

Culegere de probleme
MATEMATICĂ

BUCUREȘTI 1988

În sprijinul activității cercurilor științifice pionierești

**CULEGERE
DE
PROBLEME
DE
MATEMATICĂ**

**Din subiectele date la concursurile școlare
pe discipline de învățămînt, clasele IV—VIII**

Volumul II — REZOLVĂRI ȘI REZULTATE

BUCUREȘTI, 1987

Culegere editată de
CONSILIUL NAȚIONAL AL ORGANIZAȚIEI PIONIERILOR

COLECTIVUL DE REDACTARE A LUCRĂRII :

Clasa a IV-a și a V-a — prof. CĂRBUNARU CONSTANTIN

Algebră : clasa a VI-a și a VIII-a — prof. TRIFU MIRCEA

clasa a VII-a — prof. CHEȘCĂ ION

Geometrie : clasa a VI-a și a VIII-a — prof. GAIU LAURENȚIU

clasa a VII-a — prof. SINGER MIHAELA

COORDONATĂRI :

Lector univ. dr. BRĂNZĂNESCU VASILE

Prof. MITRACHE IOAN

Prof. HĂRĂBOR CONSTANTIN

Desene : BARON LUMINIȚA

Coperta : BARON STAN

CLASA A IV-A

REZOLVĂRILE ȘI REZULTATELE PROBLEMELOR PENTRU CLASA A IV-A

IV.1. 1000 dacă cifrele care se repetă sînt cît mai multe, 1001 dacă se repetă cît mai puține cifre.

IV.2. Cel mai mare număr natural de cinci cifre diferite este 98765 iar cel mai mare, mai mic decît el, este 98764.

IV.3. Dacă este mai mare decît 20000, înseamnă că este de forma $2abcd$. Deoarece trebuie să fie cel mai mic, $a = 0$, deci este de forma $20bcd$. Conform condiției c) avem $2 + b + c + d$ mai mare decît 19 adică $b + c + d$ mai mare decît 17, unde a, b, c sînt diferite și cît mai mici. Dacă $b = 1$, trebuie să avem $c + d$ mai mare ca 16. Cum numărul trebuie să fie cel mai mic găsim că $c = 8$ și $d = 9$. Deci numărul este 20189.

IV.4. 324 ; 234 ; 243 ; 423 ; 432.

IV.5. 17.

IV.6. 0.

IV.7. a) 1 ; b) 24.

IV.8. $24 + 250 - 187 = 274 - 187 = 87$.

IV.9. $9 + (81 : 9 - 9) + 220 - 0 = 9 + (9 - 9) + 220 =$
 $= 9 + 0 + 220 = 229$.

IV.10. $120 : 6 - 180 : 9 + 2 - 2 = 20 - 20 + 2 - 2 = 0$.

IV.11. $5\ 100 : 17 + 205 - 184 : 23 = 300 + 205 - 8 = 505 - 8 = 497$.

IV.12. $25 \cdot (160 - 150) - 8 - (24 + 1) = 25 \cdot 10 - 8 - 25 =$
 $= 250 - 8 - 25 = 242 - 25 = 217$.

IV.13. $550 : 10 + 20 \cdot (300 - 40 + 25) = 55 + 20 \cdot (260 + 25) =$
 $= 55 + 20 \cdot 285 = 55 + 5700 = 5755$.

IV.14. $255 : 15 - (20 - 0) : 2 = 17 - 20 : 2 = 17 - 10 = 7$.

IV.15. $1600 + 800 : 200 - 50 : 25 = 1600 + 4 - 2 = 1604 - 2 = 1602$.

IV.16. $(180 - 30) : 5 + 216 - (120 - 26) = 150 : 5 + 216 - 94 =$
 $= 30 + 216 - 94 = 246 - 94 = 152$.

- IV.17. $(180 - 30) : 5 + 720 - (120 - 26) = 150 : 5 + 720 - 94 =$
 $= 30 + 720 - 94 = 656.$
- IV.18. $(8\ 900 + 729\ 800) : 178 - 109 = 738\ 700 : 178 - 109 =$
 $= 4\ 150 - 109 = 4\ 041.$
- IV.19. $(229500 - 78000) : (20 + 105) = 151500 : 125 = 1212.$
- IV.20. $400 + 120 - [34 + 4 \cdot 50] = 520 - [34 + 200] =$
 $= 520 - 234 = 286.$
- IV.21. $[60\ 816 - 34\ 160 + (43\ 470 - 2\ 146)] : 330 =$
 $= [26\ 656 + 41\ 324] : 330 = 67\ 980 : 330 = 206.$
- IV.22. $[21\ 600 - 1\ 875 \cdot (100 - 91)] : 675 = [21\ 600 - 1\ 875 \cdot 9] : 675 =$
 $= [21\ 600 - 16\ 875] : 675 = 4\ 725 : 675 = 7.$
- IV.23. $[(210 + 13\ 841 - 6\ 944 - 107) \cdot 3] : (561 + 156 + 283) =$
 $[(14\ 051 - 6\ 944 - 107) \cdot 3] : 1\ 000 = [(7\ 107 - 107) \cdot 3] : 1\ 000 =$
 $= [7\ 000 \cdot 3] : 1\ 000 = 21\ 000 : 1\ 000 = 21.$
- IV.24. $48\ 000 - 3 + (300 + 2) \cdot 7 - 48\ 125 = 47\ 997 + 302 \cdot 7 - 48\ 125 =$
 $= 47\ 997 + 2\ 114 - 48\ 125 = 50\ 111 - 48\ 125 = 1\ 986.$
- IV.25. $[190\ 751 - 119 \cdot 309 - 512] : 147 = [190\ 751 - 36\ 771 -$
 $- 512] : 147 = [153\ 980 - 512] : 147 = 153\ 468 : 147 = 1\ 044.$
- IV.26. $1 + 5 \cdot \{4 + 0\} = 1 + 5 \cdot 4 = 1 + 20 = 21.$
- IV.27. $30 + 5 \cdot \{4 + 5 \cdot [40 + 8 \cdot (40 - 36)]\} =$
 $= 30 + 5 \cdot \{4 + 5 \cdot [40 + 8 \cdot 4]\} =$
 $= 30 + 5 \cdot \{4 + 5 \cdot [40 + 32]\} =$
 $= 30 + 5 \cdot \{4 + 5 \cdot 72\} = 30 + 5 \cdot \{4 + 360\} =$
 $= 30 + 5 \cdot 364 = 30 + 1\ 820 = 1\ 850.$
- IV.28. $1\ 500 + \{50 + 5 \cdot [265 - (2 + 2) \cdot 65] \cdot 150\} =$
 $= 1\ 500 + \{50 + 5 \cdot [265 - 4 \cdot 65] \cdot 150\} =$
 $= 1\ 500 + \{50 + 5 \cdot [265 - 260] \cdot 150\} =$
 $= 1\ 500 + \{50 + 5 \cdot 5 \cdot 150\} = 1\ 500 + \{50 + 25 \cdot 150\} =$
 $= 1\ 500 + \{50 + 3\ 750\} = 1\ 500 + 3\ 800 = 5\ 300.$
- IV.29. $2 \cdot \{92 + 8 \cdot [1\ 004 - 4 \cdot (4 \cdot 2 - 8 \cdot 2)]\} =$
 $= 2 \cdot \{92 + 8 \cdot [1\ 004 - 4 \cdot (8 - 4)]\} =$
 $= 2 \cdot \{92 + 8 \cdot [1\ 004 - 4 \cdot 4]\} =$
 $= 2 \cdot \{92 + 8 \cdot [1\ 004 - 16]\} = 2 \cdot \{92 + 8 \cdot 988\} =$
 $= 2 \cdot \{92 + 7\ 904\} = 2 \cdot 7\ 996 = 15\ 992.$
- IV.30. $2\ 500 + \{52 + 5 \cdot [265 - (2 + 2) \cdot 65] \cdot 150\} =$
 $= 2\ 500 + \{52 + 5 \cdot [265 - 4 \cdot 65] \cdot 150\} =$
 $= 2\ 500 + \{52 + 5 \cdot [265 - 260] \cdot 150\} =$
 $= 2\ 500 + \{52 + 5 \cdot 5 \cdot 150\} = 2\ 500 + \{52 + 25 \cdot 150\} =$
 $= 2\ 500 + \{52 + 3\ 750\} = 2\ 500 + 3\ 802 = 6\ 302.$
- IV.31. $30 + \{4 + 5 \cdot [8 \cdot (10 - 7)]\} : 2 = 30 + \{4 + 5 \cdot [8 \cdot 3]\} : 2 =$
 $= 30 + \{4 + 5 \cdot 24\} : 2 = 30 + \{4 + 120\} : 2 =$
 $= 30 + 124 : 2 = 30 + 62 = 92.$

$$\begin{aligned}
 \text{IV.32. } & 2 + 6 \cdot \{[(21 - 5) + 12] : 4 + 5\} \cdot 10 - [(10 + 100) \cdot 5 - 60] = \\
 & = 2 + 6 \cdot \{[16 + 12] : 4 + 5\} \cdot 10 - [110 \cdot 5 - 60] = \\
 & = 2 + 6 \cdot \{28 : 4 + 5\} \cdot 10 - [550 - 60] = \\
 & = 2 + 6 \cdot \{7 + 5\} \cdot 10 - 490 = 2 + 6 \cdot 12 \cdot 10 - 490 = \\
 & = 2 + 720 - 490 = 722 - 490 = 232.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV.33. } & [6 \cdot 1\,000 - (100 - 40) \cdot 5] - (100 \cdot 7 + 1\,000 : 25 \cdot 35) = \\
 & = [6\,000 - 60 \cdot 5] - (700 + 40 \cdot 35) = \\
 & = [6\,000 - 300] - (700 + 1\,400) = 5\,700 - 2\,100 = 3\,600.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV.34. } & \{[1\,848 + 9\,936 : 72] : (121 + 210)\} + 4 = \\
 & = \{[1\,848 + 138] : 331\} + 4 = \{1\,986 : 331\} + 4 = \\
 & = 6 + 4 = 10.
 \end{aligned}$$

IV.35. Avem :

$$\begin{aligned}
 a & = 42 - 30 - 9 = 12 - 9 = 3 ; \\
 b & = 8 + 12 - 16 = 20 - 16 = 4 ; \\
 c & = 7 - 2 = 5.
 \end{aligned}$$

Deci :

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 5 = 9 - 8 + 5 = 1 + 5 = 6 ; \\
 \text{b) } & 4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 12 - 12 + 10 = 0 + 10 = 10.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV.36. } \text{a) } & 5 \cdot [(4 : 2) + 8 - 2] = 5 \cdot [2 + 8 - 2] = 5 \cdot [10 - 2] = \\
 & = 5 \cdot 8 = 40 ;
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } [(5 \cdot 4) : 2] + (8 - 2) = [20 : 2] + 6 = 10 + 6 = 16 ;$$

$$\text{Altă situație : } [5 \cdot (4 : 2)] + (8 - 2) = [5 \cdot 2] + 6 = 10 + 6 = 16 ;$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & 5 \cdot [(4 : 2) + 8] - 2 = 5 \cdot [2 + 8] - 2 = 5 \cdot 10 - 2 = \\
 & = 50 - 2 = 48.
 \end{aligned}$$

$$\text{IV.37. } 5 \cdot 4 : (2 + 8) - 2 = 20 : 10 - 2 = 2 - 2 = 0.$$

$$\text{IV.38. } \text{a) } 6 \cdot 9 : (3 + 5 - 2) = 6 \cdot 9 : 6 = 54 : 6 = 9 ;$$

b) nu este nevoie de paranteze ;

$$\text{c) } 6 \cdot (9 : 3 + 5 - 2) = 36.$$

$$\text{IV.39. } \text{a) } 24 : 4 + 12 - 18 = 6 + 12 - 18 = 18 - 18 = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & 3 \cdot (8 : 4 + 6 \cdot 2) - 18 = 3 \cdot (2 + 12) - 18 = 3 \cdot 14 - 18 = \\
 & = 42 - 18 = 24.
 \end{aligned}$$

$$\text{IV.40. } a = [(20 + 1) \cdot 10 - 10] : 40 = [21 \cdot 10 - 10] : 40 = 200 : 40 = 5 ;$$

$$\begin{aligned}
 b & = [5 \cdot 5 - 20] \cdot 2 - 4 = [25 - 20] \cdot 2 - 4 = 5 \cdot 2 - 4 = \\
 & = 10 - 4 = 6.
 \end{aligned}$$

Deoarece $5 < 6$ rezultă că este adevărată afirmația $a < b$.

$$\text{IV.41. } a = 63 + 35 + 15 + 3 = 116 ;$$

$$b = 63 - 35 - 15 - 3 = 10 ;$$

$$a + b = 116 + 10 = 126 ;$$

$$a - b = 116 - 10 = 106 ;$$

$$(a + b) - (a - b) = 126 - 106 = 20. \text{ Deci cu } 20.$$

$$\begin{aligned} \text{IV.42. } & 111 + 222 + 333 + \dots + 888 + 999 = \\ & = (111 + 999) + (222 + 888) + (333 + 777) + \\ & + (444 + 666) + 555 = 1110 \cdot 4 + 555 = 4995. \end{aligned}$$

IV.43. Aflăm cifra unităților : $6 - 7$ nu este număr natural, deci $16 - 7 = 9$. Cifra zecilor : $(8 - 1) - 5 = 2$. Observăm că la cifra miilor $1 + 4$ este diferit de 6. Înseamnă că la cifra sutelor avem trecere peste ordin, deci $9 + 1 = 10$.

$$\text{Așadar : } 1\ 959 + 4\ 127 = 6\ 086.$$

IV.44. Se observă că doar $6 \cdot 4 = 24$ și $6 \cdot 9 = 54$ au ultima cifră, cifra 4. Avem deci situația :

$$\begin{array}{r} 45 \cdot 6 \times \\ \underline{324} \\ **144 \\ 9 \cdot 72 \\ \underline{13 \cdot 08} \\ 1 \cdot 69664 \end{array}$$

Continuăm cu cifra zecilor de la primul număr. Acesta poate fi 3 sau 8. Se constată că numai 3 îndeplinește condițiile cerute. Deci : $4536 \times 324 = 1469664$. Verificați. A doua situație nu corespunde. Verificați.

IV.45. Avem $b + 7 = 6$ ceea ce nu ne poate da pe b număr natural. Deci $b + 7 = 16$ adică $b = 9$. Mai departe trebuie să avem $5 + c = 8 - 1$ adică $c = 2$.

Observăm că la cifrele miilor $1 + 4$ este diferit de 6 deci la cifrele sutelor este nevoie de trecere peste ordin. Așadar : $a + 1 = d$ conduce numai la situația $a = 9$ și $d = 0$. Deci : $1\ 959 + 4\ 127 = 6\ 086$. Observație : problema este identică cu problema IV.43.

IV.46. a) Cifra unităților de la al doilea număr poate fi 3 sau 8. În cazul când avem 3 primul produs parțial se verifică : $472 \times 3 = 1\ 416$. Cifra zecilor de la același număr este 2 căci în cazul când o înmulțim cu 4 de la ordinul sutelor trebuie să avem fără trecere peste ordin, deci $472 \times 23 = 10\ 856$. În cazul când avem 8, nu se verifică primul produs parțial, 472×8 este diferit de 1 416.

b) Se observă că 362 are trei cifre ca și primul produs parțial. Cifra unităților de la al doilea număr nu poate fi decât 1, 2 sau 3. Din acestea, la înmulțirea cu 2 dă patru, numai 2 ; deci primul produs parțial este 724. Cifra zecilor la înmulțirea cu 2 trebuie să dea la al doilea produs parțial 8. Poate fi 4 sau 9. Verifică numai 9. Rezultă : $362 \times 92 = 33\ 304$.

$$\text{IV.47. } 9\ 944.$$

$$\text{IV.48. } 9 : 9 + 9 = 1 + 9 = 10.$$

IV.49. Împărțirea fără rest la 7 înseamnă că restul este zero ; numărul căutat este scris sub formă de produs unde unul din factori este 7.

Avem $7 \times 4 = 28$ și $7 \times 13 = 91$. Rezultă că numerele cerute sînt : 28 și 91.

IV.50. Deoarece Ionel are 660 lei înseamnă că Mihai are 660 lei : 4 = 165 lei, Mircea are 660 lei : 2 = 330 lei, iar Horia 330 lei \times 3 = 990 lei. Suma totală este 2 145 lei.

IV.51. a) 22 ; 16 ; 24 ;
b) 6 200 lei : (22 + 16 + 24) = 100 lei ;
c) 2 200 ; 1 600 ; 2 400.

IV.52. 3 826 lei.

IV.53. Consumul vacilor : $50 \text{ l} \times 250 = 12\,500 \text{ l}$.
Consumul cailor : $(50 \text{ l} + 10 \text{ l}) \times 48 = 2\,880 \text{ l}$.
Consumul oilor : $45\,028 \text{ l} - (12\,500 \text{ l} + 2\,880 \text{ l}) = 29\,648 \text{ l}$.
Numărul de oi este $29\,648 : 8 = 3\,706$.

IV.54. Diferența dintre populațiile celor două orașe este de 65 000 — 40 000 adică 25 000 de locuitori. Diferența dintre creșteri este de 6 500 — 4 000 = 2 500 (locuitori). Vor fi egale cele două populații după $25\,000 : 2\,500 = 10$ (ani).

IV.55. Toate catedrele costă : $1\,080 \text{ lei} \times 34 = 36\,720 \text{ lei}$ iar toate băncile costă : 265 860 lei — 36 720 lei = 229 140 lei.

O bancă costă : 229 140 lei : 603 = 380 lei.

Valoarea mobilierului, în lei, pentru liceu este : $1\,080 \times 15 + 380 \times 236 = 105\,880$.

Restul, este valoarea mobilierului pentru școală, adică 159 980 lei.

IV.56. Diferența de $1\,860 \text{ l} - 1\,680 \text{ l} = 180 \text{ l}$ provine de la cele 3 butoaie mai mult transportate prima dată. Deci un butoi are $180 \text{ l} : 3 = 60 \text{ l}$. Prima dată s-au primit $1\,860 : 60 = 31$ butoaie iar a doua oară $1\,680 : 60 = 28$ butoaie, adică, în total 59 butoaie.

IV.57. Mai întîi vom găsi numerele naturale care se împart exact la 3 și la 4, mai mici decît 40. Acestea sînt 0, 12, 24 și 36. Numerele cerute sînt 2, 14, 26 și 38.

IV.58. Deoarece împărțitorul este numărul 4 restul poate fi unul din numerele : 0 ; 1 ; 2 ; 3 deci avem 4×102 ; $4 \times 102 + 1$; $4 \times 102 + 2$; $4 \times 102 + 3$ adică 408 ; 409 ; 410 ; 411.

IV.59. Numărul natural cel mai mare trebuie să se împartă exact la trei, pentru a se obține numărul natural, cel mic. Numerele mai mari ca 14 și mai mici ca 20 care se împart exact la 3 sînt 15 și 18. Deci avem : 5 și 15 și altă situație 6 și 18.

IV.60. Un pahar mare costă cu 95 lei — 73 lei = 22 lei mai mult. Deci s-au cumpărat $374 : 22$ adică 17 pahare mari și tot atîtea pahare mici. Toate paharele au costat : $95 \times 17 + 73 \times 17$ adică 2 856 lei.

IV.61. Se observă că numărul de elevi, trebuie să fie un număr care prin împărțirea la trei să se obțină restul zero. Deci în clasă nu pot fi

32 elevi căci restul la împărțirea lui 32 la 3 este 2 și nu este numărul zero. În clasă pot fi 36 de elevi. Băieții sînt în număr de $36 : 3 = 12$ iar fete sînt $12 \times 2 = 24$.

IV.62. Se constată că trei părți egale cu numărul cel mic reprezintă $35 - 2 = 33$.

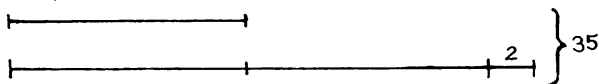


Fig. IV.62.

Rezultă că numărul cel mic este $33 : 3 = 11$, iar cel mare $11 \times 2 + 2 = 22 + 2 = 24$. Acesta se mai poate calcula și astfel : $35 - 11 = 24$.

IV.63. Cifra miilor este 9, cifra unităților este 8, iar cifra sutelor este 7 și cifra zecilor este 5. Deci numărul este 9 758.

IV.64. Cantitatea de lapte adusă a treia oară este $850 \text{ l} - 70 \text{ dal} = 850 \text{ l} - 700 \text{ l} = 150 \text{ l}$. Întreaga cantitate adusă la magazin este de $700 \text{ l} + 850 \text{ l} + 150 \text{ l} = 1 700 \text{ l}$. Vânzarea poate fi figurată astfel :

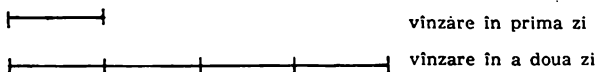


Fig. IV.64.

Constatăm că întreaga cantitate de 1 700 l se poate exprima prin cinci cantități egale cu cantitatea vîndută a doua zi. Deci cantitatea vîndută a doua zi este de $1 700 \text{ l} : 5 = 340 \text{ l}$, iar cea vîndută în prima zi, de patru ori mai mare, este de $340 \text{ l} \times 4 = 1 360 \text{ l}$. Verificare : $1 360 \text{ l} + 340 \text{ l} = 1 700 \text{ l}$.

Observație : Cantitatea vîndută în prima zi se mai poate afla și astfel : $1 700 \text{ l} - 340 \text{ l} = 1 360 \text{ l}$.

IV.65. Metoda I.

Se observă că diferența dintre vîrstele celor doi frați, în trecut, era de $11 - 6$, adică de cinci ani. Această diferență se păstrează mereu. Deci avem problema : doi frați au împreună 41 de ani, unul este mai mare decît celălalt cu cinci ani ; cîți ani are fiecare ?

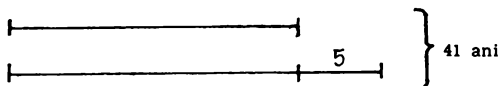


Fig. IV.65.a.

Figura sugerează următoarele calcule :

$41 - 5 = 36$; $36 : 2 = 18$; $18 + 5 = 23$. Deci unul are 18 ani, iar celălalt 23 ani.

Metoda a II-a.

Figurăm ca în desenul următor, unde segmentul „îngroșat“ reprezintă timpul care a trecut din trecut pînă în prezent.

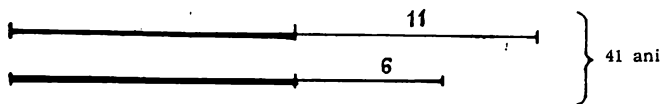


Fig. IV.65.b.

Vom avea $41 - (11 + 6) = 41 - 17 = 24$ deci $24 : 2 = 12$. Unul are $12 + 11$ adică 23 ani, iar celălalt $12 + 6$ adică 18 ani.

IV.66. În cazul în care cartea, în locul unde a fost deschisă nu are nici o foaie ruptă, cele două numere ce arată ordinea paginilor sînt două numere naturale consecutive. Diferența dintre două numere naturale consecutive este numărul 1. Ne ajutăm de desenul alăturat și afirmăm că primul număr este de două ori mai mic decît numărul $149 - 1 = 148$, adică $148 : 2 = 74$. Așadar numerele de pe cele două pagini pe care le privim sînt 74 și 75.

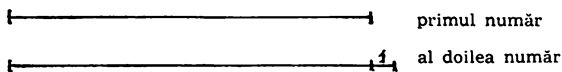


Fig. IV.66.a.

Verificare : $74 + 75 = 149$.

În cazul în care cartea, în locul în care este deschisă, are ruptă o foaie, cele două numere ce arată ordinea paginilor nu mai sînt numere consecutive. Ele sînt numere care au diferența numărul trei. Exemplu : pagina din stînga are numărul 16, iar cea din dreapta, numărul 19, foaia ruptă avînd numerele 17 și 18. În acest caz situația este reprezentată în figură astfel :

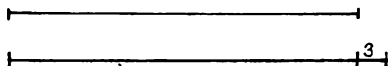


Fig. IV.66.b.

Deci $149 - 3 = 146$; $146 : 2 = 73$. Primul număr este 73, iar al doilea 76. Această situație nu corespunde realității. De regulă, numărul scris pe pagina din stînga, cel mic, este număr par, iar cel scris pe pagina din dreapta este număr impar.

Cercetați și alte situații !

IV.67. Figurăm în desen situația la început :

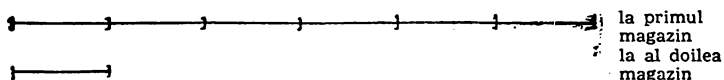


Fig. IV.67.a.

Figurăm în desen situația a doua :

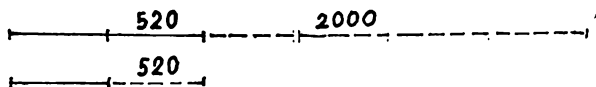


Fig. IV.67.b.

Se constată că suma $520 + 2\,000$ adică $2\,520$ reprezintă 5 cantități egale cu marfa adusă la început în al doilea magazin. Deci în al doilea magazin s-au adus $2\,520 \text{ kg} : 5 = 504 \text{ kg}$ iar în primul magazin, $504 \text{ kg} \times 6 = 3\,024 \text{ kg}$.

IV.68. a) Folosim metoda grafică luind ca unitate realizarea primei echipe.

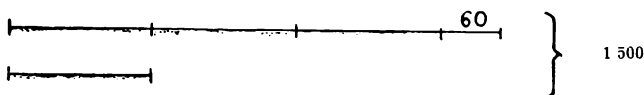


Fig. IV.68.

$1\,500 - 60 = 1\,440$; $1\,440 : 4 = 360$ de piese a realizat a doua echipă iar prima $1\,500 - 360 = 1\,140$.

b) Prima echipă are $1\,140 : 30 = 38$ de muncitori, iar a doua $360 : 30 = 12$.

IV.69. Ultima parte a enunțului ne permite să realizăm următorul desen :

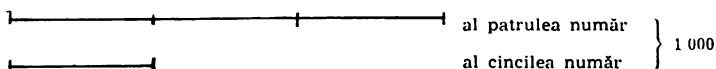


Fig. IV.69.

Aceasta sugerează calculele : $1\,000 : 4 = 250$; $250 \times 3 = 750$. Avem deci : al cincilea număr este 250, al patrulea număr 750, al treilea număr este $750 - 40 = 710$, al doilea număr este $710 + 25 = 735$, iar primul număr este $735 \times 2 = 1\,470$.

IV.70. $e = 125$; $d = 375$; $c = 300$; $b = 325$; $a = 1\,300$.

IV.71. Putem exprima totul numai cu bucăți, fiecare de lungime egală cu cea mică.



Fig. IV.71.

Două bucăți mari înseamnă cît patru bucăți mici. Avem, deci, 7 bucăți mici care reprezintă $185 \text{ cm} - 17 \text{ cm} = 168 \text{ cm}$. Bucata mică are 24 cm iar cea mare 48 cm.

IV.72. Avem : $240 - 20 = 220$ care reprezintă cinci părți egale cu numărul cel mic. Deci numărul cel mic este $220 : 5 = 44$, iar cel mare este $240 - 44 = 196$. Verificați prin împărțire. Problema este posibilă căci restul este mai mic decît împărțitorul.

IV.73.

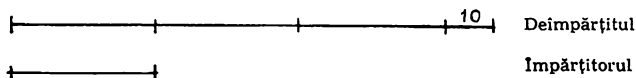


Fig. IV.73.

Numărul 143 este obținut adunînd patru numere : cel mare (deîmpărțitul), cu cel mic (împărțitorul), cu 3 (care este cîtul) și cu restul (care este 10). Deci, de patru ori numărul cel mic reprezintă $143 - (10 + 3) = 130$. Rezultă că numărul mic este $130 : 4 = 30$ iar cel mare este 100.

Faceți proba !

IV.74.

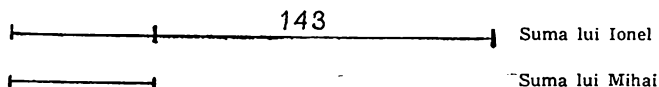


Fig. IV.74.a.

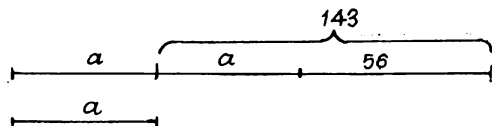


Fig. IV.74.b.

Se poate observa că suma lui Ionel este de două ori mai mare ca suma lui Mihai și încă 56 lei. Să notăm suma de bani a lui Mihai cu a (fig. b). Desenul ne poate conduce la faptul că : $a = 143 \text{ lei} - 56 \text{ lei} = 87 \text{ lei}$. Deci, Ionel are $87 \text{ lei} + 143 \text{ lei} = 230 \text{ lei}$.

IV.75. Notăm primul număr cu a . Prima condiție se figurează în desen astfel :

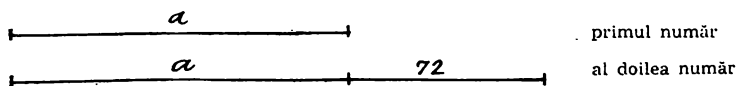


Fig. IV.75.a.

A doua situație poate fi figurată astfel :

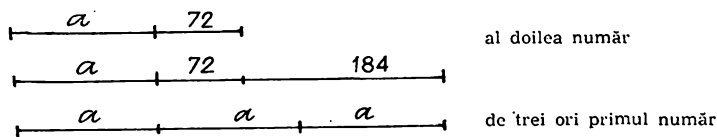


Fig. IV.75.b.

Se constată că $2 \times a = 72 + 184$. Se găsește că $a = 128$ iar al doilea număr este $128 + 72 = 200$.

IV.76. Sumele primite pot fi ilustrate în desenul alăturat.

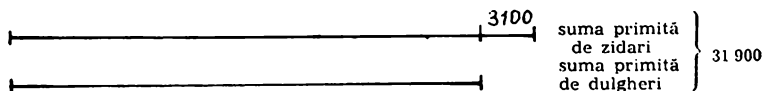


Fig. IV.76.

Observăm că suma primită de dulgheri este : $(31\ 900 - 3\ 100) : 2$ adică 14 400 lei. Suma primită de zidari este : $14\ 400 + 3\ 100$ adică 17 500 lei. Deci au fost $17\ 500 : 500 = 35$ (zidari) și $14\ 400 : 600 = 24$ (dulgheri).

IV.77.

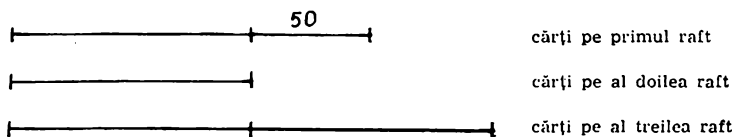


Fig. IV.77.

Folosind figura, constatăm că dacă din numărul de 458 scădem numărul 50 obținem 408 ce reprezintă de patru ori mai mult decât numărul de cărți de pe raftul al doilea. Deci pe raftul al doilea se găsesc de patru ori mai puține cărți decât numărul 408, adică $408 : 4 = 102$. Așadar : pe primul raft sînt $102 + 50 = 152$ cărți, pe al doilea raft sînt 102 cărți, iar pe al treilea sînt $102 \times 2 = 204$ cărți.

IV.78. Realizăm un desen în concordanță cu datele problemei unde am notat cu d diferența :

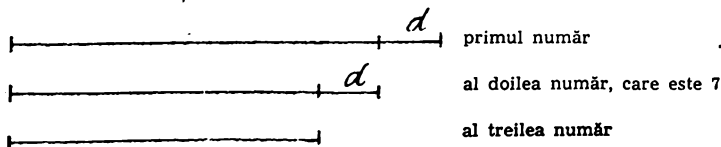
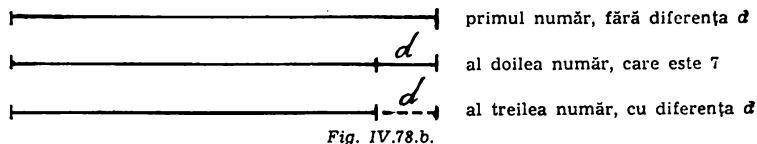


Fig. IV.78.a.

Ne putem imagina situația și astfel :

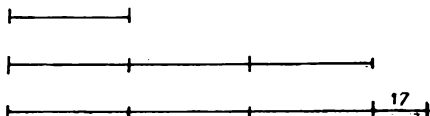


Această situație corespunde la faptul că suma celor trei numere este 7×3 adică 21.

IV.79. Deoarece a treia ladă este cu 4 kg mai mare ca a doua înseamnă că 5 cantități egale cu marfa din prima ladă reprezintă $(614 \text{ kg} - 4 \text{ kg}) : 5$ adică $610 \text{ kg} : 5 = 122 \text{ kg}$, a doua ladă are $122 \text{ kg} \times 2 = 244 \text{ kg}$ iar a treia ladă $244 \text{ kg} + 4 \text{ kg} = 248 \text{ kg}$. Verificați !

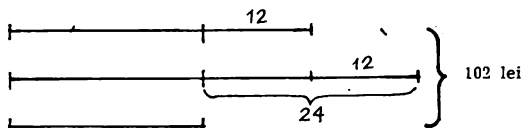
IV.80. 243 ; 486 ; 500.

IV.81. Scăzând din al treilea număr 17, rezultatul este egal cu numărul al doilea, care este de trei ori mai mare ca primul.



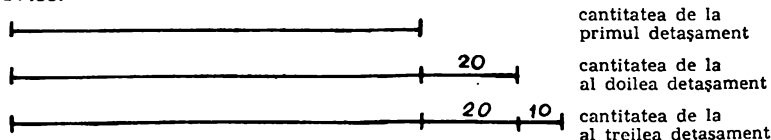
Deci de 7 ori primul număr este $717 - 17 = 700$. Avem numerele : $700 : 7 = 100$; $100 \times 3 = 300$; $300 + 17 = 317$.

IV.82.



Se observă că de trei ori suma cheltuită de al treilea este $102 - (24 + 12)$ adică 66 lei. Deci al treilea a cheltuit $66 \text{ lei} : 3 = 22 \text{ lei}$, al doilea a cheltuit $22 \text{ lei} + 24 \text{ lei} = 46 \text{ lei}$, iar primul $46 \text{ lei} - 12 \text{ lei} = 34 \text{ lei}$.

IV.83.



Se observă că dacă scădem din toată cantitatea de 320 kg ce este în plus la fiecare, față de primul detașament, adică $20 + (20 + 10) = 20 + 30 = 50$, obținem $320 \text{ kg} - 50 \text{ kg} = 270 \text{ kg}$ care reprezintă de 3 ori cantitatea adunată de primul. Deci cantitatea adunată de primul este $270 \text{ kg} : 3 = 90 \text{ kg}$. Așadar, cantitățile sînt respectiv : 90 kg ; 110 kg ; 120 kg.

b) Fiecare detașament a contribuit respectiv cu : $90 \times 15 = 1\,350$ (lei) ; $110 \times 15 = 1\,650$ (lei) și $120 \times 15 = 1\,800$ (lei). Verificare : $1\,350 \text{ lei} + 1\,650 \text{ lei} + 1\,800 \text{ lei} = 4\,800 \text{ lei}$ adică $320 \times 15 = 4\,800 \text{ lei}$.

IV.84. Informațiile despre primele trei numere pot fi figurate în desen astfel :

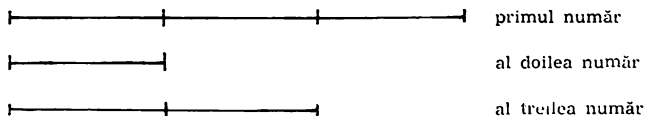


Fig. IV.84.

Deoarece al patrulea număr este 30 obținem că suma primelor trei este $138 - 30 = 108$. Se observă că numărul al doilea este de 6 ori mai mic decît 108. Deci el este $108 : 6 = 18$. Rezultă că numărul al treilea este $18 \times 2 = 36$ iar primul $18 + 36 = 54$. Verificare : $54 + 18 + 36 + 30 = 138$.

IV.85.



Fig. IV.85.

Andrei a strîns $28 \text{ kg} : 7 = 4 \text{ kg}$; Ada a strîns $4 \text{ kg} \cdot 2 = 8 \text{ kg}$; iar Ana a strîns $8 \text{ kg} \cdot 2 = 16 \text{ kg}$.

IV.86. Ne imaginăm datele problemei în următorul desen :

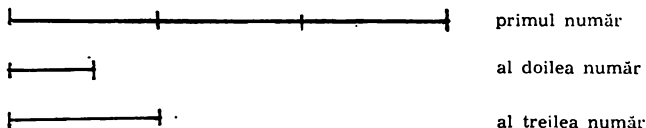


Fig. IV.86.a.

Putem să exprimăm atît primul număr cît și al treilea număr, în desen, cu ajutorul celui de-al doilea astfel :

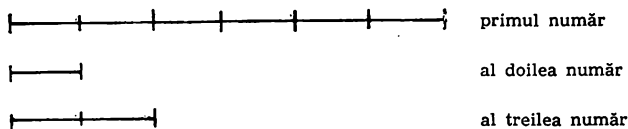


Fig. IV.86.b.

În acest mod suma numerelor, care este 45, înseamnă că este de 9 ori mai mare decât numărul al doilea. Avem deci : $45 : 9 = 5$ adică al doilea număr, $5 \cdot 2 = 10$ adică al treilea număr și $10 \cdot 3 = 30$ primul număr. Verificare : $30 + 5 + 10 = 45$.

IV.87. Notăm cu a , b , c cele trei numere. Figurăm în desen, faptul că suma lor este 1 240 și că suma primelor două, $a + b = 938$:

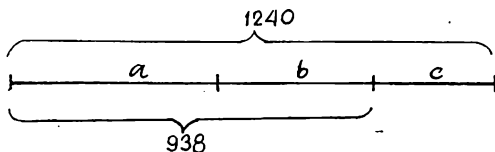


Fig. IV.87.a.

Observăm că al treilea număr se obține prin scăderea : $c = 1\ 240 - 938 = 302$. Figurăm în desen, faptul că suma celor trei numere este 1 240 și că suma ultimelor două este 720.

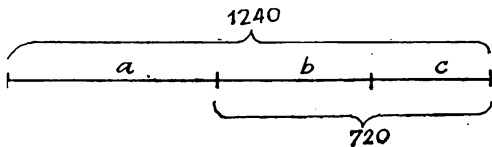


Fig. IV.87.b.

Primul număr se obține prin scăderea $a = 1\ 240 - 720 = 520$. Din suma primelor două scădem numărul a și obținem numărul $b = 938 - 520 = 418$. Deci trei operații aritmetice.

IV.88. 10 lei ; 100 lei ; 90 lei.

IV.89. 2 000 kg ; 3 000 kg ; 4 000 kg.

IV.90. 62 kg ; 71 kg ; 74 kg.

IV.91. Se observă că al treilea număr este cu $250 - 180 = 70$ mai mare decât al doilea număr. Avem că $2\ 450 - (250 + 70) = 2\ 130$ reprezintă de

trei ori mai mult decît numărul al doilea. Deci acest număr este $2 \cdot 130 : 3 = 710$. Rezultă că primul număr este $710 + 250 = 960$, iar al treilea 780.

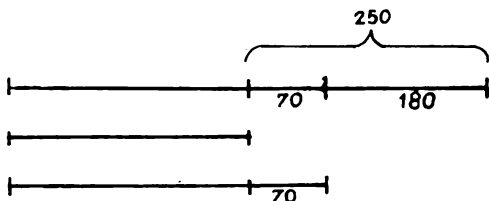


Fig. IV.91.

IV.92.

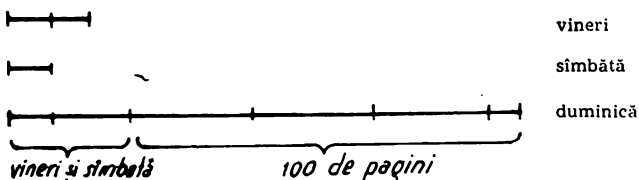


Fig. IV.92.

Observați că 100 de pagini reprezintă de trei ori mai mult decît a citit vineri și sîmbătă și încă 10 pagini. Înseamnă că de trei ori cît a citit vineri și sîmbătă reprezintă $100 - 10$ adică 90 de pagini. Cum vineri a citit de două ori mai mult ca sîmbătă, deci vineri și sîmbătă a citit $90 : 3 = 30$ (pagini), înseamnă că vineri a citit $30 : 3 = 10$ (pagini) iar sîmbătă a citit $10 \cdot 2 = 20$ de pagini. Deci a citit respectiv 20, 10, 130 pagini.

IV.93. Numărul de animale este $100 - 4 = 96$.

Se observă că viței și mînji la un loc, sînt de patru ori mai mult decît mînji. Deci miei sînt de 8 ori mai mulți decît mînji. Putem exprima numărul de animale, adică 96, prin 12 părți egale cu numărul mînjilor. Rezultă că mînji sînt : $92 : 12 = 8$, viței sînt $8 \cdot 3 = 24$ iar miei $(8 + 24) \cdot 2 = 32 \cdot 2 = 64$. Verificați !

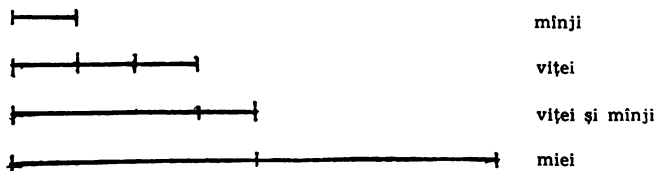


Fig. IV.93.

IV.94. Desenul ne sugerează următoarele calcule :

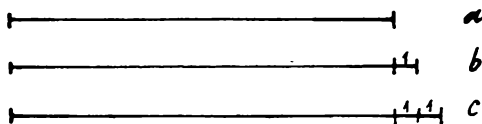


Fig. IV.94.

$$1\ 209 - 3 = 1\ 206 ; 1\ 206 : 3 = 402.$$

Deci numerele sînt : 402 ; 403 ; 404.

IV.95. a)

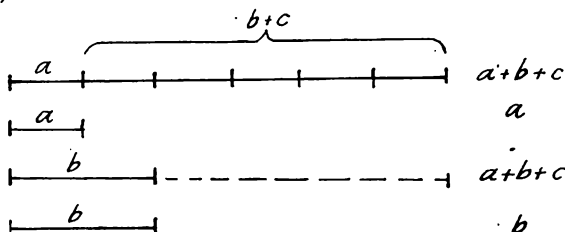


Fig. IV.95.a.

Se constată că b este de două ori mai mare decît a . Deci avem următorul desen :

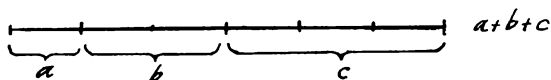


Fig. IV.95.b.

Rezultă că suma $a + b + c$ este mai mare de două ori decît c .

$$b) a = b : 2 = 54 ; c = (a + b + c) : 2 = (6 \cdot a) : 2 = 3 \cdot a = 162.$$

IV.96. Metoda I : figurăm în desen situația cu privire la primele două persoane, unde am notat cu a suma încasată de prima persoană :

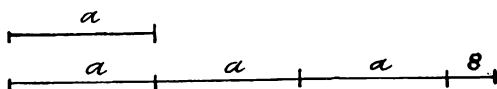


Fig. IV.96.a.

Conform enunțului a treia persoană primește de 4 ori mai mult decît $4 \cdot a + 8$. Aceasta înseamnă de 16 ori suma a adunată cu $4 \cdot 8$. Înseamnă că suma de 520 lei este formată din 20 părți egale cu a , adunate cu 40 lei. Avem deci că suma $a = (520 \text{ lei} - 40 \text{ lei}) : 20 = 24 \text{ lei}$. A doua persoană a primit $(24 \text{ lei} \cdot 3) + 8 \text{ lei} = 80 \text{ lei}$, iar a treia, 416 lei.

Metoda a II-a : urmărind desenul, putem raționa astfel :

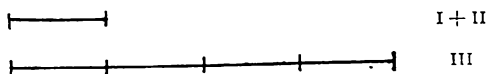


Fig. IV.96.b.

$520 : 5 = 104$ este suma încasată de prima persoană și a doua la un loc. Deci $520 - 104 = 416$ a încasat persoana a treia. Prima persoană a primit $(104 - 8) : 4 = 24$ (lei), iar a doua $104 - 24 = 80$ (lei).

IV.97. Reprezentăm grafic condiția că fiecare cifră este cu 2 mai mare decît cea anterioară. Deoarece suma cifrelor este 20, rezultă că de patru ori cifra mai mică este reprezentată prin numărul $20 - 2 \cdot 6 = 8$, adică $8 : 4 = 2$. Așadar cifrele sînt 2, $2 + 2 = 4$, $4 + 2 = 6$, $6 + 2 = 8$ și deci numărul este 2 468 sau 8 642.

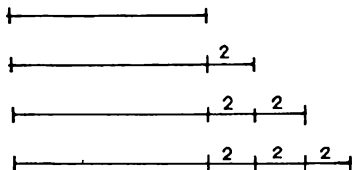


Fig. IV.97.

IV.98. Se observă că al treilea siloz este mai mare decît al patrulea cu $(280 - 150)$ tone, adică cu 130 t. Urmărind desenul constatăm că de 5 ori cit este în al patrulea siloz reprezintă $10\ 345 - (3 \cdot 280) - 130$ adică 9 375 tone. Rezultă că în al patrulea siloz se află $9\ 375 t : 5 = 1\ 875 t$; în al treilea siloz se află $1\ 875 t + 130 t = 2\ 005 t$; în al doilea avem $1\ 875 t + 280 t = 2\ 155 t$; iar în primul $2\ 155 t \cdot 2 = 4\ 310 t$.

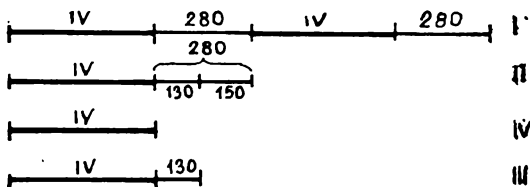


Fig. IV.98.

IV.99. Se observă și din desen că D este mai mare decît B cu $40 - 25$ adică cu 15. Dacă lui B îi adunăm 15, iar lui C îi adunăm 40 suma $B + C + D + E$ se mărește cu $15 + 40 = 65$. Obținem că $815 + 65 = 870$, adică trei numere egale cu D la care se adună numărul E . Folosim și condiția d) și obținem că 870 reprezintă 10 numere egale cu E .

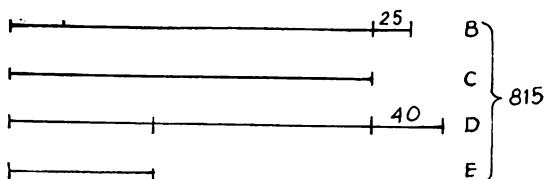


Fig. IV.99.a.

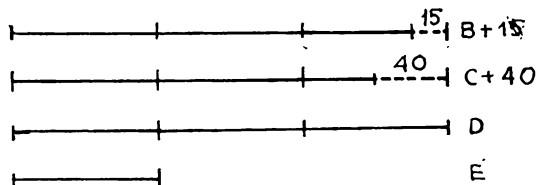


Fig. IV.99.b.

Rezultă că : $E = 870 : 10 = 87$; $D = 87 \cdot 3 = 261$; $C = D - 40 = 261 - 40 = 221$; $B = C + 25 = 246$; $A = B \cdot 2 = 492$.

Verificare : $B + C + D + E = 246 + 221 + 261 + 87 = 815$.

IV.100. a) Scriem datele problemei astfel :

2 caiete matematică, 2 caiete desen, 12 lei ;

2 caiete matematică, 3 caiete desen, 13 lei

Se observă că :

0 caiete matematică, 1 caiet desen, 1 leu

0 caiete matematică, 2 caiete desen, 2 lei

Rezultă că :

2 caiete matematică, 0 caiete desen, 10 lei

1 caiet matematică, 0 caiete desen 5 lei

b) 6 caiete de desen sau 1 caiet matematică și 1 caiet de desen.

IV.101. Așezăm datele astfel :

17 saci făină, 26 saci cartofi, 2 764 kg

17 saci făină, 35 saci cartofi, 3 250 kg

0 saci făină, 9 saci cartofi, 486 kg

0 saci făină, 1 sac cartofi, $486 \text{ kg} : 9 = 54 \text{ kg}$

0 saci făină, 26 saci cartofi, $54 \text{ kg} \cdot 26 = 1 404 \text{ kg}$

17 saci făină, 0 saci cartofi, $2 764 \text{ kg} - 1 404 \text{ kg} = 1 360 \text{ kg}$

1 sac făină, 0 saci cartofi, $1 360 \text{ kg} : 17 = 80 \text{ kg}$

Deci un sac cu cartofi cîntărește 54 kg, iar unul cu făină, 80 kg.

IV.102. a) 50 kg ; b) 30 kg.

IV.103. 80 kg ; 50 kg.

IV.104. 12 băieți, 6 fete, 150 kg.

24 băieți, 13 fete, 305 kg.

Dacă dublăm tot ce avem în prima situație obținem :

24 băieți, 12 fete, 300 kg.

24 băieți, 13 fete, 305 kg.

Rezultă că o fată culege 5 kg iar un băiet 10 kg.

IV.105. Datele problemei sînt :

4 m pînză, 15 m stambă, 530 lei

3 m pînză, 10 m stambă, 360 lei

Dacă în prima situație considerăm de două ori mai mult iar în a doua de trei ori mai mult obținem că :

8 m pînză, 30 m stambă, 1 060 lei

9 m pînză, 30 m stambă, 1 080 lei

Această situație ne conduce la afirmația :

1 m pînză, 0 m stambă, 20 lei

Acum putem spune că 1 m stambă costă $(360 - 3 \cdot 20) : 10$ adică 30 lei.

IV.106. Dacă o masă costă cît trei scaune iar un dulap cît trei mese, înseamnă că un dulap costă cît 9 scaune. Așadar în loc de o masă, un scaun și un dulap avem 13 scaune care costă 2 808 lei.

Deci un scaun costă 216 lei, o masă 648 lei, iar un dulap 1 944 lei. Tot mobilierul costă : $9 \cdot 1 944 \text{ lei} + 16 \cdot 648 \text{ lei} + 64 \cdot 216 \text{ lei} = 41 688 \text{ lei}$.

IV.107. Desenul din figură ne conduce la următoarele calcule: $70 \text{ kg} : 5 = 14 \text{ kg}$ (struguri) ; $14 \text{ kg} \times 4 = 56 \text{ kg}$ (mere). Deoarece 1 kg struguri costă cît 2 kg mere, am putea spune că de aceeași sumă s-au cumpărat numai mere în cantitatea de : $(14 \text{ kg} \times 2) + 56 \text{ kg} = 84 \text{ kg}$ (mere). Deci prețul merelor este $420 \text{ lei} : 84 = 5 \text{ lei}$ iar al strugurilor 10 lei.

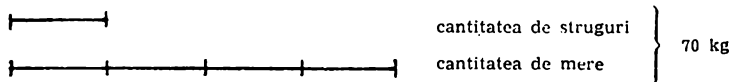


Fig. IV.107.

IV.108. $x \times 2 - 40 = 12 \times 23$; $x \times 2 - 40 = 276$.

$x \times 2 = 276 + 40$; $x \times 2 = 316$; $x = 316 : 2$; $x = 158$.

IV.109. $[(x - 104 + 2) \times 5 + 3] = 1 986 : 2$

$(x - 104 + 2) \times 5 + 3 = 993$

$(x - 104 + 2) \times 5 = 993 - 3$

$(x - 104 + 2) \times 5 = 990$

$x - 104 + 2 = 990 : 5$; $x - 104 + 2 = 198$

$x - 104 = 198 - 2$; $x - 104 = 196$; $x = 196 + 104$

$x = 300$.

IV.110. $(288 - 288) \times (1 985 \times 1 986 + 1 987 \times 1 988 - 1 989 \times 1 990) +$
 $+ x = 2$; $0 \times (1 985 \times 1 986 + 1 987 \times 1 988 - 1 989 \times 1 990) +$
 $+ x = 2$; $0 + x = 2$; $x = 2$.

IV.111. $x = 2$.

$$\text{IV.112. } [(812 - 207) : 5 + 720 - (767 - 26)] \times x = 1\,000$$

$$[605 : 5 + 720 - 741] \times x = 1\,000$$

$$[121 + 720 - 741] \times x = 1\,000 ; 100 \times x = 1\,000 ; x = 10.$$

$$\text{IV.113. } 5 \times x - 40 - 200 = 40 ; 5 \times x - 40 = 40 + 200 ;$$

$$5 \times x - 40 = 240 ; 5 \times x = 240 + 40 ; 5 \times x = 280 ;$$

$$x = 280 : 5 ; x = 56.$$

$$\text{IV.114. a) } b = 0 \text{ și } a \neq 0 ; b \neq 0 \text{ și } a = 0 ; b = a = 0$$

b) deoarece avem $0 \times c = 0$, înseamnă că c este orice număr natural. Deci exercițiul devine $a \times b = 6$. Numerele a și b fiind naturale, avem : $a = 1$ și $b = 6$; $a = 2$ și $b = 3$; $a = 3$ și $b = 2$; $a = 6$ și $b = 1$

c) $c = 0$ și $a - b$ orice număr natural ; $a - b = 0$, adică $a = b$ și c orice număr natural.

$$\text{IV.115. } x \times [14 \times (400 - 300)] = 5\,600 ; x \times [14 \times 100] = 5\,600 ;$$

$$x \times 1\,400 = 5\,600 ; x = 5\,600 : 1\,400 ; x = 4.$$

$$\text{IV.116. } [(x - 1) : 100 + 90] : 10 = 10 ; (x - 1) : 100 + 90 = 100 ;$$

$$(x - 1) : 100 = 10 ; x - 1 = 1\,000 ; x = 1\,001.$$

$$\text{IV.117. } [(13 \times x - 30) : 3 - 10] = 1\,225 : 7 ;$$

$$(13 \times x - 30) : 3 - 10 = 175 ; (13 \times x - 30) : 3 = 185 ;$$

$$13 \times x - 30 = 555 ; 13 \times x = 585 ; x = 45.$$

$$\text{IV.118. } 123 \times x - 1\,278 = 36 \times 149 ; 123 \times x - 1\,278 = 5\,364 ;$$

$$123 \times x = 6\,642 ; x = 54.$$

$$\text{IV.119. } \{[4 \times 5 - 2 + 3] : 7 + 9\} : x = 4 ;$$

$$\{[20 - 2 + 3] : 7 + 9\} : x = 4 ; \{21 : 7 + 9\} : x = 4 ;$$

$$12 : x = 4 ; x = 3.$$

$$\text{IV.120. } (x + 270 : 3) \times 5 + 100 = 600 ; (x + 270 : 3) \times 5 = 500 ;$$

$$x + 90 = 500 : 5 ; x + 90 = 100 ; x = 10.$$

$$\text{IV.121. } [(286 + x) - 43] : 3 = 306 ; [(286 + x) - 43] = 918 ;$$

$$286 + x = 961 ; x = 675.$$

$$\text{IV.122. } 10 \times \{x - 10 \times [362 + 10 \times (24 + 6)]\} = 100 ;$$

$$10 \times \{x - 10 \times [362 + 10 \times 30]\} = 100 ;$$

$$10 \times \{x - 10 \times [362 + 300]\} = 100 ;$$

$$10 \times \{x - 10 \times 662\} = 100 ;$$

$$10 \times \{x - 6\,620\} = 100 ; x - 6\,620 = 10 ; x = 6\,630.$$

$$\text{IV.123. } 204 : 102 + x \times 900 = 402 + 1\,400 ;$$

$$2 + x \times 900 = 1\,802 ; x \times 900 = 1\,800 ; x = 1\,800 : 900 ;$$

$$x = 2.$$

IV.124. Cantitățile vândute sînt respectiv : 491 kg, 639 kg, 834 kg. Sumele încasate sînt respectiv : 2 946 lei, 3 834 lei, 5 004 lei.

IV.125. Desenul din figură inspiră următoarele calcule :

$1\,100 : 11 = 100$, adică al doilea număr. Al patrulea este $100 \times 4 = 400$. Primul este $100 \times 2 = 200$. Al treilea este $200 \times 2 = 400$. Verificați !

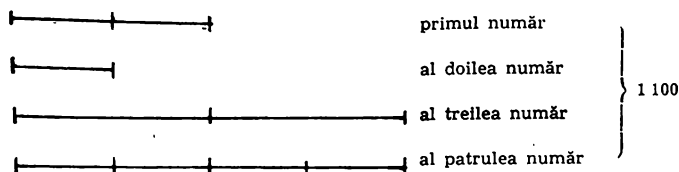


Fig. IV.126.

IV.126. În afară de pionierul comandant sînt 35 elevi. În fața sa avem o parte, iar în spatele său patru părți egale cu cea din față. Deci cei 35 elevi reprezintă 5 părți egale cu numărul elevilor din față. În fața pionierului comandant sînt $35 : 5 = 7$ elevi, deci el este pe locul opt în coloană.

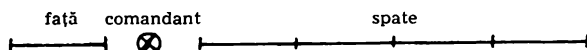


Fig. IV.125.

IV.127. Elevul a avut inițial 50 lei $\times 4 = 200$ lei. I-au mai rămas după cumpărarea stiloului 200 lei $- 50$ lei $= 150$ lei. Cărțile au costat 150 lei $: 5 = 30$ lei. Rezultă că a mai rămas cu 150 lei $- 30$ lei adică cu 120 lei.

Observație : Deoarece cele două cărți au costat o cincime din rest, înseamnă că i-au mai rămas $\frac{4}{5}$ din rest, adică $(150 \text{ lei} : 5) \times 4 = 120$ lei.

IV.128. Cei doi băieți mai puțin înseamnă $30 - 2 = 28$. Reprezentăm grafic datele problemei :

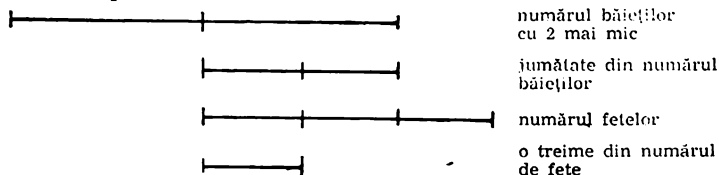


Fig. IV.128.a.

Așadar, putem exprima grafic cu ajutorul a o treime din numărul fetelor situația celor 28 de elevi astfel :

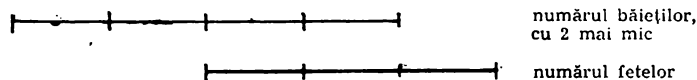


Fig. IV.128.b.

Deci numărul de 28 de elevi corespunde la 7 părți egale, egale fiecare cu o treime din numărul fetelor, adică $28 : 7 = 4$. Rezultă că o treime din numărul fetelor este reprezentată de 4 fete. Găsim că numărul fetelor este $4 \times 3 = 12$, iar al băieților $(28 - 12) + 2 = 14 + 2 = 16$. Verificare : $12 + 16 = 30$.

IV.129. Figurăm datele problemei :

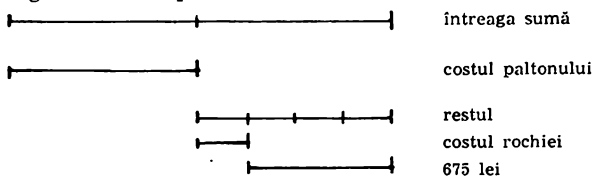


Fig. IV.129.

Se observă că 675 lei reprezintă $\frac{3}{8}$ din întreaga sumă. $\frac{1}{8}$ din întreaga sumă (costul rochiei) este 675 lei : 3 = 225 lei. Deci întreaga sumă este : 225 lei \times 8 = 1 800 lei.

IV.130. $a = 2\,568$; $b = 2\,568 : 6 = 428$; $c = (428 : 4) \times 3 = 321$;
 $b + c = 428 + 321 = 749$; $d = (749 : 7) \times 5 = 107 \times 5 = 535$
 $a + b + c + d = 2\,568 + 428 + 321 + 535 = 3\,852$.

IV.131. În prima zi s-au trimis $(18\,540 \text{ t} : 9) \times 2 = 2\,060 \text{ t} \times 2 = 4\,120 \text{ t}$. Restul după prima zi este : $18\,540 \text{ t} - 4\,120 \text{ t} = 14\,420 \text{ t}$. A doua zi s-au trimis $(14\,420 \text{ t} : 5) \times 3 = 8\,652 \text{ t}$. În a treia zi s-au trimis $14\,420 \text{ t} - 8\,652 \text{ t} = 5\,768 \text{ t}$.

IV.132. Transpunem în desen datele problemei :

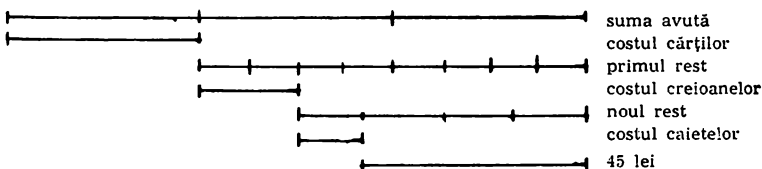


Fig. IV.132.

Se observă că un sfert din noul rest reprezintă 15 lei, deci noul rest este de 60 lei. Trecind peste unele etape se observă că suma avută este de 120 lei. Verificați !

IV.133. Priviți desenul :

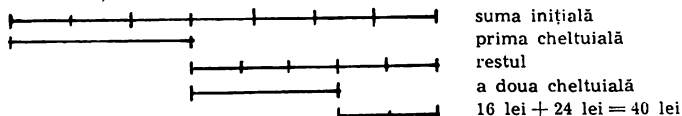


Fig. IV.133.

Se constată că 40 lei reprezintă $\frac{2}{5}$ din restul după prima cheltuială. $\frac{1}{5}$ din rest reprezintă 20 lei, deci restul este 100 lei ce reprezintă $\frac{4}{7}$ din sumă. $\frac{1}{4}$ din sumă reprezintă 100 lei : 4 = 25 lei, deci suma a fost 25 lei \times 7 = 175 lei.

IV.134. Sumele de bani pe care le au la început pot fi reprezentate în desen astfel :

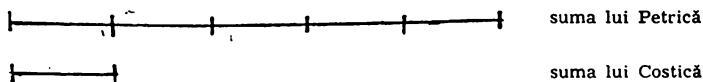


Fig. IV.134.a.

După împrumut sumele se reprezintă astfel :

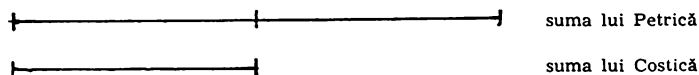


Fig. IV.134.b.

Se observă că suma, la un loc, a celor doi elevi prima dată este formată din 6 părți egale, iar a doua oară — aceeași sumă, din 3 părți egale. Înseamnă că o parte din situația a doua, care este suma lui Costică, este formată din două părți egale din situația întâi, care este suma inițială a lui Costică. Așadar, Petrică dându-i 120 lei lui Costică înseamnă că a dublat suma inițială a lui Costică. Rezultă că, la început, Costică a avut 120 lei, iar Petrică $120 \text{ lei} \times 5 = 600 \text{ lei}$.

IV.135. $\frac{3}{4}$ din 2 640 înseamnă : $(2\ 640 : 4) \times 3 = 1\ 980$. Două jumătăți din 20 înseamnă 20. Avem de rezolvat următoarea problemă : găsiți numărul x , știind că : $(1\ 980 + 20) : x = 500$, deci $2\ 000 : x = 500$, adică $x = 4$.

IV.136. S-au plantat : $(4\ 800 : 5) \times 2 = 960 \times 2 = 1\ 920$ (meri). $(4\ 800 : 8) \times 3 = 600 \times 3 = 1\ 800$ (peri); $4\ 800 : 6 = 800$ (caiși) și $4\ 800 - (1\ 920 + 1\ 800 + 800) = 280$ (pruni).

IV.137. S-au vândut 40 de cărți de știință ; au mai rămas $240 - 40$, adică 200 cărți. Din acestea s-au vândut $(200 : 5) \times 2$, adică 80 cărți de povești, iar restul de 120, cărți de colorat. Cărțile științifice costă $20 \text{ lei} \times 40 = 800 \text{ lei}$, cele de povești costă $(20 \text{ lei} + 5 \text{ lei}) \times 80 = 2\ 000 \text{ lei}$, iar cele de colorat $[(20 \text{ lei} + 25 \text{ lei}) : 5] \times 120 = 1\ 080 \text{ lei}$. Valoarea totală este 3 880 lei. Verificați !

IV.138. Pentru a afla câți pui și câte găini sînt, folosim desenul din figura IV.138.a., care inspiră următoarele calcule : $920 - 690 = 230$; $230 : 2 = 115$. Deci găini sînt 115, iar pui sînt $690 + 115$ adică 805. Se vînd $805 : 5$ adică 161 pui și $(115 : 5) \times 3$ adică 69 găini. Pentru a afla prețul unui pui și apoi al unei găini apelăm tot la metoda grafică (Fig. IV.138.b.) :

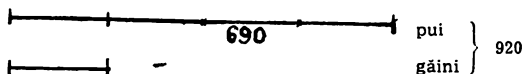


Fig. IV.138.a.

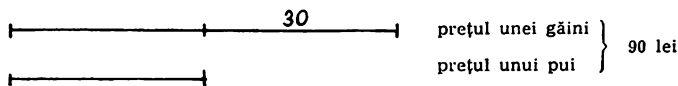


Fig. IV.138.b.

Un pui costă: $(90 \text{ lei} - 30 \text{ lei}) : 2 = 60 \text{ lei} : 2 = 30 \text{ lei}$. O găină costă: $30 \text{ lei} + 30 \text{ lei} = 60 \text{ lei}$. S-au încasat: $(30 \text{ lei} \times 161) + (60 \text{ lei} \times 69) = 8\,970 \text{ lei}$.

IV.139. Desenul ne convinge că un sfert din economia Ioanei reprezintă 24 lei: $3 = 8 \text{ lei}$; deci suma avută de Ioana este $8 \text{ lei} \times 4 = 32 \text{ lei}$.

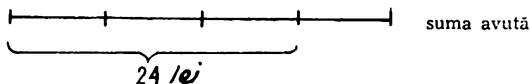


Fig. IV.139.

IV.140. a) În primele două luni realizează $\frac{6}{9}$, iar restul este $\frac{3}{9}$ adică $\frac{1}{3}$ din numărul de piese planificate ce reprezintă 9 000 de piese. Deci planul a fost de 27 000 piese.

b) 14 400; 7 200; 5 400.

IV.141.

$$\frac{\frac{11}{5} - \frac{6}{5} + \frac{16}{8} + \frac{4}{7}}{7} = \frac{\frac{5}{5} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}}{7} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{7}{7} = 1.$$

IV.142.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{12}{11} - \frac{5}{11} + \frac{11}{11} - \frac{7}{11} \right) \cdot \left(\frac{15}{17} + \frac{4 \times 17}{17} - \frac{8}{17} - \frac{3 \times 17}{17} - \frac{7}{17} \right) = \\ & = \left(\frac{7}{11} + \frac{11}{11} - \frac{7}{11} \right) \cdot \left(\frac{15}{17} + \frac{68}{17} - \frac{8}{17} - \frac{51}{17} - \frac{7}{17} \right) = \\ & = \left(\frac{18}{11} - \frac{7}{11} \right) \cdot \left(\frac{83}{17} - \frac{8}{17} - \frac{51}{17} - \frac{7}{17} \right) = \frac{11}{11} \cdot \left(\frac{75}{17} - \frac{51}{17} - \frac{7}{17} \right) = \\ & = 1 \cdot \left(\frac{24}{17} - \frac{7}{17} \right) = \frac{17}{17} = 1. \end{aligned}$$

IV.143. a) $x = 800 - 47,8$; $x = 752,2$;

b) $x = 9,78 + 28,5 = 38,28$.

IV.144. Al treilea număr este $16\,336,75 - 10\,702,50 = 5\,634,25$.

Al doilea număr este $6\,712,25 - 5\,634,25 = 1\,078$.

Primul număr este $10\,702,50 - 1\,078 = 9\,624,50$.

IV.145. Fiecare robinet curge în bazin, într-un minut, respectiv 1 l, 2 l, 4 l, iar într-o oră, respectiv 60 l, 120 l, 240 l. Cele trei robinete curg împreună într-o oră 420 l, iar în 10 ore 4 200 l adică 42 hl. Din această

cantitate se scurg spre grădină $18 \text{ dal} \cdot 10 = 180 \text{ dal} = 18 \text{ hl}$. Deci în bazin se vor găsi $42 \text{ hl} - 18 \text{ hl} = 24 \text{ hl}$.

IV.146. În bazin curge cantitatea de $5 \text{ hl} + 7 \text{ hl} = 12 \text{ hl}$ într-o oră. Se scurge într-o oră prin țevă cantitatea de $600 \text{ l} = 6 \text{ hl}$. Rămân în fiecare oră în bazin $12 \text{ hl} - 6 \text{ hl} = 6 \text{ hl}$. Deci bazinul, de $4800 \text{ l} = 48 \text{ hl}$, se umple în $48 : 6$ adică în 8 ore.

IV.147. După o oră de zbor, primul avion a parcurs 428 km care trebuie recuperată de al doilea avion. Această recuperare se poate realiza pentru că viteza medie a celui de al doilea este cu $535 \text{ km} - 428 \text{ km} = 107 \text{ km}$ mai mare, ceea ce îi permite să ajungă pe primul avion în $428 : 107$ adică în 4 ore.

IV.148. Datele problemei pot fi figurate într-un desen :

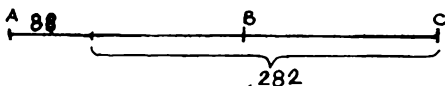


Fig. IV.148.

Avem deci distanța de la B la C : $(282 - 88) : 2 = 97 \text{ (km)}$, iar cea de la A la B : $282 \text{ km} - 97 \text{ km} = 185 \text{ km}$.

IV.149. $AB = 149 \text{ km}$; $BC = 133 \text{ km}$.

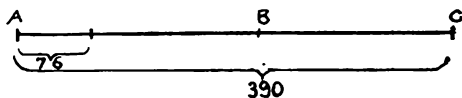


Fig. IV.150.

IV.150. a) Deci : distanța BC este $(390 - 76) : 2 = 157 \text{ (km)}$, iar cea de la A la B : $157 \text{ km} + 76 \text{ km} = 233 \text{ m}$.

b) În $390 : 65 = 6 \text{ (ore)}$.

c) În 3 ore de mers, autoturismul străbate $65 \text{ km} \cdot 3 = 195 \text{ km}$. Dacă pleacă de la A către C atunci se va afla la $233 \text{ km} - 195 \text{ km} = 38 \text{ km}$ de orașul B, între A și B. Dacă pleacă de la C către A, atunci se va afla tot la $195 \text{ km} - 157 \text{ km} = 38 \text{ km}$, tot între A și B.

IV.151. Viteza în sensul curentului este de $280 \text{ km} : 7 = 40 \text{ km pe oră}$. În sens contrar curentului viteza este de 35 km pe oră . Deci parcurge, la întoarcere, distanța în $280 : 35 = 8 \text{ (ore)}$.

IV.152. 6 pătrate : ABCD, AMOQ, QOPD, PONC, NOMB, MQPN.

12 triunghiuri : AMQ, QOM, MBN, NOM, PQD, POQ, PCN, PON, QMN, QPN, MQP, MNP.

IV.153. Gardul viu are $304 \text{ dam} : 4 = 76 \text{ dam} = 760 \text{ m}$.

Gardul din scinduri are : $(3040 \text{ m} : 2) - 20 \text{ m} = 1500 \text{ m}$.

Restul din gard este de $3040 \text{ m} - (760 \text{ m} + 1500 \text{ m}) = 780 \text{ m}$.

Gardul din sîrmă fără poartă are $780 \text{ m} - 4 \text{ m} = 776 \text{ m}$. S-au folosit $776 \text{ m} \cdot 3 = 2328 \text{ m}$ de sîrmă.

IV.154. Semiperimetrul este de $4\ 800\text{ m} : 2 = 2\ 400\text{ m}$. Desenul ne inspiră la următoarele calcule :

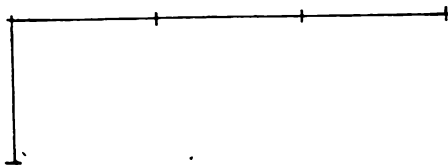


Fig. IV.154.

$2\ 400\text{ m} : 4 = 600\text{ m}$, adică lățimea, lungimea este de $600\text{ m} \cdot 3 = 1\ 800\text{ m}$.

IV.155. Desenul ne inspiră să observăm că perimetrul terenului se poate exprima prin numărul ce se obține înmulțind pe 8 cu măsura în decimetri a lățimii, pentru că în problemă avem informația că lungimea este de trei ori mai mare ca lățimea.



Fig. IV.155.a.

Deci : lățimea are $40\text{ dam} : 8 = 5\text{ dam} = 50\text{ m}$ iar lungimea $50\text{ m} \cdot 3 = 150\text{ m}$. Prefabricatele s-au folosit pe cele „două lungimi“, deci $150\text{ m} \cdot 2 = 300\text{ m}$. Gardul viu pe cele „două lățimi“, deci $50\text{ m} \cdot 2 = 100\text{ m}$.

b) Reprezentăm datele problemei în desenul ce urmează :

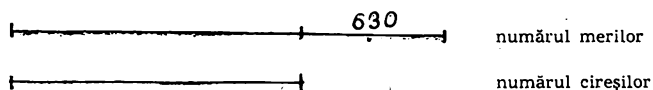


Fig. IV.155.b.

Din datele problemei avem că $2\ 500$ este suma dintre numărul merilor și al cireșilor. Dacă din această sumă scădem diferența obținem $2\ 500 - 630 = 1\ 870$ adică, după cum se observă din desen, de două ori numărul cireșilor care este $1\ 870 : 2 = 935$.

Așadar, cireși s-au plantat 935 iar meri cu 630 mai mulți, deci : $935 + 630 = 1\ 565$.

Verificare : $1\ 565 + 935 = 2\ 500$.

IV.156. Privind desenul, constatăm că latura unui pătrat este de patru ori mai mică decât a celuilalt pătrat.

Cum suma dintre lungimea laturii unui pătrat și lungimea laturii celuilalt este 25 înseamnă că lungimea laturii pătratului inițial este de $25\text{ m} : 5 = 5\text{ m}$, iar a celuilalt $5\text{ m} \times 4 = 20\text{ m}$.

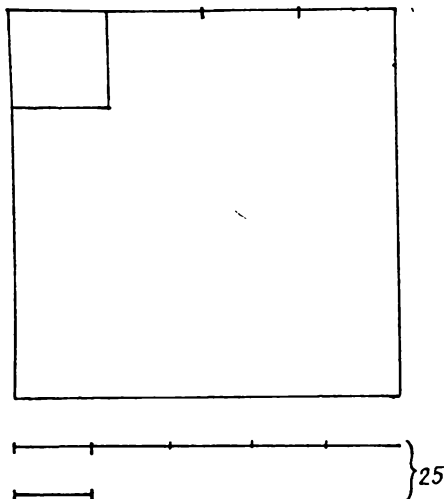


Fig. IV.156.

IV.157. a) Semiperimetrul primului dreptunghi este de $750 \text{ cm} : 2 = 375 \text{ cm}$ iar lungimea lui de $375 \text{ cm} - 75 \text{ cm} = 300 \text{ cm}$. Semiperimetrul celui de-al doilea dreptunghi este 500 cm iar lungimea lui este $500 \text{ cm} - 75 \text{ cm} = 425 \text{ cm}$, deci trebuie mărită cu $425 \text{ cm} - 300 \text{ cm}$ adică cu 125 cm .

b) Latura este 250 cm , iar aria 250×250 adică $62\,500 \text{ cm}^2 = 625 \text{ dm}^2$.

IV.158. Vom neglija copertile și foile cărților care nu sînt luate în seamă la numerotare. Vom considera că cele două volume sînt așezate cu cotorul către exterior. PRIMA SITUAȚIE : volumul I în stînga și cel de al doilea în dreapta, în raport de cum privim biblioteca. Jumătate din numărul de pagini din al doilea volum este 151. Aceasta înseamnă că între prima pagină a volumului întîi și pagina care arată jumătate din numărul de pagini ale celui de al doilea volum sînt paginile cu numerele : $152 ; 153 ; \dots ; 302$, adică în total 151. SITUAȚIA A DOUA : volumul al doilea în stînga și primul în dreapta, față de cum privim biblioteca. Jumătate din numărul de pagini din al doilea volum este tot 151. Între prima pagină a volumului întîi care se găsește în dreapta și pagina care arată jumătate din numărul de pagini ale celui de al doilea volum sînt paginile cu numerele : $2 ; 3 ; 4 ; \dots ; 366 ; 1 ; 2 ; \dots 150$, adică $365 + 150 = 515$.

IV.159. a) Pentru paginile $1, 2, \dots, 9, 10$ s-au folosit de 11 ori. Pentru paginile $11, \dots, 20$ s-au folosit de 20 de ori. În continuare pentru paginile $21, 22, \dots, 98, 99$ s-au folosit de $7 \times 20 + 18 = 158$ ori. Pentru pagina 100 încă de trei ori. În total, de $11 + 20 + 158 + 3 = 192$ ori.

b) Pentru primele 100 pagini s-au folosit cifrele de 192 ori. Au mai rămas de folosit de $315 - 192 = 123$ ori. Pentru paginile 101, 102, ..., 140 s-au folosit de $30 \times 4 = 120$ ori. Au mai rămas trei cifre pentru pagina 141. Deci 141 pagini are cartea.

IV.160. a) $15 \times (302 - 300) = 15 \times 2 = 30$; Deci propoziția este adevărată.

b) $6 \times 100 + 101 - 25 = 600 + 101 - 25 = 701 - 25 = 676$.

Deci propoziția nu este adevărată. Este o propoziție falsă.

IV.161. $3 \times b = 11 - a$. În cazul când $b = 0$ avem $a = 11$; dacă $b = 1$, avem $a = 8$; dacă $b = 2$ avem $a = 5$; dacă $b = 3$ avem $a = 2$. Numărul b nu poate fi mai mare decât 3, căci $11 - b$ nu poate fi numărul 12.

IV.162. $a = 106 + 14\ 085 - 3\ 057 = 11\ 134$;

$b = 0 + 50 + 50 + 0 = 100$ deci $a : b = 11\ 134 : 100 = 111,34$.

IV.163. 1) $15 + 10 + (15 \times 10) = 175$;

2) $17 + 0 + 17 \times 0 = 17$

3) $0 + 9 + (0 \times 9) = 9$

4) $a + 0 + (a \times 0) = 66$ adică $a + 0 + 0 = 66$ deci $a = 66$

5) $a + 1 + (a \times 1) = 9$ adică $a + 1 + a = 9$ sau $a + a = 8$ de unde $a = 4$

6) $7 + b + (7 \times b) = 23$ adică $b + (7 \times b) = 23 - 7$,
 $b + (7 \times b) = 16$. Imaginăm următorul desen :

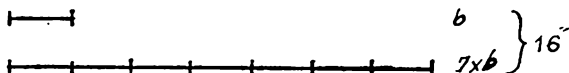


Fig. IV.163.

Se observă că $b = 16 : 8 = 2$.

IV.164. Se observă că numerele date 3 și 2 trebuie să fie două din oricare cele trei numere. Avem de rezolvat problema $3 + 2 + x = 10$ unde $x = 5$. Una din posibilități ar fi :



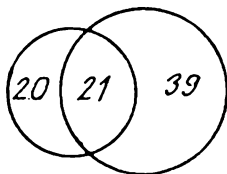
Fig. IV.164.a.

Aceasta este imposibilă, că $3 + 2 + 2$ nu este 10. Rămâne rezultatul următor :



Fig. IV.164.b.

IV.165. Privim desenul și ne dăm seama de ce trebuie să efectuăm următoarele calcule :



41 franceză 60 engleză

Fig. IV.165.

$80 - 41 = 39$ care știu numai engleză ; $80 - 60 = 20$ care știu numai franceză. Știu ambele limbi : $41 - 20 = 21$ sau altfel : $60 - 39 = 21$.

IV.166. a) 9 ; b) numai franceză învață 9 elevi iar numai engleză învață 12 elevi.

IV.167. a) Mai întâi aflăm numărul de trei cifre. La cifra sutelor pot fi numerele 1, 3, 5, 7, 9. Rămân numai 1 sau 3, căci $5 \times 2 = 10$ etc. și la cifra zecilor avem o singură cifră nu două. Dacă la cifra sutelor avem numărul 1, atunci la cifra unităților avem numărul zero, deoarece acesta trebuie să fie mai mic ca 1. În acest caz avem 120 dar 20 nu se împarte exact la 6. Avem deci singura situație, 360 lungimea celor cinci platforme. Fiecare din ele are lungimea de 72 m. Conform datelor problemei găsim că lățimea unei platforme este $72 : 2 - 10 = 26$ (m).

b) Semiperimetrul unei platforme este $72 \text{ m} + 26 \text{ m} = 98 \text{ m}$ iar lungimea unui picior este 102 m.

c) $300 \text{ t} \times (4 \times 5) = 16\,000 \text{ t}$.

d) La cifra unităților putem avea : 0, 2, 4, 6, 8. Deoarece la zeci trebuie să avem cu 4 mai mult decât la unități, numerele corespunzătoare sînt : 4, 6, 8, 10, 12. Pe loc de cifre nu pot fi decât 4, 6, 8 deci am avea numerele 40, 62, 84. Din acestea, doar 84 se împarte exact la 6. Deci conducția are 84 km.

IV.168. Avem pe rînd următoarele operații : 8, 0, 0 ; 3, 5, 0 ; 3, 2, 3 ; 3, 0 (se varsă jos), 3 ; 0, 3, 3 ; 0, 5, 1.

IV.169. Presupunem că au fost vîndute toate merele cu prețul de 8 lei kg. În acest mod s-ar fi încasat $8 \text{ lei} \times 210 = 1\,680 \text{ lei}$ și nu 1 510 lei, deci ar fi fost o diferență în plus de 1 680 lei - 1 510 lei = 170 lei provenită de la diferența de 2 lei a prețurilor. Înseamnă că s-au vîndut $170 : 2 = 85$ (kg) de 6 lei și restul de $210 - 85 = 125$ (kg) de 8 lei.

IV.170. Avem $x < 420 - 390$ adică $x < 30$. Rezultă că x poate fi oricare din numerele 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 27, 28, 29.

IV.171. x nu poate fi zero deoarece numărul nu ar mai fi de patru cifre. Din condiția a) avem că $x + y + t$ este mai mic sau egal cu 15. Cum x nu este zero înseamnă că $x = 1$. Folosind condiția b) și apoi condiția c) găsim : $x = 1, y = 3, t = 5$ sau $x = 2, y = 4, t = 6$ sau $x = 3, y = 5, t = 7$.

CLASA A V-A

REZOLVĂRILE ȘI REZULTATELE EXERCITIILOR ȘI PROBLEMELOR PENTRU CLASA A V-A

- V.1.** a) 1 ; b) 16 ; c) 31 985.
- V.2.** $403 - 204 + 439 \cdot 608 - 108\,875 + 68\,103 =$
 $= 199 + 266\,912 - 108\,875 + 68\,103 =$
 $= 267\,111 - 108\,875 + 68\,103 = 226\,339.$
- V.3.** $3 + 10 \cdot [362 + 10 \cdot (24 + 6)] =$
 $= 3 + 10 \cdot [362 + 10 \cdot 30] =$
 $= 3 + 10 \cdot (362 + 300) = 3 + 10 \cdot 662 = 6\,623.$
- V.4.** $1\,500 + \{50 + 5 \cdot [265 - (2 + 2) \cdot 65] \cdot 150\} =$
 $= 1\,500 + \{50 + 5 \cdot [265 - 4 \cdot 65] \cdot 150\} =$
 $= 1\,500 + \{50 + 5 \cdot [265 - 260] \cdot 150\} =$
 $= 1\,500 + \{50 + 5 \cdot 5 \cdot 150\} = 1\,500 + \{50 + 3\,750\} =$
 $= 1\,500 + 3\,800 = 5\,300.$
- V.5.** $\{[21 - 5 + 12] : 4 + 5\} \cdot 10 - [(4 + 9) \cdot 5 - 60] =$
 $= \{28 : 4 + 5\} \cdot 10 - [13 \cdot 5 - 60] = \{7 + 5\} \cdot 10 - (65 - 60) =$
 $= 12 \cdot 10 - 5 = 115.$
- V.6.** $2^4 : 2^3 + 103 \cdot (2 + 204) = 2 + 103 \cdot 206 = 21\,220.$
- V.7.** $3\,125 - 5 \cdot (2 + 212) + (2 \cdot 3)^7 : (2^4 \cdot 3^5) =$
 $= 3\,125 - 5 \cdot 214 + (2^7 \cdot 3^7) : (2^4 \cdot 3^5) =$
 $= 3\,125 - 1\,070 + 2^3 \cdot 3^2 = 2\,055 + 72 = 2\,127.$
- V.8.** $8 + 2^2 \cdot 2 + 2^8 : 2^5 + 2^{10} : [2^5 \cdot (3 + 1)] - 4 \cdot 8 =$
 $= 8 + 8 + 2^3 + 2^{10} : [2^5 \cdot 4] - 32 =$
 $= 16 + 8 + 2^{10} : 2^7 - 32 =$
 $= 24 + 2^3 - 32 = 24 + 8 - 32 = 0.$
- V.9.** $3^{87} : (3^{17})^5 + 7 \cdot (352 - 175) =$
 $= 3^{87} : 3^{85} + 7 \cdot 177 = 9 + 1\,239 = 1\,248.$
- V.10.** $(3^{203} + 10^{249}) : (3^{203} + 10^{249}) = 1.$
- V.11.** $[2^{17} + 5^{95} - 3 \cdot (3^{10})] : (2^{17} + 5^{95} - 3^{11}) = 1.$

$$\text{V.12. } [2^{30} + 3^{20} + 6^{10}] : [(2 \cdot 3)^{10} + 2^{30} + 3^{20}] = 1.$$

$$\text{V.13. } 56.$$

$$\text{V.14. } 10 \cdot \{324 : 324 + 2 \cdot [(2^{30} \cdot 3^{15}) : (2^{29} \cdot 3^{15}) + 1]\} = \\ = 10 \cdot \{1 + 2 \cdot [2 + 1]\} = 10 \cdot \{1 + 2 \cdot 3\} = 10 \cdot 7 = 70.$$

$$\text{V.15. } 8 + [0 + 3 \cdot 81 - 81] : \{9 \cdot [301 - 10 \cdot (24 + 2 \cdot 3)]\} = \\ = 8 + [2 \cdot 81] : \{9 \cdot [301 - 10 \cdot 30]\} = 8 + 162 : \{9 \cdot [301 - 300]\} = \\ = 8 + 162 : 9 = 8 + 18 = 26.$$

$$\text{V.16. } 3^{100} : [3^{98} + (3^{25})^5 : 3^{27} + (4 - 1)^{90} \cdot 3^8] = \\ = 3^{100} : [3^{98} + 3^{125} : 3^{27} + 3^{90} \cdot 3^8] = \\ = 3^{100} : [3^{98} + 3^{98} + 3^{98}] = \\ = 3^{100} : (3 \cdot 3^{98}) = \\ = 3^{100} : 3^{99} = 3.$$

$$\text{V.17. } \text{Se observă că una din paranteze este } 10\,000 - 100^2 = \\ = 10\,000 - 10\,000 = 0. \text{ Deci } E = 0.$$

$$\text{V.18. } 316 \cdot (147 - 47) = 316 \cdot 100 = 31\,600.$$

$$\text{V.19. } (5\,739 \cdot 4\,325 - 4\,324 \cdot 5\,739) - 5\,738 = \\ = 5\,739 \cdot (4\,325 - 4\,324) - 5\,738 = 5\,739 \cdot 1 - 5\,738 = 1.$$

V.20. Conform textului putem figura datele astfel :

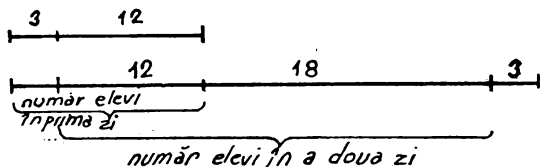


Fig. V.20.a.

Se constată că în clasă sînt $3 + 12 + 18 + 3$, adică 36 elevi.
Un alt desen care ar ilustra situația dată, este :

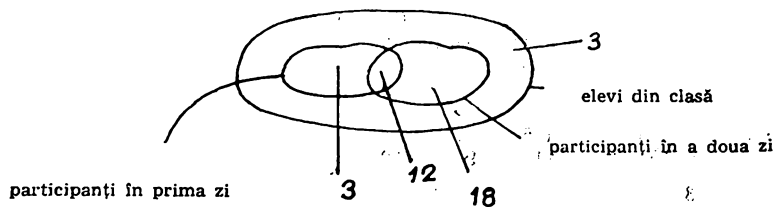


Fig. V.20.b.

V.21.

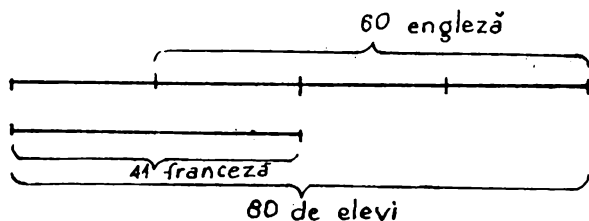
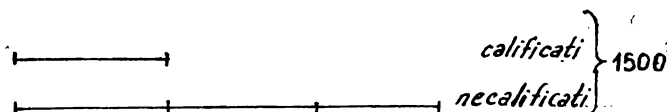


Fig. V.21.

- a) $80 - 60 = 20$;
 b) $80 - 41 = 39$;
 c) $41 - 20 = 21$; sau altfel : $60 - 39 = 21$ sau astfel : $41 + 60 - 80 = 101 - 80 = 21$.

V.22.



S-au calificat la faza județeană, $1\ 500 : 4 = 375$.

V.23.

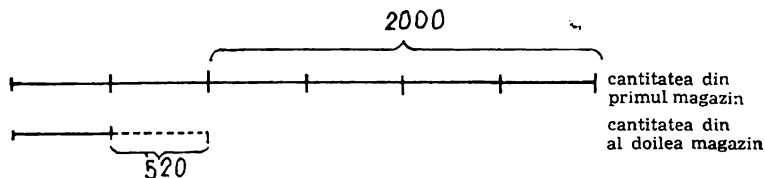


Fig.V.23,

Observăm că $2\ 000 + 520 = 2\ 520$ (kg) reprezintă de 5 ori mai mult decât cantitatea adusă în al doilea magazin. Deci în al doilea magazin s-au adus $2\ 520 : 5$, adică 504 kg, iar în primul $504 \text{ kg} \cdot 6 = 3\ 024$ kg.

V.24.

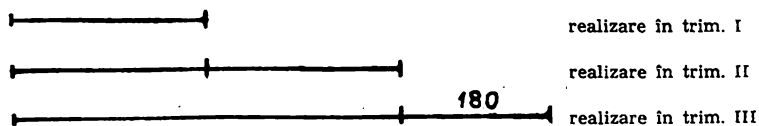


Fig. V.24.

Din textul problemei, avem că detașamentul a realizat 3 060 lei + 540 lei = 3 600 lei. Observăm că în trimestrul I a realizat (3 600 lei - 180 lei) : 5 = 684 lei.

Așadar, până la sfârșitul trimestrului al doilea s-au realizat 684 lei · 3 = 2 052 lei.

V.25. Figurăm cele două situații comparativ.

Observăm că suma 690 este $2 + 3 \cdot 7$ adică de 23 ori mai mare decât primul număr. Avem primul număr $690 : 23 = 30$ și al doilea, $30 \cdot 7 = 210$.



Fig. V.25.

V.26. Datele problemei, figurate în desen, ne conduc la ideea că dacă la suma de 63 lei adunăm 7 lei, obținem de două ori prețul pixului și al cărții împreună, adică 35 lei.

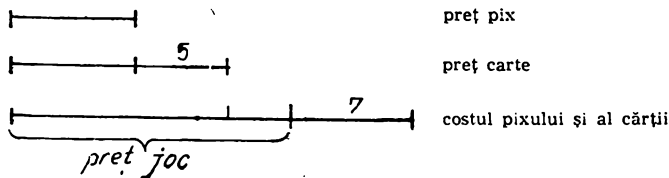


Fig. V.26.

În acest mod găsim prețul pixului $(35 - 5) : 2 = 15$ (lei) și prețul cărții de 15 lei + 5 lei = 20 lei. Rezultă prețul jocului $63 - 35 = 28$ (lei).

V.27. Putem imagina cele două situații din problemă, în două figuri :

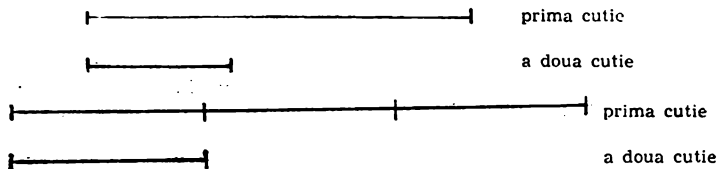


Fig. V.27.

În a doua situație avem $820 : 4 = 205$ creioane, în a doua cutie. Dacă acum luăm 41 de creioane din această cutie obținem $205 - 41 = 164$, adică numărul de creioane cerut. În prima cutie sînt $820 - 164 = 656$ creioane.

V.28. În depozitul mic sînt $(3\ 560 - 60) : 2 = 920$ adică 830 t, în cel mare sînt $3\ 560 - 830$ adică 2 730 t.

V.29. Textul conduce la următorul desen :

În prima ladă sînt $(612 - 2) : 5$ adică 122 kg. În a doua ladă $122\text{ kg} \cdot 2 = 244\text{ kg}$, iar în a treia $244\text{ kg} + 2\text{ kg} = 246\text{ kg}$.

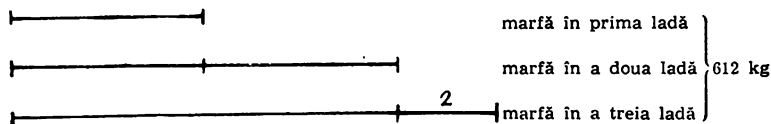


Fig. V.29.

V.30.

Se observă că : $a = (900 - 25) : 7 = 125$; $b = 3 \cdot 125 = 375$ și $c = 375 + 25 = 400$.

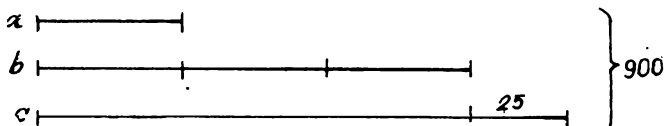


Fig. V.30.

V.31. 242, 121, 246.

V.32.

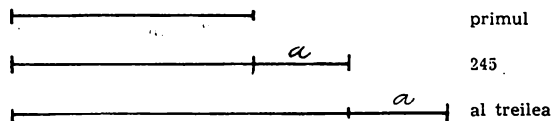


Fig. V.32.

În desen se sugerează că suma este de trei ori mai mare decît al doilea număr, adică $3 \cdot 245 = 735$.

V.33. Cînd se deschide o carte, numărul care se găsește pe pagina din stînga este număr par, iar cel de pe pagina din dreapta este număr impar. Deci avem problema : suma a două numere naturale consecutive este numărul 217 ; aflați numerele.

Rezolvare : $217 - 1 = 216$, $216 : 2 = 108$ este numărul de pe pagina din stînga, iar 109 cel de pe pagina din dreapta.

V.34. Conform textului putem imagina următorul desen :

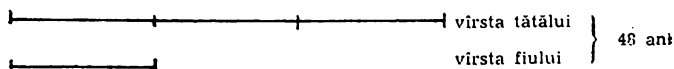


Fig. V.34.a.

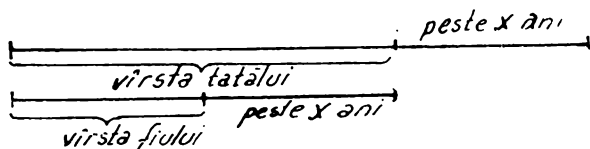


Fig. V.34.b.

Se observă că vîrsta fiului este $48 : 4 = 12$ (ani).

Constatăm că vîrsta fiului este egală cu numărul de ani pretins de problemă. Deci peste 12 ani vîrsta tătăului va fi mai mare de două ori decît a fiului.

V.35. Textul problemei permite să ne imaginăm următorul desen unde s-a notat cu a numărul mic.

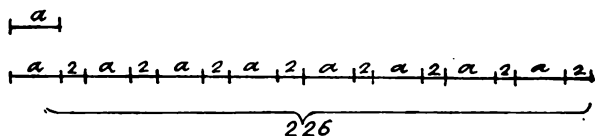


Fig. V.35.

Se observă că $7 \cdot a$ este $226 - 8 \cdot 2$ adică 210. Deci $7 \cdot a = 210$ adică primul număr, a , este $210 : 7 = 30$. Al doilea număr este $226 + 30 = 256$.

V.36.

Datele problemei le ilustrăm într-un desen și avem $270 - (24 + 81 + 132) = 33$.

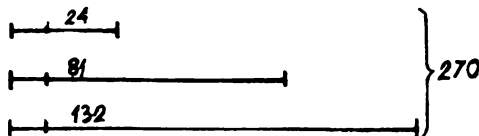


Fig. V.36.

Acest număr reprezintă de 3 ori cît se scade din fiecare număr, adică $33 : 3 = 11$. Deci numerele sînt 35 ; 92 și 143.

V.37. a) Figurăm, în desen, situația vîrstelor din prezent :

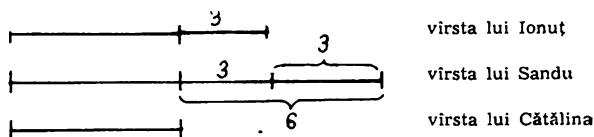


Fig. V.37.a.

Figurăm în desen, situația vîrstelor din trecut :

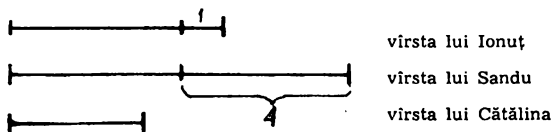


Fig. V.37.b.

Comparînd situațiile se constată că acum doi ani, Sandu avea cu 3 ani mai mult decît Ionuț. Deoarece atunci vîrsta lui Sandu era egală cu suma vîrstelor celorlalți doi rezultă că vîrsta Cătălinei era cît diferența dintre vîrstele celorlalți doi, adică 3 ani. Așadar acum Cătălina are 5 ani, Sandu are $5 + 6$, adică 11 ani, iar Ionuț cu 3 ani mai puțin decît Sandu adică 8 ani.

b) Peste 14 ani cei trei copii au următoarele vîrste : Ionuț are 22 ani, Sandu are 25 ani, Cătălina 19 ani. Suma vîrstelor lor este $22 + 25 + 19 = 66$ (ani).

Figurăm situația vîrstelor părinților :

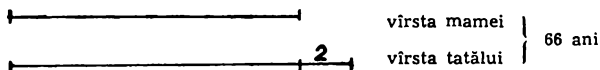


Fig. V.37.c.

Deci mama are $(66 - 2) : 2 = 32$ (ani), iar tata $32 + 2 = 34$ (ani).

V.38.

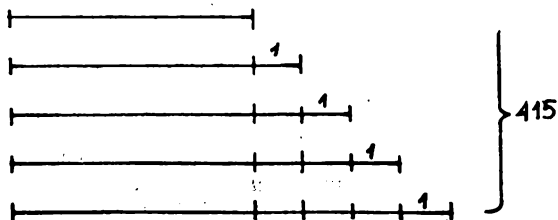


Fig. V.38.

Din datele problemei constatăm că fiecare număr diferă de precedentul cu 1. Numărul mic, este $(415 - 10) : 5 = 81$. Celelalte numere sînt : 82, 83, 84, 85, 86.

V.39. Reformulăm o parte din problemă : 27 de bile sînt roșii sau galbene și 39 de bile sînt negre sau galbene. Situația este figurată în următorul desen :

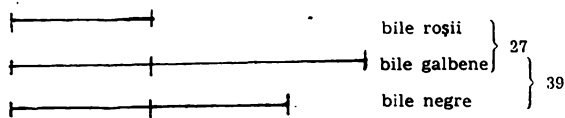


Fig. V.39.

Observăm că diferența dintre numărul de bile negre și numărul de bile roșii este $39 - 27$ adică 12. Cum bilele roșii sînt de două ori mai puține avem : bile roșii 12, bile negre 24 iar bile galbene 15.

V.40. Figurăm datele problemei :

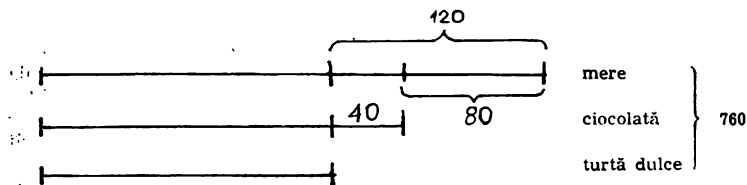


Fig. V.40.

Se va observa că turtă dulce avem în număr de $[760 - (40 + 120)] : 3$, adică 200 bucăți, ciocolată 240 bucăți, iar mere 320 bucăți. Rezultă că se pot realiza maxim 200 de pachete, adică atîtea cîte bucăți de turtă dulce avem.

V.41. Textul poate fi schițat în desen astfel :

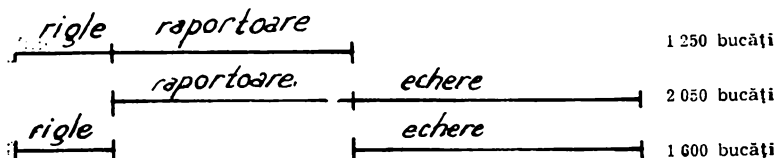


Fig. V.41.

Se observă că de două ori numărul de rigle, raportoare și echere, luate împreună, reprezintă $1 250 + 2 050 + 1 600 = 4 900$ (bucăți). Deci, rigle, raportoare și echere, la un loc, avem $4 900 : 2 = 2 450$ (bucăți).

Avem 1 200 echere, 400 rigle, 850 raportoare. Rezultă că se pot forma 400 de truse.

V.42: Datele problemei se pot figura astfel :

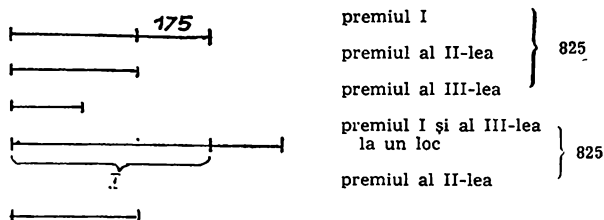


Fig. V.42.

Constatăm că cele trei premii la un loc reprezintă de trei ori premiul al doilea. Deci premiul al doilea este $825 : 3 = 275$ (lei). Premiul I este $275 + 175 = 450$ (lei). Premiul al treilea este $825 - (450 + 275) = 100$ (lei).

V.43.

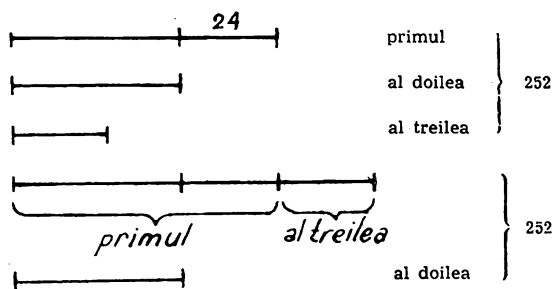


Fig. V.43.

Se observă că suma 252 este de trei ori premiul al doilea. Deci acesta este $252 : 3 = 84$ lei. Primul este 108 lei, al treilea este 60 lei.

V.44.

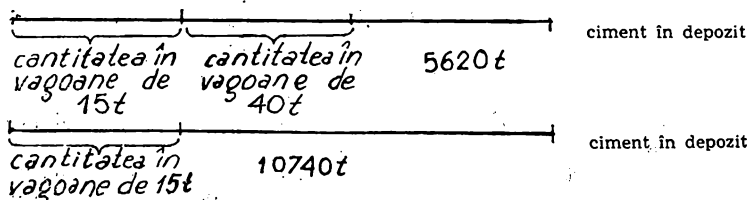


Fig. V.44.

Se observă că $10\ 740\ t - 5\ 620\ t = 5\ 120\ t$ reprezintă cantitatea încărcată în vagoane de câte $40\ t$ fiecare.

Rezultă că avem $5\ 120\ t : 40 = 128$ vagoane de $40\ t$ fiecare. Asemănător, raționăm pentru vagoanele de $15\ t$: $(9\ 880 - 5\ 620) : 15 = 284$.

Cantitatea de ciment este $5\ 120\ t + 9\ 800\ t = 15\ 000\ t$.

V.45.

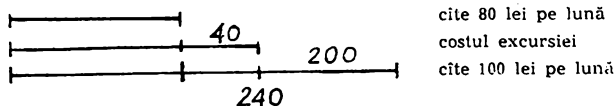


Fig. V.45.

În cazul cînd ar economisi cîte 100 lei pe lună, față de costul excursiei, ar avea în plus 200 lei, ceea ce înseamnă că față de economisirea cu 80 lei pe lună înseamnă o diferență de 240 lei care provine de la surplusul de 20 lei pe lună. Deci economisește în $240 : 20 = 12$ luni; costul excursiei de $12 \cdot 100 - 200 = 1\ 000$ (lei).

V.46. Dacă luăm cîte un elev din fiecare bancă unde am așezat cîte trei și îi așezăm cîte doi în cele 4 bănci libere ne rămîn 3 elevi în picioare. Deci în așezarea elevilor cîte 3 au fost ocupate $4 \cdot 2 + 3 = 11$ bănci. În clasă sînt $11 + 4 = 15$ bănci și $15 \cdot 2 + 3 = 33$ elevi.

V.47. Să reducem problema la alta: să punem cîte un elev într-o bancă. În prima situație din problemă ar însemna că ar trebui să avem număr dublu de bănci față de cel existent, dar tot ar rămîne 9 elevi în picioare. Figurăm în desen:

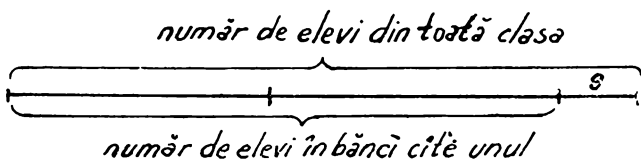


Fig. V.47.a.

În situația a doua, din problemă, ar trebui să avem un număr de bănci de trei ori mai mare decît numărul de bănci existent (punînd cîte un elev într-o bancă). Figurăm în desen, comparativ cu desenul precedent (Fig. V.47.b.).

Conform textului, 7 bănci sînt neocupate; aceasta ar însemna $7 \cdot 3$ adică 21 elevi și încă doi elevi care s-ar așeza în banca ocupată de un singur elev, în total 23 elevi.

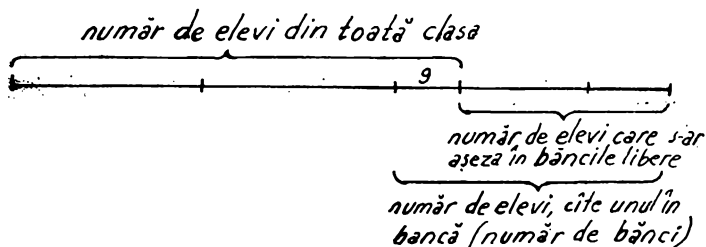


Fig. V.47.b.

Observăm, în desen, că numărul de elevi așezați câte unul în bancă este $9 + 23$ adică 32 elevi, tocmai numărul de bănci. Deci în clasă sînt 32 de bănci și $32 \cdot 2 + 9 = 73$ de elevi.

V.48. 45 elevi și 20 de bănci.

V.49. 19 ; 2.

V.50. 40 ; 12.

V.51. 458 ; 27.

V.52. Notăm : a , numărul mare, b , numărul mic. Teorema împărțirii cu rest permite : $a = 5 \cdot b + 141$.

Realizăm desenul următor :

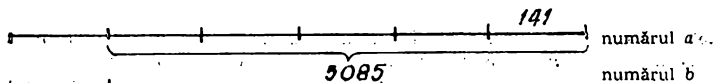


Fig. V.52.

Constatăm că $4 \cdot b = 5085 - 141$, adică $4b = 4944$. Deci $b = 1236$ iar $a = 6321$.

V.53. Se observă că diferența numerelor este 36.

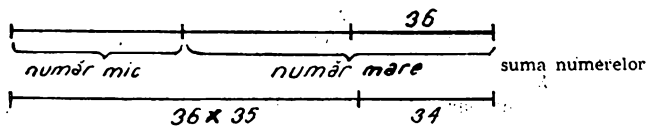


Fig. V.53.

Din teorema împărțirii cu rest avem că suma numerelor este $36 \cdot 35 + 34 = 1294$. Deci de două ori numărul mic este $1294 - 36 = 1258$.

Rezultă că numărul mic este $1258 : 2 = 629$ iar cel mare este $629 + 36 = 665$.

V.54. Din teorema împărțirii cu rest avem numerele naturale c_1 și c_2 astfel încît $c_1 \cdot 5 + 4 = c_2 \cdot 6 + 5$, care se mai scrie $c_1 \cdot 5 = c_2 \cdot 6 + 5 - 4$ adică $c_1 \cdot 5 = c_2 \cdot 6 + 1$. Aceasta se mai poate scrie succesiv : $c_1 \cdot 5 = c_2 \cdot 5 + c_2 + 1$ sau $c_1 = (c_2 \cdot 5) : 5 + (c_2 + 1) : 5$ sau $c_1 = c_2 + (c_2 + 1) : 5$. Pentru ca c_1 să fie număr natural trebuie ca $(c_2 + 1) : 5$ să fie număr natural.

Se cere cel mai mic număr : aceasta este posibil cînd $c_2 = 4$.
Rezultă că numărul cerut este $4 \cdot 6 + 5 = 29$.

V.55. Notăm cu \overline{abc} numărul cerut. Avem $a - c = 4$. Deoarece \overline{abc} trebuie să fie împărțitor și restul este 100, din teorema împărțirii cu rest avem $100 < \overline{cba}$ deci \overline{cba} are trei cifre, deci $c \neq 0$. Cum $a > 4$ avem situațiile $a = 5$ și $c = 1$, $a = 6$ și $c = 2$, $a = 7$ și $c = 3$, $a = 8$ și $c = 4$, $a = 9$ și $c = 5$.

Din teorema împărțirii cu rest mai avem : $\overline{abc} = \overline{cba} \cdot 2 + 100$. Deci avem situațiile : $5b1 = 1b5 \cdot 2 + 100$, $6b2 = 2b6 \cdot 2 + 100$, $7b3 = 3b7 \cdot 2 + 100$, $8b4 = 4b8 \cdot 2 + 100$ și $9b5 = 5b9 \cdot 2 + 100$. Din acestea, dă soluție doar $6b2 = 2b6 \cdot 2 + 100$ unde $b = 9$ și $\overline{abc} = 692$.

V.56. Dacă ar fi apartamente numai de cîte 2 camere atunci în bloc ar fi, în total $42 \cdot 2 = 84$ (camere). Înseamnă că surplusul de $140 - 84 = 56$ (camere) provine de la diferența $4 - 2 = 2$ (camere). Deci sînt apartamente de 4 camere, în total, $56 : 2 = 28$ iar de cîte 2 camere, în total, $42 - 28 = 14$. Verificați.

V.57. Presupunem că s-au vîndut numai bilete de 4 lei. În această ipoteză (condiție) toate biletele ar costa $415 \cdot 4 = 1\ 660$ (lei). Față de suma încasată, înseamnă că diferența de $2\ 160$ lei — $1\ 660$ lei = 500 lei provine de la diferența dintre prețurile biletelor care este de 2 lei. Deci s-au vîndut $500 : 2 = 250$ bilete de 6 lei și restul de 165 bilete, cu prețul de 4 lei. Verificați.

V.58. Dacă ar fi numai oi, înseamnă că ar fi $650 \cdot 4 = 2\ 600$ picioare adică $2\ 600 - 2\ 260 = 340$ picioare în plus. Acestea provin de la diferența de $4 - 2 = 2$ picioare în plus la fiecare oaie față de o găină. Avem, deci, $340 : 2$ adică 170 găini și restul de $650 - 170 = 480$ oi.

V.59. Dacă s-ar fi folosit numai bancnote de 25 lei, covoarele ar fi costat $25 \text{ lei} \cdot 148 = 3\ 700$ (lei). Diferența de $6\ 850 - 3\ 700 = 3\ 150$ (lei) provine de la diferența dintre valorile bancnotelor de 100 lei — 25 lei = 75 lei. Așadar s-au folosit $3\ 150 : 75 = 42$ de bancnote de 100 lei și restul de $148 - 42$ adică 106 bancnote de 25 lei.

V.60. Scriem datele problemei astfel :

20 băieți, 16 fete, 328 kg

10 băieți, 30 fete, 340 kg

Dacă fiecare număr din prima situație se împarte cu 2 obținem :

10 băieți, 8 fete, 164 kg

10 băieți, 30 fete, 340 kg

Observăm că 22 de fete au recoltat 176 kg, deci o fată a recoltat $176 \text{ kg} : 22 = 8 \text{ kg}$. Un băiat a recoltat $(164 - 8 \cdot 8) : 10 = 10$ (kg).

V.61.

5 caiete, 2 pixuri, 40 lei

10 caiete, 5 pixuri, 95 lei

10 caiete, 4 pixuri, 80 lei

10 caiete, 5 pixuri, 95 lei

zero caiete, 1 pix, 15 lei

Deci pixul costă 15 lei, iar un caiet $(40 - 15 \cdot 2) : 5$, adică 2 lei.

V.62. Schematic putem rezolva astfel :

5 cărți, 3 caiete, 64 lei

3 cărți, 5 caiete, 48 lei

15 cărți, 9 caiete, 192 lei

15 cărți, 25 caiete, 240 lei

zero cărți, 16 caiete, 48 lei.

Rezultă că un caiet costă $48 \text{ lei} : 16 = 3 \text{ lei}$, iar o carte 11 lei. Dacă s-ar fi cumpărat numai 13 caiete ele ar fi costat doar $13 \cdot 3$ adică 39 lei și ar mai fi rămas 103 lei — $39 \text{ lei} = 64 \text{ lei}$, diferență care provine de la diferența de 11 lei — $3 \text{ lei} = 8 \text{ lei}$ de la fiecare carte. Deci s-au cumpărat $64 : 8 = 8$ cărți și 5 caiete.

V.63. Automobilul „înaintează” față de tren cu o distanță de timp, egală cu diferența dintre viteza automobilului și cea a trenului care este de $64 - 46 = 18$ (km). Deci într-o oră automobilul străbate pe lângă tren 18 km. Aceasta înseamnă că într-un minut străbate $18 \text{ km} : 60 = 300 \text{ m}$, care este chiar lungimea trenului.

V.64. Motociclistul ajunge în București după $184 : 46$ adică după 4 ore, deci la ora 13. Stă o oră și pleacă spre Focșani la ora 14. Timp de 5 ore biciclistul parcurge $23 \text{ m} \cdot 5 = 115 \text{ km}$. La ora 14 între cei doi mai este o distanță de $184 \text{ km} - 115 \text{ km} = 69 \text{ km}$ pe care se deplasează unul către celălalt. Până la întâlnirea lor, pe această distanță timpul este de $69 : (23 + 46)$ adică de o oră. Așadar se întâlnesc la ora 15.

V.65. $(A \cup B) \cap C = \{0; 1; 2; 3; 4\} \cap \{0; 7; 8\} = \{0\}$.

V.66. $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 30, 60\}$;

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 15, 30, 60\}$;

$A \cap B = \{3, 4, 5, 6\}$; $A - B = \{7, 8\}$;

$B - A = \{1, 2, 12, 15, 30, 60\}$.

V.67. Avem: $4x + 1 \leq 17$; $4x \leq 16$ cu soluțiile elementele mulțimii $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) $A = \{2, 4, 6, 8\}$; $B = \{3, 6, 9, 12\}$;

$C = \{6, 12, 18, 24\}$; $D = \{4, 7, 10, 13\}$;

b) $(A \cap C) \cup B = \{6\} \cup B = B$;

c) $(A \cup B) \cap C = \{2, 4, 6, 8, 9, 12\} \cap C = \{6, 12\}$;

d) $(A - C) \cap D = \{2, 4, 8\} \cap D = \{4\}$;

e) $(C \cap D) - B = \emptyset - B = \emptyset$.

V.68. $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$; $B = \{2, 6, 14\}$; $C = \{4, 36, 196\}$.

Avem: a) $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 4, 8, 16, 6, 14\} \cap C = \{4\}$; b) $(A - B) \cup C = \{1, 4, 8, 16\} \cup C = \{1, 4, 8, 16, 36, 196\}$; c) $A - \emptyset = A$.

V.69. Avem $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Într-un desen figurați întâi afirmația b), apoi c) și țineți în final seama de a). Avem: $A = \{4, 5, 3, 7\}$, $B = \{4, 5, 2, 6\}$.

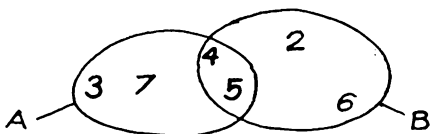


Fig. V.69.

V.70. Dacă cele două mulțimi sînt egale, reuniunea are 3 elemente. Dacă intersecția lor are 2 elemente, reuniunea are 4 elemente. Dacă intersecția are un element, reuniunea are 5 elemente. Dacă sînt disjuncte, reuniunea are 6 elemente.

V.71.

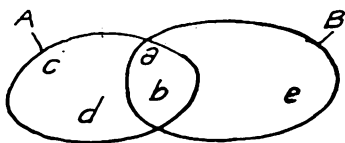


Fig. V.71.

V.72. Din a) avem că $3 \in X$ și $3 \in Y$, $5 \in X$ și $5 \in Y$, $7 \in X$ și $7 \in Y$. Din b) avem că $2 \in X$ și $2 \notin Y$, $6 \in X$ și $6 \notin Y$. Din a), b), c) avem că $1 \notin X$ și $1 \in Y$, $4 \notin X$ și $4 \in Y$. Deci $X = \{3, 5, 7, 2, 6\}$ și $Y = \{3, 5, 7, 1, 4\}$.

