MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

UNIVERSITATEA BUCUREȘTI

ANALIZĂ MATEMATICĂ

VOL. II

Ediția a III-a

Lucrarea este elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universității București

Editura didactică și pedagogică
BUCUREȘTI

Redactor: **Iliescu Gabriela**
Tehnoredactor: **Velcovici Constantina**

PREFAȚĂ

Manualul de față, care se află acum la a cincea ediție, în ceea ce privește volumul I și la a treia ediție, în ceea ce privește volumul II (ediția precedentă a apărut în 1971), este rodul unei experiențe didactice îndelungate, din perioada în care Catedra de Analiză matematică a Facultății de matematică a Universității din București era condusă de regretatul academician profesor Miron Nicolescu, decedat în anul 1975. Elaborat sub directa sa conducere, acest manual apare acum într-o ediție nouă, îngrijită de prof. univ. dr. docent Solomon Marcus, elev al acad. Miron Nicolescu. Au fost înlăturate o serie de greșeli de tipar și alte scăpări, iar în volumul al doilea a fost adăugat un capitol nou, privind Analiza matematică nestandard, elaborat de prof. Solomon Marcus.

Acad. *GH. MARINESCU*

Șef al Catedrei de Analiză matematică a Facultății de matematică a Universității din București

PREFAȚĂ LA EDIȚIA ÎNTÎI

Ca și primul volum, volumul de față al manualului de analiză are ca punct de plecare un manual mai vechi[1] *al unuia din autori, de care totuși se deosebește atît prin modul de tratare cît și prin conținut.*

În modul de tratare este acumulată experiența a zece ani de învățămînt, de la 1953 încoace, a autorilor, în fața a numeroase promoții de studenți.

Multe din problemele tratate în acest volum au fost și ele obiectul unor discuții repetate între membrii colectivului catedrei, ca și principalele probleme din primul volum.

Conținutul a urmat, în esență, programa analitică actuală. Am căutat însă ca acest conținut să fie prezentat sub forma cea mai actuală, ținînd bineînțeles seama de scopul acestui manual. Trebuie să mărturisim că acest lucru nu a fost posibil în aceeași măsură în toată întinderea cursului. O prezentare într-adevăr modernă a integralelor de suprafață, a formulelor de tip Stokes, a noțiunii de arie cere pregătiri minuțioase, ca și cunoștințe de topologie algebrică, care nu se pot da, cel puțin în perioada actuală, studenților din al doilea an de învățămînt, în cadrul orarului prescris.

Toată dificultatea a stat în alegerea unui drum de mijloc în prezentarea capitolelor respective.

Cititorul va aprecia singur în ce măsură am reușit.

Teoria curbelor rectificabile este prezentată în formă cît mai generală, după modelul schițat în tratatul de analiză al unuia din autori[2].

Problema așa-numitelor integrale improprii este tratată unitar, printr-un procedeu uniform, în care se înglobează cele două cazuri, de obicei tratate separat (intervalul nemărginit sau funcția nemărginită).

În prezentarea integralei multiple, alături de metoda obișnuită, utilizată în cea mai mare parte a manualelor de analiză, am găsit instructiv să dăm și o metodă a cărei origine se află în teoria modernă a integralei.

---

[1] Miron Nicolescu, *Analiză matematică*, vol. II, 1953, Ed. Academiei R.P.R.
[2] Miron Nicolescu, *Analiză matematică*, vol. II, Ed. tehnică, 1958, p. 228—232.

Am găsit de datoria noastră să dăm în acest volum şi o demonstraţie a celebrei teoreme a lui Jordan. Ea nu figurează în programa analitică. Dar după trecerea examenului de analiză, studenţii vor putea parcurge în linişte demonstraţia unei teoreme pe care o utilizează de nenumărate ori în studiile lor, însă pe care nici un profesor nu o demonstrează (din lipsă de timp).

Nu putem enumera aici toate problemele a căror tratare ni se pare a constitui un progres faţă de modul de tratare din alte manuale. Dar am fost conduşi şi aici, ca şi în primul volum, de principiul că rigoarea poate merge şi trebuie să meargă „mînă în mînă" cu claritatea expunerii. Numai cititorii ne vor putea spune în ce măsură am reuşit în această încercare a noastră.

AUTORII

Capitolul I

PRIMA TEOREMĂ DE APROXIMARE A LUI WEIERSTRASS

Una dintre cele mai importante probleme ale Analizei matematice este aceea de a reprezenta o funcţie cu ajutorul unor funcţii de o structură mai simplă. Teorema următoare dă un răspuns la această problemă, în cazul în care funcţia considerată este continuă.

Prima teoremă de aproximare a lui Weierstrass. Fie f o funcţie reală, continuă pe intervalul compact $[a, b]$. Există un şir de funcţii polinomiale $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ care converge uniform, pe $[a, b]$, către funcţia f.

Această teoremă, stabilită încă în secolul trecut de către K. Weierstrass, a primit ulterior noi şi noi demonstraţii. Vom prezenta aici demonstraţia dată teoremei lui Weierstrass de către matematicianul sovietic S. N. Bernstein. Această demonstraţie are meritul de a da un procedeu constructiv, efectiv, de obţinere a polinoamelor căutate.

Deoarece de la intervalul $[a, b]$ se poate trece la intervalul $[0, 1]$ prin transformarea

$$t = \frac{x - a}{b - a}$$

şi deoarece prin această transformare calitatea de polinom se păstrează, rezultă că este suficient să demonstrăm teorema pentru intervalul $[0, 1]$.

Să notăm cu C_n^m numărul combinărilor de n obiecte luate cîte m şi să considerăm aşa-numitele *polinoame ale lui Bernstein* asociate funcţiei f:

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1 - x)^{n-m}.$$

Vom stabili mai întîi cîteva relaţii privitoare la coeficienţii C_n^m. Se ştie că dacă n este un număr natural, atunci

$$(p + q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{1}$$

Derivînd în ambii membri în raport cu p şi multiplicînd cu p rezultatele obţinute, căpătăm

$$np(p+q)^{n-1} = \sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m}. \tag{2}$$

Derivînd din nou în raport cu p şi multiplicînd cu p rezultatele obţinute în cei doi membri, căpătăm

$$np(np+q)(p+q)^{n-2} = \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{3}$$

Punînd, în (1), $p = x$ şi $q = 1 - x$, obţinem

$$1 = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m}. \tag{4}$$

Punînd, în (2) şi (3), $p = x$ şi $q = 1 - x$, obţinem

$$nx = \sum_{m=0}^{n} mC_n^m x^m (1-x)^{n-m}. \tag{5}$$

$$[1 + (n-1)x]\,nx = \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m}. \tag{6}$$

Înmulţind cei doi membri din (4) cu n^2x^2, cei doi membri din (5) cu $-2nx$ şi adunînd membru cu membru egalităţile astfel obţinute cu egalitatea (6), căpătăm

$$n^2x^2 - 2n^2x^2 + nx[1+(n-1)x] = \sum_{m=0}^{n} n^2x^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} -$$

$$- \sum_{m=0}^{n} 2nxmC_n^m x^m (1-x)^{n-m} + \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m},$$

deci

$$nx(1-x) = \sum_{m=0}^{n} (nx-m)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m}. \tag{7}$$

Fie acum x o valoare arbitrară, dar fixată, în intervalul $[0, 1]$. Fie δ un număr pozitiv arbitrar.

Să notăm cu

$$\Sigma_I = \Sigma_I\, C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$$

suma acelor termeni din membrul al doilea al egalităţii (4), pentru care m satisface inegalitatea

$$\left|\frac{m}{n} - x\right| < \delta;$$

să notăm cu

$$\Sigma_{II} = \Sigma_{II}\, C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$$

suma acelor termeni din membrul al doilea al egalității (4) care nu figurează în Σ_I. Avem deci:

$$1 = \Sigma_I + \Sigma_{II}.$$

Deoarece pentru termenii sumei Σ_{II} este îndeplinită inegalitatea

$$\left|\frac{m}{n} - x\right| \geqslant \delta$$

avem

$$\Sigma_{II} = \Sigma_{II}\, C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant \frac{1}{\delta^2}\, \Sigma_{II} \left(\frac{m}{n} - x\right)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta^2 n^2} \sum_{m=0}^{n} (m - nx)^2\, C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

Comparînd cu (7), obținem

$$\Sigma_{II} \leqslant \frac{1}{\delta^2 n^2}\, nx(1-x).$$

Deoarece

$$0 \leqslant \left(\frac{1}{2} - x\right)^2, \text{ rezultă}$$

$$0 \leqslant \frac{1}{4} - x + x^2 = \frac{1}{4} - x(1-x)$$

și deci $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$. Așadar

$$\Sigma_{II} \leqslant \frac{1}{4\delta^2 n}. \tag{8}$$

Să revenim acum la $B_n(x)$. Avem

$$|B_n(x) - f(x)| = \left| \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (x-1)^{n-m} - f(x) \right|$$

sau, în baza lui (4),

$$|B_n(x) - f(x)| = \left| \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m} - f(x) \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \right| =$$

$$= \left| \sum_{m=0}^{n} \left[f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x) \right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \right|. \tag{9}$$

f, ca funcție continuă pe un interval compact, este uniform continuă pe $[a, b]$.

Există deci, pentru $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$, astfel încît din $|x_1 - x_2| < \delta$ să rezulte $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Din (9) obţinem:

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{m=0}^{n} \left|f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x)\right| C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant$$

$$\leqslant \Sigma_I \left|f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x)\right| C_n^m x^m (1-x)^{n-m} + \Sigma_{II}\left[\left|f\left(\frac{m}{n}\right)\right| + |f(x)|\right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$$

unde sumele Σ_I şi Σ_{II} sînt asociate acelei valori a lui δ care corespunde numărului $\varepsilon > 0$ pe care ni l-am dat.

Deoarece Σ_I se extinde la acele valori ale lui m pentru care $\left|\frac{m}{n} - x\right| < \delta$, rezultă

$$\Sigma_I \left|f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x)\right| C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \Sigma_I C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

Din faptul că f este continuă pe $[0, 1]$ rezultă că există un număr $M > 0$, astfel încît $|f(x)| < M$ pentru $x \in [0, 1]$. Dat fiind că Σ_{II} se extinde la acele valori ale lui m pentru care $\left|\frac{m}{n} - x\right| \geqslant \delta$, rezultă, în baza inegalităţii (8), că

$$\Sigma_{II}\left[\left|f\left(\frac{m}{n}\right)\right| + |f(x)|\right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m} < 2M\, \Sigma_{II}\, C_n^m x^m (1-x)^{n-m} < \frac{M}{2\delta^2 n}.$$

Luînd $n = \frac{M}{\delta^2 \varepsilon}$, obţinem

$$\Sigma_{II}\left[\left|f\left(\frac{m}{n}\right)\right| + |f(x)|\right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Ţinînd seama de (11) şi (12), deducem din (10) că

$$|B_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

de îndată ce $n \geqslant \frac{M}{\delta^2 \varepsilon}$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Deoarece δ depinde numai de ε, iar M depinde numai de f, rezultă că $\frac{M}{\delta^2 \varepsilon}$ depinde numai de f şi de ε.

Cu aceasta, prima teoremă a lui Weierstrass este demonstrată; şirul $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ converge uniform către f.

O demonstraţie mai scurtă a teoremei lui Weierstrass a fost obţinută în urmă cu cîţiva ani de către Harald KUHN (Archiv der Mathematik, vol. 15, 1964, fasc. 4/5, p. 316—317) şi se sprijină pe inegalitatea lui Bernoulli

$$(1 + h)^n \geqslant 1 + nh \text{ pentru } h > -1,\ n \text{ natural},$$

care se stabileşte uşor prin inducţie completă. Iată această demonstraţie:

Considerăm polinomul

$$Q_n(x) = (1 - x^n)^{2^n}.$$

Se observă că Q_n ia valoarea 1 pentru $x = 0$ şi descreşte pînă la valoarea 0 în $x = 1$. Fie $0 \leqslant q < \frac{1}{2}$. Deoarece pentru $0 \leqslant x \leqslant q$ avem

$$1 \geqslant Q_n(x) \geqslant Q_n(q) = (1 - q^n)^{2^n} \geqslant 1 - 2^n q^n = 1 - (2q)^n$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} (2q)^n = 0$$

rezultă că şirul de funcţii $\{Q_n\}$ converge uniform către 1 pe intervalul compact $[0, q]$. Fie acum $\frac{1}{2} < q < 1$. Ţinînd seamă că $0 \leqslant Q_n(x) \leqslant Q_n(q)$ pentru $q \leqslant x \leqslant 1$ şi

$$\frac{1}{Q_n(q)} = \left(\frac{1}{1 - q^n}\right)^{2^n} = \left(1 + \frac{q^n}{1 - q^n}\right)^{2^n} \geqslant 1 + \frac{2^n q^n}{1 - q^n} > (2q)^n$$

iar

$$\lim_{n\to\infty} (2q)^n = \infty,$$

rezultă că şirul de funcţii $\{Q_n\}$ converge uniform către valoarea 0 pe intervalul compact $\left[\frac{1}{2}, q\right]$.

Printr-o transformare liniară, obţinem din polinomul $Q_n(x)$ polinomul $P_n(x) = Q_n\left(\frac{1-x}{2}\right)$, care pentru $|x| \leqslant 1$ ia valori între 0 şi 1. Pentru $\delta \leqslant |x| \leqslant 1$ (unde $\delta > 0$) şirul $\{P_n(x)\}$ converge uniform către funcţia în scară

$$T(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Să considerăm acum o funcţie reală f, continuă pe $[0, 1]$. Putem presupune că $f(0) = 0$. Fie $\varepsilon > 0$. În virtutea continuităţii uniforme a lui f pe $[0, 1]$, există o funcţie în scară

$$T^*(x) = \sum_{j=1}^{m} s_j T(x - x_j), \text{ unde } 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < 1,$$

cu proprietăţile $|f(x) - T^*(x)| < \varepsilon$ pentru $0 \leqslant x \leqslant 1$ şi $|s_j| < \varepsilon$. Alegem acum un număr pozitiv δ suficient de mic pentru ca intervalele $(x_j - \delta, x_j + \delta)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ să fie disjuncte două cîte două. Fie n suficient de mare pentru ca să avem

$$|P_n(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{S}$$

de îndată ce $0 < \delta \leqslant |x| \leqslant 1$. (Prin S s-a notat valoarea $\sum_{j=1}^{m} |s_j|$).

Să punem

$$P^*(x) = \sum_{=1}^{m} s_j P_n(x - x_j).$$

Avem, pentru $x_k - \delta < x < x_k + \delta$,

$$|T^*(x) - P^*(x)| \leqslant \sum_{j \neq k} |s_j| |T(x - x_j) - P_n(x - x_j)| +$$

$$+ |s_k| |T(x - x_k) - P_n(x - x_k)| < \frac{\varepsilon}{S} S + |s_k| \cdot \frac{\varepsilon}{S} < 2\varepsilon,$$

deci

$$|f(x) - P^*(x)| \leqslant |f(x) - T^*(x)| + |T^*(x) - P^*(x)| < 4\varepsilon.$$

pentru $0 \leqslant x \leqslant 1$ şi teorema lui Weierstrass este demonstrată.

Observaţii. 1° Pe teorema lui Weierstrass se vede încă o dată importanţa noţiunii de convergenţă uniformă. Faptul că limita unui şir uniform convergent de polinoame este o funcţie continuă nu constituie o noutate; se ştie doar că prin convergenţa uniformă continuitatea se păstrează. Ceea ce aduce nou teorema lui Weierstrass este faptul că *orice* funcţie continuă se poate obţine ca limită a unui şir uniform convergent de polinoame.

2° Este evident că teorema lui Weierstrass se poate enunţa şi în modul următor:

O funcţie continuă pe $[a, b]$ este, pe $[a, b]$, suma unei serii uniform convergente de polinoame.

3° Teorema lui Weierstrass constituie o confirmare a faptului că limita unui şir uniform convergent de funcţii derivabile nu este obligatoriu o funcţie derivabilă. Într-adevăr, dacă n-ar fi aşa, atunci, ţinînd seama că funcţiile polinomiale sînt derivabile în orice punct, ar rezulta, în baza teoremei lui Weierstrass, că orice funcţie continuă este derivabilă. Însă tot Weierstrass (şi după el mulţi alţi matematicieni) a dat un exemplu de funcţie continuă care nu este derivabilă în nici un punct. Fie $0 < b < 1$ şi fie a un număr natural impar. Să punem

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos (a^n \pi x).$$

Dacă $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, atunci F nu este derivabilă în nici un punct. (A se vedea, de exemplu, M. Nicolescu, *Analiza matematică*, vol. II, 1958, p. 360—361.) Pe de altă parte, F, ca sumă a unei serii uniform convergente de funcţii continue, este o funcţie continuă.

Capitolul II

FUNCŢII CU VARIAŢIE MĂRGINITĂ

Fie f o funcţie reală definită pe intervalul compact $[a, b]$. Expresia $|f(b) - f(a)|$ ne dă o imagine a modulului în care se modifică valorile funcţiei pe $[a, b]$; însă această expresie nu înregistrează comportarea funcţiei f în interiorul lui $[a, b]$. Pentru a înlătura acest inconvenient, să considerăm un punct interior c, $a < c < b$, şi să formăm expresia $|f(c) - f(a)| + |f(b) - f(c)|$. Această expresie ne dă o imagine mai fină a modului în care se modifică valorile lui f pe $[a, b]$; dar, la rîndul ei, prezintă inconvenientul că nu înregistrează în nici un fel comportarea funcţiei f în interiorul intervalelor $[a, c]$ şi $[c, b]$. Pentru a remedia şi acest inconvenient, vom angaja şi puncte interioare acestor intervale: fie, de exemplu, d şi e astfel încît $a < d < c < e < b$. Expresia $|f(d) - f(a)| + |f(c) - f(d)| + |f(e)| - f(c| + |f(b) - f(e)|$ este preferabilă, din punctul de vedere care ne interesează, expresiilor considerate anterior, dar şi ea prezintă inconveniente asemănătoare, pentru a căror remediere este necesar să se considere puncte cuprinse între a şi d, între d şi c, între c şi e şi între e şi b. Acest proces continuă la nesfîrşit şi o etapă oarecare a lui se prezintă în felul următor: Se consideră o diviziune $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b)$ a intervalului $[a, b]$ şi se asociază diviziunii Δ expresia

$$V_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \left| f(x_{i+1}) - f(x_i) \right|.$$

Numărul V_Δ se numeşte variaţia funcţiei f relativă la diviziunea Δ. Atunci cînd vrem să explicităm funcţia căreia i se asociază numărul V_Δ, scriem $V_\Delta(f)$. V_Δ exprimă cu atît mai bine modul în care se schimbă valorile lui f pe $[a, b]$, cu cît punctele care alcătuiesc pe Δ sînt mai multe şi mai apropiate, cu alte cuvinte cu cît diviziunea Δ este mai fină. Trebuie deci să studiem comportarea lui V_Δ atunci cînd fineţea lui Δ se accentuează. O indicaţie în acest sens ne este dată de:

Propoziţia 1. Dacă Δ' este mai fină decît Δ, atunci $V_\Delta \leqslant V_{\Delta'}$.

Demonstraţie. Să considerăm un interval generic al lui Δ, anume $[x_i, x_{i+1}]$. Contribuţia acestui interval în V_Δ este $|f(x_{i+1}) - f(x_i)|$. Dacă Δ'

nu conţine nici un punct cuprins între x_i şi x_{i+1}, atunci contribuţia lui $[x_i, x_{i+1}]$ în $V_{\Delta'}$ este de asemenea $|f(x_{i+1}) - f(x_i)|$. Dacă însă există, în Δ', cel puţin un punct x_i' cuprins între x_i şi x_{i+1}, atunci, din faptul că

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| = |f(x_{i+1}) - f(x_i') + f(x_i') - f(x_i)| \leqslant |f(x_{i+1}) - f(x_i')| + \\ + |f(x_i') - f(x_i)|$$

rezultă că intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ are, în $V_{\Delta'}$, o contribuţie mai mare decît contribuţia sa în V_Δ. Aşadar

$$V_\Delta \leqslant V_{\Delta'}.$$

Observaţie. Sensul propoziţiei 1 este următorul: prin trecerea de la o diviziune la alta mai fină, variaţia lui f creşte sau stă pe loc.

Propoziţia 1, împreună cu consideraţiile anterioare ei, sugerează următoarele:

Definiţii. O funcţie reală f, definită pe intervalul compact $[a, b]$, este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$, dacă există un număr real M, astfel încît, pentru orice diviziune Δ a lui $[a, b]$, $V_\Delta < M$. În acest caz, marginea superioară a mulţimii $\{V_\Delta\}$ se numeşte variaţia totală a funcţiei pe intervalul $[a, b]$ şi se notează $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$.

Noţiunea de funcţie cu variaţie mărginită a fost introdusă, la sfîrşitul secolului trecut, de către Camille Jordan, în legătură cu unele probleme din teoria seriilor trigonometrice şi a lungimii curbelor.

Din însăşi definiţia variaţiei totale a unei funcţii rezultă:

Propoziţia 2. Variaţia totală a unei funcţii reale f definite pe intervalul $[a, b]$ este nulă dacă şi numai dacă f este constantă pe $[a, b]$.

Teorema 1. O funcţie reală f, monotonă pe $[a, b]$, este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$. Variaţia ei totală este $|f(b) - f(a)|$.

Demonstraţie. Să presupunem că f este crescătoare pe $[a, b]$.

Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b)$. Din faptul că f este crescătoare, rezultă că $f(x_i) \leqslant f(x_{i+1})$ pentru $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, deci $|f(x_{i+1}) - f(x_i)| = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ şi

$$V_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = f(b) - f(a).$$

Aşadar, pentru orice număr $M > f(b) - f(a)$, avem $V_\Delta < M$, oricare ar fi diviziunea Δ.

Dacă f este descrescătoare pe $[a, b]$, atunci $|f(x_{i+1}) - f(x_i)| = f(x_i) - f(x_{i+1})$, deci $V_\Delta = f(a) - f(b)$ oricare ar fi Δ.

Observaţie. Aşa cum s-a definit mai sus noţiunea de funcţie cu variaţie mărginită, ea nu are sens decît pentru intervale compacte. În particular, despre funcţia f definită, pe $(0, 1]$, prin $f(x) = 1/x$, nu are sens să punem problema dacă ea este cu variaţie mărginită pe (0, 1], deşi este monotonă pe (0, 1], dar putem observa că nici o prelungire a ei pe [0, 1] nu conduce la o funcţie cu variaţie mărginită.

Teorema 2. Dacă f şi g sînt cu variaţie mărginită pe $[a, b]$, iar λ şi μ sînt numere reale, atunci funcţia $\lambda f + \mu g$ este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$.

Demonstraţie. Avem

$$V_\Delta(\lambda f + \mu g) = \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda f(x_{i+1}) + \mu g(x_{i+1}) - (\lambda f(x_i) + \mu g(x_i))| =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda(f(x_{i+1}) - f(x_i)) + \mu(g(x_{i+1}) - g(x_i))| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |\mu| \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| = |\lambda|\, V_\Delta(f) + |\mu|\, V_\Delta(g).$$

Însă, prin ipoteză, există un număr M astfel încît $V_\Delta(f) < M > V_\Delta(g)$, deci, în baza inegalităţilor de mai sus,

$$V_\Delta(\lambda f + \mu g) < (|\lambda| + |\mu|) \cdot M$$

şi $\lambda f + \mu g$ este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$.

Observaţie. Teorema 2 se extinde, în mod evident, la o sumă finită de forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, unde f_i sînt funcţii cu variaţie mărginită pe $[a, b]$, iar λ_i sînt numere reale.

Teorema 3. Dacă f este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$, iar $[c, d] \subset \subset [a, b]$, atunci f este cu variaţie mărginită pe $[c, d]$ şi

$$\overset{d}{\underset{c}{V}}(f) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Demonstraţie. Fie $\Delta' = (c = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots \ldots < x_{n-1} = d)$ o diviziune a intervalului $[c, d]$ şi fie

$$\Delta = (a = x_0 \leqslant x_1 = c < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} = = d \leqslant x_n = b);$$

Δ este o diviziune a lui $[a, b]$. Avem

$$V_{\Delta'} = \sum_{i=1}^{n-2} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = V_\Delta$$

şi, deoarece f este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$ rezultă că există un număr real M astfel încît $V_\Delta < M$, deci

$$V_{\Delta'} < M.$$

Deci f este cu variaţie mărginită pe $[c, d]$, iar din faptul că $V_{\Delta'} \leqslant V_{\Delta}$ rezultă şi inegalitatea din enunţ.

Observaţie. Reciproca teoremei 3 este adevărată: din faptul că f este cu variaţie mărginită pe orice interval compact, strict conţinut în $[a, b]$, rezultă că f este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$. Mai mult decît atît, dacă $a < c < b$ şi dacă f este cu variaţie mărginită pe $[a, c]$ şi pe $[c, b]$, atunci f este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$. Lăsăm pe seama cititorului stabilirea acestei propoziţii.

Corolar. Dacă f este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$, atunci funcţia

$$V(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$$

este crescătoare pe $[a, b]$.

Teorema 4. Dacă f este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$ şi $a < c < b$, atunci

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f),$$

Demonstraţie. Fie Δ o diviziune a lui $[a, b]$ şi fie Δ_c diviziunea obţinută din Δ prin adăugarea punctului c (în cazul în care c nu figura deja în Δ). În baza propoziţiei 1 avem

$$V_{\Delta} \leqslant V_{\Delta_c}.$$

Însă Δ_c se descompune într-o diviziune Δ' a lui $[a, c]$ şi o diviziune Δ'' a lui $[c, b]$ şi avem

$$V_{\Delta_c} = V_{\Delta'} + V_{\Delta''}.$$

Avem deci

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup\,\{V_{\Delta}\} \leqslant \sup\,\{V_{\Delta_c}\} = \sup\,\{V_{\Delta'} + V_{\Delta''}\} = \sup\,\{V_{\Delta'}\} +$$

$$+ \sup\,\{V_{\Delta''}\} = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f).$$

Pe de altă parte, din faptul că

$$\{V_{\Delta'} + V_{\Delta''}\} = \{V_{\Delta_c}\} \subset \{V_{\Delta}\}$$

rezultă, prin trecere la marginea superioară,

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

S-au obţinut două inegalităţi de sens contrar, care demonstrează teorema.

Observaţie. Teorema 4 se extinde, în mod vizibil, în felul următor: Dacă $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b)$ este o diviziune a intervalului $[a, b]$ şi dacă f este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$, atunci, conform teoremei 3, f este cu variaţie mărginită pe fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ şi

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \overset{x_{i+1}}{\underset{x_i}{V}}(f).$$

Exemplu. Fie $f(x) = \sin x$ considerată pe intervalul $[0,5\pi]$. Acest interval se descompune în intervalele $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{9\pi}{2}, 5\pi\right]$, şi pe fiecare dintre aceste intervale funcţia considerată este monotonă, deci cu variaţie mărginită. Avem

$$\overset{5\pi}{\underset{0}{V}}(f) = \overset{\pi/2}{\underset{0}{V}}(f) + \sum_{k=1}^{8} \overset{(k+1)\frac{\pi}{2}}{\underset{\frac{k\pi}{2}}{V}}(f) + \overset{5\pi}{\underset{\frac{9\pi}{2}}{V}}(f) = 1 + 4 \cdot 2 + 1 = 10.$$

Teorema 5. (Teorema de structură a lui Jordan). Fiind dată o funcţie reală f, cu variaţie mărginită pe $[a, b]$, există două funcţii φ şi ψ, crescătoare pe $[a, b]$, astfel încît $f = \varphi - \psi$.

Demonstraţie. Să punem $\varphi(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$. Conform corolarului teoremei 3, φ este crescătoare pe $[a, b]$. Rămîne să arătăm că funcţia $\psi = \varphi - f$ este de asemenea crescătoare pe $[a, b]$. Fie $x \in [a, b]$ şi $h > 0$, astfel încît $(x + h) \in [a, b]$. Avem

$$\psi(x+h) - \psi(x) = (\overset{x+h}{\underset{a}{V}}(f) - f(x+h)) - (\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - f(x)) =$$

$$= (\overset{x+h}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x}{\underset{a}{V}}(f)) - (f(x+h) - f(x)).$$

Însă, conform teoremei 4, avem

$$\overset{x+h}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{x+h}{\underset{x}{V}}(f),$$

deci:

$$\psi(x+h) - \psi(x) = \overset{x+h}{\underset{x}{V}}(f) - (f(x+h) - f(x)).$$

Diferenţa din membrul al doilea nu poate fi negativă, deoarece scăzătorul, în valoare absolută, este un element din mulţimea a cărei margine superioară este descăzutul, deci

$$\psi(x+h) - \psi(x) \geqslant 0$$

şi teorema este demonstrată.

Observaţii. Teorema 5 rămîne valabilă dacă se înlocuieşte cuvîntul „crescătoare" prin cuvîntul „descrescătoare". Într-adevăr, avem $f = \varphi - \psi = -\psi - (-\varphi)$ şi funcţiile $-\psi$ şi $-\varphi$ sînt descrescătoare.

În teorema 5 ne putem aranja în aşa fel încît funcţiile φ şi ψ să fie nu numai crescătoare, ci şi pozitive. Este suficient pentru aceasta să adăugăm, atît lui φ cît şi lui ψ, o aceeaşi constantă, suficient de mare.

Reciproca teoremei 5 este adevărată, deoarece o funcţie monotonă pe $[a, b]$ este, conform teoremei 1, cu variaţie mărginită pe $[a, b]$, iar diferenţa a două funcţii cu variaţie mărginită este, conform teoremei 2, o funcţie cu variaţie mărginită.

C o r o l a r u l 1. Dacă f şi g sînt cu variaţie mărginită pe $[a, b]$, atunci $\varphi = fg$ este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$.

D e m o n s t r a ţ i e. Conform teoremei 5, avem $f = f_1 - f_2$, $g = g_1 - g_2$, unde f_1, f_2, g_1 şi g_2 sînt funcţii crescătoare pe $[a, b]$. După cum am văzut, putem admite că f_1, f_2, g_1 şi g_2 sînt pozitive. Rezultă deci că

$$\varphi = (f_1 - f_2)(g_1 - g_2) = (f_1g_1 + f_2g_2) - (f_1g_2 + f_2g_1)$$

unde $\varphi_1 = f_1g_1 + f_2g_2$ şi $\varphi_2 = f_1g_2 + f_2g_1$ sînt crescătoare, deoarece suma a două funcţii crescătoare este o funcţie crescătoare iar produsul a două funcţii crescătoare şi pozitive este încă o funcţie crescătoare. Deci φ este diferenţa a două funcţii crescătoare pe $[a, b]$, aşadar este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$.

Enunţul corolarului 1 poate fi stabilit şi fără teorema 5, ca o consecinţă directă a definiţiei funcţiilor cu variaţie mărginită.

C o r o l a r u l 2. O funcţie cu variaţie mărginită pe $[a, b]$ este mărginită pe $[a, b]$.

D e m o n s t r a ţ i e. Dacă f este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$, atunci, conform teoremei 5, există φ şi ψ crescătoare pe $[a, b]$, deci mărginite pe $[a, b]$ ($[a, b]$ este compact!), astfel încît $f = \varphi - \psi$. Însă diferenţa a două funcţii mărginite pe $[a, b]$ este o funcţie mărginită pe $[a, b]$.

O b s e r v a ţ i e. Funcţia

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ \lambda, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

unde λ este un număr real, nu este mărginită pe $[0, 1]$, deci, conform corolarului 2, nu este cu variaţie mărginită pe $[0, 1]$. Cu alte cuvinte, oricum am prelungi pe $[0, 1]$, funcţia $1/x$ dată pe $(0, 1]$, nu vom putea obţine o funcţie cu variaţie mărginită. Acest exemplu arată că o funcţie monotonă pe un interval necompact poate fi foarte depărtată, ca structură, de o funcţie cu variaţie mărginită.

Corolarul 2 poate fi stabilit şi fără teorema 5, ca o consecinţă directă a definiţiei funcţiilor cu variaţie mărginită.

C o r o l a r u l 3. Dacă f este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$, atunci există, pentru orice $x \in [a, b)$, $f(x + 0)$, şi există, pentru orice $x \in (a, b]$, $f(x - 0)$.

D e m o n s t r a ţ i e. Proprietatea enunţată este cunoscută în cazul particular în care f este monotonă şi se extinde la o funcţie cu variaţie mărginită datorită teoremei 5:

$$f(x-0)=\varphi(x-0)-\psi(x-0), f(x+0)=\varphi(x+0)-\psi(x+0).$$

C o r o l a r u l 4. Există funcţii mărginite pe $[a, b]$ care nu sînt cu variaţie mărginită pe $[a, b]$.

D e m o n s t r a ţ i e. Fie $g(x)=0$ dacă x este iraţional şi $g(x)=1$ dacă x este raţional; g este, evident, mărginită, dar nu este cu variaţie mărginită pe nici un interval, deoarece nu există, pentru nici un x, nici $g(x-0)$, nici $g(x+0)$ (vezi corolarul 3).

C o r o l a r u l 5. O funcţie cu variaţie mărginită pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

D e m o n s t r a ţ i e. Propoziţia enunţată rezultă din faptul că o funcţie monotonă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$, iar diferenţa a două funcţii integrabile este încă o funcţie integrabilă pe $[a, b]$.

O funcţie reală f, definită pe $[a, b]$, este „lipschitziană" pe $[a, b]$, dacă există un număr real k astfel încît, pentru orice pereche de numere x', x'', $x' \in [a, b]$, $x'' \in [a, b]$, avem

$$|f(x')-f(x'')| \leqslant k|x'-x''|.$$

O clasă largă de funcţii cu variaţie mărginită este determinată de

T e o r e m a 6. O funcţie f lipschitziană pe $[a, b]$ este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$.

D e m o n s t r a ţ i e. Fie $\Delta=(a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n= = b)$. Conform ipotezei, există un număr k astfel încît

$$|f(x_{i+1})-f(x_i)| \leqslant k|x_{i+1}-x_i|$$

pentru $i=0, 1, \ldots, n-1$, deci

$$V_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)| \leqslant k \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=k(b-a)$$

şi f este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$.

C o r o l a r u l 1. Fie φ integrabilă pe $[a, b]$. Funcţia f definită pe $[a, b]$ prin

$$f(x)=\int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$.

Demonstrație. Fie x' și x'' două puncte din $[a, b]$. Avem:

$$\left| f(x') - f(x'') \right| = \left| \int_a^{x'} \varphi(t)\,dt - \int_a^{x''} \varphi(t)\,dt \right| = \left| \int_{x''}^{x'} \varphi(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x''}^{x'} |\varphi(t)|\,dt \right| \leqslant M|x' - x''|,$$

unde M este o margine a lui f pe $[a, b]$ (se știe că o funcție integrabilă pe $[a, b]$ este mărginită pe $[a, b]$). Rezultă că f este lipschitziană, deci, în baza teoremei 6, cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Corolarul 2. O funcție f, derivabilă, cu derivată mărginită pe $[a, b]$, este cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Demonstrație. Fie M astfel încît $|f'(x)| < M$ pentru orice $x \in [a, b]$. Obținem, în baza teoremei creșterilor finite, aplicate unui interval $[x', x''] \subset \subset [a, b]$, valoarea ζ astfel încît

$$|f(x'') - f(x')| = |f'(\zeta)|(x'' - x') < M(x'' - x'),$$

deci f este lipschitziană pe $[a, b]$ și, conform teoremei 6, este cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Observație. Corolarul 2 de mai sus permite să se stabilească pentru cele mai multe funcții uzuale (polinoame, sin, cos etc.), apartenența lor la clasa funcțiilor cu variație mărginită. Atragem atenția că ipoteza de mărginire a derivatei este esențială în corolarul 2; există funcții derivabile pe $[a, b]$ care nu sînt cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Exemplu. Fie funcția f definită pe $(-\infty, \infty)$ în felul următor:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{\pi}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Această funcție este derivabilă în orice punct:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{\pi}{x} - \pi \cos \dfrac{\pi}{x}, & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Se vede ușor că derivata este mărginită pe orice interval compact $[-a, a]$ $(a > 0)$, deci, în conformitate cu corolarul 2 de mai sus, f este cu variație mărginită pe $[-a, a]$.

Vom da acum o teoremă de reprezentare a variației totale a unei funcții cu ajutorul unei integrale. Pentru aceasta, este nevoie mai întîi de următoarea

Lemă. **Fie f cu variație mărginită pe $[a, b]$. Există un șir de diviziuni $\{\Delta_n\}$ de normă tinzînd la zero, astfel încît**

$$\lim_{n\to\infty} V_{\Delta_n} = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Demonstrație. Deoarece mulțimea $\{V_\Delta\}$ are, prin definiție, drept margine superioară variația totală a lui f pe $[a, b]$, rezultă existența unui șir de diviziuni $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_n, \ldots$ ale lui $[a, b]$, astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} V_{\Delta'_n} = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Să considerăm, pentru fiecare număr natural n, o diviziune Δ_n mai fină decît Δ'_n și astfel încît norma ei să fie inferioară lui $1/n$. Conform propoziției 1 și ținînd seama de definiția marginii superioare, rezultă

$$V_{\Delta'_n} \leqslant V_{\Delta_n} \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f),$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty} V_{\Delta_n} = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Observînd, în sfîrșit, că norma lui Δ_n tinde la zero cînd $n \to \infty$, lema este complet demonstrată.

Teorema 7. **Fie f derivabilă, cu derivată integrabilă pe $[a, b]$. Variația totală a lui f pe $[a, b]$ (a cărei existență este dată de corolarul 2 al teoremei 6) se exprimă în modul următor:**

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |f'(x)|\, \mathrm{d}x.$$

Demonstrație. În baza teoremei creșterilor finite, aplicate intervalului $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, există o valoare $\xi_i (i = 0, 1, \ldots, n-1)$, astfel încît $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1} (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ și

$$V_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |f'(\xi_i)|\,(x_{i+1} - x_i).$$

Să presupunem acum că Δ parcurge șirul de diviziuni $\{\Delta_n\}$ obținut în lemă și că pentru fiecare Δ_n din acest șir scriem o relație de tipul de mai sus. Primul membru va tinde, conform lemei, către $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$, în timp ce membrul al doilea va tinde, în baza integrabilității lui f' (deci și a lui $|f'|$), către integrala lui $|f'|$ pe $[a, b]$. Teorema 7 este astfel demonstrată.

Exemple.

1) Fie $f(x) = x^2$ considerată pe intervalul $[-1, +1]$. Avem

$$\overset{+1}{\underset{-1}{V}}(f) = 2\int_{-1}^{+1} |x|\,\mathrm{d}x = 2\left(-\int^{0} x\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\mathrm{d}x\right) = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2.$$

Variaţia totală a acestei funcţii se calculează mai uşor cu ajutorul teoremei 4.

2) Fie $f(x) = \cos x$ considerată pe intervalul $[0, 100\pi]$. Avem:

$$\overset{100\pi}{\underset{0}{V}}(f) = \int_{0}^{100\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{k=49}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{k=50}\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= 50\cdot 2 - 50(-2) = 200.$$

Capitolul III

INTEGRALA STIELTJES

Ne amintim că lucrul mecanic efectuat de o forţă $f(x)$ care se deplasează de-a lungul axei Ox, de la a la b, este dat de integrala

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă un punct material se deplasează de la a la b sub acţiunea unei forţe, atunci pentru fiecare moment al mişcării are loc relaţia:

$$m\alpha = f,$$

unde m este masa punctului, α este acceleraţia, iar f forţa. Dacă φ este o funcţie care descrie legea de mişcare a punctului ($\varphi(t_0) = a$, $\varphi(t_1) = b$) de la momentul t_0 la momentul t_1, atunci α este derivata a doua a funcţiei φ. Relaţia fundamentală a dinamicii dă atunci

$$f(\varphi(t)) = m\varphi''(t).$$

Funcţia φ este crescătoare pe $[a, b]$. Să facem, în integrala care dă lucrul mecanic, schimbarea de variabilă $x = \varphi(t)$. Intervalul $[a, b]$ se înlocuieşte cu $[t_0, t_1]$ şi lucrul mecanic este dat de

$$\int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} m\varphi''(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,m\varphi'^2(t_1) - \frac{1}{2}\,m\varphi'^2(t_0).$$

Notînd pe $\varphi'(t_i)$ cu V_i, rezultă că lucrul mecanic efectuat în deplasarea punctului este egal cu

$$\frac{1}{2}\,mV_1^2 - \frac{1}{2}\,mV_0^2.$$

Mărimea $\frac{1}{2}\,mV^2$, *cu ale cărei valori se măsoară lucrul mecanic efectuat, se numeşte energie cinetică,* deoarece măsoară energia de mişcare a punctului material.

Să considerăm acum un punct material de masă m, care se rotește în jurul unei axe. Energia cinetică, în această mișcare de rotație, va fi $\frac{1}{2}\, mV^2$, unde V este viteza mișcării. Dar într-o mișcare de rotație un rol important îl are viteza unghiulară, dată de derivata $\psi'(t)$ a unghiului $\psi(t)$ pe care-l face la momentul t perpendiculara, prin punctul dat, la axa de rotație, cu un anumit plan fix. Presupunînd că viteza unghiulară este constantă, ea reprezintă unghiul cu care se rotește punctul în unitatea de timp. Fie ω viteza unghiulară. În acest caz, viteza liniară V este egală cu produsul dintre ω și raza cercului pe care se efectuează mișcarea de rotație a punctului. Rezultă că energia cinetică este egală cu $\frac{1}{2}\, mr^2\omega^2$, unde r este raza cercului, deci distanța de la punct la axa de rotație. Numărul mr^2, care apare în această formulă, caracterizează proprietățile de inerție ale punctului în mișcarea de rotație. Cu cît este mai mare acest număr, cu atît trebuie cheltuită mai multă energie pentru a realiza o viteză unghiulară determinată. Pentru aceste motive, *numărul mr^2 se numește moment de inerție al punctului în mișcarea de rotație.*

Să considerăm acum un sistem de puncte materiale P_i, coliniare, cu masele m_i, care se rotesc în jurul unei axe perpendiculare pe dreapta suport a acestor puncte. Vom alege, ca origine a unui sistem de coordonate, intersecția dintre dreapta suport și axa de rotație; dreapta suport va fi axa absciselor, abscisa x_i a punctului P_i fiind distanța de la P_i la axa de rotație (aceasta din urmă va fi axa ordonatelor). Momentul de inerție al punctului P_i va fi $m_i x_i^2$, deci momentul de inerție al întregului sistem de puncte materiale va fi

$$\Sigma m_i x_i^2.$$

Să considerăm acum o problemă ceva mai complexă. Anume, fie o bară materială rectilinie care se rotește în jurul unei axe perpendiculare pe ea. Vom alege originea în punctul de intersecție al axei de rotație cu axa care poartă bara; aceasta din urmă va fi axa absciselor. Vom caracteriza distribuția masei de-a lungul barei prin funcția g, deci vom nota prin $g(x)$ masa porțiunii din bară cuprinsă între extremitatea din stînga a barei, a cărei abscisă o vom nota cu a, și punctul de abscisă x. Abscisa extremității drepte a barei o vom nota cu b. Să împărțim bara în mai multe porțiuni, cu ajutorul diviziunii $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} \dots < x_n = b)$. Dacă presupunem că masa porțiunii $[x_i,\ x_{i+1}]$ este concentrată într-un punct al porțiunii (fie ξ_i abscisa acestui punct), atunci problema de a defini momentul de inerție al porțiunii $[x_i,\ x_{i+1}]$ se rezolvă, în mod natural, luîndu-l egal cu momentul de inerție al punctului de abscisă ξ_i și de masă $g(x_{i+1}) - g(x_i)$. În felul acesta, suma momentelor de inerție ale tuturor porțiunilor, deci momentul de inerție al întregii bare, ar fi

$$\mu_\Delta(\xi_0, \dots, \xi_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^2[g(x_{i+1}) - g(x_i)].$$

Însă această evaluare se bazează pe o presupunere falsă. Ipoteza în care ne-am situat apare cu atît mai apropiată de realitate cu cît norma diviziunii Δ este mai mică (aceasta datorită continuității funcției g, continuitate pe care o admitem din motive de ordin fizic). Sîntem astfel conduși să studiem comportarea sumelor de tipul celei de mai sus, atunci cînd norma diviziunii Δ se apropie de zero. Dacă există un număr μ cu proprietatea că, pentru orice $\varepsilon > 0$, se poate găsi un număr $\eta > 0$, astfel încît, de îndată ce $\nu(\Delta) < \eta$ şi oricare ar fi $\xi_i(x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1},\ i = 0, 1, ..., n - 1)$, avem

$$|\mu_\Delta(\xi_0, ..., \xi_{n-1}) - \mu| < \varepsilon,$$

atunci μ va fi numărul cel mai îndreptăţit pentru a fi definit ca moment de inerţie al barei. Se pune deci problema: Există, în condiţiile în care ne-am situat, un număr μ cu proprietatea de mai sus? În caz afirmativ, cum se poate evalua acest număr? Pentru a da răspunsul la aceste întrebări şi la multe altele care apar pe marginea lor, vom introduce şi studia un nou tip de integrală, considerată, pentru prima oară, de Stieltjes, la sfîrşitul secolului trecut.

Fie f şi g două funcţii reale definite pe intervalul compact $[a, b]$. Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b)$ şi $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1}$, astfel încît $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$ pentru $i = 0, 1, ..., n - 1$.
Să punem:

$$\sigma_\Delta(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,[g(x_{i+1}) - g(x_i)].$$

Pentru prescurtare, vom scrie, în loc de $\sigma_\Delta(\xi_0, ..., \xi_{n-1})$, doar $\sigma_\Delta(\xi_i)$; *$\sigma_\Delta(\xi_i)$ va fi numită o sumă Riemann-Stieltjes asociată funcţiilor f şi g, diviziunii Δ şi punctelor ξ_i.* Atunci cînd, pentru a preveni o confuzie, este necesar să se pună în evidenţă şi funcţiile f şi g, vom scrie $\sigma_\Delta(f, g, \xi_i)$ sau $\sigma_\Delta(\xi_i, f, g)$.

Este uşor de văzut că $\mu_\Delta(\xi_0, ..., \xi_{n-1})$ se obţine din $\sigma_\Delta(\xi_i)$, luînd $f(x) = x$ şi presupunînd că g este continuă şi crescătoare.

Să presupunem acum că există un număr real I cu următoarea proprietate: fiind dat $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$, astfel încît, pentru orice diviziune Δ pentru care $\nu(\Delta) < \eta$ şi pentru orice alegere a punctelor ξ_i, pentru care $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1} (i = 0, 1, ..., n - 1)$ să avem

$$|\sigma_\Delta(\xi_i) - I| < \varepsilon.$$

În aceste condiţii, spunem că f este integrabilă Stieltjes în raport cu g pe $[a, b]$, iar numărul I se numeşte integrala Stieltjes a lui f în raport cu g, pe $[a, b]$ şi se notează:

$$(S)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$$

sau pur şi simplu

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x).$$

Este uşor de văzut că numărul I este unic determinat.

În cele ce urmează, ne vom permite uneori să înlocuim expresia „integrabilă Stieltjes în raport cu", prin „integrabilă în raport cu".

Cu ajutorul noţiunii introduse, problema tratată mai sus, a definirii momentului de inerţie al unei bare, revine la următoarea problemă: pătratul funcţiei identice este o funcţie integrabilă Stieltjes, pe $[a, b]$, în raport cu o funcţie crescătoare şi continuă pe $[a, b]$? În caz afirmativ, cum se calculează această integrală?

Vom dezvolta, în cele ce urmează, unele consideraţii care permit nu numai să se dea un răspuns complet la întrebările de mai sus (se va vedea din teorema 3 că răspunsul la prima întrebare este afirmativ), dar şi să se obţină unele rezultate a căror utilitate depăşeşte problema care ne-a condus la noţiunea de integrală Stieltjes, utilitate care se va vedea chiar într-un capitol ulterior al acestui manual.

Dealtfel, trebuie să observăm că problema momentului de inerţie nu este singura problemă care conduce la integrala Stieltjes. Am fi putut considera, de exemplu, şi problema definirii momentului static al unei bare, problemă strîns legată de aceea a centrului de greutate, şi multe altele. Integrabilitatea Riemann este un caz particular al integrabilităţii Stieltjes, iar integrala Riemann este un caz particular al integralei Stieltjes [cazul $g(x) = x$]. Datorită asemănării de structură a acestor concepte, este natural să ne aşteptăm ca problematica şi metodele pe care le-am întîlnit la integrala Riemann să reapară aici. Vom vedea însă că apar şi unele probleme şi situaţii noi, care nu-şi au corespondent la integrala Riemann; tocmai asupra acestora ne vom îndrepta atenţia principală. Acolo unde se repetă, în principiu, consideraţiile care au fost făcute la integrala Riemann, vom renunţa să le mai facem, trimiţînd la locul cuvenit.

Teorema 1. ***f* este integrabilă Stieltjes în raport cu *g* pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă există un număr *I* cu proprietatea că pentru orice şir $\{\Delta_n\}$ $(\Delta_n = (a = x_1^n < \ldots < x_i^n < x_{i+1}^n < \ldots < x_{p_n}^n = b))$ de diviziuni de normă tinzînd la zero avem**

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(\xi_i^n) = I,$$

unde ξ_i^n sînt astfel încît $x_i^n \leqslant \xi_i^n \leqslant x_{i+1}^n \cdot \left(I = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}g(x)\right)$.

Pentru demonstraţie, vezi teorema similară de la integrala Riemann.

Fie f mărginită pe $[a, b]$ şi g crescătoare pe $[a, b]$. Fie Δ diviziunea, deja considerată, a lui $[a, b]$. Să notăm cu m_i şi M_i marginile inferioară şi superioară ale lui f pe $[x_i, x_{i+1}]$; să notăm cu m şi M marginile inferioară şi superioară ale lui f pe $[a, b]$. Să punem

$$s_\Delta = s_\Delta(f, g) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i[g(x_{i+1}) - (gx_i)],$$

$$S_\Delta = S_\Delta(f, g) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i[g(x_{i+1}) - g(x_i)].$$

Acestea sînt sumele Darboux-Stieltjes, inferioară şi superioară, asociate funcţiilor f şi g şi diviziunii Δ. Sumele Darboux se obţin pentru $g(x) = x$. Datorită faptului că g a fost presupusă crescătoare, sumele Darboux-Stieltjes păstrează cele mai multe dintre proprietăţile sumelor Darboux. Următoarele propoziţii se stabilesc urmînd pas cu pas demonstraţiile corespunzătoare pentru sume Darboux (funcţiile f şi g sînt fixate):

1) Pentru orice Δ avem

$$m(g(b)-g(a))\leqslant s_\Delta, \qquad S_\Delta\leqslant M(g(b)-g(a)).$$

2) Pentru orice Δ şi orice alegere a punctelor ξ_i, avem

$$s_\Delta\leqslant \sigma_\Delta(\xi_i)\leqslant S_\Delta.$$

3) Dacă Δ' este o diviziune mai fină decît Δ, atunci

$$s_\Delta\leqslant s_{\Delta'}, \quad S_\Delta\geqslant S_{\Delta'}$$

4) Fiind date două diviziuni Δ' şi Δ'' ale lui $[a, b]$, avem

$$s_{\Delta'}\leqslant S_{\Delta''}.$$

5) Mulţimile $\{s_\Delta\}$ şi $\{S_\Delta\}$ sînt mărginite.
6) Fiind dată o diviziune Δ a lui $[a, b]$, avem

$$s_\Delta=\inf_{\xi_i}\{\sigma_\Delta(\xi_i)\}, \quad S_\Delta=\sup_{\xi_i}\{\sigma_\Delta(\xi_i)\}.$$

Teorema 2. Fie f mărginită şi g crescătoare pe $[a, b]$. f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există $\eta>0$ astfel încît, din $\nu(\Delta)<\eta$, să rezulte

$$S_\Delta-s_\Delta<\varepsilon.$$

Vom da acum o teoremă care implică răspunsul afirmativ la întrebarea de care era legată definiţia momentului de inerţie al unei bare.

Teorema 3. Dacă f este continuă iar g este crescătoare pe $[a, b]$, atunci f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$.

Demonstraţie. Avem:

$$S_\Delta-s_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(g(x_{i+1})-g(x_i)),$$

unde: $\omega_i=M_i-m_i$; f, fiind continuă pe $[a, b]$, este uniform continuă pe $[a, b]$ deci există, pentru orice $\varepsilon>0$, un $\eta_\varepsilon>0$, astfel încît, din $\nu(\Delta)<\eta_\varepsilon$, să rezulte $\omega_i<\varepsilon$ pentru $i=0, 1, \ldots, n-1$. Pe de altă parte, din faptul că g este crescătoare rezultă că diferenţele $g(x_{i+1})-g(x_i)$ sînt pozitive, deci $\omega_i[g(x_{i+1})-g(x_i)]\leqslant\varepsilon[g(x_{i+1})-g(x_i)]$ pentru $i=0, 1, \ldots, n-1$ şi $\nu(\Delta)<\eta_\varepsilon$. Obţinem deci, pentru $\nu(\Delta)<\eta_\varepsilon$,

$$S_\Delta-s_\Delta\leqslant\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}(g(x_{i+1})-g(x_i))=\varepsilon(g(b)-g(a))$$

şi, aplicînd teorema 2, rezultă că f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$.

Observaţie. Un caz particular al teoremei 3 este acela în care g este constantă pe $[a, b]$; însă în acest caz nu numai funcţiile continue, dar orice funcţie f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)=0.$$

Vom da acum cîteva proprietăţi care-şi au un analog perfect la integrala Riemann şi se stabilesc întocmai ca acolo.

7) (Proprietatea de ereditate.) *Dacă f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ şi $[c, d] \subset [a, b]$, atunci f este integrabilă în raport cu g pe $[c, d]$.*

8) (Proprietatea de aditivitate a integralei ca funcţie de interval.) *Dacă $a < c < b$ şi dacă f este integrabilă în raport cu g* pe $[a, b]$, deci, conform lui 7, şi pe $[a, c]$ şi $[c, b]$, *atunci*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = \int_a^c f(x)\mathrm{d}g(x) + \int_c^b f(x)\mathrm{d}g(x).$$

9) (Prima proprietate de liniaritate.)

Dacă funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt integrabile în raport cu g pe $[a, b]$ şi dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sînt numere reale, atunci funcţia $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n$ este *integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ şi avem*

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x)\right) \mathrm{d}g(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^b f_i(x)\mathrm{d}g(x).$$

10) (Proprietatea de medie.) *Dacă f este continuă iar g este crescătoare pe $[a, b]$, atunci există un număr ξ, cuprins între a şi b, astfel încît*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = f(\xi)[g(b) - g(a)]$$

(existenţa integralei este asigurată de teorema 3).

Există unele nepotriviri între integrala Stieltjes şi integrala Riemann. Vom da un exemplu în acest sens.

Să considerăm funcţiile f şi g definite în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leqslant x < 0 \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

f este integrabilă în raport cu g pe $[-1, 0]$, deoarece g este constantă pe $[-1, 0]$. f este integrabilă în raport cu g pe $[0, 1]$, deoarece f este identic nulă pe $[0, 1]$. Vom arăta că f nu este integrabilă în raport cu g pe $[-1, 1]$. Să considerăm o diviziune Δ a lui $[-1, +1]$, astfel încît 0 să nu fie un punct de diviziune. Fie $[x_j, x_{j+1}]$ acel interval care conţine originea. După cum ξ_j este ales la stînga sau la dreapta originii, avem

$$\sigma_\Delta(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}) = 1 \text{ sau } \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}) = 0.$$

Cum norma lui Δ poate fi oricît de mică, rezultă că nu există un număr I cu proprietatea din definiţia integrabilităţii Stieltjes, deoarece, dacă un astfel de număr ar exista, el ar trebui să fie egal atît cu 1 cît şi cu 0, ceea ce ar contrazice unicitatea lui I.

Se poate arăta însă că astfel de derogări ale integralei Stieltjes de la proprietăţile integralei Riemann încetează să apară de îndată ce măcar una dintre funcţiile f şi g este continuă.

Există unele probleme privitoare la integrala Stieltjes care nu se pun sau sînt cu totul banale pentru integrala Riemann. Vom trata acum cîteva probleme de acest tip.

T e o r e m a 4. (A doua proprietate de liniaritate a integralei Stieltjes.) Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sînt numere reale iar funcția f este integrabilă, pe $[a, b]$, în raport cu funcțiile $g_1, g_2, \ldots, g_n$, atunci f este integrabilă, pe $[a, b]$, în raport cu funcția $g = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j g_j$ și

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \int_a^b f(x)\mathrm{d}g_j(x).$$

D e m o n s t r a ț i e: Avem:

$$\sigma_\Delta(\xi_j, f, g) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_\Delta(\xi_j, f, g_j).$$

În baza teoremei 1 (necesitatea) membrul al doilea are o limită finită cînd Δ parcurge un șir de diviziuni de normă tinzînd la zero, deci și primul membru are o limită finită; aplicînd din nou teorema 1 (suficiența), deducem că f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ și are loc egalitatea din enunț.

C o r o l a r. O funcție f, continuă pe $[a, b]$, este integrabilă în raport cu o funcție g, cu variație mărginită pe $[a, b]$.

D e m o n s t r a ț i e. Conform teoremei de structură a lui Jordan, există două funcții g_1 și g_2, crescătoare pe $[a, b]$, astfel încît $g = g_1 - g_2$. Conform teoremei 3, f este integrabilă pe $[a, b]$, atît în raport cu g_1, cît și în raport cu g_2. Conform teoremei 4 (pentru $n = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$), f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$.

11) *Dacă f este continuă, iar g este cu variație mărginită pe $[a, b]$, atunci*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)\right| \leqslant M \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g),$$

unde M este astfel încît $|f(x)| \leqslant M$ pentru $a \leqslant x \leqslant b$.

D e m o n s t r a ț i e. Avem:

$$|\sigma_\Delta(\xi_i)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)]\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \cdot |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leqslant M \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g).$$

Teoremele date pînă aici se referă, în general, la diferite condiții care asigură existența integralei Stieltjes, precum și la diferite relații existente între integralele Stieltjes. Vom aborda acum o altă problemă, aceea a calculului unei integrale Stieltjes. Deoarece cunoaştem metode perfecţionate de calcul pentru integrale Riemann, problema revine la aceea a transformării unei integrale Stieltjes într-o integrală Riemann. În acest sens avem

T e o r e m a 5. Dacă f este continuă pe $[a, b]$, iar g este cu derivată continuă pe $[a, b]$, atunci f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ şi

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

D e m o n s t r a ţ i e. Derivata lui g fiind continuă, este mărginită, deci g este cu variaţie mărginită. f fiind continuă, existenţa integralei Stieltjes este asigurată de corolarul teoremei 4. În baza teoremei creşterilor finite, aplicate funcţiei g pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ al unei diviziuni Δ, există un număr ξ_i, astfel încît $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$ şi $g'(\xi_i)\cdot(x_{i+1} - x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i)$ $(i = 0, 1, ..., n - 1)$. Avem deci

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Cînd Δ parcurge un şir de diviziuni de normă tinzînd la zero, suma din stînga tinde, în baza teoremei 1, către integrala Stieltjes a lui f în raport cu g, iar suma din dreapta tinde, în baza unei teoreme corespunzătoare de la integrala Riemann, către integrala Riemann a funcţiei fg' (această integrală există în baza continuităţii lui fg'). Astfel, se obţine egalitatea din enunţ.

O b s e r v a ţ i e. Teorema 5 rămîne în vigoare şi atunci cînd se înlocuiesc, în enunţul ei, cuvintele „derivată continuă“ prin cuvintele „derivată integrabilă“.

E x e m p l u. Fie $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$. Avem.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dg(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)\cdot d(\sin x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Teorema 5 nu dă totuşi răspunsul la problema calculului momentului de inerţie al unei bare, deoarece funcţia g care apare în expresia momentului de inerţie este doar continuă şi crescătoare. Pentru a rezolva această problemă, precum şi pentru necesităţi ulterioare, vom da

T e o r e m a 6. (Proprietatea de reversibilitate a integrabilităţii Stieltjes şi formula de integrare prin părţi.) Dacă f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$, atunci g este integrabilă în raport cu f pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x)$$

Demonstrație. Fie $a = x_0 = \xi_0 \leqslant x_1 \leqslant \xi_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{i-1} \leqslant \xi_{i-1} \leqslant$ $\leqslant x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1} \leqslant \xi_{i+1} \leqslant x_{i+2} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{n-1} = x_n = b$.

Să presupunem că $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n$ și că $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_i < \xi_{i+1} < \ldots < \xi_{n-1}$. Să punem $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b)$ și $\Delta' = (a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_i < \xi_{i+1} < \ldots < \xi_{n-1} = b)$. Avem

$$\sigma_\Delta(\xi_i, f, g) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(x_i) =$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) + \sum_{i=0}^{n-2} f(\xi_i)g(x_{i+1}) - \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)g(x_i) = f(b)g(b) - f(a)g(a) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})] = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sigma_{\Delta'}(x_i, g, f).$$

Deoarece avem $\nu(\Delta) \leqslant 2\nu(\Delta')$, rezultă că, atunci cînd Δ' parcurge un şir de diviziuni de normă tinzînd la zero, Δ parcurge de asemenea un şir de diviziuni de normă tinzînd la zero. Aplicînd teorema 1 („necesitatea" pentru σ_Δ şi „suficienţa" pentru $\sigma_{\Delta'}$), rezultă, în baza egalităţii

$$\sigma_\Delta(\xi_i, f, g) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sigma_{\Delta'}(x_i, g, f)$$

deduse de mai sus, că g este integrabilă în raport cu f pe $[a, b]$ şi că are loc egalitatea din enunţ (numită „formula de integrare prin părţi pentru integrala Stieltjes").

Corolar. Dacă f este cu variaţie mărginită, iar g este continuă pe $[a, b]$, atunci f este integrabilă, în raport cu g, pe $[a, b]$.

Demonstrație. Se ţine seama de teorema 6 şi de corolarul teoremei 4.

Observaţie. Să luăm, în corolarul de mai sus, $f(x) = x^2$ şi g crescătoare şi continuă pe $[a, b]$. Rezultă că momentul de inerţie al unei bare se calculează în modul următor:

$$(S)\int_a^b x^2 \mathrm{d}g(x) = b^2 g(b) - a^2 g(a) - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

deci totul revine la evaluarea integralei riemanniene a funcţiei care defineşte masa unei porţiuni din bară.

Un alt fapt important care rezultă din corolarul obţinut este posibilitatea integrabilităţii Stieltjes în raport cu o funcţie care nu este cu variaţie mărginită. Într-adevăr, există funcţii continue pe $[a, b]$, care nu sînt cu variaţie mărginită pe $[a, b]$ (de exemplu, $\varphi(x) = x \sin\frac{1}{x}$, $\varphi(0) = 0$ pe $[0, 1]$).

Un alt corolar al teoremei 6 este

T e o r e m a 7. (Teorema de integrare prin părţi pentru integrala Riemann.) Fie f şi g continue pe $[a, b]$. Să punem

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \qquad G(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

Avem

$$\int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b G(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

D e m o n s t r a ţ i e. Din faptul că f şi g sînt continue pe $[a, b]$ rezultă că F şi G sînt derivabile şi $F' = f$, $G' = g$. Putem deci aplica teorema 5; F este integrabilă în raport cu G, G este integrabilă în raport cu F şi

$$(S)\int_a^b F(x)\mathrm{d}G(x) = (R)\int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

$$(S)\int_a^b G(x)\mathrm{d}F(x) = (R)\int_a^b G(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

Aplicînd acum celor două integrale Stieltjes de mai sus formula de integrare prin părţi stabilită prin teorema 6 şi ţinînd seama de expresiile acestor integrale, ca integrale Riemann, rezultă formula din enunţ.

O b s e r v a ţ i e. Teorema 7 rămîne în vigoare şi atunci cînd se înlocuieşte, în enunţul ei, cuvîntul „continue" prin cuvintele „integrabile Riemann".

Ca o ultimă aplicaţie a teoremei 6 vom da

T e o r e m a 8. (A doua teoremă de medie pentru integrala Riemann.) Fie f continuă şi g crescătoare şi continuă pe $[a, b]$. În aceste condiţii, există un număr ξ, $a < \xi < b$, astfel încît

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

D e m o n s t r a ţ i e. Din continuitatea lui f şi g rezultă existenţa ingralei Riemann din primul membru. Notînd cu F o primitivă a lui f, avem, în baza teoremei 5,

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = (S)\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x).$$

Folosind acum formula de integrare prin părţi pentru integrala Stieltjes, primim

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)F(b) - g(a)F(a) - (S)\int_a^b F(x)\mathrm{d}g(x).$$

În baza faptului că F este continuă şi g este crescătoare şi folosind proprietatea de medie a integralei Stieltjes, există un ξ, astfel încît $a < \xi < b$ şi

$$(S)\int_a^b F(x)\mathrm{d}g(x) = F(\xi)[g(b) - g(a)].$$

Avem deci:

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)F(b) - g(a)F(a) - F(\xi)[g(b) - g(a)]$$

sau, printr-o grupare convenabilă a termenilor,

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)[F(\xi) - F(a)] + g(b)[F(b) - F(\xi)].$$

Însă

$$F(x) = k + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

unde k este un număr real, deci

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Observaţii. Folosind observaţiile care urmează teoremelor 5 şi 7, se poate arăta că teorema 8 rămîne în vigoare şi atunci cînd, în enunţul ei, cuvintele „f continuă" se înlocuiesc prin cuvintele „f o derivată integrabilă Riemann".

Nici ipoteza că g este crescătoare nu este esenţială, putînd fi înlocuită cu ipoteza de monotonie. De asemenea, se poate renunţa la continuitatea lui g.

Ca şi prima formulă de medie, a doua formulă de medie pentru integrala Riemann exprimă integrala produsului a două funcţii prin integrala unuia din factori. Deosebirea stă în faptul că, în timp ce în prima formulă de medie g este pozitivă, aici ea este crescătoare. Aceasta permite utilizarea formulei a doua de medie în unele probleme dificile privitoare la funcţii de semn variabil (integrala pe interval necompact, serii trigonometrice etc.), probleme în care prima formulă de medie se dovedeşte un instrument nu îndeajuns de fin.

a. Integrabilitatea Stieltjes a funcţiilor continue, în raport cu funcţiile în scară

În aplicaţii, ca şi în numeroase raţionamente ale analizei matematice, un rol important îl joacă aşa-numitele funcţii în scară, definite în felul următor: *g este o funcţie în scară pe intervalul* $[a, b]$, *dacă există o diviziune*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

a acestui interval, astfel încît să avem

$$g(x) = c_i,$$

pentru

$$x_{i-1} < x < x_i, \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

unde c_i sînt constante.

Valorile unei funcţii în scară în punctele de discontinuitate pot fi date fie arbitrar, fie potrivit necesităţilor raţionamentului.

I. *O funcţie g în scară este o funcţie cu variaţie mărginită.* Într-adevăr, se verifică imediat că avem, punînd $f(x_i) = d_i$,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) = \sum_{i=1}^{n} (|c_i - d_{i-1}| + |d_i - c_i|).$$

II. *Pentru orice funcţie f continuă şi pentru orice funcţie g în scară, avem*

$$\int_a^b f(x) \cdot dg(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_{i-1}) \cdot (c_i - c_{i-1}),$$

unde $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$ *sînt punctele de discontinuitate ale lui g iar c_i este valoarea lui g în intervalul (x_{i-1}, x_i), cu $g(a) = c_0$, $g(b) = c_{n+1}$.*

Se poate verifica uşor că orice funcţie în scară se poate scrie ca diferenţă a două funcţii în scară, monotone de acelaşi sens.

