dx, x > 3$; 6) $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$, $x \in \mathbb{R}$; 7) $\int x^2\sqrt{x^2+1}\, dx, x \in \mathbb{R}$; 8) $\int x^3\sqrt{x^2-4}\, dx, x > 2$; 9) $\int x^2\sqrt{9-x^2}\, dx, x \in (-3,3)$.

g) 1) $\int \sin x \cdot \ln(\text{tg}\, x)\, dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\int xe^x \sin x\, dx, x \in \mathbb{R}$; 3) $\int x^2 e^x \cos x\, dx, x \in \mathbb{R}$;
4) $\int xe^x \sin^2 x\, dx, x \in \mathbb{R}$; 5) $\int \sin(\ln x)\, dx, x > 0$; 6) $\int \cos(\ln x)\, dx, x > 0$;
7) $\int x^2 \sin(\ln x)\, dx, x > 0$; 8) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \frac{1}{\cos^6 x} = \frac{1}{\cos^4 x}(\text{tg}\, x)'$;
9) $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\, dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; 10) $\int \ln\left(1 + x^2 + x^4\right) dx, x \in \mathbb{R}$.

**2.** **a) Să se stabilească o formulă de recurență pentru fiecare din integralele $I_n, n\in\mathbb{N}^*$ de mai jos, calculând apoi $I_1, I_2, I_3$:**

**1)** $I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}, x\in\mathbb{R}$; **2)** $I_n=\int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)^n},\ x>1$; **3)** $I_n=\int\frac{x^n}{1+x^2}dx, x\in\mathbb{R}$;

**4)** $I_n=\int\frac{x^{2n}}{x^2+a^2}dx, x\in\mathbb{R}$; **5)** $I_n=\int\ln^n x\,dx, x>0$; **6)** $I_n=\int x\ln^n x\,dx, x>0$;

**7)** $I_n=\int x^n\ln x\,dx, x>0$; **8)** $I_n=\int x^n e^x\,dx, x\in\mathbb{R}$; **9)** $I_n=\int x^n\sin x\,dx, x\in\mathbb{R}$.

**b) Să se stabilească formula de recurență pentru fiecare din integralele de mai jos:**

**1)** $I_{m,n}=\int\sin^m x\cos^n x\,dx, x\in\mathbb{R}, m,n\in\mathbb{N}^*, m,n\geq 2$;

**2)** $I_{m,n}=\int x^n\left(\ln x\right)^m dx, x>0, m,n\in\mathbb{N}^*, m,n\geq 2$;

**3)** $\mathrm{I}_{m,n}=\int\frac{x^n}{\left(\ln x\right)^m}dx, x>1, m,n\in\mathbb{N}^*, m,n\geq 2$.

**3.** **Să se arate că următoarele funcții admit primitive pe domeniul de definiție şi să se calculeze o primitivă a lor:**

**1)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}, x\geq 1\\ x^2-x, x<1\end{cases}$; **2)** $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x\ln x, x>0\\ 0,\quad x=0\end{cases}$;

**3)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+4}, x\leq 0\\ 2+\sin x, x>0\end{cases}$; **4)** $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2}, x\in[0,3]\\ x^2-3x, x>3\end{cases}$;

**5)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}xe^x, x\leq 0\\ x^2\ln x, x>0\end{cases}$; **6)** $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x\,\mathrm{arctg}\,x, x\geq 0\\ \arcsin x, x\in(-1,0)\end{cases}$;

**7)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\ln\left(x^2+1\right), x>0\\ xe^{2x}, x\leq 0\end{cases}$; **8)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^x\sin x, x\leq 0\\ xe^x, x>0\end{cases}$;

**9)** $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x\arcsin x, x\in[0,1]\\ x\ln(-x), x<0\end{cases}$; **10)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=$

$=\begin{cases}x\sqrt{x^2+1}, x\leq 0\\ \sqrt{x}-x^2, x>0\end{cases}$; **11)** $f:(-1,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\max\left(e^x, 1+xe^x\right)$; **12)** $f:(0,2)\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\sqrt{1+x^2}\min\left(x,x^3\right)$; **13)** $f:(0,2)\to\mathbb{R}, f(x)=\max\left(x,x^2\right)\sqrt{4-x^2}$.

**4.** **Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^3\ln x$. Să se determine primitiva $F$ a lui $f$ care verifică $F(1)=0$.**

**5.** **1) Fie $I=\int e^x\sin^2 x\,dx, J=\int e^x\cos^2 x\,dx$. Să se calculeze $I+J, J-I$ şi să se deducă $I$ şi $J$.**

**2) Fie $I=\int e^x\cos x\,dx, J=\int e^x\sin x\,dx$. Să se arate că $I+J=e^x\sin x, I-J=e^x\cos x$ şi să se deducă $I$, $J$.**

**6.** **1) Să se determine funcția derivabilă $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietățile $f'(x)=\ln^3 x$ și $f(1)=0$.**

**2) Să se determine funcția derivabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietățile $e^x f'(x)=x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ și $f(0)=3$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.**

## 1) Metoda integrării prin substituție (Schimbare de variablă)

Există situații în care funcția de integrat nu figurează în tabelul cu primitive uzuale și nici nu se poate integra utilizând formula integrării prin părți deși este vorba **tot de integrarea unui produs**. Totuşi realizând o substituție convenabilă ($u$ - substituție) integrala noii funcții să se realizeze cu unul din mijloacele enunțate. Dacă $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă, atunci am văzut în paragraful precedent că diferențiala lui $f$ este egală cu produsul dintre derivata lui $f$ și diferențiala argumentului, adică $df(x)=f'(x)dx$. În cele ce urmează se prezintă două tehnici de lucru, **ambele implicând substituția**, care permit calcularea integralelor unor funcții date, când acestea se pot aduce la o formă convenabilă. Este operația inversă a derivării compunerii $(f\circ g)'=f'(g)\cdot g'$, unde $f,g$ sunt funcții derivabile. Metoda se mai numeşte şi a **schimbării de variabilă deoarece de la integrarea în raport cu variabila veche $x$ se trece la integrarea în raport cu noua variabilă** $u$. Se disting aici substituțiile algebrice și cele trigonometrice.

### Prima metodă a substituției (a schimbării de variabilă)

**Teoremă.** Fie $I,J\subseteq\mathbb{R}$ intervale și $I\xrightarrow{\varphi}J\xrightarrow{h}\mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:
**1)** $\varphi$ este derivabilă; **2)** $h$ admite primitive ($H$ o primitivă a sa).
Atunci funcția $(h\circ\varphi)\cdot\varphi'$ admite primitive pe $I$ și mai mult

$$\int h(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=H(\varphi(x))+\mathcal{C}.$$

**Demonstrație.** Să observăm că $H\circ\varphi$ este o funcție derivabilă (fiind compunere de funcții derivabile). Din $(H\circ\varphi)'=H'(\varphi)\cdot\varphi'=h(\varphi)\cdot\varphi'=(h\circ\varphi)\cdot\varphi'$ rezultă că $H\circ\varphi$ este o primitivă pentru $(h\circ\varphi)\cdot\varphi'$. ■

**Observații.** **1)** Spunem că $\varphi$ **este funcția care schimbă variabila**.
Vom înlocui formal $\varphi(x)=u$ și $\varphi'(x)dx=du$ (spunem că am făcut substituția $u=\varphi(x)$ și apoi calculăm diferențiala $du=\varphi'(x)\,dx$) în $I=\int h(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ când

obținem **integrala asociată** $I_1 = \int h(u)\,du$, mai uşor de calculat (fie cu tabelul de integrale uzuale, fie folosind formula integrării prin părți).
Din $I_1$ obținem $I$ înlocuind $u$ cu $\varphi(x)$. Prin această metodă **integrarea în raport cu variabila veche** $x$ **a fost înlocuită cu integrarea în raport cu noua variabilă** $u$.
Se mai spune că $\varphi$ este “funcția interioară”, iar $h$ este “funcția exterioară”.
**Schematic**

Avem de calculat $I = \int h(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ → Se face substituția $u = \varphi(x) \Rightarrow du = \varphi'(x)\,dx$ →

→ Noua integrală de calculat $I_1 = \int h(u)\,du = H(u) + \mathcal{C}$ (integrala asociată) → Se înlocuieşte $u$ cu $\varphi(x)$ →

→ Integrala de calculat $I = H(\varphi(x)) + \mathcal{C}$

Pentru a-l obține pe $I_1$, în integrala $I$ se înmulțeşte după semnul integrală cu o constantă pentru a evidenția $\varphi'(x)\,dx$ şi se împarte în fața semnului integrală cu acelaşi număr.

## Probleme rezolvate

**1. Să se calculeze $I = \int x e^{x^2}\,dx, x \in \mathbb{R}$.**

**R.** Notăm $u = x^2$ şi deci $du = 2x\,dx$. Se rescrie $I$ sub forma $I = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(2x)\,dx$ şi deci integrala asociată este $I_1 = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + \mathcal{C}$.

Revenim la integrala inițială punând în locul lui $u$, $x^2$ şi deci avem: $I = \frac{1}{2}e^{x^2} + \mathcal{C}$.De obicei se trece de la $I$ la $I_1$ scriind $I = \int e^{x^2} x\,dx$ şi utilizând egalitatea $\frac{1}{2}du = x\,dx$ (din $du = 2x\,dx$). De aici $I_1 = \int e^u \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + \mathcal{C}$ şi $I = \frac{1}{2}e^{x^2} + \mathcal{C}$.

**2. Să se calculeze $I = \int \sin\left(\frac{x}{5}\right)dx, x \in \mathbb{R}$.**

**R.** Punem $u = \frac{x}{5}$ şi deci $du = \frac{1}{5}dx$ sau $5du = dx$. Deci integrala asociată este $I_1 = \int (\sin u)5\,du = 5\int \sin u\,du = -5\cos u + \mathcal{C}$. Înlocuind aici $u$ cu $\frac{x}{5}$ se obține $I = -5\cos\left(\frac{x}{5}\right) + \mathcal{C}$.

**3. Să se calculeze $I=\int x^2\sqrt{2x^3+5}\,dx, x>0$.**

**R.** Substituim $u=2x^3+5$ şi obţinem $du=\left(6x^2\right)dx$ sau $\frac{1}{6}du=x^2dx$. Integrala asociată este

$I_1=\int\sqrt{u}\cdot\frac{1}{6}du=\frac{1}{6}\int\sqrt{u}\,du=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}u\sqrt{u}+\mathcal{C}=\frac{1}{9}u\sqrt{u}+\mathcal{C}$.

Integrala dată este egală cu $I=\frac{1}{9}\left(2x^3+5\right)\sqrt{2x^3+5}+\mathcal{C}$.

**4. Să se calculeze $I=\int\frac{2x+1}{(x+1)^2}dx, x>-1$.**

**R.** Punem $u=x+1$ şi deci $du=dx$, iar integrala asociată este $I_1=\int\frac{2(u-1)+1}{u^2}du=$

$=\int\frac{2u-1}{u^2}du=2\int\frac{1}{u}du-\int\frac{du}{u^2}=2\ln|u|+\frac{1}{u}+\mathcal{C}$.

De aici $I=2\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+\mathcal{C}$.

**2)** Nu se poate pune egalitate între mulţimile $I=\int h(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ şi $I_1=\int h(u)\,du$ deoarece prima este mulţimea primitivelor funcţiei $(h\circ\varphi)\cdot\varphi'$, care sunt funcţii definite pe *I*, în timp ce a doua mulţime reprezintă primitivele funcţiei $h$, care sunt funcţii definite pe $J$. Chiar dacă $I=J$, în general cele două mulţimi sunt distincte.
Punând în locul funcţiei $h$ funcţiile uzuale se obţine un tabel similar celui de la primitive uzuale. Se obţine din primul tabel înlocuind $x$ cu $\varphi$ şi înmulţind funcţia obţinută cu $\varphi'$. În tabel am evidenţiat transformările indicate în schema de la observaţia **1)**.

# Tabel de integrale nedefinite

| | Integrala inițială | $u=\varphi(x)$ <br> $du=\varphi'(x)\,dx$ | Integrala asociată | $u=\varphi(x)$ | Integrala inițială |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\int \varphi^{\alpha}(x)\varphi'(x)\,dx$ <br> $\alpha\neq -1, \varphi(I)\subset(0,\infty)$ | $\longrightarrow$ | $\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\mathcal{C}$ | $\longrightarrow$ | $\frac{(\varphi(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\mathcal{C}$ |
| 2 | $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx$ <br> $\varphi(x)\neq 0, x\in I$ | $\longrightarrow$ | $\int \frac{du}{u}=\ln\lvert u\rvert+\mathcal{C}$ | $\longrightarrow$ | $\ln\lvert\varphi(x)\rvert+\mathcal{C}$ |
| 3 | $\int a^{\varphi(x)}\varphi'(x)\,dx$ <br> $a>0, a\neq 1$ | $\longrightarrow$ | $\int a^{u}\,du=\frac{a^{u}}{\ln a}+\mathcal{C}$ | $\longrightarrow$ | $\frac{a^{\varphi(x)}}{\ln a}+\mathcal{C}$ |
| 4 | $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^{2}(x)-a^{2}}dx$ <br> $\varphi(x)\neq \pm a, x\in I, a\neq 0$ | $\longrightarrow$ | $\int \frac{du}{u^{2}-a^{2}}=$ <br> $\frac{1}{2a}\cdot\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert+\mathcal{C}$ | $\longrightarrow$ | $\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{\varphi(x)-a}{\varphi(x)+a}\right\rvert+\mathcal{C}$ |
| 5 | $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^{2}(x)+a^{2}}dx, a\neq 0$ | $\longrightarrow$ | $\int \frac{du}{u^{2}+a^{2}}=$ <br> $=\frac{1}{a}\cdot\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+\mathcal{C}$ | $\longrightarrow$ | $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi(x)}{a}+\mathcal{C}$ |
| 6 | $\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^{2}-\varphi^{2}(x)}}dx$ <br> $a>0, \varphi(I)\subset(-a,a)$ | $\longrightarrow$ | $\int \frac{du}{\sqrt{a^{2}-u^{2}}}=$ <br> $=\arcsin\frac{u}{a}+\mathcal{C}$ | $\longrightarrow$ | $\arcsin\frac{\varphi(x)}{a}+\mathcal{C}$ |
| 7 | $\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^{2}(x)+a^{2}}}dx, a\neq 0$ | $\longrightarrow$ | $\int \frac{du}{\sqrt{u^{2}+a^{2}}}=$ <br> $=\ln\left(u+\sqrt{u^{2}+a^{2}}\right)+$ <br> $+\mathcal{C}$ | $\longrightarrow$ | $\ln\left(\varphi(x)+\right.$ <br> $\left.+\sqrt{\varphi^{2}(x)+a^{2}}\right)+\mathcal{C}$ |
| 8 | $\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^{2}(x)-a^{2}}}dx$ <br> $a>0, \varphi(I)\subset(-\infty,-a)$ <br> sau $(a,\infty)$ | $\longrightarrow$ | $\int \frac{du}{\sqrt{u^{2}-a^{2}}}=$ <br> $=\ln\left\lvert u+\sqrt{u^{2}-a^{2}}\right\rvert+$ <br> $+\mathcal{C}$ | $\longrightarrow$ | $\ln\left\lvert\varphi(x)+\sqrt{\varphi^{2}(x)-a}\right\rvert+$ <br> $+\mathcal{C}$ |
| 9 | $\int \sin\varphi(x)\cdot\varphi'(x)dx$ | $\longrightarrow$ | $\int \sin u\,du=$ <br> $=-\cos u+\mathcal{C}$ | $\longrightarrow$ | $-\cos\varphi(x)+\mathcal{C}$ |
| 10 | $\int \cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x)dx$ | $\longrightarrow$ | $\int \cos u\,du=$ <br> $=\sin u+\mathcal{C}$ | $\longrightarrow$ | $\sin\varphi(x)+\mathcal{C}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | $\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2 \varphi(x)}dx$, $\varphi(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}, x \in I$ | $\longrightarrow$ | $\int \frac{du}{\cos^2 u} =$ $= \operatorname{tg} u + \mathcal{C}$ | $\longrightarrow$ | $\operatorname{tg} \varphi(x) + \mathcal{C}$ |
| 12 | $\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2 (x)}dx$, $\varphi(x) \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}, x \in I$ | $\longrightarrow$ | $\int \frac{du}{\sin^2 u} =$ $= -\operatorname{ctg} u + \mathcal{C}$ | $\longrightarrow$ | $-\operatorname{ctg} \varphi(x) + \mathcal{C}$ |
| 13 | $\int \operatorname{tg}\varphi(x) \cdot \varphi'(x)dx$ $\varphi(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}, x \in I$ | $\longrightarrow$ | $\int \operatorname{tg} u\, du =$ $= -\ln\lvert\cos u\rvert + \mathcal{C}$ | $\longrightarrow$ | $-\ln\lvert\cos\varphi(x)\rvert + \mathcal{C}$ |
| 14 | $\int \operatorname{ctg}\varphi(x) \cdot \varphi'(x)dx$ $\varphi(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z},$ $x \in I$ | $\longrightarrow$ | $\int \operatorname{ctg} u\, du =$ $= \ln\lvert\sin u\rvert + \mathcal{C}$ | $\longrightarrow$ | $\ln\lvert\sin\varphi(x)\rvert + \mathcal{C}$ |

## Probleme propuse

**1.** Să se calculeze integralele de mai jos utilizând substituția indicată

a) 1) $\int (x-1)^5\, dx, x \in \mathbb{R}, u = x-1$; 2) $\int (3x+2)^6 dx, x \in \mathbb{R}, u = 3x+2$;

3) $\int x(2x-1)^9\, dx, x \in \mathbb{R}, u = 2x-1$; 4) $\int x\left(x^2+1\right)^3 dx, x \in \mathbb{R}, u = x^2+1$;

5) $\int \left(x^2-1\right)\left(x^3-3x+1\right)^5 dx, x \in \mathbb{R}, u = x^3-3x+1$; 6) $\int x^2\left(x^3+1\right)^5 dx, x \in \mathbb{R}, u = x^3+1$.

b) 1) $\int \frac{dx}{x+3}, x > -3, u = x+3$; 2) $\int \frac{dx}{2x+1}, x < -\frac{1}{2}, u = 2x+1$; 3) $\int \frac{dx}{1-4x}, x > \frac{1}{4}$, $u = 1-4x$; 4) $\int \frac{dx}{(2x+1)^5}, x > -\frac{1}{2}, u = 2x+1$; 5) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}, u = x^2+1$;

6) $\int \frac{2x-1}{x^2+9}dx, x \in \mathbb{R}, u = x^2+9$; 7) $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^{10}}, x > 1, u = x-1$; 8) $\int \frac{x^2 dx}{2x^3+1}, x > 0$,

$u = 2x^3+1$; 9) $\int \frac{x^2 dx}{\left(x^3+2\right)^3}, x > 0, u = x^3+2$; 10) $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}, x \in \mathbb{R}, u = x^2$.

c) 1) $\int \sqrt{2x+1}\, dx, x > -\frac{1}{2}, u = 2x+1$; 2) $\int x\sqrt{1+x}\, dx, x \geq -1, u = 1+x$; 3) $\int \sqrt[3]{(2x+1)^2}\, dx$,

$x\in\mathbb{R}, u=2x+1$; 4) $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx, x\in\mathbb{R}, u=x^2+3$; 5) $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx, x>-1,$ $u=x^3+1$; 6) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx, x<-1, u=x^2-1$; 7) $\int\frac{dx}{\sqrt{(5x-1)^3}}, x>\frac{1}{5}, u=5x-1.$

d) 1) $\int e^{3x}\,dx, x\in\mathbb{R}, u=3x$; 2) $\int\frac{dx}{e^{2x}}, x\in\mathbb{R}, u=2x$; 3) $\int x^2e^{x^3}dx, x\in\mathbb{R}, u=x^3$;

4) $\int\frac{x\,dx}{e^{x^2}}, x\in\mathbb{R}, u=x^2$; 5) $\int\sqrt{x}\,e^{x\sqrt{x}}dx, x\geq 0, u=x\sqrt{x}$; 6) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx, x>0, u=\sqrt{x}$;

7) $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx, x>0, u=\frac{1}{x}$; 8) $\int\left(e^{3x}-2e^{2x}+5e^x\right)dx, x\in\mathbb{R}, u=e^x$; 9) $\int x2^{3x^2}dx, x\in\mathbb{R},$ $u=3x^2$; 10) $\int x2^{-3x^2+1}dx, x\in\mathbb{R}, u=-3x^2+1$; 11) $\int\frac{e^x}{e^{2x}+4}dx, x\in\mathbb{R}, u=e^x.$

e) 1) $\int\frac{\ln x}{x}dx, x>0, u=\ln x$; 2) $\int\frac{\sin(\ln x)}{x}dx, x>0, u=\ln x$; 3) $\int\frac{(1+\ln x)^5}{x}dx, x>0,$ $u=1+\ln x$; 4) $\int\frac{dx}{x\ln x}, x>1, u=\ln x$; 5) $\int\frac{dx}{x(\ln x+1)}, x>1, u=\ln x+1.$

f) 1) $\int\sin^2 x\cdot\cos x\,dx, x\in\mathbb{R}, u=\sin x$; 2) $\int\sin^k x\cos x\,dx, k\in\mathbb{N}^*, x\in\mathbb{R}, u=\sin x$;
3) $\int\cos^3 x\sin x\,dx, x\in\mathbb{R}, u=\cos x$; 4) $\int\sin^3 x\cos^2 x\,dx, x\in\mathbb{R}, u=\cos x, \left(\sin^2 x=1-\cos^2 x\right)$;
5) $\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx, x\in\mathbb{R}, u=\sin x$; 6) $\int\sin^3 x\,dx, x\in\mathbb{R}, u=\cos x$; 7) $\int\cos^3 x\,dx, x\in\mathbb{R},$ $u=\sin x$; 8) $\int\sin^3 x\cos^3 x\,dx, x\in\mathbb{R}, u=\sin x$; 9) $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), u=\cos x$;

10) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), u=\sin x$; 11) $\int\frac{dx}{2+\sin x}, x\in(-\pi,\pi), u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 12) $\int\frac{dx}{3-2\cos x},$ $x\in(-\pi,\pi), u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 13) $\int\frac{dx}{2\sin x-3\cos x+5}, x\in(-\pi,\pi), u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 14) $\int\frac{(1-\sin x)dx}{2+\cos x}, x\in(-\pi,\pi),$ $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 15) $\int\frac{\cos x\,dx}{1+\sin x}, x\in(-\pi,\pi), u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 16) $\int\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), u=\operatorname{tg} x.$

g) 1) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx, x\in(-1,1), u=\arcsin x$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}, x\in(0,1)$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}, x\in(0,1), u=\arcsin x$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin^2 x+1}}, x\in(-1,1),$ $u=\arcsin x$; 5) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\arcsin^2 x}}, x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), u=\arcsin x$; 6) $\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx,$ $x\in(0,1), u=\arcsin x$; 7) $\int\frac{\ln(\arccos)dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}, x\in(0,1), u=\ln(\arccos x).$

**2.** **Pentru** $m \in \mathbb{R}$ **fie funcția** $f_m:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f_m(x)=\dfrac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+m^2}$.

1) **Să se determine primitivele funcției** $f_0$

2) **Să se calculeze** $\int f_m(x)\,dx, m\neq 0$

**3.** **Să se calculeze** $I=\int\dfrac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx, J=\int\dfrac{\cos x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**4.** **Să se determine funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **cu proprietățile:**

**1)** $f(0)=1$; **2)** $f$ **este derivabilă pe** $\mathbb{R}$ **cu derivata strict crescătoare; 3)** $f^2(x)-(f')^2(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

**5.** **Să se determine funcția continuă** $f:I\to(0,\infty)$ **și intervalul** $I$ **de numere reale, știind că** $f(0)=1$ **și** $\dfrac{1}{f}$ **este o primitivă pentru** $f$.

**6.** **Se consideră funcțiile** $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **cu proprietatea** $g(x)=f\left(x^5+x\right),\forall x\in\mathbb{R}$. **Să se demonstreze că funcția** *f* **admite primitive, dacă și numai dacă** *g* **admite primitive.**

**7.** **Fie** $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=1+(1+x)+(1+x)^2+...+(1+x)^n, n\in\mathbb{N}^*$.

a) **Arătați că:** $f_n(x)=C_{n+1}^1+C_{n+1}^2x+...+C_{n+1}^{n+1}x^n$

b) **Demonstrați că:** $\int\dfrac{(x+1)^{n+1}-1}{x}dx=x+\dfrac{(x+1)^2}{2}+\dfrac{(x+1)^3}{3}+...+\dfrac{(x+1)^{n+1}}{n+1}+\mathcal{C}$.

**8.** **Fie** $I_n=\int\dfrac{\cos nx}{\sin x}dx, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. **Să se determine o relație de recurență pentru** $I_n, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ **și apoi deduceți** $I_n$.

## A doua metodă a substituției (a schimbării de variabilă)

Are loc următoarea

**Teoremă.** Fie $I,J\subseteq\mathbb{R}$, intervale şi $I\xrightarrow{\varphi}J\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ două funcţii cu următoarele proprietăţi:

**1)** $\varphi$ este bijectivă, derivabilă cu $\varphi'(x)\neq 0,\forall x\in I$;

**2)** Funcția $h=(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ admite primitive (fie $H$ o primitivă a sa).

Atunci:

a) Funcția *f* admite primitive;

b) Funcția $H\circ\varphi^{-1}$ este o primitivă a lui *f*, adică

$$\int f(x)\,dx=\left(H\circ\varphi^{-1}\right)(x)+\mathcal{C}.$$

**Demonstrație.** Din **1)** rezultă că $\varphi^{-1}$ este derivabilă pe $J$. Cum $H$ este o primitivă a lui $h$, rezultă $H$ derivabilă pe $I$ şi $H' = (f \circ \varphi)\varphi'$. Pentru ca $H \circ \varphi^{-1}$ să fie o primitivă pentru $f$ trebuie ca $(H \circ \varphi^{-1})' = f$. Mai întâi este clar că $H \circ \varphi^{-1}$ este derivabilă pe $J$ (compunere de funcții derivabile). Avem:

$$(H \circ \varphi^{-1})'(x) = H'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = (f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x))\varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) =$$

$$= f(x)\varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x), x \in J. \ \blacksquare$$

**Observații. 1)** Se spune că $\varphi^{-1}$ este funcția care schimbă variabila. Înlocuind formal $x = \varphi(u)$ şi $dx = \varphi'(u)du$ se trece de la integrala $I = \int f(x)dx$ la integrala asociată $I_1 = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$.

**2)** În prima metodă se notează cu $u$ o expresie ce-l conține pe $x$ după care se calculează integrala asociată $I_1$. În a doua metodă a substituției se pune $x$ egal cu o expresie de $u$ şi se trece la integrala asociată $I_1$.

**Schematic**

Avem de calculat $I = \int f(x)\,dx$ $\rightarrow$ Se face substituția $x = \varphi(u) \Rightarrow$ $\Rightarrow dx = \varphi'(u)\,du$ $\rightarrow$ Noua integrală de calculat $I_1 = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du =$ $= H(u) + \mathcal{C}$ integrala asociată $\rightarrow$

$\rightarrow$ Se înlocuieşte $u = \varphi^{-1}(x)$ $\rightarrow$ Integrala de calculat $I = H(\varphi^{-1}(x)) + \mathcal{C}$

De remarcat că în cele două metode se face o substituție în urma căreia se obține o integrală asociată $I_1$ mai uşor de calculat. Iată "transformările" în cele două metode:

$$I = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx \overset{u=\varphi(x)}{\rightarrow} I_1 = \int f(u)\,du = F(u) + \mathcal{C} \overset{u=\varphi(x)}{\rightarrow} I = F(\varphi(x)) + \mathcal{C}$$

$$I = \int f(x)\,dx \overset{x=\varphi(u)}{\rightarrow} I_1 = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du = H(u) + \mathcal{C} \overset{u=\varphi^{-1}(x)}{\rightarrow} I = H(\varphi^{-1}(x)) + \mathcal{C}.$$

Să reținem că există o singură formulă de schimbare de variabilă şi mai multe variante de aplicare ale ei, care depind de particularitatea funcției ale cărei primitive trebuie calculate.

**Exemple 1.** **(Substituțiile trigonometrice) Am evaluat la integrarea prin părți integralele:** $\int\sqrt{a^2-x^2}dx, x\in[-a,a], a>0; \int\sqrt{a^2+x^2}dx, x\in\mathbb{R}, a\neq 0; \int\sqrt{x^2-a^2}dx, x\in I,$ **cu** $I\subset(-\infty,-a]$ **sau** $I\subset[a,\infty)$.

**În continuare vom găsi expresiile acestor integrale utilizând substituțiile trigonometrice prin care "eliminăm" radicalii de sub semnul integrală.**

**a) Pentru** $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ **se pune** $x=a\sin u, a>0, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$**.De aici** $dx=a\cos u\,du$,

$$a^2-x^2=a^2\cos^2 u, \sqrt{a^2-x^2}=a|\cos u|=a\cos u, \frac{x}{a}=\sin u\Rightarrow u=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right),$$

$\cos u=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$. **Integrala asociată este**

$$I_1=\int a^2\cos^2 u\,du=a^2\int\frac{1+\cos 2u}{2}du=a^2\left(\frac{u}{2}+\frac{\sin 2u}{4}\right)+\mathcal{C}.$$

**De aici** $I=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right]+\mathcal{C}=$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right]+\mathcal{C}=\frac{1}{2}\left[a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+x\sqrt{a^2-x^2}\right]+\mathcal{C}.$$

**Comparativ cu integrarea prin părți a funcției** $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}, x\in[-a,a]$**, unde o primitivă se determina pe** $(-a,a)$ **(interval deschis), aici prin transformarea considerată am determinat o primitivă a funcției pe intervalul închis** $[-a,a]$.

**c) Pentru** $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$ **se pune** $x=a\,\mathrm{tg}\,u, a>0, u\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$**, iar de aici**

$$dx=\frac{a\,du}{\cos^2 u}, \sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{|\cos u|}=\frac{a}{\cos u}, u=\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right), \sin u=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}, \cos u=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$\mathrm{tg}\,u=\frac{x}{a}\Rightarrow u=\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right).$$

**Integrala asociată este** $I_1=a^2\int\frac{du}{\cos^3 u}=a^2\int\frac{\cos u\,du}{\cos^4 u}=a^2\int\frac{\cos u\,du}{\left(1-\sin^2 u\right)^2}$.

**În ultima integrală, schimbăm din nou variabila** $t=\sin u\Rightarrow dt=\cos u\,du$ **şi avem de calculat integrala asociată lui** $I_1, I_2=a^2\int\frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}$**, tip de integrală ce se va studia la paragraful următor.**

**c) Pentru** $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ **se pune** $x=\frac{a}{\cos u}, a>0, u\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ **sau** $u\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

**De aici $dx = \dfrac{a\sin u}{\cos^2 u}du$ etc.**

**2. Să se calculeze $I = \int \dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx, x>1$.**

**R.** Funcția de integrat are în structura sa $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$ (adică radicali de ordine diferite din aceeaşi expresie), aici $x$.

Se face substituția $x = u^6\left(x>1 \Rightarrow u>1 \Rightarrow u=\sqrt[6]{x}\right)$, unde exponentul 6 reprezintă cel mai mic multiplu comun, al ordinelor radicalilor. De aici $dx = 6u^5\,du$ şi integrala asociată devine

$$I_1 = \int \frac{6u^5\,du}{u^3-u^2} = 6\int \frac{u^3\,du}{u-1} = 6\int \frac{u^3-1+1}{u-1}du = 6\left(\int\left(u^2+u+1+\frac{1}{u-1}\right)\right)du =$$

$= 2u^3+3u^2+6u+6\ln(u-1)+\mathcal{C}$, iar integrala inițială $I = 2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left(\sqrt[6]{x}-1\right)+\mathcal{C}$.

**3. Să se calculeze $I = \int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}, x>0$.**

**R.** Punem $x = \dfrac{1}{u}(\text{din } x>0 \Rightarrow u>0)$ şi $dx = -\dfrac{du}{u^2}$. Integrala asociată este

$$I_1 = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u^2}\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}} = -\int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2+1}} = -\int\left(\sqrt{u^2+1}\right)'du = -\sqrt{u^2+1}+\mathcal{C}.$$

În final, $I = -\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+\mathcal{C}$.

**4. Să se calculeze 1) $I = \int \sqrt{1+x^2}dx, x\in\mathbb{R}$; 2) $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, x\in\mathbb{R}$.**

**R.** 1) Se pune $x = \dfrac{e^t-e^{-t}}{2} = sh(t)$ etc.; 2) $x = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2} = ch(t)$ etc.

## Probleme propuse

**Să se calculeze integralele de mai jos, utilizând a doua metodă a substituției şi substituțiile indicate:**

**1) $\int \dfrac{\sqrt{x}}{x+2}dx, x\geq 2, x=u^2$; 2) $\int \dfrac{dx}{2+\sqrt{x}}, x\geq 0, x=u^2$; 3) $\int \dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx, x\geq 0, x=u^2$;**

**4) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}, x>0, x=u^4$; 5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}, x>0, x=u^6$; 6) $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}}, x>-\dfrac{1}{2}$,**

**$\sqrt{2x+1}=u$; 7) $\int \dfrac{\sqrt{x-2}}{x}dx, x>2, \sqrt{x-2}=u$; 8) $\int x\sqrt{x+1}\,dx, x\geq -1, \sqrt{x+1}=u$;**

$9)\int \frac{x}{\sqrt[3]{x-2}}dx,\ x>2,\ \sqrt[3]{x-2}=u;$ $10)\int x\sqrt[3]{x-2}\,dx,\ x\in\mathbb{R},\ \sqrt[3]{x-2}=u;$ $11)\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}},$ $x>0,\ \sqrt{3x+1}=u;$ $12)\int x^2\sqrt{x+2}\,dx,\ x\geq -2,\ \sqrt{x+2}=u;$ $13)\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}},\ x\in\mathbb{R},$ $e^x+1=u^2,\ u>0;$ $14)\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx,\ x\in\mathbb{R},\ x=\ln u,\ u>0;$ $15)\int \frac{dx}{e^x\sqrt{e^x}},\ x\in\mathbb{R};$

$16)\int \frac{dx}{1+e^x},\ x\in\mathbb{R},\ x=-\ln u;$ $17)\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},\ x>1,\ x=\frac{1}{u}$ sau $x=\frac{1}{\cos u};$

$18)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}},\ x>1,\ x=\frac{1}{u};$ $19)\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}},\ x>\sqrt{2},\ x=\frac{1}{u}$ sau $x=\frac{\sqrt{2}}{\cos u}.$

## 1.6. INTEGRAREA FUNCȚIILOR RAȚIONALE

**Definiție.** O funcție $f:I\to\mathbb{R}, I$ interval, se numeşte **rațională** dacă $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, unde $P,Q$ sunt funcții polinomiale cu coeficienți reali şi $Q(x)\neq 0, \forall x\in I$.

### 1. Descompunerea funcțiilor raționale în funcții raționale simple

**Definiție.** O funcție rațională se numeşte **simplă** dacă are una din formele:

1) $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ (funcția polinomială);

2) $f(x)=\frac{A}{(x-a)^n}, n\in\mathbb{N}^*, x\in I\subset(-\infty,a)$ sau $I\subset(a,\infty)$;

3) $f(x)=\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}, n\in\mathbb{N}^*, b^2-4c<0$.

Următoarea teoremă de algebră este fundamentală pentru integrarea funcțiilor raționale.

**Teoremă.** Orice funcție rațională poate fi reprezentată sub forma unei sume finite de funcții raționale simple. Mai precis, dacă

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_p)^{\alpha_p}\left(x^2+b_1x+c_1\right)^{\beta_1}\dots\left(x^2+b_qx+c_q\right)^{\beta_q},$$

unde $b_i^2-4c_i<0, i=\overline{1,q}$, atunci $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=L(x)+\sum\limits_{k=1}^{p}\left[\dfrac{A_k^1}{x-a_k}+\right.$

$$\left.+\frac{A_k^2}{(x-a_k)^2}+\dots+\frac{A_k^{\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}}\right]+\sum_{k=1}^{q}\left[\frac{B_k^1x+C_k^1}{x^2+b_kx+c_k}+\dots+\frac{B_k^{\beta_k}x+C_k^{\beta_k}}{\left(x^2+b_kx+c_k\right)^{\beta_k}}\right], \mathbf{(1)}$$

unde $L$ este o funcție polinomială cu coeficienți reali, iar $p,q\in\mathbb{N}^*$, $a_k, b_k, c_k, A_k^i, B_k^i, C_k^i$ sunt numere reale.

**Observație.** Problema care se pune în cazul în care $Q$ este descompus în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ (se ştie din algebră că factorii ireductibili peste $\mathbb{R}$ sunt polinoamele de gradul întâi $X-a$ şi cele de gradul doi $X^2+bX+c, a,b,c\in\mathbb{R}$ cu $b^2-4c<0$) este de a determina coeficienții $A_k^i, B_k^i, C_k^i$ ce apar în membrul drept al egalității **(1)**.
Dacă grad $P\geq$ grad $Q$, atunci se face împărțirea lui $P$ la $Q$ conform teoremei împărțirii cu rest când obținem $P=LQ+R$, unde grad $R<$ grad $Q$ şi deci

$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=L(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$. Acum pentru $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ avem descompunerea în funcții raționale simple (de formele 2) şi 3)) şi corespunde celor două sume din membrul drept al egalității **(1)**. În egalitatea astfel obținută se aduce, în membrul drept, la acelaşi numitor. Numitorul comun este $Q$. Dacă se elimină $Q$ din ambii membrii se ajunge la egalitatea a două polinoame, iar de aici la un sistem de ecuații în care necunoscutele sunt coeficienții $A_k^i, B_k^i, C_k^i$. Acesată metodă de a determina coeficienții $A_k^i, B_k^i, C_k^i$ se numeşte **metoda coeficienților nedeterminați**.

## Probleme rezolvate

**Să se descompună în funcții raționale simple următoarele funcții raționale:**
**a) Numitorul are rădăcini reale simple**

**1)** $f(x)=\dfrac{2x^2+6x+6}{(x+1)\left(x^2+5x+6\right)}, x\neq-3, x\neq-2, x\neq-1;$

**2)** $f(x)=\dfrac{3x^3+x^2+x+1}{2x^2-x-1}, x\neq-\dfrac{1}{2}, x\neq 1.$

**R.** 1) Descompunem numitorul în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$. Avem: $Q(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$. Atunci descompunerea lui $f$ în funcții raționale simple are forma:

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}, \quad (*).$$

Aducând (în dreapta) la acelaşi numitor şi apoi eliminând numitorul rezultă egalitatea

$$2x^2+6x+6=A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2), \quad (\mathbf{1}) \text{ sau}$$

$$2x^2+6x+6=(A+B+C)x^2+(5A+4B+3C)x+6A+3B+2C.$$

De aici prin identificarea coeficienților (de la aceleaşi puteri ale lui $x$) rezultă sistemul:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 2=A+B+C \\ x & 6=5A+4B+3C \\ x^0 & 6=6A+3B+2C \end{array}.$$

Rezolvând acest sistem găsim $A=1, B=-2, C=3$.

Deci $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x+3}$.

**Observație.** Dacă în **(1)** se trece la limită după $x\to-1$, ceea ce revine la a înlocui pe $x$ cu $-1$, rezultă $A=1$. Analog pentru $x=-2$ se găseşte $B=-2$, iar pentru $x=-3$ avem $C=3$.

Deci în acest caz, al rădăcinilor simple, dacă dorim să-l aflăm pe $A$, atunci se înmulțeşte egalitatea **(*)** cu numitorul fracției în care apare $A$. În membrul stâng se poate simplifica prin $x+1(x\neq-1)$. Apoi în această egalitate se trece la limită după $x\to-1$. În stânga găsim 1, iar în dreapta doar $A$ deoarece termenii care conțin pe $B$ şi $C$ fiind înmulțiți cu $x+1$, prin trecerea la limită după $x\to-1$, aceştia devin zero. Analog pentru a afla pe $B$ se înmulțeşte **(*)** cu $x+2$ şi se trece la limită după $x\to-2$ etc.

2) Observăm că gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului. Se face împărțirea şi găsim:

$$2x^3+x^2+x+1=(x+1)\left(2x^2-x-1\right)+3x+2.$$

Deci $f(x)=\dfrac{(x+1)\left(2x^2-x-1\right)+3x+2}{2x^2-x-1}=x+1+\dfrac{3x+2}{2x^2-x-1}$.

Acum funcția rațională $\dfrac{3x+2}{2x^2-x-1}$ se descompune în funcții raționale simple. Să observăm că $2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$ şi deci $\dfrac{3x+2}{2x^2-x-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{2x+1}$, iar de aici

$3x+2=(2A+B)x+A-B$. Se obține sistemul $2A+B=3, A-B=2$ cu soluția $A=\frac{5}{3}, B=-\frac{1}{3}$. Aşadar $f(x)=x+1+\frac{5}{3(x-1)}-\frac{1}{3(2x+1)}$.

**b) Numitorul are rădăcini reale multiple**

**1)** $f(x)=\frac{4x+1}{(x+1)^3}, x\neq -1;$ **2)** $f(x)=\frac{x^2+x+2}{(x-1)^2(x+1)^2}, x\neq \pm 1$.

**R.** 1) Metoda întâi. Se scrie $f$ sub forma:

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}, \text{ iar de aici}$$

$4x+1=A(x+1)^2+B(x+1)+C$, (1) sau

$4x+1=Ax^2+(2A+B)x+A+B+C$.

Deci $A=0, 2A+B=4, A+B+C=1$, când găsim $A=0, B=4, C=-3$. Prin urmare $f(x)=\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{3}{(x+1)^3}$.

Metoda a doua. Dacă în (1) se face $x=-1$ rezultă $C=-3$. Se derivează (1) şi rezultă $4=2A(x+1)+B$, (2) iar aici facem $x=-1$ când avem $B=4$.

Se derivează (2) şi se face $x=-1$, când găsim $A=0$.

Valoarea $x=-1$ este rădăcină multiplă de ordin 3 pentru numitor.

Metoda a treia. Punem $x+1=y$ şi deci $x=y-1$.

Deci $f(y-1)=\frac{4y-3}{y^3}=\frac{4}{y^2}-\frac{3}{y^3}$, iar de aici, revenim la substituție, $f(x)=$ $=\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{3}{(x+1)^3}$.

2) Are loc descompunerea

$$f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}, \text{ iar de aici}$$

$x^2+x+2=A(x-1)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x+1)(x-1)^2+D(x-1)^2$, (1).

Se face $x=-1$ şi apoi $x=1$, când găsim $2=4D$ şi respectiv $4=4B$. Deci $D=\frac{1}{2}, B=1$. Se derivează (1) şi rezultă $2x+1=A(x+1)^2+2A(x^2-1)+2B(x+1)+$ $+C(x-1)^2+2C(x^2-1)+2D(x-1)$, şi se face aici din nou $x=-1$ şi apoi $x=1$.

Găsim $-1=4C-4D, 3=4A+4B$. De aici $A=-\frac{1}{4}, C=\frac{1}{4}$.

Deci $f(x)=-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)^2}$.

Altfel. Din (1) rezultă un sistem în *A,B,C,D* din egalitatea celor două funcții polinomiale.

**c) Numitorul are rădăcini complexe simple**

$$f(x)=\frac{2x^3-3x^2+2x}{(x^2+4)(x^2+1)}.$$

**R.** Avem: $f(x)=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$ sau

$2x^3-3x^2+2x=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+4C)x+B+4D$, (1).

De aici rezultă sistemul:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+C=2 \\ x^2 & B+D=-3 \\ x & A+4C=2 \\ x^0 & B+4D=0 \end{array}$$

cu soluția $A=2, B=-4, C=0, D=1$. Deci $f(x)=\frac{2x-4}{x^2+4}+\frac{1}{x^2+1}$.

Altfel. Să observăm că numitorul are rădăcinile complexe $\pm i, \pm 2i$. În egalitatea (1) se face $x=i$ și rezultă $Ci+D=1$. De aici (egalitatea a două numere complexe) se obține $C=0, D=1$.

Tot în (1) se pune $x=2i$ și avem $4i-4=2Ai+B$. Din această egalitate se deduce $A=2, B=-4$.

**d) Numitorul are rădăcini complexe multiple**

$$f(x)=\frac{2x^2+2x+13}{(x^2+1)^2}.$$

**R.** Funcția se scrie descompusă în funcții raționale simple astfel:

$f(x)=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$, iar de aici $2x^2+2x+13=Ax^3+Bx^2+(A+C)x+B+D$.

Egalând coeficienții de la aceleași puteri ale lui $x$ din cei doi membri rezultă sistemul:

$$\left.\begin{array}{ll} x^3 & 0=A \\ x^2 & 2=B \\ x & 2=A+C \\ x^0 & 13=B+D \end{array}\right|$$ cu soluția $A=0, B=2, C=2, D=11, E=-4$.

Deci $f(x)=\frac{2}{x^2+1}+\frac{2x+11}{\left(x^2+1\right)^2}$.

## 2. Integrarea funcțiilor raționale simple

Am văzut că orice funcție rațională se scrie ca o sumă finită de funcții raționale simple. Deci integrarea unei funcții raționale se reduce la integrarea funcțiilor raționale simple.

**1)** Dacă $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$, atunci

$$\int f(x)\,dx=a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+a_{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots+a_1\frac{x^2}{2}+a_0 x+\mathcal{C}.$$

**2)** Dacă $f(x)=\frac{A}{(x-a)^n}, n\in\mathbb{N}^*, x>a$ sau $x<a$, atunci se consideră cazurile:

**2.1)** $n=1$. Avem

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+\mathcal{C}=\left(\ln(x-a)+\mathcal{C}, x>a\ sau\ ln(a\text{-}x)+\mathcal{C}, x<a\right).$$

**Exemple. Să se calculeze**

**a)** $\boldsymbol{\int\frac{dx}{x-1}, x>1; b)\int\frac{dx}{x+1}, x<-1; c)\int\frac{dx}{4x+1}, x>-\frac{1}{4}.}$

**R.** a) Avem $\int\frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|+\mathcal{C}=\ln(x-1)+\mathcal{C}$.

b) Acum $\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x+1|+\mathcal{C}=\ln(-x-1)+\mathcal{C}$.

c) Se scrie integrala sub forma: $\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\ln\left(x+\frac{1}{4}\right)+\mathcal{C}$.

**2.2) Pentru $\boldsymbol{n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2}$, găsim:**

$$\boldsymbol{\int f(x)dx=\int\frac{dx}{(x-a)^n}=\int(x-a)^{-n}dx=\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+\mathcal{C}=-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+\mathcal{C}}\ \textbf{dacă}\ \boldsymbol{x\in I},$$

**unde $\boldsymbol{I\subset(a,\infty)}$ sau $\boldsymbol{I\subset(-\infty,a)}$.**

**Exemplu. Să se calculeze**

**a)** $\boldsymbol{\int\frac{dx}{(x-1)^3}, x>1; b)\int\frac{dx}{(3x+1)^3}, x>-\frac{1}{3}.}$

**R. a)** Scriem integrala sub forma: $\int\frac{dx}{(x-1)^3}=\int(x-1)^{-3}dx=\frac{(x-1)^{-2}}{-2}+\mathcal{C}=-\frac{1}{2(x-1)^2}+\mathcal{C}.$

.

**b)** Dacă se notează $3x+1=t$, atunci $dt=3dx$ şi integrala asociată este $I_1=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{6t^2}+\mathcal{C}$.

Prin urmare $I=-\frac{1}{6(3x+1)^2}+\mathcal{C}$.

**3) Dacă $f(x)=\frac{Bx+C}{\left(x^2+bx+c\right)^n}, n\in\mathbb{N}^*, b^2-4c<0$, atunci se analizează cazurile:**

**3.1) $f(x)=\frac{1}{x^2+a^2}, a\neq 0$. Avem $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\mathcal{C}$.**

**Observaţie. Dacă $f(x)=\frac{x}{x^2+a^2}$, atunci $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right)+\mathcal{C}$.**

**Exemplu. Să se calculeze: $\int\frac{dx}{x^2+3}, x\in\mathbb{R}$.**

**R.** $\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}$.

**3.2) $f(x)=\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}, a\neq 0, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.**

**Pentru $I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$ vom da o formulă de recurenţă.**

**Avem:** $I_n=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(a^2+x^2\right)-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx=\frac{1}{a^2}\left[\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}-\right.$

$\left.-\int\frac{x^2\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}\right]=\frac{1}{a^2}\left[I_{n-1}-\int\frac{x^2\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}\right]$. **Pentru calculul integralei din paranteza dreaptă se aplică integrarea prin părţi, când avem:**

$$\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=\int x\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}x+\frac{1}{2(n-1)}\cdot\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}=$$

$$=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}.$$

**Deci** $I_n=\frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}\right]$.

**Observație.** **Dacă** $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}$ **, atunci** $\int f(x)\,dx=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{2x\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=$

$$=\frac{1}{-2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\mathscr{C}.$$

**Exemplu.** **Să se calculeze** $\int\dfrac{dx}{\left(x^2+4\right)^2},x\in\mathbb{R}$.

**R.** Fie $I_n=\int\dfrac{dx}{\left(x^2+4\right)^n}$. Avem: $I_2=\int\dfrac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{1}{4}\int\dfrac{4dx}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{1}{4}\int\dfrac{\left(4+x^2\right)-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx=$

$$=\frac{1}{4}\left[I_1-\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+4\right)^2}\right]=\frac{1}{4}\left[I_1-\int x\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2}dx\right].$$

Pentru integrala din paranteza dreaptă punem (pentru a aplica integrarea prin părți)

$u(x)=x, v'(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+4\right)^2}$, iar de aici $u'(x)=1, v(x)=-\dfrac{1}{2\left(x^2+4\right)}$.

Obținem: $\int\dfrac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx=-\dfrac{x}{2\left(x^2+4\right)}+\dfrac{1}{2}\int\dfrac{dx}{x^2+4}=-\dfrac{x}{2\left(x^2+4\right)}+\dfrac{1}{2}I_1$.

Aşadar, $I_2=\dfrac{1}{4}\left[I_1+\dfrac{x}{2\left(x^2+4\right)}-\dfrac{1}{2}I_1\right]=\dfrac{x}{8\left(x^2+4\right)}+\dfrac{1}{8}I_1$, unde $I_1=\int\dfrac{dx}{x^2+4}=$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\mathscr{C}.$$

**3.3) Dacă** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+bx+c},b^2-4c<0$ **, atunci se scrie** $x^2+bx+c$ **ca sumă de pătrate sub forma** $x^2+bx+c=x^2+2\dfrac{b}{2}x+\dfrac{b^2}{4}+c-\dfrac{b^2}{4}=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{4c-b^2}{4}=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{4c-b^2}{4}}\right)^2$.

**În acest caz** $I=\int f(x)\,dx=\int\dfrac{dx}{\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)^2}=\dfrac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}+\mathscr{C}$.

**Exemple.** **Să se calculeze integralele:**

a) $\int\dfrac{dx}{x^2+x+1},x\in\mathbb{R};b)\int\dfrac{dx}{3x^2+5x+3},x\in\mathbb{R}$.

**R.** **a)** Se scrie integrala sub forma

$$\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\mathcal{C}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}.$$

**b)** În acest caz avem

$$\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+\frac{5}{3}x+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{11}{36}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}=$$

$$=\frac{6}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x+5}{\sqrt{11}}+\mathcal{C}=\frac{2\sqrt{11}}{11}\operatorname{arctg}\frac{6x+5}{\sqrt{11}}+\mathcal{C}.$$

**Observație. Dacă numitorul funcției $f(x)$ este de forma $\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)^n$, $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ cu $\alpha\neq 1$, atunci se forțează factor $\alpha^n$ și avem $\alpha^n\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)^n=\alpha^n\left(x^2+bx+c\right)^n$, unde $b=\frac{\beta}{\alpha}, c=\frac{\gamma}{\alpha}, b^2-4c<0$. În cazul de mai sus (b) avem $\alpha=3$.**

**3.4) Dacă $f(x)=\frac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^n}, b^2-4c<0, n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$, atunci se pune $f$ sub forma $f(x)=\frac{1}{\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)^2\right]^n}$ și se substituie $x+\frac{b}{2}=t$, ajungând în final la integrala de forma 3.2).**

**3.5) Dacă $f(x)=\frac{x}{\left(x^2+bx+c\right)^n}, b^2-4c<0, n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$, atunci se prelucrează *f* sub forma (se pune în evidență la numărător derivata funcției $x\to x^2+bx+c$ de la numitor):**

**$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+b}{\left(x^2+bx+c\right)^n}-\frac{b}{2}\cdot\frac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^n}$, când $\int f(x)dx=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot$ $\cdot\frac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^{n-1}}-\frac{b}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2+bx+c\right)^n}$, ultima integrală fiind de tipul 3.4).**

## Probleme propuse

**1. Să se determine numerele reale $a, b, c, \ldots$ astfel încât să aibă loc egalitățile:**

1) $\dfrac{3x+5}{(x-3)(x^2-3x+2)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{x-3}, \forall x\neq 1,2,3$;

2) $\dfrac{3x^2+12x+11}{x^3+6x^2+11x+6}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}+\dfrac{c}{x+3}, \forall x\neq -1,-2,-3$;

3) $\dfrac{x^4-3x^3-3x^2+10}{(x+1)(x^2-2x-3)}=ax+b+\dfrac{c}{x+1}+\dfrac{d}{(x+1)^2}+\dfrac{e}{x-3}, \forall x\neq -1,3$;

4) $\dfrac{1}{x^4+1}=\dfrac{ax+b}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}+\dfrac{cx+d}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}$;

5) $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}, \forall x\neq -1$;

6) $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{cx+d}{x^2+1}, \forall x\neq 0,1$.

**2. Să se calculeze integralele următoarelor funcții:**

a) 1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x-1)}, x>1$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)(2x-3)}, x>\frac{3}{2}$; 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4x}, x>0$;

4) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}, x>-\frac{1}{2}$; 5) $\displaystyle\int\frac{(2x-1)\,dx}{(x-1)(x-2)}, x>2$; 6) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^2-6x+5}, x>5$;

7) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}, x>2$; 8) $\displaystyle\int\frac{(x-4)\,dx}{(x-2)(x-3)}, x>3$; 9) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-x}, x>1$;

10) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x+1)(x+2)}, x>0$; 11) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+5x+6)}, x>-1$.

b) 1) $\displaystyle\int\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 dx, x>-1$; 2) $\displaystyle\int\frac{(x+2)\,dx}{x^3-2x^2}, x<0$; 3) $\displaystyle\int\frac{(5x-1)\,dx}{x^3-3x-2}, x<-1$.

c) 1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x^2+1)}, x>0$; 2) $\displaystyle\int\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx, x<0$; 3) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^3-1}, x<1$; 4) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+8}, x<-2$;

5) $\displaystyle\int\frac{(x^4+1)\,dx}{x^3-x^2+x-1}, x<1$; 6) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}, x\in\mathbb{R}$; 7) $\displaystyle\int\frac{(x^3-6)\,dx}{x^4+6x^2+8}, x>0$.

**3. Fie $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^2-x}$.**

1) **Arătați că există numere reale $a,b,c,d$ astfel încât $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{x-1}, \forall x>1$.**

2) **Să se calculeze primitivele funcției $f$ pe $(1,\infty)$.**

**4.** **Fie** $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3+1}{x^3-x^2}$.

**1) Arătați că există numerele reale** $a,b,c,d$ **astfel încât** $f(x)=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x-1}, \quad \forall x>1$.

**2) Să se calculeze primitivele lui** $f$ **pe** $(1,\infty)$.

**5.** **Fie** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+1}$.

**1) Arătați că** $f(x)=\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}, \forall x\neq 0$.

**2) Substituiți** $u=x-\frac{1}{x}$ **și calculați integrala asociată integralei** $\int f(x)dx$ **pe** $(-\infty,0)$ **sau** $(0,\infty)$.

**3) Arătați că** $f$ **admite primitive pe** $\mathbb{R}$ **și determinați-le.**

## 3. Integrale reductibile la funcții raționale

### 1) Integrarea unor funcții iraționale (facultativ)

Dacă funcția de sub semnul integrală este de forma $R\left(x,\sqrt[k_1]{x},...,\sqrt[k_n]{x}\right)$ unde $k_i\in\mathbb{N}, k_i\geq 2$, atunci punând $x=t^k$, unde $k$ este cel mai mic multiplu comun al ordinelor radicalilor $k_1,k_2,...,k_n$ se ajunge la o integrală de funcție rațională.

**Exemple rezolvate.** **Să se calculeze:**

**1)** $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}, x>0$; **2)** $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}, x>0$.

**R. 1)** Punem $\sqrt[3]{x}=t$, adică $x=t^3$ și deci $dx=3t^2dt$, iar integrala asociată este $I_1=3\int\frac{t^2dt}{t^3+t}=\frac{3}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+1}=\frac{3}{2}\ln\left(t^2+1\right)+\mathcal{C}$.

Așadar $I=\frac{3}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)+\mathcal{C}$.

**2)** Cum în integrală figurează $\sqrt{x},\sqrt[3]{x}$, vom nota $\sqrt[6]{x}=t$, adică $x=t^6$ (6 fiind cel mai mic multiplu comun al ordinelor acestor radicali 2, 3).

De aici $dx=6t^5dt$ și integrala asociată este:

$$I_1=5\int\frac{t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2t^3-3t^2+6t-\ln(t+1)+\mathcal{C}.$$

Deci $I=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$.

Dacă funcția de sub semnul integrală este de forma $R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$, atunci se pune $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$ , iar de aici $x=\dfrac{-dt^n+b}{ct^n-a}$ ajungând în final la o integrală asociată de funcție rațională în *t*.

**Exemplu practic. Să se calculeze integrala $\int\dfrac{\sqrt{x+1}dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}},x\geq 1$ .**

**R.** Se forțează factor comun la numitor $\sqrt{x+1}$ și se aduce integrala la forma: $I=\int\dfrac{dx}{1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}$ . Notăm $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=t$ când obținem $x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ și de aici $dx=\dfrac{4t}{\left(t^2-1\right)^2}dt$ .

Integrala asociată lui *I* este: $I_1=4\int\dfrac{tdt}{(t-1)^2(t+1)^3}$ .

Descompunând funcția rațională (de integrat) în funcții raționale simple găsim:

$$\frac{t}{(t-1)^2(t+1)^3}=\frac{-1}{16(t-1)}+\frac{1}{8(t-1)^2}+\frac{1}{16(t+1)}-\frac{1}{4(t+1)^3}.$$

Deci $I_1=-\dfrac{1}{4}\ln(1-t)-\dfrac{1}{2(t-1)}+\dfrac{1}{4}\ln(t+1)+\dfrac{1}{2(t+1)^2}+\mathcal{C}$ .

În cazul funcției de integrat de forma generală $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ prezentăm câteva situații particulare simple, oferind tehnica de integrat.

1) Dacă funcția de integrat este de forma $f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}},ax^2+bx+c>0,\forall x\in\mathbb{R}$, atunci se caută să se pună în evidență la numărător derivata trinomului $ax^2+bx+c$ scriind funcția astfel $f(x)=\dfrac{(2ax+b)+d}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\dfrac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\dfrac{d}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ .

**Exemplu practic. Să se calculeze integrala nedefinită $I=\int\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx,x\in\mathbb{R}$ .**

**R.** Se scrie integrala sub forma (dacă $t=x^2+x+1$, atunci $dt=(2x+1)dx$ )

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}\right).$$

Prima integrală din paranteză are ca integrală asociată pentru

$$t=x^2+x+1, I_1=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\mathcal{C}=2\sqrt{t}+\mathcal{C}.$$

Deci $I=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{x^2+x+1}+\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}\right)=\frac{1}{2}\Big[2\sqrt{x^2+x+1}+$

$+\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)\Big]+\mathcal{C}$.

2) Dacă funcția de integrat este de forma $f(x)=\frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $ax^2+bx+c>0, \forall x\in\mathbb{R}$, $p$ funcție polinomială de grad $n\geq 2$, atunci se utilizează egalitatea $\int\frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$

$=q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+A\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, (*) unde $q$ este o funcție polinomială de grad $n-1$, iar $A$ este o constantă. Pentru a determina coeficienții funcției $q$ și pe $A$ se derivează egalitatea (*) și se aplică metoda coeficienților nedeterminați.

**Exemplu practic. Să se calculeze integrala nedefinită $I=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}, x\in\mathbb{R}$.**

**R.** Conform celor spuse mai sus pentru $p(x)=x^2$ se ia $q(x)=\alpha x+\beta$ și avem egalitatea $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}=(\alpha x+\beta)\sqrt{x^2-x+1}+A\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$ pe care o derivăm și obținem

$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x-1}}=\alpha\sqrt{x^2-x+1}+(\alpha x+\beta)\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{A}{\sqrt{x^2-x+1}}$ sau

$2x^2=2\alpha\left(x^2-x+1\right)+(\alpha x+\beta)(2x-1)+2A$ sau în fine $2x^2=4\alpha x^2+(2\beta-3\alpha)x+$

$+2\alpha-\beta+2A$. De aici, prin identificare, rezultă sistemul $\begin{cases}4\alpha=2\\-3\alpha+2\beta=0\\2\alpha-\beta+2A=0\end{cases}$ cu soluția $\alpha=\frac{1}{2}$,

$\beta=\frac{3}{4}, A=-\frac{1}{8}$.

Găsim $I=\frac{2x+3}{8}\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{8}\ln\left(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)+\mathcal{C}$.

3) Dacă funcția de integrat este de forma $f(x)=\frac{1}{(px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

$ax^2+bx+c>0, n\in\mathbb{N}^*, px+q>0\ (<0)$, atunci se pune $px+q=\frac{1}{t}$.

**Exemplu practic.** **Să se calculeze integrala nedefinită**

$$I=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}},x>-1$$

**R.** Notăm $x+1=\frac{1}{t}$, iar de aici $dx=-\frac{dt}{t^2}$. Integrala asociată lui $I$ este

$$I_1=-\int\frac{t\frac{dt}{t^2}}{\sqrt{\frac{1-t+t^2}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=$$

$$=-\ln\left(t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right)+\mathcal{C}=-\ln\left(2t-1+2\sqrt{t^2-t+1}\right)+\mathcal{C}.$$

Deci $I=-\ln\left(\frac{2}{x+1}-1+\frac{2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right)+\mathcal{C}$.

## 2) Integrarea unor funcții trigonometrice prin schimbare de variabilă

Dacă funcția de sub semnul integrală este de forma $f(x)=\mathrm{R}(\sin x,\cos x)$, atunci prin substituția universală $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x\in I\subset(-\pi,\pi)$ se poate obține o integrală asociată de funcție rațională în $t$. Într-adevăr,

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$ iar din $x=2\operatorname{arctg}t$ rezultă

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

**Exemplu practic.** **Să se calculeze** $I=\int\frac{dx}{\sin x+\cos x},x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

**R.** Cu elementele prezentate mai sus integrala asociată este:

$$I_1=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=-2\int\frac{dt}{t^2-2t-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right|+\mathcal{C}.$$

Deci $I=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right|+\mathcal{C}$.

**Observație.** Această substituție se aplică funcțiilor $R$ care au în structură funcțiile $\sin x$, $\cos x$ la puterea întâi. Prezența acestor funcții la puteri mai mari conduce la funcții raționale mai complicate şi deci calcule mai greoaie.
În astfel de situații se recomandă scrierea funcției $R$ sub una din formele:

a) $\tilde{R}\left(\sin^2 x, \cos x\right)\sin x = \tilde{R}\left(1-\cos^2 x, \cos x\right)\sin x$ când se recomandă substituția $t = \cos x$.

**Exemplu practic. Să se calculeze integrala nedefinită**
$\boldsymbol{I = \int \sin^3 x \cos^2 x dx,\ x \in \mathbb{R}}$ **.**

**R.** Scriem integrala sub forma $I = \int \sin^2 x \cos^2 x (\sin x dx) = \int \left(1-\cos^2 x\right)\cdot \cos^2 x (\sin x dx)$.
Punând $t = \cos x$ avem $dt = -\sin x\, dx$ şi integrala asociată lui $I$ este

$$I_1 = -\int \left(1-t^2\right)t^2 dt = \int \left(t^4 - t^2\right)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + \mathcal{C}.$$

Deci $I = \dfrac{\cos^5 x}{5} - \dfrac{\cos^3 x}{3} + \mathcal{C}$.

**Observație.** În acest caz integrandul este un polinom în $t$.

b) $\tilde{R}\left(\cos^2 x, \sin x\right)\cos x = \tilde{R}\left(1-\sin^2 x, \sin x\right)\cos x$. În acest caz se substituie $\sin x = t$ când $dt = \cos x\, dx$.

**Exemplu practic. Să se calculeze integrala nedefinită**
$\boldsymbol{I = \int \cos^3 x \sin^2 x dx,\ x \in \mathbb{R}}$ **.**

**R.** Se aduce integrala la forma $I = \int \cos^2 x \sin^2 x (\cos x dx) = \int \left(1-\sin^2 x\right)\cdot \sin^2 x \cos x dx$. Notăm $t = \sin x$ şi deci $dt = \cos x dx$ când integrala asociată

este $I_1 = \int \left(1-t^2\right)t^2 dt = \int \left(t^2 - t^4\right)dt = \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^5}{5} + \mathcal{C}$.

Deci $I = \dfrac{\sin^3 x}{3} - \dfrac{\sin^5 x}{5} + \mathcal{C}$.

**c)** $\tilde{R}\left(\sin^2 x, \cos^2 x\right)$, când se recomandă:

1) trecerea de la pătrate la cosinusuri de argument dublu după formulele
$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ (când se spune că liniarizăm funcțiile $\sin^2 x$ şi $\cos^2 x$) sau

2) substituția $\operatorname{tg} x = t, x \in I \subset \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ când $x = \operatorname{arctg} t$ şi deci $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ iar

$$\sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}.$$

**Exemplu practic.** **Să se calculeze integrala nedefinită** $\boldsymbol{I = \int \sin^2 x \cos^4 x dx,\ x \in \mathbb{R}}$.