V.73. Se pot imagina diagramele următoare :

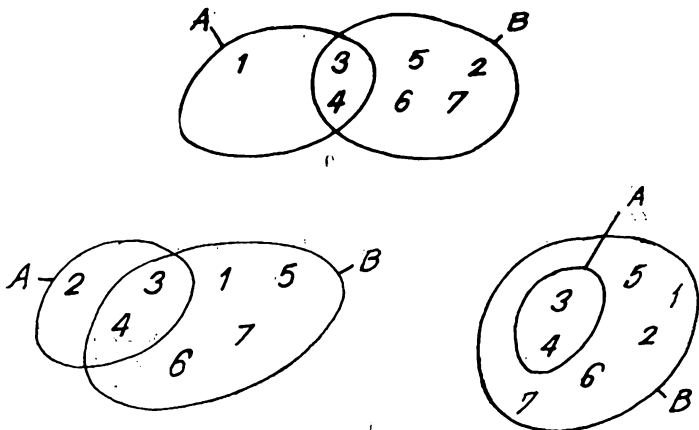


Fig. V.73.

Deci sînt 3 soluții.

V.74. Observăm că cele 3 mulțimi nu au elemente comune. Așadar, $A = \{4, 5, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ și $C = \{6, 7, 2, 3\}$.

b) Avem: $(C - A) \cap B = \{6, 7\} \cap B = \{6, 7\}$.

Deci $\{2a; 7\} = \{6, 7\}$ implică $2a = 6$, unde $a = 3$.

Rezultă că perimetrul este $3 \cdot 4 = 12$ (cm).

V.75. Condiția b) ne dă că X și Y au ca elemente comune pe 4; 6; 9. Condiția c) permite cu siguranță că la mulțimea X să mai punem elementele 1 și 8.

Condiția d) mai adaugă la Y elementele 5 și 7.

Rămân în discuție elementele 3 și 2, care conform condiției a) trebuie să aparțină cel puțin uneia din mulțimi X și Y . Din condiția d) obținem că $3 \notin Y$ și $3 \notin \{2, 4, 8\}$.

Rezultă că $3 \in X$. Avem că $X = \{4, 6, 9, 1, 8, 3\}$ și $Y = \{4, 6, 9, 5, 7, 2\}$.

V.76. Deoarece $A \cup B = A \cap B$ înseamnă că $A \cup B$ și $A \cap B$ trebuie să aibă aceleași elemente. $1 \in A \cup B$ și $1 \in A \cap B$ rezultă că $y = 2$. Asemănător, găsim că $x = 3$.

V.77. $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 4\}$.

V.78. Avem $ab + ac = a(b + c) = 5 \cdot 10 = 50$;
 $ab - ac = a(b - c) = 5 \cdot 8 = 40$.

V.79. $x(a + b) = 20$, $x \cdot 5 = 20$, $x = 4$.

b) $x(3b + 2a - c) = 40$, $x(c + 20 - c) = 40$.

În paranteză putem scrie $(c + 20) - c$.

Dacă dintr-o sumă de două numere scădem unul din numere, obținem ca rezultat pe celălalt număr. Deci $(c + 20) - c = 20$.

Avem deci, $x \cdot 20 = 40$, $x = 2$.

V.80. $a = 7x + 7 + 3x + 1 = (7x + 3x) + (7 + 1) =$
 $= x(7 + 3) + 8 = x \cdot 10 + 8 = 10 \cdot x + 8$;

$b = 4x + 4 + 6x + 12 = 4x + 6x + 4 + 12 = 10x + 16$

Se observă că b este mai mare cu 8 decât a .

V.81. Dacă x este par se poate scrie $x = 2k$ și atunci factorul lui y , $3x + 2$ devine $3 \cdot 2k + 2 = 2(3k + 1)$ deci număr par și deci și y este număr par. Dacă x este impar se poate scrie $x = 2k + 1$ și atunci factorul lui y , $x + 3$ devine $2k + 1 + 3 = 2k + 4 = 2(k + 2)$ deci număr par și deci și y este număr par.

V.82. a) Prima egalitate devine $a(b + c) = c(b + c)$. Deoarece $b + c = 15$, obținem $a \cdot 15 = b \cdot 15$ care ne conduce la $a = c$. b) Cu relația găsită, obținem $c + 2b + c = 2c + 2b = 2(b + c) = 2 \cdot 15 = 30$. c) Deoarece $a = c$ avem $(c^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - c^2) = 0$.

V.83. a) Avem:

$7 \cdot 3^n + 2 \cdot 3^n = 3^n \cdot (7 + 2) = 3^n \cdot 9 = 3^n \cdot 3^2 = 3^{n+2}$;

b) $7 \cdot 5^n - 2 \cdot 5^n = 5^n(7 - 2) = 5^n \cdot 5 = 5^{n+1}$.

$$\text{V.84. } 3^{2n+1} = 3^{2n} \cdot 3 = (3^2)^n \cdot 3 = 9^n \cdot 3 = 3a;$$

$$3^{4n} = 3^{2 \cdot 2n} = (3^2)^{2n} = 9^{2n} = (9^n)^2 = a^2.$$

V.85. a) Al 6-lea termen este 16·17·18·19·20·21.

b) Dacă a are un singur termen, avem $a = 1$ care este pătratul lui 1. Se observă că a se scrie astfel $1 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 5 \cdot 6 + 7 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 10 + \dots)$ deci a este un număr impar. S-a putut da factor comun numărul 2, pentru că din două numere naturale consecutive unul este par și se constată că această proprietate este îndeplinită de toți termenii începând cu locul doi. Toți termenii începând cu locul trei conțin ca factor pe 10 sau divizorii proprii ai lui 10. Se poate spune că suma acestor termeni are ca cifră a unităților cifra zero. Suma $1 + 2 \cdot 3$ are ca cifră a unităților pe 7. Numărul a are cifra unităților, cifra 7. Cum a este impar, un pătrat impar are cifra unităților doar 1, 5 și 9. Deci dacă a are numărul termenilor mai mare ca 1, nu este pătrat.

V.86. Se observă că $d = 8$ și vom avea: $\overline{2abc8} + \overline{abc83} = 83\,781$.

Găsim că $c = 9$ și avem egalitatea: $\overline{2ab98} + \overline{ab983} = 83\,781$.

Asemănător, obținem: $b = 7$ și $a = 5$. Deci numărul este 257 983.

V.87. Avem de rezolvat exercițiul $\overline{xy} - \overline{yx} = 45$. Se constată că $x \neq 0$ și $y \neq 0$ și în plus $x > y$. Începând cu cifra zecilor, observăm că avem următoarele situații: $x = 6$ și $y = 1$, $x = 7$ și $y = 2$, $x = 8$ și $y = 3$, $x = 9$ și $y = 4$. Deci numerele: 61, 72, 83 și 94.

$$\text{V.88. a) } 3 \cdot (1 + 2) \cdot 4 + 1 = 37;$$

$$\text{b) } 3 \cdot 1 + 2 \cdot (4 + 1) = 13;$$

$$\text{c) } 3 \cdot (1 + 2 \cdot 4) + 1 = 28;$$

$$\text{d) } 3 \cdot (1 + 2 \cdot 4 + 1) = 30;$$

$$(3 \cdot 1 + 2) \cdot (4 + 1) = 25;$$

$$(3 \cdot 1) + (2 \cdot 4) + 1 = 12.$$

$$\text{V.89. Avem: } (10 - 1) \cdot (100 - 1) \cdot (1\,000 - 1) = 3^6 \cdot 11 \cdot 111;$$

$$9 \cdot 99 \cdot 999 = 3^6 \cdot 11 \cdot 111; 9 \cdot (9 \cdot 11) \cdot (9 \cdot 111) = 3^6 \cdot 11 \cdot 111;$$

$$9^3 \cdot 11 \cdot 111 = 3^6 \cdot 11 \cdot 111; (3^2)^3 \cdot 11 \cdot 111 = 3^6 \cdot 11 \cdot 111.$$

Rezultă că propoziția este adevărată.

V.90. Trebuie să aflăm numerele naturale de forma \overline{abcd} și \overline{abdc} , cel mare fiind, anul nașterii, \overline{abcd} . Condiția c) permite să scriem egalitatea $\overline{cd} - \overline{dc} = 9$. Aceasta înseamnă că diferența dintre cifrele zecilor este 1, adică $c - d = 1$. Deci avem perechile: $c = 9, d = 8$; $c = 8, d = 7$; $c = 7, d = 6$; $c = 6, d = 5$; $c = 5, d = 4$; $c = 4, d = 3$; $c = 3, d = 2$; $c = 2, d = 1$; $c = 1, d = 0$.

Rezultă că problema nu are o singură soluție. Avem deci anii de naștere, una din perechile: 1998, 1989; 1987, 1978; 1976, 1967; 1965, 1956; 1954, 1945; 1943, 1934; 1932, 1923; 1921, 1912; 1910, 1901.

$$\text{V.91. } \{3[4(5x + 1) - 3] - 2\} = 2 : 2; 3[4(5x + 1) - 3] = 1 + 2;$$

$$4(5x + 1) - 3 = 1; 4(5x + 1) = 4; 5x + 1 = 1; 5x = 0; x = 0.$$

V.92. $\{2 \cdot [14 + (5 + x) : 6] - 5\} : 9 = 3$; $2 \cdot [14 + (5 + x) : 6] - 5 = 27$;
 $2 \cdot [14 + (5 + x) : 6] = 32$; $14 + (5 + x) : 6 = 16$;
 $(5 + x) : 6 = 2$; $5 + x = 12$; $x = 7$.

V.93. $3 \cdot \{16 + 5 \cdot [27^2 - 6 \cdot (x - 3 \cdot 32)]\} + 1 = 1985 - 1$
 $3 \cdot \{16 + 5 \cdot [729 - 6 \cdot (x - 96)]\} = 1983$
 $16 + 5 \cdot [729 - 6 \cdot (x - 96)] = 1983 : 3$
 $5 \cdot [729 - 6(x - 96)] = 661 - 16$
 $729 - 6 \cdot (x - 96) = 645 : 5$
 $6 \cdot (x - 96) = 729 - 129$; $6 \cdot (x - 96) = 600$
 $x - 96 = 100$; $x = 196$.

V.94. $9 - 9 : 3 = [17 - 3 \cdot 0] \cdot x$; $9 - 3 = 17 \cdot x$; $6 = 17 \cdot x$; $x \notin \mathbb{N}$.

V.95. Avem: $x + 2 + 3 \cdot y + 6 = 34$; $x + 3y + 8 = 34$;
 $x + 3y = 26$; $x = 26 - 3y$. Deci:

y	2	3	4	5	6	7	8
x	20	17	14	11	8	5	2

V.96. $32 - 4 + 5x < 63$, $28 + 5x < 63$, $5x < 63 - 28$,
 $5x < 35$, $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

V.97. $x - \{57 - 4 \cdot [10 + (2^{76} \cdot 5^{50}) : (2^{73} \cdot 5^{50})]\} \cdot 5 < 5$;
 $x - \{57 - 4 \cdot [10 + 2^3]\} \cdot 5 < 5$; $x - \{57 - 4 \cdot 14\} \cdot 5 < 5$;
 $x - \{57 - 56\} \cdot 5 < 5$; $x - 1 \cdot 5 < 5$; $x < 10$,
 deci $x \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$.

V.98. 28; 91.

V.99. În orice poziție va fi așezată una din cifrele date, numărul este divizibil cu 3 căci $1 + 2 + 3 + 6$ este un număr divizibil cu 3. Deci avem: 1 236; 1 263; 1 326; 1 362; 1 623; 1 632; 2 136; 2 163; 2 316; 2 361; 2 613; 2 631; 3 126; 3 162; 3 216; 3 261; 3 612; 3 621; 6 123; 6 132; 6 213; 6 231; 6 312; 6 321.

Numerele divizibile cu 6, sînt numai numerele pare dintre cele de mai sus.

V.100. a) $x \in \{0, 5\}$; b) Trebuie să fie divizibile cu 2 și cu 3. Cu 2: 210, 212, 214, 216, 218.

Din acestea sînt divizibile cu 3: 210, 216.

Deci $x \in \{0, 6\}$; c) $x = 6$.

V.101. Se știe ca dacă un număr e divizibil cu 15 atunci el este divizibil cu 5 și cu 3. Deoarece numărul nostru este divizibil cu 5 înseamnă că $y = 0$ sau $y = 5$. Dacă $y = 0$, numărul are forma $41x780$. Deoarece este divizibil cu trei avem că $20 + x$ este divizibil cu 3 deci x este 1, 4 sau 7 și avem numărul cel mai mic căutat: 411780. Dacă $y = 5$ continuăm raționamentul asemănător și găsim numărul cel mai mare: 418785.

V.102. Dacă numărul este divizibil cu 15 atunci este divizibil cu 5 și cu 3. Din divizibilitatea cu 5 avem $25a70$ sau $25a75$. Din divizibilitatea cu 3 avem pentru $25a70$, $2 + 5 + 7 + 0 + a$ adică $14 + a$ divizibil cu 3 deci $a \in \{1, 4, 7\}$, iar pentru $25a75$, $2 + 5 + 7 + 5 + a$ adică $19 + a$ deci $a \in \{2, 5, 8\}$. Rezultă că :

$$\begin{array}{r|l} a & 1 \ 4 \ 7 \ 2 \ 5 \ 8 \\ b & 0 \ 0 \ 0 \ 5 \ 5 \ 5 \end{array}$$

O condiție suplimentară pentru soluție unică poate fi de exemplu, să fie impar și divizibil cu 9.

V.103. a) Pentru ca $\overline{12y}$ să fie divizibil cu 12 trebuie să fie număr par. Dintre numerele 120, 122, 124, 126, 128 sînt divizibile cu 4 numerele 120, 124, 128. Divizibil cu 3 este numai 120 deci $A = \{120\}$. Pentru ca $\overline{1ab}$ să fie divizibil cu 15 trebuie să fie divizibil cu 5, deci avem $1a0$ sau $1a5$.

Cazul $1a0$: pentru a fi divizibil cu 3, trebuie ca $1 + a$ să fie unul din numerele 3, 6, 9 deci a este 2, 5 respectiv 8. Rezultă numerele 120, 150, 180. Cazul $1a5$: pentru a fi divizibil cu 3, trebuie ca $6 + a$ să fie unul din numerele : 6, 9, 12, 15 deci a este 0, 3, 6 respectiv 9. Rezultă numerele 105, 135, 165, 195. Avem $B = \{120, 150, 180, 105, 135, 165, 195\}$.

b) $A \cup B = B$; $A \cap B = A$; $A - B = \emptyset$; $B - A = \{150, 180, 105, 135, 165, 195\}$.

V.104. Afirmția $6 | 10 + x$ se poate traduce astfel : 6 este divizor al numărului $10 + x$ cu condiția $x < 20$. 6 este divizor al numerelor 12, 18, 24, 30 etc.

Deci : $x \in \{2, 8, 14, 20\} = M$.

V.105. Un număr este divizibil cu 15 cînd este divizibil cu 5 și cu 3. Divizibilitatea cu 5 conduce la $b = 0$ sau $b = 5$. Cazul $b = 0$, ne dă $5 + a$ divizibil cu 3 adică $a = 1$ sau $a = 4$ sau $a = 7$, deci x poate fi unul din numerele 2 130, 2 430, 2 730. Cazul $b = 5$, ne dă $10 + a$ divizibil cu 3 adică $a = 2$ sau $a = 5$ sau $a = 8$, deci x mai poate fi unul din numerele 2 235, 2 535, 2 835.

Avem $A = \{2\ 130, 2\ 430, 2\ 730, 2\ 235, 2\ 535, 2\ 835\}$.

Un număr este divizibil cu 18 cînd este divizibil cu 2 și cu 9. Divizibilitatea cu 2 ne conduce la cazurile $2m30$, $2m32$, $2m34$, $2m36$, $2m38$ iar divizibilitatea cu 9 la numerele y respectiv, 2 430, 2 232, 2 034 și 2 934, 2 736, 2 538. Așadar $B = \{2\ 430, 2\ 232, 2\ 034, 2\ 934, 2\ 736, 2\ 538\}$.

În final găsim : $A \cap B = \{2\ 430\}$; $A \cup B = \{2\ 130, 2\ 430, 2\ 730, 2\ 535, 2\ 235, 2\ 835, 2\ 232, 2\ 034, 2\ 934, 2\ 736, 2\ 538\}$; $B - A = \{2\ 232, 2\ 034, 2\ 934, 2\ 736, 2\ 538\}$ și deci $(A \cap B) - (A \cup B) = \emptyset$, $(A \cup B) \cap (B - A) = \{2\ 232, 2\ 034, 2\ 934, 2\ 736, 2\ 538\} = B - A$.

V.106. Din rezolvarea problemei precedente rezultă că avem numerele 2 130 și 2 835.

V.107. Fie numărul cerut de forma \overline{abc} . Divizibilitatea cu 18 se realizează când numărul este divizibil cu 2 și cu 9. Din divizibilitatea cu 2 rezultă cazurile $\overline{ab0}$, $\overline{ab2}$, $\overline{ab4}$, $\overline{ab6}$, $\overline{ab8}$. Din condițiile a) și b) avem numerele : 210, 432, 654, 876, 234, 456, 578. Din acestea divizibile cu 9 avem : 234 și 432.

V.108. Din textul problemei, numărul este divizibil cu 18 deci cu 2 și cu 9. Din divizibilitatea cu 2 înseamnă că $y \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ vom avea numere de forma : $\overline{619x70}$, $\overline{619x72}$, $\overline{619x74}$, $\overline{619x76}$ și $\overline{619x78}$. Pentru divizibilitatea cu 9 avem în fiecare caz : $9 \mid 23 + x$, $9 \mid 25 + x$, $9 \mid 27 + x$, $9 \mid 29 + x$ și $9 \mid 31 + x$. Cel mai mare număr de forma cerută va fi când x este cel mai mare, fiind pe ordinul sutelor. Aceasta se obține în cazul $9 \mid 27 + x$ pentru $x = 9$ și obținem numărul 619 974. Cel mai mic număr cerut este în cazul $9 \mid 27 + x$ pentru $x = 0$ adică 619 074.

Celelalte numere sînt : 619 470, 619 272, 619 776 și 619 578.

V.109. Condițiile a) și b) conduc la aflarea numerelor naturale de forma $\overline{a90b}$ divizibile cu 18, adică cu 2 și cu 9. Divizibilitatea cu 2 dă numerele $\overline{a900}$, $\overline{a902}$, $\overline{a904}$, $\overline{a906}$, $\overline{a908}$. Divizibilitatea cu 9 dă respectiv : 9 900, 7 902, 5 904, 3 906, 1 908.

Condiția d) se exclude pentru că toate sînt numere pare, deci mai mult decît trei. Condiția.e) se exclude căci toate sînt mai mari decît 1 000.

Ultima condiție impune numerele : 9 900, 5 904 și 1 908.

V.110. Condiția ca numărul să fie divizibil cu 36 este echivalentă cu condiția ca numărul să fie divizibil cu 4 și 9. Dacă este cu 4 înseamnă că este par deci trebuie să găsim numere de forma $\overline{abc0}$, $\overline{abc2}$, $\overline{abc4}$, $\overline{abc6}$, $\overline{abc8}$. Deoarece c și d sînt consecutive rămîn numai cazurile $\overline{ab12}$, $\overline{ab34}$, $\overline{ab56}$, $\overline{ab78}$. Divizibile cu 4 sînt doar $\overline{ab12}$ și $\overline{ab56}$. Divizibilitatea cu 9 ne conduce în primul caz la $a + b + 1 + 2 = 9$ sau $a + b + 1 + 2 = 18$, adică la $a + b = 6$ sau $a + b = 15$. Avem deci : $a = 1, b = 5$; $a = 2, b = 4$; $a = 3, b = 3$; $a = 4, b = 2$; $a = 5, b = 1$; $a = 6, b = 0$ sau $a = 6, b = 9$; $a = 7, b = 8$; $a = 8, b = 7$; $a = 9, b = 6$.

În al doilea caz, asemănător, $a + b + 5 + 6 = 18$ sau $a + b + 5 + 6 = 27$, adică $a + b = 7$ sau $a + b = 16$. Avem deci : $a = 1, b = 6$; $a = 2, b = 5$; $a = 3, b = 4$; $a = 4, b = 3$; $a = 5, b = 2$; $a = 6, b = 1$; $a = 7, b = 0$ sau $a = 7, b = 9$; $a = 8, b = 8$; $a = 9, b = 7$. Rezultă $A = \{1\ 512, 2\ 412, 3\ 312, 4\ 212, 5\ 112, 6\ 012, 6\ 912, 7\ 812, 8\ 712, 9\ 612, 6\ 156, 7\ 056, 7\ 956, 8\ 856, 9\ 756, 1\ 656, 2\ 556, 3\ 456, 4\ 356, 5\ 256\}$.

V.111. Pentru divizibilitatea cu 15 este nevoie de divizibilitatea cu 5, deci $\overline{7a80}$ sau $\overline{7a85}$ și cu 3 pentru care avem $A = \{7\ 080, 7\ 380, 7\ 680, 7\ 980, 7\ 185, 7\ 485, 7\ 785\}$.

Pentru divizibilitatea cu 40 este nevoie de divizibilitatea cu 10 deci forma $\overline{7x80}$ și de divizibilitatea cu 8 adică $\overline{x80}$ divizibil cu 8. Obținem $B = \{7\ 080, 7\ 280, 7\ 480, 7\ 680, 7\ 880\}$. $A \cup B = \{7\ 080, 7\ 380, 7\ 680, 7\ 980, 7\ 185, 7\ 485, 7\ 785, 7\ 280, 7\ 480, 7\ 880\}$; $A \cap B = \{7\ 080, 7\ 680\}$; $B - A = \{7\ 280, 7\ 480, 7\ 880\}$.

V.112. Notăm cu \overline{abc} , numărul căutat. Folosind c) numărul are una din formule : $\overline{4b0}$, $\overline{5b1}$, $\overline{6b2}$, $\overline{7b3}$, $\overline{8b4}$, $\overline{9b5}$. Din a) rezultă că \overline{abc} este par, deci avem una din formule : $\overline{4b0}$, $\overline{6b2}$, $\overline{8b4}$. Condiția b) impune ca numărul să nu fie divizibil cu 5, iar la împărțirea cu 5 să se obțină restul 2. Rămâne să avem doar număr de forma $\overline{6b2}$. Conform cu a) trebuie să fie divizibil și cu 11. Dintre numerele $\overline{6b2}$, este divizibil cu 11 doar $\overline{682}$.

V.113. Faptul că numărul cerut este divizibil cu 45 conduce la divizibilitatea lui cu 5 și cu 9. Dacă e divizibil cu 5 atunci $y = 0$ sau $y = 5$. Cazul $y = 0$, conduce la forma $\overline{3x60}$. Dacă e divizibil cu 9 atunci $3 + x + 6 + 0$ este un număr divizibil cu 9, deci $9 + x$ e divizibil cu 9 și deci x poate fi numai 9 ($x \neq 0$, căci $y \neq 0$). Avem numărul $\overline{3960}$. Cazul $y = 5$ ne conduce la $\overline{3465}$.

V.114. Pentru a fi divizibil cu 45 trebuie să fie divizibil cu 5 (și avem formele : $\overline{495a0}$ sau $\overline{495a5}$) și cu 9. În primul caz trebuie ca $4 + 9 + 5 + a + 0$ adică $18 + a$ să fie divizibil cu 9, deci $a = 0$ sau $a = 9$. Rezultă că numerele sînt $\overline{49500}$ și $\overline{49590}$. În cazul al doilea trebuie ca $23 + a$ să fie divizibil cu 9, deci $a = 4$ și avem numărul $\overline{49545}$.

V.115. Pentru ca numărul $\overline{4xy}$ să fie divizibil cu 45 trebuie să fie divizibil cu 5 și cu 9. Divizibilitatea cu 5 ne conduce la cazurile : $\overline{4x0}$ sau $\overline{4x5}$. Pentru ca numărul să fie divizibil cu 9 trebuie să avem în cazul $\overline{4x0}$, $4 + x = 9$ unde $x = 5$. În cazul $\overline{4x5}$, trebuie să avem $4 + 5 + x = 9$ sau $4 + 5 + x = 18$ adică, $x = 0$ sau $x = 9$. Deci avem : $x = 5$ și $y = 0$; $x = 0$ și $y = 5$; $x = 9$ și $y = 5$.

V.116. Scriem numărul astfel :

$$N = (3 + 3^2 + 3^3) + 3^3(3 + 3^2 + 3^3) + 3^6(3 + 3^2 + 3^3) + \dots + 3^{1980}(3 + 3^2 + 3^3) + 3^{1983}(3 + 3^2 + 3^3) = (3 + 3^2 + 3^3)(1 + 3^3 + 3^6 + \dots + 3^{1980} + 3^{1983}) = 39(1 + 3^3 + 3^6 + \dots + 3^{1983}).$$

Constatăm că N se divide cu $39 = 3 \cdot 13$. Scriem numărul astfel :

$$N = (3 + 3^2) + 3^2(3 + 3^2) + \dots + 3^4(3 + 3^2) + \dots + 3^{1982}(3 + 3^2) + 3^{1984}(3 + 3^2) = (3 + 3^2) \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + \dots + 3^{1982} + 3^{1984}) = 12 \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + \dots + 3^{1984}).$$

Constatăm că N se divide cu 12, deci cu 4. Deoarece N se divide cu 4 și 39 se divide cu $4 \cdot 39 = 156$.

V.117. Constatăm din tabloul următor, că ultima cifră se repetă din 4 în 4 adică 3^4 , 3^8 , 3^{12} , 3^{16} au ultima cifră, cifra 1. Numărul dat se scrie $3^{4 \cdot 496 + 2} = (3^4)^{496} \cdot 3^2$. Ultima cifră a lui 3^4 este 1. Tot cifra 1 va fi ultima cifră a numărului $(3^4)^{496}$. Ultima cifră a lui 3^2 este 9, deci ultima cifră a numărului dat este 9.

puterea,	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	...
ultima cifră	3	9	7	1	3	9	7	1	3	9	7	1	3	...

V.118. Avem ca ultima cifră la numerele 3^{1986} , 4^{1987} și 5^{1988} cifrele 9, 4 și respectiv 5. Deci ultima cifră a lui a va fi ultima cifră a numărului $9 + 4 + 5 = 18$ adică 8.

V.119. Scriem numărul dat astfel : $[n(n+5)]^3 \cdot n^2$. Intocmim un tabel în care scriem ultima cifră pe coloană, în fiecare caz :

ultima cifră a numărului :					
n	$n+5$	$n(n+5)$	$[n(n+5)]^2$	n^3	$[n(n+5)]^3 \cdot n^2$
1	6	6	6	1	6
2	7	4	4	4	6
3	8	4	4	9	6
4	9	6	6	6	6
6	1	6	6	6	6
7	2	4	4	9	6
8	3	4	4	4	6
9	4	6	6	1	6

Deci în orice caz, pentru orice n , ultima cifră a lui $n^5(n+3)$ este 6.

V.120. a) Avem $N = 3^{16} \cdot 7^{22} \cdot 2^4 \cdot 10^6$. Deci 6 zerouri.

b) 3^{16} are ultima cifră 1, 7^{22} are ultima cifră 9, iar 2^4 ultima cifră 6. Rezultă că ultima cifră diferită de zero a lui N este 4.

V.121. Numărul n are ultima cifră (a unităților), cifra 3. Nu este un pătrat pentru că cifra unităților unui pătrat al unui număr natural poate fi doar : 0, 1, 4, 9, 5 sau 6.

V.122. Ultima cifră a numărului 1986^{1986} este 6, a numărului 1987^{1987} este 3, iar a numărului 1988^{1988} este 6. Ultima cifră a lui N este ultima cifră a numărului $6 + 3 + 6 = 15$ deci N are ultima cifră 5 și este divizibil cu 5.

V.123. Cifra unităților a numărului 9^{12} este 1, iar a lui 7^{12} este tot 1. Cifra unităților a numărului A este zero, deci A este divizibil cu 10.

V.124. Orice putere de exponent număr natural, a unui număr natural cu ultima cifră (cifra unităților) 3, are ultima cifră una din cifrele 1, 3, 9, 7. Acestea repetându-se din patru în patru, pentru exponenți consecutivi. Cum exponentul 1986 este multiplu de patru plus doi, înseamnă că ultima cifră a lui 1983^{1986} este cifra 9. Asemănător, observăm că ultima cifră a lui 1984^{1986} este 4, iar numărul 1985^{1986} are ultima cifră 5. Ultima cifră (cifra unităților) a numărului N se obține adunând ultimele cifre ale celor trei numere și se găsește că ea este zero, deci N este divizibil cu 10, deci N^2 este divizibil cu 100.

$$\begin{aligned}
 \text{V.125. } a &= (7 \cdot 9)^n + 7^n \cdot 7 \cdot 3^{2n} \cdot 3 - (3 \cdot 7)^n \cdot 3^n \cdot 3^2 = \\
 &= 7^n \cdot 9^n + 7^n \cdot 3^{2n} \cdot 7 \cdot 3 - 3^n \cdot 7^n \cdot 3^n \cdot 3^2 = \\
 &= 7^n \cdot 3^{2n} + 7^n \cdot 3^{2n} \cdot 7 \cdot 3 - 3^{2n} \cdot 7^n \cdot 3^2 = \\
 &= 7^n \cdot 3^{2n}(1 + 7 \cdot 3 - 9) = 7^n \cdot 3^{2n} \cdot 13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{V.126. } a &= 5^{2n} \cdot 5^3 \cdot 9^n \cdot 9^2 + 3^{2n} \cdot 3 \cdot 25^n \cdot 25 = \\
 &= 5^{2n} \cdot 5^3 \cdot 3^{2n} \cdot 3^4 + 3^{2n} \cdot 3 \cdot 5^{2n} \cdot 5^2 = \\
 &= 5^{2n} \cdot 3^{2n}(5^3 \cdot 3^4 + 3 \cdot 5^2) = \\
 &= 5^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 3 \cdot 5^2(5 \cdot 3^3 + 1) = \\
 &= 5^{2n+2} \cdot 3^{2n+1} \cdot 136 = 5^{2n+2} \cdot 3^{2n+1} \cdot 8 \cdot 17.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{V.127. } a &= 15^n \cdot 15 + 3^n \cdot 3 + 5 \cdot 3^n \cdot 3^2 = \\
 &= (3 \cdot 5)^n \cdot 15 + 3^n \cdot 3 + 5 \cdot 3^n \cdot 3^2 = \\
 &= 3^n(5^n \cdot 15 + 3 + 3^2 \cdot 5) = \\
 &= 3^{n+1} \cdot (5^{n+1} + 1 + 15) = 3^{n+1} \cdot (5^{n+1} + 16).
 \end{aligned}$$

Pentru $n \geq 2$ avem 3^3 factor, deci a se divide cu 27.

V.128. Arătăm că E trebuie să fie divizibil cu 2 și cu 9. E este o sumă de doi termeni pari: 1988 și $2^n \cdot 5^n$ care are pentru $n \neq 0$ factorul 2. Scriem E astfel $E = (2 \cdot 5)^n + 1988 = 10^n + 1988 = 1000 \dots 0 + 1988$ divizibil cu 9, deci E se divide și cu 9.

V.129. a) Numărul 10^{1986} are 1986 de zerouri. Dacă se face scăderea $10^{986} - 1$ obținem $p = 999 \dots 99$ care are 1986 cifre de 9. Deci, suma lor este $1986 \cdot 9$.

b) Demonstrăm că numărul k este divizibil cu 4. Avem că 10^n se scrie astfel: 100...000 adică unu urmat de n zerouri. Se observă că putem scrie $k = 1000 \dots 0044$ deci este divizibil cu 4. Constatăm că suma cifrelor lui k este $1 + 0 + \dots + 0 + 0 + 4 + 4 = 9$.

Rezultă că numărul k este divizibil și cu 9 deci cu $4 \cdot 9 = 36$

V.130. Numărul a se scrie, succesiv:

$$\begin{aligned}
 a &= 2^{2n} \cdot 2 \cdot 3^{2n} \cdot 5^n \cdot 5 + 4^n \cdot 3^{2n} \cdot 5^n = \\
 &= 3^{2n} \cdot 5^n(4^n \cdot 2 \cdot 5 + 4^n) = \\
 &= 3^{2n} \cdot 5^n \cdot 4^n(2 \cdot 5 + 1) = 11 \cdot 9^n \cdot 4 \cdot 4^{n-1} \cdot 5 \cdot 5^{n-1} = \\
 &= 11 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9^{n-1} \cdot 4^{n-1} \cdot 5^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Numărul 1980 se scrie $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 11 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9$. Se constată că a are toți factorii lui 1980, deci a se divide cu 1980.

V.131. Avem $\overline{xyz} - \overline{zyx} = 396$. Numărul ca să fie divizibil cu 4 trebuie să fie par, deci $z \in \{2; 4; 6; 8\}$, $z \neq 0$ căci nu ar mai fi de 3 cifre \overline{zyx} . Cazul $z = 2$: $\overline{xy2} - \overline{2yx} = 396$ adică $x = 6$, deci numărul este de formă $6y2$. Divizibile cu patru sînt 612; 632; 652; 672; 692. Cazul $z = 4$ ne conduce la $\overline{xy4} - \overline{4yx} = 396$, adică $x = 8$, deci numărul este de forma $8y4$. Divizibile cu 4 sînt: 804; 824; 844; 864; 884. Celelalte cazuri, $z = 6$, $z = 8$ nu verifică condițiile problemei. Pentru divizibilitatea cu 9 avem pentru $z = 1$, $\overline{xy1} - \overline{1yx} = 396$, adică $x = 5$, deci numărul este de forma $5y1$ și deci $y = 3$, care conduce la 531. Pentru $z = 2$, obținem 612; pentru $z = 3$ obținem 783; pentru $z = 4$ avem 864; pentru $z = 5$ avem 945. Dacă $z = 6$ obținem $x = 0$, diferit de 3 cifre etc.

Rezultă : 612 ; 632 ; 652 ; 672 ; 692 ; 804 ; 824 ; 844 ; 864 ; 884 ; 531 ; 945, 783.

V.132. a) Dacă $p \in \mathbb{N}$, avem $p^2 \in \mathbb{N}$, $3p^2 \in \mathbb{N}$ (1).

Dacă $k \in \mathbb{N}$, avem : $12k \in \mathbb{N}$. (2). Din (1) și (2) obținem că $3p^2 + 12k \in \mathbb{N}$, deci $A \in \mathbb{N}$.

b) Scriem $A = 3(p^2 + 4k)$. c) Deoarece 4 este divizorul lui 12 înseamnă că $4 \mid 12k$. Pentru ca 4 să-l dividă pe A trebuie ca 4 să-l dividă și pe $3p^2$, adică pe p^2 , deci p trebuie să fie număr natural par.

V.133. Dacă numărul e divizibil cu 30 atunci este divizibil și cu 10, deci avem $\overline{abc0}$. Condiția ultimă devine $c - b = a = 3$ sau $b - c = a = 3$, adică $\overline{3bc0}$ cu $c - b = 3$ sau $b - c = 3$, cazul $c - b = 3$, adică $c = 3 + b$. Pentru divizibilitatea cu 3 avem $b + c \in \{3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15 ; 18 ; 21 ; \dots\} = A$, adică $b + 3 + b \in A$, adică $2b + 3 \in A$. Se găsesc : 3 030, 3 360, 3 690. Cazul $b - c = 3$, adică $b = 3 + c$. Pentru divizibilitatea cu 3 avem $b + c \in A$, adică $3 + c + c \in A$, adică $3 + 2c \in A$. Se găsesc 3 300, 3 630, 3 960.

V.134. $2\ 772 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$. Cel mai mic număr, cerut, este $7 \cdot 11$ și vom avea $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2$.

V.135. Numărul dat se scrie succesiv : $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1\ 000 + \overline{abc} = \overline{abc}(1\ 000 + 1) = \overline{abc} \cdot 1\ 001 = \overline{abc} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Pentru ca numărul x să aibă cel mai mic număr de divizori trebuie ca \overline{abc} să fie prim.

V.136. Scriem numărul dat : $x = \overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10\ 000 + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} = \overline{ab}(10\ 000 + 100 + 1) = \overline{ab} \cdot 10\ 101 = \overline{ab} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$. Cel mai mic număr cu cel mai mic număr de divizori este dat de \overline{ab} număr prim.

V.137. a) Singurul număr natural $n \neq 2$ care admite ca divizori pe 1, n și pe 2 este 4.

b) $n + 3 = n + 1 + 2$. Deci avem rezultatul de la punctul a), $n = 4$.

V.138. $a = [2^2 \cdot 5 \cdot (5^2)^{200} \cdot 2^{100} \cdot (2 \cdot 5)^3] : (2^{100} \cdot 5^{400} \cdot 5^3 \cdot 2) =$
 $= (2^2 \cdot 5 \cdot 5^{400} \cdot 2^{100} \cdot 2^3 \cdot 5^3) : (2^{101} \cdot 5^{403}) =$
 $= (2^{105} \cdot 3^{404}) : (2^{101} \cdot 5^{403}) = 2^4 \cdot 5 = 80 ;$

$b = 6 + 2 \cdot [(3 \cdot 25 - 4 \cdot 18 : 9 + 33) : 4] =$
 $= 6 + 2 \cdot [(75 - 72 : 9 + 33) : 4] = 6 + 2 \cdot [(75 - 8 + 33) : 4] =$
 $= 6 + 2 \cdot [100 : 4] = 6 + 2 \cdot 25 = 6 + 50 = 56 = 2^3 \cdot 7 ;$

Avem c.m.m.d.c. care este $2^3 = 8$ și c.m.m.m.c. care este $2^4 \cdot 5 \cdot 7 = 560$.

V.139. Fie $a = 6a_1$, $b = 6b_1$ și $c = 6c_1$ unde a_1, b_1, c_1 sînt numere naturale prime între ele.

Conform datelor problemei obținem $6a_1 \cdot 6b_1 \cdot 6c_1 = 12\ 096$ sau $a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = 56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$.

Avem :

a_1	b_1	c_1
1	2	28
1	4	14
1	8	7

deci numerele sînt :

a	b	c
6	12	168
6	24	84
6	84	42

Mai căutați și alte triplete.

V.140. Deoarece cel mai mare divizor comun al celor două numere, pe care le notăm cu a și b , este 5 putem scrie : $a = 5 \cdot a_1$ și $b = 5 \cdot b_1$, unde a_1 și b_1 sînt numere naturale prime între ele.

Conform textului avem : $a + b = 40$, adică $5a_1 + 5b_1 = 40$, care se mai scrie $5(a_1 + b_1) = 40$ sau $a_1 + b_1 = 8$.

Această relație permite să găsim a_1 și b_1 numere naturale și prime între ele : $a_1 = 1$ și $b_1 = 7$, sau $a_1 = 3$ și $b_1 = 5$. Deci numerele cerute sînt : $a = 5$ și $b = 35$ sau $a = 15$ și $b = 25$.

V.141. Aplicăm teorema împărțirii cu rest. Notăm cu a numărul la care se împart cele trei numere iar cu b, c și respectiv d , citurile.

Avem : $1\ 234 = ab + 13$; $6\ 532 = ac + 7$; $1\ 817 = ad + 2$.

Aceste relații se mai scriu : $1\ 243 - 13 = ab$; $6\ 532 - 7 = ac$; $1\ 817 - 2 = ad$, adică : $1\ 230 = ab$; $6\ 525 = ac$; $1\ 815 = ad$. Constatăm că a este un divizor comun al numerelor $1\ 230, 6\ 525$ și $1\ 815$, mai mare decît 13 care este restul cel mai mare dintre cele date.

Calculăm cel mai mare divizor comun al acestor numere. Acesta este 15, care este și împărțitorul cerut.

V.142. Avem $1\ 944 = a \cdot b$; $1\ 986 = a \cdot c + 6$ și $2\ 000 = a \cdot d + 2$.

Acestea se mai scriu $1\ 944 = a \cdot b$, $1\ 986 - 6 = a \cdot c$ și $2\ 000 - 2 = a \cdot d$. Înseamnă că a este un divizor comun al numerelor $1\ 944, 1\ 980$ și $1\ 998$. Cel mai mare divizor comun al lor este 18. Deoarece a este împărțitor trebuie să avem $a > 6$ (din teorema împărțirii cu rest). Deci $a > 6$ este un divizor al lui 18 adică $a = 9$ sau $a = 18$.

V.143. Folosind teorema împărțirii cu rest, rezultă că numărul la care au fost împărțite trebuie să fie mai mare ca 42. Acest număr este un divizor comun al numerelor $2\ 435 - 35$; $342 - 42$; $4\ 527 - 27$ adică al numerelor $2\ 400$; 300 ; $4\ 500$, deci un divizor al celui mai mare divizor comun al lor.

C.m.m.d.c. = 300. Soluția : $\{300, 150, 100, 75, 60, 50\}$.

V.144. Notăm \overline{abc} numărul de pionieri din unitate și cu r restul. Conform teoremei împărțirii cu rest avem $\overline{abc} = 20 \cdot n_1 + r$, $\overline{abc} = 50 \cdot n_2 + r$, și $\overline{abc} = 70 \cdot n_3 + r$ unde n_1, n_2, n_3 reprezintă numărul de rînduri în fiecare caz iar $r < 20$. Cele trei egalități se mai scriu : $\overline{abc} - r = 20 \cdot n_1$, $\overline{abc} - r = 50 \cdot n_2$ și $\overline{abc} - r = 70 \cdot n_3$. Acestea comunică faptul că numărul $\overline{abc} - r$ este multiplu comun de 20, 50, 70 adică multiplu de cel mai mic multiplu comun al numerelor 20, 50 și 70 care este 700. \overline{abc} este mai mare decît 700 și mai mic ca 1 000. Deci $\overline{abc} = 700 + r$ cu $r < 20$ și $r > 0$.

V.145. Numărul este un multiplu comun de 2, 3, 4, 5, 6 plus unu și multiplu de 7. Cel mai mic multiplu comun de 2, 3, 4, 5, 6 este 60. Numărul căutat este $60 \cdot 5 + 1 = 301$.

V.146. Numărul de elevi este multiplu comun de 2, 3, 4, 5, plus unu și multiplu de 7 adică $60 \cdot 5 + 1 = 301$, care este mai mic ca 500.

V.147. Problema se poate enunța parțial astfel : numărul este multiplu de 7 plus 6 și multiplu de 6 plus 5 și multiplu de 5 plus 4 și multiplu de 4 plus 3. Aceasta, mai comod, se poate enunța și astfel : numărul este multiplu de 7 minus 1, multiplu de 6 minus 1, multiplu de 5 minus 1 și multiplu de 4 minus 1. Deci din multiplu comun de 7, 6, 5 și 4 scadem 1. Numărul este $420 - 1 = 419$.

V.148. Timpul de întâlnire este reprezentat, în ore, printr-un număr care este multiplu comun al numerelor 5 și 6. Deoarece se cere prima întâlnire, aceasta se realizează după cel mai mic multiplu comun al numerelor 5 și 6, adică 30.

V.149. Din b) avem că numărul \overline{abc} este număr par, deci avem situația că $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Condiția a) ne dă că $b \in \{1, 5, 9, 13, 17\}$ din care numai 1, 5, 9 reprezintă cifre. Avem, respectiv : $a10$, $a52$, $a94$. Din acestea numai $a52$ este divizibil cu 4 (ca să fie și cu 12). Pentru divizibilitatea cu 3 trebuie să avem $a + 5 + 2$ multiplu de 3. În cazul nostru sînt posibile $a + 7 = 9$, $a + 7 = 12$, $a + 7 = 15$ adică $a = 2$, $a = 5$, $a = 8$. Din acestea verifică c) numai $a = 2$ și $a = 5$. În concluzie numerele sînt 252 și 552.

V.150. $a = 2 - 1 = 1$, nu este număr prim ; $b = 6 - 1 = 5$, este număr prim ; $c = 30 - 1 = 29$, este număr prim ; $d = 30 \cdot 7 - 1 = 210 - 1 = 209 = 11 \cdot 19$ nu este număr prim.

V.151. Fie a, b, c cifrele numărului cerut, indiferent de ordine. Avem $a \cdot b \cdot c = 14$. Cum a, b, c sînt cifre înseamnă că ele sînt reprezentate de divizorii naturali, de o singură cifră, ai lui 14, adică 1, 2, 7. Avem astfel situațiile 127, 172, 217, 271, 712, 721. Din aceste numere sînt prime numai : 127 și 271.

V.152. Afirmația este falsă, căci pentru $n = 10$, avem $10(10 + 3) + 13 = 10 \cdot 13 + 13 = 13(10 + 1) = 13 \cdot 11$ care numai este număr prim. Și pentru $n = 9$ este falsă.

V.153.

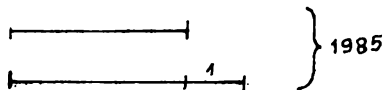


Fig. V.153.

Numărul cel mic este $(1985 - 1) : 2 = 992$ iar cel mai mare este 993. Se verifică faptul că sînt neprime.

V.154. Numărul prim trebuie să fie par care adunat cu al doilea, impar, să dea număr natural impar, 24 735. Deci 2 și 24 733.

V.155. Numărul prim trebuie să fie par. Singurul număr prim și par este doi. Deci numerele sînt 1 002 și 2.

V.156. Vom arăta că singurul număr natural prim de două cifre identice este 11. Presupunem (prin absurd) că ar exista numărul \overline{aa} prim. Acest număr se scrie : $\overline{aa} = 10a + a = 11a$. El este prim numai dacă $a = 1$. Deci numerele cerute sînt 11 și 2 425 ; b) $2\ 425 = 5^2 \cdot 97$; c) $M = \{5, 97\}$. $d = 97$ este număr prim pentru că împărțind pe 97 la fiecare număr prim mai mic decît 11, nu obținem restul zero.

V.157. A doua relație se mai scrie $a = 6 + b$. Cu aceasta, prima relație devine succesiv : $6 + b + b - c = 1\ 986$, $6 + 2b - c = 1\ 986$, $2b - c = 1\ 986 - 6$, $2b - c = 1\ 980$, $2b = 1\ 980 + c$. Constatăm că $2b$ este un număr par deci și $1\ 980 + c$ este un număr par. Cum $1\ 980$ este un număr par rezultă că și c trebuie să fie număr par. Din problemă, c este număr prim. Singurul număr prim par este 2, deci $c = 2$. Cu acesta, găsim că $2b = 1\ 980 + 2$ adică $b = 991$ care este număr prim. (Verificați !), iar $a = 6 + 991 = 997$.

V.158. Numărul 82 este par deci $a + 10b + 12c$ este par. Deoarece $10b$ și $12c$ sînt numere pare rezultă că și a este par. Cum trebuie să fie și prim, obținem că $a = 2$. Deci $2 + (10b + 12c) = 82$, adică $10b + 12c = 80$. Observăm că $10b$ este divizibil cu 5. Dar și 80 adică $10b + 12c$ este divizibil cu 5 rezultă că și $12c$ este divizibil cu 5. Cum $12c < 80$ avem că $c = 5$. Deci $10b + 12 \cdot 5 = 80$, adică $10b = 80 - 60$, $10b = 20$. $b = 2$. Răspunsul este $a = 2$, $b = 2$, $c = 5$.

V.159. Se știe că orice număr prim, diferit de numărul 2, este un număr impar. Suma de un număr par de numere impare este un număr par deci nu poate fi prim. Înseamnă că printre cele 6 numere prime (număr par) trebuie să fie un număr par. Numerele sînt 2, 3, 5, 7, 11 și 13. Suma lor este 41 care este număr prim. Altă combinație de 6 numere prime care să-l conțină pe 2 nu îndeplinește condiția că să fie și consecutive.

V.160. Conform datelor problemei avem egalitățile : $(x + 1) \cdot y \cdot z = xyz + 30$ și $x \cdot (y - 1) \cdot z = xyz - 20$.

Atît din scrierea $(x + 1)yz$ cît și din scrierea $x(y - 1)z$ constatăm că z este divizor comun al numerelor $(x + 1)yz$ și $x(y - 1)z$ adică al egalelor lor $xyz + 30$ și respectiv $xyz - 20$. Aceasta înseamnă că z fiind divizor al sumei $xyz + 30$ și al termenului xyz , este divizor și al termenului 30. Asemănător, găsim că z este divizor și al lui 20. Deci cum din problema z este prim, obținem că z este divizor comun, prim, al numerelor 30 și 20. Rezultă că $z \in \{2, 5\}$. Cazul $z = 2$ ne dă o formă mai comodă pentru cele două relații : $(x + 1)y = xy + 15$ și $x(y - 1) = xy - 10$. Prima din aceste relații devine $xy + y = xy + 15$ din care constatăm că $y = 15$ iar x este orice număr natural. Cu $y = 15$, a doua relație devine $x \cdot 14 = x \cdot 15 - 10$. De aici observăm că x este divizor al lui 10. Dintre divizorii lui 10 verifică egalitatea numai $x = 10$. Deci o soluție a problemei este : $x = 10$, $y = 15$ și $z = 2$. Cazul $z = 5$, analizat asemănător ca mai sus ne dă $x = 4$ și $y = 6$.

V.161. Numărul prim cu cifrele egale în condițiile problemei nu poate avea trei cifre, căci dacă ar fi așa el ar fi de forma $aaa = 100a + 10a + a = a \cdot (100 + 10 + 1) = a \cdot 111 = a \cdot 3 \cdot 37$ și nu ar mai fi prim. El este de două cifre, de forma $aa = 10a + a = 11 \cdot a$. Poate fi prim numai dacă $a = 1$, deci numărul este 11. Suma celorlalte patru numere prime, diferite, este $226 - 11 = 215$. Două numere prime diferite unul răsturnatul celuilalt, de două cifre, sînt perechile : 13 cu 31 ; 17 cu 71 ; 37 cu 73 ; 79 cu 97 care adunate dau respectiv 44, 88, 110, 176. Scăzînd suma acestor două numere obținem suma ultimelor două numere care este respectiv 171, 127, 105, 39. Nu există două numere prime care adunate să dea în sumă 171 sau 127, deoarece orice număr prim cu excepția lui 2 este un număr impar ; adunînd două numere prime impare obținem un număr par și deci nici 171 și nici 127. Se exclude și cazul lui 2 căci $171 - 2 = 169$ sau $127 - 2 = 125$ nu sînt numere prime. Rămîne să se analizeze, la fel situația cînd avem 105 sau 39 la care obținem respectiv 2 și 103 sau 2 și 37. Deci avem două soluții : $\{11, 37, 73, 2, 103\}$ sau $\{11, 97, 79, 2, 37\}$.

V.162. Pentru a fi prime între ele trebuie să nu aibă divizor comun. Divizorii lui 12 sînt : 1, 2, 3, 4, 6, 12. Rezultă că $25x$ să nu fie număr par și divizibil cu 3. Numerele impare de forma respectivă sînt : 251, 253, 255, 257, 259. Din acestea nedivizibile cu 3 sînt 251, 253, 257, 259. Așadar $x \in \{1, 3, 7, 9\}$.

V.163. Avem $2310 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$. Deci numărul $179x$ nu trebuie să fie par. Avem unul din următoarele numere : 1 791, 1 793, 1 795, 1 797, 1 799. Excludem pe cele divizibile cu 3. Rămîn 1 793, 1 975 și 1 799. Excludem pe cel divizibil cu 5. Rămîn 1 973 și 1 799. Amîndouă sînt divizibile cu 7. Deci nu există x astfel încît $179x$ și 2 310 să fie prime între ele.

V.164. Deoarece $2r = p + q$ și $p + q + r = 21$ avem $3r = 21$ deci $r = 7$. Cu acesta $p + q = 14$. Din problemă $q = 6p$ iar precedentă egalitate ne dă $7p = 14$, adică $p = 2$, și deci $q = 12$. Calculăm acum

$$t = \{20 \cdot 23 - 2 [200 + (2^7 \cdot 5^2 \cdot 3^2) : (3^2 \cdot 2^6 \cdot 5)]\} : 10 = \{460 - 2 [200 + 10]\} : 10 = \{460 - 2 \cdot 210\} : 10 = \{460 - 420\} : 10 = 4.$$

Pentru calculul lui A și B avem exercițiul V.105. rezolvat la pag. 52 :
 $A = \{2\ 130, 2\ 430, 2\ 730, 2\ 235, 2\ 535, 2\ 835\}$. $B = \{2\ 430, 2\ 232, 2\ 034, 2\ 934, 2\ 736, 2\ 538\}$.

Apoi $C = \{2, 12, 7, 10\}$, $D = \{1, 2, 4, 7\}$. $E = \{2, 12, 7, 10, 2\ 130, 2\ 430, 2\ 730, 2\ 235, 2\ 535, 2\ 835\}$. $F = \{2\ 430, 2\ 232, 2\ 034, 2\ 934, 2\ 736, 2\ 538, 1, 2, 4, 7\}$. $E \cap F = \{2, 7, 2\ 430\}$. $E \cap F - (E \cup F) = \emptyset$.
 $E \cup F - (F - E) = E$.

V.165. Notăm cu x, y, z cele trei numere și facem alegerea $x < y < z$.

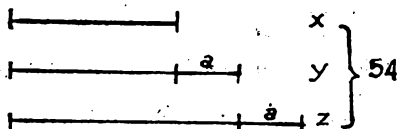


Fig. V.165.

Faptul că unul din ele, în cazul nostru y , este media aritmetică a celorlalte îl putem reprezenta astfel :

Observăm că $y = 54 : 3 = 18$. Rezultă că $x + z = 54 - 18 = 36$ și că x și z sînt divizibile cu 6. Avem $x = 6$ și $z = 30$ sau $x = 12$ și $z = 24$.

V.166. Numerele naturale de trei cifre, a , b și c sînt : \overline{abc} , \overline{acb} , \overline{bac} , \overline{bca} , \overline{cba} , \overline{cab} . Calculăm suma :

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bca} + \overline{bac} + \overline{cab} + \overline{cba} = 100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b + 100c + 10b + a = 222a + 222b + 222c = 222(a + b + c)$$

Rezultă că suma cerută este divizibilă cu $a + b + c$.

V.167. Vezi problema precedentă.

V.168. Fie a , $a + 1$, $a + 2$ cifrele sale. Numărul poate fi :

$$\overline{a(a+1)(a+2)} = 100a + 10(a+1) + a + 2 = 100a + 10a + 10 + a + 2 = 111a + 12 = 3(37a + 4),$$

deci se divide cu 3. Numărul mai poate fi scris cu cifre consecutive și astfel :

$$\overline{(a+2)(a+1)a} = 100(a+2) + 10(a+1) + a = 100a + 200 + 10a + 10 + a = 111a + 210 = 3(37a + 70),$$

deci se divide cu 3.

V.169. Scriem numărul cerut astfel : $x = 10 \cdot n + u$, $n \in \mathbb{N}$ iar u este cifra unităților lui x . Avem conform textului : $10 \cdot n + u = 7u$ adică $10 \cdot n = 7u - u$ adică $10n = 6u$.

Aceasta se mai scrie $5n = 3u$. Se constată că u trebuie să fie divizibil cu 5. Cum u joacă rol de cifră avem $u \in \{0, 5\}$. Pentru $u = 0$ avem $n = 0$ deci $x = 0$.

Pentru $u = 5$ avem $5n = 15$, $n = 3$ deci $x = 35$.

V.170. Se observă că $x | (5 + x)$ și că $x | x$; rezultă că $x | 5$. Asemănător, $x | 12$ și deasemenea $x | 15$. Din $x | 5$ avem că $x \in \{1, 5\}$. Din $x | 12$ avem că $x \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Din $x | 15$ avem că $x \in \{1, 3, 5, 15\}$. Găsim $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15\}$.

V.171. Din problemă, $m \in \mathbb{N}$ și $n \in \mathbb{N}$ rezultă că $m^2 \in \mathbb{N}$ și $n + 1 \in \mathbb{N}$. Avem deci, m^2 și $n + 1$ divizori naturali ai lui $800 = 2^5 \cdot 5^2$. Pentru m^2 avem : 1, 2^2 , 2^4 , 5^2 , $2^2 \cdot 5^2$, $2^4 \cdot 5^2$ iar pentru $n + 1$ avem respectiv : $2^5 \cdot 5^2$, $2^3 \cdot 5^2$, $2 \cdot 5^2$, 2^5 , 2^3 , 2 adică perechile $(m, n) : (1, 799), (2, 199), (4, 49), (5, 31), (10, 7), (20, 1)$.

V.172. Avem : $a^b \cdot c - 1 = 12$, adică $a^b \cdot c = 13$. Constatăm că c este divizor natural al lui 13. Deci avem $c = 1$ sau $c = 13$. Cazul, $c = 1$, $a^b = 13$, deci $a = 13$ și $b = 1$. Cazul, $c = 13$ avem $a^b = 1$. În această situație avem $a = 1$ și $b \in \mathbb{N}$ sau $a \in \mathbb{N}^*$ și $b = 1$.

V.173. Fie x , y , z cele trei numere. Conform textului problemei, $y = 3x$ și $z = 2 \cdot y = 2 \cdot 3x = 6x$.

$$P = x \cdot y \cdot z = x \cdot 3x \cdot 6x = 18x^3 \text{ iar } S = x + y + z = x + 3x + 6x = 10x.$$

Știm, din problemă, că S divide pe P , adică $10x$ divide pe $18x^3$. Aceasta înseamnă că divizorii lui 10 adică 2 și 5 divid pe $18x^3$. Obligatoriu trebuie ca 5 să dividă pe x^3 care este număr natural.

Deci $5 \mid x$, ceea ce înseamnă că x este multiplu de 5 , diferit de zero. Rezultă că $S = 10x$ este multiplu de 50 .

V.174. Pentru ca fracțiile să fie echivalente trebuie să avem $\frac{2}{a} = \frac{5}{3}$; adică $2 \cdot 3 = 5 \cdot a$. Nu există $a \in \mathbb{N}$, astfel încît $5 \cdot a = 6$.

V.175. Avem: $15 < 2 \cdot n$, $12n < 105$, $n \in \mathbb{N}$.

Inecuația $12n < 105$, $n \in \mathbb{N}$ are ca soluții $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Din acestea, verifică inecuația $15 < 2 \cdot n$, doar pentru $n = 8$.

V.176. Condiția impusă se mai scrie: $3n^2 < 40$ și $20 < 3n^2$. Din prima inegalitate avem numerele naturale $1, 2, 3$. A doua inegalitate este verificată doar de $n = 3$.

$$\text{V.177. a) } \frac{23 \cdot 10^6 + 23 \cdot 10^4 + 23 \cdot 10^2 + 23}{32 \cdot 10^6 + 32 \cdot 10^4 + 32 \cdot 10^2 + 32} = \frac{23 \cdot (10^6 + 10^4 + 10^2 + 1)}{32 \cdot (10^6 + 10^4 + 10^2 + 1)} = \frac{23}{32}$$

$$\text{b) } \frac{3(1 + 2 + 3 + \dots + 51)}{4(1 + 2 + 3 + \dots + 51)} = \frac{3}{4}$$

V.178.

$$\frac{6 + 8 - 3}{3 \cdot 4} - \frac{8 + 15 - 10}{5 \cdot 4} = \frac{11}{3 \cdot 4} - \frac{13}{5 \cdot 4} = \frac{55 - 39}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{16}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{4}{15}$$

V.179.

$$6 \cdot \left[\frac{1}{4} + \frac{11}{72} \cdot \frac{6}{7} \right] = 6 \cdot \left[\frac{1}{4} + \frac{11 \cdot 6^{(6)}}{72 \cdot 7} \right] = 6 \cdot \left[\frac{1}{4} + \frac{11}{12 \cdot 7} \right] = 6 \cdot \frac{21 + 11}{12 \cdot 7} = 6 \cdot \frac{32^{(4)}}{12 \cdot 7} = 6 \cdot \frac{8}{3 \cdot 7} = \frac{6 \cdot 8^{(3)}}{3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 8}{7} = \frac{16}{7}$$

V.180. Avem după ce efectuăm adunările și scăderile:

$$\frac{15}{24} \cdot x = \frac{5}{8} \cdot y \text{ sau } \frac{5}{8} x = \frac{5}{8} \cdot y$$

Aceasta înseamnă că $x = y$. Împreună cu propoziția b) rezultă că găsim

$$x = y = \frac{1}{2}$$

V.181.

$$\frac{60 - 30 + 20 - 15 + 12}{60} = x \cdot \frac{240 - 60 - 40 + 24 + 15}{120}$$

$$\frac{47}{60} = \frac{179}{120} \cdot x; x = \frac{47}{60} : \frac{179}{120}; x = \frac{47}{60} \cdot \frac{120}{179}; x = \frac{94}{179}$$

V.182.

$$\begin{aligned}
 & 3 \cdot \{2 \cdot 9 + 25 : 1 + 69 \cdot [16 \cdot 3 - 6^{32} : 2^{30} : 3^{30} + 75]\} = \\
 & = 3 \cdot \left\{ 18 + 25 + 69 \cdot \left[48 - (2 \cdot 3)^{32} \cdot \frac{1}{2^{30}} \cdot \frac{1}{3^{30}} + 75 \right] \right\} = \\
 & = 3 \cdot \left\{ 43 + 69 \cdot \left[48 - \frac{2^{32} \cdot 3^{32}}{2^{30} \cdot 3^{30}} + 75 \right] \right\} = \\
 & = 3 \cdot \{43 + 69 \cdot [48 - 36 + 75]\} = 3 \cdot \{43 + 69 \cdot 87\} = 18\,138.
 \end{aligned}$$

V.183.

$$\begin{aligned}
 & \frac{47 \cdot 3}{8} - \left[\left(26 \frac{1}{3} - \frac{3}{4} x \right) \cdot \frac{12}{5} \right] : \frac{22}{35} = \frac{9}{2} : \frac{4}{11}; \\
 & \left(26 \frac{1}{3} - \frac{3}{4} x \right) \cdot \frac{12}{5} = \frac{141 - 99}{8} \cdot \frac{22}{35}; \quad 26 \frac{1}{3} - \frac{3}{4} x = \frac{42}{8} \cdot \frac{22}{35} : \frac{12}{5}; \\
 & \frac{3}{4} x = 26 \frac{1}{3} - \frac{33 \cdot 5}{10 \cdot 12}; \quad x = \frac{599}{18}.
 \end{aligned}$$

V.184. Vom căuta numerele naturale de forma $\overline{9y7x}$ care nu sînt divizibile cu divizori primi ai numărului 24. Acești divizori sînt 2 și 3. Numerele de forma $\overline{9y7x}$ care nu sînt divizibile cu 2 au forma $\overline{9y71}$, $\overline{9y73}$, $\overline{9y75}$, $\overline{9y77}$ și $\overline{9y79}$. Pentru ca aceste numere să nu fie divizibile cu 3 trebuie ca să nu fie divizibile cu 3 respectiv următoarele numere : $9 + 7 + 1 + y$, $19 + y$, $21 + y$, $23 + y$ și $25 + y$.

Avem respectiv : $y \in \{0; 2; 3; 5; 6; 8; 9\}$, $y \in \{0; 1; 3; 4; 6; 7; 9\}$, $y \in \{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$, $y \in \{0; 2; 3; 5; 6; 8; 9\}$ și $y \in \{0; 1; 3; 4; 6; 7; 9\}$. În concluzie numărătorii fracțiilor ireducibile cerute sînt : 9 071, 9 271, 9 371, 9 571, 9 671, 9 871, 9 971, 9 073, 9 173, 9 373, 9 473, 9 673, 9 773, 9 973, 9 175, 9 275, 9 475, 9 575, 9 775, 9 875, 9 077, 9 277, 9 377, 9 577, 9 677, 9 877, 9 977, 9 079, 9 179, 9 379, 9 479, 9 679, 9 779, 9 979.

V.185. a) Scriem $\overline{xyzxyz} = \overline{xyz} \cdot 1000 + \overline{xyz} = \overline{xyz} + (1000 + 1) \cdot \overline{xyz} = 1\,001 \cdot \overline{xyz} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{xyz}$. Asemănător, $\overline{xy0xy} = \overline{xy} \cdot 1\,000 + \overline{xy} = \overline{xy} \cdot 1\,001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{xy}$.

b) Se observă că :

$$\frac{\overline{xy0xy}}{\overline{xyzxyz}} = \frac{(\overline{xy} \cdot 1001)}{(\overline{xyz} \cdot 1001)} = \frac{\overline{xy}}{\overline{xyz}}$$

c) Scriem fracția astfel : $\frac{\overline{xy}}{(\overline{xy} \cdot 10 + z)}$. Deoarece \overline{xy} este prim, înseamnă că fracția se poate simplifica numai cu \overline{xy} , deci z trebuie să fie multiplu de \overline{xy} . Aceasta este posibil cînd $z = 0$. Deci fracția este ireducibilă pentru $z \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

d) Folosim precedenta scriere și rezultă că z trebuie să fie divizibil cu 3. Deci $z \in \{0, 3, 6, 9\}$.

V.186. Avem de găsit $x \in \mathbb{N}$ astfel încît $\frac{1}{6} < \frac{x}{112} < \frac{1}{5}$. Aceasta conduce la $112 < 6x$ și $5x < 112$, adică $x \in \{19, 20, 21, 22\}$. Deci fracțiile sînt: $\frac{19}{112}, \frac{20}{112}, \frac{21}{112}, \frac{22}{112}$. Dintre acestea ireductibilă este numai $\frac{19}{112}$.

V.187. 10^n este un număr care are o singură cifră 1 și restul cifrelor cifra zero (sau numai o singură cifră 1 cînd $n = 0$). Deci suma cifrelor $10^n + 8$ este $1 + 0 + \dots + 0 + 8 = 9$.

Numărul $10^n + 8$ este un număr divizibil cu 9, deci $x \in \mathbb{N}$.

V.188. a) Fie n număr natural par, adică $n = 2k$. Avem $n(n+1) = 2k(2k+1)$. Deoarece unul din factori este 2 produsul este număr par. Fie n număr natural impar, adică $n = 2k+1$. Avem $(2k+1)(2k+1+1) = (2k+1) \cdot (2k+2) = (2k+1) \cdot 2 \cdot (k+1)$, deci număr par.

b) Scriem fracția astfel: $\frac{n+(n+1)}{n \cdot (n+1)}$. Fie d un divizor al lui n de la numitor. Adunarea de la numărător nu are pe d ca divizor, căci dacă d este divizorul lui n , nu este divizor și pentru $n+1$. Deci fracția nu se simplifică cu nici un divizor al lui n . Fie d_1 divizor al lui $n+1$ de la numitor. Adunarea de la numărător nu are pe d_1 ca divizor, căci dacă d_1 este divizorul lui $n+1$, nu este divizor și pentru n . Deci fracția nu se simplifică.

V.189. Figurăm informația despre primul număr:

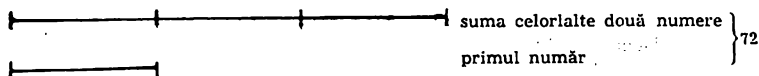


Fig. V.189.a.

Observăm că primul număr se găsește astfel: $72 : 4 = 18$. Calculăm suma dintre al doilea și al treilea: $72 - 18 = 54$.

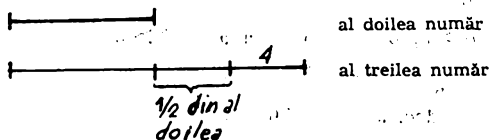


Fig. V.189.b.

Jumătate din al doilea este $(54 - 4) : 5 = 10$. Deci al doilea număr este 20 iar al treilea 34.

V.190.

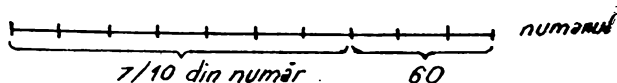


Fig. V.190.

Constatăm că $\frac{1}{10}$ din număr reprezintă $60 : 3 = 20$. Deci numărul este $20 \cdot 10 = 200$.

V.191. Datele problemei le figurăm astfel :

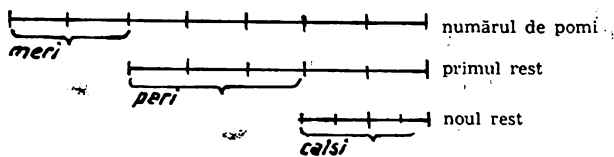


Fig. V.191.

Se constată că $\frac{1}{5}$ din primul rest reprezintă aceeași situație cit $\frac{1}{7}$ din numărul de pomi, iar $\frac{1}{4}$ din noul rest cit $\frac{1}{14}$ din numărul de pomi. Deci meri sînt $\frac{4}{14}$ din numărul de pomi, iar cași $\frac{3}{14}$ din numărul de pomi. Deci $\frac{1}{14}$ din numărul de pomi reprezintă diferența de 337. Așadar sînt $337 \cdot 14 = 4718$ pomi fructiferi.

V.192. a) Cazul $0 < x < 1$: avem $x = \frac{a}{b}$ unde $a < b$. $x^2 = \frac{a^2}{b^2}$. Calculăm $x - x^2 = \frac{a}{b} - \frac{a^2}{b^2} = \frac{ab - a^2}{b^2} = \frac{a(b-a)}{b^2}$.

Deoarece $b > a$, $b - a > 0$ deci $x - x^2 > 0$ și deci $x > x^2$. Cazul $x > 1$: avem $x = \frac{a}{b}$ unde $a > b$. Calculăm $x - x^2 = \frac{a(b-a)}{b^2}$. Deoarece $b < a$, $b - a < 0$, deci $x - x^2 < 0$ și deci $x < x^2$.

b) Cazul $0 < x < 1$, $x = \frac{a}{b}$, $\frac{1}{x} = \frac{b}{a}$, $a < b$. Calculăm $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2 - b^2}{ab}$.

Deoarece $a < b$, $a^2 < b^2$, $a^2 - b^2 < 0$. Rezultă că $x - \frac{1}{x} < 0$, $x < \frac{1}{x}$. Cazul $x > 1$, $a > b$. Calculăm $x - \frac{1}{x} = \frac{a^2 - b^2}{ab}$.

Rezultă că $x - \frac{1}{x} > 0$ și deci $x > \frac{1}{x}$.

(Se consideră $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$).

V.193. Notăm numărul cerut cu $\frac{a}{b}$. Citurile respective sînt $\frac{10}{9} \cdot \frac{a}{b}$ și

$\frac{8}{7} \cdot \frac{a}{b}$. Pentru a fi numere naturale consecutive trebuie să avem succesiv:

$$\frac{8}{7} \cdot \frac{a}{b} - \frac{10}{9} \cdot \frac{a}{b} = 1; \quad \frac{8}{7} \cdot \frac{b}{a} - \frac{10}{9} \cdot \frac{b}{a} = 1; \quad \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{8}{7} - \frac{10}{9} \right) = 1;$$

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{72 - 70}{63} = 1; \quad \frac{b}{a} \cdot \frac{2}{63} = 1; \quad \frac{b}{a} = \frac{63}{2}; \quad \frac{a}{b} = \frac{2}{63}.$$

V.194. Suma celor 50 de numere este $38 \cdot 50 = 1900$. Se „înlătură” din sumă $45 + 55 = 100$. Rămîn 48 de numere a căror sumă este $1900 - 100 = 1800$. Deci media aritmetică a celor 48 de numere rămase este $1800 : 48 = 37,5$.

V.195. a) Cel mai mare divizor comun al numerelor 60 și 88 este 4.

Distanța între doi stîlpi consecutivi este un divizor natural al lui 4 și deci se pot fixa stîlpii din metru în metru, din 2 în 2 metri sau din 4 în 4 metri. Sînt necesari pentru fiecare situație: $296 : 1 = 296$ (stîlpi), $296 : 2 = 148$ (stîlpi), respectiv $296 : 4 = 74$ (stîlpi).

b) Sînt necesari minim $296 \text{ m} \cdot 6 = 1776 \text{ m}$ sîrmă care costă 1 332 lei.

V.196. Metoda I

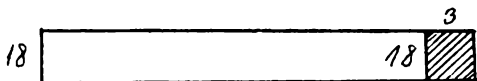


Fig. V.196.

Dacă se mărește lungimea lui D cu 3 cm se obține un dreptunghi cu dimensiunile de 18 cm și 3 cm, deci cu aria de 54 cm^2 . Rezultă că aria dreptunghiului D este $1260 \text{ cm}^2 - 54 \text{ cm}^2 = 1206 \text{ cm}^2$. Lungimea lui D este de $1206 \text{ cm}^2 : 18 \text{ cm} = 67 \text{ cm}$.

Metoda a II-a

Notăm cu x măsura lungimii lui D . Lungimea noului dreptunghi este $x + 3$. Avem ecuația: $18 \cdot (x + 3) = 1260$. Rezolvînd succesiv avem: $x + 3 = 1260 : 18$; $x + 3 = 70$; $x = 70 - 3$; $x = 67$.

V.197. Perimetrul dreptunghiului care se poate forma este de $1 \text{ dm} \cdot 4 + 2 \text{ dm} \cdot 5 + 4 \text{ dm} \cdot 7 = 42 \text{ dm}$. Semiperimetrul este de 21 dm . Notăm cu x și y măsura lățimii, respectiv a lungimii dreptunghiului. Trebuie să avem $x + y = 21$, x și y fiind numere naturale, multipli ai numerelor $1, 2, 4$ sau ai combinațiilor de aceste numere. În cazul nostru răspunsul este: se poate forma un dreptunghi. Exemplu: $1 \text{ dm} \cdot 1$ pe o lățime, $4 \text{ dm} \cdot 5$ pe o lungime, $1 \text{ dm} \cdot 1$ pe lățimea rămasă, restul pe lungimea rămasă. Alt exemplu: $2 \text{ dm} \cdot 1$ pe o lățime, $4 \text{ dm} \cdot 4$ și $1 \text{ dm} \cdot 3$ pe o lungime, $2 \text{ dm} \cdot 1$ pe lățimea rămasă și restul pe lungimea rămasă. Mai găsiți și alte exemple.

V.198. Semiperimetrul este 60 hm . Notăm cu x lățimea. Lungimea este $5x$. Avem ecuația $x + 5x = 60$. Rezolvăm ecuația: $6x = 60$. $x = 60 : 6$; $x = 10$. Rezultă că lățimea are 10 hm iar lungimea 50 hm . Atunci aria este $10 \text{ hm} \cdot 50 \text{ hm} = 500 \text{ hm}^2$. Găsiți dimensiunile dreptunghiului folosind și metoda grafică.

CLASA A VI-A

REZOLVĂRILE ȘI REZULTATELE PROBLEMELOR PENTRU CLASA A VI-A

$$\begin{aligned} \text{VI.A.1. } A &= 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n \cdot 3^2 + 3^n - 2^n \cdot 2^2 - 2^n = \\ &= 3^n \cdot (9 + 1) - 2^n \cdot (4 + 1) = 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = \\ &= 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}). \end{aligned}$$

VI.A.2. Fie p un divizor comun al numerelor a și $a + b$, $p \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că p este divizor și pentru $(a + b) - a = b$, deci p este divizor și pentru a și pentru b . Cum fracția a/b este ireductibilă din ipoteză, avem $p = 1$.

În concluzie, fracția $\frac{a}{a+b}$ se poate simplifica doar prin 1, deci este ireductibilă.

VI.A.3. Notăm $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 15 + 20$ și avem :

$$\begin{aligned} \frac{182}{A} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 7 \dots 13 \cdot 14 \cdot 15 + 20}{2 \cdot 7 \cdot 13} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 6 \cdot 7 \cdot 8 \dots 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 7 \cdot 13} + \frac{20}{2 \cdot 7 \cdot 13} = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15 + \frac{20}{182}. \end{aligned}$$

Deci citul este $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15$ și restul este 20. (S-a folosit teorema împărțirii cu rest sub forma : $\frac{D}{1} = C + \frac{R}{1}$).

VI.A.4. Soluția I:

Fie N un număr care împărțit la 10 dă restul 3; vom arăta că împărțit la 15 nu poate da restul 4.

Avem $N = 10k + 3$, de unde ultima cifră a lui N este 3. Presupunând că N , împărțit la 15, dă restul 4, avem $N = 15t + 4$ sau $N - 4 = 15t$, adică $N - 4$ divizibil cu 5. Cum ultima cifră a lui N era 3, ultima cifră a lui $N - 4$ va fi 9, deci $N - 4$ nu se divide cu 5, deci N împărțit la 15 nu poate da restul 4.

Soluția a II-a

Presupunem că există N care împărțit la 10 să dea restul 3 și împărțit la 15 să dea restul 4.

$$\text{Avem : } N = 10k + 3 \text{ sau } N - 3 = 10k$$

$$N = 15t + 4 \text{ sau } N - 4 = 15t$$

Deducem că $N - 3$ și $N - 4$ sînt divizibile cu 5, deci trebuie ca și diferența lor să se dividă cu 5. Dar $(N - 3) - (N - 4) = 1$, care nu se divide cu 5, deci presupunerea făcută este falsă.

Soluția a III-a

Dacă numărul N împărțit la 10 dă rest 3 $\Rightarrow 10 \mid (N - 3)$.

Dacă numărul N împărțit la 15 dă rest 4 $\Rightarrow 15 \mid (N - 4)$.

Din cele două afirmații de mai sus rezultă $5 \mid (N - 3)$ și $5 \mid (N - 4)$. Dar $N - 3$ și $N - 4$ sînt numere consecutive și ar trebui să fie, ambele, multipli de 5, ceea ce este fals.

VI.A.5.

Din $\frac{a}{b} = 0,6$, rezultă $\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \cdot 0,6$, de unde :

$$\frac{2a + 3b}{3b} = \frac{2a}{3b} + \frac{3b}{3b} = \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5},$$

O altă metodă constă în a exprima pe a în funcție de b din relația $\frac{a}{b} = 0,6$. Rezultă $a = 0,6 \cdot b$ și deci :

$$\frac{2a + 3b}{3b} = \frac{2 \cdot 0,6 \cdot b + 3b}{3b} = \frac{1,2b + 3b}{3b} = \frac{4,2b}{3b} = \frac{4,2}{3} = \frac{42}{30} = \frac{7}{5}.$$

VI.A.6. Avem întâi : $n = 1986(1986 - 1) - 1985 =$

$$= 1986 \cdot 1985 - 1985 = 1985(1986 - 1) = 1985^2.$$

Acum, din proporție, deducem :

$$\frac{x}{1985} = \frac{5 \cdot 397}{n}, \text{ de unde } x = \frac{1985 \cdot 5 \cdot 397}{n} = \frac{1985 \cdot 1985}{1985^2} = 1.$$

VI.A.7. Numărul $4a6$ este divizibil cu 9 dacă suma $4 + a + 6$ se divide cu 9, adică $10 + a$ este divizibil cu 9. Cum a este cifră, deducem $a = 8$ și deci :

$$\frac{x}{2} = \frac{486}{5}, \text{ de unde } x = \frac{486 \cdot 2}{5}, \text{ adică } x = \frac{972}{5}.$$

VI.A.8. În primul rînd se obține $b = 5$. Apoi, folosind criteriul de divizibilitate cu 9, obținem că suma cifrelor numărului $4a6$ este divi-

zibilă cu 9, deci $a + 10$ este multiplu de 9, cu $a \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Rezultă ușor $a = 8$. Proporția devine :

$$\frac{x}{2} = \frac{486}{5}, \text{ de unde } x = \frac{2 \cdot 486}{5} = \frac{972}{5} = 194 \frac{2}{5}, \text{ sau } x = 194,4.$$

VI.A.9. a)

$$F = \frac{\overline{123\ 123 \dots 123}}{\overline{321\ 321 \dots 321}} = \frac{123 \cdot \overline{100\ 100 \dots 1\ 001}}{321 \cdot \overline{100\ 100 \dots 1\ 001}} = \frac{123}{321} = \frac{41}{107},$$

unde numărul prin care s-a simplificat are n cifre de 1 distanțate prin câte două zerouri. Corectitudinea rezultatului înmulțirilor se poate verifica pe câteva exemple particulare.

b) Dacă :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ atunci } \frac{3a - b}{b - 2a} = \frac{3c - d}{d - 2c},$$

deoarece ultima proporție este echivalentă cu :

$$\frac{3 \cdot \frac{a}{b} - 1}{1 - 2 \cdot \frac{a}{b}} = \frac{3 \cdot \frac{c}{d} - 1}{1 - 2 \cdot \frac{c}{d}}, \text{ evident adevărată pentru } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Pentru $c = 41$ și $d = 107$, obținem :

$$\frac{3a - b}{b - 2a} = \frac{3 \cdot 41 - 107}{107 - 2 \cdot 41} = \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

VI.A.10. Din $\frac{3}{a} = \frac{4}{b} = \frac{12}{c} = 13$ se deduce $\frac{3}{a} = \frac{13}{1}$, deci $a = \frac{3}{13}$ și, analog,

$$b = \frac{4}{13}, c = \frac{12}{13}.$$

$$1) (3 - a)a + (4 - b)b + (12 - c)c = \left(3 - \frac{3}{13}\right) \frac{3}{13} + \left(4 - \frac{4}{13}\right) \frac{4}{13} + \left(12 - \frac{12}{13}\right) \frac{12}{13} = 12.$$

$$2) (3 + a)a + (4 + b)b + (12 + c)c = \left(3 + \frac{3}{13}\right) \frac{3}{13} + \left(4 + \frac{4}{13}\right) \frac{4}{13} + \left(12 + \frac{12}{13}\right) \frac{12}{13} = 14.$$

$$(3) a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3^2}{13^2} + \frac{4^2}{13^2} + \frac{12^2}{13^2} = 1.$$

VI.A.11. Avem : $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{3+4+5} = \frac{24+y}{12}$

Din $\frac{y}{4} = \frac{24+y}{12}$ deducem $y = 12$

Din $\frac{x}{3} = \frac{12}{4}$ și $\frac{12}{4} = \frac{z}{5}$ aflăm $x = 9$ și $z = 15$.

Altfel : $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{x+z}{3+5} = \frac{24}{8} = 3 \Rightarrow \frac{x}{3} = 3 \Rightarrow x = 9$;

$\frac{y}{4} = 3 \Rightarrow y = 12$; $\frac{z}{5} = 3 \Rightarrow z = 15$.

VI.A.12. Din condiția a) avem $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{t}{7}$. Amplificînd prima frac-

ție cu 7, a doua cu 5, a treia cu 3 și a patra cu 2, obținem : $\frac{7x}{14} = \frac{5y}{15} =$
 $= \frac{3z}{15} = \frac{2t}{14} = \frac{7x+5y+3z+2t}{14+15+15+14} = \frac{116}{58} = 2$. De aici deducem : $x = 4$,

$y = 6$, $z = 10$, $t = 14$.

VI.A.13. Din $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6}$ deducem $\frac{c^3}{b^3} = \frac{a}{3}$; $\frac{b}{4} \cdot \frac{c}{6} = 8$, de unde :

$a^3 = 3^3 \cdot 8 = 3^3 \cdot 2^3 = (3 \cdot 2)^3 = 6^3$, deci $a = 6$

$b^3 = 4^3 \cdot 8 = 4^3 \cdot 2^3 = (4 \cdot 2)^3 = 8^3$, deci $b = 8$

$c^3 = 6^3 \cdot 8 = 6^3 \cdot 2^3 = (6 \cdot 2)^3 = 12^3$, deci $c = 12$.

VI.A.14. Avem $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}$ (1) ; $xyz = 192$ (2). Deci, $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$ și $\frac{x}{3} = \frac{z}{4}$

deducem : $y = \frac{2x}{3}$ și $z = \frac{4x}{3}$ (3).

Înlocuim în (2) : $\frac{8 \cdot x^3}{9} = 192$ sau $x^3 = \frac{9 \cdot 192}{8}$ sau, încă, $x^3 =$
 $= \frac{3^3 \cdot 2^6}{2^3}$, de unde $x^3 = 6^3$, sau $x = 6$; din (3) avem $y = 4$ și $z = 8$.

Altfel :

Dacă notăm $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4} = k$ obținem $x = 3k$; $y = 2k$; $z =$
 $= 4k \Rightarrow xyz = 3 \cdot 2 \cdot 4k^3 = 24k^3$; dar, din ipoteză, $xyz = 192$, deci $24k^3 =$
 $= 192$ sau $k^3 = 8 = 2^3$, deci $k = 2$. Soluțiile vor fi : $x = 3 \cdot 2 = 6$;
 $y = 4$; $z = 8$.

VI.A.15. a) Avem, exprimind toate numerele în funcție de a : $b = 2a$, $2c = 3b = 3 \cdot 2a = 6a$, de unde $c = 3a$ și $3d = 4c = 4 \cdot 3a = 12a$, de unde $d = 4a$.

Atunci $b^2 = (2a)^2 = 4a^2$ și $ad = a \cdot 4a = 4a^2$, deci $b^2 = ad$.

b) Acum, din $a + b + c + d = 48$, deducem $a + 2a + 3a + 4a = 48$, $10a = 48$, de unde $a = 48/10 = 4,8$ și $b = 2a = 2 \cdot 4,8 = 9,6$; $c = 3a = 14,4$; $d = 19,2$.

Altfel :

a) Problema poate fi rezolvată și observînd că egalitățile din enunț se pot scrie sub forma: $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$; $\frac{b}{c} = \frac{2}{3}$; $\frac{c}{d} = \frac{3}{4}$; din ultimele două,

prin înmulțire, se obține: $\frac{b}{d} = \frac{1}{2}$ și, cu prima, rezultă $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$, de unde $b^2 = a \cdot d$.

b) Egalitățile pot fi puse și altfel, sub formă de proporții, anume: $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$; $\frac{b}{2} = \frac{c}{3}$; $\frac{c}{3} = \frac{d}{4}$, de unde $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{d}{4} = \frac{a+b+c+d}{1+2+3+4} = \frac{48}{10}$. Rezultă $a = \frac{48 \cdot 1}{10} = 4,8$; $b = \frac{48 \cdot 2}{10} = 9,6$; $c = \frac{48 \cdot 3}{10} = 14,4$; $d = \frac{48 \cdot 4}{10} = 19,2$.

VI.A.16. Din enunț rezultă că, pentru $\hat{\sphericalangle} B \equiv \hat{\sphericalangle} C$, avem $\frac{m(\hat{A})}{4} = \frac{m(\hat{B})}{4}$, sau $\frac{m(\hat{A})}{4} = \frac{m(\hat{B})}{1}$. În primul caz, $\frac{m(\hat{A})}{1} = \frac{m(\hat{B})}{4} = \frac{m(\hat{C})}{4} = \frac{m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C})}{9} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$, de unde $m(\hat{A}) = 20^\circ$; $m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 80^\circ$.

În al doilea caz, $\frac{m(\hat{A})}{4} = \frac{m(\hat{B})}{1} = \frac{m(\hat{C})}{1} = \frac{m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C})}{6} = 30^\circ$, de unde $m(\hat{A}) = 120^\circ$; $m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 30^\circ$.

VI.A.17. Fie n numărul bancnotelor de 10 lei, m al celor de 25 lei. Din problemă $\frac{n}{m} = \frac{3}{4}$ sau, încă, $\frac{n}{3} = \frac{m}{4}$. Rezultă $\frac{10n}{30} = \frac{25m}{100} = \frac{10n + 25m}{130}$.

Cum suma totală, $10n + 25m$, este cuprinsă între 500 și 600 lei, avem $\frac{500}{130} < \frac{10n}{30} < \frac{130}{600}$ și, deci, $11 \frac{7}{13} < n < 13 \frac{11}{13}$, $n \in \mathbf{N}$, adică $n \in \{12; 13\}$.

Dacă $n = 13$, din proporția inițială verificată de m și n , rezultă $m = 4 \cdot \frac{13}{3} \notin \mathbf{N}$, deci rămîne doar $n = 12$, care dă $m = 16$. Suma va fi, deci, de 5 220 lei.

VI.A.18. Fie x, y, z , respectiv valorile premiilor I, II, III. Avem $\frac{x}{8} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5}$ și $\frac{1}{5}x - \frac{1}{7}y = 48$. Înmulțind ultima relație în ambii membri cu 35, obținem $7x - 5y = 1\ 680$. Din primele două rapoarte ale șirului din ipoteză avem $\frac{x}{8} = \frac{y}{7}$, de unde $\frac{7x}{7 \cdot 8} = \frac{5y}{5 \cdot 7}$, adică $\frac{7x}{56} = \frac{5y}{35} = \frac{7x - 5y}{56 - 35} = \frac{1\ 680}{21}$. Obținem $7x = \frac{56 \cdot 1\ 680}{21} = 4\ 480$ și $x = \frac{4\ 480}{7} = 640$; $5y = \frac{35 \cdot 1\ 680}{21} = 2\ 800$ și $y = \frac{2\ 800}{5} = 560$. Folosind una din porțiunile de la început, avem: $\frac{x}{8} = \frac{z}{5}$, $\frac{640}{8} = \frac{z}{5}$, $z = \frac{5 \cdot 640}{8} = 400$.

VI.A.19. Din prima relație avem $A \cdot 5 = 7 \cdot B$, de unde $\frac{A}{7} = \frac{B}{5}$ și rezultă $A \cdot \frac{1}{7} = B \cdot \frac{1}{5}$.

Din a doua relație, $C = \frac{60}{100} \cdot B$, sau, încă, $C = \frac{3}{5} \cdot B$ și, înmulțind ambii membri ai egalității cu $\frac{1}{3}$, obținem $C \cdot \frac{1}{3} = B \cdot \frac{1}{5}$.

Din a treia relație obținem $\frac{C}{D} = 1,5$, sau $\frac{C}{D} = \frac{3}{2}$, de unde, schimbând mezii între ei, se obține $\frac{C}{3} = \frac{D}{2}$ sau, încă, $C \cdot \frac{1}{3} = D \cdot \frac{1}{2}$.

Avem, deci: $A \cdot \frac{1}{7} = B \cdot \frac{1}{5} = C \cdot \frac{1}{3} = D \cdot \frac{1}{2}$, adică numerele A, B, C, D sînt invers proporționale cu $\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$. Pentru a demonstra afirmația problemei rămîne să observăm că $\frac{1}{7} = 0,142\ 857$, $\frac{1}{5} = 0,2$ și $\frac{1}{2} = 0,5$.

VI.A.20. Fie x suma primită zilnic de al doilea muncitor. Suma totală primită de el este $12 \cdot 100\%$ din x , adică $1\ 200\%$ din x . Al doilea muncitor primește zilnic 125% din x , deci suma totală primită de el va fi $15 \cdot 125\%$ din x , adică $1\ 875\%$ din x . Cei 3 444 lei plătiți ambilor muncitori pe întreaga perioadă reprezintă, deci, $1\ 200\%$ din $x + 1\ 875\%$ din x , adică $3\ 075\%$ din x . Atunci $x = 3\ 444 : \frac{3\ 075}{100} = 3\ 444 \cdot \frac{100}{3\ 075} = 112$. În concluzie, suma primită de primul muncitor este $1\ 875\%$ din 112, adică 2 100 lei, iar suma primită de al doilea muncitor este $1\ 200\%$ din 112, adică 1 344 lei.

VI.A.21. După prima sortare a rămas 90% din cantitatea inițială, adică $\frac{90}{100} \cdot 50 = 45$ (t). După a doua sortare au mai rămas 43,2 t, deci pier-

derea la a doua sortare a fost de $45 - 43,2 = 1,8$ (t). Din $\frac{1,8}{50} = \frac{x}{100}$, rezultă $x = \frac{1,8 \cdot 100}{50} = 3,6$, deci raportul procentual căutat este 3,6%.

VI.A.22. $3^{34} = 3^{2 \cdot 17} = 9^{17}$; $2^{51} = 2^{3 \cdot 17} = 8^{17}$. Cum $8^{17} < 9^{17}$, deducem că $2^{51} < 3^{34}$.

VI.A.23. $a = 2^{52} = 2 \cdot 2^{51} = 2 \cdot 2^{3 \cdot 17} = 2(2^3)^{17} = 2 \cdot 8^{17}$
 $b = 3^{35} - 9^{17} = 3 \cdot 3^{34} - 9^{17} = 3 \cdot 3^{2 \cdot 17} - 9^{17} =$
 $= 3 \cdot (3^2)^{17} - 9^{17} = 3 \cdot 9^{17} - 9^{17} = 9^{17}(3 - 1) = 2 \cdot 9^{17}$.

Avem de comparat $a = 2 \cdot 8^{17}$ și $b = 2 \cdot 9^{17}$. Cum $8 < 9^{17}$, rezultă că $8^{17} < 9^{17}$ și, încă, $2 \cdot 8^{17} < 2 \cdot 9^{17}$, adică $a < b$.

VI.A.24. Avem: $b = (2^{100} - 2^{99} + 3^{68} : 3^{67} - 2^{99})^{46} =$
 $= (2^{100} - 2 \cdot 2^{99} + 3)^{46} = 3^{46}$. Deci $a = 2^{69}$ și $b = 3^{46}$. În continuare, vezi ex. precedent.

VI.A.25. Avem $A = 16 \cdot 11^4 - (2 \cdot 11)^4 + 1 = 16 \cdot 11^4 - 2^4 \cdot 11^4 + 1 =$
 $= 16 \cdot 11^4 - 16 \cdot 11^4 + 1 = 1$.

$B = 27 \cdot 11^3 - (3 \cdot 11)^3 + 2 = 27 \cdot 11^3 - 3^3 \cdot 11^3 + 2 =$
 $= 27 \cdot 11^3 - 27 \cdot 11^3 + 2 = 2$.

Atunci $C_0 = (A - B)^0 = (1 - 2)^0 = 1$; $C_1 = (A - B)^1 = (-1)^1 = -1$ și, în general, $C_k = (A - B)^k = (1 - 2)^k = (-1)^k$. Calculînd sumele $S_k = C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_k$ pentru primele valori ale lui k obținem: $S_0 = 1$, $S_1 = 0$, $S_2 = 1$, $S_3 = 0$ etc., și sîntem conduși la concluzia că $S_k = 1$ pentru k par și $S_k = 0$ pentru k impar.

VI.A.26. $[0, (3) + 2, (45) + 0,1(26)] : \left(\frac{1}{3} + 2 \frac{5}{11} + \frac{25}{198} \right) - 1986 =$
 $= \left(\frac{3}{9} + \frac{245}{99} + \frac{126}{990} \right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{27}{11} + \frac{25}{198} \right) -$
 $- 1986 = \left(\frac{3}{9} + \frac{243}{99} + \frac{125}{990} \right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{27}{11} + \frac{25}{198} \right) - 1986 =$
 $= \frac{330 + 2430 + 125}{990} : \frac{66 + 486 + 25}{198} - 1986 = \frac{2885}{990} : \frac{577}{198} - 1986 =$
 $= \frac{2885}{990} \cdot \frac{198}{577} - 1986 = 1 - 1986 = -1985$.

VI.A.27. Observăm că în suma noastră sînt 10 termeni. Grupînd doi cîte doi și dînd factor comun, obținem:

$a = 13^8(13 - 14) + 14 \cdot 13^7 - 14 \cdot 13^6 + 14 \cdot 13^5 - 14 \cdot 13^4 + 14 \cdot 13^3 -$
 $- 14 \cdot 13^2 + 14 \cdot 13 - 1 = -13^8 + 14 \cdot 13^7 - 14 \cdot 13^6 + \dots + 14 \cdot 13 - 1$.

Procedind analog, obținem :

$$\begin{aligned} a &= 13^7(-13 + 14) - 14 \cdot 13^6 + 14 \cdot 13^5 + \dots + 14 \cdot 13 - 1 = \\ &= 13^7 - 14 \cdot 13^6 + \dots + 14 \cdot 13 - 1. \end{aligned}$$

Continuăm procedeul și obținem, în final, $a = 12$.

Altfel :

Numărul a se mai poate scrie :

$$\begin{aligned} a &= 13^9 - (1 + 13) \cdot 13^8 + (1 + 13) \cdot 13^7 - (1 + 13) \cdot 13^6 + \dots + \\ &+ (1 + 13) 13 - 1 = 13^9 - 13^8 - 13^9 + 13^7 + 13^8 + 13^6 + 13^7 + \dots + \\ &+ 13 + 13^2 - 1. \end{aligned}$$

$$\text{Deci : } a = 13 - 1 = 12.$$

$$\begin{aligned} \text{VI.A.28. Pentru } a = 9, b = -3, c = -5 \text{ avem : } x &= 9 - [(-3) + (-5)] = \\ &= 9 - (8) = 9 + 8 = 17. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pentru } a = -1, b = -8, c = 16 \text{ avem : } x &= (-1) - [(-8) + 16] = \\ &= (-1) - 8 = -9. \end{aligned}$$

$$\text{VI.A.29. } A = [(-1)^{1985} \cdot (-1)^{1986}]^3 \cdot a = (-1)^3 \cdot a = -a.$$

Pentru calcularea lui B distingem două cazuri :

I. $n = 2k$ (număr par)

$$B = 1 - 1 + 1 + 1 + 1 \cdot (-1) = 1.$$

II. $n = 2k + 1$ (număr impar)

$$B = -1 + 1 - 1 + 1 + (-1) \cdot 1 = -1.$$

În cazul I, $B = 1$, opusul său este -1 , deci $A = -a = -1$ implică $a = 1$.

În cazul II, $B = -1$, opusul său este 1 , deci $A = -a = 1$, implică $a = -1$.

VI.A.30. Demonstrăm implicația „ \Rightarrow ”. Distingem opt cazuri :

1. m par ; n par ; p par ;
2. m par ; n par ; p impar ;
3. m par ; n impar ; p par ;
4. m impar ; n par ; p par ;
5. m impar ; n impar ; p par ;
6. m impar ; n par ; p impar ;
7. m par ; n impar ; p impar ;
8. m impar ; n impar ; p impar.

Vom nota S_i suma în cazul i ; $i = 1, 2, \dots, 8$.

$$S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \in \mathbf{Z}, \text{ iar } n + p \text{ număr par.}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \notin \mathbf{Z}.$$

$$S_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \notin \mathbf{Z}.$$

$$S_4 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0 \in \mathbf{Z}, \text{ iar } n + p \text{ număr par.}$$

$$S_5 = \frac{-1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{-2}{3} \notin \mathbf{Z}.$$

$$S_6 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{-1}{3} \notin \mathbf{Z}.$$

$$S_7 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0 \in \mathbf{Z}, \text{ iar } n + p \text{ număr par.}$$

$$S_8 = \frac{-1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = -1 \in \mathbf{Z}, \text{ iar } n + p \text{ număr par.}$$

Demonstrăm implicația " \Leftarrow ".

Din $n + p$ număr par rezultă că n și p sînt ambele pare sau ambele impare, iar m poate fi par sau impar. Sînt situațiile corespunzătoare cazurilor 1, 4, 7, 8.

VI.A.31. Determinăm mulțimea B . Relația $|x| < 2$ este echivalentă cu $-2 < x < 2$, deci $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Avem condițiile :

$$(1) \quad x + y > 0.$$

$$(2) \quad xy < 0.$$

Din (2) deducem că dacă $x > 0$, atunci $y < 0$ și invers.

Deci : $x = -2$ și $y \in \{0, 1, 2\}$.

Sînt posibile perechile $(-2, 0)$, $(-2, 1)$, $(-2, 2)$, dar niciuna nu verifică relația (1).

$$x = -1, y \in \{0, 1, 2\}.$$

Sînt posibile perechile $(-1, 0)$, $(-1, 1)$, $(-1, 2)$, dar numai $(-1, 2)$ verifică relația (1).

$x = 0, y \in B$, dar numai perechile $(0, 1)$ și $(0, 2)$ verifică și condiția (1).

$x = 4, y \in \{-2, -1, 0\}$ și toate perechile $(4, -2)$, $(4, -1)$, $(4, 0)$ verifică condiția (1).

Avem, deci, următoarele perechi care verifică condițiile (1) și (2) : $(-1, 2)$; $(0, 1)$; $(0, 2)$; $(4, -2)$; $(4, -1)$; $(4, 0)$.

VI.A.32. Din egalitatea $27b = 6a$ deducem $b = \frac{2a}{9}$.

Din egalitatea $54c = 6a$ deducem $c = \frac{a}{9}$.

Din egalitatea $36d = 6a$ deducem $d = \frac{a}{6}$.

În egalitatea $6a = x(a + b + c + d)$ înlocuim b, c, d și avem : $6a = x \left(a + \frac{2a}{9} + \frac{a}{9} + \frac{a}{6} \right)$, care, după efectuarea parantezei, conduce la :
 $6a = \frac{3a}{2}x$. Pentru că $a \neq 0$ avem : $x = 6a \cdot \frac{2}{3a}$, adică $x = 4$.

VI.A.33. Știm că 5^n are ultima cifră 5, iar 1981^n are ultima cifră 1.

Cum 1983 este număr impar, $(-5)^{1983}$ va fi un număr negativ terminat în 5, iar 1981^{1983} va fi un număr pozitiv terminat în 1. Din regula de adunare a numerelor întregi avem ultima cifră a lui N_1 egală cu 6. Pentru N_2 ambele numere sînt pozitive, terminate în 5, respectiv 1, deci N_2 se termină în 6.

VI.A.34. Fie a și b cele două numere. Din enunț avem :

$$a + b = 126$$

$$a \cdot b = 3393$$

Trebuie să calculăm suma $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Avem :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab} = \frac{126}{3393} = \frac{42}{1131}.$$

VI.A.35. Din operațiile cu puteri avem :

$$\frac{2^k}{3^k} \cdot \frac{3^{k+1}(1+3^k+1)}{2^{k+1}(1+3^k+1)} = \frac{3}{2}.$$

VI.A.36. a) Din $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ rezultă $\frac{a}{2 \cdot 4} = \frac{b}{3 \cdot 4}$, adică $\frac{a}{8} = \frac{b}{12}$, deci $k = 12$.

Din $\frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ rezultă $\frac{b}{4 \cdot 3} = \frac{c}{5 \cdot 3}$, adică $\frac{b}{12} = \frac{c}{15}$, deci $p = 15$.

b) 1. Aplicînd proprietatea șirului de rapoarte egale cu :

$$\frac{a}{8} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{8+12+15} = \frac{70}{35} = 2,$$

obținem $a = 16, b = 24, c = 30$.

2. Cum $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$, rezultă $\frac{a \cdot b}{2 \cdot 3} = \frac{b \cdot b}{3 \cdot 3}$, deci $\frac{a \cdot b}{6} = \frac{b^2}{9}$, $ab = \frac{6b^2}{9} = \frac{2b^2}{3}$ și, analog, din $\frac{b}{4} = \frac{c}{5}$, se obține $\frac{bc}{20} = \frac{b^2}{16}$, $bc = \frac{20b^2}{16} = \frac{5b^2}{4}$.

Avem, deci, $69 = ab + bc = \frac{2b^2}{3} + \frac{5b^2}{4} = \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{4}\right)b^2 = \frac{23}{12}b^2$,
de unde $b^2 = 69 \cdot \frac{12}{23} = 36$. Pentru $b = 6$, se obțin $a = 4$, $c = \frac{15}{5}$. Pentru
 $b = -6$ se obțin $a = -4$, $c = \frac{15}{2}$.

3) Avem $\frac{a}{8} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$, de unde $\frac{a^2}{64} = \frac{b^2}{144} = \frac{c^2}{225} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{64 + 144 + 225} = \frac{433}{433} = 1$, deci $a = 64$, $b = 144$, $c = 225$ și obținem $a = 8$, $b = 12$,
 $c = 15$ sau $a = 8$, $b = -12$, $c = -15$.

VI.A.37. Ecuația se scrie : $10x + y + 10y + z + 10x + z = 246$, cu $x, y, z \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $x, y \neq 0$, sau încă, $2 \cdot xz + 11y = 246$, de unde se observă că y trebuie să fie o cifră pară, nenulă, deci $y \in \{2, 4, 6, 8\}$.

Pentru $y = 2$, rezultă $\overline{xz} = 142$, imposibil.

Pentru $y = 4$, rezultă $\overline{xz} = 101$, de asemenea imposibil.

Pentru $y = 6$, rezultă $\overline{xz} = 90$, deci $x = 9, z = 0$.

Pentru $y = 8$, rezultă $\overline{xz} = 79$, deci $x = 7, z = 9$.

În concluzie, soluțiile problemei sînt :

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 6 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 8 \\ z = 9 \end{cases}$$

VI.A.38. Fie x suprafața însămîntată cu ovăz. Din problemă, rezultă că suprafața însămîntată cu secară este $4x$, cea cu orz, $2x$; iar cea cu grîu, $3 \cdot (2x) = 6x$. Deci, suprafața totală este : $x + 4x + 2x + 6x = 13x$.

Din enunț, această suprafață totală numără 1 300 ha. Deci : $13x = 1\,300$, de unde $x = 1\,300 : 13 = 100$ (ha).

Obținem că suprafața însămîntată cu grîu este $6x = 600$ (ha), cea cu orz este $2x = 200$ (ha), cea cu ovăz $x = 100$ (ha) și cea cu secară $4x = 400$ (ha).

VI.A.39. Descompunem : $800 = 2^5 \cdot 5^2$. Această descompunere o putem scrie :

1) $800 = 5^2 \cdot 2^5$, de unde $m^2 = 5^2$ și $n + 1 = 2^5$, deci $m = 5$; $n = 31$.

2) $800 = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 10^2 \cdot 2^3$, de unde $m = 10$; $n = 7$.

$$3) 800 = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 2 = 2^2 \cdot 200, \text{ de unde } m = 20; n = 1.$$

$$4) 800 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 200, \text{ de unde } m = 2; n = 199.$$

$$5) 800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 2 = 4^2 \cdot 50, \text{ de unde } m = 4; n = 49.$$

$$6) 800 = 1 \cdot 2^5 \cdot 5^2, \text{ de unde } m = 1; n = 799.$$

Acestea sînt toate cazurile în care 800 se scrie ca un pătrat perfect înmulțit cu un număr. Avem, în final, perechile (5,31); (10,7); (20,1); (2,199); (4,49); (1,799).

Altfel :

Considerăm $m^2 \cdot (n+1)$ produsul dintre un număr pătrat perfect și un alt număr :

$$800 = 1 \cdot 800 \Rightarrow m = 1; n = 799.$$

$$800 = 4 \cdot 200 \Rightarrow m = 2; n = 199.$$

$$800 = 16 \cdot 50 \Rightarrow m = 4; n = 49.$$

$$800 = 25 \cdot 32 \Rightarrow m = 5; n = 31.$$

$$800 = 100 \cdot 8 \Rightarrow m = 10; n = 7.$$

$$800 = 400 \cdot 2 \Rightarrow m = 20; n = 1.$$

VI.A.40. Distingem două cazuri : n par și n impar.

a) Dacă n par, ecuația devine : $xy - 2x - y + 1 = 0$, de unde :

$$y = \frac{2x-1}{x-1}, \text{ sau, încă, } y = 2 + \frac{1}{x-1}.$$

Problema devine : Găsiți x întreg astfel încît y să fie întreg, care conduce la $x=0$ și $x=2$, iar $y=1$, respectiv $y=3$. Deci, în acest caz avem soluțiile (0, 1) și (2, 3).

b) Dacă n impar, ecuația devine : $-xy + 2x + y + 1 = 0$, care se rezolvă asemănător și avem soluțiile : (2, 5), (0, -1), (-2, 1), (4, 3).

Altfel :

Ecuția se mai poate scrie :

$$x(1-y)(-1)^{n+1} = [y(-1)^n + x(-1)^{n+2}] - 1.$$

Dar, pentru $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (-1)^n = (-1)^{n+2}$. Atunci ecuația devine :

$$x(1-y)(-1)^{n+1} = (x+y)(-1)^n - 1.$$

$$\text{Pentru } n \text{ par} \Rightarrow x(1-y)(-1) - (x+y) \cdot 1 + 1 = 0; -x + xy - x - y + 1 = 0; -2x + xy = y - 1; x(y-2) = y - 1; x = \frac{y-1}{y-2}.$$

Cum $y-1$ și $y-2$ sînt numere consecutive, rezultă soluțiile : (0; 1) și (2; 3).

Pentru n impar : $x(1-y) \cdot 1 - (x+y)(-1) + 1 = 0$; $x - xy + x + y + 1 = 0$; $2x - xy + y + 1 = 0$; $x(2-y) = -(y+1)$; $x = \frac{y+1}{y-2}$;
 $x = \frac{y-2+3}{y-2} = 1 + \frac{3}{y-2}$. Soluțiile sînt : (4 ; 3), (0 ; -1), (2 ; 5), (-2 ; 1).

VI.A.41. Soluția I

Avem : $3b = 206 - 2a - 4c - 56d$, număr par, deci b este par și cum este prim, rezultă $b = 2$. Înlocuind, obținem : $2a + 4c + 56d = 200$ sau încă $a + 2c + 28d = 100$, de unde $a = 100 - 2c - 28d$ și, cu același raționament ca mai sus, deducem $a = 2$. Înlocuind, obținem : $2c + 28d = 98$, $c + 14d = 49$. Dacă am avea $d > 4$, atunci $49 = b + 14d > 14d > 14 \cdot 4 = 56$, contradicție, deci $d < 3$ și cum d este prim, rezultă $d = 2$ sau $d = 3$.

Dacă $d = 2$, obținem $c = 21$, neprim, contradicție cu ipoteza. Deci rămîne $d = 3$, care dă $c = 7$.

În concluzie, $a = 2$, $b = 2$, $c = 7$ și $d = 3$.

Soluția a II-a

$$3b = 206 - 2a - 4c - 56d \Rightarrow$$

$$3b = 2(103 - a - 28d) \Rightarrow b = 2$$

$$3 = 103 - a - 2c - 28d \Rightarrow a = 2(50 - c - 14d) \Rightarrow a = 2$$

$$1 = 50 - c - 14d \Rightarrow c = 49 - 14d.$$

Cum c și d sînt numere prime $\Rightarrow c = 7$ și $d = 3$.

VI.A.42. a) Aplicînd proprietățile proporțiilor derivate, obținem succesiv :

$$\frac{7a - 2b}{5a + 4b} = \frac{2}{15} ; \frac{2(7a - 2b) + (5a + 4b)}{5a + 4b} = \frac{2 \cdot 2 + 15}{15} ;$$

$$\frac{19a}{5a + 4b} = \frac{19}{15} ; \frac{a}{5a + 4b} = \frac{1}{15} ; \frac{a}{(5a + 4b) - 5a} = \frac{1}{15 - 5 \cdot 1} ;$$

$$\frac{a}{4b} = \frac{1}{10} ; \frac{4a}{4b} = \frac{4}{10} ; \frac{a}{b} = \frac{4}{10} ; \frac{a}{b} = \frac{2}{5} .$$

O a doua metodă ar fi să aducem proporția la o relație mai simplă : $15(7a - 2b) = 2(5a + 4b)$; $105a - 30b = 10a + 8b$. Adunăm în ambii membri ($-10a + 30b$) și obținem : $95a = 38b$, de unde

$$\frac{a}{b} = \frac{38}{95} ; \frac{a}{b} = \frac{2}{5} .$$

b) Aplicând proprietățile proporțiilor, se obține pentru

$$\frac{a}{b} = 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}; \quad \frac{9a - 2b}{5a + 6b} = \frac{9 \cdot 2 - 2 \cdot 5}{5 \cdot 2 + 6 \cdot 5} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

O altă cale ar consta în următorul calcul :

$$\frac{9a - 2b}{5a + 6b} = \frac{\frac{9a - 2b}{b}}{\frac{5a + 6b}{b}} = \frac{9 \cdot \frac{a}{b} - 2}{5 \cdot \frac{a}{b} + 6} = \frac{9 \cdot 0,4 - 2}{5 \cdot 0,4 + 6} = \frac{1}{5}$$

VI.A.43. Pentru valorile lui x pentru care $x - 3 < 0$, adică pentru $x \in (-\infty; 3)$, ecuația devine $-x + 3 = 5$, cu $x = 2$, soluție ce convine cazului analizat.

Pentru $x \in \mathbf{R}$ astfel încât $x - 3 \geq 0$, adică pentru $x \in (3; +\infty)$, ecuația devine: $x - 3 = 5$, cu $x = 8$, soluție ce convine din nou cazului analizat.

Deci ecuația are soluțiile $x = -2$ și $x = 8$.

O altă rezolvare se bazează pe observația că $|y| = 5$ înseamnă $y = 5$ sau $y = -5$, deci $x - 3 = 5$ sau $x - 3 = -5$, cu aceleași soluții ca mai înainte.

VI.A.44.

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{6(x+1)} = 0;$$

$$\frac{1}{x+1} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = 0; \quad \frac{1}{x+1} \cdot \frac{6 - 3 - 2 - 1}{6} = 0; \quad \frac{1}{x+1} \cdot 0 = 0$$

verificată pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

VI.A.45. Din $4a = 20b$ deducem $b = \frac{a}{5}$.

Din $4a = 25c$ deducem $c = \frac{4a}{25}$.

Din $4a = 50d$ deducem $d = \frac{2a}{25}$.

În $4a = x^2(a + b + c + d)$ înlocuim b , c și d . Avem :

$$4a = x \left(a + \frac{a}{5} + \frac{4a}{25} + \frac{2a}{25} \right) \text{ sau } 4a = \frac{36ax^2}{25}, \text{ de unde } x = \frac{5}{3} \text{ sau } x = -\frac{5}{3}, \text{ deoarece } a \neq 0.$$

REZOLVĂRI PROBLEME DE GEOMETRIE CLASA A VI-A

VI.G.1. Ordinea este B—A—D—C :

$$BC = a + b$$

$$CD = a + b - c$$

$$AD = c - a$$

Sau C—D—A—B.

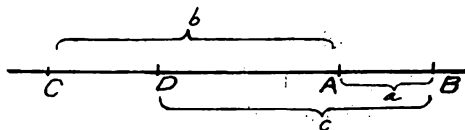
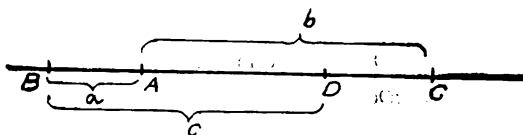


Fig. VI.G.1.

VI.G.2 a) $(AB + BC) + (BC + CD) = AB + 2BC + CD = (AB + BC + CD) + BC.$

b) $(AB + BC) \cdot (BC + CD) = AB \cdot BC + AB \cdot CD + BC^2 + BC \cdot CD$
(membru sting).

$(AB + BC + CD) \cdot BC + AB \cdot CD = AB \cdot BC + BC^2 + BC \cdot CD + AB \cdot CD$ (membru drept).

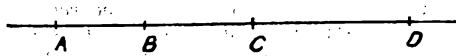


Fig. VI.G.2.

VI.G.3. Notăm unghiurile adiacente de exemplu \widehat{AOB} și \widehat{BOC} , iar biseptoarele lor OX , OY . Desenăm semidreptele perpendiculare OX , OY (deci biseptoarele unghiurilor) și apoi unghiurile adiacente \widehat{AOB} și \widehat{BOC} .

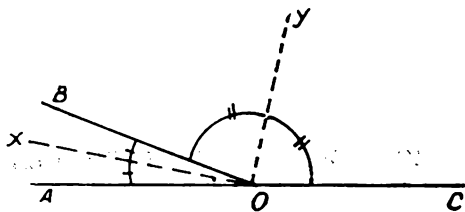


Fig. VI.G.3.

Știm de ipoteză că :

$$(1) m(\widehat{XOB}) + m(\widehat{BOY}) = 90^\circ, \text{ rezultă că :}$$

(2) $m(\widehat{AOX}) + m(\widehat{YOC}) = 90^\circ$ deoarece OX și OY sînt biseptoarele unghiurilor \widehat{AOB} și \widehat{BOC} . Adunînd membru cu membru egalitățile (1) și (2) obținem :

$$(3) m(\widehat{AOX}) + m(\widehat{XOB}) + m(\widehat{BOY}) + m(\widehat{YOC}) = 180^\circ.$$

$$(4) m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 180^\circ.$$

Tot din ipoteză știm că unul din unghiuri este de cinci ori mai mic decît celălalt. Conform acestei ipoteze unghiul cel mai mic este \widehat{AOB} , deci relația din ipoteză va fi :

$$(5) 5 \cdot m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC}).$$

Înlocuind relația (5) în relația (4) obținem :

$$(6) m(\widehat{AOB}) + 5 \cdot m(\widehat{AOB}) = 180^\circ, \text{ adică}$$

$$(7) 6 \cdot m(\widehat{AOB}) = 180^\circ, \text{ deci}$$

$$(8) m(\widehat{AOB}) = 30^\circ \text{ și atunci}$$

$$(9) m(\widehat{BOC}) = 150^\circ.$$

VI.G.4. Față de dreapta AE considerăm semidreptele OB , OC , OD în același semiplan (ipoteză) (fig. VI.G.4.).

Notăm măsura unghiului dat \widehat{AOB} de exemplu x° .

Unghiurile \widehat{AOB} și \widehat{COD} sînt congruente deoarece : laturile lor sînt perpendiculare (ipoteză), semidreptele OB , OC și OD sînt în același semiplan determinat de dreapta OA și punctul B (ipoteză). Urmează că măsura \widehat{COD} este tot x° . Conform altei condiții din ipoteză $m(\widehat{DOE}) = 2x^\circ$.

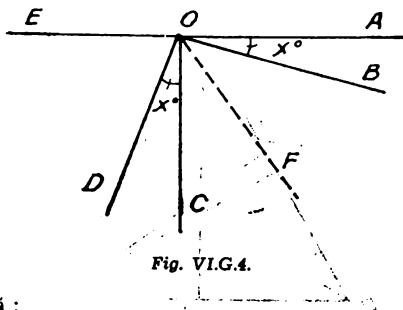


Fig. VI.G.4.

Deducem că :

$m(\widehat{COD}) + m(\widehat{DOE}) = 3x^\circ = 90^\circ$ (ipoteză : $CO \perp OA$). Așadar $x^\circ = 30^\circ$ și $m(\widehat{DOE}) = 60^\circ$. Cum și $OD \perp OB$ (ipoteză) deducem că : $m(\widehat{DOA}) = m(\widehat{DOB}) + m(\widehat{BOA}) = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ deci $m(\widehat{DOF}) = 60^\circ$ și $m(\widehat{EOF}) = 120^\circ$.

VI.G.5. Comparăm elementele triunghiurilor MBC și NCB .