Vom putea deci presupune, în enunţul de mai sus, că g este monoton crescătoare în scară în intervalul $[a, b]$. Atunci

$$c_0 < c_1 < c_2 < ... < c_n.$$

Să considerăm o diviziune oarecare Δ, prin punctele y_k, diferite de punctele x_i, a intervalului $[a, b]$. Dacă două puncte consecutive y_{k-1}, y_k se află într-un interval (x_{i-1}, x_i), atunci, potrivit definiţiei funcţiei g, contribuţia intervalului (y_{k-1}, y_k) la suma S_Δ corespunzătoare este nulă. Dacă, pe de altă parte, într-un interval (x_{i-1}, x_i) nu se află nici un punct al diviziunii Δ, prin adăugarea unui astfel de punct suma S_Δ nu se măreşte. Putem deci să ne mărginim la sumele S_Δ, pentru care distribuţia punctelor de diviziune y_k este de tipul următor:

$$y_0 = x_0 = a < y_1 < y_2 < x_1 < ... < x_{n-1} < y_n < x_n = b = y_{n+1}.$$

Atunci

$$S_\Delta = \sum_{k=1}^{n+1} M_k(c_k - c_{k-1}).$$

Funcţia f fiind continuă în $[a, b]$, putem alege punctele $y_k (k = 1, 2, ..., n)$, astfel încît să avem[1]

$$M_k - f(x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{c_{n+1} - c_0}.$$

[1] Pentru a realiza acest lucru, este de ajuns să apropiem suficient punctele y_{k-1}, y_k de punctul x_{k-1}.

Atunci

$$S_\Delta - \Sigma f(x_{k-1}) \cdot (c_k - c_{k-1}) < \varepsilon.$$

Cum, pe de altă parte, avem, pentru orice sumă S_Δ din clasa aleasă,

$$S_\Delta > \Sigma f(x_{k-1}) \cdot (c_k - c_{k-1}),$$

rezultă că suma

$$\Sigma f(x_{k-1}) \cdot (c_k - c_{k-1})$$

este marginea inferioară a sumelor S_Δ din această clasă, deci cu atît mai mult a tuturor sumelor S_Δ neglijate.

Să presupunem acum că adăugăm punctelor de diviziune şi punctele x_i. Intervalul $[y_{k-1}, y_k]$ va fi înlocuit prin două intervale $[y_{k-1}, x_{k-1}]$ şi $[x_{k-1}, y_{-k}]$. Dacă însemnăm respectiv cu M'_k şi M''_k marginile superioare ale lui f în aceste intervale, avem, evident,

$$M'_k \geqq f(x_{k-1}), \quad M''_k \geqq f(x_{k-1}),$$

deci inegalităţile precedente se păstrează.

În definitiv, suma

$$\sum_{k=2}^{n} f(x_{k-1}) \cdot (c_k - c_{k-1})$$

este marginea inferioară a mulţimii tuturor sumelor S_Δ, deci

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}g(x) = \sum_{k=2}^{n} f(x_{k-1}) \cdot (c_k - c_{k-1}).$$

b. Trecerea la limită sub integrala Stieltjes

Problema trecerii la limită se pune, pentru integrala Stieltjes, în două moduri, dînd naştere la două probleme:

1) *Ştiind că şirul de funcţii continue $\{f_n\}$ converge uniform în $[a, b]$, ce se poate spune despre şirul*

$$\int_a^b f_n(x) \cdot \mathrm{d}g(x)?$$

2) *Ştiind că şirul de funcţii cu variaţie mărginită $\{g_n\}$ este convergent în intervalul $[a, b]$, ce se poate spune despre şirul*

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}g_n(x)?$$

Răspunsul la prima problemă este imediat:

Dacă şirul de funcţii (f_n), continue în intervalul $[a, b]$, converge uniform în acest interval către f şi dacă g este cu variaţie mărginită în acelaşi interval, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) dg(x) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

D e m o n s t r a ţ i e. Într-adevăr, numărul $\varepsilon > 0$ fiind dat, vom alege numărul natural $N = N(\varepsilon)$, astfel încît, în intervalul $[a, b]$, să avem

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)}$$

îndată ce $n > N$. Atunci, aplicînd formula mediei, obţinem imediat

$$\left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)] dg(x) \right| < \varepsilon,$$

pentru $n > N$.

Răspunsul la problema a doua este mai dificil. El are nevoie de lămurirea prealabilă a unor probleme privind şirurile de funcţii cu variaţie mărginită, probleme cărora le vom consacra rîndurile ce urmează.

Dacă un şir de funcţii (g_n), cu variaţie mărginită, converge în intervalul $[a, b]$, funcţia limită g nu este neapărat cu variaţie mărginită în acest interval, după cum arată exemplul următor.

Să considerăm funcţia

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Această funcţie nu este cu variaţie mărginită în intervalul $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$.

Să punem:

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{n\pi}, \\ x \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } \frac{1}{n\pi} \leqq x \leqq \frac{1}{\pi}. \end{cases}$$

Să observăm că

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x).$$

Apoi, fiecare din funcţiile şirului (g_n) este cu variaţie mărginită pe $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$. Se vede, dealtfel, printr-un calcul uşor, că avem

$$\overset{\frac{1}{\pi}}{\underset{0}{V}}(g_n) < \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

Aşadar, şirul de funcţii (g_n), cu variaţie mărginită în $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$, converge în acest interval către o funcţie g care nu este cu variaţie mărginită în acest interval.

Se pune atunci întrebarea: ce condiţie suplimentară trebuie adăugată şirului (g_n) pentru ca funcţia limită g să fie cu variaţie mărginită în intervalul considerat?

Să considerăm o familie $\{g\}$, numărabilă sau nu, de funcţii cu variaţie mărginită în intervalul $[a, b]$. Vom spune că aceste funcţii sînt cu variaţie egal mărginită în intervalul $[a, b]$ dacă mulţimea

$$\left\{ \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) \right\}$$

este mărginită.

Teoremă. Un şir de funcţii (g_n) cu variaţie egal mărginită în intervalul $[a, b]$, convergent în acest interval, are ca limită o funcţie g cu variaţie mărginită în $[a, b]$.

Demonstraţie. Într-adevăr, să însemnăm cu W marginea superioară a mulţimii

$$\left\{ \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) \right\}$$

şi să presupunem că ar exista o diviziune

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$$

a intervalului $[a, b]$ pentru care, punînd

$$v = \sum_{k=1}^{p} |g(x_k) - g(x_{k-1})|,$$

am avea $v > W$. Vom arăta că această ipoteză ne duce la o contradicţie. Într-adevăr, să luăm un număr pozitiv ε, supus la singura condiţie

$$\varepsilon < v - W.$$

Putem determina un număr natural $N(\varepsilon) = N$, astfel încît să avem

$$|g(x_k) - g_n(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2p}$$

pentru $k = 1, 2, 3, \dots, p$, îndată ce $n > N$.

Atunci

$$||g(x_k) - g(x_{k-1})| - |g_n(x_k) - g_n(x_{k-1})|| \leq$$

$$\leq |g(x_k) - g_n(x_k)| + |g(x_{k-1}) - g_n(x_{k-1})| \leq \frac{\varepsilon}{2p} + \frac{\varepsilon}{2p} = \frac{\varepsilon}{p},$$

de unde, punînd

$$v_n = \sum_{k=1}^{p} |g_n(x_k) - g_n(x_{k-1})|,$$

deducem

$$|v - v_n| < \varepsilon$$

sau

$$v-\varepsilon < v_n < v+\varepsilon$$

sau încă, ţinînd seama de condiţia impusă lui ε,

$$W < v_n,$$

ceea ce este absurd. Aşadar, funcţia g este cu variaţie mărginită; în plus, găsim că

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) \leqslant W.$$

Putem acum da un răspuns la problema a doua, enunţată mai sus:

T e o r e m a l u i H e l l y ş i B r a y. **Dacă şirul de funcţii g_n, cu variaţie egal mărginită, converge în intervalul $[a, b]$ către g şi dacă funcţia f este continuă în acest interval, atunci**

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}g_n(x) = \int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}g(x).$$

D e m o n s t r a ţ i e. Potrivit teoremei precedente, funcţia g este cu variaţie mărginită. Fie W numărul definit mai sus. Să împărţim intervalul $[a, b]$ în intervale parţiale, prin punctele

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{p-1} < x_p = b,$$

astfel încît oscilaţia funcţiei f să fie mai mică decît $\frac{\varepsilon}{3W}$, unde $\varepsilon > 0$ este dat.

Atunci, punînd

$$I_n = \int_a^b f(x)\mathrm{d}g_n(x) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x),$$

putem scrie identitatea

$$I_n = \sum_{k=1}^{p}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f((x) - f(x_{k-1}))\,\mathrm{d}g_n(x) - \sum_{k=1}^{p}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x) - f(x_{k-1})]\mathrm{d}g(x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{p} f(x_{k-1})\left[\int_{x_{k-1}}^{x_k}\mathrm{d}[g_n(x) - g(x)]\right],$$

de unde

$$|I_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3W}\cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g_n) + \frac{\varepsilon}{3W}\cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) +$$

$$+\|f\|\cdot\sum_{k=1}^{p}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}\mathrm{d}[g_n(x) - g(x)]\right|, \text{ unde } \|f\| = \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|.$$

Dar

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}\mathrm{d}[g_n(x) - g(x)] = [g_n(x_k) - g(x_k)] - [g_n(x_{k-1}) - g(x_{k-1})].$$

Potrivit ipotezei, putem găsi un număr natural $N(\varepsilon) = N$, astfel încît să avem,

$$|g_n(x_i) - g(x_i)| < \frac{\varepsilon}{6p\cdot\|f\|} \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

îndată ce $n > N$; atunci,

$$|I_n| < \varepsilon$$

şi teorema este astfel demonstrată.

c. Proprietăţi ale integralei Stieltjes nedefinite

Dacă f este continuă şi g cu variaţie mărginită în $[a, b]$, atunci

$$F(x) = \int_a^x f(t)\cdot \mathrm{d}g(t)$$

este cu variaţie mărginită în $[a, b]$.

D e m o n s t r a ţ i e. Pentru orice pereche de puncte $x_{k-1} < x_k$, avem

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\cdot \mathrm{d}g(t),$$

de unde, aplicînd formula mediei,

$$|F(x_k) - F(x_{k-1})| \leqslant \left(\max_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} |f(x)| \right) \overset{x_k}{\underset{x_{k-1}}{V}} (g),$$

deci

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(F) \leqslant \|f\|\cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g),$$

unde $\|f\| = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$.

Să calculăm variaţia totală a funcţiei F de mai sus:
Să punem

$$\overset{a}{\underset{x}{V}}(g) = G(x).$$

Vom arăta că

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(F) = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}G(x).$$

Să considerăm o diviziune

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Variaţia lui F relativă la această diviziune este

$$V = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) \mathrm{d}g(t) \right|.$$

Fie $\varepsilon > 0$ dat. Vom alege diviziunea precedentă astfel încît, pe de o parte, să avem

$$0 < G(b) - \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| < \varepsilon,$$

iar, pe de altă parte, oscilaţia lui f să fie mai mică decît ε, în orice interval al diviziunii.

Cum putem scrie

$$\int_a^b |f(x)| dG(x) = \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)| \int_{x_{k-1}}^{x_k} dG(x), \quad (x_{k-1} \leqslant \xi_{k-1} \leqslant x_k),$$

vom avea

$$\int_a^b |f(x)| dG(x) - V = \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)| \left\{ \int_{x_{k-1}}^{x_k} dG(x) - \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} dg(x) \right| \right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k) dg(x) \right| - \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dg(x) \right| \right\}.$$

Prima din sumele din dreapta poate fi majorată de

$$\| f \| \cdot \left\{ G(b) - \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \right\} < \| f \| \cdot \varepsilon.$$

A doua sumă poate fi majorată de

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \int_{x_{k-1}}^{x} |f(\xi_k) - f(x)| dg(x) \right| < G(b) \varepsilon.$$

Deci

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(F) = \int_a^b |f(x)| dG(x)$$

deoarece, după cum se poate vedea uşor, are loc inegalitatea

$$V_\Delta(F) \leqslant \int_a^b |f(x)| dG(x).$$

oricare ar fi diviziunea Δ a lui $[a, b]$.

d. Dependenţa faţă de funcţia integrată. Teorema lui F. Riesz

În paginile consacrate pînă acum integralei definite am studiat modul în care aceasta depinde de limitele de integrare, iar în capitolul 5 vom studia dependenţa ei de eventualii parametri conţinuţi în funcţia care se integrează.

Este însă clar că integrala definită depinde, în afară de aceste variabile, şi de funcţia însăşi care se integrează. Presupunînd limitele de integrare fixate, schimbarea funcţiei atrage după sine schimbarea valorii integralei. Dar această legătură apare ca fiind de o altă natură decît legătura dintre valoarea unei variabile, sau unui grup de variabile numerice, şi valoarea altei variabile numerice. Aici avem de-a face cu o variabilă numerică (integrala definită), a cărei valoare depinde de o funcţie, definită într-un interval dat $[a, b]$, în sensul că această valoare se schimbă numai dacă se schimbă funcţia. Fie integrala.

$$\int_a^b F(t)\mathrm{d}t.$$

Schimbarea liniară de variabilă $t = (b - a)x + a$ schimbă integrala dată în

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

unde

$$f(x) = (b - a) \cdot F((b - a)x + a).$$

Aşadar, vom putea presupune, în tot cursul acestui paragraf, că funcţiile care se integrează sînt definite, toate, în intervalul $[0, 1]$.

Legătura dintre integrală şi funcţia f o vom scrie astfel:

$$J[f] = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Dintre proprietăţile fundamentale ale integralei definite, numai trei fac să intervină şi funcţia care se integrează:

1° Proprietatea de omogenitate:

$$J[cf] = cJ[f],$$

oricare ar fi constanta c.

2° Proprietatea de distributivitate:

$$J[f + g] = J[f] + J[g].$$

3° Teorema mediei:

$$|J[f]| \leq \max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)|.$$

Aceste trei proprietăţi apar şi la integrala Stieltjes. Dacă punem, pentru o funcţie cu variaţie mărginită α,

$$S[f] = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}\alpha(x),$$

atunci avem

$$S[cf] = cS[f],$$

$$S[f + g] = S[f] + S[g],$$

precum şi

$$|S[f]| \leq M \cdot \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|,$$

unde M este o constantă care depinde de funcţia α. Pentru simplificare, vom pune, ca şi altă dată,

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)| = \|f\|.$$

Numărul $\|f\|$ *astfel definit se numeşte norma funcţiei f în intervalul* [0,1].

Ultima relaţie pune în evidenţă o anumită specie de continuitate a integralei Stieltjes în raport cu funcţia f; anume, pentru orice şir de funcţii

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots,$$

pentru care

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0,$$

şirul numeric corespunzător

$$S[f_1], S[f_2], \ldots, S[f_n], \ldots$$

tinde către zero. Pe scurt, vom scrie acest lucru astfel:

$$\lim_{\|f\|\to 0} S[f] = 0.$$

Analogia cu noţiunea de continuitate a funcţiilor de variabile numerice apare şi mai clar în felul următor. Dacă, în relaţia precedentă, schimbăm pe f în $f' - f$, unde f' este o funcţie continuă definită în intervalul [0, 1], şi dacă ţinem seama că

$$S[f' - f] = S[f'] - S[f],$$

atunci această relaţie se poate scrie sub forma

$$\lim_{\|f'-f\|\to 0} S[f'] = S[f].$$

Consideraţiile de mai sus, care nu constituie decît o scriere nouă pentru rezultate cunoscute, au fost, totuşi punctul de plecare al unei direcţii noi de cercetare, care s-a dovedit atît de fructuoasă încît a dat naştere unei discipline noi: analiza funcţională. Unul dintre primele rezultate ale acestei teorii se datoreşte lui F. Riesz. Pentru formularea acestuia, vom da, în prealabil, unele definiţii.

Să notăm cu (C) mulţimea funcţiilor continue în intervalul [0, 1]. *Dacă fiecărui element f al acestei mulţimi îi asociem un număr real U, vom spune că U este o funcţională de f şi vom scrie această legătură astfel:* $U[f]$.

Vom spune că o funcţională U este aditivă dacă, pentru orice pereche de funcţii continue (f, g), avem

$$U[f + g] = U[f] + U[g].$$

Vom spune că U este omogenă dacă, pentru orice constantă c, avem

$$U[cf] = cU[f].$$

O funcţională aditivă şi omogenă va fi numită, pe scurt, o funcţională lineară.

În sfîrşit, *vom spune că U este continuă pentru funcţia f dacă oricărui număr* $\varepsilon > 0$, *îi corespunde un număr* $\eta > 0$, *astfel încît, pentru orice funcţie continuă f', satisfăcînd inegalitatea*

$$\|f' - f\| < \eta,$$

avem

$$|U[f'] - U[f]| < \varepsilon.$$

Vom exprima, pe scurt, această proprietate de continuitate astfel

$$\lim_{\|f'-f\|\to 0} U[f'] = U[f].$$

T e o r e m ă. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o funcţională U, definită pe mulţimea C a funcţiilor continue în intervalul $[0, 1]$, să fie continuă pentru elementul f al acestei mulţimi, este ca, pentru orice şir (f_n) de funcţii continue, pentru care

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0,$$

să avem

$$\lim_{n\to\infty} U[f_n] = U[f].$$

D e m o n s t r a ţ i e. Vom observa, în primul rînd, că din inegalitatea evidentă

$$|f(x) - f_n(x)| \leqq \|f - f_n\|,$$

valabilă oricare ar fi punctul x în intervalul $[0, 1]$, deducem că şirul (f_n) converge uniform către funcţia f.

Să trecem acum la demonstrarea teoremei.

Condiţia este necesară. Să ne dăm într-adevăr, numărul $\varepsilon > 0$. Prin ipoteză există un număr $\eta > 0$, astfel încît, pentru orice funcţie continuă f, verificînd condiţia $\|f' - f\| < \eta$, să avem:

$$|U[f'] - U[f]| < \varepsilon.$$

Fie acum un şir (f_n), pentru care

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Aceasta înseamnă că, pentru $n > N(\eta)$, avem

$$\|f - f_n\| < \eta,$$

de unde

$$|U[f_n] - U[f]| < \varepsilon,$$

ceea ce echivalează cu

$$\lim_{n\to\infty} U[f_n] = U[f].$$

Condiţia este suficientă. Să presupunem că, pentru orice şir

$$\{f_n\}$$

îndeplinind condiţia

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0,$$

avem

$$\lim_{n\to\infty} U[f_n] = U[f].$$

Vom raţiona prin absurd: dacă U nu este continuă pentru funcţia f, aceasta înseamnă că există un $\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice $\eta > 0$ există o funcţie f', îndeplinind condiţia $\|f' - f\| < \eta$, dar pentru care

$$|U[f'] - U[f]| \geqq \varepsilon.$$

Să considerăm atunci un şir (η_n), descrescător şi tinzînd către zero. Fiecărui η_n, îi va corespunde o funcţie f_n, astfel încît

$$\|f_n - f\| < \eta_n$$

şi totuşi

$$|U[f_n] - U[f]| \geqq \varepsilon.$$

Prima relaţie ne arată că

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0,$$

iar a doua, că $U[f_n]$ nu poate tinde către $U[f]$, ceea ce este absurd.

Teorema. I. Orice funcţională aditivă şi continuă, definită pe mulţimea (C), este omogenă.

Demonstraţie. Într-adevăr, din proprietatea de aditivitate rezultă imediat că avem:

$$U[nf] = nU[f],$$

pentru orice număr natural n. Apoi, din

$$0 = U[f - f] = U[f] + U[-f],$$

deducem

$$U[-f] = -U[f].$$

Deci, formula precedentă subsistă şi pentru n întreg negativ. Scriind această formulă pentru funcţia $f = n \cdot g$, găsim:

$$U\left[\frac{1}{n} \cdot f\right] = \frac{1}{n} U[f],$$

de unde, în definitiv, relaţia

$$U[rf] = rU[f],$$

pentru orice număr raţional r.

Fie acum c un număr real oarecare. Există un şir (r_n) de numere raţionale tinzînd către c, deci (numărul $\varepsilon > 0$ fiind dat) există un număr natural N, astfel încît, pentru $n > N$, să avem

$$|r_n - c| < \frac{\varepsilon}{\|f\|},$$

de unde

$$\|r_n f - cf\| < \varepsilon,$$

adică

$$\lim_{n\to\infty} \|r_n f - cf\| = 0.$$

de aici rezultă

$$\lim_{n\to\infty} U[r_n f] = U[cf].$$

Dar

$$\lim_{n\to\infty} U[r_n f] = \lim_{n\to\infty} r_n \cdot U[f] = cU[f],$$

prin urmare,

$$U[cf] = cU[f].$$

Teorema II. **Dacă o funcțională aditivă este continuă pentru o funcție continuă f_0, ea este continuă pentru orice altă funcție f continuă (deci este o funcțională lineară și continuă).**

Demonstrație. Într-adevăr, să considerăm un şir (f_n) de funcții continue pentru care

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0.$$

putem scrie

$$f_n - f = [f_n - f + f_0] - f_0,$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} U[f_n - f + f_0] = U[f_0].$$

Dar

$$U[f_n - f + f_0] = U[f_n] - U[f] + U[f_0].$$

deci, în definitiv,

$$\lim_{n\to\infty} U[f_n] = U[f].$$

Teorema III. **Pentru ca o funcțională lineară $U[f]$, definită pe mulțimea (C), să fie continuă, trebuie și este de ajuns să existe un număr pozitiv M, astfel încît oricare ar fi funcția f, să avem**

$$|U[f]| < M||f||$$

Demonstrație. Condiția este necesară. Într-adevăr, dacă inegalitatea precedentă nu poate avea loc pentru nici un număr M, atunci la orice şir tinzînd la infinit (M_n) corespunde un şir de funcții (f_n), astfel încît să avem

$$|U[f_n]| \geq M_n||f_n||.$$

Să punem

$$\varphi_n = \frac{1}{M_n||f_n||} \cdot f_n.$$

Avem

$$||\varphi_n|| = \frac{1}{M_n}.$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n|| = 0,$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} U[\varphi_n] = 0,$$

ceea ce este absurd, deoarece

$$U[\varphi_n] = \frac{1}{M_n \cdot ||\varphi_n||} \cdot U[f_n] > 1.$$

Condiția este suficientă. Într-adevăr, scriind inegalitatea dată pentru diferența $f_n - f$

$$|U[f_n - f]| < M \cdot ||f_n - f||,$$

deducem imediat

$$\lim_{n\to\infty} U[f_n] = U[f],$$

deci U este continuă.

Observație. Marginea inferioară a numerelor M se numește *norma funcționalei* U și se notează prin $\| U \|$.

Rezultatul fundamental pe care vrem să-l stabilim este următorul:

Teorema lui F. Riesz. Orice funcțională lineară și continuă $U(f)$ definită pe mulțimea C, este de forma

$$U[f] = \int_0^1 f(x) dg(x),$$

unde g este o funcție cu variație mărginită, independentă de f.

Demonstrație. Am văzut în demonstrația teoremei de aproximare a lui Weierstrass că

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

Nici unul din termenii sumei din primul membru al acestei identități nu este negativ, dacă $0 < x < 1$. În asemenea condiții, deducem din această identitate

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \cdot C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \leqq 1,$$

unde $\varepsilon_k = \pm 1$. Deci, aplicînd teorema III de mai sus, obținem

$$\left| U \left[\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right] \right| < \| U \|,$$

sau

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k U[C_n^k x^k (1-x)^{n-k}] \right| < \| U \|.$$

Vom determina, acum, numerele ε_k astfel încît toți termenii sumei din primul membru să fie pozitivi. Inegalitatea precedentă se scrie atunci

$$\sum_{k=0}^{n} \Big| | U | [C_n^k x^k (1-x)^{n-k}] | \leqq \| U \|.$$

Să însemnăm cu g funcția nulă în origine și egală cu

$$\sum_{k=0}^{i-1} U[C_n^k x^k (1-x)^{n-k}]$$

pentru

$$\frac{i-1}{n} \leqq x \leqq \frac{i}{n}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Din definiția acestei funcții, ca și din inegalitatea precedentă, deducem

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(g_i) \leqq \| U \|,$$

oricare ar fi n. Cu alte cuvinte, funcțiile șirului $\{g_n\}$ sînt cu variație egal mărginită în intervalul $[0, 1]$. Potrivit lemei lui Cesaro, din șirul $\{g_n\}$ putem extrage un șir convergent în intervalul $\left[0, \frac{1}{n}\right]$. Din acest șir vom extrage un altul, convergent în intervalul $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ ş.a.m.d. După n extrageri vom obţine un şir, pe care-l vom nota tot $\{g_n\}$, şi care converge în tot intervalul $[0, 1]$.

Fie g funcţia limită. Această funcţie este, evident, cu variaţie mărginită şi avem, ca urmare a inegalităţii precedente,

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}[g] \leq \| U \|.$$

Pe de altă parte, din definiţia lui g_n deducem

$$g_n\left(\frac{k+1}{n}\right) - g_n\left(\frac{k}{n}\right) = U[C_n^k x^k (1-x)^{n-k}],$$

deci

$$\int_0^1 f(x)\, dg_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot U[C_n^k x^k (1-x)^{n-k}],$$

adică

$$\int_0^1 f(x)\, dg_n(x) = U[B_n(x)],$$

de unde, în baza teoremei lui Weierstrass şi a criteriului de continuitate a unei funcţionale,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) dg_n(x) = U[f].$$

Dar, în baza teoremei lui Helly şi Bray, avem

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) dg_n(x) = \int_0^1 f(x)\, dg(x),$$

de unde

$$U[f] = \int_0^1 f(x)\, dg(x).$$

Teorema lui F. Riesz este astfel demonstrată.

Observaţie. Din formula precedentă deducem

$$| U[f] | \leq \| f \| \cdot \overset{1}{\underset{0}{V}}[g].$$

Deoarece

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}[g] \leq \| U \|,$$

deducem

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}[g] = \| U \|.$$

Capitolul IV

INTEGRALE PE INTERVAL NECOMPACT

Să considerăm, pe intervalul $[a, \infty)$, funcţia f definită de

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

După cum se ştie, aria porţiunii din plan cuprinse între dreptele $x = a$, $x = u$, $y = 0$ şi graficul funcţiei f este dată de

$$\int_a^u \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctg}\, u - \text{Arctg}\, a.$$

Deoarece noţiunea de integrală a fost definită pe intervale compacte, nu putem integra funcţia f pe intervalul $[a, \infty)$.

Putem, însă, să dăm un sens natural noţiunii de arie pentru întreaga porţiune a planului cuprinsă între dreptele $x = a$, $y = 0$ şi graficul funcţiei f; anume, este natural să considerăm că această porţiune are aria egală cu valoarea limitei

$$\lim_{u\to+\infty} \int_a^u \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{u\to\infty} \text{Arctg}\, u - \text{Arctg}\, a = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\, a.$$

Dacă însă considerăm, pe intervalul $[1, \infty)$, funcţia

$$f(t) = \frac{1}{t}$$

atunci nu mai putem da un sens natural noţiunii de arie a porţiunii din plan cuprinse între dreptele $x = 1$, $y = 0$ şi graficul funcţiei f, deoarece

$$\lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{dt}{t} = \lim_{u\to\infty} \ln u = \infty.$$

Dacă $0 < u < 1$, atunci aria porţiunii din plan cuprinsă între graficul funcţiei f şi dreptele $x = 0$, $x = u$, $y = 0$ este dată de

$$\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{Arc sin } u.$$

Funcţia f nu este definită în $t = 1$, deci nu putem pune problema integrabilităţii lui f pe $[0, 1]$. Dar chiar dacă am prelungi această funcţie, cu ajutorul funcţiei auxiliare.

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}, & 0 \leqslant t < 1 \\ \alpha, & t = 1 \end{cases} \tag{1}$$

unde α este numărul real, tot nu am obţine o funcţie integrabilă pe $[0, 1]$, deoarece funcţia φ, ca şi funcţia f, este nemărginită şi, după cum se ştie, integrabilitatea (în sensul lui Riemann) implică mărginirea funcţiei.

Putem, totuşi da un sens natural noţiunii de arie pentru întreaga porţiune a planului cuprinsă între graficul funcţiei f şi dreptele $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$; anume, este natural să considerăm că această porţiune are aria egală cu

$$\lim_{\substack{u \to 1 \\ u < 1}} \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{u \to 1} \text{Arc sin } u = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Dacă însă considerăm, pe intervalul $(0, 1]$ funcţia

$$f(t) = \frac{1}{t^2} \sin 2t,$$

atunci nu mai putem da un sens natural noţiunii de arie a porţiunii din plan cuprinse între graficul funcţiei f şi dreptele $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, deoarece limita

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \int_u^1 \frac{\sin 2t}{t^2}\, dt$$

nu există; într-adevăr,

$$\int_u^1 \frac{\sin 2t}{t^2}\, dt = -\sin^2 1 + \sin^2 \frac{1}{u}.$$

Există şi alte probleme care, ca şi problema ariei, conduc în mod natural la studiul existenţei şi valorii unei limite de forma

$$\lim_{\substack{u \to b \\ u < b}} \int_a^u f(t)\, dt$$

Există şi alte probleme care, ca şi problema ariei, conduc în mod natural la studiul existenţei şi valorii unei limite de forma

$$\lim_{u\to\infty}\int_a^u f(t)\mathrm{d}t.$$

Există, pe de altă parte, probleme care conduc la studiul unei limite de forma

$$\lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(t)\mathrm{d}t$$

sau a unei limite de forma

$$\lim_{\substack{u'\to-\infty\\ u''\to\infty}}\int_{u'}^{u''} f(t)\mathrm{d}t.$$

Toate acestea sugerează următoarea extensiune a noţiunii de integrală:

Fie f o funcţie reală definită pe intervalul $[a, \infty)$. Să presupunem că, pentru orice număr u, $a < u < \infty$, f este integrabilă pe $[a, u]$. Dacă limita

$$\lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$$

există şi este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe $[a, \infty)$. Valoarea limitei se notează

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

şi se numeşte integrala funcţiei f pe $[a, \infty)$.

Celelalte două tipuri de limită de mai sus conduc la noţiunea de integrabilitate pe intervale de forma $(-\infty, a]$ sau $(-\infty, \infty)$, iar integralele corespunzătoare se notează

$$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x.$$

Să considerăm acum, pe intervalul $[0, 1)$, funcţia f definită de

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

unde f este definită şi nemărginită pe $[a, b)$. Există, de asemenea, probleme care conduc la studiul unor limite de forma

$$\lim_{\substack{u\to a\\ u<a}}\int_u^b f(t)\mathrm{d}t, \qquad \lim_{\substack{u'\to a,\ u''\to b\\ u'>a,\ u''<b}}\int_{u'}^{u''} f(t)\mathrm{d}t,$$

unde f este, în primul caz, definită şi nemărginită pe intervalul $(a, b]$, iar, în al doilea caz, definită pe (a, b) şi nemărginită pe fiecare dintre intervalele $(a, c]$ şi $[c, b)$ $(a < c < b)$.

Toate acestea sugerează următoarea extensiune a noţiunii de integrală:

Fie f o funcţie reală definită pe intervalul $[a, b)$. Să presupunem că, pentru orice număr u, $a < u < b$, f este integrabilă (deci mărginită) pe $[a, u]$.

Dacă limita

$$\lim_{\substack{u \to b \\ u < b}} \int_a^u f(x)\mathrm{d}x$$

există şi este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe $[a, b)$. Valoarea limitei se notează

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{sau} \quad \int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$$

şi se numeşte integrala funcţiei f pe $[a, b)$.

Este uşor de văzut că o funcţie f integrabilă pe $[a, b]$ este integrabilă şi pe $[a, b)$ şi cele două integrale coincid. Există însă funcţii integrabile pe $[a, b)$, dar neintegrabile pe $[a, b]$; pentru ca aceasta să se întîmple cu o funcţie definită pe $[a, b]$ este necesar ca f să nu fie mărginită pe $[u, b]$, oricare ar fi u cuprins între a şi b. Fie, de exemplu, funcţia (1) considerată mai sus. φ este integrabilă pe $[0, u]$, oricare ar fi u cuprins între 0 şi 1. După definiţia dată, φ este integrabilă pe $[0, 1)$ şi

$$\int_0^{1-0} \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2},$$

după cum rezultă din (2). Însă φ nu este integrabilă pe $[0, 1]$ deoarece φ este nemărginită pe $[0, 1]$.

Celelalte două tipuri de limită de mai sus conduc la noţiunea de integrabilitate pe intervale de forma $(a, b]$, (a, b); integralele corespunzătoare se vor nota

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{sau} \quad \int_{a+0}^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{respectiv} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{sau} \quad \int_{a+0}^{b-0} f(x)\mathrm{d}x.$$

În cazul în care f este definită şi integrabilă pe $[a, b]$, ea este integrabilă şi pe $(a, b]$ şi (a, b) şi integralele corespunzătoare au, toate, aceeaşi valoare. Pentru ca f, definită pe $[a, b]$, să fie integrabilă pe $(a, b]$, dar neintegrabilă pe $[a, b]$ este necesar ca f să fie nemărginită pe $[a, u]$, oricare ar fi u cuprins între a şi b. Pentru ca f, definită pe $[a, b]$, să fie integrabilă pe $(a, b]$, dar neintegrabilă pe $[a, b]$, este necesar ca f să fie nemărginită pe (a, b), dar neintegrabilă pe $[a, b]$, $(a, b]$, şi $[a, b)$ este necesar ca f să fie nemărginită pe $[a, u]$ şi pe $[u, b]$, oricare ar fi u cuprins între a şi b.

Am abordat mai sus două probleme: aceea a integrabilităţii pe un interval nemărginit şi aceea a integrabilităţii unei funcţii nemărginite. Putem pune o problemă mai complicată, anume aceea a integrabilităţii unei funcţii nemărginite pe un interval nemărginit. Însă observăm că fiecare dintre aceste probleme este un caz particular al unei probleme mai generale, aceea a integrabilităţii unei funcţii pe un interval necompact, în cazul în care funcţia este integrabilă pe orice subinterval compact. Există, pe dreaptă, opt tipuri de interval necompact: $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, b)$, (a, ∞) (a şi b sînt numere reale, $a < b$). Primele trei sînt mărginite, dar neînchise, următoarele trei sînt închise, dar nemărginite, iar ultimele două sînt nemărginite şi neînchise. Vom dezvolta în cele ce urmează studiul integralei pe un interval necompact de forma $[a, b)$ (a finit, b finit sau infinit, $b > a$), urmînd ca pentru celelalte tipuri de interval necompact să schiţăm doar modul de abordare, care nu diferă esenţial de cel referitor la $[a, b)$.

Fie f *o funcţie reală, definită pe* $[a, b)$ *şi integrabilă pe orice interval compact conţinut în* $[a, b)$. *Să punem, pentru* $a < u < b$,

$$F(u) = \int_a^u f(x)\mathrm{d}x.$$

Dacă

$$\lim_{u\to b-0} F(u)$$

există şi este finită, atunci spunem că f *este integrabilă*[1] *pe* $[a, b)$ *şi punem, prin definiţie,*

$$\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\to b-0} F(u).$$

Despre integrala din stînga spunem că este convergentă pe $[a, b)$. Acest termen este justificat aici de analogia care există între teoria seriilor numerice şi teoria integralei pe interval necompact, analogie pe care o vom desprinde din însuşi studiul acestei integrale. *Dacă* $\lim\limits_{u\to b-0} F(u)$ *nu există sau există, dar nu este finită, atunci spunem că integrala din primul membru este divergentă.*

Fie f o funcţie reală, definită pe $(a, b]$ şi integrabilă pe orice interval compact conţinut în $(a, b]$ (a finit sau $-\infty$, b finit, $a < b$). Să punem, pentru $a < u < b$,

$$F(u) = \int_u^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Dacă

$$\lim_{u\to a+0} F(u)$$

există şi este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe $(a, b]$ şi punem, prin definiţie,

$$\int_{a+0}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\to a+0} F(u).$$

[1] După diverşi autori: integrabilă impropriu, integrabilă în sens generalizat etc.

Despre integrala din stînga spunem că este convergentă pe $(a, b]$. Dacă f nu este integrabilă pe $(a, b]$, spunem că integrala este divergentă pe $(a, b]$.

Fie f o funcție reală, definită pe (a, b) și integrabilă pe orice interval compact conținut în (a, b) ($a < b$, a și b pot lua, eventual, valori infinite). Dacă, pentru $a < c < b$, integralele

$$\int_{a+0}^{c} f(x)\,dx, \qquad \int_{c}^{b-0} f(x)\,dx \tag{3}$$

sînt amîndouă convergente, atunci spunem că f este integrabilă pe (a, b), iar integrala corespunzătoare o notăm

$$\int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx \quad \text{sau} \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

și spunem despre ea că este convergentă. Punem, prin definiție,

$$\int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx = \int_{a+0}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b-0} f(x)\,dx.$$

Această definiție este justificată de următoarele două fapte:

1° Dacă integralele (3) converg pentru o anumită valoare a lui c, atunci ele converg pentru orice valoare a lui c, ($a < c < b$);

2° Convergența integralelor (3) este echivalentă cu existența și finitudinea limitei

$$\lim_{\substack{u' \to a+0 \\ u'' \to b-0}} \int_{u'}^{u''} f(x)\,dx.$$

Ca ilustrare, să considerăm următorul exemplu:

Fie f definită de

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \; (-\infty < x < +\infty).$$

Am văzut, mai sus, că integrala

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

este convergentă $\left(\text{egală cu } \frac{\pi}{2}\right)$. Este ușor de văzut că și integrala

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$$

este convergentă $\left(\text{egală cu } \frac{\pi}{2}\right)$, deci

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

este convergentă şi egală cu π.

Vom căuta, în cele ce urmează, să obţinem o condiţie necesară şi suficientă pentru convergenţa unei integrale, condiţie care să nu angajeze în mod explicit valoarea integralei. Deoarece convergenţa unei integrale revine la existenţa şi finitudinea limitei unei anumite funcţii, va fi suficient să obţinem un analog, pentru funcţii, al criteriului de convergenţă al lui Cauchy.

Criteriul lui Cauchy-Bolzano. Fie F o funcţie reală definită pe $[a, b]$, (b finit sau ∞). Pentru ca

$$\lim_{x \to b-0} F(x)$$

să existe şi să fie finită este necesar şi suficient ca, fiind dat un $\varepsilon > 0$, să existe b'_ε, $a < b'_\varepsilon < b$, astfel încît din $b'_\varepsilon < x' < x'' < b$ să rezulte $|F(x'') - F(x')| < \varepsilon$.

Demonstraţie. Condiţia este necesară. Fie

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \lambda.$$

Există deci, pentru $\varepsilon > 0$, un b''_ε, $a < b''_\varepsilon < b$, astfel încît din $b''_\varepsilon < x < b$ să rezulte $|F(x) - \lambda| < \varepsilon$. Fie atunci x' şi x'', astfel încît $b''_\varepsilon < x' < x'' < < b$. Avem deci

$$|F(x') - \lambda| < \varepsilon, \quad |F(x'') - \lambda| < \varepsilon,$$

prin urmare

$$|F(x'') - F(x')| < |F(x'') - \lambda| + |\lambda - F(x')| < 2\varepsilon$$

şi necesitatea condiţiei este demonstrată luînd $b'_\varepsilon = b''_\varepsilon$

Condiţia este suficientă. Să admitem că are loc condiţia din enunţ şi să considerăm un şir $\{x_n\}$ care tinde la b dinspre stînga. Există deci, pentru $\varepsilon > 0$, un N_ε, astfel încît din $n > N_\varepsilon$ să rezulte $b'_\varepsilon < x_n < b$. Fie $m > N_\varepsilon$. Avem $[b'_\varepsilon < x_m < b]$ deci în virtutea ipotezei rezultă:

$$|F(x_m) - F(x_n)| < \varepsilon.$$

Aşadar, şirul $\{F(x_n)\}$ satisface criteriul de convergenţă al lui Cauchy; există şi este finită limita

$$\lim_{n \to \infty} F(x_n).$$

Fie λ valoarea acestei limite. Suficienţa condiţiei va fi demonstrată de îndată ce vom arăta că pentru un şir oarecare $\{y_n\}$, tinzînd la b dinspre stînga, avem:

$$\lim_{n \to \infty} F(y_n) = \lambda.$$

Să presupunem, prin reducere la absurd, că

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lambda',$$

unde $\lambda' \neq \lambda$. Şirul $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots$ tinde la b dinspre stînga, deci şirul $F(x_1), F(y_1), \ldots, F(x_n), F(y_n), \ldots$ are limită finită. Fie λ'' valoarea acestei limite.

Deoarece un şir convergent are aceeaşi limită ca şi oricare subşir al său, iar şirurile $\{F(x_n)\}$ şi $\{F(y_n)\}$ sînt subşiruri ale unui şir a cărui limită este λ'' rezultă că $\lambda'' = \lambda = \lambda'$. Contradicţia obţinută demonstrează teorema.

Teorema 1. Fie f definită pe $[a, b)$ (b finit sau infinit) şi integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a, b)$. O condiţie necesară şi suficientă pentru convergenţa integralei

$$\int_a^{b-0} f(x)\, dx$$

este următoarea: fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un b'_ε, $a < b'_\varepsilon < b$, astfel încît din $b'_\varepsilon < x' < x'' < b$ să rezulte

$$\left| \int_{x'}^{x''} f(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. Este suficient să aplicăm criteriul Cauchy-Bolzano funcţiei

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

pe intervalul $[a, b)$ şi să observăm că

$$F(x'') - F(x') = \int_{x'}^{x''} f(x)\, dx.$$

Fie f definită pe $[a, b)$ şi integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a, b)$. Vom spune că integrala

$$\int_a^{b-0} f(x)\, dx$$

converge absolut dacă integrala

$$\int_a^{b-0} |f(x)|\, dx$$

este convergentă.

Teorema 2. **Fie f definită pe $[a, b)$ şi integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a, b)$. Dacă integrala**

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx$$

converge absolut, atunci ea este convergentă.

Demonstraţie. Conform teoremei 1 (necesitatea condiţiei) aplicate integralei

$$\int_a^{b-0} |f(x)|\,dx,$$

rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ există b'_ε, $a < b'_\varepsilon < b$, astfel încît din $b'_\varepsilon < x' < < x'' < b$ să rezulte

$$\left|\int_{x'}^{x''} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon.$$

Însă

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{x'}^{x''} |f(x)|\,dx,$$

deci, aplicînd din nou teorema 1 (suficienţa condiţiei), de astă dată integralei

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx,$$

rezultă că aceasta este convergentă.

Observaţii. Se ştie că pe un interval compact integrabilitatea lui f implică integrabilitatea lui $|f|$, însă nu şi reciproc. Teorema 2 stabileşte, în ceea ce priveşte integrabilitatea pe un interval necompact, o implicaţie inversă: din integrabilitatea lui $|f|$ rezultă aceea a lui f şi, după cum vom vedea ceva mai departe, reciproca nu este adevărată. Însă aceasta s-a stabilit în ipoteza — esenţială — că f este integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a, b)$.

Teorema 1, foarte importantă din punct de vedere teoretic, este mai puţin eficace în problema stabilirii convergenţei unei integrale determinate. Din acest motiv, s-au căutat criterii care, fiind mai slabe din punct de vedere teoretic, au în schimb calitatea de a putea fi verificate cu uşurinţă pentru o anumită clasă de integrale. Vom da, în cele ce urmează, cîteva criterii de acest tip. Ele exprimă, toate, condiţii suficiente dar nu şi necesare — pentru ca o integrală să fie convergentă.

T e o r e m a   d e   c o m p a r a ț i e. Fie f și φ două funcții reale, definite pe $[a, b)$ (b finit sau infinit) și integrabile pe orice interval compact conținut în $[a, b)$. Să presupunem că, pentru $a \leqslant x < b$, avem $0 \leqslant f(x) \leqslant \leqslant \varphi(x)$ (4) și că integrala

$$\int_a^{b-0} \varphi(x)\, dx \tag{5}$$

este convergentă. În aceste condiții, integrala

$$\int_a^{b-0} f(x)\, dx \tag{5'}$$

este convergentă și valoarea ei nu depășește valoarea integralei (5).

D e m o n s t r a ț i e. Fie $a < u < b$. A doua inegalitate din (4) și proprietatea de monotonie a integralei Riemann implică

$$F(u) = \int_a^u f(x) dx \leqslant \int_a^u \varphi(x)\, dx. \tag{6}$$

Din $0 \leqslant \varphi(x)$ rezultă

$$\int_a^u \varphi(x)\, dx \leqslant \int_a^{b-0} \varphi(x)\, dx. \tag{7}$$

Din (6), (7) și din convergența integralei (5) rezultă că funcția F este majorată pe $[a, b)$, iar din prima inegalitate din (4) rezultă că F este crescătoare pe $[a, b)$. Așadar, există și este finită limita

$$\lim_{u \to b-0} F(u)$$

și

$$\int_a^{b-0} f(x)\, dx \leqslant \int_a^{b-0} \varphi(x)\, dx.$$

C o r o l a r. Fie f și φ două funcții reale, definite pe $[a, b)$ (b finit sau infinit) și integrabile pe orice interval compact conținut în $[a, b)$. Să presupunem că, pentru $a \leqslant x < b$, au loc inegalitățile (4) și că integrala (5') este divergentă. În aceste condiții, integrala (5) este divergentă.

Teorema de comparație se bazează pe confruntarea a două integrale: una despre care știm că este convergentă și alta a cărei natură o cercetăm. Rezultă că, pentru ca această teoremă să-și arate eficacitatea este nevoie mai întîi să cunoaștem unele funcții care să joace rolul funcției φ (iar, dacă este vorba de aplicarea corolarului, este nevoie de cunoașterea unor funcții care să joace rolul lui f). În cele ce urmează, vom furniza o clasă de funcții care îndeplinesc aceste cerințe.

T e o r e m a 3. Fie $a > 0$. Integrala

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leqslant 1$.

D e m o n s t r a ţ i e. Avem:

$$F(u, \alpha) = \int_a^u \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln u - \ln a, & \text{dacă } \alpha = 1 \\ \dfrac{u^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{dacă } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

deci

$$\lim_{u\to\infty} F(u, 1) = \infty, \quad \lim_{u\to\infty} F(u, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, & \text{dacă } \alpha > 1 \\ \infty, & \text{dacă } \alpha < 1 \end{cases}$$

şi teorema este stabilită.

T e o r e m a 4. Fie $b > 0$, $\alpha > 0$. Integrala

$$\int_{0+0}^{b} \frac{dx}{x^\alpha}$$

este convergentă pentru $0 < \alpha < 1$ şi divergentă pentru $\alpha \geqslant 1$.

D e m o n s t r a ţ i e. Avem

$$F(u, \alpha) = \int_u^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln b - \ln u, & \text{dacă } \alpha = 1 \\ \dfrac{b^{1-\alpha} - u^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{dacă } \alpha \neq 1, \ \alpha > 0 \end{cases}$$

deci:

$$\lim_{u\to 0+0} F(u, 1) = \infty, \quad \lim_{u\to 0+0} F(u, \alpha) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } \alpha > 1 \\ \dfrac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{dacă } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

şi teorema este demonstrată.

Aplicaţii. Pentru $x \geqslant 1$ avem $|\sin x| \leqslant 1$, deci în baza teoremei de comparaţie şi a teoremei 3 rezultă că integrala

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$$

este convergentă pentru orice $\alpha > 1$. În baza teoremei 2, rezultă că şi integrala

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx$$

este convergentă.

Pentru $0 < x \leqslant 1$ avem $|\sin x| \leqslant 1$, deci, în baza teoremei de comparaţie şi a teoremei 4, rezultă că integrala $\int_{0+0}^{1} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \, dx$ este convergentă pentru $0 < \alpha < 1$.

L e m ă. Fie f definită pe $[a, b)$, (b finit sau infinit) şi integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a, b)$. Dacă $a < c < b$, atunci integralele

$$\int_a^{b-0} f(x) \, dx, \qquad \int_c^{b-0} f(x) \, dx$$

au aceeaşi natură, cu alte cuvinte sînt amîndouă convergente sau amîndouă divergente.

D e m o n s t r a ţ i e. Să punem

$$F(u) = \int_a^u f(x) \, dx, \quad G(u) = \int_c^u f(x) \, dx, \quad \lambda = \int_a^c f(x) \, dx.$$

Avem

$$F(u) = G(u) + \lambda$$

deci limita

$$\lim_{u \to b-0} G(u)$$

există şi este finită dacă şi numai dacă limita

$$\lim_{u \to b-0} F(u)$$

există şi este finită.

C r i t e r i u l i n t e g r a l a l l u i C a u c h y. Fie f o funcţie reală, pozitivă şi descrescătoare pe $[a, \infty)$, deci integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a, \infty)$.

Fie p cel mai mic număr natural pentru care $a \leqslant p$. În aceste condiţii, integrala

$$\int_a^{\infty} f(x) \, dx$$

și seria

$$\sum_{n=p}^{\infty} f(n) \tag{9}$$

au aceeași natură, cu alte cuvinte sînt amîndouă convergente sau amîndouă divergente.

D e m o n s t r a ț i e. Fie $n > p$. Deoarece f este descrescătoare pe intervalul $[n-1, n]$, marginea inferioară a lui f pe $[n-1, n]$ este $f(n)$, iar marginea superioară este $f(n-1)$. Ținînd seama că f este pozitivă și că lungimea intervalului $[n-1, n]$ este egală cu 1, rezultă

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(n-1) \qquad (n = p, p+1, \ldots)$$

deci, pentru $m > p$.

$$\sum_{n=p+1}^{m} f(n) \leqslant \int_{p}^{m} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=p+1}^{m} f(n-1) = \sum_{n=p}^{m-1} f(n). \tag{10}$$

Să presupunem că seria (9) este convergentă și fie A suma ei. Din faptul că f este pozitivă rezultă, în baza celei de-a doua inegalități din (10), că

$$\int_{p}^{m} f(x)\,\mathrm{d}x < A$$

pentru orice număr natural $m > p$. De aici și din faptul că funcția

$$F(u) = \int_{p}^{u} f(x)\,\mathrm{d}x$$

este crescătoare (ca urmare a faptului că f este pozitivă) rezultă că limita

$$\lim_{u\to\infty} F(u)$$

există și este, finită, deci integrala

$$\int_{p}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11}$$

este convergentă, deci, în baza lemei, și integrala (8) este convergentă.

Să presupunem acum că integrala (8) este convergentă: rezultă, în baza lemei, că și integrala (11) este convergentă. Fie I valoarea acestei integrale. În baza faptului că f este pozitivă, avem

$$\int_{p}^{m} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant I$$

pentru orice număr natural $m > p$. De aici şi prima inegalitate din (10) rezultă că şirul de termen general

$$s_m = \sum_{n=p+1}^{m} f(n)$$

este majorat, iar din faptul că f este pozitivă rezultă că acelaşi şir este crescător. Deci şirul $\{s_m\}$ este convergent. Însă şirul $\{s_m\}$ este tocmai şirul de sume parţiale ale seriei (9), deci seria (9) este convergentă.

Exemple. În baza teoremei 3 şi a criteriului integral al lui Cauchy, seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $0 < \alpha \leqslant 1$. Această serie, cunoscută sub numele de *seria lui Riemann* sau *seria armonică generalizată*, este o serie celebră. Suma ei se notează cu $\zeta(\alpha)$ şi este numită *funcţia ζ a lui Riemann*. Proprietăţile funcţiei sînt strîns legate de o problemă în aparenţă foarte depărtată de definiţia acestei funcţii, şi anume problema distribuţiei numerelor prime. Aplicaţii dintre cele mai profunde ale analizei matematice în teoria numerelor îşi au originea în structura funcţiei $\zeta\alpha$.

Cu excepţia teoremei 1, toate criteriile de convergenţă date pînă aici se referă la funcţii pozitive. Vom da acum criterii de convergenţă pentru integrale din funcţii de semn variabil. În stabilirea acestor criterii, un rol de bază îl va avea teorema a doua de medie pentru integrala Riemann.

Teorema 5. Fie f continuă şi g monotonă pe $[a, b)$ (b finit sau infinit). Să presupunem că $\lim\limits_{x \to b-0} g(x) = 0$ şi că funcţia

$$F(u) = \int_a^u f(x)\,dx$$

este mărginită pe $[a, b)$. În aceste condiţii, integrala

$$\int_a^{b-0} f(x)\,g(x)\,dx \tag{12}$$

este convergentă.

Demonstraţie. Fie $a < u' < u'' < b$. Integrala

$$\int_{u'}^{u''} f(x)\,g(x)\,dx$$

îndeplineşte toate condiţiile pentru a i se putea aplica formula a doua de medie. Există deci un număr ξ, $u' < \xi < u''$, astfel încît

$$\int_{u'}^{u''} f(x)\,g(x)\,dx = g(u') \int_{u'}^{\xi} f(x)\,dx + g(u'') \int_{\xi}^{u''} f(x)\,dx,$$

f, fiind continuă, admite o primitivă F pe $[a, b)$. F este, evident, o funcţie continuă, deci mărginită pe $[u', u'']$.

Fie M astfel încît $|F(x)| < M$ pentru $u' \leqslant x \leqslant u''$. Avem, în baza formulei lui Leibniz-Newton,

$$\left|\int_{u'}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = |F(\xi) - F(u')| < 2M,$$

$$\left|\int_{\xi}^{u''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = |F(u'') - F(\xi)| < 2M.$$

Pe de altă parte, din faptul că $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$ rezultă că, fiind dat un $\varepsilon > 0$ există un număr b'_ε, $a < b'_\varepsilon < b$, astfel încît $|g(x)| < \varepsilon$ de îndată ce $b'_\varepsilon < x < b$. Aşadar, fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un b'_ε, $b'_\varepsilon < x < b$, astfel încît

$$\left|\int_{u'}^{u''} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant |g(u')| \cdot \left|\int_{u'}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + |g(u'')| \cdot \left|\int_{\xi}^{u''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < 4M\varepsilon$$

de îndată ce $b'_\varepsilon < u' < u'' < b$. În baza teoremei 1 (condiţia este suficientă!) integrala (12) este convergentă.

Observaţii. Importanţa teoremei 5 constă în faptul că ea se aplică în unele cazuri în care integrala converge, fără a fi absolut convergentă. Să considerăm, de exemplu, pentru $\alpha > 0$, integralele

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

Punînd $f(x) = \sin x$ sau $\cos x$ şi $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, observăm că sînt îndeplinite toate ipotezele din teorema 5, deci integralele sînt convergente (pentru $\alpha > 1$, integralele sînt chiar absolut convergente). Vom arăta că, pentru $0 < \alpha \leqslant 1$, prima integrală de mai sus nu este absolut convergentă. Fie mai întîi $\alpha = 1$. Trebuie să arătăm că integrala

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$$

este divergentă.

Avem $|\sin x| \geqslant \sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$. Integrala

$$\int_1^\infty \frac{1 - \cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$$

este divergentă, deoarece integrala

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

este divergentă, iar integrala

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x}\, dx$$

este convergentă. Aplicînd teorema de comparație (sub aspectul divergenței), rezultă divergența integralei

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx.$$

Dacă acum considerăm integrala

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}\, dx \tag{13}$$

pentru $0 < \alpha < 1$, este suficient să observăm că

$$\frac{|\sin x|}{x} \leqslant \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}$$

pentru $x \geqslant 1$, deci, aplicînd teorema de comparație, rezultă că integrala (13) este divergentă pentru $0 < \alpha \leqslant 1$.

Să considerăm acum așa-numitul *sinus integral*, adică integrala

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx. \tag{14}$$

Deoarece funcția de sub integrală poate fi prelungită prin continuitate în punctul 0 prin

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

și deoarece pentru $0 < u < \infty$ avem

$$\int_{0+0}^{u} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^u \varphi(x)\, dx,$$

rezultă că natura integralei (14) este aceeași ca și a integralei

$$\int_u^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

pentru $u > 0$, deci integrala (14) este convergentă.

Consideraţiile de mai sus fac naturală următoarea definiţie. *Fie f o funcţie reală definită pe $[a, b)$ şi integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a, b)$. Vom spune că integrala*

$$\int_a^{b+0} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

este semiconvergentă dacă ea este convergentă, dar nu este absolut convergentă. Integrala (14) este un exemplu de integrală semiconvergentă.

Teorema 6. Fie f definită şi continuă pe $[a, b)$, iar g monotonă şi mărginită pe $[a, b)$. Să presupunem că integrala (15) este convergentă. În aceste condiţii, integrala (12) este convergentă.

Demonstraţie. Există L astfel încît $|g(x)| < L$ pentru $a \leqslant x < b$. Din convergenţa integralei (15) rezultă, în baza teoremei 1 (necesitatea condiţiei!), că pentru $\varepsilon > 0$ există b'_ε, $a < b'_\varepsilon < b$, astfel încît din $b'_\varepsilon < u' < u'' < b$ să rezulte

$$\left|\int_{u'}^{u''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Aplicînd, pe $[u', u'']$, formula a doua de medie, obţinem

$$\left|\int_{u'}^{u''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant |g(u')|\cdot\left|\int_{u'}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + |g(u'')|\cdot\left|\int_{\xi}^{u''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < 2L\varepsilon,$$

de îndată ce $b'_\varepsilon < u' < u'' < b$. Folosind din nou teorema 1 (suficienţa condiţiei!), de astă dată aplicată integralei (12), rezultă teorema.

Observaţii. Teoremele date în acest capitol se referă la intervale necompacte de forma $[a, b)$ (b finit sau infinit). Transpunerea rezultatelor la intervale necompacte de alt tip nu pretinde nici o modificare esenţială în enunţuri sau în demonstraţii, ci doar modificări de detaliu.

Majoritatea noţiunilor introduse şi a rezultatelor stabilite îşi au un analog în teoria seriilor numerice. Aşa sînt noţiunile de integrală convergentă, semiconvergentă, absolut convergentă, teorema de comparaţie, teoremele 1, 2, 3, 5, 6.

În tot acest capitol am studiat noţiunea de integrală pe intervale deschise sau infinite la una sau ambele extremităţi. Există însă cazuri în care apar, în interiorul unui interval, puncte care împiedică procesul de integrare. Să considerăm, de exemplu, pe intervalul $[a, b]$, funcţia

$$f(x) = \frac{1}{x-c}. \tag{16}$$

Aceasta înseamnă că $c \notin [a, b]$. În caz contrar, funcţia f nu mai este definită pe $[a, b]$, ci doar pe $[a, c)$ şi pe $(c, b]$. Putem prelungi funcţia f, în aşa fel încît să obţinem o funcţie φ definită pe $[a, b]$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-c}, & x \neq c, \\ \alpha, & x = c. \end{cases}$$

Însă, oricum am alege numărul α, funcţia φ este nemărginită pe fiecare dintre intervalele $[a, c]$, $[c, b]$. Acest exemplu sugerează următoarea definiţie:

Fie f definită pe $[a, b]$, cu excepţia eventuală a unui punct c, $a < c < b$. Să presupunem că f este integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a, b]$, dar neconţinînd punctul c. În aceste condiţii spunem că integrala

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{17}$$

este convergentă dacă integralele

$$\int_a^{c-0} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{c+0}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

sînt, amîndouă, convergente.

Este uşor de văzut că integrala

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-c} \tag{18}$$

este divergentă pentru $a < c < b$.

Vom introduce acum o nouă noţiune de integrabilitate, mai generală decît cea obişnuită şi care ne va permite să integrăm funcţia (16) pe $[a, b]$. Fie f definită pe $[a, b]$ cu excepţia eventuală a punctului c, $a < c < b$.

Să presupunem că f este integrabilă pe orice interval compact conţinut în $[a, b]$, dar care nu conţine pe c. Vom spune că f este integrabilă pe $[a, b]$ în sensul valorii principale dacă

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \left(\int_a^{c-u} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+u}^b f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

există şi este finită. Valoarea acestei limite se notează

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

şi se numeşte integrala în sensul valorii principale a funcţiei f pe $[a, b]$.

Este clar că din convergența (17) rezultă existența ei în sensul valorii principale, dar reciproca nu este adevărată, după cum arată următorul

Exemplu.

$$\int_a^{c-\eta}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\eta}^{b}\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}+\ln\frac{\eta}{\eta}=\ln\frac{b-c}{c-a}\ (a<c<b),$$

deci

$$\text{v.p.}\int_a^b\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}$$

Pe de altă parte, integrala (18) este divergentă.

Un alt mijloc de a trata o integrală pe un interval necompact este furnizat de anumite teoreme generale din teoria integralei, ca: teorema de integrare prin părți, teorema de schimbare de variabilă etc. Este necesar să vedem în ce fel se transpun aceste teoreme la integrale pe interval necompact.

Teorema de integrare prin părți. Fie f și g două funcții derivabile, cu derivată continuă pe intervalul necompact $[a, b)$. Să presupunem că limita

$$\lim_{x\to b}(f(x)\,g(x)) \tag{19}$$

există și este finită. Dacă una dintre integralele

$$\int_a^{b-0}f(x)g'(x)\,dx,\qquad \int_a^{b-0}g(x)f'(x)\,dx. \tag{20}$$

este convergentă, atunci și cealaltă integrală din (20) este convergentă și

$$\int_a^{b-0}f(x)g'(x)\,dx=\lim_{x\to b}f(x)g(x)\;-\;f(a)g(a)\;-\int_a^{b-0}g(x)f'(x)\,dx.$$

Demonstrație. Fie b' astfel încît $a<b'<b$. Deoarece intervalul $[a, b']$ este compact și conținut în $[a, b)$, iar f și g au derivată continuă pe $[a, b']$, putem aplica pe $[a, b']$ teorema de integrare prin părți pentru integrala Riemann

$$\int_a^{b'}f(x)g'(x)\,dx=f(b')g(b')-f(a)g(a)-\int_a^{b'}g(x)f'(x)\,dx. \tag{21}$$

Să presupunem că a doua integrală din (20) este convergentă. Ținînd seama de existența și finitudinea limitei (19), rezultă că membrul al doilea din (21) are limită finită pentru $b'\to b$, deci și primul membru din (21) are limită finită pentru $b'\to b$.

Să presupunem acum că prima integrală din (20) este convergentă. În acest caz, ţinînd seama de existenţa şi finitudinea limitei (19), rezultă că primul membru din relaţia

$$\int_a^{b'} f(x)g'(x)\,dx - f(b')g(b') + f(a)g(a) = -\int_a^{b'} g(x)f'(x)\,dx \tag{22}$$

are limită finită pentru $b' \to b$, deci şi al doilea membru din (22) are limită finită pentru $b' \to b$ şi teorema este demonstrată şi în acest caz.

Observaţii. Teorema se transpune cu uşurinţă pentru intervale necompacte de tipul $(a, b]$ sau (a, b).

Uneori, se întîmplă ca una dintre integralele (20) să conveargă în mod banal, cu alte cuvinte să existe chiar pe intervalul compact $[a, b]$. În acest caz, calculul integralei pe interval necompact se reduce, prin teorema de mai sus, la calculul unei integrale obişnuite. Un exemplu în acest sens va fi dat mai jos.

În sfîrşit, trebuie să observăm că, uneori, nici una dintre integralele (20) nu se poate calcula cu uşurinţă. În acest caz, renunţăm să mai aplicăm formula de integrare prin părţi, folosind doar partea calitativă a teoremei, anume stabilim convergenţa uneia dintre integralele (20) în ipoteza că ne sînt date convergenţa celeilalte integrale din (20), precum şi existenţa şi finitudinea limitei (19).

Exemplu. 2) Să stabilim natura integralei

$$\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\,dx.$$

Să punem $f(x) = \ln \sin x$, $g(x) = x$. Avem, pentru $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t\,dt = \frac{\pi}{2} \ln \sin \frac{\pi}{2} - x \ln \sin x - \int_x^{\frac{\pi}{2}} t \frac{\cos t}{\sin t}\,dt.$$

Aplicînd o teoremă de tip Hospital, avem

$$\lim_{x\to 0} (x \ln \sin x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\left(-\frac{x}{\sin x}\right)(x \cos x)\right) = 0.$$

Pe de altă parte,

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\operatorname{tg} t}\,dt$$

există şi este finită, deoarece

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

deci, punînd

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{tg} x}, & \text{dacă } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x \neq 0, \\ 1, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\, dx$$

există ca integrală Riemann și

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\, dx = \int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\operatorname{tg} t}\, dt. \tag{23}$$

Sînt deci îndeplinite toate condițiile pentru aplicarea teoremei de mai sus. Integrala considerată este convergentă. În ceea ce privește însă aplicarea formulei de integrare prin părți, aceasta nu ne permite stabilirea valorii integralei considerate, deoarece nu putem calcula, cel puțin pe o cale simplă, integrala (23).

Teorema de schimbare de variabilă. Fie f continuă pe $[a, b)$ și fie φ strict crescătoare, derivabilă, cu derivată continuă pe $[\alpha, \beta)$. Să presupunem că $\varphi(\alpha) = a$ și

$$\lim_{t \to \beta} \varphi(t) = b. \tag{24}$$

În aceste condiții, dacă una dintre integralele

$$\int_a^{b-0} f(x)\, dx, \quad \int_\alpha^{\beta-0} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt \tag{25}$$

este convergentă, atunci și cealaltă integrală din (25) este convergentă și cele două integrale sînt egale:

$$\int_a^{b-0} f(x)\, dx = \int_\alpha^{\beta-0} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt. \tag{26}$$

Demonstrație. Funcția φ, fiind strict crescătoare și continuă pe $[\alpha, \beta]$, este inversabilă, iar inversa ei φ^{-1} este continuă pe $[a, b)$. Fie b' astfel încît $a < b' < b$ și fie $\beta' = \varphi^{-1}(b')$. Avem $\alpha < \beta' < \beta$. Pe intervalul compact $[a, b']$ sînt îndeplinite toate condițiile pentru a aplica una dintre teoremele de schimbare de variabilă la integrala Riemann; obținem

$$\int_a^{b'} f(x)\, dx = \int_\alpha^{\beta'} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt. \tag{27}$$

Să presupunem că prima integrală din (25) este convergentă. Rezultă că primul membru din (27) are limită finită cînd $b' \to b$. Ţinînd seama de (24), rezultă că al doilea membru din (27) are limită finită cînd $\beta' \to \beta$; integrala a doua din (25) este deci convergentă şi are loc relaţia (26), obţinută din (27) prin trecere la limită.

Să presupunem acum că a doua integrală din (25) este convergentă. Rezultă că al doilea membru din (27) are limită finită cînd $\beta' \to \beta$; însă din (24) şi din proprietăţile funcţiilor φ şi φ^{-1} rezultă că

$$\lim_{x \to b} \varphi^{-1}(x) = \beta,$$

deci primul membru din (27) are limită cînd $b' \to b$. Prima integrală din (25), este astfel, convergentă, şi relaţia (26) se obţine din (27), prin trecere la limită.

Observaţii. Teorema se transpune cu uşurinţă pentru intervale necompacte de tipul $(a, b]$ sau (a, b).

Uneori, se întîmplă ca una dintre integralele (25) să conveargă în mod banal, cu alte cuvinte să existe chiar pe intervalul compact $[a, b]$, respectiv $[\alpha, \beta]$. În acest caz, calculul integralei pe interval necompact se reduce, prin teorema de mai sus, la calculul unei integrale obişnuite. Un exemplu în acest sens va fi dat mai jos.