**R.** Urmând prima variantă (de liniarizare) funcția de integrat devine succesiv:

$\sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{8}\sin^2 2x(\cos 2x + 1) = \frac{1}{8}\sin^2 2x \cos 2x + \frac{1}{16}(1-\cos 4x)$ şi deci

$I = \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \mathcal{C}$. Utilizând substituția $t = \mathrm{tg}x$ integrala asociată devine

$I_1 = \int \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1}{\left(1+t^2\right)^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2}$, care este mult mai dificil de calculat decât prin metoda precedentă (considerând $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ etc.).

**Exemplu practic.** **Să se calculeze integrala nedefinită** $\boldsymbol{I = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}$.

**R.** În acest caz substituția $t = \mathrm{tg}x$ conduce la integrala asociată $I_1 = \int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^4} dt = = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + \mathcal{C}$. De aici, $I = \mathrm{tg}x - 2\mathrm{ctg}x - \frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x + \mathcal{C}$.

**d)** $\tilde{R}\left(\sin^{2n+1} x, \cos^{2n+1} x\right) = \tilde{R}_1\left(\sin^{2n} x, \cos^{2n} x\right)\sin 2x$ şi se exprimă puterile pare ale lui $\sin x$ şi $\cos x$ în funcție de $t = \cos 2x$.

**Exemplu practic.** **Să se calculeze integrala nedefinită** $\boldsymbol{I = \int \sin^5 x \cos^5 x dx,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}$.

**Se scrie integrala sub forma** $\boldsymbol{I = \int \sin^4 x \cos^4 x (\sin x \cos x) dx =}$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{2}\int \left(\sin^2 x\right)^2 \left(\cos^2 x\right)^2 \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \sin 2x dx}.$$

**Se notează** $\boldsymbol{t = \cos 2x}$ **şi deci** $\boldsymbol{dt = -2\sin 2x dx}$**. Integrala asociată este:**

$$\boldsymbol{I_1 = -\frac{1}{64}\int (1-t)^2(1+t)^2 dt = -\frac{1}{64}\int \left(1-2t^2+t^4\right)dt = -\frac{1}{64}\left(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right) + \mathcal{C}}.$$

**Deci** $\boldsymbol{I = -\frac{1}{64}\left[\cos 2x - \frac{2}{3}(\cos 2x)^3 + \frac{1}{5}(\cos 2x)^5\right] + \mathcal{C}}$.

**Există integrale $I_1$ al căror calcul se face uşor dacă li se asociază o altă integrală $I_2$ şi apoi se calculează $I_1+I_2$ şi $I_1-I_2$, ultimele două integrale fiind mai simple decât $I_1$ şi $I_2$ (alteori se calculează $\alpha\cdot I_1+\beta\cdot I_2$ cu $\alpha,\beta$ aleşi convenabili).**

**Exemplu practic.** **Să se calculeze integrala nedefinită**
$$I_1=\int\frac{\sin x dx}{\sin x+\cos x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

**R.** Se consideră şi integrala $I_2=\int\frac{\cos x dx}{\sin x+\cos x}$ şi calculăm $I_1+I_2=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=x+\mathcal{C}$, **(1)** şi respectiv $I_2-I_1=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}dx=\ln(\sin x+\cos x)+\mathcal{C}$, **(2)**.

Sistemul format cu ecuațiile din (1) şi (2) dă soluția
$$I_1=\frac{x}{2}-\ln\sqrt{\sin x+\cos x}+\mathcal{C},\quad I_2=\frac{x}{2}+\ln\sqrt{\sin x+\cos x}+\mathcal{C}.$$

Următorul exemplu vine să ilustreze tehnica pecedentă pentru o funcție rațională care conține funcțiile sinus şi cosinus, exprimând numărătorul ca o “combinație liniară” de numitor şi derivata acestuia.

**Exemplu practic.** **Să se calculeze integrala** $I=\int\frac{2\sin x+3\cos x}{4\sin x+5\cos x}dx, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

**R.** Se determină constantele $A$ şi $B$ astfel încât
$2\sin x+3\cos x=A(4\sin x+5\cos x)+B(4\cos x-5\sin x)$ sau
$2\sin x+3\cos x=(4A-5B)\sin x+(5A+4B)\cos x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. De aici, prin identificare, se obține sistemul $\begin{cases}4A-5B=2\\5A+4B=3\end{cases}$ cu soluția $A=\frac{23}{41}, B=\frac{2}{41}$. Acum integrala se scrie
$$I=\frac{23}{41}\int\frac{4\sin x+5\cos x}{4\sin x+5\cos x}dx+\frac{2}{41}\int\frac{(4\sin x+5\cos x)'}{4\sin x+5\cos x}dx=\frac{23}{41}x+\frac{2}{41}\ln(4\sin x+5\cos x)+\mathcal{C}.$$

**Observații.** **1) Calculați integrala precedentă prin acest procedeu!**
**2) Pentru calculul integralelor de forma $\int\sin\alpha x\sin\beta x dx, \int\sin\alpha x\cos\beta x, dx$ $\int\cos\alpha x\cos\beta x dx, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ se transformă produsele în sume după formulele:**
$$\sin\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}[\sin(\alpha x+\beta x)+\sin(\alpha x-\beta x)], \sin\alpha x\cdot\sin\beta x=$$
$$=\frac{1}{2}[\cos(\alpha x-\beta x)-\cos(\alpha x+\beta x)], \cos\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha x+\beta x)+\cos(\alpha x-\beta x)].$$

## 3) Integrarea unor funcții care conțin exponențiale (facultativ)

Dacă avem de determinat $I=\int R\left(a^x\right)dx$, unde $R\left(a^x\right)$ este o funcție continuă, atunci se recomandă substituția $\boxed{t=a^x}$. De aici, formal, deducem $x=\log_a t=\dfrac{\ln t}{\ln a}$ și $dx=\dfrac{1}{t\ln a}dt$ și prin urmare integrala asociată are forma $I_1=\dfrac{1}{\ln a}\int\dfrac{R(t)dt}{t}$. Dacă $R$ este o funcție rațională, atunci $I_1$ este integrală nedefinită a unei funcții raționale.

**Exemplu practic.** **Să se calculeze integrala nedefinită** $I=\int\dfrac{e^{2x}dx}{e^x+1}, x\in\mathbb{R}$.

**R.** Notând $t=e^x$ deducem $x=\ln t$ și $dx=\dfrac{dt}{t}$. Integrala asociată lui $I$ este integrală nedefinită dintr-o funcție rațională.

$$I_1=\int\frac{t^2\frac{dt}{t}}{t+1}=\int\frac{tdt}{t+1}=\int\frac{(t+1)-1}{t+1}dt=\int dt-\int\frac{dt}{t+1}=t-\ln(t+1)+\mathcal{C}.$$

Revenim la integrala $I$ punând în $I_1$ în locul lui $t$, $e^x$ și deci $I=e^x-\ln\left(e^x+1\right)+\mathcal{C}$.

### Probleme propuse

**1. a) Să se calculeze integralele de funcții iraționale de mai jos:**

1) $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx, x>0$; 2) $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx, x>0$; 3) $\int\dfrac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx,\ x>0$;

4) $\int\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx, x>0$; 5) $\int\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx, x>0$; 6) $\int\dfrac{\sqrt{x}}{x(x+1)}dx$, $x>0$; 7) $\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx, x>1$; 8) $\int\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}, x>1$; 9) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}, x>0$.

**b) Să se calculeze integralele de funcții trigonometrice de mai jos:**

1) $\int\sin^2 3xdx, x\in\mathbb{R}$; 2) $\int(1+2\cos x)^2dx, x\in\mathbb{R}$; 3) $\int(1-\sin 2x)^2dx, x\in\mathbb{R}$;

4) $\int\cos^4 xdx, x\in\mathbb{R}$; 5) $\int\sin 3x\cos xdx, x\in\mathbb{R}$; 6) $\int\sin 3x\sin 5xdx, x\in\mathbb{R}$;

7) $\int\cos x\cos 3x\cos 6xdx, x\in\mathbb{R}$; 8) $\int\sin^2 x\cos^2 xdx, x\in\mathbb{R}$;

9) $\int\sin^4 x\cos^4 xdx, x\in\mathbb{R}$; 10) $\int\sin^2 x\cos^4 xdx, x\in\mathbb{R}$; 11) $\int\sin^5 xdx, x\in\mathbb{R}$;

12) $\int\sin^2 x\cos^3 xdx, x\in\mathbb{R}$; 13) $\int\cos^7 xdx, x\in\mathbb{R}$; 14) $\int\sin^4 x\cos^2 x\,dx, x\in\mathbb{R}$;

15) $\int\cos^2 x\sin^3 xdx, x\in\mathbb{R}$; 16) $\int\dfrac{1+\sin^3 x}{\cos^2 x}dx, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$; 17) $\int\dfrac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$,

$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 18) $\int\frac{dx}{\cos x\sin^3 x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 19) $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

**c) Să se calculeze integralele de funcții care conțin exponențiale în cazurile de mai jos:**

1) $\int\frac{e^x}{e^x-1}dx, x>0$; 2) $\int\frac{3^x dx}{1+3^{2x}}, x\in\mathbb{R}$; 3) $\int\frac{e^{2x}-e^x}{1+e^x}dx, x\in\mathbb{R}$; 4) $\int\frac{e^x dx}{4+e^{2x}}, x\in\mathbb{R}$;

5) $\int\frac{e^{3x}}{1+e^x}dx, x\in\mathbb{R}$; 6) $\int\frac{dx}{e^x\left(3+e^{-x}\right)}, x\in\mathbb{R}$; 7) $\int\frac{e^x}{1+e^{3x}}dx, x\in\mathbb{R}$;

8) $\int\frac{dx}{1+\left|1-e^x\right|}, x<0$; 9) $\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x}, x\in\mathbb{R}$; 10) $\int\frac{e^x-2}{e^{2x}+4}dx, x\in\mathbb{R}$; 11) $\int\frac{dx}{e^{3x}-e^x}, x>1$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,2\pi)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{3+\sin x+\cos x}$.

1) Arătați că $f$ admite primitive pe $(0,2\pi)$, dar pentru determinarea lor nu se poate utiliza substituția $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

2) Determinați o primitivă a lui $f$ pe $(0,\pi)$ cu ajutorul substituției $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ și apoi construiți o primitivă pe $(0,2\pi)$. Determinați $\int f(x)dx,\ x\in(0,2\pi)$.

**3.** Fie $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{1+\sin^2 x}$.

1) Arătați că $f$ admite primitive pe $(0,\pi)$, dar nu se poate utiliza substituția $t=\mathrm{tg}\,x$ pentru determinarea lor.

2) Determinați o primitivă a lui $f$ pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ utilizând substituția $t=\mathrm{tg}\,x$ și apoi construiți o primitivă pe $(0,\pi)$. Determinați $\int f(x)dx, x\in(0,\pi)$ și apoi $\int f(x)dx, x\in\mathbb{R}$.

**4.** Fie $I_1=\int\frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x}, I_2=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

1) Să se calculeze $I_1+I_2, I_2-I_1$.

2) Determinați $I_1, I_2$.

**5.** Să se calculeze în funcție de valorile parametrului real $m$ integralele nedefinite:

1) $I=\int\frac{(x+3)dx}{x(x+2)(x+4)(x+6)+m}$.

2) $I=\int\frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+m}$.

**6.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care orice primitivă a funcțiilor:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{(x-2)(x-a)}{\left(x^2+2\right)^2}$ este o funcție rațională.

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{ax^2+x-3}{\left(x^2+1\right)^2}$ este o funcție rațională.

7. 1) Să se calculeze $I=\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx, J=\int\frac{x^2+1}{x^4+1}, \forall x\in(0,\infty)$ sau $\forall x\in(-\infty,0)$, utilizând schimbarea de variabilă $x+\frac{1}{x}=u$ și respectiv $x-\frac{1}{x}=u$ .2) Să se determine o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+1}$. 3) Să se calculeze $A=\int\frac{x^2\,dx}{x^4+1}, B=\int\frac{dx}{x^4+1}, \forall x\in(0,\infty)$ sau $\forall x\in(-\infty,0)$. 4) Să se calculeze: 1) $I=\int\frac{\left(x^2+1\right)dx}{x^4+x^2+1}$; 2) $J=\int\frac{\left(x^2-1\right)dx}{x^4+x^2+1}, \forall x\in(0,\infty)$ sau $\forall x\in(-\infty,0)$.

8. Să se stabilească o formulă de recurență pentru integralele $I_n=\int\frac{e^{nx}}{\left(e^x+1\right)^n}dx, n\in\mathbb{N}^*$ și să se calculeze $I_1, I_2, I_3$.

9. 1) Să se calculeze $\int\frac{dx}{3+\cos x},\quad x\in[0,\pi)$, utilizând substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u$. 2) Să se calculeze $\int\frac{dx}{3+\cos x},\quad x\in[0,2\pi]$.

10. 1) Să se calculeze $\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, utilizând substituția $\operatorname{tg} x=u$ .2) Să se calculeze $\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx, x\in[0,\pi]$.

11. Fie $I=\int\frac{\sin x-2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. a) Dacă $I_1=\int\frac{\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx$, $I_2=\int\frac{\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, atunci calculați: 1) $2I_1+3I_2$ și $2I_2-3I_1$; 2) Deduceți $I_1, I_2$ și $I$. b) 1) Arătați că există $A,B\in\mathbb{R}$ astfel încât $\sin x-2\cos x=A(2\sin x+3\cos x)+B(2\sin x+3\cos x)',\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 2) Determinați $I$.

12. Calculați, prin aceleași metode de la exercițiul precedent, integralele nedefinite:
1) $\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\int\frac{\cos x dx}{\sin x+2\cos x+3}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $\int\frac{\sin x-2\cos x+3}{3\sin x+2\cos x+4}dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

13. Fie $I=\int\frac{\sin x dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}, J=\int\frac{\cos x dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
1) Să se calculeze $I+J$ și $I$ - $J$ ; 2) Să se determine $I, J$ .

## REZUMATUL CAPITOLULUI

| Noțiuni. Proprietăți. | Explicitare. Notații | Exemple |
|---|---|---|
| **Primitiva unei funcții pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$** | **$F: I \to \mathbb{R}$ este primitiva funcției $f: I \to \mathbb{R}$ dacă:**<br>**1) $F$ este derivabilă și**<br>**2) $F' = f$.** | **1) Dacă $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, atunci $F(x) = \frac{x^3}{3}, G(x) = \frac{x^3}{3} - 1$ sunt primitive pe $\mathbb{R}$ pentru *f*.**<br>**2) Dacă $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$, atunci $F(x) = -\cos x$, $G(x) = -\cos x + 1$ sunt primitive pe $\mathbb{R}$ ale lui *f*.** |
| **Două primitive ale unei funcții, *pe un interval*, diferă printr-o constantă.** | **$F_1, F_2: I \to \mathbb{R}$ primitive ale lui $f: I \to \mathbb{R}$, $I$ interval. Atunci există $c \in \mathbb{R}$ (*c*=constantă) astfel încât $F_2 = F_1 + c$.** | **1) $G(x) = F(x) - 1$;**<br>**2) $G(x) = F(x) + 1$, unde *F, G* sunt funcțiile de la exemplele de mai sus.** |
| **Integrala nedefinită** | **Mulțimea tuturor primitivelor funcției $f: I \to \mathbb{R}$ se notează $\int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C}$, *F* este o primitivă a lui *f*, $\mathcal{C}$ este constanta de integrare sau $\int dF = F + \mathcal{C}$ sau $\int f'(x)dx = f(x) + \mathcal{C}$** | **1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}, n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$**<br>**2) $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \mathcal{C}, x \in \mathbb{R}$.**<br>**3) $\int \sin x\, dx = -\cos x + \mathcal{C}, x \in \mathbb{R}$** |
| **Reguli de integrare**<br><br>**1) Suma** | **$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ (Integrala sumei este suma integralelor) sau $\int (dF + dG) = \int dF + \int dG$.** | **$\int (x + \sqrt{x})dx = \int x dx + \int \sqrt{x} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \mathcal{C}, x \geq 0$.**<br>**2) $\int \left(e^x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+4}\right)dx = e^x + \ln x - \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x}{2} + \mathcal{C}, x > 0$** |

| | | |
|---|---|---|
| **2) Factor constant** | $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$<br>**(Constanta iese de sub integrală) sau** $\int cdF = c\int dF$ . | $\int 3\cos x dx = 3\int \cos x dx = 3\sin x +$<br>$+\mathcal{C}, x \in \mathbb{R}$ . |
| **3) Integrarea prin părți** | $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) -$<br>$-\int v(x)u'(x)dx$ **sau**<br>$\int udv = uv - \int vdu$ . | $\int xe^x dx, x \in \mathbb{R}$ .<br>$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$<br>$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x +$<br>$+\mathcal{C} = (x-1)e^x + \mathcal{C}$ . |
| **4) Integrarea prin substituție (*u*-substituție).** | **1)** $I = \int h(\varphi(x))\varphi'(x)dx, u =$<br>$= \varphi(x) \Rightarrow du = \varphi'(x)dx$ **și se calculează integrala asociată**<br>$I_1 = \int h(u)du = H(u) + \mathcal{C} \Rightarrow I =$<br>$= H(\varphi(x)) + \mathcal{C}$ . | $I = \int x^2\sqrt{x^3+1}dx,\ u = x^3+1 \Rightarrow$<br>$\Rightarrow du = 3x^2dx.$<br>$I = \frac{1}{3}\int \sqrt{x^3+1}\left(3x^2dx\right) \Rightarrow$<br>$I_1 = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u\sqrt{u} + \mathcal{C},$<br>$I = \frac{2}{9}\left(x^3+1\right)\sqrt{x^3+1} + \mathcal{C}$ . |
| **Schimbarea de variabilă (Se trece de la variabila *x* la variabila *u*)** | **2)** $I = \int f(x)dx,\ x = \varphi(u) \Rightarrow$<br>$\Rightarrow dx = \varphi'(u)du \Rightarrow$ **calculăm**<br>$I_1 = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)dx = H(u) +$<br>$+\mathcal{C} \Rightarrow I = H\left(\varphi^{-1}(x)\right) + \mathcal{C}$ . | $I = \int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx, x \geq 0$<br>$x = u^2 \Rightarrow dx = 2udu;\ u = \sqrt{x} \Rightarrow$<br>$I_1 = \int \frac{2u^2du}{u^2+1} = 2\int \frac{u^2+1-1}{u^2+1}du =$<br>$= 2\int\left(1 - \frac{1}{u^2+1}\right)du = 2u -$<br>$-2\text{arctg}u + \mathcal{C} \Rightarrow I = 2\sqrt{x} -$<br>$-2\text{arctg}\sqrt{x} + \mathcal{C}$ . |

## Teste de evaluare

### Testul 1

**Varianta A**

**1.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}, & x\le 0\\ x\ln x, & x>0\end{cases}$, admite primitive pe $\mathbb{R}$ și să se calculeze o primitivă a sa.

**2.** Arătați că funcția $F:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=$ $=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\text{arctg}x, x>-1$ este o primitivă a funcției $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)}$.

**3.** Să se determine constantele reale $a,b,c$ astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ să fie o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2e^{-x}$.

**4.** Să se determine numerele reale $a,b,c$ pentru care are loc egalitatea $\int\frac{x^2+3x}{\sqrt{x^2+4}}dx=$ $=(ax+b)\sqrt{x^2+4}+c\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}, x\in\mathbb{R}$.

**5.** Să se determine primitiva funcției $f(x)=x$ al cărei grafic este tangent dreptei $y=x-1$.

**6.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin 2x+\sin^3 2x$.

1) Să se calculeze $f'(x), f''(x)$ și să se arate că există $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $f''(x)=af(x)+b\sin 2x, \forall x\in\mathbb{R}$.

2) Deduceți o primitivă pentru $f$.

**7.** Arătați că funcțiile $F,G:\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^2+6x+1}{2x-3}$, $G(x)=\dfrac{x^2+10}{2x-3}$

**Varianta B**

**1.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}, & x\ge 1\\ (x-1)e^x, & x<1\end{cases}$, admite primitive pe $\mathbb{R}$ și să se calculeze o primitivă a sa.

**2.** Arătați că funcția $F(x)=x\ln(x^2+1)-$ $-2x+2\text{arctg}x$ este o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(x^2+1)$.

**3.** Să se determine constantele reale $a,b,c$ astfel încât funcția $F(x)=x^2(a\ln^2 x+b\ln x+c)$ să fie o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln^2 x$.

**4.** Să se determine numerele reale $a,b,c,d$ pentru care are loc egalitatea $\int\frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{ax+b}{x^2+2x+2}+\int\frac{cx+d}{x^2+2x+2}dx$, $x\in\mathbb{R}$.

**5.** Determinați primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$ ale căror grafic este tangent parabolei $y=x^2+1$.

**6.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x+\cos^3 x$.

1) Să se calculeze $f'(x)$ și $f''(x)$ și să se arate că există $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $f''(x)=af(x)+b\cos x, \ \forall x\in\mathbb{R}$.

2) Deduceți o primitivă pentru $f$.

**7.** Arătați că funcțiile $F,G:\left(-\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x+1}, G(x)=\dfrac{x^2+2}{2x+1}$ sunt

sunt primitivele aceleiaşi funcţii $f:\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}$.

primitivele aceleiaşi funcţii $f:\left(-\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}$.

## Testul 2

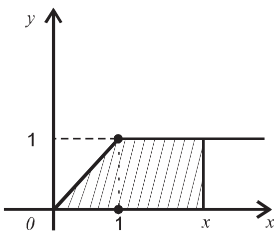
### Varianta A

1. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{e^x}, & x<1\\ \frac{1}{x}\ln^2 x, & x\ge 1\end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi determinaţi o primitivă a sa.

2. Arătaţi că funcţia $G:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $G(x)=2\sqrt{x-1}-2\ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)+1$ este o primitivă a funcţiei $g:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x-1}}$.

3. Să se determine constantele reale $a,b,c$ astfel încât funcţia $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=a\sin 4x+b\sin 2x+cx$ să fie o primitivă a funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\cos^4 x$.

4. Funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ are reprezentarea grafică de mai jos:




1)Este funcţia $f$ derivabilă în $x=1$?
2)Pentru $x\ge 0$, notăm cu $F(x)$ aria domeniului haşurat. Să se expliciteze

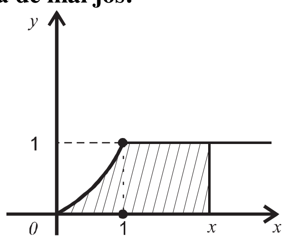
### Varianta B

1. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x\ln(1-x), & x<0\\ x\sin x, & x\ge 0\end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi determinaţi o primitivă a sa.

2. Arătaţi că funcţia $G:\left(\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}$, $G(x)=x\,\mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}-\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}$ este o primitivă a funcţiei $g:\left(\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}$.

3. Se consideră funcţia $g:(0,1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$. 1)Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $g(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(x-1)^2}, \forall x\in(0,1)$.
2) Deduceţi o primitivă a lui $g$ pe $(0,1)$.

4. Funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ are reprezentarea grafică de mai jos:




1) Este funcţia $f$ derivabilă în $x=1$? (Pe $(0,1)$ se ia $f(x)=ax^2$). 2) Pentru $x\ge 0$,

$F(x)$ în cele două cazuri $0 \le x \le 1$ şi $1 < x$. Să se studieze derivabilitatea lui $F$ în $x = 1$.
3) Arătați că $F$ este o primitivă a lui $f$ pe $[0,\infty)$.

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2(x-1)^{2007}$.
1) Să se arate că există $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $x^2=a(x-1)^2+b(x-1)+c, \forall x\in\mathbb{R}$.
2) Să se calculeze $\int f(x)dx$.

6. Arătați că funcția $f:[2,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\sqrt{x-2}$ admite o primitivă $F:[2,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=P(x)\sqrt{x-2}$, unde $P$ este o funcție polinomială de gradul 3 care se va determina.

7. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin 3x+\cos 3x+3x$.
1) Să se calculeze $f'$ şi $f''$ şi să se arate că există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f''(x)+af(x)=bx$.
2) Deduceți din 1) o primitivă pentru *f*.

notăm $F(x)$ aria domeniului haşurat. Să se expliciteze $F(x)$ în cele două cazuri $0\le x\le 1$ şi $1<x$. Să se studieze derivabilitatea lui $F$ în $x=1$. 3) Arătați că $F$ este o primitivă a lui $f$ pe $[0,\infty)$.

5. Fie $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$.

1) Să se arate că există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $x^2+1=a(x+1)^2+b(x-1)^2, \forall x\in(1,\infty)$.
2) Să se calculeze $\int f(x)dx$.

6. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $F:[1,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=$
$=(ax^2+bx+c)\sqrt{x-1}$ să fie o primitivă a funcției $f:[1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{x-1}$.

7. Să se determine $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ astfel încât $\int\dfrac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2}dx=\dfrac{ax+b}{x^2+4x+8}+$
$+\int\dfrac{cx+d}{x^2+4x+8}dx$.

## Testul 3 (grilă)

### Varianta A

1. $\int x|x-1|dx, x\in\mathbb{R}$ este:

a) $\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}, x\ge 1\\ -\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{3}, x<1\end{cases}+\mathcal{C}$;

b) $\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}, x\ge 1\\ -\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{3}, x<1\end{cases}+\mathcal{C}$;

### Varianta B

1. $\int|1-4x^2|dx, x\in\mathbb{R}$ este:

a) $\begin{cases}-x+\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{2}{3}, x\ge\dfrac{1}{2}\\ x-\dfrac{4x^3}{3}-\dfrac{2}{3}, x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)\\ \dfrac{4x^2}{3}+x-\dfrac{1}{3}, x\le-\dfrac{1}{2}\end{cases}+\mathcal{C}$;

c) $\begin{cases} \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+1, x\ge 1 \\ -\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-1, x<1 \end{cases}+\mathcal{C}$.

**2.** $\int \min\left(\sqrt{x},2\right)dx, x\ge 0$, **este:**

a) $\begin{cases} 2x+1, x\ge 4 \\ \frac{2}{3}x\sqrt{x}-1, x\in[0,4) \end{cases}+\mathcal{C}$;

b) $\begin{cases} 2x-1, x\ge 4 \\ \frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{3}, x\in[0,4) \end{cases}+\mathcal{C}$;

c) $\begin{cases} 2x, x\ge 4 \\ \frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{8}{3}, x\in[0,4) \end{cases}+\mathcal{C}$.

**3. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $F(x)=e^{2x}(a\sin 3x+b\cos x)$ să fie primitivă a funcției $f(x)=e^{2x}\sin 3x, e\in\mathbb{R}$.**

a) $a=\frac{1}{13}, b=-\frac{3}{13}$; b) $a=\frac{2}{13}, b=-\frac{3}{13}$;

c) $a=\frac{2}{13}, b=-\frac{1}{13}$.

**4. Egalitatea $\int\frac{x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=(ax+b)\cdot\sqrt{x^2+x+1}+c\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ are loc dacă:**

a) $a=\frac{1}{2}, b=\frac{11}{2}, c=\frac{30}{8}$; b) $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{11}{4}, c=\frac{31}{8}$;

c) $a=b=\frac{11}{4}, c=\frac{31}{8}$.

**5. 1) Valorile $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $\sin x-3\cos x=a(4\sin x+5\cos x)+b(4\cos x-5\sin x)$ sunt:** a) $a=-\frac{11}{41}, b=-\frac{17}{41}$; b) $a=\frac{11}{41}, b=-\frac{17}{41}$;

c) $a=-\frac{11}{41}, b=\frac{17}{41}$.

2) $\int\frac{\sin x-3\cos x}{4\sin x+5\cos x}dx$ **este:**

b) $\begin{cases} \frac{4x^3}{3}-x, x\ge\frac{1}{2} \\ x-\frac{4x^3}{3}-\frac{2}{3}, x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\ \frac{4x^3}{3}+x-\frac{1}{3}, x\le-\frac{1}{2} \end{cases}+\mathcal{C}$;

c) $\begin{cases} \frac{4x^3}{3}-x+\frac{1}{2}, x\ge\frac{1}{2} \\ x-\frac{4x^3}{3}+\frac{1}{3}, x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\ \frac{4x^3}{3}+x-\frac{1}{3}, x\le-\frac{1}{2} \end{cases}+\mathcal{C}$.

**2.** $\int\max\left(|x|,4\right)dx, x\in\mathbb{R}$ **este:**

a) $\begin{cases} \frac{x^2}{2}, x\ge 4 \\ 4x-8, x\in(-4,4) \\ -\frac{x^2}{2}-16, x\le -4 \end{cases}+\mathcal{C}$;

b) $\begin{cases} \frac{x^2}{2}, x\ge 4 \\ 4x-3, x\in(-4,4) \\ -\frac{x^2}{2}+1, x\le -4 \end{cases}+\mathcal{C}$;

c) $\begin{cases} \frac{x^2}{2}, x\ge 4 \\ 4x-1, x\in(-4,4) \\ -\frac{x^2}{2}, x\le -4 \end{cases}+\mathcal{C}$.

**3. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $F(x)=e^{3x}(a\sin 2x+b\cos 2x)$ să fie primitivă a funcției $f(x)=e^{3x}\cos 2x$.**

a) $a=\frac{1}{13}, b=\frac{2}{13}$; b) $a=\frac{2}{13}b=\frac{1}{13}$;

c) $a=\frac{2}{13}, b=\frac{3}{13}$.

a) $-\frac{11}{41}x-\frac{17}{41}\ln|4\sin x+5\cos x|+\mathcal{C}$;

b) $\frac{11}{41}x-\frac{17}{41}\ln|4\sin x+5\cos x|+\mathcal{C}$;

c) $-\frac{11}{41}x+\frac{17}{41}\ln|4\sin x+5\cos x|+\mathcal{C}$.

**6.** Primitiva funcției $f(x)=\cos^2 x$ al cărei grafic trece prin punctul $A\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ este:

a) $F(x)=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{2}$;

b) $F(x)=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}$;

c) $F(x)=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}$.

**4.** Egalitatea $\int\frac{-x^2+3x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx=(ax+b)\cdot\sqrt{x^2-x+1}+c\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$ are loc dacă:

a) $a=-\frac{1}{2},b=2,c=1$; b) $a=\frac{1}{2},b=3,c=-1$;

c) $a=-\frac{1}{2},b=\frac{9}{4},c=\frac{5}{8}$.

**5.** 1)Valorile $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $2\sin x+\cos x=a(5\sin x+4\cos x)+b(5\cos x-4\sin x)$ sunt:a) $a=\frac{10}{41},b=-\frac{3}{41}$;b) $a=\frac{14}{41},b=-\frac{3}{41}$;

c) $a=b=-\frac{1}{41}$.

2) $\int\frac{2\sin x+\cos x}{5\sin x+4\cos x}dx$ este: a) $\frac{14}{41}x-\frac{3}{41}\cdot\ln|5\sin x+4\cos x|+\mathcal{C}$;b) $\frac{10}{41}x-\frac{3}{41}\cdot\ln|5\sin x+4\cos x|+\mathcal{C}$; c) $-\frac{14}{41}x-\frac{3}{41}\cdot\ln|5\sin x+4\cos x|+\mathcal{C}$.

**6.** Primitiva $F$ a funcției $f(x)=x+2$, $x\in\mathbb{R}$, al cărei grafic este tangent curbei de ecuație $g(x)=x^2$ este:

a) $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x-1$;

b) $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x-2$;

c) $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+1$.

$x\in\mathbb{R}$, al cărei grafic este tangent curbei de ecuație $g(x)=x^2$ este:

a) $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x-1$;

b) $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x-2$;

c) $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+1$.

# 2. INTEGRALA DEFINITĂ

**În acest capitol evidențiem două probleme care duc la noțiunea de integrală definită: exprimarea ariei printr-o integrală definită și exprimarea ariei ca limita unui șir de sume. Vom defini integrala definită pentru o funcție continuă în sensul Leibniz-Newton și se vor da proprietățile remarcabile ale acestor integrale: linearitatea, aditivitatea la interval, monotonia, mărginirea, etc. Pentru o funcție mărginită se definește integrabilitatea în sensul Riemann și Darboux stabilindu-se legături cu integrabilitatea în sensul Leibniz-Newton.**

**Sunt prezentate cele mai simple tehnici de calcul pentru integrale definite: metoda integrării directe, metoda integrării prin părți și metoda substituției. Numeroasele exemple însoțesc pas cu pas teoria. Capitolul se încheie cu teorema fundamentală a calculului integral în care este evidențiată legătura între integrare și derivare, deducându-se formula Leibniz-Newton. Problemele propuse ilustrează și extind teoria.**

**Istoric. Atât calculul diferențial cât și calculul integral au preluat idei din matematica elementară pe care le-a extins, printr-un proces de trecere la limită, la situații mai generale (panta unei drepte $\longrightarrow$ panta unei curbe, tangenta la un cerc $\longrightarrow$ tangenta la o curbă,**

**PIONIERI AI MATEMATICII**

| Isaac NEWTON (1642-1727)<br>Matematician englez | G.W. LEIBNIZ (1646-1716)<br>Matematician german |
|---|---|
|  |  |

**FONDATORII CALCULULUI DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL**

**aria unei regiuni mărginite de segmente de dreaptă $\longrightarrow$ aria unei regiuni mărginite de curbe, o sumă finită de numere $\longrightarrow$ o sumă infinită de numere, lungimea unui segment de dreaptă $\longrightarrow$ lungimea unei curbe, viteza (accelerația) medie $\longrightarrow$ viteza (accelerația) instantanee, etc. ).**

**Fondatorii calculului diferențial şi integral sunt Sir Isaac Newton (1642-1727) şi G. W. Leibniz (1646-1716). Ei au evidențiat legătura profundă între noțiunea de integrală definită şi noțiunea de primitivă dată de formula Leibniz-Newton** $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$**, unde** $F$ **este o primitivă a lui** $f$**.**

**Integrala definită este un concept fundamental al calculului integral. El a fost introdus de A. Cauchy (1789-1857) pentru funcții continue, iar de Bernhard Riemann (1826-1866) în cazul general. Riemann (matematician german, elev al lui Gauss) a fost primul care a găsit condiții necesare şi suficiente ca o funcție mărginită să fie integrabilă. El a separat conceptul de integrare de companionul lui de până atunci, diferențierea, utilizând sumele şi trecerea la limită pentru determinarea ariilor. El a considerat toate funcțiile pe un interval pe care procesul de „integrare" poate fi definit: clasa funcțiilor integrabile. Punctul de vedere al lui Riemann a condus pe alți matematicieni la inventarea altor teorii ale integrării, cea mai importantă fiind a lui H. Lebesque (1875-1941).**



**"Quand Gauss dit qu'il a démontré quelque chose, cela me parait très probable, quand Cauchy le dit, il y a autant à parier pour et contre, quand Dirichlet le dit, cela est certain."**

**C. Jacobi**

**"Je dois payer une certaine somme; je fouille dans mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l'ordre ou elles se présentent jusqu'a atteindre ma dette. C'est l'integrale de RIEMANN."**

**Henri Lebesque**

## 2.1. PROBLEME CARE CONDUC LA NOȚIUNEA DE INTEGRALĂ DEFINITĂ

### 1. Exprimarea ariei printr-o integrală

Am văzut în capitolul 1 că noțiunea de primitivă este legată istoric de problema determinării ariei. Mai precis dacă $f:[a,b]\to[0,\infty), a<b$ este o funcție continuă, atunci aria figurii variabile $AM_0N_0D$ (numită şi trapez curbiliniu) (Fig.1)

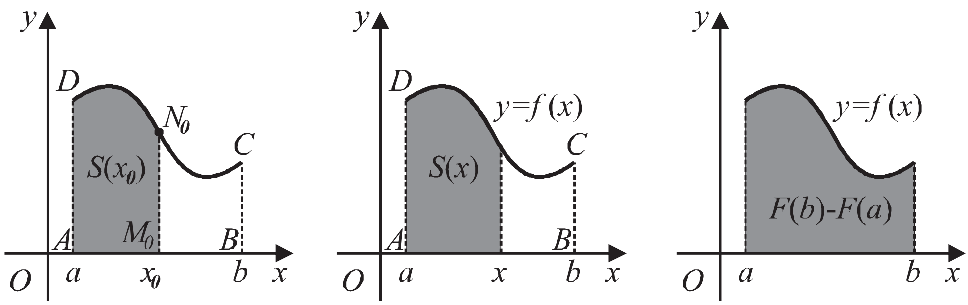



**Fig.1** **Fig.2** **Fig.3**

cuprinsă între graficul funcției $f$, axa $Ox$ şi dreptele $x=a, x=x_0$ (unde $x_0$ este abscisa punctului $M_0$ situat între $A$ şi $B$) notată $S(x_0)$ are proprietatea: $S'(x_0)=f(x_0)$.

S-a ajuns la următoarea teoremă remarcabilă, numită de obicei

**Teorema Leibniz-Newton**. Derivata ariei variabile $S(x)$ în raport cu abscisa $x$ este egală cu ordonata $y=f(x)$, adică $S'(x)=f(x)$ (Fig.2).

Această funcție primitivă $S$ se distinge dintre toate celelalte funcții primitive prin faptul că devine egală cu zero dacă $x=a, S(a)=0$ ($M_0$ coincide cu $A$). De aceea dacă se cunoaşte o primitivă $F$, oarecare a lui $f$, şi dacă

$S(x)=F(x)+k, k=$constantă, atunci $k=-F(a)$ şi deci $S(x)=F(x)-F(a)$.

În particular, pentru a găsi aria $S$ a întregului trapez curbiliniu $ABCD$ trebuie ca $x=b$, când avem $S=F(b)-F(a)$ (Fig.3).

Se notează $S(x)=\int_a^x f(t)dt$ (citim: integrală definită de la $a$ la $x$ din $f$).

Din cele de mai sus $S'(x)=f(x), \forall\, x\in[a,b]$ şi aria trapezului curbiliniu $ABCD$ este egală cu $S(b)=\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$, unde $F$ este o primitivă a funcției $f$ pe $[a,b]$ ($F$ are proprietățile: 1) $F$ este derivabilă pe $[a,b]$ şi
2) $F'(x)=f(x), \forall\, x\in[a,b]$).

**Observație**. Dacă $G$ este o altă primitivă a lui $f$, atunci $\int_a^b f(t)\mathrm{dt}=G(b)-G(a)$.

Într-adevăr, ştim că $F(x)=G(x)+c$, şi deci $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)=$
$=(G(b)+c)-(G(a)+c)=G(b)-G(a)$.
Rezultatul înlocuirii lui $a$ şi $b$ în $F(x)=G(x)+c$ este $F(a)=G(a)+c$, $F(b)=G(b)+c$. Prin scăderea acestor numere dispare $c$. Acesta este motivul pentru care integrala se numeşte "definită".

**Notație**. $F(b)-F(a)$ se scrie $F(x)\Big|_a^b$ (citim : $F(x)$ luat între $a$ şi $b$).

| | |
|---|---|
| **Procedeu practic**. | • Se dă $f(x)\geq 0, x\in[a,b]$;<br>• Se integrează $f$ şi se determină o primitivă $F$;<br>• valoarea ariei este $F(b)-F(a)$. |

**Exemplu. Fie $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x+1$. 1) Să determinăm aria figurii delimitată de graficul lui $f$ (este dreapta de ecuație $y=x+1$, Fig.4) şi dreptele verticale $x=0, x=2$ şi axa $Ox$.**
**2) Să determinăm aria figurii delimitată de graficul lui $f$, dreptele $x=1, x=2$ şi axa $Ox$ (Fig.6).**

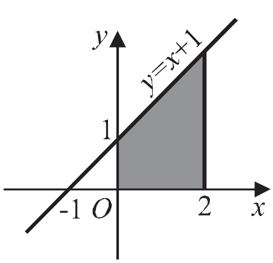


Fig. 4

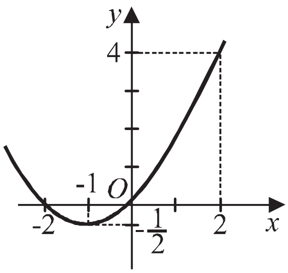


Fig. 5

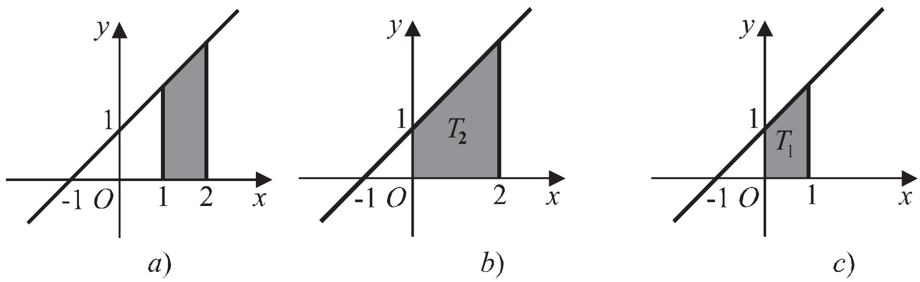



**Fig. 6**

**R. 1) Determinăm o primitivă $F$ a lui $f$ prin integrare. Avem $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + x + \mathcal{C}$.**

**Luăm $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$. Cu acestea aria cerută este egală cu $S = \int_0^2 f(t)dt = \left.\left[\frac{x^2}{2} + x\right]\right|_0^2 = 4$.**

**Observație. Aria $S(x)$ are exprimarea $S(x) = F(x) + k$. Din $S(0) = 0$ rezultă**

**$k = -F(0) = 0$. Deci $S(x) = \frac{x^2}{2} + x$, cu graficul din Fig.5. Aria este egală cu $S = S(2) = 4$.**

**2) Aria de determinat este egală cu $S = \int_1^2 f(t)dt = F(x)\Big|_1^2 = F(2) - F(1) =$**

$$= \left(\frac{2^2}{2} + 2\right) - \left(\frac{1^2}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}.$$

**Observații. 1) În acest caz, $S(x) = \frac{x^2}{2} + x + k$, cu $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$ cu particularitatea că**

**$S(1) = 0$, adică $0 = F(1) + k \Rightarrow k = -F(1) = -\frac{3}{2}$. Aria cerută este egală cu**

**$S(2) = F(2) + k = \frac{2^2}{2} + 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, unde $S(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$. De aici $S = S(2) = \frac{5}{2}$.**

**2) Aria cerută este egală cu aria unui trapez care apare ca diferență a ariilor a două trapeze $T_2, T_1$ (Fig.6.b), c)) pentru a căror calcul se utilizează formula cunoscută. Avem:**

$$S = aria(T_2) - aria(T_1) = \frac{3+1}{2} \cdot 2 - \frac{2+1}{2} \cdot 1 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

**Această arie se poate exprima cu $S(x) = \frac{x^2}{2} + x + k$, unde $S(0) = k = 0$, adică $S = \frac{x^2}{2} + x$.**

**Cu acestea $aria(T_2) - aria(T_1) = S(2) - S(1) = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.**

## 2. Exprimarea ariei ca limită a unei sume. Integrarea ca proces de sumare

Din clasele gimnaziale ştim calcula aria unei suprafețe triunghiulare, dreptunghiulare, trapezoidale, poligonale (se descompune în suprafețe triunghiulare). Cum se determină aria unei suprafețe delimitată de o curbă?

Conceptul de arie a unei figuri $(F)$ reprezentând un domeniu mărginit şi închis este o problemă dificilă, noi mărginindu-ne la a spune că figura $(F)$ are aria $S$ dacă există două şiruri de suprafețe poligonale $(P_n)_n, (P_n^{'})_n$ conținute în $(F)$ şi respectiv conținând pe $(F)$, ale căror arii să aibă limita comună $\lim\limits_{n\to\infty} S(P_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(P_n^{'}) = S$, unde $S(P_n)$ este aria suprafeței poligonale $P_n$.

Considerăm funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$. Problema care ne interesează este aceea a determinării ariei delimitate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ şi dreapta $x=1$ (Fig.7.a)-zona haşurată). Această figură se numeşte **triunghi curbiliniu**.

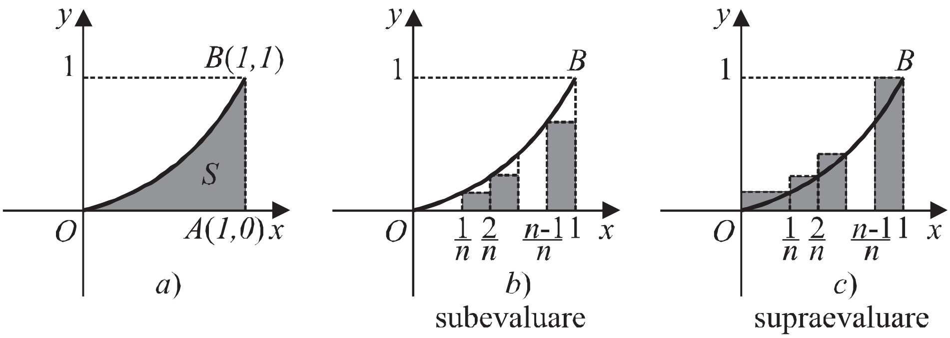



**Fig. 7**

Pentru a calcula aria triunghiului curbiliniu $OAB$, notată cu $S$, vom împărți segmentul $OA$ în $n\geq 2$ părți egale prin punctele $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}=1$.

Sistemul ordonat $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right)$ se numeşte diviziune a intervalului $[0,1]$ (aici diviziunea se numeşte echidistantă deoarece intervalele $\left[0,\frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right], ..., \left[\frac{n-1}{n},1\right]$ au aceeaşi lungime $\frac{1}{n}$). Vom construi două tipuri de dreptunghiuri:

1) cu bazele (pe $Ox$) $\left[0,\frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right], ..., \left[\frac{n-1}{n},1\right]$ şi înălțimi

$f(0), f\left(\frac{1}{n}\right), ..., f\left(\frac{n-1}{n}\right)$ (sunt valorile funcției în capetele din stânga ale intervalelor) (Fig.7.b)).

Aceste dreptunghiuri sunt în număr de $n-1$, iar reuniunea lor este inclusă în interiorul triunghiului curbiliniu $OAB$ ceea ce înseamnă că suma ariilor acestor dreptunghiuri este mai mică decât aria triunghiului curbiliniu. Fie $s_n$ suma ariilor acestor dreptunghiuri. Avem:

$$s_n = \frac{1}{n}f(0) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + ... + \frac{1}{n}f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + ... + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2}{n^2} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$, am utilizat formula

$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $s_n \leq S, \forall n \in \mathbb{N}^*, (1)$.

2) cu bazele (pe $Ox$) $\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], ..., \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ și înălțimi $f\left(\frac{1}{n}\right), f\left(\frac{2}{n}\right), ..., f(1)$ (sunt valorile funcției în capetele din dreapta ale intervalelor) (Fig.7.c)).

Avem $n$ dreptunghiuri a căror reuniune conține interiorul triunghiului curbiliniu $OAB$, ceea ce înseamnă că suma ariilor acestor dreptunghiuri este mai mare decât aria triunghiului curbiliniu. Fie $S_n$ suma ariilor acestor dreptunghiuri.

Avem:

$$S_n = \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{n}f(1) = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + ... + \frac{n^2}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$. Deci $S \leq S_n, \forall n \in \mathbb{N}^*, (2)$.

Din $(1)$ şi $(2)$ rezultă $s_n \leq S \leq S_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Trecând la limită după $n \to \infty$ găsim, via criteriul „cleştelui”, $\frac{1}{3} \leq S \leq \frac{1}{3}$, adică $S = \frac{1}{3}$.

Să observăm că $f$ este strict crescătoare pe $[0,1]$, ceea ce înseamnă că pentru intervalul $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, $f\left(\frac{i}{n}\right)$ şi $f\left(\frac{i+1}{n}\right)$ sunt cea mai mică şi respectiv cea mai mare valoare a funcției $f$.

Sumele $s_n, S_n$ se numesc **suma Darboux inferioară** şi respectiv **suma Darboux superioară**. În plus, observăm că $S_n - s_n = \frac{1}{n}$ reprezintă aria ultimului dreptunghi din Fig.7.c) şi avem $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$.

**Observaţii. 1)** Aceeaşi arie se poate exprima prin suma ariilor unor trapeze. Din acest motiv metoda de calcul se numeşte **metoda trapezelor** (Fig.8).

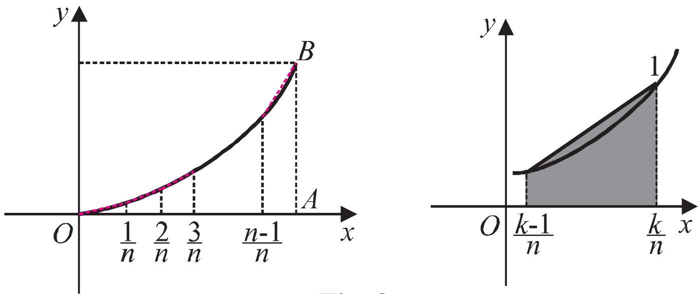



**Fig. 8**

Primul trapez are bazele egale cu $f(0)$ şi $f\left(\frac{1}{n}\right)$, iar înălţimea egală cu $\frac{1}{n}$, al doilea trapez are bazele egale cu $f\left(\frac{1}{n}\right)$ şi $f\left(\frac{2}{n}\right)$, iar înălţimea egală cu $\frac{1}{n}$, al treilea trapez are bazele egale cu $f\left(\frac{2}{n}\right)$ şi $f\left(\frac{3}{n}\right)$, iar înălţimea egală cu $\frac{1}{n}$, …, ultimul trapez are bazele egale cu $f\left(\frac{n-1}{n}\right)$ şi $f(1)$, iar înălţimea egală cu $\frac{1}{n}$. Suma ariilor acestor trapeze aproximează prin adaos aria triunghiului curbiliniu $OAB$. Fie $T_n$ suma ariilor acestor trapeze. Avem:

$$T_n = \frac{f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)}{2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)}{2}\cdot\frac{1}{n} + \ldots + \frac{f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)}{2}\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{2n}\left\{f(0) + 2\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] + f(1)\right\} = \frac{1}{2n}\left[2\frac{1^2+2^2+(n-1)^2}{n^2}+1\right] =$$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} + \frac{1}{2n} \text{ şi } \lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{3}.$$

În fine, aceeaşi arie se poate aproxima prin **metoda punctului din mijloc**, care constă în a construi dreptunghiuri de baze $\left[0,\frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n},1\right]$ (pe axa $Ox$) şi înălţimi

$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$, unde $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt mijloacele bazelor şi apoi le însumăm ariile. Avem :

$$M_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{2n}\right)^2 + ... + \frac{1}{n}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3}\left[1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2\right] =$$

$= \frac{4n^3 - n}{12n^3}$. Şi în acest caz $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \frac{1}{3}$.

**În toate metodele utilizate am folosit dreptunghiul, aria sa, ca element de bază.**

În general, putem alege orice punct $\xi_k$ din al $k-$lea interval $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, iar aproximarea ariei este dată de suma Riemann (1826-1866, matematician german) $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$.

**2)** Având în vedere cele spuse la paragraful precedent, putem exprima aria printr-o integrală şi avem $S = \int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$. Obținem acelaşi rezultat ca mai sus. În plus, **integrarea apare ca un proces de sumare**.

## 2.2. INTEGRALA DEFINITĂ. FORMULA LEIBNIZ-NEWTON

Am văzut în primul capitol rolul jucat de integrala nedefinită în determinarea primitivelor unei funcții. Integrala definită este strîns legată de integrala nedefinită. Am afirmat că orice funcție continuă $f:[a,b]\to\mathbb{R}, a<b$ admite primitive pe $[a,b]$. Demonstrația acestei afirmații o realizăm în acest capitol. Fie $F$ o astfel de primitivă. Dacă în plus $f$ ia valori pozitive (aceasta înseamnă că graficul lui $f$ este situat deasupra axei $Ox$), atunci aria $S$ a regiunii delimitate de graficul lui $f$, axa $Ox$ şi dreptele verticale $x=a, x=b$ se exprimă cu ajutorul unei integrale definite $S = \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Numărul $\int\limits_a^b f(x)dx$ îl citim: integrala definită a funcției $f$ de la $a$ la $b$ sau integrala definită a funcției $f$ pe $[a,b]$ sau simplu integrală de la $a$ la $b$ din $f$ de $x$ de $x$.

Are loc următoarea

**Definiție**. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe $[a,b]$ şi $F$ o primitivă oarecare a lui $f$ . **Se numeşte integrală definită de la** $a$ **la** $b$ **a lui** $f$ expresia $F(b)-F(a)$ şi se notează $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

---

1) Formula $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ se numeşte **formula Leibniz-Newton** (1675).

2) Funcția $f$ care admite primitive pe $[a,b]$ **spunem că este integrabilă (în sensul Newton)**.

3) Dacă $f\geq 0$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ reprezintă aria regiunii delimitate de graficul lui $f$ , axa $Ox$ şi dreptele verticale $x=a, x=b$ .

**Observații**. **1)** Pentru a calcula $\int_a^b f(x)dx$ se parcurg 2 paşi:

$1^0)$ Se determină o primitivă $F$ a lui $f$ .

$2^0)$ Se calculează $F(b)-F(a)$.

**2)** Din definiție rezultă : 1) $\int_a^a f(x)dx=0$ ; 2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ (inversarea limitelor de integrare) ; 3) $\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$ (nu scriem $\int_a^b 1dx$ ci $\int_a^b dx$).

**3)** În loc de $F(b)-F(a)$ se foloseşte notația $F(x)\Big|_a^b$ (citim: $F(x)$ luat între $a$ şi $b$ ).

**4)** Formula Leibniz-Newton dă o regulă simplă de calcul a integralei definite. Formula face legătura între integrala definită $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ şi integrala nedefinită $\int f(x)\mathrm{d}x$ prin primitiva $F$ .

**5)** Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă, iar $F$ o primitivă a lui $f$, atunci formula lui Leibniz-Newton are loc. În plus, dacă $G$ este o altă primitivă pentru $f$, atunci, de asemenea, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(b)-G(a)$.

Într-adevăr, ştim că $G(x)=F(x)+c, \forall x\in[a,b], c$ constantă şi deci $F(x)=G(x)-c$, iar $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = (G(b)-c)-(G(a)-c) = = G(b)-G(a)$.

Aceasta arată că $F$ din formula lui Leibniz-Newton **poate fi orice primitivă a lui** $f$.

Numărul $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este bine definit. Să reținem că

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = G(b)-G(a) = ...$ unde $F, G, ...$ sunt primitive ale lui $f$.

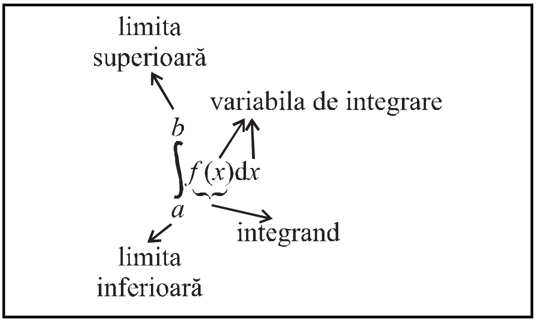
**6)** Variabila $x$ se numeşte **variabila de integrare** (variabila „moartă”). Integrala definită a unei funcții continue pe $[a,b]$ **este un număr real**, care nu depinde de variabila de integrare şi prin urmare se poate nota cu orice literă (diferită de $a$ sau $b$) $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(s)\mathrm{d}s = ...$. Integrala nedefinită a lui $f$ pe $[a,b]$ este o mulțime de funcții (mulțimea tuturor primitivelor lui $f$ pe $[a,b]$).

| **Integrala nedefinită este o mulțime de primitive** | **Integrala definită este un număr real** |
|---|---|
| $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+\mathcal{C}$ | $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$ |

Capetele intervalului $[a,b]$, deci $a, b$ se numesc **limitele** (sau **capetele**) **de integrare** în integrala definită, $a$ **limita inferioară**, iar $b$ **limita superioară**.

Intervalul $[a,b]$ se numeşte **intervalul de integrare**. Funcția $f$ se numeşte **integrand**. Atragem atenția că terminologia „$a, b$ limite de integrare” nu are nimic în comun cu termenul de limită întâlnit la calculul diferențial!

Deci




**7)** Simbolul $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a fost dat de G. W. Leibniz. Simbolul $\int$ este un $s$ latin alungit, care provine din $\sum$ grecesc, iar d$x$ corespunde creşterii $\Delta x$ de forma $(x_i - x_{i-1})$.

**8)** Pentru calculul integralelor definite, cu formula Leibniz-Newton, utilizăm calculul de primitive stabilit la integrala nedefinită (integrarea directă utilizând tabelul cu integrale imediate, integrarea prin părți sau integrarea prin substituție).

**9)** Se poate introduce noțiunea de integrală definită cu limita superioară variabilă. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci definim funcția $G:[a,b]\to\mathbb{R}$, $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (numită şi **integrala nedefinită a lui** $f$ **cu punct de bază** $a$ dar cu limita superioară de integrare variabilă (adică nedefinită)), care vom vedea (teorema fundamentală) este o primitivă a lui $f$ cu $G(a)=0$. Cum $G(x)=F(x)-F(a)$ rezultă că $G$ este derivabilă pe $[a,b]$ cu $G'(x)=F'(x)=f(x), \forall x\in[a,b]$, adică $G$ este primitivă a lui $f$. În plus, $G(a)=F(a)-F(a)=0$. Diferite valori ale lui $a$ dau funcții diferite $G$.

Dacă schimbăm limita inferioară, să spunem $c\left(c\in(a,b)\right)$ şi definim o altă integrală nedefinită $H$ prin $H(x)=\int_c^x f(t)\mathrm{d}t$, atunci $G(x)-H(x)=$

$=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_c^x f(t)\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$, ultima egalitate din proprietatea de aditivitate a integralei, ce va fi prezentată în acest capitol. Deci diferența $G(x)-H(x)$ **este**

**independentă** de $x$ şi regăsim un rezultat cunoscut: orice două primitive ale aceleiaşi funcții pe $[a,b]$ diferă printr-o constantă. Să observăm că avem:

$$\lim_{x\nearrow b}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\nearrow b}\left(F(x)-F(a)\right)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ şi}$$

$$\lim_{x\searrow a}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\searrow a}\left(F(b)-F(x)\right)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$ deoarece $F$ este derivabilă şi deci continuă.

**10)** Am văzut la **5)** că $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\left[F(x)+c\right]\Big|_a^b$. Dacă nu suntem interesați de intervalul $[a,b]$, dar $F$ este o primitivă a lui $f$ pe orice interval din domeniul de continuitate, atunci putem omite $a$ şi $b$ şi să scriem simplu

$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+c$, unde $c\in\mathbb{R}$, arbitrar.

Primitivele exprimate astfel reprezintă **integrala nedefinită**.

**Exerciții rezolvate**

**1. Să se aplice formula Leibniz-Newton pentru calcularea următoarelor integrale definite:**

**1)** $\int_0^1\left(x^2-x+3\right)\mathrm{d}x$ **; 2)** $\int_1^2\left(x^3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ **; 3)** $\int_1^4\left(2\sqrt{x}-x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x$ **; 4)** $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$ **;**

**5)** $\int_4^7\frac{\mathrm{d}x}{x^2-5x+6}$ **; 6)** $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$ **; 7)** $\int_0^1(2x-1)^9\mathrm{d}x$ **; 8)** $\int_1^e\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x$ **; 9)** $\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+1}}$ **;**

**10)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos x\mathrm{d}x$ **; 11)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$ **; 12)** $\int_0^2|x-1|\mathrm{d}x$ **.**

R. Notăm cu $f$ funcția de integrat, iar cu $F$ o primitivă a lui $f$.

1) O primitivă a funcției de sub semnul integralei este $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x$.

Conform formulei Leibniz-Newton integrala definită este egală cu

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_0^1=F(1)-F(0)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+3=\frac{17}{6}.$$

2) O primitivă a lui $f$ pe $(0,\infty)$ este $F(x)=\frac{x^4}{4}+2\ln x+\frac{1}{x}$ şi deci

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_1^2=F(2)-F(1)=2\ln 2+\frac{13}{4}.$$

3) O primitivă a lui $f$ pe $(0,\infty)$ este $F(x)=\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ şi deci

$$\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_1^4=F(4)-F(1)=\left(-\frac{32}{15}+3\sqrt[3]{2}\right)-\frac{63}{30}=3\sqrt[3]{2}-\frac{157}{30}.$$

4) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\ln|x+1|\Big|_0^1=\ln 2$.

5) $\int_4^7 f(x)\mathrm{d}x=\int_4^7\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Big|_4^7=\ln\frac{8}{5}$.

6) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\Big|_0^1=$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\sqrt{3}-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

7) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{20}(2x-1)^{10}\Big|_0^1=0$ ; 8) $\int_1^e f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\ln x}\right)^3\Big|_1^e=\frac{2}{3}$.

9) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ ; 10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\frac{\sin^4 x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$.

11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{tg}\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$ ; 12)Funcţia $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x-1,\ x\in[1,2]\\1-x,\ x\in[0,1)\end{cases}$ fiind continuă admite primitive. Fie $F:[0,2]\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}-x,\ x\in[1,2]\\x-\frac{x^2}{2}-1,\ x\in[0,1)\end{cases}$ o primitivă a lui $f$. Atunci:

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(0)=\left(\frac{2^2}{2}-2\right)-\left(0-\frac{0^2}{2}-1\right)=0-(-1)=1.$$

**2. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă astfel încât $\int_a^b f(x)dx=b-a$. Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=1$.**

**R.** Fie $F$ o primitivă a lui $f$. Avem: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=b-a$ sau $F(a)-a=F(b)-b$.

Funcţia $H:[a,b]\to\mathbb{R},\ H(x)=F(x)-x$ verifică condiţiile din teorema lui Rolle. Deci există $c\in(a,b)$ astfel ca $H'(c)=0$.

## Probleme propuse

**1. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$. 1) Să se determine aria figurii delimitată de graficul lui $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuații $x=0, x=1$.**
**2) Să să se determine aria figurii delimitată de graficul lui $f$, axa $Ox$ şi dreptele $x=1, x=2$.**
**3) Considerați o diviziune echidistantă a intervalului $[0,1]$ dată de punctele $\left(0,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},1\right)$ şi aproximați aria de la 1) utilizând dreptunghiurile.**
**4) Împărțiți intervalul $[0,1]$ în $n$ intervale de aceeaşi lungime $\frac{1}{n}(n\geq 1)$ şi considerați $n$ dreptunghiuri interioare domeniului de la 1) şi $n$ dreptunghiuri exterioare având suma ariilor $s_n$ şi respectiv $S_n$. Deduceți că $s_n\leq S\leq S_n, \forall n\geq 1$ şi arătați că $S=\frac{1}{4}$. Utilizați $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.**

**2. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$. Pentru aria $S$ a figurii delimitată de graficul lui $f$, axa $Ox$ şi dreptele $x=0, x=1$, utilizați diviziunea $\left(0,\frac{1}{25},\frac{4}{25},\frac{9}{25},\frac{16}{25},1\right)$ şi arătați că $\frac{70}{125}\leq S\leq\frac{95}{125}$.**

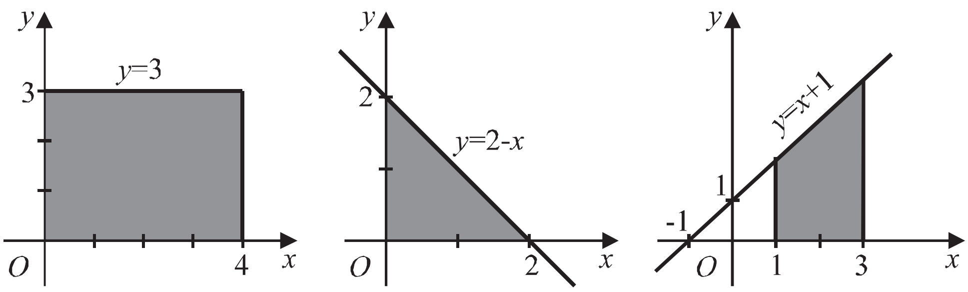
**3. 1. Arătați, haşurând pe figură, ariile asociate integralelor de mai jos:**

**I.** 1) $\int_0^2 x\,dx$ ; 2) $\int_1^3 x\,dx$ ; 3) $\int_0^1 (x+2)\,dx$ ; 4) $\int_1^2 (x+2)\,dx$ .

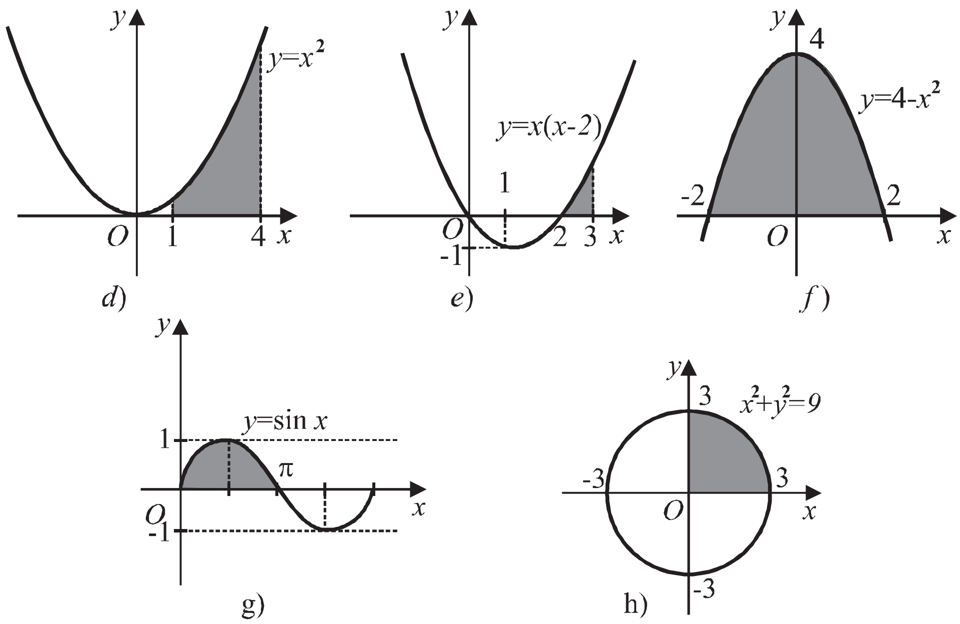
**II.** 1) $\int_0^3 x^2dx$ ; 2) $\int_2^4 x^2dx$ ; 3) $\int_{-3}^3 x^2dx$ ; 4) $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$ ; 5) $\int_1^3 (x^2+1)\,dx$ ; 6) $\int_{-2}^2 (x^2+1)\,dx$ .