$\triangle MBC \equiv \triangle NCB$, deoarece :

(caz : L.U.L.)	deoarece :	{	$BC = BC$
			$MB \equiv NC$ (jumătăți de segmente congruente)
			$\widehat{B} = \widehat{C}$ (ABC isoscel)

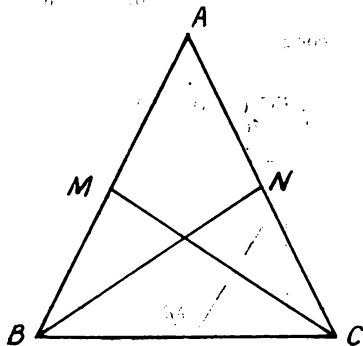


Fig. VI.G.5.

Din cele de mai sus rezultă $(MC) \equiv (NB)$.

VI.G.6. În triunghiul echilateral ABC notăm E' intersecția bisectoarei CI cu $AB \Rightarrow CI$ înălțime și mediană $\Rightarrow IE' \perp AB$ și $AE' = BE' \Rightarrow$ în $\triangle AIB$, IE' — înălțime și mediană $\Rightarrow \triangle AIB$ isoscel deci IE' bisectoarea unghiului AIB , de unde : $E = E'$.

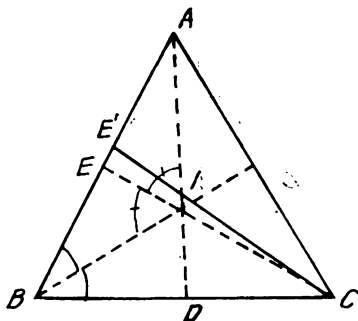


Fig. VI.G.6.

Urmează că :

$\triangle BID \equiv \triangle BIE$, deoarece :
(caz L.U.L.)

$$\left\{ \begin{array}{l} BI = BI \\ BE = BD \text{ (jumătăți de segmente} \\ \text{congruente)} \\ \widehat{EBI} \equiv \widehat{IBD} \text{ (BI bisectoare)} \end{array} \right.$$

dar și că :

$\triangle BIE \equiv \triangle AIE$, deoarece :
(caz L.L.L.)

$$\left\{ \begin{array}{l} EI = EI \\ BI \equiv AI, \text{ (AIB isoscel, demonstrat)} \\ BE \equiv EA \text{ (demonstrat)} \end{array} \right.$$

Cum relația de congruență este tranzitivă, deducem : $\triangle BID \equiv \triangle BIE \equiv \triangle EAI$.

VI.G.7. a) Deoarece în ABC ($m(A) = 90^\circ$) și AM este mediana relativă ipotenuzei $\Rightarrow AM = MB = MC$.

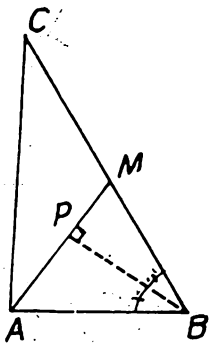


Fig. VI.G.7.

Deoarece $AM = MB \Rightarrow \triangle AMB$ isoscel deci $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{B})$. Dar $m(\widehat{B}) = 60^\circ$ (ipoteză) $\Rightarrow \triangle AMB$ echilateral. Rezultă că în $\triangle ABM$, bisectoarea lui B este și înălțime, deci este perpendiculară pe AM . Reciproc dacă $BP \perp AM$ și BP este bisectoarea unghiului $B \Rightarrow \triangle ABM$ este isoscel deci $BM = AB$ dar $AB = AM \Rightarrow \triangle ABM$ echilateral, deci: $m(\widehat{B}) = 60^\circ$.

b) Oricare ar fi poziția lui P pe AM , $AP + PM = AM$ ori $AM \equiv MB$ și știm că trei segmente pot forma un triunghi dacă suma a oricare două din ele este mai mare decât cel de-al treilea segment. Deci AP , PM și MB nu pot forma un triunghi.

VI.G.8.

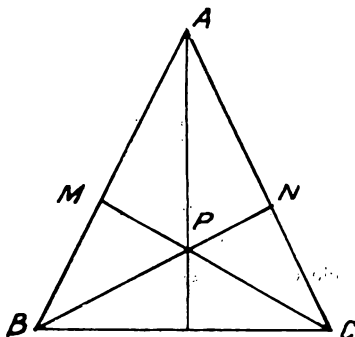


Fig. VI.G.8.

a)

$\triangle MBC = \triangle NBC$, deoarece $\left\{ \begin{array}{l} BC = BC \\ MB \equiv NC \text{ (ipoteză)} \\ \widehat{B} = \widehat{C} \text{ (ipoteză)} \end{array} \right.$
(cazul L.U.L.)

Rezultă $BN \equiv CM$.

b) Din faptul că $\triangle MBC \equiv \triangle NBC \Rightarrow m(\widehat{NBC}) = m(\widehat{MCB}) \Rightarrow \Rightarrow \triangle BPC$ isoscel $\Rightarrow BP \equiv PC$.

c)

$\triangle APB \equiv \triangle APC$, deoarece $\left\{ \begin{array}{l} AP = AP \\ AB = AC \text{ (ipoteză)} \\ BP = CP \text{ (demonstrat)} \end{array} \right.$
(caz L.L.L.)

Rezultă $\widehat{BAP} \equiv \widehat{PAC} \Rightarrow AP$ bisectoarea unghiului A .

VI.G.9.

a) $\widehat{EAD} = \widehat{EDA} \Rightarrow \triangle EAD$ isoscel $\Rightarrow AE \equiv ED \Rightarrow AP \equiv DF$ (jurmătăși de segmente congruente).

Apoi :

$\triangle ADP \equiv \triangle DAF$, deoarece : $\left\{ \begin{array}{l} AP \equiv DF \text{ (demonstrat)} \\ AD = AD \\ \widehat{PAD} \equiv \widehat{FDA} \text{ (ipoteză)} \end{array} \right.$

Rezultă $DP \equiv AF$.

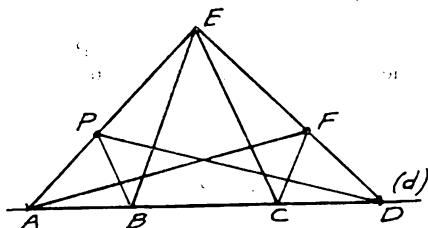


Fig. VI.G.9.

b) Dar și

$\triangle APB \equiv \triangle FCD$, deoarece : $\left\{ \begin{array}{l} AP \equiv DF \text{ (demonstrat)} \\ AB \equiv CD \text{ (ipoteză)} \\ \widehat{PAB} = \widehat{FDC} \text{ (ipoteză)} \end{array} \right.$

c) Din congruența triunghiurilor (pct. b) rezultă $\widehat{APB} \equiv \widehat{DFC}$, dar $m(\widehat{APB}) + m(\widehat{BPE}) = 180^\circ$ și $m(\widehat{DFC}) + m(\widehat{CFE}) = 180^\circ$. Rezultă $\widehat{EPB} \equiv \widehat{EFC}$ (cu suplementele congruente).

d) Și

$\triangle EPB \equiv \triangle EFC$, deoarece : $\left\{ \begin{array}{l} AP \equiv EF \text{ (jumătăți de segmente congruente)} \\ PB \equiv FC \text{ (} \triangle APB \equiv \triangle DFC \text{ pct. b)} \\ \widehat{EPB} = \widehat{EFC} \text{ (pct. c)} \end{array} \right.$

VI.G.10. Considerăm cunoscută propoziția „triunghiul în care două bisectoare sînt congruente este triunghi isoscel” și deci : $\triangle ABC$ este triunghi isoscel și anume $(AB) \equiv (AC)$.

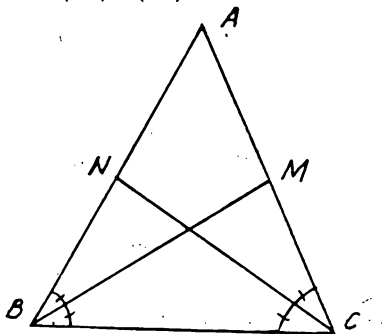


Fig. VI.G.10.

CAZUL I

$$\frac{AB}{BC} = \frac{8}{10} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5} \Rightarrow AB = \frac{4}{5} \cdot BC;$$

$$AC = \frac{4}{5} \cdot BC \Rightarrow \frac{4}{5} \cdot BC + \frac{4}{5} \cdot BC + BC = 49$$

$$\frac{13}{5} \cdot BC = 49 \Rightarrow BC = \frac{49 \cdot 5}{13} \Rightarrow BC = \frac{245}{13}$$

$$AB = AC = \frac{245}{13} \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow AC = \frac{196}{13}.$$

Verificare $AC - AB < BC < AC + AB$.

CAZUL II

$$\frac{BC}{AB} = \frac{3}{10} \Rightarrow AB = \frac{5}{4} \cdot BC; 49 = \frac{5}{4} \cdot BC + \frac{5}{4} \cdot BC + BC \Rightarrow 49 =$$

$$= \frac{14}{4} \cdot BC \Rightarrow BC = 49 \cdot \frac{4}{14} = 14; BC = 14; AB = AC = 14 \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \frac{35}{2}. \text{ Se verifică asemănător.}$$

VI.G.11.

În \triangle isoscel ABD ($AB = BD$) deoarece $BF \perp AD \Rightarrow AF = DF$. Cum $JF \perp AD \Rightarrow \triangle ADJ$ isoscel $\Rightarrow AJ = JD$. Analog demonstrăm că $AJ \equiv EJ$, deci $DJ = EJ \Rightarrow \triangle DJE$ isoscel $\Rightarrow m(\widehat{EDJ}) = m(\widehat{DEJ}) = x^\circ$.

Din $\triangle AJD$ isoscel și $\triangle ABD$ isoscel $\Rightarrow m(\widehat{EDJ}) = m(\widehat{BAJ}) = x^\circ$ (ca diferență de unghiuri congruente). Analog $m(\widehat{DEJ}) = m(\widehat{CAJ}) = x^\circ \Rightarrow m(\widehat{BAJ}) = m(\widehat{CAJ}) = x^\circ \Rightarrow AJ$ bisectoarea BAC .

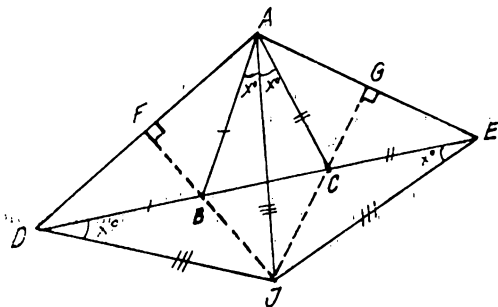


Fig. VI.G.11.

VI.G.12.

a)

$\triangle MPD \equiv \triangle NPD$, deoarece :

$$\left\{ \begin{array}{l} MP \equiv NP \left(\begin{array}{l} \text{ambele sînt linii mijlo-} \\ \text{cii în } \triangle ABC \text{ și egale, de exem-} \\ \text{plu cu } \frac{AB}{2} \end{array} \right) \\ \widehat{MPD} = \widehat{NPD} \text{ (ipoteză)} \\ PD \text{ comună} \end{array} \right.$$

De aici rezultă că : $MD \equiv DN$.

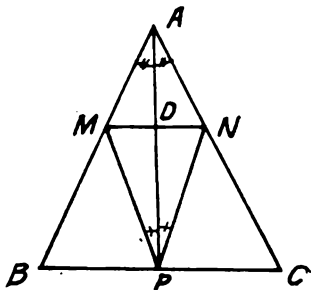


Fig. VI.G.12.

b) Ca \triangle -ul isoscel ABC ($AB = AC = 4$ cm) să poată fi construit trebuie, de exemplu ca : $AB + AC > BC$, adică $4 + 4 > BC$, deci $BC < 8$ și evident $BC \neq 0$. Așadar $0 < BC < 8$. Cu oricare două valori numerice reale, cuprinse între 0 și 8, de exemplu $BC = 1$ sau 3 și $AB = AC = 4$, putem construi $\triangle ABC$.

c) Din ipoteză $AB \equiv AC$, deci $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB})$. Rezultă : $2 \cdot m(\widehat{ABC}) = 180^\circ - m(\widehat{BAC})$ și deci $m(\widehat{ABC}) = 90 - \frac{m(\widehat{BAC})}{2}$. În con-

cluzie unghiul ABC este ascuțit, adică $0 < m(\widehat{ABC}) < 90$ ($m(\widehat{ABC}) = 20^\circ$ sau $m(\widehat{ABC}) = 40^\circ$).

VI.G.13. Unghiul exterior dat nu poate fi decît de la vîrfurile triunghiului deoarece, dacă ar fi de la baza triunghiului, unghiurile interioare ale triunghiului și care sînt congruente ar avea fiecare cîte 150° , ori suma lor depășește 180° .

Așadar, $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$ conform propoziției „într-un triunghi măsura unghiului exterior este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare neadiacente lui“ deci $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 30^\circ \Rightarrow m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 30^\circ : 2 = 15^\circ$ (ipoteză, $\triangle ABC$ isoscel). Deci $m(\widehat{B}) = 15^\circ$; $m(\widehat{C}) = 15^\circ$ și $m(\widehat{BAC}) = 150^\circ$ ca suplement al unghiului BAE . (Vezi fig. VI.G.13.) \perp

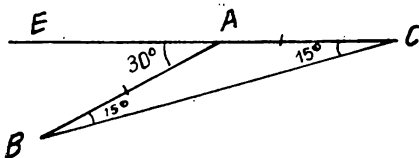


Fig. VI.G.13.

VI.G.14.

$$\frac{x^\circ}{1} = \frac{y^\circ}{2} = \frac{z^\circ}{3} = \frac{x^\circ + y^\circ + z^\circ}{1 + 2 + 3} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

deci :

$$\frac{x^\circ}{1} = 30^\circ \Rightarrow x^\circ = 30^\circ$$

$$\frac{y^\circ}{2} = 30^\circ \Rightarrow y^\circ = 60^\circ$$

$$\frac{z^\circ}{3} = 30^\circ \Rightarrow z^\circ = 90^\circ$$

Triunghiul în cauză având un unghi drept, este evident dreptunghic.

VI.G.15. 1. În $\triangle ABC$; $m(\widehat{BAC}) = 40^\circ$; $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$. Dar \widehat{DAB} , exterior, $\triangle ABC \Rightarrow m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB}) = 2 \cdot 70^\circ = 140^\circ$; dar $AD \equiv AC$ și $AC \equiv AB$ (ipoteză) $\Rightarrow AD \equiv AB \Rightarrow \triangle ABD$ este isoscel $\Rightarrow m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{DBA}) = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$ deci $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DBA}) + m(\widehat{ABC}) = 20^\circ + 70^\circ = 90^\circ \Rightarrow \triangle DBC$ dreptunghic în B.

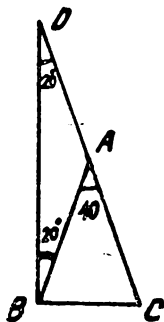


Fig. VI.G.15.

2. Se poate arăta în general că proprietatea este adevărată pentru orice A cu $0 < m(\widehat{A}) < 180^\circ$. În $\triangle ABC$ (isoscel) $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = \frac{180^\circ - x^\circ}{2}$, unde $x^\circ = m(\widehat{A})$. În $\triangle BAD$, $m(\widehat{BAD})$ (ca unghi exterior \triangle -ului ABC) = $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ - x^\circ$. Tot în \triangle -ul BAD , $m(\widehat{ABD}) = \frac{x^\circ}{2}$ ($\triangle BAD$ isoscel — ipoteză).

Rezultă : $m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{ABC}) = \frac{x^\circ}{2} + \frac{180^\circ - x^\circ}{2} = 90^\circ$, și deci triunghiul DBC este dreptunghic oricare ar fi măsura unghiului A .

VI.G.16.

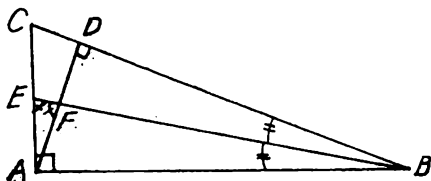


Fig. VI.G.16.

a) În $\triangle BDF$, $m(\widehat{BDF}) = 90^\circ$ (ipoteză), deci : $m(\widehat{BFD}) = 90^\circ - m\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)$.

Dar $m(\widehat{BFD}) = m(\widehat{AFE})$ (opuse la vîrf) $\Rightarrow m(\widehat{AFE}) = 90^\circ - m\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)$.

În $\triangle ABE$ dreptunghic (ipoteză), $m(\widehat{AEB}) = 90^\circ - m\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)$ (2)

Din relația (1) și (2) $\Rightarrow m(\widehat{AFE}) = m(\widehat{AEF}) \Rightarrow \triangle AEF$ isoscel.

b) Dacă $m(\widehat{C}) = 30^\circ \Rightarrow m(\widehat{B}) = 60^\circ$ atunci $m(\widehat{AEF}) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Știind că triunghiul isoscel cu un unghi de 60° este echilateral rezultă $\triangle AEF$ echilateral.

VI.G.17. a) $m(\widehat{C}) = 15^\circ$; $m(\widehat{B}) = q \cdot m(\widehat{C}) = 15^\circ \cdot q$; $m(\widehat{A}) = p \cdot m(\widehat{B}) = 15^\circ \cdot p \cdot q$, dar $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$; $15^\circ + 15^\circ q + 15^\circ pq = 180^\circ$ ($: 15$); $1 + q + pq = 12$; $q + pq = 11$; $q(1 + p) = 11 \Rightarrow q = 1$ și $1 + p = 11 \Rightarrow p = 10$ sau $q = 11$ și $1 + p = 1 \Rightarrow p = 0$ imposibil, deoarece $p \in \mathbb{N}^*$. Avem $q = 1$ și $p = 10$.

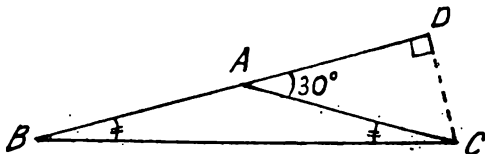


Fig. VI.G.17.

$m(\widehat{C}) = 15^\circ$; $m(\widehat{B}) = 15 \cdot 1 = 15^\circ$; $m(\widehat{A}) = 15 \cdot 10 = 150^\circ \Rightarrow m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 15^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ isoscel.

În $\triangle ACD$, $m(\widehat{D}) = 90^\circ$; $m(\widehat{DAC}) = 2 \cdot m(\widehat{B}) = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$ (unghi exterior triunghiului ABC) $\Rightarrow CD = \frac{AC}{2}$ (cateta ce se opune unghiului de 30°). Dar $AC \equiv AB \Rightarrow CD = \frac{AB}{2}$.

VI.G.18. În $\triangle ABC$, $m(\widehat{B}) = 180^\circ - (m(\widehat{A}) + m(\widehat{C})) = 50^\circ$.

În $\triangle A'NB$, $m(\widehat{N}) = 90^\circ - m \frac{\widehat{B}}{2} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.

În $\triangle CA'M$, $m(\widehat{CMA'}) = 90^\circ - m \left(\frac{\widehat{C}}{2} \right) = m(\widehat{M}) = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ \Rightarrow$
 \Rightarrow în $\triangle MNP$, $m(\widehat{P}) = 180^\circ - (55^\circ + 65^\circ) = 60^\circ$.

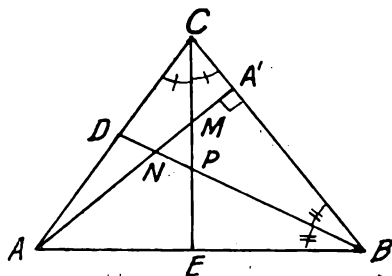


Fig. VI.G.18.

În $\triangle BNA$, $m(\widehat{ABN}) = m \left(\frac{\widehat{B}}{2} \right) = 25^\circ$; $m(\widehat{NAB}) = 90^\circ - m(\widehat{B}) = 40^\circ$;
 $m(\widehat{ANB}) = 180^\circ - (40 + 25) = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.

VI.G.19. $\triangle AEI$ echilateral $\Rightarrow m(\widehat{EIA}) = 60^\circ$; $m(\widehat{EIA}) = m(\widehat{DIB})$ (opuse la vîrf) $\Rightarrow m(\widehat{DIB}) = 60^\circ$ (ipoteză).

În $\triangle IDB$, $m(\widehat{D}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{DIB}) = 60^\circ \Rightarrow m(\widehat{DBI}) = 30^\circ$, dar $\widehat{DBI} \equiv \widehat{IBA}$ (ipoteză), așadar: (1) $m(\widehat{CBA}) = 60^\circ$.

În $\triangle AIB$, $m(\widehat{AIB}) = 120^\circ$ și $m(\widehat{IBA}) = 30^\circ \Rightarrow (m(\widehat{AIB}) + m(\widehat{IBA})) \Rightarrow m(\widehat{IAB}) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \Rightarrow m(\widehat{CAB}) = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$. Așadar: (2) $m(\widehat{CAB}) = 90^\circ$.

Din (1) și (2) $\Rightarrow m(\widehat{ACB}) = 30^\circ$.

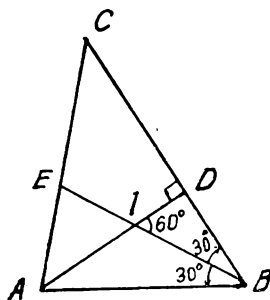


Fig. VI.G.19.

VI.G.20. 1. În $\triangle ABD$: $m(\widehat{B}) = 60^\circ$; $m(\widehat{D}) = 80^\circ$ (ipoteză) $\Rightarrow m(\widehat{A_1}) = 40^\circ$
 dar $\widehat{A_1} \equiv \widehat{A_2}$ (ipoteză) $\Rightarrow m(\widehat{A_2}) = 40^\circ \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 80^\circ$.

În $\triangle ABC$: $m(\widehat{A}) = 80^\circ$ (demonstrat) și $m(\widehat{B}) = 60^\circ \Rightarrow m(\widehat{C}) = 40^\circ$.

Deci : $m(\widehat{BAC}) = 80^\circ$; $m(\widehat{ACB}) = 40^\circ$.

2. $m(\widehat{ACE}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{ACB}) = 40^\circ \Rightarrow m(\widehat{BCE}) = 50^\circ$.

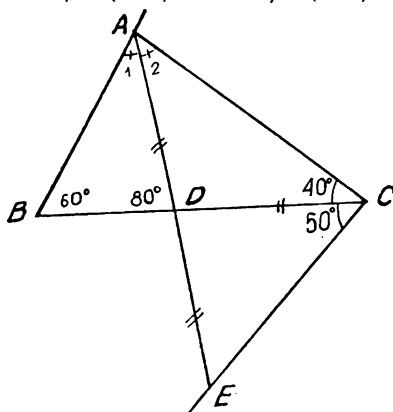


Fig. VI.G.20.

În $\triangle DCE$: $m(\widehat{CDE}) = 80^\circ$ (opus la vîrf cu \widehat{ADB}) ; $m(\widehat{DCE}) = 50^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\widehat{DEC}) = 50^\circ \Rightarrow \triangle DCE$ isoscel $\Rightarrow DC \equiv DE$.

3. În $\triangle ADC$: $m(\widehat{A_2}) = 40^\circ$ și $m(\widehat{C}) = 40^\circ \Rightarrow \triangle ADC$ isoscel \Rightarrow
 $\Rightarrow AD \equiv DC$.

Din $AD \equiv DC$ și $DC \equiv DE \Rightarrow AD \equiv DE$.

VI.G.21. a) În $\triangle ABA'$: AD — înălțime ($AD \perp BC$ ipoteză) ; AD — mediană $AD = DA'$ (ipoteză) $\Rightarrow \triangle ABA'$ isoscel $\Rightarrow m(\widehat{ABA'}) \equiv m(\widehat{AA'B}) =$

$$= \frac{7}{3} \cdot m(\widehat{C}) \text{ (ipoteză). Dar } \widehat{AA'B} \text{ exterior } \triangle AA'C \Rightarrow m(\widehat{AA'B}) = m(\widehat{A_2}) + m(\widehat{C}).$$

Deci :

$$\frac{7}{3} \cdot m(\widehat{C}) = m(\widehat{A_2}) + m(\widehat{C}); m(\widehat{A_2}) = \frac{7}{3} \cdot m(\widehat{C}) - \frac{3}{3} \cdot m(\widehat{C}); m(\widehat{A_2}) = \frac{4}{3} \cdot m(\widehat{C});$$

$$m(\widehat{A}) = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot m(\widehat{C}). \text{ Așadar : } m(\widehat{A}) = \frac{8}{3} \cdot m(\widehat{C}).$$

În $\triangle ABC$ înlocuim în egalitatea : $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$;

$$\frac{8}{3} \cdot m(\widehat{C}) + \frac{7}{3} \cdot m(\widehat{C}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ; \frac{18}{3} \cdot m(\widehat{C}) = 180^\circ; m(\widehat{C}) = 180^\circ \cdot \frac{3}{18};$$

$$m(\widehat{C}) = 30^\circ; m(\widehat{B}) = \frac{7}{3} \cdot 30^\circ; m(\widehat{B}) = 70^\circ; m(\widehat{A}) = \frac{8}{3} \cdot 30^\circ; m(\widehat{A}) = 80^\circ.$$

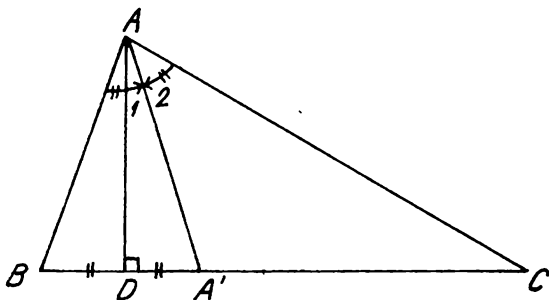


Fig. VI.G.21.

b) În $\triangle ABC$: $m(\widehat{A}) = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 90^\circ$.

Răționamentul de la punctul a) ne conduce la : $m(\widehat{ABA'}) = m(\widehat{AA'B}) = m(\widehat{A'AC}) = m(\widehat{C})$;

$$m(\widehat{B}) = \frac{m(\widehat{A})}{2} + m(\widehat{C}); m(\widehat{B}) = \frac{90^\circ}{2} + m(\widehat{C}); m(\widehat{B}) = 45 + m(\widehat{C});$$

$$m(\widehat{B}) - m(\widehat{C}) = 45^\circ.$$

Așadar : $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{B}) - m(\widehat{C}) = 45^\circ$. Adunăm membru cu membru cele două egalități. Rezultă : $2m(\widehat{B}) = 135^\circ$; $m(\widehat{B}) = \frac{135^\circ}{2}$ apoi $m(\widehat{C}) = \frac{45}{2}$. Rezultă : $\frac{m(\widehat{B})}{m(\widehat{C})} = \frac{135}{2} \cdot \frac{2}{45} = 3$.

VI.G.22. a)

$\triangle ADC \equiv \triangle ABE$, deoarece :
(caz L.U.L.)

$$\left\{ \begin{array}{l} AD \equiv AB \text{ ipoteză, construcție} \\ AC = AE \text{ ipoteză, construcție} \\ m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BAE}) = 60^\circ + \\ \quad + m(\widehat{BAC}) \end{array} \right.$$

Rezultă : $DC \equiv BE$.

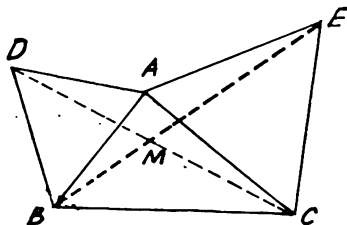


Fig. VI.G.22.

b) \widehat{BMC} exterior $\triangle CME$; $m(\widehat{BMC}) = m(\widehat{MEC}) + m(\widehat{ECM}) = (60^\circ - m(\widehat{AEB})) + (60^\circ + m(\widehat{ACD})) = 120^\circ$, deoarece $m(\widehat{AEB}) = m(\widehat{ACD})$ conform punctului a).

VI.G.23. Dacă $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ atunci $D = A$, și se contrazice ipoteza $D \in AC$.

Dacă $m(\widehat{A}) = 60^\circ$ atunci BD este bisectoarea unghiului \widehat{ABC} și contrazicem ipoteza, nemaexistind punctul $E \in AC$.

Dacă $m(\widehat{A}) > 90^\circ$ atunci punctul D se află pe prelungirea segmentului AC și contrazicem din nou ipoteza $D \in AC$.

Rămîne ca măsura unghiului A să fie $0^\circ < m(\widehat{A}) < 90^\circ$ și $m(\widehat{A}) = 60^\circ$.

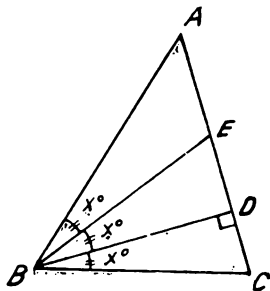


Fig. VI.G.23.

Din ipoteză $AB \equiv AC \Rightarrow m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$.

În $\triangle BCD$: $m(\widehat{D}) \Rightarrow m(\widehat{C}) + m(\widehat{DBC}) = 90 \Rightarrow 3 \cdot x^\circ + x^\circ = 90^\circ$;
 $4x^\circ = 90^\circ$; $x^\circ = 90^\circ : 4$; $x^\circ = \frac{45^\circ}{2}$, deci: $m(B) = m(C) = \frac{135^\circ}{2}$; $m(A) =$
 $= 180^\circ - 2 \cdot \frac{135^\circ}{2}$, adică: $m(A) = 45^\circ$.

VI.G.24.

1. $AB \equiv AC$ și $BM \equiv AN \Rightarrow AM \equiv NC$.

$\triangle BNC = \triangle CMA$, deoarece: $\begin{cases} BC = BC \\ m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}) = 60^\circ \text{ (ipoteză)} \\ AM \equiv NC \end{cases}$

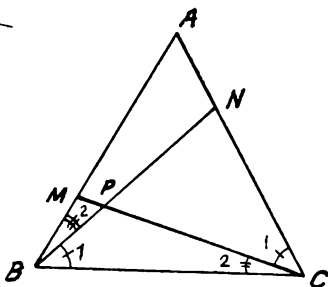


Fig. VI.G.24.

2. Din congruența precedentă rezultă: $m(\widehat{B}_1) = m(\widehat{C}_1)$; dar $m(\widehat{C}_1) + m(\widehat{C}_2) = 60^\circ \Rightarrow m(\widehat{B}_1) + m(\widehat{C}_1) = 60^\circ$ și cum unghiul NPC este unghi exterior $\triangle BPC \Rightarrow m(NPC) = 60^\circ$.

Observație: Concluzia nr. 2) putea fi formulată astfel: „arătați că în ipoteza dată, măsura unghiului NPC este constantă.

VI.G.25. a) $m(NPC) = 60^\circ$ (vezi problema VI.G.24.).

b) Fie punctul R intersecția prelungirilor segmentelor MN și BC . Deoarece $m(\widehat{NRC}) = 30^\circ$ (ipoteză) atunci $\triangle RNC$ este dreptunghic în N deoarece $m(\widehat{RCN}) = 60^\circ$ (ipoteză). Dar și $\triangle MNA$ este dreptunghic în N deoarece $m(\widehat{AMN}) = 30^\circ$ ($m(\widehat{AMN}) - m(\widehat{RMB}) = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ$ și $m(\widehat{MAN}) = 60^\circ$).

În aceste condiții, triunghiul dreptunghic MNA are un unghi de 30° . Conform proprietății: „dacă într-un triunghi dreptunghic un unghi este de 30° , atunci cateta care se opune acestui unghi este jumătate din ipoteuză“, deducem că: (1) $AN = \frac{AM}{2}$. Cum $AN \equiv BM$ (ipoteză), rezultă (2)

$AN = \frac{AB - AN}{2}$. Știm că o egalitate rămâne adevrată dacă mărim ambii ei membri de același număr de ori; de exemplu să mărim ambii membri ai egalității (2) de două ori. Obținem: (3) $2 \cdot AN = AB - AN$, adică (4) $3 \cdot AN = AB$ și deci (5) $AN = \frac{AB}{3}$.

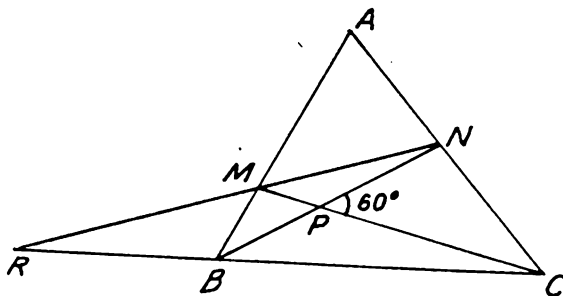


Fig. VI.G.25.

VI.G.26. a) În \triangle dreptunghic BAM : $m(\widehat{A}_1) = 90^\circ - m(\widehat{M})$.

În \triangle dreptunghic CAN : $m(\widehat{A}_2) = 90^\circ - m(\widehat{N})$.

Dar $m(\widehat{M}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2}$ (ipoteză) și $m(\widehat{N}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2}$ (ipoteză).

Din toate aceste condiții rezultă $m(\widehat{A}_1) + m(\widehat{A}_2) + m(\widehat{BAC}) = 90^\circ - \frac{m(\widehat{BAC})}{2} + 90^\circ - \frac{m(\widehat{BAC})}{2} + m(\widehat{BAC}) = 180^\circ = m(\widehat{MAN})$, deci M, A, N coliniare.

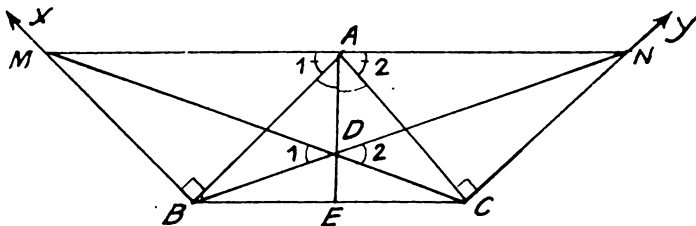


Fig. VI.G.26.

b)

$$\Delta BMC \equiv \Delta CNB, \text{ deoarece : } \left\{ \begin{array}{l} BC = BC \\ m(\widehat{MBC}) = m(\widehat{NCB}) (= 90^\circ + \\ + m(\widehat{B}) = 90^\circ + m(\widehat{C})) \\ MB \equiv NC (\Delta MBA = \Delta NCA, \\ \text{dreptunghice, catetă, unghi}) \end{array} \right.$$

Rezultă : $MC = NB$, dar și $\widehat{BMC} \equiv \widehat{CNB}$ precum și $\widehat{BCM} \equiv \widehat{CBN}$.

c)

$$\Delta MDB \equiv \Delta NCA, \text{ deoarece : } \left\{ \begin{array}{l} \widehat{BMD} \equiv \widehat{CND} \text{ (demonstrat} \\ \text{la punctul a)} \\ MB \equiv NC \text{ (demonstrat} \\ \text{la punctul a)} \\ \widehat{MBD} \equiv \widehat{NCD} \end{array} \right.$$

ca diferențe de unghiuri congruente ; $m(\widehat{MBD}) = m(\widehat{MBC}) - m(\widehat{NBC})$ și $m(\widehat{NCD}) = m(\widehat{NCB}) - m(\widehat{MCB})$ demonstrat.

Rezultă că : $BD = DC$ și ducind $DE \perp BC$, deoarece ΔBDC este isoscel rezultă : $BE = EC$. Deci în ΔDBC , DE este mediatoarea laturii BC . Dar și ΔABC este isoscel, deci mediatoarea laturii BC care este DE , trece și prin vârful A . Ori mediatoarea AE fiind și bisectoarea unghiului \widehat{BAC} , urmează că $D \in AE$.

VI.G.27. a)

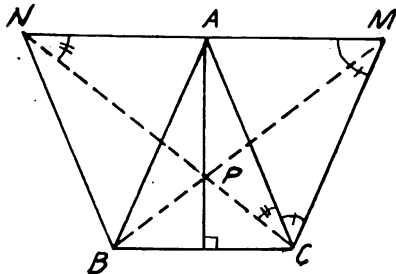


Fig. VI.G.27.

$$\Delta AMC = \Delta ANB, \text{ deoarece : } \left\{ \begin{array}{l} AM \equiv AN \text{ (ip.)} \\ AB \equiv AC \text{ (ip.)} \\ \widehat{NAB} \equiv \widehat{MAC} \text{ pentru că :} \\ \quad \widehat{NAB} = \widehat{ABC} \text{ (alterne interne,} \\ \quad \text{secanta AB) și} \\ \quad \widehat{MAC} = \widehat{ACB} \text{ (alterne interne,} \\ \quad \text{secanta AC), ori} \\ \quad \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \text{ (ipoteză)} \end{array} \right.$$

Rezultă $\widehat{ABN} \equiv \widehat{ACM}$; $\widehat{ANB} \equiv \widehat{AMC}$ și în special $MC \equiv NB$.

b)

$\triangle BMC \equiv \triangle BNC$, deoarece :
(caz L.U.L.)

$$\left\{ \begin{array}{l} BC = BC \text{ (latura comună)} \\ MC \equiv NB \text{ (pct. a)} \\ \widehat{BCM} \equiv \widehat{CBN} \text{ pentru că :} \\ m(\widehat{BCM}) = m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{ACM}) \\ m(\widehat{CBN}) = m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ABN}), \\ \text{însă : } \widehat{ACB} \equiv \widehat{ABC} \text{ (ipoteză)} \\ \widehat{ACM} \equiv \widehat{ABN} \text{ (pct. a)} \end{array} \right.$$

Rezultă : $\widehat{BMC} = \widehat{CNB}$; $\widehat{MBC} \equiv \widehat{NCB}$ și în special : $MB \equiv NC$.

c) În $\triangle MNP$, PA este mediană (ipoteză). Cum $m(\widehat{ANB}) = m(\widehat{AMC})$ (pct. a) și $m(\widehat{BNC}) = m(\widehat{BMC})$ (pct. b) $\Rightarrow m(\widehat{MNP}) = m(\widehat{NMP})$ (deoarece $m(\widehat{MNP}) = m(\widehat{ANB}) - m(\widehat{BNC})$ și $m(\widehat{NMP}) = m(\widehat{AMC}) - m(\widehat{BMC})$). Deci : $\triangle MPN$ — isoscel $\Rightarrow PN \equiv PM$, atunci mediana PA este și înălțime : $PA \perp MN$, dar $MN \parallel BC$ (ipoteză) $\Rightarrow AP \perp BC$.

d) Deoarece $AM \equiv AC$ (ipoteză) $\Rightarrow \triangle AMC$ isoscel $\Rightarrow \widehat{AMC} \equiv \widehat{ACM}$. Dar $AM \equiv AN$ (ipoteză) $\Rightarrow AN \equiv AC \Rightarrow \triangle ANC$ isoscel $\Rightarrow \widehat{ANC} \equiv \widehat{ACN}$, dar $\widehat{ANC} \equiv \widehat{NCB}$ (alterne interne) deci $\widehat{ACN} \equiv \widehat{NCB} \Rightarrow NC$ bisectoarea unghiului ACB .

În $\triangle AMC$ avem $m(\widehat{MAC}) = 180^\circ - 2 \cdot m(\widehat{M})$, iar în $\triangle NAC$, $m(\widehat{NAC}) = 180^\circ - 2 \cdot m(\widehat{N})$.

$$\text{Deci : } m(\widehat{MAC}) + m(\widehat{NAC}) = 360^\circ - 2(m(\widehat{M}) + m(\widehat{N})).$$

Cum $m(\widehat{MAC}) + m(\widehat{NAC}) = 180^\circ$ (adiacente și suplementare) $\Rightarrow 180^\circ = 360^\circ - 2(m(\widehat{M}) + m(\widehat{N})) \Rightarrow 2(m(\widehat{M}) + m(\widehat{N})) = 180^\circ$, adică : $m(\widehat{M}) + m(\widehat{N}) = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{NPM}) = 90^\circ$, deci $NC \perp MC$. Sau și mai simplu : în $\triangle MNC$ avem : $2m(\widehat{M}) + 2m(\widehat{N}) = 180^\circ$, deci $m(\widehat{M}) + m(\widehat{N}) = 90^\circ$, adică $m(\widehat{MCN}) = 90^\circ$. Rezultă : $NC \perp MC$.

VI.G.28. Să notăm pentru simplificare $m(\widehat{BMD}) = x^\circ$. Cum $AM \equiv AE$ (ipoteză) rezultă că triunghiul AME are două unghiuri congruente, adică și $m(\widehat{AEM}) = x^\circ$. Cum unghiurile AEM și DEC sînt opuse la vîrf, rezultă $m(\widehat{DEC}) = x^\circ$.

În $\triangle BDM$, $m(\widehat{D}_1) = 180^\circ - (m(\widehat{B}) + x^\circ)$. În $\triangle CDE$, $m(\widehat{D}_2) = 180^\circ - (m(\widehat{C}) + x^\circ)$. Cum $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$ din ipoteză, deducem că $m(\widehat{D}_1) \equiv m(\widehat{D}_2)$. Dar unghiurile D_1 și D_2 sînt suplementare, fiind și congruente (demonstrat) rezultă că $m(\widehat{D}_1) = m(\widehat{D}_2) = 90^\circ$, adică dreptele MD și BC sînt perpendiculare, ceea ce este tot una cu $ME \perp BC$.

Observație : Condițiile din textul problemei : „se ia pe prelungirea laturii $AB...$ ” cît și „ E între A și C ” sînt esențiale pentru obținerea concluziei „ $ME \perp BC$ ”. Verificați aceasta, rezolvînd problema : „Într-un triunghi ABC ($AB \equiv AC$) se ia pe dreapta AB segmentul $AM \equiv AE$ unde E aparține dreptei AC . Să se arate că $ME \perp BC$ sau $ME \parallel BC$ ”.

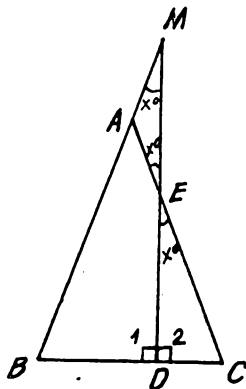


Fig. VI.G.28.

VI.G.29.

a) Notăm în $\triangle ABC$ $m(\widehat{B}) = x^\circ \Rightarrow m(\widehat{A}) = 60^\circ + x^\circ$; cum $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{C}) = 180^\circ - (m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}))$, adică : $m(\widehat{C}) = 180^\circ - (x^\circ + x^\circ + 60^\circ) = 2 \cdot (60^\circ - x^\circ)$.

În $\triangle CAF$: $m(\widehat{C}_1) = m\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) = 60^\circ - x^\circ$ și $m(\widehat{A}) = 60^\circ + x^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\widehat{AFC}) = 180^\circ - (m(\widehat{C}_1) + m(\widehat{A})) = 180^\circ - (60^\circ - x^\circ + 60^\circ + x^\circ) = 60^\circ$. Deci : $m(\widehat{AFC}) = 60^\circ \Rightarrow m(\widehat{CFB}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\widehat{CFK}) = 60^\circ \Rightarrow \triangle AFC = \triangle KFC$, (caz L.U.L.) $\Rightarrow AC \equiv CK$ și $m(\widehat{C}_1) = m(\widehat{C}_2) \Rightarrow CF \perp AK$ (în triunghiul isoscel, bisectoarea unghiului necongruent este și înălțime relativă bazei triunghiului).

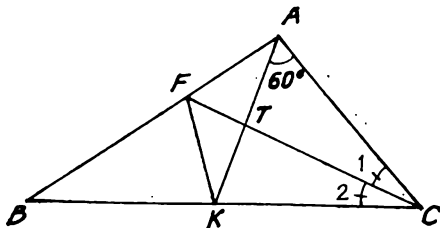


Fig. VI.G.29.

b) Din $CT \perp AK$, în $\triangle ACK$ ($AC = CK$) $\Rightarrow AT \equiv TK$. (În orice triunghi isoscel bisectoarea unghiului necongruent este înălțimea și mediana relativă bazei triunghiului).

c) În $\triangle ATF$ ($m(\widehat{ATF}) = 90^\circ$); ($m(\widehat{AFT}) = 60^\circ$) $\Rightarrow m(\widehat{FAT}) = 30^\circ$.

VI.G.30.

a) În $\triangle BIC$: $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - (m(\widehat{B}_2) + m(\widehat{C}_2))$; $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - m\left[\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right) + m\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)\right]$; $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - \frac{m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})}{2}$.

În $\triangle ABC$: $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ (ipoteză) $\Rightarrow m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 90^\circ$.

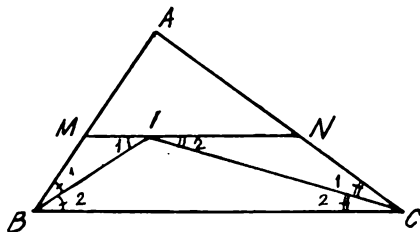


Fig. VI.G.30.

Din cele afirmate pînă acum rezultă $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, deci: $m(\widehat{BIC}) = 135^\circ$.

b) Din $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - \frac{m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})}{2}$ și faptul că în $\triangle ABC$:

$m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ - m(\widehat{A})$, rezultă $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - \frac{180^\circ - m(\widehat{A})}{2}$;

$m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - 90^\circ + \left(\frac{m(\widehat{A})}{2}\right)$; deci: $m(\widehat{BIC}) = 90^\circ + \left(\frac{m(\widehat{A})}{2}\right)$.

c) $MI \parallel BC$ și secanta $BI \Rightarrow \widehat{I}_1 \equiv \widehat{B}_2$ (alterne interne) dar $\widehat{B}_2 \equiv \widehat{B}_1$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{I}_1 \equiv \widehat{B}_1 \Rightarrow \triangle MBI$ — isoscel și anume $MB \equiv MI$. (1)

$NI \parallel BC$ și secanta $IC \Rightarrow \widehat{I}_2 \equiv \widehat{C}_2$ (alterne interne) dar $\widehat{C}_2 \equiv \widehat{C}_1$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{I}_2 \equiv \widehat{C}_1 \Rightarrow \triangle INC$ — isoscel și anume $IN \equiv NC$. (2)

Adunăm (1) și (2): $MB + NC = MI + IN$ ori $MI + IN = MN$.

În concluzie: $MB + NC = MN$.

d) $AM + AN + MN = AN + AM + NI + IN = (AM + MI) + (AN + NI)$ dar $MI \equiv MB$ (din 1) și $NI \equiv NC$ (din 2) (de la punctul c).

Rezultă: $AM + AN + MN = (AM + MB) + (AN + NC) = AB + AC = 20 \text{ cm} + 15 \text{ cm} = 35 \text{ cm}$.

VI.G.31. a) Din ipoteză $AB \equiv AC$. Tot din ipoteză triunghiurile dreptunghice și isoscele BAD și CAE sînt congruente, deoarece : $AB \equiv AD \equiv AC \equiv AE$, iar $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{CAE}) = 90^\circ$ (construcție). Deducem că $\triangle ADE$ este isoscel și anume $AD \equiv AE$ adică :

1) $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{AED})$, (proprietate caracteristică a triunghiurilor isoscele) dar și :

$$2) m(\widehat{BDA}) = m(\widehat{CEA}) = 45^\circ.$$

Adunînd membru cu membru cele două egalități deducem :

3) $m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{CED})$ și deci triunghiul FDE este isoscel și anume : $FD = FE$.

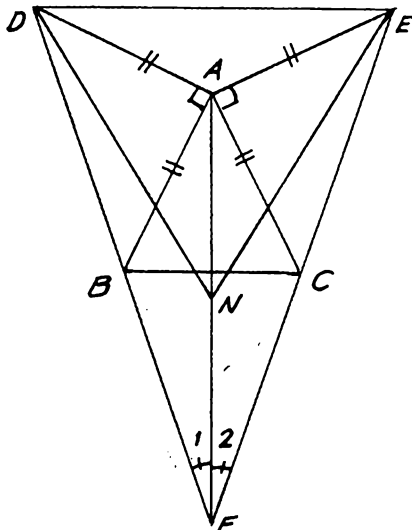


Fig. VI.G.31.

b) Cum $FD \equiv FE$, comparăm triunghiurile DAF și EAF . Constatăm că ele sînt congruente (L.L.L.). Cum în triunghiuri congruente la laturi congruente se opun unghiuri respectiv congruente deducem că $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$ (vezi desenul și notația). Urmează ca în triunghiul isoscel FDE , FA este bisectoarea unghiului DFE adică este și înălțimea relativă laturii DE (proprietatea bisectoarei unghiului necongruent dintr-un triunghi isoscel). În concluzie $FA \perp DE$.

c) Să evaluăm unghiurile triunghiului NDF . Procedăm de exemplu astfel :

Triunghiul FBC este isoscel deoarece $FB \equiv FC$ (au lungimile egale : $FB = FD - BD$ iar $FC = FE - CE$ demonstrat în etapele precedente). Urmează că : $m(\widehat{CBF}) = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ = m(\widehat{BCF})$.

Deducem : $m(\widehat{DFE}) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Cum FA este bisectoarea \widehat{DFE} (demonstrat) rezultă $m(\widehat{DFN}) = 15^\circ$.

Măsura unghiului DNF o calculăm astfel : triunghiurile DNF și ENF sînt congruente (L.L.L. din construcție și demonstrațiile precedente). Așadar $\widehat{DNF} \equiv \widehat{ENF}$ și atunci : $2 \cdot m(\widehat{DNF}) = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ (suma măsurilor tuturor unghiurilor adiacente două cite două desenate cu vîrfurile în jurul unui punct este egală cu 360°). Urmează că $m(\widehat{DNF}) = 150^\circ$.

Rezultă imediat și măsura ultimului unghi al $\triangle NDF$: $m(\widehat{NDF}) = 180^\circ - (150^\circ + 15^\circ) = 180^\circ - 165^\circ = 15^\circ$.

Așadar $\triangle NDF$ este isoscel și anume $DN \equiv NF$.

Cum $\triangle DNE$ este echilateral și are perimetrul egal cu 21 cm (ipoteză), rezultă $DN = 7$ cm și deci $NF = 7$ cm.

VI.G.32.

Notăm în \triangle dreptunghic ABC $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $m(\widehat{B}) = x^\circ$ și $m(\widehat{C}) = y^\circ \Rightarrow x^\circ + y^\circ = 90^\circ$. În $\triangle MDB$ isoscel (într-un \triangle dreptunghic mediana relativă ipotezei este jumătate din ipoteză) : $DM \equiv BM$, unghiurile congruente sînt $\widehat{MBD} \equiv \widehat{MDB} (= x^\circ)$. Unghiul DMA este unghi exterior $\triangle DMB$. Distingem următoarele cazuri :

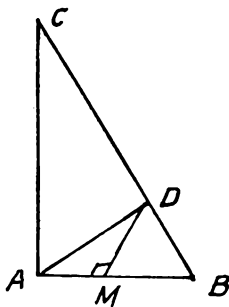


Fig. VI.G.32.

a) Discuție prealabilă : Dacă $m(\widehat{DMA}) = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{DMA}) = 2x^\circ = 90^\circ \Rightarrow x^\circ = 45^\circ \Rightarrow AC \equiv AB$.

b) Dacă $m(\widehat{DMA}) > 90^\circ \Rightarrow 2x^\circ > 90^\circ \Rightarrow x^\circ > 45^\circ \Rightarrow AC > AB$.

c) Dacă $m(\widehat{DMA}) < 90^\circ \Rightarrow x^\circ < 45^\circ \Rightarrow AC < AB$.

Cum în ipoteză $m(\widehat{DMA}) = 120^\circ > 90^\circ$ rezultă că $AC > AB$.

Rezolvare : În triunghiul dreptunghic ADB $m(\widehat{D}) = 90^\circ$, DM este mediană (ipoteză). Deducem că $DM = \frac{AB}{2}$, adică $DM = MA = MB$ și

deci triunghiul MDB este isoscel. Cum $m(\widehat{AMD}) = 120^\circ$ (ipoteză), rezultă că $m(\widehat{DMB}) = 60^\circ$ (unghiurile AMD și DMB fiind adiacente și suplimentare). Ori, un triunghi isoscel cu un unghi de 60° este echilateral, deci $m(\widehat{B}) = 60^\circ$. În triunghiul dreptunghic ABC , unghiurile B și C sînt complementare, rezultă $m(\widehat{C}) = 30^\circ$.

Triunghiul ADC fiind dreptunghic (ipoteză) și avînd măsură unghiului C de 30° (demonstrat), rezultă că în acest triunghi latura AD care se opune unghiului de 30° \widehat{C} este jumătate din ipotenuza AC , deci $AD = \frac{AC}{2}$. Cum $AC = 10$ cm (ipoteză) urmează că $AD = 5$ cm.

VI.G.33. Notăm de exemplu triunghiul ABC și presupunem $m(\widehat{A}) = 50^\circ$ iar $m(\widehat{B}) = 60^\circ$. Rezultă $m(\widehat{C}) = 70^\circ$. Construim CD , bisectoarea unghiului C (fiind unghiul cu măsura cea mai mare — ipoteză) și apoi construim o paralelă la bisectoarea CD care să treacă prin punctul A (vîrfurile A fiind vîrfurile unghiului cu măsura cea mai mică — ipoteză). Notăm această dreaptă XY .

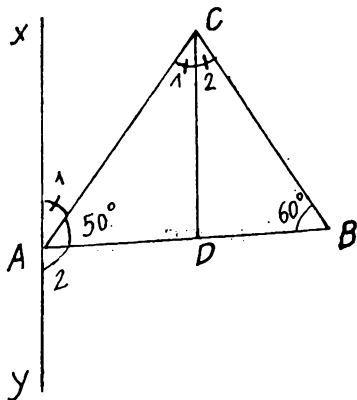


Fig. VI.G.33.

Se observă că : $\widehat{C}_1 \equiv \widehat{A}_1$ (unghiuri alterne interne ; secantă : dreapta AC , paralelele : dreptele XY și CD , ipoteză). Deducem $m(\widehat{A}_1) = m(\widehat{C}_1) = 35^\circ$. Așadar paralela XY formează cu latura AC un unghi de 35° . Rezultă imediat : $m(\widehat{A}_2) = 180^\circ - (50^\circ + 35^\circ) = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$ (în jurul unui punct și de o parte a unei drepte care trece prin punct sînt 180°). Așadar paralela XY formează cu latura AB un unghi a cărui măsură este de 95° (unghi obtuz) sau 85° (unghi ascuțit). Deoarece XY nu este paralelă cu BC , unghiul ascuțit dintre XY și BC este egal cu $180^\circ - (60^\circ + 85^\circ) = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$.

VI.G.34. a)

$\triangle AEM \equiv \triangle AEP$, deoarece : $\begin{cases} m(\widehat{PEA}) = m(\widehat{MEA}) = 90^\circ \\ PE \equiv EM \text{ (ipoteză)} \\ AE = AE \text{ (latură comună)} \end{cases}$
(cazul L.U.L.)

Rezultă $AM \equiv AP$ (1) dar și $\widehat{MAE} \equiv \widehat{PAE}$.

$\triangle AMF \equiv \triangle AQF$, deoarece : $\begin{cases} m(\widehat{AFM}) = m(\widehat{AFQ}) = 90^\circ \\ MF \equiv FQ \text{ (ipoteză)} \\ AF = AF \text{ (latură comună)} \end{cases}$
(cazul L.U.L.)

Rezultă $AM \equiv AQ$ (2) dar și $\widehat{MAF} \equiv \widehat{QAF}$.

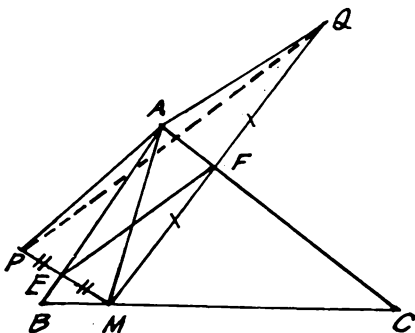


Fig. VI.G.34.

Din (1) și (2) $\Rightarrow AP \equiv AQ$. (Tranzitivitatea relației de congruență),
așadar $\triangle APQ$ este isoscel.

b) Știm că $\widehat{MAE} \equiv \widehat{PAE}$ și $\widehat{MAF} \equiv \widehat{QAF}$, demonstrat $\Rightarrow m(\widehat{PAQ}) =$
 $= 2 \cdot m(\widehat{BAC})$; $m(\widehat{APQ}) = m(\widehat{AQP}) = \frac{180^\circ - m(\widehat{PAQ})}{2} = 90^\circ - \frac{m(\widehat{PAQ})}{2}$
 $= 90^\circ - m(\widehat{BAC})$.

c) $\triangle APQ$ este isoscel (demonstrat). Presupunem $\triangle APQ$ echila-
teral $\Rightarrow m(\widehat{PAQ}) = 60^\circ \Rightarrow m(\widehat{APQ}) = m(\widehat{AQP}) = \frac{(180^\circ - 60^\circ)}{2} = 60^\circ =$
 $= 90^\circ - m(\widehat{BAC}) \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$.

d) P, A, Q coliniare dacă $m(\widehat{PAQ}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ (din
demonstrația $m(\widehat{PAE}) = m(\widehat{MAE})$ și $m(\widehat{MAF}) = m(\widehat{QAF})$). Deci $m(\widehat{PAQ}) =$
 $= 2m(\widehat{BAC}) \Rightarrow 180^\circ = 2 \cdot m(\widehat{BAC}) \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$.

e) PQ este minimă când $AP \equiv AM \equiv AQ$ este minimă. Aceasta se realizează când $AM \perp BC$, deci atunci când în $\triangle BAC$, M este piciorul înălțimii duse din A pe latura BC . Altă rezolvare : În $\triangle PMQ$, EF este linie mijlocie ($PE \equiv EM$ și $QF \equiv FM$ din ipoteză) și deci $EF = \frac{PQ}{2}$. Deci

minimul lui PQ are loc odată cu al lui EF . Înșă $EF \equiv AM$ ($AEMF$ dreptunghi, diagonale ale dreptunghiului) \Rightarrow AM minimă când $AM \perp BC$.

VI.G.35. a) Din $AF \perp BC$ și $M \in AF$ deducem : AF este și bisectoarea lui \widehat{BAC} ($AB \equiv AC$ ipoteză) $\Rightarrow m(\widehat{FAE}) = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ = m(\widehat{FAD})$ și deci :

$$\triangle ADM \equiv \triangle AEM, \text{ deoarece : } \begin{cases} m(\widehat{DAF}) = m(\widehat{FAE}) (= 80^\circ) \\ AM = AM \text{ (latură comună)} \\ AD \equiv AE \text{ (ipoteză)} \end{cases}$$

(cazul L.U.L.)

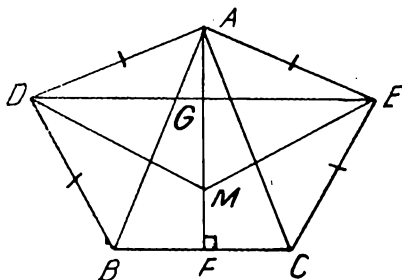


Fig. VI.G.35.

Rezultă că $DM \equiv ME$.

b) Cum $\triangle ADE$ — isoscel (ipoteză) și $m(\widehat{DAF}) = 80^\circ = m(\widehat{FAE}) \Rightarrow \Rightarrow$ în $\triangle DAE$ AF — bisectoarea unghiului DAE dar și înălțimea relativă laturii DE , deci $AF \perp DE$. Dar $AF \perp BC$ (punctul a). Rezultă $DE \parallel BC$.

VI.G.36. Din ipotezele : $\{F\} = BE \cap CD$ și $AB \equiv AC$ și $DE \parallel BC \Rightarrow \widehat{ADE} \equiv \widehat{AED}$ (corespondente) adică $\triangle ADE$ este isoscel și anume : $m(\widehat{ADE}) \equiv m(\widehat{AED}) \Rightarrow AE \equiv AD \Rightarrow EC \equiv DB$ (diferență de segmente congruente).

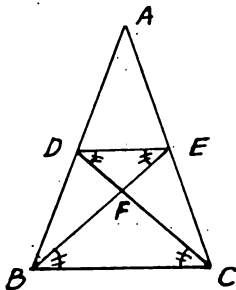


Fig. VI.G.36.

Așadar $\triangle DBC \equiv \triangle ECB$,
deoarece :
(cazul L.U.L.)

$$\left\{ \begin{array}{l} DB \equiv EC \text{ (demonstrat)} \\ BC = BC \text{ (latură comună)} \\ \widehat{DBC} \equiv \widehat{ECB} \text{ (triunghiul } \triangle ABC \\ \text{isoscel — ipoteză)} \end{array} \right.$$

Rezultă că $\widehat{BDC} \equiv \widehat{CEB} \Rightarrow \widehat{FDE} \equiv \widehat{FED}$ ($m(\widehat{FDE}) = m(\widehat{BDE}) - m(\widehat{BDC})$), iar $m(\widehat{FED}) = m(\widehat{CED}) - m(\widehat{CEB}) \Rightarrow \triangle FDE$ isoscel și anume $FD \equiv FE$. Cum $\widehat{FED} \equiv \widehat{FBC}$ (alt. int.) și $\widehat{FDE} \equiv \widehat{FCB}$ (alt. int.) rezultă că și $\triangle FBC$ isoscel și anume $FB \equiv FC$.

Observație : Triunghiurile BFC și DFE sînt isoscele și în cazul în care punctele D și E sînt luate pe prelungirile laturilor AB și AC , astfel încît $DE \parallel BC$.

VI.G.37. a) $PI \equiv RI \equiv QI$ (distanțele de la un punct de pe bisectoare la laturile unghiului sînt congruente). În $\triangle BIC$, $m(\widehat{B}_2) + m(\widehat{C}_2) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow$ în $\triangle ABC$, $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB}) = 120^\circ \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$; $m(\widehat{A}_1) = m(\widehat{A}_2) = 30^\circ \Rightarrow$ în triunghiul dreptunghic AIP (ipoteză) $PI = \left(\frac{12}{2}\right) = 6$ cm, ca fiind cateta ce se opune unghiului de 30° . Așadar $PI = RI = QI = 6$ cm.

b) $\triangle BMI$ — isoscel ptc. din $\widehat{B}_1 \equiv \widehat{B}_2$ (ipoteză) și $\widehat{B}_2 = \widehat{I}_1 \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{I}_1$ (ipoteză) $\Rightarrow MB \equiv MI$ (1) dar și $\triangle NCI$ este isoscel căci $\widehat{C}_1 \equiv \widehat{C}_2$ (ipoteză) și $\widehat{C}_2 \equiv \widehat{I}_2$ (alt. int. ipoteză) $\Rightarrow \widehat{C}_1 \equiv \widehat{I}_2 \Rightarrow NC \equiv NI$ (2).
Din (1) și (2) rezultă $MB + NC = MN$.

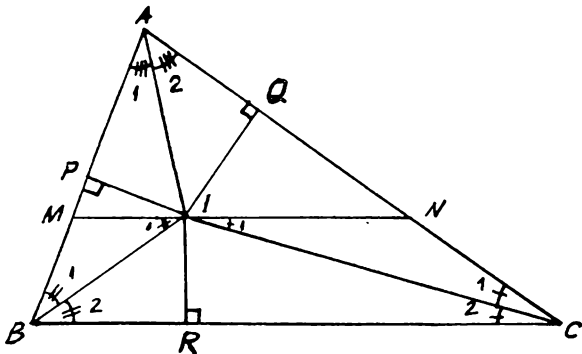


Fig. VI.G.37.

VI.G.38. a) În MDN avem DA — mediană (ipoteză), apoi deoarece în $\triangle BAC$, MN este bisectoarea exterioară a unghiului BAC (ipoteză), urmează că este perpendiculară pe dreapta AD , care în $\triangle BAC$ este bisectoarea interioară a unghiului BAC (proprietate cunoscută). În aceste condiții DA este în $\triangle MDN$, mediană și înălțime $\Rightarrow \triangle MDN$ isoscel (proprietate) și anume $MD \equiv ND$.

b)

$\triangle AMB \equiv \triangle ANE$, deoarece :
(caz U.L.U.)

$$\left\{ \begin{array}{l} - m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AND}) \\ \text{conform punctului} \\ \text{precedent} \\ - AM = AN \text{ (ipoteză)} \\ - m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{NAE}) = \\ = 90^\circ - m(\widehat{BAC}) : 2 \end{array} \right\}$$

Din această congruență ne interesează în mod special $AB \equiv AE$.

c) În $\triangle ABE$ avem $AB \equiv AE$ (de la punctul b) și $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAE})$ — ipoteză, deci în \triangle isoscel ABE bisectoarea AD este și înălțime : $AD \perp BE$.

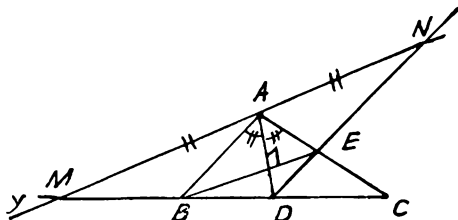


Fig. VI.G.38.

d) Din $AD \perp MN$ și $AD \perp BE \Rightarrow BE \parallel MN$ conform prepoziției : dacă două drepte intersectate de o secantă formează unghiuri interne și de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sînt paralele.

VI.G.39. a) Notăm de exemplu $m(\widehat{B}) = x^\circ \Rightarrow m(\widehat{C}) = 2x^\circ$ (ipoteză). Din EF — bisectoarea $\widehat{AED} \Rightarrow m(\widehat{AEF}) = m(\widehat{AED}) : 2$ dar $m(\widehat{AED}) \equiv m(\widehat{ACB})$ (corespondente, ipoteză). Cum $m(\widehat{ECD}) = m(\widehat{ACD}) : 2 = x^\circ \Rightarrow m(\widehat{AEF}) = m(\widehat{ECD}) = x^\circ \Rightarrow EF \parallel DC$.

b) În $\triangle BDC$, $m(\widehat{BDC}) = 180^\circ - 2x^\circ$ (ipoteză).

În $\triangle DEC$, $m(\widehat{DEC}) = 180^\circ - 2x^\circ$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{BDC} \equiv \widehat{DEC}$. Din $EF \parallel DC$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{ADC} \equiv \widehat{AFE}$ — correspondente.

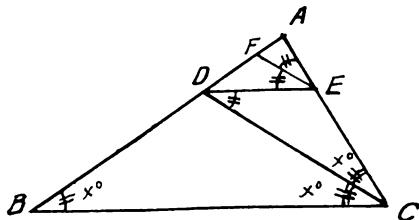


Fig. VI.G.39.

c) În $\triangle DBC$ avem : $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{ACB}) : 2 = m(\widehat{DCB}) \Rightarrow \triangle DBC$ — isoscel.

În $\triangle EDC$ avem : $m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{ACB}) : 2 = m(\widehat{AED}) : 2 = m(\widehat{FED}) = m(\widehat{EDC})$ (alterne interne) $\Rightarrow \triangle EDC$ isoscel.

În FDE : $m(\widehat{FED}) = m(\widehat{AED}) : 2 = x^\circ$. Dar $m(\widehat{FDE}) = m(\widehat{ABC}) = x^\circ$ (corespondente). Rezultă deci : $\widehat{FED} \equiv \widehat{FDE} \Rightarrow \triangle FDE$ — isoscel.

VI.G.40. $\triangle A'A''B'$ — isoscel ; deoarece : $A'A'' = AB$ ($\triangle ABA'' \equiv \triangle A'A''A$ — U.L.U., latura comună fiind latura comună și din care rezultă $A'A'' \equiv AB$ și $AA'' \equiv BA''$) și $A''B' = BB' - BA'' = AC - BC = AB \Rightarrow A'A'' \equiv A''B'$, $\Rightarrow m(\widehat{A'B'A''}) = m(\widehat{B'A''A'})$.

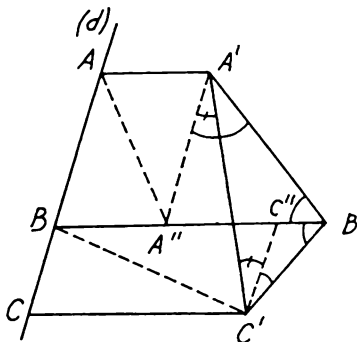


Fig. VI.G.40.

Apoi, $\triangle C'C''B'$ — isoscel ; deoarece : $C'C'' = BC$ ($\triangle BCC' \equiv \triangle C'C''C$ — U.L.U. — latura comună fiind BC' . Din această congruență rezultă $C'C'' \equiv BC$ și $BC'' \equiv CC'$) și $C''B' = BB' - BC'' = AC - CC' = AC - AB = BC \Rightarrow C'C'' = C''B' \Rightarrow m(\widehat{C'B'C''}) = m(\widehat{B'C''C'})$. Dar $m(\widehat{A'B'A''}) = m(\widehat{B'A''A'}) = m(\widehat{B'A''C'}) + m(\widehat{C'A''A'})$ și $m(\widehat{C'B'C''}) = m(\widehat{B'C''C'}) = m(\widehat{B'C''A'}) - m(\widehat{A'C''C'})$.

Evaluăm suma : $m(\widehat{A'B'A''}) + m(\widehat{C'B'C''}) = m(\widehat{B'A''C'}) + m(\widehat{B'C''A'})$ ($\widehat{C'A''A'} \equiv \widehat{A'C''C''}$ — alterne interne).

$$m(\widehat{A'B'C'}) = m(\widehat{B'A''C'}) + m(\widehat{B'C''A'}) \Rightarrow m(\widehat{A'B'C'}) = 90^\circ.$$

Dacă punctul A se găsește între B și C , propoziția rămâne adevărată. Triunghiurile isoscele sînt : $\triangle C'C''A'$ și $B'B'A'$ — în continuare, analog cu precedenta.

VI.G.41.

$$\triangle MDB \equiv \triangle MDC, \text{ deoarece : } \begin{cases} MD = MD \\ BD \equiv DC \text{ (în } \triangle ABC \text{ isoscel (ipoteză) } AD \text{ — înălțime și mediană)} \\ m(\widehat{MDB}) = m(\widehat{MDC}) = 90^\circ \end{cases}$$

(caz C.C.)

În $\triangle MDB$: DN — înălțime; în $\triangle MDC$: DP — înălțime, iar $\triangle MDB \equiv \triangle MDC$ (demonstrat) $\Rightarrow DN \equiv DP$ (înălțimi corespunzătoare ipotenzelor în triunghiuri dreptunghice congruente).

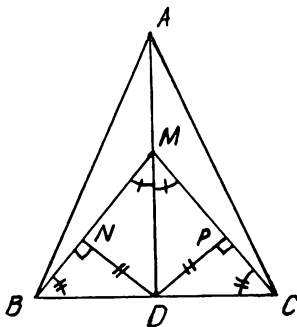


Fig. VI.G.41.

RECIPROCA: Fie M un punct de pe înălțimea AD a unui triunghi ABC și distanțele DN și DP la BM și respectiv CM . Știind că $DN \equiv DP$ să se demonstreze că $\triangle ABC$ este isoscel.

Demonstrație:

$$\triangle MDN \equiv \triangle MDP, \text{ deoarece: } \begin{cases} m(\widehat{MND}) = m(\widehat{MPD}) = 90^\circ \\ MD = MD \\ DN \equiv DP \text{ — ipoteză} \end{cases}$$

(caz I.C.)

Rezultă: $\widehat{BMD} \equiv \widehat{CMD} \Rightarrow$ (1) $\widehat{MBD} \equiv \widehat{MCD}$ (complementele lor în triunghiurile dreptunghice MBD respectiv MCD fiind congruente.

(2) $\widehat{AMB} \equiv \widehat{AMC}$ (suplementele lor fiind unghiurile congruente BMD și CMD).

Din (1) și (2) rezultă că:

$$\triangle AMB \equiv \triangle AMC, \text{ deoarece: } \begin{cases} AM = AM \\ BM \equiv MC \text{ } (\triangle MBC \text{ — isoscel din (1)}) \\ \widehat{AMB} \equiv \widehat{AMC} \text{ (din (2))} \end{cases}$$

(caz L.U.L.)

Rezultă: $AB \equiv AC$, deci $\triangle ABC$ — isoscel.

VI.G.42. DIRECTA: În patrulaterul $AFEG$ avem $m(\widehat{A}) + m(\widehat{G}) + m(\widehat{E}) + m(\widehat{F}) = 360^\circ$. Dar din ipoteză: $m(\widehat{A}) = 90^\circ$; $m(\widehat{G}) = 90^\circ$; $m(\widehat{F}) = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{E}) = 90^\circ$.

În $\triangle AEE'$: $AF \perp EE'$ și $E'F \equiv FE$ definiția simetricului unui punct față de o dreaptă (ipoteză) $\Rightarrow \triangle AEE'$ isoscel. Notăm $m(\widehat{AE'E}) = m(\widehat{AEE'}) = x^\circ$. (1)

Apoi în $\triangle AEE''$ avem : $AG \perp EE''$ și $EG \equiv GE''$ (analog cu precedentă) $\Rightarrow \triangle AEE''$ — isoscel. Notăm : $m(\widehat{AEG}) = m(\widehat{AE''G}) = y^\circ$. (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow m(\widehat{E'EE''}) = x^\circ + y^\circ$. Dar $m(\widehat{E'EE''}) = 90^\circ$ (demonstrat) $\Rightarrow x^\circ + y^\circ = 90$. Evaluăm $m(\widehat{EAE''}) + m(\widehat{EAE'}) = (180 - 2x^\circ) + (180 - 2y^\circ) = 360 - 2(x^\circ + y^\circ)$. Cum $x^\circ + y^\circ = 90^\circ$ (demonstrat) rezultă : $m(\widehat{EAE''}) + m(\widehat{EAE'}) = 180^\circ \Rightarrow$ punctele E' , A , E'' sînt coliniare.

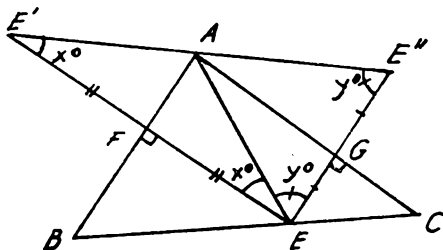


Fig. VI.G.42.

RECIPROCA : Știm din propoziția directă că $\triangle AEE'$ — isoscel și anume : $m(\widehat{AE'E}) = m(\widehat{AEE'}) = x^\circ$ și $\triangle AEE''$ — isoscel și anume : $m(\widehat{AE''E}) \equiv m(\widehat{AEE''}) = y^\circ$, iar despre punctele E' , A , E'' — coliniare reciprocei (ipoteză).

În $\triangle E'EE''$, $m(\widehat{E'EE''}) + m(\widehat{EE''E'}) + m(\widehat{E'EE''}) = 180^\circ$. Și folosind notațiile simplificatoare : $x^\circ + y^\circ + x^\circ + y^\circ = 180^\circ$; $2x^\circ + 2y^\circ = 180^\circ \Rightarrow \Rightarrow x^\circ + y^\circ = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{E'EE''}) = 90^\circ$.

În patrulaterul $AFEG$: $m(\widehat{A}) + m(\widehat{F}) + m(\widehat{E}) + m(\widehat{G}) = 360^\circ$, sau : $m(\widehat{A}) + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow m(\widehat{A}) = 90^\circ$, și deci $\triangle ABC$ este dreptunghic în A .

VI.G.43. Rezolvarea I :

Vom construi \widehat{B} și vom presupune $m(\widehat{B}) = x^\circ$; apoi \widehat{A} și conform ipotezei $m(\widehat{A}) = 2x^\circ$. Bisectoarea unghiului \widehat{A} , determină $\triangle ADB$ — isoscel (ipoteză) și anume :

(1) $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BAD}) = x^\circ$. Cum $DE \parallel AB$ (ipoteză), rezultă că $\widehat{ABD} \equiv \widehat{EDC}$ (unghiuri corespondente congruente) și deci :

(2) $m(\widehat{EDC}) = x^\circ$. Pe de altă parte \widehat{ADC} este unghi exterior triunghiului ADB și deci :

(3) $m(\widehat{ADC}) = 2x^\circ$.

Din (2) și (3) rezultă că DE este bisectoarea unghiului \widehat{ADC} . Așadar DE fiind mediană în $\triangle ADC$ (ipoteză) dar și bisectoare (demonstrat), rezultă că $\triangle ADC$ este isoscel (conform proprietății caracteristice : „dacă

într-un triunghi o mediană este și bisectoarea, atunci triunghiul este isoscel⁴⁾ și anume $\widehat{DAC} \equiv \widehat{ACD}$, deci :

(4) $m(\widehat{C}) = x^\circ$. Scriind că în $\triangle ABC$ suma unghiurilor este egală cu 180° obținem : $m(\widehat{B}) + m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$, adică $x^\circ + 2x^\circ + x^\circ = 180^\circ$ și deci $4x^\circ = 180^\circ$; urmează ca :

(5) $x^\circ = 45^\circ$. În concluzie măsurile unghiurilor triunghiului ABC sînt : $m(\widehat{A}) = 90^\circ$; $m(\widehat{B}) = 45^\circ$; $m(\widehat{C}) = 45^\circ$ ($\triangle ABC$ este dreptunghic și isoscel).

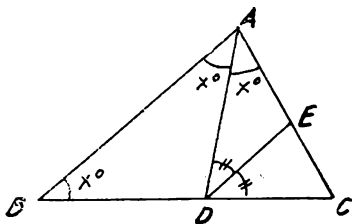


Fig. VI.G.43.

Observație : Cunoștințele folosite în rezolvarea problemei au fost, în ordinea învățată : proprietăți ale triunghiurilor isoscele ; despre drepte paralele intersectate de o secantă ; despre suma unghiurilor unui triunghi.

Problema se poate rezolva mult mai simplu folosind și alte cunoștințe cum ar fi : teorema liniei mijlocii într-un triunghi (teorema directă și reciprocă) sau proprietatea mediane relative ipotenuzei dintr-un triunghi dreptunghic (teorema directă și reciprocă). Astfel :

Rezolvarea a II-a :

În $\triangle ABC$, DE fiind paralelă cu AB și E fiind mijlocul laturii AC (ipoteză) rezultă că este linie mijlocie (reciprocă). Deducem că $BD \equiv DC$. Urmează că în $\triangle ABC$, AD este bisectoarea (ipoteză) și mediană (demonstrat) deci $\triangle ABC$ este isoscel și anume $AB \equiv AC$ (proprietate caracteristică) așadar $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$. Cum $m(\widehat{B}) = x^\circ$ rezultă că și $m(\widehat{C}) = x^\circ$. $m(\widehat{A})$ fiind $2x^\circ$ (ipoteză) deducem prin calcul că $x = 45^\circ$. Așadar $\triangle ABC$ are măsurile unghiurilor astfel : $m(\widehat{A}) = 90^\circ$; $m(\widehat{B}) = 45^\circ$; $m(\widehat{C}) = 45^\circ$ ($\triangle ABC$ este dreptunghic și isoscel).

Rezolvarea a III-a :

Triunghiul ADB este isoscel (ipoteză) și anume : (1) $AD = DB$. Am văzut că ED este linie mijlocie în $\triangle ABC$ (prin reciprocă) adică : (2) $DB \equiv DC$. Prin tranzitivitatea relației de congruență deducem : (3) $AD \equiv DB \equiv DC$. Conform reciprocei : „dacă într-un triunghi lungimea mediane este jumătate din lungimea laturii corespunzătoare, atunci triunghiul este dreptunghic și anume unghiul drept este opus laturii pe care se duce mediana” rezultă că $\triangle ABC$ este dreptunghic în \widehat{A} , deci $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $m(\widehat{B}) = 45^\circ$, $m(\widehat{C}) = 45^\circ$ ($\triangle ABC$ este dreptunghic și isoscel).

VI.G.44. a) Fie $MP \cap AC = \{R\}$. În $\triangle ANR$ există $m(\widehat{NAR}) = 60^\circ$ (ipoteză); $\widehat{ANR} \equiv \widehat{MNB}$ (opusă la vîrf). Din $MB \equiv BD$ și $BD = \frac{AB}{2} = BN$

(ipotezele problemei) $\Rightarrow BN \equiv MB \Rightarrow$ în $\triangle MNB$ isoscel, $m(\widehat{MNB}) = \frac{180^\circ - m(\widehat{MBN})}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - 60^\circ)}{2} = 30^\circ \Rightarrow m(\widehat{ANR}) = 30^\circ$. Atunci

$m(\widehat{ARN}) = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ \Rightarrow MN \perp AC$.

b) În $\triangle AMC$, $AD \perp MC$ (ipoteză) și $MR \perp AC$ (demonstrat) $\Rightarrow \Rightarrow \{P\} = MR \cap AD$ — ortocentrul \triangle -ului AMC , $\Rightarrow CP \perp AM$.

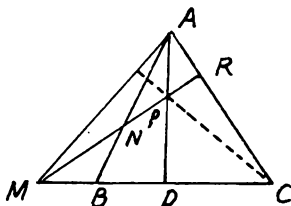


Fig. VI.G.44.

VI.G.42. Considerăm :

$\triangle DBC \equiv \triangle CAD$, deoarece : $\begin{cases} DC — \text{latură comună} \\ DB \equiv AC \text{ (ipoteză)} \\ BC \equiv AD \text{ (ipoteză)} \end{cases}$

Rezultă : $\widehat{BDC} \equiv \widehat{ACD}$ (1).

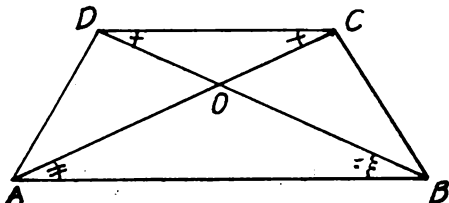


Fig. VI.G.45.

$\triangle DAB \equiv \triangle CBA$, deoarece : $\begin{cases} AB — \text{latură comună} \\ DB \equiv CA \text{ (ipoteză)} \\ AD \equiv BC \text{ (ipoteză)} \end{cases}$

Rezultă : $\widehat{DBA} \equiv \widehat{CAB}$ (2).

Notînd cu O intersecția diagonalelor, avem : $\widehat{DOC} \equiv \widehat{AOB}$ (unghiuri opuse la vîrf). În $\triangle DOC$ — isoscel (1), $m(\widehat{DOC}) = 180^\circ - 2m(\widehat{DCO})$. În $\triangle AOB$ — isoscel (2), $m(\widehat{AOB}) = 180^\circ - 2 \cdot m(\widehat{OAB})$. Cum $\widehat{DOC} \equiv \widehat{AOB} \Rightarrow \Rightarrow \widehat{DCO} \equiv \widehat{CAB} \Rightarrow DC \parallel AB$.

VI.G.46. $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$ (caz L.U.L.) deoarece : $AB \equiv AC$ (ipoteză), $AD \equiv AE$ (ipoteză), $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAE}$ (ipoteză) $\Rightarrow BD = CE$ și $BC = DE \Rightarrow \Rightarrow DECB$ — paralelogram.

Din faptul că $\triangle ABD \equiv \triangle ACE \Rightarrow \widehat{ABD} \equiv \widehat{ACE}$ dar $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{DBC} \equiv \widehat{ECB} \Rightarrow \widehat{DECB}$ — dreptunghi, ceea ce justifică construcția propusă. $\triangle ADE$ isoscel (ipoteză) $\Rightarrow m(\widehat{AED}) = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$.

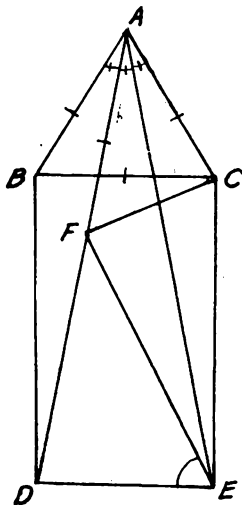


Fig. VI.G.46.

Apoi :

$\triangle ABD \equiv \triangle AFE$, deoarece : $\begin{cases} AB = AF \text{ (ipoteză)} \\ AD = AE \text{ (ipoteză)} \\ m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{FAE}) = 20^\circ \text{ (ipoteză)} \end{cases}$

Rezultă : $m(\widehat{AEF}) = m(\widehat{ADB}) = 10^\circ$ rezultă $m(\widehat{DEF}) = m(\widehat{AED}) - m(\widehat{AEF}) = 80^\circ - 10^\circ = 70^\circ$.

VI.G.47. a) $AM = 2MC$ și $PC = 2AP \Rightarrow$ segmentul AC — împărțit în trei părți egale de punctele P și M , astfel încît : $AP \equiv PM \equiv MC$.

Considerăm :

$\triangle BMC \equiv \triangle PMN$, deoarece : $\begin{cases} BM \equiv MN \text{ (ipoteză)} \\ MC \equiv MP \text{ (demonstrat)} \\ \widehat{BMC} \equiv \widehat{NMP} \text{ (opuse la vîrf)} \end{cases}$

Rezultă : $PN \equiv BC$ și $\widehat{MPN} = \widehat{MCB}$ (alterne interne) $\Rightarrow PN \parallel BC$, sau : considerăm patrulaterul $BCNP$ cu diagonalele BN și PC . Dar $BM \equiv MN$ și $PM \equiv MC \Rightarrow BCNP$ este paralelogram $\Rightarrow PN \parallel BC$ și $PN = BC$.

b) Notăm $AB = x$, $AC = y$. Din ipoteză :

$$\frac{2x + 3y}{4x - y} = \frac{5}{3} \Rightarrow 6x + 9y = 20x - 5y \Leftrightarrow 9y + 5y = 20x - 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14y = 14x \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow AB \equiv AC.$$

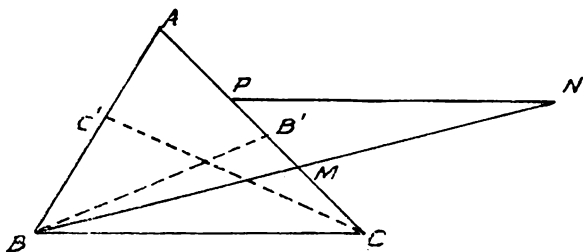


Fig. VI.G.47.

Deci în ipotezele punctului (b) $\triangle ABC$ este isoscel, și într-un triunghi isoscel se poate demonstra că înălțimile corespunzătoare laturilor congruente sînt congruente, deci $BB' \equiv CC'$, unde BB' și CC' sînt înălțimile $\triangle ABC$, $B' \in AC$ și $C' \in AB$.

Observație : Dacă în teorema „într-un triunghi isoscel înălțimile corespunzătoare laturilor congruente, sînt congruente”, înlocuim cuvîntul „înălțimile” cu cuvintele „medianele” sau „bisectoarele”, obținem propoziții (proprietăți) adevărate, adică noi teoreme relative triunghiurilor isoscele. Se demonstrează că și propozițiile „reciproce” ale acestora sînt tot „proprietăți” ale triunghiurilor isoscele — deci proprietăți „caracteristice” ale triunghiurilor isoscele.

VI.G.48. Fie patrulaterul $BCPM$: $BM \parallel PC$ (ipoteză) și $MP \parallel BC$ (ipoteză) \Rightarrow $BCPM$ paralelogram ; R intersecția diagonalelor $\Rightarrow MR \equiv RC$ și $BR \equiv RP$ (proprietate în paralelogram). De asemenea $PC \equiv BM$ (proprietate în paralelogram) $\equiv MA$ (ipoteză). Considerăm patrulaterul $AMCP$ cu $AM \parallel PC$ și $AM = PC$ (demonstrat) \Rightarrow $AMCP$ este paralelogram. N — intersecția diagonalelor $\Rightarrow MN = NP$ (proprietate în paralelogram).

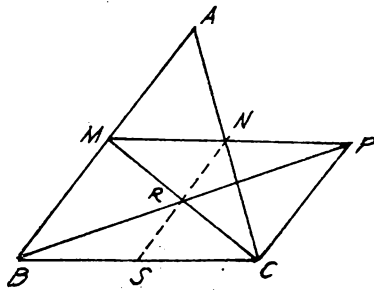


Fig. VI.G.48.

Fi e $\triangle MPC : MN = NP$ și $MR \equiv RC$ (demonstrat) $\Rightarrow NR$ — linie mijlocie $\Rightarrow NR \parallel PC \Rightarrow \widehat{MRN} = \widehat{MCP}$ (corespondente). (1)

Fi e $\triangle MCB : MR \equiv RC$ și $BS \equiv SC$ (demonstrat) $\Rightarrow RS$ — linie mijlocie $\Rightarrow RS = BM \Rightarrow \widehat{SRC} \equiv \widehat{BMC}$ (corespondente). (2)

Dar $BMCP$ — paralelogram (demonstrat) ($BM \parallel CP$) $\Rightarrow \widehat{BMC} \equiv \widehat{MCP}$ (alterne interne). (3)

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{SRC} \equiv \widehat{MRN}$.

Deci : \widehat{SRC} și \widehat{MRN} sînt congruente și au latura MR și RC în prelungire $\Rightarrow NR$ și RS sînt în prelungire $\Rightarrow N, R, S$ — coliniare.

Observație : După ce am stabilit că patrulaterele $BCPM$ și $MCPA$ sînt paralelograme, și că punctele R și N sînt intersecțiile diagonalelor acestor paralelograme, rezolvarea problemei putea să continue astfel :

În $\triangle MCP$, NR linie mijlocie, deci $NR \parallel PC$.

În $\triangle CMB$, RS linie mijlocie, deci $SR \parallel MB$.

Cum $PC \parallel MB$, $BCPM$ fiind paralelogram $\Rightarrow NR \parallel RS$, așadar punctele N, R, S — coliniare.

VI.G.49. a)

$\triangle AME \equiv \triangle BMC$, $\left. \begin{array}{l} AM \equiv MB \text{ (ipoteză)} \\ ME \equiv MC \text{ (ipoteză)} \\ \widehat{EMA} \equiv \widehat{BMC} \text{ (opuse la vîrf)} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{EAM} \equiv \widehat{MBC}$
(caz L.U.L.)

b)

$\triangle ANF \equiv \triangle BNC$, $\left. \begin{array}{l} BN \equiv NF \text{ (ipoteză)} \\ AN \equiv NC \text{ (ipoteză)} \\ \widehat{ANF} \equiv \widehat{BNC} \text{ (opuse la vîrf)} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{FAN} \equiv \widehat{NCB}$
(caz L.U.L.)

Cum $\widehat{EAF} = m(\widehat{EAM}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{NAF}) = m(\widehat{MBC}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{NCB}) = 180 \Rightarrow E, A, F$ sînt coliniare.

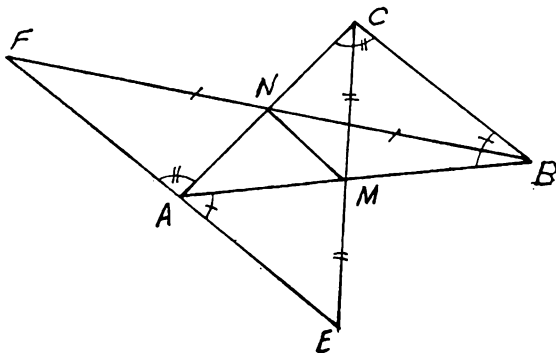


Fig. VI.G.49.

Altă rezolvare : b) Patrulaterul $AEBC$ este paralelogram, deoarece diagonalele AB și EC se înjumătățesc $\Rightarrow AE \parallel BC$ (1)

Patrulaterul $FABC$ este paralelogram deoarece diagonalele AC și FB se înjumătățesc $\Rightarrow AF \parallel BC$ (2). Rezultat care împreună cu (1) $\Rightarrow \Rightarrow AE \parallel AF \Rightarrow A, E, F$ coliniare.

c) DIRECTĂ : Din $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ și $CN \equiv NA$ (BN mediană) $\Rightarrow \Rightarrow BN = CN$ conform teoremei : „Într-un triunghi dreptunghic mediana relativă ipotenuzei este jumătate din lungimea ipotenuzei.“

RECIPROCĂ : Din BN mediană în $\triangle BAC$, și $BN \equiv CN \Rightarrow BN \equiv \equiv AN$. $\triangle BNC$ isoscel : $m(\widehat{CBN}) = m(\widehat{BCN}) = x^\circ$. $\triangle BNA$ isoscel : $m(\widehat{ABN}) = m(\widehat{BAN}) = y^\circ$. Calculăm : $m(\widehat{BNC}) + m(\widehat{BNA}) = 180^\circ - 2x^\circ + + 180^\circ - 2y^\circ \Rightarrow 180^\circ = 360 - 2(x^\circ + y^\circ) \Rightarrow x^\circ + y^\circ = 90^\circ$, deci $\triangle ABC$ dreptunghic în B .

VI.G.50. Fie $\triangle ABC$: $AM \equiv MB$ (ipoteză) și $BN \equiv NC$ (ipoteză) $\Rightarrow MN$ — linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel AC$, $MN = \frac{AC}{2}$. (1)

Fie $\triangle ADC$: $AQ = QD$ (ipoteză) și $CP = PD$ (ipoteză) $\Rightarrow QP$ — linie mijlocie $\Rightarrow QP \parallel AC$, $QP = \frac{AC}{2}$. (2)

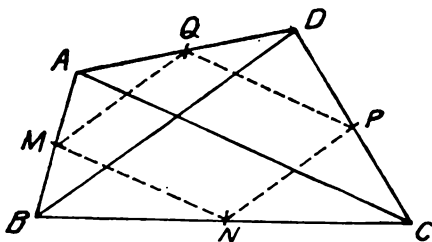


Fig. VI.G.50.

Din (1) și (2) $\Rightarrow MN \parallel QP$ și $MN = QP \Rightarrow MNPQ$ — paralelogram.

Pentru ca $MNPQ$ să fie dreptunghi trebuie ca să aibă în plus un unghi de 90° de exemplu ($MN \perp QM$). Dar $MN \parallel AC$ și $QM \parallel DB$ deci trebuie ca $AC \perp DB$. Deci diagonalele patrulaterului să fie perpendiculare, deci patrulaterul să fie ortodiagonal.

Pentru ca $MNPQ$ să fie pătrat trebuie ca în plus de cazul precedent, de exemplu $MN \equiv QM$. Dar $MN = \frac{AC}{2}$, $QM = \frac{DB}{2}$ (ca linie mijlocie în ADB) $\Rightarrow = \frac{AC}{2} \Rightarrow \frac{DB}{2} \Rightarrow AC = DB$ deci patrulaterul $ABCD$ trebuie să aibă diagonalele perpendiculare și congruente.

VI.G.51. DIRECTĂ : Dacă $AD \parallel BC$ și $AB \parallel DC$ și $AM = MB$ și $DM \equiv MC$ atunci :

$$\Delta ADM \equiv \Delta BCM, \text{ deoarece : } \left\{ \begin{array}{l} AM \equiv BM \text{ (ipoteză)} \\ AD \equiv BC \text{ (laturi opuse în} \\ \text{paralelogram)} \\ DM \equiv MC \text{ (ipoteză)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m(\widehat{ADM}) \equiv m(\widehat{BCM}), \\ \text{cum } m(\widehat{ADM}) + m(\widehat{BCM}) = \\ = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{ADM}) = 90^\circ \end{array} \right.$$

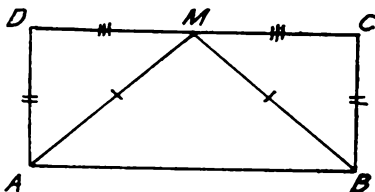


Fig. VI.G.51.

RECIPROCĂ : În figura VI.G.51., presupunem ABCD dreptunghi. Dacă $AD \parallel BC$ și $AB \parallel DC$ și $m(\widehat{ADC}) = 90^\circ$ și $DM \equiv MC$, atunci :

$$\Delta ADM \equiv \Delta BCM, \text{ deoarece : } \left\{ \begin{array}{l} AD \equiv BC \text{ (laturi opuse} \\ \text{în dreptunghi)} \\ m(\widehat{ADM}) = m(\widehat{BCM}) = 90^\circ \\ DM \equiv MC \text{ (ipoteză)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow AM \equiv MB$

VI.G.52. Ducem : $PT \parallel AC$, ($T \in BR$) \Rightarrow PQRT este dreptunghi deoarece are laturile paralele două câte două : $PQ \parallel RT$ și $TP \parallel RQ$ și $m(\widehat{PQR}) = 90^\circ$ (ipoteză) $\Rightarrow RQ \equiv TP$ și $TP \perp BR$.

$$\text{Apoi : } \left\{ \begin{array}{l} \Delta BTP \equiv \Delta PSB, \text{ deoarece :} \\ BP \text{ (latură comună)} \\ m(\widehat{BTP}) = m(\widehat{BSP}) = 90^\circ \\ m(\widehat{BPT}) = m(\widehat{PBS}), \text{ (deoarece :} \\ \widehat{BPT} \equiv \widehat{BCR} \text{ (alterne interne,} \\ \text{paralele } PT \text{ și } CR) \\ \text{și } \widehat{BCR} \equiv \widehat{PBS} \text{ ca unghiuri ale} \\ \Delta ABC \text{ isoscel)} \end{array} \right.$$

Rezultă că : $TP \equiv BS$, dar $TP = RQ$ (demonstrat), deci $BS = RQ$.

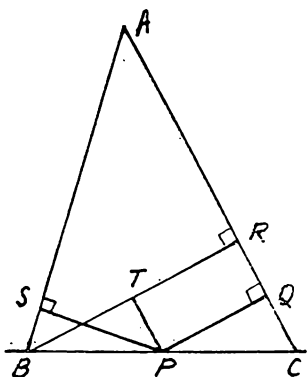


Fig. VI.G.52.

VI.G.53.

1.

$\triangle EAC \equiv \triangle BAG$, deoarece :
(caz L.U.L.)

$$\left\{ \begin{array}{l} EA \equiv AB \text{ (ipoteză)} \\ AC \equiv GA \text{ (ipoteză)} \\ \widehat{EAC} \equiv \widehat{BAG} \text{ (deoarece :} \\ \quad m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{EAB}) + \\ \quad + m(\widehat{BAC}) = 90^\circ + m(\widehat{BAC}) \text{ și} \\ \quad m(\widehat{BAG}) = m(\widehat{CAG}) = 90^\circ + \\ \quad + m(\widehat{BAC}) \end{array} \right.$$

Rezultă că $EC = BG$.

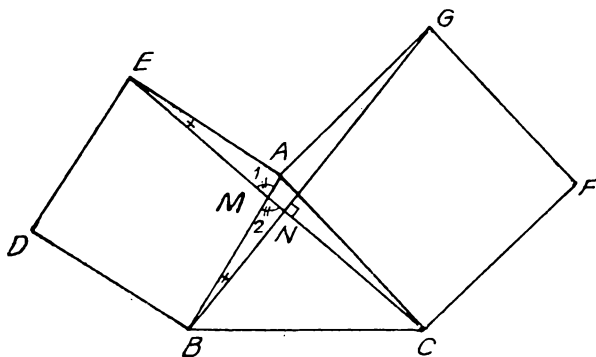


Fig. VI.G.53.

2. În triunghiurile AEM și NBM avem : $\widehat{AEC} \equiv \widehat{ABN}$ (demonstrat)
 $\widehat{M}_1 \equiv \widehat{M}_2$ (ca opuse la virf). Cum în $\triangle AEM$ $m(\widehat{AEC}) + m(\widehat{M}_1) = 90^\circ \Rightarrow$ în
 $\triangle NBM$, $m(\widehat{ABN}) + m(\widehat{M}_2) = 90^\circ$ și deci $m(\widehat{MNB}) = 90^\circ \Rightarrow EC \perp BG$.

VI.G.54. În $\triangle ABC$:

a) $A'C'$ — linie mijlocie $\Rightarrow A'C' \parallel AC$, $A'C' = \frac{AC}{2}$.

$A'B'$ — linie mijlocie $\Rightarrow A'B' \parallel AB$, $A'B' = \frac{AB}{2}$.

Dar $AC \equiv AB$ (ipoteză) $\Rightarrow A'C' \equiv B'C' \Rightarrow \triangle A'B'C'$ — isoscel.

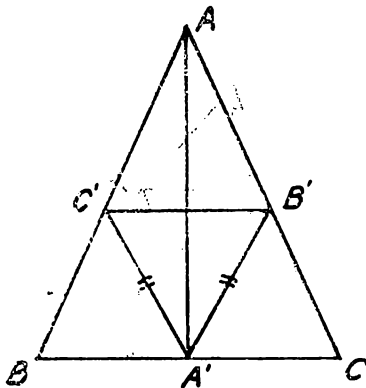


Fig. VI.G.54.

b)

$\triangle AC'A' \equiv \triangle AB'A'$; deoarece :

(caz L.L.L.)	{	$AC' \equiv AB'$ (jumătăți de laturi congruente)
		$A'C' \equiv A'B'$ (punctul a)
		$AA' = AA'$ (latură comună)

Rezultă $\widehat{C'A'A} = \widehat{B'A'A} \Rightarrow AA'$ — bisectoare $\widehat{C'A'B'}$.

Observație : Alt enunț relativ la problema propusă : Fie ABC un triunghi și A' , B' , C' respectiv mijloacele laturilor BC , AC și AB . Triunghiul ABC este isoscel dacă și numai dacă $\triangle A'B'C'$ este isoscel. Sau : Triunghiul $A'B'C'$ este isoscel dacă și numai dacă $\triangle ABC$ este isoscel. Rezolvați aceste probleme.

VI.G.55.

a) :

$$\Delta AMP \equiv \Delta MBN, \text{ deoarece : } \left\{ \begin{array}{l} AM \equiv MB \text{ (ipoteză)} \\ \widehat{BAP} \equiv \widehat{BMN} \text{ (corespondente,} \\ \text{ipoteză)} \\ \widehat{AMP} \equiv \widehat{MBN} \text{ (corespondente,} \\ \text{ipoteză)} \end{array} \right.$$

Rezultă că : $AP \equiv MN$.

b) :

$$\Delta AMP \equiv \Delta NPM, \text{ deoarece : } \left\{ \begin{array}{l} AP \equiv MN \text{ (punctul a)} \\ MP \text{ — latură comună} \\ \widehat{APM} = \widehat{PMN} \text{ (alterne interne,} \\ \text{ipoteză)} \end{array} \right.$$

Rezultă $AM \equiv NP$.

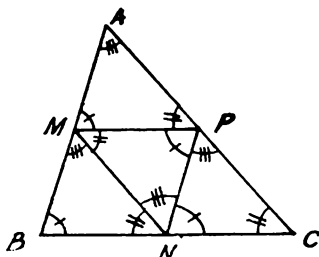


Fig. VI.G.55.

c) :

$$\Delta MNP \equiv \Delta CNP, \text{ deoarece : } \left\{ \begin{array}{l} NP \text{ — latură comună} \\ \widehat{MNP} \equiv \widehat{CPN} \text{ (} \widehat{MNP} \equiv \widehat{MAP} \\ \text{(punctul b) și } \widehat{CPN} \equiv \widehat{MAP}, \\ \text{deoarece : în } \Delta AMP \text{ și } \Delta PNC \\ \widehat{APM} \equiv \widehat{PCN} \text{ — corespondente} \\ \text{și } \widehat{AMP} \equiv \widehat{MPN} \equiv \widehat{PNC}) \\ \widehat{MPN} \equiv \widehat{PNC} \text{ (alterne interne,} \\ \text{ipoteză)} \end{array} \right.$$

Rezultă : $MP \equiv NC$.

d)

$$\Delta AMP \equiv \Delta NPC, \text{ deoarece : } \left\{ \begin{array}{l} AM \equiv NP \text{ (punct b)} \\ \widehat{AMP} \equiv \widehat{PNC} \text{ (punct c)} \\ MP \equiv NC \text{ (punct c)} \end{array} \right.$$

Rezultă $AP \equiv PC$.

e) Din a) și b) (tranzitivitatea congruenței triunghiurilor) $\Rightarrow \triangle MPN \equiv \triangle NBM \Rightarrow MBNP$ paralelogram (definiție) $\Rightarrow MP \equiv BN$.
 Din c) $\Rightarrow MNCP$ paralelogram (definiție) $\Rightarrow MP \equiv NC \Rightarrow MP = \frac{BC}{2}$.

Observație : Triunghiul MNP (M, N, P fiind mijloacele laturilor triunghiului ABC) se numește triunghi medial sau complementar față de triunghiul ABC .

VI.G.56.

a)

$BCF = DAC$, deoarece :
 (Caz L.U.L.)

$$\left\{ \begin{array}{l} BC \equiv CF \equiv CA \equiv AD \text{ (ipoteză)} \\ \widehat{BCF} \equiv \widehat{CAD} \text{ pentru că} \\ m(\widehat{BCF}) = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \text{ și} \\ m(\widehat{CAD}) = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \end{array} \right.$$

Rezultă $BF \equiv CD$.

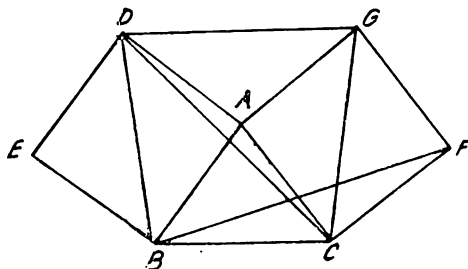


Fig. VI.G.56.

b) $DB = GC$ (diagonale în pătrate congruente), sau $\triangle DAB \equiv \triangle GAC$ fiind \triangle dreptunghice și isoscele $AD \equiv AB \equiv AG \equiv AC$, de unde rezultă $DB \equiv GC$ (1).

În patrulaterul $DBCG$, evaluăm măsurile unghiurilor DBC și GDB , astfel :

$$m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DBA}) + m(\widehat{ABC}) = 40^\circ + 60^\circ = 105^\circ$$

$$m(\widehat{GDB}) = m(\widehat{GDA}) + m(\widehat{ADB}) = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ \text{ căci în } \triangle \text{ isoscel } GDA \text{ (ipoteză) } m(\widehat{GDA}) = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ.$$

Cum $m(\widehat{DBC}) + m(\widehat{GDB}) = 105^\circ + 75^\circ = 180^\circ$, rezultă că dreptele DG și BC intersectate de secanta DB sînt paralele (2). Așadar din (1) și (2) rezultă că patrulaterul $DBCG$ este trapez isoscel.

CLASA A VII-A

REZOLVĂRILE ȘI REZULTATELE PROBLEMELOR PENTRU CLASA A VII-A

VII.A.1. a) Obținem succesiv : $27 \cdot 111^3 - 333^3 = 3^3 \cdot 111^3 - 333^3 =$
 $= (3 \cdot 111)^3 - 333^3 = 0.$

b) Avem succesiv : $(-1)^n (-1)^1 + (-1)^n (-1)^2 + (-1)^n (-1)^3 =$
 $= -(-1)^n + (-1)^n - (-1)^n = -(-1)^n.$ Mai departe, dacă n este
 număr natural par obținem -1 iar dacă n este număr natural impar
 obținem $1.$

c) Obținem succesiv : $2^n + (-1)^n \cdot 2^n : 2^n = 2^n + (-1)^n.$ Pentru n
 număr natural par obținem $2^n + 1$, iar pentru n număr natural impar
 obținem $2^n - 1.$

VII.A.2. Obținem: $72^n + 9^n \cdot 3 \cdot 8^n \cdot 2 + 8^n \cdot 8 \cdot 9^n = 72^n \cdot (1 + 6 + 8) = 15k,$
 unde $k = 72^n.$

VII.A.3. Imediat : $N = 6^n + 2^n \cdot 3^n \cdot 3 + 2^n \cdot 3^n \cdot 3^2 = 6^n (1 + 3 + 9) =$
 $= 13 \cdot 6^n.$

VII.A.4. Fie p un număr prim. Presupunem că : $n^2 + n + p = 1984,$
 adică $n(n+1) + p = 1984.$ Cum $n(n+1)$ este par, rezultă că p trebuie
 să fie par, deci $p = 2.$ Rămâne că $n(n+1) = 1982$ ceea ce nu are loc
 pentru nici un număr natural $n.$

VII.A.5. a) Produsul este zero întrucît pentru $x = 37,$ apare factorul
 $37 - 37 = 0.$

b) Ecuația $(x-1) + (x-2) + \dots + (x-50) = 25$ este echivalentă
 cu ecuația $50x - (1 + 2 + 3 + \dots + 50) = 25$ cu soluția $x = 26.$

Am obținut $1 + 2 + 3 + \dots + 50 = (1 + 50) + (2 + 49) + \dots +$
 $+ (25 + 26) = 50 \cdot \left(\frac{51}{2}\right) = 1275.$

c) Pentru $x = 0,$ avem $(-1)(-2)\dots(-50) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 50$ deoarece
 sînt un număr par de factori.

Pentru $x = 51$ produsul este : $50 \cdot 49 \dots 2 \cdot 1.$

VII.A.6. Presupunem că numărul este impar. Atunci fiecare $a_i + b_i,$
 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ este impar, deci a_i și b_i au parități diferite. Rezultă
 că numărul numerelor pare este egal cu cel al numerelor impare ceea

ce contrazice faptul că numărul total al numerelor $a_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ este impar.

VII.A.7. Fie numărul \overline{xy} . Avem $\frac{x-y}{x+y} = \frac{2}{3}$ sau $x = 5y$. $x \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ implică $y = 1$ și, deci, $x = 5$. Așadar, numărul este 51.

VII.A.8. Avem $10x + y = 2xy$ sau $y = \frac{10x}{2x-1} = \frac{10x-5+5}{2x-1} = \frac{10x-5}{2x-1} + \frac{5}{2x-1} = 5 + \frac{5}{2x-1}$. $y \in \mathbb{N}$ implică $2x-1$ divizor al lui 5. Rezultă $x = 3$ și $y = 6$, adică numărul 36.

VII.A.9. Rezultă $b+c = 6$ sau $b+c = 16$.

1) $b+c = 6$; $a+c = b$ și necesitatea ca $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$, $b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Rezultă numărul 4511.

2) Dacă $b+c = 16$ și celelalte condiții de la 1) rezultă numărul 1977.

VII.A.10. Avem: $y = \frac{33-4x}{2x-3} = -2 + \frac{27}{2x-3}$ și ținem cont că $x, y \in \mathbb{N}$. Numerele sînt 37 și 61.

VII.A.11. a) Avem: $\overline{ab} = 4(a+b)$ sau $10a+b = 4(a+b)$ sau $2a-b = 0$. Se obțin numerele 12, 24, 36, 48.

VII.A.12.

$$S = (\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}) + (\overline{acb} + \overline{cba} + \overline{bac}) = 111(a+b+c) + 111(a+b+c) = 222(a+b+c).$$

b) Să observăm că: $6 \leq a+b+c \leq 24$. Rezultă $1\,332 \leq S \leq 5\,328$.

VII.A.13. $\overline{abcd} = \overline{dcba}$ implică $a = d$.

$$10^3a + 10^2b + 10c + a = 10^3a + 10^2c + 10b + a \text{ implică } b = c.$$

Deci $\overline{abba} = 1001a + 110b = 11(91a + 10b)$; $91a + 10b \neq 11$ pentru orice cifră a și b și $91a + 10b = 121$ pentru $a = 1$ și $b = 3$. Rezultă deci că numărul nu poate fi pătrat perfect, dar poate fi cub perfect (în cazul numărului 1 331).

Observație: Se poate arăta că nu există valori pentru a și b astfel încît $91a + 10b = 11x^2$ oricare ar fi x .

VII.A.14. Frația se scrie succesiv:

$$\frac{15^n \cdot 3 + 15^n \cdot 25 + 15^n \cdot 6}{12^n \cdot 2 + 12^n \cdot 3 + 12^n \cdot 12} = \frac{15^n(3 + 25 + 6)}{12^n(2 + 3 + 12)} = \left(\frac{5}{4}\right)^n \cdot \frac{34}{17}.$$

VII.A.15. Aplicăm proprietatea fundamentală a șirului de rapoarte egale. Obținem, ținînd cont de ipoteză:

$$x - y = \frac{y+z}{4} = \frac{z}{3} = \frac{(x-y) + (y+z) + z}{1+4+3} = \frac{x+2z}{8} = 2.$$

În continuare, din $\frac{z}{3} = 2$ rezultă $z = 6$, ș.a.m.d., $y = 2$ și $x = 4$.

VII.A.16. Amplificăm raportul $\frac{x_1}{a_1}$ cu x_1^m , $\frac{x_2}{a_2}$ cu x_2^m , ș.a.m.d. $\frac{x_n}{a_n}$ cu x_n^m și aplicăm proprietatea fundamentală a șirului de rapoarte egale.

VII.A.17. Fie $x, y \in \mathbb{N}$ numitorii celor două fracții. Avem $\frac{3}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3(x+y)}{xy} = -\frac{39}{40}$ și, ținînd cont de ipoteza $\frac{1}{xy} = \frac{1}{40}$, numerele verifică relațiile: $x+y=13$ și $xy=40$. $40=2^3 \cdot 5$ implică faptul că numerele pot fi 5 și 8; 4 și 10 sau 2 și 20. Observăm că 5 și 8 sînt numerele care satisfac simultan cele două condiții.

VII.A.18. a) Pentru n număr natural par se obține $\frac{2}{9} + \frac{7}{9} + 1 = 2$ iar pentru n impar $\frac{-2}{9} - \frac{7}{9} + 1 = 0$.

b) Observăm că oricare ar fi k natural (par sau impar), $\frac{7}{2}(-1)^{k+1} + \frac{2}{7}(-1)^{k+2} = 0$. În continuare, pentru $p+3$ par adică $p=2q-3$ obținem 1, pentru $p+3$ impar, adică $p=2s$, obținem valoarea -1 .

VII.A.19.

a) $k = \text{par}$ avem $E(x) = x^2 - 3x + 2 - x^2 - 6x + 4 = -9x + 6$.

$k = \text{impar}$: $E(x) = -x^2 + 3x - 2 + x^2 + 6x - 4 = 9x - 6$.

Deci: pentru $k = \text{par}$ $E(\sqrt{2}) = -9\sqrt{2} + 6$; $E(-\sqrt{2}) = 9\sqrt{2} + 6$

pentru $k = \text{impar}$ $E(\sqrt{2}) = 9\sqrt{2} - 6$; $E(-\sqrt{2}) = -9\sqrt{2} - 6$.

b) $ma = 9\sqrt{2}$, iar $mg = \sqrt{(9\sqrt{2}-6)(9\sqrt{2}+6)} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$.

Deci:

$$A = \frac{9}{ma} + \frac{7}{mg} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{7}{3\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{14}}{6} = \frac{\sqrt{2}(3 + \sqrt{7})}{6}$$

VII.A.20. Pentru n și m de aceeași paritate obținem:

$$a \cdot b = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2,$$

iar pentru n și m de parități diferite obținem:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2$$

VII.A.21. a) Aplicăm definiția modului unui număr real: $|x| = x$ dacă $x \geq 0$ și $|x| = -x$ dacă $x < 0$ și faptul că: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Rezultă:

$$\sqrt{2} - |-2| + \sqrt{2} - 1 + 3 - \sqrt{8} = 0.$$

b) Avem: $-x + \sqrt{(x-1)^2} - |4 \cdot |x|| + |-2| \cdot |x| = |-x| + |x-1| + 2|x|$. Pentru $x = -2$, avem: $2 + |-3| + 2|-2| = 9$.

VII.A.22. Avem succesiv :

$$x = \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} + \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \\ = \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = |\sqrt{2}-\sqrt{3}| + |\sqrt{2}+\sqrt{3}| = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \\ + \sqrt{2} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

In continuare $x^6 = (2\sqrt{3})^6 = 2^6 \cdot \sqrt{3}^6 = 2^6 \cdot 3^3 = 1728$.

VII.A.23.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) = 1 \in \mathbb{N},$$

deci p_1 este falsă.

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = \\ = |\sqrt{5}-2| + |3-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2+3-\sqrt{5} = 1 \in \mathbb{N},$$

deci p_2 este adevărată.

Ultima cifră a numărului $5n+7$ este 2 sau 7 oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, deci nu poate fi pătratul unui număr (a cărei ultimă cifră poate să fie 0, 1, 4, 5, 6 sau 9). Deci p_3 este adevărată.

VII.A.24. Obținem succesiv :

$$[(7+4\sqrt{3})^{1986} + (7-4\sqrt{3})^{1986}] \cdot \frac{2^{1986}(7-4\sqrt{3})^{1986}}{2^{1987}} = \\ = [(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})]^{1986} = 1.$$

VII.A.25. Avem $x^2 = 34 + 2\sqrt{145}$ și $y^2 = 58$. $x^2 > y^2$ deoarece : $34 + 2\sqrt{145} > 58$ este echivalent cu $\sqrt{145} > 12$ sau $145 > 144$. Deci $x > y$.

VII.A.26. $A = 0$ deoarece $(\sqrt{4+\sqrt{15}} - \sqrt{4-\sqrt{15}})^2 = (\sqrt{6})^2$;
 $4+4-2\sqrt{16-15} = 6$; $8-2 = 6$.

VII.A.27. a) Deoarece $10 - \sqrt{19} < 10 + \sqrt{19}$ și sînt numere pozitive avem

$$\sqrt{10-\sqrt{19}} < \sqrt{10+\sqrt{19}} \text{ adică } \sqrt{10-\sqrt{19}} - \sqrt{10+\sqrt{19}} < 0 \text{ deci } a < 0.$$

b) $a^2 = 10 - \sqrt{19} - 2\sqrt{81} + 10 + \sqrt{19} = 20 - 18 = 2$.

c) Deoarece $a < 0$ și $a^2 = 2$ avem $a = -\sqrt{2}$ și deci $(a + \sqrt{2})^{100} = 0$.

VII.A.28. Avem

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \text{ și } \sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}.$$

Fracțiile au același numărător și ordinea este dată de valoarea numitorilor. Cum evident $\sqrt{k} + \sqrt{k+1} < 2\sqrt{k} < \sqrt{k} + \sqrt{k-1}$; rezultă următoarea ordine crescătoare a numerelor date :

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} ; \frac{1}{2} \sqrt{k} ; \sqrt{k} - \sqrt{k-1}.$$

VII.A.29. Utilizăm formula :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}} \quad \text{unde } C^2 = A^2 - B. \text{ Obținem :}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{6} &= \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \\ &+ \frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6} = 0 \in \mathbb{Q} \text{ sau observăm că } \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 6^2 = \\ &= (\sqrt{6})^2. \end{aligned}$$

VII.A.30. De exemplu, $f: \{-2, 0, 2\} \rightarrow \{0, 2, 4\}$, $f(x) = -x + 2$. cu graficul :

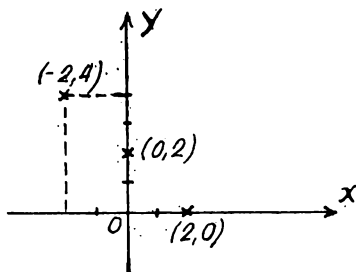


Fig. VII.A.30.