Eficacitatea teoremei de schimbare de variabilă depinde de alegerea judicioasă a funcţiei φ,

Exemple. 1) *Ne propunem să stabilim natura integralei*

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x. \tag{28}$$

Să luăm $a = \alpha = 0$, $b = \beta = \infty$. Fie $\varphi(t) = \sqrt{t}$. Funcţia φ îndeplineşte, pe $[0, \infty)$, toate condiţiile din teorema de schimbare de variabilă. Luînd $f(x) = \sin x^2$, convergenţa integralei (28) va rezulta de îndată ce vom reuşi să stabilim convergenţa integralei

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \tag{29}$$

şi vom avea:

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t.$$

Însă am văzut, în cursul acestui capitol, că integrala

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} \mathrm{d}x$$

este convergentă pentru orice $\alpha > 0$. Cum, pe de altă parte, funcţia de sub integrala (29) se poate prelungi prin continuitate pe intervalul $[0, 1]$, rezultă că integrala (29) este convergentă, deci şi integrala (28) este convergentă.

Pe o cale asemănătoare se arată că şi integrala

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 \mathrm{d}x \tag{30}$$

este convergentă.

Integralele (28) şi (30) prezintă o deosebită însemnătate în fizică; ele sînt aşa-numitele *integrale ale lui A. J. Fresnel*. Stabilirea naturii lor este interesantă şi din punct de vedere matematic, deoarece primitivele funcţiilor $\sin x^2$ şi $\cos x^2$ (primitive a căror existenţă este asigurată de continuitatea acestor funcţii) nu se pot exprima pe cale elementară.

2) *Să stabilim natura integralei*

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}. \tag{31}$$

Să luăm $\varphi(t) = a\cos^2 t + b\sin^2 t$, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. Punînd $f(x) = 1/\sqrt{(x-a)(b-x)}$, integrala

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t$$

este în mod banal convergentă fiind chiar integrală pe interval compact (egală cu π). Deci, integrala (31) este şi ea convergentă, iar valoarea ei este π.

Un nou exemplu de integrală semiconvergentă. Iată încă un exemplu de integrală convergentă care nu este şi absolut convergentă: Pe segmentul $[i-1, i]$ ca bază, să construim un triunghi isoscel T_i, de arie $\frac{1}{i}$, cu vîrful în sus sau în jos, după cum i este impar sau par. Mulţimea laturilor egale ale triunghiurilor

$$T_0,\ T_1,\ T_2, \dots\ T_i, \dots$$

constituie graficul unei funcţii f continue pentru $x > 0$. Vom arăta că integrala

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

este convergentă, în timp ce integrala

$$\int_0^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

este divergentă. Fie X un număr pozitiv şi

$$i - 1 = E(X) = \text{partea integrală a lui } X.$$

Dacă i este par, putem scrie

$$\int_0^i f(x)\,dx \leqslant \int_0^X f(x)\,dx \leqslant \int_0^{i-1} f(x)\,dx.$$

Dacă i este impar, avem inegalitățile contrarii

$$\int_0^{i-1} f(x)\,dx \leqq \int_0^X f(x)\,dx \leqq \int_0^i f(x)\,dx.$$

Dar:

$$\int_0^{i-1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{k-1}\frac{1}{k}.$$

Cînd $X \to \infty$, atunci $i \to \infty$, iar

$$\sum_1^\infty (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \ln 2,$$

deci:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \ln 2.$$

Pe de altă parte, este ușor de văzut că

$$\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{k} \leqslant \int_0^x |f(x)|\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k},$$

deci integrala

$$\int_0^\infty |f(x)|\,dx$$

este divergentă.

O neconcordanță între serii și integrale. Se știe că din convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Este natural să ne întrebăm dacă o proprietate analoagă are loc la integrale.

Răspunsul este negativ. Se pot da exemple de funcții f care nu tind către zero pentru $x \to \infty$ și totuși integrala

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

este convergentă. Iată un astfel de exemplu. Pe semidreapta numerelor reale pozitive să considerăm punctele

$$H = 0,\ H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n,\ \ldots$$

unde

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Pe segmentul (H_{i-1}, H_i), ca bază, vom construi triunghiul isoscel T_i, de înălţime 2, cu vîrful în jos sau în sus, după cum i este par sau impar. Laturile egale ale triunghiurilor T_i constituie graficul unei funcţii f, care, în mod vizibil, nu tinde către zero cînd $x \to \infty$ şi pentru care, totuşi, integrala

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

este convergentă. Se constată, dealtfel, cu uşurinţă, că valoarea acestei integrale este egală cu ln 2.

Trebuie să ne ferim să tragem din acest exemplu concluzia greşită că integrala precedentă ar putea fi convergentă în cazul cînd f nu tinde către zero, dar tinde către o limită $\lambda \neq 0$. Se poate arăta imediat că dacă

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda,$$

atunci, pentru ca integrala

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

să fie convergentă, este necesar să avem $\lambda = 0$.

Într-adevăr, formula mediei ne dă

$$\int_{X'}^{X''} f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(X'' - X'),$$

μ fiind un număr cuprins între cele două margini ale lui f în intervalul $[X', X'']$. Dar dacă $X' \to \infty$, $\mu \to \lambda$. Să presupunem $\lambda \neq 0$. Numărul $\varepsilon > 0$ fiind dat, se poate determina numărul pozitiv R, astfel încît, pentru $X' > R$, să avem $|\mu - \lambda| < \varepsilon$. Atunci

$$\lambda - \varepsilon < \frac{1}{X'' - X'} \int_{X'}^{X''} f(x)\,\mathrm{d}x < \lambda + \varepsilon$$

sau

$$\left| \int_{X'}^{X''} f(x)\,\mathrm{d}x - \lambda(X'' - X') \right| < \varepsilon.$$

Această inegalitate ne arată că integrala

$$\int_{X'}^{X''} f(x)\,\mathrm{d}x$$

nu poate tinde către zero pentru $X' \to \infty$, deci integrala

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

este divergentă.

Alte exemple. *Integrala*

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^{2-\varepsilon}} \sin \frac{1}{a-x}\,dx, \quad (0 < \varepsilon < 2),$$

este convergentă. Într-adevăr, să punem

$$\beta(x) = (x-a)^3, \qquad g(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \sin \frac{1}{x-a}.$$

Avem

$$G(X) = \int_X^b g(x)\,dx = \cos\frac{1}{b-a} - \cos\frac{1}{X-a},$$

deci

$$|G(X)| < 2,$$

oricare ar fi X în intervalul $(a, b]$. Pe de altă parte, β este o funcție crescătoare pozitivă și $\beta(a) = 0$. Sîntem deci în condițiile de aplicare a teoremei 5 și integrala dată este convergentă.

Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

este divergentă.

Într-adevăr,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x \cdot \log x} = \lim_{x\to\infty} \ln \ln x = +\infty.$$

Integrala

$$\int_\alpha^\infty \frac{P(x)}{\sqrt{|R(x)|}}\,dx,$$

unde $P(x)$ *și* $R(x)$ *sînt polinoame, ultimul avînd numai rădăcini simple, este convergentă dacă* $r > 2(p+1)$, *unde* r *este gradul lui* $R(x)$, *iar* p *este gradul lui* $P(x)$.

Într-adevăr, să presupunem α mai mic decît cea mai mică rădăcină reală a polinomului $R(x)$ şi fie β un număr mai mare decît cea mai mare rădăcină a acestui polinom. Putem scrie

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{\sqrt{|R(x)|}} \mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{\sqrt{|R(x)|}} \mathrm{d}x + \int_{\beta}^{X} \frac{P(x)}{\sqrt{|R(x)|}} \mathrm{d}x.$$

Fie a o rădăcină a ecuaţiei $R(x) = 0$. Într-un interval care conţine numai această rădăcină, putem scrie

$$\frac{P(x)}{\sqrt{|R(x)|}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{|x-a|}},$$

deci integrala

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{\sqrt{|R(x)|}} \mathrm{d}x$$

este convergentă. Pe de altă parte, pentru $x > \beta$, putem scrie

$$\frac{P(x)}{\sqrt{|R(x)|}} = \frac{\varphi(x)}{x^{\frac{r}{2}-p}}.$$

Prin urmare, dacă $r > 2(p+1)$, integrala dată este convergentă. Să presupunem $r \leqq 2(p+1)$ şi să însemnăm cu m marginea inferioară, diferită de zero, a lui $\varphi(x)$, pentru $x \geqq \beta$. Atunci

$$\int_{\beta}^{X} f(x)\,\mathrm{d}x > m \int_{\beta}^{X} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{r}{2}-p}}.$$

Prin urmare, integrala este divergentă dacă $r \leqslant 2(p+1)$.

Dacă integralele

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \int_{a}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$$

sînt convergente, integrala

$$\int_{a}^{\infty} [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x$$

este convergentă şi avem

$$\int_{a}^{\infty} (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Într-adevăr, oricare ar fi X, avem

$$\int_a^X [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^X f(x)\, dx + \int_a^X g(x)\, dx.$$

Este suficient să observăm că membrul al doilea are o limită finită pentru $X \to \infty$.

Această proprietate corespunde următoarei proprietăţi din teoria seriilor: suma a două serii convergente este o serie convergentă.

Integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

este convergentă.

Funcţia $f(x) = e^{-x^2}$ este pară. Este suficient să arătăm, prin urmare, că integrala

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

este convergentă. Dar, prin aplicarea regulii lui Hospital, se verifică imediat că produsul $x^\alpha \cdot e^{-x^2}$ tinde către zero pentru $x \to \infty$, oricare ar fi $\alpha > 1$.

Dacă $f(x)$ tinde către o limită finită λ pentru $x \to \infty$ şi dacă integrala

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$$

este convergentă, atunci şi integrala

$$\int_a^{\infty} f^2(x)\, dx$$

este convergentă.

În mod necesar, $\lambda = 0$. Atunci, numărul $\varepsilon > 0$, fiind dat, există numărul pozitiv $R(\varepsilon)$, astfel încît să avem, pentru $x > R(\varepsilon)$.

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Dacă luăm $\varepsilon < 1$, atunci

$$f^2(x) < |f(x)|,$$

de unde

$$\int_{X'}^{X''} f^2(x)\, dx < \int_{X'}^{X''} |f(x)|\, dx,$$

îndată ce

$$X' > R(\varepsilon).$$

Dacă $f(x)$ şi $g(x)$ tind către limite determinate şi finite pentru $x \to \infty$ şi dacă integralele

$$\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^\infty |g(x)|\,\mathrm{d}x$$

sînt convergente, atunci integrala

$$\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

este convergentă.

Din identitatea $f\cdot g = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$, deducem

$$|fg| \leqslant \frac{1}{4}[(f+g)^2 + (f-g)^2].$$

Din $|f+g| \leqq |f| + |g|$ şi din aplicarea unui rezultat de mai sus, deducem că integralele

$$\int_a^\infty |f+g)|\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^\infty |f-g|\,\mathrm{d}x$$

sînt convergente. Aplicînd rezultatul precedent, deducem că integralele

$$\int_a^\infty (f+g)^2\mathrm{d}x, \quad \int_a^\infty (f-g)^2\mathrm{d}x$$

sînt convergente. Din inegalitatea de mai sus rezultă convergenţa integralei date.

Capitolul V

INTEGRALE CU PARAMETRI

Fie $I = [a, b]$ un interval compact unidimensional şi J o mulţime de numere reale. Fie f o funcţie reală definită pe $I \times J$. Dacă funcţia parţială a lui f în raport cu $x(a \leqslant x \leqslant b)$ este integrabilă pe $[a, b]$, oricare ar fi $y \in J$, atunci are sens să considerăm funcţia F definită pe J prin următoarea lege:

$$F(t) = \int_a^b f(x, t)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

În cele ce urmează, vom căuta să stabilim legătura care există între structura lui f şi structura lui F, mai precis în ce condiţii şi în ce fel proprietăţile lui f se transmit lui F. Această problemă este strîns legată de o altă problemă, şi anume: în ce condiţii operaţiile de trecere la limită, de derivare, de integrare sînt permutabile cu operaţia de integrare din (1), cu alte cuvinte în ce condiţii limita integralei este egală cu integrala limitei etc. Un caz particular al acestei probleme, referitor la cazul în care J este mulţimea numerelor naturale, a fost considerat în volumul întîi. Anume, s-a stabilit că dacă şirul $\{f(x, n)\}$ converge uniform pe $[a, b]$ şi fiecare funcţie din şir este continuă pe $[a, b]$, atunci funcţia limită f este continuă pe $[a, b]$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x, n)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x^1. \tag{2}$$

Acest rezultat ne dă de bănuit că în cercetarea pe care o vom face va fi nevoie de un echivalent pentru funcţii al noţiunii de convergenţă uniformă. Vom începe prin a da un prim echivalent al ei.

Fie f definită pe $I \times J$, t_0 în una din situaţiile: $t_0 \in J$, $t_0 = \sup J$ (eventual, $t_0 = +\infty$). Să presupunem că există şi este finită limita

$$\varphi(x) = \lim_{\substack{t\to t_0 \\ t<t_0}} f(x, t). \tag{3}$$

[1] Se poate arăta că această teoremă rămîne adevărată dacă se înlocuieşte, în enunţul ei, cuvîntul „continuă“ prin cuvîntul „integrabilă“.

Aceasta înseamnă că pentru $\varepsilon > 0$ există $c'(\varepsilon, x) > 0$, $c' \in J$, astfel încît din $c'(\varepsilon, x) < t < t_0$ să rezulte $|f(x, t) - \varphi(x)| < \varepsilon$. *Dacă pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există un număr $c'(\varepsilon)$ independent de x şi astfel încît $c'(\varepsilon) < t < t_0$ şi $x \in I$ să rezulte $|f(x, t) - \varphi(x)| < \varepsilon$, atunci spunem că $f(x, t)$ tinde uniform dinspre stînga, în punctul t_0, către funcţia $\varphi(x)$ sau că limita (3) este uniformă.*

În mod similar se defineşte ce înseamnă că $f(x, t)$ *tinde uniform dinspre dreapta* în $t_0 = \inf. J$ (eventual $t_0 = -\infty$), către o funcţie $\psi(x)$. Dacă $f(x, t)$ *tinde uniform în $t_0 \in J$, atît din stînga cît şi din dreapta, către $\varphi(x)$, atunci spunem că $f(x, t)$ tinde uniform, în $t_0 \in J$, către funcţia $\varphi(x)$.*

Teorema 1. Fie f definită pe $I \times J$, $t_0 = sup. J$. Să presupunem că limita (3) există, este finită şi uniformă. Atunci, pentru orice şir $\{t_n\}$ ($t_n \in J$, $n = 1, 2, \ldots$) tinzînd din stînga către t_0, şirul $\{f(x, t_n)\}$ converge uniform, pe I, către $\varphi(x)$.

Demonstraţie. Fie $\{t_n\}$ un şir cu proprietăţile din enunţ şi fie $c'(\varepsilon)$ cu semnificaţia din definiţia limitei uniforme la stînga. Există un număr natural $N(\varepsilon)$, astfel încît din $n > N(\varepsilon)$ să rezulte $c'(\varepsilon) < t_n < t_0$, deci, în baza uniformităţii limitei (3), avem, pentru orice $x \in I$, $|f(x, t_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Din faptul că N este, aici, în mod evident, independent de x, rezultă că şirul $f(x, t_n)$ converge uniform pe I, către $\varphi(x)$.

Observaţie. Teoreme similare se pot da pentru cazul $t_0 \in J$, cît şi pentru limita uniformă la dreapta şi pentru limita uniformă.

Teorema 2. Fie f definită pe $I \times J$. Să presupunem că integrala (1) există pentru orice $t \in J$, exceptînd eventual punctul t_0, şi că limita (3) există, este finită şi uniformă. În aceste condiţii, φ este integrabilă pe I. Dacă, în plus, funcţia parţială a lui f în raport cu x este continuă pe I pentru orice $t \in J$, atunci φ este continuă pe I.

Demonstraţie. Fie $\{t_n\}$ un şir care tinde la t_0 dinspre stînga. Conform teoremei 1, şirul $\{f(x, t_n)\}$ converge uniform către $\varphi(x)$. Însă, după cum se ştie din volumul întîi, atît integrabilitatea cît şi continuitatea se păstrează prin convergenţă uniformă.

În mod analog se procedează pentru limita uniformă la dreapta sau bilaterală.

Teorema 3. Fie f definită şi continuă pe $I \times J$, $I = [a, b]$. Funcţia F, definită de (1), este continuă pe J.

Demonstraţie. Fie $t_0 \in J$. Avem

$$|F(t) - F(t_0)| \leqslant \int_a^b |f(x, t) - f(x, t_0)| \, dx. \tag{4}$$

Din continuitatea lui f pe $I \times J$ şi din compacitatea lui I şi J, deci a lui $I \times J$, rezultă că f este uniform continuă pe $I \times J$, deci pentru $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel încît din $|t' - t| < \eta(\varepsilon)$, $|x' - x''| < \eta(\varepsilon)$ să rezulte $|f(x'', t'') - f(x', t')| < \varepsilon$. Să luăm $x' = x'' = x$, $t'' = t$, $t' = t_0$. Rezultă că, pentru orice x, $|f(x, t) - f(x, t_0)| < \varepsilon$ de îndată ce $|t - t_0| < \eta(\varepsilon)$. Avem deci, pentru $|t - t_0| < \eta(\varepsilon)$,

$$\int_a^b |f(x, t) - f(x, t_0)|\, dx < (b - a)\,\varepsilon$$

şi, ţinînd seama de (4), din $|t - t_0| < \eta(\varepsilon)$ rezultă

$$|F(t) - F(t_0)| < (b - a)\,\varepsilon,$$

cu alte cuvinte F este continuă în t_0. Deoarece t_0 a fost ales la întîmplare în J, rezultă că F este continuă pe J.

Teorema 4. Fie f definită pe $I \times J$. Să presupunem că integrala (1) există pentru orice $t \in J$, exceptînd eventual $t = t_0$, şi că limita (3) există şi este finită şi uniformă în raport cu x. În aceste condiţii avem

$$\lim_{t \to t_0 - 0} F(t) = \lim_{t \to t_0 - 0} \int_a^b f(x, t)dx = \int_a^b (\lim_{t \to t_0 - 0} f(x, t))\, dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

D e m o n s t r a ţ i e. În baza teoremei 2, φ este integrabilă pe $[a, b]$ deci ultimele două integrale au sens. Prima integrală are şi ea sens, prin ipoteză.

Avem

$$\left| \int_a^b f(x, t)dx - \int_a^b \varphi(x)\, dx \right| = \left| \int_a^b [f(x, t) - \varphi(x)]\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x, t) - \varphi(x)|\, dx. \quad (5)$$

În baza uniformităţii limitei (3), există, pentru $\varepsilon > 0$, un $c'(\varepsilon) < t_0$, astfel încît din $c'(\varepsilon) < t < t_0$ să rezulte, pentru orice x, $|f(x, t) - \varphi(x)| < \varepsilon$, deci, în baza lui (5),

$$\left| \int_a^b f(x, t)dx - \int_a^b \varphi(x)\, dx \right| < \varepsilon(b - a),$$

de îndată ce $c'(\varepsilon) < t < t_0$. Teorema este astfel demonstrată.

Observaţii. Teoreme asemănătoare teoremei 4 se pot da pentru cazurile în care limita (3) este înlocuită cu limita uniformă la dreapta sau cu limita uniformă. În ultimul caz, se ia obligatoriu $t_0 \in J$.

Teorema 5. Fie f definită şi continuă pe $I \times J$ (I şi J compacte). Să presupunem că derivata $\frac{\partial f}{\partial t}$ există şi este continuă în $I \times J$. În aceste condiţii, funcţia (1) este derivabilă pe J şi derivata este dată de

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}\, dx$$

(formula lui Leibniz). $F'(t)$ este continuă pe J.

Demonstrație. Fie $t_0 \in J$. Avem

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \int_a^b \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} \mathrm{d}x.$$

Să introducem următoarea funcție auxiliară, definită pe $I \times J$:

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} \dfrac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0}, & \text{dacă } t \neq t_0, \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)_{(x, t_0)}, & \text{dacă } t = t_0. \end{cases}$$

Ținînd seama de continuitatea funcției f și a funcției $\frac{\partial f}{\partial t}$ pe $I \times J$, rezultă că φ este continuă pe $I \times J$. În baza teoremei 3, rezultă că funcția

$$G(t) = \int_a^b \varphi(x, t)\, \mathrm{d}x$$

este continuă pe J, deci

$$\lim_{t \to t_0} G(t) = \lim_{t \to t_0} \int_a^b \varphi(x, t) \mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(x, t_0) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{(x, t_0)} \mathrm{d}x.$$

Însă pentru $t \neq t_0$ avem $G(t) = \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$, deci

$$\lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{(x, t_0)} \mathrm{d}x = F'(t_0).$$

În sfîrșit, să observăm că, în baza continuității funcției $\frac{\partial f}{\partial t}$ pe $I \times J$ și folosind teorema 3, rezultă că $F'(t)$ este continuă pe J și teorema este, astfel, complet demonstrată.

Exemplu. Fie pentru $0 < t < \infty$, funcția

$$F(t) = \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{t^2 + x^2}.$$

Funcția

$$f(x, t) = \frac{1}{x^2 + t^2}$$

este continuă pe $[0, b] \times J$, oricare ar fi intervalul compact J conținut în $(0, \infty)$. Derivata parțială

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{2t}{(x^2 + t^2)^2}$$

este continuă pe $[0, b] \times J$, deci, în baza teoremei 5, F este derivabilă pe J şi

$$F'(t) = -\int_0^b \frac{2t\,dx}{(x^2+t^2)^2}$$

pentru $t \in J$; însă J este un interval compact arbitrar, conţinut în $(0, \infty)$, deci F este derivabilă pe $(0, \infty)$ şi derivata este dată de expresia de mai sus.

Teorema 6. **Fie** f **continuă pe** $I \times J$ $(I = [a, b],\ J = [c, d])$. **Avem**

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, t)\,dt\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t)\,dx\right) dt.$$

Demonstraţie. Să punem

$$\Phi(z) = \int_a^b \left(\int_c^z f(x, t)\,dt\right) dx,$$

$$\psi(z) = \int_c^z \left(\int_a^b f\,(x, t)\,dx\right) dt.$$

Totul revine la a arăta că $\Phi(d) = \psi(d)$. Principiul demonstraţiei va fi următorul: vom demonstra că Φ şi ψ sînt derivabile pe J şi $\Phi'(z) = \psi'(z)$, pentru orice $z \in J$, de unde va rezulta că Φ şi ψ diferă printr-o funcţie constantă. Apoi vom arăta că această constantă este nulă.

Din continuitatea lui f pe $I \times J$ rezultă, în baza teoremei 3, că funcţia definită de (1) este continuă pe J; de aici, în baza unei teoreme bine cunoscute din teoria integralei Riemann, rezultă că ψ este derivabilă pe J şi

$$\psi'(z) = \int_a^b f(x, z)\,dx.$$

Să punem

$$\varphi(x, z) = \int_c^z f(x, t)dt.$$

Din continuitatea funcţiei f rezultă că φ este derivabilă în raport cu z şi

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = f(x, z),$$

deci derivata este la rîndul ei continuă pe $I \times J$. Dar atunci, în baza teoremei 5 şi ţinînd seama de definiţia funcţiei Φ, rezultă că Φ este derivabilă pe J şi

$$\Phi'(z) = \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dx = \int_a^b f(x, z)dx,$$

deci $\Phi'(z) = \psi'(z)$ pentru orice $z \in J$. Rezultă existenţa unei constante λ cu proprietatea $\Phi(z) = \psi(z) + \lambda$ pentru orice $z \in J$. Cum însă avem, evident, $\Phi(c) = \psi(c) = 0$, rezultă că $\lambda = 0$, deci $\Phi(z) = \psi(z)$ pentru $z \in J$. În particular, $\Phi(d) = \psi(d)$ şi teorema este complet demonstrată.

Exemplu. Fie $f(x, t) = x^t$ considerată pe $[0, 1] \times [a, b]$, unde $0 < a < b$. f este, evident, continuă pe $[0, 1] \times [a, b]$, deci, în baza teoremei 6, avem

$$\int_a^b \left(\int_0^1 x^t \, dx\right) dt = \int_0^1 \left(\int_a^b x^t \, dt\right) dx.$$

În stînga se obţine

$$\int_a^b \frac{dt}{1 + t} = \ln \frac{1 + b}{1 + a},$$

iar în dreapta se obţine

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx,$$

deci

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx = \ln \frac{1 + b}{1 + a}.$$

Pînă acum ne-am limitat la cazul în care parametrul t apare numai în expresia funcţiei care se integrează. Acum vom considera integrale în care parametrul apare atît în expresia funcţiei care se integrează cît şi la limitele de integrare. Vom studia, pentru astfel de integrale, condiţii de continuitate şi condiţii de derivabilitate.

Fie f definită pe $I \times J$ ($I = [a, b]$, $J = [c, d]$). Să presupunem că funcţiile parţiale ale lui f în raport cu x sînt, toate, integrabile pe $[a, b]$. Fie a şi b două funcţii definite pe J şi cu valori în I. În aceste condiţii, integrala

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) \, dx \tag{6}$$

are sens pentru orice $t \in J$.

În cele ce urmează vom utiliza următoarea identitate, a cărei verificare o lăsăm pe seama cititorului:

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) \, dx = \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} f(x, t) \, dx + \int_{b(t_0)}^{b(t)} f(x, t) \, dx - \int_{a(t_0)}^{a(t)} f(x, t) \, dx, \tag{7}$$

pentru orice pereche de valori $t \in J$, $t_0 \in J$.

Teorema 7. *Fie f continuă pe $I \times J$ ($I = [a, b]$, $J = [c, d]$), iar a și b două funcții continue pe J și cu valori în I. În aceste condiții, funcția definită de (6) este continuă pe J.*

Demonstrație. Fie $t_0 \in J$. În baza continuității funcției $f(x, t)$ pe $I \times J$ rezultă folosind teorema 3, că prima integrală din membrul al doilea din (7) tinde către $F(t_0)$ cînd $t \to t_0$. În ceea ce privește celelalte două integrale din (7), se vede ușor că ele tind la zero cînd $t \to 0$. Într-adevăr, în baza teoremei de medie există o valoare intermediară ξ_t, astfel încît

$$\int_{b(t_0)}^{b(t)} f(x, t)\, dx = [b(t) - b(t_0)] \cdot f(\xi_t, t),$$

de unde, în baza continuității funcției b în t_0, rezultă că integrala tinde la zero. Un procedeu analog se aplică și ultimei integrale din membrul al doilea din (7), folosind de astă dată continuitatea lui a în t_0. Așadar

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0).$$

Cum t_0 este un punct oarecare din J, rezultă că F este continuă în J.

Teorema 8. *Fie f continuă pe $I \times J$ ($I = [a, b]$, $J = [c, d]$), iar a și b două funcții derivabile pe J și cu valori în I. Să presupunem că f admite, pe $I \times J$, derivată parțială în raport cu t continuă. În aceste condiții, funcția definită de (6) este derivabilă pe J și*

$$F'(t_0) = \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{(x,\, t_0)} dx + \left(\frac{db}{dt}\right)_{t_0} \cdot f(b(t_0), t_0) - \left(\frac{da}{dt}\right)_{t_0} \cdot f(a(t_0), t_0),$$

pentru $t_0 \in J$.

Demonstrație. Avem, în baza identității (7),

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0}\, dx + \frac{1}{t - t_0} \int_{b(t_0)}^{b(t)} f(x, t)\, dx - \frac{1}{t - t_0} \int_{a(t_0)}^{a(t)} f(x, t)\, dx.$$

Prima integrală are limite fixe, deci, aplicînd teorema 5 funcției

$$H(t) = \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} f(x, t)\, dx,$$

obținem

$$H'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0}\, dx = \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{(x,\, t_0)} dx. \tag{9}$$

Mai departe, în baza teoremei de medie aplicate celei de-a doua integrale din (8), există o valoare intermediară ξ_t cu proprietatea

$$\frac{1}{t-t_0}\int_{b(t_0)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x = \frac{b(t)-b(t_0)}{t-t_0}\cdot f(\xi_t, t)$$

şi, folosind derivabilitatea lui b în t_0 şi continuitatea lui f, rezultă

$$\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\int_{b(t_0)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{db}{dt}\right)_{t_0}\cdot f(b(t_0), t_0). \tag{10}$$

În mod analog (aplicînd teorema de medie ultimei integrale din (8) şi folosind derivabilitatea lui a în t_0 şi din nou continuitatea lui f) se arată că

$$\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\int_{a(t_0)}^{a(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{da}{dt}\right)_{t_0}\cdot f(a(t_0), t_0). \tag{11}$$

Din (8), (9), (10) şi (11) rezultă formula din enunţ.

Exemplu. Fie ψ o funcţie reală continuă pe $[a, b]$. Să considerăm funcţia

$$\varphi(t) = \frac{1}{k}\int_a^t \psi(x)\sin k(t-x)\,\mathrm{d}x.$$

Funcţia $f(x,t) = \psi(x)\sin k(t-x)$ este continuă pe $[a, b]\times J$, J fiind un interval compact arbitrar, conţinut în $(-\infty, \infty)$. Derivata parţială

$$\frac{\partial f}{\partial t} = k\psi(x)\cos k(t-x)$$

este continuă pe $[a, b]\times J$. Funcţia $b(t) = t$ este derivabilă pe J, deci toate condiţiile pentru aplicarea teoremei 8 sînt îndeplinite. Avem

$$\varphi'(t) = \frac{1}{k}\int_a^t k\psi(x)\cos k(t-x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{k}\psi(t)\sin k(t-t) = \int_a^t \psi(x)\cos k(t-x)\,\mathrm{d}x.$$

Aplicînd teorema 8 ultimei integrale obţinute, găsim

$$\varphi''(t) = -k\int_a^t \psi(x)\sin k(t-x)\,\mathrm{d}x + \psi(t)\cos k(t-t) = -k^2\varphi(t) + \psi(t).$$

Vom considera acum o funcţie f definită pe $I\times J$, unde I este un interval necompact — pentru a fixa ideile, îl vom presupune de forma $[a, b)$ — iar J este un interval compact, fie el $[c, d]$. Presupunînd că integrala

$$F(t) = \int_a^{b-0} f(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

este convergentă pentru orice valoare a lui $t \in J$, ne propunem să dăm condiții de continuitate și de derivabilitate pentru F. În formularea acestor condiții, un rol fundamental îl va avea noțiunea de convergență uniformă a unei integrale cu parametru pe un interval necompact, noțiune pe care o vom defini în cele ce urmează.

Convergența integralei (12) pentru orice valoare a lui $t \in J$ revine la următoarea situație: fiind date un număr $\varepsilon > 0$ și un număr $t \in J$, există un număr $c(\varepsilon, t)$, astfel încît $a < c(\varepsilon, t) < b$ și, din $c(\varepsilon, t) < x' < b$, rezultă

$$\left| F(t) - \int_a^{x'} f(x, t)\, \mathrm{d}x \right| < \varepsilon. \tag{13}$$

Dacă, în formularea de mai sus, se poate asigura independența de t a lui $c(\varepsilon, t)$, cu alte cuvinte dacă, pentru $\varepsilon > 0$, există $c(\varepsilon)$, astfel încît $a < c(\varepsilon) < b$, și din $c(\varepsilon) < x' < b$ rezultă, pentru orice $t \in J$, inegalitatea (13), *atunci spunem că integrala* (12) *converge, pe $[a, b]$, uniform în raport cu $t \in J$.*

Noțiunea de „integrală cu parametru pe interval necompact" prezintă o analogie cu noțiunea de serie de funcții, tot așa cum noțiunea de integrală pe un interval compact prezintă o analogie cu noțiunea de serie numerică. Între convergența uniformă a unei integrale și convergența uniformă a unei serii sau a unui șir de funcții există o legătură strînsă, după cum rezultă din teorema care urmează și din observația care o însoțește.

T e o r e m a 9. Dacă integrala (12) converge uniform pentru $t \in J$, atunci șirul de funcții

$$F_n(t) = \int_a^{b_n} f(x, t)\, \mathrm{d}x, \tag{14}$$

unde $a < b_n < b$ și $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$, converge uniform pe J.

D e m o n s t r a ț i e. Fie $\varepsilon > 0$. Există, conform ipotezei, un număr $c(\varepsilon)$, astfel încît $a < c(\varepsilon) < b$ și din $c(\varepsilon) < x' < b$ rezultă, pentru orice $t \in J$, inegalitatea (13). Din modul în care a fost ales șirul b_n, rezultă existența unui număr natural $N(\varepsilon)$, astfel încît, pentru $n > N(\varepsilon)$, să avem $c(\varepsilon) < b_n < b$. Dar atunci, din $n > N(\varepsilon)$ rezultă, în baza convergenței uniforme a integralei (12), inegalitatea

$$|F_n(t) - F(t)| < \varepsilon$$

pentru orice $t \in J$. Din faptul că N depinde numai de ε și nicidecum de t, rezultă convergența uniformă, pe J, a șirului $\{F_n(t)\}$.

O b s e r v a ț i e. Se poate arăta (propunem aceasta cititorului ca exercițiu) că și reciproca teoremei 9 este adevărată. Cu alte cuvinte, dacă șirul (14) converge uniform pe J, oricare ar fi șirul $\{b_n\}$ tinzînd către b dinspre stînga, atunci integrala (12) converge uniform pentru $t \in J$.

T e o r e m a 10. Fie f definită și continuă pe $I \times J$, $I = [a, b)$, $J = [c, d]$. Să presupunem că integrala (12) converge uniform pentru $t \in J$. În aceste condiții, funcția F definită de (12) este continuă pe J.

D e m o n s t r a ț i e. Fie $\{b_n\}$ un șir de numere tinzînd către b dinspre stînga. În baza teoremei (9), șirul $\{F_n(t)\}$ definit de (14) converge uniform, pe J, către $F(t)$. În baza teoremei 3, aplicate funcției f pe $[a, b_n]\times[c, d]$ și ținînd seama de faptul că, prin ipoteză, f este continuă, rezultă că F_n este continuă pe J $(n = 1, 2, ...)$. În baza unei teoreme din volumul întîi, la șiruri de funcții continuitatea se păstrează prin convergență uniformă, deci F este continuă pe J.

T e o r e m a 11. Fie f definită și continuă pe $I \times J$, $I = [a, b]$, $J = [c, d]$. Să mai facem următoarele ipoteze: $\frac{\partial f}{\partial t}$ există și este continuă pe $I \times J$; integrala (12) converge pentru orice $t\in J$; integrala

$$\int_a^{b-0} \frac{\partial f}{\partial t}\, dx \tag{15}$$

converge uniform pentru $t\in J$.

În aceste condiții, funcția F definită de (12) este derivabilă pe J,

$$F'(t) = \int_a^{b-0} \frac{\partial f}{\partial t}\, dx, \tag{16}$$

iar $F'(t)$ este continuă pe J.

D e m o n s t r a ț i e. Fie un șir $\{b_n\}$ tinzînd către b dinspre stînga. Avem $[a, b_n]\times J\subset[a, b)\times J$, deci f posedă, pe $[a, b_n]\times J$, toate proprietățile pe care le are pe $I\times J$. În particular, pe $[a, b_n]\times J$ sînt îndeplinite toate condițiile pentru a se putea aplica teorema 5; rezultă că funcția F_n, definită de (14), este derivabilă pe J și

$$F_n'(t) = \int_a^{b_n} \frac{\partial f}{\partial t}\, dx. \tag{17}$$

Tot în baza teoremei 5, funcția $F_n'(t)$ este continuă pe $J(n = 1, 2, ...)$.

Din ipoteza de convergență a integralei (12) rezultă convergența, către $F(t)$, a șirului definit de (14). Din ipoteza de convergență uniformă a integralei (15) rezultă, folosind teorema 9 aplicată integralei (15), că șirul (17) converge uniform. Sînt, astfel, îndeplinite toate condițiile pentru aplicarea teoremei de derivabilitate termen cu termen a șirurilor de funcții (volumul întîi); rezultă că funcția F definită de (12) este derivabilă, iar derivata ei este tocmai limita șirului (17), deci este dată de (16). În sfîrșit, din convergența uniformă a șirului (17) și din faptul că termenii acestui șir sînt funcții continue pe J, după cum s-a arătat mai sus, rezultă că $F'(t)$ este continuă pe J (se aplică teorema din volumul întîi, conform căreia limita unui șir uniform convergent de funcții continue pe J este o funcție continuă pe J).

Teorema 12. **Fie f continuă pe $I \times J$, $I = [a, b)$, $J = [c, d]$. Să presupunem că integrala (12) converge uniform pentru $t \in J$. În aceste condiții, integrala**

$$\int_a^{b-0} \left(\int_c^d f(x, t)\, dt \right) dx \tag{18}$$

este convergentă și avem

$$\int_a^{b-0} \left(\int_c^d f(x, t)\, dt \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^{b-0} f(x, t)\, dx \right) dt = \int_c^d F(t)\, dt \tag{19}$$

(existența ultimei integrale este asigurată de teorema 10).

Demonstrație. Fie un șir $\{b_n\}$ astfel încît $a < b_n < b$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Avem, pentru orice n, $[a, b_n] \subset [a, b)$, deci în baza continuității funcției f pe $I \times J$ rezultă, folosind teorema 6, următoarea egalitate ($n = 1, 2, \ldots,$):

$$\int_a^{b_n} \left(\int_c^d f(x, t)\, dt \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^{b_n} f(x, t)\, dx \right) dt = \int_c^d F_n(t)\, dt. \tag{20}$$

În baza teoremei 9, șirul (14) converge uniform pe J; cum, pe de altă parte, $F_n(t)$ este continuă pe J (conform teoremei 3), rezultă, în baza teoremei care a condus la relația (2), că

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^d F_n(t)\, dt = \int_c^a F(t)\, dt, \tag{21}$$

deci membrul al doilea din (20) are limită finită cînd $n \to \infty$; dar atunci, și primul membru din (20) are limită finită cînd $n \to \infty$ și această limită este dată tot de (21), deci existența și valoarea ei nu depind de alegerea șirului $\{b_n\}$ care tinde la b dinspre stînga. Așadar, integrala (18) este convergentă și, deoarece o egalitate se păstrează prin trecere la limită, din (20) rezultă (19).

Teoremele 13 și 14 de mai jos, în afară de interesul lor în sine, intervin esențial în stabilirea teoremei 15.

Teorema 13. **Fie f definită pe $I \times J$; $I = [a, b)$, $J = [c, d)$. Să presupunem că există limitele**

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to d-0} f(x, t) = \varphi(x), \\ &\lim_{x\to b-0} f(x, t) = \psi(t) \end{aligned} \tag{22}$$

și că prima limită este uniformă în raport cu $x \in [a, b)$. În aceste condiții, următoarele două limite există și sînt egale:

$$\lim_{x\to b-0} \varphi(x) = \lim_{t\to d-0} \psi(t), \tag{23}$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. În baza criteriului Cauchy-Bolzano pentru limita uniformă, există d', $c < d' < d$, astfel încît, pentru $d' < t < t' < d$, să avem

$$|f(x, t') - f(x,t)| < \varepsilon, \tag{24}$$

oricare ar fi $x \in I$. Să fixăm pe t și t'; pentru $x \to b - 0$ obținem

$$|\psi(t') - \psi(t)| \leqslant \varepsilon, \tag{25}$$

deci funcția ψ satisface criteriul Cauchy-Bolzano; ψ admite limită finită pentru $t \to d - 0$:

$$\lim_{t \to d-0} \psi(t) = A.$$

Din (24), pentru $t' \to d - 0$, rezultă, în baza lui (22),

$$|\varphi(x) - f(x, t)| < \varepsilon,$$

pentru $d' < t < d$ și oricare ar fi $x \in I$. Din (25), pentru $t' \to d - 0$, rezultă

$$|\psi(t) - A| \leqslant \varepsilon,$$

pentru $d' < t < d$. Fie t' astfel încît $d' < t' < d$. În baza lui (22) există b', $a < b' < b$, astfel încît din $b' < x < b$ să rezulte

$$|f(x, t') - \psi(t')| < \varepsilon.$$

Așadar, pentru $b' < x < b$ avem

$$|\varphi(x) - A| \leqslant |\varphi(x) - f(x,t')| + |f(x, t') - \psi(t')| + |\psi(t') - A| \leqslant 3\varepsilon,$$

deci

$$\lim_{x \to b-0} \varphi(x) = A$$

și relația (23) este stabilită.

Observație. Teorema 13 rămîne, evident, adevărată dacă $[a, b]$ este înlocuită cu $(a, b]$, $[c, d]$, este înlocuit cu $(c, d]$, iar limitele la stînga în b și d sînt înlocuite cu limitele la dreapta în a și c. Teorema 13 rămîne de asemenea adevărată dacă limitele unilaterale sînt înlocuite cu limite propriu-zise.

Teorema 14. Fie f definită pe $I \times J$, $I = [a, b)$, $J = [c, d)$. Să presupunem că integrala

$$F(b', t) = \int_a^{b'} f(x, t)\, \mathrm{d}x$$

există pentru orice b', $a < b' < b$, și că limita

$$\lim_{t \to d-0} f(x, t) = \varphi(x) \tag{26}$$

există pentru orice $x \in I$ şi este uniformă în raport cu $x \in I$. Să mai presupunem că integrala (12) converge uniform pentru $x \in J$. În aceste condiţii, avem

$$\lim_{t \to d-0} \int_a^{b-0} f(x, t)\, dx = \int_a^{b-0} \varphi(x)\, dx. \tag{27}$$

D e m o n s t r a ţ i e. În baza ipotezei (26) şi a teoremei 4, avem:

$$\lim_{t \to d-0} F(b', t) = \int_a^{b'} \varphi(x)\, dx.$$

În baza convergenţei integralei (12) avem

$$\lim_{b \to b-0} F(b', t) = \int_a^{b-0} f(x, t)\, dx. \tag{28}$$

În baza ipotezei de uniformitate a convergenţei integralei (12) rezultă că limita (28) este uniformă în raport cu $t \in J$. În felul acesta sînt îndeplinite toate condiţiile pentru a aplica funcţiei $F(b', t)$ teorema 13, deci are loc relaţia (27).

T e o r e m a 15. **Fie f continuă pe $I \times J$, $I = [a, b)$, $J = [c, d)$. Să presupunem că integralele**

$$\int_a^{b-0} f(x, t)\, dx, \quad \int_c^{d-0} f(x, t)\, dt \tag{29}$$

converg uniform — prima în raport cu t, pe orice interval compact conţinut în J; a doua în raport cu x, pe orice interval compact conţinut în I. Să mai presupunem că cel puţin una dintre integralele

$$\int_c^{d-0} \left(\int_a^{b-0} |f(x, t)|\, dx \right) dt, \quad \int_a^{b-0} \left(\int_c^{d-0} |f(x, t)|\, dt \right) dx \tag{30}$$

este convergentă. În aceste condiţii, următoarele două integrale sînt convergente şi egale:

$$\int_c^{d-0} \left(\int_a^{b-0} f(x, t)\, dx \right) dt = \int_a^{b-0} \left(\int_c^{d-0} f(x, t)\, dt \right) dx. \tag{31}$$

D e m o n s t r a ţ i e. Să presupunem că a doua integrală din (23) este convergentă. Fie $c < d' < d$. În baza teoremei 12, avem

$$\int_c^{d'} \left(\int_a^{b-0} f(x, t)\, dx \right) dt = \int_a^{b-0} \left(\int_c^{d'} f(x, t)\, dt \right) dx. \tag{32}$$

Totul revine la a demonstra că în a doua integrală din (32) se poate trece la limită sub semnul integralei $d' \to d - 0$. Într-adevăr, dacă acest lucru ar fi posibil, am avea

$$\int_c^{d-0}\left(\int_a^{b-0} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \lim_{d'\to d}\int_c^{d'}\left(\int_a^{b-0} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{d'\to d}\int_a^{b-0}\left(\int_c^{d'} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_a^{b-0}\left(\lim_{d'\to d}\int_c^{d'} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_a^{b-0}\left(\int_c^{d-0} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

şi teorema ar fi demonstrată.

Pentru a arăta că acest lucru este posibil, vom demonstra că sînt îndeplinite toate condiţiile pentru a aplica, celei de-a doua integrale din (32), teorema 14. În baza teoremei 3, funcţia

$$G(d', x) = \int_c^{d} f(x, t)\,\mathrm{d}t \tag{33}$$

este continuă, în raport cu x, pe $I \times [c, d']$.

Prin ipoteză, pentru $d' \to d - 0$, funcţia (33) tinde către a doua integrală de la (29), uniform în raport cu x, pe orice interval compact conţinut în I.

Deoarece avem, evident,

$$\left|\int_c^{d'} f(x, t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_c^{d-0} |f(x, t)|\,\mathrm{d}t,$$

rezultă că integrala

$$\int_a^{b-0}\left(\int_c^{d'} f(x, t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \tag{34}$$

este majorată de a doua integrală din (30), care este convergentă prin ipoteză. Deci integrala (34) converge uniform în raport cu d'. În felul acesta, toate condiţiile pentru aplicarea teoremei 14 sînt îndeplinite şi egalitatea (31) este stabilită.

Deoarece noţiunea de convergenţă uniformă a unei integrale pe interval necompact intervine în enunţul a numeroase teoreme, este necesar să găsim criterii cît mai practice pentru recunoaşterea ei. Astfel de criterii sînt date în cele ce urmează.

Teorema 16. Fie $f(x, t)$ definită pe $I \times J$, $I = [a, b)$, $J = [c, d]$. Să presupunem că integrala

$$\int_a^{b} f(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{35}$$

există pentru orice b' cuprins între a şi b şi pentru orice $t \in J$.

Pentru ca integrala

$$\int_a^{b-0} f(x,t)\,dx \tag{36}$$

să conveargă, pe $[a, b)$, uniform în raport cu $t \in J$, este necesar şi suficient ca, pentru $\varepsilon > 0$, să existe un număr b'_ε, $a < b'_\varepsilon < b$, astfel încît din $b'_\varepsilon < x' < x'' < b$ să rezulte

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(x,t)\,dx\right| < \varepsilon$$

pentru orice $t \in J$.

Demonstraţie. Se foloseşte aceeaşi cale ca şi în demonstraţia teoremei din capitolul precedent, cu singura deosebire că, în loc de criteriul Cauchy-Bolzano, se aplică un echivalent al acestui criteriu pentru limita uniformă, şi anume:

Fie $F(x, t)$ o funcţie reală definită pe $I \times J$, $I = [a, b)$, $J = [c, d]$. Pentru ca

$$L = \lim_{x \to b-0} F(x,t)$$

să existe uniform în raport cu $t \in J$ şi să fie finită (cu alte cuvinte, pentru $\varepsilon > 0$ să existe b'_ε, $a < b'_\varepsilon < b$ astfel încît din $b'_\varepsilon < x < b$ să rezulte $|F(x,t) - L| < \varepsilon$, oricare ar fi $t \in J$) este ca, fiind dat un $\varepsilon > 0$, să existe b_ε, $a < b'_\varepsilon < b$, astfel încît din $b'_\varepsilon < x' < x'' < b$ să rezulte $|F(x', t) - F(x'', t)| < \varepsilon$, oricare ar fi $t \in J$.

Acest rezultat se stabileşte urmînd întocmai demonstraţia criteriului Cauchy-Bolzano din capitolul precedent.

Teorema 17. **Fie $f(x, t)$ definită pe $I \times J$, $I = [a, b)$, $J = [c, d]$. Să presupunem că integrala (35) există pentru orice $b'(a < b' < b)$ şi pentru orice $t \in J$. Pentru ca integrala (36) să conveargă pe $[a, b)$ uniform în raport cu $t \in J$ este suficient să existe o funcţie φ definită pe $[a, b)$, cu următoarele două proprietăţi:**

1) $|f(x,t)| \leqslant \varphi(x)$ pentru orice $x \in I$ şi pentru orice $t \in J$;

2) integrala:

$$\int_a^{b-0} \varphi(x)\,dx \tag{37}$$

este convergentă.

Demonstraţie. Din convergenţa integralei (37) rezultă, în baza teoremei 1 din capitolul precedent că, fiind dat un $\varepsilon > 0$, există un număr $b'_\varepsilon (a < b'_\varepsilon < b)$, astfel încît din $b'_\varepsilon < x' < x'' < b$ să rezulte

$$\left|\int_{x'}^{x''} \varphi(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Pe de altă parte, folosind cealaltă proprietate a funcţiei φ, rezultă că, pentru orice $t\in J$, avem

$$\int_{x'}^{x''} |f(x,t)|\,dx \leqslant \left|\int_{x'}^{x''} \varphi(x)\,dx\right|$$

deci

$$\int_{x'}^{x''} |f(x,t)|\,dx < \varepsilon,$$

pentru orice $t\in J$ şi orice pereche de numere x', x'', astfel încît $b'_\varepsilon < x' < < x'' < b$. Folosind teorema 16, rezultă convergenţa uniformă a integralei (36).

Observaţie. Situaţia în care se află integrala (36) în teorema 16 este analogă convergenţei normale din teoria seriilor de funcţii. Teorema (36) este un analog al criteriului lui Weierstrass de convergenţă uniformă.

Vom da acum o teoremă care reprezintă analogul teoremei 5 din capitolul precedent.

Teorema 17'. Fie f continuă pe $I\times J$, $I=[a,b)$, $J=[c,d]$ şi fie g definită pe $I\times J$, monotonă, pe I, pentru orice $t\in J$. Să presupunem că există un număr real k, astfel încît

$$\left|\int_{b}^{u} f(x,t)\,dx\right| < k$$

pentru orice $t\in J$ şi pentru orice $u\in I$. Să mai presupunem că

$$\lim_{x\to b-0} g(x,t)$$

există, nulă şi uniformă în raport cu $t\in J$, cu alte cuvinte, pentru $\varepsilon>0$ există $b'>a$, astfel încît $|g(x,t)|<\varepsilon$ pentru orice $t\in J$ şi pentru orice x, pentru care $b'<x<b$.

În aceste condiţii, integrala

$$\int_{a}^{b-0} f(x,t)\,g(x,t)\,dx$$

converge uniform în raport cu $t\in J$.

Pentru *demonstraţie* se foloseşte aceeaşi cale ca şi în demonstraţia teoremei 5 din capitolul precedent.

Teorema 6 din capitolul precedent îşi are şi ea un analog pentru convergenţa uniformă:

Teorema 18. Fie $f(x,t)$ definită şi continuă pe $I\times J$, $I=[a,b)$, $J=[c,d]$. Să presupunem că integrala

$$\int_{a}^{b-0} f(x,t)\,dx$$

converge uniform în raport cu $t \in [c, d]$. Fie $g(x, t)$ definită pe $I \times J$, monotonă în raport cu $x \in [a, b)$ pentru orice $t \in J$ şi astfel încît există o constantă M cu proprietatea

$$|g(x, t)| < M$$

pentru orice $x \in I$ şi orice $t \in J$. În aceste condiţii, integrala

$$\int_a^{b-0} f(x, t)\, g(x, t)\, dx$$

converge uniform în raport cu $t \in J$.

Pentru *demonstraţie* se foloseşte aceeaşi cale ca şi în demonstraţia teoremei 6 din capitolul precedent.

Exemple. 1) Fie

$$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{x}\, dx. \tag{38}$$

Să punem

$$\theta(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\sin xt}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

θ este continuă, în raport cu x, pe $[0, \infty)$, oricare ar fi t real şi avem

$$\int_0^{\infty} \theta(x, t)\, dx = \int_{0+0}^{\infty} \frac{\sin xt}{x}\, dx.$$

În fapt, ori de cîte ori scriem integrala (38), gîndim integrala funcţiei θ, adică integrala prelungirii prin continuitate a funcţiei de sub integrala (38).

Avem, pentru $t \in [c, d]$, $c > 0$, şi pentru $u > 0$

$$\int_0^u \sin xt\, dx = \frac{-\cos ut + 1}{t} = \frac{2 \sin^2 \frac{ut}{2}}{t} \leqslant \frac{2}{t} \leqslant \frac{2}{c},$$

iar limita

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

este, evident, uniformă în raport cu $t \in [c, d]$. Putem deci aplica integralei (38) teorema 17, luînd $f(x, t) = \sin xt$, $g(x, t) = \frac{1}{x}$, $a = 0$, $b = \infty$. Rezultă că integrala (38) converge, pe $[0, \infty)$, uniform în raport cu $t \in [c, d]$, unde $c > 0$, iar d este un număr real arbitrar, mai mare ca c. Condiţia

$c > 0$ este esențială pentru uniformitatea convergenței integralei (38) în raport cu $t \in [c, d]$; în ceea ce îl privește pe d, putem lua și $d = \infty$.

Observînd acum că funcția care figurează sub integrala (38) este continuă pe $[0, \infty) \times [c, d]$ și folosind teorema 10, rezultă că funcția F definită de (38) este continuă pe $[c, d]$, oricare ar fi $d > c$, deci F este continuă pe $[c, \infty)$. Însă, deoarece c este un număr pozitiv arbitrar, rezultă că F este continuă pe $(0, \infty)$.

Dacă vrem să studiem derivabilitatea funcției F, constatăm că teorema 11 este inaplicabilă, deoarece integrala derivatei funcției de sub integrala (38) este divergentă pe $[0, \infty)$. Pentru a studia derivabilitatea funcției F vom utiliza o integrală ajutătoare. Fie, pentru $t \geqslant 0$ și $k > 0$.

$$\Phi(t) = \int_{0+0}^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin tx}{x} \, dx. \tag{39}$$

Punînd

$$\lambda(x, t) = \begin{cases} e^{-kx} \dfrac{\sin tx}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

observăm că

$$\int_0^{\infty} \lambda(x, t) \, dx \tag{39'}$$

este egală cu integrala (39). În fapt, despre integrala (39') va fi vorba în cele ce urmează.

Punînd $f(x, t) = \sin tx$, $g(x) = x^{-1} e^{-kx}$, $\varphi(x, t) = f(x, t)\, g(x)$, observăm că, pentru orice $u \in [0, \infty)$ și pentru orice $t > 0$, avem

$$\left| \int_0^u f(x, t) \, dx \right| = \frac{1 - \cos tu}{t} \leqslant \frac{2}{t}$$

și $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$, deci în baza teoremei 5 din capitolul precedent și ținînd seama de monotonia funcției g, rezultă că integrala (39) este convergentă pentru orice $t > 0$. Pentru $t = 0$, convergența integralei (39) are loc în mod banal, deoarece în acest caz $\varphi(x, t) = 0$.

Avem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = e^{-kx} \cos t\, x$$

și

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dx = \frac{k}{t^2 + k^2}. \tag{40}$$

Pe de altă parte, avem

$$|e^{-kx} \cos t\, x| \leqslant e^{-kx},$$

iar integrala

$$\int_0^{\infty} e^{-kx}\,\mathrm{d}x$$

este convergentă, deci aplicînd teorema 17, rezultă că integrala (40) converge uniform în raport cu $t\in[c, d]$, unde $0\leqslant c\leqslant d$. Sînt îndeplinite toate condiţiile pentru a putea aplica integralei (39) teorema 11; funcţia Φ este derivabilă pe $[c, d]$ şi

$$\Phi'(t) = \frac{k}{t^2+k^2}.$$

Însă c este un număr negativ arbitrar, iar d este un număr arbitrar, mai mare ca c; rezultă că Φ este derivabilă pe $[0, \infty)$, iar expresia de mai sus a derivatei lui Φ este valabilă pe $[0, \infty)$. De aici deducem, pentru $t\geqslant 0$.

$$\Phi(t) = \operatorname{Arctg}\frac{t}{k} \tag{41}$$

(valoarea constantei aditive care apare, prin trecere la primitivă, este aici egală cu zero).

Să arătăm că integrala (39) converge uniform în raport cu $k\geqslant 0$. Într-adevăr, e^{-kx} este monotonă în raport cu x şi

$$e^{-kx}\leqslant 1$$

pentru orice $k\geqslant 0$ şi orice $x\geqslant 0$. Pe de altă parte, integrala

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x$$

este, după cum ştim, convergentă, şi această convergenţă este, în mod banal, uniformă, în raport cu k, deoarece funcţia de sub integrală nu depinde de k. Putem atunci aplica teorema 18; rezultă că integrala (39) converge uniform în raport cu k, deci conform teoremei 10, integrala (39) este o funcţie continuă, în raport cu k, pe $[0, \infty)$. Cum însă, pentru $k > 0$, integrala (39) este dată de (41), rezultă

$$F(t) = \int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to 0+0}\operatorname{Arctg}\frac{t}{k} = \frac{\pi}{2}$$

pentru orice $t > 0$. Aşadar, funcţia F este constantă pe $[0, \infty)$, deci în mod banal derivabilă.

2) Să considerăm integrala lui *Euler-Poisson*

$$\int_{0+0}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \tag{42}$$

foarte importantă în teoria probabilităţilor. Această integrală este convergentă, după cum rezultă din teorema de comparaţie din capitolul precedent; într-adevăr, pe $[1, \infty)$ avem $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$, iar integrala

$$\int_1^{\infty} e^{-x}\, dx$$

este convergentă, deci integrala

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

este convergentă. În ceea ce priveşte intervalul $(0, 1]$, punînd

$$\lambda(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

rezultă că λ este continuă pe $[0, 1]$ şi

$$\int_0^1 \lambda(x)\, dx = \int_{0+0}^1 e^{-x^2}\, dx, \tag{43}$$

deci ultima integrală converge în mod banal pe $(0, 1]$, reducîndu-se la o integrală pe interval compact. În fapt, ori de cîte ori se consideră integrala (42), se are în vedere, în mod tacit, integrala

$$\int_0^{\infty} \lambda(x)\, dx.$$

Să aplicăm integralei (42) teorema de schimbare de variabilă pentru integrala pe interval necompact; punînd $x = ut$ $(u > 0)$, obţinem

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = u \int_0^{\infty} e^{-u^2 t^2}\, dt.$$

Multiplicînd ambii membri ai acestei egalităţi cu e^{-u^2}, obţinem

$$e^{-u^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = e^{-u^2}\, u \int_0^{\infty} e^{-u^2 t^2}\, dt.$$

Aplicînd teorema 15, se constată că ambii membri ai ultimei egalităţi sînt funcţii integrabile, în raport cu u, pe $(0, \infty)$, şi avem, schimbînd în membrul al doilea ordinea de integrare,

$$A^2 = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)\, u^2} u\, du \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{4},$$

deci

$$A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Observaţie. Convergenţa integralei lui Euler-Poisson a fost stabilită, pe altă cale, în capitolul 4.

3) *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Arc\,tg} ax}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \ (a > 0).$$

Integrala dată este uniform convergentă, întrucît este majorată de integrala

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)},$$

care este independentă de a. Fie $F(a)$ valoarea acestei integrale. Integrala obţinută prin derivare sub semnul $\int$, şi anume

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+a^2x^2)}$$

este şi ea uniform convergentă, deoarece este majorată de integrala independentă de a

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Deci $F(a)$ este derivabilă şi avem

$$F'(a) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+a^2x^2)} = \frac{a^2}{a^2-1}\left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2x^2} - \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{2(a+1)},$$

de unde:

$$F(a) = \frac{\pi}{2}\ln(a+1) + C.$$

Pentru $a \to 0$, avem $F(a) \to 0$, deci $C = 0$ şi valoarea căutată este $\frac{\pi}{2}\ln(a+1)$.

4) *Să se calculeze valoarea funcţiei $F(t)$ definită prin*

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Apoi să se deducă valoarea integralei

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\, dx.$$

Se arată că integrala dată, ca şi integrala obţinută prin derivare sub semnul integralei

$$-\int_0^\infty e^{-tx} \sin^3 x dx,$$

sînt uniform convergente pentru $t \geqslant 0$. De aici rezultă, în primul rînd, $I = F(0)$, apoi

$$F'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx} \sin^3 x\, dx.$$

Primitiva funcţiei $e^{-tx} \sin^3 x$ se calculează imediat. Avem

$$-\int e^{-tx} \sin^3 x\, dx = \frac{1}{4}\int e^{-tx} \sin 3x\, dx - \frac{3}{4}\int e^{-tx} \sin x\, dx =$$

$$= \frac{3}{4}\, \frac{c^{-tx}(t \sin x + \cos x)}{1+t^2} - \frac{1}{4}\, \frac{e^{-tx}(t \sin^3 3x + \cos 3x)}{9+t^2},$$

de unde

$$F'(t) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9+t^2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

şi

$$F(t) = \frac{1}{12}\operatorname{Arctg}\frac{t}{3} - \frac{3}{4}\operatorname{Arctg} t + C.$$

Cum $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 0$, deducem $C = \frac{\pi}{3}$,

deci

$$F(t) = \frac{1}{12}\operatorname{Arctg}\frac{t}{3} - \frac{3}{4}\operatorname{Arctg} t + \frac{\pi}{3}$$

şi

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \frac{\pi}{3}.$$

5) *Să se calculeze*

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx.$$

Avem

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Integrînd prin părţi în primul membru, obţinem

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = [xe^{-x^2}]_0^\infty + 2\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx.$$

Valoarea căutată este $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Integrala euleriană de prima specie. Fie $a > 0$ şi $b > 0$. Vom arăta că integrala

$$B(a, b) = \int_{0+0}^{1-0} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \tag{44}$$

este convergentă. Pentru $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$, funcţia de sub integrală este continuă pe $[0, 1]$, deci integrala are sens chiar pe $[0, 1]$. Dacă cel puţin unul dintre numerele a şi b este mai mic decît 1, raţionăm în modul următor:

Dacă $a < 1$, atunci integrala

$$\int_{0+0}^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x)^{b-1}}{x^{1-a}}\,dx$$

este convergentă pentru $1 - a < 1$, deci pentru $a > 0$, aşa cum rezultă din teorema 4, capitolul precedent. Dacă $b < 1$, atunci integrala

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-0} \frac{x^{a-1}}{(1-x)^{1-b}}\,dx$$

este convergentă, pentru $1 - b < 1$, deci pentru $b > 0$, în baza aceleiaşi teoreme 4 din capitolul precedent. Deci, pentru $a > 0$, $b > 0$, integrala (44) este convergentă; funcţia $B\ (a, b)$ („Beta") este definită în porţiunea de plan cu ambele coordonate strict pozitive.

Este uşor de văzut (printr-o schimbare de variabilă de forma $x = 1 - t$) că

$$B(a, b) = B\ (b, a), \tag{45}$$

cu alte cuvinte funcţia B este simetrică în a şi b.

Să aplicăm integralei (44) teorema de schimbare de variabilă pentru integrale pe interval necompact, cu

$$x = \varphi(u) = \frac{u}{1+u}. \tag{46}$$

Funcţia φ este derivabilă, cu derivata continuă pe $(0, \infty)$, şi aplică intervalul $(0, \infty)$ pe intervalul $(0, 1)$. Din faptul că derivata

$$\varphi'(u) = \frac{1}{(1+u)^2}$$

este pozitivă pe $(0, \infty)$, rezultă că φ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$, deci toate condiţiile pentru aplicarea schimbării de variabilă definite de (46) sînt îndeplinite. Avem:

$$\int_{0+0}^{1-0} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \int_{0+0}^{\infty} \frac{u^{a-1}du}{(1+u)^{a-1}(1+u)^{b-1}(1+u)^2} = \int_{0+0}^{\infty} \frac{u^{a-1}du}{(1+u)^{a+b}},$$

deci

$$B(a, b) = \int_{0+0}^{\infty} \frac{u^{a-1}du}{(1+u)^{a+b}}. \tag{47}$$

Printr-o schimbare de variabilă de forma

$$u = \frac{1}{y}$$

obţinem:

$$\int_1^{\infty} \frac{u^{a-1}du}{(1+u)^{a+b}} - \int_0^1 \frac{y^{b-1}}{(1+y)^{a+b}}\,dy = \int_0^1 \frac{u^{b-1}}{(1+u)^{a+b}}\,du,$$

deci, ţinînd seama de (47); avem

$$B(a, b) = \int_0^1 \frac{u^{a-1} + u^{b-1}}{(1+u)^{a+b}}\,du.$$

Ne propunem acum să obţinem o formulă de recurenţă pentru funcţia B. În acest scop, vom presupune că $b > 1$ şi, utilizînd identitatea

$$x^a = x^{a-1} - x^{a-1}(1-x),$$

vom aplica, integralei (44) teorema de integrare prin părţi pentru integrale pe interval necompact. Obţinem

$$B(a, b) = \int_{0+0}^{1-0} (1-x)^{b-1} \left(\frac{x^a}{a}\right) dx = \frac{1^a(1-1)^{b-1}}{a} - 0 +$$

$$+ \frac{b-1}{a} \int_{0+0}^{1-0} x^a(1-x)^{b-2}\, dx = \frac{b-1}{a} \int_{0+0}^{1-0} x^{a-1}(1-x)^{b-2}\, dx -$$

$$- \frac{b-1}{a} \int_{0+0}^{1-0} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx = \frac{b-1}{a} B(a,\ b-1) - \frac{b-1}{a} B(a,\ b),$$

de unde rezultă

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1). \tag{48}$$

În baza relaţiei (45) avem, ţinînd seama de (48) şi presupunînd că $a > 1$

$$B(a, b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1,\ b).$$

Aplicînd în mod succesiv formula (48) pentru diferite valori naturale ale lui b, obţinem

$$B(a,\ n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdots \frac{1}{a+1} \cdot B(a,\ 1).$$

Însă

$$B(a,\ 1) = \int_0^1 x^{a-1}\, dx = \frac{1}{a},$$

deci, ţinînd seama din nou de (45), obţinem

$$B(a,\ n) = B(n,\ a) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}. \tag{49}$$

Luînd în rolul lui a un număr natural m, din (49) rezultă, multiplicînd numărătorul şi numitorul cu $(m-1)!$,

$$B(m,\ n) = B(n,\ m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Integrala euleriană de a doua specie. Fie $a > 0$. Vom arăta că integrala

$$\Gamma(a) = \int_{0+0}^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x \tag{50}$$

este convergentă. Integrala

$$\int_{0+0}^{1} \frac{e^{-x}}{x^{1-a}}\, \mathrm{d}x \tag{51}$$

este convergentă pentru $1 - a < 1$, deci pentru $a > 0$ (se aplică teorema 4 din capitolul precedent). Integrala

$$\int_{1}^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x \tag{52}$$

este convergentă pentru orice valoare a lui a; într-adevăr, avem pentru orice $x \geqslant 1$,

$$x^{a-1} e^{-x} < x^{-2},$$

deoarece aceasta revine la inegalitatea evidentă

$$x^{1+a} < e^{x}.$$

Ținînd seama că integrala

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

este convergentă, putem aplica teorema de comparație și rezultă că integrala (52) este convergentă. Din convergența integralelor (51) și (52) pentru $a > 0$ rezultă convergența integralei (50) pentru $a > 0$, deci funcția Γ („Gama") este definită pentru $a > 0$.

Pentru a obține o altă expresie a funcției Γ, vom aplica integralei (50) teorema de schimbare de variabilă, cu

$$x = \varphi(u) = \ln \frac{1}{u}.$$

Funcția φ aplică intervalul $(0, 1)$ pe $(\infty, 0)$; φ este strict monotonă pe $(0, 1)$, derivabilă, cu derivată continuă pe $(0, 1)$:

$$\varphi'(u) = -\frac{1}{u}$$

Avem deci

$$\int\limits_{0+0}^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{1}^{0}\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{a-1} e^{-\ln\frac{1}{u}}\,\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int\limits_{1-0}^{0+0}\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{a-1}\mathrm{d}u = \int\limits_{0+0}^{1-0}\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{a-b}\mathrm{d}u,$$

de unde rezultă

$$\Gamma(a) = \int\limits_{0+0}^{1-0}\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{a-1}\mathrm{d}u. \tag{53}$$

După cum se știe din volumul întîi,

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - u^{\frac{1}{n}}) = \ln\frac{1}{u}, \tag{54}$$

iar șirul de termen general

$$n(1 - u^{\frac{1}{n}})$$

este crescător, deoarece funcția

$$f(x) = \frac{1 - u^x}{x}$$

este crescătoare, avînd derivată pozitivă.