**III.** 1) $\int_0^1 x^3dx$ ; 2) $\int_1^2 x^3dx$ ; 3) $\int_{-1}^1 (x^3+1)\,dx$ ; 4) $\int_0^2 (x^3+2)\,dx$ ; 5) $\int_1^3 (x^3+2)\,dx$ ; 6) $\int_{-1}^1 (x^3+2)\,dx$ .

**2. Scrieți integralele definite asociate regiunilor haşurate de mai jos:**




*a)* *b)* *c)*




d) e) f) g) h)

**4. Viteza de creştere a unui brad în primii 60 de ani este dată de legea $v(t)=0{,}01t+0{,}1\left(\frac{m}{an}\right)$.**

**1) Cât este de înalt bradul după 60 de ani?**
**2) Care este vârsta bradului când înălţimea sa este de 12 m?**
**5. Să se aplice formula Leibniz-Newton pentru calcularea următoarelor integrale definite:**

**I.** 1) $\int_{-1}^{1}\left(3x^2-\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x$ ; 2) $\int_{1}^{3}\left(x-3\sqrt{x}+\frac{5}{x}\right)\mathrm{d}x$ ; 3) $\int_{-3}^{-2}\frac{\mathrm{d}x}{x-1}$ ; 4) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ ; 5) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4}$ ;
6) $\int_{4}^{5}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-9}}$ ; 7) $\int_{1}^{3}|x-2|\mathrm{d}x$ ; 8) $\int_{0}^{2}\left(x^2+|x-1|\right)\mathrm{d}x$ .

**II.** 1) $\int_{1}^{e}x\ln x\mathrm{d}x$ ; 2) $\int_{0}^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x$ : 3) $\int_{0}^{1}x^2e^{2x}\mathrm{d}x$ ; 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\mathrm{d}x$ ; 5) $\int_{0}^{\pi}x^2\sin x\mathrm{d}x$ ; 6) $\int_{0}^{\pi}e^x\cos 2x\mathrm{d}x$ ;
7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2x\mathrm{d}x$ .

**III.** 1) $\int_{0}^{1}(3x+1)^6\mathrm{d}x$ ; 2) $\int_{3}^{5}x\sqrt{x^2-9}\mathrm{d}x$ ; 3) $\int_{0}^{3}x\sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x$ ; 4) $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ ; 5) $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^3}}$ ;
6) $\int_{1}^{e}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$ ; 7) $\int_{0}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$ ; 8) $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$ ; 9) $\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ .

**IV.** 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x$ ; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \mathrm{d}x$ ; 3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos^3 x \mathrm{d}x$ ; 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x \mathrm{d}x}{\sin x \cos x}$ ; 5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x \mathrm{d}x}{1+\cos x}$ ;

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} \mathrm{d}x$ ; 7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \mathrm{d}x$ ; 8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \mathrm{d}x$ ; 9*) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{4-3\cos x}$ ; 10*) $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+2\sin^2 x}$ .

**V.** 1) $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x,\ f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, x\in(1,2] \\ \frac{1}{2}, x=1 \end{cases}$ ; 2) $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x,\ f(x)=\begin{cases} \ln(x+1), x\in[0,1] \\ x^2+x, x\in[-1,0) \end{cases}$ ;

3) $\int_{-2}^3 f(x)\mathrm{d}x,\ f(x)=\max(x^2,2x), x\in[-2,3]$ ; 4) $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x,\ f(x)=\begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}, x\in[0,\pi) \\ 2, x=\pi \end{cases}$ .

**6.** Să se determine funcția polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = n^2, \forall n\in\mathbb{N}^*$ .

**7.** Fie $y>0$ și $F(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{y+\cos x}\mathrm{d}x$ . Studiați continuitatea lui $F$ în $y=1$ .

**8.** Fie șirul $(I_n)_{n\geq 0}$, unde $I_n=\int_0^1 \frac{(x-1)^n}{x-2}\mathrm{d}x$ . Să se calculeze $I_n$ și $\lim_{n\to\infty} I_n$ .

**9.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea:

1) $\int_a^{a+1} (x^3+x)\mathrm{d}x = \frac{2a-1}{4}$ ; 2) $\int_0^1 \frac{x+a}{x+1}\mathrm{d}x = 1+\ln 2$ ; 3) $\int_0^a (6x^2-6x-17)\mathrm{d}x = -30$ .

**10.** 1)Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^5+bx^2+c$ . Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ dacă graficul funcției $f$ trece prin punctul $A(0,1)$, panta tangentei la grafic în punctul de abscisă $x=1$ este 36, iar $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3$ .

2) Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă și crescătoare, atunci

$$\int_x^{(x+y)/2} f(t)dt < \int_{(x+y)/2}^{y} f(t)dt, x,y\in\mathbb{R}, x<y .$$

**11.** Fie $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{ax^2+b}{x-1}+cx$ . Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ dacă graficul funcției $f$ trece prin punctul $A(2,23)$, tangenta la grafic în puntul de abscisă $x=0$ are panta 4, iar $\int_{-1}^0 (x-1)f(x)\mathrm{d}x = \frac{37}{6}$ .

**12.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea $2f(x)-f(-x)=x+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

**13.** Fie $I(a)=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2ax+1}, a\in[0,1]$. 1) Arătați că $I(a)$ este funcție descrescătoare.
2) Calculați $I(a), a\in[0,1)$ și arătați că $I$ este continuă în $a=1$.

**14.** Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este derivabilă cu $f'(x)<0, \int_a^b f(x)dx=0$, atunci $f(a)f(b)<0$.

**15.** Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă și $[c,d]\subset[a,b]$ astfel încât $\int_a^c f(t)dt\cdot\int_d^b f(t)dt<0$. Să se arate că există $c\in(a,b)$ cu $f(c)=0$.

**16.** Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}, 0<a<b,$ derivabilă cu $\int_a^b f(x)dx=bf(b)-af(a)$. Atunci există $c\in(a,b)$ cu $f'(c)=0$.

## 2.3. INTEGRABILITATEA UNEI FUNCȚII ÎN SENSUL LUI RIEMANN

Am văzut în 2.1.2. cum se exprimă aria ca limită a unei sume, într-un caz particular. În cele ce urmează extindem punctul de vedere de acolo.

**Diviziune şi normă a unei diviziuni**

**Definiții. 1)** Fie $a,b\in\mathbb{R}, a<b$. Se numeşte **diviziune a intervalului** $[a,b]$ un sistem finit de puncte $D=(x_0,x_1,x_2,...,x_n), n\geq 1$, unde $x_i\in[a,b], i=\overline{0,n}$ şi $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$. Punctele $x_i$ se numesc **puncte de diviziune**.

**Notație**. Notăm $\mathcal{D}_{[a,b]}$ mulțimea tuturor diviziunilor intervalului $[a,b]$.

Subintervalele $[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},x_n]$ sunt intervale de lungimi $x_1-x_0, x_2-x_1,...,x_n-x_{n-1}$.

**2)** Se numeşte **norma diviziunii** $D$, notată $\|D\|$, cea mai mare dintre lungimile intervalelor $[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},x_n]$, adică

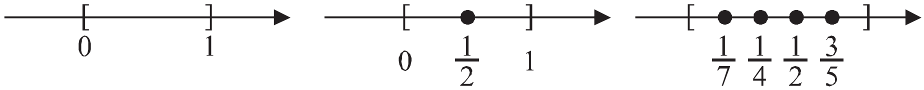
$$\|D\|=\max_{1\leq i\leq n}(x_i-x_{i-1}).$$

Pentru intervalul $[a,b]$ se consideră o diviziune particulară, obținută din împărțirea intervalului în $n$ părți egale, de lungime $\frac{b-a}{n}$, de forma

$$D_n=\left(a, a+\frac{b-a}{n}=x_1, a+2\frac{b-a}{n}=x_2, ..., a+(n-1)\frac{b-a}{n}=x_{n-1}, x_n=b\right).$$

Această diviziune se numeşte $n-$ **echidistantă**. În plus, $\|D\|=\frac{b-a}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

**Exemplu. Pentru intervalul $[0,1]$ se consideră diferite diviziuni şi se calculează norma lor (Fig. 9).**




$\boldsymbol{D_1=(0,1), \|D_1\|=1}$ $\quad$ $\boldsymbol{D_2=\left(0,\frac{1}{2},1\right), \|D_2\|=\frac{1}{2}}$ $\quad$ $\boldsymbol{D_3=\left(0,\frac{1}{7},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{5},1\right), \|D_3\|=\frac{2}{5}}$

**Fig. 9**

### Sume Riemann

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **o funcție mărginită** (în particular funcție continuă), $D=(a=x_0, x_1, x_2, ..., x_n=b)\in\mathcal{D}_{[a,b]}$ şi punctele $\xi_1\in[x_0,x_1], \xi_2\in[x_1,x_2]$, $..., \xi_n\in[x_{n-1},x_n]$ ($\xi$ se citeşte csi) numite **puncte intermediare ale diviziunii** $D$. Uneori sistemul de puncte intermediare $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ se notează cu $\xi=(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$. Cu aceste elemente formulăm următoarea

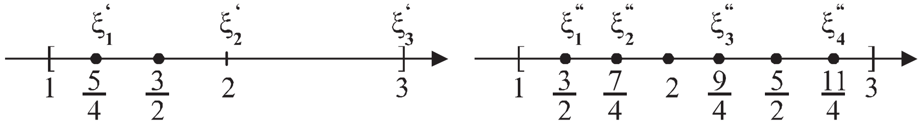
**Definiție**. Se numeşte **suma Riemann asociată funcției** $f$ **, diviziunii** $D$ **şi sistemului de puncte intermediare** $\xi$, numărul real

$$\sigma_D(f,\xi)=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+...+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}).$$

**Notație**. Utilizând simbolul $\sum$ suma Riemann se poate scrie sub forma $\sigma_D(f,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$.

Simbolul $\sigma_D(f,\xi)$ îl citim: sigma indice de de *f* şi csi.

**Exemple. 1. Fie funcția $f:[1,3]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$ şi diviziunile (Fig.10)**




$D_1=\left(1,\frac{3}{2},2,3\right),\|D_1\|=1,\xi'=\left(\frac{5}{4},2,3\right)$ $\qquad$ $D_2=\left(1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3\right),\|D_2\|=\frac{1}{2},\xi''=\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4},\frac{9}{4},\frac{11}{4}\right)$

**Fig.10**

**Sumele Riemann asociate sunt:**

$$\sigma_{D_1}(f,\xi')=f\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)+f(2)\left(2-\frac{3}{2}\right)+f(3)(3-2)=\frac{25}{16}\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}+9\cdot1=\frac{377}{32},$$

$$\sigma_{D_2}(f,\xi'')=f\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)\left(2-\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)+f\left(\frac{11}{4}\right)\left(3-\frac{5}{2}\right)=$$

$$=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{49}{16}\cdot\frac{1}{2}+\frac{81}{16}\cdot\frac{1}{2}+\frac{121}{16}\cdot\frac{1}{2}=\frac{287}{32}.$$

**Diviziunea $D_2$ este 4-echidistandă. Interpretare geometrică. Celor trei termeni din $\sigma_{D_1}(f,\xi')$ le corespund ariilor celor trei dreptunghiuri evidențiate pe Fig.11.a) de baze intervalele $\left[1,\frac{3}{2}\right],\left[\frac{3}{2},2\right]$ și $[2,3]$ iar ca înălțimi valorile funcției $f$ în punctele intermediare**

**$f(\xi_1')=f\left(\frac{5}{4}\right), f(\xi_2')=f(2)$ și**

**respectiv $f(\xi_3')=f(3)$.**

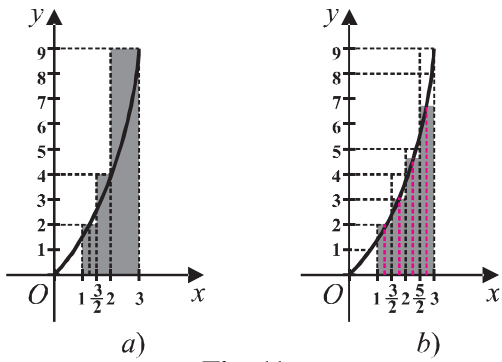



**Fig. 11**

**Interpretare similară pentru termenii sumei $\sigma_{D_2}(f,\xi'')$ cărora le corespund aria câte unui dreptunghi din Fig.11.b). Am marcat cu linii punctate roșii valorile funcției $f$ în punctele intermediare, care dau înălțimile dreptunghiurilor.**

**2. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x+1}$. Considerăm diviziunea n-echidistantă $D_n=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},...,\frac{n-1}{n},1\right)$ și punctele intermediare $\xi=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,1\right)$ cu $\frac{1}{n}\in\left[0,\frac{1}{n}\right],\frac{2}{n}\in\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],...,1\in\left[\frac{n-1}{n},1\right]$ (ele corespund capetelor din dreapta ale intervalelor diviziunii $D_n$). Atunci suma Riemann este dată de**

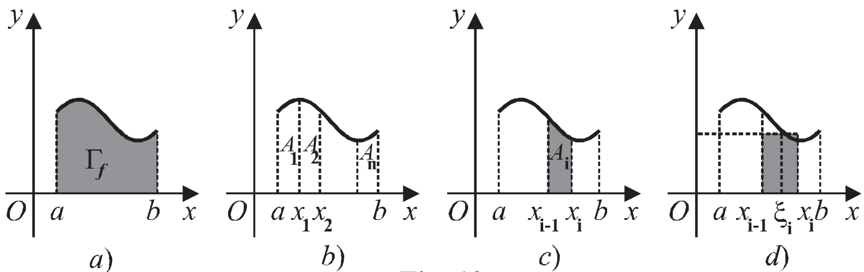
$$\sigma_{D_n}(f,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{i}{n}+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}.$$

**Interpretarea geometrică a sumelor Riemann în cazul unei funcții pozitive și continue**

Am realizat o interpretare geometrică a sumelor Riemann în exemplul 1 de mai sus în caz particular. Considerăm acum cazul general.

Fie $f:[a,b]\to[0,\infty)$ o funcție continuă, $D=(a=x_0,x_1,...,x_{n-1},x_n=b)\in \mathcal{D}_{[a,b]}$ și $\xi=(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ sistemul de puncte intermediare ale diviziunii $D$.

Considerăm în planul $xOy$ mulțimea de puncte $\Gamma_f$ (citim: gama indice $f$) dată de $\Gamma_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\right\}$ (numită **subgraficul lui** $f$).




**Fig, 12**

Aceasta este formată din toate punctele din plan situate între graficul lui $f$, axa $Ox$ și dreptele verticale $x=a, x=b$ (Fig.12.a)). Dreptele verticale $x=a, x=x_1, x=x_2,..., x=x_n$ împart pe $\Gamma_f$ în „benzi” de arii $A_1, A_2,..., A_n$ (Fig.12.b)). Pe intervalul $[x_{i-1},x_i], i=\overline{1,n}$ construim dreptunghiul $D_i$ de bază $x_i-x_{i-1}$ și înălțime $f(\xi_i)$ (Fig.12.d)). Atunci aria acestui dreptunghi este egală cu $f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$. Spunem că aria dreptunghiului $D_i$ aproximează aria $A_i$ (a trapezului curbiliniu din Fig.12.c)). Considerând reuniunea acestor dreptunghiuri se obține o figură a cărei arie egală cu $\sum_{i=1}^{n}\text{aria}(D_i)$ aproximează aria lui $\Gamma_f$. Deci,

$\text{aria}(\Gamma_f)\approx\sum_{i=1}^{n}\text{aria}(D_i)$. Să observăm că această aproximare dată prin însumarea ariilor dreptunghiurilor este mai bună cu cât se consideră diviziuni cu un număr mai mare de puncte. În plus, $\sum_{i=1}^{n}\text{aria}(D_i)=\sigma_D(f,\xi)$. Deci $\sigma_D(f,\xi)\approx\text{aria}(\Gamma_f)$, adică

**suma Riemann asociată lui $f$, diviziunii $D$ şi punctelor intermediare $(\xi_i)$ aproximează aria subgraficului lui $f$.**

### Funcții integrabile Riemann

Are loc următoarea:

**Definiție**. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Se spune că $f$ **este integrabilă Riemann** pe $[a,b]$ dacă

**1) oricare ar fi şirul de diviziuni** $D_n=\left(x_0^{(n)},x_1^{(n)},\dots,x_{k_n}^{(n)}\right)\in\mathcal{D}_{[a,b]}, n\in\mathbb{N}^*$ cu $\|D_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ şi

**2) oricare ar fi sistemul de puncte intermediare** $x_{i-1}^{(n)}\le\xi_i^{(n)}\le x_i^{(n)}$, $i=\overline{1,k_n}$, şirul sumelor Riemann $\left(\sigma_{\mathbf{D_n}}\left(f,\xi^{(n)}\right)\right)_n$ **este convergent la acelaşi număr**.

---

Numărul real din această definiție, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\mathbf{D_n}}\left(f,\xi^{(n)}\right)$ se notează prin $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (citim: integrală de la $a$ la $b$ din $f$ de $x$ de $x$) şi se numeşte **integrala definită Riemann a funcției $f$ pe $[a,b]$**.

**Observații**. **1**) Se arată că orice funcție integrabilă Riemann este mărginită pe $[a,b]$. Consecință: dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nu este mărginită $\Rightarrow f$ nu este integrabilă Riemann pe

$[a,b]$. De exemplu $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x\in(0,1]\\ 0, x=0\end{cases}$ nu este integrabilă Riemann

deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=\infty$.

**2**) Se demonstrează două teoreme importante, prin care se evidențiază două clase de funcții integrabile Riemann:

1) **Orice funcție monotonă** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **este integrabilă Riemann** pe $[a,b]$.

2) **Orice funcție continuă** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **este integrabilă Riemann pe** $[a,b]$.

**Exemple. 1. (funcție integrabilă Riemann). Fie** $f:[a,b]\to\mathbb{R}, f(x)=c, c\in\mathbb{R}$ **funcția constantă. Să arătăm că** $f$ **este integrabilă pe** $[a,b]$ **și** $\int_a^b c\,dx=c(b-a)$.

**Într-adevăr, fie** $D_n\in\mathcal{D}_{[a,b]}$ **cu** $\|D_n\|\xrightarrow[n]{}0$ **și** $\left(\xi_i^{(n)}\right)$ **sistemul de puncte intermediare.**

**Atunci** $\sigma_{D_n}\left(f,\xi_i^{(n)}\right)=\sum_{i=1}^{k_n}f\left(\xi_i^{(n)}\right)\left(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}\right)=\sum_{i=1}^{k_n}c\left(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}\right)=c\left(x_1^{(n)}-x_0^{(n)}\right)+$ $+c\left(x_2^{(n)}-x_1^{(n)}\right)+\ldots+c\left(x_{k_n}^{(n)}-x_{k_n-1}^{(n)}\right)=c(b-a),\forall n$.

**Deci șirul cu termenul general** $\sigma_{D_n}\left(f,\xi_i^{(n)}\right)=c(b-a)$ **este șirul constant** $c(b-a)$.

**Deci** $\lim_{n\to\infty}\sigma_{D_n}\left(f,\xi_i^{(n)}\right)=c(b-a)$, **adică** $\int_a^b c\,dx=c(b-a)$.

**2. (funcție neintegrabilă Riemann). Fie**

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1, x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}\\ 0, x\in[a,b]\cap\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}.$$

**Considerăm șirul de diviziuni** $D_n\in\mathcal{D}_{[a,b]}$ **cu** $\|D_n\|\xrightarrow[n]{}0$. **Alegem două sisteme de puncte intermediare pentru** $D_n$. **Fie** $\xi_i^{'(n)}\in\left[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}\right]\cap\mathbb{Q}$ **și** $\xi_i^{''(n)}\in\left[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}\right]\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$. **Vom arăta că șirurile de sume Riemann asociate celor două tipuri de puncte intermediare au limite diferite!**

| UN PIONIER AL MATEMATICII |
|---|
| **Bernard RIEMANN (1826-1866)**<br>**Matematician german** |

| CONTRIBUȚII |
|---|
| • fundamentarea geometriei<br>• analiză reală și complexă<br>• teoria numerelor<br>• topologie<br>• fizica matematică |

**Într-adevăr, avem:**

$$\sigma_{D_n}\left(f,\xi_i^{'(n)}\right)=\sum_{i=1}^{k_n}f\left(\xi_i^{'(n)}\right)\left(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}\right)=\sum_{i=1}^{k_n}\left(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}\right)=b-a\xrightarrow[n\to\infty]{}b-a,$$

$$\sigma_{D_n}\left(f,\xi_i''^{(n)}\right)=\sum_{i=1}^{k_n} f\left(\xi_i''^{(n)}\right)\left(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}\right)=\sum_{i=1}^{k_n} 0\cdot\left(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}\right)=0\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

**Cum $b-a\neq 0$, deducem că $f$ nu este integrabilă Riemann.**

O întrebare care se pune firesc este aceea a existenței unei funcții pentru care sunt definite integrala lui Newton ($(N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$, unde $F$ este o primitivă a lui $f$) şi integrala lui Riemann ($(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sigma_{D_n}\left(f,\xi^{(n)}\right)$ şi cele două integrale coincid.

Are loc următoarea

**Teoremă**. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, iar $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f$ pe $[a,b]$, atunci

$$(N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

unde $(N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ sunt integrale definite în sensul lui Newton şi respectiv Riemann.

**Demonstrație**. Fie $D_n=\left(a=x_0^{(n)},x_1^{(n)},\dots,x_{k_n}^{(n)}=b\right)\in\mathcal{D}_{[a,b]}$ cu $\|D_n\|\to 0$.

Avem:

$$(N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=\left[F\left(x_{k_n}^{(n)}\right)-F\left(x_{k_n-1}^{(n)}\right)\right]+\left[F\left(x_{k_n-1}^{(n)}\right)-F\left(x_{k_n-2}^{(n)}\right)\right]+$$

$$+\dots+\left[F(x_2)-F(x_1)\right]+\left[F(x_1)-F(x_0)\right],\ (1).$$

Se aplică teorema lui Lagrange pentru $F$ pe intervalul $\left[x_i^{(n)},x_{i+1}^{(n)}\right], i=\overline{0,k_n-1}$ şi există $\xi_{i+1}^{(n)}\in\left(x_i^{(n)},x_{i+1}^{(n)}\right)$ astfel încât $F\left(x_{i+1}^{(n)}\right)-F\left(x_i^{(n)}\right)=F'\left(\xi_{i+1}^{(n)}\right)\left(x_{i+1}^{(n)}-x_i^{(n)}\right)=$

$=f\left(\xi_{i+1}^{(n)}\right)\left(x_{i+1}^{(n)}-x_i^{(n)}\right)$. Deci $(1)$ devine

$$(N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{k_n-1} f\left(\xi_{i+1}^{(n)}\right)\left(x_{i+1}^{(n)}-x_i^{(n)}\right).$$

Trecând aici la limită după $n\to\infty$ se deduce egalitatea

$$(N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\blacksquare$$

Deci dacă integralele lui Newton şi Riemann ale unei funcţii $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ există, atunci ele sunt egale. Se pot da exemple de funcţii pentru care una din integrale există, iar cealaltă nu există. Iată un astfel de exemplu. Fie $\mathrm{sgn}:[-1,1]\to\mathbb{R}$, (funcţia semn) $\mathrm{sgn}(x)=-1, x<0; \mathrm{sgn}(0)=0; \mathrm{sgn}(x)=1, x>0$. Această funcţie este integrabilă Riemann (se va preciza că o funcţie mărginită ce are un număr finit de puncte de discontinuitate de prima speţă este integrabilă Riemann). Integrala $(N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ nu există (funcţia $f$ nu este integrabilă în sensul lui Newton) deoarece funcţia considerată nu admite primitive pe $[-1,1]$.

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **este continuă**, atunci există $(N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (orice funcţie continuă admite primitive ) şi $(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (orice funcţie continuă este integrabilă Riemann) şi mai mult, $(N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

## ***Excursie matematică*** (facultativ)

* * * * *

***Sume Darboux. Criteriul lui Darboux de integrabilitate***

*Fie* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ***o funcţie mărginită*** *şi* $D=(x_0,x_1,...,x_n)\in\mathcal{D}_{[a,b]}$. *Atunci există numerele* $m_i=\inf f(x), M_i=\sup f(x), x\in[x_{i-1},x_i], i=\overline{1,n}$ *(marginea inferioară şi respectiv marginea superioară a lui* $f$ *pe* $[x_{i-1},x_i]$*; aceste numere există deoarece mulţimile* $f([x_{i-1},x_i]), i=\overline{1,n}$ *sunt mărginite).*

***Definiție***. *Numerele*

$$s_D(f)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}),\ S_D(f)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

*se numesc* ***suma Darboux inferioară*** *şi respectiv* ***suma Darboux superioară*** *asociate funcției $f$ şi diviziunii $D$.*

*Se verifică uşor pentru aceste sume proprietățile:*

***1)*** $s_D(f)\le \sigma_{\mathbf{D}}(f,\xi_i)\le S_D(f),\ \forall \xi_i\in[x_{i-1},x_i],\ i=\overline{1,n}$.

***(Orice sumă Riemann este cuprinsă între suma Darboux inferioară şi cea superioară pentru aceeaşi diviziune*** $D$ ***).***

***2)*** $\forall D_1, D_2\in \mathcal{D}_{[a,b]},\ s_{D_1}(f)\le S_{D_2}(f)$.

***(Orice sumă Darboux inferioară este mai mică decât orice sumă Darboux superioară).***

*Este uşor de văzut că dacă $f$* ***este o funcție continuă****, atunci se ştie (Weierstrass) că ea este mărginită pe $[a,b]$ sau pe orice $[x_{i-1},x_i]\subset[a,b]$ şi îşi atinge marginile pe fiecare interval. Deci există $\xi_i^{'},\xi_i^{''}\in[x_{i-1},x_i]$ astfel încât $f\left(\xi_i^{'}\right)=m_i,\ f\left(\xi_i^{''}\right)=M_i$.*

*În acest caz sumele Darboux devin:*

$$s_D(f)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i^{'}\right)(x_i-x_{i-1}),$$

$$S_D(f)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i^{''}\right)(x_i-x_{i-1}).$$

**UN PIONIER AL MATEMATICII**

**J.G. DARBOUX (1842-1917)**
**Matematician francez**

CONTRIBUȚII

- **analiză**
- **geometria diferențială**

*Acestea de fapt sunt două sume Riemann* $s_D(f)=\sigma_{\mathbf{D}}\left(f,\xi_i^{'}\right),\ S_D(f)=\sigma_{\mathbf{D}}\left(f,\xi_i^{''}\right)$.

*Are loc următoarea*

***Definiție***. *Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție mărginită. Unicul număr $I$ care satisface inegalitățile $s_D(f)\le I\le S_D(f),\ \forall D\in\mathcal{D}_{[a,b]}$ se numeşte* ***integrala definită*** *(sau simplu* ***integrala****) lui $f$ de la $a$ la $b$ şi se notează*

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

***Interpretarea geometrică a sumelor Darboux***

*Vom considera* ***funcția continuă*** $f:[a,b]\to(0,\infty)$ *şi considerăm figura* $\Gamma_f$ *delimitată de graficul lui* $f$ *, axa* $Ox$ *şi dreptele verticale* $x=a, x=b$. *Ne punem problema dacă această figură are arie şi care este acest număr. Considerăm diviziunea* $D=(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)\in \mathcal{D}_{[a,b]}$.

*Dreptele verticale* $x=x_0, x=x_1, ..., x=x_n$ *determină o împărțire în benzi a figurii* $\Gamma_f$ *de arii* $A_1, A_2, ..., A_n$ *(Fig.13.a)).*

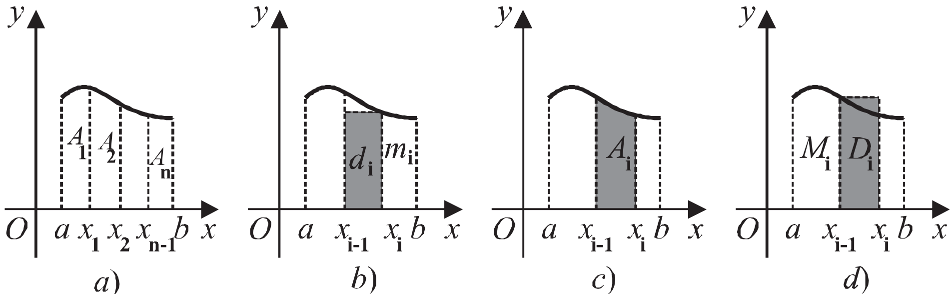



**Fig. 13**

*Funcția* $f$ *fiind continuă pe un compact îşi atinge marginile pe compact. Fie deci* $m_i=\inf f(x), M_i=\sup f(x), x\in[x_{i-1}, x_i], i=\overline{1,n}$. *Considerăm dreptunghiurile* $d_i, D_i$ *cu aceeaşi bază* $[x_{i-1}, x_i]$ *şi înălțimi* $m_i$ *şi respectiv* $M_i$ *pentru care* $\text{aria}(d_i)\le\text{aria}(A_i)\le\text{aria}(D_i), i=\overline{1,n}$ *(Fig.13. b), c), d)).*

*Însumând aceste inegalități avem:*

$$\sum_{i=1}^{n}\text{aria}(d_i)\le\text{aria}(\Gamma_f)\le\sum_{i=1}^{n}\text{aria}(D_i) \text{ sau}$$

$$s_D(f)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})\le aria(\Gamma_f)\le\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})=S_D(f),\ (1).$$

*Inegalitățile* $(1)$ *spun că un candidat pentru aria*$(\Gamma_f)$ *trebuie să fie mai mare decât orice sumă Darboux inferioară lui* $f$ *şi mai mică decât orice sumă Darboux superioară a lui* $f$. *Se poate demonstra că dacă* $f$ *este continuă pe* $[a,b]$, *atunci există un astfel de număr, care se numeşte aria lui* $\Gamma_f$ *şi se notează* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,

*numită integrala lui* $f$ *de la* $a$ *la* $b$. *Metoda aceasta de obținere a integralei definite prin încadrarea ei între sume Darboux inferioare şi superioare se numeşte metoda lui Darboux (1842-1917).*

***Criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann***

*Are loc următoarea*

> ***Teoremă***. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. *Următoarele afirmații sunt echivalente:*
> ***1)*** $f$ *este integrabilă Riemann.*
> ***2)*** *Pentru orice* $\varepsilon>0$, *există* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ *cu proprietatea că pentru orice diviziune* $D\in\mathcal{D}_{[a,b]}$ *cu* $\|D\|<\delta$ *să avem* $S_D(f)-s_D(f)<\varepsilon$.

***Aplicație. Utilizând acest criteriu să demonstrăm că orice funcție monotonă*** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ***este integrabilă Riemann.***

***Demonstrație. Presupunem că*** $f$ ***este crescătoare. Deci pentru*** $\forall x\in[a,b]$ ***avem*** $f(a)\le f(x)\le f(b)$.

***1) Dacă*** $f(a)=f(b)$, ***atunci*** $f$ ***este constantă. Am văzut că*** $f$ ***este integrabilă pe*** $[a,b]$.

***2)*** $f(a)<f(b)$. ***Fie*** $\varepsilon>0$, ***arbitrar,*** $D=(x_0,x_1,...,x_n)\in\mathcal{D}_{[a,b]}$ ***cu***

$\|D\|<\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. ***Atunci avem (*** $m_i=f(x_{i-1}),M_i=f(x_i),f$ ***fiind crescătoare):***

$$S_D(f)-s_D(f)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(x_i-x_{i-1})-$$

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)(x_i-x_{i-1})<\|D\|\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)<$$

$$<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot\left(f(b)-f(a)\right)=\varepsilon.$$

***Cum funcția*** $f$ ***verifică criteriul lui Darboux, deducem că ea este integrabilă Riemann.*** ■

***Să reținem că pentru o funcție continuă avem două modalități de abordare a integralei definite folosind sumarea:***

***1) utilizând sumele Darboux inferioare şi superioare;***

***2) utilizând sumele Riemann.***

***Deoarece*** $s_D(f)\le\sigma_D(f,\xi)\le S_D(f),\forall D\in\mathcal{D}_{[a,b]},\forall\xi$, ***atunci integrala definită a lui*** $f$ ***dată cu sumele Darboux există dacă şi numai dacă există integrala definită a lui*** $f$ ***dată cu sumele Riemann.***

* * * * *

## Calculul limitelor unor şiruri utilizând integrala definită

Utilizând integrabilitatea unei funcţii $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (funcţie monotonă, funcţie continuă) se poate calcula limita unui şir $(a_n)$ având termenul general $a_n$ definit printr-o sumă care se poate pune sub formă de sumă Riemann $\sigma_{D_n}\left(f,\xi_i^{(n)}\right)$.

### Probleme rezolvate

**Să se calculeze limitele următoarelor şiruri**

**1)** $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ ; **2)** $a_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2}$ ; **3)** $a_n=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}$ ; **4)** $a_n=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$ ;

**5)** $a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{9n^2}{9n^2+(3k-1)^2}$ ; **6)** $a_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$ ; **7)** $a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$ ;

**8)** $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k\left(\frac{n+1}{n}\right)}$ .

**R. 1)** Se scrie şirul sub forma: $a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ . Punând $\frac{k}{n}=x$ se ia funcţia

$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{1+x}$ (sugerată de forma termenului general al sumei). Aceasta este o funcţie continuă pe $[0,1]$ şi deci integrabilă. Se consideră şirul de diviziuni echidistante ale intervalului $[0,1]$, $D_n=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n}{n}=1\right)$ cu $\|D_n\|=\frac{1}{n}\xrightarrow{n}0$ şi punctele intermediare $\xi_1=\frac{1}{n}\in\left[0,\frac{1}{n}\right]$

(pentru $k=1$ în sumă avem $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$),

$\xi_2=\frac{2}{n}\in\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]$ (pentru $k=2$ în sumă se obţine $\frac{1}{1+\frac{2}{n}}$), …

$\xi_n=1\in\left[\frac{n-1}{n},1\right]$ (pentru $k=n$ în sumă rezultă $\frac{1}{1+\frac{n}{n}}$).

Atunci suma Riemann asociată lui $f$ relativ la $D_n$ şi sistemul de puncte intermediare este

$$a_n=\sigma_{D_n}(f,\xi_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\xrightarrow{n}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2 .$$

Deci $\lim_{n\to\infty}a_n=\ln 2$ .

**Observație**. Să remarcăm că termenul general al sumei este valoarea funcției în punctul intermediar $\frac{k}{n}$; factorul $\frac{1}{n}$ care apare în fața sumei este $(x_i - x_{i-1})$, același deoarece $D_n$ este diviziune echidistantă.

**2)** Se scrie $a_n$ sub forma: $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Se pune $\frac{k}{n} = x$ și deci se ia funcția

$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, care este integrabilă pe $[0,1]$ (fiind continuă). Se aleg, ca mai sus, $D_n \in D_{[0,1]},\ D_n = \left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,1\right)$ cu $\|D_n\| = \frac{1}{n}\xrightarrow{n}0$ precum și punctele intermediare $\xi_1 = 0 \in \left[0,\frac{1}{n}\right]$, $\xi_2 = \frac{1}{n}\in\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\ldots,\xi_n = \frac{n-1}{n}\in\left[\frac{n-1}{n},1\right]$ ($\xi_k$ sunt extremitățile din stânga pentru fiecare interval). Acum $a_n = \sigma_{D_n}(f,\xi_k)\xrightarrow{n}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

**3)** Se scrie $a_n$ sub forma: $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$ și se ia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$. Găsim că $\lim_{n\to\infty} = \int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

**4)** Se ia $f:[0,\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$ și $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 2$.

**5)** Se aduce $a_n$ la forma $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{3k-1}{3n}\right)^2}$. Se ia $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $D_n = \left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,1\right)\in D_{[0,1]}$ cu $\|D_n\| = \frac{1}{n}\xrightarrow{n}0$ și se aleg $\xi_1 = \frac{2}{3n}\in\left[0,\frac{1}{n}\right]$, (pentru $k=1$ în sumă), $\xi_2 = \frac{5}{3n}\in\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]$ (pentru $k=2$ în sumă), …, $\xi_n = \frac{3n-1}{3n}\in\left[\frac{n-1}{n},1\right]$ (pentru $k=n$ în sumă). Avem: $a_n = \sigma_{D_n}(f,\xi_k)\xrightarrow{n}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

**6)** Avem: $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Se ia $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{1-x^2}$ și $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

**7)** Se prelucrează $a_n$ astfel $a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$. De aici $\ln a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$. Se ia $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(1+x)$ şi $\lim_{n\to\infty}\ln a_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \ln\frac{4}{e}$

sau $\ln\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \ln\frac{4}{e}$. De aici $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{e}$.

**8)** Avem $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}}$ pentru care se ia $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{1+x}$,

$D_n = \left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n}{n}\right), \xi_{k+1} = \frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$, $k=\overline{0,n-1}$, când

$$\sigma_{D_n}(f,\xi_k) = \frac{1}{n}-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}} \xrightarrow{n} \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2.$$

## Probleme propuse

**1. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$. Pentru diviziunea $D=\left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right)$ şi punctele intermediare $\xi=\left(\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8}\right)$ calculaţi suma Riemann $\sigma_D(f,\xi)$. Interpretare geometrică.**

**2. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=2x$, diviziunea $D=\left(0,\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right)$ şi punctele intermediare $\xi=\left(\frac{1}{16},\frac{3}{16},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right)$.**

**1) Să se calculeze lungimile intervalelor diviziunii $D$ şi precizaţi $\|D\|$.**

**2) Să se determine $m_1,m_2,m_3,m_4,m_5$ şi $M_1,M_2,M_3,M_4,M_5$.**

**3) Să se calculeze $s_D(f)$ şi $S_D(f)$.**

**4) Să se calculeze $f(\xi_1),f(\xi_2),f(\xi_3),f(\xi_4),f(\xi_5)$ şi apoi $\sigma_D(f,\xi)$ şi verificaţi inegalităţile $s_D(f)\le\sigma_D(f,\xi)\le S_D(f)$.**

**5) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.**

**3. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $D\in\mathcal{D}_{[0,1]}$. Explicaţi de ce următoarele afirmaţii sunt false:**

**1) $s_D(f)=5, S_D(f)=1$; 2) $s_D(f)=3, S_D(f)=5$ şi $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$;**

**3) $s_D(f)=2, S_D(f)=3$ şi $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=4$.**

**4.** Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Considerăm $D=(x_0,x_1,...,x_n)\in\mathcal{D}_{[a,b]}$.

1) Să se arate că $I-s_D(f)\le S_D(f)-s_D(f)$. Diferența $I-s_D(f)$ se numeşte **eroare** în utilizarea lui $s_D(f)$ în aproximarea lui $I$.

2) Să se arate că $S_D(f)-I\le S_D(f)-s_D(f)$. Diferența $S_D(f)-I$ se numeşte **eroare** în utilizarea lui $S_D(f)$ în aproximarea lui $I$.

3) Dacă $D\in D_{[a,b]}$ este o diviziune $n-$ echidistantă, atunci arătați că pentru $f$ crescătoare (sau descrescătoare) pe $[a,b]$ au loc inegalitățile:

$I-s_D(f)\le|f(b)-f(a)|\cdot\|D\|, S_D(f)-I\le|f(b)-f(a)|\cdot\|D\|$.

**5*.** Definiția dată cu sume Darboux pentru integrala definită poate fi aplicată și pentru funcții cu un număr finit de discontinuități. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă, iar $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ diferă de $f$ într-un număr finit de puncte. Atunci $g$ este integrabilă pe $[a,b]$ și $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Fie $g(x)=\begin{cases}2, x\in[0,4]-\{3\}\\ 7, x=3\end{cases}$, iar $f(x)=2,\forall x\in[0,4]$. Avem $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=8$. Arătați că $\int_0^4 g(x)=8$, demonstrând că 8 este unicul număr care satisface inegalitățile $s_D(f)\le 8\le S_D(f),\forall D\in\mathcal{D}_{[0,4]}$.

**6*.** Fie $f:[2,10]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}7, x\in\mathbb{Q}\\ 4, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$.

1) Să se arate că $\forall D\in\mathcal{D}_{[2,10]}, s_D(f)\le 40\le S_D(f)$.

2) De ce nu putem conchide că $\int_2^{10} f(x)\mathrm{d}x=40$ ?

**7.** Să se calculeze limitele şirurilor cu termenul general $a_n$:

1) $a_n=\frac{1}{n^6}\sum_{k=1}^n k^5$ ;2) $a_n=\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^n\left(\frac{2k-1}{2}\right)^p, p>0$ ;3) $a_n=n\sum_{k=1}^n\frac{1}{3n^2+k^2}$ ;4) $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{k}}$ ;

5) $a_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\sqrt{k}$ ; 6) $a_n=\sum_{k=0}^{n-1}k^r(k+1)^s/n^{r+s+1}, r,s\in\mathbb{N}^*$ ;

7) $a_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\sqrt{(n+k)^2+(n+k)}$ ; 8) $a_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$ ; 9) $a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{n}{n+k}\right)^p, p\in\mathbb{N}^*$ ;

10) $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\sum_{k=1}^n\sqrt[3]{k}$ ; 11) $a_n=\frac{1}{\left(\sqrt{n(n+1)}\right)^3}\sum_{k=1}^n k\sqrt{k(k+1)}$ ; 12) $a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{2k-1}{\sqrt{(2k-1)^2+4n^2}}$ .

**8. Fie şirul $(a_n), a_1 \in (0,1), a_{n+1} = \sqrt{1+na_n}, n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, unde $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2 + ka_n}$.**

## 2.4. PROPRIETĂȚI ALE INTEGRALEI DEFINITE. INTEGRABILITATEA FUNCȚIILOR CONTINUE

În acest paragraf ne ocupăm de funcțiile continue definite pe un interval $[a,b]$, $a < b$. Reamintim că dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue, atunci

1) $\alpha f + \beta g$ este o funcție continuă, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ; $f \cdot g$ este continuă pe $[a,b]$;

2) $\dfrac{f}{g}$ este continuă pe $[a,b] - \{x | g(x) = 0\}$ ;

3) $f^g$ este continuă pe $[a,b] \cap \{x | f(x) > 0\}$ ;

4) $|f|$, $\min(f,g), \max(f,g)$ sunt continue.

Pentru orice funcție continuă $f$ cele două integrale, în sensul lui Newton şi în sensul lui Riemann sunt egale.

De asemenea, să reținem că dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}, f$ continuă şi $g(x) = f(x), \forall x \in [a,b] - A$, unde $A$ este mulțime finită, atunci şi $g$ este integrabilă şi mai mult $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$. Altfel spus, modificând o funcție continuă într-un număr finit de puncte (ale lui $A$), funcția obținută este de asemenea integrabilă şi mai mult integralele definite ale celor două funcții sunt egale.

**Exemplu.** **Fie funcția $g : [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = x, x \in [0,1] - \{0,1\}, g(x) = 3, x \in \{0,1\}$. Evident $g$ este continuă pe $[0,1] - \{0,1\}$. Considerăm funcția $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x$, care este o funcție continuă pentru care $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}$. Cum $g$ diferă de $f$ într-un număr finit de puncte (două puncte) deducem că şi $g$ este integrabilă şi mai mult $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$.**

În continuare prezentăm principalele proprietăţi ale integralei definite. De remarcat că **aceste proprietăţi au loc şi pentru funcţiile integrabile. În acest caz în demonstraţie utilizăm operaţiile cu şiruri convergente**. Noi vom utiliza funcţii continue, dar proprietăţile se verifică în acelaşi mod şi pentru funcţiile integrabile care admit primitive.

**P1 (Proprietatea de linearitate)**. Dacă $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt două funcţii continue şi $\lambda\in\mathbb{R}$, atunci:

**1)** $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

---

**Integrala sumei este egală cu suma integralelor.**

---

**2)** $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

---

**Constanta multiplicativă iese în faţa integralei.**

**Demonstraţie.*** **1)** Cum $f, g$ sunt continue, ele admit primitive. Fie $F, G:[a,b]\to\mathbb{R}$ primitive pentru $f$ şi respectiv $g$ pe $[a,b]$. În acest caz $F+G$ este o primitivă a lui $f+g$ pe $[a,b]$ şi conform formulei Leibniz – Newton avem :

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=(F+G)(x)\Big|_a^b=F(b)+G(b)-F(a)-G(a)=$$

$$=F(b)-F(a)+G(b)-G(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

**2)** Se procedează analog. ■

**Observaţii**. **1)** Egalitatea **1)** din proprietate ne spune că **integrala este aditivă**, în raport cu integrandul, iar egalitatea **2)** spune că **integrala este omogenă**. **Integrala este liniară dacă este aditivă şi omogenă**.
**2)** Proprietatea se poate scrie sub forma unei singure relaţii astfel :

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

---

*= facultativ

Dacă $\alpha=1, \beta=-1$, atunci egalitatea se scrie

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$ (**Integrala diferenței este egală cu diferența integralelor**).

**3)** Se demonstrează inductiv după $n\in\mathbb{N}^*$ că

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n \alpha_i \int_a^b f_i(x)\mathrm{d}x,\ f_i:[a,b]\to\mathbb{R}$$ funcții continue.

**4)** Refaceți demonstrația acestei proprietăți pentru funcțiile $f, g$ integrabile în sensul Riemann.

**Exemple. 1. Să se calculeze integrala** $I=\int_1^2 \left(3x^2-\frac{1}{x}+4\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$.

**R. Conform proprietății enunțate putem scrie**

$$I=3\int_1^2 x^2\mathrm{d}x-\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}+4\int_1^2 \sqrt[3]{x}\mathrm{d}x+\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=x^3\Big|_1^2-\ln x\Big|_1^2+3x\sqrt[3]{x}\Big|_1^2+\operatorname{arctg} x\Big|_1^2=$$

$$=4+6\sqrt[3]{2}-\ln 2+\operatorname{arctg} 2-\frac{\pi}{4}.$$

**2. Să se arate că** $\int_1^2 \operatorname{arctg} x\mathrm{d}x+\int_1^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ **și** $\int_0^{2007} \frac{dx}{1+3^x}+\int_0^{2007} \frac{dx}{1+3^{-x}}=2007$.

**R. Se știe că** $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}, \forall x>0$. **Deci membrul stâng devine**

$$\int_1^2 \left(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{\pi}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}x\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}.$$

**3. Dacă** $\alpha\neq\beta$ **și** $\int_\alpha^\beta \left(\int_\alpha^\beta (x+y)dy\right)dx=\int_\alpha^\beta \left(\int_\alpha^\beta (x+y)dx\right)dy$, **atunci** $x=y$.

**P2 (Proprietatea de aditivitate la interval).** Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ funcție continuă și $c\in(a,b)$.

Atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ (**Relația lui Chasles**).

---

$f$ este integrabilă pe $[a,b]\Leftrightarrow f$ este integrabilă pe $[a,c]$ și pe $[c,b]$ și $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

**Demonstrație**.* Fie $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui $f$ pe $[a,b]$. Membrul drept al relației este egal cu $F(c)-F(a)+F(b)-F(c)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. ■

**Interpretare geometrică**. Pentru o funcție continuă, nenegativă $f:[a,b]\to[0,\infty]$ această teoremă este uşor de înțeles în termeni de arie. În Fig.14, aria părții I este egală cu $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$, iar aria părții II este egală cu $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$. Aria întregii regiuni haşurate este egală cu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

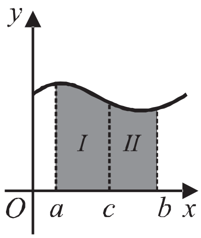



**Fig. 14**

Teorema afirmă că :

$\text{aria}(I)+\text{aria}(II)=\text{aria (regiune haşurată)}$.

**Probleme rezolvate**

**1. Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, unde $f(x)=\begin{cases} x+1, x\in[-1,0) \\ 1+\sin x, x\in[0,1]\end{cases}$.**

**R.** Observăm că $f$ este continuă pe $[-1,1]-\{0\}$. Din $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}(x+1)=1$, $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}(1+\sin x)=1=f(0)$ rezultă că $f$ este continuă şi în $x=0$. Deci, $f$ este continuă pe $[-1,1]$. Atunci

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}(x+1)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(1+\sin x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+2-\cos 1=$$
$$=\frac{5}{2}-\cos 1.$$

**2. Să se calculeze $\int_{-2}^{2}\left|x^2-1\right|\mathrm{d}x$.**

**R.** Funcția $f(x)=\left|x^2-1\right|, x\in[-2,2]$ este continuă şi avem :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, x\in[-2,-1]\cup[1,2] \\ 1-x^2, x\in(-1,1)\end{cases}.$$

Ținând seamă de proprietatea de aditivitate a integralei avem :

$$\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}\left(x^2-1\right)+\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x+$$
$$+\int_{1}^{2}\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}+2+\frac{4}{3}=\frac{14}{3}.$$

**3. Să se determine $I(a)=\int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1}, a\in\mathbb{R}$.**

**R.** Cum $x\in[1,3]$ pentru explicitarea modulului $|x-a|, a\in\mathbb{R}$, analizăm cazurile (după poziția lui $a$ față de valorile 1 şi 3) :

$1^0)$ $a\le 1$. În acest caz $|x-a|=x-a$, deoarece $x\ge 1$ şi deci integrala devine

$$I(a)=\int_1^3 \frac{dx}{x-a+1}=\ln|x+1-a|\Big|_1^3=\ln\frac{4-a}{2-a}.$$

$2^0)$ $1<a<3$. În acest caz $x\in[1,3]\Rightarrow$ ($1\le x\le a$ sau $a\le x\le 3$), adică

$$|x-a|=\begin{cases}-x+a, \text{ dacă } x\in[1,a]\\ x-a, \text{ dacă } x\in(a,3]\end{cases} \text{ şi deci } I(a)=\int_1^a \frac{dx}{-x+a+1}+\int_a^3 \frac{dx}{x-a+1}=$$

$$=-\ln|x-a-1|\Big|_1^a+\ln|x-a+1|\Big|_a^3=\ln a(4-a).$$

$3^0)$ $3\le a$. În acest caz, din $x\in[1,3]$ rezultă $|x-a|=-x+a$ şi deci

$$I(a)=\int_1^3 \frac{dx}{-x+a+1}=-\ln|x-a-1|\Big|_1^3=\ln\frac{a}{a-2}. \text{ Deci, } I(a)=\begin{cases}\ln\frac{4-a}{2-a}, a\le 1\\ \ln a(4-a), a\in(1,3)\\ \ln\frac{a}{a-2}, a\ge 3\end{cases}.$$

**Observații. 1)** Această proprietate se aplică şi la funcțiile care sunt continue pe porțiuni. Mai precis are loc următoarea

**Definiție.** Funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se numeşte **continuă pe porțiuni** dacă este continuă sau dacă are doar un număr finit de puncte de discontinuitate $x_1, x_2, ..., x_p$ în care $f$ are limite laterale finite.

Graficul unei funcții continue pe porțiuni este ilustrat în Fig.15 (a) pentru funcție continuă, b) pentru funcție discontinuă).

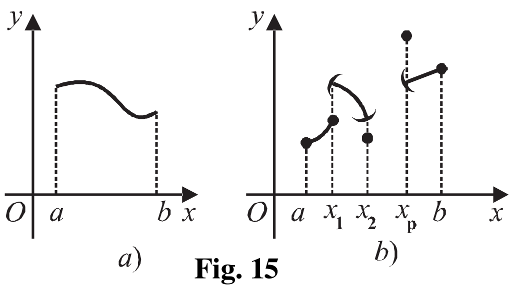



**Fig. 15**

Pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i], i=\overline{1, p+1}, x_0=a, x_{p+1}=b$ se asociază funcţiei $f$, o funcţie $f_{i-1}:[x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$ definită prin $f_{i-1}(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x \searrow x_{i-1}} f(x), x=x_{i-1} \\ f(x), x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \lim\limits_{x \nearrow x_i} f(x), x=x_i \end{cases}$.

Această construcţie se face dacă $f$ este definită prin diferite forme pe intervale deschise sau semideschise. Evident $f_{i-1}$ este continuă.

Se demonstrează că $f_{i-1}$ este integrabilă pe $[x_{i-1}, x_i]$ şi în plus

$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f_{i-1}(x)\mathrm{d}x, i=\overline{1, p+1}$ (Construiţi şirurile de sume Riemann pentru $f$ şi $f_{i-1}$).

Cum $f$ este integrabilă pe $[a, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_p, b]$ se deduce conform proprietăţii $P_2$ că $f$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi în plus

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x+...+\int\limits_{x_p}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

**2)** Dacă $f$ este continuă pe $[a,b)$, iar $F$ este o primitivă a lui $f$ pe $[a,b)$, atunci are loc de asemenea formula Leibniz – Newton

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{b-0}=F(b-0)-F(a), \text{ unde } F(b-0)=\lim_{x \nearrow b} F(x).$$

Analog, pentru $f$ continuă pe $(a,b]$,

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a+0), \text{ unde } F(a+0)=\lim_{x \searrow a} F(x).$$

## Probleme rezolvate

**1. Fie $f:[-1,1] \to \mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} 1+e^x, x \in [-1,0] \\ x+1, x \in (0,1] \end{cases}$.**

**R.** Observăm că $f$ este discontinuă în $x=0$ ($l_s(0)=2 \neq l_d(0)=1, f(0)=2 \Rightarrow x=0$ punct de discontinuitate de speţa întâi). Funcţia $f$ restricţionată la $[-1,0]$ este integrabilă (fiind continuă) şi $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x=2-\frac{1}{e}$. Pentru a arăta că $f$ este integrabilă pe $[0,1]$ se consideră funcţia

$g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=x+1$. Deoarece $g$ este continuă avem $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}$. Cum $f(x)=g(x),\ \forall x\in(0,1]$ se deduce $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$.

Prin urmare $f$ este integrabilă pe $[-1,0]$ şi pe $[0,1]$. Deci $f$ este integrabilă pe $[-1,1]$ şi are loc relaţia lui Chasles

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\left(1+e^x\right)\mathrm{d}x+\int_0^1(x+1)\mathrm{d}x=2-\frac{1}{e}+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}-\frac{1}{e}.$$

**2. Să se calculeze integrala definită:**

**a)** $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ **, unde** $f(x)=\left[2^2x\right],\ x\in[0,1]$ **; b)** $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\mathrm{d}x$ **, unde** $f(x)=x-[x]$ **.**

**R.** a) Se explicitează funcţia şi se obţine:

$$f(x)=\begin{cases}0,\ 0\le 4x<1,\ 0\le x<\frac{1}{4}\\ 1,\ 1\le 4x<2,\ \frac{1}{4}\le x<\frac{2}{4}\\ 2,\ 2\le 4x<3,\ \frac{2}{4}\le x<\frac{3}{4}\\ 3,\ 3\le 4x<4,\ \frac{3}{4}\le x<\frac{4}{4}\\ 4,\ x=1\end{cases}.$$

Fie funcţiile

$g_1:\left[0,\frac{1}{4}\right]\to\mathbb{R},\ g_1(x)=0,\ g_2:\left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right]\to\mathbb{R},\ g_2(x)=1,$ ,

$g_3:\left[\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right]\to\mathbb{R},\ g_3(x)=2$ , $g_4:\left[\frac{3}{4},1\right]\to\mathbb{R},\ g_4(x)=3$.

Aceste funcţii fiind constante sunt continue.

Pe de altă parte $f$ restricţionată la intervalele $\left[0,\frac{1}{4}\right],\left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right],\left[\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right],\left[\frac{3}{4},1\right]$ coincide cu $g_1,g_2,g_3$ şi respectiv $g_4$ în toate punctele cu excepţia unui punct din fiecare interval. Deci

$$\int_0^{\frac{1}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{4}} g_1(x)\mathrm{d}x=0,\quad \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}} g_2(x)\mathrm{d}x=x\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}}=\frac{1}{4},$$

$$\int_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} g_3(x)\mathrm{d}x=2x\Big|_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2},\quad \int_{\frac{3}{4}}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{3}{4}}^{1} g_4(x)\mathrm{d}x=3x\Big|_{\frac{3}{4}}^{1}=\frac{3}{4}.$$

Acum $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{4}}0\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}}2\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{4}}^{1}3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$.

b)Explicitând funcţia avem $\left(3<2\sqrt{3}<4\right)$

$$f(x)=\begin{cases} x,\ x\in[0,1) \\ x-1,\ x\in[1,2) \\ x-2,\ x\in[2,3) \\ x-3,\ x\in\left[3,2\sqrt{3}\right) \end{cases}.$$

Ca mai sus avem

$$\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x+\int_2^3 (x-2)\mathrm{d}x+\int_3^{2\sqrt{3}} (x-3)\mathrm{d}x= =6\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Următoarea proprietate spune că într-o inegalitate de funcții integrabile se poate integra. Mai precis avem :

**P3 (Integrarea în inegalități – Proprietatea de ordine).**

**1) (Inegalitatea fundamentală pentru integrale)** Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă, $f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$.

Atunci : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$.

---

**Consecință** : $f\geq 0$ şi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow f=0$.

---

**2)** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f$ continuă, $f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$ şi $[c,d]\subset[a,b], c<d$, atunci : $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

---

**Proprietatea de ereditate** : $f$ integrabilă pe $[a,b]\Rightarrow f$ integrabilă pe orice compact $[c,d]$ inclus în $[a,b]$.

---

**3) (Monotonia integralei)** Fie $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții continue astfel încât $f(x)\leq g(x), \forall x\in[a,b]$. Atunci : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

**Consecință (Funcție mărginită).** Dacă $f$ continuă şi $m\leq f(x)\leq M$, $\forall x\in[a,b]$, atunci $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq M(b-a)$.

---

**Inegalitățile între funcții se integrează termen cu termen.**

**Demonstrație.*** **1)** Fie $F$ o primitivă a lui $f$ pe $[a,b]$. Din $F'(x)=f(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$ deducem că $F$ este crescătoare. Deci $a<b$ implică $F(a)\leq F(b)$ şi deci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\geq 0$.

**Consecință**. Presupunem că există $x_0\in[a,b]$ cu $f(x_0)>0$. Atunci se ştie că există o vecinătate a lui $x_0, V_\varepsilon=(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon), \varepsilon>0, V_\varepsilon\subset[a,b]$ pe care $f>0$. Deci $\int_a^b f=\int_a^{x_0-\varepsilon} f+\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f+\int_{x_0+\varepsilon}^{b} f>0$. Prima şi a treia integrală sunt $\geq 0$, iar a doua integrală este $>0$, deoarece este o arie! Contradicție.

**Observații. 1)** Dacă $f$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi $f\geq 0$, atunci $\forall(D_n)$ un şir de diviziuni, $D_n\in\mathcal{D}_{[a,b]}$ cu şirul $(\|D_n\|)\to 0$ şi $\forall\xi^{(n)}$ sistemul de puncte intermediare pentru $D_n$ avem şirul de sume Riemann $\left(\sigma_{D_n}\left(f,\xi^{(n)}\right)\right)\to\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ şi în plus $\sigma_{D_n}\left(f,\xi^{(n)}\right)\geq 0, \forall n$. Deci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$.

**2)** Dacă $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$ **nu rezultă** $f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$, adică reciproca lui **1)** din proprietate este falsă.

De exemplu $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x$, pentru care $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$, dar pe $[0,1]$ $f(x)\leq 0, \forall x\in[0,1]$! (Fig.16)

**3)** Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă şi $f\leq 0$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq 0$.

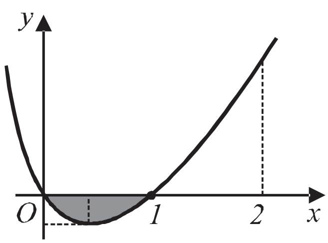



**Fig. 16**

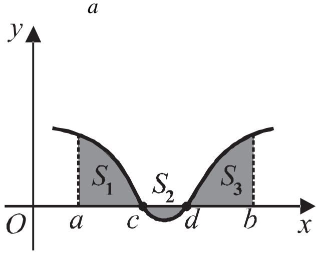



**Fig. 17**

**4)** Dacă $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\geq 0, \forall x\neq 0$, atunci $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-2}^{2}=-1$. De unde provine greşeala?

**5) Interpretarea geometrică a integralei definite**. Integrala definită este egală cu suma algebrică a ariilor trapezelor curbilinii delimitate de graficul funcției, axa $Ox$ şi dreptele verticale $x=a, x=b$, unde $a,b$ sunt limitele de integrare.

Din acest motiv aria trapezului curbiliniu aşezat deasupra axei $Ox$ se ia cu semnul plus, iar aria trapezului curbiliniu situat sub axa $Ox$ se ia cu semnul minus.

În cazul funcției $f$ cu graficul din Fig.17, avem:

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx=S_1-S_2+S_3$, deoarece $f\leq 0$ pe $[c,d]$ şi $S_2=\displaystyle\int_c^d f(x)dx$, unde $S_1,-S_2,S_3$ sunt ariile celor trei zone haşurate.

De aceea pentru calculul ariei $\Gamma_f$ se utilizează formula $\text{aria}(\Gamma_f)=\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$.

În cazul particular al funcției continue $f:[-a,a]\to[0,\infty)$ şi în plus funcție pară $(f(-x)=f(x), \forall x\in[-a,a])$ aria delimitată de graficul lui $f$, axa $Ox$ şi dreptele $x=-a, x=a$ (Fig.18 a)) este egală cu aria $(\Gamma_f)=\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$ (la nivel intuitiv, trapezele curbilinii I, II prin suprapunere după $Oy$ coincid şi deci trebuie sa aibă arii egale).

Dacă $f$ este impară $(f(-x)=-f(x), \forall x\in[-a,a])$, atunci

$$\text{aria}(\Gamma_f)=\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=-\text{aria}(I)+\text{aria}(II) \text{ Fig. 18 b).}$$

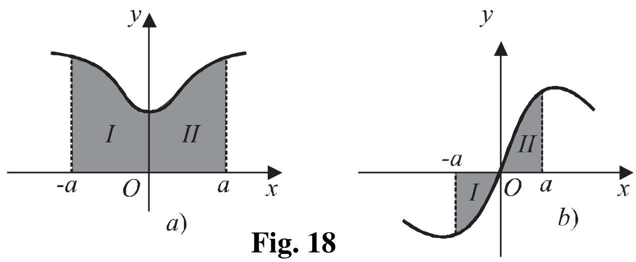



**Fig. 18**

Cum prin rotirea lui $I$ în jurul lui $O$ în sens orar, acesta se suprapune peste $II$ deducem $\text{aria}(I) = \text{aria}(II)$ şi deci $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

În concluzie, $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, & f \text{ pară} \\ 0, & f \text{ impară} \end{cases}$.

Demonstraţia acestei egalităţi se va face la metoda substituţiei.

Dacă de exemplu ni se cere să calculăm $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2007} x\,\mathrm{d}x$, am constata după mai multe calcule că rezultatul este egal cu zero. Acest lucru rezultă uşor observând că funcţia integrand $f(x) = \sin^{2007} x$ este impară, iar intervalul de integrare este simetric în zero.

**2)** Aplicăm proprietatea de aditivitate şi avem:

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{d} f(x)\mathrm{d}x + \int_{d}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Dar primul şi ultimul termen sunt pozitivi (din **1)**) şi deci $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \geq \int_{c}^{d} f(x)\mathrm{d}x$.

**Observaţii. 1)** Geometric aceasta înseamnă că trapezul curbiliniu de bază $[c,d]$ (zona haşurată) este inclus în trapezul curbiliniu de bază $[a,b]$ (Fig. 19), ceea ce

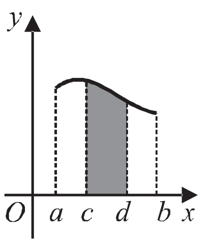



**Fig. 19**

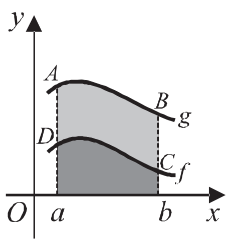
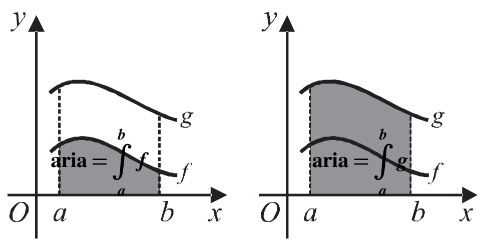



**Fig. 20**




$$\int_{a}^{b} f \leq \int_{a}^{b} g$$

atrage aria primului trapez ($\int_{c}^{d} f(x)\mathrm{d}x$) este cel mult aria celui de-al doilea trapez

($\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$).