VII.A.31. Obținem următorul grafic :

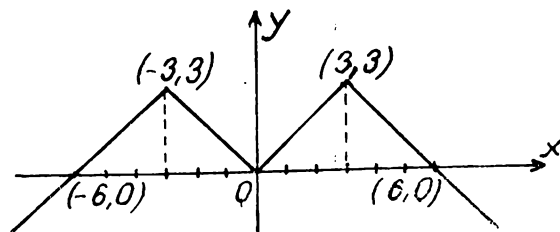


Fig. VII.A.31.

VII.A.32. $f(1) = 11$, $f(2) = 13$, $f(3) = 17$, $f(4) = 23$, $f(5) = 31$, deci numere prime.

Avem $f(n) = n(n-1) + 11$ care se poate scrie ca un produs de factori diferiți de 1 dacă $n = 11$ sau dacă $n-1 = 10$. Obținem, respectiv numerele $f(11) = 11 \cdot 11 = 121$ și $f(12) = 11 \cdot 13 = 143$.

VII.A.33. b) Există $n = 2$ pentru care $f(2) = 8$ și nu este prim.

$$c) f(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 7 = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ ca o sumă de numere pozitive.

VII.A.34. b) $x = y$ implică $x = 2x + 3$, deci $x = -3$, deci punctul de coordonate $(-3, -3)$.

Observație : În general avem $ax + b = x$ sau $(1 - a)x = b$ ecuație care are soluție unică pentru $a \neq 1$, nu are soluție pentru $a = 1$ și $b \neq 0$ sau o infinitate de soluții pentru $a = 1$ și $b = 0$.

În consecință : se deduc funcțiile cu un singur punct cu coordonatele egale (numit și „fix“), cu o infinitate de puncte fixe sau cu nici un punct fix.

VII.A.35. Graficul lui f este următorul :

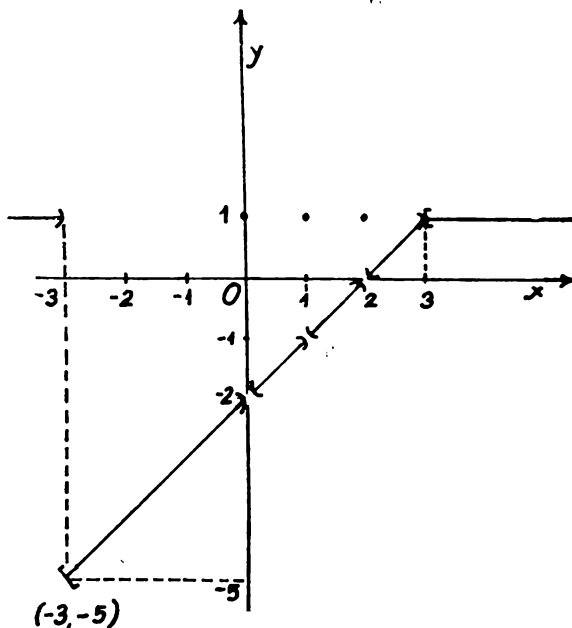


Fig. VII.A.35.

VII.A.36. a) Punctul $(1, 7)$ aparținând graficului implică $f(1) = 7$. Cum $1 \in (-1, +\infty)$, rezultă $m + 2 = 7$, adică $m = 5$.

VII.A.37. a) $-2 \in (-\infty, 2]$ deci $a(-2) + 5 = 4$, de unde rezultă $a = -\frac{1}{2}$; $3 \in (2, +\infty)$ deci $-2 \cdot 3 + b = 4$, de unde rezultă $b = 10$.

b) Graficul funcției este următorul :

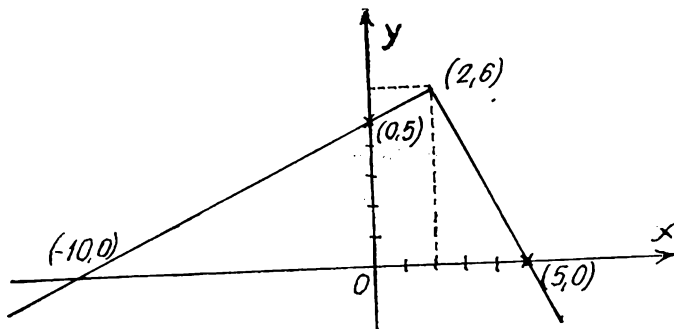


Fig. VII.A.37.

c) Punctele de pe axa Ox au ordonata nulă. Pentru $x \leq 2$ obținem $(\frac{1}{2})x + 5 = 0$, $x = -10$ deci punctul $(-10, 0)$. Pentru $x > 2$ obținem $-2x + 10 = 0$, $x = 5$ deci punctul $(5, 0)$.

VII.A.38. a) $4 \in (1, +\infty)$, deci $-2(4) + m = -5$, $m = 3$.

b) Pentru $x \in (-\infty, 1]$ inecuația este $x \leq 0$ cu soluția $x \in (-\infty, 0] \cap (-\infty, 1] = (-\infty, 0]$.

Pentru $x \in (1, +\infty)$ inecuația este $-2x + 3 \leq 0$ cu soluția $x \in (\frac{3}{2}, +\infty) \cap (1, +\infty) = (\frac{3}{2}, +\infty)$. Așadar inecuația $f(x) \leq 0$ este satisfăcută pentru $x \in (-\infty, 0] \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$.

VII.A.39. Deducem că intersecția graficului lui f cu axa Ox este punctul $A(-6, 0)$, intersecția graficului lui g cu axa Ox este punctul $B(2, 0)$, iar intersecția dintre graficele lui f și g este punctul $C(-2, 4)$. Triunghiul ABC este dreptunghic și isoscel.

Într-adevăr, dacă C' este proiecția pe Ox a lui C , atunci $C'(-2, 0)$ este la mijlocul segmentului AB , deci triunghiul este isoscel, $CA = CB$; triunghiul AOD , unde D este intersecția graficului lui f cu axa Oy este evident, isoscel și dreptunghic. Deci unghiul CAO are 45° . Așadar, unghiul „de la vârful“ triunghiului isoscel ACB este de 90° , deci graficele lui f și g sînt perpendiculare în C .

VII.A.40. Abscisele punctelor A și C indică domeniul de definiție: intervalul $[-3, 3]$. Fie G graficul lui f : $[-3, 3] \Rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$. $a, b \in \mathbf{R}$. $A, B, C \in G$ implică $f(-3) = 0$, $f(0) = 3$, $f(3) = 0$.

$$\text{Pe } [-3, 0] \text{ avem : } \begin{cases} f(-3) = 0 \\ f(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + b = 0 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \quad f(x) = x + 3$$

$$\text{Pe } [0, 3] \text{ avem : } \begin{cases} f(0) = 3 \\ f(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \quad f(x) = -x + 3$$

$$\text{Avem } f : [-3, 3] \rightarrow [0, 3], f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \in [-3, 0] \\ -x + 3, & x \in [0, 3] \end{cases}$$

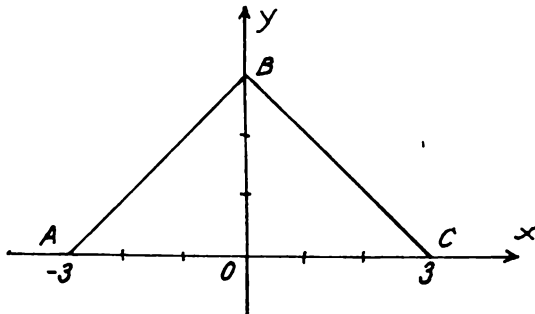


Fig. VII.A.40.

VII.A.41. a) $f(1) = 4$ implică $a = 2$.

b) Trebuie să existe implicația : „ $x \geq 5$ implică $x < -\frac{a}{2}$ ”, ceea ce are loc dacă și numai dacă $-\frac{a}{2} < 5$ de unde rezultă $a > -10$.

c) Nu, deoarece funcția este strict crescătoare (are coeficientul lui x pozitiv) și, deci, oricare ar fi a ia și valori pozitive.

VII.A.42. 1. Oricare ar fi $y = x - 1985$, $f(y) = 5$. Avem deci funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5$, al cărui grafic este o paralelă la Ox la distanța de 5 unități.

2. Oricare ar fi $y = x - 1985$, $g(y) = y$. Avem, deci funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$ al cărei grafic este o bisectoare a unghiului xOy .

VII.A.43.

$$f(1) + f(\sqrt{2}) = a + b + a\sqrt{2} + b = a(1 + \sqrt{2}) + 2b \quad (1)$$

$$f(1 + \sqrt{2}) = a(1 + \sqrt{2}) + b \quad (2)$$

Din (1) și (2) și din ipoteză rezultă $b = 0$. Deci funcțiile sînt de forma $f(x) = ax$, funcții al căror grafic trece printr-un același punct : $(0, 0)$.

VII.A.44. Funcția este, de altfel, determinată; pentru orice număr real $1 - x = y$, se obține unicul număr real $4 - x$. Notînd $1 - x = y$ obținem formula $f(y) = y + 3$. Funcția este deci $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + 3$.

Coordonatele punctelor (x, x) sînt soluțiile ecuației $f(x) = x$. În cazul de față $x + 3 = x$ nu are soluții, deci nu există asemenea puncte.

VII.A.45. Să observăm că f este o funcție „de gradul I”.

Într-adevăr dacă $y = -2x + \frac{1}{3}$, atunci $f(y) = 3y + 1$ deci funcția este $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + 1$.

Lăsăm pe seama cititorului reprezentarea ei grafică.

VII.A.46. Determinăm mai întîi $f(1)$ dînd lui x valoarea 2 în relația din ipoteză. Avem $f(1) = 6 - 8 - f(1)$ de unde $2f(1) = -2$, $f(1) = -1$. Deci: $f(x - 1) = 3x - 7$ sau $f(x - 1) = 3(x - 1) - 4$, deci $f(x) = 3x - 4$.

$f(0) = -4$ deci $A(0, 4)$ nu aparține graficului lui f ; ș.a.m.d.

VII.A.47. a) Pornind din membrul stîng obținem:

$$x^4 + y^4 = (x^2)^2 + (y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = [(x - y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2.$$

b) Punînd $a = x + y$ și $b = x - y$ observăm că avem:

$$4a^2 - 4ab + b^2 - z^2 = (2a - b)^2 - z^2 = (2a - b - z)(2a - b + z).$$

VII.A.48. $x^2 + y^2 = 290$ este echivalentă cu $(x + y)^2 - 2xy = 290$ sau, ținînd cont de ipoteză, $xy = 143 = 11 \cdot 13$. Așadar, numerele căutate sînt: 11 și 13.

VII.A.49.

$$P(X) = (X^4 - X^2) + (7X^2 - 7) = (X^2 - 1)(X^2 + 7).$$

Factorul $X^2 + 7$ este pozitiv oricare ar fi valoarea reală x a lui X ; $xP(x) = 0$ este echivalentă cu $x(x^2 - 1)(x^2 + 7) = 0$ de unde rezultă $x = 0$ sau $x^2 - 1 = 0$ cu soluțiile $x \in \{-1, 0, 1\}$.

VII.A.50. a) Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, notăm $x - 2 = y$ și obținem $P(y) = y^2 + 3y$ care reprezintă valoarea polinomului $P(X) = X^2 + 3X$ în punctul y .

b) $Q(X) = X^2 - 2X$.

c) $S(X) = X^2 - 3X + 2$.

VII.A.51. 2) $y = [(x + 3) + (x - 3)]^2 = 4x^2 \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

VII.A.52. a) Fie, de exemplu, numerele naturale consecutive $5k - 2$; $5k - 1$, $5k$, $5k + 1$, $5k + 2$, $k \in \mathbf{Z}$. Obținem: $(5k - 2)^2 + (5k - 1)^2 + (5k)^2 + (5k + 1)^2 + (5k + 2)^2 = 125k^2 + 10$.

b) $S = 5(25k^2 + 2)$, deci pentru ca S să fie pătrat perfect ar trebui ca $25k^2 + 2$ să fie multiplu impar de putere a lui 5. Dar k^2 are ca terminații numai pe 1; 4; 5; 6 sau 9. Deci $25k^2 + 2$ se termină în 2 sau 7. În concluzie $5(25k^2 + 2) = S$ nu poate fi pătrat perfect.

Altfel, mai simplu, dacă $5(25k^2 + 2)$ ar fi pătrat perfect ar rezulta că 5 ar divide pe $25k^2 + 2$, adică 5 ar divide 2, imposibil.

VII.A.53. Fie n număr natural, $n \geq 1$. Avem :

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = (n-1)^2(n-1) + n^3 + (n+1)^2(n+1) = \\ = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2).$$

VII.A.54. Fie $x-1, x, x+1, x \in \mathbb{Z}$ numerele întregi consecutive. Trebuie ca : $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 1877$ sau $x^2 = 625$, de unde rezultă numerele : 24, 25, 26 și $-24, -25, -26$.

VII.A.55. 1. Avem :

$$(3x + x\sqrt{x}) + (2\sqrt{xy} + 6\sqrt{y}) = x(3 + \sqrt{x}) + 2\sqrt{y}(\sqrt{x} + 3) = \\ = (\sqrt{x} + 3)(x + 2\sqrt{y}).$$

$$2. (9x + 4y + 12\sqrt{xy}) - 1 = (3\sqrt{x} + 2\sqrt{y})^2 - 1 = (3\sqrt{x} + \\ + 2\sqrt{y} - 1)(3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 1).$$

$$3. x^2 - (\sqrt{y} - 1)^2 = (x - \sqrt{y} + 1)(x + \sqrt{y} - 1).$$

VII.A.56. Relația din ipoteză se scrie echivalent : $(a^2 - 2a\sqrt{2} + 2) + (b^2 - 2b\sqrt{3} + 3) = 0$ sau $(a - \sqrt{2})^2 + (b - \sqrt{3})^2 = 0$, adică o sumă de pătrate nulă de unde rezultă că fiecare termen al sumei trebuie să fie nul. Așadar, $a - \sqrt{2} = 0$ și $b - \sqrt{3} = 0$ deci $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$ și în continuare, înlocuind valorile lui a și b se verifică imediat egalitatea de demonstrat.

VII.A.57. Avem : $E(x, y) = (25y^2 - 10xy + x)^2 + (4x^2 - 4x + 1) = (5y - x)^2 + (2x - 1)^2$ o sumă de pătrate care are valoarea minimă zero. atunci când fiecare termen este zero. Rezultă $x = \frac{1}{2}$ și $y = \frac{1}{10}$.

VII.A.58. Avem :

$$(x-2)[(x-2)^3 + (x-2)^2 + (x-2) + 1] = \\ = (x-2)(x-1)(x^2 - 4x + 5).$$

VII.A.59.

$$E = (a-b)^2(a-b-a-b) = -2b(a-b)^2 > 0 ;$$

$$F = (a+b)^2(a+b+a-b) = 2a(a+b)^2 < 0.$$

Deci : $E > F$.

VII.A.60. Scriem, de exemplu : $c-a = (c-b) - (a-b)$ și obținem :

$$a^2(b-c) + b^2[(c-b) - (a-b)] + c^2(a-b) = \\ = [a^2(b-c) - b^2(b-c)] + [c^2(a-b) - b^2(a-b)] = \\ = (b-c)(a^2 - b^2) + (a-b)(c^2 - b^2) = (a-b)(b-c)(a + \\ + b - c - b) = (a-b)(b-c)(a-c).$$

VII.A.61. Arătăm că $\sqrt{17 - \sqrt{145}} + \sqrt{17 + \sqrt{145}} > \sqrt{10}$. Inegalitatea este echivalentă cu $(\sqrt{17 - \sqrt{145}} + \sqrt{17 + \sqrt{145}})^2 > (\sqrt{10})^2$ adică $34 + 2 \cdot 12 > 10$, ceea ce este adevărat.

VII.A.62. Numerele întregi x verifică, deci, relația $x^2 < (3 - \sqrt{2})^2$ adică $-3 + \sqrt{2} < x < 3 - \sqrt{2}$. Rezultă pentru x valorile : -1 ; 0 ; 1 .

VII.A.63.

$$A = \frac{(0,01 + 0,99) + (0,02 + 0,98) + \dots + (0,49 + 0,51) + 0,50}{\sqrt{(5 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(5 - \sqrt{2})^2}} = \dots$$

$$= \frac{49,50}{10} = 4,95.$$

VII.A.64. Avem :

$$A = |\sqrt{3} - 2| + |\sqrt{2} - 3| + |\sqrt{3} + \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$B = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = \sqrt{3} - 1 + 1 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}.$$

Deci : $A = B$.

VII.A.65. Obținem :

$$n = \sqrt{6 - 2\sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}} = \sqrt{6 - 2|1 + \sqrt{3}| + |2 - \sqrt{3}|}$$

$$= \sqrt{4 - 2\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})} = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{3})} = \sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3} = 1.$$

VII.A.66.

a) $N = 3 - \sqrt{5} + 3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{9 - 5} = 6 + 4 = 10.$

b) $E_1 = 27\sqrt{6}.$

$$E_2 = 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 20\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Deci : } \frac{E_1}{E_2} = \frac{27\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 9\sqrt{2}.$$

VII.A.67.

$$n^{3k} - n^k + 7 = n^k(n^{2k} - 1) + 7 = n^k(n^k - 1)(n^k + 1) + 7,$$

adică un număr impar, $n^k(n^k - 1)(n^k + 1)$ fiind număr par ca produs de numere întregi consecutive.

Așadar, numărul impar $n^{3k} - n^k + 7$ nu poate fi produsul unor numere întregi consecutive.

VII.A.68.

$$9(25^p \cdot 11^{2p+1} - 55^{2p}) = 9(55^{2p} \cdot 11 - 55^{2p}) = 9 \cdot 10 \cdot 55^{2p} = M \cdot 30.$$

$$\begin{aligned} p(1-p^8) &= p(1-p^4)(1+p^4) = p(1-p^2)(1+p^2)(1+p^4) = \\ &= -(p-1)p(p+1)(p^2+1)(p^4+1) = M \cdot 30 \cdot p(1-p^8), \end{aligned}$$

este evident multiplu de 2, de 3 și de 5, deoarece $p = M \cdot 5$ dacă $p = 5k$, $p-1 = M \cdot 5$ dacă $p = 5k+1$, $p^2+1 = M \cdot 5$ dacă $p = 5k+2$ și dacă $p = 5k+3$, $p^4+1 = M \cdot 5$ dacă $p = 5k+4$, $k \in \mathbb{N}$.

VII.A.69. Trebuie ca numărul $\frac{n^5 - n^3 - 2n^2}{n-1}$ să fie număr natural ori-care ar fi n natural și $n > 1$. Obținem :

$$\begin{aligned} \frac{n^5 - n^3 - 2n^2}{n-1} &= \frac{n^3(n-1)}{n-1} - \frac{2n^2}{n-1} = n^3 - \frac{2n^2 - 2n + 2n}{n-1} = \\ &= n^3 - 2n - \frac{2n}{n-1} = n^3 - 2n - 2 - \frac{2}{n-1}; \end{aligned}$$

$\frac{n-1}{2}$ este natural dacă $n-1=1$ sau $n-1=2$. În concluzie $n-1$ divide $n^5 - n^3 - 2n^2$ pentru $n=2$ și $n=3$.

VII.A.70. $M = 5n^2 - 20n + 23 = 5n(n-4) + 23$. Numărul $5n(n-4)$ are ultima cifră 0 sau 5, de unde rezultă că ultima cifră a numărului M este 3 sau 8 și asemenea pătrat nu există.

VII.A.71. a) Din relația dată : $p = n^2 + n + 1$, deci : $4p - 3 = 4n^2 + 4n + 4 - 3 = (2n+1)^2$. La fel : $p-1 = n^2 + n = n(n+1)$.

b) Avem :

$$\begin{aligned} 39\,601 = 199^2 &= (2 \cdot 99 + 1)^2 = 4 \cdot 99^2 + 4 \cdot 99 + 4 - 3 = \\ &= 4(95^2 + 95 + 1) - 3, \end{aligned}$$

deci : $n = 99$ și $p = 99^2 + 99 + 1$.

VII.A.72. Numerele sînt deci de forma : $p = n^2 - 4$ sau $p = (n-2)(p+2)$ de unde rezultă : $n-2=1$ și $n+2=p$ sau $n-2=p$ și $n+2=1$ sau $n-2=-1$ și $n+2=-p$ sau $n-2=-p$ și $n+2=-1$. Rezultă numerele prime -3 și 5 deoarece $-3=1^2-4$ și $5=3^2-4$.

VII.A.73. $a+2b=3Nk_1$ și $2a+b=3Nk_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ implică : $a-b=3N(k_2-k_1)$. Atunci : $a^3-3a^2b+2b^3=(a-b)^2(a+2b)=9N^2(k_2-k_1)^2 \cdot 3Nk_1=27N^3k_1(k_1-k_2)^2=27N^3k$, unde $k \in \mathbb{Z}$, $k=(k_1-k_2)^2k_1$.

VII.A.74. $f(x) = x+1$ implică $f^2(x) = (x+1)^2$.

$$\text{Relația devine : } (x+1986+1)^2 - (x-1986+1)^2 = 4(x+1)^2$$

$$\text{sau : } (x+1987-x+1985)(x+1987+x-1985) = 4(x+1)^2$$

$$\text{sau : } 3\,972(2x+2) = 4(x+1)^2 \text{ sau } 1986(x+1) = (x+1)^2$$

$$\text{sau : } (x+1)(x+1-1986) = 0, \text{ adică } x = -1 \text{ și } x = 1985.$$

VII.A.75.

$$a) f_m(x) = \sqrt{(x+1)^2} - m\sqrt{(x-2)^2} = |x+1| - m|x-2|;$$

$$g(x) = |x+1| - |x-2| = \begin{cases} -3, & x \in (-\infty, -1) \\ 2x-1, & x \in [-1, 2] \\ 3, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

$$b) f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

VII.A.76. a) Polinoamele P și Q se scriu sub forma canonică astfel :
 $P(X) = -2X + 1$, $Q(X) = X - 3$.

$$\text{Avem : } P[Q(X^2)] - Q[P(X^2)] = P(X^2 - 3) - Q(-2X^2 + 1) = \\ = -2(X^2 - 3) + 1 - (-2X^2 + 1) + 3 = 9.$$

b) Se obține graficul următor :

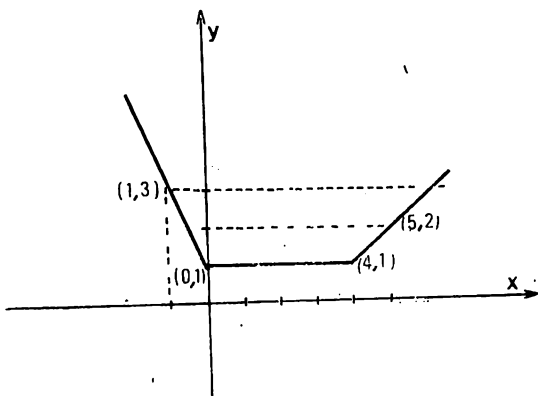


Fig. VII.A.76.

VII.A.77. Obținem :

$$N = \frac{[(6^n)^2 + 12 \cdot 6^n + 36] - 4}{5(6^n + 8)} = \frac{(6^n + 6)^2 - 4}{5(6^n + 8)} \\ = \frac{(6^n + 6 - 2)(6^n + 6 + 2)}{5(6^n + 8)} = \frac{6^n + 4}{5},$$

$6^n + 4$ este multiplu de 10 și deci, imediat, $N \in \mathbb{N}$.

VII.A.78. Produsul a două numere naturale consecutive este un număr natural par.

Avem : $n^2 - n + 2 = n(n-1) + 2 = 2p + 2$, $p \in \mathbb{N}$, deci un număr natural par. La fel : $n^2 + n + 2 = n(n+1) + 2$, este un număr par. Rezultă că fracția se simplifică întotdeauna cu 2.

VII.A.79. Frația F se mai poate simplifica :

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{(x^2 + y^2 + 2xy) - 4}{(x^2 - 4x + 4) - y^2} = \frac{(x + y)^2 - 4}{(x - 2)^2 - y^2} = \\ &= \frac{(x + y - 2)(x + y + 2)}{(x - y - 2)(x + y - 2)} = \frac{x + y + 2}{x - y - 2}. \end{aligned}$$

$F(x, 1) = \frac{x + 3}{x - 3} = 1 + \frac{6}{x - 3}$. $F(x, 1) \in \mathbf{Z}$ dacă și numai dacă $x - 3$ este divizor al lui 6, deci $x \in \{4, 2, 5, 1, 6, 0, 9\}$.

VII.A.80.

$$P = \frac{(2^{2n})^2 + 2 \cdot 2^{2n} + 1}{(2^n)^2} = \left(\frac{2^{2n} + 1}{2^n} \right)^2.$$

VII.A.81.

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{(4x^2 - 1)^2}{(2x + 1)^2}; \quad f(x) = \sqrt{\frac{(4x^2 - 1)^2}{(2x + 1)^2}} = \sqrt{\frac{(2x - 1)^2 (2x + 1)^2}{(2x + 1)^2}} = \\ &= \sqrt{(2x - 1)^2} = |2x - 1|. \end{aligned}$$

Se observă că $x = -\frac{1}{2}$ anulează numitorul, deci nu face parte din domeniul de definiție al funcției f . Ținând cont de definiția modului, rezultă că urmează să trasăm graficul funcției :

$$f: \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ 2x - 1, & x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty \right) \end{cases}$$

VII.A.82.

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \frac{(a^2 - 2ab + b^2) - 2(a - b) + 1}{(a^2 - 2ab + b^2) - 1} = \\ &= \frac{(a - b)^2 - 2(a - b) + 1}{(a - b)^2 - 1} = \frac{(a - b - 1)^2}{(a - b - 1)(a - b + 1)} = \frac{a - b - 1}{a - b + 1} = \\ &= 1 - \frac{2}{a - b + 1}. \quad F(a, b) \in \mathbf{Z} \text{ implică } \frac{2}{a - b + 1} \in \mathbf{Z} \text{ de unde rezultă} \\ &a - b + 1 \text{ divizor al lui 2. Rezultă valorile lui } F: -1; 0; 2; 3. \end{aligned}$$

VII.A.83.

$$\begin{aligned} \text{Avem: } F(x, y) &= \frac{x^4(x - y) - y^4(x - y)}{x^3(x - y) - xy^2(x - y)} = \frac{(x - y)(x^4 - y^4)}{(x - y)(x^3 - xy^2)} = \\ &= \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x(x^2 - y^2)} = \frac{x^2 + y^2}{x}. \end{aligned}$$

$$F(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1) = \frac{6}{\sqrt{2} - 1} = 6(\sqrt{2} + 1).$$

VII.A.84. $x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$ implică $x - y = \frac{x - y}{xy}$ sau, ținând cont de ipoteză $(x - y) \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 0$.

Dacă $b \neq 1$ rezultă $x = y$. Din ipoteză avem, deci: $x + \frac{1}{x} = a$ și $x^2 = b$. Din $x + \frac{1}{x} = a$ rezultă $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$. Rezultă acum imediat relația dintre a și b : $(b + 1)^2 = a^2 b$.

VII.A.85.

$$\begin{aligned} \text{Avem: } & \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 < \frac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{4} \langle \Rightarrow \rangle \\ \langle \Rightarrow \rangle & \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 < \frac{(a^3 + b^3) + (a^2b + ab^2)}{4} \langle \Rightarrow \rangle \\ \langle \Rightarrow \rangle & \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 < \frac{(a+b)(a^2 + b^2)}{4} \langle \Rightarrow \rangle \frac{(a+b)^2}{2} < a^2 + b^2 \langle \Rightarrow \rangle \\ \langle \Rightarrow \rangle & (a-b)^2 \geq 0, \text{ adevărat pentru orice } a, b \text{ reale.} \end{aligned}$$

VII.A.86. Aplicăm inegalitatea $m_g < m_a$, unde prin m_g am notat media geometrică $m_g = \sqrt{ab}$, a numerelor a și b , iar prin $m_a = \frac{a+b}{2}$ media aritmetică a aceluiași numere.

Avem $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ sau $ab < \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$, de unde rezultă că valoarea maximă a lui ab este $\left(\frac{a+b}{2} \right)^2$; $ab = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \langle \Rightarrow \rangle a = b$ și, imediat $a = b = \frac{k}{2}$.

VII.A.87. În general avem $a + a^{-1} = a + \frac{1}{a} \geq 2$, $\left(a + \frac{1}{a} \right) + \left(b + \frac{1}{b} \right) \geq 2 + 2 = 4 = 2 \cdot 2 \cdot 1986 = 2 \cdot 993$, deci se poate scrie o sumă de 993 de termeni de forma $a + a^{-1}$ cu orice a real, strict pozitiv care să satisfacă cerința dată.

VII.A.88. S se mai poate scrie echivalent:

$$S = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}}{4+5} + \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}{5+6} + \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{7}}{6+7} + \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{8}}{7+8} + \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{9}}{8+9} + \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{10}}{9+10}.$$

Să observăm că, în general : $\frac{a \cdot b}{a^2 + b^2} < \frac{1}{2}$ pentru $a \neq b$. Deci, de

$$\text{exemplu, } \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}}{4 + 5} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}}{(\sqrt{4})^2 + (\sqrt{5})^2} < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Așadar } S < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3.$$

VII.A.89. Avem : $0 \leq (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$,
deci $2(ab + bc + ac) + a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$ sau ținând cont de ipoteză :
 $ab + bc + ca \geq -\frac{1}{2}$.

De asemenea, din $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$, rezultă $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ și ținând cont de ipoteză rezultă $ab + bc + ca \leq 1$.

VII.A.90.

$$\text{Avem : } \frac{\overline{xyz}}{x + y + z} = \frac{100x + 10y + z}{x + y + z} < \frac{100x + 100y + 100z}{x + y + z} = 100.$$

$$\text{Exemplu : } \frac{600}{6} = 100.$$

VII.A.91. Inegalitatea se scrie echivalent :

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 \leq 0. \quad (1)$$

Dar :

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0. \quad (2)$$

Relația (2) are loc fiind vorba despre o sumă de pătrate.

Relația (1) și (2) trebuie să aibă loc simultan, ceea ce este posibil numai în cazul când are loc egalitatea (antisimetria relației de inegalitate).

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = 0.$$

$$\text{Soluția este : } x = -\frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}; z = \frac{3}{2}.$$

VII.A.92. Prin calcul direct se obțin inegalități echivalente sau se efectuează majorări (minorări) convenabile ale fracțiilor. De exemplu :

$$\frac{1 + 2^n}{1 + 3^n} < \frac{1 + 2^n}{3^n} < \frac{2^{n-1} + 2^n}{3^n} = \frac{2^{n-1} \cdot (1 + 2)}{3^{n-1} \cdot 3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

VII.A.93. Membrul sting al inegalității se mai poate scrie succesiv :

$$\frac{(x^2 + y^2)^2 + x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 1 + \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)^2 \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 < 2.$$

Am utilizat faptul că $\frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$ oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$, cu x sau y

nenul, inegalitate care se verifică imediat.

VII.A.94. Avem evident

$$\frac{1}{\sqrt[9]{1}} > \frac{1}{\sqrt[9]{9999}}, \frac{1}{\sqrt[9]{2}} > \frac{1}{\sqrt[9]{9999}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[9]{9999}} > \frac{1}{\sqrt[9]{9998}} - \frac{1}{\sqrt[9]{9999}} > \frac{1}{\sqrt[9]{9999}}.$$

Adunând membru cu membru aceste inegalități obținem :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[9]{1}} + \frac{1}{\sqrt[9]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[9]{9999}} &> \underbrace{\frac{1}{\sqrt[9]{9999}} + \frac{1}{\sqrt[9]{9999}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[9]{9999}}}_{\text{de } 9999 \text{ ori}} \\ &= \frac{9999}{\sqrt[9]{9999}} = \sqrt[9]{9999} > 99,99. \end{aligned}$$

VII.A.95. Au loc evident, inegalitățile

$$\frac{1}{p+1} > \frac{1}{2p}, \frac{1}{p+2} > \frac{1}{2p}, \dots, \frac{1}{2p} > \frac{1}{2p},$$

oricare ar fi $p > 1$. Adunând membru cu membru aceste inegalități, obținem

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{2p} > \underbrace{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} + \dots + \frac{1}{2p}}_{\text{de } p \text{ ori}} = \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}$$

VII.A.96. a) Studiem semnul expresiei $x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$. Aplicând definiția modului deducem că $\left|x + \frac{1}{x}\right| = x + \frac{1}{x}$, pentru $x > 0$ și $\left|x + \frac{1}{x}\right| = -x - \frac{1}{x}$ pentru $x < 0$. În fiecare caz inegalitatea se verifică imediat.

b) Expresia se scrie echivalent :

$$\frac{1}{\frac{x+1}{x} - 1} + \frac{1}{\frac{x+1}{x} + 1} \leq \frac{1}{2-1} + \frac{1}{2+1} = \frac{4}{3},$$

unde am ținut cont de a).

VII.A.97. b) Observăm că pentru $x=y=z=0$, $2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} = 3$ dacă $2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} > 3$ rezultă că, cel puțin unul dintre numerele x, y, z , este nenul. Fie $x=1, y=0, z=0$, atunci: $2^1 + 2^0 + 2^1 = 5 > 4$ ș.a.m.d.

VII.A.98. b) $x^2 + y^2 = z^2$ implică $x^2 \leq z^2$ și $y^2 \leq z^2$. Deoarece x, y, z sînt pozitive rezultă $x < z$ și $y < z$. $x < z$ implică faptul că există a , $0 < a_1 < 1$ astfel încît $x = a_1 \cdot z$. Analog există a_2 , $0 < a_2 < 1$ astfel încît $y = a_2 \cdot z$. Rezultă deci că $xy = a_1 \cdot a_2 \cdot z^2$. Punem $a_1 \cdot a_2 = a$ și obținem ceea ce trebuia demonstrat.

VII.A.99. În m, n și p , inegalitatea se scrie echivalent :

$$\frac{n+p}{2m} + \frac{m+p}{2n} + \frac{m+n}{2p} \geq 3, \text{ sau } \left(\frac{n}{m} + \frac{m}{n}\right) + \left(\frac{p}{m} + \frac{m}{p}\right) + \left(\frac{n}{p} + \frac{p}{n}\right) \geq 6,$$

ceea ce este adevărat ținînd cont că fiecare paranteză este mai mare sau cel puțin egală cu 2.

VII.A.100. Amplificăm a doua fracție cu a , a treia fracție cu ab și ținem cont de ipoteza $abc = 1$. Obținem :

$$\left(\frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{1+ab+a} + \frac{1}{a+1+ab}\right)^n = \left(\frac{a+ab+1}{ab+a+1}\right)^n = 1.$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

VII.A.101.

$$1. \quad a_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \dots +$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \text{ deci : } a_8 = 1 - \frac{1}{\sqrt{8+1}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Cum } \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*, \text{ rezultă că } a_n > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. Trebuie deci determinate $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 15$ astfel încît $\sqrt{n+1} \in \mathbb{Q}$. Fie $p \in \mathbb{N}$, $p = \sqrt{n+1}$, adică $n = p^2 - 1$. Obținem : $n \in \{0, 3, 8, 15\}$.

VII.A.102. La numărător sînt 1 985 termeni 1 sau -1 după cum puterea este pară sau impară. Acești termeni se reduc doi cîte doi cu excepția ultimului $(-1)^{1985} = -1$. Observăm că 1985^n este impar, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ și, deci, la numitor obținem $1985 \cdot (-1)$. Rezultatul final este

$$\frac{1}{1985}.$$

VII.A.103. Ținem cont de faptul că $(-1)^{2k} = 1$ și $(-1)^{2k+1} = -1$, ori-care ar fi $k \in \mathbb{N}$ și scriem convenabil :

$$E = \frac{(-5 + 10) + (-15 + 20) + \dots + (-1975 + 1980) - 1985}{(-1)^{4k+6}} =$$

$$= \frac{5 \cdot 198 - 1985}{(-1)^{2(2k+3)}} = -995.$$

VII.A.104. 1.

$$h(1) + h(2) + \dots + h(100) = (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + \dots +$$

$$+ \dots + (2 \cdot 100 + 1) = (2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2 \cdot 100) +$$

$$+ \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{\text{de } 100 \text{ ori}} = 2(1 + 2 + \dots + 100) + 100 = 10\,000 + 100 =$$

$$= 10\,200.$$

2. $\frac{h(n)}{f(n)} < 2$ este echivalentă cu $\frac{2n+1}{n+3} < 2$ sau $2n+1 < 2n+6$,

evident.

VII.A.105. a)

$$E = 10^9 - 10^8(10-1) - 10^7(10-1) - \dots - 10(10-1) - 1 =$$

$$= (10^9 - 10^9) + (10^8 - 10^8) + (10^7 - 10^7) + \dots - 10^2 + (10-1) = 9.$$

b) Procedînd ca mai sus avem

$$F = (n+1)^n - (n+1)^{n-1}(n+1-1) - \dots - (n+1)(n+1-1) - 1 =$$

$$= [(n+1)^n - (n+1)^n] + [(n+1)^{n-1} - (n+1)^{n-1}] - \dots -$$

$$- \dots - (n+1) - 1 = n.$$

VII.A.106. Putem presupune că în prima cutie punem o bilă, în a doua cutie două bile, ș.a.m.d., în a n -a cutie n bile. În cele n cutii vom avea :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}, \text{ mai puțin, deci o bilă din}$$

cele $\frac{n^2+n+2}{2}$. Această bilă o putem pune în cutia cu n bile.

Să observăm că $\frac{n^2+n-2}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - 1$, deci notînd că mai sus

deducem că nu se satisfac condițiile problemei.

VII.A.107. Avem, de exemplu, $2x = 10 - 3y$ (1). $10 - 3y \in \mathbb{N}$ implică $10 - 3y \geq 0$ sau $3y \leq 10$, de unde rezultă $y \in \{0, 1, 2, 3\}$. Din (1) rezultă perechile (0, 5) și (2, 2).

VII.A.108. Ecuația se scrie echivalent

$$x(y+3) = -2y-5 \text{ sau } x = \frac{-2y-5}{y+3}$$

$$\text{sau } x = -2 + \frac{1}{y+3} \cdot \frac{1}{y+3} \in \mathbb{Z},$$

implică situațiile $(-3; -4)$, $(-1; -2)$.

VII.A.109. Pentru x și y nenuli, ecuațiile se scriu echivalent

$$x = 2 + \frac{8}{3y-4} \text{ ș.a.m.d.}$$

Obținem soluțiile : $(-6; 1)$, $(6; 2)$, $(3; 4)$.

VII.A.110. Avem

$$\begin{aligned} & \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 14 \cdot 15}{2^x \cdot 3^y \cdot 5^z} = \\ & = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3(2^2) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 11 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 13 \cdot (2 \cdot 7) \cdot 3 \cdot 5}{2^x \cdot 3^y \cdot 5^z} = \\ & = \frac{2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}{2^x \cdot 3^y \cdot 5^z}, \end{aligned}$$

deci ecuația $\frac{2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}{2^x \cdot 3^y \cdot 5^z} = 7^2 \cdot 11 \cdot 13 (=27\ 007)$. de unde rezultă

deci $x = 11$; $y = 6$; $z = 3$.

VII.A.111. Ecuația este echivalentă cu următoarea

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) + (u^2 - 2u + 1) = 0.$$

sau : $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (u-1)^2 = 0$, care are soluțiile $x = y = z = u = 1$.

VII.A.112. Avem $x = [x] + \{x\}$, unde prin $\{x\}$ am notat partea fracționară a numărului x . Ecuația se scrie echivalent $[x] - 1 = 2 \cdot \{x\}$ sau $\{x\} = \frac{[x] - 1}{2} \cdot 0 \leq \{x\} < 1$ implică $1 \leq [x] < 3$ deci $[x] = 1$ și $[x] = 2$.

Rezultă pentru $\{x\}$, respectiv valorile 0 ; $\frac{1}{2}$. Din $x = [x] + \{x\}$ se obțin soluțiile 1 și $\frac{5}{2}$ ale ecuației date.

VII.A.113. Utilizăm relația $[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x]$. Obținem :

$$\begin{aligned} [x] + \left[x + \frac{1}{4} \right] + \left[x + \frac{2}{4} \right] + \left[x + \frac{3}{4} \right] &= [x] + \left[x + \frac{2}{4} \right] + \left[x + \frac{1}{4} \right] + \\ &+ \left[\left(x + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \right] = [2x] + \left[2x + \frac{1}{2} \right] = [4x]. \end{aligned}$$

VII.A.114. a) $x = 1$.

b) $(a+1)x = 2(a+1)$. Pentru $a \neq -1$ ecuația are soluția unică $x = 2$, pentru $a = -1$, orice x real este soluție a ecuației.

c)

$$\begin{aligned} |x-1| + |2x-2| + |3x-3| &= \\ = |x-1| + 2|x-1| + 3|x-1| &= 6|x-1|. \end{aligned}$$

Rezultă $x = 1$.

VII.A.115. Pentru k număr natural par se obține ecuația echivalentă $-4y + 3 = 15$ satisfăcută deci pentru orice x întreg și pentru $y = -3$.

Pentru k număr natural impar se obține ecuația $-2x + 3 = 15$ satisfăcută pentru $x = -6$ și pentru orice y întreg.

VII.A.116. Din enunțul problemei rezultă că 20% din elevi nu au rezolvat primul subiect, iar 30% nu au rezolvat al doilea subiect. Deci 50% nu au rezolvat ambele subiecte, iar restul de 50% au rezolvat ambele subiecte. Cum se știe că 45 elevi au rezolvat ambele subiecte, rezultă că, în total au fost 90 de concurenți.

Altfel : fie x numărul total de concurenți. Rezultă ecuația :

$$\frac{80}{100}x + \frac{70}{100}x - 45 = x \text{ cu soluția } x = 90.$$

**REZOLVĂRILE ȘI REZULTATELE PROBLEMELOR
PENTRU CLASA A VII-A
GEOMETRIE**

VII.G.1. Deoarece $AM = NC$, $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}) = 60^\circ$, $AC = BC$, $\triangle AMC \equiv \triangle CNB$ (L.U.L.). Rezultă că $\sphericalangle PBC \equiv \sphericalangle PCN$.

Notăm $\alpha = m(\widehat{PBC})$.

Avem $m(\widehat{MPN}) = m(\widehat{BPC}) = 180^\circ - (m(\widehat{PBC}) + m(\widehat{PCB})) = 180^\circ - (\alpha + 60^\circ - \alpha) = 120^\circ$.

Deci $m(\widehat{MPN}) = 120^\circ = \text{constant}$. (Vezi fig. VII.G.1.)

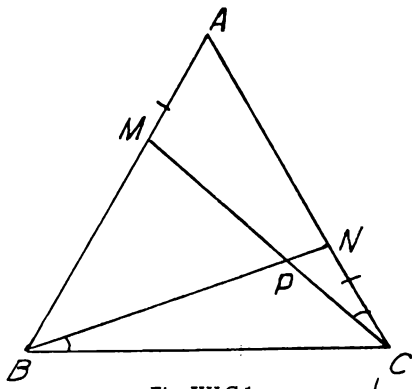


Fig. VII.G.1.

VII.G.2. a) (Vezi fig. VII.G.2.) Notăm $m(\widehat{BAA'}) = \alpha$. În triunghiul dreptunghic AHD , $m(\widehat{AHD}) = 90^\circ - \alpha$. Dar $\sphericalangle AHD \equiv \sphericalangle A'HC$, fiind opuse la vîrf. Rezultă că $m(\widehat{A'HC}) + \alpha = 90^\circ$, deci $m(\widehat{AA'C}) = 90^\circ$, deci AA' este înălțime. Cum AA' este și bisectoare, rezultă că triunghiul ABC este isoscel, avînd $AB = AC$.

b) Din a) rezultă că dreptele AH și BC sînt perpendiculare. Din ipoteză, CH și AB sînt perpendiculare. Rezultă că H este ortocentrul triunghiului ABC , deci BH și AC sînt perpendiculare.

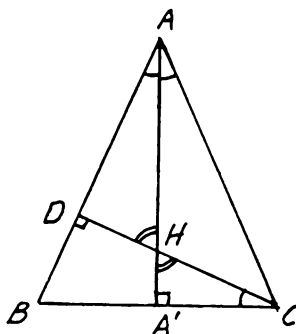


Fig. VII.G.2.

VII.G.3. (Vezi fig. VII.G.3.). Dreapta AA' este axă de simetrie a triunghiului ABC , deci $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC}) = x$. Dreapta AC este axă de simetrie a figurii $ADCD'$, deci $m(\widehat{CD'A}) = m(\widehat{CDA}) = 90^\circ$.

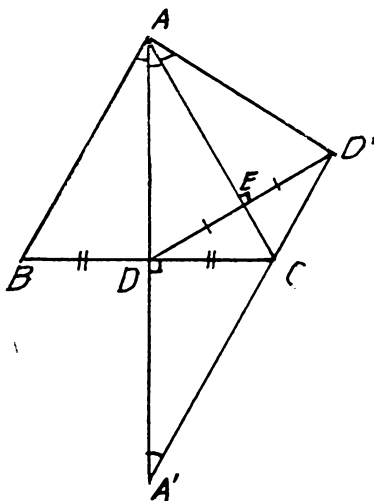


Fig. VII.G.3.

Dreapta CD este axă de simetrie a triunghiului ACA' , deci $m(\widehat{CA'A}) = x$. Rezultă că în triunghiul $AA'D'$ avem relația: $2x + x = 90^\circ$, deci $x = \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ$.

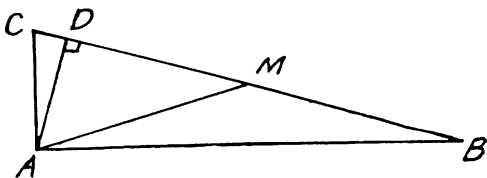


Fig. VII.G.4.

VII.G.4. Fie A unghiul drept al triunghiului ABC și D proiecția lui A pe ipotenuză. Fie M mijlocul segmentului BC . (Vezi fig. VII.G.4.).

Triunghiul MAB este isoscel. (Teorema medianei în triunghiul dreptunghic). Rezultă că: $m(\widehat{MAB}) = 15^\circ$.

Deci $m(\widehat{DMA}) = 30^\circ$. (Teorema unghiului exterior). Rezultă că, în triunghiul dreptunghic DAM , $AD = \frac{AM}{2}$ Dar $AM = \frac{BC}{2}$. Rezultă că

$$AD = \frac{1}{4} \cdot BC.$$

VII.G.5. (Vezi fig. VII.G.5.). Unghiul AED este un unghi exterior al triunghiului AEC .

Rezultă că $m(\widehat{AED}) = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$. Rezultă că $m(\widehat{DAE}) = 30^\circ$.

Deci, în triunghiul dreptunghic ADE , avem: $DE = \frac{1}{2} \cdot AE$. (1)

Deoarece în triunghiul ABC , AO este mediana corespunzătoare ipotenuzei, triunghiul AOC este isoscel. Deci $m(\widehat{OAC}) = m(\widehat{OCA}) = 15^\circ$. Unghiul EOA este unghi exterior triunghiului AOC .

Rezultă că: $m(\widehat{EOA}) = 30^\circ$.

Deci $m(\widehat{EAO}) = m(\widehat{EAC}) - m(\widehat{OAC}) = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$. Rezultă că triunghiul AEO este isoscel, deci $AE = OE$. (2)

Din (1) și (2) rezultă: $DE = \frac{1}{2} \cdot OE$.

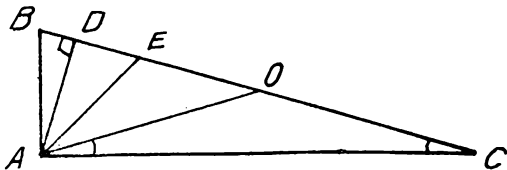


Fig. VII.G.5.

VII.G.6. Fie $2\alpha = m(\widehat{CAB})$, $2\beta = m(\widehat{ABC})$. (Vezi fig. VII.G.6). Avem $\alpha + \beta = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$.

Unghiul KOB este unghi exterior triunghiului AOB . Rezultă că $m(\widehat{KOB}) = 60^\circ$. Deci unghiurile ECK și EOK sînt suplementare. Deci și unghiurile OEC , OKC sînt suplementare.

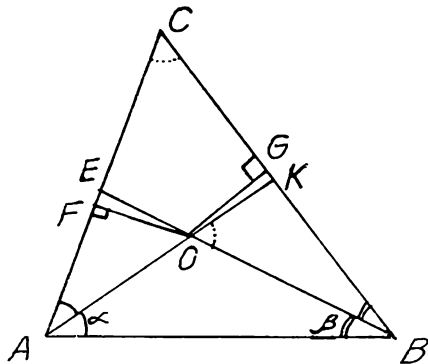


Fig. VII.G.6.

Fie F , respectiv G proiecțiile lui O pe AC , respectiv BC . În ipotezele problemei sînt posibile următoarele trei situații :

I. Dacă $\widehat{A} > \widehat{C}$, atunci $\alpha > \beta$ și F este între A și E , iar G între K și C .

II. Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$, atunci triunghiul ABC este echilateral și afirmația de demonstrat este evidentă.

III. Dacă $\widehat{A} < \widehat{C}$, atunci $\alpha < \beta$ și F este între E și C , iar G între B și K . Acest caz se tratează analog cu I.

I. Deoarece O este punctul de intersecție a două bisectoare ale triunghiului ABC , dreapta OC este bisectoarea unghiului C în triunghiul ABC , deci $OF = OG$. (1)

Dar $\sphericalangle OEF \equiv \sphericalangle OKG$, avînd același suplement. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $\triangle EOF \equiv \triangle KOG$ (C.U.).

Rezultă că $OE = OK$.

VII.G.7. Pentru că M este interior triunghiului ABC , rezultă că semidreapta AM este interioară unghiului BAC .

În triunghiurile BAM și DAM , avem : $AM = MA$; $AB = AD$ iar $\widehat{BAM} < \widehat{DAM}$. Conform teoremei articulației, rezultă că $MB < MD$. (Vezi fig. VII.G.7.).

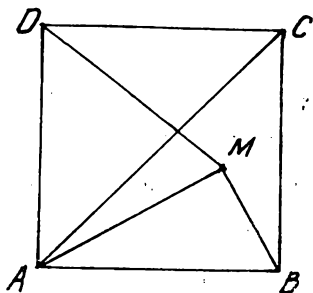


Fig. VII.G.7.

VII.G.8. Fie A, B, C, D vîrfurile trapezului și O intersecția diagonalelor AC și BD . (Vezi fig. VII.G.8.).

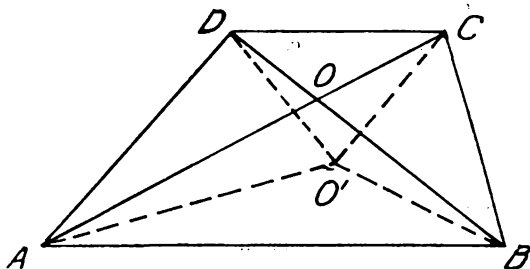


Fig. VII.G.8.

Vom arăta că, oricare ar fi O' în interiorul trapezului, $O' \neq O$, avem : $OA + OB + OC + OD < O'A + O'B + O'C + O'D$.

Fie O' un punct fixat în interiorul trapezului $ABCD$.

În triunghiul $AO'C$, avem : $AC < O'A + O'C$. (1)

În triunghiul $BO'D$, avem : $BD < O'B + O'D$. (2)

Însumînd relațiile (1) și (2) rezultă : $AC + BD < O'A + O'B + O'C + O'D$.

Adică : $OA + OB + OC + OD < O'A + O'B + O'C + O'D$. (3)

Cum O' a fost arbitrar fixat în interiorul trapezului, rezultă că relația (3) este valabilă pentru orice punct O' din interiorul trapezului. Deci suma distanțelor de la un punct din interiorul trapezului la vîrfuri este minimă cînd punctul se află la intersecția diagonalelor.

VII.G.9. a) Avem :

$$\begin{aligned} E(a, b, c) &= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = \\ &= (2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2) = \\ &= [c^2 - (a - b)^2] \cdot [(a + b)^2 - c^2] = \\ &= (c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c). \end{aligned}$$

Notînd $2p = a + b + c$, rezultă

$$\begin{aligned} E(a, b, c) &= (2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c) \cdot 2p = \\ &= 16p(p - a)(p - b)(p - c). \end{aligned}$$

Deoarece fiecare factor este strict pozitiv, rezultă că $E(a, b, c) > 0$, pentru orice numere a, b, c reprezentînd lungimile laturilor unui triunghi.

b) Întrucît a, b, c sînt arbitrare, este suficient să arătăm că $\sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$. (Analog se arată că $\sqrt{b} < \sqrt{a} + \sqrt{c}$; $\sqrt{c} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$).

Avem $a < b + c$. Cu atît mai mult $a < b + c + 2\sqrt{bc}$, ($2\sqrt{bc} > 0$).

Rezultă că $a < (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2$, deci $\sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

Deci $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

VII.G.10. Avem $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Înmulţind ambii membri ai egalităţii cu 2 şi, trecînd totul în membrul întii, obţinem :

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0.$$

Grupînd termenii convenabil, avem

$$(a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 + c^2 - 2ac) + (b^2 + c^2 - 2bc) = 0.$$

Adică : $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 0$.

O sumă de numere pozitive este nulă dacă şi numai dacă fiecare termen al sumei este nul.

$$\text{Rezultă că : } \begin{cases} a - b = 0 \\ a - c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$

Adică $a = b = c$. Deci triunghiul ABC este echilateral.

VII.G.11. a) Orice două puncte distincte determină o dreaptă. Fie A_1, A_2, \dots, A_{101} cele 101 puncte cu proprietatea că oricare 3 sînt necoliniare. Mulţimile : $\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_1, A_4\}, \dots, \{A_1, A_{101}\}$ determină 100 drepte. La fel mulţimile : $\{A_2, A_1\}, \{A_2, A_3\}, \dots, \{A_2, A_{101}\}$ ş.a.m.d.

În total, $100 \cdot 101$ drepte. Dar dreptele determinate de perechile de puncte (A_i, A_j) și (A_j, A_i) , pentru orice $i \neq j$, coincid. Deci numărul de drepte distincte determinate de 101 puncte, oricare trei necoliniare, este $\frac{100 \cdot 101}{2} = 5\,050$.

b) Dacă punctele A_1, A_2, \dots, A_{101} sînt coliniare, atunci ele determină o singură dreaptă. Numărul minim cerut se obține în situația în care unul singur din aceste puncte nu este colinar cu celelalte. Fie acesta A_1 . (În caz contrar, putem schimba numerotarea punctelor). Notăm d dreapta determinată de punctele coliniare A_2, A_3, \dots, A_{101} .

Mulțimile $\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \dots, \{A_1, A_{101}\}$ determină 100 drepte. Împreună cu d , vor fi 101 drepte.

VIII.12. Unim toate punctele două câte două și obținem $101 \cdot 50$ drepte, eventual nu toate diferite. Fie d o altă dreaptă care nu este paralelă cu nici una dintre acestea. (Există o astfel de dreaptă). Fie $d' \perp d$. Cele 101 puncte din interiorul pătratului se proiectează pe d' în 101 puncte distincte. (Dacă două puncte ar avea aceeași proiecție, atunci dreapta determinată de ele este perpendiculară pe d' , deci paralelă cu d , ceea ce este în contradicție cu construcția lui d). Din cele 101 puncte-proiecție, alegem pe cel din mijloc și dreapta căutată este dreapta perpendiculară pe d' care trece prin punctul ales.

VII.G.13. Deoarece $m(\widehat{A}) = \frac{m(\widehat{BC})}{2}$ rezultă că $m(\widehat{BC}) = 60^\circ$.

Deci $m(\widehat{BOC}) = 60^\circ$. (1)

Dar $OC = OB = r$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că triunghiul BOC este echilateral.

Deci $r = 10$ cm. (Vezi fig. VII.G.13.).

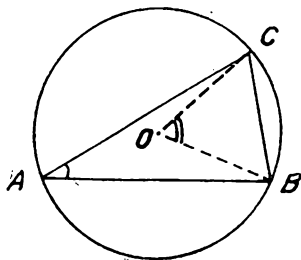


Fig. VII.G.13.

VII.G.14. Avem: $\triangle AOM \equiv \triangle BOM \equiv \triangle BCM$ (C.C.). Rezultă că $\sphericalangle AMO \equiv \sphericalangle OMB \equiv \sphericalangle BMC$. Deci: $m(\widehat{AMC}) = 3m(\widehat{BMC})$. (Vezi fig. VII.G.14.).

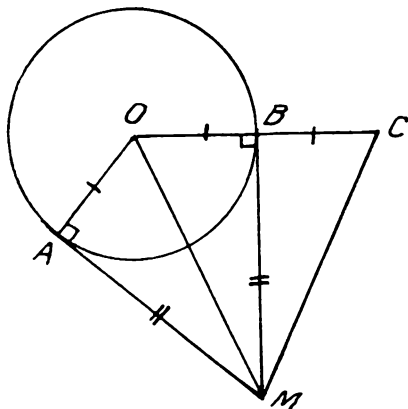


Fig. VII.G.14.

VII.G.15. Fie A, B, C, D vîrfurile unui patrulater inscriptibil și Q, N proiecțiile lui A și C pe BD ; M, P proiecțiile lui D și B pe AC . Pentru prescurtare, notăm : $\sphericalangle DAM = \sphericalangle 1$; $\sphericalangle DBC = \sphericalangle 2$; $\sphericalangle NPM = \sphericalangle 3$; $\sphericalangle MQN = \sphericalangle 4$.

Deoarece patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil, rezultă: $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$. (1)

Deoarece patrulaterul $AMQD$ este inscriptibil, rezultă: $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 4$. (2)

Deoarece patrulaterul $NBCP$ este inscriptibil, rezultă: $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 3$. (3)

Din (1), (2) și (3) rezultă că $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 4$.

Deci patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

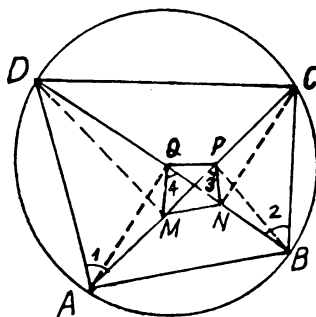


Fig. VII.G.15.

VII.G.16. Fie M, N, P, Q proiecțiile lui O pe laturile AB, BC, CD , respectiv AD ale patrulaterului $ABCD$. (Vezi fig. VII.G.16.).

În patrulaterelor înscrisibile $AMOQ$ și $QOPD$, avem :

$$\begin{aligned} \sphericalangle OQM &\equiv \sphericalangle OAM \\ \sphericalangle OQP &\equiv \sphericalangle ODP \end{aligned} \quad (1)$$

În patrulaterelor înscrisibile $BMON$ și $NOPC$ avem :

$$\begin{aligned} \sphericalangle ONM &\equiv \sphericalangle OBM \\ \sphericalangle ONP &\equiv \sphericalangle OCP \end{aligned} \quad (2)$$

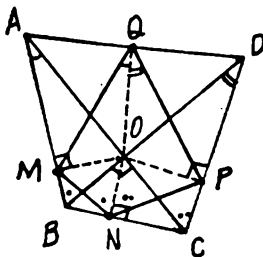


Fig. VII.G.16.

Ținând cont de relațiile (1), (2) și de faptul că dreptele AC și BD sînt perpendiculare, rezultă :

$$\begin{aligned} m(\widehat{MQP}) + m(\widehat{MNP}) &= \\ &= m(\widehat{OQM}) + m(\widehat{OQP}) + m(\widehat{ONM}) + m(\widehat{ONP}) = \\ &= m(\widehat{OAM}) + m(\widehat{ODP}) + m(\widehat{OBM}) + m(\widehat{OCP}) = \\ &= m(\widehat{OAM}) + m(\widehat{OBM}) + m(\widehat{ODP}) + m(\widehat{OCP}) = \\ &= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ. \end{aligned}$$

Deci $MNPQ$ este înscrisibil.

VII.G.17. (Vezi fig. VII.G.17.). Deoarece $OM \perp AC$, $ON \perp AB$, rezultă că MN este linie mijlocie în triunghiul ABC .

Deci $MN \parallel BC$. Rezultă că $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle ABC$. (1)

Patrulaterul $BPCQ$ fiind înscris în cerc rezultă că :

$$\sphericalangle QPM \equiv \sphericalangle QCB. \quad (2)$$

Unghiurile QNA și BNC sînt opuse la vîrf, deci :

$$\sphericalangle QNA \equiv \sphericalangle BNC. \quad (3)$$

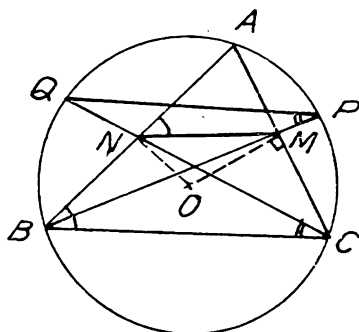


Fig. VII.G.17.

Din (1), (2) și (3), ținând cont că suma măsurilor unghiurilor triunghiului ABC este 180° , rezultă că $m(\widehat{QNM}) + m(\widehat{QPM}) = m(\widehat{BNC}) + m(\widehat{NBC}) + m(\widehat{BCN}) = 180^\circ$, deci $MNQP$ este inscriptibil.

VII.G.18. Fie E pe diagonala AC . (Vezi fig. VII.G.18.). Deoarece $ABCD$ este romb, AC este bisectoarea $\sphericalangle BAD$. Deci $\triangle AQE \cong \triangle AME$ (I.U.).
Rezultă că triunghiul MAQ este isoscel, deci $MQ \perp AC$. (1)

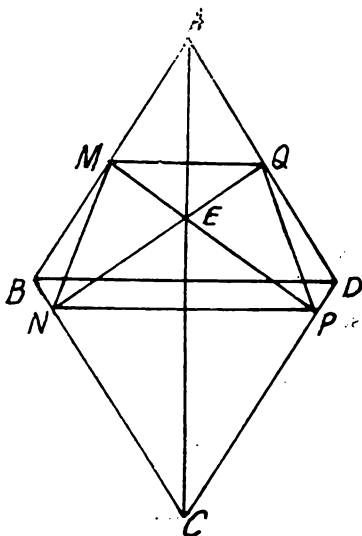


Fig. VII.G.18.

Analog, arătăm că $\triangle CNE \equiv \triangle CPE$ (I.U.); deci triunghiul NCP este isoscel; deci CA este înălțimea acestui triunghi; deci $NP \perp AC$. (2)

Din (1) și (2) rezultă $MQ \parallel NP$, deci $MNPQ$ este trapez. Se arată ușor că $\triangle BNM \equiv \triangle DPQ$ (L.U.L.). Rezultă că $MN = QP$, deci trapezul $MNPQ$ este isoscel și, în concluzie, inscriptibil.

VII.G.19. a) Deoarece $\widehat{AC} \equiv \widehat{BD}$ rezultă că $CD \parallel AB$. Deci $ABDC$ este trapez și fiind înscris în cerc, este isoscel. (Vezi fig. VII.G.19.).

b) Avem $\widehat{AC} \equiv \widehat{CD} \equiv \widehat{BD}$. Rezultă că $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COD}) = m(\widehat{DOB}) = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

În triunghiul AOC avem $AO = OC = r$, $m(\widehat{AOC}) = 60^\circ$ Rezultă că triunghiul AOC este echilateral. Analog, triunghiurile COD și BOD sînt echilaterale. Deci patrulaterul $COBD$ este romb. Rezultă că diagonalele lui sînt perpendiculare, deci $m(\widehat{PNO}) = 90^\circ$. (1)

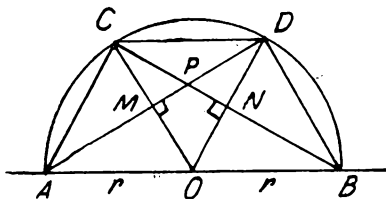


Fig. VII.G.19.

La fel, patrulaterul $AODC$ este romb, deci $AD \perp OC$. Rezultă că $m(\widehat{PMO}) = 90^\circ$. Din (1) și (2) rezultă că patrulaterul $MONP$ este inscriptibil.

VII.G.20. Metoda 1

Patrulaterul $ABPC$ este înscris în cerc. Rezultă că $m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{CPB}) = 180^\circ$. (1)

Deoarece M este mijlocul segmentelor BC și PT , patrulaterul $BPCT$ este paralelogram.

Deci $\sphericalangle BPC \equiv \sphericalangle BTC$.

Dar, $\sphericalangle BTC \equiv \sphericalangle HTG$, fiind unghiuri opuse la vîrf. Rezultă că $\sphericalangle BPC \equiv \sphericalangle HTG$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $m(\widehat{HAG}) + m(\widehat{HTG}) = 180^\circ$. Deci $AHTG$ este inscriptibil. (Vezi fig. VII.G.20.)

METODA 2 :

Fie I intersecția dreptei HC cu cercul. Avem :

$$m(\widehat{BAC}) = \frac{m(\widehat{BP}) + m(\widehat{PC})}{2} \quad (3)$$

Deoarece $MP = MT$, $BM = MC$, $BPCT$ este paralelogram. (4)

Din (4) rezultă că $BPCI$ este trapez și, fiind inscribit, este trapez isoscel. Deci $\sphericalangle PCI \equiv \sphericalangle BIC$. (5)

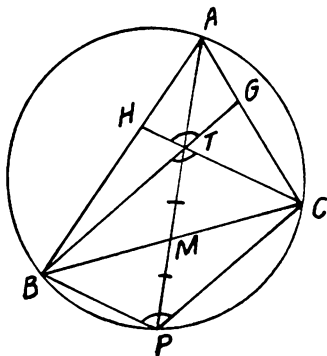


Fig. VII.G.20.

$$\text{Dar } m(\widehat{BIC}) = \frac{m(\widehat{BP}) + m(\widehat{PC})}{2} \quad (6)$$

Din (3), (4), (5) și (6) rezultă că $\sphericalangle BTI \equiv \sphericalangle PCI \equiv \sphericalangle BIC \equiv \sphericalangle BAC$, deci $\sphericalangle BTH \equiv \sphericalangle HAG$, adică patrulaterul $AHTG$ este inscribit.

VII.G.21. a) (Vezi fig. VII.G.21.) Avem : $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle FDE$, fiind unghiuri opuse în paralelogramul $ABCD$; (1)

$\sphericalangle EIF \equiv \sphericalangle AIC$, fiind unghiuri opuse la vîrf. (2)

Patrulaterul $AICB$ este înscris în cerc, deci unghiurile AIC și ABC sînt suplementare. (3)

Din (1), (2) și (3) rezultă că $m(\widehat{FDE}) + m(\widehat{EIF}) = 180^\circ$, deci patrulaterul $IEDF$ este inscribit.

b) Deoarece $IEDF$ este inscribit, rezultă că $\sphericalangle CFE \equiv \sphericalangle CDB$. (4)

Cum $AB \parallel CD$, rezultă că $\sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle ABD$ (alterne interne). (5)

$$\text{Dar } m(\widehat{ABD}) = \frac{m(\widehat{AI})}{2} = m(\widehat{ACI}). \quad (6)$$

Din (4), (5) și (6) rezultă că $\sphericalangle ACI \equiv \sphericalangle CFE$, deci dreptele EF și AC sînt paralele.

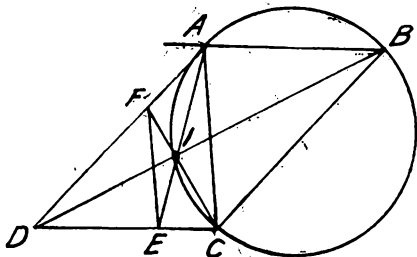


Fig. VII.G.21.

VII.G.22. Fie $ABCD$ un trapez, M mijlocul bazei mari BC , E , respectiv F proiecțiile lui M pe dreptele AB și CD (Vezi fig. VII.G.22.).

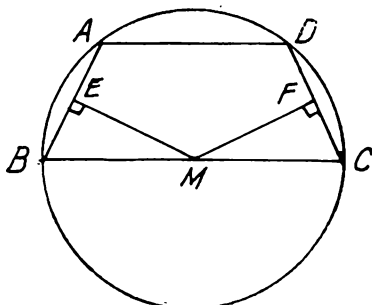


Fig. VII.G.22.

Trapezul $ABCD$ este inscribibil (\Leftrightarrow) $ABCD$ este trapez isoscel (\Leftrightarrow) $\sphericalangle EBM \equiv \sphericalangle FCM$ (\Leftrightarrow) $\triangle BME \equiv \triangle CMF$ (\Leftrightarrow) $EM = MF$.

Raționamentul este analog dacă M aparține bazei mici a trapezului.

VII.G.23. Triunghiul ABC este isoscel (\Leftrightarrow) $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ (\Leftrightarrow) $\widehat{AC} \equiv \widehat{AB}$.

$$\text{Dar, } m(\widehat{APQ}) = \frac{m(\widehat{AC})}{2} + \frac{m(\widehat{CQ})}{2}, \quad m(\widehat{ANB}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2} + \frac{m(\widehat{CQ})}{2}.$$

Deci $AC = AB$ (\Leftrightarrow) $\sphericalangle APQ \equiv \sphericalangle ANB$ (\Leftrightarrow) patrulaterul $NMPQ$ este inscribibil (\Leftrightarrow) există un punct O egal depărtat de punctele N, M, P, Q , (\Leftrightarrow) mediatoarele oricăror trei laturi ale patrulaterului $NMPQ$ sînt concurente.

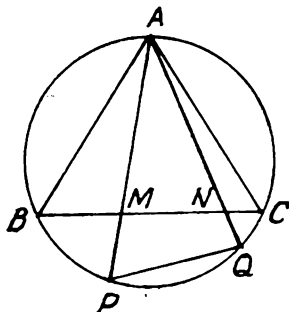


Fig. VII.G.23.

VII.G.24. Fie ABC un triunghi, D, E proiecțiile lui B , respectiv C pe dreptele AC, AB ; fie M mijlocul segmentului ED . Fie A' punctul de intersecție a mediatoarei segmentului ED cu BC . (Vezi fig. VII.G.24).

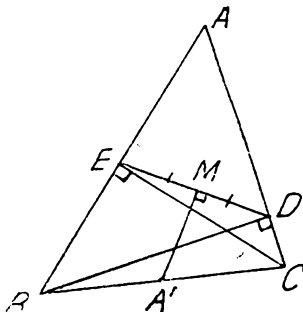


Fig. VII.G.24.

Deoarece $m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{BDC}) = 90^\circ$, patrulaterul $DEBC$ este inscrip-tibil, iar mediatoarea coardei DE conține un diametru al cercului circumscriș lui $DEBC$.

Cum BC este alt diametru, rezultă că A' este centrul cercului, deci $A'B = A'C$.

VII.G.25. Conform problemei anterioare, F este mijlocul segmentului BC și B, C, D, E sînt conciclice pe cercul de centru F . (Vezi fig. VII.G.25).

$$\text{Deci, } m(\widehat{DCE}) = \frac{m(\widehat{DE})}{2} = \frac{m(\widehat{EFD})}{2}.$$

$$\text{Avem : } m(\widehat{A}) = 60^\circ \langle \Rightarrow \rangle m(\widehat{ABD}) = 30^\circ = m(\widehat{DCE}) \langle \Rightarrow \rangle \dots$$

$$\langle \Rightarrow \rangle m(\widehat{DFE}) = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ \langle \Rightarrow \rangle \text{Triunghiul isoscel } DEF \text{ este echilateral.}$$

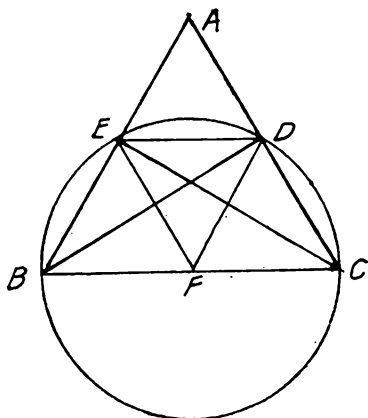


Fig. VII.G.25.

VII.G.26. (Vezi fig. VII.G.26.). Deoarece patrulateralele $BMHP$, $BMNA$ și $PHNA$ sunt inscriptibile rezultă că

$$\sphericalangle HPM \equiv \sphericalangle HBM \equiv \sphericalangle NAH \equiv \sphericalangle NPH. \text{ Deci}$$

$$\sphericalangle HPN \equiv \sphericalangle HPM, \text{ adică } PH \text{ este bisectoare în triunghiul } MNP. \quad (1)$$

Analog, $\sphericalangle HNP \equiv \sphericalangle HAP \equiv \sphericalangle HCM \equiv \sphericalangle HNM$, deci NH este bisectoare în triunghiul MNP . (2)

Din (1) și (2) rezultă că H este centrul cercului înscris în triunghiul MNP .

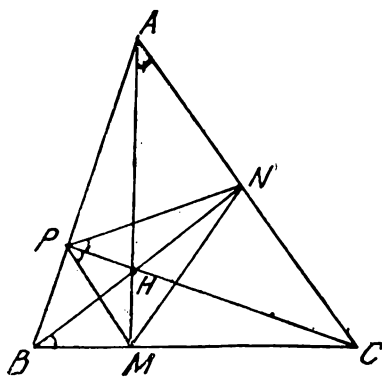


Fig. VII.G.26.

VII.G.27. CAZUL I. Punctele C și D sînt situate pe semidreptele AO , respectiv BO în exteriorul segmentelor AO și BO .

METODA 1

Fie O_1, O_2 centrele cercurilor de diametri OA , respectiv OB . Fie M mijlocul segmentului CD . Fie I intersecția dreptei OB cu AB .

Deoarece $ABCD$ este înscris în cerc, $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle ABD$. (1)

Apoi, $\sphericalangle MOD \equiv \sphericalangle IOB$ (unghiuri opuse la vîrf). (2)

Deoarece OM este mediană în triunghiul dreptunghic COD , rezultă că $\sphericalangle MOD \equiv \sphericalangle MDO$. (3)

Din (1), (2), (3) rezultă că : $m(\widehat{IOB}) + m(\widehat{OBI}) = 90^\circ$.

Deci $I \in C(O_2, O_2B)$. (4)

Analog rezultă că $m(\widehat{IOA}) + m(\widehat{OAI}) = 90^\circ$. Deci $I \in C(O_1, O_1A)$. (5)

Din (4) și (5) rezultă că $I \in C(O_1, O_1A) \cap C(O_2, O_2B)$. (Vezi fig. VII.G.27.).

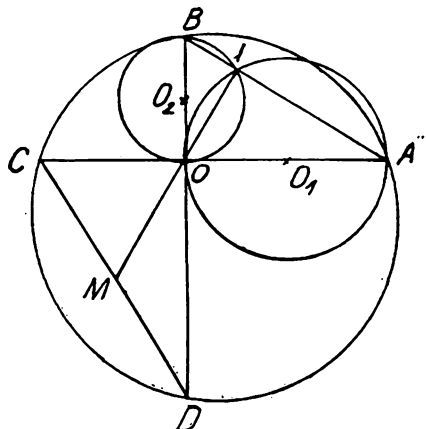


Fig. VII.G.27.

METODA 2

Fie OI dreapta de intersecție a cercurilor de centre O_1, O_2 . Arătăm că OI este mediană în triunghiul COD . Fie M intersecția dreptelor OI și CD . Dreapta AC este tangentă în O la $C(O_2, O_2B)$.

Deci : $\sphericalangle IBO \equiv \sphericalangle IOA \equiv \sphericalangle MOC$. (6)

Din (1), (6) rezultă că $\sphericalangle MCO \equiv \sphericalangle MOC$, deci $CM = MO$. (7)

Analog se arată că $\sphericalangle MDO \equiv \sphericalangle MOD$, deci $DM = MO$. (8)

Din (7) și (8) rezultă că $CM = MD$, deci OM este mediană în triunghiul COD .

CAZUL II

Punctele C și D sînt interioare segmentelor AO , respectiv BO . Raționamentul este analog cazului I.

VII.G.28. Fie $M \in \widehat{AB}$. Avem $MC > MA$, $MC > MB$. Construim P pe MC astfel încât $PC = MA$. (Vezi fig. VII.G.28.).

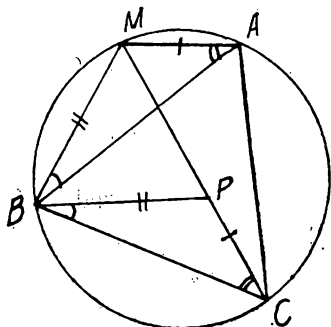


Fig. VII.G.28.

Avem $BC = AB$; $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{BCM}) = \frac{m(\widehat{BM})}{2}$.

Rezultă că $\triangle BCP \equiv \triangle BAM$ (L.U.L.).

De aici obținem că $BP = BM$ și $m(\widehat{MBP}) = m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$.

Rezultă că triunghiul MBP este echilateral.

Deci $MB = MP$.

Dar $MC = MP + PC$.

Deci $MC = MB + MA$.

Analog procedăm dacă M se găsește pe arcul mic AC , sau pe arcul mic BC .

VII.G.29. a) Avem $m(\widehat{AEB}) = 90^\circ$, $m(\widehat{AFB}) = 90^\circ$, deci patrulaterul $ABFE$ este inscriptibil. Rezultă că $\sphericalangle FEB \equiv \sphericalangle FAB$. (1)

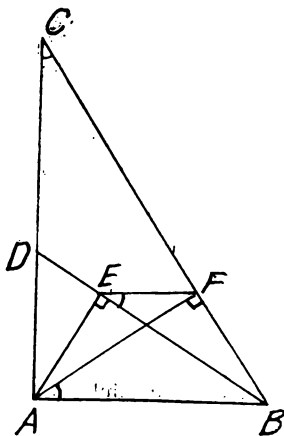


Fig. VII.G.29.a.

Dar $\sphericalangle FAB \equiv \sphericalangle FCA$ (avind același complement). (2)

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle FEB \equiv \sphericalangle FCD$, deci patrulaterul $CDEF$ este inscripșibil. (Vezi fig. VII.G.29 a.)

b) Deoarece D aparține segmentului AC , rezultă că punctele A și F sînt separate de cătore dreapta BD . Cum $AE \perp BD$, rezultă că $m(\widehat{AEF}) > 90^\circ$.

În triunghiul obtuzunghic AEF avem $AF > AE$, $AF > EF$. (3)

Dacă triunghiul AEF este isoscel, din (3) rezultă $AE = EF$. De aici $\sphericalangle EAF \equiv \sphericalangle EFA$. Dar $ABFE$ este inscripșibil, deci $\sphericalangle EAF \equiv \sphericalangle FBD$, $\sphericalangle EFA \equiv \sphericalangle DBA$. Rezultă că $\sphericalangle FBD \equiv \sphericalangle DBA$, deci BD este bisectoarea unghiului B al triunghiului ABC .

c) Notăm $m(\widehat{EFA}) = \alpha$. (Vezi fig. VII.G.29.b.). Deoarece $ABFE$ este trapez isoscel, rezultă că $\sphericalangle EFA \equiv \sphericalangle FAB \equiv \sphericalangle ABE$. Deoarece BD este bisectoarea ABF avem și $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle EBF$. Aplicînd teorema despre suma măsurilor unghiurilor în triunghiul dreptunghic ABF , obținem $3\alpha = 90^\circ$, deci $\alpha = \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ$. Rezultă că $m(\widehat{ABC}) = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$, deci $m(\widehat{ACB}) = 30^\circ$.

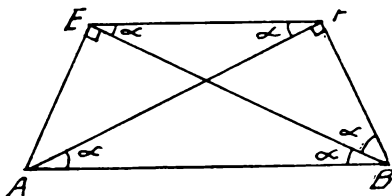


Fig. VII.G.29.b.

VII.G.30. a) Deoarece $m(\widehat{MQT}) = m(\widehat{MST}) = 90^\circ$, patrulaterul $TQMS$ este inscripșibil. Rezultă că

$$\sphericalangle TQS \equiv \sphericalangle TMS, \sphericalangle QMT \equiv \sphericalangle QST. \quad (1)$$

Dar MT este bisectoarea unghiului QMS , deci $\sphericalangle QMT \equiv \sphericalangle TMS$ (2).

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle TQS \equiv \sphericalangle QST$, deci triunghiul TQS este isoscel. (3)

Observație. (Obținem același lucru observînd că T , fiind situat pe bisectoarea unghiului BMC , este egal depărtat de laturile MB , MC . Deci $TQ = TS$.)

Pe de altă parte, $m(\widehat{BMC}) = 120^\circ$. Rezultă că $m(\widehat{TQS}) = m(\widehat{SMT}) = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$. (4)

Din (3) și (4) rezultă că triunghiul TQS este echilateral.

b) METODA 1

Bisectoarea unghiului BMC trece printr-un punct situat la mijlocul arcului mare BC . Deoarece $\widehat{AB} \equiv \widehat{AC}$, punctul A aparține acestei bisectoare, deci punctele M, T, A , sînt coliniare.

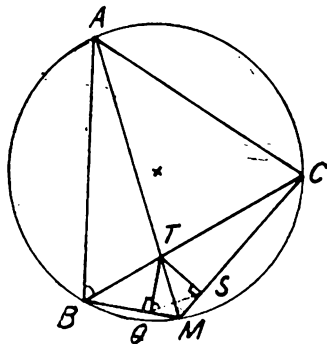


Fig. VII.G.30.

METODA 2

$$\text{Avem } m(\widehat{TMC}) = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ = m(\widehat{ABC}). \quad (5)$$

$$\text{Dar } ABMC \text{ fiind inscripabil, } m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{AMC}). \quad (6)$$

Din (5) și (6) rezultă că $\sphericalangle TMC \equiv \sphericalangle AMC$, deci T aparține dreptei AM , deci punctele M, T, A , sînt coliniare.

VII.G.31. a) Fie O și O' centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD și respectiv ACD . (Vezi fig. VII.G.31.). Avem : $m(\widehat{DAB}) = \frac{m(\widehat{BD})}{2} =$

$$= m(\widehat{DBM}) ; m(\widehat{DAC}) = \frac{m(\widehat{CD})}{2} = m(\widehat{DCM}).$$

Dar, în triunghiul BMC , $m(\widehat{DBM}) + m(\widehat{DCM}) + m(\widehat{BMC}) = 180^\circ$.

Deci $m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{DAC}) + m(\widehat{BMC}) = 180^\circ$, adică $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{BMC}) = 180^\circ$, deci patrulaterul $ABMC$ este inscripabil.

b) Dacă punctele A, D, M sînt coliniare, atunci ADM este diagonală a patrulaterului inscripabil $ABMC$. Rezultă că

$$\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle DBM. \quad (1)$$

Dar

$$\sphericalangle DBM \equiv \sphericalangle BAD. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$, deci AD este bisectoarea unghiului BAC .

Reciproc, dacă AD este bisectoare, atunci $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAD}$. (3)

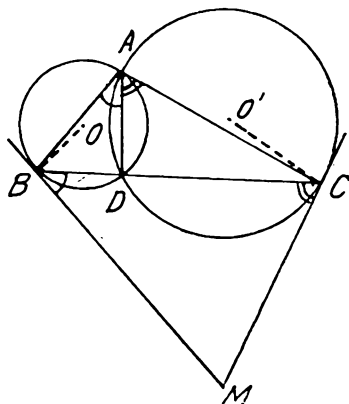


Fig. VII.G.31.

Dar $ABMC$ fiind inscriptibil, avem

$$\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle CBM, \quad \sphericalangle CBM \equiv \sphericalangle BAD. \quad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că $\widehat{CAD} \equiv \widehat{CAM}$, deci punctele A, D, M sînt coliniare.

VII.G.32. METODA 1. a) Deoarece $O_1D \perp DE$, $O_2E \perp DE$, rezultă că $O_1D \parallel O_2E$. Rezultă că $\sphericalangle BO_1D$ și $\sphericalangle CO_2E$ sînt suplementare, fiind unghiuri externe de aceeași parte a secantei. Cum $\sphericalangle BO_1D$ și $\sphericalangle EO_2C$ sînt unghiuri la centru, avem $m(\widehat{BD}) + m(\widehat{EC}) = 180^\circ$. (1)

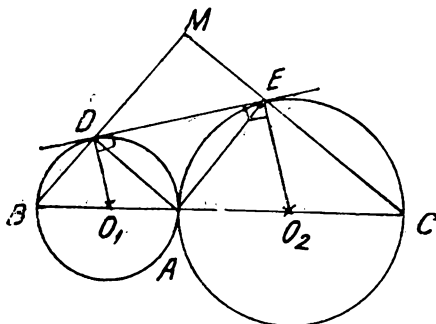


Fig. VII.G.32.

$$\text{Dar } m(\widehat{BAD}) = \frac{m(\widehat{BD})}{2}, \quad m(\widehat{EAC}) = \frac{m(\widehat{EC})}{2}. \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2) rezultă că } m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{EAC}) = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Deci $m(\widehat{DAE}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Rezultă că triunghiul DAE este dreptunghic (în A).

b) Dreptele O_1D și O_2E sînt paralele, fiind perpendiculare pe aceeași dreaptă, deci $\sphericalangle DO_1A$ și $\sphericalangle EO_2A$ sînt suplementare, fiind unghiuri interne de aceeași parte a secantei. Rezultă că $m(\widehat{AD}) + m(\widehat{AE}) = 180^\circ$. Unghiurile DBA și ECA sînt unghiuri înscrise în cerc. Deci $m(\widehat{DBA}) + m(\widehat{ECA}) = \frac{m(\widehat{AD})}{2} + \frac{m(\widehat{EA})}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. Rezultă că unghiurile DBA și ECA sînt complementare, deci $m(\widehat{BMC}) = 90^\circ$. Deci triunghiul MDE este dreptunghic (în M).

METODA 2

Deoarece $O_1D \parallel O_2E$ rezultă că $\sphericalangle BO_1D \equiv \sphericalangle AO_2E$, fiind unghiuri corespondente. Deci $m(\widehat{BD}) = m(\widehat{AE})$. Deci $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACE$. Dar $\sphericalangle BAD$ și $\sphericalangle ACE$ au poziție de unghiuri corespondente. Rezultă că $AD \parallel EC$. (3)

Pe de altă parte, unghiurile BDA și AEC sînt înscrise în semicercuri. Deci $m(\widehat{BDA}) = 90^\circ$, $m(\widehat{AEC}) = 90^\circ$. (4)

Din (3) și (4) rezultă că patrulaterul $AEMD$ este dreptunghi. Deci triunghiurile DAE și MDE sînt dreptunghice în A , respectiv M .

VII.G.33. Vom arăta că unghiurile MAB și MNB sînt suplementare. Fie P punctul de tangență al celor două cercuri. (Vezi fig. VII.G.33.).
Avem

$$\sphericalangle MNP \equiv \sphericalangle NBP \equiv \sphericalangle BNO_2. \quad (1)$$

De asemenea,

$$\sphericalangle NMP \equiv \sphericalangle MAP. \quad (2)$$

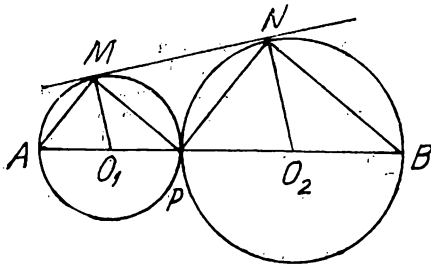


Fig. VII.G.33.

Dar conform problemei 32, $m(\widehat{NPM}) = 90^\circ$, deci unghiurile MNP și NMP sînt complementare. Din (1) și (2) va rezulta că și unghiurile MAB și MNO_2 sînt complementare. Deci $m(\widehat{MAB}) + m(\widehat{MNB}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Rezultă că patrulaterul $AMNB$ este inscripabil.

VII.G.34. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC , A' piciorul mediane AG , M intersecția dreptelor AA'' și $B''C''$ (Vezi fig. VII.G.34.).

Patrulaterul $BCB''C''$ este inscripabil, deci

$$\sphericalangle BCC'' \equiv \sphericalangle BB''C'' \quad (1)$$

În triunghiul dreptunghic BGC , GA' este mediană. Rezultă că

$$\sphericalangle GBA' \equiv \sphericalangle A'GB. \quad (2)$$

Dar $\sphericalangle BGA' \equiv \sphericalangle AGB''$, fiind unghiuri opuse la vîrf. (3)

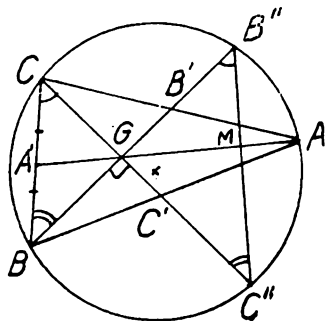


Fig. VII.G.34.

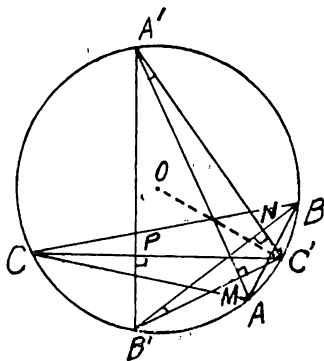
Cum $\widehat{GBA'}$ și $\widehat{A'CG}$ sînt complementare, din (1), (2) și (3) rezultă că unghiurile MGB'' și $MB''G$ sînt complementare, deci $m(\widehat{B''MG}) = 90^\circ$. Adică $B''C'' \perp AA'$.

VII.G.35. Considerăm problema rezolvată. Fie triunghiul $A'B'C'$ înscris în cercul de centru O ; M, N, P proiecțiile punctelor A', B', C' respectiv pe dreptele $B'C', C'A', A'B'$; A, B, C intersecțiile dreptelor $A'M, B'N, C'P$ cu cercul. (Vezi fig. VII.G.35.). Deoarece patrulaterul $A'NMB'$ este inscripabil, rezultă că $\sphericalangle NA'M \equiv \sphericalangle NB'M$, deci $\sphericalangle C'A'A \equiv \sphericalangle C'B'B$. Cum ambele sînt unghiuri înscrise în același cerc, arcele subîntinse sînt congruente. Deci $\widehat{AC'} \equiv \widehat{BC'}$. Deci vîrfurile C' al triunghiului se găsește la mijlocul arcului \widehat{AB} .

Analog, B' se găsește la mijlocul lui \widehat{AC} , A' la mijlocul lui \widehat{BC} . Efectuarea construcției.

Fie cercul de centru O și A, B, C cele trei puncte date pe cerc.
 Construim din O , perpendiculara pe segmentul AB . Ea intersectează \widehat{AB} în mijloc. Notăm acest mijloc C'

Analog, construim B', A' , mijloacele arcelor AC , respectiv BC .
 Triunghiul $A'B'C'$ este cel căutat.



VII.G.36. Fie P intersecția dreptelor AB și CD .

CAZUL I

P interior cercului. (Vezi fig. VII.G.36.a.)

a) În triunghiurile BDM și CAM , avem : $BM = CM$ (ca tangente duse din același punct la cerc). (1)

Deoarece : $AB = CD$, rezultă că $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$, deci $\widehat{AC} \equiv \widehat{BD}$. Rezultă că : $BD = AC$, (2)

și că $\sphericalangle MBD \equiv \sphericalangle MCA$ (avînd suplimente congruente). (3)

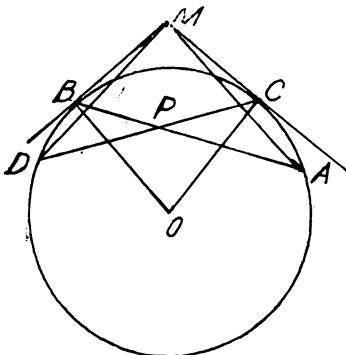


Fig. VII.G.36.a.

Din (1), (2), (3) rezultă, conform cazului L.U.L. că : $\triangle BDM \equiv \triangle CAM$. Deci $MD = MA$.

$$\begin{aligned} \text{b) În triunghiul isoscel } MBC, \text{ avem : } m(\widehat{MBC}) &= \frac{180^\circ - m(\widehat{BMC})}{2} = \\ &= \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ. \text{ Deci } m(\widehat{BC}) = 80^\circ. \end{aligned}$$

Avem $m(\widehat{BPD}) = 30^\circ$, $m(\widehat{BPC}) = 150^\circ$, pentru că $m(\widehat{BPC}) \geq 80^\circ$.

Atunci $m(\widehat{BPC}) = \frac{m(\widehat{BC}) + m(\widehat{AD})}{2}$ Deci $m(\widehat{AD}) = 220^\circ$. Avem și

$$m(\widehat{BD}) = m(\widehat{AC}) = \frac{360^\circ - m(\widehat{AD}) - m(\widehat{BC})}{2} = 30^\circ.$$

Deci $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AC}) + m(\widehat{BC}) = 30^\circ + 80^\circ = 110^\circ$.

CAZUL II :

P exterior cercului. (Vezi fig. VII.G.36.b.)

a) Se demonstrează analog că $\triangle ABM \equiv \triangle DCM$ (L.U.L.). De aici rezultă că $AM = MD$.

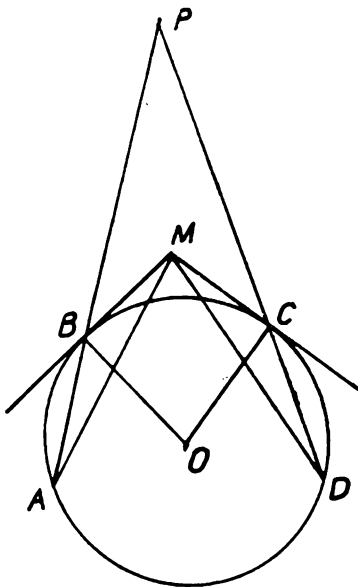


Fig. VII.G.36.b.

b) În triunghiul MBC avem $m(\widehat{MBC}) = 40^\circ$, deci $m(\widehat{BC}) = 80^\circ$.

$$\text{Dar } m(\widehat{BPC}) = 30^\circ, \text{ iar } m(\widehat{BPC}) = \frac{m(\widehat{AD}) - m(\widehat{BC})}{2}.$$

Rezultă că : $m(\widehat{AD}) = 2m(\widehat{BPC}) + m(\widehat{BC}) = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$. Deci

$$m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD}) = \frac{360^\circ - (m(\widehat{BC}) + m(\widehat{AD}))}{2} = \frac{360^\circ - (80^\circ + 140^\circ)}{2} = 70^\circ.$$

VII.G.37. Putem avea mai multe situații, după cum D este pe \widehat{AB} sau pe \widehat{BC} , sau pe \widehat{AC} . Raționamentul este, similar în toate aceste situații. Fie $D \in \widehat{AB}$, $E \in \widehat{AC}$. (Vezi fig. VII.G.37.a.)

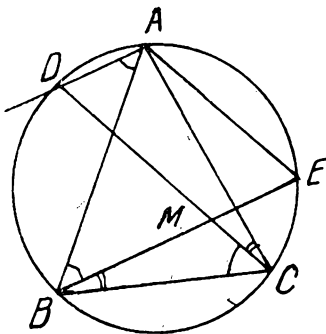


Fig. VII.G.37.a.

METODA 1

Deoarece $AD \parallel BE$, rezultă $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle ABE$ (alterne interne) (1)

$$\text{Dar } m(\widehat{BCD}) = \frac{m(\widehat{BD})}{2} = m(\widehat{DAB}). \quad (2)$$

Din (1), (2) rezultă : $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle BCD$. (3)

Dar $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ (triunghiul ABC este isoscel). (4)

Din (3) și (4) rezultă că : $\sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle DCA$, deci $\widehat{CE} \equiv \widehat{AD}$.

Deoarece secantele AE și CD determină pe cerc arce congruente rezultă că ele sînt paralele.

METODA 2

Fie următoarea lemă :

Dacă într-un patrulater două unghiuri opuse sînt congruente și două laturi opuse sînt paralele, atunci acel patrulater este paralelogram. (Demonstrația se bazează pe faptul că două drepte paralele determină cu o secantă unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplimentare.)

Fie M intersecția dreptelor BE și CD . Deoarece $ADBC$ este patrulater înscris în cerc, rezultă :

$$\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ABC. \quad (5)$$

Deoarece $ABCE$ este patrulater înscris în cerc, rezultă

$$\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle ACB. \quad (6)$$

Dar triunghiul ABC este isoscel, deci

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB. \quad (7)$$

Din (5), (6) și (7) rezultă

$$\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle AEB. \quad (8)$$

Dar $AD \parallel BE$.

(9)

Din (8) și (9), aplicînd lema, rezultă că $ADME$ este paralelogram, deci $AE \parallel CD$.

METODA 3

Fie $D \in \widehat{AC}$, $E \in \widehat{BC}$. (Vezi fig. VII.G.37.b.)

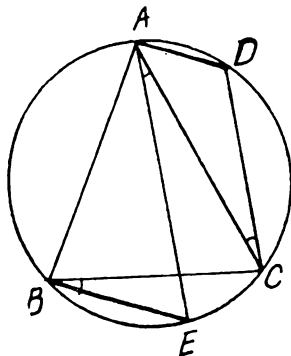


Fig. VII.G.37.b.

Deoarece $BE \parallel AD$, rezultă :

$$\widehat{AB} \equiv \widehat{DCE}. \quad (10)$$

Deoarece $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$, rezultă

$$\widehat{AB} \equiv \widehat{ADC}. \quad (11)$$

Din (10) și (11) obținem $\widehat{DCE} \equiv \widehat{ADC}$; rezultă că $\widehat{AD} \equiv \widehat{CE}$

Deci $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle ACD$. Rezultă că : $AE \parallel CD$.

METODA 4 (Vezi fig. VII.G.37.c.)

Deoarece patrulaterul $ABCD$ este inscripșibil, rezultă

$$\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ACB. \quad (12)$$

Dar $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ (triunghiul ABC este isoscel). (13)

Avem $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle DBE$ (alterne interne). (14)

Din (12), (13) și (14) rezultă că $\sphericalangle DBE \equiv \sphericalangle ABC$. Deci $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBE$ (diferențe de unghiuri congruente). Rezultă că $\widehat{AD} \equiv \widehat{EC}$.

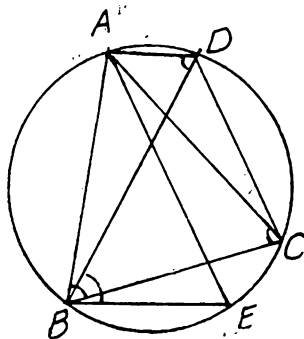


Fig. VII.G.37.c.

VII.G.38. Fie M între A și mijlocul segmentului AB . (Vezi fig. VII.G.38.)

a) Din ipoteză rezultă că $m(\widehat{OMD}) = m(\widehat{OAD}) = 90^\circ$. Deci punctele O, M, A, D sînt conciclice. Rezultă că : $\sphericalangle OAM \equiv \sphericalangle ODM$. (1)

b) Deoarece $m(\widehat{OME}) = m(\widehat{OBE}) = 90^\circ$, punctele O, B, E, M sînt conciclice. Rezultă că : $\sphericalangle OEM \equiv \sphericalangle OBM$. (2)

Dar triunghiul OAB este isoscel, deci $\sphericalangle OBM \equiv \sphericalangle OAM$. (3)

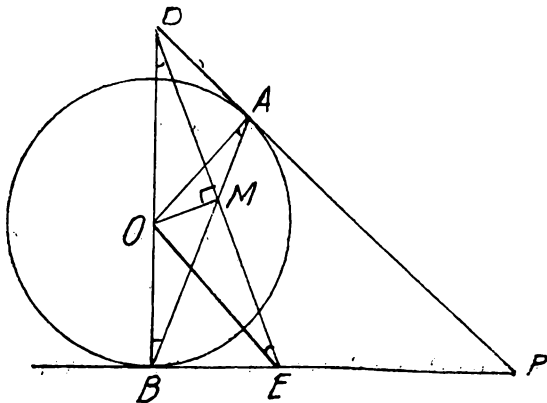


Fig. VII.G.38.

Din (1), (2) și (3) rezultă că $\sphericalangle OEM \equiv \sphericalangle ODM$, deci triunghiul OED este isoscel. Rezultă că înălțimea OM este și mediană, deci $MD = ME$.

Demonstrația este aceeași dacă M este între B și mijlocul segmentului AB , figura obținută fiind simetrică față de dreapta OP .

VII.G.39. Punctele E și F pot fi ambele interioare segmentului BC , sau numai unul din ele, sau nici unul. Deci problema admite mai multe soluții. (Vezi fig. VII.G.39.a, b, c.) Remarcăm însă că soluții diferite obținem în următoarele două situații, (celelalte rezolvându-se analog cu acestea)

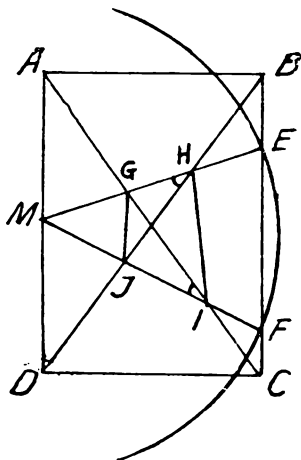


Fig. VII.G.39.a.

I. Centrul dreptunghiului $ABCD$ este interior triunghiului MEF . (Fig. VII.G.39.a, b.)

II. Centrul dreptunghiului $ABCD$ este în exteriorul triunghiului MEF (Fig. VII.G.39.c.).

CAZUL I :

În acest caz diagonalele dreptunghiului sînt diagonale ale patrulaterului $GHIJ$. Vom arăta că : $\sphericalangle GHJ \equiv \sphericalangle GIJ$.

Deoarece triunghiul MEF este isoscel, $\sphericalangle MEF \equiv \sphericalangle MFE$. Rezultă :

$$\sphericalangle BEM \equiv \sphericalangle CFM. \quad (1)$$

$$\text{Deoarece } ABCD \text{ este dreptunghi, } \sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle BCA. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle CIF \equiv \sphericalangle BHE$, deci $\sphericalangle GHJ \equiv \sphericalangle GIJ$, deci punctele G, H, I, J sînt conciclice.

Deci $\sphericalangle BOD \equiv \sphericalangle BAC$. Rezultă că patrulaterul $AEOB$ este inscrip-
tibil, adică A, B, O, E sînt conciclice.

b) METODA 1

Se arată ușor că dreapta OD este mediatoarea segmentului BC .
Cum E aparține dreptei OD , rezultă că $EC = EB$.

Deci, triunghiul EBC este isoscel, deci ED este bisectoarea unghi-
lui BEC . (1)

Unghiurile BEC și AEG sînt opuse la vîrf. (2)

F este pe dreapta ED . (3)

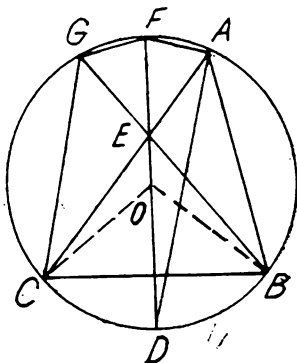


Fig. VII.G.40.a.

Din (1), (2) și (3) rezultă că dreapta EF este bisectoarea $\sphericalangle AEG$.
Obținem $\widehat{FG} \equiv \widehat{FA}$, deci $FG = FA$, deci triunghiul AFG este isoscel.

METODA 2 :

Deoarece punctele A, B, O, E sînt conciclice, $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle EOA$. Dar
 E aparține dreptelor OF și BG , deci $\sphericalangle FOA \equiv \sphericalangle ABG$. Rezultă că :
 $m(\widehat{AF}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AG})$. De aici rezultă că $AF = FG$.

c) METODA 1

Avem $m(\widehat{DCF}) = m(\widehat{DBF}) = 180^\circ$. Știm că $\widehat{AF} \equiv \widehat{GF}$, $\widehat{CD} \equiv \widehat{BD}$.
Rezultă că $\widehat{CG} \equiv \widehat{AB}$. Deci $AG \parallel BC$, adică $AGCB$ este trapez. Fiind in-
scripabil, trapezul este isoscel.

METODA 2 :

$\triangle CEG \equiv \triangle BEA$ (conform cazului U.L.U.). Rezultă că $CG = AB$,
deci $\widehat{CG} \equiv \widehat{AB}$. De aici obținem că $GA \parallel CB$.

METODA 3

Avem $m(\widehat{FGD}) = m(\widehat{FAD}) = 90^\circ$, $FD = DF$, $FG = FA$. Rezultă că : $\triangle FGD \equiv \triangle FAD$ (I.C.). De aici obținem că $\sphericalangle GFD \equiv \sphericalangle AFD$, deci FD este bisectoare în triunghiul isoscel AFG . Rezultă că $AG \perp FD$. Dar $FD \perp BC$. În concluzie, $AG \parallel BC$.

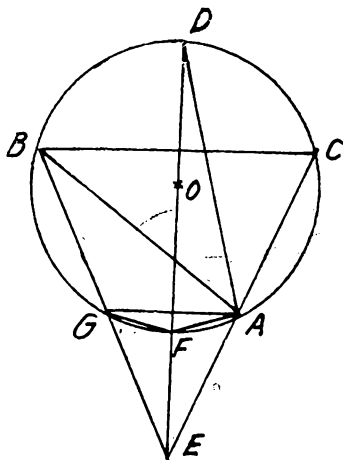


Fig. VII.G.40.b.

CAZUL II :

Fie $AC < AB$. În acest caz, dreapta OD nu intersecționează segmentul AC . Se obține ușor că c) \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow c) ; de aceea vom demonstra numai c)

Conform ipotezei, dreapta OD este mediatoarea segmentului BC . Deci : $BE = EC$ și $\sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle ECB$. Rezultă că $\widehat{BGA} \equiv \widehat{GAC}$, deci $\widehat{BG} + \widehat{GA} = \widehat{GA} + \widehat{AC}$, de unde obținem $\widehat{BG} \equiv \widehat{AC}$. În consecință $AG \parallel BC$, deci $AGCB$ este trapez isoscel.

CAZUL III

Dacă $AB = AC$ triunghiul ABC este isoscel și punctele E, A, F, G coincid. Concluziile a), b), c) se verifică și în acest caz.

VII.G.41. Triunghiul A_1OA_2 este isoscel, deci $\sphericalangle OA_1A_2 \equiv \sphericalangle OA_2A_1$.

Dar $\sphericalangle BA_1B_1 \equiv \sphericalangle OA_1A_2$ și $\sphericalangle CA_2C_2 \equiv \sphericalangle OA_2A_1$, fiind unghiuri opuse la vîrf.

Rezultă că

$$\sphericalangle BA_1B_1 \equiv \sphericalangle CA_2C_2. \quad (1)$$

Triunghiul ABC este isoscel, deci : $\sphericalangle B_1BA_1 \equiv \sphericalangle C_2CA_2$.

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle C_1B_1B_2 \equiv \sphericalangle B_2C_2C_1$. Deci punctele B_1 , B_2 , C_1 , C_2 sînt conciclice.

b) Dacă B_1 , B_2 , C_1 , C_2 sînt virfurile unui trapez isoscel, rezultă că $OB_1 = OC_2$ și $OB_2 = OC_1$. Deci, $B_1C_1 = B_2C_2$.

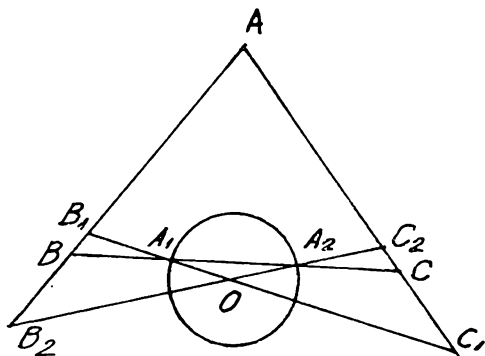


Fig. VII.G.41.a

Folosind a), obținem că $\triangle AB_1C_1 \equiv \triangle AC_2B_2$ (U.L.U.). Rezultă că $\triangle AB_2O \equiv \triangle AC_1O$ (L.L.L.), deci $\sphericalangle B_2AO \equiv \sphericalangle C_1AO$, adică O aparține bisectoarei unghiului BAC .

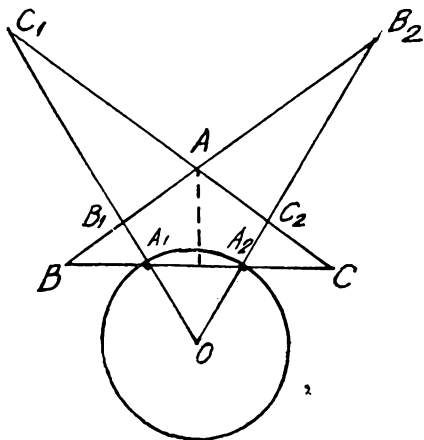


Fig. VII.G.41.b

Observație : Există mai multe figuri ce corespund ipotezei problemei, generate de următoarele situații : unghiul A al triunghiului ABC este ascuțit sau obtuz ; centrul cercului este interior sau exterior triunghiului ABC . (Vezi fig. VII.G.41. a, b, c.) Demonstrația se face analog.

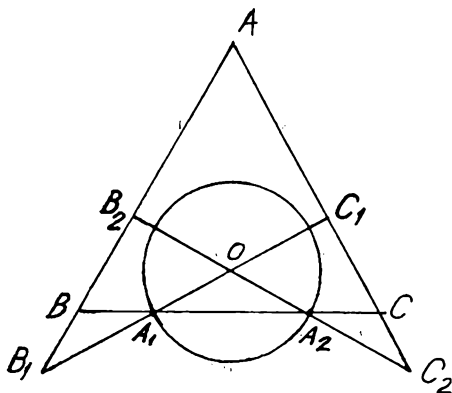


Fig. VII.G.41.c

VII.G.42. Notăm $m(\widehat{BAC}) = 3\alpha$, $m(\widehat{ABC}) = 3\beta$. (Vezi fig. VII.G.42.)

a) Raționăm prin reducere la absurd.

Presupunem că $PQRT$ este inscripșibil. Deoarece $\sphericalangle APQ$ este unghi exterior triunghiului APB , rezultă că $m(\widehat{APQ}) = \alpha + \beta$. În triunghiul ARB $m(\widehat{ARB}) = 180^\circ - 2(\alpha + \beta)$. Dar $PQRT$ este inscripșibil, deci $\sphericalangle APQ \equiv \sphericalangle ARB$. Rezultă că : $\alpha + \beta = 180^\circ - 2(\alpha + \beta)$. Adică $3(\alpha + \beta) = 180^\circ$,

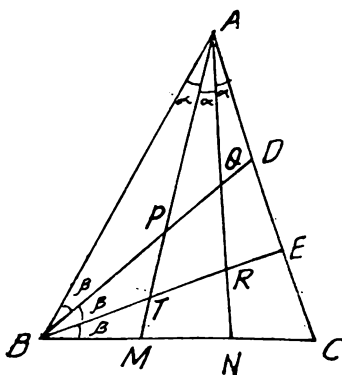


Fig. VII.G.42.

deci $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ABC}) = 180^\circ$, ceea ce este în contradicție cu faptul că ABC este triunghi. Deci presupunerea făcută este falsă. Rezultă că $PQRT$ nu poate fi înscris în cerc.

b) Deoarece $MNRT$ este înscrisibil, $\sphericalangle ATR \equiv \sphericalangle ANM$. Dar $m(\widehat{ATR}) = \alpha + 2\beta$; $m(\widehat{ANB}) = 180^\circ - (2\alpha + 3\beta)$. Deci $2\beta = 180^\circ - 3\alpha - 3\beta = 180^\circ - 3(\alpha + \beta) = m(\widehat{ACB})$. Adică $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle DCB$, deci triunghiul BDC este isoscel, avînd $BD = DC$. Se arată analog că triunghiul AMC este isoscel, avînd $AM = MC$.

c) Conform ipotezei c) și conform b) avem $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle ACB$ și $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle ACB$. Rezultă că: $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle MAC$, deci $\alpha = \beta$, deci $3\alpha = 3\beta$. Adică $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle ABC$, deci triunghiul ABC este isoscel, avînd $AC = BC$.

d) Dacă $RNCE$ este înscrisibil, rezultă că unghiurile ECN și ARB sînt suplementare, $m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{ARB}) = 180^\circ$. (1)

$$\begin{aligned} \text{Dar } m(\widehat{ARB}) &= 180^\circ - 2(\alpha + \beta); \\ m(\widehat{ACB}) &= 180^\circ - 3(\alpha + \beta). \end{aligned} \quad (2)$$

Însumînd relațiile (2) și înlocuind în (1), obținem

$$360^\circ - 5(\alpha + \beta) = 180^\circ.$$

Adică $5(\alpha + \beta) = 180^\circ$, deci $\alpha + \beta = 36^\circ$.

$$m(\widehat{ACB}) = 180^\circ - 3 \cdot 36^\circ = 72^\circ.$$

VII.G.43. a) Avem: $m(\widehat{MBM}') = 90^\circ$. (Vezi fig. VII.G.43.) Din ipoteză rezultă că triunghiurile MBN și $M'BP$ sînt isoscele. Notăm: $m(\widehat{BMN}) = m(\widehat{BNM}) = \alpha$, $m(\widehat{BM'P}) = m(\widehat{BPM'}) = \beta$. Conform teoremei despre suma unghiurilor în cele două triunghiuri, avem: $2\alpha = 180^\circ - m(\widehat{MBN})$; $2\beta = 180^\circ - m(\widehat{M'BP})$. Adunînd cele două relații obținem: $2(\alpha + \beta) = 360^\circ - (m(\widehat{MBN}) + m(\widehat{M'BP}))$. Dar, $m(\widehat{MBN}) + m(\widehat{M'BP}) = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$. Deci: $2(\alpha + \beta) = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$; rezultă că $\alpha + \beta = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$. Deci: $m(\widehat{ANM}) + m(\widehat{APM'}) = 45^\circ = ct$.

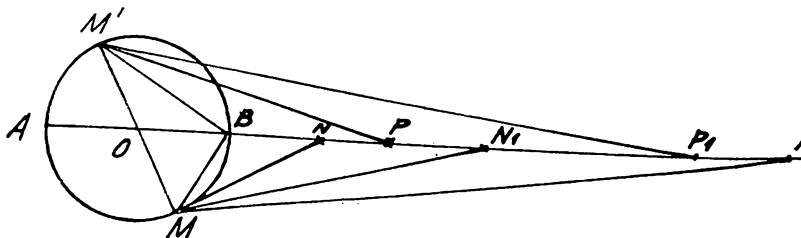


Fig. VII.G.43.

b) Din modul de construcție a punctelor N_1, P_1 rezultă că triunghiurile MNN_1 și $M'PP_1$ sînt isoscele. Unghiurile de măsuri α , respectiv β , sînt unghiuri exterioare în triunghiurile MNN_1 , respectiv $M'PP_1$.

$$\text{Rezultă : } \alpha = 2 \cdot m(\widehat{NMN}_1) ; \beta = 2 \cdot m(\widehat{PM'P}_1).$$

$$\text{Deci } m(\widehat{NMN}_1) + m(\widehat{PM'P}_1) = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{45^\circ}{2}.$$

Printr-un raționament similar obținem

$$m(\widehat{N_1MN_2}) + m(\widehat{P_1M'P_2}) = \frac{\alpha + \beta}{2^2} = \frac{45^\circ}{4}.$$

Observăm că, la fiecare pas, suma se înjumătățește. Deci, după primul pas avem $\frac{45^\circ}{2}$, după al doilea $\frac{45^\circ}{4}$, după al treilea $\frac{45^\circ}{8}$, după al patrulea $\frac{45^\circ}{16}$, după al cincilea $\frac{45^\circ}{32}$, după al șaselea $\frac{45^\circ}{64}$. Deci după al șaselea pas, suma devine mai mică de 1° .

VII.G.44. a) Deoarece $AB = CD$, rezultă că $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$ (Vezi fig. VII.G.44.).

Deci $\widehat{AD} \equiv \widehat{BC}$. Rezultă că $AD = BC$. (1)

Dar, $\sphericalangle MAD \equiv \sphericalangle MCB$; $\sphericalangle MDA \equiv \sphericalangle MBC$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $\triangle AMD \equiv \triangle CMB$ (U.L.U.). Rezultă că $AM = MC$, $DM = MB$.

b) Deoarece $\widehat{AD} \equiv \widehat{BC}$, rezultă că dreptele AC și BD sînt paralele. (3)

Deoarece O_1 este mijlocul segmentului BD , $OO_1 \perp BD$. (4)

Deoarece O_2 este mijlocul segmentului AC , $OO_2 \perp AC$. (5)

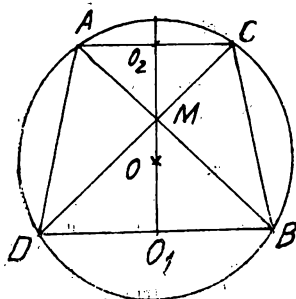


Fig. VII.G.44.

Din (3), (4) și (5) conform teoremei de unicitate a perpendicularareii duse dintr-un punct pe o dreaptă, rezultă că punctele O, O_1, O_2 sînt coliniare. (6)

Deoarece triunghiul AMC este isoscel, M aparține mediatoarei segmentului AC , deci M aparține dreptei O_1O_2 . (7)

Din (6) și (7) rezultă că O_1, O, M, O_2 sînt coliniare.

VII.G.45. Orice patrulater convex $ABCD$ care îndeplinește condiția $AB + CD = BC + AD$ este circumscriptibil unui cerc. Fie O centrul cercului înscris în patrulaterul $ABCD$ și M, N, P, Q punctele de tangență ale laturilor AB, BC, CD, DA cu cercul. (Vezi fig. VII.G.45.).

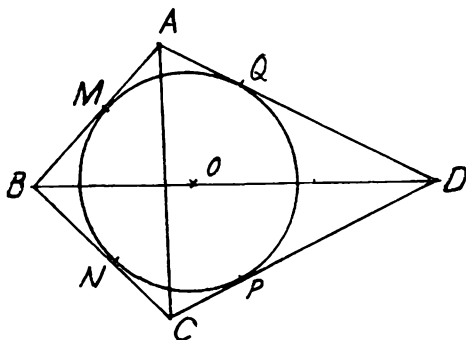


Fig. VII.G.45.