Însă se poate arăta că dacă un șir *crescător* de funcții continue pe (0, 1) are ca limită o funcție continuă, atunci convergența șirului este uniformă pe (0, 1). Putem deci aplica teorema de trecere la limită sub integrală și obținem, în baza relațiilor (53) și (54),

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^{a-1}\int\limits_{0+0}^{1-0}\left(1 - u^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1}\mathrm{d}u.$$

Făcînd, în ultima integrală, schimbarea de variabilă

$$u = y^n,$$

obținem

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a \int\limits_{0+0}^{1-0} y^{n-1}(1-y)^{a-1}\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} n^a\,B(n, a), \tag{55}$$

unde $B(n, a)$ este valoarea funcţiei (44) în punctul (n, a). Ţinînd seama de relaţia (49), rezultă

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a \frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}. \tag{56}$$

Relaţia (55) stabileşte, între funcţiile B şi Γ, o legătură mijlocită de o trecere la limită. Ne propunem să stabilim, între aceste două funcţii, o legătură mai simplă. Să aplicăm integralei (50) schimbarea de variabilă (lăsăm pe seama cititorului verificarea tuturor condiţiilor din teorema de schimbare de variabilă)

$$x = ty,$$

unde $t > 0$; obţinem

$$\Gamma(a) = t^{-a} \int_{0+0}^{\infty} y^{a-1} e^{-ty}\, dy. \tag{57}$$

Înlocuind pe a cu $a + b$ (pentru $b > 0$) şi pe t cu $1 + t$, obţinem

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(1+t)^{a+b}} = \int_{0+0}^{\infty} y^{n+b-1} e^{(1+t)y}\, dy.$$

Înmulţind ambii membri ai acestei egalităţi cu t^{a-1} şi integrînd, în raport cu t, pe intervalul $(0, \infty)$, obţinem

$$\Gamma(a+b) \int_{0+0}^{\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\, dt = \int_{0+0}^{\infty} t^{a-1} \left(\int_{0+0}^{\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y}\, dy \right) dt.$$

Însă, în baza relaţiei (47), integrala din primul membru este egală cu $B(a, b)$. Folosind teorema de schimbare a ordinii de integrare, precum şi relaţiile (50) şi (57), obţinem

$$\Gamma(a+b) \cdot B(a, \mathrm{b}) = \int_{0+0}^{\infty} y^{a+b-1} e^{-y} \left(\int_{0+0}^{\infty} t^{a-1} e^{-ty}\, dt \right) dy =$$

$$= \int_{0+0}^{\infty} y^{-a+b-1} e^{-y} \cdot \frac{\Gamma(a)}{y^a}\, dy = \Gamma(a) \int_{0+0}^{\infty} y^{b-1} e^{-y}\, dy = \Gamma(a) \cdot \Gamma(b),$$

deci:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Această relație simplă între integrala euleriană de prima specie și cea de-a doua specie a fost stabilită de Dirichlet.

Vom stabili acum o formulă de recurență pentru funcția Γ. Aplicînd, în (50), teorema de integrare prin părți, obținem

$$a\Gamma(a) = a \int_{0+0}^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} x^a e^{-x} - \lim_{x\to 0} x^a e^{-x} + \int_{0+0}^{\infty} x^a e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Însă, aplicînd o teoremă de tip Hospital, obținem

$$\lim_{x\to\infty} x^a e^{-x} = \lim_{x\to 0} x^a e^{-x} = 0,$$

deci

$$a\Gamma(a) = \int_{0+0}^{\infty} x^a e^{-x}\,\mathrm{d}x,$$

adică

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a).$$

Apliînd în mod repetat această relație de recurență, obținem

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\ldots(a+1)\,a\Gamma(a). \tag{58}$$

Este deci suficient să cunoaștem valorile funcției Γ pentru orice a pozitiv, inferior lui 1, pentru a obține valorile lui Γ pentru toate celelalte valori pozitive ale lui a. De exemplu

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+2\right) = \left(\frac{1}{2}+2-1\right)\left(\frac{1}{2}+2-2\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Luînd, în (58), $a = 1$ și ținînd seama că

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1,$$

rezultă

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Cu alte cuvinte, funcția Γ este, într-un anume sens, o generalizare a noțiunii de factorial; putem spune că prin intermediul funcției Γ noțiunea de factorial capătă sens pentru orice număr pozitiv.

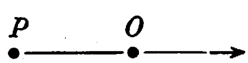
Funcția Γ este de cea mai mare importanță în analiză. Ultima proprietate stabilită, aceea de generalizare a noțiunii de factorial, face să se întrevadă această importanță. Există formule care stabilesc o legătură simplă între funcția Γ și funcția ζ a lui Riemann, definită în capitolul precedent.

Întreaga teorie dezvoltată în acest capitol s-a referit la integrale care conțin un singur parametru. Însă în unele probleme (de exemplu, în studiul integralei euleriene de prima specie) intervin integrale cu mai mulți parametri. Atunci cînd interesează proprietățile unei astfel de integrale în raport cu fiecare parametru în parte este suficientă teoria integralei cu un singur parametru. Dacă însă vrem să stabilim proprietățile unei astfel de integrale ca funcție de ansamblu parametrilor de care ea depinde, atunci este necesară o extindere și adaptare a teoriei integralei cu un singur parametru; de exemplu, derivarea va trebui înlocuită cu diferențierea etc. Pentru că, totuși, modificările în enunțuri și demonstrații sînt în general neesențiale, ele făcîndu-se după modelul cunoscut al extinderii proprietăților de la o funcție de o variabilă la funcții de mai multe variabile, renunțăm să mai dezvoltăm aici această chestiune.

Capitolul VI

SERII TRIGONOMETRICE

Să considerăm un punct material P de masă m, care se mişcă în linie dreaptă sub acţiunea unei forţe $\bar{F}$. Să presupunem că mărimea forţei $\bar{F}$ este, în fiecare moment, proporţională cu distanţa de la P la un punct fix O situat pe dreapta pe care se deplasează P. În sfîrşit, să mai presupunem că forţa $\bar{F}$ are tot timpul ca suport dreapta pe care se deplasează P, fiind dirijată în sensul de la P spre O:



Dacă notăm cu $\overline{OP}$ vectorul de poziţie al punctului P în raport cu originea O, atunci avem

$$\bar{F} = -k\overline{OP},$$

unde k este un număr real pozitiv. Notînd cu x abscisa punctului P şi ţinînd seama de legea fundamentală a mecanicii, care afirmă că

$$\bar{F} = m\bar{a},$$

unde $\bar{a}$ este vectorul acceleraţie al punctului P, obţinem, trecînd la scrierea scalară şi ţinînd seama că acceleraţia este derivata a doua a spaţiului în raport cu timpul, următoarea relaţie:

$$mf''(t) = -kf(t),$$

unde f este funcţia care dă pe x în raport cu timpul. Ultima relaţie se mai poate scrie

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = 0, \tag{1}$$

unde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Deoarece relaţia (1) exprimă faptul că derivata a doua a funcţiei f coincide, abstracţie făcînd de un coeficient numeric, cu însăşi funcţia f, cum pe de altă parte se ştie că sinusul are proprietatea de a coincide, abstracţie făcînd de semn, cu derivata sa de ordinul al doilea, este natural să căutăm funcţiile care satisfac (1) printre funcţiile sinusoidale. Fie, pentru aceasta,

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t + \psi), \tag{2}$$

unde A şi ψ sînt doi parametri care urmează a fi determinaţi. Avem

$$\varphi'(t) = A\omega \cos(\omega t + \psi),\ \varphi''(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \psi),$$

deci

$$\varphi''(t) + \omega^2\varphi(t) = 0.$$

Rezultă că funcţia φ satisface relaţia (1), oricare ar fi valorile parametrilor A şi ψ. Pentru a găsi semnificaţia fizică a parametrilor A şi ψ şi a soluţiilor obţinute pentru (1), vom observa că $\varphi(0)$ şi $\varphi'(0)$ sînt poziţia, respectiv viteza punctului P la momentul iniţial $t = 0$, deci, notînd cu x_0 poziţia iniţială şi cu ρ_0 viteza iniţială a lui P, obţinem

$$x_0 = A \sin \psi,$$

$$v_0 = A\,\omega \cos \psi, \tag{3}$$

relaţii care ne dau posibilitatea să evaluăm pe A şi pe ψ ca funcţii de x_0 şi v_0. Cu alte cuvinte, mişcarea definită de (2) este complet determinată de îndată ce se precizează poziţia iniţială şi viteza iniţială a punctului P (aşa-numitele „condiţii iniţiale" ale mişcării). Diferitele mişcări care ascultă de relaţia (2) diferă între ele doar prin condiţiile iniţiale specifice.

O mişcare de forma (2) *se numeşte o armonică.* Funcţia φ este periodică, de perioada $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$. Aceasta înseamnă că, sub acţiunea forţei F, punctul P va executa o mişcare oscilatorie. Deoarece maximul funcţiei φ definite de (2) este egal cu A, rezultă că $|A|$ reprezintă depărtarea maximă a punctului P faţă de O, de aceea $|A|$ se numeşte amplitudinea oscilaţiilor. Deoarece perioada T exprimă durata unei oscilaţii, numărul oscilaţiilor pe care le descrie P în unitatea de timp va fi egal cu $\frac{1}{T}$. Deoarece avem

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{4}$$

rezultă că ω exprimă numărul oscilaţiilor efectuate de P în 2π unităţi de timp. Acesta este motivul pentru care ω poartă numele de *frecvenţă* a oscilaţiilor. După cum rezultă din (3), mărimea ψ caracterizează poziţia iniţială a lui P; de aceea, ψ se numeşte *faza iniţială.*

Deoarece orice mişcare oscilatorie este o suprapunere de oscilaţii armonice simple, de tipul (2), rezultă că funcţia care descrie o mişcare oscilatorie se va obţine ca sumă finită sau ca sumă a unei serii de funcţii de tipul (2). Studiul seriilor de funcţii de tipul (2) devine astfel esenţial în teoria matematică a fenomenelor periodice.

Pentru $A = 1$, $\omega = 1$, $\psi = 0$, avem $\varphi(t) = \sin t$, deci armonica se reduce la o sinusoidă obişnuită. Pentru $A = 1$, $\omega = 1$, $\psi = \frac{\pi}{2}$ avem $\varphi(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$, deci armonica se obţine dintr-o sinusoidă printr-o translaţie spre stînga de mărime $\frac{\pi}{2}$.

Fie armonica $\varphi(t) = \sin \omega t$. Punînd $\omega t = \tau$, obţinem $\varphi\left(\frac{\tau}{\omega}\right) = \sin \tau$. Deoarece

$$t = \frac{\tau}{\omega},$$

rezultă că graficul armonicei $\varphi(t) = \sin \omega t$ se obţine din graficul unei sinusoide obişnuite, prin deformarea acesteia pe direcţia axei absciselor. Pentru $\omega > 1$, deformarea constă într-o contractare de ω ori, iar pentru $\omega < 1$ într-o dilatare de $\frac{1}{\omega}$ ori.

Fie acum armonica $\varphi(t) = \sin(\omega t + \psi)$. Punînd $\omega t + \psi = \omega\tau$, obţinem

$$\lambda(\tau) = \varphi\left(\frac{\omega\tau - \psi}{\omega}\right) = \sin \omega\tau,$$

deci o armonică de tipul considerat anterior. Însă

$$t = \tau - \frac{\psi}{\omega},$$

deci graficul armonicei $\varphi(t) = \sin(\omega t + \psi)$ se obţine din graficul armonicei $\lambda(t) = \sin \omega t$ printr-o translaţie de mărime $-\frac{\psi}{\omega}$ de-a lungul axei absciselor.

Fie acum o armonică (2) oarecare. Graficul ei se obţine din graficul unei armonice de tipul precedent prin multiplicarea cu A a ordonatei fiecărui punct. În concluzie:

Graficul oricărei armonice (adică al unei funcţii de tipul (2)) *se obţine din graficul unei sinusoide, aplicînd acesteia din urmă o contractare sau o dilatare uniformă în direcţia axelor de coordonate şi o translaţie de-a lungul axei absciselor.*

Pe baza unei formule din trigonometrie, avem

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t + \psi) = A(\sin \psi \cos \omega t + \cos \psi \sin \omega t).$$

Notînd

$$a = A \sin \psi, \quad b = A \cos \psi, \tag{5}$$

obţinem

$$\varphi(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t. \tag{6}$$

Reciproc, orice funcţie de forma (6) este o armonică, deoarece ecuaţiile (5) se pot rezolva în raport cu A şi ψ:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \psi = \operatorname{Arctg} \frac{a}{b}$$

Ţinînd seamă de expresia (4) a lui ω şi punînd $T = 2l$, obţinem din (6):

$$\varphi(t) = a \cos \frac{\pi x}{l} + b \sin \frac{\pi x}{l}. \tag{7}$$

Aceasta este forma sub care vom considera armonicele în cele ce urmează. Problema fundamentală care ne va preocupa va fi aceea a reprezentării unei funcţii ca sumă finită de armonice sau ca sumă a unei serii de armonice. Va trebui deci să considerăm sume de forma

$$T_n(x) = A + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l}\right) \tag{8}$$

şi serii de forma

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right). \tag{9}$$

Funcţia $T_n(x)$ dată de (8) *se numeşte polinom trigonometric de ordinul n şi de perioadă $2l$, iar o serie de tipul* (9) *se numeşte serie trigonometrică de perioada $2l$.* Presupunînd că seria (9) este convergentă pe $(-\infty, \infty)$ şi notînd cu $f(x)$ suma ei, este clar că f este o funcţie periodică, de perioada $2l$; mai mult decît atît, este suficient ca seria (1) să fie convergentă pe un interval $[a, b]$ cu $b - a = 2l$, pentru ca să rezulte că seria (9) converge pe $(-\infty, \infty)$ şi suma este o funcţie periodică, de perioadă $2l$ pe $(-\infty, \infty)$.

Dacă seria (9) este convergentă pe $(-\infty, \infty)$ şi suma ei este egală cu $f(x)$, atunci, punînd

$$\frac{\pi x}{l} = t \tag{10}$$

şi folosind notaţia

$$\varphi(t) = f\left(\frac{tl}{\pi}\right),$$

obţinem

$$\varphi(t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt). \tag{11}$$

Termenii seriei (11) sînt armonice de perioadă 2π. În felul acesta, trecerea de la x la t prin intermediul lui (10) ne-a permis să reducem problema dezvoltării unei funcţii de perioadă $2l$ în serie trigonometrică de perioadă $2l$ la problema dezvoltării unei funcţii de perioadă 2π în serie trigonometrică de perioadă 2π. Va fi deci suficient, în cele ce urmează, să considerăm serii trigonometrice de forma (11). Pentru astfel de serii vom omite specificarea „de perioadă 2π".

Fie f şi g două funcţii integrabile pe $[a, b]$ şi astfel încît

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0.$$

Vom spune că f şi g sînt ortogonale pe $[a, b]$, (justificarea acestei denumiri va fi dată mai tîrziu). *Fiind dat un sistem* (adică o mulţime) *de funcţii integrabile pe* $[a, b]$, *vom spune că acest sistem este ortogonal pe* $[a, b]$ *dacă oricare două funcţii distincte din sistem sînt ortogonale pe* $[a, b]$. *Sistemul de funcţii*

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx \cos nx, \ldots$$

va fi numit sistemul trigonometric fundamental sau, pur şi simplu, sistemul trigonometric.

Teorema 1. Sistemul trigonometric este ortogonal pe $[-\pi, \pi]$ (deci pe orice interval compact de lungime 2π).

Demonstraţie. Avem, pentru $n \neq m$ (n şi m întregi),

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] dx = 0, \tag{12}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] dx = 0. \tag{13}$$

Totodată, pentru n şi m întregi oarecare avem

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] dx = 0. \tag{14}$$

În felul acesta, ortogonalitatea sistemului trigonometric este stabilită.

În cele ce urmează, ne vor mai fi utile următoarele relaţii care, ca şi relaţiile (12,) (13) şi (14), se stabilesc pe baza unor formule bine cunoscute din trigonometrie:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \pi, \tag{15}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \pi, \tag{16}$$

oricare ar fi numărul întreg n.

Lemă. Dacă seria de funcţii

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniform pe $[a, b]$ şi dacă $f(x)$ este mărginită pe $[a, b]$ atunci seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) f(x)$$

converge de asemenea uniform pe $[a, b]$.

Lăsăm pe seama cititorului demonstrația acestei leme simple.

Pentru un motiv de simetrie, care se va vedea în teorema următoare, vom scrie termenul liber din seria (11) sub forma

$$A = \frac{a_0}{2}.$$

T e o r e m a 2. Fie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{17}$$

Să presupunem că seria din membrul al doilea converge uniform pe $[-\pi, \pi]$. În aceste condiții, f este continuă pe $[-\pi, \pi]$, iar coeficienții seriei (17) sînt dați de formulele:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \; (n = 1, 2, \ldots). \tag{19}$$

D e m o n s t r a ț i e. Se știe că o serie uniform convergentă de funcții continue are ca sumă o funcție continuă. Deoarece termenii seriei (17) sînt funcții continue, iar seria (17) este, prin ipoteză, uniform convergentă, rezultă că f este continuă pe $[a, b]$, deci integrabilă pe $[a, b]$.

Se știe că o serie uniform convergentă de funcții continue se poate integra termen cu termen; aplicînd această teoremă seriei (17), obținem

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx\right).$$

Însă integralele din paranteza din membrul al doilea sînt egale cu zero, deci

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx.$$

Să multiplicăm acum ambii membri ai relației (17) cu $\cos px$ (p întreg pozitiv). Obținem

$$f(x) \cos px = \frac{a_0}{2} \cos px + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos px + b_n \sin nx \cos px). \tag{20}$$

Deoarece $\cos px$ este o funcție mărginită, putem aplica lema de mai sus; rezultă că seria din membrul al doilea al egalității (20) converge uniform pe $[-\pi, \pi]$. Continuitatea produsului $f(x) \cos px$ rezultă atît din continuitatea factorilor cît și din faptul că seria uniform convergentă din membrul al doilea al relației (20) are ca termeni funcții continue. Pe baza convergenței uniforme, putem integra termen cu termen seria (20) și obținem

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos px \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos px \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos px \, dx + \right.$$

$$\left. + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos px \, dx\right).$$

Conform relației (14), ultima integrală din paranteza din membrul al doilea este egală cu zero pentru orice valoare întreagă a lui n. Conform relației (13), prima integrală din paranteza din membrul al doilea este egală cu zero pentru $n \neq p$; conform relației (15), aceeași integrală este egală cu π pentru $n = p$. Deoarece prima integrală din membrul al doilea este egală cu zero, rezultă

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos px \, dx = \pi a_p.$$

S-a stabilit astfel formula (18).

Să multiplicăm acum ambii membri ai relației (17) cu $\sin px$ (p întreg pozitiv). Obținem

$$f(x) \sin px = \frac{a_0}{2} \sin px + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \sin px + b_n \sin nx \sin px). \quad (21)$$

Deoarece $\sin px$ este o funcție mărginită, putem aplica lema de mai sus; rezultă că seria din membrul al doilea al egalității (21) converge uniform pe $[-\pi, \pi]$. Atît produsul $f(x) \sin px$ cît și termenii seriei din (21) sînt funcții continue pe $[-\pi, \pi]$, deci, în baza convergenței uniforme, putem integra termen cu termen seria (21), și obținem

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin px \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin px \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin px \, dx + \right.$$

$$\left. + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin px \, dx\right).$$

Prima integrală din membrul al doilea este, evident, egală cu zero. Conform relației (14), prima integrală din paranteza din membrul al doilea este egală cu zero pentru orice valoare întreagă a lui n. Conform relației (12), a doua integrală din paranteza din membrul al doilea este egală cu zero pentru $n \neq p$; conform relației (16), aceeași integrală este egală cu π pentru $n = p$. Avem deci, pentru orice p întreg pozitiv,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin px \, dx = b_p \pi$$

și formula (19) este stabilită.

Observații. Transpunerea teoremei 2 la serii trigonometrice de perioadă $2l$ este imediată. Seria (17) va fi înlocuită cu seria (9), unde $A = \frac{a_0}{2}$, iar intervalul $[-\pi, \pi]$ va fi înlocuit cu intervalul $[-l, l]$. Se obțin, pentru coeficienți, expresiile

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{22}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{23}$$

Expresiile (18) și (19) *se numesc coeficienții Fourier ai funcției f date de* (17). Fourier a obținut formulele (18) și (19) în cercetările sale privitoare la teoria analitică a căldurii. Expresiile (22) și (23) sînt și ele numite *coeficienți Fourier,* însă ele sînt asociate funcției f date de

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right),$$

în ipoteza că seria din dreapta converge uniform pe $[-l, l]$.

Este interesant de observat că, în demonstrația teoremei 2, funcțiile trigonometrice au intervenit exclusiv prin calitatea lor de a fi integrabile și a forma un sistem ortogonal pe $[-\pi, \pi]$ (teorema 1). Aceasta înseamnă că teorema 2 poate fi generalizată în modul următor:

Fie funcțiile

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_n(x),\ \dots$$

definite pe $[a, b]$. Să presupunem, că ele sînt integrabile și formează un sistem ortogonal pe $[a, b]$. În aceste condiții, dacă seria

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$$

converge uniform pe $[a, b]$, atunci

$$a_n = \frac{1}{\lambda_n}\int_a^b f(x)\, f_n(x)\, dx,$$

unde

$$\lambda_n = \int_a^b f_n^2(x)\, dx.$$

Studiul diferitelor sisteme ortogonale de funcții și al dezvoltării unei funcții în serie convergentă după funcțiile unui sistem ortogonal este de cea mai mare importanță în diferite ramuri ale matematicii pure și aplicate. Sistemul de funcții $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$, care stă la baza teoriei seriilor de puteri, nu este ortogonal pe nici un interval, dar există metode de a-l „ortogonaliza"; aceste metode se studiază în cadrul Algebrei liniare.

Unul dintre primele exemple de sisteme ortogonale considerate în știință este sistemul

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

Acest sistem a apărut în lucrările lui Euler, D. Bernoulli, D'Alembert, în legătură cu problema coardei vibrante și are calitatea că este nu numai un sistem ortogonal pe $[-\pi, \pi]$, ci chiar *ortonormat*, în sensul că, pe lîngă condiția de ortogonalitate, este îndeplinită și condiția că integrala, pe $[-\pi, \pi]$, a pătratului oricărei funcții din sistem, să fie egală cu 1.

Se pot da exemple de sisteme ortogonale de funcții în care fiecare funcție este un polinom. Un astfel de sistem este șirul polinoamelor lui Legendre:

$$1,\ x,\ \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\ \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \ldots$$

unde a n — a funcție din sistem este derivata de ordinul n a polinomului $(x^2 - l)^n$. Polinoamele lui Legendre formează un sistem ortogonal pe $[-1, 1]$.

Teoria generală a polinoamelor ortogonale a fost dezvoltată de P.L. Cebîșev, în a doua jumătate a secolului al 19-lea.

Din expresia coeficienților Fourier observăm că ei au sens pentru orice funcție integrabilă pe $[-\pi, \pi]$ (respectiv pe $[-l, l]$), independent de considerarea unei serii trigonometrice. Cu alte cuvinte, coeficienții Fourier sînt atașați nu unei serii trigonometrice, ci unei funcții integrabile pe $[-\pi, \pi]$ (respectiv pe $[-l, l]$). Oricare ar fi funcția f, integrabilă pe $[-\pi, \pi]$ (respectiv pe $[-l, l]$), expresiile (18) și (19) (respectiv (22) și (23)) au sens, deoarece produsul dintre o funcție integrabilă și o funcție continuă este o funcție integrabilă. Deci fiecărei funcții integrabile pe $[-\pi, \pi]$ (respectiv pe $[-l, l]$) îi corespunde un șir infinit de coeficienți Fourier dați de (18) și (19) (respectiv de (22) și (23)). De aici înainte vom considera, în mod explicit, numai intervalul $[-\pi, \pi]$, lăsînd pe seama cititorului transpunerea considerațiilor la cazul intervalului $[-l, l]$.

Fiind dată o funcție f, integrabilă pe $[-\pi, \pi]$, cu ajutorul coeficienților ei Fourier dați de (18) și (19) putem alcătui o serie trigonometrică în care coeficienții sînt tocmai acești coeficienți Fourier. Seria trigonometrică astfel obținută se numește seria Fourier asociată funcției f. În legătură cu această noțiune se pun mai multe probleme:

1) *O serie Fourier este totdeauna convergentă pe $[-\pi, \pi]$? În caz negativ, ce proprietăți ale funcției f asigură convergența, pe $[-\pi, \pi]$, a seriei Fourier asociate?*

2) *Ce proprietăți ale funcției f implică convergența uniformă a seriei Fourier asociate?*

3) *În cazul în care seria Fourier asociată lui f este convergentă pe $[-\pi, \pi]$, este sigur că suma seriei este chiar funcția f? În caz negativ, ce proprietăți suplimentare ale lui f ne asigură că suma seriei este f?*

4) *Fiind dată o serie trigonometrică, există o funcție integrabilă pe $[-\pi, \pi]$, care admite seria dată ca serie Fourier?*

5) *Este posibil ca la două funcții distincte f și g, integrabile pe $[-\pi, \pi]$, să corespundă aceeași serie Fourier?*

În sfîrşit, există în teoria seriilor trigonometrice o problemă fundamentală, al cărei enunţ nu conţine nici o referire la noţiunea de serie Fourier, şi anume.

6) *În ce condiţii o funcţie definită pe* $[-\pi, \pi]$ *este suma unei serii trigonometrice* (bineînţeles, convergente)? Toate aceste probleme au preocupat de multă vreme pe matematicieni, dar un răspuns complet nu a putut fi obţinut nici pînă astăzi. Astfel, pentru a da doar un exemplu, ne vom referi la prima problemă. Se ştie că există funcţii integrabile, chiar continue, ale căror serii Fourier admit puncte de divergenţă, dar nu se cunoaşte încă dacă există o funcţie continuă pe $[-\pi, \pi]$ a cărei serie Fourier să fie divergentă în fiecare punct din $[-\pi, \pi]$.

Importanţa rezolvării acestor probleme este legată, în bună măsură, de rolul deosebit pe care-l au seriile Fourier în teoria seriilor trigonometrice. Coeficienţii unei serii Fourier se află într-o relaţie cunoscută, relativ simplă, cu o funcţie cunoscută; aceasta înlesneşte considerabil stabilirea proprietăţilor seriilor Fourier.

Cele mai multe dintre rezultatele obţinute în cercetarea problemelor enumerate mai sus comportă, pentru a fi expuse, noţiuni şi consideraţii care depăşesc mult cadrul acestui manual. De aceea, va trebui să ne mulţumim, în cele ce urmează, doar cu unele fapte particulare.

Mai întîi vom observa că teorema 2 constituie un răspuns (parţial) la problema 4. Într-adevăr, teorema 2 se mai poate enunţa în modul următor:

Teorema 2′. O serie trigonometrică uniform convergentă pe $[-\pi, \pi]$ este seria Fourier a propriei sale sume. Cu alte cuvinte, orice serie trigonometrică uniform convergentă este o serie Fourier.

Pentru seriile trigonometrice care nu converg uniform se ştie, de multă vreme, că răspunsul la problema 4, este, în general, negativ. Însă este clar că răspunsul la problema 4 depinde şi de noţiunea de integrală cu care se lucrează. Există serii trigonometrice a căror sumă este o funcţie neintegrabilă Riemann pe $[-\pi, \pi]$. O astfel de serie trigonometrică nu poate fi deci seria Fourier a sumei sale. La începutul secolului nostru, H. Lebesgue a definit o nouă noţiune de integrală, mai generală decît integrala Riemann[1]. Odată cu apariţia integralei Lebesgue, şi conceptul de serie Fourier a căpătat o nouă accepţiune; este clar că dacă există funcţii care sînt integrabile Lebesgue, fără a fi integrabile Riemann, ne putem aştepta să existe serii Fourier în sensul integralei Lebesgue, care nu sînt serii Fourier în sensul integralei Riemann. Trebuie deci să facem distincţie între seriile Fourier-Riemann, ale căror coeficienţi sînt daţi de formule de tipul (18) şi (19), în care integrala este luată în sensul lui Riemann, şi seriile Fourier-Lebesgue, ale căror coeficienţi sînt daţi de formule de tipul (18) şi (19), în care integrala este luată în sensul lui Lebesgue. O serie Fourier-Riemann este şi serie Fourier-Lebesgue, dar nu şi reciproc.

Există serii trigonometrice care nu sînt serii Fourier-Lebesgue şi există serii trigonometrice a căror sumă nu este integrabilă Lebesgue. Această situaţie a determinat o nouă extensiune a noţiunii de integrală, efectuată, în al doilea deceniu al secolului nostru, de către Denjoy şi Hincin. Nici cu

[1] Integrala lui Lebesgue va fi studiată la cursul de Funcţii reale şi elemente de topologie generală.

această integrală nu s-a putut rezolva complet problema 4 și astfel s-au introdus noi tipuri de integrale.

Faptul important pe care cititorul trebuie să-l rețină din această expunere este că teoria seriilor trigonometrice — și în special problema 4 — a dat un impuls deosebit teoriei integralei. Nu întîmplător numeroși mari matematicieni care s-au ocupat de teoria integralei au avut un rol de seamă și în studiul seriilor trigonometrice. Astfel sînt: Riemann, Lebesgue, Denjoy, Luzin și alții.

Tot teorema 2 dă un răspuns (parțial) și la problema 3: o serie trigonometrică uniform convergentă, nu numai că este o serie Fourier-Riemann, dar are ca sumă chiar funcția a cărei serie Fourier este. În orice caz, răspunsul la problema 3 este, în general, negativ, deoarece în cazul în care funcția f, integrabilă pe $[-\pi, \pi]$, nu satisface condiția $f(-\pi) = f(\pi)$, ea nu va mai putea fi suma seriei Fourier asociate; într-adevăr, suma unei serii Fourier convergente pe $[-\pi, \pi]$ ia, evident, valori egale la extremitățile intervalului. Aceeași observație este valabilă și pentru problema 6; pentru ca o funcție f, definită pe $[-\pi, \pi]$, să fie suma unei serii trigonometrice, este necesar ca $f(-\pi) = f(\pi)$.

În cele ce urmează vom utiliza de mai multe ori următoarele noțiuni și proprietăți, care, probabil, au mai fost întîlnite de cititor:

O funcție f, definită pe $(-l, l)$, este pară pe $(-l, l)$ dacă, pentru orice $x \in (-l, l)$, avem $f(x) = f(-x)$.

O funcție f, definită pe $(-l, l)$, este impară pe $(-l, l)$ dacă, pentru orice $x \in (-l, l)$, avem $f(-x) = -f(x)$.

Exemple de funcții pare: x^{2n} (n întreg), $\cos x$. Exemple de funcții impare: x^{2n-1} (n întreg), $\sin x$.

Au loc următoarele proprietăți (a căror stabilire o lăsăm pe seama cititorului):

Produsul a două funcții pare pe $(-l, l)$ este o funcție pară pe $(-l, l)$.

Produsul a două funcții impare pe $(-l, l)$ este o funcție pară pe $(-l, l)$.

Produsul dintre o funcție pară și o funcție impară pe $(-l, l)$ este o funcție impară pe $(-l, l)$.

Vom trata acum un anume aspect al problemei 6 de mai sus, și anume: În ce condiții o funcție definită pe $[-\pi, \pi]$ este suma unei serii trigonometrice uniform convergente? Este clar, în orice caz, că o astfel de funcție trebuie să îndeplinească următoarele două proprietăți: 1) să fie continuă pe $[-\pi, \pi]$; 2) $f(-\pi) = f(\pi)$. Problema care se pune este dacă aceste condiții necesare sînt și suficiente. Vom arăta, în cele ce urmează, că răspunsul este afirmativ. Pentru aceasta însă vom avea nevoie să stabilim, mai întîi, unele rezultate intermediare.

Să observăm că problema care ne preocupă mai poate fi formulată și altfel, folosind noțiunea de polinom trigonometric, introdusă în acest capitol. Anume, problema poate fi enunțată astfel:

Fiind dată o funcție f, continuă pe $[-\pi, \pi]$ și astfel încît $f(-\pi) = f(\pi)$, există un șir de polinoame trigonometrice care converge uniform, pe $[-\pi, \pi]$, către funcția f?

Sub această formă, problema prezintă o analogie izbitoare cu problema aproximării uniforme a funcțiilor continue prin polinoame. Dealtfel, ca și în cazul polinoamelor obișnuite, și în cazul polinoamelor trigonometrice problema a fost rezolvată de Weierstrass.

L e m a 1. Suma, diferenţa şi produsul a două polinoame trigonometrice sînt tot polinoame trigonometrice.

D e m o n s t r a ţ i e. Pentru sumă şi diferenţă, proprietatea enunţată este imediată. Rămîne s-o stabilim pentru produs. Fie

$$T_1(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_p \cos px + b_p \sin px + \ldots + \\ + a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

$$T_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \ldots + \alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx + \ldots + \\ + \alpha_s \cos sx + \beta_s \sin sx$$

două polinoame trigonometrice.

Produsul $T_1(x)T_2(x)$ cuprinde termeni de următoarele trei tipuri:

$$a_p\alpha_m \cos px \cos mx,$$

$$a_p\beta_m \cos px \sin mx,$$

$$b_p\beta_m \sin px \sin mx.$$

Însă avem

$$\cos px \cos mx = \frac{\cos(p+m)x + \cos(p-m)x}{2},$$

$$\cos px \sin mx = \frac{\sin(p+m)x + \sin(m-p)x}{2},$$

$$\sin px \sin mx = \frac{\cos(p+m)x - \cos(p-m)x}{2}$$

deci produsul $T_1(x)T_2(x)$ se reduce la o sumă finită de cosinusuri şi sinusuri din multipli întregi ai lui x, fiecare cosinus şi sinus putînd fi afectat de un coeficient numeric. Aşadar, produsul $T_1(x)T_2(x)$ este un polinom trigonometric.

Prin inducţie completă, se stabileşte acum

L e m a 2. Suma, diferenţa şi produsul unui număr finit de polinoame trigonometrice sînt încă polinoame trigonometrice.

L e m a 3. Fie f o funcţie continuă şi pară, definită pe $[-\pi, \pi]$. În aceste condiţii, fiind dat un număr $\varepsilon < 0$, există un polinom $P(u)$, astfel încît

$$|f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon$$

pentru orice $x \in [-\pi, \pi]$.

D e m o n s t r a ţ i e. Să punem, pentru $-1 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\varphi(t) = f(\text{Arc} \cos t), \tag{24}$$

lucru posibil deoarece valorile funcţiei din paranteză sînt situate în intervalul $[0, \pi]$. Funcţia φ, ca suprapunere a două funcţii continue, este continuă pe $[-1, 1]$. Fie $\varepsilon > 0$. Conform teoremei lui Weierstrass, de aproximare a funcţiilor continue prin polinoame, există un polinom $P(t)$, astfel încît

$$|\varphi(t) - P(t)| < \varepsilon \tag{25}$$

pentru orice $t \in [-1, 1]$. Punînd $x = \operatorname{Arc} \cos t$ şi ţinînd seama de (24) şi (25), rezultă

$$|f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon \tag{26}$$

pentru $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Însă $\cos x$ este o funcţie pară, deci $P(\cos x)$ este o funcţie pară. Deoarece f este pară prin ipoteză, rezultă

$$|f(-x) - P(\cos(-x))| = |f(x) - P(\cos x)|,$$

pentru $0 \leqslant x \leqslant \pi$, deci, punînd $u = -x$ şi ţinînd seama de (26), avem:

$$|f(u) - P(\cos u)| < \varepsilon, \tag{27}$$

pentru $-\pi \leqslant u \leqslant 0$ deci, ţinînd seama de (26) şi (27),

$|f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon$, pentru $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ şi lema 3 este stabilită.

Observaţie. În virtutea lemei 2, $P(\cos x)$ este un polinom trigonometric.

Lema 3 mai poate fi formulată şi astfel:

Lema 3'. Fie f continuă, pară şi periodică, de perioadă 2π pe $(-\infty, \infty)$. În aceste condiţii, fiind dat $\varepsilon > 0$, există un polinom $P(u)$ cu proprietatea $|f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon$, oricare ar fi x real.

Teorema 3. (A doua teoremă de aproximare a lui Weierstrass). Fie f o funcţie continuă, periodică, de perioadă 2π pe $(-\infty, \infty)$. În aceste condiţii, fiind dat un număr $\varepsilon > 0$, există un polinom trigonometric $T(x)$, astfel încît

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon$$

pentru orice x real.

Demonstraţie. Să punem

$$F(x) = f(x) + f(-x),$$
$$G(x) = (f(x) - f(-x))\sin x.$$

Funcţia F este, evident, pară pe $(-\infty, \infty)$. Funcţia G este şi ea pară pe $(-\infty, \infty)$, deoarece este un produs de funcţii impare.

Din faptul că f este periodică, de perioadă 2π, rezultă că F şi G sînt de asemenea periodice, de perioadă 2π pe $(-\infty, \infty)$. Putem deci să aplicăm funcţiilor F şi G lema 3'. Fie $\varepsilon > 0$. Există două polinoame, $P(u)$ şi $Q(u)$, astfel încît

$$|F(x) - P(\cos x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|G(x) - Q(\cos x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pentru $x \in (-\infty, \infty)$. Ţinînd seama că $|\sin x| \leqslant 1 \geqslant \sin^2 x$, rezultă

$$\left.\begin{aligned} |F(x)\sin^2 x - P(\cos x)\sin^2 x| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ |G(x)\sin x - Q(\cos x)\sin x| &< \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

pentru $x \in (-\infty, \infty)$, deci, aplicînd teorema modulului şi ţinînd seama de relaţiile (28), obţinem:

$$|(F(x)\sin^2 x + G(x)\sin x) - (P(\cos x)\sin^2 x + Q(\cos x)\sin x)| \leqslant$$
$$\leqslant |F(x)\sin^2 x - P(\cos x)\sin^2 x| + |G(x)\sin x - Q(\cos x)\sin x| < \varepsilon.$$

Punînd

$$T_1(x) = P(\cos x)\sin^2 x + Q(\cos x)\sin x$$

şi observînd că

$$F(x)\sin^2 x + G(x)\sin x = 2f(x)\sin^2 x,$$

rezultă

$$|2f(x)\sin^2 x - T_1(x)| < \varepsilon, \tag{29}$$

pentru $-\infty < x < \infty$, $T_1(x)$ fiind un polinom trigonometric, în baza lemei 2.

Funcţia $f_1(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ este continuă şi are perioada 2π pe $(-\infty, \infty)$, deci putem să-i aplicăm raţionamentul pe care l-am aplicat mai sus funcţiei f; există un polinom trigonometric $T_2(x)$, astfel încît

$$\left|2f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin^2 x - T_2(x)\right| < \varepsilon, \tag{30}$$

pentru $-\infty < x < \infty$. Înlocuind, în ultima inegalitate, pe x prin $x - \frac{\pi}{2}$, obţinem, punînd

$$T_3(x) = T_2\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$|2f(x)\sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - T_3(x)| < \varepsilon \tag{31}$$

şi, deoarece inegalitatea (30) este valabilă pentru orice x real, rezultă că şi inegalitatea (31) este adevărată pentru orice x real. Însă (31) se mai scrie

$$|2f(x)\cos^2 x - T_3(x)| < \varepsilon. \tag{32}$$

Din (29) şi (31) rezultă

$$|2f(x) - (T_1(x) + T_3(x))| < 2\varepsilon,$$

pentru orice x real, deci, punînd

$$T(x) = \frac{T_1(x) + T_3(x)}{2},$$

obținem

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon,$$

pentru orice x real. Ținînd seama că $T_3(x)$ este un polinom trigonometric și aplicînd lema 1, rezultă că $T(x)$ este un polinom trigonometric și teorema 3 este astfel demonstrată.

Din teorema 3 rezultă imediat

Teorema 3'. Fie f continuă, periodică, de perioadă 2π pe $(-\infty, \infty)$. Există un șir de polinoame trigonometrice $T_1(x), T_2(x), \ldots, T_n(x), \ldots$ care converge uniform, pe $(-\infty, \infty)$, către $f(x)$.

Pentru demonstrație, este suficient să facem, în teorema 3, pe $\varepsilon = \frac{1}{n}$ și să notăm cu $T_n(x)$ polinomul trigonometric pe care teorema 3 îl asociază acestui ε. Obținem

$$|f(x) - T_n(x)| < \frac{1}{n},$$

pentru orice x real și oricare ar fi numărul natural n.

Fie acum $\eta > 0$. Există un număr natural N, astfel încît

$$\frac{1}{n} < \eta$$

pentru $n > N$, deci

$$|f(x) - T_n(x)| < \eta,$$

pentru orice x real și oricare ar fi $n > N$. Deoarece N nu depinde de x, ci numai de η, rezultă că șirul $\{T_n(x)\}$ converge uniform, pe $(-\infty, \infty)$, către $f(x)$.

Teorema 3' arată că o funcție continuă, periodică, de perioadă 2π se poate aproxima oricît de bine cu ajutorul unui polinom trigonometric, tot așa cum o funcție continuă pe un interval compact se poate aproxima oricît de bine cu ajutorul unui polinom obișnuit. Se pune, în mod natural, următoarea problemă: dat fiind că polinoamele trigonometrice care aproximează o funcție f depind, evident, de funcția considerată, nu cumva aceste polinoame sînt chiar sumele parțiale ale seriei Fourier asociate lui f? Dacă ar fi așa, atunci am putea reprezenta într-un mod simplu polinoamele $T_n(x)$ din teorema 3', deoarece coeficienții acestor polinoame ar fi exprimați, cu ajutorul funcției f, prin formule de tipul (18) și (19). Realitatea este însă alta: polinoamele $T_n(x)$ care figurează în teporema 3' nu sînt, în general, sumele parțiale ale seriei Fourier asociate lui f. Acest lucru era de așteptat, deoarece în caz contrar ar fi însemnat ca seria Fourier a oricărei funcții f, continue, periodice, de perioada 2π, să conveargă uniform către f pe toată axa reală; însă aceasta ar veni în contradicție cu faptul — cunoscut în știință — că există funcții continue, periodice, de perioadă 2π, ale căror serii Fourier nu numai că nu converg uniform, dar admit chiar unele puncte de divergență.

În cele ce urmează, vom arăta totuși că sumele parțiale ale seriei Fourier asociate unei funcții f, continue pe $[-\pi, \pi]$, joacă un rol foarte important în problema aproximării funcției f, însă această aproximare trebuie înțeleasă într-o altă accepțiune decît pînă acum. Pentru a explica această accepțiune nouă, va fi necesar să dezvoltăm o întreagă analogie între noțiunea de vector și noțiunea de funcție și să considerăm noțiunea de funcție ca o generalizare a noțiunii de vector.

Se știe că un vector alunecător, în spațiul euclidian de dimensiune n, este caracterizat prin cele n componente scalare. O funcție f definită pe $[a, b]$ este caracterizată prin valorile $f(x)$ luate pentru diferite valori ale lui $x \in [a, b]$. Însă valorile $x \in [a, b]$ formează o mulțime infinită. Pentru acest motiv, vom concepe o funcție f definită pe $[a, b]$ ca un vector cu o infinitate de componente; pentru fiecare $x \in [a, b]$, $f(x)$ va fi o componentă a lui f. Diferitele noțiuni referitoare la vectorii obișnuiți se extind, într-un mod natural, la vectorii funcții. (Este posibil ca unele „componente" ale unui vector funcție să fie egale: într-adevăr, dacă f ia valori egale în punctele x_1 și x_2, atunci componentele $f(x_1)$ și $f(x_2)$ sînt egale.) Adunarea vectorilor funcții și înmulțirea unui vector funcție cu un număr se definesc ca adunarea funcțiilor și înmulțirea unei funcții cu un număr.

Lungimea unui vector V din spațiul cu n dimensiuni este dată de expresia

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2},$$

unde $v_1, \ldots, v_n$ sînt componentele lui V. Prin analogie, pentru un vector funcție f definim „lungimea" prin expresia

$$\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}, \tag{33}$$

presupunînd, bineînțeles, că $f^2(x)$ este integrabilă pe $[a, b]$.

Distanța dintre punctele $A(x_1, \ldots, x_n)$ și $B(y_1, \ldots, y_n)$ din spațiul euclidian cu n dimensiuni este dată de

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

Prin analogie, „distanța" dintre două funcții f și g, definite pe $[a, b]$, va fi definită ca lungime a vectorului funcției $f - g$:

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}, \tag{34}$$

bineînțeles, în cazul în care integrala are sens.

Expresia 33 se numește *abaterea medie pătratică* a funcțiilor f și g.

Se știe că unghiul φ a doi vectori din spațiu: V, de componente v_1, v_2 și v_3 și W, de componente w_1, w_2, w_3, satisface relația

$$\cos\varphi = \frac{v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\,\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}.$$

În mod analog, putem defini „unghiul“ φ a doi vectori funcții f și g, definite pe $[a, b]$, prin relația

$$\cos\varphi = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}}, \tag{35}$$

cu condiția ca fracția să fie subunitară în valoare absolută, deoarece cosinusul nu poate părăsi intervalul $[-1, 1]$, cu alte cuvinte cu condiția ca

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}. \tag{36}$$

Această inegalitate este cunoscută în Analiză sub numele de *inegalitatea lui Cauchy-Buncakovski.* Ea este adevărată oricare ar fi funcțiile f și g. Iată cum se arată acest lucru:

Fie f și g două funcții neidentic nule (în caz contrar, inegalitatea este evidentă) definite pe $[a, b]$ și fie λ și μ două numere reale. Presupunînd că f și g sînt integrabile pe $[a, b]$, are sens integrala

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]^2\,dx.$$

Deoarece funcția de sub integrală este nenegativă, integrala însăși este nenegativă, deci

$$2\lambda\mu\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \lambda^2\int_a^b f^2(x)dx + \mu^2\int_a^b g^2(x)\,dx,$$

sau, punînd

$$A = \int_a^b f^2(x)\,dx, \qquad B = \int_a^b g^2(x)dx, \qquad C = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \tag{37}$$

avem, ținînd seama că semnul lui λ sau al lui μ este arbitrar,

$$2\lambda\mu C \leqslant \lambda^2 A + \mu^2 B. \tag{38}$$

Deoarece λ și μ sînt numere reale arbitrare, putem lua

$$\lambda = \sqrt{\frac{C}{A}}, \qquad \mu = \sqrt{\frac{C}{B}}$$

și, înlocuind aceste valori în (38), obținem

$$\frac{C}{\sqrt{A}} \leqslant 1.$$

Revenind la expresiile (37) ale lui A, B şi C, se obţine inegalitatea (36).

Se ştie că produsul scalar a doi vectori obişnuiţi se obţine multiplicînd produsul lungimilor cu cosinusul unghiului dintre ei. Aplicînd această regulă la vectorii funcţii şi ţinînd seama de expresiile (33) şi (35) pentru lungimea şi pentru cosinusul unui unghi, obţinem, pentru produsul scalar (f, g) a doi vectori funcţii, următoarea expresie, care constituie însăşi definiţia lui,

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\, \mathrm{d}x. \tag{39}$$

Ţinînd seama de (33), rezultă că produsul scalar al unui vector funcţie cu el însuşi este egal cu pătratul lungimii acestui vector. În legătură cu definiţia (39) a produsului scalar, este semnificativ să reconsiderăm şi formula (35). Prin analogie cu vectorii obişnuiţi, vom spune că doi vectori funcţie sînt ortogonali dacă cosinusul unghiului acestor doi vectori este egal cu zero. Formula (35) ne spune că aceasta se întîmplă atunci cînd produsul scalar al celor doi vectori, dat de (39), este egal cu zero.

În felul acesta, denumirea de „ortogonale“, dată funcţiilor f şi g pentru care integrala (39) este nulă, îşi capătă o motivare deplină.

Toate consideraţiile dezvoltate pînă aici au sens, evident, pentru funcţii integrabile pe $[a, b]$. Putem vorbi şi despre distanţa dintre două funcţii integrabile f şi g, folosind ca definiţie a distanţei expresia (34), care, după cum am văzut, se introduce pe o cale foarte naturală. Problema care ne va preocupa acum va fi următoarea: dintre toate polinoamele trigonometrice de ordinul n, care este polinomul cel mai apropiat, în sensul distanţei (34), de o funcţie f, integrabilă pe $[-\pi, \pi]$ (în cazul în care un astfel de polinom trigonometric există). Răspunsul la această întrebare va arăta marea însemnătate a sumelor parţiale ale unei serii Fourier. Înainte de a da acest răspuns, vom avea nevoie de următoarea definiţie:

Fie f integrabilă pe $[-\pi, \pi]$. Polinomul

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

format cu primii $2n + 1$ termeni din seria Fourier asociată lui f, se numeşte polinomul Fourier de ordinul n asociat funcţiei f. Cu alte cuvinte, polinomul Fourier de ordinul n asociat funcţiei f este acel polinom trigonometric de ordinul n ai cărui coeficienţi sînt daţi de formulele (18) şi (19).

Teorema 4. Fie f integrabilă pe $[-\pi, \pi]$ şi fie $F_n(x)$ polinomul Fourier de ordinul n asociat funcţiei f. Dacă $T_n(x)$ este un polinom trigonometric de ordinul n, atunci

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F(x)]^2 \mathrm{d}x} \leqslant \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\, \mathrm{d}x}. \quad 40)$$

Demonstraţie. Va fi, evident, suficient să demonstrăm inegalitatea

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_n(x)]^2\, \mathrm{d}x \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 \mathrm{d}x.$$

Să scriem sub formă explicită pe $T_n(x)$:

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \dots + \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \tag{41}$$

Totul revine la a demonstra că funcţia

$$\Phi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 \, dx, \tag{42}$$

definită în spaţiul euclidian cu $2n + 1$ dimensiuni, îşi atinge minimul atunci cînd $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_1 = a_1$, ..., $\alpha_n = a_n$, $\beta_1 = b_1$, ..., $\beta_n = b_n$, unde a_0, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n sînt coeficienţii lui $F_n(x)$. Avem

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) \, dx. \tag{43}$$

Să evaluăm ultimele două integrale din membrul al doilea, ţinînd seama de (41), (18) şi (19):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) \, dx = \frac{\alpha_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx + \alpha_1 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx + \beta_1 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx +$$

$$+ \dots + \alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx + \beta_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

deci

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) \, dx = \pi \left[\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1 + \dots + \alpha_n a_n + \beta_n b_n \right]. \tag{44}$$

Ţinînd seama de ortogonalitatea sistemului trigonometric, avem

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\alpha_0^2}{4} + \alpha_1^2 \cos^2 x + \beta_1^2 \sin^2 x + \dots + \alpha_n^2 \cos^2 nx + \beta_n^2 \sin^2 nx \right) dx =$$

$$= \frac{\pi \alpha_0^2}{2} + \alpha_1^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx + \beta_1^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx + \dots + \alpha_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx +$$

$$+ \beta_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx.$$

Însă, conform relaţiilor (15) şi (16), toate integralele din membrul al doilea sînt egale cu π, deci

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) \, dx = \pi \left[\frac{\alpha_0^2}{2} + \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \dots + \alpha_n^2 + \beta_n^2 \right]. \tag{45}$$

Înlocuind în (43) expresiile obținute la (44) și (45), obținem

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - 2\pi \left[\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1 + \ldots + \alpha_n a_n + \beta_n b_n\right] +$$

$$+ \pi \left[\frac{\alpha_0^2}{2} + \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 + \beta_n^2\right]$$

sau, grupînd în mod convenabil termenii din membrul al doilea,

$$\int_{\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx + \pi \left[\frac{\alpha_0^2 - 2\alpha_0 a_0}{2} + (\alpha_1^2 - 2\alpha_1 a_1) +\right.$$

$$\left. + (\beta_1^2 - 2\beta_1 b_1) + \ldots + (\alpha_n^2 - 2\alpha_n a_n) + (\beta_n^2 - 2\beta_n b_n)\right].$$

Însă avem

$$a_p^2 - 2\alpha_p a_p = (\alpha_p - a_p)^2 - a_p^2, \qquad (p = 0, 1, \ldots, n),$$

$$\beta_p^2 - 2\beta_p b_p = (\beta_p - b_p)^2 - b_p^2, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

deci

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx + \pi \left[\frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} + (\alpha_1 - a_1)^2 + (\beta_1 - b_1)^2 +\right.$$

$$\left. + \ldots + (\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2\right] - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + b_1^2 + \ldots + a_n^2 + b_n^2\right]. \tag{46}$$

Însă este clar că expresia din membrul al doilea al ultimei egalități devine minimă atunci cînd:

$$\alpha_0 - a_0 = \alpha_1 - a_1 = \beta_1 - b_1 = \ldots = \alpha_n - a_n = \beta_n - b_n = 0,$$

deci cînd $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ sînt tocmai coeficienții polinomului $F_n(x)$. Deci minimul funcției (42) se realizează tocmai atunci cînd $T_n(x) = F_n(x)$.

Teorema 4 se mai poate enunța în felul următor:

T e o r e m a 4′. Dintre toate polinoamele trigonometrice de ordinul n, cel mai apropiat, în sensul distanței (34), de o funcție f integrabilă pe $[-\pi, \pi]$, este polinomul Fourier de ordinul n asociat funcției f.

O b s e r v a ț i e. Funcția Φ definită de (42) este o integrală cu $2n + 1$ parametri. Este interesant să se cerceteze minimul funcției Φ după metoda studierii punctelor de extremum la funcții de mai multe variabile, folosindu-se derivatele parțiale de primul și de al doilea ordin ale funcției Φ, precum și teoremele privitoare la integrale cu parametrii. Recomandăm cititorului să încerce acest mod de stabilire a teoremei 4, urmînd eventual, să introducă unele ipoteze suplimentare privitoare la funcția f.

Este util, pentru cele ce urmează, să calculăm valoarea funcţiei Φ în punctul ei de minim. Această valoare se deduce uşor din (46), făcînd $\alpha_i = a_i$, $\beta_i = b_i$;

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \pi\left[\frac{a_0}{2} + a_1^2 + b_1^2 + \dots + a_n^2 + b_n^2\right]. \quad (47)$$

Am obţinut astfel distanţa, în sensul lui (34), de la o funcţie f, integrabilă pe $[-\pi, \pi]$, la polinomul ei Fourier de ordinul n. Ţinînd seama că primul membru al egalităţii (47) este, evident, nenegativ, rezultă că şi membrul al doilea al egalităţii (47) este nenegativ, deci

$$\frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + b_1^2 + \dots + a_n^2 + b_n^2 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx. \quad (48)$$

Relaţia obţinută se numeşte *inegalitatea lui Bessel*. Ea stabileşte o legătură nouă între o funcţie f, integrabilă pe $[-\pi, \pi]$, şi primii ei $2n + 1$ coeficienţi Fourier. Dat fiind că inegalitatea (48) este valabilă pentru orice număr natural n, ea se păstrează şi pentru $n \to \infty$, deci

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx. \quad (49)$$

În particular, rezultă că seria de termen general $a_n^2 + b_n^2$ este convergentă. Însă termenul general al unei serii convergente tinde la zero cînd $n \to \infty$, deci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \quad (50)$$

Relaţiile (49) şi (50) au o semnificaţie deosebită, deoarece ele arată că şirul de coeficienţi Fourier ai unei funcţii integrabile pe $[-\pi, \pi]$ nu este un şir arbitrar de numere reale, ci un şir pentru care seria pătratelor termenilor este convergentă, deci, în particular, un şir care tinde la zero. Rezultă astfel răspunsul negativ la problema 4. Se pune, în mod natural, următoarea problemă: reciproca propoziţiei de mai sus este adevărată? Cu alte cuvinte, fiind dat un şir de numere reale, $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$ pentru care seria formată cu pătratele termenilor este convergentă, există o funcţie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$, ai cărei coeficienţi Fourier să fie tocmai termenii şirului dat? Răspunsul la această întrebare este negativ. Dacă însă ne amintim că noţiunea de „coeficient Fourier", ca şi aceea de serie Fourier, depinde de noţiunea de integrală cu care se lucrează, apare legitimă întrebarea dacă nu cumva răspunsul negativ la problema de mai sus nu se datoreşte faptului că integrala Riemann, cu care lucrăm, este o integrală prea particulară. Într-adevăr, aceasta este situaţia. După cum s-a constatat la începutul secolului nostru, de îndată ce se trece la o noţiune mai generală de integrală, anume la integrala introdusă de Lebesgue, răspunsul la problema pusă este următorul:

Fiind dat un şir de numere reale $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$, pentru care seria pătratelor este convergentă, există o funcţie f definită pe $[-\pi, \pi]$, al cărei pătrat este o funcţie integrabilă Lebesgue pe $[-\pi, \pi]$ şi astfel încît termenii şirului dat sînt tocmai coeficienţii Fourier-Lebesgue ai funcţiei f. (Deci a_n şi b_n sînt daţi de formulele (18) şi (19), în care integrala este luată în sensul lui Lebesgue.)

Discuţia de mai sus arată că integrala Riemann este insuficientă, inadecvată pentru rezolvarea problemelor fundamentale ale teoriei seriilor trigonometrice. Aceasta este doar una dintre împrejurările care au determinat introducerea unui concept mai general de integrală.

Dealtfel, trebuie să spunem că inegalitatea lui Bessel şi teorema 5 de mai jos rămîn şi ele adevărate pentru orice funcţie cu pătrat integrabil Lebesgue pe $[-\pi, \pi]$.

Ca o completare a consideraţiilor de mai sus, vom preciza că inegalitatea (49) este chiar o egalitate, ori de cîte ori funcţia f satisface condiţia $f(-\pi) = f(\pi)$. Nu putem da aici demonstraţia acestui fapt, îl vom stabili însă într-un caz particular.

Teorema 5. Fie f continuă, periodică, de perioadă 2π pe $(-\infty, \infty)$. Fie $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ coeficienţii Fourier ai funcţiei f. Are loc egalitatea

$$\frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + b_1^2 + \ldots + a_n^2 + b_n^2 + \ldots = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx. \tag{51}$$

Demonstraţie. În baza ipotezelor făcute asupra lui f şi ţinînd seama de teorema 3', există un şir de polinoame trigonometrice $\{T_n(x)\}$ care converge uniform, pe $(-\infty, \infty)$, către $f(x)$. Aceasta înseamnă că, fiind dat un $\varepsilon > 0$, există un N_ε cu proprietatea că pentru orice $n > N_\varepsilon$ şi pentru orice x real avem

$$|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon.$$

Presupunînd că $\varepsilon < 1$, vom avea, cu atît mai mult,

$$|f(x) - T_n(x)|^2 < \varepsilon,$$

pentru orice x real, deci

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\, dx < 2\pi\varepsilon. \tag{52}$$

Notînd cu $F_n(x)$ polinomul Fourier de ordinul n asociat funcţiei f şi ţinînd seama de teorema 4, obţinem

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_n(x)]^2\, dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\, dx. \tag{53}$$

Din (52) şi (53) rezultă că, pentru $n > N_\varepsilon$, avem

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_n(x)]^2\, dx < 2\pi\varepsilon \tag{54}$$

sau, ţinînd seama de egalitatea (47),

$$0 \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + b_1^2 + \ldots + a_n^2 + b_n^2\right] < 2\pi\varepsilon.$$

Deoarece aceste inegalităţi sînt valabile oricare ar fi numărul natural n, rezultă

$$0 \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right] \leqslant 2\pi\varepsilon$$

şi, deoarece ε este un număr pozitiv arbitrar de mic, iar diferenţa de la mijloc nu depinde de ε, se obţine

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right] = 0$$

şi teorema 5 este astfel demonstrată.

Observaţii. Egalitatea (51) a fost stabilită la începutul secolului trecut, de către M.A. Parseval, fără a preciza condiţiile în care ea are loc. Prima demonstraţie riguroasă a egalităţii (51) a fost dată de A.M. Leapunov. De aceea, vom numi egalitatea (51) egalitatea lui *Parseval-Leapunov.*

Formula lui Parseval-Leapunov are o deosebită semnificaţie geometrică, ea fiind o generalizare a teoremei lui Pitagora. Într-adevăr, dacă se consideră în plan doi vectori ortogonali $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, suma $\bar{a} + \bar{b}$ este un vector dirijat pe ipotenuza triunghiului dreptunghic ale cărui catete sînt $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, iar mărimea lui $\bar{a} + \bar{b}$ este egală cu lungimea ipotenuzei. Deoarece mărimea unui vector este dată de rădăcina pătrată a produsului scalar al acestui vector cu el însuşi, teorema lui Pitagora revine la

$$(\bar{a} + \bar{b})^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2,$$

unde pătratul are semnificaţia de pătrat scalar. Cu alte cuvinte, teorema lui Pitagora se mai poate enunţa în modul următor:

Dacă doi vectori din plan sînt ortogonali, atunci pătratul scalar al sumei lor este egal cu suma pătratelor lor scalare.

Acest enunţ rămîne valabil şi atunci cînd se consideră vectori din spaţiul euclidian n-dimensional. Demonstraţia acestui fapt este imediată. Fie $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ doi vectori ortogonali din spaţiul euclidian cu n dimensiuni. În baza proprietăţii de distributivitate a produsului scalar, avem

$$(\bar{a} + \bar{b})^2 = (\bar{a} + \bar{b})\,(\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a}\bar{a} + \bar{b}\bar{b} + \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{a}.$$

Însă deoarece $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sînt ortogonali, avem

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a} = 0,$$

deci

$$(\bar{a} + \bar{b})^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2.$$

Prin inducţie completă, se arată uşor că enunţul de mai sus rămîne valabil pentru orice sumă finită de vectori din spaţiul euclidian n-dimensional, cu alte cuvinte, dacă $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_p$, sînt vectori din spaţiul euclidian n-dimensional, astfel încît fiecare dintre ei este ortogonal cu toţi ceilalţi, atunci

$$(\bar{a}_1 + \bar{a}^2 + \ldots + \bar{a}_p)^2 = a_1^2 + \bar{a}_2^2 + \bar{a}_3^2 + \ldots + \bar{a}_p^2.$$

Aceasta este teorema lui Pitagora generalizată.
Acum este clar că teorema 5 constituie o extensiune a enunţului de mai sus la cazul în care suma este înlocuită cu o serie convergentă, iar vectorii obişnuiţi sînt înlocuiţi cu vectori funcţii. O funcţie f, continuă, periodică, de perioadă 2π, nu este totdeauna suma seriei Fourier asociate; dar chiar dacă egalitatea

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots$$

este falsă sau n-are sens, ea devine adevărată de îndată ce concepem convergenţa seriei Fourier nu în sensul obişnuit, ci în sensul distanţei (34); într-adevăr, conform teoremei 5 (în special relaţia (54)), sumele parţiale ale seriei Fourier asociate lui f converg, în sensul distanţei (34), către f, de îndată ce f este continuă, periodică, de perioadă 2π. Ţinînd seama de relaţiile (15) şi (16), egalitatea (51) arată că pătratul scalar al funcţiei f este egal cu suma seriei obţinute prin însumarea pătratelor scalare ale termenilor seriei Fourier asociate lui f. Bineînţeles, pătratul scalar este considerat în sensul produsului scalar definit prin relaţia (39).

Din teorema 5 vom deduce unele consecinţe foarte importante, însă pentru stabilirea lor este nevoie să introducem o noţiune nouă.

Să considerăm un şir de funcţii $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, definite şi integrabile pe $[a, b]$ şi care formează, pe $[a, b]$, un sistem ortogonal. Fie acum o familie F de funcţii integrabile pe $[a, b]$. *Vom spune că sistemul ortogonal dat este complet pe* $[a, b]$ *în raport cu familia F dacă nu există în F nici o funcţie f neidentic nulă, care să fie ortogonală cu* f_n, *pe* $[a, b]$, *oricare ar fi numărul natural n.*

Teorema 6. Sistemul trigonometric fundamental este, pe $[-\pi, \pi]$, un sistem ortogonal complet în raport cu familia C a funcţiilor continue, periodice, de perioadă 2π pe $(-\infty, \infty)$.

Demonstraţie. Fie $f \in C$. Să presupunem că f este ortogonală pe $[-\pi, \pi]$, cu fiecare funcţie din sistemul trigonometric fundamental. Avem deci

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Aceasta înseamnă că toţi coeficienţii Fourier ai funcţiei f sînt egali cu zero: $a_0 = 0$, $a_n = b_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ipotezele făcute asupra funcţiei f permit aplicarea teoremei 5; egalitatea lui Parseval-Leapunov ne dă, în baza faptului că toţi coeficienţii Fourier sînt egali cu zero,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = 0. \tag{55}$$

Să presupunem, prin reducere la absurd, că f nu este identic nulă pe $[-\pi, \pi]$. Datorită continuităţii lui f, ar exista atunci un punct $\xi \in (-\pi, \pi)$ cu $f(\xi) \neq 0$. Pentru a fixa ideile, fie $f(\xi) > 0$. În baza continuităţii lui f în ξ, există două numere pozitive ω şi η, astfel încît, pentru $x \in [\xi - \eta, \xi + \eta]$, să avem $f^2(x) \geqslant \omega$. Avem deci

$$\int_{\xi-\eta}^{\xi+\eta} f^2(x)\, dx \geqslant 2\eta\omega.$$

Cum, pe de altă parte, avem

$$\int_{-\pi}^{\xi-\eta} f^2(x)\, dx \geqslant 0, \qquad \int_{\xi+\eta}^{\pi} f^2(x)\, dx \geqslant 0,$$

rezultă, în baza aditivităţii integralei ca funcţie de interval,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx > 0,$$

inegalitate care contrazice relaţia (55). Deci f este identic nulă pe $[-\pi, \pi]$ şi teorema 6 este demonstrată.

Observaţie. Se poate demonstra o teoremă mai puternică decît teorema 6 şi anume:

Teorema 6'. Sistemul trigonometric fundamental este, pe $[-\pi, \pi]$, un sistem ortogonal complet în raport cu familia funcţiilor continue pe $[-\pi, \pi]$.

Nu vom da aici demonstraţia acestei teoreme.

Acum sîntem în măsură să rezolvăm problema 5 în acel caz particular în care funcţiile f şi g sînt continue, periodice, de perioadă 2π pe $(-\infty, \infty)$.

Teorema 7. Fie f şi g două funcţii continue, periodice, de perioadă 2π pe $(-\infty, \infty)$. Fie

$$a_n^f = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \qquad a_n^g = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx\, dx \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

$$b_n^f = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \qquad b_n^g = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx\, dx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Dacă $a_n^f = a_n^g$ pentru $n = 0, 1, 2, \ldots$, şi $b_n^f = b_n^g$ pentru $n = 1, 2, \ldots$, atunci $f(x) = g(x)$.

D e m o n s t r a ţ i e. Să punem $\varphi = f - g$. Un calcul simplu arată că

$$a_n^{\varphi} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n^{\varphi} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx = 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

deci funcţia φ este ortogonală cu fiecare funcţie din sistemul trigonometric fundamental. Deoarece φ este continuă, periodică, de perioadă 2π pe $(-\infty, \infty)$, putem aplica teorema 6 şi rezultă $\varphi(x) \equiv 0$, deci $f(x) \equiv g(x)$.