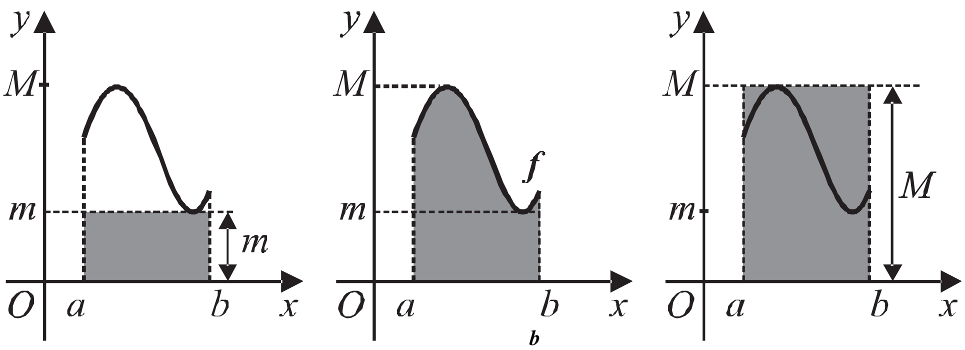
**2)** Dacă $f:[a,b]\to[0,\infty)$ este continuă şi există $x_0\in[a,b]$ cu $f(x_0)>0$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

Într-adevăr, cum $f$ este continuă în $x_0$ şi $f(x_0)>0$ atunci se ştie că există o vecinătate a lui $x_0$ în care $f$ este strict pozitivă. Fie $[\alpha,\beta]$ inclus în această vecinătate. Deci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x+\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x+\int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x$.

Prima şi a treia integrală sunt numere pozitive. Integrala din mijloc este număr strict pozitiv (fiind aria unei regiuni din plan).

**3)** Fie $h=g-f\geq 0$, funcție continuă. Conform cu **1)** rezultă $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x\geq 0$ sau ținând seama de **P1** avem $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$, adică (Fig. 20) $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\geq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Pentru a obține rezultatul din consecință se integrează în inegalitățile $m\leq f(x)\leq M$ şi avem $\int_a^b m\,\mathrm{d}x\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b M\,\mathrm{d}x$ sau $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq M(b-a)$. ■

**Observații.** **1)** Dacă $f\geq 0$, atunci rezultatul din consecință afirmă că aria subgraficului lui $f$ este cuprinsă între ariile a două dreptunghiuri de aceeaşi bază $[a,b]$ şi înălțimi $m$ şi respectiv $M$ ca în Fig. 21.




$$\textit{aria haşurată} = m(b-a) \le \textit{aria haşurată} = \int_a^b f \le \textit{aria haşurată} = M(b-a)$$

**Fig.21**

**2)** În plus, această proprietate ne permite să aproximăm $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ în sensul că dacă $g(x) \le f(x) \le h(x), \forall x \in [a,b]$, atunci $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b h(x)\mathrm{d}x$. Dacă integralele $g$ şi $h$ se pot calcula, ele sunt „margini" pentru $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Am văzut că funcția continuă $f(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$, fiind continuă admite primitive. Dar, nu avem o primitivă exprimabilă prin funcții elementare. Ne propunem să aproximăm $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$. Au loc inegalitățile $e^{-x} \le e^{-x^2} \le 1, \forall x \in [0,1]$. De aici $\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x \le \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x \le \int_0^1 \mathrm{d}x$ sau $1 - \frac{1}{e} \le \int_0^1 e^{-x^2} \le 1$. De asemenea, utilizând **2)** putem aproxima funcții. De exemplu, din $0 < \frac{1}{t} \le \frac{1}{\sqrt{t}}, t \ge 1$ deducem $0 \le \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \le \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{t}}}$ sau $0 \le \ln x \le 2\left(\sqrt{x} - 1\right)$. Din această inegalitate, via „criteriul cleştelui", deducem $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

## Probleme rezolvate

**1. Să se arate că: 1) $\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+3}\mathrm{d}x > 0$ ; 2) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\sin^5 x - 5}\mathrm{d}x < 0$ .**

**R.** 1)Pentru $x\in[0,1]$ avem $\frac{x^3+1}{x^2+3}>0$. Deci $\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+3}\mathrm{d}x>0$.

2) Funcția integrand pe $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ ia valori negative (strict).

**2. Să se demonstreze inegalitățile de mai jos, utilizând proprietatea de ordine a integralei:**

**1) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\mathrm{d}x \ge \int_0^{\pi/2} \sin^6 x\mathrm{d}x$ ; 2) $\frac{1}{3}\le \int_4^7 \frac{x-3}{x+5}\mathrm{d}x \le 1$ ; 3) $2\sqrt{2}\le \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+4x+5}\mathrm{d}x \le 2\sqrt{10}$ ;**

**4) $\frac{2}{e}\le \int_{-1}^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x \le 2$ ; 5) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}dx < \frac{\pi+2}{4}$ .**

**R.** 1) Pentru $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ avem $0\le \sin x\le 1$. De aici prin înmulțire cu $\sin^5 x\ge 0$ se deduce $\sin^6 x\le \sin^5 x, \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Această ultimă inegaliate integrată pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ dă inegalitatea dorită.

2) Funcția $f:[4,7]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x-3}{x+5}=1-\frac{8}{x+5}$ este strict crescătoare. Din $4\le x\le 7$ rezultă $f(4)=\frac{1}{9}\le f(x)\le f(7)=\frac{1}{3}$. Se integrează pe $[4,7]$ această dublă inegalitate și rezultă afirmația.

3) Funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ are $f'(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}>0, \forall x\in[-1,1]$ și deci $f$ este strict crescătoare. Din $-1\le x\le 1$ rezultă $f(-1)\le f(x)\le f(1)$, iar de aici prin integrare se obține inegalitatea dorită.

4) Se ia $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-x^2}$. Realizând tabelul de variație pentru $f$ găsim că $\frac{1}{e}\le f(x)\le 1, \forall x\in[-1,1]$, iar de aici prin integrare se deduc inegalitățile propuse.

5) Se integrează pe $[0,\pi/2]$, $\sqrt{\sin x}<(1+\sin x)/2$.

**3. Să se demonstreze inegalitățile: 1) $\frac{1}{2}<\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2n}}}<\frac{\pi}{6}, n\in\mathbb{N}^*$ ;**

**2) $\ln 2<\int_0^1 \frac{2x}{1+x^{13}}\mathrm{d}x<1$ ; 3) $\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x\ge\frac{4}{3}$ ; 4) $\int_0^{2007}\left(e^{-\sin^2 x}+e^{-\cos^2 x}\right)dx\ge 2007$ .**

**R.** 1) Se integrează pe $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ inegalitatea dublă $1<\frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

2) Inegalitatea $\frac{2x}{1+x^2}<\frac{2x}{1+x^{13}}<2x, x\in(0,1)$ se integrează pe $[0,1]$.

3) Se ştie că $e^x\geq x+1, \forall x\neq 0$. Atunci $e^{x^2}\geq x^2+1$. 4) $e^x \geq x+1, x\neq 0$.

**4. Să se arate că: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1[nx]dx=\frac{1}{2}$.**

**R.** 1) Au loc inegalităţile $0<\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\leq\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}, n\leq x\leq n+1$, care prin integrare dau $0<\int_n^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Trecând la limită după $n$, via „criteriul cleştelui”, se obţine afirmaţia dorită.

2) Ţinem seama de definiţia părţii întregi şi avem: $(nx-1)<[nx]\leq nx$ şi deci $\int_0^1(nx-1)dx\leq\int_0^1[nx]dx\leq\int_0^1 nxdx$ sau $\frac{n}{2}-1\leq\int_0^1[nx]dx\leq\frac{n}{2}$. Acum, via „criteriul cleştelui”, se obţine limita dorită.

**5. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, unde $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+3x+2}dx, n\in\mathbb{N}^*$.**

**Să se arate că: a) $I_{n+1}\leq I_n, \forall n\geq 1$; b) $I_{n+2}+3I_{n+1}+2I_n=\frac{1}{n+1}, n\in\mathbb{N}^*$;**

**c) $\frac{1}{6(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{6(n-1)}, n\geq 2$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{6}$.**

**R.** a) Din $0\leq x\leq 1$ rezultă $x^{n+1}\leq x^n$, iar de aici $\frac{x^{n+1}}{x^2+3x+2}\leq\frac{x^n}{x^2+3x+2}$ sau prin integrare pe $[0,1]$ obţinem $I_{n+1}\leq I_n$. Deci şirul $(I_n)$ este descrescător.

b) Avem $I_{n+2}+3I_{n+1}+2I_n=\int_0^1\frac{x^n(x^2+3x+2)}{x^2+3x+2}dx=\int_0^1 x^n dx=\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{1}{n+1}$.

c) Din b), ţinând seamă de a) obţinem $\frac{1}{n+1}=I_{n+2}+3I_{n+1}+2I_n\leq I_n+3I_n+2I_n=6I_n$, adică $I_n\geq\frac{1}{6(n+1)}$. Analog se obţine şi cealaltă inegalitate.

d) În c) înmulţim cu $n$ şi aplicăm criteriul „cleştelui”.

**6. Fie $f:[0,1]\to[1,2]$ o funcţie continuă cu proprietatea $\int_0^1 f(x)dx\geq 1$. Să se arate că $\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\leq 1$.**

**R.** Cum $1\leq f(x)\leq 2, x\in[0,1]$ rezultă $[f(x)-1][f(x)-2]\leq 0$, iar de aici

$\frac{[f(x)-1][f(x)-2]}{f(x)} = f(x)-3+\frac{2}{f(x)} \le 0,\ x\in[0,1]$. De aici prin integrare avem:

$$2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \le 3-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \le 3-1=2 .$$

Cum $|x_1+x_2+...+x_n| \le |x_1|+|x_2|+...+|x_n|$ (modulul sumei este mai mic sau egal cu suma modulelor), o proprietate similară are loc şi pentru integrale. Mai precis

**P4.** Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x .$$

**Modulul integralei este cel mult integrala modulului.**

**Demonstraţie.*** Ştim că dacă $f$ este continuă, atunci şi $|f|$ este continuă şi în plus au loc inegalităţile $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,\ \forall x\in[a,b]$. Integrând aceste inegalităţi pe $[a,b]$ şi ţinând seamă de **P3** se deduce

$$-\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f| \text{ sau } \left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f| . \ \blacksquare$$

**P5 (Inegalitatea mediei).** Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă, iar $m \le f(x) \le M,\ \forall x\in[a,b]$, atunci

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a) .$$

**Demonstraţie.*** Ştim că dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci ea este mărginită (Weierstrass). Deci există numerele $m, M\in\mathbb{R}$ pentru care $m \le f(x) \le M,\ \forall x\in[a,b]$. Integrând în aceste inegalităţi între $a$ şi $b$ rezultă inegalitatea dorită. $\blacksquare$

**Observații. 1) Valoarea medie a funcției continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pe intervalul** $[a,b]$ este numărul real $M(f)\overset{def}{=}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

**2) Interpretarea geometrică a inegalității din P5** ( $f\geq 0$ ). Aria subgraficului lui $f$ este cuprinsă între ariile $M(b-a)$ și $m(b-a)$ ale dreptunghiurilor superior și inferior (Fig.22) și este egală cu aria dreptunghiului (hașurat) ale cărei dimensiuni sunt $b-a$ și $M(f)$.

**3)** Din punct de vedere fizic, viteza medie a unui mobil este valoarea medie a vitezei, adică valoarea medie a lui $v$ este egală cu

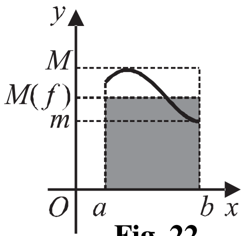



**Fig. 22**

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t=\frac{\text{distanța parcursă}}{\text{durata de timp}}.$$

**4)** Din punct de vedere al calcului diferențial, inegalitatea mediei se obține din teorema lui Lagrange aplicată funcției $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ pe intervalul $[a,b]$. Avem: $F(b)-F(a)=(b-a)F'(c), c\in(a,b)$ sau $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=f(c)(b-a), c\in(a,b)$. Din $m\leq f(c)\leq M$ se deduce $m(b-a)\leq f(c)(b-a)\leq M(b-a)$.

**Exemple. 1. Să se determine valoarea medie a funcției $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$.**

**R. Valoarea medie este numărul $M(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=-\frac{\cos x}{\pi}\Big|_0^\pi=\frac{2}{\pi}$.**

**2. Să se demonstreze că $2\leq\int_0^2 e^{x^2}\mathrm{d}x\leq 2e^4$.**

**R. Din $1\leq e^{x^2}\leq e^4, x\in[0,2]$ rezultă prin integrare relația dorită.**

**P6 (Formula de medie).** Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci există $\xi\in[a,b]$ ( $\xi$ se citește: ksi) astfel încât $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi)$.

**Demonstrație**. Ca în demonstrația proprietății **P5**, există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(\alpha) = m \le f(x) \le M = f(\beta), \alpha, \beta \in [a,b], \forall x \in [a,b]$. Integrând aceste inegalități pe $[a,b]$ avem $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)$ sau

$f(\alpha) = m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M = f(\beta)$. Funcția continuă $f$ are proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$ şi deci există $\xi \in [a,b]$ astfel încât $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. ■

**Observații. 1)** Această formulă am stabilit-o la **P5** în observația **4)** utilizând teorema lui Lagrange pe $[a,b]$ pentru funcția $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

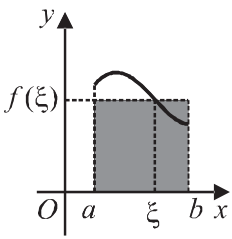


**Fig. 23**

**2) Interpretare geometrică**. Dacă $f$ este o funcție **continuă şi pozitivă** pe $[a,b]$, atunci există cel puțin un punct $\xi \in [a,b]$ astfel încât subgraficul lui $f$ să aibă aceeaşi arie cu dreptunghiul de bază $(b-a)$ şi înălțime $f(\xi)$ (Fig.23)(zona haşurată).

**3)** O variantă a teoremei de medie este următoarea:

**Teoremă.** Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue, $g(x) \ge 0, \forall x \in [a,b]$, atunci există $\xi \in [a,b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

**Demonstrație.** Din $\inf f(x) = m \le f(x) \le M = \sup f(x)$ rezultă $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x), x \in [a,b]$, care integrate pe $[a,b]$ dau $m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. Dacă $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, atunci se poate lua orice $\xi \in [a,b]$, iar dacă $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$, atunci

$$m \le \frac{1}{\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x}\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le M,(1)$$. Cum $f$ are proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$, există $\xi \in [a,b]$ astfel încât $f(\xi) = A$, unde $A$ este numărul din mijlocul relației $(1)$. ■

## Probleme rezolvate

**1. Să se determine valoarea medie a funcției $f:[0,3]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x$ precizând și punctul $\xi$.**

R. Avem $M(f)=\frac{1}{3}\int\limits_0^3 (x^2-2x)\mathrm{d}x = 0$. Ecuația $f(\xi)=0$, adică $\xi^2-2\xi=0$ are soluțiile $\xi_1=0, \xi_2=2$.

**2. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\int\limits_1^{1+x}\ln t\mathrm{d}t$ (Limita unei funcții).**

R. Formula de medie pentru integrale ne permite să scriem:

$\int\limits_1^{1+x}\ln t\mathrm{d}t = x\ln\xi$, unde $\xi\in[1,1+x]$. De aici $1\le\xi\le 1+x$, $0\le\ln\xi\le\ln(1+x)$ și $0\le x\ln\xi\le x\ln(1+x)$, dacă $x\ge 0\big(0\ge x\ln\xi\ge x\ln(1+x)$ dacă $x<0\big)$. Trecând la limită în ultimele inegalități deducem $\lim\limits_{x\to 0}x\ln\xi = 0$ (criteriul „cleştelui”).

**3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^4\int\limits_n^{n+1}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^5}$ (Limita unui şir).**

R. Conform formulei de medie pentru integrale există $\xi\in[n,n+1]$ astfel încât $\big(\xi=\xi(n)\big)$:

$$\int\limits_n^{n+1}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^5}=\frac{\xi}{1+\xi^5}.$$

Dar $\frac{n}{1+(n+1)^5}\le\frac{\xi}{1+\xi^5}\le\frac{n+1}{1+n^5}$, care înmulțită cu $n^4$ dă

$\frac{n^5}{1+(n+1)^5}\le n^4\frac{\xi}{1+\xi^5}\le\frac{n^4(1+n)}{1+n^5}$. Cum şirurile externe au limita 1, deducem (criteriul „cleştelui”) că limita cerută este 1.

**4. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continuă astfel încât $2\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$. Să se arate că există $x_0\in(0,1)$ astfel încât $f(x_0)=x_0$.**

**R.** Se scrie relația din ipoteză sub forma $\int_0^1 [f(x)-x]dx = 0$. Din formula de medie pentru integrale există $x_0 \in (0,1)$ astfel încât $0 = \int_0^1 [f(x)-x]dx = f(x_0) - x_0$, adică $f(x_0) = x_0$.

**5. Să se arate că: a) $\lim_{x\to 0}\int_0^x e^{-t^2}dt = 0$; b) $\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\frac{\ln x}{x^2+1}dx = 0$.**

**R.** a) $\lim_{x\to 0}\int_0^x e^{-t^2}dt = \lim_{x\to 0} xe^{-\xi^2} = 0$, unde $\xi \in [0,x]$; b) $\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\frac{\ln x}{x^2+1}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\xi}{\xi^2+1}$, unde $\xi \in [n, n+1]$. Dacă $n \to \infty$, atunci $\xi \to \infty$.

Dar $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2} = 0$. Deci limita cerută este egală cu zero.

**Observație**. Integralele din acest exercițiu nu pot fi exprimate cu ajutorul funcțiilor elementare și **pentru o astfel de limită se utilizează formula de medie sau duble inegalități pentru integrand**.

**P7 (Periodicitatea și integrala). 1)** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă de perioadă $T>0$.

Atunci $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt, \forall a \in \mathbb{R}$.

**2)** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât

$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \forall a \in \mathbb{R}$. Atunci $f$ este funcție periodică.

**Demonstrație.*** **1)** Fie $G(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt$. Atunci $G(x) = F(x+T) - F(x)$, unde $F$ este o primitivă pe $\mathbb{R}$ a lui $f$. De aici

$G'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ și deci

$G(x) =$ constantă. În particular $G(x) = G(0) = \int_0^T f(t)dt$.

**2)** Luăm $G(a) = \int_a^{a+T} f(x)dx - \int_0^T f(x)dx = 0, \forall a \in \mathbb{R}$. Deci

$G'(a)=f(a+T)-f(a)=0$, adică $f(a+T)=f(a), \forall a\in\mathbb{R}$. ■

**Exemple.** **1.** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi}\sin x\mathrm{d}x=\int_{0}^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_{0}^{2\pi}=0$ **unde** $f(x)=\sin x$ **are perioada principală** $T=2\pi$.

**2.** $\displaystyle\int_{19\pi}^{20\pi}\cos 2x\mathrm{d}x=\int_{19\pi}^{19\pi+\pi}\cos 2x\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{0}^{\pi}=0$, **unde** $f(x)=\cos 2x$ **are perioada principală** $T=\pi$.

Scopul următoarei proprietăți este de a lega (de a aduce la un loc) cele două puncte de vedere asupra integrării. Primul capitol are la bază derivarea funcțiilor ($F$ este o primitivă a lui $f$ pe intervalul $I$ dacă $F'=f$) în timp ce acest capitol s-a bazat pe probleme de arii.

Teorema aceasta (atribuită lui Barrow (1630-1677) – profesorul lui Newton) **evidențiază legătura dintre integrare şi derivare**.

În acelaşi timp, teorema demonstrează o afirmație pe care ne-am bazat în unele raționamente : orice funcție continuă pe un interval admite primitive pe acel interval.

Are loc

**P8 (Teorema fundamentală a calcului integral). Teorema de existență a primitivelor unei funcții continue**. Dacă $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci funcția $G:[a,b]\to\mathbb{R}, G(x)=\displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$ are proprietățile:

**1)** $G$ **este continuă pe** $[a,b]$ şi $G(a)=0$;

**2)** $G$ **este derivabilă pe** $[a,b], G(a)=0$ şi $G'(x)=g(x), \forall x\in[a,b]$ ($G$ **este o primitivă a lui** $g$**,** care se anulează în $x=a$);

**3)** $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$, unde $F$ **este o primitivă oarecare a lui** $g$.

(**Formula Leibniz-Newton**)

**Legătura între DERIVARE şi INTEGRARE este dată de formula:**

$$\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)'=g(x).$$

**Demonstrație**. Începem demonstrația prin a observa că dacă $g$ are graficul din Fig.24, atunci graficul lui $G$, pe acelaşi interval, are forma din Fig.25.

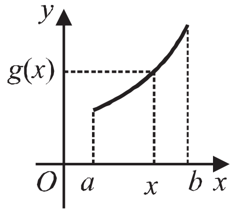



**Fig. 24**

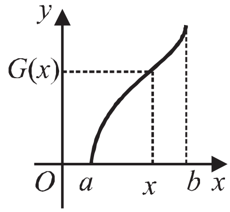



**Fig. 25**

**1)** Funcția $G$ este continuă în $x_0 \in [a,b] \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} G(x_0+h) = G(x_0)$.

Avem : $G(x_0+h) = \int\limits_a^{x_0+h} g(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^{x_0} g(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{x_0}^{x_0+h} g(t)\mathrm{d}t = G(x_0) +$

$+\int\limits_{x_0}^{x_0+h} g(t)\mathrm{d}t$, $(1)$.

Deoarece $g$ este continuă pe $[a,b]$, $g$ este mărginită şi deci există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \le g(x) \le M, \forall x \in [a,b]$. De aici prin integrare pe $[x_0, x_0+h]$ rezultă $mh \le \int\limits_{x_0}^{x_0+h} g(t)\mathrm{d}t \le Mh$. Trecând aici la limită după $h \to 0$, via criteriul „cleştelui”, se obține $\lim\limits_{h\to 0} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} g(t)\mathrm{d}t = 0, (2)$. În $(1)$ luând limită după $h \to 0$ şi ținând seamă de $(2)$ se găseşte $\lim\limits_{h\to 0} G(x_0+h) = G(x_0)$, ceea ce arată că $G$ este continuă într-un punct arbitrar $x_0 \in [a,b]$. Deci $G$ este continuă pe $[a,b]$.

**2)** Fie $x_0 \in (a,b)$ şi $x \in (a,b), x \ne x_0$. Atunci

$$G(x) - G(x_0) = \int\limits_a^x g(t)\mathrm{d}t - \int\limits_a^{x_0} g(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{x_0}^x g(t)\mathrm{d}t .$$

Pentru ultima integrală se aplică formula de medie şi rezultă

$\int\limits_{x_0}^x g(t)\mathrm{d}t = g(\xi_x)(x-x_0)$, unde $\xi_x \in [x, x_0]$ dacă $x < x_0$ (sau $\xi_x \in [x_0, x]$ dacă

$x_0 < x$). Deci $G(x) - G(x_0) = g(\xi_x)(x - x_0)$, iar de aici $\dfrac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} = g(\xi_x)$.

Cu acestea $G'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} g(\xi_x) = g(x_0)$

($x \to x_0 \Rightarrow \xi_x \to x_0$ şi $g$ este continuă).

Dacă $x_0 = a$, atunci $G_d'(a) = \lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{G(x) - G(a)}{x - a} = g(a)$.

Dacă $x_0 = b$, atunci $G_s'(b) = \lim\limits_{x \nearrow b} \dfrac{G(x) - G(b)}{x - b} = g(b)$.

Deci, am demonstrat că $G$ este derivabilă pe $[a, b]$ şi că $G' = g$, ceea ce arată că $G$ este o primitivă a lui $g$ pe $[a, b]$ şi în plus $G(a) = 0$.

Să observăm că **2)** $\Rightarrow$ **1)** (orice funcție derivabilă pe o mulțime este continuă).

**3)** Să remarcăm că funcțiile $G$ şi $F$, o altă primitivă a lui $g$ (pe $[a, b]$), care nu se anulează neapărat în $a$, au proprietatea $G' = F' = g$, şi deci diferă printr-o constantă pe $[a, b]$, adică $G(x) = F(x) + k, \forall x \in [a, b]$. Punând aici $x = a$ rezultă $k = -F(a)$, iar pentru $x = b$ găsim $\int\limits_a^b g(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. ■

**Observații. 1)** Analog se arată că funcția $H(x) = \int\limits_x^b g(t)\mathrm{d}t, x \in [a, b]$ este derivabilă pe $[a, b]$ şi $H'(x) = g(x), \forall x \in [a, b], H(b) = 0$.

Funcția $G$ se numeşte **funcția integrală a lui** $g$ de **limită inferioară** $a$**,** iar $H$ este **funcția integrală a lui** $g$ **de limită superioară** $b$**.**

**2)** Funcția $G(H)$ este definită printr-o integrală definită având limita superioară (inferioară) variabilă. Această funcție este derivabilă pe $[a, b]$. În mod normal funcția $G(H)$ depinzând de $a$ (respectiv $b$) ar trebui scrise $G_a(x) = \int\limits_a^x g(t)\mathrm{d}t$ (şi respectiv $H_b(x) = \int\limits_x^b g(t)\mathrm{d}t$).

**3)** Punctul 3) din teoremă ne arată cum se poate calcula integrala definită a unei funcții continue $g$ pe $[a, b]$, dacă se cunoaşte o primitivă oarecare $F$ a lui $g$.

**4)** Dacă $g \geq 0$, atunci $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ este aria subgraficului funcției $g$.

**5)** Se arată că dacă $g$ este integrabilă Riemann, atunci $G(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ este continuă pe $[a, b]$.

## Probleme rezolvate

**1. Fie funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t^2+1}\mathrm{d}t$. Să se calculeze $F'(0), F'(\pi), F'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.**

**R.** Funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = \frac{\sin t}{t^2+1}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ şi deci admite primitive.

Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o astfel de primitivă. Atunci conform formulei Leibniz-Newton

$F(x) = G(x) - G(0)$, iar de aici $F'(x) = G'(x) = \frac{\sin x}{x^2+1}$.

Acum găsim uşor că $F'(0) = 0, F'(\pi) = 0, F'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-4}{4+\pi^2}$.

**2. Se consideră funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \int_x^{x^2+1} \sqrt[3]{t^4+1}\mathrm{d}t$. Să se arate că $F$ este derivabilă şi să se calculeze $F'(x)$ şi $F'(0)$.**

**R.** Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției continue $g(t) = \sqrt[3]{t^4+1}$. Deci

$F(x) = G(x^2+1) - G(x)$ şi este derivabilă fiind diferența a două funcții derivabile. De aici şi derivarea funcțiilor compuse, deducem :

$F'(x) = 2xG'(x^2+1) - G'(x) = 2x\sqrt[3]{(x^2+1)^4+1} - \sqrt[3]{x^4+1}$. De aici $F'(0) = -1$.

**3. Să se determine punctele de extrem ale funcției $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x e^{t^2}(t^2-2)\mathrm{d}t$.**

**R.** Punctele de extrem sunt puncte în care derivata se anulează şi îşi schimbă semnul de o parte şi alta a lor. Găsim $F'(x) = e^{x^2}(x^2-2) = 0$ dacă $x = \pm\sqrt{2}$. Pentru $x = -\sqrt{2}$ avem punct de maxim, iar pentru $x = \sqrt{2}$ avem punct de minim.

**4. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \int_0^{x^4} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}$.**

**R**. Semnul lui $F'$ pe intervale dă monotonia lui $F$. Pentru a calcula pe $F'$, fie $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției continue $g(t)=\frac{1}{t^4+1}, t\in\mathbb{R}$. Deci $F(x)=G(x^4)-G(0)$ şi $F'(x)=4x^3G'(x^4)=\frac{4x^3}{x^{16}+1}=0\Rightarrow x=0$.

Dacă $x>0$, atunci $F'(x)>0$, ceea ce arată că pe $(0,\infty)$ funcția $F$ este strict crescătoare, iar dacă $x<0$, atunci $F'(x)<0$, adică pe $(-\infty,0)$ funcția $F$ este strict descrescătoare. Punctul $x=0$ este punct de minim pentru $F$.

**5. Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t}{x^2}$.

**R.** Suntem în cazul de nedeterminare $\left(\frac{0}{0}\right)$. Funcția $g(t)=\sin t^2, t\in\mathbb{R}$ fiind continuă, admite primitive. Fie $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o astfel de primitivă. Atunci (formula Leibniz-Newton) $\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t=G(x)-G(0)$.

În calculul limitei se aplică regula lui l'Hospital de două ori şi avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{G'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^2}{2}=0.$$

**6. Să se arate că:** $\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}, \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

**R.** Dacă se notează prin $G(x)$ membrul stâng, atunci $G'(x)=0, \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, ceea ce arată că pe acest interval $G$ este constantă. Cum $G\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$ rezultă $G(x)=\frac{\pi}{4}, \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (Am folosit identitatea $\arcsin\sqrt{x}+\arccos\sqrt{x}=\frac{\pi}{2}, x\in[0,1]$ ).

**7. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci pentru orice $\varepsilon\in(0,b-a)$ are loc egalitatea** $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

**R.** Fie $c\in(a,b)$ şi $\varepsilon\le\min(c-a,b-c)$. Din proprietatea de aditivitate a integralei definite avem:

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x.$$

Utilizând observația 2) de la teorema precedentă şi proprietatea de aditivitate avem:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

**8. Să se determine $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continuă, astfel încât $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{x^3}{3}, x\in\mathbb{R}$.**

R. Dacă $F$ este o primitivă a lui $f$, atunci egalitatea dată se rescrie

$F(x)-F(0)=\frac{x^3}{3}, x\in\mathbb{R}$. Se derivează această egalitate şi se obţine $f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$.

**9. Demonstraţi teorema de medie pentru integrala definită utilizând funcţia**

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b].$$

R. Funcţiei $F$ i se aplică teorema lui Lagrange ($F$ verifică cerinţele din enunţul teoremei) pe $[a,b]$. Deci există $c\in(a,b)$ astfel încât $F(b)-F(a)=(b-a)F'(c)$ sau

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=(b-a)f(c).$$

**10. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Să se arate că există $c\in[a,b]$ astfel încât**

$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t=\int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

R. Concluzia problemei poate fi reformulată astfel:

Să se arate că ecuaţia $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=0$ are cel puţin o soluţie în $[a,b]$.

Această rescriere ne sugerează să considerăm funcţia continuă

$$G:[a,b]\to\mathbb{R}, G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \text{ pentru care } G(a)G(b)=-\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2\le 0.$$

Cum $G$ are proprietatea lui Darboux, deducem existenţa unui punct $c\in[a,b]$ pentru care $G(c)=0$, adică relaţia dorită.

**Observaţie. Dacă $f\ge 0$, atunci concluzia problemei afirmă că există un punct $c$ între $a$ şi $b$ astfel încât ariile figurilor I şi II delimitate de graficul lui $f$, axa $Ox$ şi dreptele $x=a, x=c$ şi respectiv $x=c, x=b$ sunt egale (Fig. 26).**

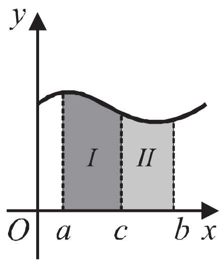



**Fig. 26**

**11. Ecuaţia $\int_1^x f(t)dt=x^2-3, f:[1,2]\to(-\infty,1)$ continuă, are soluţie în $(1,2)$.**

R.**Funcţia continuă $H(x)=\int_1^x f(t)dt-x^2+3$ are $H(1)>0, H(2)<0\Rightarrow\exists c\in(1,2), H(c)=0$.**

## Probleme propuse

**1. 1) Dacă** $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3, \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 1, \int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 4$, **atunci determinați fiecare din integralele:**

**a)** $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$ **; b)** $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ **; c)** $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$ **; d)** $\int_5^1 f(x)\mathrm{d}x$ **; e)** $\int_1^3 f(x)dx$ **.**

**2) Se știe că** $\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x = 3, \int_2^3 g(x)\mathrm{d}x = 5, \int_1^6 g(x)\mathrm{d}x = 4$**. Să se determine integralele:**

**a)** $\int_3^6 g(x)\mathrm{d}x$ **; b)** $\int_3^2 g(x)\mathrm{d}x$ **; c)** $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x$ **; d)** $\int_3^3 g(x)\mathrm{d}x$ **.**

**2. Arătați că următoarele funcții sunt continue pe porțiuni și determinați** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$**, în fiecare din cazurile:**

**I. 1)** $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\in[-2,1] \\ 2x^2, x\in(1,2] \end{cases}$**; 2)** $f(x)=\begin{cases} e^x-1, x\in[-1,0) \\ x^2-x, x\in[0,2] \end{cases}$**;**

**3)** $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}, x\in[0,1) \\ \dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x}, x\in[1,2] \end{cases}$**; 4)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1}, x\in[-1,0] \\ \ln(x+1)+1, x\in(0,1] \end{cases}$**;**

**5)** $f:[-2,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\min\left(x^2-1, x+1\right)$**;**

**6)** $f:[0,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\max\left(x^2-x+4, 5x-1\right)$**;**

**7)** $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x|x-1|$**; 8)** $f:[-1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=|x|+|x-1|$**.**

**II. 1)** $f(x)=\begin{cases} x, x\in[-1,0] \\ 2x+1, x\in(0,2] \end{cases}$**; 2)** $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\in[-1,0) \\ 2-3x, x\in[0,1] \end{cases}$**;**

**3)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x}+e^x, x\in[1,2) \\ \dfrac{1}{x^2}+3^x, x\in[2,3] \end{cases}$**;4)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, x\in[0,1) \\ \dfrac{3}{x^2+1}, x\in[1,2] \end{cases}$**;5)** $f(x)=\begin{cases} \sqrt{9-x^2}, x\in[-2,0] \\ \mathrm{tg}\, x, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right] \end{cases}$**.**

**III. 1)** $f(x)=\begin{cases} [x], x\in[2,4] \\ \left[x^2\right], x\in[0,2) \end{cases}$**; 2)** $f(x)=\begin{cases} x[x], x\in(2,4] \\ x\left[x^2\right], x\in[1,2] \end{cases}$**; 3)** $f(x)=\begin{cases} [2x], x\in[0,2] \\ x[2x], x\in(2,3] \end{cases}$**.**

**IV. 1)** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n+x^3}{x^n+x^2+1}, x\in[0,2]$**; 2)** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}+x^n}{x^n+2^n}, x\in[0,4]$**;**

**3)** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+xe^{nx}}{1+e^{nx}}, x\in[-1,1]$**; 4)** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}, x\in[-1,1]$**.**

**3.** 1) Să se calculeze: a) $\int_1^n \frac{dx}{x+[x]}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ ; b) $\lim_{n\to\infty} n\int_1^n \frac{x\,dx}{n^3+[x]^2}$ .

2) Să se determine $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom cu proprietatea $\int_1^{n^3} \left[\sqrt[3]{x}\right] dx = f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**4.** 1) Să se determine $I(a), a \in \mathbb{R}$ în cazurile:

$1^0)$ $I(a) = \int_0^1 |x-a|\,dx$ ; $2^0)$ $I(a) = \int_0^2 \frac{dx}{|x-a|+1}$ ; $3^0)$ $I(a) = \int_0^1 |x(x-a)|\,dx$ .

2) Să se calculeze $\lim_{a\to\infty} \int_1^2 \frac{dx}{|x-a|+1}$ .

**5.** Să se calculeze ($[x]=$ partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}, \{x\} =$ partea fracționară a lui $x$ ):

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n+1}\int_0^n \frac{dx}{1+\{x\}}$ ; 2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\int_0^n [x]\,dx$ ; 3) $\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{dx}{[x]^2+[x]}$ ; 4) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\int_1^{n^2} \left[\sqrt{x}\right] dx$ .

**6.** 1) Arătați că dacă $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx .$$

2) Utilizând 1) calculați limitele șirurilor cu termenul general:

a) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ ; b) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+k)^3}$ ; c) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$ ; d) $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{a^k}, a>0, a\neq 1$ ;

e) $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{a^k b^{n-k}}, a,b>0, a\neq b$ ; f) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$ ; g) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$ .

**7.*** 1) Fie $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ continuă. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{1\leq i<j\leq n} f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 .$$

2) Să se calculeze limitele:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{1\leq k<j\leq n} \cos\frac{k}{n}\cos\frac{j}{n}$ ; b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{1\leq i<j\leq n} \sin\left(\frac{i}{n}\right)\sin\left(\frac{j}{n}\right)}{\sum_{1\leq i<j\leq n} \cos\left(\frac{i}{n}\right)\cos\left(\frac{j}{n}\right)}\right)$ .

**8.** Să se demonstreze inegalitățile:

**I.** 1) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx > \int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx$ ; 2) $\int_{-1}^2 (x^2-x)\,dx \leq 2\int_{-1}^2 (x+5)\,dx$ ; 3) $\int_{-2}^2 |x+1| \leq$

$\le \int_{-2}^{2} |2x-1| \mathrm{d}x + \int_{-2}^{2} |2-x| \mathrm{d}x$ ; 4) $\int_0^1 e^{-x} \sin x \mathrm{d}x > \int_0^1 e^{-x^2} \sin x \mathrm{d}x$ ; 5) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} < \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ ;

6) $\sin x \le x, \forall x \ge 0$ şi apoi $\int_0^1 \sin x^2 \mathrm{d}x \le \frac{1}{3}$ ;

7) $\int_0^1 x f(x) \mathrm{d}x \le \frac{1}{3}$, unde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este continuă şi $\int_0^1 f^2(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

**II.** 1) $-2 \le \int_0^1 \frac{x-2}{x+1} \mathrm{d}x \le -\frac{1}{2}$ ; 2) $2 \le \int_1^2 \frac{x+4}{x+1} \mathrm{d}x \le \frac{5}{2}$ ; 3) $\frac{1}{5} < \int_5^8 \frac{2x-7}{2x+5} \mathrm{d}x < 1$ ;

4) $0 \le \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2+1} \mathrm{d}x \le \frac{3}{10}$ ; 5) $2\sqrt{e} \le \int_0^1 \left(e^{x^2} + e^{1-x^2}\right) dx \le 1+e$ .

**III.** 1) $\int_1^2 \ln(1+x) \mathrm{d}x > \int_1^2 \frac{x}{1+x} \mathrm{d}x$ ; 2) $\int_1^2 \ln(1+x) \mathrm{d}x < \int_1^2 \frac{x \mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}$ ;

3) $\int_2^{10} x \operatorname{arctg} x \mathrm{d}x > \int_2^{10} \ln\left(1+x^2\right) \mathrm{d}x$ ; 4) $\int_1^2 \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) \mathrm{d}x < \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) \mathrm{d}x$ .

**IV.** 1) $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x \le \int_0^1 (1+x)^{1+x} \mathrm{d}x$ ; 2) $\int_1^2 (a+x)^a \mathrm{d}x < \int_1^2 a^{a+x} \mathrm{d}x, a \ge e$ ;

3) $\int_1^2 (e+x)^{e-x} \mathrm{d}x > \int_1^2 (e-x)^{e+x} \mathrm{d}x$ ; 4) $\int_9^{10} x^{\sqrt{x+1}} \mathrm{d}x > \int_9^{10} (x+1)^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ ;

5) $\int_1^2 \left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1} \mathrm{d}x \le \int_1^2 x^x \mathrm{d}x$ ; 6) $\int_1^2 e^x \mathrm{d}x < \int_1^2 (1+x)^{1+x} \mathrm{d}x$ .

**V.** 1) $\frac{2}{3} < \int_0^1 e^{-x^2} \mathrm{d}x < \frac{\pi}{4}$ ; 2) $\frac{4}{3} < \int_0^1 e^{x^2} \mathrm{d}x < \frac{e+4}{3}$ ;

3) $\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)} < \int_0^1 \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2+1}} \mathrm{d}x < \frac{24+5\pi}{40}$ ; 4) $1 - e^{-\frac{\pi}{2}} < \int_0^{\pi/2} e^{-\sin x} \mathrm{d}x < \frac{\pi}{2}\left(1-e^{-1}\right)$.

**9.** a) Fie şirurile $(a_n), (b_n)$ definite prin $a_n = \int_n^{2n} \frac{t+1}{t^2+2} \mathrm{d}t$ , $b_n = \int_n^{n+1} \frac{t+1}{t^3+2} \mathrm{d}t$ . Să se arate că şirurile sunt convergente şi să se calculeze limitele lor.

b) Fie $a_n = \int_{1/(n+1)}^{1/n} \operatorname{arctg}(nx) \mathrm{d}x, b_n = \int_{1/(n+1)}^{1/n} \arcsin(nx) \mathrm{d}x$ . Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

**10.** Să se studieze convergența următoarelor şiruri (şi calculați limita indicată), având termenul general:

1) $I_n=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x$ ; 2) $I_n=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n x\mathrm{d}x$ ; 3) $I_n=\int\limits_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$ , $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$ ; 4) $I_n=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$ , $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$ ; 5) $I_n=\int\limits_0^1(1-x)^n e^x\mathrm{d}x$ , $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$ ; 6) $I_n=\int\limits_0^1\frac{e^{nx}}{1+e^x}\mathrm{d}x$ , $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$ .

**11. a) Fie $f:[0,1]\to[a,b], a>0$ , $f$ continuă. Să se arate că:**

1) $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-(a+b)\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+ab\le 0$ ; 2) $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+ab\int\limits_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le a+b$ .

**b) Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funcții continue. Să se arate că:**

1) $\int\limits_a^b\min(f(x),g(x))\mathrm{d}x\le\min\left(\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x,\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)$.

2) $\int\limits_a^b\max(f(x),g(x))\mathrm{d}x\ge\max\left(\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x,\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)$.

**c) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ , continuă, crescătoare. Arătați că**

$$(b-a)f(a)\le\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\le f(b)(b-a).$$

**d) Fie $f:[a,b]\to(0,\infty)$ , continuă, $m=\inf f, M=\sup f$ . Atunci**

$$\frac{m}{M}(b-a)^2\le\left(\int\limits_a^b f\right)\left(\int\limits_a^b\frac{1}{f}\right)\le\frac{M}{m}(b-a)^2.$$

**e) Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ , continuă. Să se arate că $f$ este crescătoare dacă şi numai dacă $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\le b\,f(b)-a\,f(a), \forall 0\le a\le b$ .**

**f) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă. Comparați $f(b)(b-a)$ cu $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ în cazurile:**

1) $f$ constantă pe $[a,b]$ ; 2) $f$ crescătoare pe $[a,b]$ ; 3) $f$ descrescătoare pe $[a,b]$ .

**g) Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ , funcții continue. Care din afirmațiile de mai jos este adevărată:**

1) $M(f+g)=M(f)+M(g)$ ; 2) $M(\alpha f)=\alpha M(f), \alpha\in\mathbb{R}$ ; 3) $M(fg)=M(f)\cdot M(g)$ , unde $M(f)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (media lui $f$ pe $[a,b]$ ).

**h) Fie $f:I\to\mathbb{R}$ ( $I$ interval), continuă. Atunci $f=0\Leftrightarrow\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=0, \forall a,b\in I, a<b$ .**

## Formula de medie

**1. Să se determine valoarea medie pentru următoarele funcții, determinând și punctul $\xi$ corespunzător:**

**1) $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$; 2) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$; 3) $f:[1,e]\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$;**

**2. Să se arate că: a) 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3\displaystyle\int_n^{n+2}\frac{x\,dx}{1+x^5}\right)=2$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{x^7}{1+x^{10}}dx\right)=1$;**

**b) $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_0^x e^{-t^3}dt=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}=\ln 2$.**

**3. Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funcții continue astfel încât $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$. Să se arate că există $c\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=g(c)$.**

**4. a)Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continuă și $2\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=1$. Să se arate că există $x_0\in[0,1]$ astfel încât $f(x_0)=x_0$.**

**b)Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continuă cu proprietatea $3\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=1$. Să se arate că ecuația $f(x)-x^2=0$ are cel puțin o soluție în $[0,1]$.**

**5. Se consideră funcția continuă $f:[0,1]\to[0,\infty)$ cu proprietatea $\displaystyle\int_0^1 \sin f(x)dx=\frac{\pi}{4}$. Să se arate că există $c\in[0,1]$ astfel încât $c^2\sin f(c)+\sin f(c)-1=0$.**

**6. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât $f(a)>0$ și $\displaystyle\int_a^b f(t)dt<0$. Să se arate că ecuația $f(x)=0$ are soluție în intervalul $(a,b)$.**

**7. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n, a_i\in\mathbb{R}, i=\overline{0,n}$, atunci există $c\in[0,1]$ astfel încât $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+...+\dfrac{a_n}{n+1}=f(c)$.**

## Teorema fundamentală

**1. a) Să se arate că:**

**1) $\dfrac{d}{da}\displaystyle\int_a^b e^{-x^2}=-e^{-a^2}$; 2) $\dfrac{d}{db}\displaystyle\int_a^b e^{-x^2}\mathrm{d}x=e^{-b^2}$; 3) $\dfrac{d}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^b e^{-x^2}\mathrm{d}x=0$.**

**b) Determinați: 1)o funcție $f$ pentru care $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x^3 - x^2$ ; 2) $a \in \mathbb{R}$ și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă astfel încât $\int_a^x f(t)dt = 2x^2 - 8$.**

**2. Se dă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și calculați $F'(-1), F'(0), F'(1), F''(x)$ în cazurile:**

1) $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{t^2+1}$ ; 2) $F(x)=\int_x^0 \sqrt{1+t^2}dt$ ; 3) $F(x)=\int_1^x \sin(\pi t)dt$ .

**3. Fie $F:D\to\mathbb{R}$. Calculați pentru fiecare funcție elementele indicate.**

1) $F(x)=\int_x^{x+1} \frac{t}{1+\sin^2 t}dt, x\in\mathbb{R}, F'(0), F'(\pi), F''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ; 2) $F(x)=\int_{2x}^{x^3-4} \frac{x}{1+\sqrt{x}}dt, F'(2)$ .

**4. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă și funcțiile $F(x)=\int_c^x f(t)dt, G(x)=\int_d^x f(t)dt, c,d\in[a,b]$.**

1) Arătați că $F$ și $G$ diferă printr-o constantă.

2) $F(x)-G(x)=\int_c^d f(t)dt$ .

**5. Să se calculeze derivatele următoarelor funcții:**

1) $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{1+t^4}dt$ ; 2) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_1^{\cos x} \sqrt{1-t^2}dt$ ;

3) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_{x^2}^{1} \left(t-\sin^2 t\right)dt$ ; 4) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_x^{x^2} \sqrt{(1-t)^3}dt$ ;

5) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ ; 6) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_{tgx}^{2x} t\sqrt{1+t^2}dt$ .

**6. Să se calculeze $F''(x)$ în cazurile:**

1) $F(x)=\int_1^x \mathrm{arctg}^2 t\, dt$ ; 2) $F(x)=\int_{x^2}^{x^3} t^2\sqrt{1+t}dt$ ; 3) $F(x)=\int_0^x (x-t)^2 \sin t\, dt$ .

**7. Să se determine valorile extreme ale funcției $F:D\to\mathbb{R}$, în cazurile:**

1) $F(x)=\int_0^x \frac{t-1}{1+t^2}dt$ ; 2) $F(x)=\int_1^{2x} e^{t^3}(3t+1)dt$ ; 3) $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1+t^2}dt$ .

**8. Să se studieze intervalele de monotonie ale funcției $F:D\to\mathbb{R}$, în cazurile:**

1) $F(x)=\int_x^{2x} \left(t^2-3t\right)dt$ ; 2) $F(x)=\int_0^{x^2} \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}dx$ ; 3) $F(x)=\int_1^{2x} \left(t^2-1\right)\sqrt{1+t^2}dt$ .

**9. 1) Arătați că $\int_0^x \frac{\sin t}{1+t}dt \geq 0, \forall x\in[0,2\pi]$.**

2) Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_1^2 \frac{\cos(xt)}{t}dt$ este strict descrescătoare pe $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

**10.** Să se arate că $F:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^x\left[\cos(\sin t)-\sin(\cos t)\right]dt$ este strict crescătoare.

**11.** 1) Să se studieze derivabilitatea funcției $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^{x^2-2x}\sqrt{1+t}\,dt$.

2) Presupunem că $f$ este o funcție continuă și că $\int_0^x f(t)dt=\frac{2x}{4+x^2}$. Calculați $f(0)$ și determinați zerourile lui $f$.

3) Dacă $f$ este continuă și $\int_0^x t\,f(t)dt=\sin x - x\cos x$, atunci calculați $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ și $f'(x)$.

**12.** Să se demonstreze egalitățile:

1) $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}$; 2) $\int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{tg} x}\frac{t\,dt}{1+t^2}+\int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{ctg} x}\frac{dt}{t\left(1+t^2\right)}=1, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

**13.** Să se arate că:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t+10}{t+1}dt\right)=10$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x\frac{t^2(t+9)}{t+1}dt\right)=3$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x\cos u^2du\right)=1$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x t^{1+t}dt\right)=\frac{1}{2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\ln(1+t)dt}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x(1+\sin 2u)^{\frac{1}{u}}du\right)=e^2$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\int_0^x\frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}}\right)=1$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\int_1^x\frac{\ln t}{(x-1)^2}dt=\frac{1}{2}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^{e^{-x}}\frac{xdt}{1+t^2}=0$.

**14*.** Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este continuă cu $\left|\int_x^{x+h}f(t)dt\right|\le h^2, \forall x,h\in\mathbb{R}$ atunci $f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

**15*.** Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continuă și $\int_0^1 f(x)dx=0$ atunci $\exists c\in(0,1)$ cu $\int_0^c f(x)dx=f(c)$.

**16*.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt, F(1)=1$. Să se arate că există $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a_1)f(a_2)=1$.

**17*.** Arătați că funcția $g(x)=\int_{2007}^x f(t)dt-\int_{2007}^{x+1}f(t-1)dt, f$ continuă pe $\mathbb{R}$, este constantă pe $\mathbb{R}$.

# 2.5. METODE DE CALCUL ALE INTEGRALELOR DEFINITE

În aplicațiile calculului integral este necesar să găsim primitive (când astfel de primitive există şi sunt exprimabile în termeni de funcții simple) pentru a calcula integrala definită a unei funcții (în sensul lui Newton) prin formula cunoscută $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, unde $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f:[a,b] \to \mathbb{R}$.
Astfel de calcule vom face atunci când determinăm ariile unor suprafețe plane mărginite, volumele unor corpuri obținute prin rotația unor suprafețe plane în jurul unei drepte, etc.
Metodele pentru calculul integralei nedefinite rămân, în general, valabile şi în calculul integralei definite. Tehnicile pe care le prezentăm în continuare sunt următoarele:
1) **Metoda integrării directe.**
2) **Metoda integrării prin părți.**
3) **Metoda substituției (sau schimbării de variabilă).**
Le analizăm în continuare.

## 1. Metoda integrării directe

Are la bază tabelul de integrale nedefinite din capitolul precedent (pentru a determina o primitivă $F$ a lui $f$) şi proprietatea de liniaritate a integralei definite $\left(\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g\right)$ şi evident formula Leibniz-Newton $\left(\int_a^b f = F(b) - F(a)\right)$.

### Exerciții rezolvate

**1. Să se calculeze următoarele integrale definite:**

**1)** $\int_1^2 x^2 dx$ **; 2)** $\int_1^3 \frac{dt}{t}$ **; 3)** $\int_0^1 (2x + 3\sqrt{x})dx$ **; 4)** $\int_{-1}^1 \frac{du}{u^2 - 4}$ **; 5)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ **; 6)** $\int_0^1 e^t dt$ **.**

**R.** 1) Avem $F(x) = \frac{x^3}{3}$ o primitivă a funcției $f(x) = x^2$, $x \in [1,2]$. Deci $\int_1^2 x^2 dx = F(2) - F(1) = \frac{7}{3}$.

2) $\int_1^3 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$.

3) $\int_0^1 (2x + 3\sqrt{x})dx = 2\int_0^1 x dx + 3\int_0^1 \sqrt{x} dx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 3\frac{2x\sqrt{x}}{3}\Big|_0^1 = 1 + 2 = 3$.

4) $\int_{-1}^{1}\frac{du}{u^2-4}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{4}\ln\frac{1}{9}$.

5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=1$.

6) $\int_0^1 e^t dt=e^t\Big|_0^1=e-1$.

**2. Calculând în două moduri $\int_0^1 (x+1)^n dx$ să se stabilească egalitatea:**

$$\mathbf{1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right).}$$

R. Cu formula Leibnitz-Newton avem: $\int_0^1 (x+1)^n dx=\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$, iar cu binomul lui Newton se obține $\int_0^1 (x+1)^n dx=\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 C_n^k x^k dx=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k$.

## Probleme propuse

**1. Să se calculeze următoarele integrale definite:**

1) $\int_0^1 x^3dx$; 2) $\int_0^1(2x-3)dx$; 3) $\int_{-1}^1 3x^3dx$; 4) $\int_{-2}^0 x(x+1)dx$; 5) $\int_0^1 x^2(x+1)dx$; 6) $\int_e^{e^2}\frac{dx}{x}$;

7) $\int_1^3\frac{dt}{t^2}$; 8) $\int_1^4\left(3x+\frac{1}{x^2}\right)dx$; 9) $\int_0^1 x\sqrt{x}dx$; 10) $\int_1^4\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 11) $\int_1^8\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 12) $\int_1^4\left(x-\frac{2}{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;

13) $\int_0^1 3^x dx$; 14) $\int_0^1\frac{du}{u^2+3}$; 15) $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 16) $\int_2^3\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$; 17) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 2x\,dx$; 18) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 3x\,dx$;

19) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}\operatorname{ctg} x\,dx$; 20) $\int_0^1 e^{3x}dx$; 21) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2 x\,dx$; 22) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{ctg}^2 x\,dx$; 23) $\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$; 24) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$;

25) $\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$.

**2. Definiți o funcție $F:[1,8]\to\mathbb{R}$ astfel încât $F'(x)=\frac{1}{x}$ și (pe rând): 1) $F(2)=0$; 2) $F(2)=3$.**

**3.** **Definiți o funcție $F:[0,4]\to\mathbb{R}$ astfel încât $F'(x)=\sqrt{1+x^2}$ și (pe rând): 1) $F(3)=0$; 2) $F(3)=1$.**

**4.** **Să se calculeze:**

**1) $\int_1^4 (x\text{-}2)dx$ și $\int_1^4 |x-2|dx$ ; 2) $\int_{-2}^2 \left(x^2-1\right)dx$ și $\int_{-2}^2 \left|x^2-1\right|dx$ ; 3) $\int_{-2}^2 \left|x^3-x\right|dx$ ; 4) $\int_0^4 f(x)dx$ ,**

**unde $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\in[0,1]\\ 4-x, & x\in(1,4]\end{cases}$; 5) $\int_{-1}^1 f(x)dx$ , unde $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\in[-1,0]\\ \sqrt{x}+1, & x\in(0,1]\end{cases}$; 6) $\int_{-1}^3 f(x)dx$ ,**

**unde $f(x)=\begin{cases}x^3+x, & x\in[-1,1]\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}, & x\in(1,3]\end{cases}$; 7) $\int_0^2 f(x)dx$ , unde $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x^2+1}, & x\in[0,1]\\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\in(1,2]\end{cases}$;**

**8) $\int_0^2 \max\left(x, x^2, x^3\right)dx$ ; 9) $\int_0^2 \min\left(x,x^2,x^3\right)dx$ ; 10) $\int_0^{2\pi} |\sin x-\cos x|dx$ .**

**5.** **Să se calculeze: $\int_0^{2\pi} \max\left(\sin x, \arcsin\left(\sin x\right)\right)dx$ .**

**6.** **Fie $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{x^2+6x+10}dx, n\geq 1$ .**

**1) Să se arate că $I_{n+2}+6I_{n+1}+10I_n=\dfrac{1}{n+1}$ .**

**2) Arătați că $I_{n+1}\leq I_n,(\forall)n\in\mathbb{N}$ și deduceți că $17I_{n+2}\leq\dfrac{1}{n+1}\leq 17I_n,(\forall)n\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to\infty} nI_n=\dfrac{1}{17}$ .**

**7.** **Un obiect pleacă din origine și se mișcă de-a lungul axei *Ox* cu viteza $v(t)=10t-t^2, 0\leq t\leq 10$ .**

**1) Care este poziția obiectului la momentul *t*, $0\leq t\leq 10$ ?**

**2) Când viteza obiectului este maximă, care este poziția lui în acel moment?**

**8.** **Să se determine numărul real *a* pentru care (pe rând):**

**1) $\int_0^a (x+1)dx=\int_0^a \dfrac{3}{2}(x+1)^3 dx$ ; 2) $\int_0^a \left(2-4x+3x^2\right)dx\leq a, a>0$ ; 3) $\int_a^{a+1} \left(x^3+4\right)dx=\dfrac{31}{4}$ ;**

**4) $\int_{-1}^1 |x-a|dx$ este maximă, $a\in[-2,2]$ ; 5) $\int_0^1 \dfrac{1-t^2}{t^4+at^2+1}=\dfrac{\pi}{8}, a>2$ .**

**9.** **Să se calculeze limita șirului $\left(I_n\right)$, unde:**

**1) $I_n=\dfrac{1}{n}\int_1^n \dfrac{(x-1)}{x+1}dx$ ; 2) $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^n \dfrac{dx}{x^2+x+1}$ ; 3) $I_n=\int_0^2 \dfrac{|x-n|}{x+n}dx$ ; 4) $I_n=\int_1^n \dfrac{dx}{x(x+1)^2}$ ;**

5) $I_n = \int_0^n \frac{4x\,dx}{(x+1)(x^2+3)}$ ; 6) $I_n = \int_n^{n+1} \frac{x+1}{x^2+2}dx$ ; 7) $I_n = \int_{-1}^{2} \frac{|x-2|+n}{2-|x-n|}dx$ ;

8) $I_n = \int_{n-1}^{n} \frac{(x+4)dx}{x^2+3x+2}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt{n}+3\right)I_n$ .

## 2. Metoda integrării prin părți

O altă metodă pentru calculul integralelor definite o constituie metoda integrării prin părți, similară metodei integrării prin părți de la integrala nedefinită, fiind o consecință a derivării unui produs de funcții. Mai precis are loc următoarea:

**Teoremă (formula de integrare prin părți).** Dacă $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt două funcții derivabile, cu derivate continue, atunci

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx . \qquad (1)$$

(1) se numeşte **formula de integrare prin părți pentru integrala definită.**

Forma diferențială a lui (1) este $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

**Demonstrație.** Deoarece $uv', vu'$ sunt funcții continue, ele sunt integrabile şi deci are sens scrierea din (1). Din $(u\cdot v)'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x),\ x\in[a,b]$ rezultă că funcția $u\cdot v$ este o primitivă a funcției $u'v+uv'$. Conform formulei Leibniz-Newton avem:

$$\int_a^b (u\cdot v)'(x)dx = (u\cdot v)(x)\Big|_a^b = (uv)(b)-(uv)(a). \qquad (*)$$

Pe de altă parte, utilizând linearitatea integralei definite, avem:

$$\int_a^b (u\cdot v)'(x)dx = \int_a^b \left[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\right]dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx. \qquad (**)$$

Din (*) şi (**) rezultă $(uv)(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$ sau

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=(uv)(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx. \blacksquare$$

**Observații. 0)** Faptul că integrarea prin părți este operația inversă a derivării produsului poate fi redat schematic ca mai jos.

$$\boxed{f(x)=u(x)v(x)}$$

$$\boxed{f'(x)}=\boxed{(u')(x)v(x)}+\boxed{u(x)v'(x)} \qquad \textbf{(Derivare)}$$

$$\boxed{\int_a^b f'(x)dx}=\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)dx}+\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)dx} \qquad \textbf{(Integrare)}$$

$$\|$$

$$\boxed{f(x)\Big|_a^b}$$

$$\|$$

$$\boxed{u(x)v(x)\Big|_a^b}$$

**1)** Cele două părți ale integrandului sunt $u(x)$ și $v'(x)$ sau în scriere diferențială $u$ și $dv$. Pentru a aplica formula integrării prin părți trebuie calculate $u'(x)$(prin derivarea lui $u(x)$) și $v(x)$ (prin integrarea lui $v'(x)$). Se alege de obicei funcția $u(x)$, funcția mai complicată din structura integralei, deoarece derivarea este operație mai simplă decât integrarea (prin care se obține $v$) și astfel încât a doua integrală din formula (1) să fie mai simplă decât cea de calculat. Dacă acest lucru nu se întâmplă, atunci se face o nouă alegere pentru $u(x)$ și $v'(x)$.

**2)** Formula de integrare prin părți se poate aplica de mai multe ori. Dacă rezultatul obținut în urma integrării de două ori prin părți este $I=I$, atunci înseamnă că munca efectuată (alegerea lui $u(x)$ și $v'(x)dx$) în a doua integrală din (1) este „inversă” celei din prima integrală.

**3)** Pentru a aplica ușor formula integrării prin părți vom aranja funcțiile (ca și în cazul integralei nedefinite) astfel:

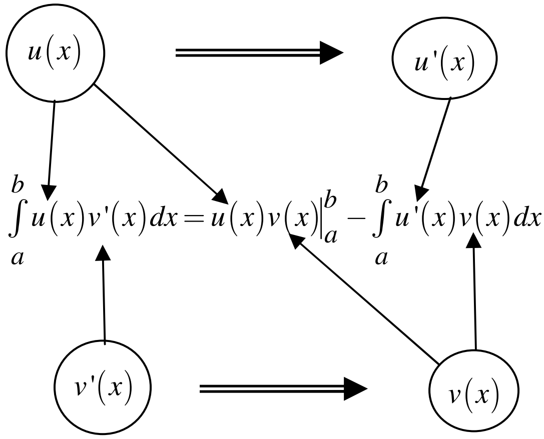
$$\begin{cases} u(x)= \\ v'(x)= \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)= \text{ (prin derivare)} \\ v(x)= \text{ (prin integrare; } v \text{ este o primitivă)} \end{cases}$$

(din prima integrală) (din a două integrală)

sau în scriere diferențială

$$\begin{cases} u= \\ dv= \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du= \\ v= \end{cases}$$

**4)** Formula integrării prin părți pentru integrala definită poate fi ilustrată prin următoarea diagramă, unde în prima integrală definită avem produsul funcțiilor $u(x)$ și $v'(x)$ (aşa cum indică săgețile), pe diagonală se face produsul funcțiilor $u(x)$ și $v(x)$ luat între *a* și *b*, iar a doua integrală definită are integrandul alcătuit din produsul funcțiilor $u'(x)$ și $v(x)$.




**5)** Reamintim câteva tipuri de integrale care se calculează utilizând formula integrării prin părți (aplicată cel puțin odată):

- $\int_a^b x^n \begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \operatorname{arctg} x \end{Bmatrix} dx,\ n \in \mathbb{N}$, unde sub integrală este produsul dintre $x^n$ și una din funcțiile din paranteza acoladă.

Se alege $u = \ln x(\arcsin x,\ \operatorname{arctg} x)$ unde se ia $u = x^n$ și $v' = x^n$. Limitele *a, b* sunt alese astfel încât să aibă sens scrierea.

- $\int_a^b x^n \begin{Bmatrix} e^{\alpha x} \\ \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{Bmatrix} dx,\ n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R},$ unde se ia $u = x^n$ și $v' = e^{\alpha x}(\sin \alpha x,\ \cos \alpha x)$.

- $\int_a^b \begin{Bmatrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \operatorname{arctg} x \end{Bmatrix} dx,\ u = \ln x(\arcsin x,\ \operatorname{arctg} x),\ v' = \sin \alpha x(\cos \alpha x)$.

- $\int x^n \begin{Bmatrix} \sqrt{x^2+a^2} \\ \sqrt{x^2-a^2} \\ \sqrt{a^2-x^2} \end{Bmatrix} dx,\ n\in\mathbb{N},\ u=\sqrt{x^2+a^2},\ v'=x^n$.

- $\int \begin{Bmatrix} \sin^n \alpha x \\ \cos^n \alpha x \end{Bmatrix} dx,\ n\in\mathbb{N}^*,\ \alpha\in\mathbb{R},\ u=\sin^{n-1}\alpha x, \left(u=\cos^{n-1}\alpha x\right),\ v'=\sin\alpha x,\ \left(v'=\cos\alpha x\right)$.

**Exemple. 1. Să se calculeze: a)** $\int_{-1}^{1} xe^x dx$ **; b)** $\int_0^1 \arcsin x dx$ **; c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ **; d)** $\int_0^1 x\sqrt{x^2+4}dx$ **.**

**R.** a) Punem $\begin{cases} u=x \\ v'=e^x \end{cases}$ şi avem: $\begin{cases} u'=1 \\ v=e^x \end{cases}$. Integrala dată devine, via formula integrării prin părţi

$$\int_{-1}^{1} xe^x dx = xe^x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx = e+\frac{1}{e}-\left(e-\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}.$$

**Observaţie.** Integrala $\int_{-1}^{1}|x|e^x dx$ nu se poate calcula aplicând formula integrării prin părţi, deoarece $u=|x|$ **nu este derivabilă în** $x=0\in[-1,1]$. Pentru calculul ei se utilizează proprietatea de aditivitate a integralei definite şi avem:

$\int_{-1}^{1}|x|e^x dx = \int_{-1}^{0}(-x)e^x dx + \int_0^1 xe^x dx = -\int_{-1}^{0} xe^x dx + \int_0^1 xe^x dx$ şi pentru fiecare integrală se poate aplica formula integrării prin părţi.

Altfel calculul acestei integrale se poate face aplicând formula Leibniz-Newton.

Funcţia $f(x)=|x|e^x,\ x\in[-1,1]$ este continuă şi deci admite o primitivă $F:[-1,1]\Rightarrow\mathbb{R}$,

$F(x)=\begin{cases} (1-x)e^x,\ x\in[-1,0] \\ (x-1)e^x+2,\ x\in(0,1] \end{cases}$. Atunci $\int_{-1}^{1}|x|e^x dx = F(1)-F(-1)=2-\frac{2}{e}$.

b) Punem $\begin{cases} u=\arcsin x \\ v'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v=x \end{cases}$ şi obţinem că $u$ nu este derivabilă în $x=1$ $\left(u'_s(1)=\infty\right)$.

Deci nu se poate aplica direct formula integrării prin părţi.

Ţinând seama de teorema fundamentală a calculului integral (continuitatea integralei ca funcţie de limitele integrare) vom lua $\varepsilon\in(0,1)$ şi calculând $I(\varepsilon)=\int_0^{\varepsilon}\arcsin x dx$ după care $\int_0^1 \arcsin x dx = \lim_{\varepsilon\nearrow 1} I(\varepsilon)$. Pentru calculul lui $I(\varepsilon)$ punem: $\begin{cases} u=\arcsin x \\ v'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v=x \end{cases}$.