Avem $BM = BN$ (dreptele BM, BN fiind tangente duse din același punct la cerc). (1)

Apoi, $\triangle AMQ \equiv \triangle CNP$ (sînt triunghiuri isoscele avînd $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$ și $MQ = NP$ ($\widehat{MQ} \equiv \widehat{NP}$)). Rezultă că : $AM = NC$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $AB = BC$, deci triunghiul ABC este isoscel. (3)

Analog, $QD = PD$ și $AQ = CP$, deci triunghiul ADC este isoscel. (4)

Semidreapta BO este bisectoarea unghiului ABC , deci din (3) rezultă că $BO \perp AC$. (5)

Analog, din (4) rezultă că $OD \perp AC$. (6)

Din (5) și (6), conform teoremei de unicitate a perpendicularei duse dintr-un punct pe o dreaptă, rezultă că punctele B, O, D sînt coliniare. Deci dreapta BD este mediatoarea segmentului AC . Deci, oricare ar fi $X \in AB \cup AD$, există $Y \in BC \cup CD$ astfel încît $d(X, BD) = d(Y, BD)$, adică dreapta BD este axă de simetrie a patrulaterului $ABCD$.

VII.G.46. Conform notațiilor din fig. VII.G.46., avem :

$$4x + 4y = 120$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$$

Rezultă $x + y = 30$. Folosind proporții derivate, obținem $\frac{x+y}{x} = \frac{4}{3}$
 deci $x = \frac{90}{4} = \frac{45}{2}$ și $\frac{y}{x+y} = \frac{1}{4}$ deci $y = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$ Rezultă $AB =$
 $= 45$ cm, $CD = 15$ cm, $AD = BC = 30$ cm. Fie A' proiecția lui A pe
 dreapta CD . Avem $A'D = x - y = \frac{45 - 15}{2} = 15$; $AD = 30$. Deci $A'D =$
 $= \frac{1}{2} AD$. Rezultă că $m(\widehat{A'AD}) = 30^\circ$. Deci $m(\widehat{DAB}) = 60^\circ = m(\widehat{ABC})$ și
 $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{ADC}) = 120^\circ$.

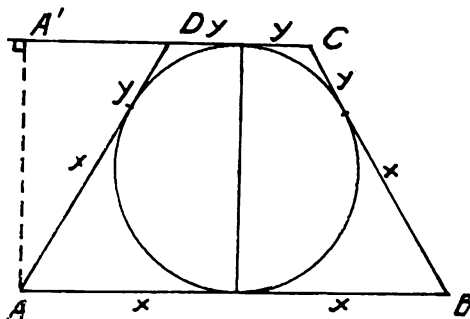


Fig. VII.G.46.

VII.G.47. a) A și E sînt simetrice față de dreapta BC . Rezultă că
 dreapta BC este mediatoarea segmentului AE . Deci triunghiul ABE este
 isoscel. Deci $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle BEA$. (1)

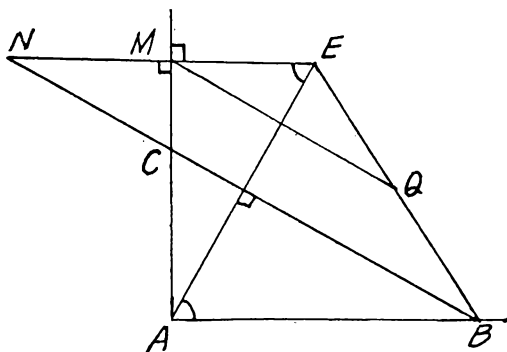


Fig. VII.G.47.

Dar $AB \parallel NE$, fiind perpendiculare pe aceeași dreaptă. Rezultă că
 $\sphericalangle AEM \equiv \sphericalangle BAE$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle NEA \equiv \sphericalangle BEA$. Rezultă că semidreapta EA este bisectoarea unghiului NEB . Dar, conform ipotezei AE este mediatoarea segmentului MQ . Deci dreapta AE este bisectoare în triunghiul isoscel MEQ . Rezultă că $\sphericalangle BEA \equiv \sphericalangle QEA$. Deci punctele Q, B, E sînt coliniare.

b) Deoarece $AE \perp NB$, $AE \perp MQ$, rezultă că $NB \parallel MQ$, deci $MQBN$ este trapez. Din cele arătate la a) rezultă că dreapta AE este axă de simetrie a trapezului $MQBN$. Deoarece admite axă de simetrie, trapezul $MQBN$ este isoscel, deci inscriptibil. (Vezi fig. VII.G.47.).

VII.G.48. a) În patrulaterul $CPMN$, PN și MC sînt diagonale și $m(\widehat{NPC}) = m(\widehat{CMN}) = 90^\circ$. Rezultă că $CPMN$ este inscriptibil. (Vezi fig. VII.G.48.).

b) Deoarece $CPMN$ este inscriptibil, rezultă că $\sphericalangle ANC \equiv \sphericalangle MPA$. (1)

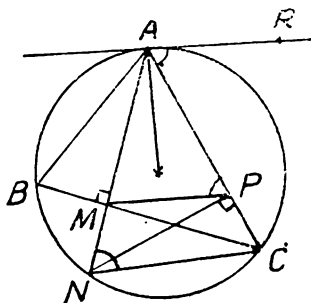


Fig. VII.G.48.

Fie R pe tangenta prin A la cercul circumscris lui ABC , R de aceeași parte cu P față de diametrul care trece prin A . Avem că :

$$m(\widehat{ANC}) = m(\widehat{RAC}) = \frac{m(\widehat{AC})}{2}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle MPA \equiv \sphericalangle RAC$. Rezultă că $MP \parallel AR$, deoarece determină cu secanta AP unghiuri alterne interne congruente.

VII.G.49. Fie TMP tangenta comună la cele două cercuri, T în același semiplan determinat de dreapta O_1O_2 , ca și B, P în celălalt semiplan. (Vezi fig. VII.G.49.).

$$\text{Avem : } m(\widehat{TMB}) = \frac{m(\widehat{MB})}{2} = \frac{m(\widehat{MO_2B})}{2}; \quad (1)$$

$$m(\widehat{PMA}) = \frac{m(\widehat{MA})}{2} = \frac{m(\widehat{MO_1A})}{2}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle MO_1A \equiv \sphericalangle MO_2B$. (Obținem același lucru observind că în triunghiurile isoscele O_1AM și O_2BM , avem $\widehat{O_1MA} \equiv \widehat{O_2MB}$, deoarece sînt opuse la vîrf).

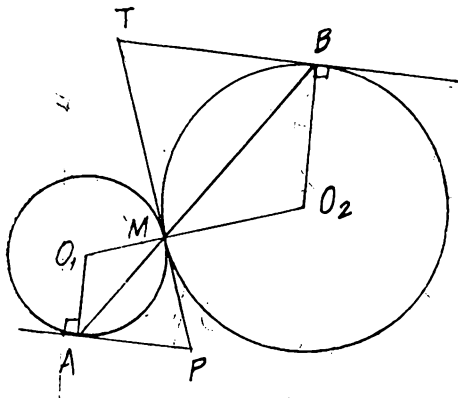


Fig. VII.G.49.

Deoarece dreptele O_1A și O_2B determină cu secanta O_1O_2 unghiuri alterne interne congruente, rezultă că sînt paralele. Perpendicularele pe fiecare din aceste drepte sînt de asemenea paralele.

VII.G.50. CAZUL I

Dacă în cercul (O) , $\widehat{BC} < \widehat{AB}$, tangenta în B la cercul O și dreapta AC se intersectează în semiplanul determinat de dreapta BC ce conține arcu mic BC . (Vezi fig. VII.G.50 a.).

a) Fie T situat pe semidreapta DB , în afara segmentului DB . Avem:

$$m(\widehat{TBA}) = m(\widehat{ACB}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}; \quad (1)$$

$$\sphericalangle EBD \equiv \sphericalangle TBA, \text{ fiind opuse la vîrf}; \quad (2)$$

$$\sphericalangle BED \equiv \sphericalangle ACB, \text{ deoarece } BEDC \text{ este înscris în cerc}. \quad (3)$$

Din (1), (2) și (3) rezultă că $\sphericalangle BED \equiv \sphericalangle EBD$, deci triunghiul BDE este isoscel.

b) Avem $\sphericalangle CED \equiv \sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle BAC$.

Deoarece $\sphericalangle CED \equiv \sphericalangle EAC$, dreapta DE este tangentă cercului circumscriștriunghiului ACE .

c) Fie F intersecția dreptelor AO și DE . Fie H proiecția lui O pe dreapta AC și H' punctul de intersecție al dreptei OH cu cercul (O) .

Deoarece $OH \perp AC$, H' este mijlocul lui \widehat{AC} . Deci $m(\widehat{AOH}) = m(\widehat{AH'}) = \frac{m(\widehat{AC})}{2} = m(\widehat{ABC})$. (4)

Dar B, C, D, E sînt conciclice, deci $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CDE$. (5)

Cum H, C sînt pe dreapta AD ; din (4) și (5) rezultă că $\sphericalangle AOH \equiv \sphericalangle HDF$. Deci patrulaterul $OFDH$ este inscripabil, deci $m(\widehat{OFD}) = m(\widehat{OHA}) = 90^\circ$. Deci dreptele AO și DE sînt perpendiculare.

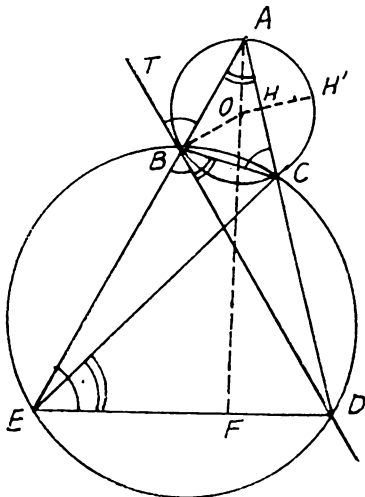


Fig. VII.G.50.a.

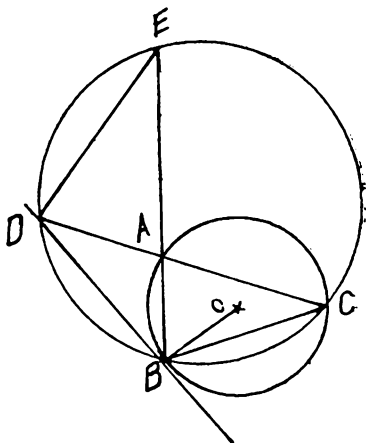


Fig. VII.G.50.b.

CAZUL II :

Dacă, în cercul (O) , $\widehat{BC} > \widehat{AB}$, tangenta în B la cercul (O) și dreapta AC se intersectează în semiplanul determinat de dreapta CB ce conține punctul A . (Vezi fig. VII.G.50 b.).

Demonstrația se face asemănător cazului I.

CAZUL III :

Dacă $BC = AB$, tangenta în B este paralelă cu dreapta AC și problema nu are soluție.

VII.G.51. CAZUL I :

Dacă $AB > AC$, atunci H este exterior segmentului $A'B$ (Vezi fig. VII.G.51.a.).

a) Dreptele AC' și EB' sînt paralele. Rezultă că $\sphericalangle C'AE \equiv \sphericalangle AEB'$ (alterne interne). Dar $\sphericalangle C'AE \equiv \sphericalangle EAB'$, dreapta AE fiind bisectoarea unghiului $C'AB'$.

Din afirmațiile de mai sus, rezultă că $\sphericalangle EAB' \equiv \sphericalangle AEB'$, deci triunghiul AEB' este isoscel. Rezultă că $AB' = EB'$. Dar $AB' = B'C'$, deci $AB' = B'C' = EB'$. Rezultă că triunghiul AEC este dreptunghic în

E. Deci $m(\widehat{AEC}) = 90^\circ$. Dar $m(\widehat{AHC}) = 90^\circ$. Deci punctele A, E, C, H sînt conciclice.

b) Deoarece $\sphericalangle C'FA \equiv \sphericalangle FAC$ (unghiuri alterne interne) și $\sphericalangle C'AF \equiv \sphericalangle FAC$, rezultă că $\sphericalangle C'AF \equiv \sphericalangle C'FA$, deci triunghiul $AC'F$ este isoscel. Rezultă că $AC' = BC' = C'F$, deci triunghiul BFA este dreptunghic în F , deci $m(\widehat{AFB}) = 90^\circ$; dar $m(\widehat{AEC}) = 90^\circ$ și deci dreptele CE și BF sînt paralele.

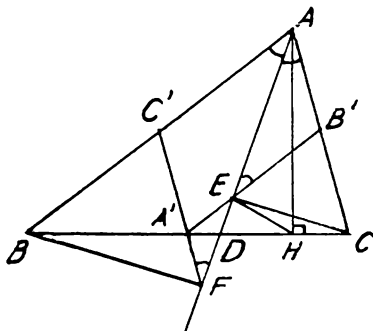


Fig. VII.G.51.a.

CAZUL II :

Dacă $AB < AC$, atunci H este exterior segmentului $A'C$. (Vezi fig. VII.G.51.b.). Demonstrația se face în mod analog.

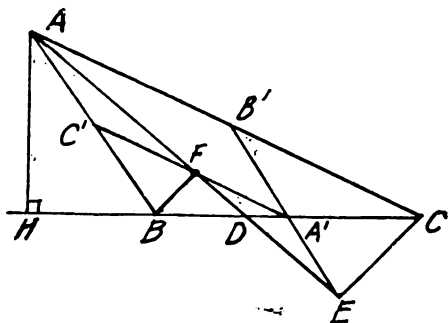


Fig. VII.G.51.b.

CAZUL III :

Dacă $AB = AC$, punctele A', D, H, E, F coincid.

VII.G.52. a) Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. (Vezi fig. VII.G.52.a.). Fie B_1, C_1 picioarele înălțimilor duse din B , respectiv C . Deoarece $HA' = A'A''$, $BA' = A'C$, patrulaterul $HBA''C$ este paralelogram. Rezultă că

$BB_1 \parallel A''C$, $CC_1 \parallel A''B$. Dar $CC_1 \perp AB$, deci $A''B \perp AB$ și $BB_1 \perp AC$,
 deci $A''C \perp AC$. Rezultă că :

A, B, A'' determină un cerc de diametru AA'' (1)

A, C, A'' determină un cerc de diametru AA'' (2)

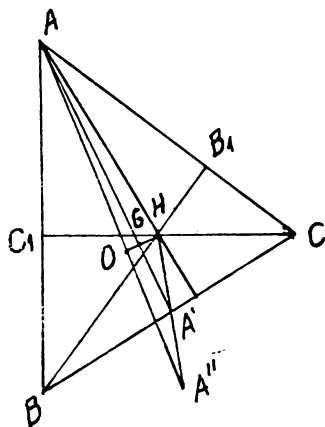


Fig. VII.G.52.a.

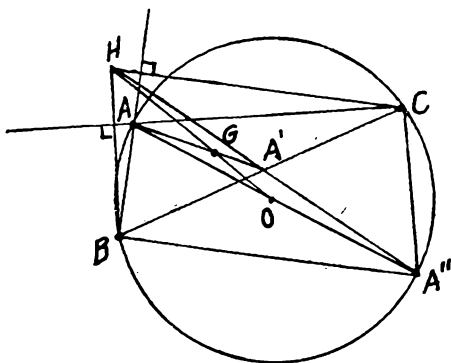


Fig. VII.G.52.b.

Din (1) și (2) obținem că A, B, C, A'' sînt conciclice, deci A'' se
 află pe cercul circumscris triunghiului ABC și AA'' este diametrul
 acestui cerc.

b) Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . Fie O intersecția
 dreptelor HG și AA'' . Vom arăta că O este centrul cercului circumscris
 triunghiului ABC .

AA' este mediană în triunghiul ABC , G este centrul de greutate, deci :

$$\frac{AG}{AA'} = \frac{2}{3}. \quad (3)$$

Dar AA' este mediană în triunghiul AHA'' și din (3) rezultă că G este centrul de greutate al triunghiului AHA'' . Deci HO este mediană în acest triunghi. Rezultă că $AO = OA''$. Din a) știm că AA'' este diametrul cercului circumscris triunghiului ABC . Cum O este mijlocul lui AA'' rezultă că O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , deci punctele H, G, O sînt coliniare.

Demonstrația se face analog în cazul în care triunghiul ABC este obtuzunghic. (Vezi fig. VII.G.52 b).

VII.G.53. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și B', C' proiecțiile lui B , respectiv C pe laturile opuse. (Vezi fig. VII.G.53 a).

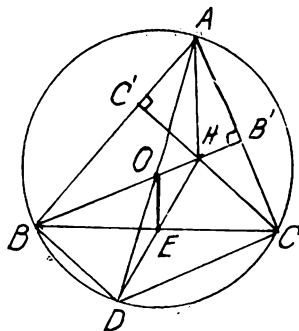


Fig. VII.G.53.a.

a) METODA 1

Unghiul ABD este înscris într-un semicerc. Rezultă că : $BD \perp \perp AB$. Dar $CC' \perp AB$ (CC' înălțime în triunghiul ABC). Rezultă că $BD \parallel CC'$, deci : $BD \parallel CH$. (1)

Analog, $CD \perp AC$ și $BB' \perp AC$, deci $CD \parallel BH$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $BDCH$ este paralelogram.

METODA 2

Patrulaterul $AC'HB'$ este înscrisibil ($m(\widehat{AC'H}) + m(\widehat{AB'H}) = 180^\circ$). Rezultă că unghiurile $C'HB'$ și $C'AB'$ sînt suplementare. Dar $\sphericalangle BHC \equiv \sphericalangle C'HB'$, fiind opuse la vîrf. Rezultă că $\sphericalangle BHC$ și $\sphericalangle BAC$ sînt suplementare. Cum $ABDC$ este înscris în cerc, rezultă că $\sphericalangle BDC$ și $\sphericalangle BAC$ sînt suplementare. Deci, $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle BHC$ (avînd același suplement). (3)

Pe de altă parte, $m(\widehat{ABD}) = 90^\circ$; $m(\widehat{ACD}) = 90^\circ$ (fiind unghiuri înscrise în semicercuri). Deoarece $BCB'C'$ este înscrisibil, rezultă că

$\sphericalangle C'BB' \equiv \sphericalangle B'CC'$. Deci $m(\widehat{HBD}) = 90^\circ - m(\widehat{C'BB'}) = 90^\circ - m(\widehat{C'CB'}) = m(\widehat{HCD})$. Adică :

$$\sphericalangle HBD \equiv \sphericalangle HCD. \quad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că patrulaterul $BDCH$, avînd unghiurile opuse congruente, este paralelogram.

b) METODA 1

Fie E piciorul perpendicularei duse din O pe BC . Avem $BE = EC$. (Perpendicularara din centrul unui cerc pe o coardă a cercului trece prin mijlocul coardei). Dar BC este diagonală în paralelogramul $BHCD$ și HD la fel. Într-un paralelogram, diagonalele se intersectează la mijlocul fiecăreia. Rezultă că HD trece prin E . În triunghiul AHD avem : $OD = OA$, $DE = EH$. Rezultă că OE este linie mijlocie, deci $OE = \frac{AH}{2}$.

METODA 2 :

Deoarece OE și AH sînt perpendiculare pe BC rezultă că $OE \parallel AH$. Cum $OA = OD$ rezultă că OE este linie mijlocie în triunghiul ADH , deci $OE = \frac{AH}{2}$.

Raționamentul este analog în cazul unui triunghi ABC obtuzunghic. (Vezi fig. VII.G.53.b).

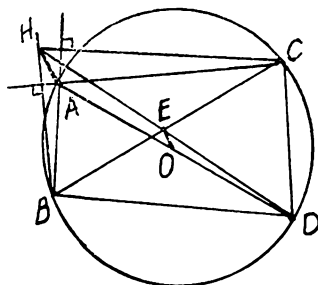


Fig. VII.G.53.b.

VII.G.54. METODA 1

Arătăm că $m(\widehat{BMC}) = 180^\circ$. (Vezi fig. 54.a.)

Deoarece MM' este diametru, $m(\widehat{MPM'}) = 90^\circ = m(\widehat{MPB})$. Cum $m(\widehat{MNB}) = 90^\circ$, rezultă că patrulaterul $MPNB$ este inscripabil. Deci : $\sphericalangle BMN \equiv \sphericalangle BPN$. Avem : $\sphericalangle BPN \equiv \sphericalangle CPM'$ (unghiuri opuse la vîrf). Dar patrulaterul $M'PMC$ este inscripabil, deci $\sphericalangle CPM' \equiv \sphericalangle CMM'$. Triunghiul COM este isoscel, deci $\sphericalangle CMM' \equiv \sphericalangle MCO$. Rezultă că

$$\sphericalangle MCO \equiv \sphericalangle BMN. \quad (1)$$

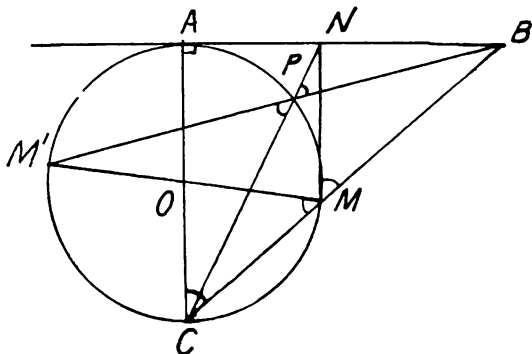


Fig. VII.G.54.a.

Cum $MN \parallel AC$, rezultă

$$\sphericalangle NMO \equiv \sphericalangle COM. \quad (2)$$

Din (1) și (2) obținem: $m(\widehat{BMC}) = m(\widehat{BMN}) + m(\widehat{NMO}) + m(\widehat{OMC}) = m(\widehat{MCO}) + m(\widehat{COM}) + m(\widehat{OMC})$. Cum $\sphericalangle MCO$, $\sphericalangle COM$, $\sphericalangle OMC$ sînt unghiurile aceluiași triunghi, rezultă că $m(\widehat{BMC}) = 180^\circ$. Deci punctele C, M, B sînt coliniare.

METODA 2

Vom arăta că $MC \parallel AM'$ și $MB \parallel AM'$ (Vezi fig. VII.G.54.b.)

Patrulaterul $AM'CM$ este dreptunghi, deoarece diagonalele AC și MM' sînt congruente și se taie în părți congruente. Rezultă că :

$$MC \parallel AM' \quad (3)$$

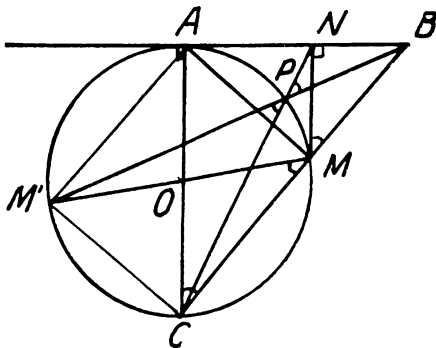


Fig. VII.G.54.b.

Patrulaterul $MBNP$ este inscriptibil ($m(\widehat{MPB}) = m(\widehat{MNB}) = 90^\circ$). Rezultă că $\sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle MNP$. Dar $MN \parallel AC$, deci $\sphericalangle MNC \equiv \sphericalangle NCA$ (alterne interne).

Patrulaterul $AM'CP$ este înscris în cerc, deci $\sphericalangle NCA \equiv \sphericalangle PM'A$.

Deci $\sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle PM'A$. Rezultă că $MB \parallel AM'$ (4)

Conform axiomei paralelelor, prin M trece o singură dreaptă paralelă cu dreapta AM' , deci din (3) și (4) rezultă că dreptele MC și MB coincid, adică punctele B, M, C sînt coliniare.

METODA 3 (Vezi fig. VII.G.54.b.)

Deoarece $PMBN$ este inscriptibil, rezultă că $\sphericalangle PMB \equiv \sphericalangle PNA$ (5)

Dar $\sphericalangle PMA \equiv \sphericalangle PCA$ (subîntind arcul AP). (6)

În triunghiul ACN , $\sphericalangle PCA$ și $\sphericalangle PNA$ sînt complementare. Din (5) și (6) rezultă că și $\sphericalangle PMA$ și $\sphericalangle PMB$ sînt complementare. Deci $m(\widehat{AMB}) = 90^\circ$. Pe de altă parte, $m(\widehat{AMC}) = 90^\circ$. Rezultă că $m(\widehat{CMB}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

VII.G.55. a) METODA 1.:

Deoarece $TC \perp AC$, $CF = AC$, rezultă că dreapta TC este mediatorea segmentului AF . Rezultă că :

$$\sphericalangle TAC \equiv \sphericalangle CFT. \quad (1)$$

$$\text{Dar } m(\widehat{TAC}) = m(\widehat{TMB}) = \frac{m(\widehat{BT})}{2} \quad (2)$$

Triunghiul MOT e isoscel ; rezultă

$$\sphericalangle OTM \equiv \sphericalangle TMB. \quad (3)$$

Din (1), (2), (3) rezultă că :

$$\sphericalangle OTM \equiv \sphericalangle CFT. \quad (4)$$

Dar $OT \parallel AF$. (5)

Din (4) și (5) rezultă că dreptele MT și TF coincid, deci punctele M, T, F sînt coliniare.

METODA 2 :

Fie NT diametrul ce conține OT . Deoarece $\triangle MOT \equiv \triangle BON$, rezultă că $NB \parallel MT$. (6)

Deoarece $NT \parallel AB$, rezultă că $NTBA$ este trapez isoscel. Rezultă că $NB = AT$ (fiind diagonale într-un trapez isoscel). Cum dreapta TC este mediatorea segmentului AF , rezultă că $FT = AT$.

Deci $NB = FT$. (7)

Dar $NT \parallel BF$. (8)

Din (7) și (8) rezultă că $NTFB$ este trapez isoscel sau paralelogram. Dar $\sphericalangle TNB$ este ascuțit (în $\triangle NTB$, $m(\widehat{B}) = 90^\circ$), iar NTF obtuz. Rezultă că $NTFB$ este paralelogram. Deci :

$$NB \parallel FT. \quad (9)$$

Din (6) și (9) în conformitate cu axioma paralelelor, rezultă că dreptele MT și FT coincid.

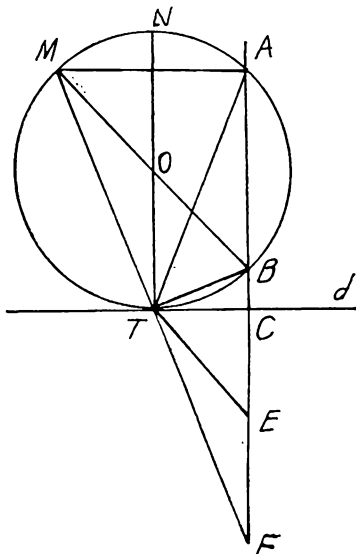


Fig. VII.G.55.

METODA 3 :

Avem $m(\widehat{BTM}) = 90^\circ$, deoarece subîntinde diametrul BM . $ABTM$ este înscris în cerc, deci $\sphericalangle TBF \equiv \sphericalangle TMA$.

Pe de altă parte, $\sphericalangle BTC \equiv \sphericalangle BAT$ (subîntind același arc). Cum dreapta TC este mediatoarea segmentului AF , avem $\sphericalangle TAB \equiv \sphericalangle TFC$. Deci $\sphericalangle BTC \equiv \sphericalangle TFC$. În triunghiul TFC , unghiurile TFC și CTF sînt complementare, deci și \widehat{BTC} și \widehat{CTF} sînt complementare. Rezultă că $m(\widehat{BTF}) = 90^\circ$.

În concluzie, $m(\widehat{MTF}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

b) Din a) rezultă că $m(\widehat{BTF}) = 90^\circ$. Segmentul TE este mediană în triunghiul dreptunghic TBF , deci $TE = \frac{BF}{2} = BE$. Rezultă că triunghiul TEB este isoscel.

c) Vom arăta că $AOTE$ este trapez isoscel, deci inscriptibil. Din $TE = EF$ rezultă că $\sphericalangle EFT \equiv \sphericalangle ETF$. Notăm $m(\widehat{EFT}) = \alpha$; $\sphericalangle TEB$ este unghi exterior triunghiului TEF . Rezultă că

$$m(\widehat{TEB}) = 2\alpha. \quad (10)$$

Triunghiul TOA este isoscel. Din cele obținute anterior, rezultă că $m(\widehat{OAT}) = m(\widehat{OTA}) = \alpha$.

$$\text{Deci } m(\widehat{OAB}) = 2\alpha. \quad (11)$$

Cum $OT \parallel AE$, din (10) și (11) rezultă că $AOTE$ este trapez isoscel.

VII.G.56. Fie M intersecția dreptelor $A'B'$ și OO'

Arătăm că $M \in C(O, r)$. (Vezi fig. VII.G.56.a.)

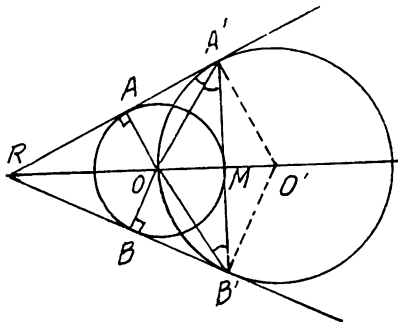


Fig. VII.G.56.a.

Avem : $m(\widehat{A'AO}) = 90^\circ = m(\widehat{OBB'})$ $AA' = BB'$ (fiind diferențe de segmente congruente); $OA = OB$ (fiind raze în același cerc). Rezultă că : $\triangle OA'A \equiv \triangle OB'B$ (C.C.). Deci $OA' = OB'$. Rezultă că O aparține mediatoarei segmentului $A'B'$; la fel O' . Deci $A'B' \perp OO'$. (1)

Avem : $\sphericalangle OA'M \equiv \sphericalangle OB'M \equiv \sphericalangle OB'A'$. Dar $\sphericalangle OB'A' \equiv \sphericalangle OA'A$. Rezultă că $\sphericalangle OA'A \equiv \sphericalangle OA'M$. Deci $\triangle AA'O \equiv \triangle MA'O$ (I.U.).

Rezultă că :

$$OM = OA = r. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că dreapta $A'B'$ este tangentă în M la cercul de centru O .

b) (Vezi fig. VII.G.56.b.) Avem

$$m(\widehat{OO'B'}) = m(\widehat{OB'}). \quad (3)$$

Deoarece $OO' \parallel AC$, rezultă că :

$$\sphericalangle ACB' \equiv \sphericalangle OO'B'; \quad (4)$$

$$m(\widehat{AA'B'}) = \frac{m(\widehat{A'B'})}{2} = m(\widehat{OB'}). \quad (5)$$

Din (3), (4), (5) rezultă că $\sphericalangle AA'B' \equiv \sphericalangle ACB'$; deci patrulaterul $AB'CA'$ este inscriptibil.

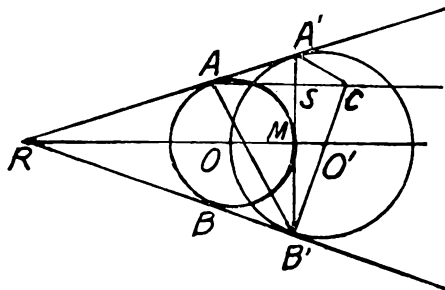


Fig. VII.G.56.b.

c) Vom arăta că $\sphericalangle SQC \equiv \sphericalangle PQC$, de unde rezultă că S aparține dreptei QP . (Vezi fig. VII.G.56.c.)

Patrulaterul $AQCP$ este inscriptibil ($m(\widehat{Q}) = m(\widehat{P}) = 90^\circ$). Rezultă că :
 $\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle PQC$. (6)

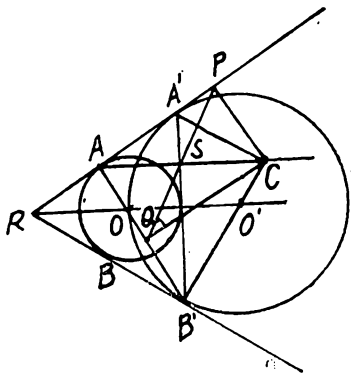


Fig. VII.G.56.c.

Patrulaterul $AB'CA'$ este inscriptibil. Rezultă că :

$$\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle A'AC \equiv \sphericalangle A'B'C. \quad (7)$$

Dar $\sphericalangle CQB' \equiv \sphericalangle B'SC$. Rezultă că $B'CSQ$ este inscriptibil. Deci :

$$\sphericalangle A'B'C \equiv \sphericalangle SB'C \equiv \sphericalangle SQC. \quad (8)$$

Din (8), (7), (6) rezultă că $\sphericalangle SQC \equiv \sphericalangle PQC$. Deci Q, S, P sînt coliniare.

VII.G.57. a) Notăm $m(\widehat{BAC}) = 2\alpha$, $m(\widehat{ACB}) = 2\beta$.

$$\text{Deci } m(\widehat{ABC}) = \alpha + \beta. \quad (1)$$

Deoarece $\sphericalangle NQA$ este unghi exterior triunghiului AQC , rezultă că :

$$m(\widehat{NQA}) = m(\widehat{QAC}) + m(\widehat{QCA}) = \alpha + \beta. \quad (2)$$

Din (1), (2) rezultă că : $\sphericalangle NBM \equiv \sphericalangle NQA$ ($N \in AB$, $M \in BC$). Deci patrulaterul $NBMQ$ este inscripabil.

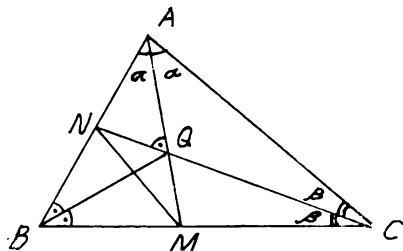


Fig. VII.G.57.a.

b) Deoarece Q este punctul de intersecție a două din bisectoarele triunghiului, BQ este bisectoare. Deci :

$$\sphericalangle NBQ \equiv \sphericalangle MBQ. \quad (3)$$

$$\text{Deoarece } BMQN \text{ este inscripabil : } \sphericalangle NBQ \equiv \sphericalangle QMN. \quad (4)$$

$$\sphericalangle MBQ \equiv \sphericalangle QNM. \quad (5)$$

Din (3), (4) și (5) rezultă că $\sphericalangle QNM \equiv \sphericalangle QMN$, deci triunghiul NQM este isoscel.

c) Din relația dată în ipoteză rezultă că :

$$m(\widehat{ABC}) = 60^\circ, \text{ deci } \alpha + \beta = 60^\circ. \quad (6)$$

Pe de altă parte, din triunghiul isoscel ANC , obținem :

$$4\alpha + \beta = 180^\circ. \quad (7)$$

Din (6) și (7) rezultă $\alpha = 40^\circ$, deci $m(\widehat{BAC}) = 80^\circ$.

d) (Vezi fig. VII.G.57.b.) Deoarece dreapta BQ este bisectoarea unghiului ABC , $QP = QT$. (8)

Deoarece triunghiul NQM este isoscel, $NQ = MQ$. (9)

Din (8) și (9) rezultă că triunghiurile dreptunghice PQN și TQM sînt congruente (I.C.). Din congruența triunghiurilor BPQ și BTQ și din (6) rezultă că triunghiul BPT este echilateral.

e) Afirmația este valabilă în următorul context mai general :

„Fie $\sphericalangle XBY$ un unghi și BQ bisectoarea lui. Fie P, T proiecțiile lui Q pe laturile OX, OY . Se construiesc N între B și P , și M astfel încît T să fie între B și M cu condiția ca $\sphericalangle PQN \equiv \sphericalangle TQM$. MN și BQ se intersectează în R . Punctele P, R, T nu pot fi coliniare.“

Demonstrație. (Vezi fig. VII.G.57.b.)

Presupunem că punctele P, R, T sînt coliniare. Avem : $\triangle PQN \equiv \triangle TQM$ (C.U.). Rezultă

$$NP = TM. \quad (1)$$

Construim N' pe BT astfel încît :

$$N'T = TM. \quad (2)$$

Dreapta BQ , fiind bisectoarea $\sphericalangle XBY$, este axă de simetrie pentru configurația obținută. Deci avem $PR = RT$ și $\sphericalangle BPR \equiv \sphericalangle BTR$. (3)

Din (1), (2) și (3) rezultă că $\triangle RTN' \equiv \triangle RPN$ (L.U.L.).

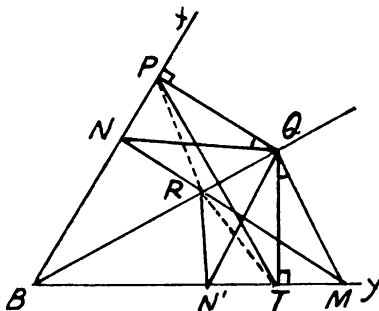


Fig. VII.G.57.b.

Deci $\sphericalangle TRN' \equiv \sphericalangle NRP$. Dar $\sphericalangle NRP \equiv \sphericalangle MRT$, fiind opuse la vîrf. Rezultă că, în triunghiul RMN' , mediana RT este și bisectoare. Rezultă că triunghiul RMN' este isoscel. Deci $RT \perp BM$. Dar avem $QT \perp BM$, ceea ce contrazice unicitatea perpendicularei construite dintr-un punct pe o dreaptă. Deci presupunerea făcută este falsă ; punctele P, R, T nu pot fi coliniare.

VII.G.58. Fie BB' mediană în triunghiul ABC , $B' \in AC$ și F centrul de greutate al triunghiului ABC . Avem $C'F = \frac{1}{3} \cdot CC'$, deci $C'D = C'F = \frac{1}{3} \cdot CC'$. Rezultă că : $DF = C'D + C'F = \frac{2}{3} \cdot CC'$. Cum $\frac{2}{3} \cdot CC' = FC$, rezultă că $DF = FC$. Cum $BE = BC$, rezultă că BF este linie mijlocie în triunghiul DEC . Deci

$$BF \parallel DE. \quad (1)$$

Deoarece $C'D = C'F$ și $AC' = C'B$ (CC' mediană), $DBFA$ este paralelogram. Deci :

$$AD \parallel BF. \quad (2)$$

Din (1) și (2), conform axiomei paralelelor, rezultă că E, D, A , sînt coliniare. Deci p_1 este o propoziție adevărată.

Pentru p_2 , dăm un contraexemplu : arătăm că dacă triunghiul ABC este dreptunghic isoscel, atunci patrulaterul $ADBC$ nu este inscriptibil. Presupunem că $ADBC$ este inscriptibil. Rezultă că $m(\widehat{CDB}) = 90^\circ$. Rezultă că $m(\widehat{AFC'}) = 90^\circ$, deci

$$AF \perp CC'. \quad (3)$$

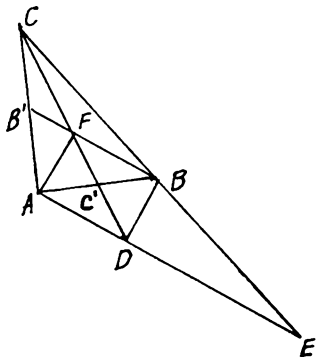


Fig. VII.G.58.

Intrucît triunghiul ABC este isoscel, mediana AF este și înălțime, deci :

$$AF \perp BC. \quad (4)$$

Cum dreptele CB și CC' sînt concurente și diferite, afirmațiile (3) și (4) sînt contradictorii. Deci, presupunerea făcută este falsă, deci, în acest caz, $ADBC$ nu este inscriptibil. Rezultă că p_2 este falsă.

VII.G.59. CAZUL 1

Considerăm $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OBA$. (Vezi fig. VII.G.59.)

Deoarece $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ABO$ rezultă că : $\triangle ABC \sim \triangle OBA$. Cum triunghiul AOB este isoscel, rezultă că și triunghiul ABC este isoscel. Deci

$$AB = AC. \quad (1)$$

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$; $\sphericalangle ACB$ este unghi exterior triunghiului AOC . Deoarece $m(\widehat{ACB}) = 72^\circ$, $m(\widehat{AOC}) = 36^\circ$, rezultă că $m(\widehat{OAC}) = 36^\circ$. Deci triunghiul OAC este isoscel. Rezultă că :

$$OC = AC. \quad (2)$$

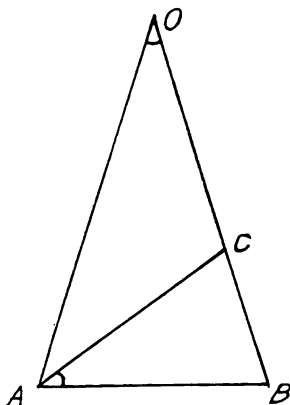


Fig. VII.G.59.

Conform (1) și (2) obținem $OC = AB = AC$. Triunghiurile ACO și AOB nu sînt asemenea.

CAZUL 2

Considerăm $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle OAB$. Obținem analog : $OC = AB = AC$.

VII.G.60. (Vezi fig. VII.G.60.) Deoarece $AD \parallel FB$, conform teoremei lui Thales, rezultă că

$$\frac{BE}{ED} = \frac{EF}{AE} \quad (1)$$

Analog, $AB \parallel GD$. Deci :

$$\frac{AE}{EG} = \frac{BE}{ED} \quad (2)$$

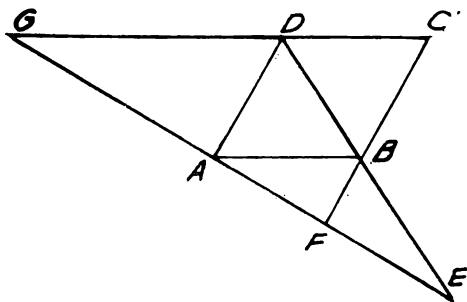


Fig. VII.G.60.

Din (1) și (2) rezultă

$$\frac{AE}{EG} = \frac{EF}{AE}, \text{ deci } AE^2 = EG \cdot EF.$$

VII.G.61. (Vezi fig. VII.G.61.) Deoarece $MN \parallel AB$, conform teoremei fundamentale a asemănării, $\triangle MNC \sim \triangle ABC$. Deci :

$$\frac{MN}{AB} = \frac{MC}{AC} \quad (1)$$

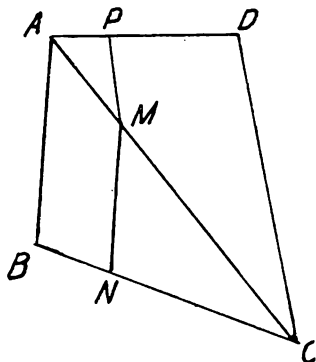


Fig. VII.G.61.

Analog, deoarece $MP \parallel CD$:

$$\frac{MP}{CD} = \frac{AM}{AC} \quad (2)$$

Însumînd relațiile (1) și (2) obținem :

$$\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = \frac{MC}{AC} + \frac{AM}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1.$$

VII.G.62. (Vezi fig. VII.G.62.) Dacă $BC^2 = CD \cdot EF$, atunci :

$$\frac{BC}{EF} = \frac{CD}{BC} \quad (1)$$

Deoarece $EF \parallel BC$, conform teoremei fundamentale a asemănării, rezultă :

$$\frac{BD}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CD}{DF}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $BC = DF$. (3)

Conform teoremei bisectoarei în triunghiul ABD , obținem :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DE}. \quad (4)$$

Folosind relațiile (3), (2) și (4) obținem :

$$\frac{CD}{BC} - \frac{AB}{AD} = \frac{CD}{DF} - \frac{AB}{AD} = \frac{BD}{DE} - \frac{BE}{DE} = \frac{BD - BE}{DE} = \frac{DE}{DE} = 1.$$

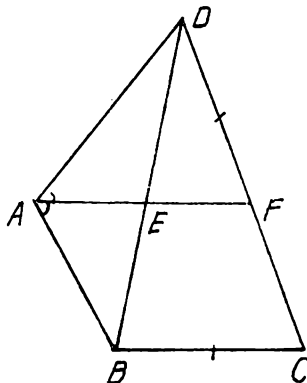


Fig. VII.G.62.

VII.G.63. (Vezi fig. VII.G.63.) Notăm lungimile laturilor CD , BC , MB , ND cu respectiv a , b , x , y .

a) Aplicând teorema fundamentală a asemănării, obținem următoarele proporții :

$$\frac{x}{x+b} = \frac{a}{a+y}; \quad \frac{y}{y+a} = \frac{b}{x+b}.$$

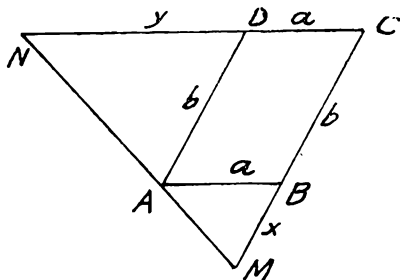


Fig. VII.G.63.

Înmulțind relațiile, avem

$$\frac{xy}{(x+b)(y+a)} = \frac{ab}{(a+y)(x+b)}$$

Deci $xy = ab = \text{constant}$.

Altfel : Aplicând teorema fundamentală a asemănării în triunghiurile ABM și NDA , obținem

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{y},$$

adică $xy = ab$.

b) Avem $CM \cdot CN = (x+b)(y+a) = xy + ax + by + ab$. (1)

Conform a), avem $xy = ab$. Deci : $CM \cdot CN = ab + ax + by + ab = a(b+x) + b(a+y) = AB \cdot CM + BC \cdot CN$.

VII.G.64. (Vezi fig. VII.G.64.) Deoarece $CC' \parallel BB'$, $\triangle ACC' \sim \triangle AB'B$. Rezultă că :

$$\frac{CC'}{BB'} = \frac{AC'}{AB} \quad (1)$$

Deoarece $CC' \parallel AA'$, $\triangle BCC' \sim \triangle BA'A$. Rezultă că :

$$\frac{CC'}{AA'} = \frac{BC'}{AB} \quad (2)$$

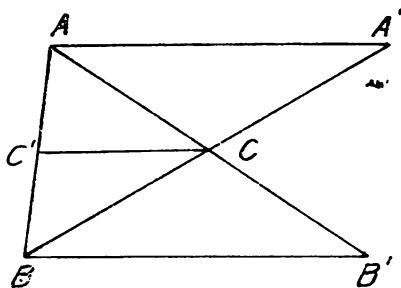


Fig. VII.G.64.

Din (1) și (2) prin adunare rezultă :

$$\frac{CC'}{BB'} + \frac{CC'}{AA'} = 1.$$

Deci :

$$CC' = \frac{1}{\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'}} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{7}} = \frac{1}{\frac{10}{21}} = \frac{21}{10}.$$

VII.G.65. (Vezi fig. VII.G.65.) Deoarece $AB' \parallel BA'$, conform teoremei lui Thales, rezultă :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} \quad (1)$$

Deoarece $BC' \parallel CB'$, conform teoremei lui Thales avem :

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OC'}{OB'} \quad (2)$$

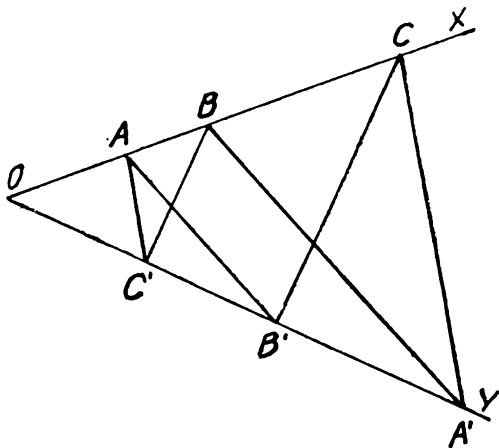


Fig. VII.G.65.

Înmulțind relațiile (1) și (2) obținem

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OC'}{OA'}$$

Conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă că $AC' \parallel CA'$.

VII.G.66. (Vezi fig. VII.G.66.) Fie trapezul $ABCD$, $AD = a$, $BC = b$.
Avem $\triangle AOD \sim \triangle COB$. Rezultă că $\frac{OD}{OB} = \frac{OA}{OC} = \frac{a}{b}$. (1)

$\triangle ABD \sim \triangle MBO$. Rezultă că : $\frac{a}{OM} = \frac{BD}{OB}$.

Din (1) obținem $\frac{BD}{OB} = \frac{a+b}{b}$. Și apoi $\frac{a}{OM} = \frac{a+b}{b}$, adică

$$OM = \frac{ab}{a+b} \quad (2)$$

$\triangle BCD \sim \triangle OND$. Rezultă că $\frac{b}{ON} = \frac{BD}{OD}$ și cu relația (1) obținem :

$$ON = \frac{ab}{a+b}. \quad (3)$$

Din (2) și (3) rezultă $MN = OM + ON = \frac{2ab}{a+b}$.

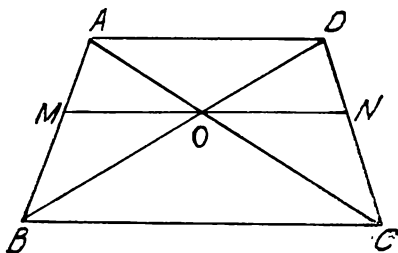


Fig. VII.G.66.

VII.G.67. (Vezi fig. VII.G.67.) Deoarece $AQ \parallel NB$, conform teoremei fundamentale a asemănării rezultă că $\triangle AMQ \sim \triangle BMN$, deci :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{QA}{NB}. \quad (1)$$

Asemănător, $\triangle PNC \sim \triangle PQD$, deci

$$\frac{PC}{PD} = \frac{NC}{QD}. \quad (2)$$

Înmulțind relațiile (1) și (2) obținem :

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{PC}{PD} = \frac{QA}{NB} \cdot \frac{NC}{QD}. \text{ De unde : } \frac{MA}{MB} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} \cdot \frac{NB}{NC} = 1.$$

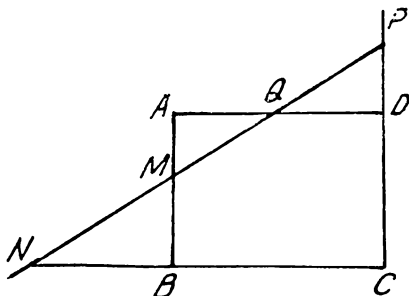


Fig. VII.G.67.

VII.G.68. CAZUL I

Triunghiul ABC — ascuțitunghic în A . (Vezi fig. VII.G.68). Deoarece $MN \parallel BC$, rezultă că $\sphericalangle MNC \equiv \sphericalangle NCB$ (unghiuri alterne-interne). Dar $\sphericalangle MNC \equiv \sphericalangle NCE$. Rezultă că $\sphericalangle NCB \equiv \sphericalangle NCE$, deci triunghiul NEC este isoscel, deci $NE = EC$. (1)

Analog arătăm că triunghiul BDM este isoscel, deci $BD = DM$. (2)

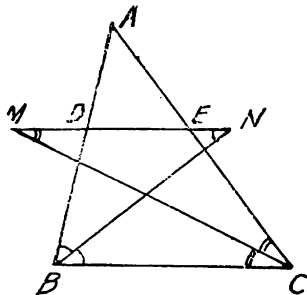


Fig. VII.G.68.a.

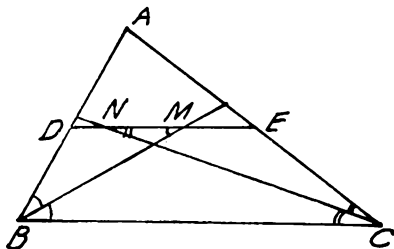


Fig. VII.G.68.b.

Folosind (1) și (2) și ordinea punctelor din figură, obținem :

$$\begin{aligned} AB + AC &= 2BD + 2EC = 2DM + 2NE = 2(DM + NE) = \\ &= 2(ND + 2DE + EM) = 2(MN + DE) = 2MN + 2DE = 2MN + BC. \end{aligned}$$

CAZUL II :

Triunghiul ABC — obtuzunghic sau dreptunghic în A . (Vezi fig. VII.G.68. b.) Se arată ca în cazul I că triunghiurile NEC și BDM sînt isoscele, deci $BD = DM$, $EC = NC$. Avem

$$\begin{aligned} AB + AC &= 2BD + 2EC = 2(DM + NE) = 2(2MN + DN + ME) = \\ &= 2(MN + DE) = 2MN + BC. \end{aligned}$$

Observație. Faptul că acestea sînt singurele situații posibile rezultă din teorema prezentată în lista de indicații.

VII.G.69. METODA 1

Deoarece AB și OC sînt perpendiculare și se taie în părți congruente, $AOBC$ este romb. (Vezi fig. VII.G.69.) Deoarece $BC \parallel AE$, rezultă că $\triangle BDC \sim \triangle ACE$. Deci: $\frac{BD}{AC} = \frac{BC}{AE}$. Rezultă că: $BD \cdot AE = AC \cdot BC = AC^2$.

METODA 2

Intrucît $OC \perp AB$, C este mijlocul arcului AB , deci $AC = CB$. Cum $m(\widehat{AOC}) = 60^\circ$ și $AO = OC = r$, triunghiul AOC este echilateral, deci

$$AC = AO = r = OB. \quad (1)$$

Cum $m(\widehat{ACO}) = 60^\circ = m(\widehat{COB})$, rezultă că $OD \parallel AC$, deci $\frac{OD}{AC} = \frac{OE}{AE}$. Se exprimă în această proporție OD și OE în funcție de lungimile care apar în relația de demonstrat și ținând cont de (1), rezultă succesiv :

$$\frac{AC - BD}{AC} = \frac{AE - AC}{AE} ; 1 - \frac{BD}{AC} = 1 - \frac{AC}{AE} ; \frac{BD}{AC} = \frac{AC}{AE}$$

Deci : $AC^2 = BD \cdot AE$.

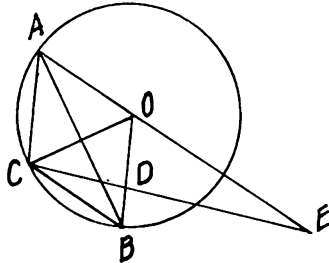


Fig. VII.G.69.

VII.G.70. (Vezi fig. VII.G.70.) Deoarece AD este bisectoarea unghiului BAC , $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$. (1)

Apoi, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AEC$ (subîntind arcul AC). (2)

Din (1) și (2) rezultă că $\triangle ABD \sim \triangle AEC$.

Deci : $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$. Rezultă $AB \cdot AC = AE \cdot AD$.

b) Avem $\triangle ABD \sim \triangle AEC$. Rezultă că :

$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{EC}$, deci : $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{EC}$. (3)

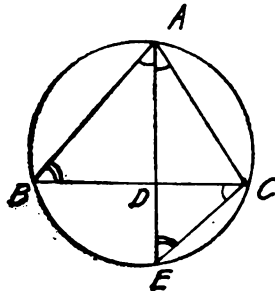


Fig. VII.G.70.

Deoarece $\triangle AEC \sim \triangle CED$ rezultă că :

$$CE^2 = AE \cdot ED. \quad (4)$$

Prin ridicare la pătrat, din relația (3) obținem :

$$\frac{AB^2}{BD^2} = \frac{AE^2}{CE^2}.$$

Înlocuind conform (4), rezultă

$$\frac{AB^2}{BD^2} = \frac{AE^2}{AE \cdot DE} = \frac{AE}{DE};$$

VII.G.71. CAZUL I

Dacă $AB < AC$, rezultă că E este între B și M . (Vezi fig. VII.G.71.)

a) Avem : $\triangle ABM \sim \triangle CBA$ ($\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle BCA$, $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ABC$). Rezultă $\frac{AB}{CB} = \frac{BM}{AB}$. Deci : $AB^2 = BC \cdot BM = \frac{BC^2}{2}$,

adică $BC^2 = 2AB^2$.

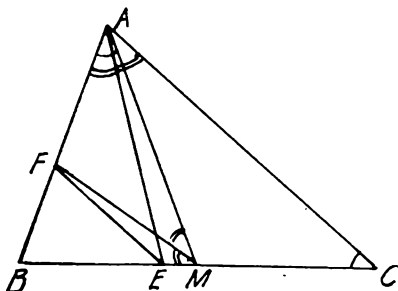


Fig. VII.G.71.

b) Deoarece $\triangle ABM \sim \triangle CBA$ rezultă că $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle BAC$.

Cum MF este bisectoarea unghiului AMB și AE bisectoarea unghiului BAC , rezultă $\sphericalangle FME \equiv \sphericalangle FAE$. Deci patrulaterul $AMEF$ este inscriptibil.

c) ntrucît $AFEM$ este inscriptibil, $\sphericalangle AEF \equiv \sphericalangle AMF$. Dar $\sphericalangle AMF \equiv \sphericalangle BMF \equiv \sphericalangle FAE \equiv \sphericalangle EAC$. Deoarece unghiurile AEF și EAC au poziție de unghiuri alterne-interne și sînt congruente, rezultă că $EF \parallel AC$.

CAZUL II :

Dacă $AB > AC$ rezultă că E este între M și C . Se demonstrează analog cazului I.

CAZUL III :

Dacă $AB = AC$, E și M coincid ; cele trei afirmații se verifică în mod evident.

VII.G.72. Putem avea P între B și D sau P între C și D . Demonstrația este aceeași în ambele cazuri.

Fie P între C și D . (Vezi fig. VII.G.72.a.)

METODA 1

$$\text{Deoarece } AD \parallel MP, \text{ avem } \frac{AB}{AM} = \frac{BD}{DP}. \quad (2)$$

$$\text{Deoarece } NP \parallel AD, \text{ avem } \frac{AC}{AN} = \frac{CD}{DP}. \quad (3)$$

$$\text{Dar } BD = CD. \quad (4)$$

$$\text{Din (2), (3), (4) rezultă că } \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}, \text{ deci } AM \cdot AC = AN \cdot AB.$$

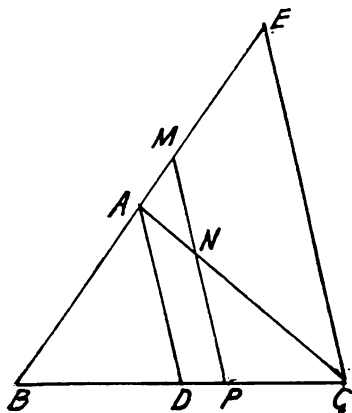


Fig. VII.G.72.a.

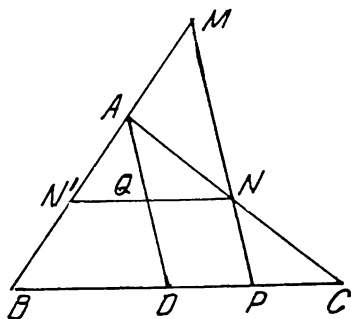


Fig. VII.G.72.b.

METODA 2

Construim din C o paralelă la AD . Fie E punctul de intersecție al acestei paralele cu dreapta AB . Deoarece AD este linie mijlocie în triunghiul BCE , rezultă că $AB = AE$.

Deoarece $EC \parallel AD$ și $MN \parallel AD$, rezultă $EC \parallel MN$. De aici conform teoremei lui Thales, obținem $\frac{AM}{AN} = \frac{AE}{AC}$, apoi $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$, deci $AM \cdot AC = AN \cdot AB$.

METODA 3 :

Construim prin N o paralelă la BC . (Vezi fig. VII.G.72.b.). Fie Q și N' punctele în care această paralelă intersecțiază dreapta AD , respectiv dreapta AB .

Deoarece Q aparține mediei AD și $QN \parallel BC$, rezultă că $N'Q = QN$. (5)

Dar $AQ \parallel MN$. (6)

Din (5) și (6) rezultă că $AN' = AM$. (7)

Deoarece $N'N \parallel BC$, $\triangle AN'N \sim \triangle ABC$, deci $\frac{AN'}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Folosind (7) obținem $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, deci $AM \cdot AC = AN \cdot AB$.

VII.G.73. Fie ABC un triunghi având unghiurile B și C ascuțite.

METODA 1. (Vezi fig. VII.G.73. a)

Fie $ME \parallel AC$, $M \in BC$. Deoarece $AB \parallel EC$, $\triangle ABD \sim \triangle ECD$.
Rezultă că $\frac{DE}{AD} = \frac{DC}{DB} = \frac{1}{2}$. $\triangle ACD \sim \triangle EMD$. Rezultă că $\frac{MD}{DC} = \frac{DE}{AD}$.

Adică $MD = \frac{1}{2} \cdot CD$. (1)

Dar $CD = \frac{1}{3} \cdot BC$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $MD = \frac{1}{6} \cdot BC$, deci $MC = \frac{1}{2} \cdot BC$, adică M este mijlocul segmentului BC .

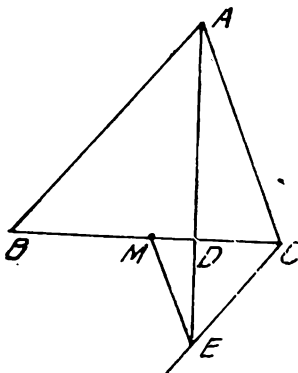


Fig. VII.G.73.a.

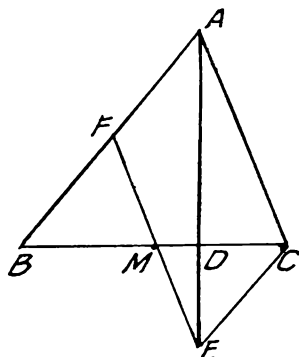


Fig. VII.G.73.b.

METODA 2. (Vezi fig. VII.G.73. b)

Fie M, F punctele în care paralela prin E la dreapta AC intersectează BC , respectiv AB . Deoarece $CE \parallel AF$, $EF \parallel AC$, $AFEC$ este para-

leogram. Rezultă că $CE = AF$. Dar $\triangle CDE \sim \triangle BDA$ de unde rezultă $EC = \frac{1}{2} \cdot AB$.

Deci $EC = BF$. (3)

Dar $EC \parallel BF$. (4)

Din (3) și (4) rezultă că patrulaterul $BECF$ este paralelogram, cu diagonalele BC, FE . Rezultă că $BM = MC$, adică $MC = \frac{1}{2} \cdot BC$.

METODA 3. (Vezi fig. VII.G.73. c.)

Fie M, F punctele în care paralela prin E la dreapta AC intersectează BC , respectiv AB . Patrulaterul $AFEC$ este paralelogram.

Rezultă că $AF = EC$. (5)

Construim din F perpendiculara pe dreapta BC . Fie G și H punctele în care această perpendiculară intersectează dreapta BC , respectiv dreapta EC . Din construcție rezultă că $FH \parallel AE$. Dar $AF \parallel HE$, deci patrulaterul $FHEA$ este paralelogram.

Rezultă că $AF = EH$.

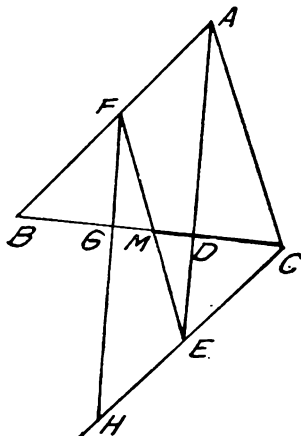


Fig. VII.G.73.c.

Din (5) și (6) obținem că $EH = EC$. Dar $EF \parallel AC$. Rezultă că segmentul EF este linie mijlocie în paralelogramul $ACHB$, deci taie diagonala BC la mijlocul ei.

Observația 1. Punctul M este centrul de simetrie al figurii.

Observația 2. Dacă \widehat{B} sau \widehat{C} sînt obtuze, concluzia nu mai are loc. (Paralela prin E la AC trece prin mijlocul segmentului CD . (Vezi fig. VII.G.73. d)).

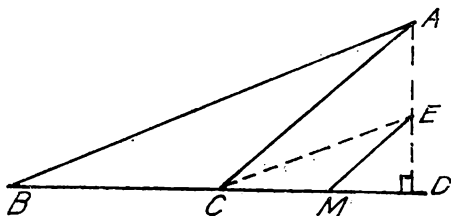


Fig. VII.G.73.d.

VII.G.74. Fie G intersecția segmentelor AD și EF . (Vezi fig. VII.G.74.)

a) Deoarece $EG \parallel BD$, rezultă că $\triangle AEG \sim \triangle ABD$. Deci :

$$\frac{EG}{BD} = \frac{AG}{AD} \quad (1)$$

Analog $\triangle AGF \sim \triangle ADC$, deci :

$$\frac{FG}{CD} = \frac{AG}{AD} \quad (2)$$

Din (1) și (2), cum $BD = CD$, rezultă că $EG = GF$, deci dreapta DG este mediană în triunghiul dreptunghic EDF . Deci : $DG = \frac{1}{2} \cdot EF$. Înlo-

cuiind în (1), $BC = a$, $AD = m$ obținem $\frac{2EG}{a} = \frac{m - EG}{m}$, de unde :

$$EG = \frac{am}{a + 2m}.$$

deci :

$$EF = \frac{2am}{a + 2m} \quad (3)$$

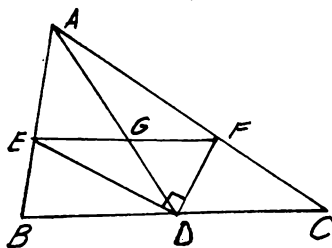


Fig. VII.G.74.

b) Deoarece G este centrul de greutate al triunghiului ABC ,

$$GD = \frac{1}{3} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot m. \quad (4)$$

Dar $GD = \frac{1}{2} \cdot EF$. Înlocuind EF și GD din relațiile (3) și (4) obținem :

$$\frac{am}{a+2m} = \frac{1}{3}m. \text{ Împărțind în ambii membri prin } m \neq 0, \text{ rezultă :}$$

$$\frac{a}{a+2m} = \frac{1}{3}, \text{ de unde } a = m.$$

VII.G.75. a) (Vezi fig. VII.G.75. a.) Avem $m(\widehat{MDN}) = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$; $m(\widehat{MAN}) = 90^\circ$. Rezultă că patrulaterul $AMDN$ este inscripțibil. Deci :

$$\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle MNA, \quad (1)$$

$$\sphericalangle ADN \equiv \sphericalangle NMA. \quad (2)$$

Dar $\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle ADN$, deci din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ANM$, adică triunghiul AMN este isoscel, deci $AM = AN$.

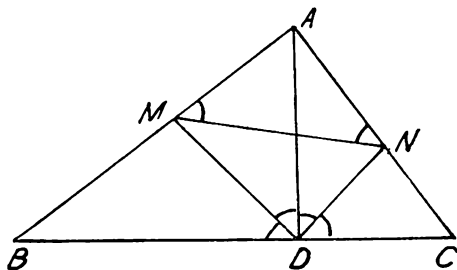


Fig. VII.G.75.a.

b) Deoarece $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle MND$, triunghiurile dreptunghice ABD și NDM sînt asemenea. Rezultă că $\frac{BD}{MD} = \frac{AD}{DN}$. Deci $BD \cdot DN = AD \cdot DM$.

Analog, $\sphericalangle MND \equiv \sphericalangle DCA$ (avînd același complement), iar $\sphericalangle ADC$ și $\sphericalangle MND$ sînt drepte. Rezultă că $\triangle ACD \sim \triangle MND$. Deci : $\frac{AD}{DM} = \frac{CD}{DN}$, de unde $AD \cdot DN = CD \cdot DM$.

c) Fie E punctul de intersecție al cercului circumscris triunghiului ADM cu ipotenuza BC . (Vezi fig. VII.G.75.b.). Punctele A, M, D, E, N sînt conciclice. (Patrulaterul $AMDN$ este inscripțibil.)

$$\text{Centrul cercului este mijlocul segmentului } MN. \quad (3)$$

$$\text{Deoarece } m(\widehat{ADE}) = 90^\circ, AE \text{ este diametru în cerc.} \quad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că AE este mediană în triunghiul isoscel AMN , deci AE e bisectoarea unghiului BAC .

În patrulaterul $AMEN$, diagonalele sînt congruente și se taie în părți congruente, iar $AM = AN$. Rezultă că $AMEN$ este dreptunghi și romb în același timp, deci este pătrat.

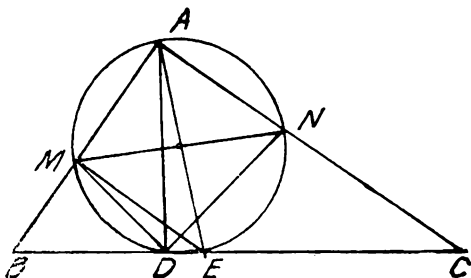


Fig. VII.G.75.b.

VII.G.76. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. (Vezi fig. VII.G.76.).

a) Centrul cercului circumscris triunghiului ACD este M . Deoarece $m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{ADC}) = 90^\circ$ rezultă că $E \in C(M, AM)$, deci punctele A, C, D, E sînt conciclice.

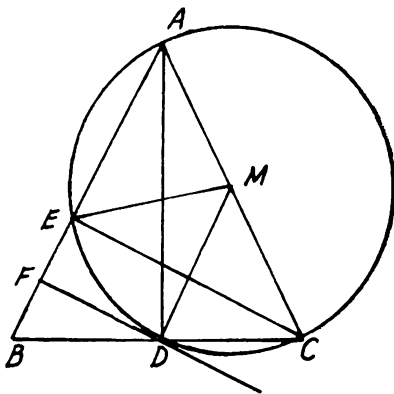


Fig. VII.G.76.

b) Triunghiurile ADC și AEC sînt dreptunghice; DM , respectiv EM sînt mediane corespunzătoare ipotenuzei AC . Rezultă că :

$$DM = \frac{AC}{2}, \quad EM = \frac{AC}{2},$$

deci triunghiul MED este isoscel.

c) Triunghiul ABC este isoscel, deci înălțimea AD este și bisectoare. Rezultă $\widehat{ED} \equiv \widehat{CD}$. Deci și $\sphericalangle DMC \equiv \sphericalangle DME$. Rezultă că MD este bisectoare în triunghiul isoscel EMC . Deci MD este mediatoarea segmentului CE .

d) Avem : $MD \perp FD$, $MD \perp EC$. Rezultă că $EC \parallel FD$. Dar $EC \perp \perp AB$. Deci $FD \perp AB$.

e) Deoarece $m(\widehat{AFD}) = 90^\circ = m(\widehat{ADC})$ și $\sphericalangle FAD \equiv \sphericalangle CAD$, rezultă că $\triangle AFD \sim \triangle ADC$, deci $\frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AC}$, adică $AD^2 = AF \cdot AC$.

Cazul în care triunghiul ABC este obtuzunghic se tratează analog.

VII.G.77. a) (Vezi fig. VII.G.77.) AG este mediană în triunghiul dreptunghic BAE . Rezultă că

$$\therefore \quad AG = \frac{BE}{2}. \quad (1)$$

DG este mediană în triunghiul dreptunghic BDE . Rezultă că

$$DG = \frac{BE}{2}. \quad (2)$$

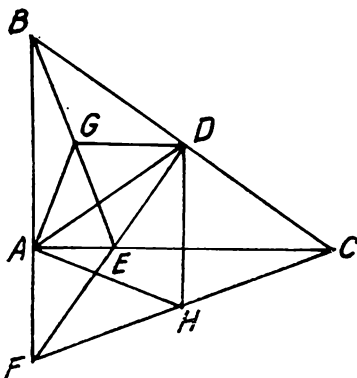


Fig. VII.G.77.

Din (1) și (2) obținem $AG = DG$, deci triunghiul ADG este isoscel. Analog în triunghiurile dreptunghice AFC și DFC , AH și DH sînt mediane de lungime $\frac{CF}{2}$. Rezultă că triunghiul AHD este isoscel.

b) Deoarece $m(\widehat{BAE}) = 90^\circ$, $m(\widehat{BDE}) = 90^\circ$, $BAED$ este inscripabil. Centrul cercului circumscris acestui patrulater este G .

c) Deoarece patrulaterele $AEDB$ și $AFCD$ sînt inscriptibile, avem :

$$\sphericalangle DBE \equiv \sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle DFC,$$

$$\sphericalangle BED \equiv \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DCF.$$

Rezultă că $\triangle BDE \sim \triangle FDC$. Deci :

$$\frac{BD}{FD} = \frac{DE}{CD}, \text{ adică } BD \cdot CD = FD \cdot DE. \quad (3)$$

Dar $BD = CD = \frac{BC}{2}$ Înlocuind în (3) obținem $\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = FD \cdot DE$,
 $BC^2 = 4FD \cdot DE$.

d) Deoarece AC și FD sînt înălțimi în triunghiul BCF , E este ortocentrul triunghiului BCF . Rezultă că $BE \perp FC$.

VII.G.78. a) (Vezi fig. VII.G.78.) Deoarece $\sphericalangle AMC$ și $\sphericalangle ABC$ sînt unghiuri înscrise în semicerc, $m(\widehat{AMC}) = 90^\circ$, $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$. Rezultă că și suplementele lor, \widehat{EMF} și \widehat{EBF} , au măsurile de 90° , deci patrulaterul $BEMF$ este inscriptibil.

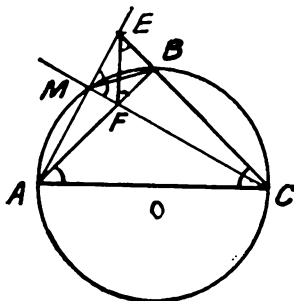


Fig. VII.G.78.

b) Deoarece patrulaterele $BEMF$ și $MACB$ sînt inscriptibile avem următoarele congruențe de unghiuri : $\sphericalangle BEF \equiv \sphericalangle BMF \equiv \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle BME \equiv \sphericalangle EFB$. Deci $\sphericalangle BEF \equiv \sphericalangle EFB$, deci triunghiul BEF este isoscel.

c) Fie H intersecția dreptelor EF și AC . Avem $m(\widehat{AFH}) = m(\widehat{EFB}) = 45^\circ$, $m(\widehat{FAH}) = 45^\circ$. Rezultă că $m(\widehat{AHF}) = 90^\circ$, deci $EF \perp AC$.

Altfel Observăm că F este ortocentrul triunghiului ACE .

d) $\triangle MFB \sim \triangle AFC$ (U.U.). Rezultă că $\frac{MF}{AF} = \frac{FB}{FC}$, deci $AF \cdot FB = MF \cdot FC$.

e) Deoarece $m(\widehat{FMA}) = m(\widehat{EBF}) = 90^\circ$, iar $\sphericalangle MAF \equiv \sphericalangle EAB$, rezultă că $\triangle AMF \sim \triangle ABE$. (În acest caz, dreapta MF se numește antiparalelă la dreapta EB în raport cu laturile unghiului EAB).

VII.G.79. Fie S intersecția dreptelor EF și AC . (Vezi fig. VII.G.79.)
Deoarece $DC \parallel AB$ rezultă că $\triangle ECD \sim \triangle EBA$. Deci :

$$\frac{ED}{EA} = \frac{CD}{AB} = \frac{2}{3}.$$

Rezultă că $ED = 2AD$. Deci $ED = CD$; dar $DF = AD$, $m(\widehat{EDF}) = m(\widehat{CDA}) = 90^\circ$. Rezultă că $\triangle EDF \cong \triangle CDA$ (C.C.). Deci $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle FCS$. Dar $\sphericalangle EFD \equiv \sphericalangle CFS$ (fiind unghiuri opuse la vîrf. Cum $\sphericalangle DEF$ și $\sphericalangle EFD$ sînt complementare rezultă că $\sphericalangle FCS$ și $\sphericalangle CFS$ sînt complementare. Deci $m(\widehat{FSC}) = 90^\circ$. Deci $EF \perp AC$.

Altfel : Deoarece $AD = DF$, rezultă că triunghiul ADF este isoscel. Fiind și dreptunghic, $m(\widehat{FAB}) = 45^\circ$. Cum și $m(\widehat{ABE}) = 45^\circ$, rezultă că $AF \perp BE$. Dar $CF \perp AE$. Deci F este ortocentrul triunghiului ACE . Rezultă că $EF \perp AC$.

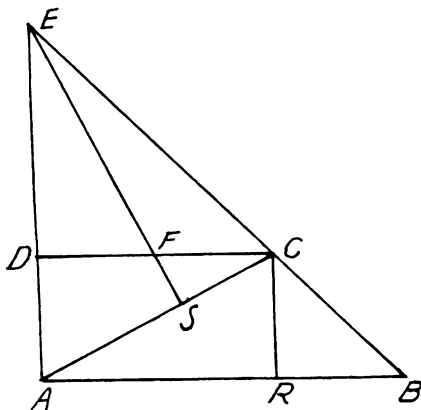


Fig. VII.G.79.

VII.G.80. a) (Vezi fig. VII.G.80.) Deoarece $AB \parallel CD$, rezultă că $\triangle ABN \sim \triangle CDN$. Deci :

$$\frac{b}{a} = \frac{BN}{ND} = \frac{AN}{NC}, \quad (1)$$

de unde obținem proporția derivată : $\frac{b}{a} = \frac{BN - AN}{ND - NC}$. Sau : $b(ND - NC) = a(BN - AN)$; $b \cdot ND + a \cdot AN = a \cdot BN + b \cdot NC$.

b) Din (1) obținem $\frac{b}{a} = \frac{b + BN + AN}{a + ND + NC}$ Dar $ND + NC = n - BN + m - AN$.

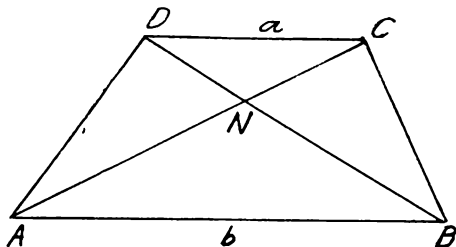


Fig. VII.G.80.

Deci :

$$\frac{b}{a} = \frac{b + BN + AN}{a + n + m - (BN + AN)},$$

$$b(a + n + m) - b(AN + BN) = ab + a(BN + AN),$$

de unde :

$$BN + AN = \frac{bn + bm}{a + b}.$$

Deci

$$b + BN + AN = \frac{bn + bm + ab + b^2}{a + b}.$$

Rezultă că

$$f(x) = \frac{2(6 - x + 2x + 2 + 3 + 2)}{5} = \frac{2(x + 13)}{5}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Cum m și n sint lungimile unor segmente, sint strict pozitive.

Deci

$$\begin{cases} 2x + 2 > 0 \\ 6 - x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x < 6 \end{cases}$$

Rezultă $-1 < x < 6$, deci :

$$\frac{24}{5} < f(x) < \frac{38}{5}$$

$$\text{Deci } f(x) \in \left(\frac{24}{5}; \frac{38}{5} \right) = (4,8; 7,6).$$

VII.G.81. a) (Vezi fig. VII.G.81.) Avem :

$$OA = 16,7(9) = 16,8 = \frac{84}{5};$$

$$OC = AC - OA = \frac{96}{5} - \frac{84}{5} = \frac{12}{5};$$

$$OB = DB - OD = 4 - 0,5 = 3,5 = \frac{7}{2};$$

$$OD = 0,5 = \frac{1}{2};$$

Observăm că :

$$\frac{\frac{84}{5}}{\frac{12}{5}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}}, \text{ deci se verifică proporția } \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} \quad (1)$$

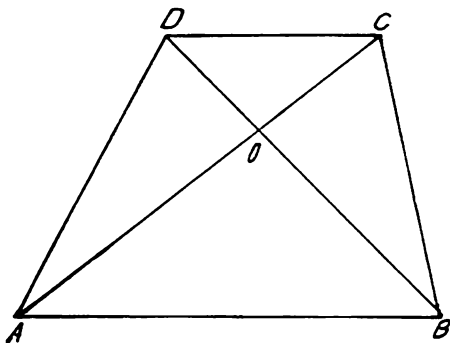


Fig. VII.G.81.

Unghiurile AOB și COD sînt opuse la vîrf, deci :

$$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\triangle ABO \sim \triangle CDO$. Rezultă că $\sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle OCD$, deci $AB \parallel CD$.

b) Raționăm prin reducere la absurd. Presupunem că $ABCD$ este inscripșibil. Rezultă că :

$$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD. \quad (3)$$

$$\text{Dar } \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BDC. \quad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că triunghiul DOC este isoscel, deci $OD = OC$. Dar $OD = \frac{1}{2}$, $OC = \frac{12}{5}$. Rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci patrulaterul $ABCD$ nu este inscripșibil. (Direct : Deoarece $AC = \frac{96}{5} \neq BD = 4$, trapezul nu este isoscel deci nici inscripșibil).

c) În triunghiul COD avem următoarele relații : $|OC - OD| < CD < OC + OD$.

Înlocuind cu lungimile date, obținem : $1,9 < CD < 2,9$.
Deoarece CD este un număr natural, rezultă $CD = 2$.

VII.G.82. a) (Vezi fig. VII.G.82.) Avem, din ipoteză : $AC = AB = AM$. Deci triunghiurile ABC și ACM sînt isoscele. Notăm $\beta = m(\widehat{ACM})$, $\alpha = m(\widehat{ACB})$.

Avem $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ Deci $\alpha + \beta = 90^\circ$, adică $m(\widehat{BCM}) = 90^\circ$.

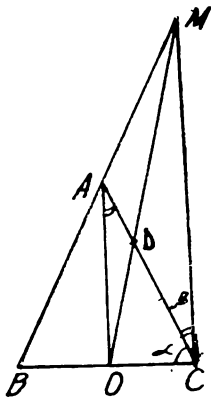


Fig. VII.G.82.

b) AO este linie mijlocie în triunghiul BMC . Rezultă că $AO \parallel MC$, deci $\sphericalangle OAD \equiv \sphericalangle DCM$. (1)

Dar $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2} = \frac{AO}{MC}$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $\triangle AOD \sim \triangle CMD$ (L.U.L.).

c) Din faptul că $\triangle AOD \sim \triangle CMD$ rezultă că $\sphericalangle ADO \equiv \sphericalangle CDM$. Deci semidreptele DM și DO sînt în prelungire. Rezultă că M, D, O sînt coliniare.

Altfel Deoarece AC este mediană în triunghiul BCM și $AD = \frac{1}{3} \cdot AC$ ($D \in AC$), D este centrul de greutate al triunghiului BCM . Deci dreapta MD este mediană în triunghiul BCM , adică M, D, O sînt coliniare.

VII.G.83. (Vezi fig. VII.G.83.) În triunghiurile dreptunghice ADB și AEC avem :

$m(\widehat{ABD}) = 30^\circ$, deci $AD = \frac{1}{2} \cdot AB$;

$$m(\widehat{ACE}) = 30^\circ, \text{ deci } AE = \frac{1}{2} \cdot AC;$$

$$\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle BAC.$$

Rezultă că $\triangle AED \sim \triangle ACB$ (L.U.L.). Deci

$$ED = \frac{1}{2} \cdot BC. \quad (1)$$

Pe de altă parte, OD este mediană în triunghiul dreptunghic BDC , deci :

$$OD = \frac{1}{2} \cdot BC. \quad (2)$$

La fel, EO este mediană în triunghiul dreptunghic BEC , deci

$$EO = \frac{1}{2} \cdot BC. \quad (3)$$

Din (1), (2) și (3) rezultă că triunghiul EOD este echilateral.

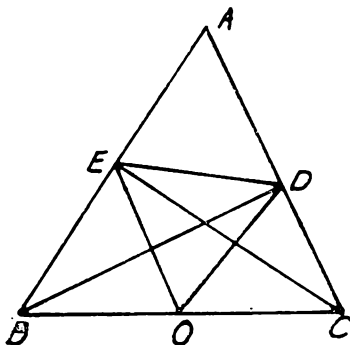


Fig. VII.G.83.

b) Din ipoteză rezultă că B este un punct variabil pe dreapta AB . Din a) rezultă că ED este minimă când BC are cea mai mică lungime posibilă. BC este minimă când reprezintă tocmai distanța de la C la dreapta AB , deci atunci când $BC \perp AB$. Rezultă, în acest caz, $m(\widehat{ACB}) = 30^\circ$, deci $AB = 2$ cm și $BC = 2\sqrt{3}$ cm. Rezultă că $EO = OD = DE = \sqrt{3}$ cm.

VII.G.84. METODA 1 (Vezi fig. VII.G.84. a.)

Arătăm că triunghiurile AOK și EOK sînt asemenea. Avem $\sphericalangle ACO \equiv \sphericalangle COB$, fiind alterne interne ; $m(\widehat{ACO}) = m(\widehat{OAK}) = \frac{m(\widehat{AE})}{2}$.

Rezultă că : $\sphericalangle EOK \equiv \sphericalangle OAK$, iar \hat{K} este unghi comun, deci :
 $\Delta AOK \sim \Delta OEK$ (U.U.).

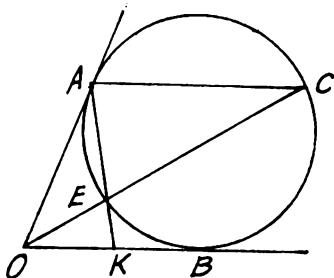


Fig. VII.G.84.a.

Avem $\frac{AK}{OK} = \frac{OK}{EK}$, adică $OK^2 = AK \cdot EK$. (1)

Dar, din teorema puterii punctului K față de cerc, avem :

$KB^2 = EK \cdot AK$. (2)

Din (1) și (2) rezultă $OK^2 = BK^2$, deci, fiind numere pozitive, $OK = BK$.

METODA 2 (Vezi fig. VII.G.84. b.) :

Fie D punctul de intersecție al diametrului ce trece prin B cu dreapta OA. BD este mediatoarea segmentului AC. Rezultă că $AD = CD$. Dar AD este tangentă la cerc ; rezultă că și CD este tangentă la cerc.

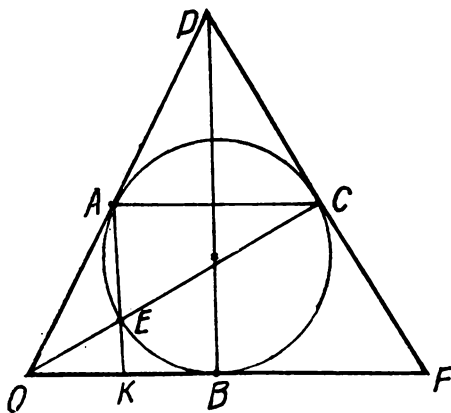


Fig. VII.G.84.b.

Notăm $\{F\} = CD \cap OB$. Se arată ușor că BD este mediatoarea segmentului OF . Rezultă că triunghiul DOF este isoscel, deci $\sphericalangle DFO \equiv \sphericalangle DOF$. Rezultă că $OA = OB = BF = FC$. În triunghiurile OAK și FOC avem: $\sphericalangle AOK \equiv \sphericalangle CFO$ și $\sphericalangle OAK \equiv \sphericalangle COF$. Rezultă că $\triangle OAK \sim \triangle FOC$.

Deci: $\frac{OK}{CF} = \frac{OA}{OF} = \frac{1}{2}$ și, în consecință, $OK = \frac{1}{2} \cdot OB = BK$.

VII.G.85. (Vezi fig. VII.G.85.) a) $\sphericalangle ATQ \equiv \sphericalangle TLQ$, deoarece ambele subîntind arcul TQ . (1)

Dar $LT \parallel AS$, deci:

$$\sphericalangle TLQ \equiv \sphericalangle LAS \equiv \sphericalangle MAQ}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle MAQ \equiv \sphericalangle ATQ$.

b) Fie N intersecția dreptelor TQ și AS . Avem $\triangle NAQ \sim \triangle NTA$ (U.U.). Deci $\frac{NA}{NT} = \frac{NQ}{NA}$, de unde

$$NA^2 = NT \cdot NQ. \quad (3)$$

Cum $m(\widehat{STQ}) = m(\widehat{QSN}) = \frac{m(\widehat{QS})}{2}$, iar $\widehat{TNS} \equiv \widehat{QNS}$, rezultă că $\triangle NSQ \sim \triangle NTS$.

Deci: $\frac{NS}{NT} = \frac{NQ}{NS}$. Rezultă că

$$NS^2 = NT \cdot NQ. \quad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că $NA = NS$, deci N și M coincid. Rezultă că T , Q și M sint coliniare.

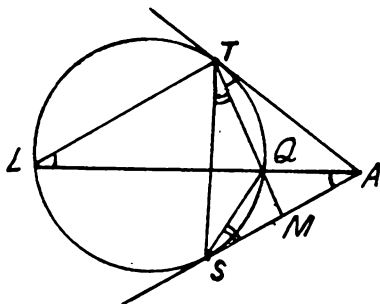


Fig. VII.G.85.

VII.G.86. a) Fie T pe d_1 , în afara semidreptei AM . (Vezi fig. VII.G.86.a.) Deoarece d_1 este tangentă la $C(O_1, r_1)$, avem:

$$m(\widehat{TAD}) = \frac{m(\widehat{AD})}{2} = m(\widehat{ABD}). \quad (1)$$

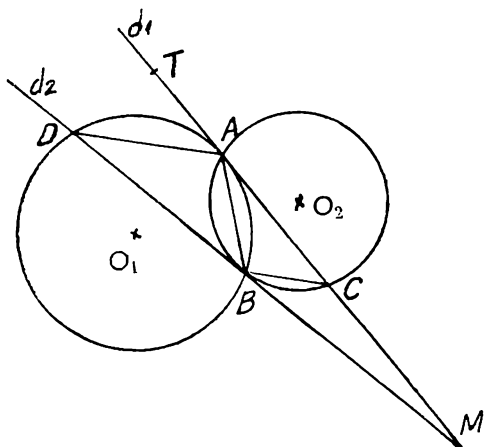


Fig. VII.G.86.a.

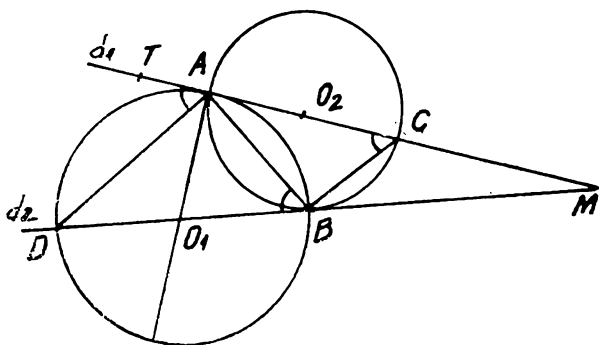


Fig. VII.G.86.b.

Dar d_2 este tangentă la $C(O_2, r_2)$ în B , deci

$$m(\widehat{ABD}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2} = m(\widehat{ACB}). \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle TAD \equiv \sphericalangle ACB$.

Unghiurile TAD și ACB fiind corespondente, rezultă că $BC \parallel AD$.

Altfel :

Conform teoremei puterii punctului M față de cele două cercuri, obținem $MA^2 = MB \cdot MD$, $MB^2 = MC \cdot MA$.

Înmulțind cele două relații, rezultă $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. Adică : $\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$. Conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă că $BC \parallel AD$.

b) Avem : $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDA$ și $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ABD$. Rezultă că $\triangle ABC \sim \triangle DAB$. Deci : $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{AB}$, adică $AB^2 = AD \cdot BC$.

c) Fie $O_2 \in d_1$. Arătăm că punctele B, O_1, D sînt coliniare. (Vezi fig. VII.G.86. b.) Avem $\sphericalangle DAO_1 \equiv \sphericalangle BAO_2$, fiind unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare. Obținem :

$$m(\widehat{DAO_1}) + m(\widehat{ADO_1}) = m(\widehat{BAO_2}) + \frac{m(\widehat{AB})}{2} = \frac{m(\widehat{AB})}{2} + \frac{m(\widehat{AB})}{2} = m(\widehat{AB}).$$

$$(\widehat{AB} \subset C(O_1, r_1)).$$

$$\text{Dar } m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AO_1B}).$$

Rezultă că $m(\widehat{DAO_1}) + m(\widehat{ADO_1}) = m(\widehat{AO_1B})$, deci $\sphericalangle AO_1B$ este unghi exterior triunghiului ADO_1 . Deci punctele B, O_1, D sînt coliniare, adică O_1 aparține dreptei d_2 .

VII.G.87. (Vezi fig. VII.G.87.) a) Triunghiurile QDN și RBA sînt dreptunghice avînd $m(\widehat{QDN}) = 90^\circ$, $m(\widehat{RBA}) = 90^\circ$; $m(\widehat{RNB}) = m(\widehat{RAB}) = \frac{m(\widehat{BR})}{2}$. Rezultă că $\sphericalangle ARB \equiv \sphericalangle NQA$, avînd complemente congruente.

Deoarece $\sphericalangle AMR$ este înscris într-un semicerc, $m(\widehat{AMR}) = 90^\circ$; deci $MR \perp AQ$. Dar $BN \perp AQ$, deci $MR \parallel BN$. Rezultă că $NRMB$ este trapez și, fiind inscripțibil, este isoscel.

$$\text{Avem : } m(\widehat{BDA}) = m(\widehat{ANR}) = 90^\circ \text{ (} BD \perp AD, AR \text{ diametru)}; \quad (1)$$

$$m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{ARN}) = \frac{m(\widehat{AN})}{2}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\triangle ANR \sim \triangle ADB$ (U.U.).

b) Dacă $AN \parallel BP$, atunci patrulaterul $BANM$ este trapez isoscel. Rezultă că $\sphericalangle DBM \equiv \sphericalangle DMB$.

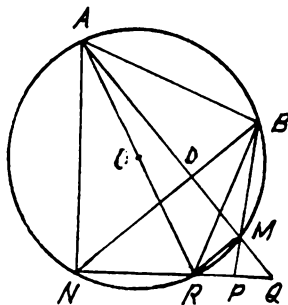


Fig. VII.G.87.

Dar triunghiul BDM este dreptunghic, deci $m(\widehat{BMD}) = 45^\circ$, deci $m(\widehat{AB}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$.

c) Dacă triunghiul NBP este echilateral, atunci $m(\widehat{BNR}) = 60^\circ$. Dar $m(\widehat{BAO}) = \frac{m(\widehat{BMR})}{2} = m(\widehat{BNR}) = 60^\circ$. Rezultă că triunghiul AOB , fiind isoscel cu un unghi de 60° , este echilateral, deci $AB = AO$. Din a) rezultă că $m(\widehat{QMR}) = 90^\circ$ și că, în triunghiul dreptunghic QMR , MP este mediană, deci:

$$MP = QP = PR. \quad (3)$$

Avem $m(\widehat{MPR}) = 60^\circ$ și din (3) rezultă că triunghiul MPR este echilateral, deci $MR = MP$.

VII.G.88. Problema admite mai multe soluții, depinzând de așezarea punctelor B_1, C_1 , respectiv B_2, C_2 pe dreapta a_1 respectiv a_2 . Pentru claritatea și conciziunea rezolvării facem următoarea convenție: atașăm figurii un sistem de coordonate avînd originea A_1 , abscisa a_1 și ordonata e . Fixăm ca unitate de măsură pe axe 1 cm.

Fie P respectiv Q intersecțiile dreptei MN cu B_1C_2 și C_1B_2 . Notăm respectiv cu a, b, c, d abscisele punctelor B_1, C_1, B_2, C_2 . Punctele B_1, C_1, B_2, C_2 sînt vîrfurile unui trapez. Conform unei probleme anterioare (66), avem:

$$PQ = \frac{2B_1C_1 \cdot B_2C_2}{B_1C_1 + B_2C_2} = \frac{2|a-b| \cdot |c-d|}{|a-b| + |c-d|} \quad (1)$$

În triunghiul $C_2B_1C_1$, conform teoremei fundamentale a asemănării avem

$$\frac{PM}{B_1C_1} = \frac{C_2M}{C_1C_2} \quad (2)$$

Din teorema lui Thales obținem

$$\frac{C_2M}{C_1C_2} = \frac{A_2N}{A_1A_2}. \quad (3)$$

$$\text{Dar } PM = MQ = \frac{PQ}{2}. \quad (4)$$

Din (2), (3) și (4) rezultă

$$\frac{1}{2} \frac{PQ}{B_1C_1} = \frac{A_2N}{A_1A_2}$$

Inlocuind cu (1):

$$\frac{A_2N}{A_1A_2} = \frac{|a-b| \cdot |c-d|}{(|a-b| + |c-d|) \cdot |a-b|} = \frac{|c-d|}{|a-b| + |c-d|}$$

Cum $A_1A_2 = 1$, rezultă

$$A_2N = \frac{|c-d|}{|a-b| + |c-d|};$$

$$A_1N = 1 - \frac{|c-d|}{|a-b| + |c-d|} = \frac{|a-b|}{|a-b| + |c-d|}$$

Fie R intersecția dreptelor A_2B_1 și MN . Avem, aplicind teorema fundamentală a asemănării, apoi teorema lui Thales :

$$\frac{RP}{A_2C_2} = \frac{RB_1}{B_1A_2} = \frac{A_1N}{A_1A_2},$$

de unde $RP = A_2C_2 \cdot A_1N$.

Deci

$$RP = \frac{d \cdot |a - b|}{|a - b| + |c - d|}.$$

Analog,

$$\frac{NR}{A_1B_1} = \frac{A_2N}{A_1A_2},$$

de unde $NR = A_1B_1 \cdot A_2N$. Deci

$$NR = \frac{a \cdot |c - d|}{|a - b| + |c - d|}$$

Rezultă,

$$NP = NR + RP = \frac{a \cdot |c - d| + d \cdot |a - b|}{|a - b| + |c - d|}$$

Cum $MP = \frac{|a - b| \cdot |c - d|}{|a - b| + |c - d|}$, avem

$$MN = MP + NP = \frac{|a - b| \cdot |c - d| + a \cdot |c - d| + d \cdot |a - b|}{|a - b| + |c - d|}.$$

Particularizînd, obținem :

1) B_1 între A_1 și C_1 ; C_2 între A_2 și B_2 . (Vezi fig. VII.G.88.a.)

$$A_1N = \frac{5}{5 + 3} = \frac{5}{8} = 0,625.$$

$$MN = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3}{5 + 3} = \frac{36}{8} = 4,5.$$

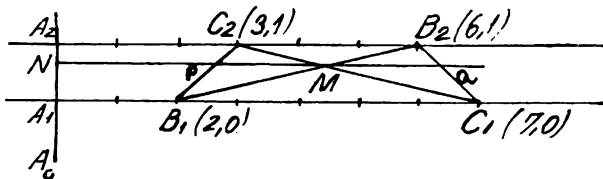


Fig. VII.G.88.a.

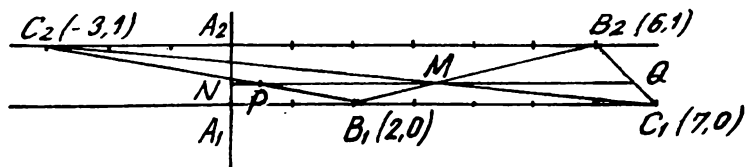


Fig. VII.G.88.b.

2) B_1 între A_1 și C_1 ; A_2 între B_2 și C_2 . (Vezi fig. VII.G.88.b.)

$$A_1N = \frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}.$$

$$MN = \frac{2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 - 3 \cdot 5}{5+9} = \frac{48}{14} = \frac{24}{7}$$

3) A_1 între B_1 și C_1 ; A_2 între B_2 și C_2 . (Vezi fig. VII.G.88.c.)

$$A_1N = \frac{9}{9+9} = \frac{9}{18} = 0,5.$$

$$MN = \frac{9 \cdot 9 - 2 \cdot 9 - 3 \cdot 9}{9+9} = 2.$$

Observăm că $B_1C_1 = B_2C_2$, deci figura $B_1C_1B_2C_2$ este paralelogram. Aceeași soluție obținem pentru ordinea: C_1, A_1, B_1 ; B_2, A_2, C_2 .

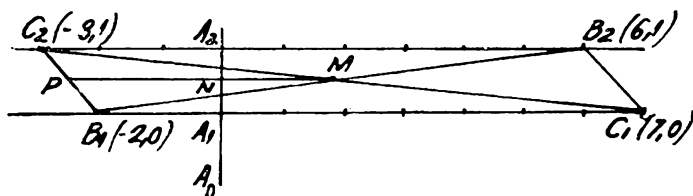


Fig. VII.G.88.c.

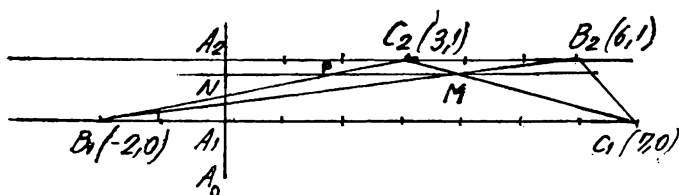


Fig. VII.G.88.d.

4) A_1 între B_1 și C_1 ; C_2 între A_2 și B_2 . (Vezi fig. VII.G.88.d.)

$$A_1N = \frac{9}{9+3} = \frac{9}{12} = 0,75.$$

$$MN = \frac{3 \cdot 9 - 2 \cdot 3 + 9 \cdot 3}{9+3} = \frac{16}{4} = 4.$$

Situațiile în care B_2 și C_1 sînt separate de dreapta e , nu sînt soluții ale problemei, deoarece, în aceste cazuri, segmentele B_1B_2 și C_1C_2 nu se intersectează.

VII.G.89. Demonstrăm mai întâi următoarea lemă : Dreapta determinată de punctul de intersecție al laturilor neoparalele ale unui trapez și de punctul de intersecție a diagonalelor trapezului trece prin mijlocul fiecărei baze.

Demonstrație : (Vezi fig. VII.G.89. a.)

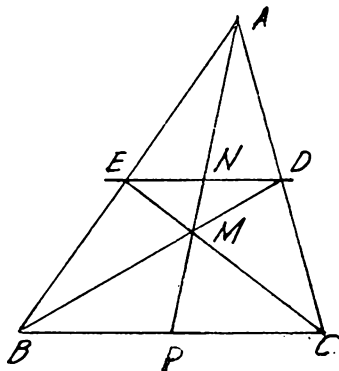


Fig. VII.G.89.a.

Fie $EBCD$ un trapez, astfel încât laturile neoparalele BE și CD se intersectează în A , iar diagonalele BD și EC în M . Fie N și P intersecțiile dreptei AM cu ED , respectiv BC .

Avem $\triangle NMD \sim \triangle PMB$ (U.U.).

$$\text{Rezultă că } \frac{ND}{BP} = \frac{MN}{MP}. \quad (1)$$

Analog $\triangle NME \sim \triangle PMC$ (U.U.).

$$\text{Rezultă că } \frac{EN}{CP} = \frac{MN}{MP}. \quad (2)$$

Pe de altă parte, din asemănarea triunghiurilor AND și APC ; AEN și ABP ; AED și ABC avem următoarele proporții :

$$\frac{ND}{PC} = \frac{AD}{AC}, \quad \frac{EN}{BP} = \frac{AE}{AB}, \quad \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}.$$

Rezultă că :

$$\frac{ND}{PC} = \frac{EN}{BP}. \quad (3)$$

$$\text{Din (1) și (2) rezultă că } \frac{PC}{EN} = \frac{PB}{ND}.$$

Înmulțind această relație cu (3) în mod convenabil, rezultă

$$\frac{ND}{EN} = \frac{EN}{ND}, \text{ deci } ND = EN \text{ și } \frac{PC}{PB} = \frac{PB}{PC}, \text{ deci } PB = PC.$$

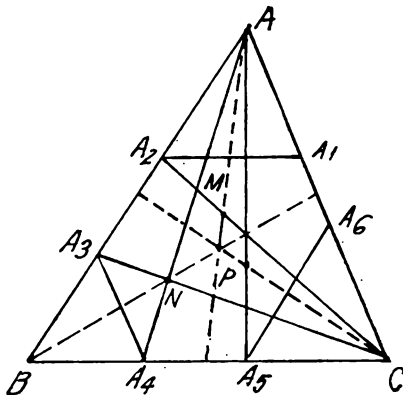


Fig. VII.G.89.b.

(Segmentul determinat de mijloacele laturilor opuse ale unui patrulater se numește bimediană în patrulater).

SOLUȚIA PROBLEMEI

Observăm că, în trapezul A_2BCA_1 , dreapta AM trece prin punctul de intersecție a diagonalelor. Conform lemei, dreapta AM este mediană în triunghiul ABC . Analog, dreapta BN este mediană în triunghiul ABC și dreapta CP este mediană în triunghiul ABC . Din teorema de concurență a medianelor oricărui triunghi, rezultă că dreptele AM , BN și CP sint concurente în centrul de greutate al triunghiului ABC .

VII.G.90. Avem de demonstrat că, în ipotezele problemei, $OQ \parallel BC$ dacă și numai dacă $MQ = MP$. Fie E intersecția laturilor neparalele ale trapezului. Condiția necesară : („ \Rightarrow “).

Deoarece $OQ \parallel BC$, rezultă că $\triangle MOQ \sim \triangle MEB$, deci

$$\frac{MQ}{MB} = \frac{MO}{ME}. \quad (1)$$

Deoarece $OP \parallel AD$, rezultă că $\triangle MOP \sim \triangle MEA$, deci

$$\frac{MP}{MA} = \frac{MO}{ME}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\frac{MQ}{MB} = \frac{MP}{MA}$. (3)

Dar dreapta EM este mediană în triunghiul EAB (vezi problema 89), deci $MB = MA$. (4)

Din (3) și (4) rezultă că $MP = MQ$.

Condiția suficientă : („ \Leftarrow “).

$$\text{Avem } PM = MQ, MA = MB. \text{ Rezultă că } \frac{MP}{MA} = \frac{MQ}{MB}. \quad (5)$$

$$\text{Deoarece } OP \parallel AE, \text{ avem } \frac{MP}{MA} = \frac{MO}{ME}. \quad (6)$$

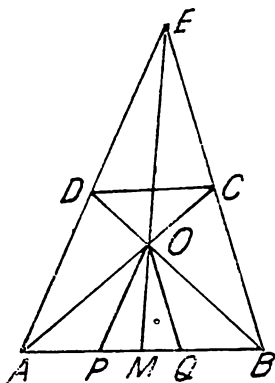


Fig. VII.G.90.

Din (5) și (6) rezultă că $\frac{MQ}{MB} = \frac{MO}{ME}$. Conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă că $OQ \parallel BC$.

VII.G.91. CAZUL I.

Punctele D și E sînt situate astfel încît D să fie între B și E . (Vezi fig. VII.G.91.)

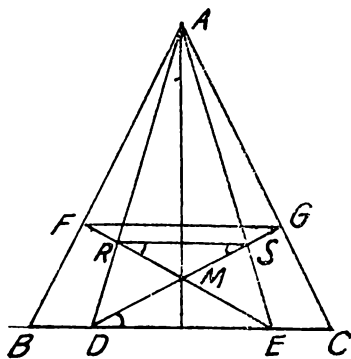


Fig. VII.G.91.

METODA 1

Fie R intersecția dreptelor AD și EF , iar S intersecția dreptelor AE și DG .

Deoarece $m(\widehat{AFR}) = m(\widehat{AGS}) = 90^\circ$, $AF = AG$, $\sphericalangle FAR \equiv \sphericalangle GAS$.
 obținem că $\triangle FAR \equiv \triangle GAS$ (C.U.).

Rezultă că $\sphericalangle FRA \equiv \sphericalangle GSA$. Deci $\sphericalangle DRE \equiv \sphericalangle ESD$, fiind unghiuri opuse la vîrf unghiurilor FRA , respectiv GSA . Deci patrulaterul $RDES$ este inscriptibil.

$$\triangle FAM \equiv \triangle GAM \text{ (I.C.)} \quad (3)$$

Din (1) și (3) rezultă că $\triangle ARM \equiv \triangle ASM$ (L.L.L.). Deci $RM = SM$, adică triunghiul RMS este isoscel. Deci $\sphericalangle MRS \equiv \sphericalangle MSR$. Conform (2), rezultă că $\sphericalangle SDE \equiv \sphericalangle ERS \equiv \sphericalangle DSR$, deci $DE \parallel RS$.

Din (2) și (4) rezultă că $RDES$ este trapez isoscel. Deci $RD = ES$.
 de unde rezultă $AD = AE$, fiind sume de segmente congruente.

$$\text{Avem } \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle AEC, \text{ avînd suplementele congruente.} \quad (6)$$

$$\text{Din ipoteză, } \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAE. \quad (7)$$

Din (5), (6) și (7) rezultă că $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$ (U.L.U.). Rezultă că $AB = AC$, deci triunghiul ABC este isoscel.

b) Deoarece $\triangle ARM \equiv \triangle ASM$, AM este bisectoare și înălțime în triunghiul ARS . Deci $AM \perp RS$.

$$\text{Din (4) și (8) rezultă că } AM \perp BC.$$

Altfel: $RDES$ este trapez. Cum într-un trapez, dreapta determinată de punctul de intersecție al laturilor neoparalele și punctul de intersecție al diagonalelor trece prin mijloacele bazelor, rezultă că dreapta AM este mediană în triunghiul isoscel ADE . Deci $AM \perp BC$.

METODA 2.

a) $\triangle AFE \equiv \triangle AGD$ (C.U.). Rezultă că :

$$FE = DG; \quad (9)$$

$$AD = AE; \quad (10)$$

$$\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle AEM. \quad (11)$$

Din (10) rezultă că triunghiul ADE este isoscel, deci

$$\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle AED. \quad (12)$$

Din (11) și (12) obținem :

$$\sphericalangle FEB \equiv \sphericalangle MED \equiv \sphericalangle MDE \equiv \sphericalangle GDC. \quad (13)$$

Din (9) și (13) rezultă că $\triangle FEB \equiv \triangle GDC$ (C.U.).

Rezultă că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACE$, deci triunghiul ABC este isoscel.

b) În triunghiul isoscel ADE dreapta AM este bisectoare. Rezultă că dreapta AM este și înălțime, deci $AM \perp BC$.

METODA 3 :

a) Triunghiul FMG este isoscel ($\triangle FAM \equiv \triangle GAM$) (I.C.). Triunghiul MDE este isoscel ($\triangle ADM \equiv \triangle AEM$, (U.L.U.)). Rezultă că

$$\frac{MD}{MG} = \frac{ME}{MF}$$

Conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă că $FG \parallel DE$. Deci $FG \parallel BC$. Deci : $\frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC}$ Dar cum $AF = AG$, rezultă $AB = AC$, deci triunghiul ABC este isoscel.

b) AM este bisectoare în triunghiul isoscel AFG , deci $AM \perp FG$. Dar $FG \parallel BC$; rezultă că $AM \perp BC$.

Observație : dreapta AM este axă de simetrie a figurii.

CAZUL II

Punctele D și E sînt situate astfel încît E este între B și D . Demonstrația se face în mod analog.

VII.G.92. a) Fie D intersecția dreptelor OM și LR . (Vezi fig. VII.G.92.) În triunghiul NMT , MD este bisectoare și înălțime, deci NMT este triunghi isoscel. Rezultă :

$$MN = MT ; \quad (1)$$

$$\sphericalangle BMN \equiv \sphericalangle AMT, \text{ avînd complemente egale ;} \quad (2)$$

$$BM = AM, \text{ conform ipotezei.} \quad (3)$$

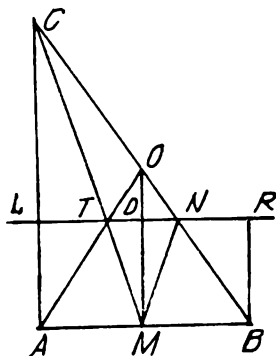


Fig. VII.G.92.

Din (1), (2) și (3) rezultă că $\triangle BMN \equiv \triangle AMT$ (L.U.L.). Rezultă că $BN = AT$ și cum $AB \parallel NT$, rezultă că $ABNT$ este trapez isoscel.

b) În triunghiul dreptunghic ABC , dreapta AO este mediana corespunzătoare ipotenuzei, deci :

$$\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OBA. \quad (4)$$

Dar, în trapezul isoscel $ATNB$,

$$\sphericalangle TAB \equiv \sphericalangle NBA. \quad (5)$$

Din (4) și (5), cum O, N, B sînt coliniare, rezultă că $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle TAB$, deci dreptele AT și AO coincid. Rezultă că A, T, O sînt coliniare.

c) Deoarece $LN \parallel AB$, $\triangle ABC \sim \triangle LNC$. (6)

Cum MC este mediană în triunghiul ABC , din (6) rezultă că :

$$TL = NT. \quad (7)$$

$\triangle BRN \equiv \triangle ALT$ (I.U.). Rezultă că :

$$NR = TL. \quad (8)$$

Din (7) și (8) obținem $NR = TL = NT$.

Observație : toate proprietățile cerute rezultă ușor remarcând că dreapta MO este axă de simetrie a figurii.

VII.G.93. Fie L, M, N, P intersecțiile dreptelor OE, OF, OG, OH cu laturile AB, BC, CD, DA (Vezi fig. VII.G.93.).

a) Deoarece în cercul de centru O , $OE \perp AB, OF \perp BC, OG \perp CD, OH \perp AD$, punctele L, M, N, P sînt mijloacele laturilor patrulaterului $ABCD$. Deci :

Patrulaterul $LMNP$ este paralelogram. (1)

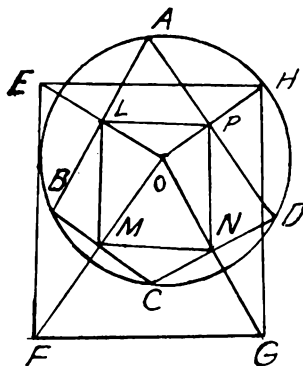


Fig. VII.G.93.

Deoarece $OL = EL$ și $OM = MF$, LM este linie mijlocie în triunghiul EOF . Rezultă că

$$LM \parallel EF. \quad (2)$$

Analog, rezultă că :

$$MN \parallel FG, NP \parallel GH, LP \parallel EH. \quad (3)$$

Din (1), (2) și (3), conform tranzitivității relației de paralelism, rezultă că $EFGH$ este paralelogram.

b) Dacă $BD \perp AC$, atunci patrulaterul $LMNP$ este paralelogram cu un unghi drept, deci dreptunghi. Deci conform raționamentului de la a), $EFGH$ este dreptunghi.

Dacă $BD \perp AC$ și $BD \equiv AC$, atunci paralelogramul $LMNP$ este pătrat, deci $EFGH$ este pătrat și reciproc.

Generalizare Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de centru O ; L, M, N, P proiecțiile lui O pe laturile AB, BC, CD , respectiv DA . Pe semidreptele OL, OM, ON, OP se iau punctele E, F, G , respectiv H astfel încît : $\frac{OL}{LE} = \frac{OM}{MF} = \frac{ON}{NG} = \frac{OP}{PH}$ Atunci $EFGH$ este paralelogram.

VII.G.94. a) Fie M intersecția dreptelor BC și PS , iar R intersecția dreptelor CD și SH . În triunghiul PHS , dreptele SC și PC sînt înălțimi, deci C este ortocentrul triunghiului PSH . Rezultă că dreapta HC este înălțime, deci $BC \perp PS$.

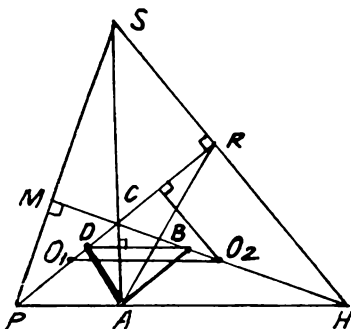


Fig. VII.G.94.

b) Punctele O_1 și O_2 sînt respectiv mijloacele segmentelor CP și CH . Deci O_1O_2 este linie mijlocie în triunghiul CPH . Rezultă că $O_1O_2 \parallel PH$.

Dar $PH \parallel BD$. Conform tranzitivității relației de paralelism a dreptelor, rezultă că $O_1O_2 \parallel BD$. Aplicînd teorema fundamentală a asemănării rezultă că $\triangle CO_1O_2 \sim \triangle CDB$, deci cele două triunghiuri au laturile respectiv proporționale.

VII.G.95.

a) Fie M cel de-al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor BCI și ACJ . (Vezi fig. VII.G.95.) Rezultă că patrulaterele $AMCJ$ și $BMCI$ sînt inscriptibile și, ținînd cont de triunghiurile asemenea date în enunț, rezultă că :

$$\sphericalangle AMJ \equiv \sphericalangle ACJ \equiv \sphericalangle BCI \equiv \sphericalangle BMI \equiv \sphericalangle C' \equiv \sphericalangle AKB.$$

Deci patrulaterul $AKBM$ este inscriptibil și deci M este situat și pe cercul circumscris triunghiului ABK .

b) Se demonstrează imediat folosind cele trei patrulatere inscriptibile găsite mai sus.

c) AM, BM și CM sînt coarde comune perechilor de cîte două din cele trei cercuri. Rezultă că $UV \perp CM, VW \perp AM, UW \perp BM$. Notăm că N, P, Q intersecțiile liniilor centrelor cu coardele comune ($N \in AM,$

$P \in BM, Q \in CM$). Rezultă că patrulateralele $WPMN, VQMN, UPMQ$ sînt inscriptibile. Deci $m(\widehat{W}) = 180^\circ - m(\widehat{PMN}) = m(\widehat{AKB}) = m(\widehat{C'})$.

Analog, arătăm că $\sphericalangle U \equiv \sphericalangle A'$ și $\sphericalangle V \equiv \sphericalangle B'$. Rezultă că $\triangle A'B'C' \sim \triangle UVW$.

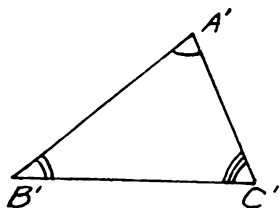


Fig. VII.G.95.a.

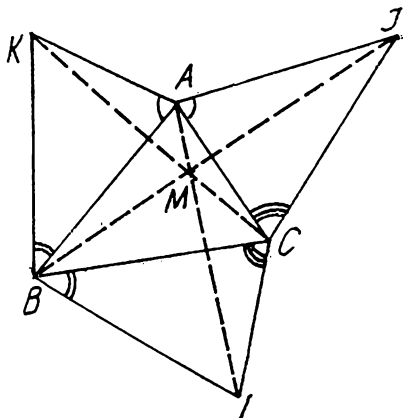


Fig. VII.G.95.b.

d) Ținînd cont de triunghiurile asemenea date în enunț și de patrulateralele inscriptibile $AMCJ$ și $BMCI$, rezultă că :

$$\sphericalangle CMJ \equiv \sphericalangle CAJ \equiv \sphericalangle A' \quad (1)$$

$$\sphericalangle AMJ \equiv \sphericalangle ACJ \equiv \sphericalangle C' \quad (2)$$

$$\sphericalangle CMI \equiv \sphericalangle CBI \equiv \sphericalangle B' \quad (3)$$

Din (1), (2) și (3) rezultă că $m(\widehat{AMI}) = m(\widehat{A'}) + m(\widehat{B'}) + m(\widehat{C'}) = 180^\circ$.

Deci punctele A, M, I sînt coliniare. Analog, arătăm că punctele B, M, J sînt coliniare și C, M, K sînt coliniare. Rezultă că cele trei drepte (diferite) se intersectează în M .

e) $\triangle ACJ \sim \triangle A'C'B'$. Rezultă că :

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \quad (4)$$

$\triangle AKB \sim \triangle A'C'B'$ Rezultă că

$$\frac{AB}{AK} = \frac{A'B'}{A'C'} \quad (5)$$

Din (4) și (5) rezultă că :

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{AB}{AK} \quad (6)$$

Dar

$$\sphericalangle BAJ \equiv \sphericalangle KAC. \quad (7)$$

Din (6) și (7) rezultă că $\triangle AJB \sim \triangle ACK$. Deci

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{AB}{AK} = \frac{BJ}{CK} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Rezultă că $BJ \cdot A'C' = CK \cdot A'B'$

Analog se demonstrează că : $CK \cdot A'B' = AI \cdot B'C'$.