O b s e r v a ţ i e. Folosind, în locul teoremei 6, teorema 6', demonstraţia de mai sus conduce la

T e o r e m a 7'. Fie f şi g două funcţii continue pe $[-\pi, \pi]$. Fie a_n^f, b_n^f, a_n^g, b_n^g coeficienţii Fourier ai funcţiilor f şi g. Dacă $a_n^f = a_n^g$ $(n = 0, 1, \ldots)$ şi $b_n^f = b_n^g$ $(n = 1, 2, \ldots)$ atunci $f \equiv g$.

Cu alte cuvinte, problema 5 capătă un răspuns negativ de îndată ce înlocuim, în enunţul ei, cuvîntul „integrabile" prin cuvîntul „continue".

Este uşor de arătat că, în cazul general, răspunsul la problema 5 este afirmativ. Într-adevăr, fie f funcţia identic nulă şi fie g funcţia lui Riemann

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q},\ p \text{ şi } q \text{ întregi, } q > 0,\ (p, q) = 1, \\ 0, & x \text{ iraţional.} \end{cases}$$

Funcţia g este integrabilă Riemann pe orice interval compact şi integrala ei este nulă pe orice interval compact. Deci funcţiile f şi g au, amîndouă, toţi coeficienţii Fourier egali cu zero, deşi ele diferă în orice punct raţional.

Vom da acum o teoremă care constituie un răspuns parţial la problemele 1, 2 şi 3.

T e o r e m a 8. Fie f o funcţie periodică, de perioadă 2π pe $(-\infty, \infty)$. Să presupunem că f este derivabilă, iar derivata ei este continuă pe $(-\infty, \infty)$. În aceste condiţii:

I) Seria Fourier a funcţiei f converge absolut şi uniform pe $(-\infty, \infty)$;

II) Suma seriei Fourier este egală cu $f(x)$, oricare ar fi x real.

D e m o n s t r a ţ i e. Fie a_n şi b_n coeficienţii Fourier (daţi de (18) şi (19)) ai funcţiei f şi fie α_n şi β_n coeficienţii Fourier ai funcţiei f'. Avem deci

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Să calculăm pe a_n aplicînd teorema de integrare prin părţi:

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{f(x) \sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx\, dx = -\frac{\pi}{n} \beta_n,$$

deci

$$a_n = -\frac{\beta_n}{n}. \tag{56}$$

Să calculăm şi pe b_n aplicînd integrarea prin părţi:

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{-f(x) \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx\, dx.$$

Însă $\cos nx = \cos(-nx)$ şi, datorită periodicităţii lui f, $f(-\pi) = f(\pi)$, deci

$$\frac{f(x) \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Rezultă

$$\pi b_n = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx\, dx = \frac{\pi}{n} \alpha_n,$$

deci

$$b_n = \frac{\alpha_n}{n}. \tag{57}$$

Ţinînd seama de formula pătratului unui binom, din (56) şi (57) rezultă

$$|a_n| = \frac{|\beta_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(\beta_n^2 + \frac{1}{n^2}\right), \tag{58}$$

$$|b_n| = \frac{|\alpha_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(\alpha_n^2 + \frac{1}{n^2}\right). \tag{59}$$

În baza relaţiei (49) aplicate funcţiei f', rezultă că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$$

este convergentă. Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

este de asemenea convergentă, după cum se ştie din teoria seriilor. Rezultă că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n^2 + \beta_n^2 + \frac{2}{n^2}\right)$$

este convergentă. Însă, în baza relațiilor (58) și (59), avem

$$|a_n| + |b_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(\alpha_n^2 + \beta_n^2 + \frac{2}{n^2}\right),$$

deci, în baza teoremei de comparație din teoria seriilor, seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

este convergentă.

Deoarece avem, pentru orice x real,

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leqslant |a_n \cos nx| + |b_n \sin nx| \leqslant |a_n| + |b_n|,$$

rezultă, în baza criteriului lui Weierstrass de convergență uniformă a unei serii, că seria

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{a=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{60}$$

converge absolut și uniform pe $(-\infty, \infty)$. Am stabilit astfel prima parte a teoremei.

Pentru a arăta că suma seriei (60) este egală cu $f(x)$, vom nota cu $g(x)$ suma seriei (60), urmînd a arăta că $f(x) \equiv g(x)$.

Conform teoremei 2′ și ținînd seama că seria (60) converge uniform, rezultă că seria (60) este seria Fourier a funcției g, cu alte cuvinte a_n și b_n sînt coeficienții Fourier ai funcției g. Pe de altă parte, a_n și b_n sînt, prin ipoteză, coeficienții Fourier ai funcției f. Funcția f este, prin ipoteză, continuă, periodică, de perioadă 2π. Funcția g, ca sumă a unei serii trigonometrice uniform convergente, este și ea continuă, periodică, de perioadă 2π. Funcțiile f și g îndeplinesc deci toate condițiile pentru a le putea aplica teorema 7; rezultă că $f(x) \equiv g(x)$, deci $f(x)$ este, pentru orice x real, suma seriei (60).

Capitolul VII

DRUMURI, CURBE ŞI LUNGIMEA LOR

a. Drumuri

Fie f şi g două funcţii reale, definite şi continue pe intervalul compact $[a, b]$. Fiecărei valori t cuprinse între a şi b îi corespunde, în plan, un punct determinat, de abscisă $f(t)$ şi ordonată $g(t)$. Mulţimea E a acestor puncte se obţine deci cu ajutorul reprezentării:

$$r: \begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases} \quad (a \leqslant t \leqslant b); \tag{1}$$

t este un *parametru*, iar r este o *reprezentare parametrică*.

Mulţimea E este imaginea lui $[a, b]$ prin r; o numim *imaginea* reprezentării r şi o notăm $I(r)$. Se pot considera şi reprezentări parametrice alcătuite cu trei funcţii, deci a căror imagini sînt situate în spaţiu. Pentru a nu complica scrierea vom considera, în cele ce urmează, numai reprezentări parametrice plane. Funcţiile f şi g vor fi presupuse tot timpul continue.

Cuplul $\{r, I(r)\}$, *alcătuit din reprezentarea* r *şi imaginea ei, constituie, prin definiţie, un drum şi se notează cu* d.

Dacă renunţăm să înglobăm în conceptul de drum componenta geometrică dată de imaginea aplicaţiei (1), putem defini noţiunea de drum pur şi simplu ca o aplicaţie continuă a intervalului $[a, b]$ în spaţiul R^n. (Cazurile obişnuite fiind acelea pentru care $n = 2$ sau $n = 3$.) În acest caz, se obţine o anumită simplificare a terminologiei şi a notaţiei.

Dacă $f(a) = f(b)$ *şi* $g(a) = g(b)$, *drumul este închis.* Un exemplu de drum închis este furnizat de funcţiile $f(t) = \cos t$ şi $g(t) = \sin t$, considerate pe intervalul $[0, 2\pi]$.

Fie o reprezentare r *astfel încît există valori* t' *şi* t'' *cu următoarele proprietăţi:* $a \leqslant t' < t'' \leqslant b$, $f(t') = f(t'')$ şi $g(t') = g(t'')$. *Dacă cel puţin una dintre inegalităţile* $a < t'$ şi $t'' < b$ *este satisfăcută, spunem că punctul de abscisă* $f(t')$ *şi de ordonată* $g(t')$ *este un punct multiplu al drumului* $\{r, I(r)\}$.

Dacă un drum d nu admite nici un punct multiplu, spunem că d este un drum simplu.

Drumul definit cu ajutorul funcţiilor $f(t) = t$, $g(t) = 2t$, $a \leqslant t \leqslant b$, este simplu, dar nu este închis. Exemplul de drum închis care a fost dat mai sus este, în acelaşi timp, un exemplu de drum simplu. Drumul definit cu ajutorul funcţiilor $f(t) = |2t - 1|$, $g(t) = f(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ nu este simplu, dar este închis. Într-adevăr, avem

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}, \; f(0) = g(0) = 1 = f(1) = g(1).$$

Drumul definit de funcţiile $f(t) = \cos t$, $g(t) = \sin t$, considerate pe intervalul $[0, 3\pi]$, nu este nici simplu, nici închis. Într-adevăr, avem $\cos 0 = \cos 2\pi$, $\sin 0 = \sin 2\pi$, dar $\cos 0 \neq \cos 3\pi$.

b. Drumuri rectificabile

Noţiunea de drum rectificabil în sensul lui Jordan. Fie un drum $d = \{r, I(r)\}$, unde r este dată de

$$r: \begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases} \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Fie $\Delta = (a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b)$ o diviziune oarecare a lui $[a, b]$. Punctele $A_0(f(t_0), g(t_0))$, $A_1(f(t_1), g(t_1))$, ..., $A_i(f(t_i), g(t_i))$, ..., $A_n(f(t_n)\ g(t_n))$ determină o linie poligonală înscrisă în marginea lui r[1]. Lungimea acestei linii poligonale este

$$l_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[f(t_{i+1}) - f(t_i)]^2 + [g(t_{i+1}) - g(t_i)]^2}.$$

Se observă că, înlocuind diviziunea Δ cu o diviziune mai fină, l_Δ nu descreşte. Este natural atunci să ne îndreptăm atenţia către marginea superioară a mulţimii $\{l_\Delta\}$, presupunînd, bineînţeles, că mulţimea $\{l_\Delta\}$ este majorată.

Drumul d se numeşte rectificabil dacă mulţimea $\{l_\Delta\}$ este majorată. Marginea superioară a acestei mulţimi se numeşte lungimea drumului d. Vom da acum:

Criteriul de rectificabilitate al lui Jordan. Un drum $d = \{r, I(r)\}$ este rectificabil dacă şi numai dacă funcţiile f şi g din (1) sînt cu variaţie mărginită pe $[a, b]$.

D e m o n s t r a ţ i e. Din faptul că, oricare ar fi numerele reale u şi v, avem:

$$\left.\begin{matrix} |u| \\ |v| \end{matrix}\right\} \leqslant \sqrt{u^2 + v^2} \leqslant |u| + |v|,$$

[1] Ori de cîte ori nu va fi confuzie, vom spune „drumul d" în loc de „imaginea lui r".

rezultă, luînd $u = f(t_{i+1}) - f(t_i)$ şi $v = g(t_{i+1}) - g(t_i)$, că

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|\end{array}\right\} \begin{array}{l}\leqslant \sum\limits_{i=0}^{n-1} \sqrt{[f(t_{i+1}) - f(t_i)]^2 + [g(t_{i+1}) - g(t_i)]^2} \leqslant \\ \leqslant \sum\limits_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| + \sum\limits_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|.\end{array}$$

Dacă d este rectificabil, atunci mulţimea $\{l_\Delta\}$, adică suma de la mijloc este majorată, deci cu atît mai mult sînt majorate sumele din stînga. Rezultă, că f şi g sînt cu variaţie mărginită. Reciproc, dacă f şi g sînt cu variaţie mărginită pe $[a, b]$, atunci sumele din dreapta sînt majorate, deci cu atît mai mult va fi majorată suma de la mijloc, adică mulţimea $\{l_\Delta\}$. Rezultă că d este rectificabil.

Observaţie. Un drum rectificabil poate avea aceeaşi imagine ca şi un drum nerectificabil. Într-adevăr, fie d_1 şi d_2 două drumuri definite, respectiv, de

$$r_1: \begin{cases} x = t, \\ y = t, \end{cases} (0 \leqslant t \leqslant 1) \qquad r_2: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \varphi(t), \end{cases} (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

unde φ este o funcţie continuă, dar cu variaţie nemărginită pe $[0, 1]$ şi astfel încît marginea ei inferioară este egală cu zero, iar marginea ei superioară este egală cu unu pe $[0, 1]$ · r_1 şi r_2 au drept imagine diagonala pătratului unitate situată pe prima bisectoare a axelor. Conform criteriului de rectificabilitate de mai sus, d_2 nu este rectificabil, dar d_1 este rectificabil.

Observaţii. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ un şir convergent de funcţii cu variaţie mărginită pe $[a, b]$. Fie

$$r_n: \begin{cases} x = t, \\ y = f_n(t), \end{cases} (a \leqslant t \leqslant b).$$

Rezultă că, pentru orice $n = 1, 2, \ldots$, drumul $d_n = \{r_n, I(r_n)\}$ este rectificabil. Fie $f_n = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Dacă funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ sînt cu variaţie egal mărginită pe $[a, b]$, atunci funcţia limită f este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$, deci, notînd cu r reprezentarea

$$r: \begin{cases} x = f(t), \\ y = f(t), \end{cases} (a \leqslant t \leqslant b),$$

drumul $d = \{r, I(r)\}$ este rectificabil. De aici nu rezultă însă că şirul $l(d_1), l(d_2), \ldots, l(d_n), \ldots$ (unde $l(d_n)$ reprezintă lungimea drumului d_n) converge către $l(d)$, lungimea drumului d. Într-adevăr, fie $f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots$ funcţiile care au drept grafice liniile poligonale indicate în figura 1.

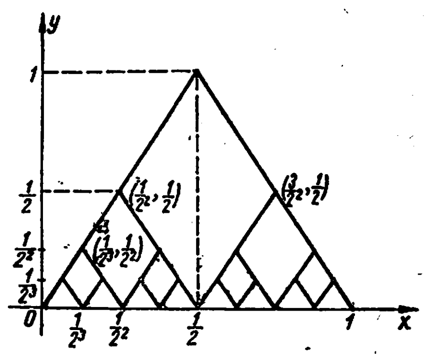


Fig. 1

Funcţia f_n are drept grafic o linie poligonală formată din 2^n laturi egale, în felul următor: prima latură uneşte punctul $(0,0)$ cu punctul $\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)$, a doua latură uneşte punctul $\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)$ cu punctul $\left(\frac{1}{2^n}, 0\right)$, a treia latură uneşte punctul $\left(\frac{1}{2^n}, 0\right)$ cu punctul $\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)$ şi aşa mai departe. Funcţiile f_n astfel definite sînt cu variaţie egal mărginită pe $[0, 1]$. Se vede uşor că, pentru fiecare număr natural n, lungimea graficului lui f_n este egală cu $\sqrt{5}$. Însă lungimea graficului lui f este egală cu 1, deoarece acest grafic coincide cu segmentul unitate de pe axa absciselor.

Dacă pentru un şir convergent $\{f_n\}$ de funcţii cu variaţie mărginită pe $[a, b]$ şirul de lungimi ale graficelor converge către lungimea graficului funcţiei limită f, atunci spunem că şirul $\{f_n\}$ converge în lungime către f. Dacă şirul $\left\{\overset{b}{\underset{a}{V}}(f_n)\right\}$ converge către $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$, atunci spunem că şirul $\{f_n\}$ converge în variaţie către f. Şirul de mai sus nu converge către f nici în lungime, nici în variaţie, deşi el converge uniform către f.

c. Reprezentarea integrală a lungimii unui drum

Pentru a calcula cu uşurinţă lungimea unui drum, vom căuta s-o exprimăm cu ajutorul unei integrale. După cum se va vedea, aceasta este posibil pentru o clasă foarte largă de drumuri.

L e m a 1. **Fie $d = \{r, I(r)\}$ un drum rectificabil, r fiind definită de (1). Există un şir de diviziuni Δ_n' ale intervalului $[a, b]$, cu următoarele două proprietăţi: 1° norma diviziunii Δ_n' tinde la zero cînd n tinde la infinit; 2° lungimea liniei poligonale $l_{\Delta_n'}$ tinde către lungimea $l(d)$ a drumului d, atunci cînd $n \to \infty$.**

D e m o n s t r a ţ i e. Avem $l(d) = \sup \{l_\Delta\}$. Există deci în mulţimea $\{l_\Delta\}$ un şir de elemente $l_{\Delta 1}, l_{\Delta 2}, \ldots, l_{\Delta n}, \ldots$, care tinde către $l(d)$. Adăugînd lui Δ_n noi puncte de diviziune, într-un mod convenabil, vom obţine o diviziune Δ_n' de normă inferioară lui $1/n$. Cum, pe de altă parte, pentru orice diviziune Δ avem $l_\Delta \leqslant l(d)$, rezultă $l_{\Delta n} \leqslant l_{\Delta_n'} \leqslant l(d)$ pentru orice număr natural n, deci şirul $l_{\Delta_1'}, l_{\Delta_2'}, \ldots, l_{\Delta_n'}, \ldots$ tinde la $l(d)$, în timp ce norma lui Δ_n' tinde la zero.

Lema 1 este astfel demonstrată.

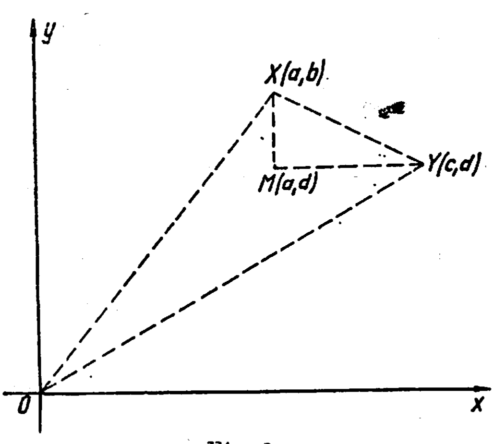


Fig. 2

L e m a 2. **Fie a, b, c şi d patru numere nenegative. Avem**

$$\left|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant |a - c| + |b - d|.$$

D e m o n s t r a ţ i e. Să urmărim figura 2. În triunghiul XOY

avem $|\overline{OX} - \overline{OY}| \leqslant \overline{XY}$. Dar $\overline{XY}$ este ipotenuza în triunghiul $XM\dot{Y}$, deci $\overline{XY} \leqslant \overline{XM} + \overline{MY}$. Combinînd cele două inegalități, rezultă $|\overline{OX} - \overline{OY}| \leqslant \leqslant \overline{XM} + \overline{MY}$, adică tocmai inegalitatea care trebuie demonstrată, deoarece $\overline{OX} = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\overline{OY} = \sqrt{c^2 + b^2}$, $\overline{XM} = |b - d|$, $\overline{MY} = |a - c|$.

Teoremă. **Fie $d = \{r, I(r)\}$ un drum, cu r definită de (1). Să presupunem că f și g au derivată integrabilă pe $[a, b]$. În aceste condiții, d este rectificabil și**

$$l(d) = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, dt.$$

Demonstrație. f și g, avînd derivată integrabilă pe $[a, b]$, sînt cu variație mărginită pe $[a, b]$, deci d este rectificabil, în baza criteriului lui Jordan.

Fie $\Delta = (a = t_0 \leqslant t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. În baza teoremei creșterilor finite, aplicată funcțiilor f și g pe intervalul $[t_i, t_{i+1}]$, există — în acest interval — două numere ξ_i și η_i, astfel încît $f(t_{i+1}) - f(t_i) = f'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$, $g(t_{i+1}) - g(t_i) = g'(\eta_i)(t_{i+1} - t_i)$. Avem deci:

$$l_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[f(t_{i+1}) - f(t_i)]^2 + [g(t_{i+1}) - g(t_i)]^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\eta_i)}(t_{i+1} - t_i).$$

Dacă am avea $\eta_i = \xi_i$, atunci suma din dreapta ar fi o sumă riemanniană a funcției integrabile $\sqrt{f'^2(x) + g'^2(x)}$ și egalitatea din enunț ar rezulta imediat din egalitatea obținută mai sus, făcînd pe Δ să parcurgă un șir de diviziuni cu proprietățile din lema 1. Dat fiind însă că, în general, $\eta_i \neq \xi_i$, este necesar să facem un ocol pentru a obține egalitatea din enunț. Să notăm cu I integrala din enunț, cu $\{\Delta_n'\}$ un șir de diviziuni de tipul considerat în lema 1, cu $\sigma_{\Delta_n'}$ suma riemanniană corespunzătoare. Avem

$$|l(d) - I| \leqslant |l(d) - l_{\Delta_n'}| + |l_{\Delta_n'} - \sigma_{\Delta_n'}| + |\sigma_{\Delta_n'} - I|. \tag{2}$$

Vom arăta că, pentru n suficient de mare, membrul al doilea al inegalității devine oricît de mic dorim. Fie $\varepsilon > 0$. În baza lemei 1, există N_ε', astfel încît, pentru $n > N_\varepsilon'$, să avem

$$|l(d) - l_{\Delta_n}'| < \varepsilon. \tag{3}$$

Să punem $\Delta_n' = (a = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_i^n < t_{i+1}^n < \ldots < t_{p_n}^n = b)$,

$$l_{\Delta_n'} = \sum_{i=1}^{p_n - 1} \sqrt{f'^2(\xi_i^n) + g'^2(\eta_i^n)}(t_{i+1}^n - t_i^n),$$

$$\sigma_{\Delta_n'} = \sum \sqrt{f'^2(\xi_i^n) + g'^2(\xi_i^n)}(t_{i+1}^n - t_i^n).$$

Avem

$$\left| l_{\Delta'_n} - \sigma_{\Delta'_n} \right| = \left| \sum_{i=0}^{p_n-1} \left(\sqrt{f'^2(\xi_i^n) + g'^2(\eta_i^n)} - \sqrt{f'^2(\xi_i^n) + g'^2(\xi_i^n)}\right)(t_{i+1}^n - t_i^n) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{p_n-1} \left| \sqrt{f'^2(\xi_i^n) + g'^2(\eta_i^n)} - \sqrt{f'^2(\xi_i^n) + g'^2(\xi_i^n)} \right| (t_{i+1}^n - t_i^n).$$

Aplicînd lema 2, cu $a = c = |f'(\xi_i^n)|$, $b = |g'(\eta_i^n)|$,

$$d = |g'(\xi_i^n)|,$$

obţinem:

$$\left| l_{\Delta'_n} - \sigma_{\Delta'_n} \right| \leqslant \sum_{i=0}^{p_n-1} \left| |g'(\eta_i^n)| - |g'(\xi_i^n)| \right| (t_{i+1}^n - t_i^n). \tag{4}$$

Deoarece g' este integrabilă, rezultă că $|g'|$ este integrabilă pe $[a, b]$, deci, ţinînd seama de (4), avem

$$\left| l_{\Delta'_n} - \sigma_{\Delta'_n} \right| \leqslant S_{\Delta'_n}(|g'|) - s_{\Delta'_n}(|g'|) < \varepsilon,$$

de îndată ce n este suficient de mare.

Rezultă că există N''_ε, astfel încît, pentru $n > N''_\varepsilon$, să avem

$$\left| l_{\Delta'_n} - \sigma_{\Delta'_n} \right| \leqslant \varepsilon. \tag{5}$$

În ceea ce priveşte ultimul termen din membrul al doilea al inegalităţii (2), observăm că din integrabilitatea funcţiei $\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}$ rezultă existenţa unui N'''_ε, astfel încît, pentru $n > N'''_\varepsilon$, să avem

$$\left| \sigma_{\Delta'_n} - I \right| < \varepsilon. \tag{6}$$

Fie $N_\varepsilon = \max(N'_\varepsilon, N''_\varepsilon, N'''_\varepsilon)$. Dacă $n > N_\varepsilon$, atunci inegalităţile (3), (4) şi (5) sînt simultan adevărate şi rezultă, în baza inegalităţii (2),

$$|l(d) - I| < \varepsilon,$$

deci $l(d) = I$, deoarece membrul din stînga nu depinde de ε, iar ε este un număr pozitiv arbitrar. Teorema este astfel demonstrată.

Aplicaţie. Fie $d = \{r, I(r)\}$ un drum cu r definită de

$$r: \begin{cases} x = \varphi(\theta) \cos \theta, \\ y = \varphi(\theta) \sin \theta, \end{cases} \quad (a \leqslant \theta \leqslant b), \tag{7}$$

unde θ este unghiul polar, iar φ este o funcţie continuă pe $[a, b]$. Recunoaştem aici aşa-numitele „coordonate polare".

Teoremă. Dacă φ este o funcţie derivabilă, cu derivată integrabilă pe $[a, b]$, atunci drumul definit de (7) este rectificabil şi lungimea lui este dată de

$$\int_a^b \sqrt{\varphi^2(\theta) + \varphi'^2(\theta)}\, d\theta.$$

Demonstrație. Vom aplica teorema anterioară; să punem $f(\theta) = \varphi(\theta) \cos \theta$, $g(\theta) = \varphi(\theta) \sin \theta$. f și g sînt derivabile, cu derivată continuă pe $[a, b]$, deci drumul considerat este rectificabil. Avem $f'(\theta) = \varphi'(\theta) \cos \theta - \varphi(\theta) \sin \theta$, $g'(\theta) = \varphi'(\theta) \sin \theta + \varphi(\theta) \cos \theta$. Ridicînd la pătrat aceste două egalități și adunînd membru cu membru egalitățile astfel obținute, se ajunge la relația:

$$f'^2(\theta) + g'^2(\theta) = \varphi^2(\theta) + \varphi'^2(\theta)$$

și teorema este astfel demonstrată.

d. Reprezentări parametrice echivalente

Pentru ușurința limbajului, vom asocia fiecărei perechi (x, y) de funcții — în cazul planului — sau fiecărui triplet (x, y, z) de funcții — în cazul spațiului — funcții definite, în ambele cazuri, pe un interval compact $[a, b]$, un vector r avînd drept componente funcțiile date. Imaginea reprezentării parametrice devine, astfel, imaginea funcției vectoriale r. Denumirile de „reprezentare parametrică" și „vector" vor fi folosite concomitent și cu aceeași accepție.

Fie $[a, b]$ și $[\alpha, \beta]$ două intervale compacte ale dreptei numerice. Se știe din volumul întîi *că orice aplicație continuă și biunivocă a segmentului* $[a, b]$ *pe segmentul* $[\alpha, \beta]$ *este strict monotonă.*

O aplicație continuă și biunivocă a lui $[a, b]$ pe $[\alpha, \beta]$ se mai numește și un *homeomorfism* al lui $[a, b]$ pe $[\alpha, \beta]$.

Pe baza proprietăților de compunere și de inversare a funcțiilor continue, strict monotone, studiate în volumul întîi, următoarele proprietăți devin evidente:

a) *Dacă* $h : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ *este un homeomorfism, atunci* $h^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *este un homeomorfism.*

b) *Dacă*

$$h : [a, b] \to [\alpha, \beta], \; h' : [\alpha, \beta] \to [\alpha', \beta']$$

sînt homeomorfisme, atunci

$$h' \circ h : [a, b] \to [\alpha', \beta']$$

este un homeomorfism.

Teorema amintită mai sus ne conduce în mod natural să împărțim homeomorfismele între două segmente $[a, b]$, $[\alpha, \beta]$ în două clase: 1° homeomorfismele realizate prin funcții continue strict crescătoare *(homeomorfisme directe)*; 2° homeomorfismele realizate prin funcții continue strict descrescătoare *(homeomorfisme inverse)*.

Proprietatea următoare este evidentă. Fie

$$f : [a, b] \to [\alpha, \beta], \qquad g : [\alpha, \beta] \to [\alpha', \beta']$$

două homeomorfisme. Homeomorfismul

$$g \circ f : [a, b] \to [\alpha', \beta']$$

este direct sau invers, după cum f și g aparțin aceleiași clase sau nu.

c) Să notăm cu $V^{[a, b]}$ mulţimea funcţiilor vectoriale continue, definite pe intervalul compact $[a, b]$ şi cu valori în plan (sau în spaţiu). Dacă $[a, b]$ şi $[a', b']$ sînt două intervale compacte oarecare ale dreptei numerice, vom stabili o relaţie de echivalenţă între $V^{[a, b]}$ şi $V^{[a', b']}$, pentru mulţimea tuturor perechilor $\{[a, b], [a', b']\}$ de intervale compacte ale dreptei numerice, în felul următor:

Pentru $r \in V^{[a, b]}$ şi $r' \in V^{[a', b']}$, vom pune

$$r \sim r'$$

dacă există un homeomorfism *direct*

$$h : [a, b] \to [a', b'],$$

astfel încît

$$r' \circ h = r,$$

ceea ce revine la a scrie

$$t' = h(t) \Rightarrow r'[h(t)] = r(t').$$

Un element r din $V^{[a, b]}$ este o reprezentare parametrică continuă, definită pe $[a, b]$ şi cu valori în plan, cu alte cuvinte o reprezentare de tipul (1). Vom spune că două drumuri d şi d' sînt *echivalente* dacă vectorii corespunzători sînt echivalenţi.

Este uşor de verificat că $r \sim r$ şi că:

$$r \sim r' \Rightarrow r' \sim r.$$

Fie $r \in V^{[a, b]}$, $r' \in V^{[a', b']}$, $r'' \in V^{[a'', b'']}$.

Dacă $r \sim r'$, există un homeomorfism direct h: $[a, b] \to [a', b']$, astfel încît

$$r' \circ h = r. \tag{8}$$

Dacă $r' \sim r''$, există un homeomorfism direct h':$[a', b'] \to [a'', b'']$, astfel încît

$$r'' \circ h' = r'. \tag{9}$$

Din (8) şi (9) deducem, ţinînd seama de proprietatea de asociativitate a compunerii funcţiilor,

$$r'' \circ (h' \circ h) = r.$$

Dar $g = h' \circ h$: $[a, b] \to [a'', b'']$ este un homeomorfism direct. Deci $r \sim r''$.

Aşadar, relaţia „$\sim$" este o relaţie de echivalenţă algebrică. Această relaţie de echivalenţă împarte, după cum se ştie, mulţimea tuturor elementelor considerate, în cazul nostru mulţimea

$$\{V^{[a, b]}\}$$

a tuturor vectorilor corespunzînd tuturor intervalelor compacte $[a, b]$ ale dreptei numerice, în clase disjuncte.

În mod corespunzător, mulţimea drumurilor se împarte şi ea în clase disjuncte; două drumuri sînt echivalente dacă şi numai dacă sînt în aceeaşi clasă.

Vom nota, în mod provizoriu, cu $\bar{r}$ clasa căreia îi aparţine elementul $r \in V^{[a, b]}$. Din cele de mai sus rezultă că dacă $r \in V^{[a, b]}$, $r' \in V^{[a', b']}$ şi $r \sim r'$, atunci $\bar{r} = \bar{r}'$.

4. Se poate uşor demonstra că:

Doi vectori echivalenţi au aceeaşi imagine.

Într-adevăr, fie $r \in V^{[a, b]}$, $r' \in V^{[a', b']}$ şi $r \sim r'$. Să notăm, respectiv, cu E şi E' imaginile vectorilor r, r'. Un punct $p \in E$ se obţine pentru un anumit $t \in [a, b]$. Fie h: $[a, b] \to [a', b']$ homeomorfismul direct, astfel încît

$$r \circ h = r'.$$

Punînd $t' = h(t)$, obţinem, pe imaginea E', un punct p'.

Fie (în cazul planului, pentru a simplifica) (x, y) componentele vectorului r şi (x', y') componentele vectorului r'. Avem, în baza relaţiei precedente,

$$x'(t') = x(t), \qquad y'(t') = y(t),$$

deci punctul p' coincide cu p.

Deducem, în baza simetriei relaţiei de echivalenţă, $E = E'$. Putem deci spune că E este imaginea *clasei* $\bar{r}$.

Rezultă imediat că:

Două drumuri echivalente au aceeaşi imagine.

Propoziţia demonstrată ne permite să dăm următoarea

Definiţie. Se numeşte curbă o clasă de drumuri echivalente.

Un exemplu de drumuri aparţinînd aceleiaşi curbe este dat de $d_1 = \{r_1, I(r_1)\}$ şi $d_2 = \{r_2, I(r_2)\}$, unde

$$r_1 = \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} 0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad r_2: \begin{cases} x = 2\tau \\ y = 2\tau \end{cases} 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{2},$$

cum se vede luînd $h(t) = \frac{t}{2}$.

Un drum echivalent cu un drum simplu este de asemenea simplu. Într-adevăr, să presupunem că drumul d_1 este simplu şi că $d_2 \sim d_1$. (Notaţiile sînt aceleaşi ca în demonstraţia propoziţiei precedente.) Dacă d_2 n-ar fi simplu, ar exista două valori τ' şi τ'' astfel încît $\alpha \leqslant \tau' < \tau'' \leqslant \beta$, $\varphi(\tau') = \varphi(\tau'')$, $\psi(\tau') = \psi(\tau'')$ şi cel puţin una dintre egalităţile $\alpha = \tau'$, $\beta = \tau''$ este falsă. Să admitem, pentru a face o alegere, că $\alpha < \tau'$. Avem $a < h^{-1}(\tau') < h^{-1}(\tau'') \leqslant b$, $f(h^{-1}(\tau')) = f(h^{-1}(\tau''))$ şi $g(h^{-1}(\tau')) = g(h^{-1}(\tau''))$. Ar urma că drumul d_1 nu este simplu, ceea ce contrazice ipoteza. Deci d_2 este simplu.

Vom numi curbă *simplă* orice clasă formată din drumuri simple echivalente.

Observaţie importantă. *Există drumuri care nu sînt echivalente, dar au aceeaşi imagine.* Într-advăr, fie

$$r_1:\begin{cases} x = t, \\ y = t, \end{cases} (0 \leqslant t \leqslant 1), \qquad r_2:\begin{cases} x = |2t - 1|, \\ y = |2t - 1|, \end{cases} (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Reprezentările r_1 şi r_2 au ca imagine segmentul de dreaptă avînd ca extremităţi punctele (0, 0) şi (1, 1). d_1 este simplu, în timp ce d_2 nu este simplu, după cum s-a arătat $\left(\left|2 \cdot \frac{1}{4} - 1\right| = \left|2 \cdot \frac{3}{4} - 1\right|\right)$. Deci d_2 nu este echivalent cu d_1.

Un drum echivalent cu un drum închis este de asemenea închis. Într-adevăr, să presupunem că drumul (1) este închis şi că drumul (10) este echivalent cu (1). Avem $f(a) = f(b)$, $g(a) = g(b)$, deci, ţinînd seama că $h(a) = \alpha$, $h(b) = \beta$, rezultă că $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ şi $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$.

Vom numi curbă închisă clasa de echivalenţă determinată de un drum închis.

Vom spune că reprezentarea parametrică (1) defineşte un drum *neted* dacă funcţiile f şi g au derivată continuă pe $[a, b]$ şi dacă nu există nici o valoare t cuprinsă între a şi b, astfel încît $f'(t) = g'(t) = 0$. Drumul definit de funcţiile $f(t) = g(t) = t$, $a \leqslant t \leqslant b$ este neted. Drumul definit de funcţiile $f(t) = \cos^3 t$, $g(t) = \sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, nu este neted. Într-adevăr, avem $f'(0) = g'(0) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'(\pi) = g'(\pi) = f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$. Valorilor $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ şi $\frac{3\pi}{2}$ ale parametrului le corespund „vîrfuri" ale imaginii reprezentării din figura 3.

După cum se vede, noţiunea de „drum neted" corespunde conţinutului intuitiv al acestui cuvînt.

În mod corespunzător *se defineşte noţiunea de curbă netedă, ca fiind o curbă conţinînd cel puţin un drum neted.*

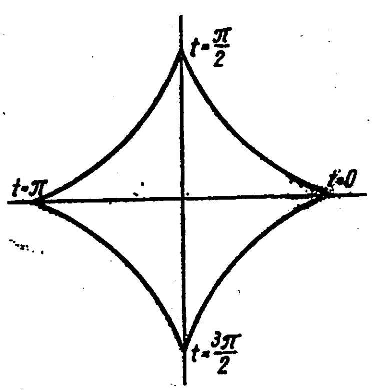


Fig 3

Un drum echivalent cu un drum rectificabil este de asemenea rectificabil. Într-adevăr, fie $d_1 \sim d_2$, d_1 fiind definit de (1), iar d_2 fiind definit de (10). Fie h homeomorfismul direct care apare în condiţia de echivalenţă a lui d_1 cu d_2. Orice diviziune $\Delta' = (\alpha = \tau_0 < \ldots < \tau_i < \tau_{i+1} < \ldots < \tau_n = \beta)$ se obţine ca imagine, prin h, a unei diviziuni unic determinate $\Delta = (a = t_0 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b)$, cu alte cuvinte $h(t_i) = \tau_i$ $(i = 0, \ldots, n)$. Reciproc, oricărei diviziuni Δ a lui $[a, b]$ îi corespunde, prin h, o diviziune Δ' a lui $[\alpha, \beta]$, h stabileşte deci o corespondenţă biunivocă între diviziunile lui $[a, b]$ şi cele ale lui $[\alpha, \beta]$. Avem, prin însăşi definiţia echivalenţei, $r_1(t) = r_2(\tau)$, de îndată ce $\tau = h(t)$, deci $f(t_i) = \varphi(\tau_i)$ şi $g(t_i) = \psi(\tau_i)$ pentru $i = 0, \ldots, \ldots, n$. Rezultă că:

$$l_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[f(t_{i+1}) - f(t_i)]^2 + [g(t_{i+1}) - g(t_i)]^2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(\tau_{i+1}) - \varphi(\tau_i)]^2 + [\psi(\tau_{i+1}) - \psi(\tau_i)]^2} = l_{\Delta'},$$

deci mulţimile $\{l_\Delta\}$ şi $\{l_{\Delta'}\}$ coincid. Prin urmare, aceste două mulţimi sînt în acelaşi timp majorate sau nemajorate şi propoziţia de mai sus este stabilită. Mai mult decît atît, marginile superioare ale celor două mulţimi coincid de îndată ce ele există, deci:

Două drumuri rectificabile şi echivalente au aceeaşi lungime.

Propoziţiile de mai sus fac naturale următoarele definiţii:

Se numeşte curbă rectificabilă orice curbă care conţine cel puţin un drum rectificabil. Lungimea unei curbe rectificabile este, prin definiţie, lungimea comună a drumurilor care alcătuiesc această curbă.

În cele ce urmează, vom desemna prin reprezentări parametrice atît drumurile cît şi curbele. Expresii ca „imaginea curbei“, „imaginea drumului“, „imaginea reprezentării“ vor fi folosite în aceeaşi accepţiune. Noţiuni ca acelea de „drum“ şi „curbă“ vor fi desemnate, de multe ori, printr-o reprezentare parametrică. Datorită propoziţiilor de mai sus, nu este posibilă, prin aceasta, nici o confuzie. Totodată, atragem atenţia asupra faptului că, deşi toate consideraţiile dezvoltate în acest capitol s-au referit la drumuri şi curbe în plan, ele se transpun fără nici o dificultate la drumuri şi curbe în spaţiul cu trei dimensiuni. Sînt necesare doar modificări de scriere, cerute de apariţia celei de-a treia coordonate. De exemplu, reprezentarea integrală a lungimii unui drum este de forma

$$\int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\, dt.$$

Un drum $d = \{(r, I(r)\}$ este un drum cu tangentă continuă dacă funcţiile f şi g care definesc reprezentarea r au derivată continuă pe $[a, b]$. Rezultă că noţiunea de drum neted este un caz particular al noţiunii de „drum cu tangentă continuă“. După cum se observă în exemplul de mai sus, există drumuri cu tangentă continuă care nu sînt drumuri netede.

Dacă cel puţin un element al unei curbe este un drum cu tangentă continuă, atunci curba este, prin definiţie, o curbă cu tangentă continuă.

e. Exemplu de curbă care umple un pătrat

La un examen superficial, s-ar părea că orice curbă are o arie nulă. În realitate nu este aşa. Peano a dat, cel dintîi, un exemplu de curbă care umple un pătrat, adică o curbă care trece prin toate punctele unui pătrat. Alţi

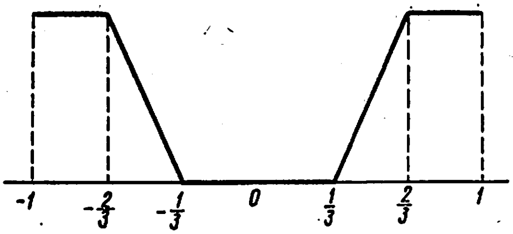


Fig. 4

geometri, în urma sa, au putut să dea exemple mai simple de astfel de curbe. Vom reproduce aici un exemplu obţinut de I. J. Schoenberg[1] printr-o uşoară modificare a unui exemplu ingenios, datorit lui Lebesgue.

Fie $f(t)$ o funcţie continuă, periodică, cu perioada 2, reprezentată, în intervalul $-1 \leqslant t \leqslant 1$, prin graficul din figura 4. Curba noastră va fi definită prin reprezentarea parametrică:

$$x = x(t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2^2} f(3^2 t) + \frac{1}{2^3} f(3^4 t) + \ldots,$$

$$y = y(t) = \frac{1}{2} f(3t) + \frac{1}{2^2} f(3^3 t) + \frac{1}{2^3} f(3^5 t) + \ldots \ (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Deoarece din definiţia lui $f(t)$ rezultă

$$0 \leqq f(t) \leqq 1,$$

deducem imediat că seriile din membrul al doilea sînt, amîndouă, majorate de seria numerică convergentă $\sum \frac{1}{2^n}$, deci sînt uniform convergente în orice interval finit. Cum termenii acestor serii sînt funcţii continue de t, rezultă că $x(t)$ şi $y(t)$ sînt funcţii continue de t; reprezentarea parametrică precedentă reprezintă într-adevăr o curbă. Pe de altă parte, termenii ambelor serii fiind toţi pozitivi, iar suma seriei majorante egală cu 1, vom avea

$$0 \leqq x(t) \leqq 1, \qquad 0 \leqq y(t) \leqq 1.$$

Fie acum (x_0, y_0) un punct oarecare al pătratului

$$0 \leqq x \leqq 1, \qquad 0 \leqq y \leqq 1.$$

Vom scrie numerele x_0, y_0 în reprezentare binară, astfel:

$$x_0 = \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_{2n-2}}{2^n} + \ldots$$

$$y_0 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \ldots + \frac{a_{2n-1}}{2^n} + \ldots$$

unde, evident, numerele a_i nu pot lua decît una din valorile 0 sau 1. Vom arăta că există o valoare t_0 a lui t, luată în intervalul (0, 1), astfel încît să avem

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0.$$

Această valoare este:

$$t_0 = \frac{2a_0}{3} + \frac{2a_1}{3^2} + \ldots + \frac{2a_{k-1}}{3^k} + \frac{2a_k}{3^{k+1}} + \ldots$$

[1] I. J. Schoenberg, *On the Peano curve of Lebesgue*, „Bull. Amer. Math. Soc.", 1938, v. 44, p. 519. Exemplul dat de Lebesgue se găseşte în cartea acestuia, *Leçons sur l'intégration*, 1928, ed. II, p. 44.

Este suficient, într-adevăr, să calculăm valorile $f(3^k t_0)$, pentru $k = 0, 1, 2, \ldots$ Avem

$$3^k t_0 = \text{număr par} + \frac{2a_k}{3} + \frac{2a_{k+1}}{3^2} + \ldots$$

Să presupunem $a_k = 0$. Atunci

$$\frac{2a_k}{3} + \frac{2a_{k+1}}{3^2} + \ldots \leqq \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots = \frac{1}{3}.$$

Ținînd seama de periodicitatea funcției $f(t)$, avem

$$f(3^k t_0) = 0.$$

Să presupunem acum $a_k = 1$. Atunci

$$\frac{2}{3} \leqq \frac{2a_k}{3} + \frac{2a_{k+1}}{3^2} + \ldots \leqq \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots = 1,$$

deci

$$f(3^k t_0) = 1.$$

În ambele cazuri,

$$f(3^k t_0) = a_k.$$

Prin urmare,

$$x(t_0) = \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots = x_0,$$

$$y(t_0) = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \ldots = y_0.$$

Curba noastră trece deci prin toate punctele pătratului considerat: imaginea acestei curbe coincide cu mulțimea punctelor pătratului și aria acesteia este egală cu 1.

Capitolul VIII

INTEGRALA CURBILINIE

a. Integrala curbilinie de primul tip

Să considerăm un fir material de grosime neglijabilă; deoarece firul este prevăzut cu o lungime, vom admite că el este imaginea Γ a unei curbe rectificabile $(\bar{r}, \Gamma)$. Fie $r \in \bar{r}$ şi

$$r:\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}; a \leqslant t \leqslant b. \tag{1}$$

Fie, pentru $a \leqslant t \leqslant b$, reprezentarea

$$r_t:\begin{cases} x = f(\tau) \\ y = g(\tau) \end{cases}; a \leqslant \tau \leqslant t$$

şi fie Γ_t imaginea lui r_t. Conform criteriului de rectificabilitate al lui Jordan, funcţiile f şi g sînt cu variaţie mărginită pe $[a, b]$. Conform teoremei 3 din capitolul privitor la funcţii cu variaţie mărginită, funcţiile f şi g sînt cu variaţie mărginită pe $[a, t]$, pentru $a \leqslant t \leqslant b$. Aplicînd din nou criteriul de rectificabilitate al lui Jordan, rezultă că $(\bar{r}_t, \Gamma_t)$ este rectificabilă pentru $a \leqslant t \leqslant b$. Fie $l(t)$ lungimea curbei $(\bar{r}_t, \Gamma_t)$. Din însăşi definiţia lungimii, rezultă că $l(t)$ este crescătoare pe $[a, b]$.

Să notăm cu $m(t)$ masa corespunzătoare lui Γ_t. Să presupunem că limita

$$\lim_{t \to t_0} \frac{m(t) - m(t_0)}{l(t) - l(t_0)}$$

există şi este finită şi să notăm cu $\rho(f(t_0), g(t_0))$ valoarea acestei limite. $\rho(f(t_0), g(t_0))$ se numeşte densitatea firului în punctul $(f(t_0), g(t_0))$.

Noţiunea de densitate a unui fir într-un punct conduce în mod natural la o generalizare a noţiunii de derivată:

Definiţie. Fie f şi g două funcţii reale definite pe un acelaşi interval $[a, b]$, g fiind crescătoare pe $[a, b]$. Fie $x_0 \in [a, b]$. Dacă limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

există şi este finită, atunci spunem că f este derivabilă în raport cu g în punctul x_0. Valoarea limitei se notează

$$\left(\frac{df}{dg}\right)_{x_0}$$

sau

$$\left(\frac{df(x)}{dg(x)}\right)_{x_0}$$

şi se numeşte derivata lui f în raport cu g în punctul x_0. Dacă f este derivabilă în raport cu g, în orice punct din $[a, b]$, atunci spunem că f este derivabilă, în raport cu g, pe $[a, b]$.

Cu această definiţie, putem spune că densitatea firului dat prin (1), în punctul $(f(t_0), g(t_0))$, este derivata funcţiei $m(t)$ în raport cu funcţia $l(t)$ în punctul t_0. Dacă admitem — din considerente de ordin fizic — că funcţia densitate $\varphi(t) = \rho(f(t), g(t))$ există şi este continuă pe $[a, b]$, atunci legătura dintre $m(t)$ şi $\varphi(t)$ se exprimă într-un mod simplu, cu ajutorul integralei Stieltjes, după cum rezultă din

Teorema 1. Fie f continuă şi g strict crescătoare pe $[a, b]$. Să punem

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dg(t)$$

(existenţa acestei integrale este asigurată, pentru orice $x \in [a, b]$, de teorema 3 din capitolul referitor la integrala Stieltjes). Funcţia F este derivabilă, în raport cu g, pe $[a, b]$, şi

$$\left(\frac{dF}{dg}\right)_x = f(x), \tag{2}$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Demonstraţie. Avem

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\, dg(t).$$

Folosind proprietatea de medie a integralei Stieltjes, rezultă existenţa unui număr ξ cuprins între x şi $x + h$, astfel încît

$$\int_x^{x+h} f(t)\, dg(t) = f(\xi)[g(x+h) - g(x),$$

deci

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{g(x+h) - g(x)} = f(\xi).$$

În baza continuităţii funcţiei f obţinem deci relaţia (2).

Se poate arăta că dacă $\frac{dF}{dg} \equiv 0$, atunci F este constantă, deci are loc următorul

C o r o l a r. Dacă $\varphi(t) = \rho(f(t), g(t))$ este funcţia densitate a firului material definit de (1), atunci funcţia masă $m(t)$ este dată de

$$m(t) = \int_a^t \varphi(x)\, dl(x). \tag{3}$$

Integrala Stieltjes care apare aici este strîns legată de curba (1). Studiu general al integralei Stieltjes urmăreşte dependenţa acestei integrale atît de intervalul de integrare cît şi de cele două funcţii care figurează sub integrală. În ceea ce priveşte integralele Stieltjes de tipul (3), ele introduc o problematică nouă, şi anume dependenţa integralei de curba (1). Pentru acest motiv şi ţinînd seama de semnificaţia fizică deosebită a integralei (3), aşa cum rezultă din corolarul de mai sus, vom introduce unele denumiri şi notaţii noi.

Fie F o funcţie reală definită într-un domeniu plan D care conţine imaginea Γ a curbei rectificabile (1). *Dacă integrala Stieltjes*

$$\int_a^b F(f(t), g(t))\, dl(t) \tag{4}$$

există, atunci ea se notează mai condensat astfel

$$\int_\Gamma F(x, y)\, dl$$

şi se numeşte integrala curbilinie de primul tip a funcţiei F de-a lungul curbei (1). Este evident că integrala curbilinie de primul tip se defineşte numai de-a lungul curbelor rectificabile.

Dacă integrala (4) *există, atunci spunem că F este integrabilă în raport cu l de-a lungul lui* (1).

După cum vedem, noţiunea de integrală curbilinie de primul tip se introduce ca o generalizare a problemei de a determina masa unui fir material, atunci cînd i se cunoaşte densitatea în fiecare punct. Conform relaţiei (3), masa firului (1) este dată de

$$\int_\Gamma \rho(x, y)\, dl.$$

Există şi alte probleme care conduc la noţiunea de integrală curbilinie de primul tip. Astfel este problema determinării sarcinii electrice totale a unui fir material atunci cînd se cunoaşte densitatea de repartiţie în fiecare punct al firului. Bineînţeles că aici, ca şi în problema determinării masei, firul este presupus unidimensional.

Pentru ca noţiunea introdusă mai sus să fie necontradictorie, trebuie să arătăm că nici existenţa, nici valoarea integralei curbilinii de primul tip nu depind de alegerea unui element r în $\tilde{r}$, ci numai de clasa $\tilde{r}$.

Teorema 2. Fie r şi r_1 două elemente din $\bar{r}$, r fiind dat de (1), iar r_1 de

$$r_1:\begin{cases} x = f_1(\tau) \\ y = g_1(\tau)\end{cases} a_1 \leqslant \tau \leqslant b_1.$$

Dacă t şi τ sînt valori generice din $[a, b]$ respectiv $[a_1, b_1]$, care se corespund prin homeomorfismul direct h definit de echivalenţa $r \sim r_1$, atunci existenţa fiecăreia dintre următoarele două integrale Stieltjes implică existenţa celeilalte şi egalitatea lor:

$$\int_a^b F(f(t),\ g(t))\, \mathrm{d}l(t) = \int_{a_1}^{b_1} F(f_1(\tau),\ g_1(\tau))\, \mathrm{d}l_1(\tau). \tag{5}$$

Demonstraţie. Să presupunem că există prima integrală. Fie $\Delta = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Homeomorfismul direct h asociază lui Δ o diviziune $\Delta_1 = (a_1 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_i < \tau_{i+1} < \ldots < \tau_n = b_1)$ a intervalului $[a_1, b_1]$. Fie ξ_i astfel încît $t_i \leqslant \xi_i \leqslant t_{i+1} (i = 0, \ldots, n-1)$. Prin h, lui ξ_i îi corespunde o valoare ξ_i^1 cu proprietatea $\tau_i \leqslant \xi_i^1 \leqslant \tau_{i+1} (i = 0, \ldots, n-1)$. Ţinînd seama că $l(t) = l_1(\tau)$, deoarece două drumuri echivalente au aceeaşi lungime, rezultă că:

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(f(\xi_i),\ g(\xi_i))\,[l(t_{i+1}) - l(t_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} F(f_1(\xi_i^1)),\ g_1(\xi_i^1))\,[l_1(\tau_{i+1}) - l_1(\tau_i)].$$

Observînd, în sfîrşit, că h este o funcţie uniform continuă, rezultă că norma uneia dintre diviziunile Δ, Δ_1 devine oricît de mică de îndată ce norma celeilalte este suficient de mică, deci există a doua integrală din (5) şi are loc egalitatea (5).

Observaţie. Toate consideraţiile dezvoltate pînă aici se transpun, evident, şi la curbe în spaţiu. Numai notaţiile se schimbă, adăugîndu-se a treia coordonată, respectiv a treia funcţie în definirea unui element din $\bar{r}$. Integrala curbilinie de primul tip se notează, în acest caz,

$$\int_r F(x,\ y,\ z)\, \mathrm{d}l.$$

Pentru motive de economie a scrierii, consideraţiile pe care le facem au în vedere, în mod explicit, numai curbele plane.

b. Calculul integralelor curbilinii de primul tip

Pentru ca integrala curbilinie de primul tip să devină un instrument *practic* în analiză, este necesar ca ea să poată fi calculată uşor. Este deci foarte importantă problema reducerii integralei la o integrală Riemann. Iată un caz în care această reducere este posibilă.

Teorema 3. Dacă funcţiile f şi g din (1) sînt derivabile, cu derivată continuă pe $[a, b]$, iar F este continuă pe un domeniu D care conţine imaginea Γ a curbei (1), atunci

$$\int_{\Gamma} F(x, y)\, dl = \int_a^b F(f(t), g(t)) \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, dt.$$

Demonstraţie. Să presupunem că derivata $l'(t)$ există şi este continuă pe $[a, b]$. În aceste condiţii, conform teoremei de reducere a integralei Stieltjes la o integrală Riemann, avem:

$$\int_{\Gamma} F(x, y)\, dl = \int_a^b F(f(t), g(t))\, l'(t)\, dt.$$

Teorema va fi deci, demonstrată, de îndată ce vom arăta că funcţia $l(t)$ este derivabilă pe $[a, b]$ şi

$$l'(t) = \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}. \tag{6}$$

Pentru a arăta aceasta, să ne amintim că, în condiţiile teoremei, lungimea $l(t)$ a curbei (r_t, Γ_t) este dată de

$$l(t) = \int_a^t \sqrt{f'^2(u) + g'^2(u)}\, du.$$

Însă funcţia de sub ultima integrală este continuă pe $[a, b]$, deci $l(t)$ este derivabilă şi are loc relaţia (6).

Exemplu. Să considerăm integrala curbilinie de primul tip

$$\int_{\Gamma} y\, dl,$$

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{2pt} \end{cases}, \quad 0 \leqslant t \leqslant x_0$$

deci $f(t) = t$, $g(t) = \sqrt{2pt}$. Funcţiile f şi g admit derivată continuă pe $[0, x_0]$. F este dată de $F(x, y) = y$, deci este continuă în tot planul. Sînt îndeplinite toate condiţiile pentru aplicarea teoremei 3. Observăm că avem

$$g(t)\, g'(t) = p,$$

deci, după un mic calcul,

$$\int_{\Gamma} y\, dl = \int_0^{x_0} \sqrt{p^2 + 2pt}\, dt = \frac{1}{3p}[(p^2 + y_0^2)^{3/2} - p^3].$$

c. Integrala curbilinie de al doilea tip

Definiție, proprietăți

Să considerăm o funcție vectorială $\bar{V}$ definită într-un domeniu plan D. Fie $(\bar{r}, \Gamma)$ o curbă astfel încît $\Gamma \subset D$. Fie $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ componentele funcției $\bar{V}$ și fie

$$r: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad a \leqslant t \leqslant b \tag{7}$$

un element al curbei $(\bar{r}, \Gamma)$. Se pune problema: în cazul particular în care $\bar{V}$ este o forță, ce trebuie să înțelegem prin lucrul mecanic al lui $\bar{V}$ de-a lungul curbei $(\bar{r}, \Gamma)$? În cazul unei forțe constante care-și deplasează punctul de aplicație de-a lungul unui segment de dreaptă, lucrul mecanic s-a definit ca produsul scalar dintre vectorul forță și vectorul deplasare. În cazul în care forța era variabilă ca mărime, dar își deplasa punctul de aplicație în linie dreaptă și era dirijată tot timpul pe direcția de deplasare, lucrul mecanic se definea cu ajutorul unei integrale Riemann. Este deci natural ca, în cazul în care forța este variabilă și își deplasează punctul de aplicație de-a lungul curbei $(\bar{r}, \Gamma)$, să definim lucrul mecanic printr-o sumă de integrale Stieltjes (în cazul în care ele există):

$$\int_a^b P(f(t), g(t))\, \mathrm{d}f(t) + \int_a^b Q(f(t), g(t))\mathrm{d}g(t), \tag{8}$$

ceea ce convenim să scriem prescurtat sub forma

$$\int_a^b \bar{V}(f(t), g(t))\, \mathrm{d}\bar{r}(t). \tag{8'}$$

Independent de semnificația fizică sau de altă natură pe care o are funcția $\bar{V}$, ultima integrală este asociată curbei $(\bar{r}, \Gamma)$, deci se impune studiul dependenței acestei integrale de $(\bar{r}, \Gamma)$. Pentru a pune în evidență această dependență, vom folosi notația

$$\begin{aligned} \int_a^b P(f(t), g(t))\, \mathrm{d}f(t) &= \int_r P(x, y)\, \mathrm{d}x, \\ \int_a^b Q(f(t), g(t))\, \mathrm{d}g(t) &= \int_r Q(x, y)\, \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{9}$$

și vom pune:

$$\int_r P(x, y)\, \mathrm{d}x + Q(x, y)\, \mathrm{d}y = \int_r V\, \mathrm{d}\bar{r} = \int_r P(x, y)\, \mathrm{d}x + \int_r Q(x, y)\, \mathrm{d}y. \tag{9'}$$

Integralele introduse la (9) *și* (9′) *se numesc integrale curbilinii de al doilea tip.* Integrale asemănătoare se definesc și în spațiu.

De exemplu, punem

$$\int_{r} P(x, y, z)\, dx = \int_{a}^{b} P(f(t), g(t), h(t))\, df(t),$$

$$\int_{r} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz = \int_{a}^{b} P(f(t), g(t), h(t))\, df(t) +$$

$$+ \int_{a}^{b} Q(f(t), g(t), h(t))\, dg(t) + \int_{a}^{b} R(f(t), g(t), h(t))\, dh(t).$$

Pentru a economisi scrierea, vom considera numai curbe plane, dar toate rezultatele se extind şi la curbe în spaţiu.

Proprietăţi ale integralei curbilinii de al doilea tip.

Pentru ca definiţia dată integralei curbilinii de al doilea tip să nu fie contradictorie, este necesar să arătăm că nici existenţa, nici valoarea acestei integrale nu depind de alegerea elementului $r \in \bar{r}$, ci numai de curba $(\bar{r}, \Gamma)$. Aceasta rezultă din

Teorema 4. Fie r şi r_1 două elemente din $\bar{r}$, r fiind dat de (7), iar r_1 de

$$r_1 : \begin{cases} x = f_1(\tau) \\ y = g_1(\tau) \end{cases}, \quad a_1 \leqslant \tau \leqslant b_1.$$

Fie F o funcţie reală definită pe un domeniu D care conţine pe Γ. În aceste condiţii, existenţa fiecăreia dintre următoarele două integrale Stieltjes implică existenţa celeilalte şi egalitatea lor:

$$\int_{a}^{b} F(f(t), g(t))\, df(t) = \int_{a_1}^{b_1} F(f_1(\tau), g_1(\tau))\, df_1(\tau). \tag{10}$$

D e m o n s t r a ţ i e. Să presupunem că există prima integrală. Fie $\Delta = (a = t_0 < t_1 < ... < t_i < t_{i+1} < ... < t_n = b)$ o diviziune a lui $[a, b]$. Fie $\Delta_1 = (a_1 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_i < \tau_{i+1} < ... < \tau_n = b_1)$ acea diviziune a lui $[a_1, b_1]$ care corespunde lui Δ prin homeomorfismul direct h asociat echivalenţei $r \sim r_1$. Fie ξ_i astfel încît $t_i \leqslant \xi_i \leqslant t_{i+1} (i = 0, ..., n-1)$. Prin h, lui ξ_i îi corespunde o valoare ξ_i^1 cu proprietatea $\tau_i \leqslant \xi_i^1 \leqslant \tau_{i+1} (i = 0, ..., n-1)$. Rezultă că

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(f(\xi_i), g(\xi_i)) [f(t_{i+1}) - f(t_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} F(f_1(\xi_i^1), g_1(\xi_i^1) [f(\tau_{i+1}) - f_1(\tau_i)].$$

Observînd, în sfîrşit, că h este o funcţie uniform continuă, rezultă că norma uneia dintre diviziunile Δ, Δ_1 devine oricît de mică de îndată ce norma celeilalte este suficient de mică, deci există a doua integrală din (10) şi are loc egalitatea (10).

Observație. Pe o cale asemănătoare se stabilește că teorema 4 rămîne adevărată atunci cînd se înlocuiește, în relația (10), $f(t)$ prin $g(t)$, iar $f_1(\tau)$ prin $g_1(\tau)$. În felul acesta, definiția integralei de al doilea tip este perfect legitimată.

Vom stabili acum unele condiții suficiente pentru existența integralei curbilinii de al doilea tip, condiții în care intervin structura funcțiilor P și Q precum și structura curbei $(\bar{r}, \Gamma)$.

Teorema 5. Dacă funcțiile P și Q sînt continue pe $D \supset \Gamma$, iar curba $(\bar{r}, \Gamma)$ este rectificabilă, atunci integrala curbilinie de la (9′) (deci și fiecare dintre cele de la (9)) există.

Demonstrație. Funcțiile f și g sînt continue pe $[a, b]$, prin însăși definiția curbei. Deoarece prin compunere continuitatea se păstrează, rezultă că funcțiile

$$\varphi(t) = P(f(t), g(t)), \qquad \psi(t) = Q(f(t), g(t)) \tag{11}$$

sînt continue pe $[a, b]$.

Din rectificabilitatea curbei $(\bar{r}, \Gamma)$ rezultă, în baza teoremei lui Jordan, că funcțiile f și g sînt cu variație mărginită pe $[a, b]$. Pe de altă parte, se știe că o funcție continuă este integrabilă Stieltjes în raport cu o funcție cu variație mărginită, deci integralele

$$\int_a^b \varphi(t)\,df(t), \qquad \int_a^b \psi(t)\,dg(t)$$

există și sînt finite. De aici rezultă existența și finitudinea integralelor curbilinii de la (9) și (9′).

Observație. Din teorema 5 rezultă existența și finitudinea lucrului mecanic efectuat de o forță care variază în mod continuu, deplasîndu-și punctul de aplicație de-a lungul unei curbe rectificabile.

Teorema 6. Fie $(\bar{r}, \Gamma)$ o curbă plană arbitrară, iar P și Q două funcții reale definite pe $D \supset \Gamma$.
Dacă funcțiile definite de (11) sînt cu variație mărginită pe $[a, b]$, atunci integrala curbilinie de al doilea tip, definită de (9′) există și este finită.

Demonstrație. Prin însăși definiția curbei, funcțiile f și g sînt continue pe $[a, b]$, deci există și sînt finite integralele Stieltjes

$$\int_a^b f(t)\,d\varphi(t), \qquad \int_a^b g(t)\,d\psi(t).$$

Aplicînd proprietatea de reversibilitate a integrabilității Stieltjes, rezultă existența și finitudinea integralelor

$$\int_a^b \varphi(t)\,df(t), \qquad \int_a^b \psi(t)\,dg(t),$$

deci existența și finitudinea integralei curbilinii de al doilea tip definite la (9′).

Observație. Teorema 6 este mai puțin utilizată în practică, dar are o anume semnificație principială. Într-adevăr, se observă că ipotezele din teorema 6 sînt compatibile cu nerectificabilitatea curbei $(\bar{r}, \Gamma)$ și aceasta într-un mod nebanal, adică fără ca φ și ψ să fi identic nule pe $[a, b]$.

De exemplu, putem considera curba definită de

$$r: \begin{cases} x = t, \\ y = g(t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

unde

$$g(t) = \begin{cases} t \sin \dfrac{1}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Această curbă este, evident, nerectificabilă, deoarece funcția $g(t)$ nu este cu variație mărginită pe $[0, 1]$. Totuși, putem alege funcțiile P și Q în așa fel încît φ și ψ să fie cu variație mărginită și neidentic nule pe $[a, b]$.

Deci, spre deosebire de integrala curbilinie de primul tip, care nu putea fi concepută decît de-a lungul unei curbe rectificabile, integrala curbilinie de al doilea tip nu mai este supusă la această restricție. Pe de altă parte, nu este mai puțin adevărat că, de cele mai multe ori, integrala curbilinie de al doilea tip este considerată de-a lungul unei curbe rectificabile.

O teoremă cu caracter mai practic, care stabilește nu numai existența și finitudinea, dar și modul de calcul al integralei curbilinii de al doilea tip, este

Teorema 7. (Reducerea unei integrale curbilinii de al doilea tip la o integrală Riemann.) Dacă P și Q sînt continue pe $D \supset \Gamma$, iar f și g sînt derivabile, cu derivată continuă pe $[a, b]$, atunci există și este finită $\int_r P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ și avem

$$\int_r P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_a^b [P(f(t), g(t))f'(t) + Q(f(t), g(t))g'(t)]\,dt. \qquad (12)$$

Demonstrație. Din ipotezele făcute rezultă că funcțiile φ și ψ, definite de (11), sînt continue pe $[a, b]$, iar f și g sînt cu variație mărginită pe $[a, b]$ (se știe că o funcție cu derivată continuă este cu variație mărginită). Deci curba $(\bar{r}, \Gamma)$ este rectificabilă și existența integralei curbilinii din primul membru al relației (12) este asigurată prin teorema 5.

Pentru a obține egalitatea (12), este suficient să aplicăm celor două integrale Stieltjes, care prin însumare dau integrala curbilinie din (12) (vezi relația (9′)), teorema de reducere a unei integrale Stieltjes la o integrală Riemann, teoremă aplicabilă în condițiile în care ne-am situat.

Exemplu. Fie curba $(\bar{r}, \Gamma)$ definită de

$$r: \begin{cases} x = 1 + \cos t, \\ y = 1 + \sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Funcţiile $f(t) = 1 + \cos t$ şi $g(t) = 1 + \sin t$ sînt derivabile, cu derivată continuă pe $[0, 2\pi]$ ($f'(t) = -\sin t$, $g'(t) = \cos t$). Fie $P(x, y) = y^2$, $Q(x, y) = -x^2$. Funcţiile P şi Q sînt continue în tot planul, deci, în baza teoremei 7, integrala curbilinie

$$\int_r y^2 dx - x^2 dy$$

există şi este egală cu

$$-\int_0^{2\pi} (2 + \sin t + \cos t + \sin^3 t + \cos^3 t) dt = -4\pi.$$

Vom da acum două teoreme care, în cazul particular în care P şi Q sînt continue pe D, rezultă imediat din teorema 7.

Teorema 8. Dacă $f(t)$ este constantă pe $[a, b]$, iar $P(x, y)$ este definită pe D, atunci următoarea integrală curbilinie există şi

$$\int_r P(x, y)\, dx = 0.$$

Demonstraţie. Avem, pentru $\Delta = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b)$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i), g(\xi_i)) (f(t_{i+1}) - f(t_i)) = 0,$$

oricare ar fi valorile intermediare ξ_i $(i = 0, \dots, n-1)$, deci

$$\int_a^b P(f(t), g(t))\, df(t) = 0.$$

La fel se stabileşte.

Teorema 8′. Dacă $g(t)$ este constantă pe $[a, b]$, iar $Q(x', y)$ este definită pe D, atunci următoarea integrală curbilinie există şi

$$\int_r Q(x, y)\, dy = 0.$$

Observaţie. Teoremele 8 şi 8′ sînt o consecinţă imediată a faptului că orice funcţie este integrabilă Stieltjes în raport cu o funcţie constantă, iar integrala este egală cu zero.