Avem:

$$I(\varepsilon)=\int_0^{\varepsilon}\arcsin x\,dx = x\arcsin x\Big|_0^{\varepsilon}-\int_0^{\varepsilon}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\varepsilon\arcsin\varepsilon+\int_0^{\varepsilon}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'dx=\varepsilon\arcsin\varepsilon+\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\varepsilon}=$$

$$=\varepsilon\arcsin\varepsilon+\sqrt{1-\varepsilon^2}-1.$$

Deci $\lim\limits_{\varepsilon\nearrow 1} I(\varepsilon)=\frac{\pi}{2}-1$.

Altfel, integrala se poate calcula utilizând formula Leibniz-Newton, deoarece funcția $f(x)=\arcsin x$, $x\in[0,1]$ este continuă, admite primitive. O primitivă $G:[0,1]\to\mathbb{R}$ s-a calculat la această metodă pentru integrala nedefinită (probleme rezolvate **1) b**) și am găsit $G(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2},\ x=-1\\ x\arcsin x+\sqrt{1-x^2},\ x\in(-1,1)\\ \frac{\pi}{2},\ x=1\end{cases}$.

Atunci $\int_0^1\arcsin x\,dx=G(1)-G(0)=\frac{\pi}{2}-1$. În practică, astfel de integrale se pot calcula fără introducerea simbolului limită, scriind pentru cazul nostru $\int_0^1\arcsin x\,dx=\left(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-1$.

c) Pentru calculul acestei integrale definite se aplică formula integrării prin părți de două ori.

Punem: $\begin{cases}u=x^2\\ v'=\sin x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'=2x\\ v=-\cos x\end{cases}$ și integrala devine: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx=-x^2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$ (*).

A doua integrală se calculează, din nou, cu formula integrării prin părți.

Notăm: $\begin{cases}u=x\\ v'=\cos x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'=1\\ v=\sin x\end{cases}$ și deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$.

Cu aceasta (*) devine: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx=0+2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\pi-2$.

d) Se aduce integrala la forma: $I=\int_0^1 x\sqrt{x^2+4}dx=\int_0^1\frac{x^3+4x}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}dx+4\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx=$

$$=\int_0^1 x^2\left(\sqrt{x^2+4}\right)'dx+4\int_0^1\left(\sqrt{x^2+4}\right)'dx=\int_0^1 x^2\left(\sqrt{x^2+4}\right)'dx+4\sqrt{x^2+4}\Big|_0^1 \quad (*).$$

Ultima integrală se calculează cu formula integrării prin părți, punând $\begin{cases}u=x^2\\ v'=\left(\sqrt{x^2+4}\right)'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'=2x\\ v=\sqrt{x^2+4}\end{cases}$.

Avem: $\int_0^1 x^2\left(\sqrt{x^2+4}\right)'dx = x^2\sqrt{x^2+4}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x\sqrt{x^2+4}dx = \sqrt{5} - 2\int_0^1 x\sqrt{x^2+4}dx = \sqrt{5} - 2I$.

Revenim la (*) şi avem: $I = \sqrt{5} - 2I + 4\left(\sqrt{5}-2\right)$. De aici $3I = 5\left(\sqrt{5}-1\right)$ adică $I = \frac{5}{3}\left(\sqrt{5}-1\right)$.

**2. Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, n \in \mathbb{N}^*$.**

**a) Să se calculeze $I_1, I_2$.**

**b) Determinaţi o formulă de recurenţă pentru $I_n$.**

**c) Arătaţi că şirul $\left(I_n\right)_n$ este descrescător.**

**R.** a) $I_1 = \int_0^1 xe^x dx$ se calculează prin părţi punând $\begin{cases} u = x \\ v' = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = e^x \end{cases}$.

Deci $I_1 = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - (e-1) = 1$.

Analog pentru $I_2 = \int_0^1 x^2 e^x dx$, notăm $\begin{cases} u = x^2 \\ v' = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 2x \\ v = e^x \end{cases}$ şi deci $I_2 = x^2 e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx = e - 2I_1 = e - 2$.

b) Se aplică formula integrării prin părţi, unde $\begin{cases} u = x^n \\ v' = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = nx^{n-1} \\ v = e^x \end{cases}$.

Avem: $I_n = x^n e^x\Big|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1}e^x dx = e - nI_{n-1}$, care reprezintă formula de recurenţă pentru $I_n$. De aici pentru $n = 1$ rezultă $I_1 = e - I_0 = e - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1$.

c) Din $x^n \ge x^{n+1}, x \in [0,1]$ rezultă $x^n e^x \ge x^{n+1}e^x$, care prin integrare dă $I_n \ge I_{n+1}$.

## Probleme propuse

**1. Să se calculeze, utilizând metoda integrării prin părţi, următoarele integrale definite:**

**I. a)** $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$; **b)** $\int_1^{e^2} x\ln x\,dx$; **c)** $\int_1^2 x\log_2 x\,dx$; **d)** $\int_1^e (x+1)\ln x\,dx$; **e)** $\int_0^2 x\ln(x+1)dx$;

**f)** $\int_1^2 x^2\ln x\,dx$; **g)** $\int_1^2 x^3\ln x\,dx$; **h)** $\int_1^e \ln^3 x\,dx$; **i)** $\int_0^1 x^2\ln^2 x\,dx$; **j)** $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$.

**II. a)** $\int_0^1 \frac{x}{e^x}dx$; **b)** $\int_0^1 x2^x dx$; **c)** $\int_1^3 xe^{2x}dx$; **d)** $\int_0^1 (x+1)e^{2x}dx$; **e)** $\int_{-1}^1 |x|e^{-|x|}dx$.

**III.** a) $\int_0^1 \arccos x\,dx$ ; b) $\int_0^{\frac{1}{2}} x\arccos x\,dx$ ; c) $\int_1^{\frac{1}{2}} x^2\arccos x\,dx$ ; d) $\int_0^1 \arcsin\sqrt{x}dx$ ; e) $\int_1^3 \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$ .

**IV.** a) $\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$ ; b) $\int_0^{2\pi} x|\sin x|dx$ ; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ ; d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx$ ; e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$ .

**V.** a) $\int_0^1 \sqrt{x^2+4dx}$ ; b) $\int_2^3 \sqrt{x^2-4dx}$ ; c) $\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2dx}$ ; d) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2dx}$ ; e) $\int_0^1 x\sqrt{4-x^2}\,dx$ .

**2.** **Să se arate că $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi să se calculeze $\int_a^b f(x)dx$ , în cazurile de mai jos.**

1) $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} xe^x,\ x\in[-1,0] \\ x\ln(x+1),\ x\in(0,1] \end{cases}$ ; 2) $f:[0,e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x\ln^2 x,\ x\in[0,e] \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$;

3) $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x\arcsin x,\ x\in[0,1] \\ x\ln(-x),\ x\in[-1,0) \end{cases}$; 4) $f:\left[-\frac{1}{2},1\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x\operatorname{arctg}x,\ x\in(0,1] \\ \arcsin x, x\in\left[-\frac{1}{2},0\right] \end{cases}$ ;

5) $f:[-2,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} e^x\sin 2x,\ x\in[-2,0) \\ xe^{2x},\ x\in[0,1] \end{cases}$.

**3.** **Să se calculeze limitele:**

a) 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ ; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$ ; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3 5^{\frac{k}{n}}$ ;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt[n]{e^k}$ ; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4n^2+(2k-1)^2}$ ; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\left(\operatorname{arctg}\frac{k}{n}\right)^2$ ;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\operatorname{arctg}\left(\frac{k}{n}\right)^2$ ; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n^2+1)(n^2+2^2)....(n^2+n^2)}{n^{2n}}}$ .

b) 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x}\sin x\,dx$ ; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n x^2e^{-x}\,dx$ ; 3) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha} x^5e^{-x^3}\,dx$ ;

4) $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 (2x^2-3x)e^x\,dx$ ; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}\int_0^n x^2\ln(x+1)dx,\ p\in\mathbb{N}^*$ .

**4.** **Să se arate că pentru integrala $I_n, n\in\mathbb{N}^*$, are loc relaţia de recurenţă indicată şi să se calculeze $I_1, I_2, I_3$ în cazurile:**

1) $I_n=\int_1^e \ln^n x\,dx,\ I_n=e-nI_{n-1}$;  2) $I_n=\int_0^1 x^n e^x dx,\ I_n=e-nI_{n-1}$;  3) $I_n=\int_0^1 x^n 2^x dx$, $I_n\ln 2=2-nI_{n-1}$; 4) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$, $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}, n\geq 2$ şi arătaţi că $I_{2m}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2m)}\frac{\pi}{2}$, $I_{2m+1}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2m)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m+1)}$; 5) $I_n=\int_0^1\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}, a>0, 2nI_{n+1}=\frac{1}{\left(1+a^2\right)^n}+(2n-1)I_n$;

6) $I_n=\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx$ , $(2n+1)I_n=\sqrt{2}-2nI_{n-1}$.

**5. Pentru şirul $(I_n)$ de mai jos stabiliţi relaţiile indicate şi precizaţi convergenţa lui, în cazurile:**

1) $(I_n)_{n\geq 1}, I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx, n\in\mathbb{N}^*$.

a) $I_n=-\frac{1}{e}+nI_{n-1}, n\geq 2$; b) $\frac{1}{(n+1)e}\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{3}{\pi}}I_n=0$.

2) $(I_n)_{n\geq 1}, I_n=\int_0^1\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}, n\in\mathbb{N}^*$.

a) $I_n=\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}+\frac{1}{(n-1)2^n}, n\in\mathbb{N}^*$;b) $(I_n)$ este descrescător.

3) $(I_n)_{n\geq 1}, I_n=\int_1^e\ln^n x\,dx, \in\mathbb{N}^*$.

a) $I_n=e-nI_{n-1}, n\geq 2$; b) $(I_n)$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

4) $(I_n)_{n\geq 1}, I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx, n\in\mathbb{N}$.

a) Stabiliţi o relaţie de recurenţă pentru termenii şirului.

b) Arătaţi că şirul este descrescător şi $I_n\in\left[0,\frac{2}{3}\right], \forall n$.

## 3. Metoda substituţiei (schimbării de variabilă)

### Prima metodă a substituţiei (a schimbării de variabilă)

Multe funcţii sunt constituite prin operaţia de compunere. Când avem de integrat o astfel de funcţie este util să schimbăm variabila (Se spune că facem o substituţie)

Are loc următoarea:

**Teoremă (Prima formulă a substituției).** Fie $[a,b] \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ($J$ interval din $\mathbb{R}$) două funcții cu proprietățile:

**1)** $f$ este continuă pe $J$;

**2)** $\varphi$ este derivabilă cu derivata $\varphi'$ continuă pe $[a,b]$.

Atunci
$$\int_a^b f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du. \qquad (1)$$

Formula (1) se numeşte prima formulă a substituției.

De la variabila $x \in [a,b]$ se trece la noua variabilă $u = \varphi(x) \in [\varphi(a), \varphi(b)]$.

**Demonstrație.** Mai întâi să observăm că integralele au sens deoarece integranzii sunt funcții continue.

Pentru a proba egalitatea (1) evaluăm cele două integrale utilizând formula Leibniz-Newton.

Fie $F : J \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui $f$ pe $J$ ($F$ există deoarece $f$ este continuă pe $J$).

Deci membrul drept al egalității (1) devine: $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = F\left(\varphi(b)\right) - f\left(\varphi(a)\right)$, (*).

Pe de altă parte avem (formula de derivare a funcțiilor compuse):

$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x),\ x \in [a,b]$, ceea ce arată că $F \circ \varphi$ este o primitivă pentru funcția $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Aplicând, din nou, formula Leibniz-Newton pentru membrul stâng din (1) obținem:

$$\int_a^b f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx = (F \circ \varphi)(x)\Big|_a^b = F\left(\varphi(b)\right) - F\left(\varphi(a)\right), \qquad (**).$$

Din (*) şi (**) rezultă egalitatea (1). ■

**Observații. 1)** Prin schimbarea de variabilă, noua integrală trebuie să se calculeze mai simplu.

**2)** Funcția $\varphi$ este funcția care schimbă variabila, de la $x$ la $u = \varphi(x)$. Când trecem de la variabila $x$ (din prima integrală) la variabila $u$ (din a doua integrală), atunci în a doua integrală toate elementele se exprimă în funcție de $u$, inclusiv limitele de integrare!

Este convenabil să folosim notația diferențială. Dacă $u = \varphi(x)$, atunci $du = \varphi'(x)dx$, iar noile limite de integrare din (1) sunt $u_1 = \varphi(a),\ u_2 = \varphi(b)$ şi formula din teoremă evidențiază aceste transformări.

$$b \xrightarrow{\ \varphi\ } \varphi(b)$$

$$\int_a^b f(\underbrace{\varphi(x)}_{u})\underbrace{\varphi'(x)dx}_{du} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

$$a \xrightarrow[\ \varphi\ ]{} \varphi(a)$$

Nu trebuie uitată schimbarea limitelor de integrare în a doua integrală (se trece de la limitele $x_1 = a, x_2 = b$ din prima integrală la $u_1 = \varphi(a), u_2 = \varphi(b)$ din a doua integrală).
Pentru calculul ultimei integrale se determină o primitivă $F$ a lui $f$ şi se aplică formula Leibniz-Newton. Spre deosebire de calculul integralei nedefinite prin metoda substituției (unde se asocia integralei $I$ integrala $I_1$ care se determina, iar la $I$ se revine punând $u = \varphi(x)$ în $I_1$) rezultatul din integrala a doua din (1) coincide cu integrala definită de calculat, adică prima integrală din (1).
Pentru calculul integralei definite prin metoda substituției se parcurg următorii paşi:

- Se substituie $u = \varphi(x) \Rightarrow du = \varphi'(x)dx$

(se trece de la veche variabilă $x$ la noua variabilă $u$)

- Se calculează noile limite de integrare

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \end{cases} \overset{u=\varphi(x)}{\Rightarrow} \begin{cases} u_1 = \varphi(a) \\ u_2 = \varphi(b) \end{cases}$$

(vechile limite) (noile limite)

- Se rescrie integrala definită

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

- Se calculează noua integrală $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$

Schematic

Avem de calculat $I = \displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ → 1) $u = \varphi(x) \Rightarrow du = \varphi'(x)dx$ 2) $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \varphi(a) \\ u_2 = \varphi(b) \end{cases}$ → Avem de calculat $I = \displaystyle\int_{u_1}^{u_2} f(u)du$

**Exerciții rezolvate**

**Să se calculeze integralele:**

**1)** $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)^5 dx$ **; 2)** $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$ **; 3)** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x\,dx$ **; 4)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^3+1}$ **; 5)** $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$ **;**

**6)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$ **; 7)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$ **; 8)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8+1}}$**.**

**R.** 1) Notăm $u = 2x-1$ şi avem $du = (2x-1)'dx = 2dx$. Schimbăm limitele de integrare.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2\cdot x_1 - 1 = -1 \\ u_2 = 2\cdot x_2 - 1 = 1. \end{cases}$$

Integrala devine: $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)^5 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{(2x-1)}_{u}{}^5 \cdot \underbrace{2dx}_{du} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 u^5 du = \frac{1}{2}\frac{u^6}{6}\Bigg|_{-1}^1 = \frac{1}{12}(1-1) = 0$.

2) Substituim $u = x^2+1$ şi avem $du = 2xdx$. Calculăm noile limite de integrare:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0^2+1 = 1 \\ u_2 = 1^2+1 = 2. \end{cases}$$

Integrala se scrie: $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\underbrace{x^2+1}_{u}} \cdot \underbrace{2dx}_{du} = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}du = \frac{1}{3}u\sqrt{u}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

3) $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx;\ \begin{cases} x_1 = -\dfrac{\pi}{2} \\ x_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0; \end{cases}$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x\,dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x(-\sin x)dx = -\int_0^0 u^2du = 0.$$

4) $u = x^3+1 \Rightarrow du = 3x^2dx;\ \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2; \end{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln|u|\Bigg|_1^2 = \ln\sqrt[3]{2}$.

5) $u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x};\ \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 1; \end{cases} \displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_0^1 u^2du = \frac{u^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$.

6) $u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2};\ \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = \dfrac{\pi}{4}; \end{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} udu = \frac{u^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}$.

7) $u=\operatorname{tg}x \Rightarrow du=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$; $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=0 \\ u_2=\sqrt{3} \end{cases}$; $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\sqrt{3}} e^u du=e^u\Big|_0^{\sqrt{3}}=e^{\sqrt{3}}-1$.

8) $u=x^4 \Rightarrow du=4x^3dx$; $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=1 \\ u_2=1 \end{cases}$; $\displaystyle\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\frac{4x^3dx}{\sqrt{x^8+1}}=\frac{1}{4}\int_1^1\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=0$.

Următorul rezultat se referă la integrarea funcțiilor continue pare sau impare, definite pe un interval închis centrat în origine. Mai precis formulăm următoarea:

**Teoremă.** Fie $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$, $a>0$ funcție continuă. Atunci:

**1)** $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_0^a f(-x)dx$.

**2)** $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_0^a [f(x)+f(-x)]dx$.

**3)** $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)dx, & \text{dacă } f \text{ este pară } \big(f(-x)=f(x), \forall x\in[-a,a]\big) \\ 0, & \text{dacă } f \text{ este impară } \big(f(-x)=-f(x), \forall x\in[-a,a]\big). \end{cases}$

**Demonstrație. 1)** În integrala din stânga punem $u=-x$ când $du=-dx$, iar capetele de integrare sunt $u_1=a, u_2=0$. Deci $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_a^0 f(-u)du=\int_0^a f(-x)dx$ (ultima egalitate are loc deoarece $u$ este variabila „moartă”).

**2)** Folosind aditivitatea integralei avem:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_0^a f(x)dx\overset{\mathbf{1)}}{=}\int_0^a f(-x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_0^a [f(x)+f(-x)]dx.$$

**3)** Dacă $f$ este pară, atunci $f(-x)=f(x), \forall x\in[-a,a]$, iar dacă $f$ este impară, atunci $f(-x)+f(x)=0, \forall x\in[-a,a]$ și rezultatul se obține din **2)**. ■

**Observații. 1)** În exemplul **1)** de mai sus, noua integrală $\displaystyle\int_{-1}^{1} u^5du$, conține funcția impară $f(u)=u^5$ pe un interval simetric $[-1,1]$ în raport cu zero. Deci are valoarea zero.

În exemplul **3)**, integrala este definită pe un interval simetric centrat în zero, iar integrandul $f(x)=\sin x\cos^2 x$ este funcție impară. Deci, integrala definită are valoarea zero.
Analog integrala din **8)**.
**2)** Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci:

a) *f* este pară $\Leftrightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx,\ \forall a\in\mathbb{R}$.

b) *f* este impară $\Leftrightarrow \exists c\in\mathbb{R}$ astfel încât $\int_{-a}^{a} f(x)dx = c,\ \forall a\in\mathbb{R}$.

**A doua metodă a substituției (schimbării de variabilă)**

Există situații în care trebuie să calculăm integrala definită $\int_a^b f(x)dx$, iar calculul acesteia devine mai simplu dacă se face substituția $x=\varphi(t)$, unde funcția $\varphi$ îndeplineşte anumite condiții date de următoarea:

**Teoremă (A doua formulă a substituției).** Fie $[c,d]\xrightarrow{\varphi}[a.b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:

**1)** $f$ este continuă pe $[a,b]$;

**2)** $\varphi$ este bijectivă, $\varphi, \varphi^{-1}$ sunt derivabile, $\varphi'$ continuă şi $\varphi'(t)\neq 0,\ \forall t\in[c.d]$.

Atunci $$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (2)$$

Formula (2) se numeşte **a doua formulă a substituției (sau a schimbării de variabilă)**.
De la variabila $x\in[a,b]$ se trece la noua variabilă *t* prin $x=\varphi(t)$.

**Demonstrație.** Funcțiile $f, (f\circ\varphi)\varphi'$ fiind continue sunt integrabile şi deci au sens cele două integrale din formula (2).
Fie $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui *f*. Conform formulei Leibniz-Newton avem:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a). \qquad (*)$$

Ținând seama de derivata funcției compuse rezultă:

$(F\circ\varphi)'(t)=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),\ \forall t\in[c,d]$,

ceea ce arată ă $F\circ\varphi$ este o primitivă pentru $(f\circ\varphi)\varphi'$. Deci, a doua integrală din (2)

devine: $\displaystyle\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=(F\circ\varphi)(t)\Big|_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}=F(b)-F(a)$. (**)

Din (*) şi (**) rezultă egalitatea care trebuia probată. ■

**Observații. 1)** Prin substituția $x=\varphi(t)$ se ajunge la o integrală care se calculează mai simplu.

**2)** Funcția $\varphi^{-1}$ este funcția care schimbă variabila de la $x$ la $t=\varphi^{-1}(x)$.

Din $\varphi'(t)\neq 0,\ t\in[c,d]$ se deduce că $\varphi$ este strict monotonă pe $[c,d]$.

Este mai simplu să folosim notația diferențială. Dacă $x=\varphi(t)$, atunci $dx=\varphi'(t)dt$, iar noile limite de integrare din a doua integrală din (2) sunt $t_1=\varphi^{-1}(a),\ t_2=\varphi^{-1}(b)$ şi formula din teoremă evidențiază aceste transformări.

$$\int_a^b f(\underset{\varphi(t)}{\underset{\downarrow}{x}})\ \underset{\varphi'(t)dt}{\underset{\downarrow}{dx}} \overset{t=\varphi^{-1}(x)}{=} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$b\longrightarrow\varphi^{-1}(b),\qquad a\longrightarrow\varphi^{-1}(a)$$

În a doua integrală se vor calcula noile limite de integrare după formula $t=\varphi^{-1}(x)$, $t_1=\varphi^{-1}(a),\ t_2=\varphi^{-1}(b)$.

Schematic

| Avem de calculat $I=\int_a^b f(x)dx$ | $\to$ | 1) $x=\varphi(t)\Rightarrow dx=\varphi'(t)dt$<br>$x=\varphi(t)\Rightarrow t=\varphi^{-1}(x)$<br>2) $\begin{cases}x_1=a\\x_2=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1=\varphi^{-1}(a)\\t_2=\varphi^{-1}(b)\end{cases}$ | $\to$ | Avem de calculat $I=\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ |
|---|---|---|---|---|

A doua formulă a substituției se aplică în cazul în care integrandul are una din formele: $f\left(\alpha^{\beta x}\right)$, $f\left(x,\sqrt[n_1]{g(x)},\sqrt[n_2]{g(x)},\ldots,\sqrt[n_k]{g(x)}\right)$, $f(\sin x,\cos x)$, $f\left(x,\sqrt{\alpha^2-x^2}\right)$, $f\left(x,\sqrt{\alpha^2+x^2}\right)$, $f\left(x,\sqrt{x^2-\alpha^2}\right)$, ... .

Analizăm câte cazuri în cele ce urmează.

1) $\int\limits_a^b f\left(\alpha^{\beta x}\right)dx$, $f$ este funcție rațională (numitorul nu se anulează pe $[a,b]$), $\alpha \neq 1, \beta \neq 0$.

**Se notează** $\alpha^{\beta x} = t$, iar de aici prin logaritmare rezultă $\beta x \ln\alpha = \ln t$, etc.

**Exemplu. Să se calculeze** $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$.

**R.** Substituim $e^x = t$ și deci $x = \ln t,\ dx = \frac{dt}{t}$. Schimbăm limitele de integrare $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \overset{t=e^x}{\Rightarrow} \begin{cases} t_1 = e^0 = 1 \\ t_2 = e^1 = e \end{cases}$

și avem $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int\limits_1^e \frac{t\cdot\frac{dt}{t}}{t^2+1} = \int\limits_1^e \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t\Big|_1^e = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$.

2) $\int\limits_a^b f\left(x, \sqrt[n_1]{g(x)}, \sqrt[n_2]{g(x)}, \ldots, \sqrt[n_k]{g(x)}\right)dx$, unde $f$ este o funcție rațională, $g(x) = \frac{mx+n,}{px+q}$, $px+q \neq 0, n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^*, n_i \geq 2,\ g(x) \geq 0$ dacă $n_i$ par **se substituie** $\sqrt[n]{g(x)} = t,\ n = \text{c.m.m.m.c}\left(n_1, n_2, \ldots, n_n\right)$, etc.

**Exemplu. Să se calculeze** $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$.

**R.** Notăm $\sqrt{x} = t \geq 0 \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$. Noile limite de integrare $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \overset{t=\sqrt{x}}{\Rightarrow} \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{cases}$. Avem:

$$\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}} = \int\limits_0^1 \frac{t^2\cdot 2t\,dt}{1+t} = 2\int\limits_0^1 \frac{t^3dt}{1+t} = 2\int\limits_0^1 \frac{\left(t^3+1\right)-1}{t+1}dt = 2\int\limits_0^1 \left(1-t+t^2-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln|1+t|\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{3} - 2\ln 2.$$

3) $\int\limits_a^b f(\sin x, \cos x)dx$, unde $f$ este funcție rațională cu numitorul nenul pe $[a,b]$ și conține expresia de forma $\alpha + \beta\sin x$ sau $\alpha + \beta\cos x$.

Distingem cazurile:

$1^0$) $[a,b]\subset(-\pi,\pi)$. **Se substituie** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\Rightarrow\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}t\Rightarrow x=2\operatorname{arctg}t\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

şi se ține seamă de formulele $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ pentru transformarea integralei date.

**Exemplu. Să se calculeze** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}$.

**R.** Notăm $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\Rightarrow x=2\operatorname{arctg}t\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Noile limite de integrare sunt $t_1=\operatorname{tg}\frac{0}{2}=\operatorname{tg}0=0$, $t_2=\operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$. Integrala definită devine: $\int_0^1\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int_0^1\frac{2dt}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

$2^0$) $[a,b]\subseteq[-\pi,\pi]$, atunci se face aceeaşi substituție $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, numai că dacă $a=-\pi$ sau (şi) $b=\pi$, atunci $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nu este definită. Se calculează $\int_{-\varepsilon}^{b}f$ sau $\int_a^{\varepsilon}f$ sau $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f$ şi

$$\int_a^b f=\lim_{\varepsilon\searrow\pi}\int_{-\varepsilon}^{b}f \text{ sau } \int_a^b f=\lim_{\varepsilon\nearrow\pi}\int_a^{\varepsilon}f \text{ sau } \int_a^b f=\lim_{\varepsilon\to\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f$$

**Exemplu. Să se calculeze** $\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$.

**R.** Considerăm $\int_0^{\varepsilon}\frac{dx}{2+\cos x}$, $\varepsilon\in(0,\pi)$ şi se calculează ca la $1^0$). Avem: $\int_0^{\varepsilon}\frac{dx}{2+\cos x}=\int_0^{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}\frac{2dt}{t^2+3}=$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{3}}\right), \text{ iar } \int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=\lim_{\varepsilon\nearrow\pi}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

$3^0$) Dacă $a<b$ şi suntem cu

$$(2m-1)\pi\le a<(2m+1)\pi<\ldots<(2n-1)\pi<b\le(2n+1)\pi,\ m,n\in\mathbb{N}$$

atunci se scrie integrala ca sumă de integrale astfel:

$$\int_a^{(2m+1)\pi} f+\int_{(2m+1)\pi}^{(2m+3)\pi} f+\ldots+\int_{(2n-3)\pi}^{(2n-1)\pi} f+\int_{(2n-1)\pi}^{b} f,$$

unde prima şi ultima integrală se calculează ca la $2^0$), iar pentru celelalte se utilizează periodicitatea funcției $x \to \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ care este $2\pi$. Deci $\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} f=\int_{-\pi+2k\pi}^{\pi+2k\pi} f=\int_{-\pi}^{\pi} f$.

**Exemplu.** $I=\int_{-\frac{5\pi}{2}}^{6\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=\int_{-\frac{5\pi}{2}}^{-\pi}\frac{dx}{2+\cos x}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}+\int_{\pi}^{3\pi}\frac{dx}{2+\cos x}+\int_{3\pi}^{5\pi}\frac{dx}{2+\cos x}+\int_{5\pi}^{6\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=$

$=\int_{-\frac{5\pi}{2}}^{-\pi}\frac{dx}{2+\cos x}+3\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}+\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$.

Dar, $\int_{-\frac{5\pi}{2}}^{-\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=\lim\limits_{\varepsilon\to\pi}\int_{-\frac{5\pi}{2}}^{-\varepsilon}\frac{dx}{2+\cos x}=\lim\limits_{\varepsilon\to\pi}\int_{-1}^{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\frac{2dt}{t^2+3}=\lim\limits_{\varepsilon\to\pi}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Bigg|_{-1}^{\operatorname{tg}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}=$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to\pi}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{-\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\lim\limits_{\varepsilon\to\pi}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(-\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.Cum

$x\to\frac{1}{2+\cos x}$ este pară, iar $[-\pi,\pi]$ este interval simetric față de zero avem:

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)=2\int_0^{\pi} f(x)dx$ şi deci $I=-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}+6\int_0^{\pi} f+\int_0^{\pi} f=-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}+7\int_0^{\pi} f\overset{1^0)}{=}-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}+\frac{7\pi}{\sqrt{3}}=\frac{5\pi}{\sqrt{3}}$.

**Observație.** Aplicarea incorectă a substituției $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ conduce la erori de calcul.

Pentru integrala $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$ utilizând $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ dă $t_1=0, t_2=0$ şi deci $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}=0$. Dar $\frac{1}{3+\cos x}\geq\frac{1}{2}$ şi deci $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}\geq 2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi$.

Greşeala a provenit din faptul că $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nu este continuă pe $[0,2\pi]$.

Corect era să scriem $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{3+\cos x}+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}=\lim_{\varepsilon\nearrow\pi}\int_0^{\varepsilon}\frac{dx}{3+\cos x}+\lim_{\varepsilon\searrow\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}=$

$$=\lim_{\varepsilon\nearrow\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{2}}\right)+\lim_{\varepsilon\searrow\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2}}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{2}}\right)\right]=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Funcția $f(x)=\frac{1}{3+\cos x}$ este continuă pe $[0,2\pi]$. O primitivă a ei este:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right),\ x\in[0,\pi)\\[2ex] \frac{1}{\sqrt{2}}+\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\pi}{\sqrt{2}},\ x\in(\pi,3\pi]\\[2ex] \frac{\pi}{2\sqrt{2}},\ x=\pi.\end{cases}$$

Deci $\int_0^{2\pi}f(x)dx=F(2\pi)-F(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\pi}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}0}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

$4^0$) $\int_a^b f\left(x,\sqrt{\alpha^2-x^2}\right)dx$, $\alpha>0$, $[a,b]\subseteq[-\alpha,\alpha]$. Se pune $x=\alpha\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow$ $\Rightarrow dx=\alpha\cos t\,dt$, $\frac{x}{\alpha}=\sin t\Rightarrow t=\arcsin\frac{x}{\alpha}$. Noile limite de integrare sunt $t_1=\arcsin\frac{a}{\alpha}$, $t_2=\arcsin\frac{b}{\alpha}$.

**Exemplu. Să se calculeze $\int_0^1 x^2\sqrt{4-x^2}dx$.**

**R.** Se substituie $x=2\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. De aici $dx=2\cos t\,dt$, $t=\arcsin\frac{x}{2}\Rightarrow t_1=\arcsin\frac{0}{2}=0$, $t_2=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$. Integrala devine $\int_0^1 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\sin t)^2\sqrt{4-4\sin^2 t}\,(2\cos t\,dt)=$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 2t\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=2t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{1}{2}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

**Observație.** Acest tip de integrală se poate calcula folosind substituția $x = a\cos t,\, t \in [0,\pi]$, etc.

$5^0)$ $\int_a^b f\left(x, \sqrt{x^2+\alpha^2}\right)dx$. În acest caz punem $x = \alpha \operatorname{tg} t,\, t \in (0,\pi) \Rightarrow dx = \frac{\alpha dt}{\cos^2 t}$,
$\frac{a}{\alpha} = \operatorname{tg} t \Rightarrow t = \operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}$.

**Exemplu. Să se calculeze $\int_0^2 \sqrt{x^2+4}\,dx$ .**

**R.** Notăm $x = 2\operatorname{tg} t,\, t \in (0,\pi), dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}, \frac{x}{2} = \operatorname{tg} t \Rightarrow t = \operatorname{arctg}\frac{x}{2} \Rightarrow t_1 = 0,\, t_2 = \frac{\pi}{4}$ și integrala devine:

$$\int_0^2 \sqrt{x^2+4}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{4\operatorname{tg}^2 t + 4}\,\frac{2dt}{\cos^2 t} = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t} = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t\, dt}{\left(1-\sin^2 t\right)^2}.$$

În continuare se aplică prima metodă a substituției punând $u = \sin t$ și deci $du = \cos t\, dt,\, u_1 = \sin 0 = 0$, $u_2 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și deci integrala devine:

$$4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{\left(1-u^2\right)^2}, \text{ unde } \frac{1}{(1-u)^2(1+u)^2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{u-1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{u+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(u+1)^2}, \text{ etc.}$$

După cum se vede aplicarea metodei conduce la calcule lungi. Alte metode (integrarea prin părți) conduc mai repede la rezultat.

## Calculul integralelor de forma $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$

La capitolul **Primitive**, am abordat în detaliu integrarea funcțiilor raționale, adică am determinat primitivele acestor funcții continue pe domeniul de definiție. Ideea este de a descompune numitorul $Q(x)$ în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ de gradul întâi și gradul doi (cu discriminantul negativ) și apoi se descompune funcția $x \to \frac{P(x)}{Q(x)}$ în funcții raționale simple dacă $\operatorname{grad}(P) < \operatorname{grad}(Q)$. Dacă $\operatorname{grad}(P) \geq \operatorname{grad}(Q)$, atunci efectuăm împărțirea cu rest a lui $P$ la $Q$ când $P = Q \cdot C + R$, $\operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(Q)$ și pentru $\frac{R(x)}{Q(x)}$ se aplică pasul precedent. Cu formula Leibniz-Newton determinăm integrala definită. Vom exemplifica cele spuse cu următoarele

## Exerciții rezolvate

**Să se calculeze integralele definite:**

**1)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x(x+2)}\mathrm{d}x$ ; **2)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{x+1}$ ; **3)** $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\mathrm{d}x$ ; **4)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3-3x^2+2x}{(x^2+4)(x^2+1)}dx$ ; **5)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2+2x+13}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$ **.**

**R.** Notăm $f(x)$ integrandul, iar cu $I$ integrala definită a lui $f$ . Avem:

**1)** $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)$ şi $I=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x+2}=\frac{1}{2}\ln x\Big|_1^2+\frac{1}{2}\ln(x+2)\Big|_1^2=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$.

**2)** $x^2=(x+1)(x-1)+1$ şi deci $f(x)=x-1+\frac{1}{x+1}$, iar

$$I=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right]\Big|_0^1=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

**3)** $x^3+1=\left(x^3-x^2\right)+x^2+1$ şi $f(x)=1+\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}$, iar $I=\frac{7}{4}+\ln 9$ ;

**4)** $f(x)=\frac{2x-4}{x^2+4}+\frac{1}{x^2+1}$ şi $I=\int_0^1\frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+4}-4\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\ln\left(x^2+4\right)\Big|_0^1-2\mathrm{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^1+$

$+\mathrm{arctg}\, x\Big|_0^1=\ln\frac{5}{4}-2\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ ;

**5)** $f(x)=\frac{2}{x^2+1}+\frac{2x+11}{\left(x^2+1\right)^2}$ şi $I=2\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int_0^1\frac{2x\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^2}+11\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^2}\ =2\mathrm{arctg}\Big|_0^1-\frac{1}{x^2+1}\Big|_0^1+$

$+11\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^2}$ unde $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^2}=\int_0^1\frac{1+x^2-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}-\int_0^1 x\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x=$

$=\mathrm{arctg}\, x\Big|_0^1-\left[-\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\right]=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{4}$. Deci $I=\frac{37\pi}{8}+\frac{9}{4}$.

## Probleme propuse

**1. Să se calculeze integralele de mai jos, utilizând substituțiile indicate:**

**a) 1)** $\int_0^1(2x+1)^4dx, u=2x+1$; **2)** $\int_{-1}^1\left(x^3+x\right)^7dx, u=x^2+1$; **3)** $\int_{-2}^1 x(1-3x)^5dx, u=1-3x$;

**b) 1)** $\int_1^2\frac{dx}{2x+1}, u=2x+1$; **2)** $\int_{-1}^0\frac{dx}{1-3x}, u=1-3x$; **3)** $\int_0^1\frac{3xdx}{x^2+1}, u=x^2+1$;**4)** $\int_1^2\frac{dx}{1-5x}$,

$u=1-5x$; 5) $\int_0^1 \frac{2x^2dx}{3x^3+2}, u=3x^3+2$; 6) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\left(x^3+1\right)^2}, u=x^3+1$; 7) $\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}, u=x^2$ .

c) 1) $\int_0^1 \sqrt{3x+1}dx, u=3x+1$; 2) $\int_{-1}^0 x\sqrt{1-x}dx, u=1-x$; 3) $\int_{-1}^2 \sqrt[3]{\left(1-2x\right)^2}dx, u=1-2x$ .

d) 1) $\int_0^1 x^2e^{x^3}dx, u=x^3$; 2) $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{e^{x^2}}, u=x^2$; 3) $\int_1^4 \sqrt{x}e^{x\sqrt{x}}dx, u=x\sqrt{x}$; 4) $\int_1^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx, u=\sqrt{x}$;

5) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx, u=\frac{1}{x}$; 6) $\int_0^1 \left(2^{2x}-3\cdot 2^x\right)dx, u=2^x$; 7) $\int_0^1 \frac{e^xdx}{1+e^x}, u=1+e^x$; 8) $\int_{-2}^{-1} \frac{2^xdx}{1-4^x}, u=2^x$;

e) 1) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx, u=\ln x$; 2) $\int_1^e \frac{\left(1+\ln x\right)^2}{x}dx, u=1+\ln x$; 3) $\int_e^{e^3} \frac{dx}{x\ln x}, u=\ln x$;

4) $\int_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln x\right)}, u=1+\ln x$; 5) $\int_{e^{-2}}^e \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}dx, u=3+\ln x$; 6) $\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}, u=\ln x$;

f) 1) $\int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin 5x dx, u=5x$; 2) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x dx, u=\sin x$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x\sin x dx, u=\cos x$; 5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x\cos^2 x dx, u=\cos x (\sin^2 x=1-\cos^2 x)$;

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx, u=\cos x$; 7) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x dx, u=\sin x$; 8) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx, u=\cos x$;

g) 1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx, u=\arcsin x$; 2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}, u=\arcsin x$;

3) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\arcsin^2 x}}, u=\arcsin x$; 4) $\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}\, x}{1+x^2}dx, u=\mathrm{arctg}\, x$;

5) $\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(\mathrm{arctg}\, x+1\right)}, u=\mathrm{arctg}\, x+1$; 6) $\int_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(\mathrm{arctg}^2 x+\mathrm{arctg}\, x\right)}$, $u=\mathrm{arctg}\, x$;

**2. Să se calculeze integralele:**

$$1)\int_{-1}^{1}\left(3^x+3^{-x}\right)\mathrm{tg}x\,dx;\ 2)\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{arctg}\,x}{3^x+3^{-x}}dx;\ 3)\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin x-x\cos x\right)^3dx;\ 4)\int_{-\pi}^{\pi}e^{x^2}\sin x\,dx;$$

**3. a) Să se calculeze integralele definite:**

$$1)\int_2^3\frac{x-1}{x(x+1)}\mathrm{d}x\ ;\ 2)\int_1^2\frac{x^3\mathrm{d}x}{x+2}\ ;\ 3)\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2},n\ge 3\ \text{şi}\ \lim_{n\to\infty}n^2\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}\ ;$$

$$4)\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{x^3+3x^2+2x}\ ;\ 5)\int_{-2}^{-1}\frac{2x^3+x^2+x+1}{2x^2-x-1}\mathrm{d}x\ ;\ 6)\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2}\ ;\ 7)\int_{-2}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}\ ;$$

$$8)\int_0^1\frac{(4x+1)\mathrm{d}x}{(x+1)^3}\ ;\ 9)\int_{-3}^{-2}\frac{x^2+x+2}{(x-1)^2(x+1)^2}\mathrm{d}x\ ;\ 10)\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2\left(x^2+1\right)}{x^2+4}\mathrm{d}x\ ;\ 11)\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+3\right)(x+1)}\ ;$$

$$12)\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+1}\ ;\ 13)\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}\ ;\ 14)\int_{-1}^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)^2}\ ;\ 15)\int_{-3}^3\frac{\left(x^3+x\right)\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)}.$$

**b) Să se calculeze integralele (a doua substituție) :**

$$1)\int_0^1\frac{\sqrt{x}dx}{x+2},t=\sqrt{x};\ 2)\int_2^7\frac{xdx}{\sqrt{x+2}},t=\sqrt{x+2};\ 3)\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{x}},t=\sqrt{x};\ 4)\int_0^1\frac{(1+x)}{1+\sqrt{x}}dx,$$

$$t=\sqrt{x};\ 5)\int_1^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}},t=\sqrt[4]{x};6)\int_1^{64}\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}},t=\sqrt[6]{x};\ 7)\int_0^1\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1},t=\sqrt[4]{x}\ .$$

**4. Să se calculeze integralele:**

$$1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x+\cos x}dx;\ 2)\int_{-1}^1\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(e^x+1\right)};\ 3)\int_0^{\pi}x\cos^2x\,dx;4)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\mathrm{tg}\,x\right)dx\ .$$

**5. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}a_n$ ,unde $a_n$ este dat de formula:**

$$1)a_n=\sum_{k=1}^n\frac{k}{n^2+k^2};\ 2)a_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n ke^{\frac{k^2}{n^2}};\ 3)a_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\frac{k}{\sqrt{n+k}};$$

$$4)a_n=\sum_{k=1}^n\frac{n}{(n+k)\sqrt{n^2+k^2}};\ 5)a_n=\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^n k^2\sqrt[3]{n^3-k^3}.$$

**6. Să se demonstreze identitațile de mai jos:**

$$1)\ a)\int_x^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2},x>0;\ b)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{3-\cos^3x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{3-\sin^3x}}dx;$$

2) $a)\int_{-2}^{2}\sqrt{1+4x^2}dx=\int_{-3}^{1}\sqrt{4x^2+8x+5}dx$; $b)\int_{-5}^{0}\sqrt{4x^2+20x+26}dx=\int_{0}^{5}\sqrt{4x^2-20x+26}dx$.

**7. Calculând în două moduri o anumită integrală definită să se stabilească egalitățile:**

1) $\frac{C_{2n}^0}{2n+1}-\frac{C_{2n}^1}{2n}+\frac{C_{2n}^2}{2n-1}-...-\frac{C_{2n}^{2n-1}}{2}+\frac{C_{2n}^{2n}}{1}=\frac{1}{2n+1}$;

2) $C_n^1-\frac{1}{2}C_n^2+...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}C_n^n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$;

3) $C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{5}C_n^2-\frac{1}{7}C_n^3+...+\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n+1)}$;

4) $\frac{2^n}{1}C_n^0-\frac{2^{n-1}}{2}C_n^1+\frac{2^{n-3}}{3}C_n^2-...+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

**8. 1) Fie şirul $(I_n)_{n\ge1}, I_n=\int_1^4\frac{dx}{x(1+\sqrt{x})^n}, n\in\mathbb{N}^*$.**

**a) Să se arate că şirul este convergent. b) Să se ararte că $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-2^k}{k\cdot6^k}=\ln\frac{4}{3}$.**

**2) Fie şirul $(I_n)_{n\ge1}$, cu termenul general $I_n=\int_0^1 x(1-x)^n dx, n\in\mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}I_n$, unde $I_n=I_1+I_2+...+I_n$.**

**3) Fie $(I_k)_{k\ge1}$, $I_k=\int_0^k\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2n})}, n\in\mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim_{k\to\infty}I_k$.**

**4) Fie şirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx, x\in\mathbb{N}^*$.**

**a) Arătați că $(I_n)$ este convergent.**

**b) Determinați o relație de recurență între termenii şirului.**

**c) Arătați că $I_n=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. d) Arătați că $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{C_n^k}{2k+1}=I_n$.**

**5) Fie şirul $(I_n)_{n\ge0}$, cu termenul general $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x-x^2}dx, n\in\mathbb{N}$.**

**a) Să se determine o relație de recurență între $I_n$ şi $I_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}^*$.**

**b) Să se arate că $I_n=\frac{3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2n+2)(2n+4)}\cdot\pi$. c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}I_n$.**

6) Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^n dx, n \in \mathbb{N}$. Studiaţi convergenţa şirului şi calculaţi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{I_n}$.

**9.** Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, funcţie continuă. Să se arate că :

1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)$ (conservare interval).

2) $\int_a^b f(x)dx = \int_0^{b-a} f(x+a)dx = \int_0^{b-a} f(b-x)dx$ (translaţie în origine).

**10.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Să se arate că :

1) $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$ (invarianţa la translaţie).

2) $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f\left(\frac{x}{c}\right)dx, c\neq 0$ (dilatarea sau contracţia intervalului de integrare).

**11*.** Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este continuă şi $\int_\alpha^\beta f(x+t)dt \geq \int_\alpha^\beta f(x)dx, \alpha<\beta, x\in\mathbb{R}$ atunci $f(\alpha)=f(\beta)$.

## 2.6. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE

### 1. Aria unei suprafețe plane

Fie $f:[a,b]\to[0,\infty)$ o funcție continuă. Reamintim cele două moduri de abordare a problemei ariei mărginită de curba $y=f(x)$, axa $Ox$ şi dreptele verticale $x=a$ şi $x=b$ (Fig. 1 a)).

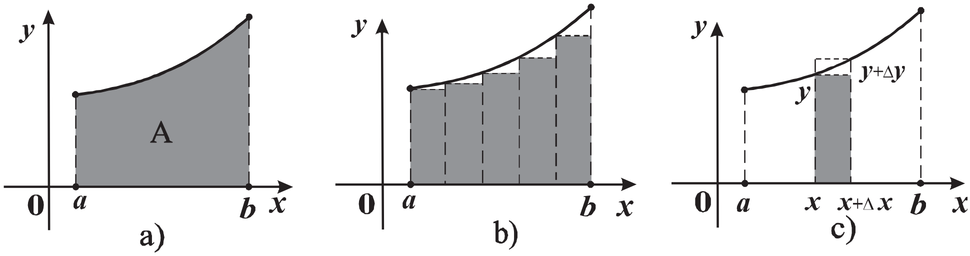



**Fig.1**

Pentru a calcula aria $A$ se împarte figura în benzi verticale (Fig. 1 b)) şi fiecare bandă se aproximează cu aria unui dreptunghi. În final se face suma ariilor dreptunghiului. Această operație ne dă o aproximare a ariei $A$, care este cu atât mai bună cu cât numărul dreptunghiurilor este mai mare.

**Aria ca primitivă a funcției**

În Fig. 1 c), dacă $\Delta A$ este aria zonei haşurate, atunci $y\Delta x<\Delta A<(y+\Delta y)\Delta x$ sau $y<\dfrac{\Delta A}{\Delta x}<y+\Delta y$. Dacă $\Delta x\to 0$ (adică creştem numărul dreptunghiurilor), atunci $\dfrac{\Delta A}{\Delta x}\to\dfrac{dA}{dx}$ şi $\Delta y\to 0$. Deci $\dfrac{dA}{dx}=y$ adică $A=\int y dx$. Dacă $F$ este o primitivă a lui $f$, atunci $A(x)=F(x)+c$. Dacă $x=a$, atunci $A(a)=0=F(a)+c$, adică $c=-F(a)$.

În fine, pentru $x=b$, $A(b)=F(b)-F(a)$ este aria căutată. Deci

$A=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

**Aria ca limită a unui şir de sume Riemann**

Funcția $f$ fiind continuă este integrabilă Riemann. Se consideră şirul de diviziuni nechidistante ale intervalului $[a,b]$ $D_n=\left(a,a+\frac{b-a}{n}=x_1,a+\frac{2(b-a)}{n}=\right.$

$\left.=x_2,\dots,a+\frac{(n-1)(b-a)}{n}=x_{n-1},b\right)$, cu $\|D_n\|=\frac{b-a}{n}$ şi şirul de puncte

intermediare $\xi_1\in\left[a,a+\frac{b-a}{n}\right]$, $\xi_2\in\left[a+\frac{b-a}{n},a+\frac{2(b-a)}{n}\right]$, ... ,

$\xi_n\in\left[a+\frac{(n+1)(b-a)}{n},b\right]$.

Atunci suma Riemann $\sigma_{D_n}(f,\xi)\approx A$. Mai precis $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)(b-a)=$

$=\int_a^b f(x)\,dx=A$. În particular, dacă $\xi_k=\inf f(x)$, atunci $\sigma_{D_n}(f,\xi_k)=$

$=s_{D_n}(f)$, suma Darboux inferioară, iar pentru $\xi_k=\sup f(x)$ avem

$\sigma_{D_n}(f,\xi_k)=S_{D_n}(f)$, suma Darboux superioară.

### 1) Aria unui subgrafic

Fie $f:[a,b]\to[0,\infty)$ o funcție continuă. Atunci mulțimea

$\Gamma_f=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$ (Fig. 2) se numeşte **subgraficul lui $f$** (este mulțimea punctelor din plan cuprinse între graficul lui $f$, axa $Ox$ şi dreptele verticale $x=a,\ x=b$).

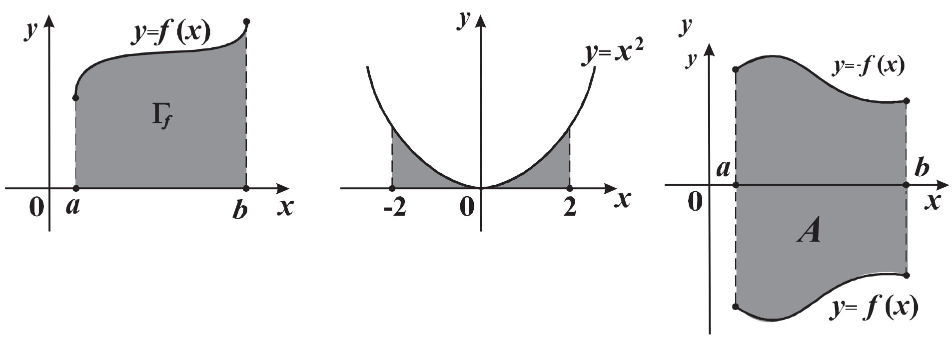



**Fig.2** **Fig.3** **Fig.4**

Am vazut că $\text{aria}(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$, unde $F$ este o primitivă a lui $f$.

**Exemplu.** **Să se calculeze aria figurii determinate de graficul funcției $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, axa $Ox$ și dreptele $x=-2,\ x=2$ (Fig. 3).**

**R.** Aria cerută este egală cu aria $(\Gamma_f)=\int_{-2}^{2}x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2}=\frac{16}{3}$.

**Observație.** **Regiunea hașurată este simetrică în raport cu axa $Oy$ (funcția este pară). Deci aria $(\Gamma_f)=2\int_0^2 x^2dx=2\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{16}{3}$.**

### 2) Aria unei mulțimi situate sub axa $Ox$

Fie $f:[a,b]\to(-\infty,0]$ o funcție continuă. Cum $f\le 0$, se deduce că graficul ei este situat sub axa $Ox$ (Fig. 4). În plus, $\int_a^b f(x)dx\le 0$. Cum aria unei regiuni din plan este pozitivă, atunci convenim ca aria regiunii $A$ să fie egală cu
aria$(A)=-\int_a^b f(x)dx=\int_a^b(-f(x))dx=\int_a^b|f(x)|dx$ sau aria$(A)=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$. În acest caz mulțimea de puncte delimitată de graficul lui $y=-f(x)$, axa $Ox$ și dreptele $x=a,\ x=b$ este simetrica mulțimii $A$ în raport cu $Ox$. Deci cele două mulțimi au aceeași arie.

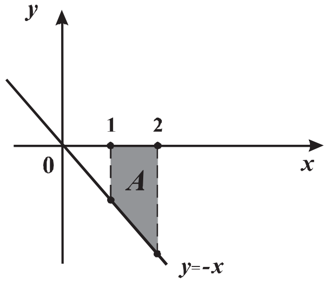


Fig.5

**Exemplu.** **Să se determine aria cuprinsă între graficul lui $f(x)=-x$, axa $Ox$ și dreptele $x=1,\ x=2$ (Fig. 5).**

**R.** **Observăm că $f(x)<0$ dacă $x\in[1,2]$.**

**Deci aria $(A)=\int_1^2 xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2=\frac{3}{2}$.**

### 3) Aria regiunii cuprinse între graficul lui $f$, axa $Ox$ și dreptele $x=a,\ x=b$.

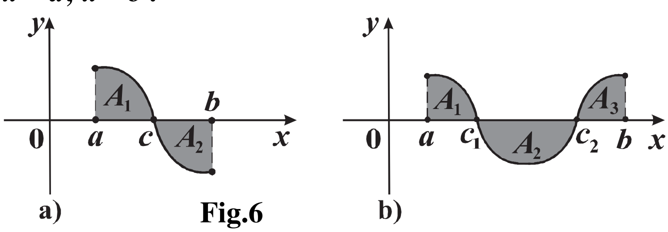


Fig.6

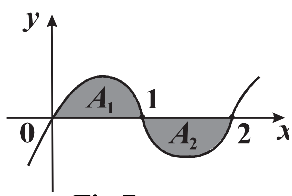


Fig.7

Considerăm cazul mai general cu $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă, care pe intervalul $[a,b]$ ia atât valori pozitive cât şi negative (Fig. 6).
În cazul *a)*, aria figurii haşurate se exprimă prin $aria(A_1)+aria(A_2)=$

$$=\int_a^c f(x)dx-\int_c^b f(x)dx=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx=\int_a^b |f(x)|dx.$$

Pentru cazul *b)* aria figurii haşurate este egală cu $aria(A_1)+aria(A_2)+aria(A_3)$

$$=\int_a^{c_1} f(x)dx-\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx+\int_{c_2}^{b} f(x)dx=\int_a^{c_1} |f(x)|dx+\int_{c_1}^{c_2} |f(x)|dx+$$

$$+\int_{c_2}^{b} |f(x)|dx=\int_a^b |f(x)dx|.$$

În concluzie, dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci aria mulțimii $A$ delimitată de graficul lui $f$, axa $Ox$ şi dreptele $x=a,\ x=b$ este egală cu

$$\boxed{aria\ (A)=\int_a^b |f(x)|dx}$$

Pentru calculul integralei se explicitează $|f(x)|,\ x\in[a,b]$.

**Exemplu. Să se calculeze aria mulțimii *A* determinate de graficul lui $f(x)=x(x-1)(x-2)$, axa *Ox* şi dreptele $x=0, x=2$ (Fig. 7).**

**R.** Aria cerută este egală cu $aria(A)=\int\limits_0^2 |f(x)|dx$, unde $|f(x)|=\begin{cases} x^3-3x^2+2x, & x\in[0,1] \\ -(x^3-3x^2+2x), & x\in(1,2]\end{cases}$.

Deci $aria\ (A)=aria(A_1)+aria(A_2)=\int\limits_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx-\int\limits_1^2 (x^3-3x^2+2x)dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

### 4) Aria regiunii cuprinse între două curbe şi dreptele $x=a,\ x=b$

### a) Curbe nesecante situate deasupra axei *Ox*

Fie $f,g:[a,b]\to[0,\infty)$ şi $f(x)\geq g(x), \forall x\in[a,b]$ (ceea ce înseamnă că graficul lui *f* este situat deasupra graficului funcției *g*) (Fig. 8 a)). Mulțimea de puncte situate între graficele celor două funcții şi dreptele $x=a, x=b$ o notăm prin $\Gamma_{f,g}=\{(x,y)|a\leq x\leq b,\ g(x)\leq y\leq f(x)\}$. Atunci $aria(\Gamma_{f,g})=aria(\Gamma_f)-aria(\Gamma_g)=$

$$=aria(A_1)-aria(A_2)=\int\limits_a^b f(x)dx-\int\limits_a^b g(x)dx=\int\limits_a^b (f(x)-g(x))dx=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

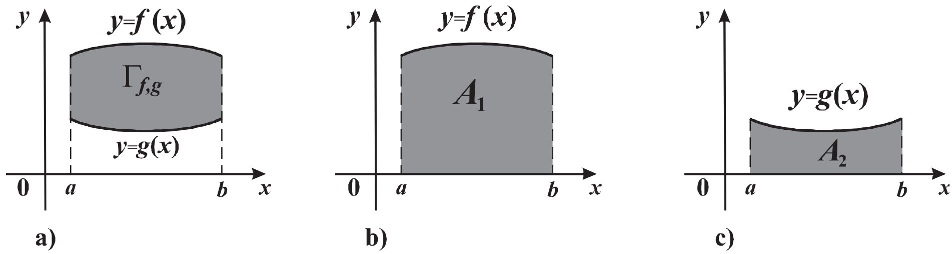



**Fig.8**

**b) Curbe nesecante oarecare**

Vom arăta că dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt continue cu $f(x)\geq g(x),\forall x\in[a,b]$ (graficul lui *f* este deasupra graficului lui *g*) (Fig.9), atunci

$$aria\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx.$$

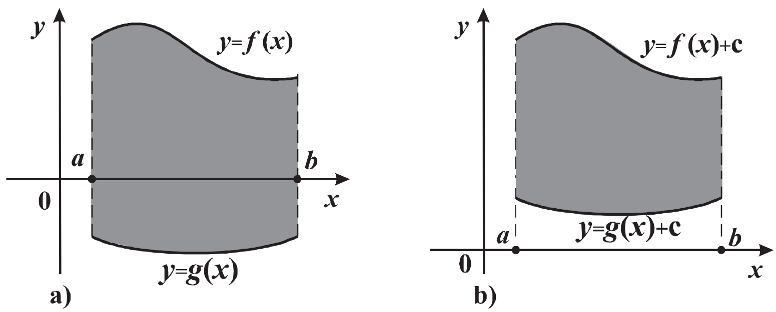



**Fig.9**

Într-adevăr, alegem un număr pozitiv *c* suficient de mare astfel încât $0\leq g(x)+c\leq f(x)+c,\forall x\in[a,b]$ (am translatat graficele în lungul axei *Oy* cu $c>0$, Fig. 9 b)). Atunci $aria\left(\Gamma_{f+c,\,g+c}\right)=\int_a^b\left[\left(f(x)+c\right)-\left(g(x)+c\right)\right]dx=$

$$=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx=aria\left(\Gamma_{f,g}\right).$$

În general, dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt continue, atunci

$$aria\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx.$$

**Exemplu.** **Să se determine aria închisă de parabola $y = x^2$ şi dreapta $y = 2x$ (Fig. 10).**

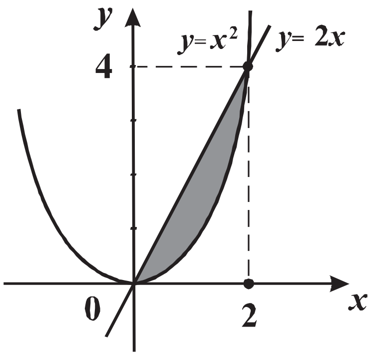



**Fig.10**

**R.** **Fie $f(x)=2x, g(x)=x^2$. Se determină punctele de intersecţie ale curbelor, rezolvând sistemul $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$. Se obţin soluţiile $(0,0)$ şi $(2,4)$. Aria cerută este $aria\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^2\left|2x-x^2\right|dx$.**

**Cum $\left|2x-x^2\right|=2x-x^2$ dacă $x\in[0,2]$, găsim**

$$aria\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=\left.\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2=\frac{4}{3}.$$

**c) Curbe secante oarecare**

Dacă graficele funcţiilor $f, g \to [a,b] \to \mathbb{R}$, continue se intersectează într-un punct (Fig. 11), atunci $aria\left(\Gamma_{f,g}\right)=aria\left(A_1\right)+aria\left(A_2\right)=\int_a^c\left(f(x)-g(x)\right)dx+$ $+\int_c^b\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_a^c\left|f(x)-g(x)\right|dx+\int_c^b\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$. Analog, se procedează dacă sunt mai multe puncte de intersecţie ale graficelor. În Fig. 12 sunt două puncte, iar $aria\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_a^{c_1}\left(f(x)-g(x)\right)dx+$ $+\int_{c_1}^{c_2}\left(g(x)-f(x)\right)dx+\int_{c_2}^{b}\left(f(x)-g(x)\right)dx.$

Deci $aria\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$. Pentru a calcula integrala se explicitează modulul.

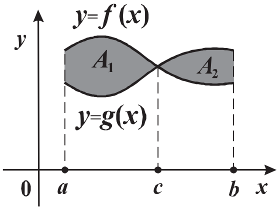



**Fig.11**

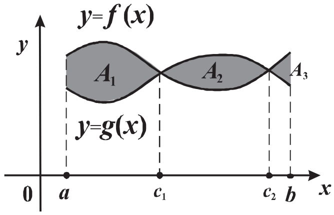



**Fig.12**

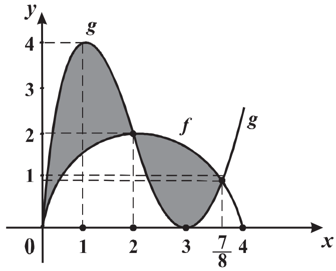



**Fig.13**

**Exemplu. Să se calculeze aria figurii plane cuprinse între graficele funcțiilor $f(x)=-\frac{x^2}{2}+2x$ şi $g(x)=x^3-6x^2+9x$ .**

**R.** Graficele funcțiilor $f,g$ în acelaşi reper cartezian sunt date în Fig. 13. Coordonatele punctelor în care se taie cele 2 curbe sunt date de soluțiile sistemului $\begin{cases} y=x^3-6x^2+9x \\ y=-\frac{x^2}{2}+2x \end{cases}$. Găsim uşor soluțiile: $(0,0),(2,2),\left(\frac{7}{2},\frac{7}{8}\right)$. Avem $aria\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^{\frac{7}{2}}\left|f(x)-g(x)\right|dx$ unde $\left|f(x)-g(x)\right|=\begin{cases} g(x)-f(x), x\in[0,2] \\ f(x)-g(x), x\in\left(2,\frac{7}{2}\right] \end{cases}$. Deci $aria\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^2\left(g(x)-f(x)\right)dx+$ $+\int_2^{\frac{7}{2}}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\frac{937}{192}.$

**Exemple cunoscute. 1. Arătați că aria cercului de ecuație $x^2+y^2-R^2=0$ este egală cu $\pi R^2\left(y=\sqrt{R^2-x^2}, x\in[-R,R]; aria=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx=4\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}dx\right)$.**

**2. Arătați că aria elipsei de ecuație $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ este egală cu $\pi ab$ .**

## Probleme rezolvate

**1. Să se calculeze aria mulțimii $\Gamma_{f,g}$ :**

**a) $f(x)=-\sqrt{x}, g(x)=\sqrt{x}, x\in[0,4]$; b) $f(x)=x^3, g(x)=x^2, x\in[0,1]$;**

**c) $f(x)=-1+\sqrt{2-x^2}, g(x)=\sqrt{1-x^2}$.**

**R.** În Fig.14 avem graficele funcțiilor $f,g$ . Ni se cere aria figurii haşurate. Avem:

$$\text{Aria }\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^4\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)dx=2\int_0^4\sqrt{x}dx=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^4=\frac{32}{3}.$$

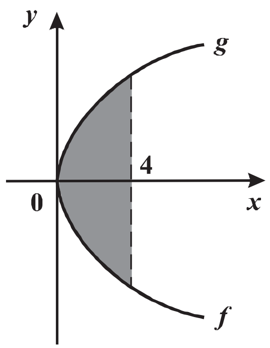



**Fig.14**

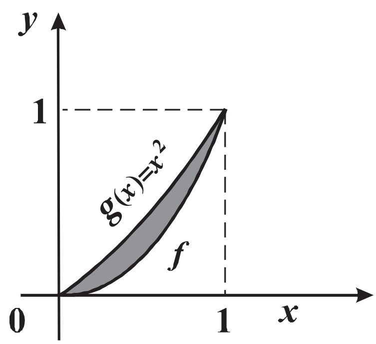



**Fig.15**

b) Graficele celor două funcții sunt date în Fig. 15. Aria figurii haşurate este

$$\text{Aria }\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^1\left(x^2-x^3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{12}.$$

**Observație.** Aria $\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^1\left|x^2-x^3\right|dx$ , iar

$$\left|x^2-x^3\right|=\begin{cases}x^2-x^3, \text{dacă } x^2-x^3\geq 0, x^2(1-x)\geq 0\\ x^3-x^2, \text{dacă } x^2-x^3<0, x^2(1-x)<0\end{cases}.$$

Cum $x^2(1-x)\geq 0$ implică $x\leq 1$ , deducem că $\left|x^2-x^3\right|=x^2-x^3$ pentru $x\in[0,1]$.

**Altfel.** Se determină punctele de intersecție ale curbelor $y=x^2$, $y=x^3$, prin rezolvarea acestui sistem şi găsim punctele $O(0,0)$, $A(1,1)$. Apoi pentru $x=\frac{1}{2}\in[0,1]$, avem $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}<g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$. De aici deducem că $f(x)\le g(x), \forall x\in[0,1]$ şi deci aria $\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^1\left(x^2-x^3\right)dx$.

c) Din $y=-1+\sqrt{2-x^2}$ rezultă $y+1=\sqrt{2-x^2}$, iar de aici prin ridicare la pătrat $(y+1)^2=2-x^2$ sau $x^2+y^2+2y-1=0$, care este ecuația unui cerc cu centrul în $C(0,-1)\in Oy$ şi de rază $r=\sqrt{2}$.