Deci $\frac{AI}{1} = \frac{BJ}{1} = \frac{CK}{1}$, adică segmentele AI , BJ , CK sînt in-

$$\frac{1}{B'C'} \quad \frac{1}{A'C'} \quad \frac{1}{A'B'}$$

vers proporționale cu laturile $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ ale triunghiului $A'B'C'$.

VII.G.96. Fie P intersecția dreptelor MN și BC . (Vezi fig. VII.G.96.)
Întrucît $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$, rezultă $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$, deci $AM = \frac{1}{4} \cdot AB$, $AM = \frac{1}{4} \cdot 24 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$. Analog, $\frac{DN}{NC} = \frac{2}{3}$, rezultă $\frac{DN}{CD} = \frac{2}{5}$, deci $DN = \frac{2}{5} \cdot CD$, $DN = \frac{2}{5} \cdot 15 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$. Deci $AM = DN$ și $AM \parallel DN$. Rezultă că patrulaterul $AMND$ este paralelogram.

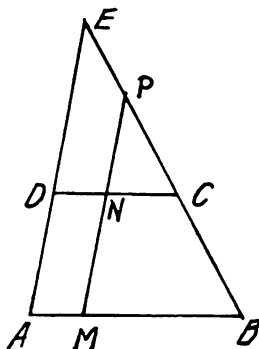


Fig. VII.G.96.

Deci $MN \parallel AE$. (1)

Deoarece $\triangle PNC \sim \triangle PMB$, rezultă : $\frac{PC}{BP} = \frac{NC}{MB} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ Deci

$$BP = 2 \cdot PC. \quad (2)$$

Din (1) rezultă că putem aplica teorema lui Thales în triunghiul ECD . Avem $\frac{EP}{PC} = \frac{DN}{NC} = \frac{2}{3}$, de unde obținem $\frac{EP}{2 \cdot PC} = \frac{2}{2 \cdot 3}$, adică folosind (2), $\frac{EP}{BP} = \frac{1}{3}$.

VII.G.97. a) Notăm $EG = a$. Deoarece GH este linie mijlocie în triunghiul EFD , rezultă $GH \parallel FD$. Aplicând teorema lui Thales în $\triangle ACD$, rezultă $\frac{AI}{IC} = \frac{AG}{GD} = \frac{3a}{a}$. Deci $AI = 3 \cdot IC$.

$$\text{b) Avem } GH = \frac{1}{2} \cdot FD = \frac{1}{4} \cdot BD = \frac{1}{4} \cdot CD. \quad (1)$$

Apoi $\triangle AGI \sim \triangle ADC$. Rezultă că $\frac{GI}{CD} = \frac{AG}{AD}$, adică $\frac{GI}{CD} = \frac{3a}{4a}$, deci $HI = \frac{3}{4} \cdot CD$. (2)

Din (1) și (2) rezultă $HI = 3GH$.

c) BE este mediană în triunghiul ABD . Prelungim mediana BE cu segmentul EM , $EM = BE$. Patrulaterul $ABDM$ este paralelogram. Construim $EL \parallel BC$, $L \in AC$. Rezultă că EL este linie mijlocie în triunghiul ADC . (3)

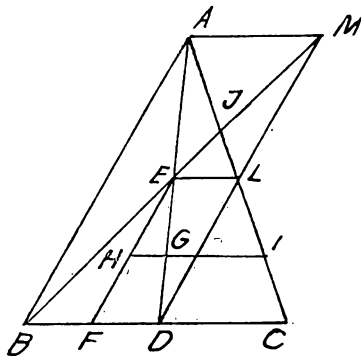


Fig. VII.G.97.

Deoarece $EL \parallel BC$ și $BC \parallel AM$, rezultă $EL \parallel AM$. Dar $AE = ED$, deci dreapta EL conține linia mijlocie în triunghiul ADM . (4)

Din (3) și (4) rezultă că AC și MD se intersectează în L . Deoarece $AM \parallel EL$, din teorema fundamentală a asemănării rezultă că $\triangle EJL \sim \triangle MJA$. Deci $\frac{EL}{AM} = \frac{EJ}{MJ}$. Dar din (4) avem $\frac{EL}{AM} = \frac{1}{2}$. Deci $\frac{EJ}{MJ} = \frac{1}{2}$.

Rezultă că $MJ = 2 \cdot EJ$, deci $EM = 3 \cdot EJ$. Cum $EM = BE$, rezultă că $BE = 3 \cdot EJ$.

VII.G.98. a) Avem $\triangle AGD \sim \triangle BGE$ (U.U.). Rezultă că $\frac{DG}{EG} = \frac{AD}{BE} = \frac{1}{2}$ și cum $AD = BC$, avem $BE = 2 \cdot BC$. Din ipoteză, $FC = 2 \cdot EF$. Scăzând cele două relații, obținem $EF = BC$, apoi $FB = AD$ și cum $FB \parallel AD$, rezultă că $AFBD$ este paralelogram. (1)

Pe de altă parte, deoarece $AB = AD$ și $m(\hat{A}) = 60^\circ$, triunghiul ABD este echilateral. Deci $BF = AD = BD$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $AFBD$ este romb. (Vezi fig. VII.G.98.a.)

b) Avem $\triangle EFH \cong \triangle DAH$ (U.L.U.). Rezultă că $EH = HD$, deci H este mijlocul lui DE .

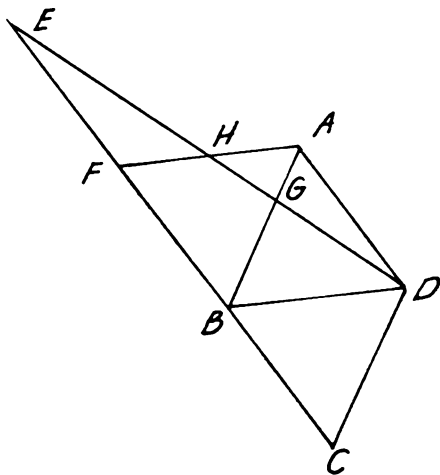


Fig. VII.G.98.a.

c) Din b) rezultă $EH = HD$, $FH = AH$. Patrulaterul ale cărui diagonale se intersectează în mijlocul fiecăreia este paralelogram. Deci $ADFE$ este paralelogram.

Sau: din a) rezultă $EF = AD$ și $EF \parallel AD$, deci $ADFE$ e paralelogram.

d) Din demonstrațiile anterioare rezultă că $AF = CD$. Cum $AD \parallel FC$, patrulaterul $ADCF$ este trapez isoscel, deci inscriptibil.

e) Notăm cu F' , A' , D' respectiv proiecțiile lui F , A , D pe dreapta d . (Vezi fig. VII.G.98.b.)

Fie M mijlocul segmentului AD și N proiecția lui M pe dreapta d .

Ducem prin G o perpendiculară pe d ; fie aceasta G_1G_2 , $G_1 \in AD$, $G_2 \in FC$. Conform teoremei lui Thales avem $\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{AG}{BG} = \frac{1}{2}$. Rezultă

$\frac{AG_1}{BG_2} = \frac{1}{2}$ și cum $\frac{AM}{FB} = \frac{1}{2}$, obținem $\frac{G_1M}{FG_2} = \frac{1}{2}$. Rezultă că $\triangle MG_1G \sim$

$\sim \triangle FG_2G$ (L.L.L.), deci punctele M, G, F sînt coliniare. Rezultă că $\triangle FF'G \sim \triangle MNG$, deci $\frac{MN}{FF'} = \frac{1}{2}$, deci $FF' = 2 \cdot MN$. (3)

Cum în trapezul $AA'D'D$, MN este linie mijlocie, avem

$$MN = \frac{AA' + DD'}{2}. \quad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că $FF' = AA' + DD'$.

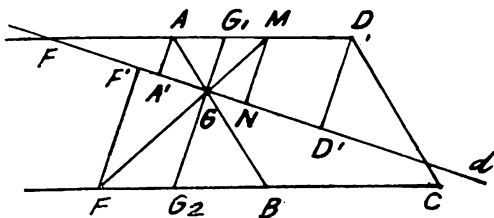


Fig. VII.G.98.b.

VII.G.99. a) Construim din M paralela la BN care intersectează AC în N' . (Vezi fig. VII.G.99.) Rezultă că $\triangle MCN' \sim \triangle BCN$, deci :

$$\frac{N'C}{NC} = \frac{MC}{BC} = \frac{1}{3}, \text{ deci : } N'C = \frac{1}{3} \cdot NC. \quad (1)$$

Avem $PN \parallel MN'$. Aplicînd teorema lui Thales, obținem :

$$\frac{AP}{PM} = \frac{AN}{NN'} = \frac{\frac{1}{4} \cdot AC}{NN'}.$$

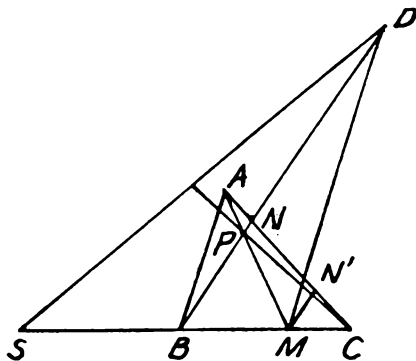


Fig. VII.G.99.

Folosind (1) calculăm NN'

$$NN' = AC - AN - N'C = AC - \frac{AC}{4} - \frac{NC}{3} = \frac{3AC}{4} - \frac{AC}{4} = \frac{AC}{2}.$$

Deci :

$$\frac{AP}{PM} = \frac{\frac{1}{4}AC}{\frac{1}{2}AC} = \frac{1}{2}$$

b) Deoarece $SB = BC$, BD este mediană în triunghiul SCD . (2)
Deoarece $AB \parallel MD$, rezultă că $\triangle APB \sim \triangle MPD$, deci :

$$\frac{BP}{PD} = \frac{AP}{PM} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

Din (2) și (3) rezultă că P este centrul de greutate al triunghiului SCD , deci CP este mediană în triunghiul SCD .

CAPITOLUL IV. RELAȚII METRICE

VII.G.100. Aplicând teorema înălțimii în triunghiul dreptunghic ABC , avem $BD \cdot CD = AD^2$. Dar în dreptunghiul $AEDF$, avem: $AD^2 = FD^2 + DE^2$.

Aplicând teorema înălțimii în triunghiurile dreptunghice ADC și ADB , obținem: $FD^2 + DE^2 = FC \cdot FA + EB \cdot EA$. Deci $DB \cdot DC = FC \cdot FA + EB \cdot EA$.

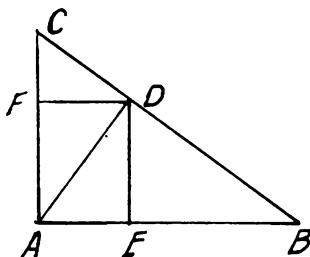


Fig. VII.G.100.

VII.G.101. Notăm cu x , respectiv y lungimile segmentelor AM , MB . Fie H intersecția dreptelor CD și AP . (Vezi fig. VII.G.101.) Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice NMB , PCH , obținem :

$$NB^2 = x^2 + y^2 ;$$

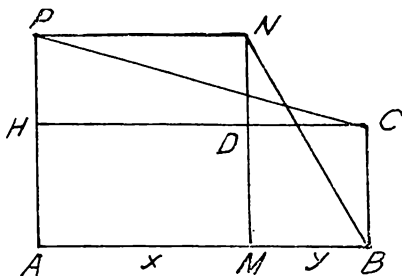


Fig. VII.G.101.

$$PC^2 = (x - y)^2 + (x + y)^2 = 2x^2 + 2y^2.$$

Rezultă $\frac{PC^2}{NB^2} = 2$. Deci $\frac{PC}{NB} = \sqrt{2}$.

VII.G.102. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile ACE, BCE, obținem succesiv :

$$\begin{aligned} AC^2 &= CE^2 + AE^2 = BC^2 - BE^2 + AE^2 = BC^2 - (AE - AB)^2 + AE^2 = \\ &= BC^2 - AE^2 + 2AE \cdot AB - AB^2 + AE^2 = BC^2 + 2AE \cdot AB - AB^2 \\ \text{Deci } AC^2 &= BC^2 + 2AE \cdot AB - AB^2. \end{aligned} \quad (1)$$

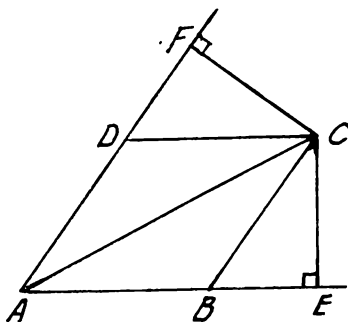


Fig. VII.G.102.

Analog, cu teorema lui Pitagora în triunghiurile ACF, DCF, obținem

$$\begin{aligned} AC^2 &= AF^2 + CF^2 = AF^2 + CD^2 - DF^2 = AF^2 + CD^2 - (AF - AD)^2 = \\ &= AF^2 + AB^2 - AF^2 + 2AF \cdot AD - BC^2 = AB^2 + 2AF \cdot AD - BC^2. \\ \text{Deci : } AC^2 &= AB^2 + 2AF \cdot AD - BC^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Adunând relațiile (1) și (2) obținem : $2 \cdot AC^2 = 2AE \cdot AB + 2AF \cdot BC$,
de unde $AE \cdot AB + AF \cdot AD = AC^2$.

VII.G.103. Notăm cu G centrul de greutate al triunghiului ABC . (Vezi fig. VII.G.103.) Avem $B'G = \frac{1}{3} \cdot BB' = \frac{1}{3} \cdot 4,5 = 1,5$, $C'G = \frac{1}{3} \cdot CC' = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$, $BG = \frac{2}{3} \cdot BB' = 3$, $CG = \frac{2}{3} \cdot CC' = 4$.

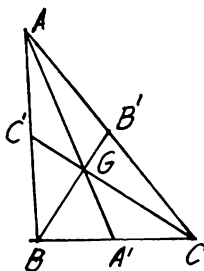


Fig. VII.G.103.

Se observă că triunghiul BGC este dreptunghic avind lungimile laturilor de 3, 4 și 5. Aplicind teorema lui Pitagora în triunghiul $B'GC$, $m(\widehat{G}) = 90^\circ$, obținem : $B'C^2 = 4^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{73}{4}$, $B'C = \frac{\sqrt{73}}{2}$ iar $AC = 2B'C = \sqrt{73}$.

În triunghiul $C'GB$, $m(\widehat{G}) = 90^\circ$, obținem : $C'B^2 = 2^2 + 3^2 = 13$, $C'B = \sqrt{13}$, deci $AB = 2C'B = 2\sqrt{13}$. Am obținut : $AB = 2\sqrt{13}$, $BC = 5$, $AC = \sqrt{73}$.

VII.G.104. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. (Vezi fig. VII.G.104.)

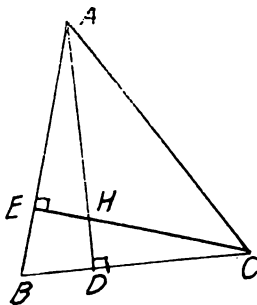


Fig. VII.G.104.

a) Deoarece $m(\widehat{AEC}) = 90^\circ = m(\widehat{ADC})$, patrulaterul $AEDC$ este inscriptibil. Relația $AB \cdot BE = BC \cdot BD$ rezultă din puterea punctului B față de cercul circumscris lui $AEDC$.

b) Deoarece patrulaterul $AEDC$ este inscriptibil, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle HCB$. Rezultă că $\triangle ABD \sim \triangle CHD$ (U.U.), deci $\frac{DA}{CD} = \frac{BD}{HD}$, de unde obținem : $DA \cdot HD = BD \cdot CD$.

Dacă $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, atunci $H = A$ și relația devine $AD^2 = BD \cdot CD$, adică teorema înălțimii într-un triunghi dreptunghic.

Dacă triunghiul ABC este obtuzunghic, se demonstrează analog a) și b).

VII.G.105. Fie $ABCD$ trapezul înscris în cercul de centru O , $AB = 2r$; fie E, F proiecțiile lui C , respectiv D , pe dreapta AB . (Vezi fig. VII.G.105.) $ABCD$ fiind înscris în cerc, este trapez isoscel, deci $AF = BE$. Avem : $AF = \frac{AB - CD}{2} = \frac{75 - 51}{2} = 12$. $\sphericalangle BDA$ este înscris în semicerc, deci

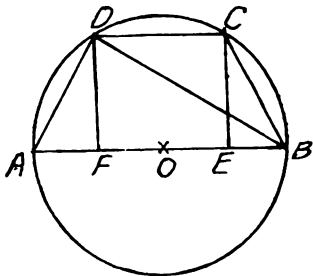


Fig. VII.G.105.

$m(\widehat{BDA}) = 90^\circ$. Conform teoremei înălțimii, $DF = \sqrt{AF \cdot BF} = \sqrt{12 \cdot 63} = 6\sqrt{21}$. În triunghiul dreptunghic ADF : $AD = \sqrt{AF^2 + DF^2} = \sqrt{12^2 + 36 \cdot 21} = \sqrt{4 \cdot 9(4 + 21)} = 6\sqrt{25} = 30$; $p = 2AD + CD + AB = 2 \cdot 30 + 51 + 75 = 186$.

În triunghiul dreptunghic ABD : $DB = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{75^2 - 30^2} = \sqrt{(75 - 30)(75 + 30)} = \sqrt{105 \cdot 45} = \sqrt{5 \cdot 21 \cdot 9 \cdot 5} = 15\sqrt{21}$. $AC = DB = 15\sqrt{21}$.

VII.G.106. a) Pentru diferite poziții ale lui M pe diagonala BD , obținem diferite figuri ce corespund ipotezei. Analizăm cazul : $AB > AD$, C între B și F , E între A și B . (Vezi fig. VII.G.106.) Avem : $\triangle FMB \sim \triangle BDA$ (U.U.). Rezultă că : $\frac{BM}{DA} = \frac{MF}{AB}$. Dar $DA = BC$. Înlocuind, obținem :

$$\frac{BM}{BC} = \frac{MF}{AB}, \text{ adică } BM \cdot AB = BC \cdot MF. \quad (1)$$

În triunghiul dreptunghic EBF , conform teoremei înălțimii, avem :

$$MB^2 = ME \cdot MF. \quad (2)$$

Ridicând la pătrat relația (1) obținem $MB^2 \cdot AB^2 = BC^2 \cdot MF^2$.

Înlocuind (2) rezultă : $AB^2 \cdot ME \cdot MF = BC^2 \cdot MF^2$, de unde :
 $AB^2 \cdot ME = BC^2 \cdot MF$.

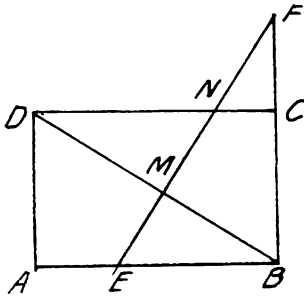


Fig. VII.G.106.

b) Avem :

$$\begin{aligned} \frac{(AB \cdot ME + BC \cdot MF)^2}{MB^2} &= \frac{(AB \cdot ME + BC \cdot MF)^2}{MF \cdot ME} = \\ &= \frac{AB^2 \cdot ME}{MF} + \frac{BC^2 \cdot MF}{ME} + \frac{2 \cdot AB \cdot AC \cdot MB^2}{MB^2} = \frac{BC^2 \cdot MF}{MF} + \frac{AB^2 \cdot ME}{ME} + \\ &+ 2AB \cdot BC = BC^2 + AB^2 + 2AB \cdot BC = (AB + BC)^2. \end{aligned}$$

Rezultă că : $\frac{AB \cdot ME + BC \cdot MF}{MB} = AB + BC = \text{constant}$.

Dacă $AB < AD$, se demonstrează analog a) și b).

VII.G.107. a) Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice ADM , BMN , CDN obținem

$$DM = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{2}, \quad (1)$$

$$MN = \sqrt{MB^2 + BN^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad (2)$$

$$DN = \sqrt{CD^2 + CN^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2}. \quad (3)$$

Deoarece $0 < b < a$, din (1), (2) și (3) rezultă că :

$$MN < DM < DN. \quad (4)$$

Deci numai $\sphericalangle M$ poate fi unghi drept în triunghiul NMD . Triunghiul NMD este dreptunghic în M dacă și numai dacă : $DN^2 = DM^2 + MN^2$.

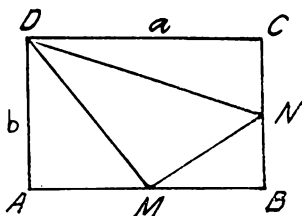


Fig. VII.G.107.

Înlocuind cu valorile obținute în (1), (2) și (3) rezultă

$$\frac{4a^2 + b^2}{4} = \frac{4b^2 + a^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{4}$$

ceea ce este echivalent cu $2a^2 = 4b^2$, deci $a^2 = 2b^2$, deci $a = b\sqrt{2}$.

Rezultă că NMD este dreptunghic dacă și numai dacă $a = b\sqrt{2}$.

b) Rezultă direct din (4); sau

CAZUL I

Presupunem că triunghiul NMD este isoscel, avînd $DM = MN$. Din:

(1) și (2) rezultă : $\frac{4b^2 + a^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4}$ deci $b = 0$, ceea ce este în contradicție cu ipoteza $b > 0$.

CAZUL II

Presupunem că triunghiul NMD este isoscel, avînd $DM = DN$. Din

(1) și (3) rezultă $\frac{4b^2 + a^2}{4} = \frac{4a^2 + b^2}{4}$ deci $3b^2 = 3a^2$, adică $(b - a)(b + a) = 0$. Rezultă că $b = a$, ceea ce este în contradicție cu ipoteza $b < a$. ($b + a > 0$).

CAZUL III

Presupunem că triunghiul NMD este isoscel, avînd $MN = DN$. Se ratează analog cazului I, rezultînd $a = 0$.

Deoarece nici una din cele trei situații nu este posibilă, triunghiul NMD nu poate fi isoscel.

VII.G.108. Deoarece triunghiurile sînt asemenea, avem :

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}. \quad (1)$$

Deoarece triunghiurile sînt dreptunghice de ipotenuze a, a' , avem :

$$b^2 + c^2 = a^2 \text{ și } b'^2 + c'^2 = a'^2. \quad (2)$$

Înmulțind relațiile (2), obținem :

$$b^2 \cdot b'^2 + b^2 \cdot c'^2 + b'^2 \cdot c^2 + c^2 \cdot c'^2 = a^2 \cdot a'^2. \quad (3)$$

$$\text{Din ipoteză, } aa' = bc' + b'c. \quad (4)$$

$$\text{Din (1), } bc' = b'c. \quad (5)$$

Înlocuind (4) și (5) în (3), obținem succesiv :

$$b^2b'^2 + c^2c'^2 + 2b^2c'^2 = 4b^2c'^2, (bb' - cc')^2 = 0, \text{ de unde } bb' = cc'. \quad (6)$$

Înmulțind în ambii membri ai relației (6) cu c' , obținem $b'bc' = cc'^2$, adică $b'^2c - cc'^2 = 0$ și înmulțind relația cu $\frac{1}{c}$, rezultă

$$b'^2 = c'^2, \text{ deci } b' = c'. (b' > 0, c' > 0). \quad (7)$$

Înmulțind relația (6) cu c' , obținem $bb'c = c^2c'$, adică $b^2c' = c^2c'$ și înmulțind relația cu $\frac{1}{c'}$, obținem

$$b^2 = c^2, \text{ deci } b = c. \text{ (Din (1) și (7) rezultă direct } b = c). \quad (8)$$

Din (7) și (8) rezultă că triunghiurile sînt isoscele.

VII.G.109. Notăm lungimile segmentelor QC, PB cu x , respectiv y .

Avem : $\triangle ABP \sim \triangle PCQ$ (U.U.). Rezultă că :

$$\frac{AP}{QP} = \frac{a}{a-x} = \frac{x}{y}. \quad (1)$$

Ridicăm la pătrat termenii proporției $\frac{AP}{QP} = \frac{x}{y}$, și obținem apoi proporția derivată :

$$\frac{AP^2 + QP^2}{QP^2} = \frac{x^2 + y^2}{y^2}.$$

Conform teoremei lui Pitagora, în triunghiul APQ , avem $AP^2 + QP^2 = AQ^2$. Deci $\frac{AQ^2}{QP^2} = \frac{x^2 + y^2}{y^2}$.

Dar $\frac{AQ}{QP} = 2$ deoarece în triunghiul dreptunghic APQ , $m(\widehat{QAP}) = 30^\circ$.

Deci : $\frac{AQ^2}{QP^2} = 4 = \frac{x^2 + y^2}{y^2}$, de unde rezultă $4 = \frac{x^2}{y^2} + 1$, adică $\frac{x^2}{y^2} = 3$,

deci $\frac{x}{y} = \sqrt{3}$,

Din (1) obținem :

$$\frac{a}{a-x} = \sqrt{3}, a = \sqrt{3}(a-x), x = \frac{a\sqrt{3}-a}{\sqrt{3}} = \frac{a(\sqrt{3}-1)\sqrt{3}}{3}.$$

În triunghiul dreptunghic ABP , teorema lui Pitagora conduce la

$$AP = \sqrt{a^2 + \frac{a^2(\sqrt{3}-1)^2}{3}} = \sqrt{\frac{7a^2 - 2\sqrt{3}a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{(7-2\sqrt{3}) \cdot 3}}{3} = \frac{a\sqrt{21-6\sqrt{3}}}{3}.$$

$$QP = \frac{AP}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{7-2\sqrt{3}}}{3}, \quad AQ = 2QP = \frac{2a\sqrt{7-2\sqrt{3}}}{3}.$$

(Observăm că AP , QP , AQ verifică teorema lui Pitagora în triunghiul APQ).

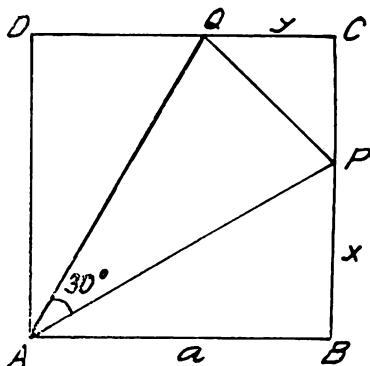


Fig. VII.G.109.

VII.G.110. a) Aplicăm teorema medianei (Vezi Indicații, Pb.VII.G.110.), în triunghiul ABC pentru BB' , respectiv $C'C$. Avem :

$$\begin{cases} 4m_b^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2 \\ 4m_c^2 = 2(b^2 + a^2) - c^2 \end{cases}$$

Înlocuind m_b , m_c , obținem :

$$\begin{cases} 324 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \\ 576 = 2b^2 + 2a^2 - c^2 \end{cases}$$

Însumând cele două relații, rezultă : $900 = 4a^2 + b^2 + c^2$. Dar $a^2 = 100$. Deci $9a^2 = 4a^2 + b^2 + c^2$, de unde rezultă : $5a^2 = b^2 + c^2$.

b) Patrulaterul $ABCM$ și $ACBN$ sînt paralelograme (pentru că diagonalele lor se taie în părți egale), deci $AM \parallel BC$, $AN \parallel BC$. (1)

$$AM = BC = AN. \quad (2)$$

Din (1) rezultă că N, A, M sînt coliniare și $MN \perp AD$. (3)

Din (2) și (3) rezultă că dreapta AD este mediatoarea segmentului MN . Deci $DM = DN$, adică triunghiul DMN este isoscel. (Vezi fig. VII.G.110.)

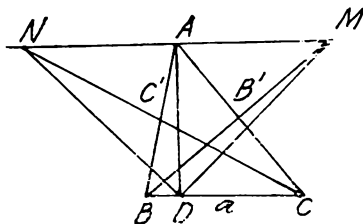


Fig. VII.G.110.

c) Folosind teorema mediane, obținem următoarele relații echivalente :

$$\begin{aligned} m_a^2 &= m_b^2 + m_c^2 \Leftrightarrow 2(b^2 + c^2) - a^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - \\ &- c^2 \Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 = 5a^2 - b^2 - c^2. \end{aligned}$$

Deci m_a, m_b, m_c pot fi lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

VII.G.111. a) Arătăm mai întâi că punctele A', C, D' sînt coliniare. (Vezi fig. VII.G.111.) Dreapta AC este axă de simetrie a figurii $ADCD'$. Rezultă $m(\widehat{ACD}') = m(\widehat{ACD}) = 60^\circ$. Dreapta CD este axă de simetrie a figurii $AA'C$. Rezultă $m(\widehat{A'CD}) = m(\widehat{ACD}) = 60^\circ$. Deci $m(\widehat{D'CA'}) = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$. Adică punctele A', C, D' sînt coliniare. (1)

Deoarece dreapta AC este axă de simetrie, rezultă că $\sphericalangle AD'C \equiv \sphericalangle ADC$. Dar $m(\widehat{ADC}) = 90^\circ$, deci $m(\widehat{AD'C}) = 90^\circ$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că triunghiul $AA'D'$ este dreptunghic.

b) Fie a lungimea laturii triunghiului echilateral ABC . Arătăm că triunghiul ABD' este dreptunghic.

$$\text{Avem : } m(\widehat{BAD'}) = m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{CAD'}); \quad (3)$$

$$\sphericalangle CAD' \equiv \sphericalangle CAD \text{ (fiind simetrice față de dreapta } AC); \quad (4)$$

$$m(\widehat{CAD}) = 30^\circ. \quad (5)$$

Din (3), (4) și (5) rezultă că $m(\widehat{BAD'}) = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$. În triunghiul dreptunghic BAD' , folosind teorema lui Pitagora, obținem $BD'^2 = AB^2 + AD'^2$.

Avem $AB = a, AD' = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Înlocuind, obținem :

$$BD' = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \sqrt{\frac{7a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \quad \text{Deci } BD' = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Fie P , respectiv R intersecția dreptei AC cu BD' și DD' . Avem $\triangle CBF \equiv \triangle BCP$ (U.L.U.). Rezultă că $CF = BP$. Deci în loc să calculăm CF , vom calcula BP . Construim $DL \parallel AC$, $L \in BD'$. În triunghiul BCP , DL este linie mijlocie. Rezultă că $BL = LP$. În triunghiul $D'DL$, PR este linie mijlocie. Rezultă că $LP = PD'$. Rezultă $BL = LP = PD'$. Deci $PB = \frac{3}{2} \cdot BD' = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$. Cum $CF = BP$, rezultă $CF = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

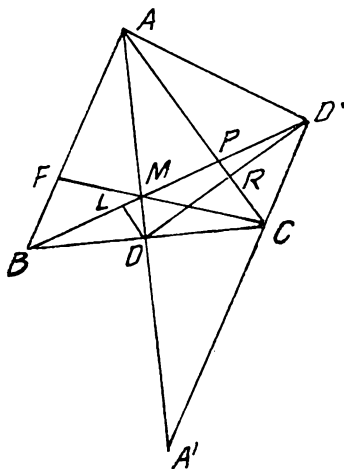


Fig. VII.G.111.

Altfel

Calculăm BP în modul următor $m(\widehat{CAD'}) = 30^\circ$, $m(\widehat{AD'A'}) = 90^\circ$.

Rezultă că $CD' = \frac{1}{2} \cdot AC$. Dar $AC = A'C$. Deci $CD' = \frac{1}{2} \cdot A'C$. (6)

Avem $CP \parallel A'B$. Deci $\triangle CPD' \sim \triangle A'BD'$. Rezultă $\frac{BP}{PD'} = \frac{A'C}{CD'}$. (7)

Din (6) și (7) obținem $\frac{BP}{PD'} = 2$. Deci $\frac{BP}{PD' + BP} = \frac{2}{3}$, $\frac{BP}{BD'} = \frac{2}{3}$.

Rezultă $BP = \frac{2}{3} \cdot BD'$, deci $BP = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

VII.G.112. METODA 1. (Vezi fig. VII.G.112 a.)

Notăm $AN = x$, $BP = y$. Cum dreptele AN , BP , NM sînt tangente la cerc, avem $MN = AN = x$, $MP = BP = y$. Patrulaterul $ABPN$ este trapez dreptunghic.

Fie Q proiecția lui N pe dreapta BP . Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul NQP , obținem relația $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4r^2$ care este echivalentă cu $4xy = 4r^2$, deci $xy = r^2$, adică $AN \cdot BP = r^2$. (Se observă că în raționamentul făcut, nu a intervenit poziția punctului M pe cerc).

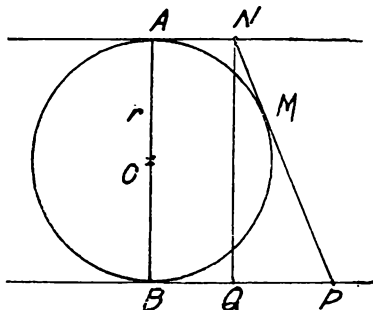


Fig. VII.G.112.a.

METODA 2. (Vezi fig. VII.G.112.b.)

Avem $AM \perp ON$, $BM \perp OP$.

(1)

Dar $m(\widehat{AMB}) = 90^\circ$.

(2)

Din (1) și (2) rezultă că $m(\widehat{NOP}) = 90^\circ$.

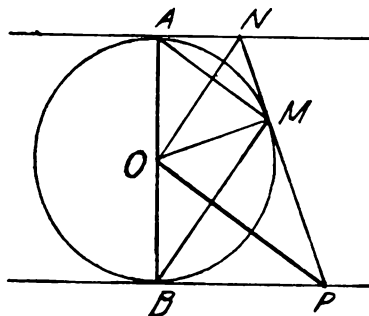


Fig. VII.G.112.b.

În triunghiul dreptunghic NOP , OM este înălțime. Rezultă că :

$$OM^2 = MN \cdot MP.$$

(3)

Dar $MN = AN$, $MP = BP$, $OM = r$. Înlocuind în (3), obținem $r^2 = AN \cdot BP$.

METODA 3.

În patrulaterul inscriptibil $OANM$, $\sphericalangle ANO \equiv \sphericalangle AMO$. În patrulaterul inscriptibil $OBPM$, $\sphericalangle BPO \equiv \sphericalangle BMO$. Dar $\sphericalangle AMB$ fiind drept, $\sphericalangle AMO$ și $\sphericalangle BMO$ sînt complementare. Cum triunghiul OBP este dreptunghic în B , rezultă că $\sphericalangle BOP \equiv \sphericalangle ANO$, avînd același complement. Deci triunghiurile dreptunghice AON și BOP sînt asemenea. Obținem $\frac{AN}{OB} = \frac{OA}{BP}$, adică $\frac{AN}{r} = \frac{r}{BP}$, deci $r^2 = AN \cdot BP$.

VII.G.113. CAZUL I

Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic, $\hat{A} > \hat{B}$, $\hat{A} > \hat{C}$, atunci E este între B și D . (Vezi fig. VII.G.113.a.)

a) Deoarece $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle BAD$ și $\sphericalangle B$ este comun triunghiurilor ABC și DBA , avem $\triangle ABC \sim \triangle DBA$. (1)

Rezultă că $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$, adică $AB^2 = BD \cdot BC$.

b) Analog, $\triangle ABC \sim \triangle EAC$. (2)

Rezultă că $\frac{AC}{CE} = \frac{BC}{AC}$, adică $AC^2 = CE \cdot BC$.

c) Din (1) și (2) obținem că $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle AEC$ și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle ADB$. Rezultă că $\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle ADB$, deci triunghiul ADE este isoscel.

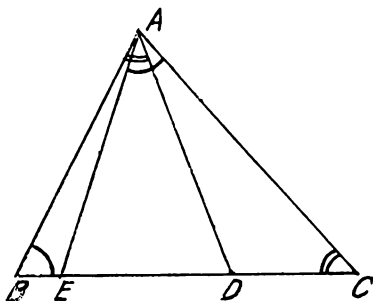


Fig. VII.G.113.a.

d) Din (1) și (2), conform tranzitivității relației de asemănare, obținem că $\triangle ABD \sim \triangle CAE$. Deci $\frac{BD}{AE} = \frac{AD}{CE}$.

Dar triunghiul ADE este isoscel, deci $AE = AD$. Înlocuind în proporția de mai sus, obținem $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CE}$, adică $AD^2 = BD \cdot CE$.

CAZUL II

Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A , atunci AE coincide cu AD și obținem $AB^2 = BD \cdot BC$, $AC^2 = CD \cdot BC$, $AD^2 = BD \cdot CD$, adică teorema catetei, respectiv înălțimii în triunghiul dreptunghic.

CAZUL III.

Dacă triunghiul ABC este obtuzunghic în A , atunci D este între B și E . (Vezi fig. VII.G.113 b.) Demonstrația se face similar cazului I.

a) Avem $\triangle ABD \sim \triangle CBA$. Rezultă $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$, deci $AB^2 = BD \cdot BC$.

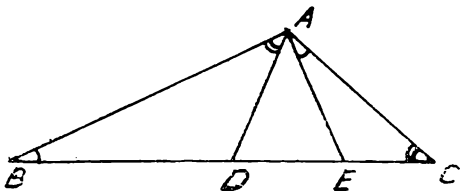


Fig. VII.G.113.b.

b) Avem $\triangle ACE \sim \triangle BCA$. Rezultă $\frac{AC}{BC} = \frac{CE}{AC}$, deci $AC^2 = CE \cdot BC$.

c) Unghiurile ADE și AED sînt unghiuri exterioare triunghiurilor ABD , respectiv AEC . Avem: $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ECA}) + m(\widehat{CAE}) = m(\widehat{AED})$. Rezultă că $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle AED$. Deci triunghiul ADE este isoscel.

d) Avem $\triangle ABD \sim \triangle CAE$, deci $\frac{BD}{AE} = \frac{AD}{EC}$. Dar $AD = AE$ și înlocuind în ultima proporție, obținem $AD^2 = BD \cdot CE$.

Observație: dacă în triunghiul ascuțitunghic ABC , $\widehat{A} < \widehat{B}$ sau $\widehat{A} < \widehat{C}$ se poate rezolva o problemă similară considerînd punctele E și D pe dreapta BC .

VII.G.114. CAZUL I :

Triunghiul ABC ascuțitunghic. (Vezi fig. VII.G.114.a.) Fie AD un diametru al cercului și AE înălțime, E pe dreapta BC . Rezultă că

$$m(\widehat{ABD}) = 90^\circ, m(\widehat{AEC}) = 90^\circ. \quad (1)$$

Patrulaterul $ABDC$ este inscriptibil, deci :

$$\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ACB. \quad (2)$$

Din (1) și (2) obținem că $\triangle ABD \sim \triangle AEC$, deci $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$, adică $AB \cdot AC = AD \cdot AE$. Celelalte relații se obțin printr-un raționament similar.

CAZUL II :

Triunghiul ABC este obtuzunghic. (Vezi fig. 114.b.) Considerăm $m(\widehat{A}) > 90^\circ$. Fie AD un diametru al cercului și BE înălțimea din B , E pe dreapta AC . Avem : $m(\widehat{BEC}) = 90^\circ$, $m(\widehat{ABD}) = 90^\circ$, $\sphericalangle ECB \equiv \sphericalangle ADB$.

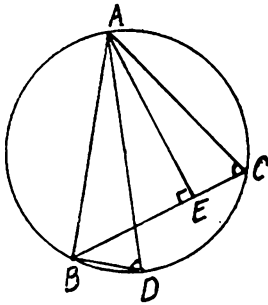


Fig. VII.G.114.a.

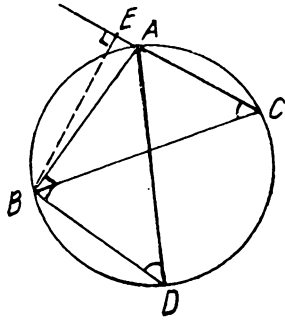


Fig. VII.G.114.b.

Deci $\triangle BEC \sim \triangle ABD$. Rezultă $\frac{BE}{AB} = \frac{BC}{AD}$, deci $AB \cdot BC = AD \cdot BE$.

Celelalte relații rezultă analog cazului I.

CAZUL III

Triunghiul ABC este dreptunghic. Considerăm $m(\widehat{A}) = 90^\circ$. BC este diametru în cerc și fie AE înălțime. Se obține relația $AB \cdot AC = AE \cdot BC$ cu un raționament similar cazului I.

Altfel: $AB^2 = BE \cdot BC$, $AC^2 = CE \cdot BC$ (teorema catetei). Înmulțind cele două relații, se obține $AB^2 \cdot AC^2 = (BE \cdot CE) \cdot BC^2$. Dar $BE \cdot CE = AE^2$ (teorema înălțimii). Rezultă $AB^2 \cdot AC^2 = AE^2 \cdot BC^2$. De unde $AB \cdot AC = AE \cdot BC$.

VII.G.115. a) Fie T pe semidreapta GF , exterior segmentului GF . (Vezi fig. VII.G.115.a.) Avem :

$$m(\widehat{GFD}) = m(\widehat{TFA}) = \frac{m(\widehat{AF})}{2} = m(\widehat{ABF}). \quad (1)$$

Deoarece $\sphericalangle AFB$ este înscris într-un semicerc, $m(\widehat{AFB}) = 90^\circ = m(\widehat{BFD})$. În triunghiul dreptunghic BFD , avem :

$$m(\widehat{FDB}) + m(\widehat{FBD}) = 90^\circ. \quad (2)$$

$$\text{Dar } m(\widehat{ABF}) + m(\widehat{FBD}) = 90^\circ. \quad (3)$$

Din (2) și (3) rezultă că :

$$\sphericalangle FDB \equiv \sphericalangle ABF. \quad (4)$$

Din (1) și (4) rezultă că $\sphericalangle GFD \equiv \sphericalangle FDB \equiv \sphericalangle FDG$. Deci triunghiul GDF este isoscel.

b) (Vezi fig. 115.b.) Deoarece EF și AB sînt diametri, patrulaterul $AFBE$ este dreptunghi. Dreptele BG și GF sînt tangente la cerc în B și F , deci :

$$BG = FG. \quad (5)$$

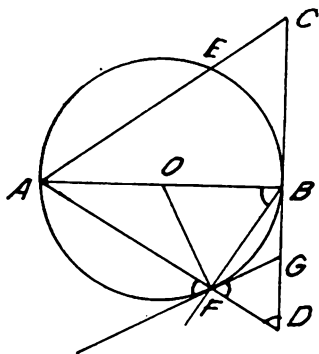


Fig. VII.G.115.a.

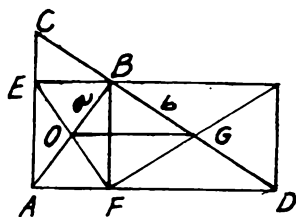


Fig. VII.G.115.b.

Conform a), triunghiul FGD este isoscel ; rezultă

$$FG = GD. \quad (6)$$

Din (5) și (6) rezultă că G este mijlocul segmentului BD . (7)

Cum O este mijlocul lui AB , rezultă că OG este linie mijlocie în triunghiul ABD . Deci :

$$OG = \frac{AD}{2} \quad (8)$$

Aplicând teorema catetei în triunghiul dreptunghic ACD , obținem : $AD^2 = BD \cdot CD$. Folosind (7) și (8) rezultă $40G^2 = 2GD \cdot CD$, adică $2OG^2 = GD \cdot CD$.

VII.G.116. METODA 1 (Vezi fig. VII.G.116.a.)

Fie A' punctul diametral opus lui A . Unghiul ACA' subîntinde un diametru, deci $m(\widehat{ACA'}) = 90^\circ$. Rezultă că

$$AC \perp A'C. \quad (1)$$

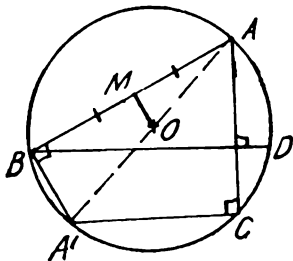


Fig. VII.G.116.a.

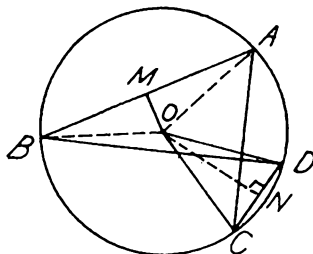


Fig. VII.G.116.b.

Dar, din ipoteză, $AC \perp BD$. (2)

Din (1) și (2) avem $A'C \parallel BD$. Deci $BA'CD$ este trapez ; fiind înscris în cerc, $BA'CD$ este trapez isoscel, deci avem $CD = A'B$. (3)

În triunghiul ABA' , MO este linie mijlocie, deci :

$$MO = \frac{A'B}{2}; \quad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă : $MO = \frac{CD}{2}$, deci $MO < CD$.

METODA 2 (Vezi fig. VII.G.116.b.) :

Construim razele OA , OB , OC , OD și $OM \perp AB$, $ON \perp CD$, $M \in AB$, $N \in CD$. Triunghiul DOC fiind isoscel, avem :

$$CN = \frac{1}{2} \cdot CD. \quad (5)$$

Unghiurile COD și AOB sînt unghiuri la centru, deci : $m(\widehat{COD}) = m(\widehat{CD})$, $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AB})$. Dar $m(\widehat{CD}) + m(\widehat{AB}) = 180^\circ$, deci $m(\widehat{COD}) + m(\widehat{AOB}) = 180^\circ$. Dar triunghiurile AOB și COD sînt isoscele, deci OM , respectiv ON sînt bisectoare în aceste triunghiuri. Rezultă că : $m(\widehat{MOB}) + m(\widehat{CON}) = \frac{m(\widehat{AOB})}{2} + \frac{m(\widehat{COD})}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. Deci $\sphericalangle MOB$ și $\sphericalangle NOC$ sînt complementare.

Rezultă că $\sphericalangle MOB \equiv \sphericalangle OCN$, avînd același complement. Obținem că $\triangle MOB \equiv \triangle NCO$, (I.U.), de unde :

$$MO = CN. \quad (6)$$

Din (5) și (6) rezultă că $OM = \frac{1}{2} \cdot CD$, deci $OM < CD$.

METODA 3 (Vezi fig. VII.G.116.c.) :

Notăm cu r lungimea razei cercului. Fie P intersecția diagonalelor patrulaterului. Avem $\triangle BCP \sim \triangle BOM$, rezultă :

$$\frac{BC}{r} = \frac{CP}{MO}. \quad (7)$$

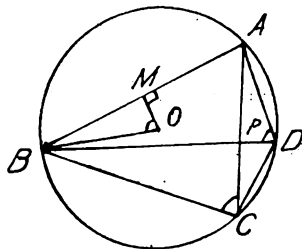


Fig. VII.G.116.c.

Avem $\triangle ADP \sim \triangle BOM$, rezultă

$$\frac{AD}{r} = \frac{DP}{MO} \quad (8)$$

Din teorema lui Pitagora aplicată în triunghiul dreptunghic CPD , obținem : $CD^2 = PD^2 + PC^2$. Înlocuind cu expresiile obținute în (7) și (8), avem : $CD^2 = \frac{MO^2 \cdot AD^2}{r^2} + \frac{BC^2 \cdot MO^2}{r^2}$. Dînd factor comun, relația devine :

$$CD^2 = \frac{MO^2}{r^2} \cdot (AD^2 + BC^2). \quad (9)$$

Din teorema lui Pitagora aplicată în triunghiurile dreptunghice formate de diagonale, obținem $AB^2 + CD^2 = CB^2 + AD^2$ și înlocuind în (9), avem :

$$CD^2 = \left(\frac{MO}{r}\right)^2 \cdot (AB^2 + CD^2). \quad (10)$$

Dar $AB = 2MB$, iar în triunghiul dreptunghic MOB , $MB^2 = r^2 - MO^2$. Determinăm CD din ecuația (10). Obținem :

$$\left\{1 - \left(\frac{MO}{r}\right)^2\right\} \cdot CD^2 = \frac{MO^2}{r^2} \cdot 4MB^2, \quad \frac{r^2 - MO^2}{r^2} \cdot CD^2 = 4 \cdot \frac{MO^2}{r^2} \cdot (r^2 - MO^2).$$

Cum $0 < MO < r$, rezultă $CD^2 = 4 \cdot MO^2$, adică $CD = 2 \cdot MO$. Deci $MO < CD$.

VII.G.117. METODA 1

$$\text{Avem : } \frac{r}{2r} = \frac{\frac{r}{2}}{r}, \text{ deci } \frac{OP}{OB} = \frac{OM}{OP} \quad (1)$$

$$\text{Apoi } \sphericalangle POM \equiv \sphericalangle POB. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\triangle POM \sim \triangle BOP$, conform cazului de asemănare L.U.L. Analog, $\triangle QOM \sim \triangle BOQ$, deoarece $\sphericalangle MOQ$ este comun și $\frac{OM}{OQ} = \frac{OB}{OB} = \frac{1}{2}$. Rezultă că $\frac{PB}{PM} = 2$ și $\frac{QB}{QM} = 2$, deci $PB + QB = 2PQ$.

METODA 2

Folosim teorema lui Pitagora generalizată. Notăm : $MP = x$, $MQ = y$.

În triunghiul POM , obținem

$$\cos \widehat{POB} = \frac{r^2 + \frac{r^2}{4} - x^2}{2r \cdot \frac{r}{2}} = \frac{5r^2 - 4x^2}{4r^2}.$$

În triunghiul POB , avem : $PB^2 = r^2 + 4r^2 - 4r^2 \cos \widehat{POB} = 5r^2 - (5r^2 - 4x^2) = 4x^2$.

$$\text{Deci } PB = 2x. \quad (3)$$

$$\text{Analog, arătăm că } BQ = 2y. \quad (4)$$

$$\text{Din (3) și (4) rezultă că } PB + BQ = 2x + 2y = 2(x + y) = 2PQ.$$

Generalizare :

Fie $C(O, r)$ și o secantă BM ce trece prin O , astfel încît $r^2 = OM \cdot OB$, M interior cercului cu $\frac{r}{OM} = a$. Fie PQ o coardă ce trece prin M . (P, Q pe cerc). Atunci $BP + BQ = a \cdot PQ$.

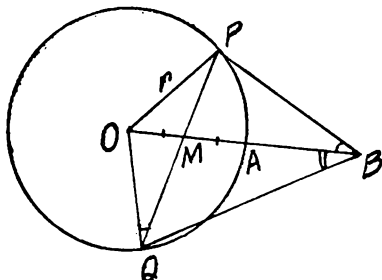


Fig. VII.G.117.

Demonstrație :

Deoarece r este media geometrică a lui OM, OB și $OM < r$, rezultă $OM < r < OB$, deci B este exterior cercului. Obținem că : $\triangle POM \sim \triangle BOP$ și $\triangle QOM \sim \triangle BOQ$ (L.U.L.), de unde rezultă că $\frac{PB}{MP} = a$ și $\frac{BQ}{MQ} = a$, deci $BP = aMP$ și $BQ = aMQ$. Însușind ultimile relații, obținem : $BP + BQ = a \cdot PQ$.

VII.G.118. În orice triunghi ABC sînt satisfăcute relațiile de inegalitate :

$$|AC - AB| < BC < AC + AB. \text{ Deci :}$$

$$|AC - AB| < 1 < AC + AB. \quad (1)$$

Deoarece $AB, AC \in \mathbb{N}$, din (1) rezultă că $AC = AB$, deci triunghiul ABC nu poate fi decît isoscel. Fie $AB = a$. Demonstrăm că, în ipotezele date, este satisfăcută relația $a < 2r < a + 1$. Deoarece diametrul este cea mai mare coardă, rezultă că $a < 2r$.

Fie A' punctul diametral opus lui A . (Vezi fig. VII.G.118.) În triunghiul ABA' , avem :

$$2r < AB + A'B. \quad (2)$$

Dacă $a = 1$, rezultă că triunghiul ABC este echilateral, deci $r < a = 1$. Dar $r > \frac{5}{2}$. Rezultă că $a > 1$. Deci $m(\widehat{A}) < 90^\circ$, deci $m(\widehat{BA'C}) > 90^\circ$, deci $BA' < 1$.

Din (2) și (3) rezultă $2r < a + 1$.

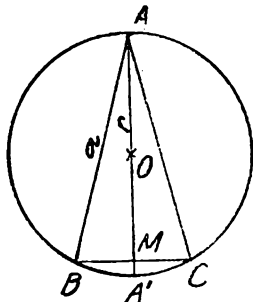


Fig. VII.G.118.

Dar $5 < 2r < 7$. Deci: $5 < a + 1$ și $a < 7$. Rezultă $4 < a < 7$. Cum $a \in \mathbb{N}$, rezultă că $a \in \{5, 6\}$.

Fie M proiecția lui A pe BC . Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice OBM și ABM , obținem:

$$\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}} + r = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}.$$

Trecînd r în membrul doi și ridicînd la pătrat rezultă:

$$a^2 = 2r \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}.$$

$$\text{Deci: } r = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}}, \text{ adică } r = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - 1}}. \quad (4)$$

$$\text{Pentru } a = 5, r = \frac{25}{\sqrt{99}} \in \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

$$\text{Pentru } a = 6, r = \frac{36}{\sqrt{143}} \in \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

Deci problema are două soluții:

$$\text{I: } AB = AC = 5, AA' = \frac{50}{\sqrt{99}} = \frac{50\sqrt{11}}{33}.$$

$$\text{II: } AB = AC = 6, AA' = \frac{72}{\sqrt{143}} = \frac{72\sqrt{143}}{143}.$$

Altfel :

$$\text{Am arătat că } r = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - 1}}. \quad (4)$$

Avem următoarele inegalități

$$\frac{a}{2} = \frac{a^2}{2a} < \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - 1}} < \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad (5)$$

$$\frac{5}{2} < r < \frac{7}{2}. \quad (6)$$

Din (4), (5) și (6) rezultă $\frac{a\sqrt{3}}{3} > \frac{5}{2}$, deci $a > \frac{5\sqrt{3}}{2}$. Deci $a \geq 5$. Pe de altă parte, din (4), (5) și (6) rezultă că $a < 7$. Deci $5 < a < 7$. Deci $a \in \{5, 6\}$.

VII.G.119. a) Avem $\triangle ABN \equiv \triangle ADM$ (C.C.). Rezultă că :

$$\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle ADE. \quad (1)$$

$$\text{Dar, } \sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle NAF. \quad (2)$$

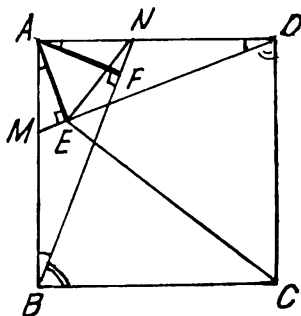


Fig. VII.G.119.

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle NAF \equiv \sphericalangle ADE$. Deci $\triangle ANF \sim \triangle ADE$. (U.U.). Rezultă că : $\frac{ED}{AF} = \frac{AD}{AN}$. Dar $AF = AE$, $AD = CD$, deci :

$$\frac{ED}{AE} = \frac{CD}{AN}. \quad (3)$$

$$\sphericalangle EAN \equiv \sphericalangle CDE, \text{ avînd același complement.} \quad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că $\triangle AEN \sim \triangle DEC$ (L.U.L.).

Altfel :

Conform teoremei înălțimii în triunghiul AMD , avem

$$AE^2 = ME \cdot DE. \quad (5)$$

Conform teoremei catetei în triunghiul AMD , avem

$$AM^2 = ME \cdot DM; \quad (6)$$

$$AD^2 = DE \cdot DM. \quad (7)$$

Din (5), (6) și (7) rezultă : $\left(\frac{AE}{AM}\right)^2 = \frac{DE^2}{AD^2}$, deci : $\frac{AE}{AM} = \frac{DE}{AD}$.

Dar $AM = AN$, $AB = CD$ (din ipoteză). Rezultă că

$$\frac{AE}{AN} = \frac{DE}{CD}; \quad (8)$$

$$\sphericalangle EAN \equiv \sphericalangle AMD \equiv \sphericalangle MDC. \quad (9)$$

Din (8) și (9) rezultă că $\triangle AEN \sim \triangle DEC$.

b) Avem : $\triangle AEN \equiv \triangle AFM$ (L.U.L.), $\triangle DEC \equiv \triangle BFC$ (L.U.L.).

Aplicînd a) rezultă că $\triangle AFM \sim \triangle BFC$, deci : $\frac{AF}{BF} = \frac{FM}{CF} = \frac{AM}{BC}$, de unde rezultă că $AF \cdot CF = BF \cdot FM$.

c) Am demonstrat anterior că $\triangle AEN \sim \triangle DEC$. Rezultă că $\sphericalangle ANE \equiv \sphericalangle DCE$, deci patrulaterul $DNEC$ este inscriptibil. Rezultă că $m(\widehat{NEC}) = 90^\circ$, deci CE și NE sînt perpendiculare.

d) Patrulateralele $BCFM$ și $DCEN$ sînt congruente. Deoarece punctele D, C, E, N sînt conciclice [conform c)] rezultă că și punctele B, C, F, M sînt conciclice.

Observație : deoarece dreapta AC este axă de simetrie a figurii, b) și d) se puteau demonstra analog cu a) respectiv c).

CLASA A VIII-A

**REZOLVĂRILE ȘI REZULTATELE PROBLEMELOR
PENTRU CLASA A VIII-A**

VIII.A.1.

a) $A = (-3 ; 6)$, $B = [-5 ; 2)$, $A \setminus B = [2 ; 6)$.

b) $(A \setminus B) \cap \mathbb{N} = \{2, 3, 4, 5\}$.

VIII.A.2. Vom afla întâi valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$ și apoi alegem dintre ele pe acelea pentru care $E(x) < 0$.

$$\text{Avem } E(x) = \frac{x-4+7}{x-4} = 1 + \frac{7}{x-4}.$$

$E(x)$ este întreg dacă $\frac{7}{x-4}$ este întreg, adică atunci când $x-4$ divide pe 7.

Deci :

$x-4=1,$	de unde : $x=5$
$x-4=-1,$	$x=3$
$x-4=7,$	$x=11$
$x-4=-7,$	$x=-3$

Înlocuind în $E(x)$, obținem :

$$E(5) = \frac{(5+3)}{(5-4)} = 8$$

$$E(3) = -6$$

$$E(11) = 2$$

$$E(-3) = 0$$

De aici deducem că $x \in \{-3, 3\}$.

VIII.A.3. Deoarece $x^2 + 7 > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$, atunci $\frac{x^2 + 7}{3x - 4} > 0$ dacă $3x - 4 > 0$. Deci, $\frac{3x - 4}{2x - 6} < 0$ dacă $2x - 6 < 0$. Sistemul de inecuații dat este echivalent cu sistemul de inecuații

$$\begin{cases} 3x - 4 > 0 \\ 2x - 6 < 0 \end{cases}$$

Soluția sistemului va fi

$$x \in \left(\frac{4}{3}; +\infty\right) \cap \left(\frac{4}{3}; 3\right) = \left(\frac{4}{3}; 3\right)$$

VIII.A.4. Avem

$$A = (-2; 2) \text{ și } B = (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right).$$

$$A \cup B = \left[(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)\right] \cap (-2; 2) = (-\infty; +\infty) = \mathbf{R}$$

$$\text{și } A \cap B = \left[(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)\right] \cap$$

$$\cap (-2; 2) = (-2; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; 2\right).$$

VIII.A.5. a) Soluțiile pentru cele două inecuații sînt $x \in \left(-1; \frac{9}{2}\right)$, respectiv $x \in (-2; 3)$.

$$\text{b) } A \cap B = \left(-1; \frac{9}{2}\right) \cap (-2; 3) = (-1; 3).$$

$$A \cup B = \left(-1; \frac{9}{2}\right) \cup (-2; 3) = \left(-2; \frac{9}{2}\right).$$

$$B \cap \mathbf{Z} = (-2; 3) \cap \mathbf{Z} = \{-1; 0; 1; 2\}.$$

$$A \cap \mathbf{N} = \left(-1; \frac{9}{2}\right) \cap \mathbf{N} = \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

c) $3 \in A$ înseamnă $3 \in \left(-1; \frac{9}{2}\right)$, propoziție adevărată.

$[1; 2] \subset A \cap B$ înseamnă $[1; 2] \subset (-1; 3)$, propoziție adevărată.

$2, 5(39) \in B \setminus A$ înseamnă $2,53939\dots \in (-2; -1]$, propoziție falsă.

$(2, 2) \in AXB$ înseamnă $2 \in A$ și $2 \in B$, propoziție adevărată.

VIII.A.6. a) Prima inecuație devine $\frac{n+2}{8n+7} < \frac{1}{1000} + \frac{1}{8}$, sau $\frac{n+2}{8n+7} < \frac{1008}{8000}$ și, cum numitorii sînt pozitivi ($n \in \mathbf{N}$), rezultă $8000n + 16000 < 8064n + 7056$, $n > \frac{1119}{8}$ și n natural, de unde $n \geq 140$.

A doua inecuație se transformă asemănător și dă $n > 0$, deci soluția sistemului este $\{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 140\}$.

b) Cum $1986^5 > 140$, conform punctului a), avem

$$-\frac{1}{1000} < E(1986^5) - \frac{1}{8} < \frac{1}{1000}, \text{ sau încă}$$

$$0,124 = \frac{1}{8} - \frac{1}{1000} < E(1986^5) < \frac{1}{8} + \frac{1}{1000} = 0,126,$$

de unde $E(1986^5) = 0,12\dots$, primele două zecimale fiind exacte.

CAPITOLUL II

FUNCȚII

VIII.A.7.

a) $m = 3$, atunci $f(x) = 0$; graficul este axa Ox .

b) $m = 0$, atunci $f(x) = -3x + 3$.

Tabelul de valori este

x	0	1
$f(x)$	3	0

cu graficul

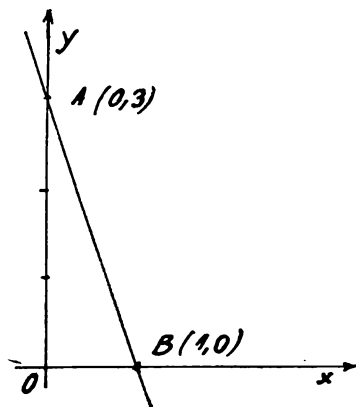


Fig. VIII.A.7.b.

c) $m = 2$, atunci $f(x) = 3x + 1$.

Tabelul de valori este :

x	0	1
$f(x)$	1	4

cu graficul

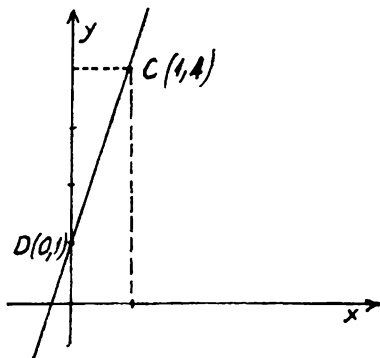


Fig. VIII.A.7.c.

d) $m = \frac{1}{2}$, atunci $f(x) = \frac{5}{2}$, funcție constantă; graficul paralel cu Ox.

VIII.A.8. Avem tabelul de valori

x	0	2	4
$f(x)$	2	0	2

Graficul apare în figură.

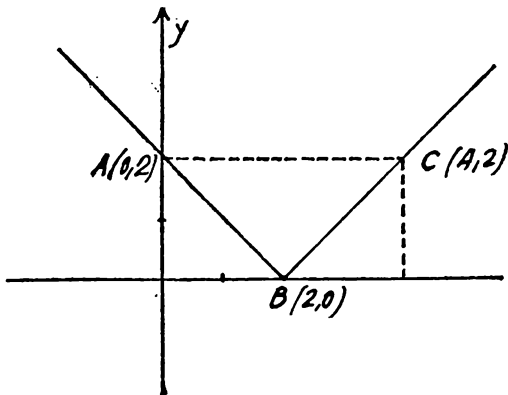


Fig. VIII.A.8.

De observat că funcția putea fi pusă și sub o unică expresie, $f(x) = |x - 2|$.

VIII.A.9. a) Deoarece $x_A = 1 \notin (1; 7]$, rezultă că A nu se află pe graficul funcției f .

Deoarece $x_A = 1 \in [-10; 2]$ și $g(x_A) = g(1) = -1 + 3 = 2 = y_A$, rezultă că A se află pe graficul funcției g .

b) În primul rând, avem condiția $x \in (1; 7] \cap [-10; 2] = (1; 2]$.

Construim acum tabelul de variație al expresiei $\frac{f(x)}{g(x)}$ cu $x \in \mathbf{R}$:

x	$-\infty$		-1		3							$+\infty$
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+
$x+3$	+	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-
$\frac{x+1}{x+3}$	-	-	-	0	+	+	-	-	-	-	-	-

Deci $x \in [-1; 3)$, de unde, ținând cont și de condiția pusă mai sus, obținem soluția inecuației: $x \in [-1; 3) \cap (1; 2] = (1; 2]$.

VIII.A.10.

Pentru $M_1(x, y) \in AB$ avem $\frac{M_1M'_1}{AO} = \frac{M'_1B}{OB} = \frac{OB - M_1M'_1}{OB}$, deci

$\frac{y}{3} = \frac{3-x}{3}$, sau încă $y = -x + 3$. (M'_1 este proiecția lui M_1 pe Ox).

Analog, pentru $M_2(x, y) \in BC$, obținem $y = x - 3$ și, deci, funcția căutată va fi $f: [0; 6] \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3, & \text{dacă } 0 < x < 3 \\ x - 3, & \text{dacă } 3 < x < 6 \end{cases}$$

De observat că funcția se poate pune sub forma $f(x) = |x - 3|$.

b) Avem, evident, $AB = BC = 3\sqrt{2}$ și $AC = 6$. Înălțimea $\triangle ABC$ fiind $BB' = 3$, avem $S_{ABC} = AC \cdot \frac{BB'}{2} = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9$.

VIII.A.11. a) Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 2f + g = 2x + 14 \\ f - 2g = 6x - 18 \end{cases}$$

cu necunoscutele f și g și x privit ca parametru. Se obține $f = 2x + 2$ și $g = -2x + 10$. Deci, $f(x+1) = 2x + 2$ și, înlocuind pe x prin $x-1$, obținem $f(x) = 2(x-1) + 2 = 2x$. Din $g(x-2) = 2x + 10$, înlocuind

x prin $x + 1$, obținem $g(x) = -2(x + 1) + 10 = -2x + 8$. În concluzie, $f(x) = 2x$ și $g(x) = -2x + 8$.

b) Avem $f(0) = 0$ și $f(1) = 2$, $g(0) = 8$, $g(1) = 6$.

Reprezentarea grafică este imediată.

Fie $M(x, y)$ punctul de intersecție al celor două grafice. Coordonatele lui M vor verifica ecuațiile ambelor drepte, deci vor fi soluțiile sistemului :

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 2x + 8 \end{cases}$$

Se obține $x_M = 2$ și $y_M = 4$.

VIII.A.12. a) Pentru ca $M(4, -5)$ să aparțină graficului trebuie ca $f(4) = -5$, adică $-8 + m = -5$, $m = 3$.

$$b) f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 1] \\ -2x + 3, & \text{dacă } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

Intocmim tabelul de valori

x	0	1	1,5	2	4
$f(x)$	0	1	0	-1	-5

Graficul este :

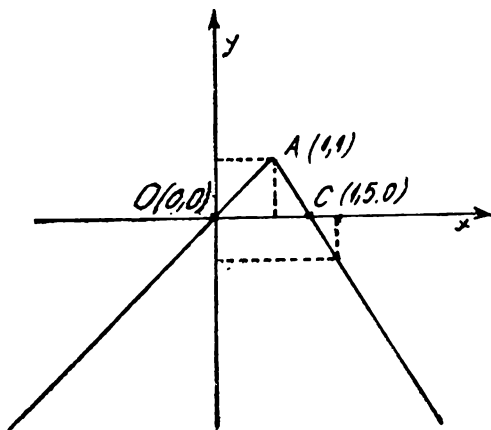


Fig. VIII.A.12.

c) Ținând cont că se cer valorile lui x pentru care funcția este negativă, deci pentru care graficul ei este situat sub axa Ox , deducem că $f(x) \leq 0$ când $x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

VIII.A.13. a) Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 1 \\ y = -\sqrt{3}x + 1 \end{cases}$$

Avem, succesiv :

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 1 \\ \sqrt{3}x + 1 = -\sqrt{3}x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Notînd cu A punctul de intersecție, avem $A(0, 1)$.

b) Reprezentăm grafic cele două funcții, în același sistem de axe, aflînd intersecția graficelor cu axa Ox ; punctul $A(0, 1)$ reprezentată intersecția cu Oy .

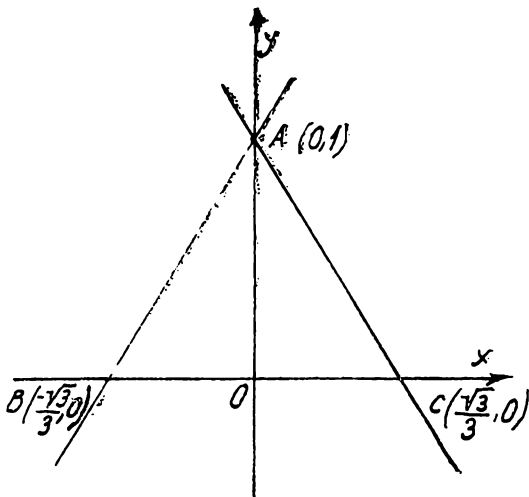


Fig. VIII.A.13.

Unghiul cerut este \widehat{BAC} .

În $\triangle ABC$ avem $(OB) \equiv (OC)$ și $AO \perp BC$, deci $\triangle ABC$ isoscel (AO — mediană și înălțime).

În $\triangle ABO$, $m(\widehat{O}) = 90^\circ$, avem $\operatorname{tg} B = \frac{AO}{OB}$; $\operatorname{tg} B = \sqrt{3}$, adică $m(\widehat{B}) = 60^\circ$. $\triangle ABC$ isoscel, cu $m(\widehat{B}) = 60^\circ$, implică $\triangle ABC$ echilateral, deci $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$.

VIII.A.14. a) Calculăm: $f(x_1) - f(x_2)$; $ax_1 + b - ax_2 - b = ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2)$ și, cum $a \neq 0$ și $x_1 \neq x_2$, adică $x_1 - x_2 \neq 0$, rezultă că $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$, deci $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$$\text{b) } \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{ax_1 + b + ax_2 + b}{2} = \frac{a(x_1 + x_2) + 2b}{2} = a \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + b = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x-1) + 2f(x+2) &= [a(x-1) + b] + 2[a(x+2) + b] = ax - a + b + 2ax + 4a + 2b = 3ax + 3a + 3b = 3(ax + a + b) = \\ &= 3[a(x+1) + b] = 3f(x+1). \end{aligned}$$

VIII.A.15. Pentru $x = 2$ se obține $f(1) = -2 - f(1)$, de unde $f(1) = -1$ și, deci, $f(x-1) = 3x - 7$, relație valabilă pentru orice x real.

Luând $x+1$ în loc de x , se obține $f(x+1-1) = 3(x+1) - 7$, sau încă $f(x) = 3x - 4$. Rămîne de verificat dacă punctele A, B, C, D sînt pe graficul lui f , adică $y_A = f(x_A)$ etc.

Din $f(0) = -4$, $f(5) = 11$, $f(3) = 5$, și $f(10) = 26$, rezultă că doar A și D aparțin graficului funcției f .

VIII.A.16. Luăm $x = 3$ și obținem $f(2) = -9 - 5 - f(2)$ sau $2f(2) = -14$ adică $f(2) = -7$ (1).

Luăm $x = 1$ și ținem cont de (1); vom avea $f(0) = -3 - 5 + 7$, sau $f(0) = -1$.

Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} f(2) = -7 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} 2a + b = -7 \\ b = -1 \end{cases}$$

unde a și b sînt numere reale, cu $f(x) = ax + b$.

Rezultă $a = -3$ și $b = -1$, adică funcția $f(x) = -3x - 1$.

VIII.A.17. a) Notăm $x - 4 = y$, de unde $x = y + 4$ și avem $f(y) = a(y + 4)$.

Cum sîntem obișnuiți cu variabila x , vom schimba pe y cu x și, deci $f(x) = ax + 4a$.

b) Din $P \in G_f$, avem $f(1) = \frac{a-9}{2}$, sau $a + 4a = \frac{a-9}{2}$, cu soluția $a = -1$.

c) Se obține $x \in \left(-\infty, -\frac{14}{3}\right)$.

VIII.A.18. Punctul A , de intersecție al dreptelor date de ecuațiile $x + y = 1$ și $x + ky = 3$, se află rezolvînd sistemul format din cele două ecuații.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + ky = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ -x - ky = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = \frac{2}{k-1} \end{cases}$$

Obținem

$$x = 1 - \frac{k-1}{2} \quad \text{sau} \quad x = \frac{k-3}{k-1}$$

$$y = \frac{2}{k-1} \quad \text{sau} \quad y = \frac{2}{k-1}$$

Deci $A \left(\frac{k-3}{k-1}, \frac{2}{k-1} \right)$

$A \in G_f$ dacă și numai dacă $f\left(\frac{k-3}{k-1}\right) = \frac{2}{k-1}$. Avem, succesiv:

$$-k \frac{k-3}{k-1} + 2 = \frac{2}{k-1}$$

$$-k^2 + 3k + 2k - 2 = 2;$$

$$-k^2 + 5k - 4 = 0$$

$$k^2 - 5k + 4 = 0.$$

Obținem $k = 1$ (nu convine) și $k = 4$.

VIII.A.19. a) Știm că $A(x_0, y_0)$ aparține graficului unei funcții f dacă $f(x_0) = y_0$.

Vom avea, deci: $f(1) = 0$ și $f(2) = 0$.

Dar $f(1) = 2a - 2$, iar $f(2) = -4 + b$.

Deducem că $2a - 2 = 0$, adică $a = 1$ și $-4 + b = 0$, adică $b = 4$.

b) Funcția este:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{pentru } x < 1 \\ -2x + 4, & \text{pentru } x > 1 \end{cases}$$

Graficul este cel din figură.

x	0	1	2	-3
$f(x)$	-2	0/2	0	-2

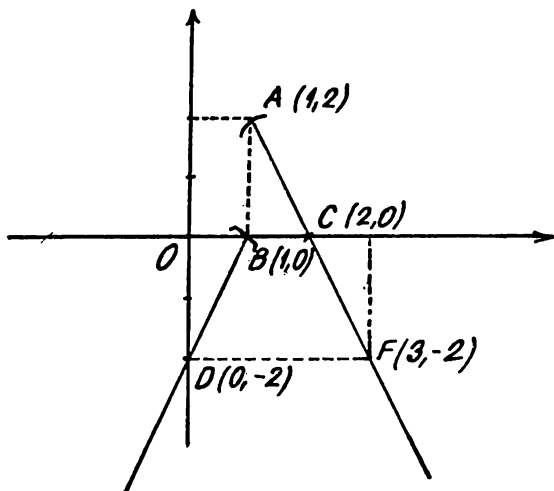


Fig. VIII.A.19.

c) Pentru $x \leq 1$, $f(x) = 2x - 2$ este negativă sau zero, deci $a = 1$; pentru $x > 1$, luăm $b = 0$ și, deci, $f(x) = -2x$, care este negativă.

Putem lua, de asemenea, $a = \frac{1}{2}$ și $b = 1$.

În general :

Pentru $x > 1$, înmulțind cu -2 ambii membri și, apoi, adunând, ambii membri, găsim $-2x + b < -2 + b$. Funcția fiind negativă, trebuie ca membrul drept să fie mai mic sau egal cu zero, deci $-2 + b < 0$, adică $b < 2$, deci $b \in (-\infty, 2]$.

Pentru $x \leq 1$, înmulțind în ambii membri cu $2a$ și scăzând, apoi, pe 2 din ambii membri, avem $2ax - 2 \leq 2a - 2$ (a fiind pozitiv, în celelalte cazuri nu convine). În ultima inegalitate membrul drept trebuie să fie și el negativ sau zero, deci $2a - 2 \leq 0$ sau $a \leq 1$, deci $a \in (0, 1]$.

Din intervalele găsite pentru a și b putem lua orice valori dorim.

VIII.A.20.

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{dacă } x - 2 \geq 1 - x \\ 1 - x, & \text{dacă } x - 2 < 1 - x \end{cases}$$

sau, echivalent :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{dacă } x < \frac{3}{2} \\ x-2, & \text{dacă } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Reprezentarea grafică este imediată.

VIII.A.21.

a) Tabelul de valori este :

x	-2	-1	0	2	3
$f(x)$	-4	-1	0	0	1

Ținând cont că f este liniară pe intervalele $(0; 2)$ și $[2; +\infty)$, obținem graficul

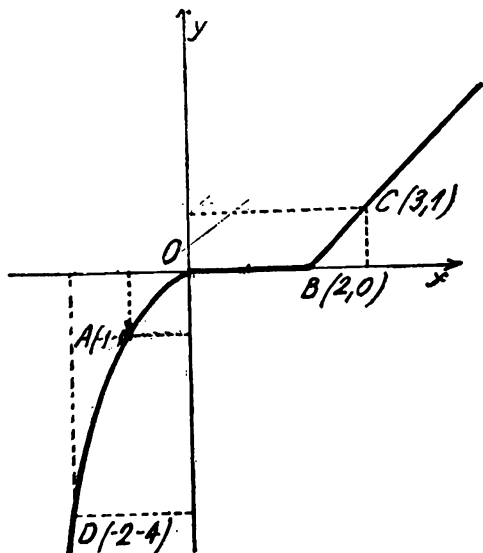


Fig. VIII.A.21.

b) $f(-2) = -4$, $f(1) = 0$, $f(14) = 12$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$

și, deci, $f(-2) + f(1) \cdot f(14) - 2f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{5}{2}\right) = -4 + 0 \cdot 12 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$

$$\frac{1}{2} = -4 + 1 = -3.$$

VIII.A.22. Fie x_1, x_2, x_3 numere întregi. Evident, printre ele există cel puțin două de aceeași paritate, fie ele x_1 și x_2 . Avem atunci: $f(x_1) - f(x_2) = (3x_1^2 - 1) - (3x_2^2 - 1) = 3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$, și cum x_1, x_2 au aceeași paritate, rezultă că $x_1 - x_2$ și $x_1 + x_2$ sînt pare, deci $f(x_1) - f(x_2)$ este multiplu de $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

VIII.A.23. Reprezentăm într-un sistem de axe punctele A, B, C ; funcția căutată are două forme — una, pe $[1, 2)$, cealaltă, pe $[2, 3]$; fiind vorba de segmente, aceste forme sînt liniare.

Pentru $x \in [1, 2)$, avem $f_1(x) = ax + b$.

Pentru $x \in [2, 3]$, avem $f_2(x) = mx + n$.

Condițiile ca A și B să aparțină graficului lui f_1 conduc la sistemul:

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \quad \text{cu soluția:} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Întrucît B și C aparțin graficului lui f_2 , deducem $m = 1$ și $n = 4$.

În concluzie, vom avea $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [1, 2) \\ -x + 4, & \text{dacă } x \in [2, 3] \end{cases}$$

CAPITOLUL III

POLINOAME, FRAȚII RAȚIONALE

VIII.A.24. a)

$$\begin{aligned} P(2) &= 2^{10} - 2 \cdot 2^9 + 2^8 - 2 \cdot 2^7 + 2^6 - 2 \cdot 2^5 + 2^4 - 2 \cdot 2^3 + \\ &+ 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 2^{10} - 2^{10} + 2^8 - 2^8 + 2^6 - 2^6 + \\ &+ 2^4 - 2^4 + 2^2 - 2^2 + 1 = 1. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} Q(11) &= 11^{17} - 12 \cdot 11^{16} + 12 \cdot 11^{15} - 12 \cdot 11^{14} + \dots - \\ &- 12 \cdot 11^2 + 12 \cdot 11 - 1 = 11^{16}(11 - 12) + 12 \cdot 11^{15} - \\ &- 12 \cdot 11^{14} + \dots - 12 \cdot 11^2 + 12 \cdot 11 - 1 = \\ &= -11^{16} + 12 \cdot 11^{15} - 12 \cdot 11^{14} + \dots - 12 \cdot 11^2 + 12 \cdot 11 - 1 = \\ &= 11^{15}(-11 + 12) - 12 \cdot 11^{14} + \dots - 12 \cdot 11^2 + 12 \cdot 11 - 1 = \\ &= 11^{15} - 12 \cdot 11^{14} + \dots - 12 \cdot 11^2 + 12 \cdot 11 - 1 = \dots = 10. \end{aligned}$$

VIII.A.25.

$$\begin{aligned} E(x) &= x^3 + ax^2 + x^2 + ax + bx + b + 1 = \\ &= x^3 + ax^2 + bx + x^2 + ax + b + 1 = \\ &= x(x^2 + ax + b) + (x^2 + ax + b) + 1 = \\ &= (x^2 + ax + b)(x + 1) + 1. \end{aligned}$$

Deoarece $x^2 + ax + b = 0$, rezultă $E(x) = 1$.

VIII.A.26. Avem

$$xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4} = 1 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 < 1,$$

deoarece pătratul unui număr real este nenegativ. Acum, prima inegalitate și a doua se reduc la $xy < 1$, care este deja demonstrată.

$$\begin{aligned} \text{Într-adevăr } x^2 + y^2 - 2 &= (x+y)^2 - 2xy - 2 = \\ &= 4 - 2xy - 2 = 2 - 2xy = 2(1 - xy). \text{ Deci, } x^2 + y^2 - 2 \geq 0, \text{ adică} \\ x^2 + y^2 &\geq 2. \text{ Analog : } x^3 + y^3 - 2 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) - 2 = \\ &= 2[(x+y)^2 - 3xy] - 2 = 4 - 3xy - 1 = 3 - 3xy = 3(1 - xy). \end{aligned}$$

Deci, $x^3 + y^3 - 2 \geq 0$, adică $x^3 + y^3 \geq 2$.

VIII.A.27.

b) Suma din enunț se mai poate scrie $(x-y)^{17} + (x-y)^{17} + (a-b)^2 - (a-b)^2 = 0$.

VIII.A.28. Numărul 13, scris ca diferență de pătrate este: $13 = x^2 - y^2$ sau $13 = (x-y)(x+y)$. Cum unica descompunere a lui 13 este $1 \cdot 13$, deducem :

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = 1 \end{cases} \text{ cu soluția } x = 7 \text{ și } y = 6$$

Deci, $13 = 7^2 - 6^2$.

Analog obținem : $31 = 16^2 - 15^2$.

Generalizare : Dacă $p \in \mathbb{N}$ este impar, atunci :

$$p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \quad (1)$$

Se demonstrează (1):

Din $p = x^2 - y^2$, deducem $p = (x-y)(x+y)$. Considerăm situația (care nu este unică) :

$$\begin{cases} x + y = p \\ x - y = 1, \end{cases}$$

cu soluția $x = \frac{p+1}{2}$; $y = \frac{p-1}{2}$.

$$\text{Deci, } p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

$$\text{Să calculăm suma } S, \text{ pornind de la } p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

deoarece toți termenii sumei sînt numere impare. Avem : $1 = 1^2 - 0^2$,
 $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, ..., $1985 = 993^2 - 992^2$; $1 + 3 + 5 + \dots +$
 $+ 1985 = 993^2$.

$$\begin{aligned} \text{VIII.A.29. } E(X, Y, Z) &= X^3 + X^2Y - 2X^2Z - 2XYZ + 2XZ + \\ &+ 2YZ - X - Y = X^2(X + Y) - 2XZ(X + Y) + \\ &+ 2Z(X + Y) - (X + Y) = \\ &= (X + Y)(X^2 - 2XZ + 2Z - 1) = \\ &= (X + Y)[(X^2 - 1) - (2XZ - 2Z)] = \\ &= (X + Y)[(X - 1)(X + 1) - 2Z(X - 1)] = \\ &= (X + Y)(X - 1)(X + 1 - 2Z). \end{aligned}$$

Pentru $x = 1$ obținem : $E(1, Y, Z) = (1 + Y)(1 - 1)(1 + 1 - 2Z) =$
 $= 0$, deci, în particular, $E(1, 1, 1) = E(1, 2, 2) = \dots = E(1, 1986, 1986) = 0$.

VIII.A.30. Metoda I.

$$\begin{aligned} &(X + Y)(X^2 - XY + Y^2) + \\ &+ 3(X + Y)(XY + XZ + ZY + Z^2) + Z^3 = \\ &= (X + Y)[X^2 + 2XY + Y^2 + 3(X + Y)Z + 3Z^2] + Z^3 = \\ &= (X + Y)[(X + Y)^2 + 3(X + Y)Z + 3Z^2] + Z^3 = \\ &= (X + Y)^3 + 3(X + Y)^2Z + 3(X + Y)Z^2 + Z^3 = \\ &= [(X + Y) + Z]^3 = (X + Y + Z)^3. \end{aligned}$$

Metoda a II-a.

$$\begin{aligned} (X + Y + Z)^3 &= (X + Y + Z)^2(X + Y + Z) = \\ &= (X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY + 2XZ + 2YZ)(X + Y + Z) = \\ &= X^3 + Y^3 + Z^3 + 3(XY^2 + XZ^2 + YX^2 + \\ &+ YZ^2 + ZX^2 + ZY^2 + 2XYZ) = \\ &= X^3 + Y^3 + Z^3 + 3[X(Y^2 + Z^2 + 2YZ) + \\ &ZY(Z + Y) + X^2(Y + Z)] = \\ &= X^3 + Y^3 + Z^3 + 3(Y + Z)[X(Y + Z) + ZY + X^2] = \\ &= X^3 + Y^3 + Z^3 + 3(Y + Z)(XY + XZ + ZY + X^2) = \\ &= X^3 + Y^3 + Z^3 + 3(Y + Z)(X + Z)(X + Y). \text{ În concluzie :} \\ &X^3 + Y^3 + Z^3 + 3(X + Y)(Y + Z)(Z + Y) = (X + Y + Z)^3. \end{aligned}$$

VIII.A.31. a)

$$\begin{aligned}
 P(X, Y, Z) &= X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2Y^2Z^2 - 2X^2Z^2 = \\
 &= (X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2X^2Z^2 + 2Y^2Z^2) - 4Y^2Z^2 = \\
 &= (X^2 - Y^2 - Z^2)^2 - 4Y^2Z^2 = \\
 &= (X^2 - Y^2 - Z^2 + 2YZ)(X^2 - Y^2 - Z^2 - 2YZ) = \\
 &= [X^2 - (Y - Z)^2][X^2 - (Y + Z)^2] = \\
 &= (X - Y + Z)(X + Y - Z)(X - Y - Z)(X + Y + Z).
 \end{aligned}$$

b) Metoda I. Pentru a calcula valoarea numerică a polinomului este convenabil să îl punem într-o altă formă, astfel încât să apară în expresia sa cele trei sume cu valorile cunoscute din enunț.

$$\begin{aligned}
 P(X, Y, Z) &= (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - 4(X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2) = \\
 &= [(X + Y + Z)^2 - 2(XY + YZ + ZX)]^2 - \\
 &\quad - 4[(XY + YZ + ZX)^2 - 2(XY^2Z + X^2YZ + XYZ^2)] = \\
 &= (X + Y + Z)^4 - 4(X + Y + Z)^2(XY + YZ + ZX) + \\
 &\quad + 4(XY + YZ + ZX)^2 - 4(XY + YZ + ZX)^3 + \\
 &\quad + 8XYZ(X + Y + Z) = (X + Y + Z)[(X + Y + Z)^3 - \\
 &\quad - 4(X + Y + Z)(XY + YZ + ZX) + 8XYZ]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Obținem } &(-9)[(-9)^3 + 9 \cdot 4 \left(-\frac{4}{9}\right) + 8 \cdot 4] = \\
 &= (-9)(-729 - 16 + 32) = 6417.
 \end{aligned}$$

Metoda a II-a.

Pentru calcularea valorii numerice a polinomului se poate pleca de la descompunerea acestuia în factori ireductibili

$$P(X, Y, Z) = (X - Y + Z)(X + Y - Z)(X - Y - Z)(X + Y + Z).$$

Ținem cont că

$$x - z = -y - 9$$

$$x + y = -z - 9$$

$$-y - z = x + 9$$

$$x + y + z = -9$$

Deci

$$\begin{aligned}
 P &= (-2y - 9)(-2z - 9)(2x + 9)(-9) = \\
 &= -9(2y + 9)(2z + 9)(2x + 9) = \\
 &= -9(4yz + 18y + 18z + 81)(2x + 9) = \\
 &= -9[8xyz + 36(xy + yz) + 162(x + y + z) + 729] = \\
 &= -9(32 - 16 - 1458 + 729) = 6417.
 \end{aligned}$$

VIII.A.32. a)

$$\begin{aligned}
 P(X) &= X(X^3 + 6X^2 + 11X + 6) = \\
 &= X(X^3 + 2X^2 + 4X^2 + 8X + 3X + 6) = \\
 &= X[X^2(X + 2) + 4X(X + 2) + 3(X + 2)] = \\
 &= X(X + 2)(X^2 + 4X + 3) = X(X + 2)(X^2 + X + 3X + 3) = \\
 &= X(X + 2)[X(X + 1) + 3(X + 1)] = X(X + 1)(X + 2)(X + 3).
 \end{aligned}$$

b) $P(a) = a(a+1)(a+2)(a+3)$, pentru orice a întreg. $P(a)$ se divide cu 2^4 , dacă $P(a)$ se divide cu 3 și cu $8 = 2^3$. Cum $a, a+1, a+2$ sînt întregi consecutive, produsul lor se divide cu 3, deci $P(a)$ se divide cu 3.

Pentru $a = 2k$ (par), avem

$$P(2k) = 2k(2k+1)(2k+2)(2k+3) = 2k(2k+1)2(k+1)(2k+3).$$

În $P(2k)$ apare de două ori factorul 2, deci $P(2k)$ se divide cu 2^2 , iar k și $k+1$ sînt consecutive, deci produsul lor se divide cu 2. În concluzie $P(2k)$ este divizibil cu 2^3 .

Pentru $a = 2k+1$ avem

$$\begin{aligned} P(2k+1) &= (2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4) = \\ &= (2k+1)2(k+1)(2k+3)2(k+2) \text{ și din nou factorul } 2 \text{ apare de} \\ &\text{două ori iar } k+1 \text{ și } k+2 \text{ sînt consecutive.} \end{aligned}$$

Deci, și în acest caz, $P(2k+1)$ se divide cu 2^3 .

În concluzie $P(a)$ este divizibil cu 2^3 .

Deducem că $P(a)$ este divizibil cu 24.

VIII.A.33. Condiția ca cel mai mic multiplu comun al celor două polinoame să fie produsul lor este echivalentă cu condiția ca cel mai mare divizor comun să fie 1, adică polinoamele să fie prime între ele (fără factori comuni).

Cum $P(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2 = X(X^2 - 1) + 2(X^2 - 1) = (X + 2)(X^2 - 1) = (X + 2)(X + 1)(X - 1)$, aceasta revine la a spune că $Q(X)$ să nu aibă rădăcini valorile $-2, -1$ și 1 , adică

$$Q(-2) = -8 + 4 + 8 + a = a + 4 \neq 0$$

$$Q(-1) = -1 + 1 + 4 + a = a + 4 \neq 0$$

$$Q(1) = 1 + 1 - 4 + a = a - 2 \neq 0,$$

adică $a \in \mathbf{R} \setminus \{-4; 2\}$.

VIII.A.34. Relația este echivalentă cu: $[(2^n)^2]^2 + [(2^{2n})^2] - 2 \cdot 2^{2n} + 1 \geq 0$ sau $[(2^n - 2^{2n})^2] \geq 0$, ceea ce este evident.

VIII.A.35. Desfăcînd parantezele și grupînd convenabil termenii, obținem echivalența relației din enunț sub forma:

$$(b-a)(c-b)(c-a) = 0$$

Cum cel puțin una din paranteze trebuie să fie egală cu zero, rezultă că triunghiul este isoscel.

VIII.A.36. Din $\frac{a-b}{c} + \frac{c-a}{b} + \frac{b-c}{a} = 0$, rezultă:

$$a^2b - ab^2 + ac^2 - a^2c - bc^2 + b^2c = 0, \text{ de unde avem; succesiv}$$

$$ab(a-b) + c^2(a-b) - c(a^2 - b^2) = 0$$

$$(a-b)[ab + c^2 - c(a+b)] = 0$$

$$(a-b)(ab + c^2 - ac - bc) = 0$$

$$(a-b)[a(b-c) - c(b-c)] = 0$$

$$(a - b)(b - c)(a - c) = 0,$$

Deci, $a - b = 0$, sau $b - c = 0$, sau $a - c = 0$.

În concluzie, $a = b$; sau $b = c$, sau $c = a$, eventual chiar $a = b = c$, cu condiția $a, b, c \neq 0$.

VIII.A.37. Avem

$x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2 = (x^6 - 2x^3 + 1) + (x^4 - 2x^2 + 1) =$
 $= (x^3 - 1)^2 + (x^2 - 1)^2$ și, cum orice pătrat de număr real este nenegativ, rezultă că suma de pătrate obținută este mai mare sau egală cu 0 pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În plus, egalitatea cu zero are loc doar când ambele pătrate sînt zero, adică $x^3 - 1 = 0$ și $x^2 - 1 = 0$, ceea ce implică $x = 1$.

VIII.A.38. Fie $y = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Avem

$$y^2 - 25 = 4n^2 + 4n + 1 - 25 = 4n^2 + 4n - 24 =$$

$$= 4(n^2 + n - 6) = 4[n(n - 1) - 6].$$

Dar $n(n + 1)$ este număr par; notat cu $2k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, deci $(y^2 - 25)^2 = [4(2k - 6)]^2 = [8(k - 3)]^2 = 64(k - 3)^2$, deci 64 divide $(y^2 - 25)^2$.

VIII.A.39. a) Eliminînd parantezele, obținem succesiv:

$$E(a, b) = 1000a^3 + 3 \cdot 100a^2b + 100a^2 + 3 \cdot 10ab^2 + 2 \cdot 10ab + b^3 + b^2.$$

$$E(a, b) = (10a)^3 + 3(10a)b + 3(10a)b^2 + b^3 + (10a)^2 + 2(10a) + b^2$$

$$E(a, b) = (10a + b)^3 + (10a + b)^2.$$

b) Folosind punctul a), putem scrie:

$$E(a, b) = (10a + b)^3 + (10a + b)^2 \text{ sau } \text{încă}$$

$$E(a, b) = (10a + b)^2 (10a + b + 1).$$

Cum a, b sînt cifre avem $\overline{E(a, b)} = (\overline{ab})^2 (\overline{ab} + 1)$.

Pentru ca $E(a, b)$ să fie pătrat perfect trebuie ca $\overline{ab} + 1$ să fie pătrat perfect.

Pătrate perfecte de două cifre avem 16, 25, 36, 49, 64, 81. Dacă, $\overline{ab} + 1 = 16$, adică $\overline{ab} = 15$; avem $a = 1$, $b = 5$, adică perechea (1, 5).

Analog, obținem perechile: (2, 4), (4, 8), (6, 3), (8, 0).

Putem considera și cazul cînd $\overline{ab} + 1 = 100$; în acest caz, avem $\overline{ab} = 99$, adică perechea (9, 9).

VIII.A.40. Avem

$$47^3 + 53^3 = (47 + 53)(47^2 - 47 \cdot 53 + 53^2) = M_{100} = 100k_1;$$

$$48^3 + 52^3 = (48 + 52)(48^2 - 48 \cdot 52 + 52^2) = M_{100} = 100k_2;$$

$$49^3 + 51^3 = (49 + 51)(49^2 - 49 \cdot 51 + 51^2) = M_{100} = 100k_3;$$

$$50^3 = 5^3 \cdot 1000 = M_{100} = 100k_4.$$

Deci, $x = M_{100} = 100k$ și ultimele două cifre ale numărului vor fi zerouri.

b) Avem

$$P(a) = a^4 - 3a^3 + a^2 + 3a^2 - 9a + 3 = a^2(a^2 - 3a + 1) + 3(a^2 - 3a + 1) = (a^2 - 3a + 1)(a^2 + 3) = 0.$$

VIII.A.41. Avem succesiv :

$$E(x) = x^8(x^4 - 1) - (x^4 - 1) = (x^4 - 1)(x^4 - 1)(x^4 + 1) = \\ = (x^2 - 1)^2(x^2 + 1^2)(x^4 + 1).$$

$x = 2k + 1$ implică $x^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$, care este divizibil cu 2^3 .

Deci, $(x^2 - 1)^2$ divizibil cu $(2^3)^2 = 2^6$.

$x = 2k + 1$ implică $x^2 + 1 = (2k + 1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$, divizibil cu 2.

Deci, $(x^2 + 1)^2$ divizibil cu 2^2 .

$x = 2k + 1$ implică $x^4 + 1 = (2k + 1)^4 + 1 = M_2 + 1 + 1 = M_2$, deci divizibil cu 2.

În concluzie, $E(x)$ se divide cu $2^6 \cdot 2^2 \cdot 2 = 2^9 = 512$.

VIII.A.42.

$$E = a^3 + 3a^2b + a^2b + 3ab^2 + b^3 - b^3 + ab + b^2 - b - a = \\ = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = (a^2b - b^3) + (ab + b^2) - (b + a) = \\ = (a + b)^3 + b(a + b)(a - b) + b(a + b) - (a + b).$$

Cum fiecare termen conține $a + b$, iar acesta se divide cu 7, rezultă că E se divide cu 7.

VIII.A.43. Avem

$$P = (2x^2 - x + 3)^2 [(2x^2 - x + 3) + 6] + 12(2x^2 - x + 3) + 8 = \\ = (2x^2 - x + 3)^3 + 3(2x^2 - x + 3)^2 \cdot 2 + 3(2x^2 - x + 3) \cdot 2^2 + 2^3 = \\ = [(2x^2 - x + 3) + 2]^3 = (2x^2 - x + 5)^3.$$

În plus,

$$2x^2 - x + 5 = 2 \left[x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{16}\right) \right] - \left(\frac{1}{8}\right) + 5 = \\ = 2 \left[x - \left(\frac{1}{4}\right) \right]^2 + \left(\frac{39}{8}\right) > 0,$$

pentru $x \in \mathbf{R}$ și, în consecință, $P = (2x^2 - x + 5)^3 > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

VIII.A.44. Pentru ca să avem $(2X + 1) | P(X)$ trebuie ca $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

Dar $P\left(-\frac{1}{2}\right)$ se scrie succesiv

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + (-1)^{n+1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \\ = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + (-1)^{2n+1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 0, \text{ deci soluția.}$$

VIII.A.45.

$$\begin{aligned} P(X) &= X^n \cdot X - nX + n - X = X(X^n - 1) - n(X - 1) = \\ &= X(X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) - n(X - 1) = \\ &= (X - 1)[X(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) - n]. \end{aligned}$$

Cum $P(X)$ conține factorul $X - 1$, pentru a dovedi că se divide cu $(X - 1)^2$ este suficient să arătăm că :

$C(X) = X(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) - n$ este divizibil cu $X - 1$, adică $C(1) = 0$.

$$\text{Dar } C(1) = \underbrace{1(1 + 1 + \dots + 1 + 1)}_{\text{de } n \text{ ori}} - n = n - n = 0.$$

VIII.A.46. a) Avem :

$$\begin{aligned} P(X) &= X^5(X^3 - 1) - (X^3 - 1) = (X^3 - 1)(X^5 - 1) = \\ &= (X - 1)(X^2 + X + 1)(X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = \\ &= (X - 1)^2(X^2 + X + 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1), \end{aligned}$$

deci este divizibil cu $Q(X)$.

b) $(x - 1)^2 \geq 0$, pentru oricare $x \in \mathbf{R}$.

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}.$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^2 \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\left(\frac{3}{2}\right)x + \frac{1}{3}\right)^2 \geq \frac{2}{3},$$

oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$. Deci $P(x) \geq 0$ pentru oricare $x \in \mathbf{R}$ și, evident, $P^n(x) > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.

VIII.A.47. a) Pentru $n = 2$, $P(X) = (X^2 + X + 1)^2 - X^4$ iar $Q(X) = X + 1$. Avem $P(X) = [X(X + 1) + 1]^2 - X^4$ sau .

$$\begin{aligned} P(X) &= [X(Q(X)) + 1]^2 - X^4 = X^2Q^2(X) + 2XQ(X) + 1 - X^4 = \\ &= Q(X)[X^2Q(X) + 2X] + 1 - X^4 = Q(X)R(X) + 1 - X^4 = \\ &= Q(X)R(X) + (1 - X^2)(1 + X^2) = Q(X)R(X) - (X - 1)(X + 1)(1 + X^2) = \\ &= Q(X) \cdot R(X) - Q(X) \cdot (X - 1)(1 + X^2) = Q(X) \cdot S(X). \end{aligned}$$

b) Vom avea, analog :

$$\begin{aligned} P(X) &= [X(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + 1) + 1]^2 - X^{2n} = \\ &= [XQ(X) + 1]^2 - X^{2n} = Q(X) \cdot M_1(X) - (X^{2n} - 1) = \\ &= Q(X) \cdot M_1(X) - (X^n - 1)(X^n + 1) = Q(X) \cdot M_1(X) - (X - 1)(X^n + 1) \cdot \\ &\quad \cdot Q(X) = Q(X) \cdot M_2(X). \end{aligned}$$

VIII.A.48. $Q(X) = P^2(X) - 4P(X) + 5 - X$, dar $P(X) = X^2 - 3X + 2 - X + 3 = R(X) - (X + 3)$.

Cu aceasta,

$$\begin{aligned} Q(X) &= [R(X) - (X - 3)]^2 - 4[R(X) - (X - 3)] + 5 - X = \\ &= R^2(X) - 2R(X) \cdot (X - 3) + (X - 3)^2 - 4R(X) + 4(X - 3) + 5 - X = \\ &= R(X) [R(X) - 2(X - 3) - 4] + X^2 - 6X + 9 + 4X - 12 + 5 - X = \\ &= R(X) [R(X) - 2(X - 3) - 4] + X^2 - 3X + 2 = \\ &= R(X) [R(X) - 2X + 2] + R(X) = R(X) [R(X) - 2X + 2 + 1] = \\ &= R(X) [R(X) - 2X + 3], \end{aligned}$$

ceea ce arată că $R(X)$ divide $Q(X)$, mai mult, citul este $R(X) - 2X + 3$, adică $X^2 - 5X + 5$.

VIII.A.49. Suma coeficienților unui polinom $P(X)$ este $P(1)$. Din $Q(1) = 0$, avem $P(Q^2(1)) = P(0)$. Dar $P(0) = a_n$.

Deci suma coeficienților lui $P(Q^2(X))$ este a_n .

VIII.A.50. Din problemă avem că

$$P(X) = (X - 1)Q(X) + r;$$

$$P(X) = (X - 2)Q'(X) + r.$$

Calculînd $P(1)$ și $P(2)$ din cele două relații, obținem:

$$P(1) = r; \quad P(2) = Q(2) + r$$

$$P(1) = -Q'(1) + r \quad P(2) = r.$$

a) Primele două relații conduc la $Q'(1) = 0$, deci $P(1) + Q'(1) = r + 0 = r$.

b) Ultimele două relații conduc la $Q(2) = 0$, deci $(X - 2) \mid Q(X)$.

VIII.A.51. a) Pentru ca $P(X)$ să fie divizibil cu $(X - m)$ trebuie să avem $P(m) = 0$, adică $m^2 - 2(m - 1)m + (m - 1)^2 + p = 0$, deci $p = -1$. Suma coeficienților egală cu 1 implică $1 - 2(m - 1) + (m - 1)^2 + p = 1$ și, ținînd cont că $p = -1$, rezultă $m^2 - 4m + 2 = 0$, adică $(m - 2)^2 - 2 = 0$, $(m - 2 - \sqrt{2})(m - 2 + \sqrt{2}) = 0$, deci $m_1 = 2 + \sqrt{2}$ sau $m_2 = 2 - \sqrt{2}$.

b) Deoarece $P(x) = x^2 - 2(m - 1)x + (m - 1)^2 - 1 = [x - (m - 1)]^2 - 1$ și deoarece un pătrat perfect este nenegativ, rezultă $P(x) \geq -1$ pentru oricare $x \in \mathbf{R}$. Deci, $P(x) < -1$ este falsă, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ și $P(x) \geq -1$ este adevărată, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

VIII.A.52. Suma coeficienților unui polinom este $P(1)$. În cazul nostru avem $P(1) = a(1 - b)(-1)^{k+2} + 1$, sumă care, pentru k par, devine: $P(1) = -2a - b + ab + 1$, iar pentru k impar $P(1) = 2a + b - ab + 1$.

În ambele cazuri, $P(1)$ trebuie să fie 0. Valorile lui a și b întregi pentru care $P(1) = 0$, $k \in \mathbf{N}$, le obținem intersectînd soluțiile întregi ale ecuațiilor:

$$-2a - b + ab + 1 = 0 \quad (1)$$

și

$$2a + b - ab + 1 = 0. \quad (2)$$

Rezolvăm (1) $a(b-2) = b-1$, $a = \frac{b-1}{b-2}$ și trebuie să găsim $b \in \mathbb{Z}$, astfel ca $a \in \mathbb{Z}$.

Avem $a = \frac{b-1}{b-2} = \frac{b-2+1}{b-2} = 1 + \frac{1}{b-2}$ care este întreg dacă $\frac{1}{b-2}$ este întreg, adică $b-2 = \pm 1$, de unde $b = 3$ sau $b = 1$.

Pentru $b = 3$, avem $a = 2$, iar $b = 1$, avem $a = 0$, deci perechile (2, 3) și (0, 1).

Rezolvând asemănător ecuația $2a + b - ab + 1 = 0$, obținem perechile $(-2, 1)$, $(0, -1)$, $(2, 5)$ și $(4, 3)$.

Cum în cele două mulțimi de soluții nu sînt elemente comune, rezultă că suma coeficienților nu poate fi zero, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

VIII.A.53. Efectuăm împărțirea primului polinom prin al doilea, punind condiția ca restul să fie nul.

$$\begin{array}{r} X^4 + 4aX^3 + bX^2 + 4cX + d \\ - X^4 - 3aX^3 - 3bX^2 - cX \\ \hline \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} X^3 + 3aX^2 + 3bX + c \\ X + a \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} aX^3 + 3bX^2 + 3cX + d \\ - aX^3 - 3a^2X^2 - 3abX - ac \\ \hline \end{array}$$

$$3(b-a^2)X^2 + 3(c-ab)X + (d-ac)$$

Din identificarea restului cu polinomul nul se obțin relațiile:

$$b - a^2 = 0, \quad c - ab = 0, \quad d - ac = 0, \quad \text{de unde } b = a^2, \quad c = a^3, \quad d =$$

$$= a^4 \text{ și avem } \therefore X^3 + 3aX^2 + 3bX + c =$$

$$= X^3 + 3aX^2 + 3a^2X + a^3 = (X+a)^3 \text{ și}$$

$$X^4 + 4aX^3 + 6bX^2 + 4cX + d =$$

$$= (X^3 + 3aX^2 + 3bX + c)(X+a) = (X+a)^3(X+a) = (X+a)^4,$$

ceea ce demonstrează afirmațiile problemei.

VIII.A.54. Din punctul a) rezultă $P(1) = 3$. Calculînd $P(3)$ din b), obținem $P(3) + 3P(3) = 4$, de unde $P(3) = 1$.

Scriem împărțirea cu rest a lui $P(X)$ la $X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$; $P(X) = (X-1)(X-3)Q(X) + mX + n$, unde restul este $mX + n$, de grad mai mic decît gradul împărțitorului, deci mai mic decît 2. Calculînd, pe rînd, $P(1)$ și $P(3)$ din relația obținută, rezultă sistemul

$$\begin{cases} P(1) = m + n \\ P(3) = 3m + n \end{cases}$$

cu soluția $m = -1$ și $n = 4$, deci restul căutat este $-X + 4$.

VIII.A.55. Știm că restul împărțirii unui polinom $P(X)$ la $X - a$ este $P(a)$. Avem, deci,

$$P(3) = -2$$

$$P(-1) = -2 \text{ sau}$$

$$2 \cdot 3^3 - m \cdot 3^2 + n \cdot 3 - 16 = -2$$

$$2 \cdot (-1)^3 - m(-1)^2 + n(-1) - 16 = -2.$$

Se obține sistemul

$$\begin{cases} -9m + 3n = -40 \\ -m - n = 16 \end{cases}$$

cu soluția $m = -\frac{2}{3}$; $n = -\frac{46}{3}$, iar $P(X) = 2X^3 + \frac{2}{3}X^2 - \frac{46}{3}X - 16$.

$$\text{Restul împărțirii la } X - 1 \text{ este } P(1) = -\frac{86}{3}.$$

VIII.A.56. Prima condiție se scrie $P(1) = 3$. Din a doua, pentru $x = 1$, se obține $0 \cdot P(1) + 1 \cdot P(3) = 1$, deci $P(3) = 1$. Scriem acum relația ce exprimă împărțirea cu rest a lui $P(X)$ la $X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$, $P(X) = (X - 1)(X - 3)Q(X) + mX + n$.

Pentru $x = 1$ și $x = 3$ se obține sistemul :

$$\begin{cases} m + n = P(1) = 3 \\ 3m + n = P(3) = 1 \end{cases}$$

cu soluția $m = -1$, $n = 4$, deci restul căutat este binomul $-X + 4$.

VIII.A.57. Restul căutat este

$$P(1985) = 1985^4 - 1986 \cdot 1985^2 + 1987 \cdot 1985^2 - 1988 \cdot 1985 + 1986.$$

Pentru a calcula mai ușor acest rest luăm : $a = 1984$ și avem :

$$\begin{aligned} P(1985) &= (a + 1)^4 - (a + 2)(a + 1)^3 + (a + 3)(a + 1)^2 - \\ &\quad - (a + 4)(a + 1) + a + 2 = a^2 = 1984^2. \end{aligned}$$

b) Restul împărțirii lui $P(X) + a$ la $X - 1985$ este restul împărțirii lui $P(X)$ la 1985 adunat cu a .

Deci, $1984^2 + a = 1986^2$, de unde :

$$a = 1986^2 - 1984^2 = (1986 - 1984)(1986 + 1984) = 2 \cdot 3970 = 7940.$$

VIII.A.58. Din condițiile problemei, $P(-2) = 53$ și $P(1) = 2$. Scriem relația care exprimă împărțirea lui $P(X)$ la $Q(X) = (X - 2)(X - 1)$.

$$P(X) = (X + 2)(X - 1) \cdot C(X) + mX + n.$$

Din $P(-2)$ și $P(1)$ obținem :

$$\begin{cases} -2m + n = P(-2) = 53 \\ m + n = P(1) = 2 \end{cases}$$

cu soluția $m = -17$, $n = 19$.

Deci, restul căutat este binomul $-17X + 19$.

VIII.A.59. Aplicînd teorema împărțirii cu rest cu notațiile $R_1(X) = 2X - 5$ și $R_2(X) = 3X - 4$, obținem :

$$(1) \text{ grad } S(X) = 2$$

$$(2) P(X) = S(X) \cdot C_1(X) + R_1(X)$$

$$(3) Q(X) = S(X) \cdot C_2(X) + R_2(X)$$

Din ultimele două relații avem

$$S(X) \mid P(X) - R_1(X) \text{ și}$$

$$S(X) \mid Q(X) - R_2(X)$$

Calculînd diferențele din partea dreaptă a relațiilor de divizibilitate de mai sus, obținem

$$P(X) - R_1(X) = (X - 3)(X^2 - 2X + 5) \text{ și}$$

$$Q(X) - R_2(X) = (X - 2)(X^2 - 2X + 5).$$

$$\text{Deci, } S(X) = X^2 - 2X + 5.$$

VIII.A.60. Din teorema împărțirii polinoamelor avem

$$P(X) = C(X) \cdot (X^2 + 2X - 15) + R(X) \quad (1)$$

$$0 \leq \text{gr. } R(X) < \text{gr. } (X^2 + 2X - 15) \quad (2)$$

Din (2) avem $R(X) = aX + b$ și (1) devine

$$P(X) = C(X) \cdot (X - 3)(X + 5) + (aX + b) \quad (1')$$

Cum restul împărțirii lui $P(X)$ la $X - 3$ este 5, avem $P(3) = 5$ și, analog, $P(-5) = -11$.

În (1') facem pe rînd $x = 3$ și $x = -5$. Vom obține sistemul :

$$\begin{cases} 3a + b = 5 \\ -5a + b = -11 \end{cases}$$

cu soluția $a = 2$, $b = -1$

Deci restul cerut este $2X - 1$.

VIII.A.61. Din teorema împărțirii polinoamelor știm că gradul restului este mai mare sau egal cu zero, dar mai mic decît gradul împărțitorului. Cum împărțitorul este $X^2 - 5$, avem cîtul și restul de forma : $aX + b$.

Tot din teorema împărțirii avem :

$$P(X) = (X^2 - 5)(aX + b) + aX + b$$

Afectuînd calculele obținem : $P(X) = aX^3 + bX^2 - 4aX - 4b$.

Calculăm $P(k) + P(-k)$ și obținem $2bk^2 - 8b$.

Din $P(k) + P(-k) = 4k^2 - 16$ pentru orice $k \in \{-2, 0, 2\}$ și $P(k) + P(-k) = 2bk^2 - 8b$, deducem : $2b = 4$, $8b = 16$, adică, $b = 2$, iar termenul liber al lui $P(X)$ este $-4b$, adică -8 .

VIII.A.62. a) Se poate efectua împărțirea celor două polinoame, dar se poate proceda și astfel :

$$\begin{aligned} P(X) &= mX^{11} - mX^2 + X^2 + X + 1 = \\ &= mX^2(X^9 - 1) + (X^2 + X + 1) = \\ &= mX^2(X^3 - 1)(X^6 + X^3 + 1) + (X^2 + X + 1) = \\ &= mX^2(X - 1)(X^2 + X + 1)(X^6 + X^3 + 1) + (X^2 + X + 1) = \\ &= (X^2 + X + 1)[mX^2(X - 1)(X^6 + X^3 + 1) + 1]. \end{aligned}$$

Se observă că $(X^2 + X + 1) \mid P(X)$.

Deci, restul împărțirii lui $P(X)$ la $(X^2 + X + 1)$ este 0.

b) Avem încă din relația obținută

$$P(3) = (3^2 + 3 + 1)[m \cdot 3^2(3 - 1)(3^6 + 3^3 + 1) + 1] = M_{13},$$

pentru orice $m \in \mathbb{Z}$.

VIII.A.63.

$$\begin{aligned} P(X^5) &= (X^5)^4 + (X^5)^3 + (X^5)^2 + X^5 + 1 = \\ &= X^{20} + X^{15} + X^{10} + X^5 + 1 = \\ &= X^{15}(X^5 + 1) + X^5(X^5 + 1) + 1 = \\ &= (X^5 + 1)(X^{15} + X^5) + 1 = \\ &= (X + 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)(X^{15} + X^5) + 1 = \\ &= (X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)[(X + 1)(X^{15} + X^5)] + 1 = \\ &= (X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)(X^{16} + X^{15} + X^6 + X^5) + 1. \end{aligned}$$

Deci, citul împărțirii este $X^{16} + X^{15} + X^6 + X^5$, iar restul, 1.

VIII.A.64. Dacă polinomul $P(X)$ are gradul trei și se divide cu $X^2 + X - 2$, atunci citul este de gradul întâi și avem :

$$P(X) = (aX + b)(X^2 + X - 2) \text{ sau,}$$

$$P(X) = aX^3 + (a + b)X^2 + (b - 2a)X - 2b.$$

Împărțim $P(X)$ la $X^2 + 2X - 8$

$aX^3 + (a + b)X^2 + (b - 2a)X - 2b$	$X^2 + 2X - 8$
$-aX^3 - 2aX^2 + 8aX$	$aX + (b - a)$
<hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/>	
$(b - a)X^2 + (b + 6a)X - 2b$	
$-(b - a)X^2 - (2b - 2a)X + 8b - 8a$	
<hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/>	
$(8a - b)X + 6b - 8a$	

Se obține sistemul

$$\begin{cases} 8a - b = 22 \\ -8a + 6b = -12, \text{ cu soluția } a = 3, b = 2, \end{cases}$$

iar $P(X) = 3X^3 + 5X^2 - 4X - 4$.

VIII.A.65. a) Facem împărțirea cu schema lui Horner :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{Q(X)} \qquad \underbrace{\hspace{2em}}_R$

Deci, citul căutat este $Q(k) = X^{k-1} + X^{k-2} + X^{k-3} + \dots + X + 1$.

b) Notînd, ca mai sus, polinomul $X^{k-1} + X^{k-2} + \dots + X + 1 = Q(X)$, avem

$$\begin{aligned} P(X) &= [XQ(X) + 1]^3 - X^{2k} = \\ &= X^3Q^3(X) + 3X^2Q^2(X) + 3XQ(X) + 1 + X^{2k} = \\ &= Q(X)[X^3Q^2(X) + 3X^2Q(X) + 3X] - (X^k - 1)(X^k + 1) = \\ &= Q(X)[X^3Q^2(X) + 3X^2Q(X) + 3X] - (X - 1)Q(X)(X^k + 1) = \\ &= Q(X)[X^3Q^2(X) + 3X^2Q(X) + 3X - (X - 1)(X^k + 1)]. \end{aligned}$$

Deci, $Q(X) \mid P(X)$.

c) Avem $P(1) = (k + 1)^3 - 1$ și $P(-1) = -1$ pentru k impar și zero pentru k par. Obținem cazurile :

Pentru k impar, $P(1) - P(-1) = (k + 1)^3$, cub perfect.

Pentru k par avem $P(1) - P(-1) = (k + 1)^3 - 1$, dar $(k + 1)^3 > (k + 1)^3 - 1 > k^3$ (a doua inegalitate se verifică ușor pentru $k > 0$) și cum între $(k + 1)^3$ și k^3 nu există cuburi perfecte, în acest caz $P(1) - P(-1)$ nu este cub perfect.

În concluzie, $P(1) - P(-1)$ este cub perfect dacă și numai dacă $k \geq 3$ este număr impar.