Teorema 9. Fie $(\bar{r}, \Gamma)$ o curbă plană care conţine un drum $d = (r, \Gamma)$ de forma:

$$r: \begin{cases} x = t, \\ y = g(t), \end{cases} \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Fie P o funcţie reală, definită şi continuă în $D \supset \Gamma$. În aceste condiţii, integrala

$$\int_r P(x, y)\,\mathrm{d}x$$

există şi este finită.

D e m o n s t r a ţ i e. Trebuie să stabilim existenţa şi finitudinea integralei Stieltjes

$$\int_a^b P(t, g(t))\,\mathrm{d}t.$$

Însă funcţia $F(t) = P(t, g(t))$ este continuă pe $[a, b]$, deoarece este o suprapunere de funcţii continue. Pe de altă parte, integrala de mai sus este chiar o integrală Riemann, deci existenţa şi finitudinea ei rezultă chiar din continuitatea lui F.

O b s e r v a ţ i e. Dacă g nu este cu variaţie mărginită, obţinem iarăşi o integrală curbilinie de-a lungul unei curbe nerectificabile. Însă aceasta este o integrală curbilinie sub formă redusă, adică de tipul (9).

T e o r e m a 9′. **Fie $(\tilde{r}, \Gamma)$ o curbă plană care conţine un drum $d = (r, \Gamma)$ de forma**

$$r: \begin{cases} x = f(t), \\ y = t, \end{cases} \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Fie Q o funcţie reală, definită şi continuă în $D \supset \Gamma$. În aceste condiţii, integrala

$$\int_r Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

există şi este finită.

D e m o n s t r a ţ i a este asemănătoare cu cea dată teoremei 9.

d. Un mod de aproximare a integralei curbilinii de al doilea tip

T e o r e m a 10. **Fie r o curbă rectificabilă situată în domeniul D. Numărul $\varepsilon > 0$ fiind dat, se poate înscrie în această curbă o curbă poligonală L, astfel încît să avem, pentru P şi Q date, continue în D,**

$$\left|\int_r P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\right| < \varepsilon,$$

unde L este considerată cu o parametrizare convenabilă.

Demonstrație. Fie într-adevăr,

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$, căreia îi corespund punctele

$$A_0 = A,\ A_1,\ A_2, \ldots, A_{i-1},\ A_i, \ldots, A_n = B$$

pe Γ (A și B sînt extremitățile lui Γ). Să însemnăm cu l_i lungimea coardei $A_{i-1} A_i$ și chiar această coardă, cu s lungimea lui (r, Γ) și să punem

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} l_i.$$

Avem

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

Dacă punem

$$x_i = f(t_i),\ y_i = g(t_i),\ (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$
$$P(x_i, y_i) = P_i,\ Q(x_i, y_i) = Q_i,$$

atunci putem scrie

$$\int_{l_i} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = (x_i - x_{i-1})P_{i-1} + (y_i - y_{i-1})Q_{i-1} +$$
$$+ \int_{l_i} (P - P_{i-1})\mathrm{d}x + (Q - Q_{i-1})\mathrm{d}y. \qquad (13)$$

Numărul $\varepsilon > 0$ fiind dat, vom alege pe n, precum și punctele de diviziune ale intervalului $[a, b]$, astfel încît următoarele două condiții să fie simultan îndeplinite:

1° Oscilația funcțiilor $P(r(t))$ și $Q(r(t))$ să fie mai mică decît $\frac{\varepsilon}{3}$ în fiecare interval parțial. Acest lucru este posibil, deoarece P și Q sînt funcții continue.

2° Suma

$$\sum_{i=1}^{n} [P_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + Q_{i-1}(y_i - y_{i-1})]$$

să difere de limita sa

$$\int_r P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

cu mai puţin decît $\frac{\varepsilon}{3}$. În asemenea condiţii, din (13) deducem

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} [P_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + Q_{i-1}(y_i - y_{i-1})] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} (P - P_{i-1})\mathrm{d}x + (Q - Q_{i-1})\mathrm{d}y,$$

de unde

$$\left| \int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

e. Alte proprietăţi ale integralei curbilinii

Cele mai multe dintre aceste proprietăţi decurg din proprietăţile integralei Stieltjes. În astfel de cazuri, ne vom mulţumi să dăm enunţurile teoremelor, fără a le mai demonstra.

Teorema 1. Dacă P_1 şi P_2 sînt definite pe domeniul $D \supset \Gamma$, iar integralele

$$\int_\Gamma P_1(x, y)\mathrm{d}x, \quad \int_\Gamma P_2(x, y)\mathrm{d}x$$

există, atunci există şi integrala

$$\int_\Gamma [P_1(x, y) + P_2(x, y)]\mathrm{d}x.$$

Teorema 1′. Dacă Q_1 şi Q_2 sînt definite pe domeniul $D \supset \Gamma$, iar integralele

$$\int_\Gamma Q_1(x, y)\mathrm{d}y, \quad \int_\Gamma Q_2(x, y)\mathrm{d}y$$

există, atunci există şi integrala

$$\int_\Gamma [Q_1(x, y) + Q_2(x, y)]\mathrm{d}y.$$

Observaţie. Teoremele 1 şi 1′ se extind, prin inducţie completă, la orice număr finit de termeni.

Teorema 2. Dacă P este o funcție definită pe domeniul $D \supset \Gamma$, λ este un număr real, iar integrala

$$\int_{r} P(x, y)\mathrm{d}x$$

există, atunci există și integrala următoare și are loc egalitatea

$$\int_{r} \lambda P(x, y)\mathrm{d}x = \lambda \int_{r} P(x, y)\mathrm{d}x.$$

Teorema 2'. Dacă Q este o funcție definită pe domeniul $D \supset \Gamma$, μ este un număr real, iar integrala

$$\int_{r} Q(x, y)\mathrm{d}y$$

există, atunci există și integrala următoare și are loc egalitatea

$$\int_{r} \mu Q(x, y)\mathrm{d}y = \mu \int_{r} Q(x, y)\mathrm{d}y.$$

Pentru a putea trece la o altă proprietate, să definim în prealabil noțiunea de *reuniune a două drumuri*. Fie $d_1 = \{r_1 \cdot I(r_1)\}, d_2 = \{r_2, I(r_2)\}$ două drumuri, unde

$$r_1: \begin{cases} x = f_1(t), \\ y = g_1(t), \end{cases} \quad a \leqslant t \leqslant b), \qquad r_2: \begin{cases} x = f_2(t), \\ y = g_2(t), \end{cases} \quad (b \leqslant t \leqslant c)$$

și $f_1(b) = f_2(b)$, $g_1(b) = g_2(b)$.

Vom spune că drumul $d = \{r, I(r)\}$ este reuniunea drumurilor d_1 și d_2, dacă r este dată de

$$r: \begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases} \quad (a \leqslant t \leqslant c),$$

unde

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & (a \leqslant t \leqslant b), \\ f_2(t), & (b \leqslant t \leqslant c) \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} g_1(t), & (a \leqslant t \leqslant b), \\ g_2(t), & (b \leqslant t \leqslant c). \end{cases}$$

După cum vedem, operația de reuniune nu se definește pentru *orice* pereche de drumuri. Acele drumuri pentru care ea se definește vor fi numite *juxtapozabile.*

Vom studia acum operația de reuniune a două curbe.

Avem nevoie în prealabil de

Teorema 3. Fie $d = \{r, I(r)\}$ un drum oarecare și fie $[\alpha, \beta]$ un interval al dreptei reale. Există un drum $d' = \{r', I(r')\}$ echivalent cu d și astfel încît r' să fie definită pe $[\alpha, \beta]$.

Demonstraţie. Să presupunem că r este dată de

$$r: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Să punem

$$h(t) = At + B,$$

unde

$$A = \frac{\beta - \alpha}{b - a}, \qquad B = \frac{b\alpha - \beta a}{b - a}.$$

Este uşor de văzut că h este un homeomorfism direct al intervalului $[a, b]$. Punînd $\tau = h(t)$, să definim funcţiile φ şi ψ în felul următor:

$$\varphi(\tau) = f(t), \qquad \psi(\tau) = g(t), \qquad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta,$$
$$a \leqslant t \leqslant b.$$

Drumul d', definit cu ajutorul reprezentării

$$r': \begin{cases} x = \varphi(\tau), \\ y = \psi(\tau), \end{cases} \quad (\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta),$$

îndeplineşte condiţiile din enunţul teoremei 3.

Din teorema 3 rezultă că, fiind date două curbe $(\bar{r}, \Gamma)$ şi $(\bar{r}', \Gamma')$, există un drum $d = \{r, \Gamma\}$ aparţinînd primei curbe şi un drum $d' = \{r', \Gamma'\}$ aparţinînd celei de-a doua curbe, astfel încît extremitatea finală b a intervalului de definiţie al lui r să coincidă cu extremitatea iniţială a intervalului de definiţie al lui r'. Dacă, în plus, $r(b) = r'(b)$, cu alte cuvinte dacă drumurile d şi d' sînt juxtapozabile, atunci, prin definiţie, *curbele* date *sînt juxtapozabile*, iar *reuniunea* lor este curba definită de clasa de echivalenţă a drumului $d \cup d'$. Este uşor de văzut că reuniunea a două curbe nu depinde de modul de alegere a drumurilor juxtapozabile d şi d'.

Teorema 4. Fie $(\bar{r}_1, \Gamma_1)$ şi $(\bar{r}_2, \Gamma_2)$ două curbe juxtapozabile şi fie P şi Q două funcţii definite pe un domeniu D, astfel încît $\Gamma_1 \subset D \supset \Gamma_2$. Fie $(\bar{r}, \Gamma)$ reuniunea celor două curbe. Dacă există integralele

$$\int_{r} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y, \int_{r_1} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y, \int_{r_2} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y,$$

atunci are loc egalitatea

$$\int_{r} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = \int_{r_1} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y +$$
$$+ \int_{r_2} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y.$$

Demonstrație. Deoarece curbele $(\bar{r}_1, \Gamma_1)$ și $(\bar{r}_2, \Gamma_2)$ sînt juxtapozabile, ele conțin cîte un drum de forma (r_1, Γ_1), respectiv (r_2, Γ_2), unde

$$r_1 : \begin{cases} x = f_1(t), \\ y = g_1(t), \end{cases} (a \leqslant t \leqslant b) \qquad r_2 : \begin{cases} x = f_2(t), \\ y = g_2(t), \end{cases} (b \leqslant t \leqslant c)$$

și $f_1(b) = f_2(b)$, $g_1(b) = g_2(b)$.

Să punem:

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), \text{ dacă } a \leqslant t \leqslant b, \\ f_2(t), \text{ dacă } b \leqslant t \leqslant c, \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t), \text{ dacă } a \leqslant t \leqslant b, \\ g_2(t), \text{ dacă } b \leqslant t \leqslant c. \end{cases}$$

Existența celor trei integrale curbilinii revine la existența următoarelor integrale Stieltjes:

$$\int_a^c P(f(t), g(t))\,\mathrm{d}f(t), \quad \int_a^c Q(f(t), g(t))\,\mathrm{d}g(t), \quad \int_a^b P(f_1(t), g_1(t))\,\mathrm{d}f_1(t),$$

$$\int_a^b Q(f_1(t), g_1(t))\,\mathrm{d}g_1(t), \quad \int_b^c P(f_2(t), g_2(t))\,\mathrm{d}f_2(t), \quad \int_b^c Q(f_2(t), g_2(t))\,\mathrm{d}g_2(t).$$

Conform unei teoreme relative la integrale Stieltjes, din existența celor șase integrale Stieltjes rezultă egalitățile

$$\int_a^c P(f(t), g(t))\,\mathrm{d}f(t) = \int_a^b P(f(t), g(t))\,\mathrm{d}f(t) + \int_b^c P(f(t), g(t))\,\mathrm{d}f(t) =$$

$$= \int_a^b P(f_1(t), g_1(t))\,\mathrm{d}_1f(t) + \int_b^c P(f_2(t), g_2(t))\,\mathrm{d}f_2(t),$$

$$\int_a^c Q(f(t), g(t))\,\mathrm{d}g(t) = \int_a^b Q(f(t), g(t))\,\mathrm{d}g(t) + \int_b^c Q(f(t), g(t))\,\mathrm{d}g(t) =$$

$$= \int_a^b Q(f_1(t), g_1(t))\,\mathrm{d}g_1(t) + \int_b^c Q(f_2(t), g_2(t))\,\mathrm{d}g_2(t),$$

deci

$$\int_r P(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_{r_1} P(x, y)\,\mathrm{d}x + \int_{r_2} P(x, y)\,\mathrm{d}x$$

și

$$\int_r Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_{r_1} Q(x, y)\,\mathrm{d}y + \int_{r_2} Q(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Adunînd membru cu membru aceste două egalități, obținem relația dorită.

Observație. Folosind scrierea vectorială a integralei curbilinii, așa cum este ea dată de (9'), proprietățile prezentate mai sus se pot exprima într-o formă mai condensată. Scrierea vectorială se poate utiliza atît pentru integralele curbilinii în plan cît și pentru cele în spațiu. Această scriere este mai sugestivă decît cea scalară, permițînd să se vadă mai bine sensul fizic al noțiunii de integrală curbilinie. Astfel, dacă forța $\bar{F}(x, y, z)$ are componentele $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ și își deplasează punctul de aplicație de-a lungul curbei (r, Γ) definite de funcția vectorială $\bar{r}(x, y, z)$ de componente $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, atunci expresia $\bar{F}\,d\bar{r}$ desemnează un produs scalar simbolic, între vectorul forță $\bar{F}$ și vectorul simbolic $d\bar{r}$, numit „vectorul de deplasare elementară". Este un mod condensat de a reprezenta expresia:

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Lucrul mecanic al forței $\bar{F}$ de-a lungul curbei (r, Γ) va fi dat de integrala curbilinie notată în modul următor:

$$\int_r \bar{F}\,d\bar{r}.$$

f. Condiții necesare și suficiente pentru independența de drum a integralei curbilinii

Am văzut că integrala curbilinie de al doilea tip are o semnificație fizică deosebită; ea exprimă lucrul mecanic al unei forțe în general variabile, care-și deplasează punctul de aplicație de-a lungul unei traiectorii în general curbilinii. În legătură cu noțiunea de lucru mecanic, o problemă importantă care se pune în fizică este aceea a independenței de drum. Multe dintre forțele care acționează în natură au această proprietate; astfel, de pildă, se știe că lucrul mecanic al forței gravitaționale nu depinde de drum.

Problema independenței de drum a integralei curbilinii prezintă însemnătate și din punct de vedere matematic. Dacă o integrală curbilinie depinde numai de extremitățile curbei, dar nu și de curba însăși, atunci există mult mai multe șanse ca ea să se poată calcula ușor, cunoscînd, de pildă, numai valorile funcțiilor P și Q la extremitățile curbei.

În cele ce urmează, ne propunem să dăm cîteva condiții necesare și suficiente pentru ca o integrală curbilinie să nu depindă de drum.

Teorema 1. Fie două funcții reale, P și Q, definite și continue pe un același interval bidimensional compact Δ, din planul xQy. Dacă există o funcție F, definită și diferențiabilă pe Δ, și astfel încît $dF(x, y) = P(x, y)$ $dx + Q(x, y)dy$ peste tot în Δ, atunci fiind date două curbe rectificabile r_1 și r_2 conținute în Δ și avînd aceleași extremități, are loc egalitatea

$$\int_{r_1} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{r_2} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{1}$$

Demonstrație. Să punem $\Phi(t) = F(f(t), g(t))$, unde f și g sînt funcții care dau o reprezentare parametrică a curbei r_1, intervalul de variație a parametrului fiind $[a, b]$. Φ este deci definită pe $[a, b]$. Avem

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \sum_{i=0}^{n-1} [\Phi(t_{i+1}) - \Phi(t_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} [F(f(t_{i+1}), g(t_{i+1})] -$$
$$- [F(f(t_i), g(t_i))]$$

unde $a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b$. Însă, prin ipoteză, F este diferențiabilă pe Δ, deci putem aplica, sub semnul ultimei sume, teorema creșterilor finite pentru funcții de două variabile și obținem existența unor valori ξ_i și η_i cuprinse între t_i și t_{i+1} ($i = 0, 1, \dots, n-1$), astfel încît

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \sum_{i=0}^{n-1} [\Phi(t_{i+1}) - \Phi(t_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} [F(f(t_{i+1}) g(t_{i+1})) - F(f(t_i), g(t_i))] =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{\partial F}{\partial x} (f(\xi_i), g(\eta_i)) (f(t_{i+1}) - f(t_i)) + \frac{\partial F}{\partial y} (f(\xi_i), g(\eta_i)) (g(t_{i+1}) - g(t_i))\right] =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} (f(\xi_i), g(\eta_i)) - \frac{\partial F}{\partial x} (f(\xi_i), g(\xi_i))\right) (f(t_{i+1}) - f(t_i)) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} (f(\xi_i), g(\eta_i)) - \frac{\partial F}{\partial y} (f(\xi_i), g(\xi_i))\right) (g(t_{i+1}) - g(t_i)) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{\partial F}{\partial x} (f(\xi_i), g(\xi_i)) (f(t_{i+1}) - f(t_i)) + \frac{\partial F}{\partial y} (f(\xi_i), g(\xi_i)) (g(t_{i+1}) - g(t_i))\right].$$

Datorită continuității uniforme a derivatelor parțiale ale lui F, primele două sume din ultimul membru tind la zero cînd norma diviziunii Δ tinde la zero.

Ținînd seama că

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y),$$

rezultă:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i), g(\xi_i)) (f(t_{i+1}) - f(t_i)) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1} Q(f(\xi_i), g(\xi_i)) (g(t_{i+1}) - g(t_i)). \qquad (2)$$

Să punem $G(t) = P(f(t), g(t))$, $H(t) = Q(f(t), g(t))$. Sumele din membrul al doilea al ultimei egalități sînt sume Riemann-Stieltjes ale funcțiilor G și H în raport cu f, respectiv g. Deoarece G și H sînt continue (ca suprapuneri de funcții continue), iar f și g sînt cu variație mărginită (în baza ipotezei de rectificabilitate a curbei r_1), rezultă că integralele Stieltjes

$$\int_a^b G(t)\, df(t), \qquad \int_a^b H(t)\, dg(t)$$

există. Să considerăm acum un şir $\{\Delta_p\}$ de diviziuni ale lui $[a, b]$, de normă tinzînd la zero. Pentru fiecare Δ_p putem scrie o egalitate de tipul (2). Pentru $p \to \infty$, sumele asociate lui Δ_p tind respectiv către prima şi a doua integrală Stieltjes, a căror existenţă a fost stabilită mai sus. Obţinem deci, la limită,

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b P(f(t), g(t))\, \mathrm{d}f(t) + \int_a^b Q(f(t), g(t))\, \mathrm{d}g(t).$$

Ţinînd seama că membrul al doilea este, prin definiţie, o integrală curbilinie de-a lungul lui r_1, formula precedentă se scrie

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_{r_1} P(x, y)\, \mathrm{d}x + Q(x, y)\, \mathrm{d}y.$$

Observăm că r_1 a intervenit numai prin calitatea ei de curbă rectificabilă, cu extremităţile în $(f(a), g(a))$ şi $(f(b), g(b))$. Rezultă că ultima egalitate se păstrează cînd înlocuim r_1 cu r_2. Teorema este astfel complet demonstrată.

Observaţie. Se ştie că dacă o funcţie F de două variabile are derivate parţiale continue în Δ, atunci ea este diferenţiabilă în Δ. În baza acestui fapt, putem înlocui, în teorema 1, ipoteza de diferenţiabilitate a lui F prin ipoteza de derivabilitate parţială a lui F, iar ipoteza $\mathrm{d}F\ (x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ prin ipoteza

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y).$$

În sfîrşit, să mai observăm că o teoremă similară, cu aceeaşi demonstraţie, are loc pentru integrala curbilinie în spaţiu.

Teorema 2. Fie P şi Q continue în Δ. Dacă pentru orice pereche de curbe rectificabile r_1 şi r_2, conţinute în intervalul bidimensional Δ şi avînd aceleaşi extremităţi, are loc egalitatea (1), atunci există o funcţie F diferenţiabilă pe Δ, astfel încît $\mathrm{d}F(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$.

Demonstraţie. Fie (x_0, y_0) un punct fixat din Δ. Dacă (x', y') este un punct oarecare din Δ, iar r este o curbă rectificabilă conţinută în Δ şi avînd extremităţile în punctele (x_0, y_0) şi (x', y'), atunci integrala curbilinie

$$\int_r P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\, \mathrm{d}y$$

există şi este, prin ipoteză, independentă de r; valoarea acestei integrale depinde numai de punctul (x', y'). Este deci natural să notăm această integrală cu $F(x', y')$. Vom arăta că F este tocmai funcţia căutată, cu alte cuvinte ea are ca diferenţială totală expresia de sub integrală.

Fie $x'' \neq x'$, dar astfel încît $(x'', y') \in \Delta$. Avem

$$\frac{F(x'', y') - F(x', y')}{x'' - x'} = \frac{1}{x'' - x'}\left[\int_{r''} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy - \right.$$

$$\left. - \int_{r} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy\right],$$

unde prin r'' s-a notat o curbă rectificabilă conţinută în Δ şi avînd ca extremităţi punctele (x_0, y_0) şi x'', y').

Deoarece integrala nu depinde de drum, ci numai de extremităţile sale putem alege în rolul lui r'' curba care se obţine alăturînd lui r curba r' dată de

$$\begin{matrix} x = t \\ y = y' \end{matrix}, \quad (x' \leqslant t \leqslant x'').$$

Obţinem, folosind proprietăţile integralelor curbilinii,

$$\frac{F(x'', y') - F(x', y')}{x'' - x'} = \frac{1}{x'' - x'}\int_{r'} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Aplicînd definiţia integralei curbilinii, rezultă

$$\frac{F(x'', y') - F(x', y')}{x'' - x'} = \frac{1}{x'' - x'}\int_{x'}^{x''} P(t, y')dt,$$

în membrul al doilea figurînd o integrală Stieltjes, care, în cazul de faţă, este chiar o integrală Riemann. Aplicînd acestei integrale teorema de medie pentru integrala Riemann (lucru posibil, deoarece funcţia P este continuă), rezultă existenţa unei valori ξ, cuprinse între x' şi x'', astfel încît

$$\frac{F(x'', y') - F(x', y')}{x'' - x'} = \frac{1}{x'' - x'}\cdot P(\xi, y')\cdot(x'' - x') = P(\xi, y'). \qquad (3)$$

Valoarea ξ depinde, evident, de valoarea lui x'' şi are loc, tot în baza continuităţii funcţiei P, relaţia

$$\lim_{x'' \to x'} P(\xi, y') = P(x', y').$$

Deci primul membru din egalitatea (3) are limită finită cînd $x'' \to x'$; această limită este, prin definiţie, derivata parţială a lui F în raport cu x, în punctul (x', y'):

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x', y') = P(x', y').$$

În mod analog, schimbînd rolurile lui x şi y şi folosind continuitatea lui Q, se găseşte că F este derivabilă parţial în raport cu y şi

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x', y') = Q(x', y').$$

Deoarece (x', y') este un punct arbitrar din Δ, rezultă că P şi Q sînt derivatele parţiale de primul ordin ale lui F în Δ. Ţinînd seama din nou de continuitatea funcţiilor P şi Q şi aplicînd o teoremă cunoscută, rezultă că F este diferenţiabilă în Δ şi $\mathrm{d}F(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$.

Teorema 2 este astfel complet demonstrată.

Observaţie. Teorema 2 se transpune, cu aceeaşi demonstraţie, la integralele curbilinii în spaţiu.

g. Condiţii pentru ca o expresie de forma $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ să fie o diferenţială totală

Teoremele 1 şi 2 arată că problema independenţei de drum a integralei curbilinii revine la problema recunoaşterii faptului dacă expresia care figurează sub integrală este diferenţială totală. Este deci important să găsim o cale cît mai simplă, pentru ca, fiind date două funcţii P şi Q definite în Δ, să stabilim dacă există o funcţie F diferenţiabilă în Δ şi astfel încît $\mathrm{d}F(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$. În cazul în care răspunsul este afirmativ, se pune problema de a găsi funcţia F.

Un răspuns la problema de mai sus este dat de următoarea teoremă:

Teorema 3. Fie P şi Q continue în intervalul bidimensional Δ şi astfel încît există şi sînt continue în Δ derivatele parţiale $\frac{\partial P}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Necesar şi suficient pentru ca să existe o funcţie F diferenţiabilă în Δ, cu $\mathrm{d}F(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$, este ca, pretutindeni în Δ, să aibă loc egalitatea

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{4}$$

Demonstraţie. *Condiţia este necesară.* Într-adevăr, dacă există F astfel încît $\mathrm{d}F(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ în Δ, atunci

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y).$$

Însă, deoarece P este derivabilă în raport cu y, iar Q este derivabilă în raport cu x, rezultă că există derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea ale funcţiei F şi avem

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Din continuitatea derivatelor parţiale $\frac{\partial P}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x}$, deducem că derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea ale lui F sînt continue, deci, în baza criteriului lui Schwarz,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x},$$

de unde rezultă

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

şi necesitatea condiţiei este demonstrată.

Condiţia este suficientă. Fie (x_0, y_0) un punct fix din Δ. Să punem

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\mathrm{d}t,$$

punctul (x, y) fiind oarecare în Δ. Deoarece Q este o funcţie continuă în Δ, iar prima integrală din membrul al doilea nu depinde de y, avem

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y). \tag{5}$$

În integrala a doua din membrul al doilea, x apare ca un parametru; deoarece acestei integrale i se poate aplica teorema de derivare a unei integrale în raport cu un parametru, obţinem

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}t.$$

În baza egalităţii (4) (egalitate care are loc prin ipoteză) avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial t}\,\mathrm{d}t,$$

deci

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) = P(x, y). \tag{6}$$

Egalităţile (5) şi (6) arată că funcţia F are ca derivate parţiale de primul ordin funcţiile P şi Q. Însă P şi Q sînt, prin ipoteză, continue, deci, în baza unei teoreme cunoscute, F este diferenţiabilă în Δ şi $\mathrm{d}F(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$.

Teorema 3 este complet demonstrată.

Deoarece transpunerea teoremei 3 la funcţii de trei variabile comportă ceva mai multe modificări (deşi linia generală a demonstraţiei rămîne aceeaşi), vom trata această situaţie în mod explicit.

Teorema 4. Fie P, Q şi R continue în intervalul tridimensional Δ şi astfel încît există şi sînt continue în Δ derivatele parţiale $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial y}$. Necesar şi suficient pentru ca să existe o funcţie F diferenţiabilă în Δ, cu $\mathrm{d}F(x, y, z) = P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$, este ca, pretutindeni în Δ, să aibă loc egalităţile

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{7}$$

Demonstrație. *Condiția este necesară.* Într-adevăr, dacă există F astfel încît $\mathrm{d}F(x, y, z) = P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z$ în Δ, atunci

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y, z), \ \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y, z), \ \frac{\partial F}{\partial z} = R(x, y, z).$$

În baza existenței derivatelor parțiale menționate în enunț, rezultă existența tuturor derivatelor parțiale mixte de ordinul al doilea ale funcției F și au loc egalitățile

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial P}{\partial z}, \ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = \frac{\partial R}{\partial x}, \ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

În baza ipotezei de continuitate a derivatelor parțiale menționate în enunț, rezultă că toate derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea ale funcției F sînt continue în Δ. Aplicînd criteriul lui Schwarz de comutativitate a derivatelor parțiale mixte, rezultă egalitățile (7).

Condiția este suficientă. Fie (x_0, y_0) un punct fix din Δ. Să punem

$$F(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\mathrm{d}t + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)\mathrm{d}t, \tag{8}$$

punctul (x, y, z) fiind arbitrar în Δ. Deoarece P, Q și R sînt continue împreună cu derivatele lor parțiale, avem, ținînd seama de formula lui Leibniz-Newton în ceea ce privește prima integrală și aplicînd celorlalte două integrale teorema de derivare a unei integrale în raport cu un parametru,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t, z_0)\mathrm{d}t + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, t)\mathrm{d}t.$$

Ținînd seama de prima și a treia egalitate din (7), obținem

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial y}(x, t, z_0)\mathrm{d}t + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, t)\mathrm{d}t.$$

Aplicînd integralelor din membrul al doilea formula lui Leibniz-Newton, rezultă

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y_0, z_0) + P(x, y, z_0) - P(x, y_0, z_0) + P(x, y, z) - P(x, y, z_0),$$

deci

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y, z). \tag{9}$$

Prima integrală din (8) nu depinde de y. În baza teoremei de derivare a unei integrale în raport cu un parametru, celelalte două integrale, considerate ca funcţii de y, sînt derivabile şi

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y, z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, t)\,dt.$$

În baza celei de-a doua egalităţi din (7), obţinem

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y, z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial Q}{\partial Z}(x, y, t)\,dt,$$

de unde, aplicînd ultimei integrale formula lui Leibniz-Newton, rezultă

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y, z_0) + Q(x, y, z) - Q(x, y, z_0) = Q(x, y, z). \tag{10}$$

Primele două integrale din (8) nu depind de z, deci

$$\frac{\partial F}{\partial z} = R(x, y, z). \tag{11}$$

Ţinînd seama de continuitatea funcţiilor P, Q şi R şi de relaţiile (9), (10) şi (11), în baza unei teoreme cunoscute rezultă că F este diferenţiabilă în Δ şi $dF(x, y, z) = P(x, y, z)\,dz + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$.

Observaţie. Din demonstraţia suficienţei condiţiilor (7) rezultă nu numai *existenţa* unei funcţii F cu proprietăţile cerute, dar şi *modul de obţinere* a funcţiei F, aşa cum se vede pe egalitatea (8).

Funcţia F se numeşte o *primitivă* a expresiei $Pdx + Qdy + Rdz$. Această definiţie apare naturală, deoarece dacă P, Q şi R depind numai de x, se obţine noţiunea obişnuită de primitivă, aşa cum a fost ea definită pentru funcţiile de o singură variabilă.

h. Condiţii de existenţă a primitivei într-un domeniu convex

Teoremele 1, 2, 3 şi 4 au fost enunţate pentru domenii Δ care sînt intervale (bidimensionale sau tridimensionale). Ce se întîmplă dacă în locul intervalelor luăm domenii mai generale? La prima vedere s-ar părea că demonstraţiile date sînt valabile şi în acest caz. Aceasta este adevărat în ceea ce priveşte teoremele 1 şi 2; cu unele modificări neesenţiale, demonstraţiile acestor teoreme se transpun la domenii arbitrare (bineînţeles, păstrînd intacte toate celelalte ipoteze). În ceea ce priveşte însă teoremele 3 şi 4, lucrurile stau altfel. Nu este greu de văzut că, în demonstraţiile acestor teoreme, nu putem înlocui intervalul printr-un domeniu arbitrar. Intradevăr, pentru ca funcţia F, considerată în demonstraţia suficienţei condiţiei din teorema 3, să aibă sens, este necesar ca segmentul de dreaptă care uneşte punctul (x_0, y_0) cu punctul (x, y_0) şi segmentul de dreaptă care uneşte punctul (x, y_0) cu punctul (x, y) să fie conţinute în Δ. Această condiţie este asigurată dacă luăm în rolul lui Δ un domeniu convex (adică un domeniu în care orice segment care unește două puncte ale domeniului este conținut în domeniu). Dacă însă luăm în rolul lui Δ un domeniu arbitrar, demonstrația dată nu mai este valabilă.

Să rezumăm. Discuția de mai sus arată că teoremele 3 și 4 se transpun la domenii convexe, cu aceeași demonstrație care a fost dată pentru intervalele bidimensionale. Aceeași demonstrație încetează însă de a fi valabilă dacă domeniul nu este convex.

Se pune problema dacă această dificultate este legată doar de metoda de demonstrație sau de natura teoremei însăși. Un exemplu ne va arăta că are loc a doua variantă a alternativei.

Fie domeniul Δ format din toate punctele din planul xOy pentru care $x^2 + y^2 < 2$ și $x^2 + y^2 \neq 0$. Δ este deci discul de rază $\sqrt{2}$, cu centrul în origine, din care s-a scos originea. Este clar că domeniul Δ astfel definit *nu* este convex.

Să considerăm funcțiile P și Q, definite în Δ în modul următor:

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Este ușor de văzut că P și Q sînt continue în Δ și admit derivate parțiale de primul ordin, de asemenea continue în Δ. Avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 - y^2)^2},$$

deci

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

în orice punct din Δ.

Dacă teorema 3 s-ar transpune la domeniul Δ, atunci ar urma ca $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ să fie o diferențială totală, deci, în baza teoremei 1, integrala

$$\int_\Gamma P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y \tag{12}$$

ar fi independentă de drum (în sensul precizat de enunțul teoremei 1). Rezultă că, dacă vom arăta că integrala (12) depinde de drum în Δ, va rezulta că expresia de sub integrala (12) *nu* este o diferențială totală, deci teorema 3 *nu* se transpune la domenii arbitrare.

Să considerăm două curbe Γ_1 și Γ_2, definite în modul următor:

$$\Gamma_1: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\Gamma_2: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \geqslant t \geqslant -\frac{3\pi}{2}\right).$$

Este uşor de văzut că imaginile acestor curbe sînt nişte semicircumferinţe, aşa cum se vede în figura 5. Curbele r_1 şi r_2 sînt, evident, conţinute în Δ şi au aceeaşi extremitate iniţială (punctul A) şi aceeaşi extremitate finală (punctul B). Într-adevăr, avem $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Deoarece sin şi cos sînt funcţii cu variaţie mărginită, curbele r_1 şi r_2 sînt rectificabile. Funcţiile P şi Q fiind continue în Δ, există integralele curbilinii

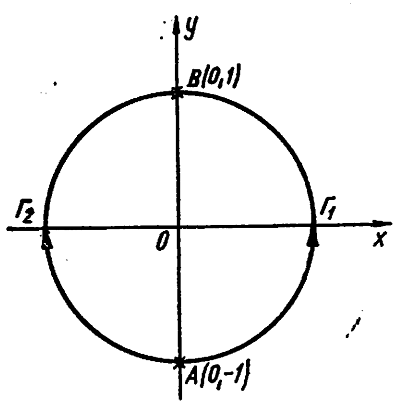


Fig. 5

$$\int_{r_1} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy, \qquad \int_{r_2} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Ţinînd seama că sin şi cos admit derivată continuă, putem aplica acestor două integrale teorema de reducere a unei integrale curbilinii la o integrală Riemann şi obţinem:

$$\int_{r_1} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi,$$

$$\int_{r_2} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} dt = -\pi,$$

deci dele două integrale nu sînt egale.

Am demonstrat astfel că teorema 3 *nu* se transpune la domenii arbitrare. În mod analog, nici teorema 4 nu se transpune la domenii arbitrare.

i. Rolul conexiunii simple în problema existenţei primitivei

Se pune acum problema dacă domeniile convexe sînt *singurele* pentru care teoremele 3 şi 4 sînt adevărate. Răspunsul este negativ. Pentru a caracteriza domeniile pentru care au loc teoreme de tipul 3 şi 4, va fi nevoie să recurgem la o noţiune de topologie, noţiunea de *conexiune simplă*.

Pentru a putea defini această noţiune, este nevoie în prealabil să definim noţiunea de *deformare continuă a unei curbe din altă curbă*. Fie două curbe plane C_0 şi C_1, avînd aceleaşi extremităţi A şi M şi conţinute în domeniul bidimensional D. Vom numi *deformare continuă, în domeniul D, a curbei C_0 în curba C_1, o pereche de funcții*

$$x = \varphi(t, \lambda),$$
$$y = \psi(t, \lambda),$$

definite și continue în intervalul bidimensional compact $R(a \leqslant t \leqslant b,\ 0 \leqslant \leqslant \lambda \leqslant 1)$ și avînd următoarele proprietăți:

1° *Dacă $(t, \lambda) \in R$, atunci punctul M, de coordonate $\varphi(t, \lambda)$ și $\psi(t, \lambda)$, aparține domeniului D.*

2° *Curba C_0 este dată de reprezentarea parametrică*

$$\begin{matrix} x = \varphi(t, 0) \\ y = \psi(t, 0) \end{matrix}, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

3° *Curba C_1 este dată de reprezentarea parametrică*

$$\begin{matrix} x = \varphi(t, 1) \\ y = \psi(t, 1) \end{matrix}, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

4° *Pentru orice valoare a lui λ, astfel încît $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ $\varphi(a, \lambda)$ este abscisa extremității inițiale A, $\psi(a, \lambda)$ este ordonata lui A, $\varphi(b, \lambda)$ este abscisa extremității finale M, $\psi(b, \lambda)$ este ordonata lui M.*

Vom spune că domeniul bidimensional D este simplu conex dacă, pentru orice pereche de curbe C_0 și C_1 conținute în D și avînd aceleași extremități, există o deformare continuă, în domeniul D, a curbei C_0 în curba C_1.

Noțiunea de domeniu simplu conex corespunde, din punct de vedere intuitiv, la noțiunea de domeniu fără „găuri". Un exemplu tipic în acest sens este dat de un disc și o coroană circulară (fig. 6). Într-un disc, două curbe C_0 și C_1, cu aceleași extremități, pot fi deformate continuu una în alta. Nu același lucru se întîmplă într-o coroană circulară; curbele C_0 și C_1 considerate în coroana circulară din figura alăturată nu pot fi deformate

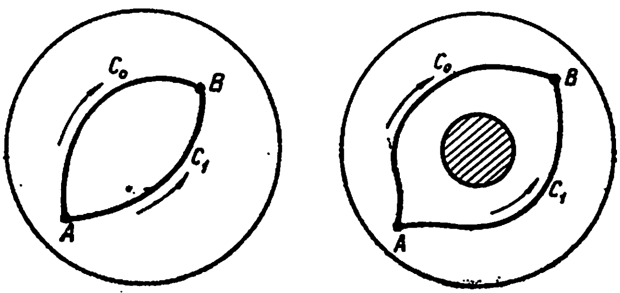


Fig. 6

continuu una în cealaltă decît dacă părăsim coroana circulară, pătrunzînd în porțiunea hașurată. Discul deschis este un domeniu simplu conex, în timp ce coroana circulară nu este un domeniu simplu conex.

Noțiunea de domeniu simplu conex poate fi generalizată pe baza următoarei idei intuitive: un domeniu simplu conex este un domeniu cu zero găuri; dacă un domeniu are n găuri, cu $n > 0$, atunci numărul n se numește *ordinul de conexiune* al domeniului. Coroana circulară are ordinul de conexiune egal cu 1. Un domeniu simplu conex este un domeniu al cărui ordin de conexiune este egal cu zero. *Un domeniu al cărui ordin de conexiune este un număr pozitiv se numeşte multiplu conex.* Există pentru unele teoreme de analiză relative la domenii simplu conexe posibilitatea de a le generaliza la domenii multiplu conexe. În cadrul acestui manual nu considerăm astfel de generalizări.

Cu această pregătire, putem enunţa următoarea teoremă:

Teorema 5. Fie D un domeniu simplu conex situat în planul xOy. Să considerăm două funcţii P şi Q definite şi continue în D şi astfel încît derivatele parţiale

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \ \frac{\partial Q}{\partial x}$$

există şi sînt continue în D. O condiţie necesară şi suficientă ca să existe o funcţie F definită şi diferenţiabilă în D, astfel încît $dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ în orice punct din D, este ca egalitatea

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

să aibă loc pretutindeni în D.

Demonstraţie. *Condiţia este necesară.* Aceeaşi demonstraţie ca în cazul în care D este un interval bidimensional.

Condiţia este suficientă. Vom asocia fiecărui punct din D un interval bidimensional I_A, centrat în A şi conţinut în D. Conform teoremei 3, expresia $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ admite primitivă în I_A. Fie M un punct arbitrar din D. Să arătăm, putem prelungi primitiva definită în I_A în mod continuu, pînă în M (sensul exact al acestei afirmaţii se va preciza ulterior).

Considerăm o curbă C_0 cu extremitatea iniţială în A şi cu extremitatea finală în M. Imaginea unei curbe este o mulţime compactă deci, imaginea curbei C_0 poate fi acoperită — în baza teoremei de acoperire Borel-Lebesgue — cu un număr finit de intervale bidimensionale de tipul I_A: I_{M_0}, I_{M_1}, ..., I_{M_n}($M_0 = A$, $M_i \in C_0$ pentru $i = 0, 1, ..., n$). În mulţimea acestor intervale, curba C_0 induce o anumită ordonare, însemnată chiar de numerotarea lor.

Fie $F_i(x, y)$ primitiva definită în I_{M_i}. Determinăm constantele K_j prin condiţiile:

$$K_1 = 0 \qquad F_1(x', y') + K_2 = F_1(x', y'), \qquad (x', y') \in I_{M_1} \cap I_{M_2},$$
$$F_3(x'', y'') + K_3 = F_2(x'', y''), \qquad (x'', y'') \in I_{M_2} \cap I_{M_3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Am definit deci o primitivă $F_{C_0}(x, y)$ pe domeniul

$$\Delta^{C_0} = \bigcup_{i=1}^{n} I_{M_i} \tag{13}$$

şi punem, prin definiţie,

$$F(M) = F_{C_0}(M).$$

Primitiva este astfel bine definită într-o vecinătate a punctului M.

Să considerăm o altă curbă C_1 cu extremitățile în A și M. Din definiția domeniului simplu conex rezultă existența unei deformări continue a lui C_0 în C_1, adică existența a două funcții φ și ψ, continue pe intervalul bidimensional compact R, definit de inegalitățile $a \leqslant t \leqslant b$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, și astfel încît să fie îndeplinite proprietățile 1°, 2°, 3° și 4° (vezi definiția domeniului simplu conex).

Pentru fiecare valoare a lui $\lambda (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$, există un domeniu de tipul (13), fie el Δ^{C_λ}, care conține curba C_λ și în care se definește o primitivă F_{C_λ} prin procedeul indicat mai sus.

Datorită continuității funcțiilor φ și ψ, există două numere pozitive η și η', astfel încît pentru $0 \leqslant \lambda_{G_1} \leqslant \eta$ să avem $C_\lambda \subset \Delta^{C_0}$, iar pentru $1 - \eta' \leqslant \lambda \leqslant 1$ să avem $C_\lambda \subset \Delta^{C_1}$. Din aceleași motive, putem găsi, pentru fiecare λ_0 astfel încît $0 < \lambda_0 < 1$, un număr $\delta > 0$ cu proprietatea că, pentru $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$, să avem $C_\lambda \subset \Delta^{C_{\lambda_0}}$. În felul acesta, realizăm o acoperire cu intervale deschise a intervalului [0, 1], Aplicînd teorema de acoperire Borel-Lebesgue, extragem o acoperire finită $I_{\lambda_1}, I_{\lambda_2}, ..., I_{\lambda_m}$ cu $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_m \leqslant b$. Deoarece intervalele $I_{\lambda_1}, ..., I_{\lambda_m}$ au fost luate deschise, rezultă că $I_{\lambda_1} \cap I_{\lambda_2} \neq 0, ..., I_{\lambda_{m-1}} \cap I_{\lambda_m} \neq 0$. Deci există $\lambda^*_{1,2} \in I_{\lambda_1} \cap I_{\lambda_2}, ..., \lambda^*_{i,i+1} \cap I_{\lambda_i} \cap I_{\lambda_{i+1}}, ..., \lambda^*_{m-1,m} \in I_{\lambda_{m-1}} \cap I_{\lambda_m}$.

Dacă $\lambda \in I_{\lambda_1}$, atunci $F_{C_\lambda}(M) = F_{C_{\lambda_0}}(M) = F^*_{C_{\lambda_{1,2}}}(M)$. Însă

$$F^*_{C_{\lambda_{1,2}}}(M) = F_{C_{\lambda_2}}(M) = F_{C_{\lambda'}}(M),\ \lambda' \in I_{\lambda_2},$$

deci

$$F_{C_{\lambda_0}} = F_{C_\lambda}(M) = F_{C_{\lambda'}}(M),\ \lambda \in I_{\lambda_1},\ \lambda' \in I_{\lambda_2}.$$

Procedînd din aproape în aproape, obținem.

$$F_{C_\lambda}(M) = F_{C_{\lambda_0}}(M) \text{ pentru } \lambda \in [0,\ 1].$$

Deoarece M a fost luat arbitrar, rezultă că prelungirea prin continuitate a primitivei se poate face în orice punct al domeniului D și teorema este demonstrată.

T e o r e m a 6. Fie D un domeniu situat în planul xOy. Dacă pentru orice pereche de funcții P și Q, definite și continue în D și astfel încît derivatele parțiale $\frac{\partial P}{\partial y}$ și $\frac{\partial Q}{\partial x}$ există și sînt continue în D, avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

în orice punct din D, atunci domeniul D este simplu conex.

Schiță de demonstrație. Totul revine la a arăta că pentru orice domeniu D care nu este simplu conex se poate găsi cel puțin o pereche de funcții P și Q definite și continue în D, avînd derivate parțiale $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$, continue și egale în D și pentru care nu există nici o funcție F cu proprietatea $\mathrm{d}F(x, y) = P(x, y \,\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ în D.

Pentru a demonstra aceasta, vom ţine seama că definiţia conexiunii simple se mai poate formula şi în modul următor: *Un domeniu D este simplu conex dacă, oricare ar fi linia poligonală închisă, conţinută în D, interiorul ei este conţinut în D*[1]. Rezultă că, dacă D *nu* este simplu conex, atunci există o linie poligonală închisă, conţinută în D, şi un punct M_0 în interiorul ei, astfel încît $M_0 \notin D$. Fie x_0 şi y_0 coordonatele punctului M_0. Funcţiile P şi Q date de

$$P(x, y) = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \qquad Q(x, y) = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

răspund la problema pusă (a se vedea exemplul tratat la observaţiile care urmează după demonstraţia teoremei 4).

Exemple. 1° Să considerăm funcţiile

$$P(x, y) = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}, \qquad Q(x, y) = \frac{e^y}{1 + x^2}.$$

Funcţiile P şi Q sînt continue în R^2. Avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2xe^y}{(1 + x^2)^2}$$

deci aceste derivate parţiale sînt egale şi continue în R^2. În baza teoremei 3, există o funcţie F, diferenţiabilă în R^2 şi astfel încît $\mathrm{d}F(x, y) = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$. Avem

$$F(x, y) = \int_0^x \frac{2t \cdot 0}{(1 + t^2)^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^y \frac{e^t}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t + C = \frac{e^y - 1}{1 + x^2} + C.$$

2° Să considerăm funcţiile $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$. Avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$

deci, în baza teoremei 3, *nu* există o funcţie F, diferenţiabilă în R^2 şi astfel încît $\mathrm{d}F(x, y) = x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$.

j. Aplicaţii

1° *Să se calculeze integrala*

$$I(\varphi) = \int_L (x^2 - y^2)\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y$$

extinsă la o curbă avînd ca imagine frontiera unui semicerc determinat de cercul cu centrul în origine, cu raza 1 *şi diametrul* AB *de pantă* $m = \operatorname{tg} \varphi$.

[1] Nu dăm aici demonstraţia echivalenţei dintre această formulare şi definiţia iniţială a conexiunii simple.

Integrala se descompune astfel (fig. 7):

$$I(\varphi) = \int_{AB} (x^2 - y^2)\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y + \int_{BMA} (x^2 - y^2)\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = I_1 + I_2.$$

De-a lungul diametrului AB vom pune

$$x = t\cos\varphi, \qquad y = t\sin\varphi,$$

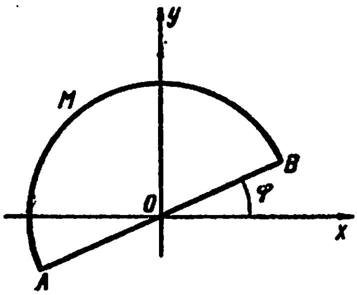


Fig. 7

de unde

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} t^2(\sin 2\varphi \sin\varphi + \cos 2\varphi \cos\varphi)\,\mathrm{d}t =$$

$$= +\frac{2}{3}\cos\varphi.$$

De-a lungul lui BMA vom pune

$$x = \cos\theta, \qquad y = \sin\theta.$$

de unde:

$$I_2 = \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} (\cos 2\theta \sin\theta + \sin 2\theta \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

adică

$$I_2 = 2\cos\varphi. \text{ Deci } I(\varphi) = \frac{8}{3}\cos\varphi.$$

2° *Să se calculeze*

$$I = \int_{r} (x + y)\mathrm{d}x + (y - x)\mathrm{d}y,$$

unde r este o curbă avînd ca imagine conturul unui pătrat cu vîrfurile pe axele de coordonate şi cu latura egală cu $\sqrt{2}$.

Fie, în ordinea sensului pozitiv de parcurgere, A, B, C, D, vîrfurile pătratului, abscisa punctului A fiind egală cu 1.
Avem

$$I = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

De-a lungul laturii AB, vom lua $x = t$, $y = 1 - t (0 \leqslant t \leqslant 1)$, deci

$$I_1 = \int_{1}^{0} \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (2y - 1)\mathrm{d}y = -1.$$

Pentru celelalte laturi se procedează în mod analog. Se găseşte

$$I_2 = -1, \qquad I_3 = -1, \qquad I_4 = -1,$$

deci

$$I = -4.$$

3° *Să se calculeze aria cuprinsă între o buclă a cicloidei și axa Ox.*

Fie OBA bucla de cicloidă (fig. 8).

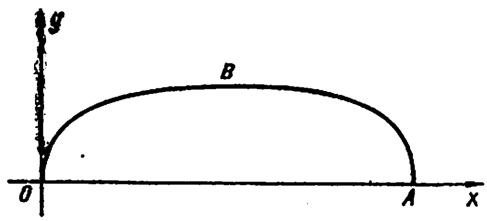


Fig. 8

Aria este dată de integrala de contur

$$I = \frac{1}{2} \oint_{OABO} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

Fie $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ reprezentarea parametrică a cicloidei. Bucla OBA este descrisă făcînd parametrul t să varieze de la 0 la 2π. Avem

$$I = \frac{1}{2}\int_{OA} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{ABO} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

Prima integrală este nulă. Ținînd seama că pe cicloidă avem

$$\mathrm{d}x = a(1 - \cos t)\mathrm{d}t, \ \mathrm{d}y = a \sin t \ \mathrm{d}t,$$

integrala a doua devine

$$\frac{1}{2}\int_{ABO} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\int_{2\pi}^{0} (t \sin t + \cos t - 1) \ \mathrm{d}t = 3\pi a^2.$$

4° *Care este semnificația geometrică a integralei curbilinii*

$$\frac{1}{2}\int_{AB} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

extinse la o curbă rectificabilă oarecare?

Dacă dreptele OA, OB, unde O este originea, nu taie curba, atunci semnificația integralei este simplă. Într-adevăr, se verifică imediat că

$$\frac{1}{2}\int_{OA} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{OB} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0,$$

deci

$$\frac{1}{2}\int_{AB} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \pm \text{ aria } OAB,$$

după cum

$$\sphericalangle(OA, OB) \gtrless 0.$$

5° *Să se afle aria unui sector de hiperbolă echilaterală cu semiaxele egale cu r.*

Fie

$$x^2 - y^2 = r^2$$

ecuaţia hiperbolei şi OAB sectorul considerat (fig. 9). Vom reprezenta parametric hiperbola prin ecuaţiile

$$x = r\operatorname{ch} t, \qquad y = r \operatorname{sh} t.$$

Potrivit exemplului precedent, avem

$$\text{aria } OAB = \frac{1}{2}\int_{AB} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{r^2}{2}\int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t)\mathrm{d}t = \frac{r^2}{2}(t_2 - t_1).$$

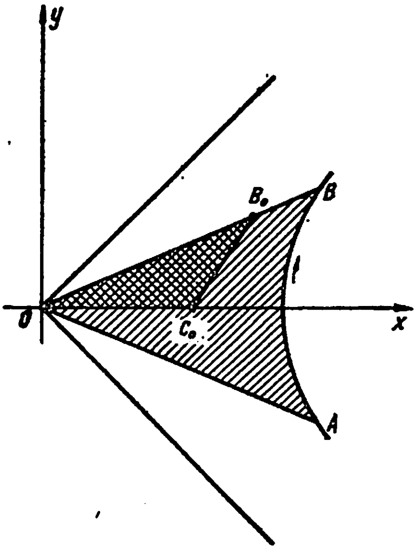


Fig. 9

Această formulă este în întregime analogă formulei care dă aria unui sector circular de rază r, al cărui unghi la centru ar fi (măsurat în radiani) $t_2 - t_1$. Analogia merge şi mai departe. Unghiul la centru, pentru un sector circular, poate fi interpretat şi ca dublul ariei sectorului circular de rază 1. Tot astfel, dacă în formula precedentă am face $r = 1$, am deduce:

$$t_2 - t_1 = 2 \text{ aria } OAB.$$

În particular, parametrul t care figurează în ecuaţiile hiperbolei, echilatere poate fi interpretat ca dublul ariei sectorului hiperbolic, de semiaxă, 1, OC_0B_0 (fig. 9).

Observaţie importantă. Ori de cîte ori se propune studiul unei integrale curbilinii, indicîndu-se nu însăşi curba ci doar imaginea ei, valoarea integralei nu este unic determinată, deoarece depinde de felul în care alegem o reprezentare parametrică avînd imaginea dată. (După cum s-a văzut, este posibil ca două curbe diferite să aibă aceeaşi imagine.) Tocmai aceasta este situaţia atît în aplicaţiile de mai sus cît şi în culegerile uzuale de probleme. De fiecare dată, enunţul trebuie precizat ulterior prin specificarea unei reprezentări parametrice, aşa cum dealtfel s-a procedat şi mai sus.

Capitolul IX

INTEGRALE DUBLE

Domeniu. Funcții de domeniu. În capitolul de față ne propunem să extindem noțiunea de integrală, înlocuind intervalul de integrare cu corespondentul său în plan sau în spațiu. Formal, noțiunii de „interval unidimensional“ îi corespunde, în plan, noțiunea de „interval bidimensional“, iar în spațiu, aceea de „interval tridimensional.“ Dacă însă examinăm cu atenție felul în care intervin intervalele unidimensionale în analiză, atunci ajungem la concluzia următoare: rolul intervalelor deschise în analiză, se explică prin următoarele proprietăți fundamentale ale lor: 1) odată cu un punct, aparține intervalului o întreagă vecinătate a punctului; 2) fiind date două puncte ale unui interval, putem trece de la punct la celălalt fără a părăsi intervalul. Proprietatea 1) joacă un rol de seamă în studiul proprietăților locale ale funcțiilor (limită, continuitate, derivată etc.), în timp ce proprietatea 2) este legată de proprietățile globale ale funcțiilor (integrabilitate, variație mărginită etc.). Proprietatea 1) conduce la noțiunea de mulțime deschisă (a se vedea volumul întîi); proprietatea 2) conduce la noțiunea de mulțime conexă (a se vedea volumul întîi). O mulțime care este în același timp deschisă și conexă se numește domeniu (a se vedea volumul întîi). Se poate arăta — lăsăm acest lucru pe seama cititorului — că pe dreaptă singurele domenii sînt intervalele deschise. Tocmai acest fapt explică de ce tot studiul funcțiilor de o variabilă s-a referit la intervale. *Reuniunea dintre un domeniu și frontiera sa se numește domeniu închis. Un domeniu închis și mărginit se numește domeniu compact.* Pe dreaptă, singurele domenii închise (compacte) sînt intervalele închise (respectiv compacte). Se știe că, în unele probleme, este necesar ca intervalele cu care se lucrează să fie compacte. Cadrul natural al analizei îl constituie deci domeniile (inclusiv cele închise sau compacte). Spre deosebire de ceea ce se întîmplă pe dreaptă, unde — după cum am semnalat — orice domeniu este un interval, în plan și în spațiu există domenii care nu sînt intervale; mai mult decît atît, unele domenii din plan sau din spațiu au o structură foarte deosebită de aceea a unui interval. Această situație face necesară o anumită selecție; vom considera numai acele domenii care au arie (în sensul definit în volumul întîi). Pentru comoditate, deseori vom considera în cele ce urmează doar o parte a domeniilor care au arie, și anume acele domenii a căror frontieră este o reuniune finită de imagini ale unor curbe cu tangentă continuă. Existenţa ariei unui astfel de domeniu va rezulta de îndată ce vom demonstra că frontiera lui este de arie nulă (conform unui criteriu din volumul întîi). Trebuie deci să stabilim următoarea

Lemă. Imaginea unei curbe cu tangentă continuă are arie nulă.

Demonstraţie. Fie f şi g două funcţii cu derivată continuă pe $[a, b]$. Să arătăm că imaginea curbei

$$r: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad a \leqslant t \leqslant b \tag{1}$$

are arie nulă. Fie $\varepsilon > 0$. Considerăm o diviziune $\Delta = a = t_0 < t_1 < \dots < < t < t_{i+1} < \dots < t_n = b$, de normă inferioară lui ε. Datorită ipotezei de derivabilitate şi folosind teorema creşterilor finite, obţinem, pentru $t_i \leqslant \leqslant t_i \leqslant t_{i+1} (i = 0, \dots, n-1)$,

$$f(t) - f(r) = f'(\xi_i)(t - t_i); \qquad g(t) - g(t_i) = g'(\eta_i)(t - t_i);$$

unde $t_i \leqslant \xi_i \leqslant t$, $t_i \leqslant \eta_i \leqslant t$.

Din continuitatea derivatelor f' şi g' pe $[a, b]$ rezultă mărginirea lor pe $[a, b]$. Există deci un număr M, astfel încît $|f(\xi_i)| < M > |g(\eta_i)|$, deci

$$|f(t) - f(t_i)| < M(t - t_i) \leqslant M(t_{i+1} - t_i),$$

$$|g(t) - g(t_i)| < M(t - t_i)) \leqslant M(t_{i+1} - t_i),$$

pentru $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$ $(i = 0, \dots, n-1)$.

Să notăm cu Q_i domeniul definit de pătratul cu centrul în punctul de abcisă $f(t_i)$ şi de ordonată $g(t_i)$ şi avînd latura de lungime $2M\ (t_{i+1} - t_i)$. Rezultă din cele de mai sus că imaginea curbei r definită de (1) este conţinută în reuniunea

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} Q_i$$

şi deci, notînd cu $a_e(r)$ aria exterioară a imaginii lui, r, avem

$$a_e(r) < \sum_{i=0}^{n-1} \text{aria } Q_i = \sum_{i=0}^{n-1} 4M^2(t_{i+1} - t_i)^2.$$

Însă norma diviziunii Δ este inferioară lui ε, deci

$$\sum_{i=0}^{n-1} 4M^2(t_{i+1} - t_i)^2 \leqslant 4M^2\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = 4M^2\varepsilon(b - a).$$

Aşadar

$$a_e(r) < 4M^2\varepsilon(b - a)$$

şi, deoarece ε este un număr pozitiv arbitrar, rezultă

$$a_e(r) = 0.$$

Însă se știe că, notînd cu $a_i(r)$ aria interioară a imaginii lui r, avem $0 \leqslant a_i(r) \leqslant$ $\leqslant a_e(r)$; rezultă astfel $a_i(r) = a_e(r) = 0$, deci imaginea lui r are arie nulă.

C o r o l a r. Dacă frontiera unui domeniu plan D este o reuniune finită de imagini ale unor curbe cu tangentă continuă, atunci D are arie.

În cele ce urmează se va presupune, fără a se mai specifica, că toate domeniile considerate au arie.

T e o r e m ă. Dacă domeniul mărginit D este împărțit în două domenii cu ajutorul unei linii L care este o reuniune finită de imagini ale unor curbe cu tangentă continuă, atunci, notînd cu D' și D'' domeniile astfel formate, avem

$$\text{aria } D = \text{aria } D' + \text{aria } D''.$$

D e m o n s t r a ț i e. Să notăm cu E mulțimea punctelor comune lui D și L. Conform lemei, avem aria $L = 0$, deci, cu atît mai mult, aria $E = 0$.

Dacă fiecărui domeniu mărginit $G \subset D$ îi corespunde un număr real determinat W, atunci această corespondență definește o funcție F de domeniu și convenim să spunem că F este definită pe D[1]. Scriem

$$W = F(G). \tag{1}$$

Un exemplu de funcție de domeniu este furnizat de noțiunea de *arie*. Alt exemplu este furnizat de *masa* unei plăci plane.

O funcție de domeniu este aditivă dacă

$$F(G) = F(G_1) + F(G_2), \tag{2}$$

unde $G_1 \cup G_2 = G$ iar $G_1 \cap G_2$ este o mulțime de arie nulă. Din (2) rezultă că pentru $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_i \cup \ldots \cup G_n = G$, cu $G_i \cap G_j$ de arie nulă pentru $i \neq j$, avem:

$$F(G) = F(G_1) + F(G_2) + \ldots + F(G_n).$$

Fie F o funcție de domeniu definită pe D și fie P_0 un punct din D. Să presupunem că există un număr λ cu proprietatea că fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un $\delta > 0$, astfel încît, pentru orice domeniu $G \subset D$, conținînd punctul P_0 și avînd diametrul[2] *inferior lui δ* (diam. $G < \delta$), *avem*

$$\left| \lambda - \frac{F(G)}{\text{aria } G} \right| < \varepsilon.$$

Numărul λ se numește derivata funcției de domeniu F în punctul P_0. Spunem că F este derivabilă în P_0. Dacă F este derivabilă în fiecare punct din D, atunci spunem că F este derivabilă în D. Derivata lui F este o funcție de punct definită pe D; o vom nota cu $\frac{dF}{dS}$ sau cu $f(x, y)$.

[1] Integrala lui Lebesgue va fi studiată la cursul de Fuucții reale și elemente de topologie generală.
[2] Amintim că prin *diametrul unei mulțimi E* se înțelege marginea superioară a mulțimii de distanțe dintre diferitele puncte din E.

Un exemplu important de derivată a unei funcţii de domeniu îl constituie derivata funcţiei care dă masa; această derivată este, prin definiţie, *funcţia densitate.*

Iată acum cîteva proprietăţi simple relative la funcţiile aditive de domeniu şi la derivata unei funcţii de domeniu.

1) *Dacă F este o funcţie aditivă de domeniu, iar λ este un număr real, atunci λF este de asemenea o funcţie aditivă de domeniu.*

2) *Dacă F are derivată finită, atunci şi $F_1 = \lambda F$ are derivată finită şi*

$$\frac{dF_1}{dS} = \lambda \frac{dF}{dS}.$$

3) *Dacă F_1 şi F_2 sînt funcţii aditive de domeniu, atunci $F_1 + F_2$ şi $F_1 - F_2$ sînt de asemenea funcţii aditive de domeniu.*

4) *Dacă F_1 şi F_2 au derivată finită, atunci şi funcţiile $\Phi_1 = F_1 + F_2$, $\Phi_2 = F_1 - F_2$ au derivată finită şi*

$$\frac{d\Phi_1}{dS} = \frac{dF_1}{dS} + \frac{dF_2}{dS}, \quad \frac{d\Phi_2}{dS} = \frac{dF_1}{dS} - \frac{dF_2}{dS}.$$

Proprietăţile 3 şi 4 se extind la un număr finit oarecare de termeni.

L e m a 1. Fie $D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D_n \supset \dots$ un şir de domenii compacte. Există un punct care aparţine tuturor domeniilor D.

D e m o n s t r a ţ i e. Fie $(x_n, y_n) \in D_n (n = 1, 2, \dots)$. Conform lemei lui Cesaro şi ţinînd seama că domeniile D_n, fiind compacte, sînt mărginite, rezultă existenţa unui subşir convergent (x_{pn}, y_{pn}). Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n}$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_{p_n}$ şi fie D_l un domeniu oarecare din şir. Există un număr natural N, astfel încît $(x_{p_n}, y_{p_n}) \in D_l$ de îndată ce $n > N$. Ţinînd seama că D_l este compact, rezultă că $(x, y) \in D_l$; însă D_l este un domeniu *oarecare* din şir, deci

$$(x, y) \in \bigcap_{l=1}^{\infty} D_l$$

şi lema 1 este stabilită.

L e m a 2. Fie D un domeniu compact şi F o funcţie aditivă de domeniu, definită pe D, derivabilă în fiecare punct din D. Să presupunem că

$$\frac{dF}{dS} \geqslant 0 \text{ în } D. \tag{3}$$

În aceste condiţii

$$F(D) \geqslant 0.$$

D e m o n s t r a ţ i e. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $F(D) < 0$. Vom avea deci

$$\frac{F(D)}{\text{aria } D} < 0.$$

Fie un număr l astfel încît

$$\frac{F(D)}{\text{aria } D} \leqslant l < 0,$$

ceea ce revine la

$$F(D) \leqslant l \cdot \text{aria } D. \tag{4}$$

Fie $\{\varepsilon_n\}$ un şir descrescător de numere pozitive, tinzînd la zero. Cu ajutorul unor arce netede, să descompunem pe D într-un număr finit de domenii compacte, D_{01}, D_{02}, D_{03}, ..., fiecare de diametru mai mic decît ε_1. Pentru cel puţin unul dintre aceste domenii, fie el D_{0k}, avem

$$F(D_{0k}) \leqslant l \cdot \text{aria } D_{0k}; \tag{5}$$

într-adevăr, în caz contrar, din inegalităţile

$$F(D_{0i}) > l \cdot \text{aria } D_{0i} \qquad (i = 1, 2, ...);$$

ar rezulta, în baza aditivităţii lui F,

$$F(D) = F(D_{01}) + F(D_{02}) + ... > l(\text{aria } D_{01} + \text{aria } D_{02} + ..) =$$
$$= l \cdot \text{aria } D,$$

ceea ce ar contrazice relaţia (4).

Fie D_1 acela dintre domeniile D_{01}, D_{02}, ..., pentru care este satisfăcută relaţia (5). Avem deci

$$F(D_1) \leqslant l \cdot \text{aria } D_1. \tag{6}$$

În felul acesta, am obţinut pentru D_1 inegalitatea care s-a stabilit la (4) pentru D. Vom aplica acum lui D_1 raţionamentul pe care l-am aplicat mai sus lui D, înlocuind însă pe ε_1 cu ε_2. Vom descompune deci pe D_1 într-un număr finit de domenii D_{11}, D_{12}, ..., fiecare de diametru inferior şi ca şi mai sus, se constată că, pentru cel puţin unul dintre aceste domenii, pe care-l vom nota cu D_2, vom avea

$$F(D_2) \leqslant l \cdot \text{aria } D_2.$$

Continuînd acest proces la nesfîrşit, obţinem un şir de domenii compacte $D_1 \supset D_2 \supset ... \supset D_n \supset ...$, astfel încît diametrul lui D_n este inferior lui $\varepsilon_n (n = 1, 2, ...)$ şi

$$F(D_n) \leqslant l \cdot \text{aria } D_n,$$

deci

$$\frac{F(D_n)}{\text{aria } D_n} \leqslant l (n = 1, 2, ...).$$

Conform lemei 1, există un punct $(x, y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ din faptul că diametrul lui D_n tinde la zero cînd $n \to \infty$, rezultă că (x, y) este unicul punct comun tuturor domeniilor D_n. Conform inegalităţii (7) avem:

$$\frac{dF}{dS} = \lim_{n\to\infty} \frac{F(D)}{\text{aria } D} \leqslant l < 0,$$

ceea ce constituie o contradicţie cu inegalitatea (3). Deci presupunerea că $F(D) < 0$ este falsă şi lema 2 este stabilită.

C o r o l a r 1. Dacă pentru o funcţie F, aditivă de domeniu, avem peste tot, pe domeniul compact D,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} \leqslant 0,$$

atunci

$$F(D) \leqslant 0.$$

Pentru demonstraţie, este suficient să se considere funcţia $F_1 = -F$, căreia i se va aplica lema 2.