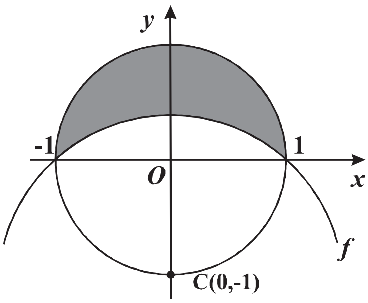


**Fig.16**

De asemenea, $y=\sqrt{1-x^2}$ dă $x^2+y^2-1=0$, care este ecuația cercului unitate. Primul cerc împarte cercul unitate în două porțiuni. Ni se cere aria porțiunii haşurate (Fig. 16) pentru care $g\ge f$. Deci graficele celor două funcții sunt arce din cele două cercuri. Zona haşurată se numeşte **lunula lui Hipocrat.**

Aria $\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}+1-\sqrt{2-x^2}\right)dx=1$.

Aria porțiunii (nehaşurată) cuprinsă între cele două cercuri este egală cu aria cercului unitate $\pi$ din care se scade aria porțiunii haşurate. Avem: $\pi-1$.

**Altfel.** Din condițiile $2-x^2\ge 0, 1-x^2\ge 0$ rezultă $x\in[-1,1]$.

Se determină punctele de intersecție ale curbelor $y=-1+\sqrt{2-x^2}$, $y=\sqrt{1-x^2}$ prin rezolvarea acestui sistem.

Egalăm membrii drepți şi se obține ecuația iraţională $-1+\sqrt{2-x^2}=\sqrt{1-x^2}$ cu soluțiile $x_1=-1, x_2=1$. Deci punctele de intersecție sunt $A(1,0), A'(-1,0)$. Pentru a vedea poziția curbei lui $f$ în raport cu $g$ se calculează $f(x_0), g(x_0)$ unde $x_0\in[-1,1]$. Pentru $x_0=0$ rezultă $g(0)=1>f(0)=-1+\sqrt{2}$. Deci pe $[-1,1], g(x)>f(x)$ şi aria

$$\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_{-1}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx.$$

**2. Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între curbele de ecuații:**

a) $y^2=4x, y=2x$; b) $y^2=8x, x^2=y$; c) $y^2=8(2-x), y^2=24(2+x)$.

**R.** a) Se determină mai întâi punctele de intersecție ale curbelor: $y^2=4x$, care reprezintă o parabolă cu vârful în $O(0,0)$, având axa $Ox$ ca axă de simetrie şi $y=2x$, care reprezintă ecuaţia unei drepte. Pentru aceasta se rezolvă sistemul format din ecuaţiile curbelor $\begin{cases} y^2=4x \\ y=2x \end{cases}$. Se găsesc soluţiile $(x_1=0, y_1=0), (x_2=1, y_2=2)$ (Fig.17).

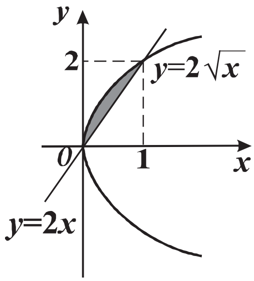



**Fig.17**

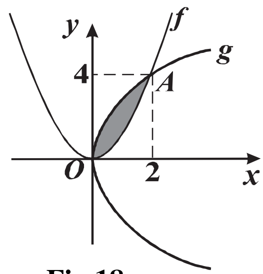



**Fig.18**

Se consideră funcţiile $f, g:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=2x, g(x)=2\sqrt{x}$. Atunci

aria $\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^1\left(2\sqrt{x}-2x\right)dx=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^1-x^2\Big|_0^1=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$.

b) Se determină punctele de intersecţie ale celor două parabole prin rezolvarea sistemului format de ecuaţiile curbelor: $\begin{cases} y^2=8x \\ y=x^2 \end{cases}$. Se găsesc punctele

$O(0,0), A(2,4)$ (Fig. 18).

Acum se consideră funcţiile $f, g:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x$ , $g(x)=2\sqrt{2}\sqrt{x}$ .

Aria $\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^2\left(2\sqrt{2}\sqrt{x}-x^2\right)dx=\frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{16}{3}-\frac{8}{3}=\frac{8}{3}.$

c) Curba $y^2=8(2-x)$ reprezintă o parabolă cu vărful $V(2,0)$ având ca axă de simetrie axa $Ox$, iar curba $y^2=24(2+x)$ este de asemenea o parabolă cu vârful $V'(-2,0)$ ce are ca axă de simetrie tot axa $Ox$ (Fig.19).

Soluţiile sistemului $\begin{cases} y^2=8(2-x) \\ y^2=24(2+x) \end{cases}$ reprezintă punctele de intersecţie ale curbelor. Se găsesc $A_1\left(-1,\sqrt{24}\right), A_2\left(-1,-\sqrt{24}\right)$.

Figura a cărei arie se cere este simetrică în raport cu axa $Ox$. Deci este suficient să găsim aria porțiunii hașurate și apoi prin dublare să determinam aria cerută.

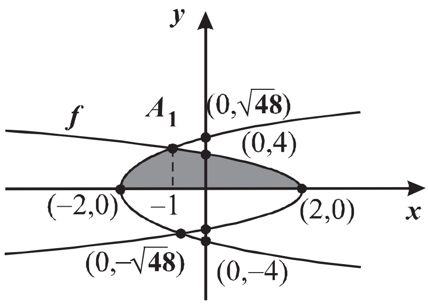



**Fig.19**

Considerăm funcțiile $f, g:[-2,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{24(2+x)}$, $g(x)=\sqrt{8(2-x)}$. Aria regiunii hașurate este $\int_{-2}^{-1}\sqrt{24(2+x)}dx+\int_{-1}^{2}\sqrt{8(2-x)}dx=$ $=\frac{16\sqrt{6}}{3}$. Aria totală este egală cu $\frac{32\sqrt{6}}{3}$.

## Probleme propuse

**1. Să se calculeze aria mulțimii $\Gamma_f$ în cazurile: 1) $f(x)=e^x, x\in[0,1]$; $f(x)=2x+1, x\in[1,3]$; 3) $f(x)=\frac{x^2}{2}, x\in[1,2]$; 4) $f(x)=x^2+3, x\in[-1,1]$; 5) $f(x)=3x^2+2x+1, x\in[-1,2]$; 6) $f(x)=\frac{4}{x+1}, x\in[1,4]$; 7) $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}, x\in[1,2]$; 8) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, x\in[4,9]$; 9) $f(x)=2\sqrt{x}+1, x\in[0,1]$; 10) $f(x)=\sqrt{2x+1}, x\in[0,1]$.**

**2. Să se determine aria regiunii cuprinse între graficul funcției și axa $Ox$ în cazurile:**
**a) 1) $f(x)=-x, x\in[0,1]$; 2) $f(x)=x-1, x\in[-2,0]$; 3) $f(x)=-\sqrt{x}-1, x\in[0,1]$; 4) $f(x)=x^2-4$; 5) $f(x)=9-x^2$; 6) $f(x)=x(x-1)$; 7) $f(x)=x^2-5x+6$;**
**b) 1) $f(x)=2x+1, x\in[-1,0]$; 2) $f(x)=x^2-1, x\in[0,2]$; 3) $f(x)=x^2-3x+2, x\in[0,2]$; 4) $f(x)=x^3-1, x\in[0,2]$; 5) $f(x)=x(x-1)(x+1)$; 6) $f(x)=\cos x, x\in[0,\pi]$.**

**3. Să se calculeze aria mulțimii $\Gamma_{f,g}$ în cazurile:**
**a) 1) $f(x)=2, g(x)=5, x\in[2,4]$; 2) $f(x)=1, g(x)=x^2+2, x\in[0,2]$; 3) $f(x)=x^2$, $g(x)=x-1, x\in[0,1]$; 4) $f(x)=4-x^2, g(x)=3x, x\in[-1,1]$; 5) $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=2x$, $x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$; 6) $f(x)=e^x, g(x)=e^{-x}, x\in[0,1]$; 7) $f(x)=\frac{1}{x^2}, g(x)=x, x\in[1,3]$; 8) $f(x)=|x|, y=1, x\in[-1,1]$; 9) $f(x)=x^2+1, g(x)=3-x, x\in[-2,1]$; 10) $f(x)=x^2$, $g(x)=2-x^2$; 11) $f(x)=x^2+1, g(x)=-x^2+4$; 12) $f(x)=2^x, g(x)=4^x, x=1$;**

13) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}, g(x)=\frac{x^2}{2}$; 14) $f(x)=\frac{2}{x}, g(x)=3-x$; 15) $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=\sqrt{4-3x}$;

16) $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x, x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.

b) 1) $f(x)=x^3, g(x)=2x$; 2) $f(x)=x^2, g(x)=x^3, x\in[0,2]$; 3) $f(x)=x^3-6x^2+9x$, $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$; 4) $f(x)=x^3-6x^2+9x, g(x)=x^2-5x+8$; 5) $f(x)=x^2, g(x)=-x^3+3x^2$, $x\in[0,3]$; 6) $f(x)=x^3-x, g(x)=-x^3+x^2$; 7) $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x, x\in[0,2\pi]$.

**4.** 1) Parabola $y^2=2x$ împarte interiorul cercului $x^2+y^2-8=0$ în două regiuni ale căror arii se cer.

2) Să se determine aria suprafeței plane determinată de parabolele $y=x^2, y^2=x$.

3) Să se determine aria mărginită de elipsa $x^2+2y^2=1$, parabola $y^2=x+1$ și dreapta $x=0$.

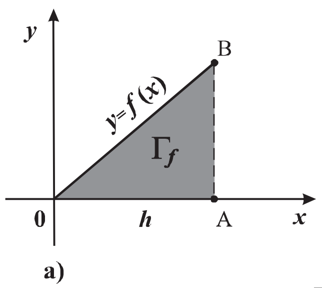
4) Să se determine aria determinată de $y=\frac{2}{x^2}$ și dreptele $y=2x, y=\frac{x}{4}$.

**5.** Pentru ce valoare a lui $a$, aria mărginită de parabola $y=a^2x^2+ax+1$, axa $Ox$ și dreptele $x=0, x=1$ este cea mai mică?

**6.** Pentru ce valoare a lui $a>0$, aria delimitată de curba $y=\frac{x}{6}+\frac{1}{x^2}$, axa $Ox$ și dreptele $x=a, x=2a$ ia cea mai mică valoare?

## 2. Volumul corpurilor de rotație

O altă aplicație a calculului integral (a integralei definite) o constituie determinarea volumelor unor corpuri obținute prin rotația unor suprafețe în jurul unei axe de rotație.
Corpurile astfel generate se numesc **corpuri de rotație.**



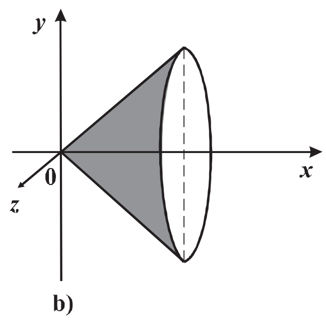
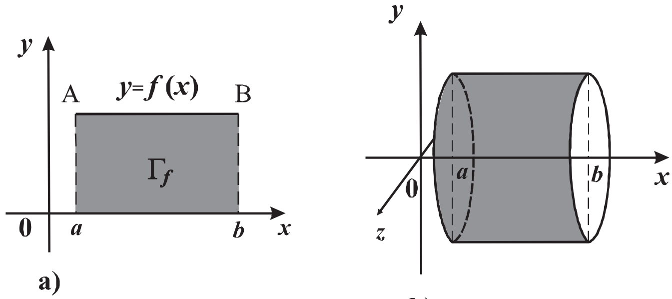




**Fig.20**



a)
b)
Fig.21

Să considerăm segmentul $[OB](y=f(x))$ şi regiunea determinată de acesta, axa

$Ox$ şi $x=h$. Este o suprafaţă triunghiulară pe care o rotim în jurul axei $Ox$ cu $360^0$. Se obţine conul din Fig. 20.b). În Fig. 21.a) segmentul $[AB](y=f(x))$ delimitează cu axa $Ox$ şi dreptele $x=a, x=b$ regiunea haşurată. Prin rotirea ei în jurul axei $Ox$ cu $360^0$ se obţine cilindrul din Fig. 21.b).

Mai general are loc următoarea

**Definiție**. Fie $f:[a,b]\to[0,\infty)$ o funcție continuă. Mulțimea

$$C_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\sqrt{y^2+z^2}\le f(x), a\le x\le b\right\},$$

se numeşte **corpul de rotaţie** determinat de funcţia $f$ sau corpul obţinut prin rotirea subgraficului lui $f$ în jurul axei $Ox$ cu $360^0$ (Fig.22).

Ilustrăm, şi în acest caz cele două modalităţi de determinare a formulei care dă volumul corpului de rotaţie $C_f$.

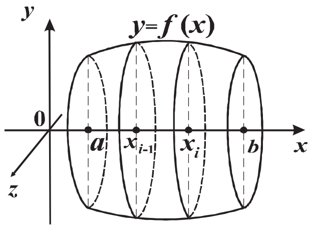
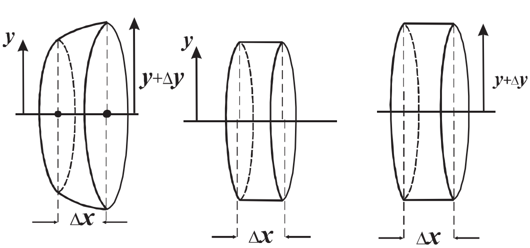


Fig.22



a) Fig.23 b) c)

**Volumul ca primitivă a unei funcții**

În Fig. 23.a) $\Delta$V este volumul corpului generat prin rotirea subgraficului lui *f* pe $[x, x+\Delta x]$ în jurul axei *Ox* cu $360^0$.
Au loc inegalitățile
$\pi y^2 \Delta x < \Delta \mathrm{V} < \pi(y+\Delta y)^2 \Delta x$, unde $\pi y^2 \Delta x$ este volumul cilindrului din Fig. 23.b), iar $\pi(y+\Delta y)^2 \Delta x$ este volumul cilindrului din Fig. 23.c). Am încadrat astfel volumul $\Delta$V între volumele a doi cilindri.

De aici $\pi y^2 \le \dfrac{\Delta \mathrm{V}}{\Delta x} \le \pi(y+\Delta y)^2$. Dacă $\Delta x \to 0$ (adică crește numărul cilindrilor), atunci $\dfrac{\Delta \mathrm{V}}{\Delta x} \to \dfrac{d\mathrm{V}}{dx}$ și $\Delta y \to 0$. Deci $\dfrac{d\mathrm{V}}{dx} = \pi y^2$, adică
$\mathrm{V} = \int \pi y^2 dx$.

Cu un raționament similar celui de la arii se obține

$$\mathrm{V} = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

**Volumul ca limită a unui şir de sume Riemann**

Să considerăm secțiuni perpendiculare pe axa *Ox*. Atunci acestea au formă de disc de arie $\pi f^2(x_i), i=\overline{1,n}$, unde $x_i$ sunt punctele de diviziune ale intervalului $[a,b]$ (Fig.22). volumul corpului poate fi aproximat printr-o sumă de volume de cilindri de raze $f(x_i)$ și înălțimi $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.
Volumul total V se aproximează prin $\mathrm{V} \approx \sum \Delta \mathrm{V} = \pi \sum f^2(x_i)\Delta x$ (care este o sumă Riemann).

De aici $\mathrm{V} = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Are loc următorul rezultat.

**Teoremă.** Dacă $f:[a,b]\to[0,\infty)$ este o funcție continuă, atunci
**1)** corpul de rotație determinat de *f* are volum;
**2)** vol $(C_f) = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

**Exemple cunoscute.** **1. Volumul unui con circular drept de rază $R$ şi înălţime $h$ se obţine prin rotaţia subgraficului funcţiei $f(x)=\frac{R}{h}x, x\in[0,h]$, în jurul axei $Ox$ (Fig.24) şi are valoarea $V=\pi\int_0^h y^2dx=\pi\frac{R^2}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{\pi R^2h}{3}$.**

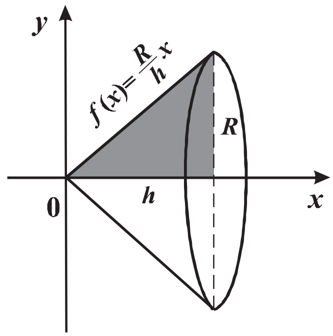



Fig.24

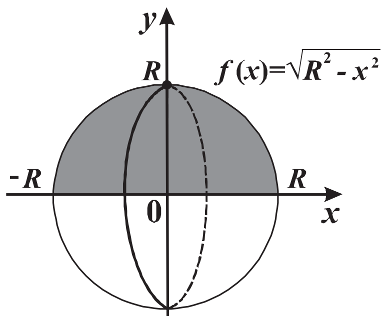



Fig.25

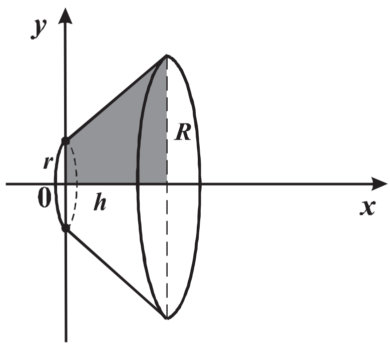



Fig.26

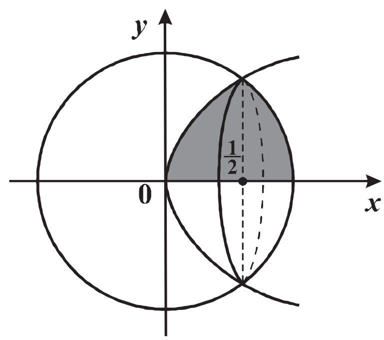



Fig.27

**2. Volumul sferei (bilei) de rază $R$ se obţine prin rotaţia subgraficului funcţiei $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}, x\in[-R,R]$ (semicerc) în jurul axei $Ox$ (Fig. 25) şi are valoarea**

$$V=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\frac{4\pi R^3}{3}$$

**3. Volumul unui trunchi de con de raze $r$, $R$ şi înălţime $h$ se obţine prin rotaţia subgraficului funcţiei $f(x)=\frac{R-r}{h}x+r, x\in[0,h]$ în jurul axei $Ox$ (Fig. 26) şi are expresia**

$$\pi\int_0^h\left[\frac{R-r}{h}x+r\right]^2dx=\frac{\pi h}{3}\left(r^2+rR+R^2\right).$$

## Probleme rezolvate

**1. Să se calculeze volumele corpurilor de rotație determinate de funcțiile:**

**a)** $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-x^2;\ b)\ f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x;\ c)\ f:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R},$ $f(x)=\arcsin x;\ d)\ f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^x;\ e)\ f:[1,e]\to\mathbb{R},\ f(x)=x\ln x;$ $f)\ f:[-2,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=|x-1|-|x+1|$.

**R.** a) Avem: $\mathrm{vol}(C_f)=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx=\frac{16\pi}{15};\ b)\ \mathrm{vol}(C_f)=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\frac{\pi^2}{4}$

c) $\mathrm{vol}(C_f)=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin^2 x\,dx=\pi\left(\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-1\right);\ d)\ \mathrm{vol}(C_f)=\pi\int_0^1 x^2e^{2x}dx=\frac{\pi}{4}\left(e^2-1\right);$

e) $\mathrm{vol}(C_f)=\pi\int_1^e x^2\ln^2 x\,dx=\frac{\left(5e^3-2\right)\pi}{27};\ f)\ \mathrm{vol}(C_f)=\pi\left(\int_{-2}^{-1}4dx+\int_{-1}^{1}4x^2dx+\int_1^2 4dx\right)=\frac{32\pi}{3};$

**2. Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul lui $Ox$ a mulțimii mărginite de cercul $x^2+y^2=1$ și parabola $y^2=\frac{3}{2}x$.**

**R.** Punctele de intersecție ale cercului cu parabola se obțin rezolvând sistemul

$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ y^2=\frac{3}{2}x\end{cases}$, când obținem $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A'\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (Fig. 27). Se consideră funcția

$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{3}{2}x},\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \sqrt{1-x^2},\ x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$. Avem $\mathrm{vol}(C_f)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=$

$$=\pi\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}x\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(1-x^2\right)dx\right]=\frac{19\pi}{48}.$$

## Probleme propuse

**1. Să se calculeze volumele corpurilor de rotație determinate de funcțiile:**

**1)** $f(x)=\sin x, x\in[0,\pi];$ **2)** $f(x)=e^{-x}, x\in[0,2];$ **3)** $f(x)=\frac{4}{x}, x\in[1,4];$ **4)** $f(x)=x^2, x\in[0,3];$

**5)** $f(x)=x^2+1, x\in[2,5];$ **6)** $f(x)=x(x-2), x\in[0,2];$ **7)** $f(x)=\sqrt{x+1}, x\in[0,3];$

8) $f(x)=x\sqrt{1-x}, x\in[0,1]$; 9) $f(x)=\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}, x\in[0,1]$; 10) $f(x)=x^2-3|x|+2, x\in[-1,2]$; 11) $f(x)=||x-1|-2|, x\in[0,3]$.

**2.** **Să se determine volumul corpului obținut prin rotația regiunii, în jurul axei** $Ox$ **, cuprinse între curbă și axa** $Ox$ **în fiecare din cazurile:**

1) $f(x)=(x+1)(x-3)$; 2) $f(x)=1-x^2$; 3) $f(x)=x^2-5x+6$; 4) $f(x)=x^2-3x$.

**3.** **1) Regiunea din plan delimitată de arcul de parabolă** $y^2=4x$ **, axa** $Ox$ **și dreptele** $x=0, x=4$ **se rotește în jurul axei** $Ox$**. Să se determine volumul corpului de rotație.**

**2) Cercul** $x^2+y^2=9$ **se rotește în jurul diametrului care coincide cu axa** $Ox$**. Să se determine: a) volumul segmentului din sferă determinat de două plane perpendiculare pe** $Ox$ **duse la 1 și respectiv 2 unități de centrul sferei, de aceeași parte; b) volumul calotei sferice determinate de un plan situat la două unități de centrul sferei.**

**3) Să se determine volumul generat prin rotația elipsei** $x^2+4y^2=16$ **în jurul axei mari.**

**4) Hiperbola echilaterală** $xy=1$ **se rotește în jurul axei** $Ox$**. Să se determine volumul corpului obținut prin rotația arcului cuprins între** $x=1$ **și** $x=4$**.**

**5) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei** $Ox$**, a regiunii comune a parabolelor** $y^2=4x, x^2=4y$**.**

**4.** **Să se determine volumele corpurilor obținute prin rotația în jurul axei** $Ox$ **a mulțimilor mărginite de curbele:**

1) $y=x, y=x^2$; 2) $y=4x, y=x^2$; 3) $y=x^2, y=\sqrt{x}$; 4) $y=\sqrt{2x}, y=2(x-1)$;

5) $y=\sqrt{x}, x\in[0,8], y=\sqrt{2x-8}, x\in[4,8]$.

## REZUMATUL CAPITOLULUI

| Definiții. Proprietăți | Explicitare. Notații | Exemple |
|---|---|---|
| **Integrala definită a lui Newton** | $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ admite primitive<br>$F:[a,b]\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui $f$<br>$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \overset{not}{=} F(x)\Big\vert_a^b$.<br>Numarul $\int_a^b f$ este integrala definită a funcției $f$ pe $[a,b]$. | $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1 = \frac{1}{3}$.<br>$\int_{-1}^1 \sin x\, dx = -\cos x\vert_{-1}^1 = -\cos 1 + \cos 1 = 0$ |
| **Integrala definită pentru $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continuă** | $f$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă $\forall D_n \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ cu $\Vert D_n\Vert \to 0 (n\to\infty)$, și $\forall \xi^{(n)} = \left(\xi_i^{(n)}\right)$ puncte intermediare, șirul $\left(\sigma_{D_n}\left(f,\xi^{(n)}\right)\right)_n$ este convergent la același număr real. Acest număr se notează $\int_a^b f(x)dx$ și se numește integrala definită a lui Riemann pe $[a,b]$. Deci<br>$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_{D_n}\left(f,\xi^{(n)}\right)$.<br>Dacă $f$ este continuă, atunci cele două tipuri de integrală definită coincid. | $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1}$<br>$D_n = \left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n-1}{n},1\right), \Vert D_n\Vert = \frac{1}{n}\to 0,$<br>$\xi^{(n)} = \left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}=1\right), \sigma\left(f,\xi^{(n)}\right) =$<br>$= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{i}{n}+1} =$<br>$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+n}$. Avem: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{i+n} =$<br>$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(x+1)\vert_0^1 = \ln 2$. |
| **Reguli de integrare**<br><br>**1) Integrala sumei** | $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx +$<br>$+\int_a^b g(x)dx$ (Integrala sumei este egală cu suma integralelor) | $\int_0^1 \left(x^2+\sqrt{x}\right)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \sqrt{x}dx =$<br>$= \frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1 + \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big\vert_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{2}{3} = 1$ |

| | | |
|---|---|---|
| **2) Factor constant** | $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ (Constanta iese de sub integrală) | $\int_0^1 \frac{2}{5}x\,dx = \frac{2}{5}\int_0^1 x\,dx = \frac{2}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big\|_0^1 = \frac{1}{5}$ |
| **3) Integrarea prin părți** | $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big\|_a^b -$ $-\int_a^b v(x)u'(x)dx$ sau scrierea diferențială $\int_a^b u dv = uv\Big\|_a^b - \int_a^b v\,du$ | $I = \int_0^1 xe^x\,dx$ $\begin{cases} u = x \\ v' = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = e^x \end{cases}$ $I = xe^x\Big\|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = xe^x\Big\|_0^1 - e^x\Big\|_0^1 =$ $= e - (e-1) = 1$ |
| **4) Integrarea prin substituție (sau schimbare de variabilă)** | $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt,$ $t = u(x)$ | $I = \int_0^1 x^2 2^{x^3}\,dx$ $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2dx;$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 1 \end{cases}$ $I = \frac{1}{3}\int_0^1 2^u du = \frac{1}{3}\cdot\frac{2^u}{\ln 2}\Big\|_0^1 = \frac{1}{3\ln 2}$ |
| **Proprietăți ale integralei definite** **1) Linearitatea** | $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx +$ $+\beta\int_a^b g(x)dx,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ | $\int_{-1}^1 (2x - 3e^x)dx = 2\int_{-1}^1 x\,dx - 3\int_{-1}^1 e^x dx =$ $= x^2\Big\|_{-1}^1 - 3e^x\Big\|_{-1}^1 = 0 - 3\left(e - \frac{1}{e}\right) = 3\left(\frac{1}{e} - e\right)$ |
| **2) Aditivitatea la interval** | $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ $c \in (a,b)$ Relația lui Chasles | $I = \int_0^2 \|x-1\|dx; \|x-1\| = \begin{cases} x-1, x \ge 1 \\ 1-x, x < 1 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow I = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ |
| **Aria regiunii determinate de graficul** | $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci | $f(x) = x(x-1), a = -1, b = 2$ |

| | | |
|---|---|---|
| funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele $x=a, x=b, a<b$ | Aria $=\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$ | $f(x)\geq 0, x\in[-1,0]\cup[1,2], f(x)\leq 0,$ $x\in[0,1]$. Atunci: Aria $=\int_{-1}^{0} f(x)dx-$ $-\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$ |
| Aria delimitată de graficele funcțiilor $f, g$ și dreptele $x=a, x=b$ | $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Atunci: Aria $=\int_a^b \lvert f(x)-g(x)\rvert dx$ | $f(x)=x^2, g(x)=x$ <br> $\lvert f(x)-g(x)\rvert=\begin{cases} x-x^2, x\in[0,1] \\ x^2-x, x\in(1,2] \end{cases}$ <br> Aria $=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx+\int_1^2\left(x^2-x\right)dx=$ $=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$ |
| Volumul corpului generat de rotația subgraficului funcției $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ în jurul axei $Ox$ | $\mathrm{V}=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ | $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$ <br> $\mathrm{V}=\pi\int_0^1 x^4dx=\pi\left.\frac{x^5}{5}\right\rvert_0^1=\frac{\pi}{5}$ |

## Teste de evaluare

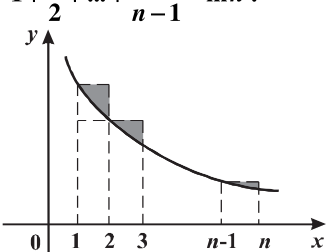
### Testul 1

#### Varianta A

**1.** Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-x^2}$, iar $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două primitive ale lui $f$ pe $\mathbb{R}$. Să se stabilească relația de ordine între numerele $F(2008)-F(2007)$, $G(2008)-G(2007)$.

**2.** Unde este eroarea? Pentru $x\geq 0$, avem $\int_1^x \frac{dt}{t+1}=\ln(1+x)-\ln 2,(1)$. Pentru $t\geq 0$, avem: $\frac{1}{1+t}\leq 1$, iar de aici prin integrare pe $[1,x]$ se obține $\int_1^x \frac{dt}{1+t}\leq x-1,(2)$. Din (1) și (2) rezultă $\ln(x+1)-\ln 2\leq x-1$. Punând în ultima inegalitate $x=0$ se obține $\ln 2\geq 1$, adică $2\geq e$ !

**3.** a) Să se arate că $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, avem inegalitățile:
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}<\ln n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}$;
b) Arătați că suma ariilor porțiunilor hașurate situate deasupra curbei este dată de $C_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}-\ln n$.



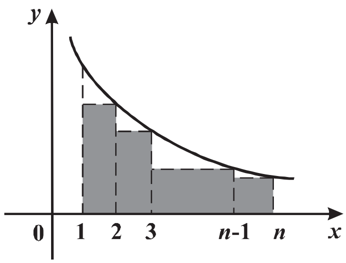

Dacă $n\to\infty$, atunci $C_n\to c$, unde $c$ este constanta lui Euler $(c\approx 0.577, c\in\mathbb{R}-\mathbb{Q})$.
c) Utilizând rațiuni geometrice arătați că $\frac{1}{2}<c<1$.

#### Varianta B

**1.** Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x^2$, iar $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două primitive ale lui $f$ pe $\mathbb{R}$. Să se stabilească relația de ordine între numerele $F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0), G\left(\frac{\pi}{2}\right)-G(0)$.

**2.** Unde este greșeala? Să se calculeze $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$. Substituim $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Deci $t_1=\operatorname{tg}0, t_2=\operatorname{tg}\pi=0$ și integrala devine $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}=\int_0^0\frac{dt}{2+t^2}=0,(1)$. Pe de altă parte $\frac{1}{3+\cos x}\geq\frac{1}{2}$ și deci $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}\geq$ $\geq 2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi,(2)$. Din (1) și (2) rezultă $0\geq\pi$!

**3.** a) Să se calculeze $\int_1^n\frac{dx}{x^3}, n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$;
b) Arătați că suma ariilor dreptunghiurilor hașurate din figură este mai mică decât $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.




c) Deduceți inegalitatea $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}<\frac{3}{2}$.

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3-x, x\in\mathbb{Q}\\ \dfrac{2}{x}, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$

Să se studieze integrabilitatea lui $f$ pe $[0,1]$.

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}(x^2+x+1)e^x, x\ge 0\\ x\ln(-x)+1, x<0\end{cases}$. Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

6. Să se calculeze limita șirului $(a_n)$ cu $a_n=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}$.

7. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\int_0^a (x^2+x)e^{-x}dx=3-\frac{7}{e}$.

8. Fie $I_0=\int_0^1\frac{dx}{7x+4}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{7x+4}dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Să se arate că:

a) $7I_{n+1}+4I_n=\frac{1}{n+1}$;

b) șirul $(I_n)$ este descrescător;

c) $\frac{1}{11(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{11n};\forall n\in\mathbb{N}^*$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{22}{n}(I_n+2I_n+...+nI_n)=1$.

9. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2007}$. Să se arate că există $c\in(0,1)$ astfel încât $f(c)=c^{2006}$.

10. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} xe^{t^3}dt}{\sin^3 x}$.

11. Să se determine aria cuprinsă între parabolele $y=x^2, y^2=8x$.

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x>0\\ x+1, x<0\\ 1, x=0\end{cases}$. Să se studieze integrabilitatea lui $f$ pe $[-1,1]$.

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}(x^2+1)\ln x, x\ge 1\\ \dfrac{x^3-2x+1}{x^2+1}, x<1\end{cases}$. Să se calculeze $\int_0^2 f(x)dx$.

6. Să se calculeze limita șirului $(a_n)$ cu $a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}$.

7. Să se determine $a>0$ pentru care $\int_0^a (3x^2-4x+2)dx\le a$.

8. Se consideră $I_0=\int_0^1\frac{dx}{x^2+6x+10}$,

$I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{x^2+6x+10}, n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că:

a) $I_{n+2}+6I_{n+1}+10I_n=\frac{1}{n+1}$;

b) șirul $(I_n)$ este descrescător;

c) $17I_{n+2}\le\frac{1}{n+1}\le 17I_n, \forall n\ge 1$;

d) $\frac{1}{17(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{17(n-1)}, \forall n\ge 2$;

e) $\lim\frac{34}{n}(I_n+2I_n+...+nI_n)=1$.

9. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continuă cu proprietatea $\int_0^1 f(x)dx=\frac{a+2b}{2}$. Să se arate că există $c\in(0,1)$ astfel încât $f(c)=ac+b$.

10. Să se calculeze:

$\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x^2}\int\limits_0^x e^{t^2}dt$

**11.** **Să se determine volumul corpului obținut prin rotația subgraficului funcției $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=xe^x$ în jurul axei $Ox$.**

## Testul 2

### Varianta A

**1.** **Utilizând sume Darboux inferioare şi superioare să se arate că $0{,}5<\int\limits_1^2\frac{dx}{x}<1$.**

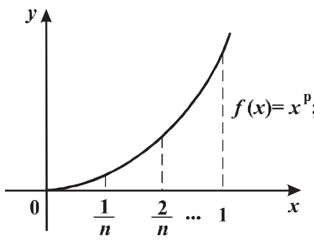
**2.** **Se ştie că: $\int\limits_1^5 f(x)dx=3, \int\limits_4^5 f(x)dx=2,$ $\int\limits_1^7 f(x)dx=5$. Să se calculeze: 1) $\int\limits_5^7 f(x)dx$; 2) $\int\limits_4^7 f(x)dx$; 3) $\int\limits_1^4 f(x)dx$; 4) $\int\limits_7^4 f(x)dx$.**

**3.** **Se consideră $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x^p, p\in\mathbb{N}^*$ şi sumele $s_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right), S_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.**

**1) Utilizând definiția integralei definite ca arie, arătați că $s_n\le\int\limits_0^1 f(x)dx\le S_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.**

**2) Să se arate că $S_n-s_n=\frac{1}{n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.**

**3) Deduceți că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$**




### Varianta B

**1.** **Utilizând sume Darboux inferioare şi superioare să se arate că $0{,}6<\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}<1$.**

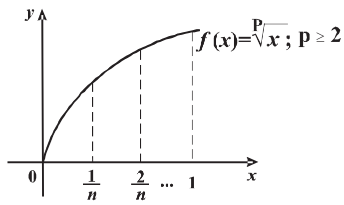
**2.** **Se ştie că: $\int\limits_1^2 f(x)dx=5, \int\limits_1^3 f(x)dx=3,$ $\int\limits_3^5 f(x)dx=2$. Să se calculeze: 1) $\int\limits_1^5 f(x)dx$; 2) $\int\limits_2^3 f(x)dx$; 3) $\int\limits_2^5 f(x)dx$; 4) $\int\limits_3^1 f(x)dx$.**

**3.** **Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[p]{x}, p\in\mathbb{N}, p\ge 2$ şi sumele $s_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right), S_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.**

**1) Utilizând definiția integralei definite ca arie, arătați că $s_n\le\int\limits_0^1 f(x)dx\le S_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.**

**2) Să se arate că $S_n-s_n=\frac{1}{n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.**

**3. Deduceți că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[p]{2}+...+\sqrt[p]{n}}{n\sqrt[p]{n}}=\frac{p}{p+1}$.**



**4.** Se consideră integralele $(I_n)$, unde $I_0=\int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt, I_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt, \nu\in\mathbb{N}^*$.

1) Să se calculeze $I_0, I_1$.

2) Arătați că șirul $(I_n)$ este descrescător.

3) Arătați că $\frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{\sqrt{2}}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ și determinați $\lim_{n\to\infty} I_n$. 4) Demonstrați că $0\le\sqrt{2}-\sqrt{1+t}\le (1-t)/\sqrt{2}, t\in[0,1]$ și deduceți că $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\le I_n\le\frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

Calculați $\lim_{n\to\infty} n\,I_n$.

**5.** 1) Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x+3}$.

2) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{(e^x+1)(e^x+2)(e^x+3)}$.

Să se calculeze: a) $\int\frac{dx}{e^x+a}, a>0$; b) $\int_0^1 f(x)dx$;

c) $\lim_{n\to\infty} s_n$, unde $s_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$.

**6.** Să se arate că dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă și există $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\int_0^1 f(x)dx=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$, atunci există $c\in(0,1)$ astfel încât $f(c)=\frac{1-c^n}{1-c}$.

**7.** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} n\int_{2n}^{2n+1}\frac{x^3dx}{1+x^4}$.

**8.** Fie $I(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^2 x+\alpha^2\cos^2 x}, \alpha\in\mathbb{R}-\{\pm1,0\}$

Să se calculeze $\lim_{\alpha\to1} I(\alpha)$.

**9.** Să se determine funcția derivabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea

**4.** Fie șirul $(u_n)$ cu $u_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{(-1)^n}{2n+1}$

1) Să se arate că

$\left(1-t^2+t^4+...+(-1)^n t^{2n}\right)-\frac{1}{1+t^2}=$

$=(-1)^n\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}, \forall t\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2) Deduceți că $u_n-\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=(-1)\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$.

3) Arătați că $\left|u_n-\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}\right|\le\frac{1}{2n+3}$.

4) Deduceți că $\lim_{n\to\infty} u_n=\frac{\pi}{4}$.

**5.** 1) Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x+3}$.

2) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{(e^x+1)(e^x+2)(e^x+3)}$.

Să se calculeze: a) $\int\frac{dx}{e^x+a}, a>0$; b) Aria regiunii plane cuprinse între graficul lui $f$, axa $Ox$ și dreptele $x=0, x=1$. c) $\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x}$, unde $F$ este o primitivă a lui $f$ pe $\mathbb{R}$.

**6.** Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}, a<b$ o funcție continuă cu proprietățile $f(a)>a^2$ și $3\int_a^b f(x)dx<b^3-a^3$. Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=c^2$.

**7.** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} n^2\int_{2n}^{2n+1}\frac{x^2dx}{1+x^4}$.

**8.** Fie $I(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\,dx}{\sin x+\alpha^2\cos x}, \alpha\in\mathbb{R}$. Să se calculeze $\lim_{\alpha\to1} I(\alpha)$.

**9.** Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, continuă cu

$f(x)=x^2+\int_0^x e^{-t}f(x-t)\,dt$.

10. Fie $f:[0,3]\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{3-x}$.

1) Să se calculeze aria suprafeței determinată de graficul funcției și axa $Ox$.
2) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea subgraficului funcției în jurul lui $Ox$.

proprietatea ca $\int_0^t f(t)\,dt=\frac{2x}{1+x^2}$. Se cere $f(0)$.

10. 1) Să se determine aria mulțimii cuprinse între parabolele $y^2=8x, y=x^2$.
2) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea porțiunii cuprinse între cele două curbe, în jurul axei $Ox$.

## Testul 3 (grilă)

### Varianta A

1. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{x^2}$ are primitivele $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, atunci între numerele $A=F(e)-F(1), B=G(e)-G(1)$ are loc relația: a) $A<B$; b) $A=B$; c) $A>B$.

2. Dacă $\int_1^2 f(x)dx=1, \int_1^3 f(x)dx=3$, atunci $\int_3^2 f(x)dx$ este: a) $-2$; b) 2; c) 3.

3. Dacă $f:\mathbb{R}-\{-1,0\}\to\mathbb{R}$,
$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n(x^2+1)+2}{x(x^n+1)}$, atunci $\int_2^3 f(x)dx$ este egală cu: a) $\frac{1}{2}+\ln 2$; b) $\frac{3}{2}+\ln 2$; c) $\frac{5}{2}+\ln 2$.

4. Limita $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)^3}$ este egală cu: a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{3}{8}$; c) $\frac{3}{2}$.

5. Numărul $a$ pentru care $\int_a^0 \frac{2dx}{(x+1)^3}=$

### Varianta B

1. Dacă $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3^{x^2}$, atunci între numerele $A=F(3)-F(2), B=G(3)-G(2)$ are loc relația: a) $A>B$; b) $A<B$; c) $A=B$.

2. Dacă $\int_0^2 f(x)dx=3, \int_1^3 f(x)dx=4$, $\int_1^2 f(x)dx=2$, atunci $\int_0^3 f(x)dx$ este: a) 4; b) 5; c) 2.

3. Dacă $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}+x^n}{x^{n+1}+2^n}$ atunci $\int_2^3 f(x)dx$ este egală cu: a) $\frac{5}{2}+\ln 2$; b) $\frac{3}{2}+\ln 2$; c) $\frac{1}{2}+\ln 2$.

4. Limita $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt[n]{e^k}$ este egală cu: a) 2; b) 1; c) 3.

5. Numărul $a$ pentru care $12\int_0^{\pi}\sin 3x\cos 3x\,dx=\int_{\frac{1}{4}}^{a}\frac{dx}{x^2}$ este egală cu:

$= -\int_0^a \frac{3dx}{(x+3)^2}$ este egal cu: a) $a=1$; b) $a=0$; c) $a=-1$.

6. Dacă $A=\int_1^2 \ln(1+x)dx, B=\int_1^2 \frac{xdx}{1+x}$, atunci: a) $A>B$; b) $A=B$; c) $A<B$.

7. Dacă $I_n=\int_1^e x\ln^n x\,dx, n\in\mathbb{N}^*$, iar $\alpha=\lim_{n\to\infty} n\,I_n$, atunci: 1) a) $2I_n-n\,I_{n-1}=$ $=e^2$; b) $2I_n+n\,I_{n-1}=e^2$; c) $2I_n+n\,I_n=1$. 2) a) $\alpha=1$; b) $\alpha=e$; c) $\alpha=e^2$.

8. Integrala $\int_1^2 xe^{|x-1|}dx$ este egală cu: a) $2(e-1)$; b) $2e-1$; c) $2e+1$.

9. Limita $\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1} e^{-\sqrt[3]{x}}dx$ este egală cu: a) 1; b) $-1$; c) 0.

10. Limita $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{\sin^3 x}$ este egală cu: a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{3}$; c) 1.

11. Aria delimitată de parabolele $3y=x^2$, $y^2=3x$ este egală cu: a) 1; b) 2; c) 3.

a) $a=\frac{1}{2}$; b) $a=\frac{1}{4}$; c) $a=-\frac{1}{2}$.

6. Dacă $A=\int_1^2 \ln(1+x)dx, B=\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$, atunci: a) $A<B$; b) $A=B$; c) $A>B$.

7. Dacă $I_n=\int_1^e \ln^n x\,dx, n\in\mathbb{N}^*$, iar $\alpha=\lim_{n\to\infty} I_n$, atunci: 1) a) $I_n=e-(n+1)I_{n-1}$; b) $I_n=e^2-n\,I_{n-1}$; c) $I_n=e-n\,I_{n-1}\,(n\geq 2)$ 2) a) $\alpha=1$; b) $\alpha=-1$; c) $\alpha=0$.

8. Integrala $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|dx$ este egală cu: a) $\frac{e-2}{e}$; b) $\frac{2(e-1)}{e}$; c) $\frac{2(e+1)}{e}$.

9. Limita $\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1} 3^{-x^2}dx$ este egală cu: a) 0; b) 1; c) $-\infty$.

10. Limita $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} e^{t^2-1}dt}{\sin^2 x}$ este egală cu: a) 1; b) $\frac{1}{e}$; c) $\frac{1}{e^2}$.

11. Volumul corpului obținut prin rotația regiunii comune delimitate de parabolele $3y=x^2$, $y^2=3x$, în jurul axei $Ox$ este: a) $\frac{80\pi}{10}$; b) $\frac{82\pi}{11}$; c) $\frac{81\pi}{10}$.

# 3. TESTE DE RECAPITULARE FINALĂ

## 1. TESTE PENTRU PREGĂTIREA EXAMENULUI DE BACALAUREAT

### Testul 1 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore

**SUBIECTUL I (30 p.)**

► **Pentru întrebările 1-5 scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen.**

(3 p.) 1. Câte numere de 3 cifre se pot forma utilizând numai cifre din mulțimea {1, 2}?
a) 6; b) 7; c) 8; d) 9

(3 p.) 2. Cât este suma $\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}$ în grupul $(\mathbb{Z}_6,+)$? a) $\hat{3}$; b) $\hat{2}$; c) $\hat{1}$; d) $\hat{0}$?

(3 p.) 3. Cât este produsul $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3}\cdot\ldots\cdot\hat{6}$ în corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$? a) $\hat{6}$; b) $\hat{2}$; c) $\hat{3}$; d) $\hat{4}$?

(3 p.) 4. Câte soluții are ecuația $2^{x^2}=2^x$ în mulțimea numerelor reale?
a) 1; b) 2; c) 3, d) 4.

(3 p.) 5. Care este probabilitatea ca un element din mulțimea {1. 2. .... 10} să fie număr par?
a) 0,4; b) 0,6; c) 0,7; d) 0,5.

► **Pentru întrebările 6-10 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.**

Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+1$.

(3 p.) 6. Cât este $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$?

(3 p.) 7. Cât este $\int_0^1 f(x)dx$?

(3 p.) 8. Câte puncte de inflexiune are graficul funcției $f$?

(3 p.) 9. Cât este $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$?

(3 p.) 10. Cât este $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}\int_0^x f(t)dt$?

► **Pentru subiectele II–IV se cer rezolvările complete.**

**SUBIECTUL II**

Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ în care $AC\cap BD=\{O\}$.

(4 p.) a) Să se arate că dacă $AC\perp BD$, atunci suprafața patrulaterului este egală cu $\frac{AC\cdot BD}{2}$.

(4 p.) b) Să se arate că dacă $AC\perp BD$, atunci $OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=AB^2+CD^2$.

(4 p.) c) Să se arate că dacă $AC\perp BD$, atunci $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

(4 p.) d) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea $AB^2=x+OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\widehat{AOB}$.

(2 p.) e) Să se arate că dacă $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$, atunci $AC\perp BD$.

(2 p.) f) Să se arate că dacă suprafața patrulaterului $ABCD$ este egală cu $\frac{AC\cdot BD}{2}$, atunci $AC\perp BD$.

**SUBIECTUL III (20 p.)**

**Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$, care verifică proprietățile $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ și $f(1)=1$.**

**(4 p.)** a) Să se verifice că $f(0)=0$.

**(4 p.)** b) Să se verifice că $f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

**(4 p.)** c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\forall n\in\mathbb{N}^*$ și $\forall a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$ avem $f(a_1+a_2+...+a_n)=f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)$.

**(4 p.)** d) Să se arate că $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

**(2 p.)** e) Să se arate că $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{Q}$.

**(2 p.)** f) Utilizând eventual faptul că, pentru orice $a<b,a,b\in\mathbb{R}$, există $r\in\mathbb{Q}$ astfel încât $a<r<b$, să se arate că $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

**SUBIECTUL IV (20 p.)**

**Se consideră șirurile** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, a_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{2}{3}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$(b_n)_n\in\mathbb{N}^*,\ b_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+\ln\left(n+\frac{1}{2}\right),\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

**și funcțiile** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ **și** $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}-\ln\left(x+\frac{3}{2}\right)+\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$,

$$g(x)=\frac{1}{x+1}-\ln\left(x+\frac{5}{3}\right)+\ln\left(x+\frac{2}{3}\right),\forall x>0.$$

**(4 p.)** a) Să se calculeze $f'(x), g'(x),\ x>0$.

**(4 p.)** b) Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$.

**(4 p.)** c) Să se verifice că $f'(x)>0,\forall x>0$ și $g'(x)<0,\forall x>0$.

**(2 p.)** d) Utilizând rezultatele de la punctele b) și c), să se arate că $f(x)<0<g(x),\ \forall x>0$.

**(2 p.)** e) Să se arate că șirul $(a_n)$ este strict crescător și șirul $(b_n)$ este strict descrescător.

**(2 p.)** f) Să se arate că $0<b_n-a_n<\frac{1}{6n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

**(2 p.)** g) Să se demonstreze că șirul $(a_n)$ este convergent și limita sa are primele două zecimale egale cu primele două zecimale ale termenului $a_{17}$.

**(Bacalaureat $M_1$, varianta 1, matematică-informatică, iunie-iulie, 2004)**

## Testul 2 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore

**SUBIECTUL I (30 p.)**

**► Pentru întrebările 1–5 scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen.**

**(3 p.)** 1. Care este restul împărțirii polinomului $X^5-1$ la polinomul $X^4+X^3+X^2+X+1$? a) 0; b) 1; c) – 1; d) $X$.

**(3 p.)** 2. Câte submulțimi cu 2 elemente are o mulțime cu 5 elemente? a) 15; b) 5; c) 20; d) 10.

(3 p.) 3. Cât este suma $\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+...+\hat{6}$ în grupul $(\mathbb{Z}_7,+)$? a) $\hat{3}$; b) $\hat{2}$; c) $\hat{1}$; d) $\hat{0}$.

(3 p.) 4. Care este probabilitatea ca un element al inelului $\mathbb{Z}_{10}$ să fie inversabil față de înmulțire? a) 0,4; b) 0,3; c) 0,5; d) 0,6.

(3 p.) 5. Câte soluții reale are ecuația $2^x = 3^x$ ? a) 0; b) 1; c) 2; d) 3.

► Pentru întrebările 6–10 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{2x}+e^{-2x}$.

(3 p.) 6. Cât este $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$ ?

(3 p.) 7. Care este aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției *f*, axa O*x* şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$?

(3 p.) 8. Câte puncte de inflexiune are graficul funcției *f* ?

(3 p.) 9. Cât este $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ ?

(3 p.) 10. Câte puncte de extrem local are funcția *f*?

► Pentru subiectele II-IV se cer rezolvări complete.

**SUBIECTUL II (20 p.)**

Într-un plan se consideră triunghiul $ABC$ şi punctele $D,E\in(BC)$ astfel încât $\widehat{BAD}=\widehat{CAE}=\alpha$. Dacă $XYZ$ este un triunghi, notăm cu $S_{XYZ}$ suprafața sa.

(4 p.) a) Să se determine numărul real *x* pentru care avem egalitatea $S_{XYZ} = xAB\cdot AD\sin\alpha$.

(4 p.) b) Să se arate că $\dfrac{S_{BAD}\cdot S_{BAE}}{S_{CAD}\cdot S_{CAE}}=\dfrac{BD\cdot BE}{CD\cdot CE}$.

(4 p.) c) Să se arate că $\dfrac{S_{BAD}\cdot S_{BAE}}{S_{CAD}\cdot S_{CAE}}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$.

(4 p.) d) Să se calculeze expresia $\dfrac{BD\cdot BE\cdot AC^2}{CD\cdot CE\cdot AB^2}$.

(2 p.) e) Să se arate că, dacă în plus, $AE$ este mediană, atunci $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$.

(2 p.) f) Să se arate că dacă punctele $M,N\in(BC)$ şi $\dfrac{BM\cdot BN}{CM\cdot CN}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$, atunci $\widehat{BAM}=\widehat{CAN}$.

**SUBIECTUL III (20 p.)**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $B=I_3+A$.

(4 p.) a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei *A*.

(4 p.) b) Dacă $X=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ şi $Y=\begin{pmatrix}3&2&1\end{pmatrix}$ să se calculeze matricea $S=A-X\cdot Y$.

(4 p.) c) Să se verifice că $A^2=10\cdot A$.

(4 p.) d) Să se arate că matricea $B$ este inversabilă şi inversa sa este matricea $B^{-1} = I_3 - \frac{1}{11}A$.

(2 p.) e) Să se găsească trei matrice $U, V, W \in M_3(\mathbb{C})$ de rang 1, astfel încât $B = U + V + W$.

(2 p.) f) Să se arate că oricare ar fi două matrice $C, D \in M_3(\mathbb{C})$ de rang 1, avem $C + D \neq B$.

**SUBIECTUL IV (20 p.)**

Se consideră funcţiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $f_0(x) = 1 - \cos x$ şi $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt,\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$.

(4 p.) a) Să se verifice că $f_1(x) = x - \sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(4 p.) b) Să se calculeze $f_2(x), x \in \mathbb{R}$.

(2 p.) c) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că

$$f_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ... + (-1)^n \frac{x}{1!} + (-1)^{n+1} \sin x,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(4 p.) d) Să se arate că graficul funcţiei $f_1$ nu are asimptotă la $\infty$.

(2 p.) e) Să se arate că $0 \le f_n(x) \le 2 \cdot \frac{x^n}{n!},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0$

(2 p.) f) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0,\ \forall x > 0$.

(2 p.) g) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \left( \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(Bacalaureat, M1, varianta 3, matematică-informatică, iunie-iulie, 2004).

## Testul 3 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.

**SUBIECTUL I (30 p.)**

► Pentru întrebările 1–5 scrieţi litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen.

(3 p.) 1. Câte soluţii are ecuaţia $\hat{x}^2 = \hat{x}$ în inelul $\mathbb{Z}_6$ ? a) 1; b) 2; c) 3; d) 4.

(3 p.) 2. Câte elemente inversabile faţă de înmulţire are inelul $\mathbb{Z}_6$ ? a) 2; b) 3; c) 1; d) 4.

(3 p.) 3. Cât este $C_9^2$ ? a) 81; b) 72; c) 36; d) 18.

(3 p.) 4. Care este suma elementelor inelului $\mathbb{Z}_6$ ? a) $\hat{1}$ ; b) $\hat{0}$ ; c) $\hat{2}$ ; d) $\hat{3}$.

(3 p.) 5. Care este probabilitatea ca un element al mulţimii {1, 2, 3, …, 10} să se dividă cu 3? a) 0,3; b) 0,4; c) 0,5; d) 0,2.

► Pentru întrebările 6–10 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen.

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^5 - 5x$.

(3 p.) 6. Cât este $f'(x), x \in \mathbb{R}$ ?

(3 p.) 7. Cât este $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ ?

(3 p.) 8. Cât este $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^5}$ ?

(3 p.) 9. Câte puncte de extreme local are funcția *f*?

(3 p.) 10. Cât este $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ ?

► **Pentru subiectele II–IV se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL II (20 p.)**

**În sistemul cartezian de coordonate $xOy$ se consideră punctele $A(0,1)$, $B(1,0)$ şi $C(1,1)$.**

(4 p.) a) Să se calculeze lungimea segmentului $AB$.
(4 p.) b) Să se determine panta dreptei $AB$.
(4 p.) c) Să se scrie ecuația dreptei $AC$.
(4 p.) d) Să se calculeze aria triunghiului $ABC$.
(2 p.) e) Să se găsească un punct $M$ în planul triunghiului $ABC$ diferit de punctele $A$, $B$ şi $C$, astfel încât lungimile segmentelor $MA$ şi $MB$ să fie numere naturale.
(2 p.) f) Să se găsească $M$ în planul triunghiului $ABC$, diferit de punctele $A$, $B$ şi $C$, astfel încât lungimile segmentelor $MA$ şi $MB$ să fie numere iraționale.

**SUBIECTUL III (20 p.)**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(4 p.) a) Să se calculeze $AB$ şi $BA$.
(4 p.) b) Să se calculeze determinatul şi rangul matricei $A$.
(4 p.) c) Să se verifice că $A^2=B^2=I_3$.
(4 p.) d) Să se arate că matricea $A$ este inversabilă şi să se determine inversa sa.
(2 p.) e) Să se calculeze determinatul matricei $X=A+A^2+...+A^{2004}$.
(2 p.) f) Să se arate că $(AB)^n \neq I_3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

**SUBIECTUL IV (20 p.)**

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+4)^{2004}-x^{2004}$.

(4 p.) a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.
(4 p.) b) Să se verifice că $f(-2-x)+f(-2+x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
(4 p.) c) Să se arate că funcția *f* este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
(4 p.) d) Se să rezolve ecuația $f(x)=0$.
(2 p.) e) Să se calculeze $\int_{-4}^{0} f(x)dx$.
(2 p.) f) Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcției.
(Bacalaureat, $M_1$, varianta 3, Ştiințe ale naturii, august-septembrie, 2004)

## Testul 4 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.

**SUBIECTUL I (30 p.)**

► **Pentru întrebările 1–16 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.**

(3 p.) 1. Cât este produsul $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot...\cdot\hat{8}$ în inelul $(\mathbb{Z}_9,+,\cdot)$?

(3 p.) 2. Care este probabilitatea ca un element $n$ din mulțimea $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ să verifice relația $2^n \leq n+2$?

(3 p.) 3. Dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+3$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este inversa sa, cât este $g(1)$?

(3 p.) 4. Câte submulțimi nevide, cu cel mult două elemente are mulțimea {1, 2, 3, 4}?

(3 p.) 5. Câte soluții reale are ecuația $x^2+3x+2=0$?

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4-2x^2+1$.

(3 p.) 6. Cât este $f'(x), x\in\mathbb{R}$?

(3 p.) 7. Cât este $\int_0^1 f(x)dx$?

(3 p.) 8. Câte puncte de extreme local are funcția *f*?

(3 p.) 9. Câte puncte de inflexiune are graficul funcției *f*?

(3 p.) 10. Cât este $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{n}$?

**SUBIECTUL II (20 p.)**

(4 p.) 11. Care este ecuația dreptei care trece prin punctele $A(4,5)$ şi $C(5,4)$?

(4 p.) 12. Care este lungimea segmentului cu capetele în punctele $A(4,5)$ şi $C(5,4)$?

(4 p.) 13. Care este conjugatul numărului complex $1+i$?

(4 p.) 14. Cât este $\cos 0$?

(2 p.) 15. Care este aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(4,5), B(1,1)$ şi $C(5,4)$?

(2 p.) 16. Care este suma soluțiilor complexe nereale ale ecuației $x^3-1=0$?

► Pentru subiectele III–IV se cer rezolvări complete.

**SUBIECTUL III (20 p.)**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}, O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi menținunea $I(A)=\{aA+bI_2 \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$.

(4 p.) a) Să se arate că $O_2\in I(A)$ şi $I_2\in I(A)$.

(4 p.) b) Să se verifice că, $A^2=A+I_2=O_2$.

(4 p.) c) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei $A$.

(4 p.) d) Să se arate că $A^{2005}=A$.

(2 p.) e) Să se arate că dacă $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ şi $AB=BA$, atunci $B\in I(A)$.

(2 p.) f) Să se arate că oricare $Y\in I(A), Y\neq O_2$ este inversabilă.

**SUBIECTUL IV (20 p.)**

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}x$.

(4 p.) a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

(4 p.) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

(4 p.) c) Să se arate că funcția *f* este strict crescătoare pe $(-\infty,-1]$ şi strict descrescătoare pe $[1,+\infty)$.

(2 p.) d) Să se arate că $0<f(x)\le\dfrac{\pi}{2}, \forall x\in\mathbb{R}$.

(2 p.) e) Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției *f* către $-\infty$.

(4 p.) f) Să se arate că $\int_0^x \operatorname{arctg}(t+a)dt = (x+a)\operatorname{arctg}(x+a) - \frac{1}{2}\ln\left((x+a)^2+1\right) + \frac{1}{2}\ln(a^2+1) - a\operatorname{arctg}a$,

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^*$.

**(Bacalaureat, M1, varianta 2, Şiinţele naturii, iunie-iulie, 2005)**

## Testul 5 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore

**► Pentru întrebările 1–5 scrieţi litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen.**

**SUBIECTUL I (30 p.)**

(3 p.) 1. Cât este suma $C_5^0 - C_5^1 + C_5^2 - C_5^3 + C_5^4 - C_5^5$ ? a) – 1; b) 0; c) 1; d) 5.

(3 p.) 2. Cât este modulul numărului complex $z = \frac{1+2i}{2-i}$ ? a) 1; b) 2; c) 3; d) $\frac{1}{2}$.

(3 p.) 3. Câte soluţii are ecuaţia $\log_2 x + 2\log_x 2 = 3$ ? a) 0; b) 2; c) 3; d) 1.

(3 p.) 4. Câte funcţii bijective $f : A \to A$, $A = \{a, b, c\}$ există? a) 1; b) 2; c) 6; d) 2.

(3 p.) 5. Cât este suma pătratelor rădăcinilor ecuaţiei $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$ ?
a) 1; b) – 1; c) – 2; d) 0.

**►Pentru întrebările 6–10 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen.**

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

(3 p.) 6. Câte asimptote are graficul lui *f*?

(3 p.) 7. Cât este suma $\sum_{k=-10}^{10} f(k)$ ?

(3 p.) 8. Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ .

(3 p.) 9. Câte puncte de extrem are funcţia *f*?

(3 p.) 10. Să se precizeze o primitivă *F* a lui *f* pe $\mathbb{R}$ cu *F*(0) = 0.

**►Pentru subiectele II-IV se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL II**

Se consideră în planul *xOy* dreptele de ecuaţii: $(d_1): y + 5x - 18 = 0$, $(d_2): 5x + y - 18 = 0$, $(d_3): 3y + 2x - 2 = 0$. Notăm $d_1 \cap d_2 = \{B\}, d_2 \cap d_3 = \{C\}$, $d_1 \cap d_3 = \{A\}$.

(4 p.) a) Să se determine coordonatele punctelor *A*, *B*, *C*.

(4 p.) b) Să se calculeze lungimile segmentelor *AB*, *AC*, *BC*.

(4 p.) c) Să se arate că $\sin^2 A + \sin^2 C = 1$.

(4 p.) d) Să se scrie ecuaţia medianei *B*.

(4 p.) e) Să se determine raza cercului circumscris triunghiului *ABC*.

**SUBIECTUL III (20 p.)**

Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z}, a+b = c+d \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

(4 p.) a) Să se arate că *M* este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea matricelor.

(4 p.) b) Să se arate că *M* este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

(4 p.) c) Să se arate că $(M,\cdot)$ este monoid.

(4 p.) d) Să se arate că matricea $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M$ este element inversabil al monoidului *M* dacă şi numai dacă $(a+b)(a-c)=\pm 1$.

(4 p.) e) Să se arate că mulțimea $M_1=\left\{\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a-1 & 2-a \end{pmatrix}\middle| a\in\mathbb{Z}\right\}$ este un subgrup al grupului elementelor inversabile din *M*.

**SUBIECTUL IV (20 p.)**

Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

(4 p.) a) Să se arate că $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1}, \forall x\geq 0$.

(4 p.) b) Să se arate că $f$ admite primitive şi să se determine acestea.

(4 p.) c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(4 p.) d) Dacă $a_n=f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+...+f\left(\dfrac{n}{n}\right), n\in\mathbb{N}^*$ să se arate că

$$a_n=n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right)-\frac{n-1}{2}, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

(4 p.) e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$.

## Testul 6 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore

► Pentru întrebările 1–5 scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen.

**SUBIECTUL I (30 p.)**

(3 p.) 1. Cât este suma 2 +4 + 6 + … + 100? a) 1000; b) 2500; c) 2550; d) 3000.

(3 p.) 2. Mulțimea soluțiilor inecuației $\sqrt{x-2}\left(x^2-3x\right)<0$ este: a) $[2,\infty)$; b) $[2,3)$; c) $(0,3)$; d) $\varnothing$.

(3 p.) 3. Cât este $C_5^2+A_4^2$? a) 22; b) 23; c) 24; d) 26.

(3 p.) 4. Pentru şirul $(a_n)_n, a_n=\dfrac{n}{2n+1}$ are loc inegalitatea $\left|a_n-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{100}$ dacă:

a) $n\geq 20$; b) $n\geq 23$; c) $n\geq 25$; d) $n\geq 30$.

(3 p.) 5. Care este probabilitatea ca alegând un număr $k\in\{1,2,...,20\}$ să avem $i^k=-i$ şi $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^k=1$? a) $\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{1}{3}$; c) $\dfrac{1}{5}$; d) $\dfrac{1}{10}$.

► **Pentru întrebările 6-10 scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.**

**Se consideră funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ .

**(3 p.)** **6. Să se arate că** $\sqrt{x^2+1}f'(x)+f(x)=0, \forall\in\mathbb{R}$ .

**(3 p.)** **7. Cât este** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$?

**(3 p.)** **8. Câte asimptote are graficul funcției *f*?**

**(3 p.)** **9. Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}$ .

**(3 p.)** **10. Să se determine** $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+1}f(x)dx$ .

► **Pentru subiectele II–IV se cer rezolvările complete.**

**SUBIECTUL II (20 p.)**

**În sistemul de coordonate** $xOy$ **se consideră punctele** $A(-2,1), B(1,-2); C(4,2)$.

**(4 p.)** **a) Să se scrie ecuația dreptei** $AB$.
**(4 p.)** **b) Să se determine punctul** $D$ **din plan pentru care** $ABCD$ **este paralelogram.**
**(4 p.)** **c) Să se determine aria palalelogramului** $ABCD$.
**(4 p.)** **d) Să se arate că** $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ **sunt afixele vârfurilor** $A$, $B$, $C$, $D$, **atunci:** $|c-a|^2+|d-b|^2=2\left(|b-a|^2+|c-b|^2\right)$.

**(4 p.)** **e) Exprimați vectorii** $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ **în funcție de vectorii** $\vec{i}$ **și** $\vec{j}$ **și verificați egalitatea** $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ .

**SUBIECTUL III (20 p.)**

**Se consideră matricele** $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **și** $O_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

**(6 p.)** **a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei** $A$.

**(4 p.)** **b) Să se calculeze matricele** $A^2$ **și** $A^3$ .

**(4 p.)** **c) Să se verifice că** $A^3+A^2+A=O_3$ .

**(2 p.)** **d) Să se găsească o matrice** $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), B\neq O_3$ **cu proprietatea** $AB=BA=O_3$ .