VIII.A.66. a) $P(P(X)) = P^2(X) - 1 = (X^2 - 1)^2 - 1 = X^4 - 2X^2$.

b) $Q(X) = aX + b$; $Q(Q(X)) = aQ(X) + b = a(aX + b) + b = a^2X + ab + b$. Am obținut tot un polinom de gradul I. Vom arăta că, dacă $M(X)$ și $N(X)$ sînt polinoame de gradul I, atunci $M(N(X))$ are tot gradul I.

Fie $M(X) = aX + b$ și $N(X) = cX + d$; avem : $M(N(X)) = aN(X) + b = a(cX + d) + b = acX + ad + b$, adică un polinom de gradul I. Cu aceasta deducem că, ori de cîte ori am calcula $Q(Q(X))$, obținem un polinom de gradul I.

c) $R(X) = X + 1986$.

VIII.A.67. a) Aplicînd formula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, polinomul se scrie succesiv :

$$\begin{aligned} P_{m, n}(X) &= (mX + n + nX + m)(mX + n - nX - m) = \\ &= [m(X + 1) + n(X + 1)][X - 1 - n(X - 1)] = \\ &= (X + 1)(m + n)(X - 1)(m - n). \end{aligned}$$

b) Dacă $m - n = x$, în descompunerea anterioară avem factorul $(x - 1)x(x + 1)$, adică produsul a trei numere întregi consecutive, care este divizibil cu 6.

c) Cum diferența dintre primul și ultimul dintre cele trei numere întregi consecutive trebuie să fie 2, obținem $(m + n) - (m - n) = 2$, adică $n = 1$ și cum $x + 1 = (m - n) + 1$, avem $x = m - 1$.

În concluzie

$$P_{m, n}(x) = (x+1)(x+2)(x-1)x = (x-1)x(x+1)(x+2),$$

deci produs de patru numere întregi consecutive, care este divizibil cu 24. Într-adevăr, produsul este evident divizibil cu 3 și 4 pe baza proprietății cunoscute, folosită la punctul a). Printre cele 4 numere apar exact două pare, dintre care exact unul este multiplu de 4. În concluzie, produsul este divizibil cu 8 și, fiind divizibil și cu 3, este multiplu de 24.

VIII.A.68. a) $X - a$ divide $P(X) = X^2 - 5X + 6$, dar $P(X) = (X-2)(X-3)$; deducem că $X - a$ este $X - 2$ și atunci $Q(X) = X - 3$, sau $X - a$ este $X - 3$ și atunci $Q(X) = X - 2$.

Deci, $D(X) = X^2 - 5X + 6 - X + 3 = X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$, deci $X - b$ este $X - 3$, sau $D(X) = X^2 - 5X + 6 - X + 2 = X^2 - 6X + 8 = (X-2)(X-4)$, deci $X - b$ este $X - 2$ sau $X - 4$.

$$\begin{aligned} b) S_{\min} &= f(0) + f(1) + \dots + f(1986) = \\ &= (-1) + (-1) + \dots + (-1) = -1987, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\max} &= f(0) + f(1) + \dots + f(1986) = \\ &= (+1) + (+1) + \dots + (+1) = +1987. \end{aligned}$$

Dacă $f(0)f(1) \dots f(1986) \neq 0$ înseamnă că, $(\forall) n \in \{0, 1, 2, \dots, 1986\}$, $f(n) \neq 0$, adică funcția nu ia valoarea zero.

În suma $S = f(0) + f(1) + \dots + f(1986)$ avem 1987 termeni. Pentru ca $S = 0$, trebuie să avem un număr egal de -1 și $+1$, lucru imposibil, deoarece avem un număr impar de termeni.

VIII.A.69. a) Avem :

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= (X^2 - Y^2)(X^2 + Y^2) - 2XY(X^2 - Y^2) - (X^2 - Y^2) = \\ &= (X^2 - Y^2)(X^2 + Y^2 - 2XY - 1) = (X - Y)(X + Y)[(X - Y)^2 - 1] = \\ &= (X - Y)(X + Y)(X - Y - 1)(X - Y + 1). \end{aligned}$$

Deci, pentru $P(X, Y) = 0$, rezultă $Y = X$, sau $Y = -X$, sau $Y = X - 1$, sau $Y = X + 1$ și cum $X \in \mathbb{Q}$, am avea $Y \in \mathbb{Q}$, contradicție, de unde soluția problemei.

b) Observăm că pentru $x = 0$, primul produs din expresie devine egal cu cel de-al doilea, factor cu factor, în aceeași ordine. Căutăm x pentru care primul produs să aibă chiar factorii de la al doilea, cu semne schimbate, în ordine inversă, deci $X + 1 = -1985$, $X = -1986$.

Cum numărul factorilor din fiecare produs este impar, avem :

$$\begin{aligned} P(-1986) &= (-1985)(-1984) \dots (-1) + (1)(2) \dots (1985) = \\ &= -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1985 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1985 = 0. \end{aligned}$$

Deci $P(X)$ este divizibil cu $(X + 1986)$, deci este reductibil.

VIII.A.70. a) Notăm $n^3 + 3n^2 + n = y$ și avem

$$N = y(y + 2) + 1 = y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2.$$

Revenind, deducem

$N = (n^3 + 3n^2 + n + 1)^2$, deci pătrat perfect.

b) Din analiza domeniilor de definiție ale celor două funcții este evident că A nu aparține graficului funcției f . Ca să aparțină graficului funcției g trebuie ca $g(1) = 2$.

Cum $g(1) = -1 + 3 = 2$, avem $A \in G_g$.

Inecuația are sens pentru acele valori pentru care se poate calcula și $f(x)$ și $g(x)$, adică pentru $x \in D_f \cap D_g$, unde D_f și D_g sînt domeniile de definiție ale lui f , respectiv g . $D_f \cap D_g = (1, 7] \cap [-10, 2] = (1, 2]$. Rezolvăm inecuația prin semnul funcției de gradul I.

Formăm tabelul

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	-	-	0	+
$g(x)$	+	+	+	0
$\frac{f(x)}{g(x)}$	-	-	0	+

Deducem că $x \in [-1, 3]$, soluție care trebuie intersectată cu $[1, 2]$ de unde obținem soluția finală $x \in [1, 2]$.

VIII.A.71. Avem :

$$F = \frac{3^{n+1} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+2} + 6 \cdot 3^n \cdot 5^n}{4^n \cdot 2 \cdot 3^n + 3^{n+1} \cdot 4^n + 4^n \cdot 4 \cdot 3^{n+1}} = \frac{3^n \cdot 5^n \cdot (3 + 25 + 6)}{4^n \cdot 3^n \cdot (2 + 3 + 12)} =$$

$$= \frac{3^n \cdot 5^n \cdot 34}{4^n \cdot 3^n \cdot 17} = \frac{3^n \cdot 5^n \cdot 2}{4^n \cdot 3^n} = \frac{5^n \cdot 2}{4^n} = \frac{5^n}{2^{2n-1}}.$$

VIII.A.72. Descompunem în factori numărătorul și numitorul și avem fracția $f = \frac{(n^2 - 2)(n - 3)}{(n^2 + 2)(n + 3)}$.

a) Dacă $n = 2k$, atunci $n^2 = 4k^2$ sau $n^2 = 21$, și deci $n^2 - 2$ și $n^2 + 2$ sînt multipli de 2, adică f este reducibilă.

b) Dacă $n = 2k + 1$, atunci $n - 3$ și $n + 3$ sînt multipli de 2, deci f este reducibilă.

VIII.A.73. a) :

$$F(X) = \frac{2(X^2 + 8X - 9)}{X^2 + 5X - 6} = \frac{2[(X^2 + 9X - (X + 9))]}{X^2 + 6X - (X + 6)}.$$

$$F(X) = \frac{2(X-1)(X+9)}{(X-1)(X+6)} = \frac{2(X+9)}{X+6}$$

b) $F(x) = \frac{2x+18}{x+6} = 2 + \frac{6}{x+6}$, care este număr întreg dacă $x+6$ divide pe 6.

Cum divizorii lui 6 sînt $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, avem ecuațiile : $x+6=1, x+6=-1, x+6=2, x+6=-2, x+6=3, x+6=-3, x+6=6, x+6=-6$.

De aici deducem $x \in \{-5, -7, -4, -8, -3, -9, 0, -12\}$.

VIII.A.74. a)

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{X^3 - 10X^2 - X + 10}{X^2 - 9X - 10} = \frac{X(X^2 - 1) - 10(X^2 - 1)}{(X+1)(X-10)} = \\ &= \frac{(X^2 - 1)(X - 10)}{(X+1)(X-10)} = \frac{(X-1)(X+1)(X-10)}{(X+1)(X-10)} = X - 1. \end{aligned}$$

b) Deoarece, pentru $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 10\}$ avem $F(x) = x - 1$ și x este de paritate contrară lui $x - 1$, rezultă afirmația cerută.

VIII.A.75. a) :

$$F(X) = \frac{X^4 + 7X^3 + 9X^2 - 7X - 10}{X^2 + 4X - 5} = \frac{X^4 + 7X^3 + 9X^2 - 7X - 10}{(X-1)(X+5)}$$

Descompunerea numărătorului ne interesează numai dacă conține factorii $X - 1$ sau $X + 5$. Pentru aceasta trebuie să stabilim cu care din cele două binoame se divide numărătorul. Avem :

$$\frac{X^4 + 7X^3 + 9X^2 - 10}{X - 1} = X^3 + 8X^2 + 17X + 10.$$

Pentru divizibilitatea cu $X + 5$ încercăm cu polinomul $X^3 + 8X^2 + 17X + 10$. Rezultă $X^2 + 3X + 2$.

$$F(X) = \frac{(X-1)(X+5)(X^2+3X+2)}{(X-1)(X+5)} = X^2 + 3X + 2.$$

b) Pentru orice $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-5, 1\}$, $F(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$. Cum $x+1$ și $x+2$ sînt numere întregi consecutive, iar produsul a două numere consecutive se divide cu 2, rezultă că $F(x) = 2k$, adică număr par.

VIII.A.76. a) Pentru ca o fracție să existe, numitorul trebuie să fie diferit de zero. Vom afla valorile pentru care numitorii sînt zero.

Avem, deci :

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \text{ sau } (x-1)^3 = 0, \text{ deci } x = 1;$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \text{ sau } x^2(x-1) - (x-1) = 0 \text{ sau } (x-1)^2(x+1) = 0, \text{ deci } x = 1 \text{ sau } x = -1;$$

$$x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0 \text{ sau } x^4 - 1 - 2x(x^2 - 1) = 0;$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1) = 0;$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1 - 2x) = 0;$$

$$(x^2 - 1)(x - 1)^2 = 0;$$

$$(x - 1)^3(x + 1) = 0, \text{ deci } x = 1 \text{ sau } x = -1;$$

$$x = 0 \left(\text{din } \frac{4}{x} \right), \text{ iar din } x + 4 + \frac{4}{x} = 0 \text{ avem } x^2 + 4x + 4 = 0 \text{ sau } (x + 2)^2 = 0, \text{ adică } x = -2.$$

Deducem că expresia nu există dacă $x \in \{-2, -1, 0, 1\}$.

b) Folosind descompunerile de la punctul a) avem :

$$\begin{aligned} E &= \frac{x}{(x-1)^3} + \frac{x}{(x-1)^2(x+1) - (2+x-x^3)} \cdot 6 \frac{\frac{x^2-2x+1}{x}}{x^2+4x+4} = \\ &= \frac{x^2+x(x-1)-2-x+x^3}{(x-1)^3(x+1)} \cdot \frac{6(x-1)^2}{(x+2)^2} = \\ &= \frac{x^3+2x^2-x-2}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{6}{(x+2)^2} = \frac{[x^2(x+2)-(x+2)]}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{6}{(x+2)^2} = \\ &= \frac{6(x+2)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)^2} = \frac{6}{x+2}. \end{aligned}$$

c) E are valori întregi dacă $x+2$ divide pe 6; cum divizorii lui 6 sînt $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, avem $x \in \{-8, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 4\}$.

VIII.A.77. b) Avem relația (1): $f(x-2) = 3x - 5 - f(1)$.

Punctul $B(1, 3)$ aparține graficului funcției dacă $F(1) = 3$.

În (1) facem $x = 3$ și avem $f(1) = 9 - 5 - f(1)$, $2f(1) = 4$, $f(1) = 2$, deci B nu aparține graficului lui f .

Înlocuim în (1), $f(1) = 2$ avem (2): $f(x-2) = 3x - 7$; $A(0, 1)$ aparține graficului lui f dacă $f(0) = -1$.

În (2) facem $x = -2$ și obținem $f(0) = -1$, deci A aparține graficului f . Pentru $C(2, 5)$ trebuie să avem $f(2) = 5$.

În (2) luăm $x = 4$ și, deci, $f(2) = 5$ adică C aparține graficului lui f .

VIII.A.78. a) Frația se simplifică cu $X-1$ dacă și numai dacă numărătorul și numitorul se divid cu $X-1$. Din teorema lui Bézout, $N(X)$ se divide cu $X-1$ dacă și numai dacă $N(1) = 0$. Dar $N(1) = 1 + m^2 + (m+1) + 4m + 1 - 3 = m^2 + 5m = 0$, $m(m+5) = 0$, $m_1 = 0$, $m_2 = -5$.

b) $F(X)$ se simplifică cu $x^2-1 \Leftrightarrow N(x)$ se divide cu $x-1$ și $x+1$. Din a), $N(x)$ se divide cu $x-1$, de unde $m = 0$ sau $m = -5$. Vom arăta că pentru $m = 0$ sau $m = -5$, $N(x)$ nu se divide cu $x+1$. 1) Pentru $m = 0$, $N(x) = x^4 + x^2 + x - 3$; $N(-1) = 1 + 1 - 1 - 3 = -2$. 2) Pentru $m = -5$, $N(x) = x^4 + 25x^3 - 4x^2 - 19x - 3$; $N(-1) = 1 - 25 - 4 + 19 - 3 = -12$.

VIII.A.79. a) Dacă $F(X)$ se simplifică prin $X^2 - 3X + 2$, atunci și numărătorul și numitorul sînt divizibile cu acesta. $(X^4 - 6X^3 + nX + mX - 8) : (X^2 - 3X + 2)$ dă cîtul $X^2 - 3X + (n - 11)$ și restul $(m + 3n - 27)X + 14 - 2n$. Acest rest va fi 0 dacă și numai dacă $n = 7$, $m = 6$. Numitorul, împărțit la $X^2 - 3X + 2$, dă cîtul $X - 3$ și restul $(p - 11)X$, de unde $p = 11$. Înlocuind m, n, p avem :

$$F(X) = \frac{X^4 - 6X^3 + 7X + 6X - 8}{X^3 - 6X^2 + 11X - 6} = \frac{(X + 1)(X - 4)}{X - 3}$$

b) $F(x) \cdot \frac{1}{x - 4} = \frac{x + 1}{x - 3}$, care trebuie să aparțină lui \mathbf{Z} . Dar $\frac{x + 1}{x - 3} = 1 + \frac{4}{x - 3}$, deci $\frac{x + 1}{x - 3} \in \mathbf{Z} (\Leftrightarrow) \frac{4}{x - 3} \in \mathbf{Z}$, adică $x \in \{-1, 2, 4, 5, 7\}$. Deci $A = \{-1, 1, 2, 4, 5, 7\}$.

VIII.A.80. a) $E(x) = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)}$

b) Deoarece valorile lui $E(x)$ se pot calcula pentru orice număr real, în afară de ± 1 , vom avea : $g : \mathbf{R} \setminus \{-1, +1\} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)}$.

VIII.A.81. a) Polinomul, avînd coeficienții întregi, căutăm factori de forma $(X - a)$ cu a divisor al termenului liber. Găsim $a = 1, 3, 4$ iar, în final, $P(X) = (X - 1)(X - 3)(X - 4)$.

b) Rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ sînt 1, 3, 4. Deci $A = \{1, 3, 4\}$.

c) Avem $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

d) $E(x) = \frac{3x^2 - 12x + 19}{x^2 - 4x + 5} = 3 + \frac{4}{(x - 2)^2 + 1}$, deci putem lua $m = 3$, $n = 4$ și $p = 1$.

e) Avem, conform punctului c), $x^2 - 4x + 5 \geq 1$, deci

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 5} \leq 1, \text{ de unde } 3 + \frac{4}{x^2 - 4x + 5} \leq 7,$$

deci $E(x) \leq 7$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. În plus, $\frac{4}{x^2 - 4x + 5} > 0$, de unde $E(x) > 3$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. În concluzie, $E(x) \in [3, 7]$, oricare ar fi x real.

f) Conform punctului d), $E(x) = 3 + \frac{4}{(x - 2)^2 + 1}$. Din $E(x) \in \mathbf{Z}$

avem : $\frac{4}{(x - 2)^2 + 1} \in \mathbf{Z}$. Deoarece $(x - 2)^2 + 1$ este nenegativă, oricare ar fi $x \in \mathbf{Z}$, atunci $(x - 2)^2 + 1$ trebuie să fie divisor pozitiv al lui 4. Rezolvînd în \mathbf{N} ecuațiile obținute, avem $B = \{1, 2, 3\}$.

VIII.A.82. Avem succesiv :

$$\begin{aligned} & \sqrt{2+\sqrt{3}} \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \\ & \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\ & \sqrt{2^2 - (\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}})^2} = \sqrt{2+\sqrt{3}} \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\ & \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

VIII.A.83. Numărul $2\sqrt[3]{3}$ este număr irațional. Pentru ca p să fie natural trebuie ca $2\sqrt[3]{3}$ să se reducă. De aici avem $3n+6=12$, sau $n=2$ și: $(-1)(3k+1)=1$ echivalent cu $l=3k+1$, număr par; cum $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, avem, pentru $k=0, l=1$; $k=1, l=4$; $k=2, l=7$; $k=3, l=10$; $k=4, l=13$; $k=5, l=16$. Avem, deci, perechile: $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(5, 2)$.

VIII.A.84. Întrucît $4 - \sqrt{15} > 0$ și $\sqrt{6} < \sqrt{10}$, rezultă $a > 0$, $b < 0$. Calculînd pătratele numerelor date, obținem: $a^2 = 4(4 - \sqrt{15})$ și $b^2 = 16 - 2\sqrt{4 \cdot 15} = 4(4 - \sqrt{15})$, deci $a^2 = b^2$, deci $a = b$, sau $a = -b$. Cum a și b au semne contrare, rămîne $a = -b$.

VIII.A.85. Demonstrăm prin reducere la absurd. Să presupunem că $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{p}{q}$, unde $p, q \in \mathbf{N}$, $q \neq 0$ și să presupunem fracția $\frac{p}{q}$ ireducibilă. Prin ridicare la pătrat rezultă $a^2 + b^2 = \frac{p^2}{q^2}$, unde $\frac{p^2}{q^2}$ este ireducibilă, deci $q = 1$, $a^2 + b^2 = p^2$; dar a și b sînt impare, rezultă p par și am avea $(M_2 + 1)^2 + (M_2 + 1)^2 = (M_2)^2$, deci $2 = M_2$, contradicție. În concluzie, $\sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbf{Q}$ în condițiile problemei.

VIII.A.86. Deoarece $3k+1 \mid 3k^2+2k-3$ și $3k+1 \mid k(3k+1) = 3k^2 + k$, rezultă $3k+1$ divide $(3k^2+2k-3) - k(3k+1) = k-3$. Dar atunci $3k+1 \mid 3(k-3)$, de unde $3k+1 \mid 10$. De aici, $k \in \{0, -1, -2, 3\}$, celelalte valori neconvenind condiției $k \in \mathbf{Z}$.

O altă metodă considerăm fracția $\frac{3k^2+2k-3}{3k+1} = k + \frac{1}{3} - \frac{10}{3(3k+1)}$. Rezultă $3k+1$ divide pe 10, deci $k \in \{-2, -1, 0, 3\}$. Verificînd, se constată că pentru fiecare k din intervalul dat, $3k+1$ divide $3k^2+2k-3$.

VIII.A.87. Notăm $1981 = a$ și avem $a(a+1)(a+2)(a+3) + 1 = a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a + 1$. Căutăm un divizor de gradul 2, $P(a) = a^2 + ka + 1$, cu $[P(a)]^2 = a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a + 1$, adică $a^4 + 2ka^3 + (k^2 + 2)a^2 + 2ka + 1 = a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a + 1$. Putem lua $k = 3$ și avem $a(a+1)(a+2)(a+3) + 1 = (a^2 + 3a + 1)^2$. Luând $a = 1981$, obținem un pătrat perfect.

VIII.A.88. Avem, succesiv :

$$\begin{aligned} A &= 5^{n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{n+1} = \\ &= 25^n \cdot 2^n \cdot 20 + 3^n \cdot 4^n \cdot 18 = 50^n \cdot (19 + 1) + 12^n \cdot (19 - 1) = \\ &= 19 \cdot 50^n + 19 \cdot 12^n + 50^n - 12^n \cdot 19 \cdot 50^n + 19 \cdot 12^n + \\ &+ (50 - 12)(50^{n-1} + 50^{n-2} \cdot 12 + \dots + 12^{n-1}) = M19. \end{aligned}$$

VIII.A.89. Numărul p se divide cu 5 dacă are ultima cifră 0 sau 5. Ultima cifră a lui 1985^n este 5, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Ultima cifră a lui 1984^n este 4, dacă $n = 2k + 1$ și 6, dacă $n = 2k$. Vom avea, deci pentru $n = 2k$, $p = \dots 5 + \dots 6 + x = \dots 1 + x$. Cum ultima cifră trebuie să fie zero sau 5, deducem $x = 4$, sau $x = 9$. Pentru $n = 2k + 1$, $p = \dots 5 + \dots 4 + x = \dots 9 + x$; rezultă $x = 1$, sau $x = 6$.

VIII.A.90. Putem scrie :

$$\begin{aligned} A &= (2903^n - 803^n) - (464^n - 261^n) = \\ &= M_{(2903-803)} - M_{(464-261)} = M_7 - M_7 = M_7 \text{ și, apoi,} \\ A &= (2903^n - 464^n) - (803^n - 261^n) = M_{(2903-464)} - M_{(803-261)} = \\ &= M_{271} - M_{271} = M_{271}. \end{aligned}$$

Cum 7 și 271 sînt prime între ele rezultă că A este multiplu de $7 \cdot 271 = 1897$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

VIII.A.91. Determinăm mulțimea A .

$$\frac{3x+2}{x-2} = \frac{3x-6+8}{x-2} = 3 + \frac{8}{x-2}, \text{ deci } \frac{3x+2}{x-2} \in \mathbb{Z}, \text{ dacă } \frac{8}{x-2} \in \mathbb{Z},$$

adică dacă $x-2 = 1$, $x-2 = -1$, $x-2 = 2$, $x-2 = -2$, $x-2 = 4$, $x-2 = -4$, $x-2 = 8$, $x-2 = -8$, cu soluțiile naturale aparținînd mulțimii $A = \{0, 1, 3, 4, 6, 10\}$. Asemănător avem $B = \{2, 3, 4, 5, 7, 13\}$, deci $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 13\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$ și $A \setminus B = \{0, 1, 6, 10\}$.

VIII.A.92. Scoatem y din ecuație : $y = -1 + \frac{180}{x^2}$; y este număr natural dacă x^2 divide pe 180. Cum $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, deducem că $x^2 = 2^2$, sau $x^2 = 3^2$, sau $x^2 = 2^2 \cdot 3^2$, de unde $x = 2$, sau $x = 3$, sau $x = 6$. Cînd $x = 2$, $y = 44$, cînd $x = 3$, $y = 19$, cînd $x = 6$, $y = 4$.

VIII.A.93. Se impun condițiile $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$. Efectuăm operațiile în membrul stâng. Din

$$\frac{9x-1}{x} - \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x(1-x)-2x}{(1-x)(1+x)} = x$$

se obține, succesiv

$$\frac{9x-1}{x} - \frac{x+1}{x} - \frac{(1-x)(1+x)}{-x(x+1)} = 0.$$

Simplificând și eliminând numitorii se obține: $10x - x^2 = 0$ (\Rightarrow)
 $\langle \Rightarrow \rangle x(10-x) = 0$, cu soluțiile $x = 0$ (nu convine) și $x = 10$.

VIII.A.94. a) Punem condiția $x+1 \neq 0$, adică $x \neq -1$. Avem $5x^2 + mx - 3m = (5x-1)(x+1)$, $5x^2 + mx - 3m = 5x^2 + 4x - 1$, $(m-4)x = 3m-1$. Pentru $m=4$ obținem $0 \cdot x = 11$, ecuație fără soluții. Pentru $m \neq 4$ obținem soluția $x = \frac{3m-1}{m-4}$. Rămâne de verificat

dacă, pentru un $m \neq 4$, soluția $\frac{3m-1}{m-4}$ „cade” peste valoarea interzisă

$x = -1$. Avem $\frac{3m-1}{m-4} = -1$, $3m-1 = -m+4$, $4m = 5$, $m =$

$\frac{5}{4}$. În concluzie, pentru $m=4$ sau $m = \frac{5}{4}$ ecuația nu are soluții, iar

pentru $m \in \mathbf{R} \setminus \left\{4, \frac{5}{4}\right\}$ ecuația are o unică soluție, $x = \frac{3m-1}{m-4}$.

$$b) x = \frac{3m-1}{m-4} = \frac{3m-12+11}{m-4} = \frac{3(m-4)+11}{m-4} = 3 + \frac{11}{m-4}$$

Cum x este întreg și m întreg, rezultă că $m-4$ este un divizor al lui 11, adică $m-4 \in \{1, -1, 11, -11\}$. Se obțin valorile $m=5$, care dă $x=14$, $m=3$, cu $x=-8$, $m=15$, cu $x=4$ și $m=-7$, cu $x=2$. Deoarece $-8 \notin \mathbf{N}$, $m=3$ nu este soluție, deci $m \in \{5, 15, -7\}$.

VIII.A.95. a) $(m+1)x - x = -n$, $x(m+1-1) = -n$, $mx = -n$.

Dacă $m = n \neq 0$, ecuația admite ca soluție orice $x \in \mathbf{R}$. Dacă $m = 0 \neq n$, ecuația nu are soluții; dacă $m \neq 0$, ecuația are o unică soluție, $x = \frac{-n}{m}$.

$$b) \text{ Ecuația se mai scrie } \frac{(2x-3)(2x+3)}{x(2x-3)} - \frac{1-x}{x} - \frac{13}{3} = 0, \text{ cu condițiile } x \neq 0,$$

$x \neq \frac{3}{2}$. După simplificare, obținem succesiv: $3(2x+3) - 3(1-x) - 13x = 0$, $6x+9-3+3x-13x = 0$, $-4x = -6$, $x =$

$= \frac{3}{2}$, deci ecuația nu are soluție (din condiția $x \neq \frac{3}{2}$).

VIII.A.96. $a^2x - x = a^3 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = a^3 - 1$. Dacă $a \neq 1$ și $a \neq -1$, atunci $x = \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a+1}{a+1}$. Cum $a \in \mathbb{Z}$, trebuie găsite valorile întregi ale lui a pentru care x este întreg. Avem $a+1 = 1$ sau $a+1 = -1$, de unde $a = 0$ sau $a = -2$. În concluzie, ecuația admite soluții întregi în cazul $a = 0$ sau $a = -2$, egale cu 1, respectiv, -3 . Pentru $a = 1$, ecuația admite ca soluție orice număr întreg, pentru $a = -1$ ecuația nu are soluții.

VIII.A.97. Folosind proprietatea că o sumă de pătrate de numere reale este nulă când toți termenii sînt nuli, obținem că ecuația este echivalentă cu sistemul $x^2 + 2x + 1 = 0$, $x^2 + 3x + 2 = 0$, $x^2 + 4x + 3 = 0$, \dots , $x^2 + 1986x + 1985 = 0$, a cărui unică soluție este $x = -1$, unica rădăcină comună a ecuațiilor sistemului. În general, pentru $P_1(X)$, $P_2(X)$, \dots , $P_n(X)$ polinoame cu coeficienți reali neconstante, ecuația :

$$P_1'(x) + P_1^2(x) + \dots + P^n(x) = 0,$$

are soluție dacă și numai dacă polinoamele $P_1(X)$, $P_2(X)$, \dots , $P_n(X)$ au rădăcină comună. În acest caz, soluțiile ecuației sînt chiar rădăcinile comune ale acestor polinoame.

VIII.A.98. Funcția f este de forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Din condițiile problemei avem $0 = f(1) = a + b + c$, $-2 = f(-1) = a - b + c$, $\frac{7}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c$. Formînd sistemul : $a + b + c = 0$, $a - b + c = -2$, $\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = \frac{7}{4}$, se obțin soluțiile $a = -3$, $b = 1$, $c = 2$, deci $f(x) = -3x^2 + x + 2$.

VIII.A.99. Condițiile problemei sînt : $f(a) = a(b+c)$, $f(b) = b(c+a)$, $f(c) = c(a+b)$. Obținem sistemul : $ma^2 + na + p = a(b+c)$, $mb^2 + nb + p = b(c+a)$, $mc^2 + nc + p = c(a+b)$, cu necunoscutele m, n, p . Reducînd p între ecuațiile 1 și 2 și 1 și 3 rezultă, $m(a+c) + n = b$, $m(b+c) + n = a$, cu soluțiile $m = -1$, $n = a + b + c$, $p = 0$, deci $f(x) = -x^2 + (a + b + c)x$.

VIII.A.100. Din $f(0) = 3$, condiția a doua se retranscrie $f(2) = 5$ și, deci, a treia devine $f(5) = 23$. Deoarece f este funcție de gradul al doilea, avem : $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Obținem sistemul : $c = 3$, $4a + 2b + c = 5$, $25a + 5b + c = 23$, cu soluțiile $a = 1$, $b = -1$, $c = 3$, deci funcția este $f(x) = x^2 - x + 3$.

VIII.A.101. a) $P(X) = aX^2 + bX + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

$$\text{Din } \begin{cases} P(0) = 9 \\ P(1) = 1 \\ P(-1) = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 9 \\ a + b + c = 1 \\ a - b + c = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 9 \\ a + b = -8 \\ a - b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 9 \\ a + b = -8, \text{ cu soluția } a = 4, b = -12, c = 9, \\ 2a = 8 \end{cases}$$

deci $P(X) = 4X^2 - 12X + 9 = (2X - 3)^2$
 $Q(X) = mX^2 + nX + p$; $m, n, p \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.

$$\text{Din } \begin{cases} Q(0) = -3 \\ Q(1) = -2 \\ Q(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -3 \\ m + n + p = -2, \\ m - n + p = 0 \end{cases}$$

cu soluția $m = 2, n = -1, p = -3$,
 deci $Q(X) = 2X^2 - X - 3 = (X + 1)(2X - 3)$.

$$\text{b) } \frac{1}{3} \frac{((x+1)(2x-3))}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2}$$

Condiții $(x+1)(2x-3) \neq 0$ implică $x \neq -1$ și $x \neq \frac{3}{2}$.

În aceste condiții putem simplifica prin $2x-3$; $\frac{2x-3}{3(x+1)} = \frac{1}{2}$, de unde $4x-6 = 3x+3$, care conduce la $x=9$.

VIII.A.102. Efectuăm împărțirea lui $P(X)$ la $X+1$ prin schema lui Horner.

	1	a	b	c
-1	1	a-1	b-a+1	c-b+a-1
	$P(x)$			R

Cum $P(X)$ este divizibil cu $X+1$, rezultă $c-b+a-1=0$. Cîtu împărțirii este $P_1(X) = X^2 + (a-1)X + (b-a+1)$. Cu ultimele două condiții din enunț, formăm sistemul

$$\begin{cases} a - b + c - 1 = 0 \\ 1 + (a - 1) + (b - a + 1) = 2 \\ 4 + 2(a - 1) + (b - a + 1) = -1 \end{cases}$$

cu soluția $a = -5, b = 1, c = 7$.

VIII.A.103. a)

$$\frac{P(0)}{1} = \frac{P(1)}{2} = \frac{P(2)}{3} = \frac{P(0) + P(1) + P(2)}{(1+2+3)} = 1, \text{ și deci}$$

$$(1) \begin{cases} P(0) = 1 \\ P(1) = 2 \\ P(2) = 3 \end{cases}$$

Presupunem că $P(X)$ are gradul 2, deci forma $P(X) = aX^2 + bX + c$.

$$\text{Sistemul (1) devine : } \begin{cases} c = 1 \\ a + b = 1 \\ 4a + 2b = 2 \end{cases}$$

cu soluția $a = 0, b = 1, c = 1$, ceea ce arată că $P(X)$ nu are gradul 2.

Presupunind grad $P(X) = 0$, atunci, $P(X) = c$, dar $P(0) \neq P(1) \neq P(2)$, contradicție.

b) $P(X) : Q(X)$ dă $C(X)$ și $R(X)$ cu proprietățile

$$P(X) = Q(X) \cdot C(X) + R(X) \quad (1)$$

$$0 < \text{gr. } R(X) < \text{gr. } Q(X) \quad (2)$$

Din (2) $\Rightarrow R(X) = mX^2 + nX + p$. Înlocuind în (1), $P(X) = Q(X) \cdot C(X) + mX^2 + nX + p$. Avem succesiv :

$$\begin{cases} P(0) = p \\ P(1) = m + n + p \\ P(2) = m + 2n + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ m + n = 1 \\ 2m + n = 2 \end{cases}$$

cu soluția : $m = 0, n = -1, p = 1$.

Deci, $R(X) = -X + 1$.

VIII.A.104. a)

$$\begin{aligned} (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 &= [(x + y + z)^3 - x^3] - (y^3 + z^3) = \\ &= [(x + y + z) - x] [(x + y + z)^2 + (x + y + z)x + x^2] - \\ &- (y + z)(y^2 - yz + z^2) = (y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + \\ &+ x^2 + xy + xz + x^2) - (y + z)(y^2 - yz) = (y + z)(3x^2 + y^2 + \\ &+ z^2 + 3xy + 3xz + 2yz) - (y + z)(y^2 - yz + z^2) = (y + z)(3x^2 + \\ &+ 3y + 3xz + 3yz) = 3(y + z)[x(x + y) + z(x + y)] = \\ &= 3(x + y)(y + z)(z + x). \end{aligned}$$

b) :

$(3x + y)(y + z)(z + x) = (x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 27 - 3 = 24$, de unde $(x + y)(y + z)(z + x) = 8$, sau încă, ținând cont de prima ecuație, $(3 - x)(3 - y)(3 - z) = 8$, cu $x, y, z \in \mathbf{Z}$.

Considerând descompunerile lui 8 în produse de cîte trei factori, avem :

$$\begin{cases} 3 - x = 8 \\ 3 - y = 3 - z = 1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} 3 - x = -4 \\ 3 - y = -2 \text{ etc.} \\ 3 - z = 1 \end{cases}$$

Reținînd doar tripletele (x, y, z) care verifică toate ecuațiile sistemului, obținem soluțiile : $(1, 1, 1)$ și $(-5, 4, 4)$, precum și cele obținute prin permutările valorilor x, y, z , sistemul fiind simetric.

VIII.A.105. Înmulțim (1) cu 2 și obținem : $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 2zx = 0$, sau, încă, $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 = 0$, ceea ce conduce la $x = y = z$. (3)

Înlocuim (3) în (2) și avem :

$$\sqrt{5} \left[\frac{2}{\sqrt{5} + 1} \right]^2 x + \left[\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} \right]^2 x + x = 2.$$

$$\left[\frac{4\sqrt{5}}{(\sqrt{5} + 1)^2} \right] x + \left[\frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{(\sqrt{5} + 1)^2} \right] x + x = 2.$$

$$\left[\frac{(4\sqrt{5} + 5 - 2\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} + 1)^2} \right] x + x = 2.$$

$$\frac{5 + 2\sqrt{5} + 1}{5 + 2\sqrt{5} + 1} x + x = 2.$$

$$x + x = 2.$$

$$2x = 2.$$

$$x = 1.$$

Deci, $x = y = z = 1$.

VIII.A.106. Dacă $c = 0$, atunci, din prima ecuație avem, fie $x = 0$, de unde, cu a doua, $b = 0$, deci $bz + cy = 0$, contradicție, fie $y = 0$, de unde, cu a treia, $a = 0$, deci $az + cz = 0$, contradicție. Analog se obține și pentru celelalte, deci $a, b, c \neq 0$, de unde $x, y, z \neq 0$.

Sistemul se rescrie, răsturnând ecuațiile :

$$\begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{1}{c} \\ \frac{a}{x} + \frac{c}{z} = \frac{1}{b} \\ \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

Sumând ecuațiile, se obține :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

și, scăzând de aici fiecare ecuație în parte, rezultă

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right), \quad \frac{b}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right),$$

$$\frac{c}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right).$$

În concluzie, sistemul are soluție doar pentru $a, b, c \neq 0$, anume :

$$x = 2a \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right), \quad y = 2b \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right),$$

$$z = 2c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right).$$

VIII.A.107. Din primele trei relații obținem $bcx - abc = 1$, $acy - abc = 1$, $abz - abc = 1$.

Înmulțind relațiile obținute cu, respectiv, 2, 3 și 4 și adunând termen cu termen, rezultă : $2bcx + 3acy + 4abz - 9abc = 9$ și, ținând cont de ultima relație din problemă, obținem $18 - 9abc = 9$, de unde $abc = 1$.

Înlocuind în cele trei relații obținute mai sus, rezultă $bcx = 2$, $acy = 2$, $abz = 2$ și înmulțindu-le cu, respectiv, a, b, c , cu $abc = 1$, găsim $x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c$ deci $xyz = 8abc = 8$.

VIII.A.108. Fie x și y cele două numere, cu $x > y$. Relația din problemă este : $x + y + xy + x - y + \frac{x}{y} = 450$, care se mai scrie : $2xy + xy^2 +$

$$+ x = 450y, \text{ sau } x = \frac{450y}{(y+1)^2}$$

Cum x este natural, iar $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, obținem $y \in \{2, 4, 14\}$.

Perechile (x, y) de numere căutate vor fi $(100; 2)$, $(72; 4)$, $(28; 14)$.

VIII.A.109. Metoda I.

Ecuția se scrie, succesiv :

$$\left[x(x^2 + 3x + 2) + \frac{1}{3} \right] + x = 23,$$

$$\left[x(x+1)(x+2) + \frac{1}{3} \right] + x = 23.$$

Dar $x \in \mathbf{Z}$ și $x, x+1, x+2$ sînt consecutive, deci produsul lor se divide cu 3 și deci

$$x(x+1)(x+2) + \frac{1}{3} = x(x+1) \frac{x+2}{3}.$$

Cu aceasta, ecuația devine :

$$x(x+1) \frac{x+2}{3} + x = 23, \text{ sau}$$

$$x^3 + 3x^2 + 5x - 69 = 0, \text{ cu soluția întregă } x = 3.$$

Metoda a II-a.

Ecuția la care s-a ajuns se poate rezolva astfel

I.

$x^3 + 3x^2 + 5x - 69 = 0$, care conduce la ecuația

$$x(x^2 + 3x + 5) = 1 \cdot 3 \cdot 23.$$

Pentru $x = 1$ nu convine.

Pentru $x = 3$ obținem

$$x^2 + 3x + 5 = 23.$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0.$$

$$9 + 9 - 18 = 0, \text{ relație adevărată.}$$

II.

Ecuția se mai scrie

$$x^3 - 3x^2 + 6x^2 - 18x + 23x - 69 = 0.$$

$$x^2(x - 3) + 6x(x - 3) + 23(x - 3) = 0.$$

$$(x - 3)(x^2 + 6x + 23) = 0.$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

$$x^2 + 6x + 23 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbf{R}.$$

VIII.A.110. Incluziunea $\{b, c, d\} \subset (-\infty, 1]$ este echivalentă cu : $b \leq 1$, $c \leq 1$, $d \leq 1$.

La fel, $\{a, ab, abc\} \subset [1, \infty)$ echivalentă cu : $a \geq 1$, $ab \geq 1$, $abc \geq 1$.

Din $a \geq 1$ și $b \leq 1$ avem : $(a - 1) \geq 0$ și $(b - 1) \leq 0$, care implică $(a - 1)(b - 1) \leq 0$, sau $ab + 1 \leq a + b$, sau $ab \leq a + b - 1$ (1)

Din $ab \geq 1$ și $c \leq 1$, deducem :

$$(ab - 1)(c - 1) \leq 0$$

$$abc + 1 \leq ab + c, \text{ sau, ținând seama de (1),}$$

$$abc + 1 \leq a + b + c - 1 \text{ și încă } abc \leq a + b + c - 2 \text{ (2)}$$

Din $abc \geq 1$ și $d \leq 1$, deducem :

$$(abc - 1)(d - 1) \leq 0, \text{ sau}$$

$$abcd + 1 \leq abc + d, \text{ sau, ținând cont de (2),}$$

$$abcd + 1 \leq a + b + c + d - 2, \text{ de unde}$$

$$3 + abcd \leq a + b + c + d.$$

VIII.A.111. Avem, pentru oricare x, y, z numere reale, inegalitatea cunoscută $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, adevărată deoarece provine din $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$. În plus, egalitate apare doar pentru $x = y = z$.

Pentru $x = a^{2n}, y = b^{2n}, z = c^{2n}$, obținem :

$$a^{4n} + b^{4n} + c^{4n} \geq a^{2n}b^{2n} + b^{2n}c^{2n} + c^{2n}a^{2n} \quad (1)$$

Pentru $x = a^n b^n, y = b^n c^n$ și $z = c^n a^n$, aceeași inegalitate de la început dă

$$\begin{aligned} a^{2n}b^{2n} + b^{2n}c^{2n} + c^{2n}a^{2n} &> a^n b^{2n} c^n + b^n c^{2n} a^n + c^n a^{2n} b^n = \\ &= a^n b^n c^n (a^n + b^n + c^n) \end{aligned} \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă inegalitatea enunțului.

Observăm, în plus, că egalitate apare dacă și numai dacă $a^n = b^n = c^n$, iar pentru n impar, dacă $a = b = c$.

VIII.A.112. În condițiile problemei, $x - a = y + z, y - a = x - z, z - a = x + y$, inegalitatea din enunț devine

$$(y + z)^2 + (x + z)^2 + (x + y)^2 \geq \frac{4}{3} (x + y + z)^2$$

care, adusă la forma cea mai simplă, este

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx,$$

inegalitate pe care o vom demonstra în continuare, reducînd-o la forme echivalente :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx &\geq 0 \\ (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) &\geq 0 \\ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

care este evidentă. În plus, se observă că egalitate în ultima relație apare doar pentru $x = y = z$, deci în relația din enunț, egalitate există

numai pentru $x = y = z = \frac{a}{3}$

VIII.A.113. Arătăm că $x = y = z$ implică :

$$xy + xz = 2yz \quad (1)$$

$$yz + xy = 2xz \quad (2)$$

$$xz + yz = 2xy \quad (3)$$

Dacă $x = y = z = A$, avem :

$$A^2 + A^2 = 2A^2 \quad (1')$$

$$A^2 + A^2 = 2A^2 \quad (2')$$

$$A^2 + A^2 = 2A^2 \quad (3')$$

Arătăm că relațiile (1), (2) și (3) implică $x = y = z$.

Scoatem x din (1) :

$$x = \frac{2yz}{y + z} \quad (4) \text{ și, din (2),}$$

$$x = \frac{yz}{2z - y}.$$

Egalînd cele două valori ale lui x , avem :

$$\frac{2yz}{y+z} = yz(2z-y).$$

Cum y și z sînt nenule, putem împărți prin yz

$$\frac{2}{y+z} = \frac{1}{2z-y}, \text{ de unde deducem } y = z.$$

În (4), înlocuim pe z cu y și avem :

$$x = \frac{2y^2}{2y} \text{ adică } x = y.$$

Dar $x = y$ și $y = z$ implică $x = y = z$.

Observație : Pentru a doua implicație sînt suficiente relațiile (1) și (2).

PUNCTE, DREPTE, PLANE

1. Paralelism în spațiu

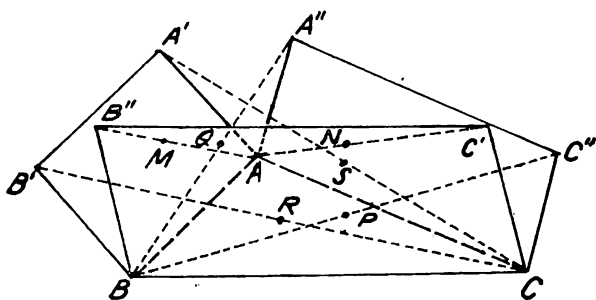


Fig. VIII.G.1.

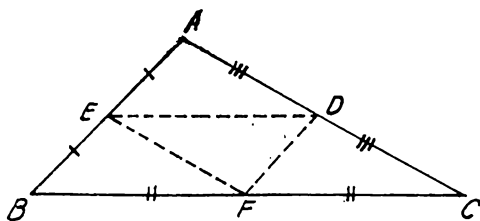


Fig. VIII.G.1'.

VIII.G.1. În $\triangle AB''C'$, $AM \equiv MB''$ și $AN \equiv NC'$ (ipoteză) \Rightarrow MN linie mijlocie : $MN \parallel B''C'$ și $MN = \frac{B''C'}{2}$. Cum $BCC'B''$ este paralelogram (ipoteză) $\Rightarrow B''C' = BC$. (Vezi fig. VIII.G.1.)

$$\text{Deci } MN = \frac{BC}{2}. \quad (1)$$

$$\text{Analog, în } \triangle BA''C'', PQ \text{ este linie mijlocie} \Rightarrow PQ = \frac{AC}{2}. \quad (2)$$

$$\text{Analog, în } \triangle CA'B', RS \text{ este linie mijlocie} \Rightarrow RS = \frac{AB}{2}. \quad (3)$$

Așadar, segmentele MN , PQ și RS au măsurile lungimilor egale cu măsurile lungimilor laturilor medial triunghiului ABC ($\triangle EFD$ vezi fig. VIII.G.1.), deci cu aceste lungimi de segmente, se poate construi un triunghi congruent cu triunghiul medial triunghiului ABC .

Cum $\triangle EFD \equiv \triangle DAE \equiv \triangle CFD \equiv \triangle FBE$ ($\triangle EFD$ triunghi mediane și deci triunghiurile sînt congruente conform L.L.L.), rezultă că aria $\triangle EFD$ este $\frac{1}{4}$ din aria $\triangle ABC$. (Vezi fig. VIII.G.1')

VIII.G.2. În $\triangle ACP$, CF este bisectoare (ipoteză). Cum $CF \perp AP$ (ipoteză) $\Rightarrow \triangle ACP$ isoscel $\Rightarrow AF \equiv FP$. (Bisectoarea CF este înălțime și mediană.) (1)

Prelungim dreapta AE și notăm intersecția ei cu BD , de exemplu, R .

În $\triangle ABR$, BE este bisectoare (ipoteză). Cum $BE \perp AR$ (ipoteză) $\Rightarrow \triangle ABR$ isoscel $\Rightarrow AE \equiv ER$. (Bisectoarea BE este înălțime și mediană.) (2)

În $\triangle APR$, EF este linie mijlocie (din (1) și (2)) $\Rightarrow EF \parallel PR$. Cum $PR \subset BCD$ rezultă că $EF \parallel BCD$.

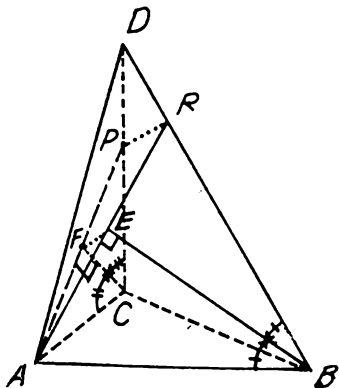


Fig. VIII.G.2.

VIII.G.3. Metoda de rezolvare — metoda contraexemplului Un contra-exemplu planul β intersectează planul α după o dreaptă b , paralelă cu dreapta a , situată în planul α . Deci propoziția „planul α este paralel cu planul β ”, este falsă. (Vezi fig. VIII.G.3.)

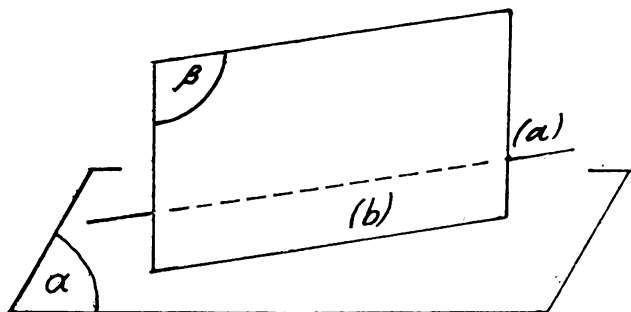


Fig. VIII.G.3.

VIII.G.4. Fie DD' dreapta dusă prin D și paralelă cu AA' . Cum $(BB'CC') \parallel (AA'DD')$ și $(BB'AA') \parallel (CC'DD')$ (ipoteză) rezultă că planul $(A'B'C')$ le intersectează pe acestea după drepte opuse paralele (dacă un plan intersectează două plane paralele atunci dreptele de intersecție dintre planul dat și planele paralele sînt două drepte paralele) și astfel poligonul de secțiune dintre $(A'B'C')$ și planele de mai sus este un paralelogram. Două dintre laturile acestui paralelogram sînt $A'B'$ și $B'C'$. Urmează să le determinăm și pe celelalte două. Procedăm astfel : Patru-

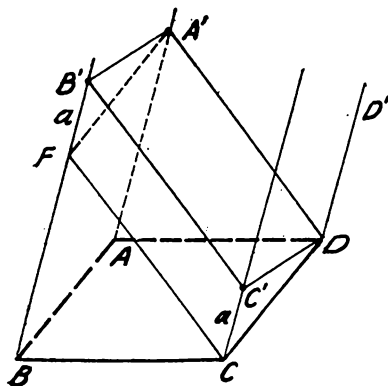


Fig. VIII.G.4.

laterul $B'C'CF$ (vezi fig. VIII.G.4.) este paralelogram ($B'F \parallel C'C$ — (vezi indicația) ipoteză și $B'F = C'C = a$ — construcție) $\Rightarrow B'C' \parallel FC$ și $B'C' \equiv FC$.

Patrulaterul $A'DCF$ este paralelogram deoarece $CD \parallel FA'$ și $CD \equiv FA'$ (paralelismul și congruența acestora rezultând din faptul că $AA'BF$ este paralelogram — din construcție, și $ABCD$ este tot paralelogram — din ipoteză. Conform tranzitivității relației de paralelism și congruență, rezultă afirmația de mai sus) $\Rightarrow FC \parallel A'D$ și $FC \equiv A'D$. (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow B'C' \parallel A'D$ și $B'C' \equiv A'D \Rightarrow B'C'A'D$, este paralelogram. În concluzie, celelalte două laturi ale paralelogramului de secțiune (căutat) sînt laturile $C'D$ (căci $C'D$ este paralelă și congruentă cu $B'A'$) și $A'D$ (căci $A'D$ este paralelă și congruentă cu $B'C'$).

Concluzionăm paralela dusă prin punctul D la dreptele AA' , BB' , CC' intersectează planul $A'B'C'$ în punctul D , sau planul $A'B'C'$ trece prin punctul D .

VIII.G.5. a) Se știe că o dreaptă „ a ” este paralelă cu un plan „ α ”, dacă în planul „ α ” există o dreaptă „ b ” paralelă cu dreapta „ a ”. Planul care trece prin punctul M și este paralel cu dreptele AC și BD , va conține drepte paralele cu AC și $BD \Rightarrow MQ \parallel AC$ și $MN \parallel BD$. (Vezi fig. VIII.G.5.). Fie P punctul în care dreapta DC intersectează planul MNQ .

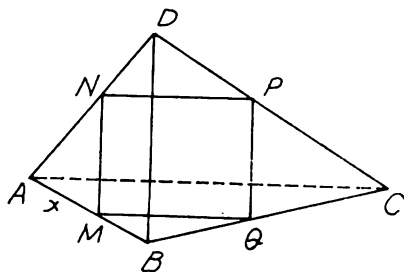


Fig. VIII.G.5.

Dacă $NP \not\parallel MQ \Rightarrow NP \not\parallel AC$ și deci dreptele NP și AC au un punct comun : $S \Rightarrow$ planul MNQ și dreapta AC au un punct comun S — contradicție, deoarece $MNQ \parallel AC$ din construcție — $\Rightarrow NP \parallel MQ$.

Analog se demonstrează că $MN \parallel QP \Rightarrow MNPQ$ paralelogram (definiție).

b) În $\triangle ADB$, $MN \parallel BD$ (construcție) și conform teoremei fundamentale a asemănării $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BD} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{MN}{7} \Leftrightarrow MN = \frac{7 \cdot x}{5} = QP$ (din demonstrația anterioară).

În $\triangle BAC$, $MQ \parallel AC$ (construcție) și conform aceleiași teoreme :

$$\frac{BM}{BA} = \frac{MQ}{AC} \Leftrightarrow \frac{5-x}{5} = \frac{MQ}{12} \Leftrightarrow MQ = \frac{12(5-x)}{5} = NP \text{ (demonstrat). } (2)^*$$

Din (1) și (2) rezultă că perimetrul paralelogramului $MNPQ$ este:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{7x}{5} + 2 \cdot \frac{12(5-x)}{5} &= \frac{14x + 120 - 24x}{5} = \frac{120 - 10x}{5} = \\ &= 24 - 2x = 2(12 - x). \end{aligned}$$

Cum $0 < x < 5 \Rightarrow 2(12 - x) > 0$ și deci rezultatul este plauzibil.

VIII.G.6. Reamintim următoarele teoreme (presupuse cunoscute).

T_1 dacă două drepte diferite d_1 și d_2 sînt perpendiculare pe un plan α , atunci dreptele d_1 și d_2 sînt paralele.

T_2 dacă două drepte concurente d_1 și d_2 sînt paralele cu alte două drepte concurente d_3 și d_4 , atunci planele determinate de dreptele d_1, d_2 și d_3, d_4 sînt paralele între ele.

T_3 dacă un plan α_1 , intersectează două plane paralele α_2 și α_3 , atunci dreptele de intersecție dintre α_1 și respectiv α_2 și α_3 sînt două drepte paralele.

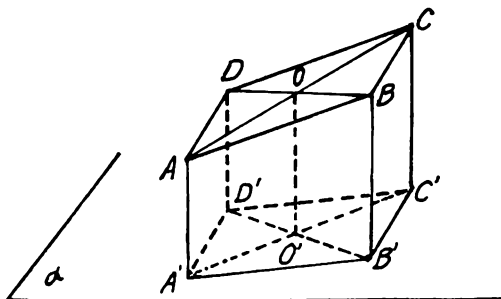


Fig. VIII.G.6.

Deoarece $AA' \perp \alpha$, $BB' \perp \alpha$, $CC' \perp \alpha$ și $DD' \perp \alpha$ (construcție) \Rightarrow
 \Rightarrow (1) $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ (T_1) $\Rightarrow AA'BB' \parallel CC'DD'$, deoarece $AB \parallel$
 $\parallel DC$ (ipoteză) și $BB' \parallel CC'$ (1) și conform T_2 rezultă paralelismul plane-
lor $\Rightarrow A'B' \parallel D'C'$ și $B'C' \parallel A'D'$ (conform T_3) $\Rightarrow A'B'C'D'$ paralelo-
gram. $\Rightarrow A'O' \equiv O'C'$ și $B'O' \equiv O'D'$ (2). Însă $AO \equiv OC$ și $BO \equiv OD$ (3)

(ipoteză $ABCD$ paralelogram). Dar, $AA'CC'$ trapez dreptunghic ; din (1), din (2) și (3) $\Rightarrow OO'$ este linie mijlocie în acest trapez, adică : $OO' = \frac{AA' + CC'}{2}$ și deci $OO' = \frac{a + c}{2}$ (4). Dar și $BB'DD'$ trapez dreptunghic ; din (1), din (2) și (3), OO' linie mijlocie în acest trapez, adică : $OO' = \frac{BB' + DD'}{2}$ și deci $OO' = \frac{b + d}{2}$ (5). Din (4) și (5) $\Rightarrow a + c = b + d$. (Vezi fig. VIII.G.6.)

VIII.G.7. Se construiește \triangle isoscel ACD ($AC = AD = 5$ și $CD = 6$). (Vezi fig. VIII.G.7.) Prelungim DA cu $AB = 10$ (ipoteză). În acest fel obținem punctul B care împreună cu punctele existente C și D , determină $\triangle BCD$.

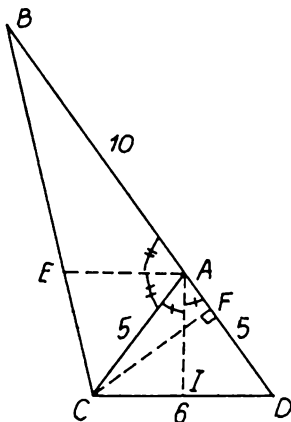


Fig. VIII.G.7.

Calculul distanței ME : În planul $\triangle BCD$, ducem $AI \perp CD$ (vezi fig. VIII.G.7.) $\Rightarrow AI$ bisectoarea \widehat{CAD} ($\triangle CAD$ isoscel : $AC \equiv CD$). Construim bisectoarea \widehat{BAC} , ducând $AE \perp AI$ (bisectoarea unghiului interior A , este perpendiculară pe bisectoarea unghiului A exterior $\triangle CAD$). $\Rightarrow AE \parallel CD$ (1), (deoarece $AI \perp CD$ și $AI \perp AE$). $\Rightarrow \triangle BAE \sim \triangle BDC$. (Teorema fundamentală a asemănării în $\triangle BCD$ ($AE \parallel CD$)). $\Rightarrow \frac{AE}{CD} = \frac{BA}{BD} \Rightarrow \Rightarrow \frac{AE}{6} = \frac{10}{15}$; $\frac{AE}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow AE = 4$ (2).

În continuare, se duce $MA \perp (BCD)$. (Vezi fig. VIII.G.7')

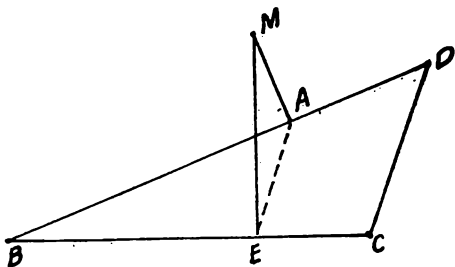


Fig. VIII.G.7'.

Deoarece $MA \perp (BCD)$ (ipoteză) $\Rightarrow MA \perp AE$. Se aplică teorema directă a lui Pitagora în $\triangle MAE$, $m(A) = 90^\circ$.

$$ME^2 = MA^2 + AE^2; ME^2 = 9 + 1 + 16 = 25; ME = 5.$$

Calculul distanței BC .

În planul $\triangle BCD$ (vezi fig. VIII.G.7.) ducem $CF \perp AD \Rightarrow$. Aria $\triangle ACD = \frac{CF \cdot AD}{2} = \frac{AI \cdot CD}{2}$, adică $\frac{CF \cdot 5}{2} = \frac{AI \cdot 6}{2}$

Cum $AI = \sqrt{25 - 9} = 4$ ($\triangle AIC$ este dreptunghic în I din construcție $AI \perp CD$) rezultă $CF = \frac{24}{5}$. (4)

$$\text{În } \triangle \text{ dreptunghic } CFA \text{ (construcție), } AF = \sqrt{25 - \frac{24^2}{25}}$$

și după efectuarea calculelor $AF = \frac{7}{5}$. (5)

În \triangle dreptunghic BFC , $m(\widehat{CFB}) = 90^\circ$ (construcție), $BC^2 = CF^2 + BF^2$ și conform (4) și (5) $BC = \frac{5\sqrt{145}}{5}$ și după efectuarea calculelor rezultă $BC = \sqrt{145}$.

VIII.G.8. a) Notăm $BN = x \Rightarrow AM = 2x$ (ipoteză). Calculăm lungimile laturilor $\triangle MNC$; $MN^2 = a^2 + x^2$ (1); $NC^2 = a^2 + x^2$ (2); $MC^2 = a^2 + 4x^2$ (3). Din (1) și (2) $\Rightarrow MN \equiv NC$. Deci triunghiul MNC este isoscel. (Vezi fig. VIII.G.8.)

b) Triunghiul MNC fiind isoscel $MN \equiv NC$ (din (a)), el poate fi dreptunghic numai în vârful $N \Rightarrow MN^2 + NC^2 = MC^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 2x^2 = a^2 + 4x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Verificare: } MN^2 = a^2 + \frac{2a^2}{4} = \frac{3a^2}{2} \quad NC^2 = a^2 + \frac{2a^2}{4} = \frac{3a^2}{2} = 4 \text{ și}$$

$$MC^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2.$$

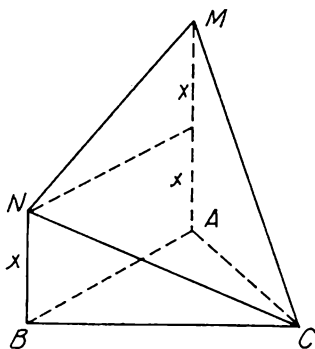


Fig. VIII.G.8.

Reciproca teoremei lui Pitagora se verifică pentru $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, și unghiul drept este în vârful N .

VIII.G.9. a) $AO \equiv OC$ și $AO \perp BD$ ($ABCD$ pătrat). (1)

Cum $DE \perp (ABCD)$ (ipoteză) $\Rightarrow DE \perp AO$. (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow AO \perp (DB, DE) \Rightarrow AO \perp (EDB) \Rightarrow AO \perp PO$. (3)

Deci $m(\widehat{OP, AC}) = 90^\circ$. (Vezi fig. VIII.G.9.)

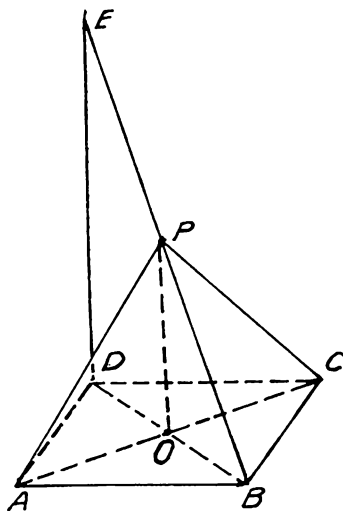


Fig. VIII.G.9.

b) Din (1) și (3) $\Rightarrow \triangle APC$ isoscel : $PA \equiv PC$. Știm că $AC = a\sqrt{2}$ (ipoteză). Segmentul AC va fi baza comună celor două triunghiuri isoscele ABC (ipoteză) și APC (demonstrat). Înălțimile corespunzătoare sînt BO (ipoteză $ABCD$ pătrat) și PO (demonstrat).

$$1) AC \cdot BO = 3 \cdot AC \cdot PO \quad (\Rightarrow) \quad BO = 3 \cdot PO \quad (\Rightarrow) \quad PO = \frac{BO}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Cercetăm dacă acest rezultat este posibil.

Segmentul OP , cînd P variabil, are cea mai mică lungime cînd $OP \perp BE$. Calculînd în $\triangle EDB$ ($m(\widehat{D}) = 90^\circ$) lungimea OP ($OP \perp BE$) obținem (folosind asemănarea triunghiurilor EDB și OPB): $\frac{ED}{OP} = \frac{BE}{OB}$,

$$\text{adică : } \frac{2a}{OP} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} \quad (\Rightarrow) \quad OP = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Deci, cea mai mică lungime a segmentului OP este egală cu $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. În ipoteză aria $\triangle ABC$ de trei ori mai mare decît aria $\triangle APC$, a rezultat $OP = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ Comparăm cele două rezultate $\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a\sqrt{6}}{6}$ și $\frac{a\sqrt{2}}{6}$, deci

numele $2\sqrt{6}$ și $\sqrt{2}$ adică $2\sqrt{3}$ și 1. Cum $2\sqrt{3} > 1 \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{3} > \frac{a\sqrt{2}}{6}$ Cum $OP = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ este cea mai mică distanță de la O la EB rezultă că nu

există o poziție a punctului $D \in BE$ astfel încît $OP = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ și deci nu există un punct $P \in EB$ astfel încît să aibă loc ipoteza (b1).

2) Dacă ariile sînt egale, rezultă $AC \cdot BO = AC \cdot PO \quad (\Rightarrow) \quad BO \equiv PO$ și deci $OP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ Procedînd analog că la punctul b1 constatăm că rezul-

tatul este posibil deoarece $\frac{a\sqrt{2}}{2} > \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ($3\sqrt{2} > 2\sqrt{3} \quad (\Rightarrow) \quad 9 \cdot 2 > 4 \cdot 3$).

Punctul P se construiește astfel : descriem în planul EDB un semicerc cu centrul în O și de rază $OP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ Semicercul va fi tangent laturii ED ($ED \perp DB$) și va intersecta latura EB în două puncte B și P (deoarece $OP = \frac{a\sqrt{2}}{2} > \frac{a\sqrt{3}}{3}$).

Altă construcție care fixează punctul P . Cum $\triangle BOP$ este isoscel ($BO \equiv OP$) ducem $OS \perp EB \Rightarrow PS \equiv SB$. Ducem în $\triangle EDB$ ($m\widehat{D} = 90^\circ$) înălțimea DR , $R \in BE \Rightarrow$ în $\triangle RDB$, OS linie mijlocie $OS \parallel DR$ și $DO \equiv OB \Rightarrow R = P$. Așadar, în ipoteza (b2) punctul P coincide cu piciorul înălțimii $\triangle EDB$ relativă laturii EB .

Poziția punctului P care conduce la aria minimă a $\triangle APC$ este dată de minimul distanței OP (deoarece AC baza $\triangle APC$ are lungime constantă) și deci, atunci când $OP \perp BC$, poziție a punctului P pentru care $OP = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Aria minimă va fi $\frac{AC \cdot OP}{2} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^2\sqrt{6}}{6} u^2$ (unde u este unitatea de măsură pentru lungime).

VIII.G.10. Triunghiurile $A'AC$ și $B'BC$ sînt dreptunghice în A și respectiv B (o dreaptă perpendiculară pe un plan dat este perpendiculară pe orice dreaptă continuată în planul dat). (Vezi fig. VIII.G.10.)

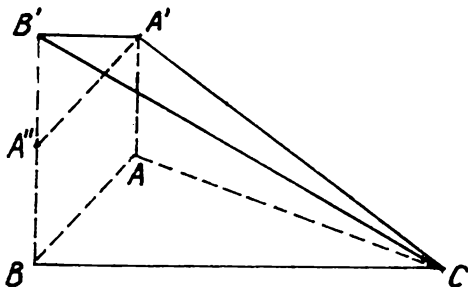


Fig. VIII.G.10.

Notăm $AA' = x$; și $x \neq a$, căci presupunînd $x = a \Rightarrow AA' \equiv BB' \Rightarrow \triangle A'AC \equiv \triangle B'BC \Rightarrow A'C \equiv B'C \Rightarrow A'CB'$ isoscel și nici una din ipotezele

- $A'B'C'$ dreptunghic în B' sau
- $A'B'C$ isoscel cu $A'B' \equiv A'C$ nu sînt posibile.

Așadar $x \neq a$. Presupunem $x < a$ (Vezi fig. VIII.G.10.). Calculul lungimilor segmentelor $A'B'$, $B'C$ și CA' . În planul $(AA'BB')$ ducem $A'A'' \parallel \parallel AB$. Cum $B'B \perp (ABC)$ (ipoteză) $\Rightarrow \triangle A'A''B'$ este dreptunghic $\Rightarrow \Rightarrow m(\widehat{A'A''B'}) = 90^\circ$ și patrulaterul $AA'BA''$ este un dreptunghi. Conform teoremei lui Pitagora în $\triangle A'A''B'$ avem: $A'B'^2 = B'A''^2 + A''A'^2 \Leftrightarrow A'B'^2 = a^2 + (a-x)^2$ (1) [deoarece $(a-x)^2 = (x-a)^2$ vom înțelege de ce în rezolvarea problemei putem presupune $x < a$ sau $x > a$].

$$\text{În } \triangle \text{ dreptunghic } B'BC \text{ (ipoteză) } B'C^2 = a^2 + a^2 = 2a^2. \quad (2)$$

$$\text{În } \triangle \text{ dreptunghic } A'AC \text{ (ipoteză) } A'C^2 = x^2 + a^2. \quad (3)$$

În ipoteza (a), conform reciprocei teoremei lui Pitagora, urmează să existe relația $A'B'^2 + B'C^2 = A'C^2$; adică $a^2 + (a-x)^2 + 2a^2 = x^2 + a^2$ (rezultă după înlocuirea (1), (2) și (3) în relația precedentă).

Ecuatie de gradul intii in x , care, rezolvata conduce la solutia $x = \frac{3a}{2}$ si deci in ipoteza (a), $AA' = \frac{3a}{2}$

In ipoteza (b) laturile $A'B' \equiv A'C' \Rightarrow A'B'^2 = A'C'^2$ si deci, inlocuind in aceasta relatie (1) si (3) rezultă: $a^2 + (a-x)^2 = x^2 + a^2$. Ecuatia de gradul intii in x are drept solutie $x = \frac{a}{2}$ si deci in ipoteza (b), $AA' = \frac{a}{2}$

VIII.G.11. 1. Dreptele AA' , BB' si CC' fiind perpendiculare pe planul ABC (ipoteza), rezultă ca $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ (1) (doua drepte perpendiculare pe același plan sînt paralele între ele; apoi tranzitivitatea relatiei de

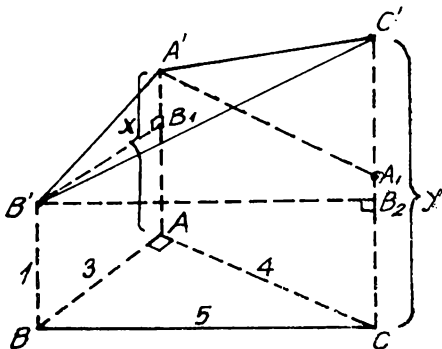


Fig. VIII.G.11.

paralelism), dar și faptul că dreptele AA' , BB' și CC' sînt perpendiculare pe laturile $\triangle ABC$ (2) (o dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară pe orice dreaptă din planul dat). Din (1) și (2) și construind $B'B_1 \parallel AB$ și $B'B_2 \parallel BC$ și $A'A_1 \parallel AC$ rezultă că ABB_1B' , BCB_2B' și ACA_1A' sînt dreptunghiuri (3) iar triunghiurile $A'B_1B'$, $C'B_2B'$ și $C'A_1A'$ sînt triunghiuri dreptunghi (4). Notăm $AA' = x$; $CC' = y$. Am presupus $1 < x < y$. (Puteam face și presupunerea $1 < y < x$, rezultatul rămînd neschimbat, deoarece $(a-b)^2 = (b-a)^2$.) Conform acestei presupunerii evaluăm lungimile segmentelor $A'B'$, $B'C'$ și $C'A'$. (Vezi fig. VIII.G.11.)

In \triangle dreptunghi $A'B_1B'$ (conf. 4) $A'B'^2 = A'B_1^2 + B_1B'^2 \Rightarrow \Rightarrow A'B'^2 = (x-1)^2 + 9$.

In \triangle dreptunghi $C'B_2B'$ (conf. 4): $B'C'^2 = B_2C'^2 + B_2B'^2 \Rightarrow \Rightarrow B'C'^2 = (y-1)^2 + 25$ (conf. 3 și faptului că în \triangle dreptunghi ABC catetele sînt egale cu 3 cm și respectiv 4 cm).

In \triangle dreptunghi $C'A_1A'$ (conf. 4): $A'C'^2 = A'A_1^2 + A_1C'^2 \Rightarrow \Rightarrow A'C'^2 = 16 + (y+x)^2$. Conform reciprocei teoremei lui Pitagora, \Rightarrow

\Rightarrow) ca $\triangle A'B'C'$ să fie dreptunghic în B' urmează să existe relația : $B'A'^2 + B'C'^2 = A'C'^2$ și înlocuind, obținem (5) $(x-1)^2 + 9 + (y-1)^2 + 25 = (y-x)^2 + 16$. După efectuarea calculelor se obține o relație între x și y și anume $x + y + xy = 10$ (6).

2) Pentru a determina toate valorile naturale ale lui x explicităm relația dată. De exemplu

$$x(1 + y) = 10 - y \Leftrightarrow x = \frac{10 - y}{1 + y} \quad (7)$$

Gândim astfel deoarece $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ \text{și } \Rightarrow 10 - y > 0 \Leftrightarrow y < 10 \text{ iar } y + 1 \\ y \in \mathbb{N} \end{cases}$

divizor pentru $10 - y$.

Pentru $y = 10$, obținem $x = 0$. Soluție

Pentru $y = 9$, obținem $x = \frac{1}{10} \notin \mathbb{N}$.

Pentru $y = 8$, obținem $x = \frac{2}{9} \notin \mathbb{N}$.

Pentru $y = 7$, obținem $x = \frac{3}{8} \notin \mathbb{N}$.

Pentru $y = 6$, obținem $x = \frac{4}{7} \notin \mathbb{N}$.

Pentru $y = 5$, obținem $x = \frac{5}{6} \notin \mathbb{N}$.

Pentru $y = 0$, obținem $x = 10$. Soluție.

Așadar, perechile de numere naturale care verifică relația (6) sint, $(x = 0$ și $y = 10)$ și $(x = 10$ și $y = 0)$.

În primul caz $\triangle A'B'C'$ are $A' = A$, în al doilea caz are $C' = C$.

Verificare : $A' = A$ și $m(\widehat{A'B'C'}) = 90^\circ \Rightarrow AB'^2 + B'C'^2 = AC'^2$, adică $10 + 106 = 116$; $C' = C$ și $m(\widehat{A'B'C'}) = 90^\circ \Rightarrow A'B'^2 + B'C'^2 = A'C'^2$, adică $90 + 26 = 116$.

VIII.G.12. Așadar, trebuie să construim în punctul M , planul care să fie perpendicular pe dreapta AM . Procedăm astfel În punctul M și în planul ABC , ducem dreapta MX perpendiculară pe dreapta AM , deci $MX \perp AM$. Într-un alt plan β care trece prin dreapta AM , ducem de asemenea dreapta MY perpendiculară pe dreapta AM , deci $MY \perp AM$. Planul căutat α , este determinat de dreptele concurente MX și MY . Rezultă că $AM \perp XY$ (1). (Vezi fig. VIII.G.12.) (AM este perpendiculară pe două drepte concurente din α).

Fie P un punct oarecare din planul α . (Vezi fig. VIII.G.12.) Triunghiul AMP este dreptunghic în M (conf. (1)) și conform teoremei directe a lui Pitagora, putem scrie

$$PA^2 = AM^2 + MP^2. \quad (2)$$

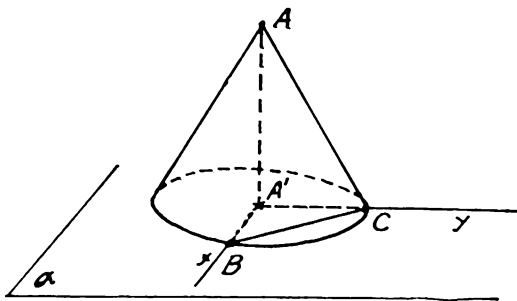


Fig. VIII.G.13.

$= A'C = 4$, înseamnă că puncte de felul punctelor B și C din planul α , se pot obține ducând întâi un cerc de centru A' și raza $A'B = 4$, apoi construim semidrepte arbitrare $A'X$ și $A'Y$. Ele vor intersecta cercul construit în puncte notate, de exemplu B și C astfel încât $A'B = A'C = 4$ și care permit construirea segmentelor $AB = AC = 5$.

Triunghiul ABC (spațiu) este isoscel $AB = AC = 5$. Urmează să executăm o construcție în urma căreia triunghiul ABC să devină echilateral $AB = BC = CA = 5$. Cum punctele B și C se găsesc în α și pe cercul construit, urmează să arătăm că pe un cerc dat, de raza 4 cm și centru fixat, există două puncte, de exemplu B și C astfel încât $BC = 5$. Fixăm pe cercul dat punctul B și apoi cu ajutorul compasului, construim punctul C astfel încât $BC = 5$. Construcția are două soluții dacă $BC < 8$, o soluție dacă $BC = 8$ și nici o soluție dacă $BC > 8$ (diametrul cercului fiind egal cu 8 cm).

Prin „loc geometric” vom înțelege o figură geometrică formată numai din mulțimea unor puncte care au aceeași proprietate — în cazul de față, puncte de felul punctelor B și C au următoarele proprietăți: se găsesc la aceeași distanță de punctul fix A' , $A'B = A'C = 4$ cm și $BC = 5$ cm, deoarece $\triangle AA'D \neq \triangle AA'B$. Dacă considerăm un punct E în $= A'C = 4$, astfel încât $BC = 5$ cm. Reuniunea acestor arce reprezintă chiar cercul de centru A' și raza 4 cm. Oricare alte puncte din planul α și care nu au proprietățile punctelor B și C , nu aparțin locului geometric. De exemplu, luând un punct D în interiorul cercului, $A'D < 4$, $AD < 5$ cm, deoarece $AA'D \neq \triangle AA'B$. Dacă considerăm un punct E în exteriorul cercului, $A'E > 4$, $AE > 5$ cm, deoarece $\triangle AA'E \neq \triangle AA'B$. Dacă luăm punctele M și N pe cercul dat, dar $MN \neq 5$, ele nu satisfac ipoteza AMN echilateral.

b) Cercetăm triunghiul isoscel $A'BC$ în care, $A'B = A'C = 4$ cm și $BC = 5$ cm. Oricare ar fi punctele B și C de pe cercul de centru A' și raza $A'B = 4$ cm, astfel încât \triangle din spațiu ABC este echilateral și A' este proiecția punctului A pe α , triunghiul isoscel $A'BC$ are lungimile laturilor constante (și unghiurile acestui triunghi vor fi constante). În $\triangle A'DB$ calculăm lungimea $A'D$ (Pitagora) unde $A'D \perp BC$, $A'D = \frac{\sqrt{39}}{2}$.

Apoi construim pe latura BC și în planul α triunghiul echilateral EBC (Vezi fig. VIII.G.13') (E de aceeași parte cu A'). Înălțimea $ED = \frac{\sqrt{75}}{2}$ (Pitagora în $\triangle EDB$). $\Rightarrow ED > A'D \Rightarrow$ unghiul $\widehat{BA'D}$ unghi exterior $\triangle BA'E$ și $m(\widehat{BA'D}) = m(\widehat{EBA'}) + m(\widehat{BEA'}) \Rightarrow 2 \cdot m(\widehat{BA'D}) = m(\widehat{BA'C}) = = 2m(\widehat{EBA'}) + 60^\circ \Rightarrow m(\widehat{BA'C}) > 60^\circ$.

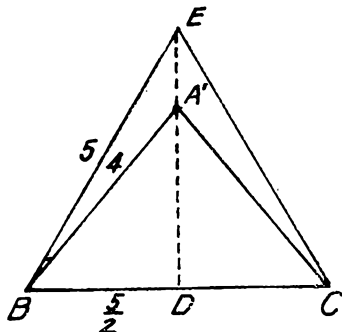


Fig. VIII.G.13'.

VIII.G.14. Distanța de la punctul V la latura BC se pune în evidență astfel. Din punctul V se duce o perpendiculară pe planul $ABCD$. Ea este VD (ipoteză). $\Rightarrow VD \perp BC$. Din punctul D se duce o perpendiculară pe dreapta BC , deci $DE \perp BC$, $E \in BC$. Prin teorema directă a celor trei perpendiculare rezultă că $VE \perp BC$. (VE este a treia perpendiculară pe latura BC). (Vezi fig. VIII.G.14.) În $\triangle ABC$, $AB = BC = a$ și $AC =$

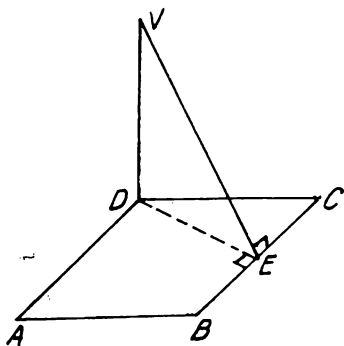


Fig. VIII.G.14.

$=\sqrt{3} \Rightarrow AB$ și BC sînt laturile hexagonului regulat înscris în cercul circumscris $\triangle ABC$, iar AC latura triunghiului echilateral înscris în același cerc \Rightarrow rombul $ABCD$ este format din două triunghiuri echilaterale ABD și CBD de latura a . $\Rightarrow DE$ înălțimea \triangle echilateral $DBC \Rightarrow BE =$

$$= EC \Rightarrow DE = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{În } \triangle \text{ dreptunghic } VDE \text{ (ipoteză),}$$

$$VE = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \quad \text{Deci distanța căutată are lungimea } \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

VIII.G.15. Prin teorema celor trei perpendiculare, distanța de la N la latura AB este distanța dintre punctele N și P (P fiind proiecția punctului M pe latura AB). (Vezi fig. VIII.G.15a.) Cum NMP este dreptunghic în M (ipoteză) și $MN = 6$ cm, urmează să calculăm lungimea MP (în ipotezele problemei). Construim pe trapezul dat $ABCD$, (Vezi fig.

VIII.G.15b.), paralelogramul $ABA'B'$ astfel încît $AB' = BC + AD$. În acest fel, aria paralelogramului $ABA'B'$ va fi de două ori mai mare decît aria trapezului dat $ABCD$. Deci aria $ABA'B' = 112$ cm².

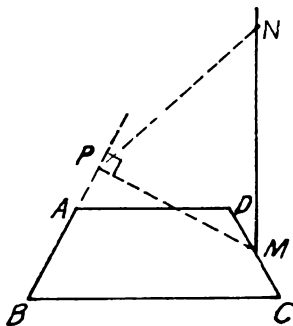


Fig. VIII.G.15.a.

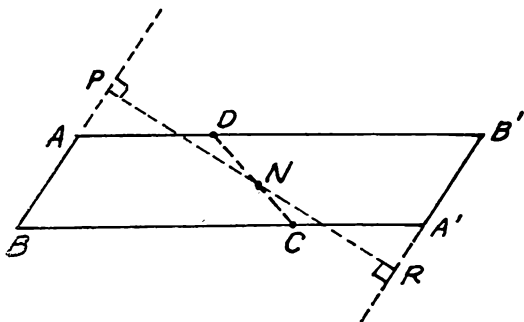


Fig. VIII.G.15.b.

Fie baza paralelogramului latura AB . Înălțimea corespunzătoare (distanța dintre laturile paralele AB și $A'B'$ va fi $PR = 2 \cdot MP$. Deci $112 = AB \cdot PR$; $112 = 7 \cdot PR \Leftrightarrow PR = 16$ cm și deci $MP = 8$ cm.

În $\triangle NMP$, $NP = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100}$ cm și reprezintă distanța căutăată.

VIII.G.16. Trapezul isoscel $ABCD$ are baza mică $AB = a$.

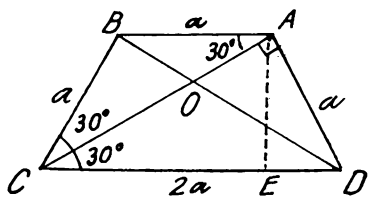


Fig. VIII.G.16.a.

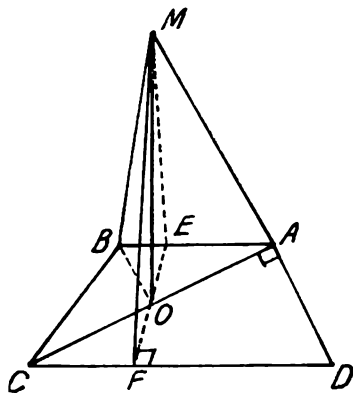


Fig. VIII.G.16.b.

a) Evaluăm laturile trapezului isoscel $ABCD$. (Vezi fig. VIII.G.16.a.)
 Deoarece $AB = AD = BC = a \Rightarrow \triangle ABC$ isoscel $\Rightarrow m(\widehat{BCA}) = 30^\circ$ (1).
 Însă $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCD}) = 180^\circ$, ($ABCD$ trapez) $\Rightarrow m(\widehat{BCD}) = 60^\circ$, (deoarece în \triangle isoscel ABC , $m(\widehat{ABC}) = 120^\circ$) (2). Cum $m(\widehat{BCA}) = 30^\circ \Rightarrow \Rightarrow m(\widehat{ACD}) = 30^\circ$ și deci CA este bisectoarea unghiului BCD . Ducem $AE \perp CD \Rightarrow m(\widehat{EAD}) = 30^\circ$, $m(\widehat{EAD}) + m(\widehat{ADE}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{BCD}) = 60^\circ$, demonstrat. $ABCD$ fiind trapez isoscel $\Rightarrow ED = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow CD = a + 2 \cdot \frac{a}{2} = 2a$. (3)

Altă soluție pentru calculul lungimii segmentului CD .

În $\triangle CAD$, $m(\widehat{ACD}) = 30^\circ$ (demonstrat). $m(\widehat{CDA}) = 60^\circ = m(\widehat{BCD})$ (trapezul $ABCD$ isoscel) $\Rightarrow m(\widehat{CAD}) = 90^\circ \Rightarrow CD = 2AD = 2 \cdot a$.

Să reținem că $CA \perp AD$. (4)

b) Calculul distanțelor de la punctul M la laturile neparalele ale trapezului $ABCD$.

Conform teoremei celor trei perpendiculare, distanțele de la punctul M la laturile trapezului isoscel $ABCD$, se obțin ducând în planul $ABCD$ perpendiculare din punctul O pe latura trapezului (Vezi fig.

VIII.G.16b.) și apoi unim punctul M cu picicarele perpendicularelor duse din O pe laturile trapezului.

Cum $OA \perp AD$ (conf. (4)), distanța de la M la AD este MA . Analog, distanța de la M la BC este MB . Însă, $\triangle MOA \equiv \triangle MOB$ (dreptunghice din ipoteză și $OA \equiv OB$ iar MO latură comună $\Rightarrow MA \equiv MB$. Așadar, este suficient să calculăm de exemplu lungimea MA . În \triangle dreptunghic MOA , $MA^2 = MO^2 + OA^2$; $MA^2 = \frac{2a^2}{9} + OA^2$ (ipoteză $MO = \frac{a\sqrt{2}}{3}$)

Calculul lungimii OA $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (unghiurile congruente).

Raportul de asemănare este $\frac{AB}{CD} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow OA = \frac{1}{3} AC =$
 $= \frac{1}{3} a \cdot \sqrt{3}$ (în \triangle dreptunghic CAD , $AC = a\sqrt{3}$). Rezultă că $MA^2 =$
 $= \frac{2a^2}{9} + \frac{3a^2}{9} = \frac{5a^2}{9}$; $MA = \frac{a\sqrt{5}}{3} = MB$. (5)

c) Calculul distanțelor de la punctul M la laturile paralele ale trapezului $ABCD$.

Ducem dreapta $EOF \perp AB$. Cum $ABCD$ este trapez isoscel $\Rightarrow \angle OEA \equiv \angle OEB$ și $\triangle OFD \equiv \triangle OFC$ (catetă, ipotenuză). În această situație, $AE \equiv EB$ și $OF \equiv FC$, iar distanțele de la M la BA și CD sînt segmentele ME și MF (teorema celor trei perpendiculare). Cum $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (demonstrat) raportul înălțimilor acestor triunghiuri este raport de asemănare $\Rightarrow \frac{OE}{OF} = \frac{1}{2}$ Însă, $OE + OF = AE$ (Vezi fig.

VIII.G.16.a.). Însă, $AE = \frac{AC}{2}$ (în \triangle dreptunghic AEC , $m(\widehat{ACE}) = 30^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ și } OF = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow ME = \frac{a\sqrt{11}}{6} \text{ și } MF = \frac{a\sqrt{5}}{3} \quad (6)$$

VIII.G.17. a) Cum $AB^2 = 100$, $AD^2 = 36$; $BD^2 = 64 \Rightarrow AB^2 = AD^2 + DB^2 \Rightarrow AD \perp DB$ (conform teoremei reciproce a lui Pitagora). (1). Fie O intersecția diagonalelor AC și BD . Aplicăm Pitagora în $\triangle ADO$ ($m(\widehat{ADO}) = 90^\circ$ conform (1)) $\Rightarrow AO^2 = AD^2 + DO^2$; $AC^2 = 36 + 16$; $AO^2 = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \Rightarrow AC = 4\sqrt{13}$ cm. (Vezi fig. VIII.G.17.)

b) Distanța de la M la diagonală AC este $MP = 5$ cm (ipoteză).

Distanța de la M la diagonală DB : Ducem $PR \perp DO \Rightarrow MR$ este distanța căutată (conf. teoremei celor trei perpendiculare). (Vezi fig. VIII.G.17.)

Calculul distanței MR :

În $\triangle MPR$ ($MP \perp PR$ ipoteză) $MR^2 = MP^2 + PR^2$, $MR^2 = 25 + 9$ ($PR = 3$ fiind linie mijlocie în \triangle dreptunghic ADO): $MR = 34$ cm.

Distanța de la M la AD și BC . Pentru ambele ducem din M perpendiculara lor comună ST , unde $S \in AD$ și $T \in CB$ (Vezi fig. VIII.G.17.) $\Rightarrow \triangle SDBT$ dreptunghi (construcție și ipoteză). În \triangle dreptunghic ADO

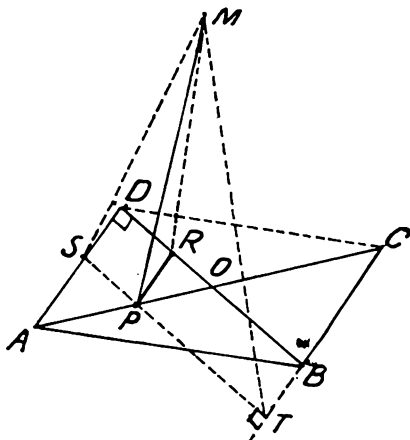


Fig. VIII.G.17.

(conform 1) $PS \parallel OD$ (construcție) și cum $AP \equiv PO$ (ipoteză), $\Rightarrow PS$ linie mijlocie $\rightarrow PS = 2$. În dreptunghiul $SDBT$, $PT = ST - PS = 8 - 2 = 6 \Rightarrow PT = 6$.

Distanța de la M la AD este MS (teorema celor trei perpendiculare). În Δ dreptunghic MPS (ipoteză) $MS^2 = MP^2 + PS^2$; $MS = \sqrt{29}$ cm.

Distanța de la M la BC este BT (teorema celor trei perpendiculare). În Δ dreptunghic MPT (ipoteză) $MT = MP + PT$; $MT = \sqrt{61}$ cm.

VIII.G.18. 1. Ducem $OO' \perp (ABC)$ (1). Cum $OA = OB = OC = a$ (ipoteză) $\Rightarrow O'A \equiv O'B \equiv O'C$; ($\Delta OO'A \equiv \Delta OO'B \equiv \Delta OO'C$ — catetă — ipotenuză) $\Rightarrow O'$ centrul cercului circumscris $\Delta ABC \Rightarrow O'$ ortocentrul

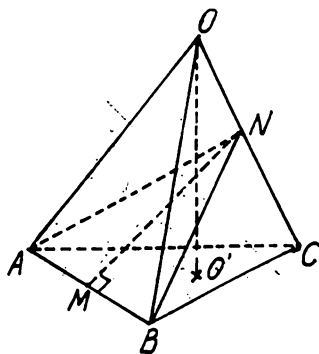


Fig. VIII.G.18.

$\triangle ABC$ (ABC echilateral — ipoteză) $\Rightarrow AO' \perp BC$ (2). (Într-un \triangle echilateral O' , centrul cercului circumscris \triangle echilateral este și ortocentrul triunghiului. (Vezi fig. VIII.G.18.).

Din (1) și (2) $\Rightarrow BC \perp (OO', AO') \Rightarrow BC \perp AO$. Relația de perpendicularitate fiind simetrică $\Rightarrow AO \perp BC$. Analog se demonstrează $OB \perp AC$ și $OC \perp AB$.

2. Pentru a se demonstra că $MN \perp AB$ procedăm astfel (Vezi fig. VIII.G.18.) $\triangle BOC \equiv \triangle AOC$ (echilaterale de latura AB — ipoteză) (1) $\Rightarrow BN \equiv AN$. (2) (Deoarece $ON \equiv NC$ (ipoteză) $\Rightarrow BN$ și AN înălțimi în \triangle echilaterale și congruente BOC și AOC (conform (1)).

Cum $AM \equiv MB$ (ipoteză) și $BN \equiv AN$ (conform (2)) \Rightarrow în \triangle isoscel ANB mediana NM este și înălțime : $MN \perp AB$. (3)

Analog se demonstrează că $MN \perp OC$, triunghiul isoscel fiind $\triangle OMC$.

VIII.G.19.

a) $\triangle AOB \equiv \triangle MBA$, deoarece

(Vezi fig. VIII.G.19.) L.U.L. (sau C.C.)	}	$OA \equiv MB$ (ipoteză) $AB = BA$ (latură comună) $m(\widehat{OAB}) \equiv m(\widehat{MBA}) = 90^\circ$ (ipoteză)
---	---	---

rezultă $m(\widehat{BMA}) = 60^\circ$; $m(\widehat{BAM}) = 30^\circ$ (din ipoteză și congruența triunghiurilor precedente). Cum în triunghiurile congruente înălțimile corespunzătoare laturilor congruente sînt congruente $\Rightarrow BE = AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Punctul D îl construim astfel : ducem $CC' \perp (ABM)$ (planul ABM conține dreapta MB perpendiculară pe planul (XOY) — (ipoteză) $\Rightarrow (ABM) \perp (XOY)$) $\Rightarrow CC' \perp AB$ (1). Din C' ducem în planul (ABM) o perpendiculară pe AM : $C'D \perp AM$ (2) ($D \in AM$). Prin teorema celor trei perpendiculare $CD \perp AM$ (3) (Vezi fig. VIII.G.19.).

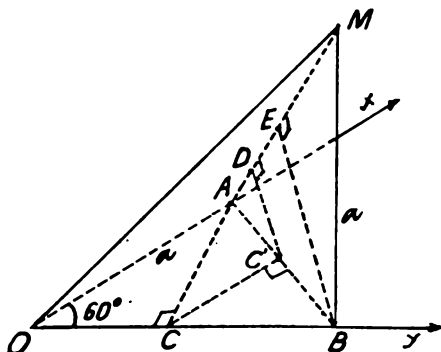


Fig. VIII.G.19.

$$\begin{aligned} \text{Deoarece } CC' \perp AB \text{ (construcție)} \Rightarrow CC' \parallel OA \Rightarrow \frac{AC'}{C'B} &= \frac{OC}{CB} = \\ &= \frac{\frac{c}{2}}{3a} = \frac{1}{6} \text{ (Thales în } \triangle OAB) \text{ (4).} \end{aligned}$$

$$\text{Deoarece } C'D \perp AM \Rightarrow C'D \parallel BE \Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{AC'}{C'B} = \frac{1}{3} \text{ (conform (4), și Thales în } \triangle BEA) \text{ (5).}$$

$$\text{Așadar, } \frac{AD}{DE} = \frac{1}{3}$$

c) Deoarece $\triangle OAB \cong \triangle MBA$ (conform punctului a) $\Rightarrow OA = AM = a$ (1).

Deoarece $MB \perp (XOY)$ și $BA \perp OA$ (ipoteze) $\Rightarrow MA \perp OA$ (2) (teorema celor trei perpendiculare) $\Rightarrow OAM$ dreptunghi în $A \Rightarrow OM^2 = 2a^2$; $OM = a\sqrt{2}$ (3) $\Rightarrow OA + AM + MO = 2a + a\sqrt{2} = a(2 + \sqrt{2})$ (4).

d) Deoarece $OA \perp (MBA)$ ($OA \perp AB$ și $OA \perp MB$ — ipoteze) $\Rightarrow OA \perp BE \Rightarrow BE \perp OA$, (simetrie) (1).

Dar, $BE \perp AM$ (ipoteză) (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow BE \perp (OA, AM) \Rightarrow BE \perp (OAM)$. Așadar, dreapta BE este perpendiculară pe planul OAM .

VIII.G.20. a) Cum dreptele AA' , BB' și CC' sînt perpendiculare pe (ABC) (ipoteză) și $AA' = BB' = CC' = AC = CB = a$ (ipoteză) $\Rightarrow AA'BB'$ și $AA'CC'$ sînt pătrate. (1)

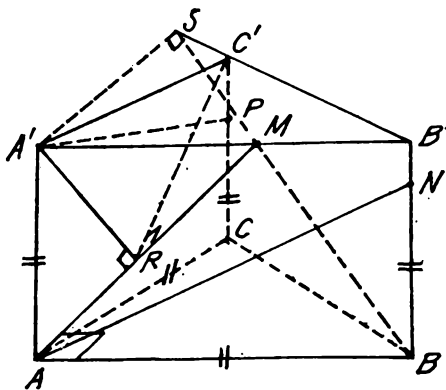


Fig. VIII.G.20.a.

Deoarece $C'A' \perp A'B'$ (construcție) și $C'A' \perp AA'$ (construcție) $\Rightarrow C'A' \perp (AA'BB')$ (2). Ducem $A'R \perp AM \Rightarrow C'R \perp AM$ (conform (2) și teoremei celor trei perpendiculare). Deoarece $C'A' \perp (AA'BB')$ (conform

$$(2) \Rightarrow C'A' \perp A'R \Rightarrow \triangle C'A'R \text{ dreptunghic } m(\widehat{C'A'R}) = 90^\circ \text{ (Vezi fig. VIII.G.20.a.)} \Rightarrow C'R^2 = C'A'^2 + A'R^2 \Rightarrow C'R^2 = a^2 + \frac{a^2 \cdot \frac{a^2}{4}}{\frac{5a^2}{4}} = a^2 + \frac{a^2}{5} = \frac{6a^2}{5}. \text{ Așadar, } C'R = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

b) Notăm cu S proiecția punctului C' pe dreapta BM . Pentru a construi punctul S procedăm astfel deoarece $C'A' \perp (AA'BB')$, ducem $A'S \perp \perp BM \Rightarrow C'S \perp BM$ (teorema celor trei perpendiculare) și astfel obținem proiecția punctului C' pe dreapta BM . Cum $m(\widehat{A'SB}) = 90^\circ$ oricare ar fi punctul $M \in A'B'$ rezultă că triunghiul dreptunghic $A'SB$ are lungimea ipotenuzei $A'B$ constantă. (Vezi fig. VIII.G.20.b.) \Rightarrow Punctul S se găsește pe un cerc de diametru $A'B$ (constant), iar cînd M parcurge segmentul $A'B'$, punctul S parcurge arcul de cerc $A'SB'$. (Vezi fig. VIII.G.20.b.)

Astfel dacă $M = B' \Rightarrow S = B'$, dacă $M = A' \Rightarrow S = A'$. Pentru $M \in A'B'$, punctul S este vârful unghiului drept din $\triangle A'SB$. (Vezi fig. VIII.G.20.b.)

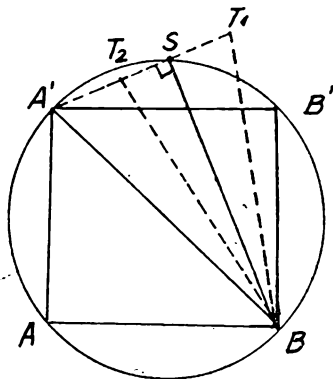


Fig. VIII.G.20.b.

Orice alt punct T care nu se găsește pe arcul $A'SB'$ nu răspunde la ipoteza: $C'T \perp BM$ deoarece măsura unghiului $A'TB$ este mai mică decât 90° — dacă T se află în exteriorul cercului de diametru $A'B$ (punctul T_1) — și mai mare decât 90° — dacă T se află în interiorul acestui cerc (punctul T_2). (Vezi fig. VIII.G.20.b.)

c) $\triangle ABN \equiv \triangle A'C'P$ deoarece sînt dreptunghice și au congruente catetele: AB și $A'C'$ (egale cu a — ipotuză) și ipotenuzele AN și $A'P$ (ipotuză) $\Rightarrow BN \equiv C'P$ (1). În dreptunghiul $CC'BB'$, (Vezi fig. VIII.G.20.c.), $B'N \equiv CP$ (conform 1) (2). Notăm O intersecția segmentului PN cu dia-

metrul $CB' \Rightarrow \triangle B'NO \equiv \triangle CPO$ deoarece : $B'N \equiv CP$ (conform 2) ;
 $m(\widehat{NB'O}) = m(\widehat{PCO})$ (alterne interne) și $m(\widehat{ONB'}) = m(\widehat{OPC})$ (unghiurile
 din O fiind concepute ca fiind opuse la vîrf). (Cazul U.L.U.) $\Rightarrow NO \equiv OP$
 oricum am alege punctele N și P ($NB \equiv PC'$) \Rightarrow punctul fix este O mijlocul
 segmentului CB' (Vezi fig. VIII.G.20.c.)

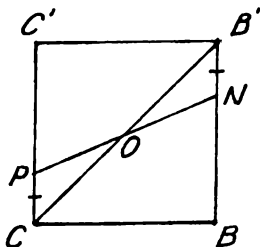


Fig. VIII.G.20.c.

VIII.G.21. a) $BA \perp (ADS)$ deoarece $BA \perp AD$ (ipoteză) și $BA \perp AS$ (ipoteză : AS perpendiculara pe planul $ABCD$). (1) (Vezi fig. VIII.G.21.)
 $AK \perp SD$ (ipoteză) (2). Din (1) și (2) conform teoremei celor trei perpendiculare, $BK \perp SD \Rightarrow BK$ înălțime în $\triangle SDB$ (3). Analog DH și SI sînt înălțimi în $\triangle SDB$ (4). Din (3) și (4) \Rightarrow segmentele BK, DH, SI , fiind înălțimile triunghiului SDB , sînt segmente concurente în același punct — ortocentrul $\triangle SDB$. (Vezi fig. VIII.G.21.)

b) Arătăm că AH este perpendiculară pe două drepte concurente conținute în planul (SBC) : $AH \perp SB$ (ipoteză): (1). Deoarece $CB \perp AB$ (ipoteză) și $CB \perp SA$ (ipoteză : $SA \perp (ABCD) \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow CB \perp AH \Rightarrow AH \perp CB$ (simetrie) (2).

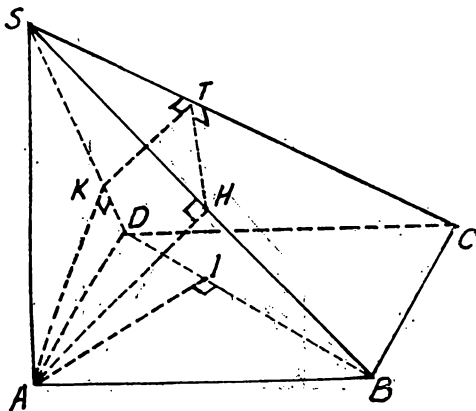


Fig. VIII.G.21.

Din (1) și (2) $AH \perp (SB, CB) \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

c) Analog cu demonstrația de la punctul b), se arată că și $AK \perp (SDC)$ (1).

Din $AH \perp (SBC)$ și $HT \perp SC$ ($T \in SC$), (ipoteză) $\Rightarrow AT \perp SC$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) (2). Să reținem că într-un plan (SAC) dintr-un punct A exterior unei drepte SC se poate duce pe acea dreaptă o perpendiculară și numai una (3).

Din $AK \perp (SDC)$ (conform (1)) și presupunind $KT' \perp SC$ ($T' \in SC$) (ipoteză) $\Rightarrow AT' \perp SC$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) (4).

Conform (3) $T = T'$. În concluzie, perpendicularele duse din H și K pe dreapta SC , concurează în punctul notat T care este proiecția punctului A pe dreapta SC .

VIII.G.22.

1. $AE \perp BC$ (ipoteză) (1). Cum $DC \perp (ABC)$ (ipoteză) $\Rightarrow CD \perp AE$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow AE \perp (BCD) \Rightarrow AE \perp BD$ (3). Deoarece $AF \perp BD$ (ipoteză și $AE \perp (BCD)$) $\Rightarrow EF \perp BD$ (4) (reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare).

Din (3) și (4) $BD \perp (EF, AE) \Rightarrow BD \perp (AEF)$ (5).

Conform teoremei: dacă o dreaptă „ a ” este perpendiculară pe un plan „ α ”, atunci orice plan β care conține dreapta „ a ” este perpendicular pe planul „ α ”, rezultă că planul (ABD) , care conține dreapta BD perpendiculară pe planul (AEF) va fi perpendicular pe planul (AEF) . Așadar, răspunsul este $(ABD) \perp (AEF)$ (6). (Vezi fig. VIII.G.22.)

2. a) În ipoteză $m(\widehat{CAB}) = 90^\circ \Rightarrow BA \perp AC$ (1). Cum $DC \perp (ABC)$ (ipoteză) $\Rightarrow DC \perp BA$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow BA \perp (ADC)$ (3). Deoarece planul (ABD) conține dreapta AB perpendiculară pe planul (ACD) , urmează — prin teorema de mai sus — ca planul $(ABD) \perp (ACD)$ (4).

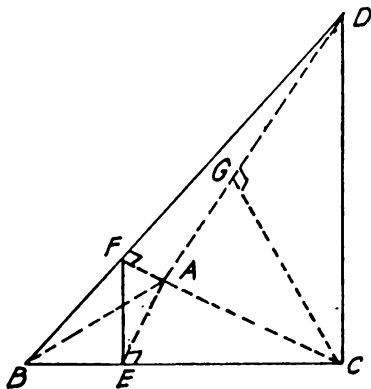


Fig. VIII.G.22.

b) Știm că $(AEF) \perp (ABD)$ (conform 1.6). Arătăm că dreapta CG este și ea perpendiculară pe planul (ABD) : $CG \perp AD$ (ipoteză) (1). Cum $AB \perp (ACD)$ (conf. 2.3) $\Rightarrow AB \perp CG$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow CG \perp (ABD)$ (3). În concluzie, planul (AEF) și dreapta CG sînt paralele.

VIII.G.23.

a) Deoarece $AO \perp OC$ și $AO \perp OB$, (ipoteză) $\Rightarrow AO \perp (ABC)$ (1). Construm $AA_1 \perp BC$ (2) din (1) și (2) $\Rightarrow OA_1 \perp BC$ (3) (o reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare). Cum $\triangle BOC$ este dreptunghic ($OB \perp OC =$ ipoteză) \Rightarrow punctul A_1 se găsește între B și C (4). În $\triangle ABA_1$, $AA_1 \perp BC \Rightarrow m(\widehat{ABA_1}) < 90^\circ$. (Vezi fig. VIII.G.23.)

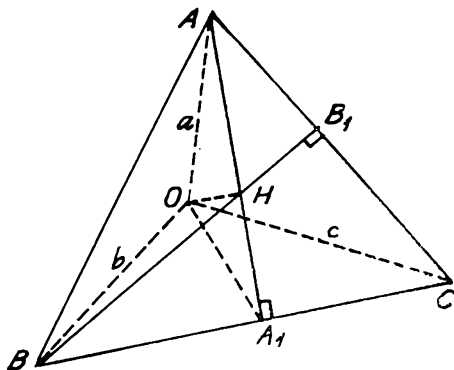


Fig. VIII.G.23.

Tot așa se arată că în $\triangle AA_1C$ ($AA_1 \perp BC$), $m(\widehat{ACB}) < 90^\circ$. Pentru a demonstra că și măsura unghiului BAC este mai mică decât 90° , procedăm asemănător ca în demonstrația precedentă, ducem $BB_1 \perp AC$ ($B_1 \in AC$) și repetăm raționamentele făcute, schimbînd notația triunghiului dreptunghic ABA_1 în $BAB_1 \Rightarrow m(\widehat{BAB_1}) < 90^\circ$. În concluzie, în ipotezele date, $\triangle ABC$ are toate unghiurile ascuțite.

b) În $\triangle AOA_1$, ducem $OH \perp AA_1$ ($H \in AA_1$) (1). Cum $BC \perp OA_1$ (conform a3) și $BC \perp AO$ (conform a1) $\Rightarrow BC \perp (AOA_1) \Rightarrow BC \perp OH$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow OH \perp (BC, AA_1) \Rightarrow OH \perp (ABC)$ (3).

Repetăm raționamentele, ducînd în triunghiul dreptunghic BOB_1 ($BO \perp OB_1$ — ipoteză) înălțimea OP ($P \in BB_1$) și concluzionăm $OP \perp (ABC)$. Cum, dintr-un punct exterior unui plan dat se poate duce pe planul dat o perpendiculară și numai una, rezultă că $OP = OH \Rightarrow P = H$ și deoarece acest punct aparține înălțimii BB_1 cît și înălțimii AA_1 , rezultă că el este chiar punctul de intersecție al înălțimilor triunghiului ABC . În concluzie, piciorul perpendicularei duse din punctul O pe planul ABC este chiar ortocentrul triunghiului ABC .

În triunghiul dreptunghic BOC , $OA_1 = \frac{b \cdot c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{bc\sqrt{b^2 + c^2}}{b^2 + c^2}$. În
 triunghiul dreptunghic AOA_1 ,

$$AA_1 = \sqrt{a^2 + \frac{b^2 c^2 (b^2 + c^2)}{(b^2 + c^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2 (b^2 + c^2) + b^2 c^2}{b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{b^2 + c^2}}$$

apoi, ținând cont că în $\triangle AOA_1$, $OH \perp AA_1$ (construcție), avem că :

$$OH = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \sqrt{b^2 + c^2}}{b^2 + c^2} \cdot \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} = \frac{abc \cdot \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$$

VIII.G.24.

$$S_{OCA}^2 = \frac{a^2 c^2}{4} \text{ (ipoteză } OA \perp OB \text{)} ; \quad (1)$$

$$S_{OAB}^2 = \frac{a^2 b^2}{4} \text{ (ipoteză } OA \perp OB \text{)}. \quad (2)$$

$$\text{Construim } OD \perp BC \text{ și notăm } OD = x. \quad (3)$$

Cum $OA \perp (BOC)$ (ipoteză) și $OD \perp BC$ (construcție) $\Rightarrow AD \perp BC$
 (conform teoremei directe a celor trei perpendiculare). Notăm $AD = y$. (4)

(Vezi fig. VIII.G.24.). Rezultă $S_{OBC}^2 = \frac{BC^2 \cdot x^2}{4}$ (din 3) și (5)

$$S_{ABC}^2 = \frac{BC^2 \cdot y^2}{4} \text{ (din 4)}. \quad (6)$$

În ipoteză $S_{ABC}^2 = S_{OBC}^2 + S_{OCA}^2 + S_{OAB}^2$ înlocuim relații (1), (2),
 (5) și (6).

$$\frac{BC^2 \cdot y^2}{4} = \frac{BC^2 \cdot x^2}{4} + \frac{a^2 c^2}{4} + \frac{a^2 b^2}{4} + (\Rightarrow) \frac{BC^2}{4} (y^2 - x^2) = \frac{a^2}{4} (c^2 + b^2).$$

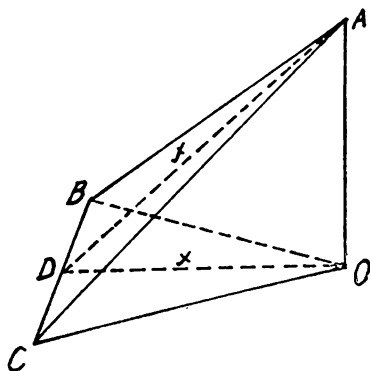


Fig. VIII.G.24.

Cum $y^2 - x^2 = a^2$ obținem $BC^2 = a^2 = a^2(b^2 + c^2) \Rightarrow BC^2 = b^2 + c^2$. Conform teoremei reciproce a lui Pitagora triunghiul BOC este dreptunghic în O adică $OC \perp OB$. În concluzie, conform cu demonstrația făcută relația $OB \perp OC$ este adevărată.

VIII.G.25. Pentru a construi punctele M, N, P, Q procedăm astfel din O ducem o perpendiculară pe planul $ABCD$. Fie O' piciorul acestei perpendiculare. Din punctul O' ducem perpendiculare pe laturile paralelogramului astfel $O'M \perp AB$ ($M \in AB$); $O'N \perp BC$ ($N \in BC$); $O'P \perp CD$; $O'Q \perp AD$ (Vezi fig. VIII.G.25.) (conform teoremei celor trei perpendi-

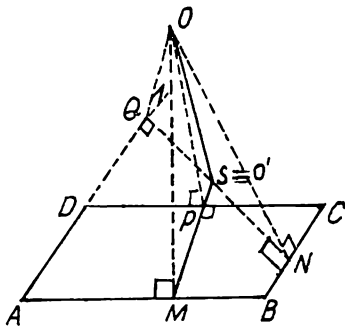


Fig. VIII.G.25.

culare — directă). Cum $AB \parallel CD$ și $BC \parallel AD$ (ipoteză) \Rightarrow punctele M, P, O' și N, Q, O' sînt coliniare \Rightarrow intersecția dreptelor MP și NQ este tocmai punctul O' , care a fost notat în textul problemei S — deci $O' = S$. Deoarece construcția punctelor M, N, P, Q a presupus $OO' \perp (ABCD)$; concluzia $OS \perp (ABCD)$ este evidentă.

VIII.G.26.

Deoarece $A'D \perp AA'$ (ipoteză), urmează că dreapta $A'D$ se găsește într-un plan perpendicular pe dreapta AA' . Fie α acest plan. Cum $AA' \perp \perp (ABC)$ rezultă :

$$\alpha \parallel (ABC). \quad (1)$$

Deoarece $DB \perp AB$ (ipoteză) urmează că dreapta DB se găsește conținută într-un plan perpendicular pe dreapta AB . Fie β acest plan. (Vezi fig. VIII.G.26.) Cum $AC \perp AB$ (ipoteză) și $AA' \perp AC$ (ipoteză), urmează că dreptele AA' și AC sînt paralele cu planul β deci :

$$\beta \parallel (AA'C). \quad (2)$$

Deoarece planele α și β sînt paralele cu planele (ABC) și $(A'AC)$ (conform (1) și (2)) care sînt concurente după dreapta AC , urmează că planele α și β se intersectează după o dreaptă paralelă cu AC . Fie d această dreaptă și din $d \parallel AC \Rightarrow d \perp (AA'B)$.

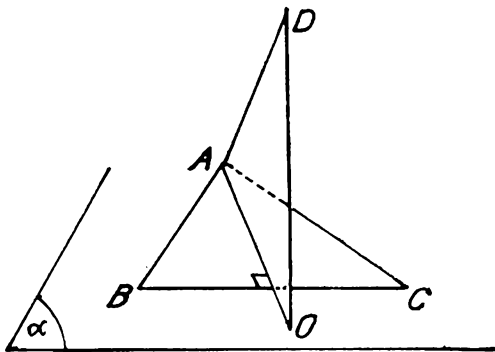


Fig. VIII.G.27.

VIII.G.28.

Directă Dacă $MA = MB = MC$ (1) și $OA \equiv OB \equiv OC$ (2) atunci $OM \perp (ABC)$. (Vezi fig. VIII.G.28.)

Demonstrație : Presupunem că MO nu este perpendiculară pe (ABC) și ducem $MO' \perp (ABC)$, $O' \in (ABC)$ și $O' \neq O$. $\Rightarrow \Delta MO'A \equiv \Delta MO'B \equiv \Delta MO'C$, deoarece sînt triunghiuri dreptunghice, cu cateta comună MO' și ipotenuzele congruente (conform 1). Rezultă $O'A \equiv O'B \equiv O'C$, deci O' este centrul cercului circumscris triunghiului ABC (intersecția mediatoarelor). Atunci $O' = O$, deoarece centrul cercului circumscris unui triunghi este un punct unic, rezultă $OM \perp (ABC)$.

Reciprocă : dacă $MO \perp (ABC)$ (1) și $OA \equiv OB \equiv OC$ (2) $\Rightarrow MA \equiv MB \equiv MC$.

Demonstrație : din ipoteza (1) și (2) $\Rightarrow \Delta MOA \equiv \Delta MOB \equiv \Delta MOC$ fiind triunghiuri dreptunghice (conform 1), avînd o catetă comună MO și catetele OA, OB, OC congruente (conform 2) $\Rightarrow MA \equiv MB \equiv MC$.

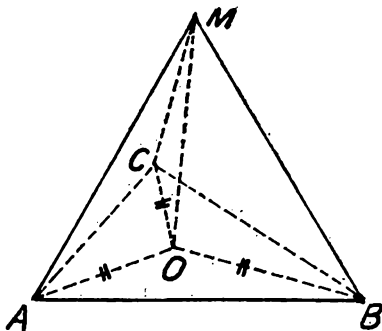


Fig. VIII.G.28.

$$\begin{aligned} & \text{Egalînd relațiile (1) și (2), obținem } 32 \cdot 12 = 20 \cdot CL \Leftrightarrow CL = \\ & = \frac{32 \cdot 6}{10} = \frac{32 \cdot 3}{5} \text{ cm.} \end{aligned}$$

Deoarece $AA'RE'$ este dreptunghi (construcție) $\Rightarrow A'E \equiv AR$ este
suficient să calculăm AR . Cum $\triangle ACL \sim \triangle ARE$ ($CL \parallel ER$) $\Rightarrow \frac{AC}{AE} =$

$$= \frac{AS}{AR} \text{ dar } AL = \sqrt{32^2 - \frac{32^2 \cdot 3^2}{5^2}} = \frac{\sqrt{32^2 \cdot 5^2 - 32^2 \cdot 3^2}}{5} = \frac{32 \cdot 4}{5} = \frac{128}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AR = AE \cdot AL : AC = 50 \cdot \frac{128}{5} : 32 = 1280 : 32 = 40 \text{ cm.}$$

În concluzie, $A'E' = AR = 40$ cm.

VIII.G.30. a) Din $MO \perp (ABCD)$ (ipoteză) $\Rightarrow MO \perp CP$. (1)

Din $CP \perp DB$ (ipoteză) $\Rightarrow CP \perp (DMB)$. (2)

Oricare ar fi planul care conține dreapta CP , va fi un plan perpendicular pe planul (MDB) . În cazul de față planul $(PQC) \perp (MDB)$. (Vezi fig. VIII.G.30.)

b) Ducem $PR \perp MD$ (1) ($R \in MD$). Din (1) și (2a) $\Rightarrow CR \perp DM$ conform teoremei celor trei perpendiculare) (2). Muchia diedrului format de planele (PQC) și (PRC) este dreapta PC . Deoarece $PQ \perp PC$ (conform 2a) și $RP \perp PC$ (conform 2a) \Rightarrow unghiul plan corespunzător diedrului în discuție este \widehat{RPQ} . Cum ipoteza presupune plane perpendiculare $m(\widehat{RPQ}) = 90^\circ \Rightarrow QP \perp PR$ (3) $\Rightarrow MPRQ$ este dreptunghi deoarece $PQ \perp MB$ (reciproca teoremei celor trei perpendiculare) și $PR \perp MD$ (construcție) $\Rightarrow m(\widehat{RMB}) = 90^\circ \Rightarrow$ triunghiul DMB dreptunghic în M . Cum în $\triangle DMB$, MO este înălțime și mediană (ipoteză) $\Rightarrow \triangle DMB$ este și isoscel $\Rightarrow MO = \frac{DB}{2} = \frac{AC}{2}$ (ipoteză diagonalele dreptunghiului sînt congruente). (Vezi fig. VIII.G.30.)