C o r o l a r 2. Dacă pentru o funcţie F, aditivă de domeniu, avem peste tot în D,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = 0,$$

atunci

$$F(D) = 0.$$

D e m o n s t r a ţ i e. Conform lemei 2, avem

$$F(D) \geqslant 0.$$

Conform corolarului 1, avem

$$F(D) \leqslant 0,$$

deci

$$F(D) = 0.$$

T e o r e m a 1. Dacă F_1 şi F_2 sînt funcţii aditive de domeniu, definite pe D, şi dacă

$$\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}S},$$

în orice punct din D, atunci

$$F_1(G) = F_2(G)$$

pentru orice domeniu $G \subset D$.

D e m o n s t r a ţ i e. Fie $F = F_1 - F_2$; F, ca diferenţă a două funcţii aditive de domeniu, este de asemenea o funcţie aditivă de domeniu. Avem deci:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}S} - \frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}S} = 0,$$

în orice punct din D.

Fie acum G un domeniu conţinut în D. Aplicînd lui G corolarul *2* al lemei *2*, obţinem

$$F(G) = 0,$$

deci

$$F_1(G) = F_2(G),$$

pentru orice domeniu $G \subset D$.

Fie f o funcţie reală definită pe domeniul compact D. Dacă există o funcţie F aditivă de domeniu, pentru care, peste tot în D, avem

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = f(x, y),$$

atunci spunem că F este o primitivă a funcţiei f pe domeniul D.

T e o r e m a 2. **Dacă f este continuă pe domeniul compact D, atunci f admite o primitivă pe D.**

D e m o n s t r a ţ i e. Să considerăm mai întîi cazul particular în care f este pozitivă pe D. *Vom numi cilindroid de bază D asociat funcţiei f mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate x, y, z satisfac următoarele condiţii:*

$$(x, y, 0) \in D,$$
$$0 \leqslant z \leqslant f(x, y),$$

În mod analog, putem considera, pentru orice domeniu $G \subset D$, cilindroidul de bază G asociat lui f, definit prin condiţiile

$$(x, y, 0) \in G,$$
$$0 \leqslant z \leqslant f(x, y).$$

Să considerăm funcţia de domeniu

$$V = F(G),$$

unde $F(G)$ este, prin definiţie, volumul cilindroidului de bază G, asociat funcţiei f (a se vedea volumul întîi). Funcţia F este aditivă. Vom arăta că F este derivabilă în fiecare punct din D şi

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = f(x, y).$$

Într-adevăr, fie (x, y) un punct din D şi fie G un domeniu compact, astfel încît $G \subset D$ şi $(x, y) \in G$. Notînd cu m_G şi M_G marginile funcţiei f pe G, avem

$$m_G \cdot \text{aria } G \leqslant F(G) \leqslant M_G \cdot \text{aria } G,$$

deci

$$m_G \leqslant \frac{F(G)}{\text{aria } G} \leqslant M_G, \tag{8}$$

pentru orice domeniu $G \subset D$. Fie un şir de domenii compacte $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$, astfel încît diametrul lui G_n să tindă la zero cînd $n \to \infty$. Fie m_{G_n} şi M_{G_n} marginile funcţiei f pe domeniul G_{G_n}. Deoarece este continuă pe G_n, iar G_n este compact, rezultă că există două puncte $(x_n, y_n) \in G_n$ şi $(x'_n, y'_n) \in G_n$, astfel încît $m_{G_n} = f(x_n, y_n)$, $M_{G_n} = f(x'_n, y'_n)$.

Din faptul că diametrul lui G_n tinde către zero, cînd $n \to \infty$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = x,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y'_n = y.$$

Însă în baza relaţiei (8), avem

$$f(x_n, y_n) = m_{G_n} \leqslant \frac{F(G_n)}{\text{aria } G_n} \leqslant M_n = f(x'_n, y'_n),\ (n = 1, 2, \dots),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(G_n)}{\text{aria } G_n} = f(x, y).$$

De aici rezultă uşor că F are ca derivată în punctul (x, y), pe $f(x, y)$, deci F este primitiva lui f pe domeniul D.

Să considerăm acum o funcţie f continuă pe D şi care nu mai este supusă la restricţia de a fi pozitivă pe D. Din faptul că D este compact, rezultă că f este mărginită pe D, deci există un număr real λ, astfel încît funcţia φ definită prin $\varphi(x, y) = f(x, y) + \lambda$ să fie pozitivă pe D. Conform celor demonstrate mai sus, rezultă că φ are primitivă pe D; fie Φ această primitivă. Avem deci

$$\frac{d\Phi}{dS} = \varphi(x, y) = f(x, y) + \lambda.$$

Să punem

$$F(G) = \Phi(G) - \lambda \cdot \text{aria } G,$$

oricare ar fi domeniul $G \subset D$.

Avem

$$\frac{dF}{dS} = \frac{d\Phi}{dS} - \lambda = \varphi(x, y) - \lambda = f(x, y),$$

deci F este primitiva lui f pe D.

a. Noţiune de integrală dublă

Fie f o funcţie reală, definită şi continuă pe domeniul compact D. Conform teoremei *2*, f admite primitivă pe D; fie F o astfel de primitivă. Conform teoremei 1, primitiva F a lui f este unic determinată. F este, deci, singura funcţie aditivă de domeniu, definită pe D şi astfel încît

$$\frac{dF}{dS} = f(x, y),$$

în orice punct din D. Valoarea $F(D)$ care corespunde, prin F, domeniului D, va fi, prin definiţie, *integrala funcţiei f pe domeniul D*. Această integrală se notează

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}S \text{ sau } \iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \text{ sau încă } \iint_D f(P)\mathrm{d}P, \tag{9}$$

deci avem, prin definiţie,

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}S = F(D), \tag{10}$$

f este *funcţia de integrat*, x şi y sînt *variabilele de integrare*, iar D este *domeniul de integrare*. Integrala funcţiei f pe domeniul D este un număr real care depinde exclusiv de f şi de D, deci este independentă de variabilele de integrare. Această integrală se numeşte, de obicei, *integrală dublă*.

Fie acum o funcţie reală f definită pe domeniul compact D. Dacă f admite primitivă aditivă pe D, atunci spunem că f este *integrabilă pe D, în sensul primitivei*, sau, dacă nu poate apărea vreo confuzie, spunem că este *integrabilă pe D*. Conform teoremei 1, o astfel de primitivă F este unic determinată. Valoarea $F(D)$ va fi, prin definiţie, *integrala lui f în sensul primitivei* şi se va nota ca mai sus. Rezultă că orice funcţie continuă pe D este integrabilă pe D.

b. Semnificaţia geometrică a integralei duble

Am văzut că dacă $f(x, y) \geqslant 0$ pe D, atunci primitiva funcţiei f pe D este volumul cilindroidului care se sprijină pe D şi este limitat superior de graficul funcţiei f. Rezultă deci că dacă $f(x, y) \geqslant 0$ pe domeniul D, atunci integrala (9) exprimă volumul acestui cilindroid.

Dacă $f(x, y) \leqslant 0$ pe D, atunci integrala (9) exprimă volumul aceluiaşi cilindroid, luat cu semnul minus. Dacă D se poate scrie ca reuniune a unui număr finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încît, pe fiecare dintre aceste domenii, f să aibă un semn constant, atunci integrala (9) reprezintă suma volumelor mai multor cilindroizi, volume luate cu semnul plus sau minus, după cum cilindroizii respectivi sînt situaţi deasupra sau dedesubtul planului xOy.

c. Semnificaţia fizică a integralei duble

Am văzut că densitatea punctuală a unei repartiţii superficiale de masă se obţine cu ajutorul noţiunii de derivată a unei funcţii de domeniu; anume, cunoscînd masa fiecărei porţiuni a domeniului D, densitatea într-un punct este derivata, în acest punct, a funcţiei care exprimă masa. Dacă ne punem acum problema inversă, şi anume, cunoscînd densitatea în fiecare punct al domeniului D, să determinăm masa domeniului, atunci, exprimînd prin $f(x, y)$ densitatea în punctul de coordonate x, y, masa $F(D)$ este dată tocmai de relaţia (10).

d. Proprietăţi generale ale integralei duble

1) $$\iint_D 1 \cdot dS = \iint_D dS = \text{aria } D.$$

Într-adevăr, este uşor de văzut că primitiva funcţiei f, definită prin $f(x, y) \equiv 1$, este funcţia aditivă de domeniu F, definită prin $S = F(G) = $ $=$ aria G, deoarece

$$\frac{dS}{dS} = \lim \frac{\Delta S}{\Delta S} = 1.$$

În cele ce urmează, f va fi considerată continuă pe D.

2) $$\iint_D Kf(x, y)dS = K\iint_D f(x, y)\, dS.$$

Aceasta este proprietatea de *omogenitate a integralei.*

Egalitatea rezultă din proprietăţile 1 şi 2 ale derivatei unei funcţii de domeniu.

3) $$\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y))\, dS = \iint_D f(x, y)\, dS \pm \iint_D g(x, y)\, dS.$$

Aceasta este proprietatea de *linearitate a integralei.*

Egalitatea rezultă din proprietăţile 3 şi 4 ale derivatei unei funcţii de domeniu. Proprietatea se extinde la orice sumă algebrică cu un număr finit de termeni.

4) *Dacă $D = D_1 \cup D_2$, unde D, D_1 şi D_2 sînt domenii compacte, iar D_1 şi D_2 sînt astfel încît aria $(D_1 \cap D_2) = 0$, atunci*

$$\iint_D f(x, y)\, dS = \iint_{D_1} f(x, y)\, dS + \iint_{D_2} f(x, y)\, dS.$$

Aceasta este proprietatea de *aditivitate a integralei ca funcţie de domeniu.* Ea se stabileşte ca o consecinţă a proprietăţii de aditivitate a primitivei lui f. Proprietatea se extinde şi la descompuneri ale domeniului D într-un număr finit oarecare de domenii compacte, fără puncte interioare comune.

5) *Dacă $f(x, y) \geqslant 0$, atunci*

$$\iint_D f(x, y)\, dS \geqslant 0.$$

Această proprietate rezultă din lema 2 de mai sus.

6) *Proprietatea de monotonie a integralei duble.* Dacă $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ peste tot pe domeniul D, atunci

$$\iint_D f(x, y)\, dS \leqslant \iint_D g(x, y)\, dS.$$

Într-adevăr, avem $g(x, y) - f(x, y) \geqslant 0$; aplicînd proprietatea 5, obținem:

$$\iint\limits_D [g(x, y) - f(x, y)]\, dS \geqslant 0,$$

deci, folosind proprietatea 3 de mai sus,

$$\iint\limits_D g(x, y)\, dS - \iint\limits_D f(x, y)\, dS \geqslant 0.$$

7) *Dacă* $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ *pe* D, *atunci*

$$m \cdot \text{aria } D \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\, dS \leqslant M \cdot \text{aria } D.$$

Într-adevăr, folosind proprietatea 6, obținem

$$\iint\limits_D m dS \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\, dS \leqslant \iint\limits_D M\, dS$$

și, folosind proprietatea 2, deducem

$$m \iint\limits_D dS \leqslant \iint\limits_D f(x, y) dS \leqslant M \iint\limits_D dS.$$

În baza proprietății 1, obținem inegalitățile dorite.

8) $$\left| \iint\limits_D f(x, y)\, dS \right| \leqslant \iint\limits_D \left| f(x, y) \right| dS.$$

Într-adevăr, avem

$$-|f(x, y)| \leqslant f(x, y) \leqslant |f(x, y)|$$

și, în baza proprietății 6, rezultă

$$-\iint\limits_D |f(x, y)|\, dS \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\, dS \leqslant \iint\limits_D |f(x, y)|\, dS,$$

de unde se obține ușor proprietatea dorită.

Teoremă de medie pentru integrala dublă. Dacă f este continuă pe domeniul compact D, atunci există un punct $(\xi, \eta) \in D$, astfel încît

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dS = f(\xi, \eta) \cdot \text{aria } D. \tag{11}$$

Demonstrație. Deoarece f este continuă pe D, iar D este compact, rezultă că f își atinge marginile pe D. Fie deci $(x_1, y_1) \in D$ și $(x_2, y_2) \in D$, astfel încît $f(x_1, y_1) = m$, $f(x_2, y_2) = M$, unde m şi M sînt marginile inferioară şi superioară pe D. În baza proprietăţii 7 de mai sus, avem

$$m \leqslant \frac{\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}S}{\text{aria } D} \leqslant M$$

şi deci, punînd

$$\frac{\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}S}{\text{aria } D} = \mu,$$

avem $m \leqslant \mu \leqslant M$. Să considerăm un drum $d = (r, \Gamma)$, unde

$$r : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

iar $\Gamma \subset D$, $x_1 = \varphi(\alpha)$, $y_1 = \psi(\alpha)$, $x_2 = \varphi(\beta)$, $y_2 = \psi(\beta)$. Existenţa unui drum cu aceste proprietăţi rezultă din însăşi definiţia noţiunii de domeniu. Aşadar, funcţia compusă h, definită de

$$h(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$$

este continuă pe $[\alpha, \beta]$. Însă din $f(x_1, y_1) = m$ rezultă $h(\alpha) = m$, iar din $f(x_2, y_2) = M$ rezultă $h(\beta) = M$. În baza proprietăţii lui Darboux a funcţiilor continue şi ţinînd seama că $m \leqslant \mu \leqslant M$, rezultă existenţa unei valori t_0, $\alpha \leqslant t_0 \leqslant \beta$, astfel încît $h(t_0) = \mu$, deci

$$f(\varphi(t_0), \psi(t_0)) = \mu.$$

Punînd $\xi = \varphi(t_0)$ şi $\eta = \psi(t_0)$, rezultă $f(\xi, \eta) = \mu$ şi, ţinînd seama că $\Gamma \subset D$, rezultă că $(\xi, \eta) \in D$. Formula (11) este astfel stabilită.

e. Reprezentarea integralei duble cu ajutorul sumelor de tip Riemann

Fie f continuă pe domeniul compact D. Fie $D_1, D_2, ..., D_i, ..., D_n$ un şir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, şi astfel încît

$$D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_i \cup ... \cup D_n. \tag{12}$$

Relaţia (12) *defineşte o descompunere δ a domeniului D. Cel mai mare dintre diametrii domeniilor $D_1, ..., D_i, ..., D_n$ se numeşte norma descompunerii δ şi va fi notat cu $\nu(\delta)$.*

Să considerăm, în fiecare domeniu D_i, cîte un punct $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ şi să formăm suma

$$f(\xi_1, \eta_1) \cdot \text{aria } D_1 + ... + f(\xi_n, \eta_n) \text{ aria } D_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria } D_i. \tag{13}$$

Suma (13) *este, prin definiție, o sumă riemanniană asociată funcției* f, *domeniului* D *și descompunerii* δ; anume, este suma care corespunde punctelor $\{(\xi_i, \eta_i)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Această sumă va fi notată prin

$$\sigma_\delta(f;\ \xi_i, \eta_i).$$

Cînd nu interesează să se pună în evidență punctele (ξ_i, η_i) vom nota o sumă riemanniană doar prin

$$\sigma_\delta(f),$$

iar cînd nu poate fi ambiguitate în ceea ce privește funcția la care se referă suma, vom omite pe f.

Dacă $f(x, y) \geqslant 0$ pe D, atunci suma (13) reprezintă volumul mulțimii formate prin reuniunea a n cilindroizi de bază $D_1, D_2, \ldots, D_n$ și avînd, respectiv, înălțimile egale cu $f(\xi_i, \eta_i)$, $f(\xi_2, \eta_2), \ldots, f(\xi_n, \eta_n)$.

Teorema de reprezentare a integralei duble prin sume riemanniene. Fie f continuă pe domeniul compact D. Fiecărui număr $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr $\eta > 0$, astfel, încît, de îndată ce $\nu(\delta) < \eta$, avem

$$\left|\sigma_\delta(f;\ \xi_i, \eta_i) - \iint_D f(x, y)\, dS\right| < \varepsilon, \tag{14}$$

oricare ar fi $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Demonstrație. În baza proprietății de aditivitate a integralei ca funcție de domeniu, avem

$$\iint_D f(x, y)\, dS = \iint_{D_1} f(x, y)\, dS + \iint_{D_2} f(x, y)\, dS + \ldots + \iint_{D_n} f(x, y)\, dS.$$

Fiecărei integrale din membrul al doilea îi vom aplica teorema de medie. Obținem astfel un șir de puncte $(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1), (\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2), \ldots, (\bar{\xi}_n, \bar{\eta}_n)$, cu proprietatea

$$\iint_{D_i} f(x, y)\, dS = f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i) \cdot \text{aria } D_i \ (1 \leqslant i \leqslant n),$$

deci

$$\iint_D f(x, y) dS = f(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1) \cdot \text{aria } D_1 + f(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2) \cdot \text{aria } D_2 + \ldots + f(\bar{\xi}_n, \bar{\eta}_n) \cdot \text{aria } D_n.$$

Avem, prin urmare,

$$\left|\sigma_\delta(f;\ \xi_i, \eta_i) - \iint_D f(x, y)\, dS\right| = \left|\sigma_\delta(f;\ \xi_i, \eta_i) - \sum_{i=1}^{n} f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i) \cdot \text{aria } D_i\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i, \eta_i) - f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)] \cdot \text{aria } D_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|f(\xi_i, \eta_i) - f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)\right| \cdot \text{aria } D_i. \tag{14'}$$

Deoarece f este continuă pe D, iar D este un domeniu compact, rezultă că f este uniform continuă pe D, deci, pentru $\varepsilon > 0$, există un număr $\eta > 0$, astfel încît, pentru $\nu(\delta) < \eta$, să avem

$$|f(\xi_i, \eta_i) - f(\overline{\xi_i}, \overline{\eta_i})| < \varepsilon.$$

Ţinînd seama de (14′), obţinem, pentru $\nu(\delta) < \eta$,

$$\left| \sigma_\delta(f;\ \xi_i,\ \eta_i) - \iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}S \right| < \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} \text{aria}\, D_i = \varepsilon \cdot \text{aria}\, D,$$

oricare ar fi $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

Observaţie. Proprietatea afirmată de teorema de mai sus este luată, de obicei, ca definiţie a noţiunilor de integrabilitate dublă şi integrală dublă. Mai precis, se utilizează următoarea

Definiţie a integralei duble cu ajutorul sumelor riemanniene. Fie f o funcţie reală, definită pe domeniul compact D. Să presupunem că există un număr real I cu următoarea proprietate: fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr $\eta > 0$, astfel încît, pentru orice descompunere δ de normă $\nu(\delta) < \eta$, să avem inegalitatea $|\sigma_\delta(f;\ \xi_i, \eta_i) - I\,| < \varepsilon$, oricare ar fi punctele $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. În aceste condiţii, spunem că f este integrabilă Riemann, iar numărul I se numeşte integrala Riemann a funcţiei f pe domeniul D. Se obişnuieşte să se scrie acest lucru în modul următor:

$$I = \lim_{\nu(\delta)\to 0} \sigma_\delta(f;\ \xi_i,\ \eta_i) = \iint_D f(x,\ y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \left(I = \iint_D f(P)\ \mathrm{d}P\right).$$

După cum se vede, această definiţie este similară definiţiei prin sume riemanniene date integrabilităţii şi integralei funcţiilor de o singură variabilă.

Teorema de mai sus arată că, pentru funcţii continue, cele două moduri de definire a integrabilităţii, în sensul primitivei şi cu ajutorul sumelor riemanniene, sînt echivalente. Aceasta ne permite ca, ori de cîte ori va fi vorba de funcţii continue, să nu mai fie nevoie să precizăm cu care tip de integrabilitate se lucrează.

În cazul funcţiilor continue de o singură variabilă, această echivalenţă este cunoscută din prima parte a manualului.

Însă de îndată ce se consideră funcţii discontinue, cele două tipuri de integrabilitate încetează de a fi echivalente.

f. Descompunerea unei integrale duble în integrale simple

Fie D_y un domeniu compact, definit de inegalităţile

$$a \leqslant x \leqslant b,$$

$$\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x), \tag{15}$$

unde φ şi ψ sînt funcţii continue pe $[a, b]$ şi $\varphi(x) < \psi(x)$ pentru $a < x < b$. Despre un astfel de domeniu spunem că este simplu în raport cu axa Oy.

Fie D_x un domeniu compact, definit de inegalităţile

$$c \leqslant y \leqslant d,$$

$$u(y) \leqslant x \leqslant v(y), \tag{16}$$

unde u şi v sînt funcţii continue pe $[c, d]$ şi $u(y) < v(y)$ pentru $c < y < d$. *Despre un astfel de domeniu spunem că este simplu în raport cu axa Ox.*

Un domeniu poate fi simplu în raport cu ambele axe. Un astfel de domeniu va fi notat, uneori, prin D_{xy}.

Fie f o funcţie reală, definită şi continuă pe domeniul compact D, pe care-l vom presupune simplu în raport cu axa Oy.

Lema 3. Funcţia f definită de

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy$$

este continuă pe $[a, b]$.

Demonstraţie. Să considerăm, pentru fiecare valoare a lui x, schimbarea de variabilă

$$y = g(x, t) = \varphi(x) + t(\psi(x) - \varphi(x)).$$

Avem

$$g(x, 0) = \varphi(x),\ g(x, 1) = \psi(x), \qquad \frac{\partial g}{\partial t} = \psi(x) - \varphi(x),$$

deci

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy = \int_0^1 f(x, \varphi(x) + t(\psi(x) - \varphi(x)))(\psi(x) - \varphi(x))\, dt.$$

Să notăm prin $h(x, t)$ funcţia care figurează sub integrala din al doilea membru. Funcţia h este continuă, în raport cu ansamblul argumentelor, pe domeniul din planul $x0t$ definit de inegalităţile:

$$a \leqslant x \leqslant b,$$

$$0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Avem deci

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy = \int_0^1 h(x, t)\, dt.$$

Însă, conform teoremei de continuitate a unei integrale cu parametru, funcţia H definită de

$$H(x) = \int_0^1 h(x, t)\, dt$$

este continuă pe $[a, b]$, deci, ţinînd seama că $F(x) \equiv H(x)$, rezultă că F este continuă pe $[a, b]$.

Lema 4. Dacă $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$, iar f este continuă peste tot pe domeniul D, simplu în raport cu axa Oy, atunci

$$m \cdot \text{aria } D \leqslant \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \leqslant M \cdot \text{aria } D. \tag{17}$$

Demonstraţie. În baza proprietăţii de monotonie a integralei, avem

$$m \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \mathrm{d}y \leqslant \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y \leqslant M \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \mathrm{d}y$$

sau

$$m(\psi(x) - \varphi(x)) \leqslant \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y \leqslant M(\psi(x) - \varphi(x)).$$

Inegalităţile (17) se obţin acum integrînd în raport cu x, de la a la b.

Teoremă de descompunere a integralei duble în integrale simple. Fie f o funcţie reală, definită şi continuă pe domeniul compact D, simplu în raport cu axa Oy. Fie φ şi ψ funcţiile date de (15), care definesc domeniul D. Avem:

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}S = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Să considerăm o descompunere δ a domeniului D, descompunere efectuată cu ajutorul unor drepte paralele de forma $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_n (x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b)$ şi a unor curbe definite prin relaţii de forma

$$y = \varphi_0(x),\ y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x),\ \dots,\ y = \varphi_n(x),$$

unde

$$\varphi_0(x) = \varphi(x),$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) + \frac{1}{n}(\psi(x) - \varphi(x)),$$

$$\varphi_2(x) = \varphi(x) + \frac{2}{n}(\psi(x) - \varphi(x)),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_n(x) = \varphi(x) + \frac{n}{n}(\psi(x) - \varphi(x)) = \psi(x).$$

O reprezentare geometrică a descompunerii δ este dată în figura 10.

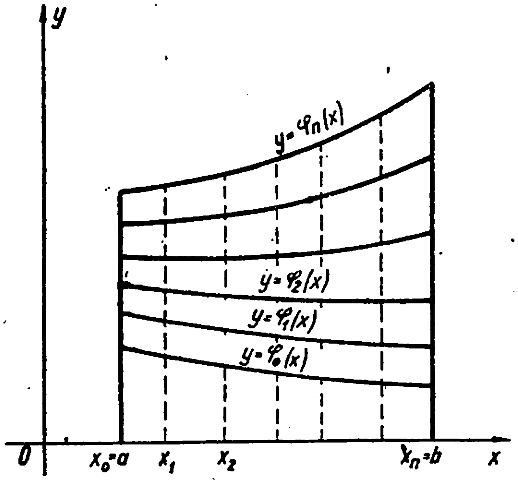


Fig. 10

În baza proprietății de aditivitate a integralei ca funcție de interval, avem:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx. \tag{18}$$

Însă, folosind din nou aditivitatea integralei ca funcție de interval, avem:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y)\, dy + \right.$$

$$\left. + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy + \ldots + \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n(x)} f(x, y)\, dy \right] dx$$

și, în baza proprietății de linearitate a integralei, obținem

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y)\, dy \right) dx +$$

$$+ \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx + \ldots + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\int_{\varphi_{n-1}(x)}^{\varphi_n(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

De aici, în baza egalității (17), rezultă

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(\int_{\varphi_{l-1}(x)}^{\varphi_l(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Fiecărui termen al sumei duble din membrul al doilea i se poate aplica lema 4.

Să notăm cu m_{kl} și M_{kl} marginile inferioară și superioară ale funcției f pe domeniul compact D_{kl}, definit de inegalitățile

$$x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k,$$

$$\varphi_{l-1}(x)\leqslant y\leqslant\varphi_l(x).$$

În baza lemei 4, obținem

$$m_{kl}\cdot \text{aria } D_{kl}\leqslant\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(\int_{\varphi_{l-1}(x)}^{\varphi_l(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\leqslant M_{kl}\cdot \text{aria } D_{kl}$$

și, însumînd în raport cu l și k, rezultă

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} m_{kl}\text{ aria } D_{kl}\leqslant\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} M_{kl}\cdot\text{aria } D_{kl}. \tag{19}$$

Deoarece f este continuă pe D_{kl}, iar D_{kl} este compact, rezultă că m_{kl} și M_{kl} sînt valori ale funcției f pe D_{kl}, deci sumele duble din (19) sînt sume riemanniene asociate funcției f și descompunerii δ. Evident, $\nu(\delta)$ tinde la zero cînd $n\to\infty$, deci, în baza teoremei de reprezentare a integralei duble prin sume riemanniene, rezultă, prin trecere la limită, pentru $n\to\infty$, în (19),

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}S\leqslant\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\leqslant\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}S$$

și teorema este demonstrată.

Observații. 1) Dacă, în loc de a se considera un domeniu simplu în raport cu Oy, se consideră un domeniu D simplu în raport cu Ox, așa cum este el definit de inegalitățile (15), atunci, schimbînd în demonstrația teoremei de mai sus rolurile lui x și y, se obține

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}S=\int_c^d\left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \tag{20}$$

2) De obicei, se folosește următoarea notație:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \right) dx,$$

$$\int_c^b dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y)\,dx = \int_c^d \left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y)\,dx \right) dy.$$

E x e m p l e. 1) *Să se calculeze volumul V al cilindroidului limitat superior de paraboloidul $z = x^2 + y^2$, iar inferior de domeniul dreptunghiular D situat în planul xOy și definit de inegalitățile* $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ (fig. 11).

Soluție. Aplicînd teorema de descompunere, obținem

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\,dS = \int_0^1 \left(\int_{-1}^{+1} (x^2 + y^2)\,dy \right) dx.$$

Însă

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + y^2)\,dy = x^2y + \frac{y^3}{3}\Bigg|_{y=-1}^{y=1} = 2x^2 + \frac{2}{3},$$

deci

$$V = \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{2}{3}\right) dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

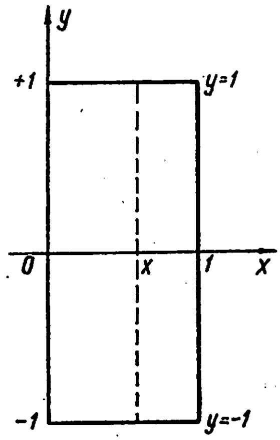


Fig. 11

2) *Să se calculeze volumul V al cilindroidului limitat superior de paraboloidul hiperbolic $z = xy$ și avînd ca bază domeniul mărginit D din planul xOy, a cărui frontieră este dată de parabolele*

$$y = \frac{1}{2}x^2,\ y = x^2,$$

și de dreptele $x = 1$, $x = 2$ (v. fig. 12).

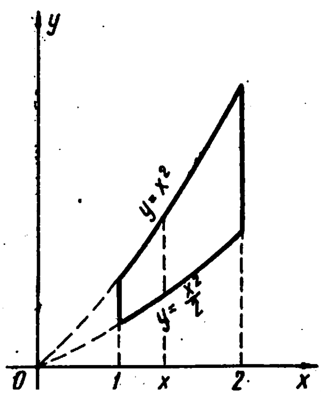


Fig. 12

Soluție. Aplicînd teorema de descompunere, obținem

$$V = \iint_D xy\,dS = \int_1^2 \left(\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} xy\,dy \right) dx.$$

Însă

$$\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} xy\,dy = \frac{xy^2}{2}\Bigg|_{y=\frac{x^2}{2}}^{y=x^2} = \frac{x^5}{2} - \frac{x^5}{8} = \frac{3}{8}x^5,$$

deci

$$V = \int_1^2 \frac{3}{8} x^5 \mathrm{d}x = \frac{x^6}{16}\Big|_1^2 = 4 - \frac{1}{16} = \frac{63}{16}.$$

3) *Să se calculeze*

$$I = \iint_D (x - y)\,\mathrm{d}S,$$

unde domeniul mărginit D este limitat de dreptele $y = -1$, $y = 1$, $y = x + 1$ şi de parabola $x = y^2$ (fig. 13).

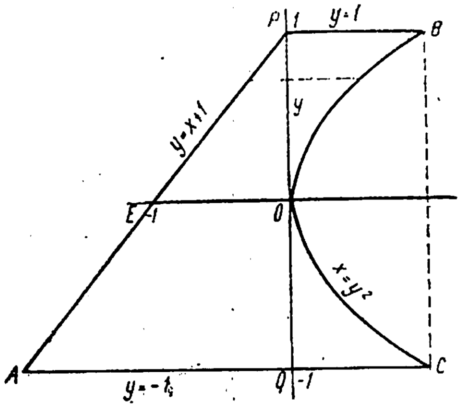


Fig. 13

Soluţie. Aplicînd teorema de descompunere, sub forma (20), separat, fiecăruia dintre domeniile $EPBO$ şi $AEOC$, simple în raport cu ambele axe, obţinem

$$V = \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{y^2} (x - y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y + \int_{-1}^0 \left(\int_{y-1}^{y^2} (x - y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \left(\int_{y-1}^{y^2} (x - y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Însă

$$\int_{y-1}^{y^2} (x - y)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - xy\right)\Big|_{x=y-1}^{x=y^2} = \frac{y^4}{2} - y^3 + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2},$$

deci

$$I = \int_{-1}^1 \left(\frac{y^4}{2} - y^3 + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}y = \frac{y^5}{10} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{6} - \frac{y}{2}\Big|_{-1}^1 = -\frac{7}{15}.$$

g. Un mod de aproximare a unei integrale duble

P r o p o z i ţ i a 1. Imaginea unei curbe rectificabile are arie nulă.

D e m o n s t r a ţ i e. Fie Γ imaginea unei curbe r rectificabile şi fie s lungimea lui r. Fie $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ reprezentarea r. Vom considera o diviziune $\Delta = (a = t_0 < t_1 < ... < t_i < t_{i+1} < ... < t_n = b)$, cu proprietatea următoare: curba (r_i, Γ_i) definită de

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned}, \quad t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$$

are lungimea egală cu $\frac{s}{n}$, oricare ar fi i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Fie P_i un punct aparţinînd lui Γ_i. Fie $\mathfrak{K}_i$ pătratul cu centrul în P_i, cu laturi paralele cu axele de coordonate şi de lungime egală cu $\frac{2s}{n}$. Este clar că

$$\Gamma_i \subset \mathfrak{K}_i, \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1),$$

deci

$$\Gamma \subset \bigcup_{i=1} \mathfrak{K}_i.$$

Însă punînd

$$\mathfrak{K} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{K}_i,$$

avem

$$\text{aria } \mathfrak{K} \leqslant n . \left(\frac{2s}{n}\right)^2 = \frac{4s^2}{n}.$$

Fie acum un număr $\varepsilon > 0$. Să alegem numărul natural n în aşa fel încît

$$n > \frac{4s^2}{\varepsilon}.$$

Rezultă că

$$\text{aria } \mathfrak{K} < \varepsilon,$$

deci, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un domeniu poligonal $\mathfrak{K}$ care acoperă pe Γ şi are arie mai mică decît ε. Γ este deci de arie nulă.

Propoziţia 2. Fie (r_n, Γ_n) un şir de curbe poligonale înscrise în curba (r, Γ) închisă, rectificabilă, fără puncte duble şi astfel încît, însemnînd cu ν_n lungimea celei mai mari laturi a lui Γ_n, să avem

$$\lim_{n \to \infty} \nu_n = 0.$$

În asemenea condiţii, avem

$$\lim_{n \to \infty} \text{aria } D_n = \text{aria } D,$$

unde D este domeniul limitat de Γ, iar D_n domeniul închis de Γ_n.

Din propoziţia 1 rezultă că Γ are arie nulă, deci D are arie.

Fie ε un număr pozitiv şi s lungimea curbei Γ. Dacă punem

$$\mu = E\left(\frac{s}{\varepsilon}\right),$$

putem închide imaginea Γ într-un număr de $\mu + 1$ pătrate de latură ε. Dacă Q este suma ariilor acestor pătrate, avem

$$Q = (\mu + 1)\varepsilon^2,$$

deci

$$s \cdot \varepsilon < Q \leqslant \left(\frac{s}{\varepsilon} + 1\right)\varepsilon^2 = (s + \varepsilon) \cdot \varepsilon.$$

Pe de altă parte, putem determina un număr natural $N = N(\varepsilon)$, astfel încît să avem

$$\nu_n < \varepsilon,$$

îndată ce $n > N$. Pentru aceste valori ale lui n, fiecare pătrat-frontieră K va conţine cel puţin două vîrfuri consecutive ale lui Γ_n, iar, pe de altă parte, un vîrf consecutiv unui vîrf aflat într-un pătrat K se afla, sigur, în interiorul unui pătrat concentric cu K, de latură 3. De aici rezultă că linia poligonală Γ_n va fi sigur acoperită de $\mu + 1$ pătrate de latură 3ε, de arie totală mai mică decît $9(s + \varepsilon)\varepsilon$.

Dacă ţinem seama de faptul că aceste pătrate acoperă şi pe Γ, rezultă că vom avea

$$|\text{aria } D - \text{aria } D_n| < 9(s + \varepsilon)\varepsilon,$$

ceea ce demonstrează lema enunţată.

T e o r e m a 3. În condiţiile specificate în propoziţia 2, avem

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(P)\, \mathrm{d}P = \iint_D f(P)\, \mathrm{d}P,$$

***f* fiind o funcţie integrabilă într-un interval conţinînd domeniul *D*.**

Într-adevăr, însemnînd cu R_n aria domeniilor, în număr finit, cuprinse între Γ şi Γ_n, şi cu δ_i, $(i = 1, 2, \ldots, \mu + 1)$ aceste domenii, avem

$$\left|\iint_D f(P)\, \mathrm{d}P - \iint_{D_n} f(P)\, \mathrm{d}P\right| < \sum_{i=1}^{\mu+1} \iint_{\delta_i} f(P)\, \mathrm{d}P,$$

de unde, însemnînd cu M marginea superioară a lui $|f|$,

$$\left|\iint_D f(P)\, \mathrm{d}P - \iint_{D_n} f(P)\, \mathrm{d}P\right| < M \sum_{i=1}^{\mu+1} \text{aria } \delta_i < 9M(s + \varepsilon)\varepsilon,$$

ceea ce demonstrează teorema.

h. Noţiunea de domeniu orientat

Orientarea unui domeniu triunghiular. Vom considera, în planul xOy, triunghiul T_1 cu vîrfurile în punctele $A_0(0, 0)$, $A_1(1, 0)$, $A_2(0, 1)$ (fig. 14) şi îl vom numi *triunghiul unitate.* Vom înţelege prin *orientarea pozitivă a triunghiului unitate* următoarea relaţie de ordine $<$ definită pe mulţimea vîrfurilor sale:

$$A_0 < A_1 < A_2.$$

Să considerăm acum, în planul xOy, un domeniu triunghiular arbitrar T, definit de punctele M_1, M_2 şi M_3. Să ne dăm o relaţie de ordine pe mulţimea acestor vîrfuri, definită în felul următor:

$$M_1 < M_2 < M_3.$$

Să considerăm o deplasare (adică o transformare ortogonală cu determinantul egal cu 1) care aduce punctul M_1 în originea axelor, iar punctul M_2 pe semiaxa pozitivă a absciselor. Dacă, în aceste condiţii, punctul M_3 se situează în semiplanul superior, atunci spunem că domeniul T *este orientat*

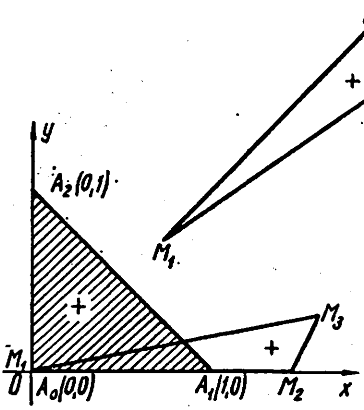


Fig. 14

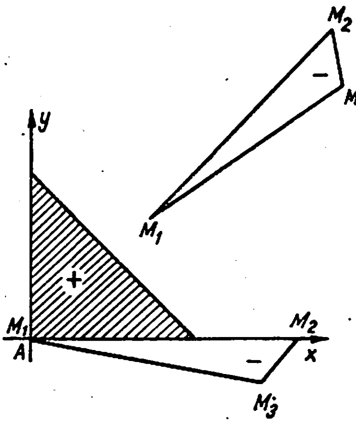


Fig. 15

pozitiv prin relaţia $<$ (fig 14); dacă M_3 se situează în semiplanul inferior, atunci spunem că T *este orientat negativ* (fig. 15). După cum se ştie din geometria analitică, determinantul

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$$

este pozitiv (negativ) dacă triunghiul $M_1(a_1, b_1)$, $M_2(a_2, b_2)$, $M_3(a_3, b_3)$ este orientat pozitiv (negativ).

Orientarea unui domeniu poligonal, a cărui frontieră este imaginea unei curbe simple şi închise. Mai întîi, observăm că dacă două domenii triunghiulare au o latură comună, dar n-au puncte interioare comune, atunci cele două domenii nu pot fi orientate pozitiv decît dacă latura comună

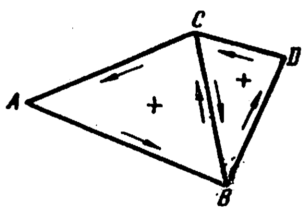


Fig. 16

primeşte sensuri diferite în cele două triunghiuri (fig. 16). Într-adevăr, dacă latura BC ar avea în ambele triunghiuri aceeaşi orientare, de exemplu de la B spre C, atunci, aducînd printr-o deplasare punctul B în origine, iar punctul C pe semiaxa pozitivă a axei Ox, punctele A şi D se vor situa de o parte şi de alta a axei Ox, ceea ce contrazice faptul că ambele triunghiuri sînt orientate pozitiv.

Fie acum un domeniu poligonal D a cărui frontieră este imaginea unei curbe simple închise. Să considerăm o descompunere a acestui domeniu într-un număr finit de triunghiuri fără puncte interioare comune şi să orientăm pozitiv fiecare dintre aceste triunghiuri (fig. 17). Aceste orientări pozitive ale triunghiurilor induc, pe mulţimea vîrfurilor domeniului poligonal dat, o relaţie de ordine $<$, care defineşte *orientarea pozitivă a domeniului D.* În geometrie se demonstrează că orientarea pozitivă a domeniului D nu depinde de modul în care D este descompus în triunghiuri.

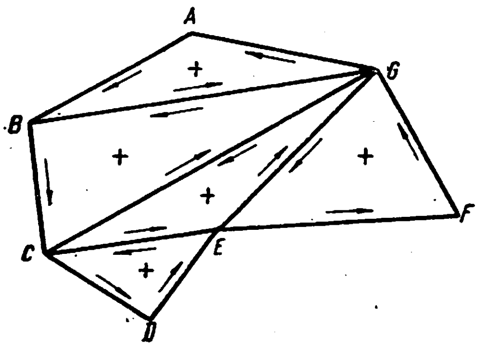


Fig. 17

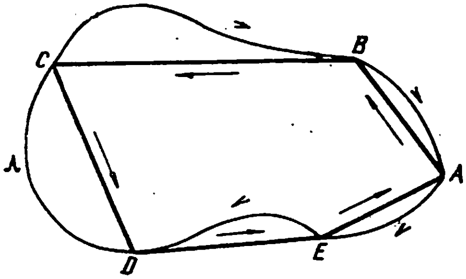


Fig. 18

Orientarea unui domeniu Δ a cărui frontieră este imaginea unei curbe simple, închise şi rectificabile. Vom spune că Δ este orientat pozitiv dacă pe mulţimea Fr. Δ s-a definit o relaţie de ordine $<$ compatibilă cu orice relaţie de ordine $\rightarrow$ definită pe mulţimea vîrfurilor unui poligon P, înscris în Δ, astfel încît Fr. P să fie imaginea unei curbe simple şi închise, iar $\rightarrow$ să inducă o orientare pozitivă pentru P. Cu alte cuvinte, dacă P are vîrfurile A, B, C, D, E, iar relaţia de ordine $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ defineşte orientarea pozitivă a lui P, atunci avem $A < B < C < D < E$; reciproc, dacă A, B, C, D, E sînt puncte din Fr. Δ pentru care $A < B < C < D < E$, atunci, în orientarea pozitivă a poligonului $ABCDE$, avem $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ (fig. 18). Se ştie pe de altă parte că Fr. Δ este imaginea unei curbe de tipul $\begin{cases} x = f(t) \\ g = y(t) \end{cases}$ $a \leqslant t \leqslant b$, unde $f(a) = f(b)$, $g(a) = g(b)$, iar curba n-are puncte multiple. Ordinea definită de relaţia „mai mic" în [a, b] induce o ordine $<$ pe Fr · Δ, aceeaşi cu ordinea definită mai sus, a orientării pozitive.

Cazul particular al unui domeniu simplu. Fie D_y un domeniu simplu în raport cu axa O_y, deci definit de inegalități de tipul (14) (fig. 19). Orientarea pozitivă a domeniului D_y este complet caracterizată de ordinea $A < B < B_1 < A_1$. Într-adevăr, patrulaterul ABB_1A_1 este orientat pozitiv dacă și numai dacă $A \to B \to B_1 \to A_1$; orice alt poligon pozitiv orientat, înscris în D_y, induce pe Fr. D_y aceeași orientare.

O situație asemănătoare o prezintă domeniile simple în raport cu Ox.

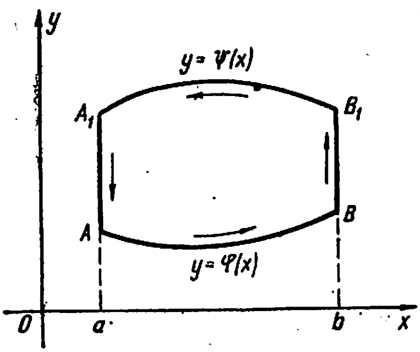


Fig. 19

i. Formula lui Green

Vom studia acum legătura dintre integrala dublă și integrala curbilinie. Într-o primă etapă, vom trata această problemă pentru domenii simple; apoi vom transfera rezultatele la domenii care se descompun într-un număr finit de domenii simple, urmînd ca, într-o a treia etapă, să considerăm domenii avînd drept frontieră o curbă rectificabilă.

Fie D_y un domeniu compact situat în planul xOy. Să presupunem că D_y este simplu în raport cu axa Oy. Domeniul D_y este deci definit de inegalitățile (15); a se vedea și figura 19.

În cele ce urmează pentru a însemna că o integrală curbilinie este luată de-a lungul unei curbe r — frontieră a unui domeniu D, care induce o orientare pozitivă pentru D, vom folosi uneori notația

$$\oint_r .$$

Lema 5. **Fie P o funcție reală, continuă pe D_y. Să presupunem că P este derivabilă parțial, în raport cu y, pe D_y, iar derivata parțială $\frac{\partial P}{\partial y}$ este continuă pe D_y. În aceste condiții, avem:**

$$\iint_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\oint_r P(x, y)\, dx \qquad (20')$$

unde prin r s-a notat curba care se obține ca reuniune a curbelor simple $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BB_1}$, $\overset{\frown}{B_1A_1}$ și $\overset{\frown}{A_1A}$, unde $\overset{\frown}{AB}$ este dat de $x = t$, $y = \varphi(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, $\overset{\frown}{A_1B_1}$ este dat de $x = t$, $y = \psi(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, $\overset{\frown}{AA_1}$ și $\overset{\frown}{BB_1}$ sînt curbe arbitrare care au ca imagine segmentele de dreaptă $\overline{AA_1}$, respectiv $\overline{BB_1}$, iar $\overset{\frown}{B_1A_1}$ și $\overset{\frown}{A_1A}$ sînt curbe care se obțin din $\overset{\frown}{A_1B_1}$ și $\overset{\frown}{AA_1}$ cînd se inversează orientarea (este ușor de văzut că aceste curbe sînt juxtapuse: a se vedea fig. 19).

Demonstrație. Integralei din primul membru al formulei (20′) i se poate aplica teorema de descompunere a unei integrale duble în integrale simple și obținem

$$\iint\limits_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Aplicînd formula lui Leibniz-Newton, obținem

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y = P(x,\ \psi(x)) - P(x,\ \varphi(x)),$$

deci

$$\iint\limits_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_a^b P(x,\ \psi(x))\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b P(x,\ \varphi(x))\,\mathrm{d}x. \tag{21}$$

Însă curba $\widehat{AB}$ este definită de reprezentarea parametrică

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= \varphi(t), \end{aligned} \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

deci, după însăși definiția integralei curbilinii, avem (22)

$$\iint\limits_{\widehat{AB}} P(x,\ y)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b P(t,\ \varphi(t))\,\mathrm{d}t.$$

Curba $\widehat{A_1B_1}$ este definită de reprezentarea parametrică

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

deci

$$\int\limits_{\widehat{A_1B_1}} P(x,\ y)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b P(t,\ \psi(t))\,\mathrm{d}t. \tag{23}$$

În orice reprezentare parametrică a segmentelor $\overline{BB_1}$ și $\overline{AA_1}$, funcția care dă abscisa este constantă, deci, indiferent de această reprezentare,

$$\int\limits_{\overline{BB_1}} P(x,\ y)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \int\limits_{\overline{AA_1}} P(x,\ y)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{24}$$

deoarece o integrală Stieltjes în raport cu o funcție constantă este totdeauna egală cu zero.

Din (22), (23) şi (24) rezultă, prin aplicarea proprietăţii de aditivitate a integralei curbilinii ca funcţie de curbă,

$$\curvearrowleft\oint_{r} P(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} P(t, \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_{a}^{b} P(t, \psi)(t))\,\mathrm{d}t,$$

deci, ţinînd seama de (21), se obţine formula (20′).

Lema 6. **Fie Q o funcţie reală, continuă pe domeniul compact D_x, simplu în raport cu axa O_x, deci definit de inegalităţile (15) (v. şi fig. 20). Să presupunem că Q este derivabilă, parţial, în raport cu x, pe D_x, iar derivata parţială $\frac{\partial Q}{\partial x}$ este continuă pe D_x. În aceste condiţii avem**

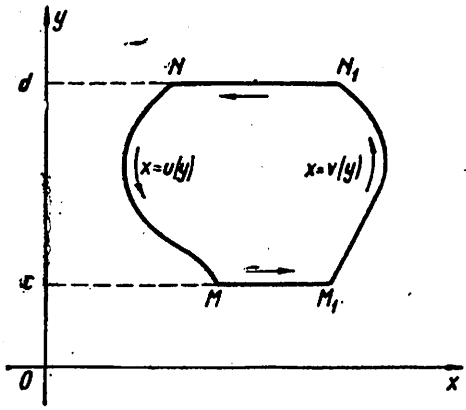


Fig. 20

$$\iint_{D_x} \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \curvearrowleft\oint_{r} Q(x, y)\,\mathrm{d}y, \qquad (25)$$

unde prin r s-a notat curba care se obţine ca reuniune a curbelor simple $\widehat{MM_1}$, $\widehat{M_1N_1}$, $\widehat{N_1N}$ şi $\widehat{NM}$, unde $\widehat{MN}$ este definită de $x = u(t)$, $y = t(c \leqslant t \leqslant d)$, $\widehat{M_1N_1}$ este definită de $x = v(t)$, $y = t(c \leqslant t \leqslant d)$, $\widehat{MM_1}$ şi $\widehat{NN_1}$ sînt curbe arbitrare care au ca imagini segmentele de dreaptă $\overline{MM_1}$, respectiv $\overline{NN_1}$, iar $\widehat{NM}$ şi $\widehat{N_1N}$ sînt curbele care se obţin din $\widehat{MN}$ şi $\widehat{NN_1}$ prin inversarea orientării (este uşor de văzut că aceste curbe sînt juxtapuse; fig. 20).

Demonstraţie. Integralei din primul membru al formulei (25) i se poate aplica teorema de descompunere a unei integrale duble în integrale simple şi obţinem

$$\iint_{D_x} \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{c}^{d} \mathrm{d}y \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x.$$

Aplicînd formula lui Leibniz-Newton, obţinem

$$\int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x = Q(v(y), y) - Q(u(y), y), \qquad (26)$$

iar din (26) deducem

$$\iint_{D_x} \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{c}^{d} Q(v(y), y)\,\mathrm{d}y - \int_{c}^{d} Q(u(y), y)\,\mathrm{d}y. \qquad (27)$$

Însă curba $\overset{\frown}{MN}$ este definită de reprezentarea parametrică

$$\begin{aligned} x &= u(t), \\ y &= t, \end{aligned} \quad (c \leqslant t \leqslant d)$$

deci, după însăși definiția integralei curbilinii, avem

$$\int_{\overset{\frown}{MN}} Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d Q(u(t), t)\,\mathrm{d}t. \tag{28}$$

Curba $\overset{\frown}{M_1N_1}$ este definită de reprezentarea parametrică

$$\begin{aligned} x &= v(t), \\ y &= t, \end{aligned} \quad (c \leqslant t \leqslant d),$$

deci

$$\int_{\overset{\frown}{M_1N_1}} Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d Q(v(t), t)\,\mathrm{d}t. \tag{29}$$

În orice reprezentare parametrică a segmentelor $\overline{MM_1}$ și $\overline{NN_1}$, funcția care dă abscisa este constantă, deci indiferent de această reprezentare,

$$\int_{\overset{\frown}{MM_1}} Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0, \quad \int_{\overline{NN_1}} Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0, \tag{30}$$

deoarece o integrală Stieltjes în raport cu o funcție constantă este totdeauna egală cu zero.

Din (28), (29) și (30) rezultă, prin aplicarea proprietății de aditivitate a integralei curbilinii ca funcție de curbă,

$$\oint_r Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d Q(v(t), t)\,\mathrm{d}t - \int_c^d Q(u(t), t)\,\mathrm{d}t,$$

deci, ținînd seama de (27), se obține formula (25).

T e o r e m ă (formula lui Green pentru domenii simple). Fie D un domeniu compact, simplu în raport cu ambele axe. Fie P și Q două funcții reale, continue pe D. Să presupunem că derivatele parțiale $\frac{\partial P}{\partial y}$ și $\frac{\partial Q}{\partial x}$ există și sînt continue pe D și să notăm cu r curba care se obține reunind curbele $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BB_1}$, $\overset{\frown}{B_1A_1}$, $\overset{\frown}{A_1A}$ sau curbele $\overset{\frown}{NM}$, $\overset{\frown}{MM_1}$, $\overset{\frown}{M_1N_1}$, $\overset{\frown}{N_1N}$, definite ca în cele două teoreme precedente. (Se poate arăta că

fiecare dintre aceste reuniuni furnizează aceeaşi curbă). În aceste condiţii avem

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_\Gamma P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{31}$$

D e m o n s t r a ţ i e. Deoarece sînt îndeplinite atît ipotezele din lema 5 cît şi ipotezele din lema 6, rezultă că au loc formulele (20′) şi (25), cu $D_x = D_y = D$. Adunînd membru cu membru aceste formule, rezultă formula (31).

Cum se orientează un domeniu care se descompune într-un număr finit de domenii simple. Să considerăm acum, în planul xOy, un domeniu compact D, care se poate scrie sub forma

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n,$$

unde $D_1, D_2, \ldots, D_n$ sînt domenii compacte, simple în raport cu ambele axe de coordonate şi fără puncte interioare comune două cîte două.

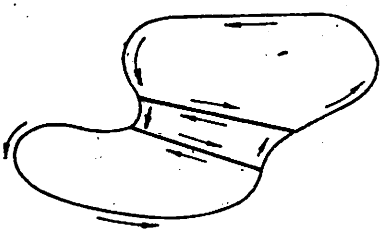


Fig. 21

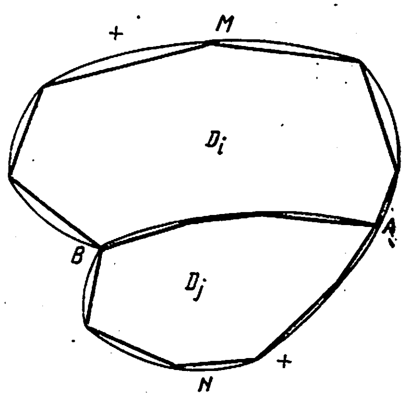


Fig. 22

Să presupunem că fiecare dintre domeniile $D_1, D_2, \ldots, D_n$ este orientat pozitiv. O curbă r_1 care aparţine frontierei comune a două domenii D_i şi D_j este conţinută (cu excepţia eventuală a extremităţilor sale) în interiorul domeniului D. Orientarea pozitivă a domeniilor D_i şi D_j induce, pe r_1, două sensuri opuse (fig. 21). Într-adevăr, să presupunem, că D_i şi D_j au ca frontieră curbele $\widehat{AMB}$ şi $\widehat{ABN}$ (fig. 22). Dacă (în particular) aceste curbe sînt linii poligonale, atunci orice triangulaţie a poligoanelor D_i şi D_j induce, pe laturile comune la două triunghiuri, două sensuri opuse. În această situaţie se află şi laturile liniei poligonale AB. Dacă cel puţin unul dintre domeniile simple D_i, D_j nu este poligonal, atunci înscriem în D_i şi D_j cîte un domeniu poligonal, astfel încît frontiera comună acestor două domenii poligonale să aibă vîrfurile situate pe curba $\widehat{AB}$. Vîrfurile situate pe $\widehat{AB}$ se vor succede în ordine diferită, după cum sînt considerate în raport cu D_i sau D_j. Deci, şi în acest caz, orientarea pozitivă a lui D_i şi D_j induce pe $\widehat{AB}$ două sensuri opuse; rămîn orientările de-a lungul lui $\widehat{AMB}$ şi $\widehat{BNA}$, care induc orientarea pozitivă a domeniului obţinut prin reuniunea lui D_i cu D_j.

Revenind acum la domeniul D, constatăm, pe baza analizei întreprinse mai sus, pentru două domenii vecine arbitrare, că orientarea pozitivă a domeniilor D_1, D_2, ..., D_n induce pe frontiera domeniului D un sens bine determinat, pe care-l vom numi *sensul pozitiv*. Despre domeniul D spunem că a fost *orientat pozitiv*.

Teoremă (formula lui Green pentru domenii care se descompun într-un număr finit de domenii simple). Fie D un domeniu compact, astfel încît

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n.$$

unde $D_1, D_2, \dots, D_n$ sînt domenii compacte, simple în raport cu ambele axe şi fără puncte interioare comune. Fie P şi Q două funcţii continue pe D. Să presupunem că derivatele parţiale $\frac{\partial P}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x}$ există şi sînt continue pe D. În aceste condiţii, avem

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_\Gamma P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y, \tag{32}$$

unde Γ reprezintă reuniunea acelor curbe din definiţia domeniilor D_i, care sînt curbe frontieră pentru D.

Demonstraţie. Conform teoremei precedente, putem aplica formula lui Green fiecăruia dintre domeniile D_i. Obţinem astfel n relaţii; adunîndu-le membru cu membru şi ţinînd seama de proprietatea de aditivitate a integralei duble ca funcţie de domeniu, precum şi de discuţia de mai sus asupra orientării lui D, căpătăm tocmai relaţia (32).

Corolar. Un domeniu triunghiular este simplu în raport cu ambele axe. Deoarece orice domeniu poligonal şi compact este o reuniune finită de domenii triunghiulare compacte, fără puncte interioare comune, rezultă că teorema de mai sus şi, implicit, formula lui Green se aplică oricărui domeniu poligonal şi compact.

Teoremă. (Formula lui Green pentru domenii avînd ca frontieră o curbă simplă, închisă şi rectificabilă). Fie P şi Q două funcţii reale, continue pe domeniul compact D, avînd ca frontieră o curbă Γ simplă, închisă şi rectificabilă. Să presupunem că derivatele parţiale $\frac{\partial P}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x}$ există şi sînt continue pe D. În aceste condiţii avem

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_\Gamma P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y. \tag{33}$$

Demonstrație. Conform unei teoreme din teoria integralei curbilinii, există un şir $\{L_n\}$ de curbe poligonale simple, închise, înscrise în r şi astfel încît

$$\lim \int\!\!\!\!\!\!\!\circlearrowleft_{L_n} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\!\!\!\!\!\!\!\circlearrowleft_{r} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{34}$$

Conform teoremei lui Jordan pentru curbe poligonale (v. capitolul X), există, pentru fiecare număr natural n, un domeniu compact D_n avînd ca frontieră imaginea lui L_n. Conform unei teoreme din teoria integralei duble, avem

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{35}$$

Dar, în baza corolarului anterior, formula lui Green se aplică domeniului $D_n (1 \leqslant n < \infty)$. Avem deci

$$\iint_{D_n} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\!\!\!\!\!\!\!\circlearrowleft_{L_n} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \; (1 \leqslant n < \infty). \tag{36}$$

Din (34), (35) şi (36) rezultă relaţia (33) şi teorema este stabilită.

Corolar. Formula lui Green se extinde, în aceleaşi condiţii pentru funcţiile P şi Q, la domenii compacte care se descompun într-un număr finit de domenii compacte fără puncte interioare comune şi avînd drept frontieră curbe simple, închise şi rectificabile.

Demonstrație. Se foloseşte raţionamentul prin care formula lui Green a fost extinsă de la domenii simple la domenii care se descompun într-un număr finit de domenii simple.

Observații. Formula lui Green pentru domenii cu frontieră rectificabilă *nu* constituie o generalizare a formulei lui Green pentru domenii simple, după cum nici aceasta din urmă nu constituie o generalizare a celei dintîi. Într-adevăr din faptul că există funcţii continue care nu sînt cu variaţie mărginită rezultă că există domenii simple a căror frontieră nu este rectificabilă. Pe de altă parte, este evident că există domenii cu frontieră rectificabilă care nu sînt simple. Mai mult decît atît, se poate arăta că există domenii cu frontieră rectificabilă care nu se pot descompune într-un număr finit de domenii simple; există domenii simple care nu se pot descompune într-un număr finit de domenii cu frontieră rectificabilă.

Orice domeniu căruia i se poate aplica formula lui Green va fi numit, în cele ce urmează, un *domeniu de tip Green* sau — pe scurt — *un domeniu Green.* Cunoaştem deci următoarele tipuri de domenii Green: 1) domenii compacte care se descompun într-un număr finit de domenii simple în raport cu ambele axe; 2) domenii compacte care se descompun într-un număr finit de domenii cu frontieră rectificabilă.

j. Exprimarea ariei unui domeniu cu ajutorul unei integrale curbilinii

Fie D un domeniu Green şi fie (r, Γ) o curbă pentru care Γ este frontiera lui D. În ipoteza că D are arie (toate tipurile de domenii Green considerate pînă aici îndeplinesc această ipoteză), aria sa se poate exprima cu ajutorul unei integrale curbilinii de-a lungul curbei (r, Γ). Într-adevăr, dacă D are arie, atunci

$$\text{aria } D = \iint_D 1 \cdot \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

şi, aplicînd formula lui Green, obţinem, ţinînd seama că P şi Q trebuie astfel alese încît

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1,$$

următoarea expresie a ariei lui D:

$$\text{aria } D = \frac{1}{2} \curvearrowleft\!\!\!\oint_r x\mathrm{d}y - y\, \mathrm{d}x.$$

$$\left(\text{S-a luat } P(x, y) = -\frac{y}{2},\ Q(x, y) = \frac{x}{2}.\right) \qquad (37)$$

Iată o ilustrare a formulei obţinute.
Fie curba

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t, \end{aligned} \qquad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

care, după cum se ştie, are ca imagine un sfert de elipsă (fig. 23). Domeniul D, delimitat de această curbă şi de axele de coordonate, este simplu în raport cu ambele axe, deci este un domeniu Green. Avem, notînd cu r curba obţinută ca reuniune a curbelor $\widehat{OA}$, $\widehat{AB}$, şi $\widehat{BO}$, unde $\widehat{OA}$ e dată de $x = t$, $y = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant a)$, $\widehat{AB}$ e dată de (37) iar BO e dată de $x = 0$, $y = t$ $(b \geqslant t \geqslant 0)$,

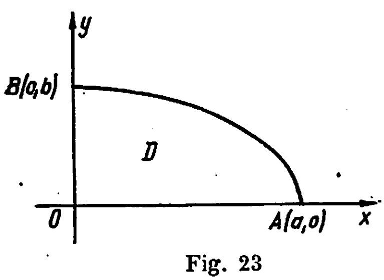


Fig. 23

$$\begin{aligned} 2\,\text{aria } D &= \curvearrowleft\!\!\!\oint_r x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \\ &= \int_{\overline{OA}} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + \\ &+ \int_{\widehat{AB}} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + \int_{\overline{BC}} x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Însă este uşor de văzut că

$$\int\limits_{\overline{OA}} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0, \quad \int\limits_{\overline{BO}} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0,$$

deci

$$2 \text{ aria } D = \int\limits_{\widehat{AB}} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t + \sin^2 t)\, \mathrm{d}t = \frac{\pi ab}{2}.$$

Rezultă că aria întregii elipse este πab.

Capitolul X

TEOREMA LUI JORDAN

CONEXIUNE

Un fapt deseori utilizat în Analiză şi foarte uşor acceptabil din punct de vedere intuitiv este următorul: orice curbă plană (r, Γ), simplă şi închisă, împarte planul în două domenii D_1 şi D_2, a căror frontieră este Γ.

Enunţarea precisă şi demonstrarea riguroasă a acestui fapt sînt mult mai dificile decît ar putea să pară. Ele vor fi obţinute, în cele ce urmează, ca rezultat al unui şir destul de lung de definiţii pregătitoare şi teoreme intermediare. Cu acest prilej, vom aminti şi unele noţiuni şi rezultate date în primul volum al acestui manual.

Fie x un punct din R^2 şi ε un număr pozitiv. Mulţimea punctelor din R^2 a căror distanţă faţă de x este inferioară lui ε constituie o *vecinătate* a lui x. Punctul x este aderent la mulţimea E dacă orice vecinătate a lui x conţine cel puţin un punct din E. Totalitatea punctelor aderente la mulţimea E constituie *închiderea* sau *aderenţa* mulţimii E şi se notează $\bar{E}$. Avem totdeauna $E \subseteq \bar{E}$. O mulţime E pentru care $E = \bar{E}$ este, prin definiţie, *închisă*. O mulţime G pentru care $R^2 - G$ este închisă se numeşte mulţime *deschisă*.

Se verifică uşor că o mulţime G este deschisă dacă şi numai dacă orice punct din G admite o vecinătate conţinută în G.

Reunind sau intersectînd două mulţimi deschise (închise), obţinem tot o mulţime deschisă (închisă).

Fiind dată o mulţime E, numim *frontiera* mulţimii E, şi notăm Fr. E, mulţimea $\bar{E} \cap \overline{(R^2 - E)}$. Este deci clar că: 1° o mulţime are aceeaşi frontieră ca şi complementara ei; 2° Fr. E este totdeauna o mulţime închisă. Dacă E este deschisă, atunci $\overline{R^2 - E} = R^2 - E$, deci Fr. $E = \bar{E} - E$. Rezultă că *frontiera unei mulţimi deschise nu conţine nici un punct din mulţime.*

Să considerăm două mulţimi M şi N conţinute în R^2. Fie f o aplicaţie a lui M în N. Vom spune că f este o aplicaţie a lui *M pe N* dacă $f(M) = N$. Fie f o aplicaţie a lui M pe N. Dacă, pentru fiecare punct $y \in N$, imaginea inversă $f^{-1}(y)$ se reduce la un singur punct, atunci spunem că f este o aplicaţie *biunivocă* a lui M pe N.

O aplicaţie f a lui M în N este *continuă* dacă şi numai dacă fiecare din componentele sale reale este o funcţie continuă pe M.

O aplicație biunivocă f a unei mulțimi M pe o mulțime N se numește un *homeomorfism* dacă atît f cît și f^{-1} sînt continue; mulțimile M și N se numesc, în acest caz, *homemorfe.* Iată cîteva exemple de mulțimi homeomorfe: două intervale deschise; un triunghi și un pătrat; o circumferință și o elipsă.

Se numește arc jordanian orice mulțime homeomorfă cu un segment de dreaptă. Se numește curbă jordaniană orice mulțime homeomorfă cu o circumferință. Este ușor de văzut că noțiunea de arc jordanian coincide cu noțiunea de imagine a unei curbe simple și neînchise, iar noțiunea de curbă jordaniană coincide cu noțiunea de imagine a unei curbe simple închise.

În baza teoremei de acoperire Borel-Lebesgue, din orice acoperire cu mulțimi deschise a unei mulțimi F închise și mărginite se poate extrage o acoperire finită. Vom arăta că și reciproca este adevărată: *Dacă din orice acoperire deschisă a unei mulțimi $F \subset R^2$ se poate extrage o acoperire finită, atunci F este închisă și mărginită.* Într-adevăr, fie y un punct din R^2 care nu aparține lui F. Pentru fiecare punct $x \in F$ să notăm cu $V(x)$ vecinătatea lui x de rază egală cu jumătatea distanței dintre x și y. Vecinătățile $V(x)$ constituie o acoperire deschisă a mulțimii F, deci se poate extrage din această acoperire o acoperire finită; există un număr finit de puncte $x_1, x_2, ..., x_n$ aparținînd lui F, astfel încît vecinătățile $V(x_1), V(x_2), ..., V(x_n)$ să consituie o acoperire a lui F. Rezultă astfel că F este mărginită. Dacă vom arăta că punctul y nu este aderent la F, va rezulta că F este închisă. Însă este suficient să considerăm o vecinătate $V(y)$ de rază inferioară tuturor razelor vecinătăților $V(x_i)$ $(i \leqslant n)$, pentru ca să rezulte că $V(x_i) \cap V(y) = 0$ pentru $i = 1, 2, ..., n$. Deci y nu este aderent la F și reciproca teoremei lui Borel-Lebesgue este demonstrată.

Din caracterizarea dată mai sus mulțimilor închise și mărginite rezultă următoarea

T e o r e m ă. Imaginea unei mulțimi închise și mărginite printr-o aplicație continuă este o mulțime închisă și mărginită.