**(2 p.)** **e) Să se arate că** $A^{2005}=A$.

**(2 p.)** **f) Să se arate că** $I_3\neq aA+bA^2+cA^3, \forall a,b,c\in\mathbb{R}$ .

**SUBIECTUL IV (20 p.)**

**Fie şirul** $(a_n)$ **cu termenul general** $a_n=\int\limits_0^1\dfrac{x^n}{1+x^2}dx, n\in\mathbb{N}^*, a_0=\int\limits_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}$ .

**(4 p.)** **a) Să se calculeze** $a_0$ **și** $a_1$ .

(4 p.) b) Să se arate că $a_{n+2}+a_n=\frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}$.

(4 p.) c) Stabiliţi dacă $(a_n)$ este convergent.

(4 p.) d) Arătaţi că $\frac{1}{2(n+1)}\le a_n\le\frac{1}{2(n-1)}, \forall n\ge 2$.

(4 p.) e) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(na_n)$.

## Testul 7 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.

**SUBIECTUL I (30 p.)**

► Pentru întrebările 1–5 scrieţi litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen.

(3 p.) 1. Cât este suma $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{2005\cdot 2006}$ ? a) $\frac{2005}{2006}$; b) $\frac{2006}{2005}$; c) 2005; d) 2006.

(3 p.) 2. Câte submulţimi cu 3 elemente are o mulţime cu 5 elemente? a) 8; b) 9; c) 10; d) 11.

(3 p.) 3. Cât este suma $1+i+i^2+...+i^{2006}$ ? a) $i$; b) $-i$; c) 0; d) 1

(3 p.) 4. Care este probabilitatea ca numărul $\log_2 n$, $n\in[1, 64]\cap\mathbb{N}$ să fie întreg?

a) $\frac{7}{64}$; b) $\frac{5}{64}$; c) 0; d) $\frac{1}{2}$.

(3 p.) 5. Dacă matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, are det $(A)$ = 3, atunci $\det(2A)$ este egal cu:
a) 6; b) 12; c) 9; d) 18.

► Pentru întrebările 6-10 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen.

Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

(3 p.) 6. Cât este derivata funcţiei?

(3 p.) 7. Cât este limita $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$?

(3 p.) 8. Cât este suma $f(1)+f(2)+...+f(n)$?

(3 p.) 9. Să se determine o primitivă $F$ a lui $f$ cu $\lim\limits_{x\searrow 0}F(x)=1$.

(3 p.) 10. Cât este $\int\limits_1^2 f(x)dx$ ?

**SUBIECTUL II (20 p.)**

În planul $xOy$ se consideră punctele $A, B, C$ de afixe $a=1+i, b=1-i$ şi respectiv $c=(1-\sqrt{3})i$.

(4 p.) a) Să se calculeze $AB, AC, BC$.

(4 p.) b) Să se determine aria triunghiului $ABC$.

(4 p.) c) Să se determine raza cercului circumscris triunghiului $ABC$.

(4 p.) d) Să se precizeze afixul ortocentrului triunghiului $ABC$.

(4 p.) e) Să se calculeze $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OG}$ în funcţie de versorii $\vec{i},\vec{j}$ şi să se arate că $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$.

**SUBIECTUL III (20 p.)**

**Fie ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ cu coeficienți reali și având rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$**

**(4 p.)** **a) Să se determine $a, b, c$ dacă $x_1 = 1,\ x_2 = 2,,x_3 = 3$.**

**(4 p.)** **b) Să se arate că rădăcinile sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă $2a^3 - 9ab + 27c = 0$.**

**(4 p.)** **c) Să se arate dacă $a^2 < 2b$, atunci ecuația nu are toate rădăcinile reale.**

**(4 p.)** **d) Să se formeze o ecuație cu rădăcinile $y_1 = 2x_1 + x_2 + x_3,\ y_2 = 2x_2 + x_1 + x_3,$ $y_3 = 2x_3 + x_1 + x_2$.**

**(4 p.)** **e) Să se arate că dacă $a = b = c + 1 = 0$, atunci mulțimea rădăcinilor ecuației date formează un grup în raport cu înmulțirea numerelor complexe.**

**SUBIECTUL IV (20 p.)**

**Se consideră funcția $f : (0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1 - (1 - x)^n}{x},\ n \in \mathbb{N}^*$.**

**(4 p.)** **a) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$.**

**(4 p.)** **b) Să se arate că funcția $g : [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0,1] \\ n, & x = 1 \end{cases}$ este integrabilă.**

**(4 p.)** **c) Să se arate că $\int\limits_0^1 g(x)dx = \int\limits_0^1 \left(1 + x + x^2 + ... + x^{n+1}\right)dx$.**

**(4 p.)** **d) Să se arate că $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k x^{k-1}, \forall x \in (0,1]$.**

**(4 p.)** **e) Să se arate că $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^k$.**

## Testul 8 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.

**► La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.**

**SUBIECTUL I (20 p.)**

**În sistemul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(0,-5), B(-1,2), C(4,7), D(5,0)$.**

**(4 p.)** **a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(0,-5)$ și $C(4,7)$ să aparțină dreptei $ax + by = 5$.**

**(4 p.)** **b) Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului *BCD*.**

**(4 p.)** **c) Să se arate că dreptele *AC* și *BD* sunt perpendiculare.**

**(4 p.)** **d) Să se calculeze aria triunghiului *ABC*.**

**(2 p.)** **e) Să se rezolve ecuația $\sin 3x = 0,\ x \in (0, 2\pi)$.**

**(2 p.)** **f) Să se determine modulul, numărului complex $(3 + 4i)\cdot(-1 - i)$.**

**SUBIECTUL II (30 p.)**

**(3 p.)** **1. a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2} = 2$.**

(3 p.) b) Să se determine al treilea termen al dezvoltării $\left(2x-\sqrt[3]{x}\right)^{50}$.

(3 p.) c) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului $f = X^4$ la polinomul $g = X^2 - 3X$.

(3 p.) d) Să se arate că numărul 2007 aparţine progresiei aritmetice 2, 7, 12, 17, … .

(3 p.) e) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x+6$. Să se determine $f\left(f(2)\right)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{2x},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

(3 p.) a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

(3 p.) b) Să se arate că *f* este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(3 p.) c) Să se arate că *f* este convexă pe $\mathbb{R}$.

(3 p.) d) Să se determine asimptota orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei *f*.

(3 p.) e) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei *f* în punctul $A(0,1)$.

## SUBIECTUL III (30 p.)

Se consideră mulţimea $M=\left\{A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$ şi funcţia $f:\mathbb{C}\to M,\ f(a+ib)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}$. Se consideră cunoscute formulele $\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$ şi $\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos x$.

(4 p.) a) Să se arate că $f(z_1\cdot z_2)=f(z_1)\cdot f(z_2),\ z_1,z_2\in\mathbb{C}$.

(4 p.) b) Să se arate că dacă $a^2+b^2=r^2,\ r\in[0,\infty)$ atunci există $t\in[0,2\pi)$ astfel ca $a=r\cos t$ şi $b=r\sin t$.

(4 p.) c) Să se arate că $\begin{pmatrix} r\cos t & -r\sin t \\ r\sin t & r\cos t\end{pmatrix}^n=r^n\begin{pmatrix}\cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt\end{pmatrix},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

(2 p.) d) Să se arate că, dacă $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n\end{pmatrix}$ atunci $a_n^2+b_n^2=\left(a^2+b^2\right)^n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

(2 p.) e) Să se arate că dacă $a^2+b^2<1$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$.

(2 p.) f) Să se arate că dacă matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ verifică relaţia $\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 \\ - & \sqrt{3}\end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$, atunci $X\in M$.

(2 p.) g) Să se determine numărul matricelor $X\in M_2(\mathbb{R})$ care verifică ecuaţia $X^{2007}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$.

## SUBIECTUL IV (20 p.)

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0=1$ şi $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n},\ n\geq 0$.

(4 p.) a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

(4 p.) b) Să se arate că $a_{n+1}^2>a_n^2+2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

(4 p.) c) Să se arate că $\lim_{n\to\infty n} a_n = +\infty$.

(2 p.) d) Să se arate că $\sqrt{2n+1} < a_n < \sqrt{(2n+1)+1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n-1}}$, $\forall n \geq 1$.

(2 p.) e) Să se arate că dacă $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0,\infty)$.

(2 p.) f) Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$.

(2 p.) g) Să se arate că $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right) = \infty$.

**(Varianta 34, M1, Matematică - informatică, 2007)**

## Testul 9 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.

**► La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.**

**SUBIECTUL I (20 p.)**

(4 p.) a) Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{4-3i}{4+3i}$.

(4 p.) b) Să se calculeze lungimea segmentului cu capetele în punctele $A(3,-2)$ și $C(4,-3)$.

(4 p.) c) Să se calculeze produsul de numere complexe $p = i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdot i^7$.

(4 p.) d) Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(3,-2)$ și $C(4,-3)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.

(2 p.) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(3,-2)$, $B(2,2)$ și $C(4,-3)$.

(2 p.) f) Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(5+6i)^2 = a+bi$.

**SUBIECTUL II (30 p.)**

1.

(3 p.) a) Să se calculeze elementul $\hat{2}^{2006}$ în $(\mathbb{Z}_8,\cdot)$.

(3 p.) b) Să se calculeze expresia $E = C_{10}^3 - C_{10}^7 + C_8^8$.

(3 p.) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_5 x = -2$.

(3 p.) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x - 2 = 0$.

(3 p.) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $3^n > 10$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 7x - 3$.

(3 p.) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(3 p.) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3 p.) c) Să se calculeze $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(3 p.) d) Să se arate că funcția *f* este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

**(3 p.)** **e) Să se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n+3}{\ln n-2}$.

**SUBIECTUL III (20 p.)**

**Pe** $M_2(\mathbb{R})$ **se consideră legea de compoziție** $X*Y=X\cdot Y+X+Y$, $X,Y\in M_2(\mathbb{R})$ **și mulțimea**

$$G=\left\{A\in M_2(\mathbb{R})\middle| A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}, a\neq -1\right\}.$$

**(4 p.)** **a) Să se arate că „** $*$ **” este lege de compoziție pe *G*.**

**(4 p.)** **b) Să se arate că legea „** $*$ **” este asociativă.**

**(4 p.)** **c) Să se determine elementul neutru** $E\in M_2(\mathbb{R})$**, în raport cu legea „** $*$ **”.**

**(2 p.)** **d) Să se determine simetrica matricei** $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **în raport cu legea „** $*$ **”.**

**(2 p.)** **e) Să se determine matricele** $X\in G$ **care verifică ecuația** $X*X=3I_2$.

**(2 p.)** **f) Să se determine** $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}^n$**, pentru** $n\in\mathbb{N}^*$.

**(2 p.)** **g) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că**

$$\underbrace{I_2*I_2*...*I_2}_{n\text{ ori } I_n}=\left(2^n-1\right)I_2,\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$$

**SUBIECTUL IV (20 p.)**

**Se consideră funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+\cos x, x\in\mathbb{R}$ **și șirul** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$**, cu** $a_0\in(0,\pi)$ **și** $a_{n+1}=f(a_n), n\in\mathbb{N}$.

**(4 p.)** **a) Să se arate că funcția *f* este strict crescătoare și bijectivă. Pentru fiecare** $n\in\mathbb{N}$**, notăm cu** $b_n$ **unica soluție a ecuației** $f(x)=n$.

**(4 p.)** **b) Să se arate că șirul** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este strict crescător.**

**(4 p.)** **c) Să se arate că** $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$.

**(2 p.)** **d) Să se arate că** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n}=1$.

**(2 p.)** **e) Să se arate că dacă** $a_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ **atunci șirul** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este strict crescător.**

**(2 p.)** **f) Să se arate că dacă** $a_0\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ **atunci șirul** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este strict descrescător.**

**(2 p.)** **g) Să se arate că pentru orice** $a_0\in(0,\pi)$ **șirul** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este convergent și** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{\pi}{2}$.

**(Varianta 46, M1, Matematică - informatică, 2007)**

**Testul 10** **(10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.**
**► La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.**

**SUBIECTUL I (20 p.)**

**În sistemul cartezian** $xOy$ **se consideră punctele** $A(-1,1), B(1,-1), C(2,0)$.

(4 p.) a) Să se determine lungimea segmentului $BC$.
(4 p.) b) Să se determine aria triunghiului $ABC$.
(4 p.) c) Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului $ABC$.
(4 p.) d) Să se calculeze $\cos(\hat{A})$.
(2 p.) e) Să se determine panta dreptei $AB$.
(2 p.) f) Să se arate că punctele $A, B, C$ aparțin cercului de ecuație $(2x-1)^2+(2y-1)^2-10=0$.

**SUBIECTUL II (30 p.)**

**1. Se consideră funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(1+x)^9$.

(3 p.) a) Să se calculeze $f(-1)$,
(3 p.) b) Să se calculeze suma $C_9^0-C_9^1+C_9^2-...-C_9^9$.
(3 p.) c) Să se determine numărul de termeni iraționali din dezvoltarea binomului $f(\sqrt{2})$.
(3 p.) d) Să se determine al treilea termen al dezvoltării binomului $f(\sqrt{2})$.
(3 p.) e) Să se calculeze $\hat{5}^7$ în $\mathbb{Z}_7$.

**2. Se consideră funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

(3 p.) a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.
(3 p.) b) Să se verifice că $f(-x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.
(3 p.) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-\frac{2}{5}}{x-2}$.
(3 p.) d) Dacă $F$ este primitiva lui $f$ care verifică relația $F(0)=1$, să se calculeze $F(1)$.
(3 p.) e) Să se calculeze $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$.

**SUBIECTUL III (20 p.)**

**Se consideră matricea** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **și** $J=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

(4 p.) a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei $A$.
(4 p.) b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=a\cdot A$.
(4 p.) c) Să se arate că există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^n=a^{n-1}A, \forall n\in\mathbb{N}^*$.
(2 p.) d) Să se arate că există matricea coloană $C\in M_{3,1}(\mathbb{R})$ și o matrice linie $L\in M_{1,3}(\mathbb{R})$, astfel ca $A=C\cdot L$.

(2 p.) e) Să se arate că matricea $I_3 + A$ este inversabilă şi să se determine $b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $(I_3 + A)^{-1} = bI_3 + cA$.

(2 p.) f) Să se arate că pentru $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ avem: $(xI_3 + yJ)^n = x^n I_3 + \frac{1}{3}\left((x+3y)^n - y^n\right)J$.

(2 p.) g) Să se arate că dacă $x \neq 0$ şi $x + 3y \neq 0$ atunci matricea $xI_3 + yJ$ este inversabilă şi să se determine inversa acesteia.

**SUBIECTUL IV (20 p)**

Se consideră funcţia $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ pentru $\alpha > 0$ şi şirurile $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ definite prin relaţiile $a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha}, b_n = \int_1^n f(x)dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(4 p.) a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este crescător.

(4 p.) b) Să se arate că funcţia $f$ este descrescătoare.

(4 p.) c) Să se demonstreze că $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k), \forall k \in \mathbb{N}^*$.

(2 p.) d) Să se demonstreze inegalităţile $a_n - 1 \leq b_n \geq a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

(2 p.) e) Pentru $\alpha > 1$, să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$.

(2 p.) f) Să se arate că $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent pentru $\alpha > 1$ şi divergent pentru $\alpha \leq 1$.

(2 p.) g) Să se arate că şirul $(a_n - b_n)_{n \geq 1}$ este convergent, $\forall \alpha > 0$.

**(Varianta 56, M1, Matematică - informatică, 2007)**

## Testul 11 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.

**► La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.**

**SUBIECTUL I (20 p)**

(4 p.) a) Să se calculeze $\sin 90^0 + \sin 270^0$.

(4 p.) b) Să se determine coordonatele punctului de intersecţie al dreptelor $d_1 : x - y = 0$ şi $d_2 : 2x + y - 6 = 0$.

(4 p.) c) Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$, ştiind că dreptele $d_1 : x - y = 0$ şi $d_2 : \alpha x + y - 6 = 0$ sunt perpendiculare.

(4 p.) d) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$.

(2 p.) e) Să se determine ecuaţia tangentei la hiperbola $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$ dusă prin punctul $A(3,2)$.

(2 p.) f) Să se determine aria unui triunghi care are laturile exprimate prin numere naturale şi are perimetrul egal cu 6.

**SUBIECTUL II (30 p)**

1. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x$ şi $g(x) = x^2$.

(3 p.) a) Să se calculeze $(f \circ g)(-1)$ şi $(g \circ f)(-1)$.

(3 p.) b) Să se arate că $f(x+y)=f(x)\cdot f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}$.

(3 p.) c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $f(2x)=2f(x)$.

(3 p.) d) Să se calculeze suma $f(0)+f(1)+...+f(9)$.

(3 p.) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ să verifice inegalitatea $f(x)\geq g(x)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4-4x$.

(3 p.) a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

(3 p.) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3 p.) c) Să se arate că funcția $f$ este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,1]$ și strict crescătoare pe intervalul $[1,\infty)$.

(3 p.) d) Să se arate că funcția $f$ este convexă pe $\mathbb{R}$.

(3 p.) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

**SUBIECTUL III (20 p)**

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}), A\neq\alpha I_2, \alpha\in\mathbb{R}$ și mulțimea $C(A)=\{X\in M_2(\mathbb{R})\mid A\cdot X=X\cdot A\}$.

(4 p.) a) Să se arate că dacă $X=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}\in C(A)$ și $b\neq 0, c\neq 0, a\neq d$ atunci $\dfrac{b'}{b}=\dfrac{c'}{c}=\dfrac{a'-d'}{a-d}$.

(4 p.) b) Să se calculeze $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}^2$ și $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1\end{pmatrix}^2$.

(4 p.) c) Să se arate că $C(A)=\{\alpha A+\beta I_2 \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$.

(2 p.) d) Să se arate că există matrice $X,Y\in M_2(\mathbb{R})$ astfel ca $\det\left(X^2+Y^2\right)<0$.

(2 p.) e) Să se arate că dacă $B\in C(A)$, atunci $A^2+B^2=(A+iB)(A-iB)$.

(2 p.) f) Să se arate că dacă $B\in C(A)$, atunci $\det\left(A^2+B^2\right)\geq 0$.

(2 p.) g) Să se arate că dacă $B, C\in C(A)$, atunci $\det\left(B^2+C^2\right)\geq 0$.

**SUBIECTUL IV ( 20 p )**

Se consideră funcțiile $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde $a\in\mathbb{R}$, $f_a(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$,

$$g(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},\quad h(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

(4 p.) a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

(4 p.) b) Să se arate că pentru orice $a\in\mathbb{R}$, funcția $f_a$ nu are limită în punctul $x=0$.

(4 p.) c) Să se arate că $g$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

(2 p.) d) Să se arate că $h$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

(2 p.) e) Să se arate că $h'(x) = 2g(x) - f_0(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(2 p.) f) Să se arate că $f_a$ admite primitive dacă şi numai dacă $a = 0$.

(2 p.) g) Să se determine valorile lui $a$ pentru care funcția $f_a^2$ admite primitive.

(Varianta 80, M1, Matematică - informatică, 2007)

## Testul 12 (10 puncte din oficiu) – Timp de lucru 3 ore.

► La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.

**SUBIECTUL I (20 p)**

În sistemul cartezian $xOy$ se consideră punctele $O(0,0), A(1,2), B(1,a)$ cu $a \in \mathbb{R}$.

(4 p.) a) Să se determine lungimea segmentului $(OA)$.

(4 p.) b) Să se determine ecuația mediatoarei segmentului $(OA)$.

(4 p.) c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $OA = OB$.

(4 p.) d) Să se determine ecuația cercului de centru $O$ şi rază $OA$.

(2 p.) e) Să se calculeze produsul de numere complexe $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5 \cdot i^6 \cdot i^7$.

(2 p.) f) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{u} = 2 \cdot \vec{i} - 5\vec{j}$ şi $\vec{w} = 5 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$.

**SUBIECTUL II (30 p)**

1.

(3 p.) a) Să se determine probabilitatea ca alegând $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ să avem $2^n \leq n^2$.

(3 p.) b) Să se determine trei numere reale în progresie aritmetică crescătoare, ştiind că suma lor este 9, iar produsul lor este 15.

(3 p.) c) Să se rezolve ecuația $\log_4 x = 2,\ x \in (0,\infty)$.

(3 p.) d) Să se rezolve în mulțimea $[0,\infty)$ ecuația $\sqrt{x+2} = x$.

(3 p.) e) Să se determine valoarea minimă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 6x + 5$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ f(x) = \operatorname{arctg} x$.

(3 p.) a) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}$.

(3 p.) b) Să se demonstreze că funcția $f$ este strict monotonă pe $\mathbb{R}$.

(3 p.) c) Să se determine ecuațiile asimptotelor orizontale ale graficului funcției $f$.

(3 p.) d) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

(3p) e) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

**SUBIECTUL III (20 p)**

Se consideră grupul $S_4$ al permutărilor cu 4 elemente şi permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

şi $e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

**(4 p.)** a) Să se verifice că $\sigma^2=\tau^2=e$.

**(4 p.)** b) Să se arate că $\sigma^{-1}=\sigma$ şi $\tau^{-1}=\tau$.

**(4 p.)** c) Să se găsească o permutare $a\in S_4$ pentru care $a^{-1}\neq a$.

**(2 p.)** d) Să se verifice că $\sigma\cdot\tau\neq\tau\cdot\sigma$.

**(2 p.)** e) Să se determine numărul de elemente ale mulţimii $S_4$.

**(2 p.)** f) Să se arate că permutarea $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ este un element de ordinul 4 în grupul $S_4$.

**(2 p.)** g) Să se arate că orice submulţime $H$ a lui $S_4$ care are cel puţin 13 elemente, conţine două permutări $u$ şi $v$ cu proprietate $u\cdot v\neq v\cdot u$.

**SUBIECTUL IV (20 p)**

Se consideră funcţiile $f_n:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sin x},\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right],\ f_n(0)=n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ şi integralele $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

**(4 p.)** a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin nx}{\sin x},\ n\in\mathbb{N}^*$.

**(4 p.)** b) Să se arate că funcţia este continuă pe intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

**(4 p.)** c) Să se calculeze integralele $I_1$ şi $I_2$.

**(2 p.)** d) Utilizând formula $\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2},\ \forall a,b\in\mathbb{R}$, să se arate că

$$I_n-I_{n-2}=\frac{2}{n-1}\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 3.$$

**(2 p.)** e) Să se arate că $I_{2n-1}=\frac{\pi}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

**(2 p.)** f) Să se arate că $I_{2n}=2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

**(2 p.)** g) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{\pi}{4}$.

**(Varianta 81, M1, Matematică - informatică, 2007)**

## 2. TESTE PENTRU PREGĂTIREA EXAMENULUI DE ADMITERE ÎN FACULTATE

## Testul 1

**1. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2 - x - m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.**

**a) $m \in [1,\infty)$; b) $m = \frac{1}{2}$; c) $m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$; d) $m \in \varnothing$.**

**2. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 + 2x - 5y = -64 \\ x - y = -7 \end{cases}$.**

**a) $\left(2, \frac{3}{2}\right)$; b) $(3,2)$; c) $(2,8)$; d) $(2,9)$.**

**3. Să se rezolve ecuația $\log_2 3 + 2\log_4 x = x^{\log_9 16^{\frac{1}{\log_3 x}}}$. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{16}{3}$; c) 2; d) 0.**

**4. Să se afle restul împărțirii polinomului $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ la polinomul $Q(X) = (X+1)(X-2)$. a) 5*X*+5; b) 0; c) 2*X*–1 d) -3*X*+4**

**5. Fie $x_1, x_2$ rădăcinile ecuației: $\begin{vmatrix} 2-x & x+2 \\ m & x \end{vmatrix} = 0, m \in \mathbb{R}$. Calculați $E = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$.**

**a) $2m^2 - 4$; b) $m^2 - 6m + 4$; c) $6 - m$; d) 2.**

**6. Fie matricea $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $M^3$.**

**a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -6 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -11 & 12 & 6 \\ -9 & -11 & -18 \\ -9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -11 & 12 & 8 \\ 10 & 5 & 4 \\ -9 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.**

**7. Pentru ce valori reale ale lui *m* funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = mx + \ln\left(4 + x^2\right)$ este descrescătoare pentru orice $x \in \mathbb{R}$?**

**a) $m \in (-\infty, 0]$; b) $m \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; c) $m \in \varnothing$; d) $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.**

**8. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^2 + xe^{nx}}{1 + e^{nx}}$. Care este mulțimea punctelor de derivabilitate ale funcției? a) $\mathbb{R}$; b) $\varnothing$; c) $\mathbb{R} - \{0\}$; d) $[0, \infty)$.**

**9. Să se calculeze expresia $E = \frac{C_n^k - C_{n-2}^k - C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-2}^{k-1}}, n,k \in \mathbb{N}, k \geq 2, n \geq k$. a) $\frac{1}{3}$; b) 0; c) 2; d) 1.**

**10. Să se determine primitivele funcției $f : (0,1) \cup (1,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.**

**a) $\ln|\ln x| + \mathcal{C}$; b) $(\ln x)^2 + \mathcal{C}$; c) $2\ln x + \mathcal{C}$; d) $\ln 2$.**

**11. Calculați integrala** $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ **, unde** $f(x)=\max\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}, 3^{x}\right\}, x\in[-1,1]$ **.**

**a) 0; b)** $\frac{4}{\ln 3}$**; c)** $\frac{2}{\ln 4}$ **; d)** $\frac{3}{\ln 3}$ **.**

**(Admitere, Universitatea Braşov, Facultatea Inginerie Electrică şi Calculatoare, 2003).**

## Testul 2

**1. Fie** $A=\{x\in\mathbb{N}, 3x+1<2\log_2(x+4)\}$**. Dacă** $S=\sum_{x\in A} x$ **, atunci a)** $S$ **= 2; c)** $S\geq 7$ **; c)** $S$ **= 3; d)** $S$ **= 4; e)** $S$ **= 1.**

**2. Dacă** $B$ **este coeficientul lui** $x^3$ **din dezvoltarea expresiei** $E(x)=(1+x)^7(1-x)^4$**, atunci a)** $B$ **= 4; b)** $B$ **= – 7; c)** $B$ **= 0: d)** $B$ **= –11; e)** $B$ **= 14.**

**3. Dacă** $\alpha=\left|z_1^2-z_2^2\right|+\left|z_2^2-z_3^2\right|+\left|z_3^2-z_1^2\right|$**, unde** $z_1, z_2, z_3$ **sunt rădăcinile ecuației** $z^3-3iz^2-4z+2i=0$**, atunci: a)** $\alpha=4-\sqrt{2}$ **; b)** $3+\sqrt{5}$ **: c)** $\alpha=4+2\sqrt{5}$ **; d)** $\alpha=5+\sqrt{2}$ **; e)** $\alpha=3+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ **.**

**4. Fie** $M=\left\{(x,y)\middle| A_{2x}^{y-2}=8A_{2x}^{y-3}, 3C_{2x}^{y-2}=8C_{2x}^{y-3}\right\}$**. Dacă** $\alpha=\sum_{(x,y)\in M}(x+y)$**, atunci: a)** $\alpha=\frac{1}{2}$ **; b)** $\alpha=1$ **; c)** $\alpha=7$ **; d)** $\alpha=10$ **; e)** $\alpha=\frac{23}{2}$**.**

**5. Dacă** $M=\sum_{a\in A} a^2$ **, unde** $A=\left\{a\in\mathbb{R}\middle| \text{matricea}\begin{pmatrix}0 & a & -a\\ -3 & -4 & -3a\\ -a & a & 0\end{pmatrix}\text{nu este inversabilă}\right\}$**, atunci: a)** $M=\frac{1}{9}$ **: b)** $M=\frac{1}{4}$ **; c)** $M=1$ **; d)** $M$ **= 2; e)** $M$ **= 5.**

**6. Pe** $\mathbb{Z}$ **se defineşte legea de compoziție** $x\circ y=xy-7x-7y+56$**. Dacă** $p$ **este numărul elementelor simetrizabile în raport cu legea „ ∘ “, atunci: a)** $p$ **= 0; b)** $p$ **= 1; c)** $p$ **= 2; d)** $p$ **= 3; e)** $p$ **= 6.**

**7. Fie funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x-\sqrt{m^2x^2+mx+1}, & x\leq 1\\ \sqrt{x-1}+|m|\sqrt{x}, & x>1\end{cases}$**. Dacă** $A=\{m\in\mathbb{R}| f \text{ continuă pe } \mathbb{R}\}$ **şi** $\alpha=\sum_{m\in A} m^2$ **, atunci a)** $\alpha=1$ **; b)** $\alpha=\frac{34}{25}$ **; c)** $\alpha=\frac{25}{4}$ **; d)** $\alpha=\frac{58}{9}$ **; e)** $\alpha=\frac{81}{64}$ **.**

**8. Se consideră şirul** $(I_n)_{n\geq 0}, I_n=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x}dx$ **. Dacă** $L=\lim_{n\to\infty} I_n$ **, atunci a)** $L$ **= –1; b)** $L$ **= 0; c)** $L=\frac{1}{2}$ **; d)** $L=\frac{\pi}{6}$ **; e)** $L=1$ **.**

**9. Dacă** $L=\lim_{x\to 0}\frac{(\text{arctg}\, x)^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$ **, atunci: a)** $L=0$ **; b)** $L=1$ **; c)** $L=\frac{\pi}{4}$ **; d)** $L=\frac{\pi}{3}$ **; e)** $L=\frac{4}{3}$ **.**

**10.** Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relațiile: $\begin{cases} f(2x+2)+2g(4x+7)=x-1 \\ f(x-1)+g(2x+1)=2x,\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$. Dacă $I=\int_0^2 \frac{f(x)}{g(x)}dx$, atunci: a) $I=-\frac{28}{3}+\frac{26}{9}\ln\frac{13}{7}$; b) $I=\frac{14}{3}-\frac{13}{9}\ln\frac{7}{3}$; c) $I=\frac{14}{9}+\ln\frac{13}{9}$; d) $I=\frac{7}{3}+\frac{13}{2}\ln\frac{7}{9}$; e) $I=4+\ln 2$.

**(Admitere, A.S.E., Contabilitate, Economie generală, Bucureşti, 2003)**

# Testul 3

**♦ Disciplina: Algebră.**

**1.** Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}}-2^{\frac{x-y}{4}}=2 \\ 3^{\ln(2y-x)}=1. \end{cases}$

**2.** Să se rezolve şi să se discute în raport cu parametrul real sistemul: $\begin{cases} x-my+z=m \\ x+y+z=1 \\ mx+y-m^2z=1 \end{cases}$.

**3.** Fie $M=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \middle| x,y\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Să se arate că $M$ este subgrup al grupului $(M_2(\mathbb{Z}),+)$.

b) Să se arate că $M$ este parte strabilă a lui $M_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulțirea şi $(M,\cdot)$ este monoid comutativ.

c) Să se determine elementele inversabile ale monoidului $(M,\cdot)$.

**♦ Disciplina: Analiză matematică.**

**I.** Se consideră funcția $f(x)=\frac{x^2}{x^2+a}e^{\frac{1}{x}}$ pe domeniul maxim de definiție, $a$ fiind parametru real.

1. Pentru ce valori ale lui $a$ funcția are puncte de extrem?
2. Să se reprezinte grafic funcția pentru $a=1$, fără a folosi derivata a doua.

**II.1.** Să se demonstreze că $x\,\mathrm{tg}^2 x<x,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

**2.** Calculați integrala $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx$.

**3.** Folosind rezultatele de la punctele 1) şi 2) arătați că $8\ln 2>4\pi-\pi^2$.

**♦ Disciplina: Geometrie**

În planul euclidian raportat la reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(0,8)$, $B(-4,0)$, $C(6,0)$ şi $P(2,8)$. Fie $Q, R, S$ proiecțiile ortogonale ale lui $P$ pe dreptele $BC, CA, AB$.

1. Să se determine ecuațiile laturilor triunghiului $ABC$.
2. Să se determine coordonatele centrului, raza şi ecuația cercului circumscris triunghiului $ABC$.
3. Să se arate că punctele $Q, R, S$ sunt coliniare şi să se scrie ecuația dreptei determinată de ele.
4. Să se arate că mijlocul segmentului $[PH]$ aparține dreptei $QS$, $H$ fiind ortocentrul triunghiului $ABC$.

**5. Să se descompună vectorii $\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega H}$ în funcție de versorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$ ai axelor $Ox$ şi $Oy$ şi să se arate că $\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}=\overrightarrow{\Omega H}$, $\Omega$ fiind centrul cercului circumscris triunghiul $ABC$.**

**II. Fie elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$. Tangenta la elipsă în punctul $M_0(x_0,y_0)$ al elipsei intersectează axa $Ox$ în punctul $A$ şi axa $Oy$ în punctul $B$. Să se determine poziția punctului $M_0$ astfel încât aria triunghiului $ABC$ să fie minimă.**
**(Admitere, Universitatea „Babeş-Bolyai“, Matematică, Informatică, Cluj-Napoca, 2003)**

# Testul 4

**♦ Algebră**

**1. Fie $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle\|\,|x-8|+|x-1|=7\right\}$. Atunci: a) $A=\varnothing$; b) $A$ este infinită; c) $A$ are 3 elemente; d) $A$ are 7 elemente; e) $A$ = {1, 2}.**

**2. Valoarea expresiei $E=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+...+\ln\frac{2005}{2004}$ este: a) 0; b) 1; c) $\ln 2003$; d) $\ln 2004$; e) $\ln 2005$.**

**3. Dacă ecuația $x^3+9x^2+3x+a=0, a\in\mathbb{R}$ are rădăcinile în progresie aritmetică, atunci $a$ are valoarea: a) 45; b) –45; c) 0; d) 9; e) –117.**

**4. Pe $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziție $x*y=xy-6x-6y+42$. Suma elementelor simetrizabile în raport cu această lege este: a) $\infty$; b) 0; c) 12; d) 2004; e) 10.**

**5. Mulțimea valorilor parametrului $a\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases}(a+3)x+2y+2z=a\\ ax+2y+z=4a\\ x+zy+az=6\end{cases}$ este incompatibil; a) {1, 2}; b) $\varnothing$; c) {–1, 1}; d) {1}; e) {–1}.**

**6. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2&4\\5&8\end{pmatrix}$. Matricea $A-9I_2-4A^{-1}$ este: a) $O_2$; b) $I_2$; c) A; d) $A+I_2$; e) $A-I_2$.**

**♦ Analiză matematică**

**1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int\limits_0^{x^2} e^{t^2}\left(t^3-3t+2\right)dt$. Dacă $A$ ={ $x\in\mathbb{R}\,|\,x$ este punct de extrem al lui $f$}, atunci: a) $A=\varnothing$; b) $A=\{-2,1\}$; c) $A=\{0,-2,1\}$; d) $A=\{0\}$; e) $A=\{-1,0,1\}$.**

**2. Dacă $y=ax+b$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+3x+5}-x$, atunci $a+b$ este: a) $-3$; b) $-\frac{7}{2}$; c) $-\frac{5}{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 0.**

**3. Valoarea integralei $\int\limits_0^1\left(\frac{x}{x+1}\right)^2dx$ este: a) $\frac{3}{2}+\ln 4$; b) $-\frac{3}{2}+\ln 4$; c) $-\frac{5}{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 0.**

**4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^3+xe^{nx}}{1+e^{nx}}$. Numărul punctelor de discontinuitate ale lui $f$ este: a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.**

**5. Valoarea limitei** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10e^{x}-8e^{-x}}{e^{x}+7e^{-x}}$ **este: a)** $\infty$ **; b) 0; c)** $-\dfrac{8}{7}$**; d) 10; e)** $\dfrac{1}{4}$.

**6. Limita şirului** $a_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{8n^3+1}+\sqrt[4]{16n^4+1}}$ **este: a)** $\infty$ **; b) 0; c)** $\dfrac{1}{2}$**; d)** $\dfrac{1}{4}$**; e)** $\dfrac{1}{8}$.

**(Admitere, Univ., Matematică-Informatică, Constanța, 2004)**

## Testul 5

**1. Să se rezolve:**

**a) ecuația:** $4^x-3\cdot 2^x+2=0$ **;**

**b) inecuația** $4^x+2\le 3\cdot 2^x$ **;**

**c) sistemul:** $\begin{cases}4^x-3\cdot 2^x+2\le 0\\ 2x^2-x\ge 0.\end{cases}$

**2. Se consideră matricea** $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & m\end{pmatrix}, m\in\mathbb{R}$.

**a) Să se determine rangul lui *A* în funcție de parametrul *m*.**

**b) Să se discute după *m* şi să se rezolve sistemul:** $\begin{cases}2x+y+3z=1\\ x-y+z=-1\\ x+2y+mz=m\end{cases}$.

**3. Se consideră funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{1+x^2}-ax$.

**a) Să se calculeze** $f'(x)$ **şi** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$ **;**

**b) Să se determine** $a>0$ **astfel încât dreapta** $y=0$ **să fie asimptotă orizontală spre** $+\infty$ **;**

**c) Să se traseze graficul lui *f*, pentru** $a=1$ **;**

**d) Să se calculeze** $\int_0^1 xf(x)dx$.

**4. Fie** $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{x^2+1}dx, n\in\mathbb{N}$.

**a) Să se calculeze** $I_0, I_1$ **;**

**b) Să se demonstreze că şirul** $(I_n)$ **este strict descrescător;**

**c) Să se arate că** $I_{n+2}+I_n=\dfrac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}$.

**(Admitere, Univ., Fac. Automatică, Calculatoare şi Electronică, Craiova, 2004)**

## Testul 6

**♦ Algebră**

**I.1. Se dă matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, unde $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este inelul matricelor pătratice de ordin 3 cu elemente reale, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^3 = I_3$ și că are loc relația $(A - I_3)(A^2 + A + I_3) = O$.**

**2. Fie $\sigma \in S_3$ o permutare din grupul simetric de gradul 3, astfel în cât $\sigma^2 = e$ (*e* este permutarea identică). Demonstrați că există $k \in \{1,2,3\}$ astfel încât $\sigma(k) = k$.**

**3. Demonstrați că polinomul $P = X^3 + \frac{1}{2}X + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.**

**II.1. Fie *G* un grup cu *n* elemente, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că în orice coloană a tablei operației lui *G* apar *n* elemente distincte.**
**2. Fie $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ inelul numerelor întregi. Determinați toate morfismele de inele $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.**
**3. Fie $(\mathbb{C},+,\cdot)$ corpul numerelor complexe. Să se arate că $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definit prin $f(z) = \overline{z}$, este izomorfism de corpuri. ($\overline{z}$ se notează conjugatul numărului complex *z*)**

**♦ Analiză matematică**

**I.1. Fie $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + .. + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că șirul $(H_n)$ este nemărginit.**
**2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și mărginită. Demonstrați că există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0)=x_0$.**
**3. Fie $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x}$. Să se calculeze $f^{(n)}_{(0)}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, iar $f^{(n)}$ se notează derivata de ordin *n* a funcției *f*.**
**II. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x - 1$.**
**a) Reprezentați grafic funcția $g : D \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{f_3(x) - f_2(x)}{f_1(x)}$, unde *D* este domeniul maxim de definiție al funcției *g*.**
**b) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $f_n(x) = 0$ are o unică soluție reală $u_n \in [0,1]$.**
**c) Demonstrați că șirul $(u_n)_{n \geq 1}$ este convergent.**
**d) Să se determine $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.**
**(Admitere, Univ. Tehnică, Facultatea de Informatică, Iași, 2003)**

## Testul 7

**1. Fie ecuația $4mx^2 + 4(1 - 2m)x + 3(m - 1) = 0, m \in \mathbb{R}$.**
**a) Pentru *m* = 1 să se rezolve ecuația.**
**b) Determinați valorile parametrului *m* pentru care ecuația are două rădăcini reale și distincte.**
**c) Determinați valorile lui *m* pentru care ecuația are o rădăcină mai mare decât 1, iar alta mai mică decât 1.**
**d) Determinați valorile lui *m* pentru care ecuația admite rădăcini întregi.**

**2. Fie ecuația $x^3+ax^2+bx+c=0$, având rădăcinile $x_1, x_2, x_3$ și $a,b,c\in\mathbb{R}$.**

**a) Pentru $a=b=c=1$ să se rezolve ecuația.**

**b) Să se determine ecuația care are rădăcinile $y_1, y_2, y_3$ dacă $y_1=3x_1+x_2+x_3$, $y_2=3x_2+x_1+x_3$, $y_3=3x_3+x_1+x_2$.**

**c) Pentru $a=b=c=1$, fie $\varepsilon$ una din rădăcinile ecuației date. Să se arate că $\varepsilon^{2000}+\varepsilon^{2005}+\varepsilon^{2006}+\varepsilon^{2001}=0$.**

**d) Determinați valorile parametrului real $\alpha\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul următor admite soluții nenule: $\begin{cases}\alpha x_1-x_2-x_3=0\\ x_1+4x_2-2x_3=0\\ x_1-2x_2+2x_3=0\end{cases}$.**

**3. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+k}{\sqrt{x}}$, *k* fiind un parametru real.**

**a) Să se determine *k* astfel încât $f'(1)=-1$.**

**b) Pentru $k=3$ să se calculeze $f'(x)$.**

**c) Să se calculeze derivata $f''(x)$ pentru $k=3$.**

**d) Să se reprezinte grafic funcția dată pentru $k=3$, folosind și derivata a doua a funcției *f*.**

**4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2+4x+5}$.**

**a) Să se calculeze primitivele funcției.**

**b) Determinați acea primitivă a funcției *f* care se anulează pentru $x=-2$.**

**c) Fie $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{3-x^2}{(x+2)^n+1}dx,\ n\in\mathbb{N}$. Arătați că $I_n<\dfrac{3}{2^n},\ \forall n\in\mathbb{N}$.**

**d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.**

**(Admitere, Univ., Electrotehnică și Informatică, Oradea, 2005)**

## Testul 8

**♦ Algebră și Analiză matematică**

**1. Dacă $S$ este suma rădăcinilor ecuației $|x-2|+|2x+1|=3$, atunci: a) $s=-\dfrac{2}{3}$; b) $S=\dfrac{2}{3}$; c) $S=0$.**

**2. Dacă *S* este suma rădăcinilor ecuației: $\sqrt{6-x}+\sqrt{x-5}=1$, atunci: a) *S* = 5; b) *S* = 8; c) *S* = 11.**

**3. Dacă $(x_0,y_0)$ și $(x_1,y_1)$ sunt soluțiile sistemului: $\begin{cases}x-y=1\\ x^2-2xy=3,\end{cases}$ iar $S=x_0+y_0+x_1+y_1$, atunci: a) *S* = 0; b) *S* = 2; c) *S* = 5.**

**4. Dacă *P* este produsul rădăcinilor ecuației $5^{x^2}\cdot 125^x=\dfrac{1}{25}$, atunci: a) *P* = 2; b) *P* = –3; c) *P* = 3.**

**5. Dacă termenii unei progresii geometrice de rație $q$ îndeplinesc condițiile $a_2-a_1=3$ și $a_3-a_1=9$, atunci: a) $a_1=1, q=4$; b) $a_1=3, q=1$; c) $a_1=3, q=2$.**

**6. Dacă** $A=\{x\in\mathbb{R}\,\|x-1|\le 2\}$ **şi** $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^3-3x+2=0\}$, **atunci: a)** $A\cap B=\{1\}$; **b)** $A\cap B=\{1,2\}$; **c)** $A\cap B=\{-2,1\}$.

**7. Dacă** $S$ **este suma elementelor matricei** $A$ **care verifică ecuaţia**
$\begin{pmatrix}4 & 10 & -5\\ 6 & 12 & -3\end{pmatrix}+2A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 4 & 21 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & -1 & 11\\ 12 & 1 & 15\end{pmatrix}$, **atunci: a)** $S$ **= 17; b)** $S$ **= 29; c)** $S$ **= 21.**

**8. Matricea** $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & \alpha\\ 1 & 2 & \alpha-1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ **are rangul 2 pentru: a)** $\alpha=-1$; **b)** $\alpha=0$; **c)** $\alpha=1$.

**9. Dacă** $e$ **este elementul neutru pentru legea de compoziţie** $x*y=x+y+4, \forall x,y\in\mathbb{Z}$ **atunci ecuaţia** $x*x*x=e$ **are soluţia: a)** $x=-4$; **b)** $x=-2$; **c)** $x=0$.

**10. Dacă** $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{3n^3+1}{n+5}}$, **atunci: a)** $l=e^3$; **b)** $l=e^2$; **c)** $l=1$.

**11. Funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+2ax-1, & \text{dacă } x\in(-\infty,2]\\ 3x+a, & \text{dacă } x\in(2,\infty)\end{cases}$ **este continuă pe** $\mathbb{R}$ **pentru: a)** $a=-1$; **b)** $a=0$; **c)** $a$ **= 1.**

**12. Fie funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^4+x^3+2x^2-6x$ **şi** $n$ **numărul de puncte de maxim local ale lui** $f$**. Atunci: a)** $n=0$; **b)** $n=1$; **c)** $n=2$.

**13. O primitivă a funcţiei** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xe^x$ **este: a)** $x^2e^x+x$; **b)** $xe^x+e^x$; **c)** $xe^x-e^x$.

**14. Dacă** $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$, **atunci: a)** $I=\pi$; **b)** $I=1$ **c)** $I=0$.

**15. Considerăm funcţia** $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=([x-1]!)\cdot x^2$, **unde** $[x-1]$ **reprezintă partea întreagă a lui** $x-1$.

**Dacă** $a_n=\frac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{3(k-1)}{3k^2+3k+1}\int_k^{k+1}f(x)dx$ **şi** $l=\lim\limits_{x\to\infty}a_n$, **atunci: a)** $l$ **= 0; b)** $l=\infty$; **c)** $l$ **= 1.**

**(Admitere, Univ., Management-Marketing în afaceri Economice, Piteşti, 2004)**

## Testul 9

**♦ Algebră şi Analiză matematică**

**1. Dacă rădăcinile ecuaţiei** $x^2+mx+m+n=0, m,n\in\mathbb{R}$ **verifică relaţiile** $x_1+x_2=3$, $x_1x_2=2$, **atunci: a)** $m$ **= 0,** $n$ **= 1; b)** $m$ **= –3,** $n$ **= 2; c)** $m$ **= 2,** $n$ **= 1; d)** $m$ **= –3,** $n$ **= 5; e)** $m$ **= 3, n= 2.**

**2. Să se rezolve sistemul** $\begin{cases}2x^2-xy-y^2+2x-2y+6=0\\ y-x=1\end{cases}$.

**a)** $x=2, y=1$; **b)** $x=1, y=2$; **c)** $x=-1, y=1$; **d)** $x=0, y=1$; **e)** $x=-1, y=0$.

**3. Fie** $E(z)=z^4-z^3+z^2+z+1-i$. **Alegeţi răspunsul corect pentru** $E(1-i)$; **a) 0; b)** $i$**; c) –1+**$i$**; d) –1–**$i$**; e) 1+**$i$**.**

4. Solțiile ecuației $3^{x^2-3x-2}=9$ sunt: a) $x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2}, x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$; b) $x_1=0, x_2=4$; c) $x_1=4, x_2=-1$; d) $x_1=4, x_2=1$; e) $x_1=3, x_2=2$.

5. Să se calculeze expresia $E=\log_6\frac{1}{18}+\log_6\frac{1}{12}$. a) –3; b) –6; c) 6; d) $\log_6 9$; e) $\log_6 6$.

6. Ecuația $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=20$ este verificată pentru: a) $n$ = 4; b) $n$ = 7; c) $n$ = 6; d) $n$ =2; e) $n\in\varnothing$.

7. Să se scrie termenii $a_3$ și $a_{10}$ ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dacă $a_1=7$ și $r$ = 2: a) 9; 12; b) 8; 21; c) 15; 43; d) 11; 25; e) 14; 28.

8. Fie $f,g\in\mathbb{Q}[X], f(X)=2X^4-3X^2+aX+b, g(X)=X^2-2X+3$. Să se determine $a$ și $b$ astfel încât $f$ să se divide cu $g$.
a) $a$ = 2; $b$ = –1; b) $a$ = –5; $b$ = 4; c) $a$ = 14; $b$ = –3; d) $a,b\notin\mathbb{Q}$; e) $a=2, b\in\mathbb{Q}$.

9. Se dă ecuația $x^3+x^2+\lambda x+8=0$. Să se determine $\lambda\in\mathbb{R}$ știind că ecuația are o rădăcină $x_1=4$. a) $\lambda=10$; b) $\lambda=-10$; c) $\lambda=20$; d) $\lambda=22$; e) $\lambda=-22$.

10. Se dă ecuația $x^3-2x^2+3x+4=0$. Să se calculeze $S=x_1+x_2+x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.
a) $S$ = –1; b) $S$ = 2; c) $S$ = 7; d) $S$ = 5; e) $S$ = 9.

11. Soluția ecuației matriceale $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 6 & 8\end{pmatrix}$ este: a) $X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$; b) $X=\begin{pmatrix}1+i & 3i\\ 2 & -6\end{pmatrix}$;
c) $X=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5} & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; d) $X=\begin{pmatrix}\frac{9}{4} & \frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$; e) $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

12. Fie sistemul liniar: $\begin{cases}x+2y+3z=14\\ 2x+3y+z=11\\ 3x+y+2z=11\end{cases}$. Soluția sistemului este: a) $(1,2,3)$; b) $(-1,2,-3)$; c) $(2,1,2)$; d) $(1,-1,3)$; e) $(0,2,3)$.

13. Să se determine $\alpha\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha x^2}{1-\cos 2x}=1$. a) –1; b) –2; c) 2; d) 1; e) $\frac{1}{2}$.

14. Fie funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in[0,1]\\ 3ax+3, & x\in(1,2]\end{cases}$. Atunci valoarea lui $a$ pentru care funcția $f$ este continuă este: a) 5; b) $\frac{1}{2}$; c) $-\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{3}$; e) 0.

15. Să se determine $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\ln^2 x, & x\in(0,e]\\ \alpha x+\beta, & x\in(e,\infty)\end{cases}$ să fie derivabilă pe domeniul de definiție.
a) $\alpha=\frac{1}{e},\beta=1$; b) $\alpha=e,\beta=1$; c) $\alpha=2,\beta=e$; d) $\alpha=\frac{2}{e},\beta=-1$; e) $\alpha=\beta=2$.

**16. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. Dacă *F* este o primitivă a lui *f*, atunci *F*(5) – *F*(–5) este:**

**a) 2; b) –2; c) 0; d) $\ln 2$; e) $-2+\ln 2$.**

**17. Fie $I=\int\limits_0^1 \dfrac{x^3}{x^2+1}dx$. Atunci *I* este: a) $\dfrac{1}{2}-\ln 2$; b) 0; c) 1; d) $\dfrac{1-\ln 2}{2}$; e) $\ln 2$.**

**18. Să se calculeze aria mulțimii mărginită de graficul funcției $f:\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ și dreptele $x=0, y=0, x=\dfrac{\pi}{4}$.**

**a) $\dfrac{2}{3}$; b) 1+ln2; c) 1; d) 2; e) 2ln2.**

**(Admitere, Univ., Inginerie Mecanică şi Electrică, Ploieşti, 2004)**

## Testul 10

**♦ Analiză matematică**

**1. Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă de trei ori pe (a,b). Să se arate că, dacă există patru puncte distincte pe graficul funcției, care să fie situate pe o parabolă de ecuație $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, atunci:**

**a) $f''(c)=f'(c)$; b) $f^{(3)}(c)=1$; c) $f^{(3)}(c)=0$; d) $f^{(3)}(c)=-1$; e) $f''(c)=f^{(3)}(c)+1$.**

**2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt[3]{x-2}}{x-1}$. a) 0; b) $\dfrac{4}{3}$; c) $\dfrac{1}{4}$; d) $-1$; e) $\infty$.**

**3. $\int\limits_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\dfrac{\ln x}{x}dx$. a) $\pi$; b) 2; c) $\sqrt{2}$; d) 0; e) $\infty$.**

**4. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+ax^2+bx+c, a,b,c\in\mathbb{R}$, are în $x_0=0$ punct de inflexiune și nu are puncte de extrem dacă: a) $a=0, b\geq 0$; b) $a^2-3b<0$; c) $a=c=0$; d) $a=b=c=1$; e) $a=b, c=1$.**

**5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}, a>0$. a) $a^a$; b) $\ln a$; c) $a^a(1+\ln a)$; d) 0; e) $a^a+\ln a$.**

**6. Fie funcția $f:D\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\sqrt{x+1+\sqrt{10x-15}}+\sqrt{x+1-\sqrt{10x-15}}$, unde *D* este domeniul maxim de definiție. Să se studieze derivabilitatea funcției în punctul $x_0=4$.**

**a) $f'(4)=0$; b) $f'(4)=1$; c) $f'(4)=2$; d) $f'(4)=-1$; e) nu există.**

**7. Funcția $f:\mathbb{R}-\{b\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{ax^2}{x-b}$, are asimptotă oblică dreapta $y=x+1$ dacă:**

**a) $a=1, b=-1$; b) $a=b=1$; c) $a=-1, b=1$; d) $a=b=-1$; e) $a=1, b=2$.**

**8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\operatorname{tg}\left(x^a\right)-(\sin x)^a}{x^{a+2}}, a\geq 1$, este: a) 0; b) $\dfrac{a}{a+2}$; c) $\infty$; d) $\dfrac{a}{6}$; e) alt răspuns.**

9. $\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$. a) $\frac{1}{2}$; b) $-\infty$; c) 0; d) 1; e) $\infty$.

10. Mulțimea valorilor parametrului real $m$ pentru care funcția: $f(x)=\begin{cases}|x|^m\sin\frac{1}{x}, & x\in\mathbb{R}-\{0\}\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

este derivabilă, este: a) $\mathbb{R}$; b) $(0,\infty)$; c) $[1,\infty)$; d) $(1,\infty)$; e) alt răspuns.

11. Găsiți toate numerele pozitive $a$ astfel încât $a^x+1\geq 2^x+3^x, \forall x\in\mathbb{R}$. a) 4; b) 6; c) {5, 10}; d) {2, 3}; e) $\{e,\pi\}$.

12. Pentru $x\in(0,\infty)$ fie $f_1(x)=x, f_2(x)=x^{f_1(x)},...,f_{k+1}(x)=x^{f_k(x)}$. Calculați $f_3'(2)$. a) 1; b) $\ln 2$; c) 2; d) alt răspuns; e) 3.

13. Pentru $p\in(1,\infty)$ se consideră că şirul $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, unde $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$. Pentru $n\geq 10$, care dintre afirmații este adevărată?

a) $a_n>\frac{p}{p-1}$; b) $a_n>p$; c) $a_n\in\left(1,\frac{p}{p-1}\right)$; d) $a_n$ nu este mărginit; e) $p<a_n<p+1$.

14. Soluția inecuației $\log_x\frac{2x+7}{5-x}<1$, este: a) (1, 2); b) $\varnothing$; c) (5, 9); d) (5, 10); e) (0, 1).

15. Se notează $\Omega_n=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}, C_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^n x dx$. Se cunoaşte că există $a_n$ astfel ca $\frac{1}{(2n+1)^2}=a_{n-1}\Omega_{n-1}C_{2n-1}-a_n\Omega_n C_{2n+1}, n\in\mathbb{N}$. Se cere să se găsească $a_n$. a) $a_n=n$; b) $a_n=7$; c) $a_n=2$; d) $a_n=4^n$; e) $a_n=\frac{2n+1}{2}$.

16. Se consideră funcția $f(x)=e^{-x}+a(x-1), a\in\mathbb{R}$. Să se determine valorile lui $a$ pentru care $f$ admite un minim. a) $a\in(0,\infty)$; b) $a=-e$; c) $a=-1$; d) $a\in(-1,0)$; e) $a=-7e^2$.
(Admitere, Univ., Ingineri, Sibiu, 2004)

## Testul 11

♦ Algebră şi Analiză matematică

1. Să se determine toate valorile lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\in(-\infty,1]\\ -mx+mn+1, & x\in(1,\infty)\end{cases}$ este monotonă.

a) $m\in(\infty,0]$; b) $m=-4$; c) $m\in\mathbb{R}$; d) $m\in[0,\infty]$; e) $[-2,1)$.

2. Determinați valoarea celui mai mare coeficient binomial al dezvoltării binomului $(a+b)^n$, dacă suma tuturor coeficienților binomiali este egală cu 64.
a) 10; b) 20; c) 60; d) 70; e) 30.

**3. Să se determine toate valorile lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3mx - m^2 = 0$ să admită numai rădăcini reale.**

**a) $\varnothing$ ; b) $\left[-1,-\frac{1}{4}\right]$; c) $\left[-1,\frac{1}{4}\right]$; d) $\left[-\frac{1}{4},1\right]$; e) $\left(-4,1\right]$.**

**4. Să se determine toate numerele complexe $z \in \mathbb{C}$ care verifică ecuația $|z| + z = 1 + 2i$.**

**a) $z = -\frac{1}{2} + i$ ; b) $z_1 = -\frac{1}{2} + i$ , $z_2 = \frac{3}{2} - 2i$ ; c) $z = -\frac{3}{2} + 2i$ ; d) $z = \frac{3}{2} - 2i$ ; e) $z = -\frac{3}{2} + i$**

**5. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\cos \frac{2\pi x}{x+1}\right)^{-x^2}$. a) 0; b) 1; c) $e^{2\pi^2}$ ; d) $e^{-\pi}$; e) $e^{-2\pi^2}$ .**

**6. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt{a^2x^2 - ax + 1}, \ x \le 1 \\ \sqrt{x-1} + |a|\sqrt{x}, \ x > 1 \end{cases}$. Să se determine valorile parametrului real $a$ pentru care $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$. a) $a = -1$ ; b) $a \in \left\{-\frac{3}{5}, 1\right\}$ ; c) $a = 0$ ; d) $a \in \left\{-1, \frac{3}{5}\right\}$ ; e) $a \in \left\{-1, \frac{5}{3}\right\}$.**

**7. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile pe $\mathbb{R}$, astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x + iy) = nf(x) + 2y$ , $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*$.**

**a) $f(x) = \frac{n(n+1)}{2}x + c, c \in \mathbb{R}$ ; b) $f(x) = \frac{x}{n(n+1)} + x, c \in \mathbb{R}$ ; c) $f(x) = n(n+1)x + c, c \in \mathbb{R}$ ; d) $f(x) = \frac{2x}{n(n+1)} + c, c \in \mathbb{R}$ ; e) $f(x) = \frac{4x}{n(n+1)} + x, c \in \mathbb{R}$ .**

**8. Să se determine coeficientul unghiular al tangentei în punctul $\left(e, -e^2\right)$ la graficul funcției $f : \left(0, \infty\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x - x^2 - 1$. a) $e - 1$ ; b) $\frac{1 - 2e^2}{2}$ ; c) $\frac{1 - 2e^2}{e}$ ; d) $\frac{2e^2 + 1}{e}$ ; e) $\frac{2e^2 - 1}{2}$ .**

**9. Care sunt valorile parametrului real $\lambda$ pentru care ecuația $x^3 - 3x^2 - 3x + 5 + \lambda = 0$ admite rădăcini duble? a) $\left\{\pm 4\sqrt{2}\right\}$ ; b) $\varnothing$ ; c) $\left\{\pm 2\right\}$ ; d) $\left\{3, 4\right\}$ ; e) $\left\{1, 3\right\}$ .**

**10. Să se calculeze $\int \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}} dx, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.**

**a) $2\ln\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\right) + \mathcal{C}$ ; b) $\ln\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\right) + \mathcal{C}$ ; c) $\ln\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \frac{2}{\cos\frac{x}{2}}\right) + \mathcal{C}$ ;**

**d) $2\ln\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\right) + \mathcal{C}$ ; e) $2\ln\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) + \mathcal{C}$ .**

**11. Indicați care din valorile de mai jos reprezintă valoarea integralei:** $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\operatorname{tg}x)dx$ .

**a)** $I=\frac{\pi}{3}\ln 3$ **; b)** $I=\frac{\pi}{3}\ln 2$ **; c)** $I=\frac{\pi}{8}\ln 3$ **; d)** $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$ **; e)** $I=\pi\ln 3$ .

# INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

**Capitolul 1. Primitive**

**Derivate.** 2. 1) $f'(g(0))\cdot g'(0)=f'(1)\cdot 2=0\cdot 2=0$; 2) 0; 3) 1; 4) 1; 7) $f'(g(h(0)))\cdot g'(h(0))\cdot h'(0)=$
$=f'(2)\cdot g'(2)\cdot 1=1\cdot 1\cdot 1=1$; 8) 0; 9) 0; 12) 2.

*Excursie matematică.* 1. $N'(t)=1{,}24N(t)$; 3) 985; 2. 1) $A'(t)=A_0e^{kt}$;
$A(5)=\frac{2}{3}A_0\Rightarrow k\approx -0{,}081, A(t)=A_0e^{-0{,}081t}$; 2) $A(t)=\frac{A_0}{2}\Rightarrow kT=-\ln 2\Rightarrow$
$\Rightarrow T=\frac{\ln 2}{0{,}081}\approx 8{,}56$ ani; 4. 1) $V(t)=100\,000(1{,}05)^t$; 2) $V(10)$; 3) $t=\lg 2/\lg 1{,}05$;
5. 2) 17 săptămâni;

**Probleme care conduc la noțiunea de primitivă.** 1. $G(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+k, G(1)=-1\Rightarrow$
$\Rightarrow k=-\frac{5}{6}$; 3. $x(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^2+2t+c; x(0)=2\Rightarrow c=2; x(4)=7\frac{1}{3}$ la dreapta originii;
5. 1) $v(t)=\frac{t^2}{2}+t+c; v(0)=2\Rightarrow c=2\Rightarrow v(t)=\frac{t^2}{2}+t+2\Rightarrow s(t)=\frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2}+2t+k$;
$s(0)=0\Rightarrow k=0$; 6. 1) $g(x)=-\frac{x^2}{2}+3x+c; g(1)=0\Rightarrow c=0$; 7. 1) $y(x)=x^2+x+c$;
$y(1)=3\Rightarrow c=1\Rightarrow y=x^2+x+1$.

**Primitiva unei funcții.** 0. 5) $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitive pentru $f$ pe $\mathbb{R}\Rightarrow F(x)-G(x)=k$;
$x=1\Rightarrow F(1)-G(1)=e=k\Rightarrow F(x)-G(x)=e; x=10\Rightarrow F(10)-G(10)=e$;
1. $g(x)=G'(x)$; *a*) $g(x)=3x^2-10x$; *i*) $g(x)=3^{3x}+e^x$; *r*) $g(x)=x\cos x$;
2. 1) $f(x)=\frac{x^4}{4}+2x+1$; 3. 1) *a*) $G(x)=\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{8}{3}$; 2) $G'(x)=g(x),\forall x$; 3) *b*), *c*), *d*);
4. 1) $F(x)-G(x)=1,\forall x\in\mathbb{R}$; 2) Se obține același rezultat; 5. $f'(x)=\cos x-x\sin x\Rightarrow$
$\Rightarrow x\sin x=\cos x-(x\cos x)'\Rightarrow G(x)=\sin x-x\cos x+\mathcal{C}$; 6. Da; Nu; 8. c) $G'(x)=\frac{3}{\cos^4 x}-$
$-\frac{2}{\cos^2 x}\Rightarrow\frac{1}{\cos^4 x}=\frac{2}{3\cos^2 x}+\frac{G'(x)}{3}\Rightarrow H(x)=\frac{2\operatorname{tg} x}{3}+\frac{\sin x}{3\cos^3 x}$ este primtivă pentru $g$;
9. *a*) $f(x)+g(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow H(x)=\frac{x^2}{2}$; *b*) $H'(x)=f(x)-g(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$,
$b=1$; 10. $a=9, b=14$; 11. *b*) *i*) $a=\frac{2}{3}, b=\frac{2}{9}$; *ii*) $a=\frac{2}{3}, b=-\frac{4}{3}$; *iii*) $a=1, b=0$; *c*) *i*) $a=\frac{2}{5}$,
$b=-\frac{1}{5}, c=-\frac{3}{5}$; *ii*) $a=1, b=0, c=-16$; 12. $G$ derivabilă pe $\mathbb{R}$. Se discută cazurile: 1) $a<b$,

imposibil; 2) $a=b, a\in\{\pm1\}$; 3) $a>b$, imposibil; 14. $G(x)=F(-x)-F(x)$ şi respectiv $G(x)=F(-x)+F(x)$; 16. a) $a=b=\frac{1}{2}$; b) $G(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$;

17. $f(x)+g(x)=1\Rightarrow F(x)+G(x)=x, F(x)-G(x)=\ln(\cos x+\sin x)\Rightarrow F(x),G(x)$;

18. $s(t), v(t)$ sunt poziţia şi respectiv viteza obiectului la momentul $t$; $s(0)=5, v(1)=-4$; $v(t)=t^2-2t+c, v(1)=-4\Rightarrow c=-3; s(t)=\frac{t^3}{3}-t^2-3t+k, s(0)=5\Rightarrow k=5; s(4)=-\frac{5}{3}$, adică obiectul se află la stânga originii, la depărtare egală cu $\frac{5}{3}$; 19. 1) $P(t)=3t+\frac{3t\sqrt[3]{t}}{2}+k$; 2) $P(0)=100\Rightarrow k=100$; 3) $P(8)=148$; 20. 1) $P(x)=15x-\frac{x^2}{10}-100$; 2) $P(10)=40$; 3) $P'(x)=0\Rightarrow x=75$; 21. 1) $V(t)=3t+5t^2$; 2) $V(1)=8m^3$; 3) $t=5h$; 22. 1) $N(n)=n^2+3n+12$; 2) $N(3)=30$; 23. 1) $G'(t)=\frac{2(3+t)}{5}\Rightarrow G(t)=\frac{t^2}{5}+\frac{6t}{5}+15$; 2) $G(5)=26g$; 24. $S_0=1000$; $r=0{,}05, S(t)=1000e^{0{,}05t}\Rightarrow S(5)\cong1284{,}03; d=284{,}03$; 25. 1) $1+\mathcal{C}$, 2) $\pi x+\mathcal{C}$; 3) $\frac{x^3}{3}+\mathcal{C}$; 4) $-\frac{1}{x}+\mathcal{C}$; 23) $x+3\ln\left(x+\sqrt{x^2+25}\right)+\mathcal{C}$; 26) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)-\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)+\mathcal{C}$; 28) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\left(x-\sqrt{x^2-2}\right)+\mathcal{C}$; 41) $\frac{1}{\sin1}\int\frac{\sin\left[(x+3)-(x+2)\right]}{\sin(x+3)\sin(x+2)}dx$; $\frac{1}{\sin1}\ln\left|\frac{\sin(x+2)}{\sin(x+3)}\right|+\mathcal{C}$; 42) $\arcsin(\sin x)=\left(x, x\in\left[o,\frac{\pi}{2}\right]; =\pi-x, x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right); x-2\pi,\right.$ $\left.x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\right.$; 43) $\operatorname{tg}(x+2x)=\operatorname{tg}3x\Leftrightarrow \operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2x$; $-\frac{1}{3}\ln(\cos3x)+$ $+\frac{1}{2}\ln(\cos2x)+\ln\cos x+\mathcal{C}$.