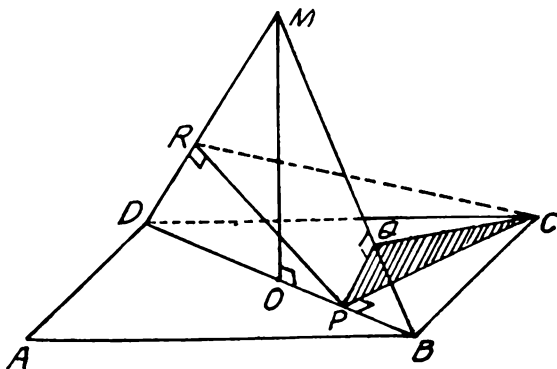


Fig. VIII.G.30.

În concluzie, în ipotezele date propoziția $MO = \frac{AC}{2}$ este adevărată.

VIII.G.31. a) Deoarece $MA \perp (ABCD)$ (ipoteză) și $AD \perp DC$ (ipoteză) $\Rightarrow \Rightarrow MD \perp DC$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) $\Rightarrow \Delta MDC$ este dreptunghic în D . (1). (Vezi fig. VIII.G.31.)

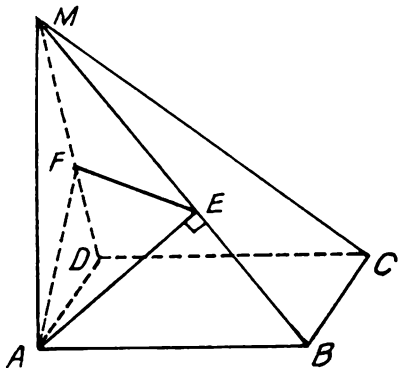


Fig. VIII.G.31.

În triunghiul dreptunghic MAD (ipoteză) $AD < MD$, adică $x < MD$. ($x \in \mathbb{N}^*$).

În triunghiul dreptunghic MDC (conform 1) $MD < MC$ (pentru ambele inegalități: într-un triunghi dreptunghic, o catetă este mai mică decât ipotenuza) \Rightarrow laturile care pot avea ca lungimi numere naturale consecutive sînt: $DC = x$; $DM = x + 1$; $MC = x + 2$.

Conform teoremei lui Pitagora $x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$; ecuație care după efectuarea calculelor devine:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1 + 2)(x - 1 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ \text{sau} \\ x - 3 = 0 \end{cases}$$

și, deoarece $x \in \mathbb{N}^*$, soluția unică este: $x = 3$. În aceste condiții laturile ΔMDC sînt 3, 4, 5.

b) Ducem $AF \perp MD$ (1). Cum $DC \perp AD$ — (ipoteză) și $CD \perp MD$ (demonstrat) $\Rightarrow DC \perp (ADM)$, adică $DC \perp AF$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow AF \perp (MDC)$ deci AF reprezintă distanța de la A la planul MDC . (Vezi fig. VIII.G.31.) În triunghiul dreptunghic MAD (conform 1a), $AF =$

$$\frac{AD \cdot AM}{MD}. \text{ În ipoteza (a) } AD = 3, MD = 4; AM = \sqrt{7} \Rightarrow AF = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{4}.$$

c) În $\triangle MAB$ dreptunghic (ipoteză), ducem $AE \perp MB$. (Vezi fig. VIII.G.31.). Cum triunghiurile dreptunghice MAD și MAB sînt congruente (catetă, ipoteză) \Rightarrow înălțimile corespunzătoare ipotenzelor congruente, sînt congruente, adică : $AF \equiv AE \Rightarrow DF \equiv BE$. În $\triangle MDB$ care este isoscel (demonstrat), rapoartele $\frac{MF}{MD}$ și $\frac{ME}{MB}$ sînt egale (demonstrat) $\Rightarrow EF \parallel DB \Rightarrow EF \parallel (ABCD)$ (fiind paralelă cu dreapta DB din planul $ABCD$).

VIII.G.32. Notăm triunghiul dreptunghic ABC ($m(\widehat{A}) = 90^\circ$) și presupunem $AB = 7$ și $AC = 24 \Rightarrow BC = 25$ (Pitagora) Apoi notăm β planul care trece prin ipotenză și face cu planul (ABC) un unghi de 30° . Fie $AD \perp BC$. Prin dreapta AD , ducem un plan α perpendicular pe planul (ABC) , ducînd, de exemplu, $AE \perp (ABC)$. (Vezi fig. VIII.G.32.) Planul determinat de AE și AD este tocmai planul α . Acesta intersectează planul β după o dreaptă DF . Cum $BC \perp AD$ (construcție) și $BC \perp AE$ (construcția planului α) $\Rightarrow BC \perp \alpha \Rightarrow BC \perp DF$.

Așadar, dreptele $AD \subset (ABC)$ și $DF \subset \beta$ sînt perpendiculare pe muchia BC a diedrului determinat de planele (ABC) și $\beta \Rightarrow \widehat{ADF}$ este unghiul plan corespunzător diedrului în discuție \Rightarrow construim în planul α , $AP \perp DF$ ($P \in DF$).

În $\triangle APD$ (dreptunghic în P), $m(\widehat{ADP}) = 30^\circ$ (ipoteză) iar în triunghiul dreptunghic ABC avem că : $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{7 \cdot 24}{25} \Rightarrow AP$ care este distanța de la punctul A la planul β (construcție) are măsura lungimii $AP = \frac{AD}{2} = \frac{7 \cdot 12}{25} = \frac{84}{25} = 3,36$ cm. Așadar, distanța de la A la planul β este $AP = 3,36$ cm.

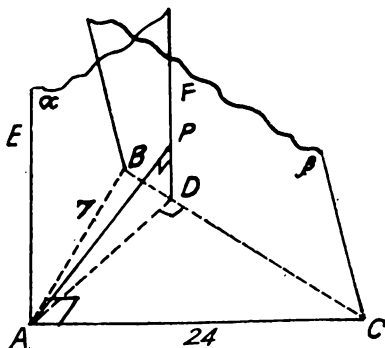


Fig. VIII.G.32.

VIII.G.33. Din $AD \perp (ABC)$ (ipoteză) și $DE \perp BC$ (ipoteză) $\Rightarrow AE \perp BC$ (conform unei reciproce a teoremei celor trei perpendiculare). (Vezi fig. VIII.G.33.)

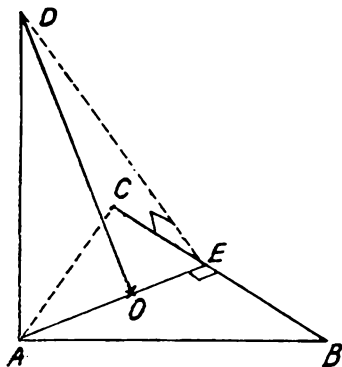


Fig. VIII.G.33.

Deoarece $\triangle ABC$ este echilateral, înălțimea AE este și mediana laturii BC . $CE \equiv EB$ deci și mediatoarea acesteia \Rightarrow centrul cercului circumscris $\triangle ABC$ se găsește pe AE și anume situat la $\frac{1}{3}$ de latura BC și la $\frac{2}{3}$ de vârful $A \Rightarrow$ Aria $\triangle DAO =$ (dreptunghic în A , ipoteză) $\frac{AO \cdot AD}{2}$

a) Urmează să calculăm AO conform cu raționamentele făcute. Mai întâi calculăm lungimea segmentului AE $AE = 9$ cm (se calculează conform teoremei lui Pitagora, în \triangle dreptunghic AEB — construcția punctului $E \Rightarrow AO = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$ cm).

Așadar aria $\triangle DAO = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$ cm², iar perimetrul triunghiului DAO va fi: $AO + AD + DO = 6 + 8 + 10 = 24$ cm (unde $DO = \sqrt{AO^2 + AD^2}$).

b) În $\triangle DOE$ înălțimea relativă laturii OE este tocmai DA (ipoteză $AD \perp (ABC)$). Cum $OE = \frac{AO}{2}$ (apoteama triunghiului echilateral este jumătate din raza cercului circumscris) rezultă $OE = 3$ și deci aria $\triangle DOE = \frac{OE \cdot AD}{2} = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12$ cm².

c) Cum $BC \perp DE$ (ipoteză) și $BC \perp AE$ (demonstrat) \Rightarrow unghiul plan corespunzător diedrului determinat de planele (ABC) și (DBC) este tocmai unghiul DEA . (Vezi fig. VIII.G.33.) În triunghiul dreptunghic ADE (ipoteză) $\text{tg}(\widehat{DEA}) = \frac{AD}{AE} = \frac{8}{9}$.

VIII.G.34. a) Pentru că $SM \perp (ABCD)$ (ipoteză), construim $MN \perp AB$, ($N \in AB \Rightarrow SN \perp AB$ (conform teoremei celor trei perpendiculare). (Vezi fig. VIII.G.34.) $\Rightarrow SN$ este înălțimea triunghiului SAB . Deoarece $DM = MC$ (ipoteză) și $MN \perp DC$ (construcția $MN \perp AB$) $\Rightarrow MN \perp DC$, căci $AB \parallel DC$ (ipoteză) $\Rightarrow MN$ este mediatoarea laturii DC . Cum $ABCD$ este

trapez isoscel (ipoteză) \Rightarrow MN este și mediatoarea laturii AB deci $AN = NB \Rightarrow MN$, este axa de simetrie pentru trapezul $ABCD$. $\Rightarrow \triangle SAB$ este isoscel (SN este înălțime conform teoremei celor trei perpendiculare $SN \perp AB$, dar și mediana laturii AB) \Rightarrow Aria $\triangle SAB = \frac{AB \cdot SN}{2}$. Calculul lungimilor AB și SN .

Pentru a calcula lungimea AB , ducem $CE \perp AB$, ($E \in AB$). Deoarece $m(\widehat{CBN}) = 30^\circ$ (ipoteză) $\Rightarrow CE = \frac{CB}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm $\Rightarrow EB = 3 \cdot \sqrt{3}$ cm. Deoarece $AB = 2 \cdot EB + DC$ trapezul fiind isoscel și $DC \equiv CB$, urmează că $AB = 6 + 6\sqrt{3} = 6(1 + \sqrt{3})$ cm.

Pentru a calcula lungimea segmentului SN aplicăm teorema lui Pitagora în \triangle dreptunghic SMN (ipoteză) \therefore

$SN^2 = SM^2 + MN^2$; $SN^2 = 3 + MN^2$. Cum $MN \equiv CE$ (ambele reprezentând distanța dintre dreptele paralele ale trapezului AB și DC) $\Rightarrow SN = 3 + 9 = 12$; $SN = 2\sqrt{3}$.

Așadar, Aria $\triangle SAB = \frac{AB \cdot SN}{2} = \frac{6(1 + \sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})$ cm².

b) Planul SMN conține dreptele concurente ($SM \perp (ABCD)$) și MN , mediatoarea segmentelor AB și CD) $\Rightarrow (SMN) \perp (ABCD)$ și orice punct din acest plan este egal depărtat de capetele segmentelor AB și CD . Acest plan se numește „planul mediator“ al segmentelor AB și CD . Cum, muchia diedrului determinat de planele SAB și $ABCD$, dreapta AB , este perpendiculară pe SN și MN (demonstrat) \Rightarrow unghiul plan corespunzător diedrului de mai sus este chiar SNM \Rightarrow . În \triangle dreptunghic SMN (ipoteză) $\operatorname{tg} \widehat{SNM} = \frac{SM}{MN} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m(\widehat{SNM}) = 30^\circ$. În concluzie, măsura unghiului plan care corespunde diedrului în cauză este de 30° .

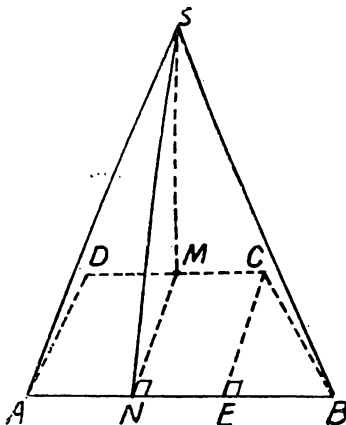


Fig. VIII.G.34.

VIII.G.35. a) Construcția punctului I. (Vezi fig. VIII.G.35.)

Deoarece $AO \perp OC$ și $AO \perp OB$ (ipoteză) $\Rightarrow AO \perp (COB)$.

În planul COB ducem $OI \perp CM$, ($I \in CM$) $\Rightarrow AI \perp CM$, (conform teoremei celor trei perpendiculare). (Vezi fig. VIII.G.35.)

Calculul segmentelor OI și AI

Pentru a calcula lungimea segmentului OI raționăm astfel OI este înălțime în Δ dreptunghic COM (ipoteză și construcția precedentă) \Rightarrow

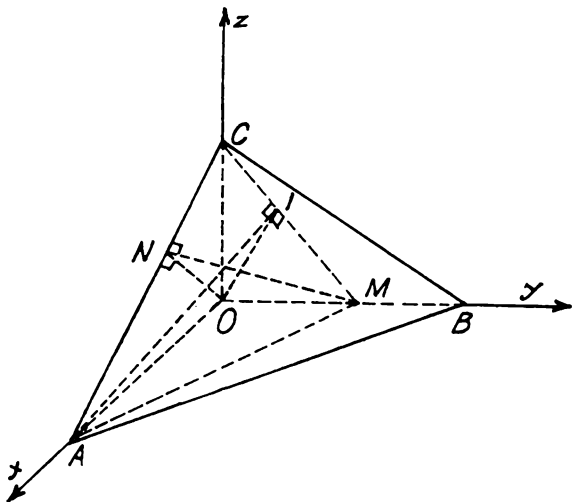


Fig. VIII.G.35.

$\Rightarrow OI = OC \cdot OM : MC$. Evaluăm lungimile acestor segmente : $OC = c$ (ipoteză) ; $OM = OB : 2 = 2b : 2$; $OM = b$ (ipotezele $OB = 2b$ și $OM \equiv MB$) ; $CM = \sqrt{b^2 + c^2}$ (Pitagora în Δ dreptunghic COM — ipoteză) \Rightarrow

$$OI = \frac{c \cdot b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{b \cdot c \sqrt{b^2 + c^2}}{b^2 + c^2}.$$

Pentru a calcula lungimea segmentului AI aplicăm teorema lui Pitagora în Δ dreptunghic AOI ($m(\widehat{AOI}) = 90^\circ$ — ipoteză) : $AI^2 = AO^2 +$

$$+ OI^2 \Rightarrow AI = \sqrt{a^2 + \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{b^2 + c^2}}$$

b) Muchia diedrului respectiv este dreapta AC . Ducem un plan perpendicular pe această muchie. Acesta va conține două drepte concurente, perpendiculare pe AC și conținute în planele AMC și AOC . Unghiul acestor drepte este tocmai unghiul plan corespunzător diedrului dat (definiție). Procedăm astfel : deoarece $MO \perp AC$ (ipoteză) (1), ducem în planul (AOC) $ON \perp AC$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow MN \perp AC$ (conform teoremei directe a celor trei perpendiculare) (3). Rezultă că planul descris

mai sus este planul determinat de dreptele concurente MN și ON și unghiul plan căutat este MNO (ambele drepte fiind perpendiculare pe AC și conținute în planele AMC și AOC). Cum MON este dreptunghic în O (ipoteză $MO \perp ON$), $\text{tg}(\widehat{MNO}) = \frac{OM}{ON}$. Deoarece $OM = b$ (ipoteză),

calculăm ON în Δ dreptunghic AOC $OC = \frac{OA \cdot OC}{AC} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a \cdot c}$ și deci

$$\text{tg}(\widehat{MNO}) = \frac{b \cdot \sqrt{b^2 + c^2}}{a \cdot c}$$

c) Deoarece $OI \perp CM$ (construcție) oricare ar fi poziția punctului $M \in OB$, rezultă că în triunghiul dreptunghic OIC , ipotenuza OC are lungimea constantă $OC = c$. Așadar, în ipotezele problemei, toate punctele de felul punctului I se vor găsi în planul COB și vor fi virfurile unor triunghiuri dreptunghice construite în planul COB și care au ipotenuza comună $OC = c$. Aceste puncte le construim astfel: în planul COB (și de aceeași parte cu punctul B construim un semicerc de diametru constant $OC = c$). Orice punct I de pe acest semicerc conduce la $m(\widehat{OIC}) = 90^\circ$ (proprietate comună a punctelor I). Oricare alt punct I din (COB) care nu se află pe semicercul de mai sus nu are proprietate $m(\widehat{OIC}) = 90^\circ$; deoarece, dacă I' se găsește în afara semicercului construit, $m(\widehat{O'I'C}) < 90^\circ$, și, dacă I' se află în interiorul semicercului construit, $m(\widehat{O'I'C}) > 90^\circ$.

Spunem „locul geometric al punctului I când M descrie segmentul AB și $AI \perp CM$ (ceea ce conduce la $m(\widehat{OIC}) = 90^\circ$), este un arc de cerc inclus în semicercul din planul COB al cărui diametru este segmentul constant $OC = c$ ”. Să observăm: dacă $O = M$ atunci $I = O$, iar dacă $M = B$, I va fi în ΔCOB piciorul înălțimii (punct fix) relative ipotenuzei BC . În acest fel capetele arcului de cerc sînt punctele O și I (fix).

VIII.G.36. a) Deoarece $MN \perp (ABCD)$ (1) ducem $MR \perp AB$ (Vezi fig. VIII.G.36b.) (2) $\Rightarrow NR \perp AB$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) (3). În triunghiul dreptunghic NMR (ipoteză), calculăm NR (Pitagora), $NR^2 = NM^2 + MR^2$ (4). Cum $NM = \frac{48}{5}$ cm (ipoteză), rămîne să

evaluăm lungimea segmentului MR . De exemplu, procedăm astfel (Vezi fig. VIII.G.36b.)

În ΔABD ducem $DS \perp AB$ ($S \in AB$). Cum $MR \perp AB$ (construcție) $\Rightarrow \Delta AMR \sim \Delta ADS$ și raportul de asemănare este $\frac{AM}{AD} = \frac{1}{5}$ (ipoteză)

$$\frac{MR}{DS} = \frac{1}{5} \quad (5).$$

Așadar, mai trebuie evaluat DS . Aria $\Delta ADB = \frac{DB \cdot AO}{2} = \frac{AB \cdot DS}{2}$

(O fiind intersecția diagonalelor rombului) și deci,

$$\frac{12 \cdot AO}{2} = \frac{10 \cdot DS}{2}$$

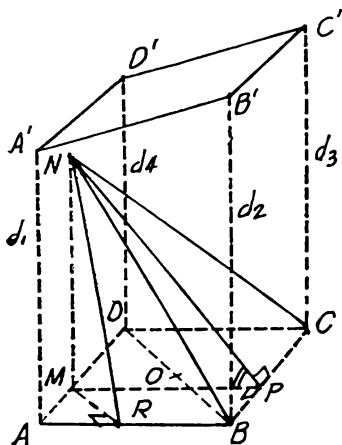


Fig. VIII.G.36.a.

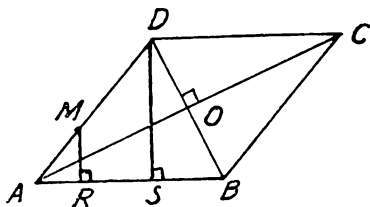


Fig. VIII.G.36.b.

Cum $AO = 8$ cm (din Δ dreptunghic AOD , ipoteza $AC \perp BD$) \Rightarrow
 $\Rightarrow DS = \frac{48}{5}$ cm (6). Înlocuim (6) în (5) $MR = \frac{48}{25}$ cm. Înlocuim în (4)

și efectuând calculele obținem $NR = \frac{48 \cdot \sqrt{26}}{25}$ cm.

b) Unghiul plan corespunzător unghiului diedru determinat de planele NBC și $ABCD$ îl obținem ducând prin MN un plan perpendicular pe AD (implicit pe $BC \parallel AD$). (Vezi fig. VIII.G.36a.) Dreptele de intersecție dintre acest plan și planele $ABCD$ și NBC , le notăm MP și respectiv NP ($P \in BC$, muchia diedrului). Cum $MP \perp AD$ și $MP \perp BC$ (construcție) $\Rightarrow MP$, este înălțimea rombului relativă laturii AD , ori $MP \equiv DS$. (Distanțele dintre dreptele paralele $AD \parallel BC$ și $AB \parallel DC$, sînt și înălțimile rombului). Așadar, $MP = \frac{48}{5}$ (conform 6 a). Cum $MN = \frac{48}{5}$

(ipoteză) și $MN \perp (ABCD)$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{MNP} = \frac{MN}{MP} = 1 \Rightarrow$

$m(\widehat{MPN}) = 45^\circ$.

c) Dacă planul α este paralel cu dreapta perpendiculară în A pe planul $ABCD$, atunci el este paralel cu dreptele perpendiculare în B , C și D pe planul $ABCD$ și deci punctele A' , B' , C' și D' sînt puncte la infinit (practic ele nu există). În caz contrar, punctele A' , B' , C' , D' există și sînt vîrfurile unui paralelogram.

Demonstrație: Notăm dreptele perpendiculare pe $(ABCD)$ și care trec prin A , B , C , D , d_1 , d_2 , d_3 , d_4 (ordinea indicilor este ordinea alfabetică a punctelor A , B , C , D) (Vezi fig. VIII.G.36.a) \Rightarrow planele (d_1d_2) și (d_3d_4) sînt paralele (ipoteza problemei). Analog, planele (d_2d_3) și (d_4d_1) sînt

paralele. Cum $d_1 \not\parallel \alpha \Rightarrow d_1 \cap \alpha = \{A'\}$. Asemănător, $d_2 \cap \alpha = \{B'\}$; $d_3 \cap \alpha = \{C'\}$ și $d_4 \cap \alpha = \{D'\}$. Cum $(d_1 d_2) \parallel (d_3 d_4)$ planul α le intersectează după două drepte paralele (teoremă) $\Rightarrow A'B' \parallel C'D'$.

Asemănător se demonstrează ca $B'C' \parallel A'D'$. În concluzie: dacă $d_1 \not\parallel \alpha$ atunci punctele A', B', C', D' există și patrulaterul $A'B'C'D'$ este paralelogram.

VIII.G.37. Deoarece $MA \perp (ABCD)$ (ipoteză) și $AO \perp BD$ (diagonalele pătratului sînt perpendiculare) $\Rightarrow MO \perp DB$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) $\Rightarrow \triangle MDB$ este isoscel deoarece mediana MO relativă laturii DB ($DO \equiv OB$ — ipoteză) este și înălțimea relativă laturii DB (demonstrat). Deci, $MD \equiv MB$ (1). Deoarece $MA \perp (ABCD)$ (ipoteză) și $AB \perp BC$ (ipoteză $ABCD$ este pătrat) $\Rightarrow MB \perp BC$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) $\Rightarrow \triangle MBC$ este triunghi dreptunghic: $m(\widehat{MBC}) = 90^\circ$ (2). Analog se demonstrează că $MD \perp DC$ și deci $\triangle MDC$ este dreptunghic în D : $m(\widehat{MDC}) = 90^\circ$ (3).

Din (1), (2), (3) și faptul că $ABCD$ este pătrat $\Rightarrow \triangle MBC \equiv \triangle MDC$ (cazul C.C.). (Vezi fig. VIII.G.37.a.)

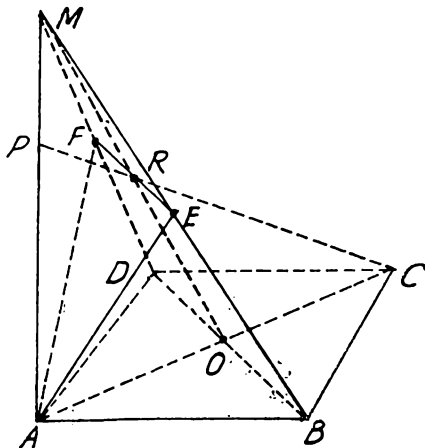


Fig. VIII.G.37.a.

Deoarece în triunghiuri congruente medianele relative laturilor congruente sînt congruente, rezultă că în triunghiurile MBC și MDC , medianele CE și CF (ipotezele $ME \equiv EB$ și $MF \equiv FD$) sînt congruente: $CE \equiv CF \Rightarrow$ triunghiul CEF este isoscel (4). Conform propoziției de mai sus relativă la triunghiurile congruente, în triunghiurile dreptunghice MAB și MAD (ipoteza $AM \perp (ABCD)$) care sînt congruente (ipoteza $ABCD$ este pătrat), medianele AE și AF sînt congruente: $AE \equiv AF \Rightarrow$ triunghiul AEF este isoscel (5).

Să precizăm că punctele M și O aparțin planelor (MAC) și (MDB)
 $\Rightarrow MO$ este dreapta de intersecție a planelor (MAC) și (MDB), iar în $\triangle MDB$, EF este linie mijlocie (ipoteză). (6)

În triunghiul MDB , MO este intersectat de linia mijlocie EF (ipoteză) într-un punct, de exemplu $R \Rightarrow MR \equiv RO$ (7) (deoarece în $\triangle MDO$ conform Thales : $\frac{MF}{FD} = \frac{MR}{RO} = 1$), dar și $FR \equiv RE$ (8).

Deoarece $CR \perp EF$ (vezi 4) dar și $CR \subset (MAC) \Rightarrow$ dreapta MA intersectează planul CEF într-un punct notat P (ipoteză) și pe care îl construim prelungind dreapta CR pînă la intersecția cu dreapta MA .

a) În triunghiurile isoscele CEF (4) și AEF (5) segmentele CR și AR fiind mediane (conform 8) $\Rightarrow CR \perp EF$ și $AR \perp EF \Rightarrow$ unghiul ARC este unghiul plan corespunzător diedrului format de planele (CEF) și AEF .

În $\triangle ARC$ mediana RO are ca lungime jumătate din latura AC (ipoteză) $\Rightarrow \triangle ARC$ este dreptunghic în $R \Rightarrow m(\widehat{ARC}) = 90^\circ \Rightarrow (CEF \perp \perp (AEF))$. (9)

b) Să remarcăm că planele (ABC) și (CEF) (care conțin dreptele paralele $DB \parallel EF$ (conform 6)) fiind și concurente, avînd punctul C comun \Rightarrow dreapta lor de intersecție — muchia diedrului — care trece prin punctul C , va fi paralelă cu dreptele DB și EF (căci, presupunînd contrariul ar rezulta că planele (ABC), (CEF) și planul determinat de paralele DB și EF ar avea un punct comun și deci $DB \parallel EF$ (absurd). Folosind această remarcă, unghiul plan corespunzător diedrului format de (ABC) și (CEF) îl construim ducînd prin punctul C (și care aparține muchiei diedrului) un plan perpendicular pe dreptele EF și respectiv DB (care sînt paralele cu muchia diedrului). Acesta este tocmai planul MAC , deoarece — de exemplu $BD \perp AC$ (ipoteza $ABCD$ pătrat) și $BD \perp AM$ (ipoteza $MA \perp (ABCD)$). Dreptele de intersecție dintre planul (MAC) pe planele (CEF) și ($ABCD$) sînt și laturile unghiului plan corespunzător pe planele (CEF) și ($ABCD$) sînt și laturile unghiului plan corespunzător diedrului în cauză \Rightarrow unghiul PCA este unghiul plan căutat.

Deoarece în triunghiul dreptunghic ARC (conform 9) $RO = \frac{AC}{2}$ iar în triunghiul dreptunghic MAO , (ipoteză) AR este mediana relativă ipotenuzei MO , deducem $AR = \frac{MO}{2} = \frac{AC}{2}$ și deci triunghiul ARO este echilateral \Rightarrow în \triangle dreptunghic ARC , $m(\widehat{RCA}) = 30^\circ$, adică măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (CEF) și (ABC) este de 30° .

c) În $\triangle MAC$, dreapta CP trece prin mijlocul R al medianei MO (demonstrat). (Vezi fig. VIII.G.37.b.)

Ducem prin O , $OS \parallel RP$ ($S \in MA$) $\Rightarrow PR$ linie mijlocie (prin reciprocă) în $\triangle MSO \Rightarrow MP \equiv SA$. Rezultă concluzia problemei :

$$PA = 2 \cdot PM.$$

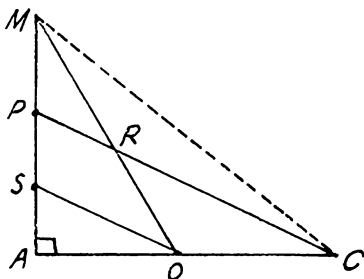


Fig. VIII.G.3i.b.

Altă soluție. Se aplică teorema lui Menelos în $\triangle MAO$, transversala fiind dreapta CP :

$$\frac{CO}{CA} \cdot \frac{PA}{PM} \cdot \frac{RM}{RO} = 1.$$

$$\text{Cum } CA = 200 \text{ (ipoteză) și } MR \equiv RO \text{ (conform 7)} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{PA}{PM} \cdot \frac{1}{1} =$$

$$= 1 \Rightarrow PA = 2 \cdot PM.$$

VIII.G.38. Se verifică prin reciproca teoremei lui Pitagora că $\triangle ABC$ nu este dreptunghic. Dacă, de exemplu, $\triangle ABC$ era dreptunghic în B , atunci unghiul \widehat{ABC} fiind drept și avînd $BC \subset P$ (o putem considera paralelă cu P) se proiectează pe planul P tot după un unghi drept. (Teorema : un unghi drept se proiectează pe un plan tot după un unghi drept dacă cel puțin una din laturile lui este paralelă cu planul de proiecție). Nu putem trage însă concluzia că $\triangle A'BC$ nu are în B sau în C unghiul cu măsura de 90° . (Vezi fig. VIII.G.38.)

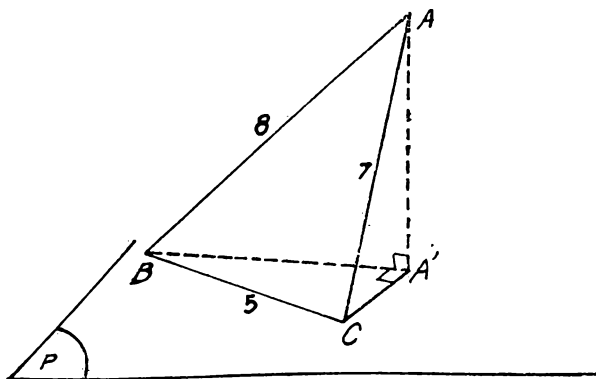


Fig. VIII.G.38.

Stabilim în care dintre virfurile A' , B sau C poate fi unghiul drept, calculând pătratele lungimilor laturilor $\triangle A'BC$. Astfel: în triunghiul dreptunghic $AA'B$ (ipoteză) $A'B^2 = 64 - x^2$ (unde $x = AA'$). În triunghiul dreptunghic $AA'C$ (ipoteză) $A'C^2 = 49 - x^2$. Verificăm care este valoarea de adevăr a concluziei teoremei lui Pitagora în următoarele cazuri

a) $BC^2 + BA'^2 = CA'^2$; $25 + 64 - x^2 = 49 - x^2$, fals deci, unghiul drept nu este în B .

b) $BC^2 + CA'^2 = BA'^2$; $25 + 49 - x^2 = 64 - x^2$, fals deci, unghiul drept nu este în C .

c) $BA'^2 + CA'^2 = BC^2$; $113 - 2x^2 = 25$ (\Rightarrow) $2x^2 = 88$ (\Rightarrow) $x = 44 \Rightarrow x = 2\sqrt{11}$, unghiul drept este în A' iar $AA' = 2\sqrt{11} \Rightarrow BA'^2 = 64 - 44 = 20$; $BA' = 2\sqrt{5}$ cm și $CA'^2 = 49 - 44 = 5$ cm, $CA' = 5$ cm.

$$\text{Aria } \triangle A'BC = \frac{A'B \cdot A'C}{2} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{2} = 5 \text{ cm.}$$

VIII.G.39. Notăm α planul de proiecție și deci punctul D este proiecția pe planul α a punctului A (ipoteză). (Vezi fig. VIII.G.39.)

Dacă $AB \equiv AC$ ar rezulta că triunghiurile dreptunghice ADB și ADC sînt congruente (cazul C.C.) $\Rightarrow DB \equiv DC$, congruența care contrazice ipotezele $DC = 5$ cm și $DB = 13$ cm. Așadar, $AB \neq AC$. Presupunem $AB \equiv BC$.

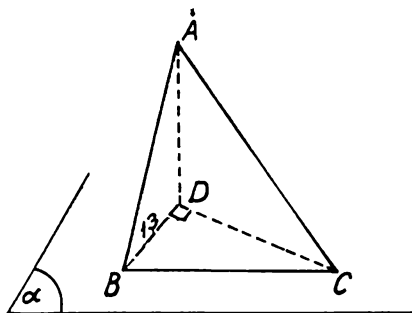


Fig. VIII.G.39.

În triunghiul dreptunghic BDC (ipoteză) $BC^2 = 169 + 25 = 194$ cm $\Rightarrow AB = \sqrt{194}$ cm. În $\triangle ADB$ ($m(\widehat{ADB}) = 90^\circ$), $AD = \sqrt{194 - 169} = \sqrt{25} = 5$ cm. În $\triangle ADC$ ($m(\widehat{ADC}) = 90^\circ$) $AC = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}$ cm. Așadar, dacă $AB \equiv BC$, laturile $\triangle ABC$ sînt $AB = BC = \sqrt{194}$ cm și $AC = 5\sqrt{2}$ cm.

Presupunem $AC \equiv BC$, deci $AC = BC = \sqrt{194}$ (demonstrat). În $\triangle ADC$ ($m(\widehat{ADC}) = 90^\circ$), $AD = \sqrt{194 - 25} = \sqrt{169} = 13$ cm. În $\triangle ADB$ ($m(\widehat{ADB}) = 90^\circ$), $AB = \sqrt{2 \cdot 169} = 13\sqrt{2}$ cm.

Așadar, dacă $AC \equiv CB$ laturile triunghiului ABC sint $AC = BC = \sqrt{194}$ cm și $AB = 13\sqrt{2}$ cm.

Observație. În ambele cazuri triunghiul isoscel ABC se poate construi (suma laturilor congruente fiind mai mare decît latura necongruentă). Problema are două soluții.

VIII.G.40. a) Verificăm dacă este adevărată relația din concluzia teoremei directe a lui Pitagora $AM^2 = 4a^2$; $MB^2 = 12a^2$; $AB^2 = 16a^2 \Rightarrow \Rightarrow AB^2 = AM^2 + MB^2 \Rightarrow m(\widehat{AMB}) = 90^\circ$ (conform reciprocei teoremei lui Pitagora) \Rightarrow Aria $\triangle AMB = \frac{AM \cdot MB}{2} = \frac{2a \cdot 2a\sqrt{3}}{2} = 2a^2\sqrt{3}$.

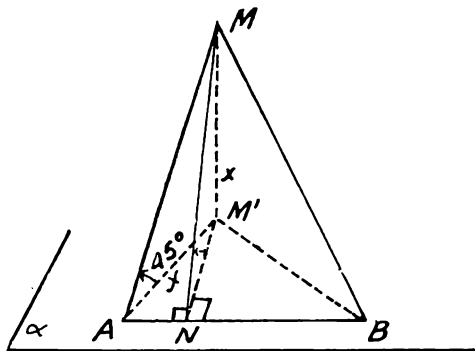


Fig. VIII.G.40.

Construim $MN \perp AB$ ($N \in AB$), ducînd $MM' \perp \alpha$ și apoi $M'N \perp AB$ (conform teoremei celor trei perpendiculare). (Vezi fig. VIII.G.40.)

Triunghiul $MM'A$ este isoscel și dreptunghic (ipoteză) $MM' \perp AM'$ și $MM' \equiv AM'$. Notăm $MM' = x$. În $\triangle MM'A$ (conform Pitagora) avem: $2x^2 = 4a^4 \Leftrightarrow x^2 = 2a^2 \Rightarrow x = a\sqrt{2}$ și deci $MM' = a\sqrt{2}$. (Vezi fig. VIII.G.40.)

În triunghiul dreptunghic AMB (demonstrat) calculăm lungimea înălțimii MN , relativă ipotenuzei AB :

$$MN = \frac{AM \cdot MB}{AB}; \quad MN = \frac{2a \cdot 2a\sqrt{3}}{4a} = a\sqrt{3}$$

În triunghiul dreptunghic $MM'N$ (ipoteză) calculăm lungimea cetei $M'N$: $M'N = \sqrt{MN^2 - MM'^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a$.

Se poate calcula aria $\triangle AM'B$.

$$\text{Aria } \triangle AM'B = \frac{AB \cdot M'N}{2} = \frac{4a \cdot a}{2} = 2a^2$$

b) Unghiul plan corespunzător diedrului determinat de planele α și (AMB) este unghiul MNM' deoarece planul MNM' este perpendicular pe muchia AB a diedrului dat (demonstrat). Calculăm o funcție trigonometrică a unghiului MNM' . În triunghiul dreptunghic $MM'N$ notăm $m(\widehat{MNM'}) = \varphi$.

$$\cos(\varphi) = \frac{NM'}{NM} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Deoarece $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; constatăm că $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

deoarece $\frac{1}{4} < \frac{3}{9} < \frac{1}{2}$ (\Rightarrow) măsura unghiului $MN'M$ este cuprinsă între 45° și 60° .

VIII.G.41.

a) În triunghiul dreptunghic $AC'C$ ($CC \perp AC'$ ipoteză) OO' este linie mijlocie (O și O' fiind intersecțiile diagonalelor rombului și pătratului) $\Rightarrow OO' \parallel CC' \Rightarrow OO' \perp \alpha \Rightarrow$ punctul O se proiectează în O' . Deoarece rombul $ABCD$ se proiectează pe α după un pătrat, înseamnă că proiecțiile diagonalelor rombului pe planul α sînt chiar diagonalele pătratului. Știind că atât diagonalele rombului cît și diagonalele pătratului sînt drepte perpendiculare, înseamnă că, de exemplu, unghiul drept AOB din spațiu se proiectează pe planul α tot după un unghi drept și anume, $AO'B'$ (Vezi fig. VIII.G.41.) $\Rightarrow OB \parallel O'B' \Rightarrow$ (reciprocă : dacă un unghi drept din spațiu se proiectează pe un plan și dacă unghiul de proiecție este unghi drept, atunci cel puțin o latură a unghiului din spațiu este paralelă cu planul de proiecție) $\Rightarrow BD \parallel B'D'$. Muchia diedrului determinat de romb și pătrat va trece prin punctul A (ipoteză), și va fi paralelă cu diagonalele DB și $D'B'$. (Teorema două drepte paralele situate în două plane care se intersectează, sînt paralele cu dreapta de intersecție a celor două plane.) Unghiul plan al diedrului în cauză va

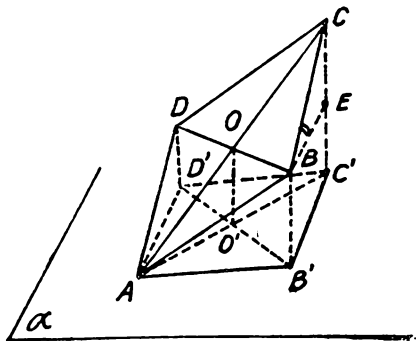


Fig. VIII.G.41.

fi determinat ducind un plan perpendicular pe muchia diedrului (sau, de exemplu, pe diagonala BD). Acest plan este planul CAC' , iar unghiul plan corespunzător este $\widehat{CAC'}$.

Cum $OO' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ (ipoteză) și $AO' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (ca jumătate din diagonala

pătratului $AB'C'D'$ de latura a) $\Rightarrow AO = \sqrt{2}a^2 = a\sqrt{2}$. În triunghiul dreptunghic $OO'A$ (demonstrat) ipotenuza AO este de două ori mai mare decât cateta $AO' \Rightarrow m(\widehat{AOO'}) = 30^\circ = m(\widehat{CAC'})$ (reciproca teoremei unghiului de 30° dintr-un triunghi dreptunghic).

b) Deoarece $AO = a\sqrt{2} \Rightarrow AC = 2a\sqrt{2}$; $DB \parallel D'B'$ (demonstrat) $\Rightarrow DB \equiv D'B'$ și deci $DB = a\sqrt{2}$. În aceste condiții :

$$\text{Aria } ABCD = \frac{AC \cdot DB}{2} = \frac{2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{2} = 2a^2.$$

c) Deoarece triunghiurile dreptunghice BAB' și DAD' sînt congruente (C.C.) calculăm o funcție trigonometrică a unghiului $BAB' \Rightarrow$

$$\text{tg}(\widehat{BAB'}) = \text{tg}(\widehat{DAD'}) = \frac{BB'}{AB'} = \frac{OO'}{AO'} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Deoarece trapezele dreptunghice $BB'CC'$ și $DD'CC'$ au toate laturile congruente (laturile neoparalele sînt laturi ale rombului și, respectiv, ale pătratului, iar laturile paralele $BB' \parallel CC'$ și $DD' \parallel CC'$ sînt congruente — demonstrat), vor avea și unghiurile congruente (se poate demonstra folosind congruența de triunghiuri). Unghiul dintre BC și α este egal cu unghiul format de BC și proiecția ei pe α adică este unghiul dintre BC și $B'C'$ sau dintre BC și o paralelă dusă prin B la $B'C'$. Pentru aceasta ducem $BE \parallel B'C'$ ($E \in CC'$) $\Rightarrow \triangle BEC$ dreptunghic în E și $BE \equiv B'C'$ ($BB'C'E$ dreptunghi din construcție) $\Rightarrow m(\widehat{CBE}) = m(\widehat{BC, \alpha}) = m(\widehat{DC, \alpha}) = \cos(\widehat{BC, \alpha}) = \cos(\widehat{DC, \alpha}) = \cos(\widehat{CBE}) = \frac{BE}{BC} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

VIII.G.42. a) Notăm $AM = x$. În triunghiul dreptunghic MAC ($MA \perp \alpha$ — ipoteză) $MC = 2x$ (1) (teorema unghiului de 30° dintr-un triunghi dreptunghic). (Vezi fig. VIII.G.42.) În triunghiul dreptunghic MAB (aceeași ipoteză) $AB = x$ (2) (deoarece MAB este și isoscel $AM \equiv AB$, ipoteze echivalente).

În \triangle dreptunghic BMC (ipoteza $BM \perp MC$), $BC^2 = BM^2 + CM^2$; $36 = 2x^2 + 4x^2 = 6x^2 \Rightarrow MB = x\sqrt{2}$ (Pitagora) $\Leftrightarrow x = \sqrt{6} = AM$
 $MC = 2\sqrt{6}$; $MB = 2\sqrt{3}$.

Ducem $AN \perp BC$. Conform teoremei celor trei perpendiculare, $MN \perp BC$ (căci $MA \perp \alpha$ — ipoteză). Calculăm lungimile MN și NA din două motive; primul: AN este înălțime în $\triangle ABC$ și deci putem, în con-

tinuare, să calculăm aria $\triangle ABC$ ($\triangle ABC$ este proiecția ortogonală a $\triangle BMC$ pe plan α), al doilea laturile unghiului MNA sint laturile unghiului plan corespunzător diedrului format de planele BMC și BAC .

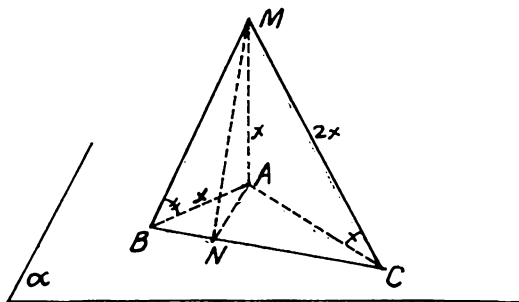


Fig. VIII.G.42.

În \triangle dreptunghic MAN (ipoteză) $AN^2 = MN^2 - MA^2 \Rightarrow AN^2 =$
 (demonstrat) $\Rightarrow MN = \frac{MB \cdot MC}{BC} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}}{6} = \frac{4 \cdot 3\sqrt{2}}{6} = 2\sqrt{2}$.

În \triangle dreptunghic MAN (ipoteză) $AN^2 = MN^2 - MA^2 \Leftrightarrow AN^2 =$
 $= 2 \cdot 4 - 6 = 2 \Rightarrow AN = \sqrt{2}$. Aria $\triangle BAN = \frac{BC \cdot AN}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

b) În \triangle dreptunghic MAN (ipoteză)

$$\operatorname{tg}(\widehat{MNA}) = \frac{MA}{AN} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow m(\widehat{MNA}) = 60^\circ.$$

VIII.G.43. a) Deoarece $EC \perp (ABC)$ (ipoteză) $\Rightarrow EC \perp BA$ (1). Dar, $BA \perp AC$ (ipoteză) (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow BA \perp (ACE)$ (3).

Analog $CA \perp (ABD)$ (4).

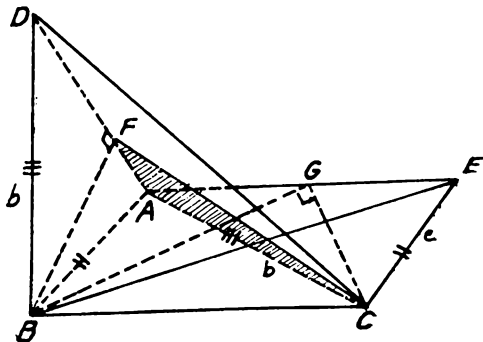


Fig. VIII.G.43.

Deoarece $CA \perp (ABD)$ (conform (4)) $\Rightarrow CA \perp BF$ (5). Dar, $BF \perp AD$ (ipoteză) (6). Din (5) și (6) $\Rightarrow BF \perp (ADC)$ (7).

Analog se arată că $CG \perp (ABE)$ (8). (Vezi fig. VIII.G.43.)

b) Observăm că proiecția punctului B pe planul ADC este punctul F (conform (7)) \Rightarrow proiecția $\triangle BAC$ pe planul ADC este triunghiul FAC care este și dreptunghic în A (conform (4)). \Rightarrow Aria $\triangle FAC = \frac{AF \cdot AC}{2}$ (9). Absolut asemănător judecăm despre proiecția $\triangle ABC$

pe planul ABE . (Virful C se proiectează pe ABE în punctul G etc.) \Rightarrow \Rightarrow Proiecția $\triangle CAB$ pe planul ABE este triunghiul GAB . Și acest triunghi este dreptunghic tot în A (demonstrație asemănătoare cu precedentă) \Rightarrow Aria $\triangle GAB = \frac{GA \cdot AB}{2}$ (10).

Formăm raportul cerut de concluzia problemei

$$\frac{\text{Aria } \triangle FAC}{\text{Aria } \triangle GAB} = \frac{AF \cdot AC}{GA \cdot AB}. \quad (11)$$

Notăm $AC = b$ și $AB = c$. (12)

Calculăm AC și AB folosind relațiile metrice în triunghiurile dreptunghice ACE și ABD (ipotezele problemei și notația 12)

$$AC^2 = AG \cdot AE = AG \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \quad (\text{conform } 12)$$

$$AB^2 = AF \cdot AD = AF \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \quad (\text{conform } 12)$$

Înlocuind aceste rezultate în (11) obținem

$$\frac{\text{Aria } \triangle FAC}{\text{Aria } \triangle GAB} = \frac{\frac{AB^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot AC}{\frac{AC^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot AB} = \frac{AB}{AC}. \quad (13)$$

Ori relația (13) evidențiază concluzia de la punctul b).

VIII.G.44. a) Precizăm că planul MAC este perpendicular pe planul $ABCD$, deoarece conține dreapta $MA = (d_1) \perp (ABCD)$ (Vezi fig. VIII.G.44.) (ipoteză) (1) $\Rightarrow BD \perp MA$ (conform (1)) și $BD \perp AC$ (ipoteza $ABCD$ pătrat) (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow BD \perp (ACMN)$ (3). Cum $BD \subset (NMD) \Rightarrow \Rightarrow$ oricare ar fi planul care conține dreapta BD va fi un plan perpendicular pe planul $MACN$. $\Rightarrow (NBD) \perp (MACN)$.

Analog, se demonstrează că $(MBD) \perp (MACN)$.

b) În planul triunghiului NCO construim $CQ \perp NO$ (1) și cum $BD \perp CQ$ (conform 3a) $\Rightarrow CQ \perp (BDN)$ (2). Să reținem că punctul Q se află pe înălțimea NO a $\triangle BDN$ (conform 1b). Demonstrăm că dreapta BQ este înălțime în $\triangle BDN$. Deoarece $BC \perp (NCD)$ (ipoteză) $\Rightarrow ND \perp BC$ (3). Deoarece $CQ \perp (NBD)$ (conform 2b) $\Rightarrow CQ \perp ND$ (4). Din (3b)

și (4b) $\Rightarrow ND \perp (BQC) \Rightarrow BQ \perp ND$, adică dreapta BQ este — în $\triangle NBD$ — înălțimea relativă laturii ND . În concluzie, punctul Q aflându-se în planul NBD atît pe înălțimea relativă laturii BD cît și pe înălțimea relativă laturii DC , el se identifică cu ortocentrul acestui triunghi.

Analog, se demonstrează că punctul P , proiecția punctului A pe planul MBD , este ortocentrul triunghiului MBD .

c) Notăm $AC \cap BD = \{O\}$. Notăm $AC = 2a \Rightarrow BO = a$ (1). Ducem în planul $(MNAC)$ $NT \perp AM$ ($T \in AM$) (2). Notăm $AM = x$ și $CN = y$ (3). (Vezi fig. VIII.G.44.)

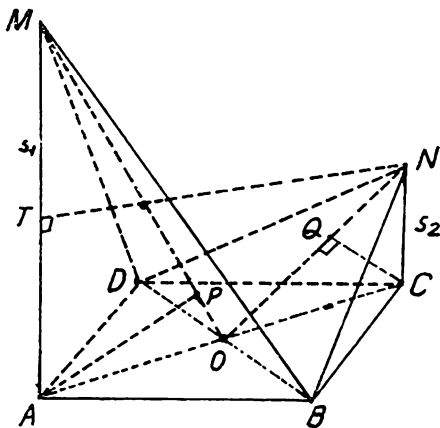


Fig. VIII.G.44.

Evaluăm ON în \triangle dreptunghic NCO (ipoteză).

$$ON^2 = a^2 + y^2 \quad (\text{conform 1c și 3c}). \quad (4)$$

Evaluăm OM în \triangle dreptunghic MAO (ipoteză).

$$OM^2 = a^2 + x^2 \quad (\text{conform 1c și 3c}). \quad (5)$$

Deoarece $MO \perp ON$ (ipoteză), urmează că

$$MN^2 = ON^2 + OM^2 = 2a^2 + x^2 + y^2 \quad (\text{conform 4c și 5c}). \quad (6)$$

În triunghiul dreptunghic NTM (conform 2c) $\Rightarrow MN^2 = NT^2 + TM^2$. Cum $NT \equiv AC$ ($TACN$ dreptunghi — construcție) și $TM = (x - y) \Rightarrow MN = 4a^2 + (x - y)^2$ (7). Din (6c) și (7c) $\Rightarrow 2a^2 + x^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 + y^2 - 2xy \Leftrightarrow a^2 = x \cdot y$ (8). Cum $a = BO$ (conform 1c) și $x = AM$ și $y = CN$ (conform 3c) $\Rightarrow BO^2 = AM \cdot CN$, relație care exprimă că segmentul BO este media geometrică a segmentelor AM și CN .

VIII.G.45. Deoarece punctul E este centrul pătratului $BB'CC'$ (Vezi fig. VIII.G.45a) (ipoteză), el este punctul de intersecție a diagonalelor CB' și BC' . Polygonul de secțiune dintre CEM și fețele cubului este triunghiul $MB'C$, deoarece CE este inclusă în diagonală CB' , deci planul $BB'CC'$ este intersectat de planul MEC după dreapta CB' . Planul $AA'BB'$ este intersectat de planul MEC după dreapta MB' (deoarece M și B' sînt puncte din planul $AA'BB'$ și MEC). Planul $ABCD$ este intersectat de planul MEC după dreapta MC (M și C aparțin planului $ABCD$ și planului MEC).

Ducem un plan „ajutător“ și anume un plan care să conțină dreapta $D'E$ și să fie perpendicular pe planul orizontal $ABCD$ (în general „planele ajutoare“ sînt plane perpendiculare pe planul orizontal, și care conțin drepte anunțate în ipoteza problemei). (Vezi fig. VIII.G.45a.) Acesta este planul $DD'E$ (este perpendicular pe $ABCD$, deoarece $DD' \perp \perp ABCD$ — ipoteză, și conține dreapta $D'E$ dată în ipoteza problemei). Acesta intersectează „fețele“ cubului după dreptele $DF \subset ABCD$; $FE \subset BB'CC'$ ($FE \parallel DD'$), iar planul $A'B'C'D'$ după o dreaptă care conține D' și mijlocul segmentului $B'C'$. Notăm acest punct G , deci $D'G \subset A'B'C'D'$. Cum $FE \parallel DD'$ și $B'G \equiv GC'$ \Rightarrow dreapta de intersecție FE este identică cu dreapta $FG \Rightarrow$ Polygonul de secțiune dintre planul auxiliar și fețele cubului este dreptunghiul $D'DFG$.

În pătratul $ABCD$ notăm $DF \cap MC = \{P\}$. (Vezi fig. VIII.G.45b.) Cum triunghiurile dreptunghice DCF și CBM sînt congruente (cc) \Rightarrow $(\widehat{MCB}) \equiv (\widehat{FDC})$. (1)

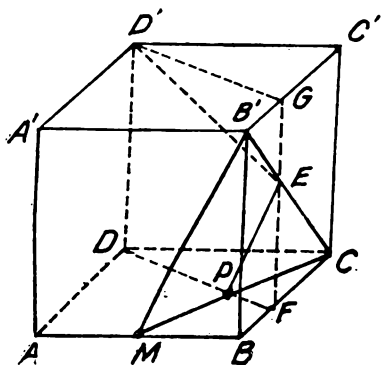


Fig. VIII.G.45.a.

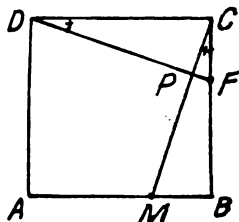


Fig. VIII.G.45.b.

În $\triangle CPF$: $m(\widehat{PCF}) + m(\widehat{PFC}) = 90^\circ$ (2) (conform (1) și deoarece în \triangle dreptunghic DCF : $m(\widehat{FDC}) + m(\widehat{PCF}) = 90^\circ$. \Rightarrow $m(\widehat{CPF}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow$ dreptele MC și FD sînt perpendiculare (3). Deoarece $MC \perp GF$ (construcția dreptei $GF \perp (ABCD)$) \Rightarrow $MC \perp (GF, DF) \Rightarrow$ $MC \perp (DD'FG) \Rightarrow$ $MC \perp D'E$ (4).

Deoarece $D'C' \perp BB'CC'$ (ipoteză) și $C'E \perp CB'$ (diagonale în pătrat) $\Rightarrow D'E \perp CB'$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) (5).
Din (4) și (5) $\Rightarrow D'E \perp (MC, CB') \Rightarrow D'E \perp (MEC)$.

VIII.G.46. Din definiția prismei triunghiulare regulate drepte, rezultă că fețele $AA'BB'$, $BB'CC'$ și $CC'AA'$ sînt dreptunghiuri congruente. (Vezi fig. VIII.G.46.)

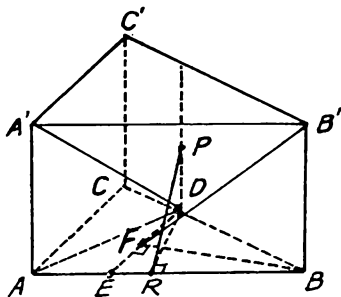


Fig. VIII.G.46.

a) Deoarece $AA' \perp (ABC)$ (definiție), ducem $AD \perp BC \Rightarrow A'D \perp BC$ (conform teoremei celor trei perpendiculare), și $A'D$ este distanța căutată. Lungimea ei o calculăm în Δ dreptunghic $AA'D$ (definiția prismei). $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (înălțimea triunghiului echilateral ABC de latura a).

$$\text{Cum } AA' = a \text{ (ipoteză)} \Rightarrow A'D = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

b) Deoarece $CD \equiv DB$ (înălțimea AD — în ΔABC echilateral este și mediană), ducem $DE \parallel AC$, ($E \in AB$) și obținem linia mijlocie descrisă de ipoteza (reciproca teoremei liniei mijlocii).

Cum $BB' \perp (ABC)$ (definiția prismei), ducem $BF \perp ED$, ($F \in ED$) $\Rightarrow B'F \perp DE$ (Vezi fig. VIII.G.46.) (conform teoremei celor trei perpendiculare).

$B'F$ este distanța de la B' la latura DE . Triunghiul BDE este asemenea cu ABC , ($DE \parallel CA$), raportul de asemănare este $\frac{DE}{CA} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta BED$ este echilateral și are lungimile laturilor și lungimile înălțimilor jumătate din lungimile laturilor și înălțimilor $\Delta ABC \Rightarrow$

$$\Rightarrow BF = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Calculăm — în Δ dreptunghic $B'BF$ (definiția prismei) distanța $B'F$.

$$B'F = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{19}}{4}.$$

c) Deoarece punctul P — centrul dreptunghiului $BB'CC'$ — este punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului $BB'CC'$ (Vezi fig. VIII.G.46.), proiecția lui pe planul ABC este punctul D , mijlocul laturii BC . Deci $PD \perp ABC$. Din punctul D construim $DR \perp BE$ ($R \in BE$) $\Rightarrow PR \perp AB$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) și PR este distanța de la P la latura AB . În triunghiul dreptunghic PDR (construcție) calculăm lungimea $PR^2 = PD^2 + DR^2$. Cum $PD = \frac{BB'}{2}$ și $DR \equiv BF$ (înălțimi congruente în Δ echilateral ABC) \Rightarrow

$$\Rightarrow PR = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$$

Observație. La acest rezultat puteam ajunge fără să mai facem calculul de mai sus, dar observind că triunghiurile dreptunghice $AA'D$ și PDR sînt asemenea: $\left(\frac{AA'}{PD} = \frac{AD}{DR} = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow PR = \frac{A'D}{2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.

VIII.G.47. Mai întii să arătăm că există un triedru ale cărui laturi, formează două cîte două unghiuri de 60° , (Vezi fig. VIII.G.47.) (sau că există un astfel de paralelipiped).

Presupunem că $m(\widehat{A'AD}) = m(\widehat{DAB}) = 60^\circ$ și demonstrăm că $m(\widehat{A'AB})$ este tot de 60° . Construim în planul $AA'DD'$, $A'N \perp AD$ ($N \in AD$ deoarece $m(\widehat{A'AD}) = 60^\circ$). Construim în planul $A'ABB'$, $A'M \perp AB$. Deoarece $A'N$ și $A'M$ sînt distanțele dintre laturile paralele ale rombului, ele sînt congruente $A'N \equiv A'M \Rightarrow$ triunghiul dreptunghic $A'NA$ (construcție) este congruent cu triunghiul dreptunghic $A'MA$ (construcție) deoarece au catetele $A'N$ și $A'M$ congruente (demonstrat) și ipotenuza AA' latura comună $\Rightarrow m(\widehat{A'AM}) = 60^\circ$ În concluzie, în punctul A

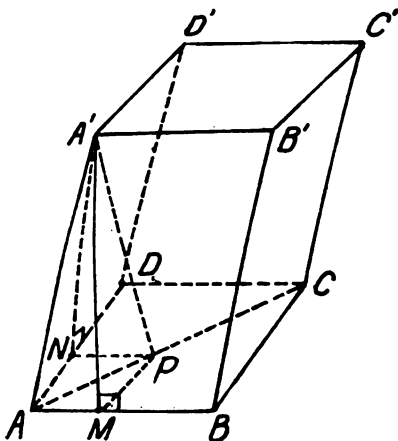


Fig. VIII.G.47.

există un triedru astfel încît $m(\widehat{A'AD}) = m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{A'AB}) = 60^\circ$. În continuare, ducem din punctul A' $A'P \perp (ABCD)$. Deoarece $A'N \perp AD$ și $A'M \perp AB$ (construcție) $\Rightarrow PN \perp AD$ și $PM \perp AB$ (conform unei reciproce a teoremei celor trei perpendiculare). Deoarece triunghiurile dreptunghice $A'PN$ și $A'PM$ sînt congruente ($A'P$ latură comună, $A'N \equiv A'M$ (demonstrat, cazul C.C.) $\Rightarrow PN \equiv PM$) \Rightarrow dreapta AP este bisectoarea unghiului DAB (definiția bisectoarei ca loc geometric). (Vezi fig. VIII.G.47.)

În concluzie, planul $A'AP$ care este perpendicular pe $ABCD$ (construcția perpendicularei $A'P$), conține diagonala AC a rombului $ABCD$. Distanța dintre planele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ fiind $A'P$, aceasta este și înălțimea paralelipipedului dat.

Calculul înălțimii $A'P$

În triunghiul dreptunghic $A'MA$ deoarece $m(\widehat{A'AM}) = 60^\circ \Rightarrow \Rightarrow m(\widehat{AA'M}) = 30^\circ \Rightarrow AM = \frac{AA'}{2} = \frac{a}{2}$

În triunghiul dreptunghic PMA (construcție), $m(\widehat{PAM}) = 30^\circ$ (demonstrat) $\Rightarrow MP = \frac{AP}{2} = x$ și conform teoremei lui Pitagora $AM^2 = AP^2 - PM^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = 4x^2 - x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. deci

$$AP = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

În triunghiul dreptunghic $A'PA$ (construcție), $A'P = \sqrt{AA'^2 - AP^2}$;

$$A'P = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Calculul ariei rombului ABCD. Deoarece diagonalele rombului sînt a și $2a\sqrt{3}$ (rombul $ABCD$ este format din două triunghiuri echilaterale cu o latură comună, rezultă : Aria $ABCD = \frac{2a^2\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}$).

Calculul volumului paralelipipedului dat. $V = \text{Aria } ABCD \cdot A'P$.

$$V = a^2\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = a^3\sqrt{2}.$$

VIII.G.48. Deoarece $AB' \perp (ABCD)$, (ipoteză) planul $AB'C'D$ este perpendicular pe planul $ABCD$ (dacă o dreaptă dată este perpendiculară pe un plan dat, orice plan care conține dreapta dată este perpendicular pe planul dat). (1) (Vezi fig. VIII.G.48.)

Fefeale $AA'DD'$ și $BB'CC'$ sînt dreptunghiuri deoarece $AD \perp AB$ (ipoteză $ABCD$ este pătrat) și $AD \perp AB'$ (conform 1) $\Rightarrow AD \perp (AA'BB')$ $\Rightarrow AD \perp AA'$. Analog $BC \perp BB'$. Muchiile prisme fiind paralele (defi-

niția prisme) $\Rightarrow AD \parallel A'D'$ și $AA' \parallel DD'$ și $AD \perp AA' \Rightarrow AA'DD'$ este dreptunghi. Analog $BB'CC'$ (2). (Vezi fig. VIII.G.48.)

Fețele $AA'BB'$ și $CC'DD'$ sînt paralelograme cu înălțimea egală, de exemplu $AB' = 3\sqrt{3}$ cm (calculată în triunghiul dreptunghic $B'AB$ — ipoteză) și baza egală — de exemplu cu $AB = 3$ cm.

În aceste condiții, calculăm volumul și aria totală a prisme.

$$V = \text{Aria } ABCD \cdot AB' = 9 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

$$\text{Aria totală} = 2 \text{ Aria } AA'BB' + 2 \text{ Aria } AA'DD' + 2 \text{ Aria } ABCD.$$

$$\text{Aria totală} = 2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} + 2 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 9 = 18\sqrt{3} + 54 = 18(\sqrt{3} + 3) \text{ cm}^2.$$

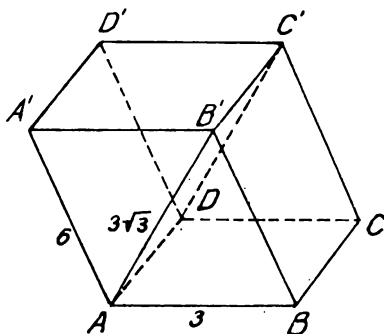


Fig. VIII.G.48.

VIII.G.49.

a) Deoarece, de exemplu $OE \perp AB \Rightarrow AE \equiv EB$. (Într-un cerc, dreapta care trece prin centrul cercului și este perpendiculară pe o coardă din cerc, este mediatoarea coardei). Analog $BF \equiv FC$, $GC \equiv GD$, $HD \equiv HA$. (Vezi fig. VIII.G.49.a.)

Ducem diagonala AC . În ABC , EF este linie mijlocie (demonstrat) $\Rightarrow EF \parallel AC$ și $EF = \frac{AC}{2}$ (1) În $\triangle ADC$, HG este linie mijlocie (demonstrat) $\Rightarrow HG \parallel AC$ și $HG = \frac{AC}{2}$ (2).

Din (1) și (2) \Rightarrow patrulaterul $EFGH$ este paralelogram.

b) Aria paralelogramului $EFGH$, cunoscând aria patrulaterului inscriptibil (convex) $ABCD$, o putem calcula, de exemplu astfel: (Vezi fig VIII.G.49.b.) Diagonala AC împarte patrulaterul în două triunghiuri ABC și ADC . Ducem în ABC înălțimea BM ($M \in AC$). Fie $BM = 2x$. Ducem în $\triangle ADC$ înălțimea DN ($N \in AC$). Notăm $DN = 2y$. Aceeași diagonală împarte paralelogramul $EFGH$ în două paralelograme $EFPR$ (P și $R \in AC$) și $GHRP$. Înălțimea paralelogramului $EFPR$ este jumătate din:

BM (EF este linie mijlocie în ABC), și deci este egală cu x . Analog, înălțimea paralelogramului $GHRP$ este egală cu y . Aria $\triangle ABC = \frac{2 \cdot x \cdot AC}{2} = AC \cdot x$. Aria $\triangle ADC = \frac{2y \cdot AC}{2} = AC \cdot y$. Aria patrulaterului $ABCD = AC \cdot (x + y)$. Aria paralelogramului $EFPR = EF \cdot x = \frac{AC}{2} \cdot x$. Aria paralelogramului $GHRP = HG \cdot y = \frac{AC}{2} \cdot y$. Aria paralelogramului $EFGH = \frac{AC}{2} \cdot (x + y)$, adică jumătate din aria patrulaterului $ABCD$.

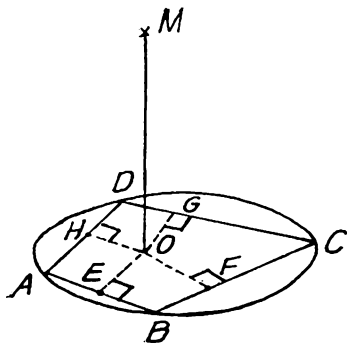


Fig. VIII.G.49.a.

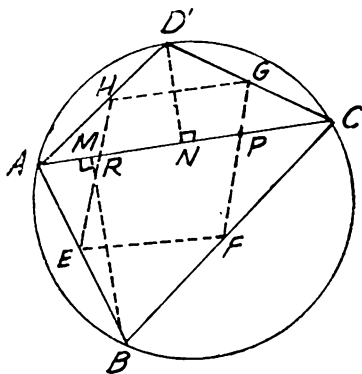


Fig. VIII.G.49.b.

Așadar, aria $EFGH = \frac{a^2}{2}$. Volumul prisme cu baza $EFGH$ și înălțimea $MO = a$ este $V = \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{2}$.

c) *Observație.* Dacă $EFGH$ este pătrat, atunci diagonalele patrulaterului $ABCD$ sînt congruente, perpendiculare și se înjumătățesc. Scriem că aria $EFGH = \frac{a^2}{2}$, este aria pătratului $EFGH$, adică $\frac{a^2}{2} = l^2$ (l fiind latura pătratului $EFGH$) $\Rightarrow l = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Aria totală a prisme în cauză va fi $A_t = A_l + 2A_{\text{bazei}} = \frac{4a\sqrt{2}}{2} \cdot a + 2 \cdot \frac{2a^2}{4} = a^2(2\sqrt{2} + 1)$.

VIII.G.50. Din ipotezele problemei rezultă că punctele A, B, C, D sînt virfurile unui tetraedru regulat $ABCD$. (Vezi fig. VIII.G.50.)

a) Deoarece fețele tetraedrului sînt triunghiuri echilaterale, înălțimile fețelor sînt și mediatoarele laturilor. În aceste condiții, de exemplu înălțimile BO_1 și AO_2 sînt concurente într-un punct care este mijlocul segmentului CD . Fie E acest punct.

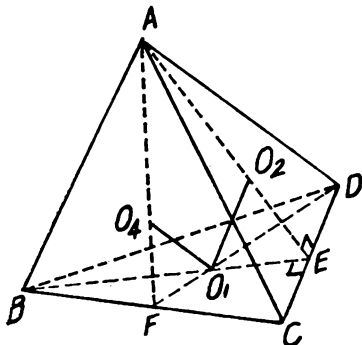


Fig. VIII.G.50.

Triunghiul AEB este isoscel deoarece în triunghiurile echilaterale și congruente ACD și BCD înălțimile AE și respectiv BE sînt congruente, deci $EA \equiv EB$. Cum punctele O_2 și O_1 sînt respectiv centrele de greutate ale triunghiului ACD și BCD (ipoteză) $\Rightarrow \frac{EO_2}{EA} = \frac{EO_1}{EB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \Rightarrow O_1O_2 \parallel AB$ și triunghiurile EO_1O_2 și EBA sînt asemenea, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{3} \Rightarrow O_1O_2 = \frac{AB}{3}$ Notînd, de exemplu $AB = a$, obținem $O_1O_2 = \frac{a}{3}$

Analog, gîndim despre distanțele determinate de restul punctelor O_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Punctele O_1, O_2, O_3, O_4 vor fi virfurile altui tetraedru regulat $O_1O_2O_3O_4$ a cărui muchie va fi egală cu $\frac{a}{3}$

b) Considerăm, de pildă, punctele O_1, O_2, O_4 . (Vezi fig. VIII.G.50.) În $\triangle ABC$ și $\triangle DBC$, înălțimile AO_4 și DO_1 sînt concurente în mijlocul laturii BC — notăm acest punct F . Deoarece $O_1O_2 \parallel AB$ (demonstrat) și $O_1O_4 \parallel AD$ (prin analogie) $\Rightarrow (O_1O_2O_4) \parallel (ABD)$ deoarece cele două plane conțin cîte două drepte concurente și paralele. Schimbînd ordinea indicilor ($i = 1, \dots, 4$) punctului O și schimbînd asemănător ordinea alfabetică a punctelor A, B, C, D , obținem concluzia : oricare trei din punctele O_i ($i = 1, 2, 3, 4$) determină cîte un plan paralel cu cîte unul din cele patru plane determinate de punctele A, B, C, D .

c) Volumul prisme = Aria $\triangle BCD \cdot AO_1$ unde AO_1 este distanța de la A la planul BCD , deoarece segmentele AB, AC, AD fiind congruente, punctul A se proiectează pe planul BCD într-un punct egal depărtat de B, C și D (teoremă) \Rightarrow piciorul perpendicularei din A pe planul BCD este centrul cercului circumscriș $\triangle BCD$, adică punctul O_1 . Păstrând notația $AB = a$, obținem $\text{Aria } \triangle BCD = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

În triunghiul dreptunghic AO_1B

$$EO_1 = \frac{2}{3} BE \Rightarrow BO_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AO_1 = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Deci } V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{4}.$$

VIII.G.51. Construim prisma regulată și dreaptă $ABEDCE'$ Notăm $AB = AD = a$. (Vezi fig. VIII.G.51.)

Proiectăm punctul O pe planul ABE . Deoarece $(BCEE') \perp (ABE)$ (din construcția precedentă); rezultă că punctul O se proiectează pe $EB \equiv (BCEE') \cap (ABE)$. Fie O_1 proiecția punctului O pe acest plan $\Rightarrow EO_1 \equiv O_1B$ deoarece punctul O este mijlocul segmentului EC și $OO_1 \parallel BC$. Cum $AF \equiv FB$ (ipoteză) \Rightarrow în $\triangle ABE$ O_1F linie mijlocie și deci $O_1F = \frac{a}{2}$ (ipoteza $\triangle ABE$ echilateral). În triunghiul dreptunghic OO_1F

(construcție), $OF = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Deoarece EC este diagonală

pătratului $BCE'E$ (construcție) $\Rightarrow OC = OE = OB = OF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Pentru

a construi punctul N folosim teorema celor trei perpendiculare, astfel $EF \perp (ABCD)$, apoi $FN \perp CN \Rightarrow EN \perp CM$, deci punctul N este proiecția

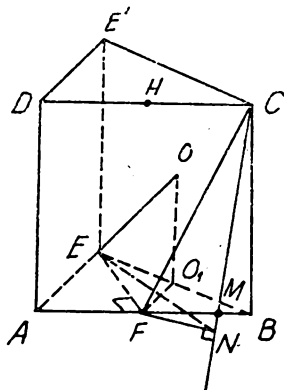


Fig. VIII.G.51.

punctului E pe dreapta CM . \Rightarrow Triunghiul ENC este dreptunghic în N . În acest triunghi, ipotenuza EC are lungime constantă, \Rightarrow mediana NO are lungime constantă și anume $NO = \frac{EC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Așadar, $OC = ON =$
 $= OF = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Cum $DH \equiv HC$ (ipoteză), lungimea OH se calculează asemănător cu lungimea OF , proiectînd punctul O pe planul DCE' ... etc. Așadar, șirul de egalități se poate completa astfel: $OC = ON = OF = OB =$
 $= OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Să observăm că $\triangle FNC$, dreptunghic în N (construcție) are ipotenuza FC de lungime constantă (punctele F și C sînt fixe), și deci, pentru diferite poziții ale punctului M pe segmentul AB , punctul N descrie un cerc de diametru constant $FC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

VIII.G.52. a) Folosim metoda planelor auxiliare ce permit construcția distanței AE . Ducem prin BD' un plan perpendicular pe planul orizontal $ABCD$. Acest plan va conține $D'D$ (deoarece $D'D \perp (ABCD)$ — ipoteză, plan diagonal). Poligonul de secțiune dintre acest plan și cub este dreptunghiul $DD'BB'$. Notăm intersecția diagonalelor pătratului $ABCD$ cu punctul O . Ne gîndim că putem obține construcția perpendiculararei AE folosind teorema celor trei perpendiculare. (Vezi fig. VIII.G.52.a.)

Ducem o perpendiculară din A pe planul $DD'BB'$ — aceasta este AO ($AO \perp BD$ — diagonale în pătrat și $AO \perp DD'$ — ipoteză). Din punctul O ducem $OE \perp BD'$ ($E \in D'B$) \Rightarrow $AE \perp D'B$ conform teoremei celor trei perpendiculare). În dreptunghiul $DD'BB'$ în care $OE \perp BD'$, calculăm lungimea segmentului OE . (Vezi fig. VIII.G.52.b.)

$$\triangle OEB \sim \triangle D'DB \text{ (} OE \perp BD', \text{ și } B \text{ unghi comun)} \Rightarrow \frac{OE}{DD'} =$$

$$= \frac{OB}{BD'} = \frac{BE}{DB} \text{ și după înlocuiri } \frac{OE}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

b) Calculăm și lungimea segmentului BE :

$$\frac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{3}} = \frac{BE}{a\sqrt{2}} \Leftrightarrow BE = \frac{2a^2}{2a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow D'E = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

În triunghiul dreptunghic $BB'D'$, calculăm lungimea proiecției catetei BB' pe ipotenuza BD' . Notăm S proiecția punctului B' pe BD'

$$BS = \frac{BB'^2}{BD'} \text{ (tr. catetei)} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

gruente (L.L.L.) \Rightarrow Aria $\triangle B'CA' =$ Aria $\triangle B'C'A'$. Tot așa se demonstrează că Aria $\triangle B'C'A =$ Aria $\triangle A'B'C' =$ Aria $\triangle BC'A' \Rightarrow$ Aria: $\triangle A'B'C' = \frac{1}{4}$ Aria $\triangle ABC = \frac{a^2}{4}$ (1). Același rezultat îl putem obține folosind faptul că de exemplu — $\triangle CB'A' \sim \triangle CAB B'A' \parallel BA$ și raportul de asemănare este $\frac{1}{2}$. Raportul ariilor acestor triunghiuri este de $\frac{1}{4}$ (teoremă) etc... (Vezi fig. VIII.G.53.)

În $\triangle A'B'C'$, G este centrul de greutate, deoarece mediana — de exemplu — AA' înjumătățește orice paralelă la BC . Notăm A'' mijlocul laturii $B'C'$ și B'' mijlocul laturii $C'A'$. Deoarece mediana unui triunghi împarte triunghiul în două triunghiuri echivalente, rezultă că : Aria $\triangle B'GA'' =$ Aria $\triangle C'GA''$, pe care le mai putem scrie și ca diferențe : Aria $\triangle A'B'A'' =$ Aria $\triangle A'B'G =$ Aria $\triangle A'C'A'' =$ Aria $\triangle A'C'G$, cum Aria $A'B'A'' =$ Aria $\triangle A'C'B''$ (conform propoziției prece-

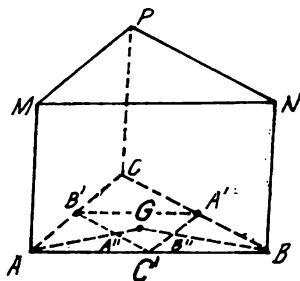


Fig. VIII.G.53.

dente) \Rightarrow Aria $\triangle A'B'G =$ Aria $\triangle A'C'G$. Asemănător se demonstrează că Aria $\triangle B'GC' =$ Aria $\triangle A'B'G \Rightarrow$ Ariile triunghiurilor $GB'C'$, $GC'A'$, $GA'B'$ sînt egale (2) \Rightarrow Aria $GB'C' = \frac{1}{3}$. Aria $\triangle A'B'C' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ Aria: $\triangle ABC = \frac{1}{12} \cdot a^2$ (conform 1).

Deoarece înălțimea prisme strunjite este înălțimea prisme nestrunjite, urmează că volumul prisme strunjite este de 12 ori mai mic decât al prisme date.

Notînd volumul prisme strunjite V_1 (ipoteză) și volumul bazei V (ipoteză) urmează că :

$$V_1 = \frac{V}{12} \text{ sau } V = 12 \cdot V_1.$$

VIII.G.54. a) Directa : paralelipipedul $ABCD A'B'C'D'$ este dreptunghic, deci tetraedrul $A'AB'D'$ are muchiile opuse perpendiculare ; problema este clasică — în această ipoteză — de exemplu punctul A' se proiectează în ortocentrul H_1 al $\triangle AB'D'$. (Vezi fig. VIII.G.54.)

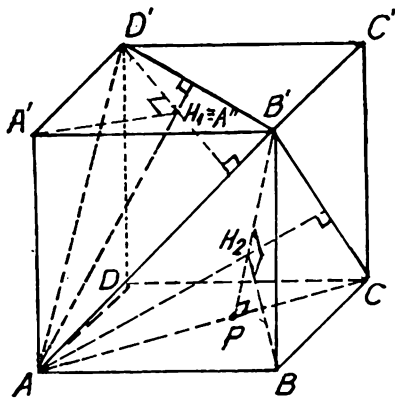


Fig. VIII.G.54.

Demonstrație. Ducem din A' o perpendiculară pe planul $AB'D'$. Notăm proiecția punctului A' pe planul $AB'D'$ cu A'' . Deoarece $A'A'' \perp \perp (AB'D') \Rightarrow A'A'' \perp AD'$. Cum $A'B' \perp AD'$ (ipoteză) $\Rightarrow AD' \perp (A'B', A'A'') \Rightarrow AD' \perp (A'B'A'') \Rightarrow AD' \perp B'A''$ și deci $B'A''$ este înălțimea dusă din B' pe latura AD' . Punctul A'' se proiectează pe înălțimea triunghiului $AB'D'$ dusă din B' pe latura AD' . Analog se demonstrează că punctul A' se proiectează și pe înălțimea dusă din punctul D' pe latura AB' \Rightarrow punctul A'' fiind pe cele două înălțimi, este chiar ortocentrul $\triangle AB'D'$ — deci $A'' = H_1$. Schimbînd notația tetraedrului $A'AB'D'$ în $BAB'C$ și repetînd judecățile, deducem că punctul B se proiectează în ortocentrul H_2 al triunghiului $AB'C$.

Reciprocă. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped și H_1 și H_2 respectiv ortocentrele triunghiurilor $AB'D'$ și $AB'C$. Dacă A' și B se proiectează pe planele $AB'D'$ și $AB'C$ respectiv în H_1 și H_2 , atunci paralelipipedul $ABCD A'B'C'D'$ este dreptunghic.

Demonstrație :

Se demonstrează reciproca propoziției de la punctul a) adică dacă în tetraedrul $A'AB'D'$ vîrfurile A' și B se proiectează pe planul $AB'D'$ în ortocentrul H_1 al $\triangle AB'D'$, atunci muchiile opuse ale tetraedrului $A'AB'D'$ sînt perpendiculare — deoarece din $A'H_1 \perp AB'D' \Rightarrow A'H_1 \perp B'D'$ (1). Însă $AH_1 \perp B'D'$ (ipoteză) (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow B'D' \perp (A'H_1; AH_1) \Rightarrow B'D' \perp AA'$ (3). Analog se demonstrează că $AB' \perp A'D'$ (4) și $AD' \perp A'B'$ (5). Relațiile (3), (4) și (5) evidențiază concluzia propoziției

reciproce. Schimbînd notația tetraedrului $A'AB'D'$ în $BAB'C$ și notația ortocentrului H_1 în ortocentrul H_2 , obținem alte trei relații de perpendicularitate analoge cu (3), (4), și (5). Ele sînt $AC \perp BB'$ (6), $AB' \perp BC$ (7) și $CB' \perp AB$ (8).

Deoarece — de exemplu — $AA' \parallel BB'$ (definiția prisme) \Rightarrow — de exemplu — $BB' \perp B'D'$ (9). Cum $B'D' \parallel BD$ (deoarece $BB'DD'$ este paralelogram — definiția prisme : $BB' \parallel DD'$ și $BB' \equiv DD'$) \Rightarrow $BB' \perp BD$ (10). Din (9) și (6) \Rightarrow $BB' \perp (ABCD)$ (11). Asemănător se arată — de exemplu — că $AB \perp (BB'CC')$ (12). Din (11) și (12) \Rightarrow în vîrfurile B paralelipipedul are muchiile perpendiculare două cîte două \Rightarrow paralelipipedul $ABCD A'B'C'D'$ este dreptunghic.

VIII.G.55. Să descriem metoda care se întrebuițează în mod obișnuit pentru a determina un punct comun a două plane α și β , care nu sînt paralele. Se intersectează planele date α și β cu un plan auxiliar γ de poziție particulară așa încît intersecțiile acestui plan auxiliar γ , cu planele date α și β să fie aproape evidente. Intersecțiile planului auxiliar γ cu planele date α și β vor fi două drepte d_1 și d_2 care fiind situate amîndouă în planul auxiliar γ , în genere se vor intersecta într-un punct — de exemplu P , care va reprezenta un punct al intersecției planelor date α și β . Pentru a obține un alt punct al intersecției planelor date α și β , vom întrebuița un alt plan auxiliar δ . Procedînd asemănător, obținem un alt punct de intersecție dintre planele α , β și δ , de exemplu punctul R . În acest mod obținem dreapta PR care va fi tocmai dreapta

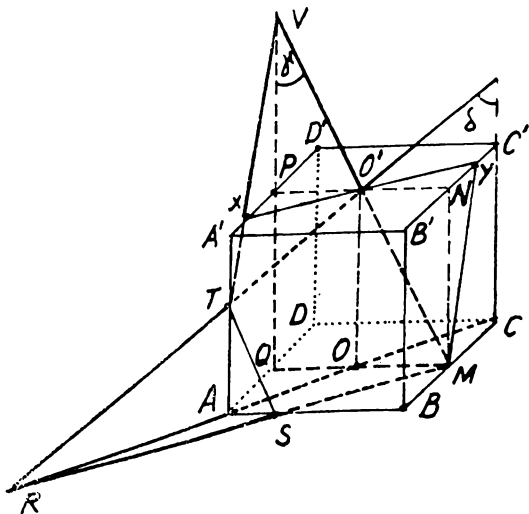


Fig. VIII.G.55.a.

de intersecție dintre planele α și β . De obicei, planele auxiliare sînt duse perpendicular pe planul orizontal (deci sînt plane proiectate).

Folosind această metodă, să căutăm de exemplu intersecția dintre planul $TO'M$ și planul orizontal $ABCD$. Ducem prin punctele M și O' primul plan auxiliar $\gamma = MNPQ$, perpendicular pe planul orizontal $ABCD$. El va intersecta fețele $BB'CC'$, $AA'DD'$ după drepte paralele cu AA' . Deoarece $MO \parallel AB$, planul, va fi și paralel cu $AA'BB'$. (Vezi fig. VIII.G.55.a.) (Unde O este proiecția punctului O' pe $(ABCD)$).

Planul γ , planul TOM și planul orizontal $ABCD$ au un punct comun și anume punctul M . Ducem prin punctele T și O' al doilea plan auxiliar δ , perpendicular pe planul orizontal $ABCD$. El va fi planul diagonal $AA'CC'$, deoarece $O'O \perp (ABCD)$, punctele O', O, T aparțin planului diagonal $AA'CC'$.

Planul δ , planul $TO'M$ și planul orizontal $ABCD$ au un punct comun R , care se obține prelungind în planul δ — dreapta TO' pînă la intersecția ei cu dreapta AC . (Vezi fig. VIII.G.55a.) Punctele R și M aparțin planelor $TO'M$ și orizontal $ABCD$. Dreapta RM intersectează în planul $ABCD$, dreapta AB într-un punct S . Pe fața $ABCD$, segmentul SM reprezintă o latură a poligonului de secțiune dintre $TO'M$ și fața $ABCD$. A doua latură a poligonului de secțiune este ST , deoarece punctele S și T aparțin planului $TO'M$, cit și planului vertical $AA'BB'$.

Următoarea latură a poligonului de secțiune, o obținem folosind dreapta $O'M$ conținută în planul $TO'M$, cit și planul auxiliar proiectat. Prelungim în planul γ — dreapta $O'M$ pînă la intersecția ei cu planul vertical $AA'DD'$ — în punctul V . Unind punctele V și T se obține dreapta de intersecție dintre TOM și $(AA'DD')$. În planul $AA'DD'$ dreapta TV intersectează dreapta $A'D'$ în punctul X . Segmentul TX este o altă latură a poligonului de secțiune.

Următoarea latură a poligonului de secțiune dintre TOM și planul $A'B'C'D'$ se obține ducînd din punctul X — în planul $A'B'C'D'$ — o paralelă la SM (conform teoremei două plane paralele, sînt intersectate de un plan, după două drepte paralele). În urma calculelor ce se vor efectua, se va constata că această paralelă va intersecta întîi dreapta $B'C'$ și apoi dreapta $D'C'$. Notăm acest punct Y . Punctele Y și M fiind în planul vertical $BB'CC'$ determină ultima latură a poligonului de secțiune dintre TOM și planul $BB'CC'$. În concluzie, poligonul de secțiune este un pentagon $MSTXY$.

Observație : intersectînd cu un plan de secțiune fețele unui cub, se obține un poligon de secțiune cu cel mult șase laturi.

b) Urmează calculul lungimilor laturilor pentagonului $MSTXY$.
Notăm $AB = a$.

1. Calculul lungimii segmentului SM . În dreptunghiul $AA'CC'$ (Vezi fig. VIII.G.55.b.) $A'C' = a\sqrt{2}$; $A'O' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\triangle TA'O' \equiv \triangle TAR$ (dreptunghice, $TA' \equiv TA$ — ipoteză și $\hat{T}_1 \equiv \hat{T}_2$) $\Rightarrow AR = A'O' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Putem calcula segmentul SM în pătratul $ABCD$. (Vezi fig. VIII.G.55c.) $RA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (demonstrat). Deoarece $BM \equiv MC$ (ipoteză) \Rightarrow

$\Rightarrow OM$, linie mijlocie în $\triangle CAB \Rightarrow OM = \frac{a}{2}$.

În $\triangle RMO$, SA linie mijlocie deoarece $AS \parallel OM$ și $RA = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (demonstrat) $\Rightarrow AS = \frac{a}{2} \Rightarrow SB = a - \frac{a}{2} = \frac{3a}{4}$.

În \triangle dreptunghic SBM ,

$$SM^2 = MB^2 + SB^2; SM^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{16}; SM^2 = \frac{13a^2}{16}; SM = \frac{a\sqrt{13}}{4}$$

2. Calculul lungimii segmentului ST . În pătratul $AA'BB'$ și în triunghiul dreptunghic TAS (Vezi fig. VIII.G.55d.) $TS^2 = TA^2 + AS^2$.

$$TS^2 = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}}; TS = \frac{a\sqrt{5}}{4} \left(TA = TA' = \frac{a}{2} \text{ ipoteză.} \right)$$

3. Calculul lungimii segmentului XT . În planul pătratului $MNPQ$, prelungim QP și notăm V intersecția $MO' \cap QP$. (Vezi fig. VIII.G.55e.) $\triangle O'NM \equiv \triangle O'PV$ (dreptunghice — cazul C.U.) $\Rightarrow VP = MN = a$.

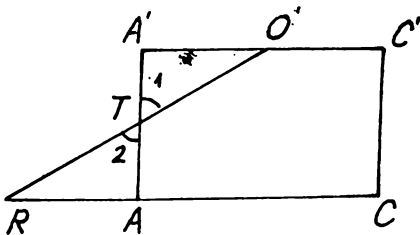


Fig. VIII.G.55.b.

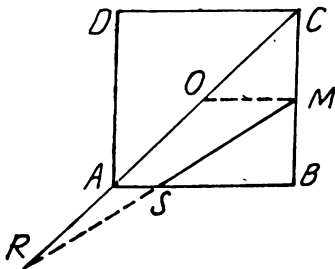


Fig. VIII.G.55.c.



Fig. VIII.G.55.d.

Putem calcula segmentul XT . În pătratul $AA'DD'$, prelungim QP cu segmentul $PV = a$. (Vezi fig. VIII.G.55f.) $\triangle XPV \sim \triangle XA'T$ și rapor-

tul de asemănare $\frac{A'T}{VP} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow A'X = \frac{XP}{2} \Rightarrow A'X = \frac{a}{6}$

În \triangle dreptunghic $TA'X$,

$$TX^2 = A'T^2 + A'X^2; TX^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{36} \text{ (ipoteza } AT \equiv TA' = a) \Rightarrow TX = \frac{a\sqrt{10}}{6}$$

4. Calculul segmentului XY . În planul pătratului $A'B'C'D'$ (Vezi fig. VIII.G.55g.) procedăm astfel :

Notăm cu S' și M' proiecțiile ortogonale ale punctelor S și M pe laturile $A'B'$ și $B'C'$. Ducem $XY \parallel S'M'$ (conform teoremei două plane paralele sînt intersectate de un al treilea plan după drepte paralele). Împărțim latura $A'B'$ în patru părți congruente \Rightarrow paralelele la latura

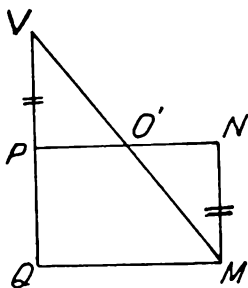


Fig. VIII.G.55.e.

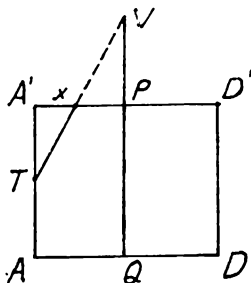


Fig. VIII.G.55.f.

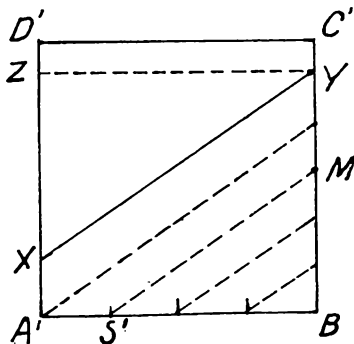


Fig. VIII.G.55.g.

$S'M'$, duse prin A' și celelalte două puncte de diviziune sînt paralele echidistante și determină pe latura $B'C'$ segmente congruente (patru segmente congruente). Cum $B'M' = \frac{a}{2}$ (ipoteză) rezultă că unul din cele trei segmente congruente măsoară $\frac{a}{6}$. Cum și XY este o paralelă echidistantă cu cele precedente urmează ca $C'Y = \frac{a}{6}$. Încadrăm segmentul XY într-un Δ dreptunghic ducînd $YZ \parallel C'D' \Rightarrow YZ = a$; $XZ = \frac{2a}{3}$. În Δ dreptunghic XZY aplică teorema lui Pitagora :

$$XY = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{9}} \Rightarrow XY = \frac{a\sqrt{13}}{3}.$$

Calculul segmentelor MY , (în planul pătratului $BB'CC'$). (Vezi fig. VIII.G.55.h.)

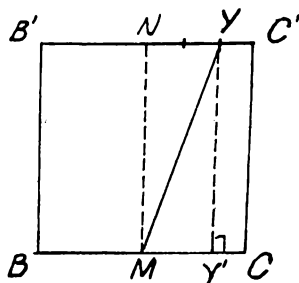


Fig. VIII.G.55.h.

Ducem $YY' \parallel CC' \Rightarrow$ în triunghiul dreptunghic $YY'M$, $YY' = a$;
 $MY' = \frac{a}{3}$ (demonstrat) $\Rightarrow MY = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$.

6. Calculul perimetrului pentagonului de secțiune.

$$\begin{aligned} MS + ST + TX + XY + YM &= \frac{a\sqrt{3}}{4} + \frac{a\sqrt{5}}{4} + \frac{a\sqrt{10}}{6} + \frac{a\sqrt{13}}{3} + \frac{a\sqrt{10}}{3} = \\ &= \frac{a}{4} (\sqrt{3} + \sqrt{5} + 2\sqrt{10}). \end{aligned}$$

VIII.G.56. Construim paralelipipedul dreptunghic $AFEDA'PE'D'$ (Vezi fig. VII.G.56.)

a) În triunghiul dreptunghic VDC (ipoteză) $CV = a\sqrt{2}$. (1)

În triunghiul dreptunghic PFC (ipoteză) $PC = a\sqrt{6}$ ($PF = 2a$ și $FC = a\sqrt{2}$, Pitagora). Ducem în planul determinat de dreptele DV și FP

(ipoteză : $PF \parallel VD$, ambele perpendiculare pe $ABCD$). $VS \parallel DF \Rightarrow$ PSV triunghi dreptunghic și $PS = a$; $VS = DF = a\sqrt{5}$. (în triunghiul dreptunghic DAF , $AD = a$; $AF = 2a$ — ipoteză), și conform teoremei lui Pitagora $VP^2 = a^2 + 5a^2 = 6a^2 \Rightarrow VP = a\sqrt{6} \Rightarrow$ triunghiul PCV isoscel : $PC = PV = a\sqrt{6}$.

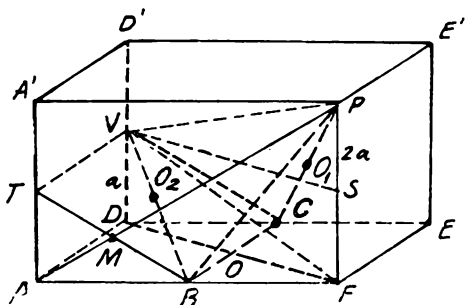


Fig. VIII.G.56.

b) Planul BCV intersectează paralelipipedul construit (vezi indicația) după dreptunghiul $CBTV$ ($CB \parallel AD \parallel VT$ și $CB \perp (AA'FP)$). În pătratul $AA'FP$ (construcția indicată) punctele B și T sînt mijloace de laturi $\Rightarrow BT \parallel FA'$. Ducem diagonala $PA \Rightarrow PA \perp FA'$ (diagonalele pătratului sînt perpendiculare) $\Rightarrow PA \perp BT$ (1). Deoarece $CB \perp (AA'FP)$ — (construcție) $\Rightarrow PA \perp BC$. (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow PA \perp (BCVT)$ și deci PM este distanța de la punctul P la planul VBC (unde M este intersecția dreptelor PA și BT). Cum AM este mediană în triunghiul dreptunghic și isoscel TAB (diagonala AP înjumătățește FA' , dar și orice paralelă la FA') $\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow PM =$

$$= AP - AM = 2a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$$

Așadar distanța de la punctul P la planul CVT este $PM = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

c) Deoarece $CB \perp (AA'FP)$ (construcția planului $AA'FP$) $\Rightarrow CB \perp PB \Rightarrow \triangle PBC$ este dreptunghic în punctul $B \Rightarrow$ centrul cercului circumscris $\triangle PBC$ se află la mijlocul ipotenuzei PC . Îl notăm O_1 . Deoarece cercul circumscris triunghiului dreptunghic CVB este și al dreptunghiului $CVTB$, urmează că al doilea centru — notat O_2 se află la mijlocul ipotenuzei VB adică este punctul de intersecție al diagonalelor dreptun-

ghiului CVTB. \Rightarrow în $\triangle PCT$, (O_1O_2) este linie mijlocie $\Rightarrow O_1O_2 = \frac{PT}{2}$. Cum din construcție $\triangle PA'T$ este dreptunghic, calculăm lungimea $PT = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$. Deci distanța dintre centrele O_1 și O_2 este $O_1O_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

VIII.G.57.

a) În triunghiurile ABD și BCD , (latura comună BD) ducem mediale AG_1 și CG_3 . Fie E intersecția acestora ($E \in BD$ și $BE \equiv ED$, ipoteză).

Deoarece $\frac{EG_1}{EA} = \frac{EG_3}{EC} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ în $\triangle EAC$ $G_1G_3 \parallel AC$.

$\triangle EG_1G_3 \sim \triangle EAC$, avînd \hat{E} comun și laturile care formează acest unghi proporționale). Apoi, în $\triangle AEF$ ($F \in CD$ și $CF \equiv FD$; $\frac{AG_1}{AE} = \frac{AG_2}{AF} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel EF$. Dar $EF \parallel BC$ (EF linie mijlocie în $\triangle BDC$ — ipoteză) $\Rightarrow G_1G_2 \parallel BC$.

Asemănător în $\triangle CHE$, $\frac{CG_2}{CH} = \frac{CG_3}{CE} = \frac{2}{3}$ (H fiind mijlocul laturii AD) $\Rightarrow G_3G_2 \parallel EH$. Dar $EH \parallel AB$ linie mijlocie în $\triangle ABD$ — ipoteză) $\Rightarrow G_3G_2 \parallel AB$. \Rightarrow Unghiurile $\triangle G_1G_2G_3$ sînt congruente cu ale triunghiului ABC avînd laturile paralele). \Rightarrow Natura $\triangle ABC$ este și a $\triangle G_1G_2G_3$.

b) Din ipoteză G_1 coincide cu centrul cercului circumscris $\triangle ABD \Rightarrow G_1A \equiv G_1B \equiv G_1C \Rightarrow$ triunghiurile dreptunghice CG_1A , CG_1B și CG_1D sînt congruente (cazul C.C.) $\Rightarrow CA \equiv CB \equiv CD$ iar punc-

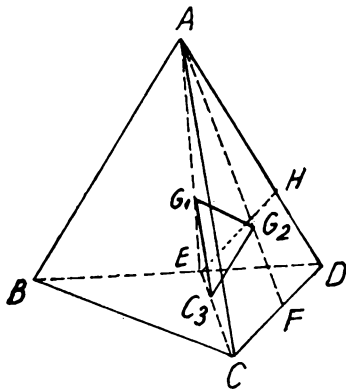


Fig. VIII.G.57.

tul G_1 fiind ortocentrul $\triangle ABD \Rightarrow AG_1 \perp BD$. În concluzie $BD \perp \perp (ACG_1) \Rightarrow BD \perp AC$. Așadar în ipotezele punctului b), dreptele AC și BD sînt perpendiculare.

VIII.G.58. În figura VII.G.58., să notăm pentru simplificare planul $MNPQ = \alpha$. Din construcțiile făcute rezultă $CC' \perp \alpha$ și $DD' \perp \alpha \Rightarrow CC' \parallel DD'$. Planele α și (ACD) au ca dreaptă de intersecție, dreapta PQ . Cum $C' \in \alpha$ și $D' \in \alpha$ (construcție), dreapta $C'D'$ este conținută în

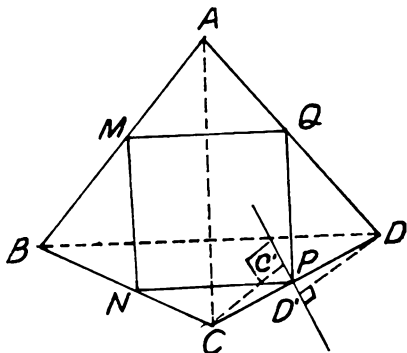


Fig. VIII.G.58.

planul α . Aceasta va intersecta dreapta PQ ($PQ \subset \alpha$) într-un punct care se va găsi în planele α și (ABC) . Acest punct este tocmai punctul P . În aceste condiții, punctele C', P, D' sînt colineare \Rightarrow unghiurile CPC' și DPD' sînt opuse la vîrf, deci congruente $\widehat{CPC'} \equiv \widehat{DPD'}$ (1).

Din construcție, triunghiurile $CC'P$ și $DD'P$ sînt dreptunghice iar $CC' \parallel DD'$ (demonstrat) \Rightarrow cele două triunghiuri se găsesc în planul determinat de dreptele paralele CC' și DD' . În ipoteză $CC' \equiv DD'$ și $\widehat{CPC'} \equiv \widehat{DPD'}$ (conform 1) $\Rightarrow \triangle CC'P \equiv \triangle DD'P$ (cazul I.U.) $\Rightarrow CP \equiv PD$. (2) \Rightarrow planul $MNPQ = \alpha$ și urmează următoarea construcție a planului.

Fixăm $P \in CD$ astfel încît $CP \equiv PD$. În $\triangle CAD$ ducem $PQ \parallel AC$ ($DQ \equiv QA$, PQ fiind linie mijlocie în $\triangle CAD$ — reciprocă).

În $\triangle ABD$ ducem $QM \parallel BD$ ($AM \equiv MB$, MQ linie mijlocie în $\triangle ABD$).

În $\triangle ABC$ ducem $MN \parallel AC$ ($BN \equiv NG$, MN fiind linie mijlocie în $\triangle ABC$). Unim N cu P (evident $NP \parallel BD$) căci N și P sînt mijloace de laturi — construcție). Punctele M, N, P, Q sînt coplanare deoarece, de exemplu, $MN \parallel AC \parallel QP$ (construcție). În același timp planul $MNPQ$ este egal depărtat de punctele A, B, C, D , căci — de exemplu — ducînd $CC' \perp MNPQ$ și $DD' \perp MNPQ$, triunghiurile dreptunghice $CC'P$ și $DD'P$ sînt congruente deoarece $CP \equiv PD$ și $\widehat{C'PC} \equiv \widehat{P'PD}$ — opuse la vîrf. Așadar $MNPQ = \alpha$.

VIII.G.59. Punctele A, B, C determină un plan α . Punctele A', B', C' determină alt plan β . Planele α și β sînt concurente deoarece : în planul determinat de dreptele a și b prelungind segmentele neaparalele AB și $A'B'$ obținem un punct de intersecție M . Cum $M \in AB \Rightarrow M \in \alpha$. Dar $M \in A'B' \Rightarrow M \in \beta \Rightarrow$ planele α și β avînd un punct comun M , au o dreaptă comună pe care o notăm cu (d) . Evident $M \in d$. (Vezi fig. VIII.G.59.)

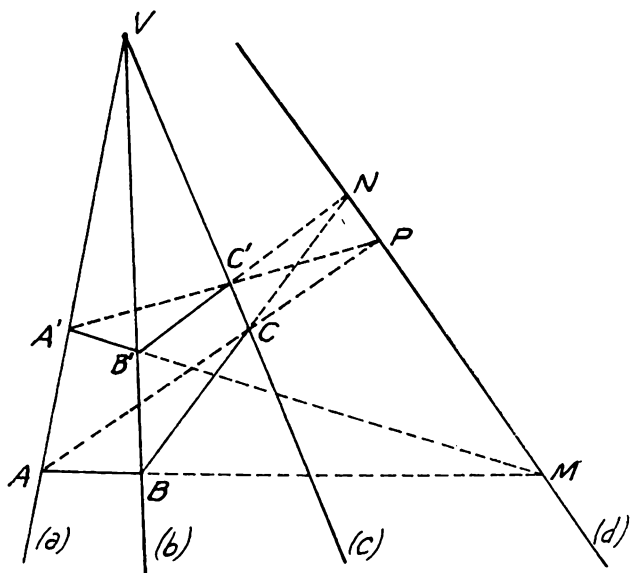


Fig. VIII.G.59.

Repetăm raționamentul : în planul determinat de dreptele b și c , prelungind segmentele neaparalele BC și $B'C'$ se obține punctul lor de intersecție pe care-l notăm cu N etc... $\Rightarrow N \in d$. Raționînd asemănător, deducem că segmentele neaparalele CA și $C'A'$ au și ele un punct de intersecție $P \Rightarrow P \in d$.

În concluzie, punctele M, N, P sînt coliniare și anume aparțin dreptei de intersecție d , a planelor α și β determinate de punctele A, B, C și respectiv A', B', C' .

Observație : 1. Să presupunem că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt coplanare. Se numesc triunghiuri „omologice“ acele triunghiuri ale căror vîrfuri sînt, două cite două pe trei drepte concurente — punctul de concurență se numește „centrul de omologie“. Folosind noțiunea de „triunghiuri omologice“ teorema lui Desargues se enunță astfel

Dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt triunghiuri omologice, atunci punctele $M = AB \cap A'B'$, $N = BC \cap B'C'$ și $P = AC \cap A'C'$ sînt colinare și reciproce.

2. Demonstrația teoremei lui Desargues în plan este „spectaculoasă” dacă privim figura VIII.G.59, drept ilustrarea unei „figuri plane”, și o „gîndim” apoi în „spațiu”.

VIII.G.60. În triunghiul AED , deoarece $G_1 \in ED$ și $G_4 \in AE \Rightarrow$ dreptele AG_1 și DG_4 sînt concurente. Notăm punctul de concurență G (Vezi fig.

VIII.G.60.) În $\triangle AED$ deoarece $\frac{EG_1}{ED} = \frac{EG_4}{EA} = \frac{1}{3}$ (proprietatea centrului de greutate al unui triunghi) $\Rightarrow G_1G_4 \parallel AD \Rightarrow \triangle GG_1G_4 \sim \triangle GAD$ (unghiurile din G opuse la vîrf, unghiurile $G_4G_1G = DAG$ alterne interne) $\Rightarrow \frac{GG_1}{GA} = \frac{1}{3}$ (aceiași raport de asemănare). Deci punctul G se află pe dreptele AG_1 și DG_4 situat la o pătrime față de fețele opuse și la trei pătrimi față de vîrfurile opuse fețelor respective. (1)

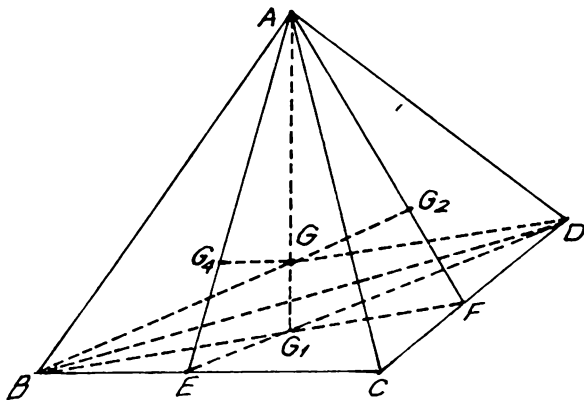


Fig. VIII.G.60.

În $\triangle ACD$ ducem mediana AF . În triunghiul ABF există dreapta AG_1 deoarece mediana BF a triunghiului BCD trece prin G_1 . Tot în $\triangle ABF$ ducem BG_2 și notăm intersecția dreptelor AG_1 și BG_2 de exemplu P . Repetînd raționamentele făcute la punctul (1) $\Rightarrow \frac{PG_1}{PA} = \frac{1}{3}$. (2) $\Rightarrow P = G$ (3). (Punctul care împarte — interior — un segment într-un raport dat, este unic).

Așadar, dreptele care unesc punctele A, B și D cu centrele de greutate ale fețelor opuse G_1, G_2 și respectiv G_4 sînt concurente în punctul G .

Asemănător, „prindem“ în această concurență și dreaptă CG_3 . În concluzie dreptele AG_1 , BG_2 , CG_3 și DG_4 sînt concurente într-un punct, notat de exemplu G , iar acest punct se găsește pe dreptele de mai sus, situat la $\frac{1}{4}$ de fețele opuse punctelor A, B, C, D și la $\frac{3}{4}$ față de vîrfurile A, B, C, D . Punctul G se numește centrul de greutate al tetraedrului.

Caz particular. Dacă $ABCD$ este un tetraedru regulat, atunci punctele G_1, G_2, G_3, G_4 coincid cu ortocentrele fețelor și teorema lui Comandino se enunță într-un tetraedru regulat, înălțimile tetraedrului sînt concurente într-un punct G , care se află la aceeași depărtare față de fețele tetraedrului și anume la o depărtare egală cu $\frac{1}{4}$ din lungimea înălțimii tetraedrului. Evident punctul G este centrul de greutate al tetraedrului.

VIII.G.61. a) În figura VIII.G.61, fețele cubului $AVBB'$ și $AVDA'$ fiind pătrate, punctele A_1 și A_3 sînt centrele lor. Poligonul de secțiune se obține determinînd intersecțiunile dintre (AA_1A_3) și fețele cubului. El este triunghiul echilateral $AB'A'$ (laturile fiind diagonalele fețelor cubului, deoarece: $AA_3 \subset (AVA'D)$; $AA_1 \subset (AVB'B)$ iar $A'B' \cap (A'VB'C')$ iar $AA' \equiv AB' \equiv A'B'$ (Vezi fig. VIII.G.61.).

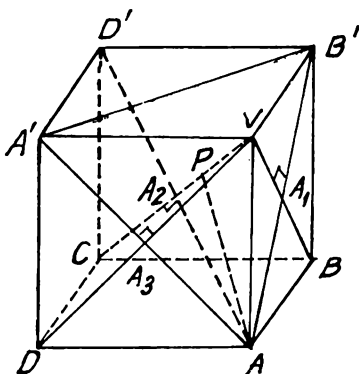


Fig. VIII.G.61.

Cum $VA \equiv VB' \equiv VA'$ (ipoteză) rezultă că punctul V se proiectează pe planul $AA'B'$ într-un punct P egal depărtat de A, A', B' , deci în centrul lui de greutate. La fel gîndim și despre proiecția punctului C pe planul $AA'B'$. (Proprietatea punctului de concurență a mai multor oblice congruente, care se proiectează pe planul determinat de picioarele oblicelor.)

Așadar, perpendicularele duse din punctele V și C pe planul $(AA'B')$ au același picior și anume punctul P . Rezultă că $CV \perp (AA_1A_3)$ și deci $CV \perp AP$. Cum $AA_2 \perp CV$ din ipoteză, ar rezulta că din punctul A și

în planul AA_1A_3 , putem duce două perpendiculare pe dreapta CV și anume AP și $AA_2 \rightarrow$ absurd. Urmează că $P = A_2$ și deci punctele A, A_1, A_2, A_3 sînt coplanare și apoi concluzia că $CV \perp (AA_1A_2A_3)$.

b) Cum punctul A_2 reprezintă în triunghiul echilateral $AA'B'$ și intersecția înălțimilor $B'A_3$ și $A'A_1$ rezultă că în patrulaterul $A_2A_3AA_1$ unghiurile din A_3 și A_1 măsoară 90° , deci patrulaterul $AA_1A_2A_3$ este inscriptibil. Problema rămîne adevărată dacă înlocuim cubul $ABCDVA'B'C'$ cu un paralelipiped dreptunghic ?

VIII.G.62. a) Notînd dimensiunile paralelipedului a, b, c și exprimînd pătutul diagonalei paralelipedului cît și aria lui totală, avem de demonstrat $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Înmulțim membrii inecuației cu 2 $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$ grupăm convenabil $(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0$. Restrîngem respectivele dezvoltări: $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$. Inegalitatea este evidentă. Dacă $a = b = c$ paralelipipedul dreptunghic este cub și deci într-un cub, numărul care arată pătutul diagonalei este egal cu numărul care arată jumătatea ariei lui laterale.

b) Fiecărei diagonale a poligonului de bază îi corespund în planul respectiv, două diagonale ale prisme (conform celor arătate la „indicații“).

Cum prisma are 130 de diagonale, rezultă că poligonul convex de la baza prisme are 65 de diagonale. Formula care dă numărul diagonalelor unui poligon convex este $\frac{n(n-3)}{2}$ unde „ n “ reprezintă numărul laturilor poligonului convex.

Rezultă ecuația de gradul al 2-lea : $\frac{n(n-3)}{2} = 65$ care rezolvată

în \mathbf{N}^* are o singură soluție $n = 13$. Deci poligonul convex în cauză are 13 laturi.

VIII.G.63. Să notăm cu S_1, S_2, \dots, S_8 sumele numerele corespunzătoare tripletelor de muchii care ajung respectiv în vîrfurile A_1, A_2, \dots, A_8 . Fiecare dintre sumele $S_1 \dots S_8$ provine din adunarea a trei numere, luate o singură dată din mulțimea numerelor naturale de la 1 la 22. Cum fiecare dintre numerele de la 1 la 12 ajunge în două vîrfuri dintre vîrfurile A_1, A_2, \dots, A_8 , înseamnă că în suma $S_1 + S_2 + \dots + S_8$, fiecare dintre numerele de la 1 la 12 intră de două ori, și alte numere în afara celor de la 1 la 12, nu vor exista. Deci, $S_1 + S_2 + \dots + S_8 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 12) = 2 \cdot 13 \cdot 6 = 12 \cdot 13 = 156$. Spre a se putea realiza numerotarea cerută în textul problemei, ar trebui ca $S_1 = S_2 = \dots = S_8$, deci $156 = 8 \cdot S_1$ cu $S_1 \in \mathbf{N}^*$. Așadar, suma $S_1 + \dots + S_8$ ar trebui să fie un multiplu de 8. În cazul de față 156 nefiind multiplu de 8, numerotarea muchiilor cerute de problemă, nu este posibilă.

VIII.G.64. a) Mai întii să arătăm că există tetraedre cu cele patru fețe triunghiuri dreptunghice. Construim un triunghi dreptunghic ABC , $m(A) = 90^\circ$. Pe planul ABC și de exemplu în punctul B ducem o perpendiculară, pe care fixăm un punct oarecare D . Punctele A, B, C, D determină un tetraedru în care fețele sînt triunghiuri dreptunghice pentru că : (Vezi fig. VIII.G.64.a.)

$BA \perp AC$ din ipoteză ;
 $DB \perp BA$ din construcția făcută ;
 $DB \perp BC$ din aceeași construcție ;
 $DA \perp AC$ conform teoremei celor trei perpendiculare.

Deci există astfel de tetraedre. Să demonstrăm că singurele tetraedre cu toate fețele triunghiuri dreptunghice sînt numai cele descrise la punctul a).

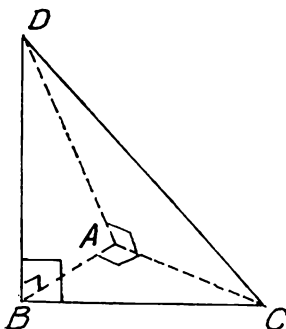


Fig. VIII.G.64.a.

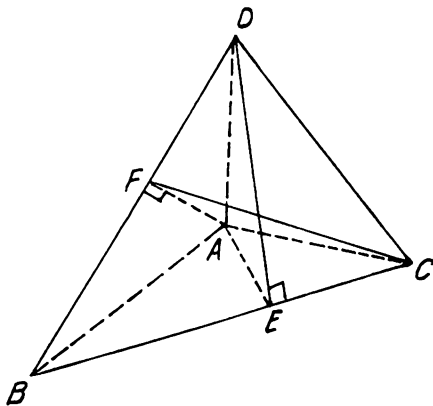


Fig. VIII.G.64.b.

Să presupunem că, de exemplu, vârful A al unui tetraedru cu toate fețele triunghiuri dreptunghice, este un triedru tridreptunghic. Vom arăta că această situație este imposibilă. (Vezi fig. VIII.G.64.b.)

Construim $AE \perp BC$ ($E \in BC$). Triunghiul BAC fiind dreptunghic în A (ipoteză) \Rightarrow piciorul perpendicularei AE se află între B și C . Conform teoremei celor trei perpendiculare $DE \perp BC$ și deci $m(C) < 90^\circ$, dar și $m(B) < 90^\circ$. În concluzie tetraedrul $ABCD$ are fețele BAC , CAD și DAB triunghiuri dreptunghice, iar fața BCD un triunghi ascuțitunghic.

b) Acum să presupunem că tetraedrul are cele patru fețe triunghiuri dreptunghice, dar și congruente. (Vezi fig. VIII.G.65.a.)

De exemplu, din $\triangle BAC \equiv \triangle DBC$ rezultă $BC \equiv DC$, așadar în triunghiul dreptunghic DBC , $m(D) = 90^\circ$, cateta BC este congruentă cu ipotenuza DC . Rezultatul este absurd, și în concluzie, nu există tetraedru cu fețele triunghiuri dreptunghice congruente. La fel se ajunge la contradicție și în celelalte cazuri.