**Problema existenţei primitivelor. Funcţii care admit primitive.** 1. 1) – 18) sunt funcţii continue; 1) $F(x)=\left(\frac{x^2}{2}\text{dacă } x\ge0; x^2, \text{dacă } x<0\right)$; 2) $F(x)=\left(x^2+x \text{ dacă } x<1; \ln x-\frac{2}{x}+4 \text{ dacă } x\ge1\right)$; 3) $F(x)=\left(\ln x+\frac{1}{x}\text{ dacă } x\ge1; -\cos x+2 \text{ dacă } x<1\right)$; 4) $F(x)=\left(x-\frac{2x\sqrt{x}}{3}, x\in[0,1); \frac{2x\sqrt{x}}{3}-\right.$ $\left.-x+\frac{2}{3}, x\ge1\right)$; 8) $F(x)=\left(\frac{x^2}{2}-2x, x\ge2; -\frac{x^2}{2}+2x-4, x<2\right)$; 10) $F(x)=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}, x\in[0,1);\right.$ $\left.\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}, x\in(-1,0)\right)$; 11) $F(x)=\left(x^2-x, x\in[1,2); x-1, x\in(0,1)\right)$; 13) $F(x)=(\sin x-4,$

$x\in\left[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}\right];-\sin x-2,x\in\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right);\sin x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right];-\sin x+2,x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right);$

$\sin x+4,x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\Big)$; 18) $f(x)=\left(x,x\ge x^3;x^3,x<x^3\right)=\left(x,x\in(-2,-1)\cup(0,1);\right.$

$\left.x^3,x\in(-1,0)\cup(1,2)\right);F(x)=\left(\frac{x^2}{2},x\in(-2,-1];\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4},x\in(-1,0];\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4},x\in(0,1];\frac{x^4}{4}=\frac{1}{2},\right.$

$\left.x\in(1,2)\right)$; **2.** 1) $G(x)=\left(\frac{x^2}{2}-x-3,x\le-2;-\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{3},x\in(-2,2];-3x+\frac{17}{3},x>2\right);$

**3.** 1) $m=1$; 2) $m=0$; **4.** 1) $F(x)=\left(\frac{x^2}{2},x\le0;x^2\sin\frac{1}{x},x>0\right)$; 2) $\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=$

$=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\Rightarrow\cos\frac{1}{x}=2x\sin\frac{1}{x}-\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'$; *fie* $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=\left(2x\sin\frac{1}{x},x\ne0;0,x=0\right)$

continuă şi $h(x)=\left(x^2\sin\frac{1}{x},x\ne0;0,x=0\right)$ derivabilă iar $G$ primitivă pentru

$g\Rightarrow F(x)=\left(G(x)-x^2\sin\frac{1}{x},x\ne0;G(0),x=0\right)$ este o primitivă pentru $f$;

**Metoda integrării directe.** 1) $\frac{x^3}{3}-x^2+3x+\mathcal{C}$; 2) $x+\ln(-x)+\mathcal{C}$; 3) $x^3-3\ln x+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+\mathcal{C}$;

4) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{4x\sqrt{x}}{3}+\mathcal{C}$; 10) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{6}}$; 11) $9-x=\left(3-\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)$; 17) $f(x)=\frac{1}{x+2}+$

$+\frac{2}{x^2-4}$; 18) $f(x)=1+\frac{4}{\left(x^2-4\right)}$; $x+2\ln\left[\frac{(x-2)}{(x+2)}\right]+\mathcal{C}$; 19) $f(x)=1+\frac{7}{\left(x^2-4\right)}$;

23) $f(x)=2-\frac{7}{\left(x^2+4\right)}$; 30) $2x^2+3=x^2-1+x^2+4\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\left(x^2+4\right)}+\frac{1}{\left(x^2-1\right)}$;

37) $I=\int f(x)dx,J=\int g(x)dx;3I+4J,-4I+3J\Rightarrow I,J$.

**Metoda integrării prin părţi.** **1.** a) 1) $x^2\ln\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\mathcal{C}$; 2) $x^3\ln x/3-\frac{x^3}{9}+\mathcal{C}$; 3) $x\left(\ln^2x-2\ln x+2\right)+$

$+\mathcal{C}$; b) 1) $-(x+1)e^{-x}+\mathcal{C}$; 2) $\left(2x^2-2x+1\right)\frac{e^{2x}}{4}+\mathcal{C}$; 3) $x\frac{3^x}{\ln3}-\frac{3^x}{(\ln3)^2}+\mathcal{C}$;

c) 1) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\arcsin x+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}+\mathcal{C}$; pe $[-1,1]$ se prelungeşte prin continuitate;

2) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+\mathcal{C}$; pe $[-1,1]$ se prelungeşte prin continuitate;

3) $x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\mathscr{C}$; d) 1) $\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+\mathscr{C}$; 3) $\frac{2^x}{1+\ln^2 2}(\ln 2\cdot\sin x-\cos x)+\mathscr{C}$;

4) $e^{2x}\frac{(2\sin 3x-3\cos 3x)}{13}+\mathscr{C}$; e) 1) $-x\cos+\sin x+\mathscr{C}$; 2) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+\mathscr{C}$;

3) $x\sin x+\cos x+\mathscr{C}$; f) 1) $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+9}+9\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)\right]+\mathscr{C}$; 2) $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-9}-9\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)\right]+\mathscr{C}$;

3) $\frac{1}{2}\left(16\arcsin\frac{x}{4}+x\sqrt{16-x^2}\right)+\mathscr{C}$; 4) $\frac{1}{3}\left(x^2-9\right)\sqrt{x^2-9}+\mathscr{C}$; 6) $\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}+\mathscr{C}$;

g) 1) $-\cos x\ln(tg\,x)+\frac{1}{2}\ln\left(tg\frac{x}{2}\right)+\mathscr{C}$; 2) $\frac{xe^x}{2}(\sin x-\cos x)+\frac{e^x}{2}\cos x+\mathscr{C}$; 5) $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+\mathscr{C}$;

10) $\ln\left(1+x^2+x^4\right)=\ln\left(1-x+x^2\right)+\ln\left(1+x+x^2\right)$; 2. a) 1) $u=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^n},\ v'=1\Rightarrow$

$\Rightarrow I_n=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}+2n\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}\Rightarrow I_{n+1}=\frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}+\frac{2n-1}{2n}\cdot I_n$; $I_1=\mathrm{arctg}x+\mathscr{C}$;

$I_2=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x+\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\mathscr{C}$; $I_3=\frac{3}{8}\left(\mathrm{arctg}x+\frac{x}{x^2+1}\right)+\frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2}+\mathscr{C}$;

2) $I_n=\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$; 3) $I_n=\frac{x^{n-1}}{n-1}-I_{n-2}$; $I_n=\frac{x^{2n-1}}{2n-1}-a^2I_{n-1}$;

5) $I_n=x\ln^n(x)-nI_{n-1}$; 8) $I_n=x^ne^x-n\,I_{n-1}$; b) 1) $u=\cos^{n-1}x,\ v'(x)=\sin^m x\cos x\Rightarrow$

$\Rightarrow I_{m,n}=\frac{1}{m+n}\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x+\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}$; 3. Sunt funcții continue pe domeniile de definiție 1) $F(x)=\left(\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right], x\ge 1; \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}, x<1\right)$;

2) $F(x)=\left(x^2\ln x/2-x^4/4, x>0; 0, x=0\right)$; 3) $F(x)=\left(\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+4}+4\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\right]\right.$, $x\le 0$; $\left.2x-\cos x+1+2\ln 2, x>0\right)$; 5) $F(x)=\left((x-1)e^x, x\le 0; x^3\ln x/3-\frac{x^3}{9}-1, x>0\right)$;

6) $F(x)=\left(x^2\mathrm{arctg}\,x/2+\mathrm{arctg}x/2-\frac{x}{2}, x\ge 0; x\,\mathrm{arctg}x+\sqrt{1-x^2}-1, -1<x<0\right)$;

4. $F(x)=x^4\ln x/4-\frac{x^4}{16}+\frac{1}{16}$; 5. 1) $I+J=e^x+\mathscr{C}$, $J-I=\frac{e^x}{5}(2\sin 2x+\cos 2x)+\mathscr{C}\Rightarrow I,J$;

2) $\left(e^x\sin x\right)'=e^x(\sin x+\cos x)\Rightarrow I+J=e^x\sin x$, $\left(e^x\cos x\right)'=e^x(\cos x-\sin x)\Rightarrow$

$\Rightarrow I-J=e^x\cos x\Rightarrow I,J$.

**Prima metodă a substituției.**

**1.** a) 1) $\frac{(x-1)^6}{6}+\mathcal{C}$; 2) $\frac{(3x+2)^7}{21}+\mathcal{C}$; 3) $\frac{(2x-1)^{11}}{44}+\frac{(2x-1)^{10}}{40}+\mathcal{C}$; 4) $\frac{\left(x^2+1\right)^4}{4}+\mathcal{C}$;

5) $\frac{\left(x^3-3x+1\right)^6}{18}+\mathcal{C}$; b) 1) $\ln(x+3)+\mathcal{C}$; 2) $\frac{1}{2}\ln(-1-2x)+\mathcal{C}$; 3) $-\frac{1}{4}\ln(4x-1)+\mathcal{C}$;

4) $-\frac{1}{8(2x+1)^4}+\mathcal{C}$; c) 1) $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+\mathcal{C}$; 2) $\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+\mathcal{C}$;

3) $\frac{3}{10}(2x+1)^{\frac{5}{3}}+\mathcal{C}$; 4) $\frac{1}{3}\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}+\mathcal{C}$; d) 1) $\frac{1}{3}e^{3x}+\mathcal{C}$; 2) $-\frac{1}{2}e^{-2x}+\mathcal{C}$; 3) $\frac{1}{3}e^{x^3}+\mathcal{C}$;

4) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+\mathcal{C}$; 5) $\frac{2}{3}e^{x\sqrt{x}}+\mathcal{C}$; 6) $2e^{\sqrt{x}}+\mathcal{C}$; 7) $-e^{\frac{1}{x}}+\mathcal{C}$;

e) 1) $\frac{1}{2}\ln^2 x+\mathcal{C}$; 2) $-\cos(\ln x)+\mathcal{C}$; 3) $\frac{(1+\ln x)^6}{6}+\mathcal{C}$; 4) $\ln(\ln x+1)+\mathcal{C}$; 5) $\ln(1+\ln x)+\mathcal{C}$;

f) 1) $\frac{1}{3}\sin^3 x+\mathcal{C}$; 3) $-\frac{1}{4}\cos^4 x+\mathcal{C}$; 4) $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+\mathcal{C}$;

11) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)+\mathcal{C}$; 12) $\frac{2\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\mathcal{C}$; 15) $-\ln(1+\sin x)+\mathcal{C}$;

g) 1) $\frac{1}{2}\arcsin^2 x+\mathcal{C}$; 2) $\ln(\arcsin x)+\mathcal{C}$; 3) $-\frac{1}{\arcsin x}+\mathcal{C}$; 5) $\arcsin(\arcsin x)+\mathcal{C}$;

7) $-\frac{1}{2}\ln^2(\arccos x)+\mathcal{C}$; **2.** 1) $\ln\left(\frac{x^2+3x}{x^2+3x+2}\right)+\mathcal{C}$; 2) $i)\, m=1\Rightarrow -\frac{1}{\left(x^2+3x+1\right)}+\mathcal{C}$;

$ii)\, m>1\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{m-1}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+3x+1}{\sqrt{m-1}}\right)+\mathcal{C}$; $iii)\, m<1\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+3x+1-\sqrt{1-m}}{x^2+3x+1+\sqrt{1-m}}\right)+\mathcal{C}$;

**A doua metodă a substituției.** 1) $2\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\right)+\mathcal{C}$; 2) $2\left(\sqrt{x}-2\ln\left(\sqrt{x+2}\right)\right)+\mathcal{C}$;

3) $\frac{2x\sqrt{x}}{3}-x+4\sqrt{x}-4\ln\left(\sqrt{x+1}\right)+\mathcal{C}$; 6) $\frac{1}{3}(x-1)\sqrt{2x+1}+\mathcal{C}$; 11) $\ln\left(\sqrt{3x+1}-1\right)-\ln\left(\sqrt{3x+1}+1\right)+\mathcal{C}$;

14) $e^x-\ln\left(1+e^x\right)+\mathcal{C}$; 18) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\mathcal{C}$; 19) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-2}}\right)+\mathcal{C}$;

**Integrarea funcțiilor raționale.**

**1.** 1) $a=4, b=11, c=7$; 3) $a=1, b=-2, c=\frac{17}{16}, d=-\frac{11}{4}, e=-\frac{17}{16}$; **2.** a) 1) $\ln\frac{x-1}{x}+\mathcal{C}$;

2) $\frac{1}{5}\ln\frac{2x-3}{x+1}+\mathcal{C}$; 3) $\frac{1}{4}\ln\frac{x}{x+4}+\mathcal{C}$; 5) $3\ln(x-2)-\ln(x-1)+\mathcal{C}$; 10) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x\right)-\ln(x+1)+\mathcal{C}$;

$b)$ 1) $x+2\ln(x+1)-\frac{1}{(x+1)}+\mathcal{C}$; 2) $\frac{1}{x}+\ln(2-x)-\ln(-x)+\mathcal{C}$; 3) $\ln(2-x)-\ln(-x-1)-$

$-\frac{2}{(x+1)}+\mathcal{C}$; $c)$ 1) $\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\mathcal{C}$; 2) $x+\ln\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}+\mathcal{C}$;

3) $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1-x}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}$; **3.** 1) $a=1, b=4, c=-1, d=8$;

2) $\frac{1}{2}x^2+4x+8\ln(x-1)-\ln x+\mathcal{C}$; **5.** 2) $I_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}+\mathcal{C}$; 2) $f$ continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$ (calculate cu 2) pe $(-\infty,0)$ şi interval $[0,\infty)$ );

**Integrarea unor funcții iraționale.**

$a)$ 1) $\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+x+\mathcal{C}$; 5) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+\mathcal{C}$; 6) $2\text{arctg}\sqrt{x}+\mathcal{C}$; 10) $2\sqrt{x+1}-2\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)+\mathcal{C}$;

$b)$ 1) $\frac{x}{2}-\frac{1}{12}\sin(6x)+\mathcal{C}$; 2) $3x+4\sin x+\sin(2x)+\mathcal{C}$; 4) $\frac{1}{32}(12x+8\sin 2x+\sin 4x)+\mathcal{C}$;

5) $-\frac{1}{2}\cos^2 x-\frac{1}{8}\cos 4x+\mathcal{C}$; 6) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+\mathcal{C}$; $c)$ 1) $\ln\left(e^x-1\right)+\mathcal{C}$; 2) $\frac{1}{\ln 3}\text{arctg}3^x+\mathcal{C}$;

3) $e^x-2\ln\left(e^x+1\right)+\mathcal{C}$; 4) $\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{e^x}{2}+\mathcal{C}$; 6) $x-\ln\left(1+3e^x\right)+\mathcal{C}$; **2.** 1) $f$ continuă pe $(0,2\pi)\Rightarrow f$ admite primitive pe $(0,2\pi)$; $x\to\text{tg}\frac{x}{2}$ nu este definită în $x=\pi$;

2) $\frac{2}{\sqrt{7}}\text{arctg}\left(\frac{2\text{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}\right)+\mathcal{C}$ pe $(0,\pi)$; **3.** 1) ca la problema precedentă;

2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\sqrt{2}\text{tg}x+\mathcal{C}\right)$ pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, etc; **4.** 1) $I_1+I_2=x+\mathcal{C}$; $I_2-I_1=\ln(\sin x+\cos x)+\mathcal{C}$;

**5.** 1) se discută cazurile: a) $m<16$; $b)$ $m=16$; $c)$ $m>16$; 2) $a)$ $m<1$; $b)$ $m=1$; $c)$ $m>1$;

**6.** 1) $I=\frac{2-x}{2\left(x^2+2\right)}+a\frac{x+1}{2\left(x^2+2\right)}+\frac{a+1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\mathcal{C}\Rightarrow a=-1$; 2) $a=3$;

**7.** 1) $I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)+\mathcal{C}$; $J=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)+\mathcal{C}$; 3) $A=\frac{1}{2}(I+J), B=\frac{1}{2}(J-I)$;

**8.** $I_n=\frac{e^{nx}}{n\left(e^x+1\right)^n}+I_{n+1}$; **9.** 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\frac{\text{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)+\mathcal{C}$; **10.** 1) $\sqrt{2}\text{arctg}\frac{\text{tg}x}{\sqrt{2}}-x+\mathcal{C}$;

**11.** $a)$ 1) $2I_1+3I_2=x+\mathcal{C}$; $2I_2-3I_1=\ln(2\sin x+3\cos x)+\mathcal{C}$;

**12.** 1) $\frac{1}{13}\left[12x-5\ln(2\sin x+3\cos x)\right]+\mathcal{C}$; **13.** 1) $I+J=\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{2\text{tg}\,x-1}{\sqrt{3}}\right)+\mathcal{C}$;

$I-J=\frac{1}{3}\ln(2-\sin 2x)-\frac{2}{3}\ln(\sin x+\cos x)+\mathcal{C}$.

**Teste de evaluare. Testul 1. Varianta A. 1.** $f$ **este continuă pe** $\mathbb{R}\Rightarrow f$ **are primitive pe** $\mathbb{R}$; **2.** $F'(x)=f(x),\forall x>-1$; **4.** $a=\frac{1}{2},b=3,c=-2$; **5.** $F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}$; **7.** $F-G=3\Rightarrow F'=G'$.

**Varianta B. 4.** $a=c=0,b=d=1$; **7.** $F-G=-1\Rightarrow F'=G'$;

**Testul 2. Varianta A. 1.** $F(x)=\left(-xe^{-x},x<1;\frac{1}{3}\ln^3 x-\frac{1}{e},x\geq 1\right)$; **2.** $G'=g$; **3.** $a=\frac{1}{32},b=\frac{1}{4},c=\frac{3}{8}$; **4.** $f(x)=(x,x\in[0,1];1,x>1)$; $F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$; **5.** 1) $a=1,b=2,c=1$; 2) $f(x)=(x-1)^{2009}+2(x-1)^{2008}+(x-1)^{2007}$; **6.** $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d,F'(x)=f(x)$, $\forall x$; **Varianta B. 1.** **Se integrează** $f$ **pe** $(-\infty,0)$ **şi** $[0,\infty)$ **şi se construieşte** $F$; **2.** $G'(x)=g(x)$; **3.** 1) $a=-1,b=1$; **4.** $f(x)=(ax^2,x\in[0,1],1,x>1)$; $F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$; **5.** 1) $a=b=\frac{1}{2}$; 2) $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)$; **6.** $a=\frac{2}{5},b=-\frac{2}{15},c=-\frac{4}{15}$; **7.** $a=b=d=1,c=0$; **Testul 3 (grilă). Varianta A. 1.** $a)$ **2.** $c)$; **3.** $b)$; **4.** $b)$; **5.** 1); $a)$; 2); $a)$; **6.** $c)$; **Varianta B. 1.** $b)$; **2.** $a)$; **3.** $c)$; **4.** $c)$; **5.** 1) $b)$; 2) $a)$; **6.** 6)

# Capitolul 2. Integrala definită

**Integrala definită. Formula Leibniz-Newton. 1.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{15}{4}$; 3) $\frac{4}{25}<S<\frac{9}{25}$; 4) $s_n=\frac{1}{n^4}\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2$, $S_n=\frac{1}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$; **2.** $s_5=\frac{70}{125}$, $S_5=\frac{95}{125}$; **3.** 2. a) $\int\limits_0^1 3dx$; b) $\int\limits_0^2(2-x)dx$; c) $\int\limits_1^3(x+1)dx$; d) $\int\limits_1^4 x^2dx$; e) $\int\limits_2^3 x(x-2)dx$; f) $\int\limits_{-2}^2(4-x^2)dx$; g) $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx$; h) $\int\limits_0^3\sqrt{9-x^2}dx$; **4.** 1) $h(t)=0{,}01\cdot\frac{t^2}{2}+0{,}1t$, $h(60)=24\text{m}$; 2) $12=\int\limits_0^T v(t)dt\Rightarrow T=40$ ani; **5.** I. 1) 2; 2) $2-6\sqrt{3}+5\ln 3$; 3) $\ln\frac{3}{4}$; 4) $\frac{\pi}{6}$;

II.1) $\frac{(e^2+1)}{4}$; 2) $\pi$; 3) $\frac{e^2-1}{4}$; III. 1) $\frac{4^7-1}{21}$; 2) $\frac{64}{3}$; 3) $\frac{98}{3}$; IV. 1) $\frac{2}{15}$; 2) $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$; V. 1) $2\left(1-\ln\frac{3}{2}\right)$; 2) $\ln 4-\frac{7}{6}$; **6.** $f(x)=\frac{6x^2-6x+1}{6}$; **7.** $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ **şi se explicitează** $F$ **pentru** $y<1$, $y=1$ **şi** $y>1\Rightarrow F$ **continuă în** $y=1$; **8.** $I_n=I_{n-1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\Rightarrow I_n=-\ln 2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$;

$1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n = \dfrac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} \Rightarrow \int\limits_0^1 \left(1-x+x^2-...+(-1)^n x^n\right)dx =$

$= \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x} - \int\limits_0^1 \dfrac{(-x)^{n+1}}{1+x}dx \Rightarrow 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-...+(-1)^n\dfrac{1}{n+1} = \ln 2+(-1)^{n+2}\int\limits_0^1 \dfrac{x^n dx}{1+x}$, unde $\int\limits_0^1 \dfrac{x^n}{x+1}dx \xrightarrow[n]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_n I_n = 0$ ; 9. 1) $a=-1$ ; 2) $a=2$ ; 3) $a \in \left\{2,-3,\dfrac{5}{2}\right\}$ ; 10. $a=6, b=3, c=1$ ;

11. $a=3, b=1, c=5$ ; 12. $-x \to x \Rightarrow$ sistem cu $f(x)$ şi $f(-x) \Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = 2$ ;

13. 2) $I(a) = \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}\left[\operatorname{arctg}\dfrac{1+a}{\sqrt{1-a^2}} - \operatorname{arctg}\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right]$, $I(1)=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{a \nearrow 1} I(a) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow I$ continuă în $a=1$.

**Integrabilitatea unei funcţii în sensul lui Reimann.** 1. $\dfrac{21}{64}$ ; 2. 1) $\|\Delta\| = \dfrac{1}{4}$ ; 2) $m_1=0, m_2=\dfrac{1}{4}, m_3=\dfrac{1}{2},$ $m_4=1, m_5=\dfrac{3}{2}, M_1=\dfrac{1}{4}, M_2=\dfrac{1}{2}, M_3=1, M_4=\dfrac{3}{4}, M_5=2$; 3) $s_D(f)=\dfrac{25}{32}, S_D(f)=\dfrac{39}{32}$ ; 4) $\sigma_D(f,\xi)=\dfrac{15}{16}$ ; 5) 1; 3. 1) $s_D(f) < S_d(f)$ ; 2) $s_D(f) \le \int\limits_0^1 f(x)dx \le S_D(f)$; 5*. $s_D(f) \le \int\limits_0^4 f(x)dx \le S_D(f)$ şi $I_1 \ne 8$ a.î. $s_D(f) \le I_1 \le S_D(f) \Rightarrow I_1 - s_D(f) \le S_D(f) - s_D(f)$ şi $S_D(f) - I_1 \le S_D(f) - s_D(f)$; $8 - s_D(f) \le S_D(f) - s_D(f)$ şi $S_D(f) - 8 \le S_D(f) - s_D(f) \Rightarrow I_1 - 8 \le S_D(f) - s_D(f)$ şi $8 - I_1 \le S_D(f) - s_D(f) \Rightarrow I_1 = 8$, fals; 6*. 1) $s_D(f)=32, S_D(f)=56$ ; 2) Exisă mai multe numere cu proprietatea $s_D(f) \le 40 \le S_D(f)$; 7. 1) $\dfrac{1}{6}$; 2) $\dfrac{1}{p+1}$; 3) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$; 4) 2; 5) $\dfrac{2}{3}$; 6) $\dfrac{1}{r+s+1}$ ;

11) $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k(k+1)}{n(n+1)}}$, $D_n = \left(0, \dfrac{1\cdot 2}{n(n+1)}, ..., \dfrac{k(k+1)}{n(n+1)}, ..., 1\right)$, $\|D_n\| = \dfrac{1}{n(n+1)} \to 0$, $\xi_k = \dfrac{k(k+1)}{n(n+1)}$; $\dfrac{2}{3}$;

8. $n-1 < a_n < n, \forall n \Rightarrow b_n = \dfrac{n}{a_n}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\dfrac{ka_n}{n^2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{ka_n}{n^2}} \to \int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{x+1} = 1-\ln 2$.

**Proprietăţi ale integralei definite.** 1. 1) a) 5; b) – 2; c) 2; d) –2; 2) a) 1; b) –5; c) –2; d) 0; 2. I. Funcţiile sunt continue pe domeniile de definiţie; 1) $\dfrac{32}{3}$ ; 2) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{e}$ ; 3) $\dfrac{35}{12}-\ln 2$ ; II. Funcţii continue pe porţiuni.

1) $\dfrac{11}{2}$ ; 2) $\dfrac{5}{3}$ ; III. 1) $10-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ; 2) $\dfrac{37}{2}$ ; 3) $\dfrac{115}{8}$ ; IV. 1) $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{x^2+1}, x\in[0,1); \dfrac{2}{3}, x=1; 1, x\in(1,2]\right)$;

$F(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} - \ln\left(x^2+1\right), x\in[0,1); \dfrac{1}{2}-\ln 2, x=1; x-\dfrac{1}{2}-\ln 2, x\in(1,2]\right)$; $F(2)-F(0) = \dfrac{3}{2}-\ln 2$ ;

2) $f(x) = \left(0, x\in[0,2); \dfrac{5}{2}, x=2; x^2+1, x\in(2,4]\right)$; $F(x) = \left(0, x\in[0,2]; \dfrac{x^3}{3}+x-\dfrac{14}{3}, x\in(2,4]\right)$;

$F(4)-F(0) = \dfrac{62}{3}$ ; 3) $\dfrac{3}{2}$ ; 3. 1) a) $\ln\left[\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot(2n-2)}\right]$; b) $\dfrac{1}{2}$ ; 2) $f(x) = \dfrac{x^2\left(3x^2-2x-1\right)}{4}$ ;

**4.** 1) $1^0$) $I(a)=\left(\frac{1}{2}-a, a\le 0; a^2-a+\frac{1}{2}, a\in(0,1); a-\frac{1}{2}, a\ge 1\right)$; 2) 0; **5.** 1) $\frac{\ln 2}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; **6.** 2) a) $\ln 2$; b) $\frac{3}{8}$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{a-1}{\ln a}$; **7*.** 1) $\frac{1}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n} f\left(\frac{i}{n}\right)f\left(\frac{j}{n}\right)=\frac{1}{2n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^2-$

$-\frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n} f^2\left(\frac{i}{n}\right)\to\frac{\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2}{2}$; **8.** I. Utilizăm proprietatea de monotonie a integralei $f\le g$ pe $[a,b]\Rightarrow\int_a^b f\le\int_a^b g$; 1) $0\le\cos x\le 1\Rightarrow\cos^4 x\le\cos^3 x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

2) $x^2-x\le 2(x+5)\Leftrightarrow x^2-3x-10\le 0\Leftrightarrow x\in[-2,5]$; 3) $|x+1|=|(2x-1)+(2-x)|\le$ $\le|2x-1|+|2-x|$; 7) $(f(x)-tx)^2\ge 0,\ \forall x\in[0,1],\ \forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow\int_0^1 f^2-2t\int_0^1 xf(x)dx+\frac{t^2}{3}\ge 0$, $\forall t\Rightarrow\Delta\le 0$; II $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă $\Rightarrow f(\alpha)=\min f\le f(x)\le\max f=f(\beta)$ care se integrează;

1) $f(x)=1-\frac{3}{x+1}$ este strict descrescătoare pe $[0,1]\Rightarrow f(0)=-2\le f(x)\le f(1)=-\frac{1}{2}$;

III-IV $f\le g\Rightarrow\int_a^b f\le\int_a^b g$; V. 1) $\frac{1}{1+x^2}>e^{\frac{1}{x^2}}=e^{-x^2}>1-x^2,\ x\in[0,1]$; 2) $1+x^2\le e^{x^2}\le(e+1)x^2+1$, $x\in[0,1]$; 3) $\sqrt{\left(x^4+1\right)\frac{1}{x^2+1}}\le\frac{x^4+1+\frac{1}{x^2+1}}{2},\ x\in(0,1)$;

**9.** a) $\frac{1}{t}<\frac{t+1}{t^2+2}<\frac{t+1}{t^2}\Rightarrow\ln 2\le a_n\le\ln 2+\frac{1}{2n}$; 1) $t^2<\frac{t+1}{t^3+2}<\frac{t+1}{t^4}$; **10.** 1) $0\le\sin^n x\le 1$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow I_n\in[0,1],\forall n;\ 0\le\sin^{n+1}x\le\sin^n x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$; 3) $0\le\frac{x^n}{1+x^n}\le x^n,\forall n\Rightarrow$ $\Rightarrow 0\le I_n\le\frac{1}{n+1}\Rightarrow I_n\to 0$; 4) $0\le 1-I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx\le\frac{1}{n+1}\Rightarrow x_n\to 1$; 5) $(1-x)^n\le f(x)\le(1-x)^n e$, $x\in(0,1)$; $I_n\to 0$; **11.** a) 1)–2) $(f(x)-a)(f(x)-b)\le 0\Leftrightarrow f^2(x)-(a+b)f(x)+ab\le 0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x)-(a+b)+\frac{ab}{f(x)}\le 0$; b) 1) $\min(f,g)\le f,g$; 2) $\max(f,g)\ge f,g$; c) $f(a)\le f(x)\le f(b)$, $x\in[a,b]$; d) $0<m\le f(x)\le M\Rightarrow\frac{1}{M}\le\frac{1}{f(x)}\le\frac{1}{m}$, care se integrează pe $[a,b]$ şi se face produsul lor; e) „$\Rightarrow$” $\int_a^b f(x)dx\le f(b)(b-a)=bf(b)-af(a)$; „$\Leftarrow$” Prin reducere la absurd, $\exists a<b$ a.î. $f(a)>f(b),\exists c\in[a,b]$, $f(c)=\inf f(x), x\in[a,b]\Rightarrow x\ne a$ şi $f(c)<f(a);\exists d\in[a,c]$, $f(d)=\sup f(x)$,

$x\in[a,c], d\neq c$, $f(d)>f(c)\Rightarrow\int_0^c f(x)dx>f(c)(c-d)\geq cf(c)-df(d)$, **fals. f) 1)** $f=c\Rightarrow\int_a^b cdx=$

$=c(b-a)=f(b)(b-a)$; **2)** $f(a)\leq f(x)\leq f(b)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\leq f(b)(b-a)$; **3)** $\int_a^b f(x)dx\geq f(b)(b-a)$;

**g) 1)** $M(f+g)=\frac{1}{b-a}\int_a^b(f+g)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f+\frac{1}{b-a}\int_a^b g=M(f)+M(g)$; **h) „$\Leftarrow$" Prin reducere la absurd.**

**Formula de medie. 1.** 1) $M(f)=1/3, \xi=\sqrt{3}/3$; 2) $M(f)=4$; **2.** $a)$1) $\int_n^{n+2} f=2\frac{c_x}{1+c_x^5}$,

$c_x\in[n,n+2]$ 2) $\frac{n^{10}}{1+(1+n)^{10}}<x_n<\frac{n^3(1+n)^7}{1+n^{10}}$; **3.** $\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=0$ **plus formula de medie; 4.** $a)$ $\int_0^1[f(x)-x]dx=0$; **5.** $\int_0^1\left[\sin f(x)-\frac{1}{x^2+1}\right]dx=0$; **6.** $\int_a^b f=(b-a)f(c)<0, c\in[a,b]\Rightarrow$

$\Rightarrow f(c)<0$; $f(a)>0+P.D.\Rightarrow\exists\xi\in(a,c), f(\xi)=0$; **7.** $\int_0^1 f$ **plus formula de medie.**

**Teorema fundamentală. 1.** a) 1) $\int_a^b e^{-x^2}dx=F(b)-F(a)$ și $F'(a)=e^{-a^2}$;

$b)$ $F(x)-F(0)=x^3-x^2\Rightarrow F'(x)=\ f(x)=3x^2-2x$; **2.** 1) **Fie $G$ o primitivă a integrandului. Avem**

$F(x)=G(x)-G(0)\Rightarrow F'(x)=G'(x)=\frac{1}{x^2+1}; F'(-1)=\frac{1}{2}, F'(0)=1, F'(1)=1/2$ și

$F''(x)=-2x/\left(x^2+1\right)^2$; **3.** 2) $F(x)=G\left(x^3-4\right)-G(2x), F'(x)=G'\left(x^3-4\right)\cdot 3x^2-2G'(2x)=$

$=g\left(x^3-4\right)\cdot 3x^2-2g(2x)$, **unde** $g(x)=x/\left(1+\sqrt{x}\right)$; **4.** $F'(x)=G'(x)\Rightarrow F-G=k\overset{x=d}{\Rightarrow}k=\int_c^d f$;

**6.** 1) $\frac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$; 2) $2(1-\cos x)$; **7.** 1) $F'(x)=0\Rightarrow x=1$ **punct de maxim;**

**8.** 1) $F'(x)=G'(2x)\cdot 2-G'(x)=2\left(4x^2-6x\right)-\left(x^2-3x\right)=7x^2-9x=0\Rightarrow x_1=0, x_2=9/7$ **etc.**

**9.** $F'(x)=\sin x/(x+1)=0\Rightarrow x\in\{0,\pi,2\pi\}\Rightarrow x=\pi$ **punct de maxim** $\Rightarrow$

$\Rightarrow F(x)\geq\min\{F(0),F(2\pi)\}$, $F(0)=0, F(2\pi)=\int_0^\pi f(t)dt+\int_\pi^{2\pi} f(t)dt$. **În a doua integrală** se pune $u=t-\pi$ și $F(2\pi)=\int_0^{\pi} f(t)-\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{1+\pi+n}du>\int_0^{\pi} f(t)dt-\int_0^{\pi} f(u)du=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\{F(0),F(2\pi)\}=0$; 2)$F(x)=\int_x^{2x}\frac{\cos y}{y}dy$ cu $F'(x)<0$.

10. 1) $F'(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-\sin(\cos x)>0\left(\sin x+\cos x<\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}\right)$;

11. 1) $\mathbb{R}$ 2) $f(0)=\frac{1}{2}$; $f(\pm 2)=0$; 3) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$; $f'(x)=\cos x, \forall x\in I\subset(-\infty,0)$ sau $I\subset(0,\infty)$; 12. 1) Notăm cu $F(x), G(x)$ membrul stâng și respectiv drept $\Rightarrow F'=G'\Rightarrow F=G+k\overset{x=1}{\Rightarrow} k=0$; 2) $F(x)$ este membrul stâng cu $F'(x)=0\Rightarrow F(x)=k\Rightarrow$ $\left(x=\frac{\pi}{4}\right)k=1$; 13. 1) $\left(\frac{0}{0}\right)$ limita se scrie $\lim\limits_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{G'(x)}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+10}{x+1}=10$.

Metode de calcul ale integralelor definite. Integrarea directă. 5. $\arcsin(\sin x)=$ $=\left(x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]; \pi-x, x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right); x-2\pi, x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\right)$; $\frac{\pi^2}{4}-2$; 7. $x(t)=5t^2-\frac{t^3}{3}$; $v'(t)=0\Rightarrow$ $t=5$; $x(5)=\frac{250}{3}$; 8. 1) $a\in\left\{0,-2,-1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$; 3) $a=1$; 4) $|a|=2$; 5) $a=6$; 9. 1) 1; 2) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; 3) 2; 4) $\ln\sqrt{2}$.

Metoda integrării prin părți. 1. II a) $1-2/e$; III a) 1; d) $\frac{\pi}{4}$; IV a) $-2\pi$; b) $4\pi$; c) $\frac{\pi}{2}-1$; V. *a*) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+4\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; 3. *a*) 1) $\int_0^1\sqrt{x^2+1}dx$; 2) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$; 3) $\int_0^1 x^3 5^x dx$; 4) $\int_0^1 xe^x dx$;

5. 1*b*) $\frac{x^n}{e}\le x^n e^{-x}\le x^n, x\in[0,1]$; Metoda substituției. 1. *a*) 2) 0; *c*) 4) $\frac{14}{15}$; *d*) 2) 0;

4. 1) $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,dx}{e^x+\sin x+\cos x}$, $I+J, I-J$; 2) $\int_{-1}^0+\int_0^1$ și în prima integrală $t=-x$;

4) $1+\operatorname{tg} x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)/\cos x$; diferență de integrale – în prima $t=\pi/4-x$;

5. 1) $\ln\sqrt{2}$; 2) $\frac{(e-1)}{2}$; 3) $\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{3}$; 6. 1) *a*) $x=\frac{1}{t}$; *b*) $x=\frac{\pi}{2}-t$; 2) $t=x-1$; 7. Se calculează în două moduri o anumită integrală. 1) $\int_0^1(x-1)^{2n}dx$; 2) $\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}dx$. Calculul ariilor.

1. 1) $e-1$; 2) 10; 3) $\frac{7}{6}$; 4) $\frac{20}{3}$; 5) 15; 6) $4\ln\left(\frac{5}{2}\right)$; 2. *a*) $\frac{1}{2}$; *b*) 4; 3) $\frac{5}{3}$; 4) $\frac{32}{3}$; 5) $\frac{108}{3}$; *b*) 1) $\frac{1}{2}$; 2) 2;

3) 1; 3. $a$) 1) 6; 2) $\frac{14}{3}$; 3) $\frac{5}{6}$; $b$)1) 2; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{937}{192}$; 4. 1)$2\pi+\frac{4}{2}$; $6\pi-\frac{4}{3}$; 2)$\frac{1}{3}$; 3)$\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5. $a=-\frac{3}{4}$ şi min $S=\frac{13}{16}$; 6. $a=1$ şi min $S=\frac{3}{4}$.

Volumul corpurilor de rotaţie. 1.1)$\frac{\pi^2}{2}$; 2)$\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e^4}\right)$; 3) $12\pi$;

4) $\frac{243\pi}{5}$; 2.1)$\frac{512\pi}{15}$; 2) $\frac{16\pi}{15}$; 3) $\frac{\pi}{30}$; 3.1) $32\pi$; 2)$a$) $\frac{20\pi}{3}$; $b$)$\frac{8\pi}{3}$; 3) $\frac{64\pi}{3}$; 4)$\frac{3\pi}{4}$; 5)$\frac{96\pi}{5}$.

## Teste de evaluare

Testul 1. Varianta A. 1. "$=$"; 3. a) $D=(1,2,...,n)$, $s_D(f)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}<\int_1^n\frac{dt}{t}=\ln n<S_D(f)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$; b) $S_D(f)-\int_1^n\frac{dt}{t}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$; c) se unesc punctele $(1,1),\left(2,\frac{1}{2}\right),...,\left(n,\frac{1}{n}\right)$ prin segmente şi se consideră suma ariilor trapezelor care se formează egală cu $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\Rightarrow\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)<c$; suma ariilor dreptunghiurilor este $1-\frac{1}{n}>c\Rightarrow c\in\left(\frac{1}{2},1\right)$; 4. $\lim\limits_{\substack{x\searrow 0\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}} f(x)=\infty\Rightarrow f$ nemărginită $\Rightarrow f$ nu este integrabilă; 5. $2e-\frac{3}{4}$; 6. $\frac{5}{2}$; 7. $a=1$; 10. 1; 11. $A=\frac{8}{3}$;

Varianta B. 1. "$=$"; 3. a) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$; b) Suma ariilor dreptunghiurilor $<$ aria$\left(\Gamma_f\right)$; 6. 0; 7. $a=1$; 9. $\int_0^1\left(f(x)-ax-b\right)dx=0$ + formula de medie; 10. $\frac{1}{2}$. 11. $\pi\left(e^2-1\right)/4$.

Testul2. Varianta A. 1. $D=\left(1,\frac{3}{2},2\right)$; 2. 1)2; 2)4; 3)1; 4)-4; 5. 1) $a=\frac{1}{2}, b=-1, c=\frac{1}{2}$; 6. $g(x)=f(x)-\left(1+x+...+x^{n-1}\right), x\in[0,1]$ cu $\int_0^1 g=0$ + formula de medie; 7. $\frac{1}{2}$; 8. $(2+\pi)/8$; 9. $f(x)=x^3/3+x^2$; 10. 1) $9/4$; 2) $45\pi/2$; Varianta B. 1. $D=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$; 2. 1)5; 2)-2; 3)0; 4)-3; 5. 2) c) $1/6$; 6. $g(x)=f(x)-x^2, g(a)>0$, formula de medie + proprietatea lui Darboux; 7. $1/4$; 8. $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\ln 2\right)$; 9. 2; 10. 1) $8/3$; 2) $48/5$.

Testul 3 (grilă) Varianta A. 1. b); 2) a); 3. c); 4. b); 5. b); 6. a); 7. 1)b); 2)c); 8. a); 9. c); 10. a); 11. c);
Varianta B. 1. c); 2. b); 3. a); 4. b); 5. b); 6. a); 7. 1)c); 2)c); 8. b); 9. a); 10. b); 11. c).

# Capitolul 3. Teste de recapitulare finală

## 1. Teste pentru pregătirea examenului de bacalaureat

**Testul 1. I. 1. c); 2. a); 3. a); 4. b); 5. d); 6.** $3x^2$ **; 7.** $\frac{5}{4}$ **; 8.** $x=0$ **; 9.** $f'(1)=3$ **; 10.** $\frac{1}{4}$ **; II. a)** $S_{ABCD}=$ $=S_{ABC}+S_{ADC}=AC\cdot\frac{OB}{2}+AC\cdot\frac{OD}{2}=AC\cdot\frac{BD}{2}$ **; b)** $AB^2=AO^2+OB^2$ **; c)** $AD^2+BC^2=$ $=OA^2+OD^2+OB^2+OC^2=AB^2+BC^2$ **; d) În** $\Delta OAB$ **, teorema cosinusului;** $x=0$ **; e) Se aplică teorema cosinusului şi egalitatea** $\Leftrightarrow\cos\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}$ **; f)** $S_{OAB}=\frac{OA\cdot OB\sin\alpha}{2}$ **, etc.; III. a)** $x=y=0$ **; b)** $y=-x$ **; d) În c), punem** $a_1=a_2=...=a_n=\frac{1}{n}$ **; e)** $a_1=...=a_n=\frac{m}{n}\Rightarrow f\left(n\cdot\frac{m}{n}\right)=nf\left(\frac{m}{n}\right)\Rightarrow$ $\Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{f(m)}{n},\ f(m)=mf(1)=m\Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n},\ m,n\in\mathbb{N},\ n\neq 0$ **; f)** $a\in\mathbb{R}\Rightarrow\exists(x_n),(y_n),$ $x_n\le a\le y_n,\ x_n,y_n\in\mathbb{Q},\ x_n,y_n\to a\Rightarrow f(x_n)=x_n\le f(a)\le f(y_n)=y_n\Rightarrow f(a)\to a$ **; IV. d)** $f'>0\Rightarrow$ $f$ **s.c.** $\Rightarrow f(x)<\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,\ g'<0\Rightarrow g$ **s.d.** $\Rightarrow g(x)>\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ **; e)** $a_{n+1}-a_n=g(n)>0\Rightarrow$ $\Rightarrow(a_n)\nearrow,\ b_{n+1}-b_n=f(n)<0\Rightarrow(b_n)\searrow$ **; f)** $h:[1,\infty)\to\mathbb{R},\ h(x)=\ln\left(x+\frac{2}{3}\right)-\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6x}$**,** $h'(x)>0\Rightarrow h$ **s.c.,** $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=0\Rightarrow h<0$ **; g)** $\lim a_n=0,\ \lim(b_n-a_n)=0\Rightarrow\lim b_n=a,\ a_n<a<b_n$**,** $0<a-a_n<\frac{1}{6n}\Rightarrow 0<a-a_{17}<\frac{1}{6\cdot 17}<\frac{1}{100}$ **;**

**Testul 2. I. 1. a); 2. d); 3. d); 4. a); 5. b); 6.** $2\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)$ **; 7.** $\frac{e^4-1}{2e^2}$ **; 8.** $f''(x)>0$ **; 9.** $f'(0)=0$ **; 10.** $x=0$ **, punct de minim; II. a)** $x=\frac{1}{2}$ **; b)** $S=\frac{bc\sin A}{2}$ **; c)** $S_{BAD}=AB\cdot\frac{AD\cdot\sin A}{2}$ **; d) Se utilizează b) şi c); e)** $BE=EC$ **; III. a)** $\det(A)=0,\ \text{rang}(A)=1$ **; b)** $O_3$ **; d)** $B\left(I_3-\frac{1}{11}A\right)=\left(I_3-\frac{1}{11}A\right)B=I_3$ **; f) Matricele** $C$**,** $D$ **au forma** $\begin{pmatrix}a & b & c\\ ax & bx & cx\\ ay & by & cy\end{pmatrix}\Rightarrow$ **sistem incompatibil; IV. b)** $f_2(x)=\frac{x^2}{2}+\cos x-1$ **; e) Inducție; g) e), f)** $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{n}f_{2n+1}(x)=0$ **. Din c)** $\Rightarrow$ **q.e.d.**

**Testul 3. I. 1. d); 2. a); 3. c); 4. d); 5. a); 6.** $5\left(x^4-1\right)$ **; 7.** $f'(0)=-5$ **; 8. 1; 9.** $x=-1\max,\ x=1\min$ **; 10. 0; II: a)** $\sqrt{2}$ **; b)** $m=-1$ **; c)** $y=1$ **; d)** $\frac{1}{2}$ **; e)** $M(0,0)$ **; 1; f)** $M(2,2),\ MA=MB=\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$ **; III. b)** $\det(A)=-1\neq 0\Rightarrow\text{rang}(A)=3$ **; d)** $\det(A)\neq 0\Rightarrow A$ **inversabilă;** $AA=I_3\Rightarrow A^{-1}=A$ **; e)** $A^{2k}=I_3,\ A^{2k+1}=A,\ \det(X)=0$ **; f) prin absurd; IV. d) 0; e)** $x=-2$ **; f)** $(-\infty,-2],f$

**concavă; $[-2,\infty)\, f$ convexă.**

**Testul 4. I. 1. $\hat{0}$; 2. $\frac{2}{5}$; 3. –1; 4. 10; 5. 2; 6. $4x\left(x^2-1\right)$; 7. $\frac{8}{15}$; 8. $f'(x)=0; \pm 1$; 0; 9. 0; 10. 0; II. 11. $x+y-9=0$; 12. $\sqrt{2}$; 13. $1-i$; 14. 1; 15. $\frac{7}{2}$; 16. –1; III. a) $a=b=0 \Rightarrow O_2 \in I(A)$, $a=0, b=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow I_2 \in I(A)$; c) $\det(A)=1 \Rightarrow \text{rang}(A)=2$; d) $A^2-A+I_2=O_2 \Rightarrow A^3+I_2=O_2$; IV. b) $f'(0)=-\frac{4}{5}$; e) $y=0$; f) Integrare prin părți.**

**Testul 5. I. 1. b); 2. a); 3. d); 4. c); 5. c); 6. 1; 7. 0; 8. 0; 9. Nu are; 10. $F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$; II. b) $AB=BC=\sqrt{26}, AC=\sqrt{52}$; d) $2y-3x+3=0$; e) $R=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{52}}{2}$; III. c) $I_2$, element neutru; d) $AA^{-1}=I_2 \Rightarrow \det(A)\det\left(A^{-1}\right)=1, \det(A), \det\left(A^{-1}\right) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \det(A)=\pm 1$; e) $(a+1-a)(a-a+1)=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1-a \\ a-1 & 2-a \end{pmatrix} \in M_1$, este inversabilă în $M$; IV. e) $\ln 2-\frac{1}{2}$.**

**Testul 6. I. 1. c); 2. b); 3. a); 4. c); 5. d); 7. $f'(0)=-1$; 8. $y=0$ la $\infty$; $y=-2x$ la $-\infty$; II. a) $x+y+1=0$; b) $D(1,5)$; c) 21; III. a) $\det(A)=0, rang(A)=2$; d) $B=A^2+A+I_3$; e) $A^3=I_3$.**

**Testul 7. I. 1. a) 2. c); 3. d); 4. a); 5. b): 6. $-\frac{1}{x(x+1)}$; 7. $f'(1)=-\frac{1}{2}$; 8. $\ln(n+1)$; 9. $F(x)=(x+1)\ln(x+1)-x\ln x+1$; II. a) $AB=|b-a|, AB=AC=BC=2$; b) $\sqrt{3}$; c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; d) $h=\frac{2}{3}+\frac{1-\sqrt{3}}{3}i$; III. a) $a=c=-6, b=11$; b) $\sum x_1=-a$, $x_1+x_3=2x_2 \Rightarrow x_2=-\frac{a}{3}$; c) $\sum x_1^2<0$; e) $x^3-1=0$; IV. a) $n$; d) Formula binomului lui Newton.**

**Testul 8. I. a) $a=3, b=-1$; b) $x_G=\frac{8}{3}$; $y_G=3$; c) $m\cdot m'=-1$; d) 20; e) $\frac{k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{3}, x_2=\frac{2\pi}{3}$, $x_3=\pi, x_4=\frac{4\pi}{3}, x_5=\frac{5\pi}{3} \in (0,2\pi)$; II. 1. a) $\pm 1$; b) $T_3$; c) $f=g\left(aX^2+bX+c\right)+\alpha X+\beta$; $a=1$, $b=3, c=5, \alpha=27, \beta=0$; d) $a_1=2, r=5, a_n=2+(n-1)5=2007 \Rightarrow n=402$; e) 2; 2. a) $2e^{2x}$; b) $f(x)>0 \Rightarrow f$ s.c.; c) $f''(x)>0 \Rightarrow f$ convexă; d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$; e) $2x-y+1=0\left(y-1=f'(0)\right)$; II. b) $a,b\in[-r,r] \Rightarrow \exists t\in[0,2\pi), a=r\cos t, b=r\sin t$; c) inducție; d) se aplică det. egalității date; e) $r<1, 0\le\left|r^n\cos t\right|$, $\left|r^n\sin t\right|\le r^n \to 0$; f) $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+$ relația $AX=XA \Rightarrow a=d$ și $c=-b$; g) $X$ comută cu $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \overset{f)}{\Rightarrow} X=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; $\det\left(X^{2007}\right)=\det\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\right) \Rightarrow \det(x)=1 \Rightarrow$**

$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}, t\in[0,2\pi)\Rightarrow \arccos t=\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 2007t=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)}{2007}, k=\overline{0,2006}$;

**IV.** a) $a_n>0, \forall n, a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}>0$; b) inducție; se adună inegalitățile pentru $n$, $n-1$, …, 2

$a_n^2>a_n^2+\frac{(n-1)}{2}\Rightarrow a_n\to\infty$; d) b) $\Rightarrow a_n^2>1-2n; a_n^2=a_{n-1}^2+\frac{1}{a_{n-1}^2+2},...\Rightarrow a_n^2=2(n+1)+\frac{1}{a_0^2}+...+\frac{1}{a_n^2}$

plus $a_n>\sqrt{2n+1}$; e) $f(x)=\ln x$ și $i\in[x, x+1]$ plus Lagrange; f) din d); g) $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$,

$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}},...,a_{n+1}-2=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}$.

**Testul 9. I** a) 1; b) 5; c) $i^{16}=\left(i^4\right)^4=1$; d) $a=-b=1$; e) $\frac{3}{2}$; f) $-11+60i; a=-11, b=60$;

**II. 1.** a) $\hat{2}^3=\hat{8}=\hat{0}\Rightarrow\hat{2}^{2006}=\hat{2}^{2003}\cdot\hat{2}^3=0$; b) $C_{10}^3=C_{10}^{10-3}=C_{10}^7$; 1; c) $\frac{1}{35}$; d; $\frac{1}{4}$; e) $n\in\{3,4,5\}$;

$p=\frac{3}{5}$; 2) b) $\frac{2}{3}$; c) $f'(0)=7$; d) $f'(x)>0$; e) Factor comun ln $n$; **III.** a) Este suficient de

observat că $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac & ad+bc\\ 0 & ac\end{pmatrix}\in G$; $X,Y\in G\Rightarrow XY\in G$ și $X+Y\in G\Rightarrow X*Y\in G$;

b) „$\cdot$”, „+” sunt asociative (c) $X*E=X, \forall X\in G\Rightarrow X=O_2\in G$; d) $I'=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; e) $X^2+2X-3I_2=O_2(1)$,

$X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\in G$, $tr(X)=2a, \det(X)=a^2\Rightarrow X^2-2aX+a^2I_2=O_2(2)$; (1)$-$(2)$\Rightarrow 2(1+a)X-$

$-\left(3+a^2\right)I_2=O_2\Rightarrow\left(a^2+2a-3=0, ab+b=0\Rightarrow a_1=1, a_2=-2 \text{ și } b_1=b_2=0\right)\Rightarrow X_1=I_2, X_2=-3I_2$;

f) $a^{n-1}\begin{pmatrix}a & nb\\ 0 & a\end{pmatrix}$, inducție; **IV.** a) $f'(x)=1-\sin x\geq 0\Rightarrow f$ crescătoare; $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,

$f$ continuă $\Rightarrow f(\mathbb{R})=\mathbb{R}\Rightarrow f$ surjectivă; $f$ s.c. pe $[2k\pi, 2(k+1)\pi], \forall k\in\mathbb{Z}\Rightarrow f$ injectivă; $f$

surjecție $\Rightarrow$ pentru $n\in\mathbb{N}\subset\mathbb{R}, (\exists!)x\in\mathbb{R}$ a.î. $f(x)=n$; b) $n<m\Rightarrow\exists b_n, b_m\in\mathbb{R}$ a.î. $f(b_n)=n<m=$

$=f(b_m)\Rightarrow b_n<b_m$; c) $b_n=n-\cos b_n>n-1$; d) $n-1<b_n=n-\cos b_n<n+1+$ „cleștele”;

e) $a_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow a_1=f(a_0)=a_0+\cos a_0>a_0$; $a_0<a_1, f$ s.c. $\Rightarrow f(a_0)<f(a_1)\Rightarrow a_1<a_2$;

inducție; $a_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]\Rightarrow\cos a_0<0\Rightarrow a_1=f(a_0)=a_0+\cos a_0<a_0$ etc.; g) e) și f)

$\Rightarrow(a_n)$ monoton, iar din $f([0,\pi])\subset[0,\pi]\Rightarrow(a_n)$ mărginit;

$\lim a_n=x; a_{n+1}=f(a_n)\Rightarrow x=f(x)\Rightarrow\cos x=0,\quad x\in[0,\pi]\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$.

**Testul 10. I.** a) 0; b) $f(-1)$ cu binomul lui Newton; c) $T_{k+1}=C_9^k 2^{k/2} \Rightarrow k\in\{1,3,5,7,9\}$; d) $T_3=72$; e) $\hat{5}$; 2. a) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$; c) $-\frac{3}{25}$; d) $F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+1$; ln 2 + 1; e) 0; *f* impară pe intervalul simetric în *x* = 0; III. a) $\det(A)=0, \operatorname{rang}(A)=1$; b) $a=14$; c) $A^n=14^{n-1}A, \forall n\in\mathbb{N}^*$, inducție; d) $C={}^t(1\ 2\ 3), L=(1\ 2\ 3)$; e) $(bI_3+cA)(I_3+A)=I_3 \Rightarrow b=1, c=-\frac{1}{15}$; f) inducție; g) $(xI_3+yJ)(x'I_3+y'J)=I_3 \Rightarrow x'=\frac{1}{x}, y'=-\frac{y}{x(x+3y)}$; IV. a) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)^\alpha}>0$; b) $f'(x)<0$; c) *f* descrescătoare $\Rightarrow f(k+1)\le f(x)\le f(k), \forall x\in[k,k+1], k\in\mathbb{N}^*$; d) $b_n=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx \overset{c)}{\Rightarrow} \sum_1^{n-1} f(k+1)\le b_n\le \sum_1^{n-1} f(k)$; e) $\frac{1}{\alpha-1}$; f) $\alpha>1$; $0\le a_n\le b_n+1 \Rightarrow (a_n)$ mărginit; $\alpha\le 1, a_{n-1}\ge b_n\to\infty$; g) $a_n-1\le b_n\le a_{n-1}<a_n \Rightarrow 0<a_n-b_n=x_n\le 1$ și $x_{n+1}-x_n>0$.

**Testul 11.** I a) 0; b) (2, 2); c) $mm'=-1; \alpha=1$; d) – 5; e) $A\in H \Rightarrow 2x-y-4=0$; f) $a+b+c=6$, $a+b>c, b+c>a, c+a>b, a,b,c\in\mathbb{N} \Rightarrow a=b=c=2, \sqrt{3}$; II. 1. a) $f(g(-1))=f(1)=2$; $g(f(-1))=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$; c) 1; d) $2^{10}-1$; c) $\frac{4}{5}$; 2. b) $f'(1)=0$; c) $f'(x)=4(x^3-1)$; $x>1 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f$ s.c.; d) $f''(x)=12x^2>0, x\ne 0 \Rightarrow f$ convexă; e) $-\frac{9}{5}$; III. a) $XA=AX \Rightarrow$ $\Rightarrow (bc'=b'c, ab'+bd'=...) \Rightarrow \left(\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c},...\right)$; c) Prin dublă incluziune; „$\subset$” avem a); d) $B\in C(A)$; $(A+iB)(A-iB)=A^2+B^2$; $X=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$; IV. a) 0; b) $a_n=\frac{1}{2n\pi}, f_a(x_n)\to 1$; $y_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}, f(y_n)\to 0$; c) $0\le\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le x$; d) $0\le\left|\frac{h(x)}{x}\right|\le\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$.

**Testul 12.** I. a) $\sqrt{5}$; b) $2x+4y-5=0$; c) $\pm 2$; d) $x^2+y^2=5$; e) 1; f) 0; II. 1. a) $\frac{1}{2}$; b) $x+y+z=9$; $x+z=2y, xyz=15 \Rightarrow x=1, y=3, z=5$; c) 16; d) 2; e) $f(3)=-4$; 2. a) $\frac{1}{1+x^2}$; b) $f'(x)>0 \Rightarrow f$ s.c.; c) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{\pi}{2}, \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow y=\frac{r}{2}, y=-\frac{\pi}{2}$; d) 1; e) *f* impară pe intervalul simetric în *x* = 0; 0; III. f) $\delta, \delta^2, \delta^3\ne e$ și $\delta^4=e$; g) $G=\{x\in S_4 \mid xu=ux\}$, unde $u\in H, u\ne e \Rightarrow G\le S_4 \Rightarrow ord(G)\mid 4!=24 \Rightarrow ord(G)\le 12 \Rightarrow \exists v\in H$ cu $v\notin G$; IV. a) n; c) $I_1=\frac{\pi}{2}, I_2=2$; e) $I_{2k+1}-I_{2k-1}=0 \Rightarrow I_{2n-1}=I_{2n-3}=...=I_3=I_1$; f) d) $\Rightarrow I_{2k}-I_{2k-2}=$ $=(-1)^{k-1}\frac{2}{2k-1}, k\in\mathbb{N}^*$ și se adună $k=\overline{1,n}$.

## 2. Teste pentru pregătirea examenului de admitere în facultate

**Testul 1.** 1. $\Delta < 0 \Rightarrow$ c) ; 2. $x = y - 7 \Rightarrow d$ ; 3. b); 4. $r = ax + b$, $P(-1) = 0$, $P(2) = 15 \Rightarrow a)$ ; 5. b); 6. c); 7. $f'(x) \le 0 \Rightarrow (m < 0, \Delta \le 0) \Rightarrow d)$ ; 8. c); 9. c); 10. $u = \ln x$ ; a); 11. $f(x) = 3^x$, $x \ge 0$, $f(x) = 3^{-x}$, $x < 0$ ; b).

**Testul 2.** 1. e); 2. d); 3. c); 4. d); 5. a); 6. c); 7. b); 8. b); 9. e); 10. a).

**Testul 3. Disciplina algebră.** 1. (9,5); 2. $D = -m(m+1)^2$ ; 3. a) $A, B \in M \Rightarrow A - B \in M$ ; b) $A, B \in M \Rightarrow$ $\Rightarrow AB \in M$ şi $I_2 \in M$ este element neutru; c) $(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$.

**Disciplina: Analiză matematică.** I. 1. $f'(x) = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$; 2. $y = 1$ a.o. la $\pm\infty$ , $x = 0$ a.v.; II. 2. $x = \text{arctg}\, y$; $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi^2}{36}$.

**Disciplina: Geometrie.** I. 1. $(AB): 2x - y + 8 = 0$, $(AC): 4x + 3y - 24 = 0$; $(BC): y = 0$ ; 2. $\Omega\left(1, \frac{5}{2}\right)$, $R = \frac{5\sqrt{5}}{2}$, $x^2 + y^2 - 2x - 5y - 24 = 0$ ; 4. $(QS): 11x + 2y - 22 = 0$, $H(0,3)$; 5. $\vec{\Omega A} = -\vec{i} + \frac{11}{2}\vec{j}$ ; II. $M\left(\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.

**Testul 4. Algebră.** 1. $|a - b| \le |a| + |b|$, cu egalitate dacă $ab \le 0$ ; b); 2. e); 3. b); 4. $e = 7$, $x * x' = 7 \Rightarrow$ $\Rightarrow x' = 6 + \frac{1}{x - 6}$ ; c); 5. d); 6. b); Analiză matematic 1. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow d)$ ; 2. b); 3. a); 4. $f(x) = x^3$, $x \le 0$, $f(x) = x$, $x > 0 \Rightarrow$ a); 5. d); 6. d).

**Testul 5.** 1. a) $2^x = y$ ; b) $x \in [0,1]$ ; c) $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup \{0\}$ ; 2. a) $\det(A) = 6 - 3m$; $m = 2 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$, $m \ne 2 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$ ; 3. a) $-a$ ; b) $a = 1$ ; d) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1) - \frac{a}{3}$ ; 4. a) $I_0 = \frac{\pi}{4}$, $I_1 = \ln 2$.

**Testul 6. Algebră.** I. 2. $\sigma \in \left\{e, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ ; 3. Prin reducere la absurd. II. 2. $f(z) = z, \forall z \in \mathbb{Z}$ ; Analiză matematică. 1. $H_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots +$ $+\left(\frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \to \infty$ ; 3. $f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot n!$ ; II. a) $g(x) = \frac{x^3}{x - 1}$ ; b) $f_n \nearrow$ pe $[0,1]$ şi $f_n(0) = -1, f_n(1) = n - 1$ ; d) $\frac{1}{2}$.

**Testul 7.** 1. b) $\Delta = m^2 - m + 1 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R}$ ; c) $y = x - 1$, $y_1 \le 0$, $y_2 \ge 0 \Rightarrow P_y \le 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ ; d) $m = 1$ ; 2. a) $-1, \pm i$ ; b) $y = 2x - a$ ; c) $\varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ ; d) $\Delta = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{7}{6}$ ; 3. a) $k = 3$ ;

**4. b)** $F(x)=x+2-2\ln\left(x^2+4x+5\right)$ **; d)** $f_n(x)=\dfrac{3-x^2}{(x+2)^n+1}\Rightarrow\dfrac{2}{3^n+1}\le f_n(x)\le\dfrac{3}{2^n+1}$ **care se integrează pe** $[0,1]$ **.**

**Testul 8. Algebră şi analiză matematică. 1. a); 2. c); 3. b); 4. a); 5. c); 6. a); 7. b); 8. c); 9. a); 10. a); 11. c); 12. c); 13. c); 14. b); 15. c).**

**Testul 9. Algebră şi analiză matematică. 1. d); 2. b); 3. d); 4. c); 5. a); 6. a); 7. d); 8. c); 9. e); 10. d); 11. d); 12. a); 13. c); 14. d); 15. d); 16. c) 17. d); 18. c).**

**Testul 10. Algebră şi analiză matematică. 1. c); 2. b); 3. d); 4. a); 5. c); 6. e); 7. b); 8. e); 9. a); 10. d); 11. b); 12. d); 13. e); 14. e); 15. d); 16. a).**

**Testul 11. Algebră şi analiză matematică. 1. a); 2. b); 3. d); 4. c); 5. e); 6. b); 7. e); 8. c); 9. a); 10. a); 11. d).**