Într-adevăr, fie Φ imaginea mulțimii F închise și mărginite, prin aplicația continuă f. Fie $\{V_a\}$ o acoperire a lui Φ cu mulțimi deschise. În baza continuității lui f, mulțimile $f^{-1}(V_a)$ sînt deschise și constituie o acoperire a mulțimii F. Din această acoperire putem extrage, în baza teoremei Borel-Lebesgue, o acoperire finită $\{f^{-1}(V_{a_i})\}$ $(i = 1, ...n)$. Rezultă că mulțimile $V_{a_1}, V_{a_2}, ..., V_{a_n}$ constituie o acoperire deschisă a lui Φ; deci din acoperirea deschisă dată $\{V_a\}$ a mulțimii Φ s-a putut extrage o acoperire finită. În baza reciprocii teoremei lui Borel-Lebesgue, rezultă că Φ este închisă și mărginită.

O mulțime A este *conexă* dacă *nu* există două mulțimi deschise M și N, astfel încît $M \cap A \neq 0$, $N \cap A \neq 0$, $M \cap N \cap A = 0$, $A \subset M \cup N$.

T e o r e m ă. Dacă A și B sînt mulțmi conexe și $A \cap B \neq 0$, atunci $A \cup B$ este o mulțime conexă.

Pentru demonstrație, să presupunem, prin reducere la absurd, că există două mulțimi deschise M și N, astfel încît $M \cap (A \cup B) \neq 0$, $N \cap (A \cup B) \neq 0$, $M \cap N \cap (A \cup B) = 0$ și $A \cup B \subset M \cup N$. Deoarece $A \cap B$ este nevidă, există un punct $x \in A \cap B$. Conform ultimei incluziuni, avem $x \in M \cup N$. Să presupunem mai întîi că $x \in M$. Dintr-una din relațiile de mai sus rezultă existența unui punct $y \in N \cap (A \cup B)$. Dacă $y \in B$, atunci $N \cap B \neq 0$. Din $x \in M \cap A \cap B$ rezultă $M \cap B \neq 0$. Din ipotezele raționamentului prin reducere la absurd mai rezultă că $B \subset \subset M \cup N$ și $M \cap N \cap B = 0$, deci mulțimea B este neconexă, în contradicție cu ipoteza. Dacă $y \in A$, atunci $N \cap A \neq 0$. Din $x \in M \cap A \cap B$ rezultă $M \cap A \neq 0$. Deoarece avem $A \subset M \cup N$ și $M \cap N \cap A = 0$, rezultă că A este neconexă, ceea ce iarăși contrazice ipoteza. Am arătat astfel că dacă $x \in M$, atunci $A \cup B$ este conexă. În baza simetriei ipotezelor în raport cu M și N, rezultă că și în cazul $x \in N$ mulțimea $A \cup B$ este conexă.

Teoremă. Imaginea unei mulțimi conexe printr-o aplicație continuă este o mulțime conexă.

Pentru demonstrație, să considerăm o mulțime A conexă și imaginea ei $f(A)$ prin aplicația continuă f. Dacă $f(A)$ n-ar fi conexă, atunci ar exista două mulțimi deschise M și N, astfel încît $f(A) \subset M \cup N$, $M \cap f(A) \neq 0$, $N \cap f(A) \neq 0$, $M \cap N \cap f(A) = 0$. De aici rezultă că $A \subset f^{-1}(M) \cup \cup f^{-1}(N)$, $A \cap f^{-1}(M) \neq 0$, $A \cap f^{-1}(N) \neq 0$ și $A \cap f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) = 0$. În baza continuității lui f, mulțimile $f^{-1}(M)$ și $f^{-1}(N)$ sînt deschise, deci A nu este conexă, în contradicție cu ipoteza. Deci $f(A)$ este conexă.

Teoremă. Un segment de dreaptă este o mulțime conexă.

Pentru demonstrație, este suficient să considerăm segmentul $[0, 1]$, deoarece orice alt segment este o imagine continuă a lui $[0, 1]$, deci va fi conex în baza propoziției anterioare.

Să presupunem, prin reducere la absurd, că $[0, 1]$ nu este conex. Există deci două mulțimi deschise M și N, astfel încît $[0, 1] \subset M \cup N$, $[0, 1] \cap \cap M \neq 0$, $[0, 1] \cap N \neq 0$, $[0, 1] \cap M \cap N = 0$. Mulțimile $P = M \cap \cap [0, 1]$ și $Q = N \cap [0, 1]$ sînt închise. Într-adevăr, fie x un punct al lui $\bar{P}$. Dacă x nu ar aparține lui $[0, 1]$, atunci x ar aparține mulțimii deschise $R^2 - [0, 1]$, deci ar exista o vecinătate a sa disjunctă de P, în contradicție cu faptul că $x \in \bar{P}$. Deci $x \in [0, 1]$ și, cu atît mai mult, $x \in \in M \cup N$. Să presupunem că $x \in N$. În acest caz, există o vecinătate V a sa conținută în N (deoarece N este deschisă). Însă x este aderent la $M \cap [0, 1]$, deci $V \cap M \cap [0, 1] \neq 0$, deci, ținînd seama că $V \subset N$, avem și $N \cap M \cap [0, 1] \neq 0$, în contradicție cu ipoteza că $[0, 1]$ nu este conex. Am demonstrat astfel că P și Q sînt închise. Ele sînt, evident, disjuncte și $[0, 1] = P \cup Q$. Dacă $0 \in P$, atunci marginea superioară s a mulțimii punctelor din P, cu abscisa mai mică decît abscisele tuturor punctelor din Q, aparține lui P. Însă din însăși definiția marginii superioare rezultă că, pentru orice $\varepsilon > 0$, intervalul $(s, s + \varepsilon)$ conține puncte din Q, deci Q fiind — ca și P — închisă, rezultă $s \in Q$. Aceasta vine în contradicție cu faptul că $P \cap Q = 0$. Deci $[0, 1]$ este o mulțime conexă.

Vom numi *linie poligonală* cu vîrfurile în punctele $x_1, x_2, \dots, x_n$ reuniunea segmentelor de dreaptă $x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n$, în care două segmente neconsecutive sînt obligatoriu disjuncte. Dacă x_1 coincide cu x_n, atunci spunem că avem o *linie poligonală închisă* sau *un poligon*.

Din faptul că o reuniune de două mulţimi conexe nedisjuncte este tot o mulţime conexă, iar un segment de dreaptă este o mulţime conexă, rezultă că *o linie poligonală este o mulţime conexă.*

Din însăşi definiţia arcului jordanian rezultă, în baza teoremelor de mai sus, că *orice arc jordanian este o mulţime conexă.*

O submulţime conexă K a unei mulţimi E se numeşte o *componentă* a lui E dacă pentru orice parte conexă $H \subseteq E$, astfel încît $K \subseteq H$, avem $K = H$.

În baza acestei definiţii, orice mulţime se desface în componente. O mulţime admite o singură componentă dacă şi numai dacă ea este conexă. În baza faptului că reuniunea a două mulţimi conexe nedisjuncte este tot o mulţime conexă, rezultă că două componente distincte ale unei mulţimi sînt totdeauna disjuncte.

O componentă a unei mulţimi deschise este, prin definiţie, un *domeniu.*

Dacă două puncte oarecare ale unei mulţimi E pot fi unite printr-o linie poligonală conţinută în E, atunci spunem că E este *poligonal conexă.*

Teoremă. O mulţime poligonal conexă este conexă.

Într-adevăr, să presupunem, prin reducere la absurd, că există o mulţime E care este poligonal conexă, dar nu este conexă. În acest caz, E admite cel puţin două componente, fie ele K_1 şi K_2. Fie $x_1 \in K_1$ şi $x_2 \in K_2$. Există o linie poligonală L care uneşte x_1 cu x_2 şi este conţinută în E. După cum am văzut mai sus, o linie poligonală este o mulţime conexă. Deci L este o parte conexă a lui E, care întîlneşte cel puţin două componente ale lui E. Această situaţie vine în contradicţie cu însăşi definiţia componentei. Deci existenţa unei mulţimi E poligonal conexă dar neconexă este absurdă.

Se poate arăta că reciproca propoziţiei stabilite nu este adevărată. Un caz particular în care reciproca are loc este dat de propoziţia următoare:

Teoremă. Orice domeniu este poligonal conex.

Pentru demonstraţie, să considerăm un domeniu D. Fie $x \in D$. Să notăm cu D_x mulţimea tuturor punctelor $y \in D$ care pot fi unite cu x printr-o linie poligonală conţinută în D. Mulţimea D_x este deschisă, deoarece dacă $y \in D_x$, atunci există o vecinătate V cu centrul în y şi conţinută în D; *orice* punct $z \in V$ poate fi unit cu centrul y al vecinătăţii V printr-un segment de dreaptă conţinut în V, deci şi în D. Aşadar, $z \in D_x$, deci $V \subseteq D_x$.

Dacă $D - D_x \neq 0$, atunci există un punct $z \in D - D_x$, precum şi o vecinătate V_z cu centrul în z, conţinută în D şi disjunctă de D_x (altfel, z ar putea fi unit printr-un segment de dreaptă cu unul din punctele mulţimii $V_z \cap D_x$ şi am avea $z \in D_x$). Deci mulţimea $D - D_x$ este deschisă şi nevidă şi D se desface în două mulţimi deschise disjuncte

$$D = D_x \cup (D - D_x),$$

în contradicţie cu faptul că D este, prin ipoteză, o mulţime conexă.

Rezultă că $D = D_x$, deci D este poligonal conexă.

Din ultimele două propoziţii rezultă:

O mulţime deschisă este conexă şi numai dacă ea este poligonal conexă.

Este uşor de văzut acum că *un domeniu este o mulţime deschisă.* Într-adevăr, dacă x este un punct al unui domeniu D, acesta din urmă fiind componentă a unei mulţimi deschise G, atunci există o vecinătate V_x a lui x, astfel încît $V_x \subseteq G$. Ţinînd seama că V_x este deschisă şi poligonal conexă (V_x este chiar convexă), rezultă că V_x este conexă, deci este conţinută într-o singură componentă a lui G; aşadar, $V_x \subseteq D$, deci D este o mulţime deschisă.

Teorema lui Jordan. Vom spune că o mulţime închisă F **separă planul** dacă mulţimea $R^2 - F$ este neconvexă. Notînd cu A, B, C, ... componentele mulţimii $R^2 - F$, spunem că F **separă planul în mulţimile** A, B, C, ...

Vom spune că o mulţime închisă F **separă punctele** x **şi** y, **care nu aparţin lui** F, **dacă** x **şi** y aparţin unor componente diferite ale mulţimii $R^2 - F$.

Un **unghi** este, prin definiţie, mulţimea punctelor situate pe două semidrepte cu originea comună. Cele două semidrepte se numesc **laturile** unghiului. Chiar din definiţie, rezultă că orice unghi este o mulţime închisă.

Teoremă. Orice unghi separă planul în două domenii.

Pentru demonstraţie considerăm sistemul de coordonate carteziene care are ca semiaxe pozitive laturile unghiului dat, fie el V. Fie x un punct situat în primul cadran, iar y un punct nesituat în primul cadran şi neaparţinînd lui V. Fie L o linie poligonală care uneşte pe x cu y şi este conţinută în $R^2 - V$. Fie p ultimul vîrf din L (cînd sensul pe L este de la x spre y), care este situat în primul cadran, şi fie x_1 şi y_1 coordonatele lui p. Fie q acel vîrf din L care urmează după p şi fie x_2 şi y_2 coordonatele lui q. Pentru a face o alegere, vom admite că q este situat în cadranul al doilea. Dreapta care trece prin p şi q are o reprezentare parametrică de forma

$$u = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2,$$

$$v = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2.$$

Fie r punctul în care această dreaptă intersectează axa ordonatelor şi fie y_3 ordonata lui r. Pentru a avea $v = y_3$, este necesar că $\lambda = \lambda_3$, unde

$$\lambda_3 = \frac{x_2}{x_2 - x_1}.$$

Deoarece p este în primul cadran, iar q în al doilea, rezultă că $x_1 > 0$ şi $x_2 < 0$, deci $0 < \lambda_3 < 1$. Aşadar, punctul r este situat între p şi q, deci $r \in L \subset R^2 - V$, deci $r \notin V$. Dar din faptul că $y_3 > 0$ şi abscisa lui r este nulă rezultă că $r \in V$. Am ajuns astfel la o contradicţie, deci punctele x şi y nu pot fi unite cu o linie poligonală conţinută în $R^2 - V$. Rezultă că V separă planul.

Deoarece mulţimea punctelor din primul cadran, nesituate pe V, este deschisă şi poligonal conexă, rezultă că ea este un domeniu. De asemenea, mulţimea punctelor care nu aparţin lui V şi sînt situate în cadranele 2, 3 sau 4 constituie un domeniu, deoarece este deschisă şi poligonal conexă. Deci $R^2 - V$ este o mulţime deschisă alcătuită din două componente-domenii. Propoziţia enunţată este astfel complet demonstrată.

Pe o cale asemănătoare se arată că

Orice dreaptă D separă planul în două domenii Δ_1 și Δ_2.

Dacă $x \in \Delta_1$ și $y \in \Delta_2$, atunci spunem că x și y sînt situate de părți diferite ale dreptei D; dacă $x \in \Delta_1$ și $y \in \Delta_1$ sau dacă $x \in \Delta_2$ și $y \in \Delta_2$, atunci spunem că x și y sînt situate de aceeași parte a dreptei D.

Folosind un raționament similar celui de mai sus, se constată că

Orice circumferință separă planul în două domenii.

Vom da acum

Teorema 1. Orice poligon P separă planul.

Pentru ușurință, vom împărți demonstrația acestei teoreme în mai multe etape.

a) *Orice dreaptă care nu trece printr-un vîrf al poligonului P îl întîlnește într-un număr par de puncte.*

Într-adevăr, orice punct de intersecție a dreptei date cu poligonul se găsește pe o latură a sa, ale cărei extremități vor fi situate de părți diferite ale dreptei. Prin urmare, dacă parcurgem poligonul într-un sens determinat, pornind dintr-un vîrf al său, vom trece dintr-o parte a dreptei în cealaltă dacă și numai dacă vom întîlni un punct de intersecție a dreptei cu poligonul. De aici rezultă că, pentru a reveni în vîrful din care am pornit, trebuie să întîlnim un număr par de asemenea puncte.

b) *Orice unghi A cu vîrful nesituat pe poligonul P și ale cărui laturi nu conțin vîrfuri ale lui P întîlnește poligonul într-un număr par de puncte.*

Această afirmație rezultă din faptul că unghiul A separă planul în două domenii, cu ajutorul unui raționament analog cu cel precedent.

c) *Fie a un punct oarecare, nesituat pe poligonul P. Dacă există o semidreaptă cu originea în a care nu conține vîrfuri ale lui P și care întîlnește poligonul într-un număr impar de puncte, atunci orice altă semidreaptă cu originea în a, care nu conține vîrfuri ale lui P, posedă aceeași proprietate.*

Aceasta este o consecință imediată a propoziției b), laturile unghiului A fiind semidreapta dată și cea pentru care urmează să se stabilească proprietatea c).

Vom trece acum la demonstrația propriu-zisă a teoremei 1. Să considerăm o dreaptă care intersectează poligonul P și nu trece prin nici un vîrf al său. Fie p un punct de intersecție a dreptei cu P, iar a și b două puncte pe dreaptă, distincte de p, astfel încît segmentul ab să conțină punctul p și să nu conțină nici un alt punct al lui P. Să alegem pe dreaptă un sens determinat și să considerăm semidreptele $a\infty$ și $b\infty$ cu originile în a și b. Una dintre aceste semidrepte, de exemplu $a\infty$, taie poligonul într-un număr impar, iar cealaltă îl taie într-un număr par de puncte.

Vom arăta că poligonul P separă punctele a și b. Să presupunem că există o linie poligonală $ap_1p_2, \ldots, p_nb$, care nu întîlnește pe P. Este clar că această linie poligonală poate fi construită astfel încît semidreptele[1] $ap_1\infty$, $p_1p_2\infty, \ldots, p_nb\infty$ să nu treacă prin nici un vîrf al lui P. În virtutea propoziției c) semidreapta $ap_1\infty$ intersectează poligonul într-un număr impar

[1] Folosim notația $p_ip_{i+1}\infty$ pentru semidreapta cu originea în p_i, pentru a o distinge de segmentul p_ip_{i+1}.

de puncte. Deoarece linia poligonală nu taie pe P, semidreapta $p_1\infty$, conținută în $ap_1\infty$, posedă aceeaşi proprietate. Aplicînd succesiv acelaşi raționament tuturor segmentelor liniei poligonale, deducem că semidreapta $b\infty$ întîlneşte poligonul într-un număr impar de puncte, ceea ce este imposibil. Prin urmare, mulțimea $R^2 - P$ are cel puțin două componente.

Din demonstrația precedentă rezultă că poligonul P separă extremitățile fiecărui segment care îl taie într-un punct şi numai unul, nesituat într-un vîrf al lui P.

Teoremă 2. Fie K_1 şi K_2 două mulțimi plane închise şi mărginite cu intersecția convexă. Dacă două puncte din plan p_1 şi p_2, care nu aparțin lui $K_1 \cup K_2$, nu sînt separate nici de K_1 nici de K_2, atunci ele nu sînt separate de $K_1 \cup K_2$.

Prin ipoteză, p_1 şi p_2 pot fi unite prin două linii poligonale L_1 şi L_2, astfel încît L_1 să nu întîlnească pe K_1, iar L_2 să nu întîlnească pe K_2. Putem admite că L_1 şi L_2 nu au alte puncte comune în afară de extremitățile lor p_1 şi p_2, deoarece, în caz contrar, parcurgînd liniile poligonale pornind din p_1, înlocuim punctul p_2 cu următorul punct de intersecție al lui L_1 şi L_2; procedînd astfel succesiv pentru toate punctele de intersecție ale lui L_1 şi L_2, vom obține teorema pentru punctele p_1 şi p_2. Poligonul $P = L_1 \cup L_2$ separă planul în virtutea teoremei precedente. Deoarece mulțimea $K_1 \cap K_2$ este conexă şi disjunctă de P, ea este inclusă într-o componentă a lui $R^2 - P$, de exemplu într-o componentă din interiorul lui P. Punctele lui K_1 situate pe poligonul P şi în exteriorul său formează o mulțime închisă şi mărginită F_1, disjunctă de mulțimea închisă $K_2 \cup L_1$. Prin urmare, fiecare punct a din F_1 posedă o vecinătate $V(a)$, disjunctă de $K_2 \cup L_1$. Fie $W(a)$ un pătrat deschis cu centrul în a, inclus împreună cu frontiera sa în $V(a)$. Mulțimile $W(a)$ formează o acoperire a lui F_1, din care putem extrage o acoperire finită $\{W(a_i)\}$, $i = 1, 2, ..., n$. Din frontierele pătratelor $W(a_i)$ şi din segmentele liniei poligonale L_2 putem forma acum uşor o linie poligonală L, care uneşte punctele p_1 şi p_2 şi nu întîlneşte mulțimea $K_1 \cup K_2$.

Teorema 3. Un arc simplu nu separă planul.

Fie a şi b două puncte oarecare din plan care nu aparțin arcului simplu A. Să împărțim arcul A într-un număr finit de arce simple consecutive $A_1, A_2, ..., A_n$, cu proprietatea că distanța între orice pereche de puncte din A_i este mai mică decît jumătatea distanței între a şi b. Aceasta se poate realiza ținînd seama de faptul că arcul A este imaginea homeomorfă a unui segment şi împărțind acest segment în subsegmente suficient de mici. Să considerăm segmentul ab; este clar că subarcele lui A care nu intersectează acest segment nu separă punctele a şi b. Dacă A_i întîlneşte segmentul ab, considerăm un pătrat construit pe ab, ca latură; celelalte laturi ale pătratului formează o linie poligonală care nu taie arcul A_i. Prin urmare, nici unul dintre arcele A_i nu separă punctele a şi b. Aplicînd teorema 2 succesiv arcelor A_1 şi A_2, $A_1 \cup A_2$ şi A_3 etc., deducem că arcul A nu separă punctele a şi b.

Teorema 4. Fie A un arc simplu şi pq un segment care se intersectează în extremităţile lor şi nu au alte puncte comune. Curba jordaniană $\Gamma = A \cup pq$ separă planul în două domenii şi este frontiera lor comună.

Să considerăm un segment ab, perpendicular pe segmentul pq într-un punct interior r al său, încît ab să conţină în interior punctul r şi să nu conţină nici un punct al lui A. Curba Γ separă punctele a şi b. Într-adevăr, să presupunem că există o linie poligonală L, care uneşte punctele a şi b fără să întîlnească pe Γ. Atunci poligonul[1] $L \cup ab$ separă punctele p şi q, deoarece segmentul pq îl taie numai în punctul r. Mulţimea conexă A trebuie să întîlnească deci acest poligon, adică pe L, ceea ce este imposibil.

Aşadar, am arătat că mulţimea $R^2 - \Gamma$ este neconexă.

Vom demonstra acum că ea are numai două componente.

Fie a, b, c trei puncte arbitrare din plan, nesituate pe curba Γ. Deoarece arcul A nu separă planul, putem uni aceste puncte cu un punct interior al segmentului pq, prin nişte linii poligonale L_1, L_2, L_3, disjuncte de A, care vor intersecta acest segment pentru prima oară respectiv în punctele a', b', c'. Cel puţin două dintre aceste puncte, de exemplu a' şi b', sînt atinse din aceeaşi parte a dreptei pq, deci putem uni liniile poligonale L_1 şi L_2 printr-un segment paralel cu pq, foarte aproape de el, care nu întîlneşte arcul A. Aceasta înseamnă că punctele a şi b pot fi unite printr-o linie poligonală conţinută în $R^2 - \Gamma$, deci ele aparţin aceleiaşi componente a acestei mulţimi.

În sfîrşit, să arătăm că Γ este frontiera comună a celor două componente D_1 şi D_2 ale lui $R^2 - \Gamma$. Fie c un punct pe Γ şi V o vecinătate arbitrară a sa. Să considerăm un arc deschis J al lui Γ, care conţine punctul c şi este inclus în V[2]. Deoarece mulţimea $H = \Gamma - J$ este un arc simplu închis, două puncte arbitrare d_1 şi d_2 situate respectiv în D_1 şi D_2 pot fi unite printr-o linie poligonală L, disjunctă de H. Însă curba Γ separă punctele d_1 şi d_2, deci linia L taie arcul J.

Fie s primul punct de intersecţie a lui L cu J, cînd parcurgem linia poligonală de la d_1 la d_2, şi fie $U \subset V$, o vecinătate a lui s. Mulţimea U, deci şi V, conţine puncte din D_1 (punctele lui L care preced pe s), prin urmare, punctul c aparţine frontierei lui D_1. Deoarece acest punct a fost ales în mod arbitrar, deducem că $\Gamma \subset \bar{D}_1 - D_1$. Pe de altă parte, este evident, că $\bar{D}_1 - D_1 \subset \Gamma$, deci $\Gamma = \bar{D}_1 - D_1$. La fel se arată că $\Gamma = \bar{D}_2 - D_2$.

Să trecem acum la enunţarea şi demonstrarea teoremei lui Jordan pentru o curbă simplă închisă arbitrară.

---

[1] Raţionînd la fel ca în demonstraţia teoremei 2, putem admite că L şi ab nu au alte puncte comune în afară de extremităţile lor.

[2] Existenţa unui asemenea arc se demonstrează astfel: fie h transformarea care realizează homeomorfismul circumferinţei C pe Γ şi $c = h(t)$. În virtutea continuităţii lui h, există o vecinătate W a lui t, astfel încît $h(W \cap C) \subset V$. Însă $W \cap C$ este un arc, deci putem lua $J = h(W \cap C)$.

Teorema lui Jordan. Orice curbă simplă închisă plană (r, Γ) separă planul în două domenii şi este frontiera lor comună.

Acest enunţ se compune din următoarele afirmaţii:

1° *Mulţimea* $R^2 - \Gamma$ *este neconexă.*

2° *Mulţimea* $R^2 - \Gamma$ *are exact două componente.*

3° *Mulţimea* Γ *este frontiera fiecărei componente a lui* $R^2 - \Gamma$.

Pentru demonstraţie, este suficient să stabilim punctele 1° şi 2°, deoarece punctul 3° se stabileşte întocmai ca în demonstraţia teoremei 4.

1° Fie pq un segment de dreaptă ale cărui extremităţi aparţin curbei Γ şi care nu are alte puncte comune cu Γ. Punctele p şi q determină pe Γ două arce simple A_1 şi A_2; $\Gamma_1 = A_1 \cup pq$ şi $\Gamma_2 = A_2 \cup pq$ satisfac ipoteza lemei 4.

Fie r un punct interior arcului A_1, şi V o vecinătate a sa, disjunctă de Γ_2 (o asemenea vecinătate există, deoarece mulţimea Γ_2 este închisă). Această vecinătate conţine puncte din ambele componente ale lui $R^2 - \Gamma_1$; să luăm un punct a din interiorul lui Γ_1 şi un punct b din exteriorul lui Γ_1, ambele în V. Să presupunem că există o linie poligonală L care uneşte punctele a şi b, fără a întîlni pe Γ. Deoarece aceste puncte sînt separate de Γ_1, linia L trebuie să întîlnească segmentul pq; fie a' şi b' primul şi ultimul punct de intersecţie a lui L cu pq, cînd parcurgem linia poligonală de la a la b. Să considerăm două puncte c şi d, situate aproape de a' şi b', respectiv pe porţiunile aa' şi bb' ale lui L. Punctele c şi d sînt situate de părţi diferite ale dreptei pq, căci altfel linia poligonală $ac \cup cd \cup db$ ar fi disjuncte pe Γ_1. Prin urmare, Γ_2 separă punctele c şi d. Pe de altă parte, linia poligonală formată din segmentul ab şi din porţiunile ac şi bd ale lui L nu întîlneşte pe Γ_2. Contradicţia obţinută arată că Γ separă punctele, a şi b, deci mulţimea $R^2 - \Gamma$ este neconexă.

2° Fie acum r un punct dintr-o componentă mărginită a lui $R^2 - \Gamma$ şi prq un segment ale cărui extremităţi aparţin lui Γ şi care nu are alte puncte comune cu Γ. Să punem, la fel ca mai sus, $\Gamma_1 = A_1 \cup pq$, $\Gamma_2 = A_2 \cup pq$, unde A_1 şi A_2 sînt arcele lui Γ, determinate de punctele p şi q. Arcele A_1 şi A_2 (considerate fără extremităţi) sînt situate respectiv în exteriorul curbelor Γ_2 şi Γ_1.

Într-adevăr, dacă arcul A_1 ar fi situat în interiorul[1] lui Γ_2, atunci punctul r ar putea fi unit cu un punct depărtat din plan printr-o linie poligonală disjunctă de A_2 (în virtutea teoremei 4) şi chiar de interiorul lui Γ_2, deci r ar fi conţinut în componenta nemărginită a lui $R^2 - \Gamma$. Să notăm cu D_1 şi D_2 interioarele lui Γ_1 şi Γ_2 iar cu G_1 şi G_2, exterioarele lor. Fie D reuniunea mulţimii $D_1 \cup D_2$ cu segmentul deschis pq. Fiecare punct din D_1 (sau din D_2) poate fi unit cu un punct al lui pq printr-o linie poligonală disjunctă de $A_1 \cup G_1$ (respectiv de $A_2 \cup G_2$). Prin urmare, două puncte oarecare din D pot fi unite printr-o linie poligonală inclusă în D, deci mulţimea D este conexă.

[1] Arcul deschis A_1, fiind o mulţime conexă, este situat în întregime sau în interiorul sau în exteriorul lui Γ_2.

Fie $G = G_1 \cap G_2$ şi a, b două puncte arbitrare din G. Γ_1 şi Γ_2 nu separă punctele a şi b. Deoarece ele sînt închise şi mărginite şi intersecţia lor pq este conexă, rezultă din teorema 2 că nici mulţimea $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ nu separă punctele a şi b. Există deci o linie poligonală care uneşte aceste puncte şi este disjunctă de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$; în particular, ea este disjunctă şi de Γ. Prin urmare, mulţimea G este inclusă într-o componentă K a lui $R^2 - \Gamma$. Însă $R^2 - \Gamma = D \cup G$, deci $K - D = 0$, deoarece în cazul contrar mulţimea $R^2 - \Gamma$ ar fi conexă. De aici rezultă că $G = K$, adică mulţimea G este conexă.

Aşadar, mulţimea $R^2 - \Gamma$ are două componente D şi G, a căror frontieră comună este Γ şi teorema lui Jordan este complet demonstrată.

Capitolul XI

SCHIMBAREA DE VARIABILE LA INTEGRALA DUBLĂ

a. Transformări regulate

Problema schimbării de variabilă a fost abordată în teoria integrării funcţiilor de o singură variabilă cu scopul de a înlocui funcţia de sub integrală printr-o funcţie căreia să i se poată găsi mai uşor primitiva. La integrala dublă, scopul principal al schimbării de variabile este acela de a înlocui domeniul de integrare printr-un alt domeniu, de o structură mai simplă. Nu se pot da criterii riguroase pentru a stabili dacă un domeniu este mai simplu decît alt domeniu. Aceasta se apreciază de obicei în legătură cu comoditatea aplicării teoremei de descompunere a unei integrale duble în integrale simple. Este clar că structura domeniului de integrare — mai precis, natura frontierei acestui domeniu — determină funcţiile φ şi ψ într-o descompunere de forma

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

deci posibilitatea de a efectua integrarea în raport cu x este influenţată esenţial de natura domeniului D.

Un rol esenţial, în cele ce urmează, îl vor juca aşa-numitele *transformări regulate*, studiate în volumul 1 al acestui manual (Cap. VIII, § 7, 3). În cele ce urmează, vom da unele proprietăţi suplimentare ale acestor transformări.

Fie T o transformare regulată definită pe domeniul compact D din planul Ouv şi cu valori în planul Oxy. Să punem $\Delta = T(D)$. Să presupunem că transformarea T este dată de funcţiile reale φ şi ψ, de două variabile reale. Deci unui punct $(u, v) \in D$ îi corespunde un punct (x, y), dat de

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \psi(u, v). \end{aligned} \quad (u, v) \in D.$$

Se ştie din primul volum că imaginea unei mulţimi deschise printr-o transformare regulată este o mulţime de asemenea deschisă. Pe de altă parte, din faptul că o transformare regulată este continuă, rezultă că imaginea unei mulţimi conexe printr-o transformare regulată este de asemenea conexă. (Faptul că o aplicaţie continuă păstrează conexiunea a fost stabilit în cadrul preliminariilor la teorema lui Jordan.) Aşadar:

Imaginea unui domeniu printr-o transformare regulată este tot un domeniu.

Vom stabili, în cele ce urmează, şi alţi invarianţi ai transformărilor regulate.

Imaginea unei curbe printr-o transformare regulată este de asemenea o curbă.

Într-adevăr, fie C o curbă situată în D şi dată de reprezentarea parametrică:

$$\begin{aligned} u &= f(t), \\ v &= g(t), \end{aligned} \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

unde f şi g sînt continue pe $[a, b]$. Avem, luînd imaginea curbei C prin transformarea T,

$$x = \varphi(u, v) = \varphi(f(t), g(t)) = \bar{f}(t),$$

$$y = \psi(u, v) = \psi(f(t), g(t)) = \bar{g}(t),$$

unde $\bar{f}$ şi $\bar{g}$ sînt continue pe $[a, b]$. Rezultă că reprezentarea parametrică

$$\begin{aligned} x &= \bar{f}(t), \\ y &= \bar{g}(t), \end{aligned} \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{1}$$

defineşte o curbă $C_1 \subset Oxy$, care este imaginea lui C prin transformarea T.

Observaţie. Mai precis, relaţia $C_1 = T(C)$ trebuie interpretată în sensul următor: imaginea curbei C_1 se obţine din imaginea lui C prin transformarea T. Sensul exact şi complet al acestei relaţii este dat de fizionomia însăşi a funcţiilor $\bar{f}$ şi $\bar{g}$.

Imaginea unei curbe închise printr-o transformare regulată este de asemenea o curbă închisă.

Într-adevăr, fie C închisă, deci dată de

$$\begin{aligned} u &= f(t), \\ v &= g(t), \end{aligned} \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

cu $f(a) = f(b)$, $g(a) = g(b)$. Curba corespunzătoare C_1 este dată de (1). Avem $\bar{f}(a) = \varphi(f(a), g(a)) = \varphi(f(b), g(b)) = \bar{f}(b)$ şi $\bar{g}(a) = \psi(f(a), g(a)) = \psi(f(b), g(b)) = \bar{g}(b)$, deci C_1 este o curbă închisă.

Imaginea unei curbe simple printr-o transformare regulată este de asemenea o curbă simplă.

Fie C o curbă simplă, conţinută în D. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $C_1 = T(C)$ nu este simplă. Fie P un punct multiplu al lui C_1 de coordonate x_0, y_0. Există deci două valori t' şi t'', astfel încît $a \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant b$, $\bar{f}(t') = \bar{f}(t'') = x_0$, $\bar{g}(t') = \bar{g}(t'') = y_0$ şi are loc cel puţin una dintre inegalităţile $a < t'$, $t'' < b$. Pentru a fixa ideile, să presupunem că $a < t'$. Avem deci

$$a < \varphi(f(t'), g(t')) = \varphi(t'')), g(t'')) \text{ şi } \psi(f(t'), g(t') = \psi(f(t''), g(t'')).$$

Din faptul că o transformare regulată este biunivocă rezultă că $f(t') = f(t'')$ şi $g(t') = g(t'')$. Ţinînd seama că $a < t'$, rezultă că $(f(t'), g(t'))$ este un punct multiplu al curbei C; însă existenţa unui astfel de punct vine în contradicţie cu ipoteza că C este simplă. Deci presupunerea că C_1 n-ar fi simplă este falsă.

Imaginea unei curbe rectificabile printr-o transformare regulată este o curbă rectificabilă.

Din faptul că C este rectificabilă rezultă că f şi g sînt cu variaţie mărginită pe $[a, b]$. Totul revine la a arăta că şi $\bar{f}$ şi $\bar{g}$ sînt cu variaţie mărginită pe $[a, b]$. Avem, pentru $a \leqslant t_i < t_{i+1} \leqslant b$,

$$|\bar{f}(t_{i+1}) - \bar{f}(t_i)| = |\varphi(f(t_{i+1}), g(t_{i+1})) - \varphi(f(t_i), g(t_i))|.$$

Aplicînd teorema creşterilor finite pentru funcţii de două variabile (lucru posibil, deoarece φ este diferenţiabilă prin însuşi faptul că transformarea T este regulată), deducem existenţa unui număr $t_i' \in (t_i, t_{i+1})$ astfel încît

$$|\bar{f}(t_{i+1}) - \bar{f}(t_i)| = \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_{(f(t_i'), g(t_i'))} \cdot (f(t_{i+1}) - (f(t_i)) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_{(f(t_i'), g(t_i'))} \cdot\right.$$
$$\left.\cdot (g(t_{i+1}) - g(t_i))\right| \leqslant \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_{(f(t_i'), g(t_i'))}\right| \cdot |f(t_{i+1}) - f(t_i)| + \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_{(f(t_i'), g(t_i'))}\right| \cdot$$
$$\cdot |g(t_{i+1}) - g(t_i)|.$$

În baza faptului că T este regulată în D, iar D este compact, rezultă că φ admite derivate parţiale mărginite în D. Există deci un număr pozitiv M, astfel încît:

$$|\bar{f}(t_{i+1}) - \bar{f}(t_i)| \leqslant M(|f(t_{i+1}) - f(t_i)| + |g(t_{i+1}) - g(t_i)|).$$

Fie acum o diviziune δ a intervalului $[a, b]$: $\delta = (a = t_0 < t_1 < \ldots \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b)$ Avem

$$v_\delta(\bar{f}) = \sum_{i=0}^{n-1} |\bar{f}(t_{i+1}) - \bar{f}(t_i)| \leqslant M\left(\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| + \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|\right) =$$
$$= M(v_\delta(f) + v_\delta(g)).$$

Însă f şi g sînt cu variaţie mărginită pe $[a, b]$; există deci un număr N, astfel încît

$$v_\delta(f) + v_\delta(g) < N$$

pentru orice diviziune δ a lui $[a, b]$ deci

$$v_\delta(\bar{f}) < MN,$$

pentru orice diviziune δ a lui $[a, b]$.

Am demonstrat astfel că $\bar{f}$ este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$. În mod analog se arată că şi $\bar{g}$ este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$ (se vor înlocui, în raţionamentul de mai sus, φ cu ψ, $\bar{f}$ cu $\bar{g}$).

Imaginea unei curbe cu tangentă continuă, printr-o transformare regulată, este tot o curbă cu tangentă continuă.

Prin ipoteză, funcţiile f şi g din definiţia curbei C au derivată continuă pe $[a, b]$. Trebuie să arătăm că $\bar{f}$ şi $\bar{g}$ au de asemenea derivată continuă pe $[a, b]$. Însă chiar din definiţia acestor funcţii rezultă, în baza faptului că φ şi ψ sînt diferenţiabile şi folosind teorema de derivare a funcţiilor compuse, că $\bar{f}$ şi $\bar{g}$ sînt derivabile pe $[a, b]$ şi

$$\bar{f}'(t) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_{(f(t),\, g(t))} \cdot f'(t) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_{(f(t),\, g(t))} \cdot g'(t).$$

$$\bar{g}'(t) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_{(f(t),\, g(t))} \cdot f'(t) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_{(f(t),\, g(t))} \cdot g'(t).$$

Însă toate funcţiile care apar în membrul al doilea al acestor egalităţi sînt continue; deci $\bar{f}'$ şi $\bar{g}'$ sînt continue pe $[a, b]$ şi propoziţia enunţată este demonstrată.

b. Transformarea ariilor printr-o transformare regulată

Să considerăm, în planul Ouv, un domeniu mărginit d, avînd drept frontieră o curbă γ simplă şi închisă. Conform celor demonstrate mai sus, rezultă că dacă T este o transformare normală de la planul Ouv la planul Oxy, atunci $D = T(d)$ este un domeniu din planul Oxy, iar $\Gamma = T(\gamma)$ este o curbă simplă şi închisă din planul Oxy.

Conform teoremei lui Jordan, există două domenii, d_1 şi d_2 conţinute în Ouv, d_1 mărginit, d_2 nemărginit, astfel încît $d_1 \cup d_2 \cup \gamma = Ouv$, γ separă pe d_1 de d_2 şi este frontiera lor: Fr. d_1 = Fr. $d_2 = \gamma$. În fapt, avem $d_1 = d$.

Tot conform teoremei lui Jordan, există în planul Oxy două domenii D_1 şi D_2, D_1 mărginit, D_2 nemărginit, astfel încît $D_1 \cup D_2 \cup \Gamma = Oxy$, Γ separă pe D_1 de D_2 şi este frontiera lor: Fr. D_1 = Fr. $D_2 = \Gamma$.

Ne propunem să arătăm că

$$D = D_1 \quad \text{şi} \quad T(d_2) = D_2.$$

Pentru demonstraţie, să considerăm două puncte α şi β situate în d. Vom arăta că punctele care corespund, prin T, lui α şi β, sînt situate sau amîndouă în D_1 sau amîndouă în D_2. Într-adevăr, să presupunem, prin reducere la absurd, că $T(\alpha) \in D_1$ şi $T(\beta) \in D_2$. Din faptul că d este un domeniu rezultă că d este o mulţime poligonal conexă, deci există o linie poligonală l care uneşte pe α cu β şi este conţinută în d. Deci l nu are nici un punct comun cu γ. Să punem $L = T(l)$. Dat fiind că T este biunivocă şi $T(\gamma) = \Gamma$, rezultă că L nu are nici un punct comun cu Γ. Pe de altă parte, este evident că $T(\alpha) \in L$ şi $T(\beta) \in L$. Dar L, ca imagine, printr-o transformare continuă, a unei mulţimi conexe, este de asemenea conexă. Rezultă deci că $T(\alpha)$ şi $T(\beta)$ sînt conţinute într-o mulţime conexă care nu întîlneşte pe Γ; aceasta vine în contradicţie cu faptul că Γ separă pe D_1 de D_2. Deci presupunerea că $T(\alpha)$ şi $T(\beta)$ ar aparţine unul lui D_1, altul lui D_2 este falsă.

Rezultă astfel că are loc una — şi numai una — dintre următoarele relaţii: $T(d) = D_1$, $T(d) = D_2$. Vom arăta că posibilitatea ca $T(d) = D_2$ este exclusă.

Într-adevăr, D_2 este un domeniu nemărginit, deci, dacă am avea $T(d) = D_2$, $T(d \cup \gamma)$ ar fi o mulţime nemărginită. Aceasta vine în contradicţie cu faptul că $T(d \cup \gamma)$, ca imagine, printr-o transformare continuă, a unei mulţimi compacte, trebuie să fie o mulţime mărginită. Am demonstrat deci că $T(d) = D_1$, adică $D = D_1$. Relaţia $T(d_2) = D_2$ este acum imediată, în baza biunivocităţii transformării T.

Cu pregătirea de mai sus putem acum să demonstrăm teorema de transformare a ariilor printr-o transformare regulată. Fie, în planul Ouv, o curbă γ simplă, închisă şi cu tangentă continuă. Fie d_1 domeniul mărginit şi d_2 domeniul nemărginit în care γ separă planul Ouv prin teorema lui Jordan. Avem deci Fr. $d_1 =$ Fr. $d_2 = \gamma$. Fie T o transformare regulată de la planul Ouv la planul Oxy. Vom mai presupune în plus, că derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea ale funcţiilor φ şi ψ există şi sînt continue în d_1. Această ipoteză nu este însă esenţială, fiind cerută doar de metoda de demonstraţie. Să punem $\Gamma = T(\gamma)$, $D_1 = T(d_1)$, $D_2 = T(d_2)$. Conform propoziţiilor demonstrate mai sus, Γ va fi o curbă simplă, închisă şi cu tangentă continuă, $\Gamma \subset Oxy$, iar D_1 şi D_2 vor fi domenii în Oxy. Conform teoremei lui Jordan, Γ separă planul Oxy în două domenii, unul mărginit, altul nemărginit. Conform celor demonstrate mai sus, domeniul mărginit corespunzător este D_1, iar cel nemărginit este D_2. În aceste condiţii, putem enunţa

T e o r e m a. 1. Domeniile d_1 şi D_1 au arie. Există în d_1 un punct (u_0, v_0) cu proprietatea

$$\text{aria } D_1 = \left|\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, \eta)}\right|_{(u_0, v_0)} \cdot \text{aria } d_1.$$

Cu alte cuvinte, aria domeniului D_1 se obţine din aria domeniului d_1 înmulţind-o pe aceasta din urmă cu valoarea absolută a jacobianului transformării T, calculată într-un anumit punct din d_1.

D e m o n s t r a ţ i e. Ideea demonstraţiei este următoarea. După ce vom stabili că d_1 şi D_1 au arie, vom exprima aria lui D_1 cu ajutorul unei integrale curbilinii de-a lungul lui Γ. Această integrală va fi redusă la o integrală Riemann şi, după o grupare convenabilă a termenilor, va fi retransformată într-o integrală curbilinie, de astă dată de-a lungul lui γ. Aplicîndu-se formula lui Green, se va obţine o integrală dublă care, tratată cu teorema de medie, va conduce la rezultatul dorit.

Conform lemei de la începutul cap. IX, γ şi Γ au arie nulă, deci d_1 şi D_1 au arie.

Pentru a fixa notaţiile, presupunem că γ este dată de reprezentarea

$$\begin{matrix} u = f(t), \\ v = g(t), \end{matrix} \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

deci Γ este dată de reprezentarea

$$\begin{matrix} x = \varphi(f(t), g(t)) = \bar{f}(t), \\ y = \psi(f(t), g(t) = \bar{g}(t). \end{matrix} \quad a \leqslant t \leqslant b),$$

Din proprietățile curbei Γ rezultă că funcțiile f și g sînt cu variație mărginită pe intervalul $[a, b]$, deci Γ este rectificabilă, simplă și închisă. Rezultă că D_1 este un domeniu Green și putem scrie

$$2\text{aria } D_1 = \oint_{\Gamma} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

Aplicînd, în membrul al doilea, teorema de reducere a integralei curbilinii la o integrală Riemann și ținînd seamă că

$$\bar{f}'(t) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_{(f(t),\, g(t))} \cdot f'(t) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_{(f(t),\, g(t))} \cdot g'(t),$$

$$\bar{g}'(t) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_{(f(t),\, g(t))} \cdot f'(t) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_{f(t),\, g(t))} \cdot g'(t),$$

avem

$$2 \text{ aria } D_1 = \int_a^b \left\{\varphi(f(t),\, g(t))\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_{(f(t),\, g(t))} \cdot f'(t) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_{(f(t),\, g(t))} \cdot g'(t)\right] -\right.$$

$$\left. - \psi(f(t),\, g(t))\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_{(f(t),\, g(t))} \cdot f'(t) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_{f(t),\, g(t))} \cdot g'(t)\right]\right\} \mathrm{d}t$$

și, grupînd astfel termenii de sub integrală, obținem

$$2 \text{ aria } D_1 = \int_a^b \left\{\left[\varphi(f(t),\, g(t))\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_{(f(t),\, g(t))} - \psi(f(t),\, g(t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_{(f(t),\, g(t))}\right] f'(t) +\right.$$

$$\left. + \left[\varphi(f(t),\, g(t))\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_{(f(t),\, g(t))} - \psi(f(t),\, g(t))\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_{(f(t),\, g(t))}\right] g'(t)\right\} \mathrm{d}t.$$

Să punem:

$$P(u, v) = \varphi(u, v)\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \psi(u, v)\,\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

$$Q(u, v) = \varphi(u, v)\,\frac{\partial\psi}{\partial v} - \psi(u, v)\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Cu aceste notații, avem:

$$2 \text{ aria } D_1 = \int_a^b \{P(f(t),\, g(t))f'(t) + Q(f(t),\, g(t))g'(t)\}\, \mathrm{d}t,$$

deci, aplicînd din nou teorema de reducere a integralei curbilinii la o integrală Riemann, obținem

$$2 \text{ aria } D_1 = \int_{\gamma} P(u, v)\mathrm{d}u + Q(u, v)\,\mathrm{d}v,$$

urmînd ca sensul de integrare pe γ să fie precizat ulterior.

Să aplicăm ultimei integrale curbilinii formula lui Green. Ţinînd seamă că

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \varphi(u, v)\frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \psi(u, v)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u},$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \varphi(u, v)\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \psi(u, v)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}$$

şi observînd că derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea sînt comutative în baza criteriului lui Schwarz, obţinem

$$2 \text{ aria } D_1 = \pm \iint_{d_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du dv = \pm 2 \iint_{d_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) du\, dv.$$

(În fapt, această integrală dublă se ia nu pe d_1, ci pe $\bar{d}_1$; însă convenim să omitem bara în astfel de cazuri.)

Sub ultima integrală dublă figurează tocmai jacobianul transformării T, jacobian care se notează

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}.$$

Înaintea integralei duble am pus $\pm$, deoarece nu s-a precizat încă sensul de parcurgere al integralei de-a lungul lui γ. Dacă acest sens va fi direct, atunci vom lua semnul $+$; în caz contrar, vom lua semnul $-$.

Deoarece transformarea T este regulată, rezultă că jacobianul păstrează acelaşi semn pe domeniul d_1 (v. vol. I, p. 624—625). Este clar că ultima integrală dublă va fi pozitivă sau negativă, după cum jacobianul lui T este pozitiv sau negativ. Deoarece aria $D_1 > 0$, rezultă că în faţa integralei duble se va lua $+$ sau $-$, după cum jacobianul este pozitiv sau negativ, cu alte cuvinte vom alege semnul în aşa fel încît să fie respectată cerinţa ca aria $D_1 > 0$. Ţinînd seama de legătura care există între semnul din faţa integralei duble, pe de o parte, şi sensul de integrare pe γ, pe de altă parte, rezultă că *sensul de integrare pe γ este direct sau retrograd, după cum jacobianul transformării T este pozitiv sau negativ pe d_1*.

Putem deci scrie:

$$\text{aria } D_1 = \iint_{d_1} \left|\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right| du\, dv.$$

Ţinînd seama că transformarea T este regulată, rezultă că jacobianul lui T este o funcţie continuă pe d_1. Putem deci aplica ultimei integrale duble teorema de medie. Rezultă existenţa unui punct $(u_0, v_0) \in d_1$, astfel încît

$$\iint_{d_1} \left|\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right| du\, dv = \left|\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right|_{(u_0, v_0)} \cdot \text{ aria } d_1$$

şi teorema este complet demonstrată.

Observaţii. Teorema de mai sus are un analog remarcabil de simplu în cazul domeniilor unidimensionale. Se poate arăta că singurele domenii ale dreptei reale sînt intervalele deschise. Fie deci un interval (α, β) situat pe axa Ou şi un interval (a, b) situat pe axa Ox. Analogul transformării regulate va fi aici o funcție f derivabilă, cu derivată continuă pe $[\alpha, \beta]$ și astfel încît $f'(u) \neq 0$ pentru $u \in [\alpha, \beta]$. În baza proprietății lui Darboux, f' are un semn neschimbat pe $[\alpha, \beta]$. f va fi deci crescătoare sau descrescătoare, după cum $a < b$ sau $a > b$, deci după cum $f(\alpha) < f(\beta)$ sau $f(\alpha) > f(\beta)$. În baza teoremei creșterilor finite, există un punct $\xi \in (\alpha, \beta)$, astfel încît, notînd cu "lung. I" lungimea intervalului I, să avem

$$\text{lung. } (a, b) = |f'(\xi)| \cdot \text{lung. } (\alpha, \beta),$$

adică tocmai analogul unidimensional al teoremei de transformare a ariilor printr-o transformare regulată.

c. Teorema de schimbare de variabile la integrala dublă

Formula de transformare a ariilor ne permite să stabilim

T e o r e m a 2. Fie, în planul Ouv, un domeniu d compact, avînd drept frontieră o curbă γ simplă, închisă și cu tangentă continuă. Fie T o transformare de la planul Ouv la planul Oxy, regulată pe d și astfel încît funcțiile φ și ψ care definesc pe T să aibă derivate parțiale mixte de ordinul al doilea continue în d. Să punem $D = T(d)$, $\Gamma = T(\gamma)$. Dacă f este o funcție continuă pe domeniul compact D, avem

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_d f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

D e m o n s t r a ț i e. Existența celor două integrale duble rezultă din următoarele fapte: 1° f este continuă pe D, iar φ, ψ și jacobianul lui T sînt funcții continue pe d; 2° domeniile d și D au arie, deoarece γ și Γ, avînd tangentă continuă, sînt de arie nulă. Rămîne să arătăm că cele două integrale duble sînt egale.

Fie o descompunere δ a domeniului compact d în domeniile compacte $d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots, d_n$ astfel încît frontiera fiecărui domeniu d_i să fie o curbă simplă, închisă și cu tangentă continuă, iar intersecția $d_j \cap d_i$ să fie de arie nulă pentru $i \neq j$.

Prin transformarea regulată T, fiecărui domeniu d_i îi corespunde un domeniu D_i conținut în planul Oxy, astfel încît frontiera lui D este o curbă simplă, închisă și cu tangentă continuă, intersecția interioarelor domeniilor D_i și D_j este vidă pentru $i \neq j$, iar domeniile compacte $D_1, D_2, \ldots, D_i, \ldots, D_n$ determină o descompunere δ' a domeniului D.

Să aplicăm fiecărui domeniu d_i teorema de transformare a ariilor printr-o transformare regulată. Rezultă, pentru fiecare valoare a lui i, $1 \leqslant i \leqslant n$, existența unui punct $(u_i, v_i) \in d_i$, astfel încît

$$\text{aria } D_i = \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right|_{(u_i,\, v_i)} \cdot \text{aria } d_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Să punem

$$x_i = \varphi(u_i, v_i), \qquad y_i = \psi(u_i, v_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Avem, evident, $(x_i, y_i) \in D_i (i = 1, 2, ..., n)$, deci putem forma suma riemanniană

$$\sigma_{\delta'}(f; x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \text{aria } D_i.$$

Ţinînd seama de relaţiile stabilite mai sus, obţinem

$$\sigma_{\delta'}(f; x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u\, v_i,)) \cdot \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right|_{(u_i, v_i)} \cdot \text{aria } d_i.$$

Punînd

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right|,$$

avem

$$\sigma_{\delta'}(f; x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i) \cdot \text{aria } d_i = \sigma_{\delta}(F; u_i, v_i).$$

Am arătat astfel că orice sumă riemanniană relativă la f şi δ' este egală cu o sumă riemanniană relativă la F şi δ.

Fie $\{\delta_n\}$ un şir de descompuneri de normă tinzînd la zero. Datorită faptului că transformarea T este regulată pe d, rezultă că T este uniform continuă pe d, deci norma descompunerii δ'_n tinde şi ea la zero cînd $n \to \infty$. În baza teoremei de reprezentare a integralei duble ca limită de sume riemanniene şi a existenţei celor două integrale duble care apar în enunţul teoremei, rezultă egalitatea celor două integrale duble şi teorema este complet demonstrată.

Observaţii. Ipoteza de existenţă şi continuitate a derivatelor parţiale mixte de ordinul al doilea ale funcţiilor φ şi ψ nu este esenţială, fiind cerută doar de metoda de demonstraţie.

În ceea ce priveşte condiţia de neanulare a jacobianului transformării T, este suficient ca ea să fie îndeplinită în interiorul domeniului d; altfel spus, teorema de schimbare de variabile rămîne în vigoare dacă jacobianul se anulează numai în puncte aparţinînd frontierei domeniului d. Într-adevăr, faptul că jacobianul este diferit de zero a intervenit pentru a garanta că jacobianul evită în d un anumit semn (indiferent care). Însă este uşor de arătat că dacă zerourile jacobianului sînt situate exclusiv pe frontiera lui d, atunci jacobianul evită un anumit semn în d. Pentru a arăta aceasta, să presupunem, prin reducere la absurd, că există pe Fr. d două puncte P_1 şi P_2 astfel încît în primul jacobianul să fie pozitiv, iar în al doilea să fie negativ. Dat fiind că jacobianul este o funcţie continuă în P_1 şi în P_2, rezultă că jacobianul este pozitiv într-o anumită vecinătate a lui P_1 şi negativ într-o anumită vecinătate a lui P_2, deci, în baza continuităţii în d a jacobianului, există un punct P_3 din interiorul lui d, în care jacobianul se anulează. Aceasta vine în contradicţie cu ipoteza că jacobianul se anulează cel mul pe Fr. d; deci jacobianul are semn constant în d.

Se poate arăta că şi condiţia de biunivocitate a transformării T este esenţială numai pentru interioarele domeniilor d şi D.

Teorema de schimbare de variabile la integrala dublă are o foră perfect analogă uneia dintre teoremele de schimbare de variabilă la integrala simplă. Pentru a ne da seama de aceasta, este suficiemt să ţinem seama că jacobianul joacă rolul derivatei.

Exemple. Dacă din punct de vedere teoretic transformarea T este dată, din punct de vedere practic tocmai alegerea cît mai judicioasă a acestei transformări constituie problema esenţială, pentru a cărei rezolvare nu există nici o metodă generală. Totuşi, se pot da unele indicaţii care acoperă o bună parte din situaţiile întîlnite.

Una dintre cele mai utilizate schimbări de variabile este trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare. Să considerăm transformarea T, definită în modul următor

$$x = u \cos v \qquad (0 \leqslant u \leqslant \rho),$$

$$y = u \sin v \qquad (0 \leqslant v \leqslant 2\pi).$$

Existenţa şi continuitatea derivatelor parţiale este evidentă. Jacobianul este dat de

$$\begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u \cos^2 v + u \sin^2 v = u.$$

Constatăm că jacobianul se anulează numai pe axa ordonatelor din planul Ouv, lucru permis, conform observaţiilor făcute mai sus. Domeniul d se transformă, prin T, în domeniul D din planul Oxy (fig. 24 şi 25). De asemenea, condiţia de biunivocitate a transformării este verificată numai pentru interioarele domeniilor considerate, însă nici aceasta nu împiedică aplicarea teoremei de schimbare de variabile.

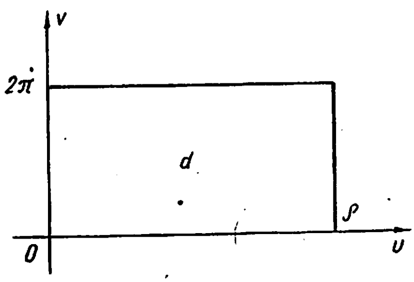


Fig. 24

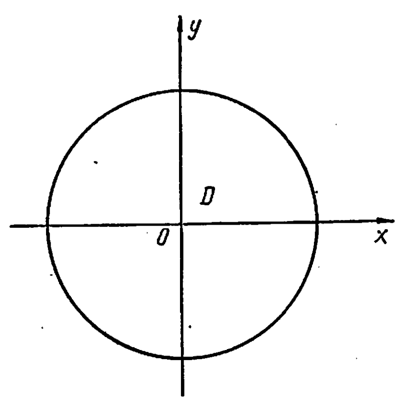


Fig. 25

Dacă f este o funcţie continuă pe D, atunci teorema de schimbare de variabile la integrala dublă ne dă:

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_d f(u\cos v,\ u\sin v)u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Integrala din membrul al doilea se descompune în integrale simple şi obţinem:

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\rho u\,\mathrm{d}u\int_0^{2\pi} f(u\cos v, u\sin v)\,\mathrm{d}v.$$

Luînd de pildă, $f(x, y) = x^2 + y^2$, rezultă

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\rho u^3\,\mathrm{d}u\int_0^{2\pi}\mathrm{d}v = \frac{2\pi\rho^4}{4} = \frac{\pi\rho^4}{2}.$$

Capitolul XII

CARACTERIZAREA FUNCŢIILOR INTEGRABILE

a. Preliminarii

Am definit două tipuri de integrabilitate: unul face apel la noţiunea de funcţie primitivă, celălalt foloseşte sumele integrale. Am arătat că funcţiile continue pe un domeniu compact sînt integrabile în ambele sensuri şi valorile integralelor corespunzătoare coincid. Am menţionat că dacă părăsim clasa funcţiilor continue, cele două tipuri de integrabilitate nu mai sînt echivalente. Această situaţie nu trebuie să ne mire; ea corespunde unei situaţii asemănătoare în cazul funcţiilor de o singură variabilă. Se ştie din volumul 1 că există funcţii de o variabilă, integrabile Riemann, care nu au primitivă. De asemenea, există funcţii mărginite care au primitivă, dar nu sînt integrabile Riemann. Vom schiţa aici un astfel de exemplu, urmînd ca, pentru detalii, cititorul să consulte tratatul de *Analiză matematică* al academicianului Miron Nicolescu (vol. II, ediţia 1958).

Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ un şir format cu toate numerele raţionale din intervalul $[0, 1]$. Să punem

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x - r_n)^{\frac{1}{3}}.$$

Deoarece

$$\left| \frac{1}{2^n} (x - r_n)^{\frac{1}{3}} \right| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

rezultă că seria considerată converge uniform, deci funcţia φ este continuă pe $[0, 1]$. Ca sumă a unei serii de funcţii strict crescătoare pe $[0, 1]$, funcţia φ este strict crescătoare pe $[0, 1]$. Funcţia φ este deci inversabilă, iar inversa ei, pe care o vom nota cu f, este continuă şi strict crescătoare pe intervalul compact $[\varphi(0), \varphi(1)]$. Se poate arăta că funcţia φ are în fiecare punct din $[0, 1]$ derivată unică — finită sau infinită — , iar punctele în care derivata este infinită formează o mulţime peste tot densă în $[0, 1]$. Se poate, de asemenea, arăta (loc. cit.) că derivata funcţiei φ nu este în nici un punct egală cu zero. Mai mult decît atît, există un număr pozitiv λ, astfel încît $\varphi'(x) > \lambda$ pentru orice $x \in [0, 1]$.

Este ușor de văzut că dacă φ are derivată infinită în x_0, atunci f are derivată nulă în $\varphi(x_0)$. Reciproc, dacă f are derivată nulă în $\varphi(x_0)$, atunci φ are derivată infinită în x_0. De aici și din faptul că imaginea, printr-o aplicație homeomorfă, a unei mulțimi dense este tot o mulțime densă (exercițiu!) rezultă că punctele în care derivata funcției f este egală cu zero formează o mulțime densă în $[\varphi(0), \varphi(1)]$. Totodată, din faptul că $\varphi'(x)$ există pentru orice $x \in [0, 1]$, și $\varphi'(x) > \lambda > 0$, rezultă că $f'(x)$ există pentru orice $x \in [\varphi(0), \varphi(1)]$ și, pentru un anume număr real M, avem $0 \leqslant f'(x) < M$.

Vom arăta că f' nu este integrabilă Riemann pe nici un interval conținut în $[\varphi(0), \varphi(1)]$. Vom face demonstrația pentru intervalul $[\varphi(0), \varphi(1)]$, urmînd ca pentru subintervale să se procedeze în mod analog.

Să presupunem, prin reducere la absurd, că f' este integrabilă Riemann pe $[\varphi(0), \varphi(1)]$. În baza formulei lui Leibniz și Newton, avem

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f'(x)\mathrm{d}x = f(\varphi(1)) - f(\varphi(0)) > 0.$$

Însă, pe de altă parte, din faptul că f' se anulează în orice subinterval din $[\varphi(0), \varphi(1)]$, rezultă că, pentru orice diviziune Δ a intervalului $[\varphi(0), \varphi(1)]$, există o sumă riemanniană $\sigma_\Delta(f)$ egală cu zero; de aici, în baza definiței integrabilității și integralei Riemann, rezultă

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f'(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

în contradicție cu inegalitatea obținută mai sus. Deci presupunerea că f' ar fi integrabilă Riemann pe $[\varphi(0), \varphi(1)]$ este falsă.

Această situație a condus pe matematicieni la considerarea unor integrale mai generale, cu ajutorul cărora să se poată integra orice derivată. Este interesant că nici integrala introdusă de Lebesgue, integrală care va fi studiată în cadrul cursului de *Teoria funcțiilor reale*, nu rezolvă această problemă; există funcții derivate care nu sînt integrabile în sensul lui Lebesgue. Totuși, teoria integralei Lebesgue rezolvă problema de mai sus pentru o clasă foarte întinsă de derivate; anume, se arată că orice derivată mărginită este integrabilă în sensul lui Lebesgue. În particular, derivata $f'(x)$ considerată mai sus este și ea integrabilă în sensul lui Lebesgue.

O integrală mai generală decît integrala Lebesgue, cu ajutorul căreia se poate integra *orice* derivată finită, a fost găsită, independent unul de altul, de către A. Denjoy și O. Perron.

Problema caracterizării structurale a funcțiilor care au primitivă nu a putut fi rezolvată pînă azi, deși s-au depus mari eforturi în această direcție și s-au obținut multe rezultate relativ apropiate de soluție.

În ceea ce privește însă problema caracterizării funcțiilor integrabile în sensul lui Riemann, există o teoremă clasică a lui Lebesgue, care dă o soluție elegantă și definitivă. Pentru a putea expune această teoremă este nevoie, mai întîi, să dăm unele noțiuni și rezultate pregătitoare.

O mulţime E din spaţiul euclidian cu n dimensiuni R^n este de *măsură n-dimensională Lebesgue nulă* dacă pentru fiecare număr $\varepsilon > 0$ se poate găsi un şir de intervale n-dimensionale $I_1, I_2, \ldots, I_p, \ldots$, cu următoarele două proprietăţi:

$$1^\circ \; E \subset \bigcup_{p=1}^{\infty} I_p.$$

2° Seria formată cu măsurile intervalelor $I_p (p = 1, 2, \ldots)$ este convergentă, iar suma ei este inferioară lui ε. (Precizăm că măsura unui interval n-dimensional este, prin definiţie, produsul lungimilor a n muchii pornind din acelaşi punct.)

Observaţie. În loc de „măsură n-dimensională Lebesgue nulă" se spune „măsură Lebesgue nulă", ori de cîte ori nu există posibilitatea de confuzie.

Chiar din definiţie rezultă că

O parte a unei mulţimi de măsură Lebesgue nulă este tot o mulţime de măsură Lebesgue nulă.

Vom demonstra acum că

Dacă $E_1, E_2, \ldots, E_p \ldots$ este un şir de mulţimi de măsură Lebesgue nulă, atunci mulţimea

$$E = \bigcup_{p=1}^{\infty} E_p$$

este tot o mulţime de măsură Lebesgue nulă.

Într-adevăr, fie $I_1^p, I_2^p, \ldots, I_s^p, \ldots$ un şir de intervale care satisface proprietăţile 1° şi 2° relativ la mulţimea $E_p (p = 1, 2, \ldots)$ şi luînd în rolul lui ε numărul $\frac{\varepsilon}{2^p}$.

Să considerăm acum familia de intervale $\{I_s^p\}$, unde $s = 1, 2, \ldots;$ $p = 1, 2, \ldots$ Această familie poate fi ordonată într-un şir $I_1, I_2, \ldots, I_m, \ldots$, punînd $I_1 = I_1^1$, $I_2 = I_2^1$, $I_3 = I_1^2$, $I_4 = I_2^2$, $I_5 = I_3^1$, $I_6 = I_1^3$ şi aşa mai departe. Avem, evident

$$E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m,$$

iar seria formată cu măsurile intervalelor $I_1, I_2, \ldots, I_m, \ldots$ este convergentă şi are ca sumă un număr inferior sumei seriei

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^p} + \ldots,$$

sumă care este egală cu ε. Proprietatea enunţată este astfel complet demonstrată.

Corolar. Orice mulţime numărabilă este de măsură Lebesgue nulă.

Pe baza definiţiei date, în volumul 1, noţiuni de mulţime de măsură Jordan nulă, rezultă imediat că

Orice mulţime de măsură Jordan nulă este de măsură Lebesgue nulă.

Reciproca acestei propoziţii nu este adevărată. Astfel, mulţimea numerelor raţionale este o mulţime de măsură Lebesgue nulă, dar nu este măsurabilă în sensul lui Jordan.

Este însă uşor de văzut că

O mulţime de măsură Lebesgue nulă este de măsură Jordan interioară egală cu zero.

Vom mai avea nevoie de următoarea noţiune.

Fie f o funcţie reală, definită şi mărginită pe domeniul $D \subset R^n$. Fie $x \in D$ şi fie $S(x)$ o sferă oarecare, cu centrul în x şi conţinută în D. Să punem:

$$m(f;\ x) = \sup_{S(x)} \{\inf(f;\ S(x))\};\quad M(f;\ x) = \inf_{S(x)} \{\sup\ (f;\ S(x))\}.$$

Numărul

$$\omega(f;\ x) = M(f;\ x) - m(f;\ x)$$

se numeşte oscilaţia funcţiei f în punctul x. Este uşor de văzut că, dacă $x \in D$, atunci f este discontinuă în x dacă şi numai dacă $\omega\ (f;\ x) > 0$.

Fiind dată o mulţime $E \subset D$, vom nota cu $\omega\ (f;\ E)$ diferenţa dintre marginea superioară şi marginea inferioară a lui f pe E. $\omega\ (f;\ E)$ se numeşte oscilaţia funcţiei f pe mulţimea E.

L e m ă. **Fie f mărginită pe domeniul compact $D \subset R^n$. Fie D mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f în D. Există un şir $F_1, F_2, \ldots, F_p, \ldots$ de mulţimi închise, conţinute în D, astfel încît**

$$D = \bigcup_{p=1}^{\infty} F_p.$$

D e m o n s t r a ţ i e. Să punem

$$D_\varepsilon = \{x;\ x \in D,\ \omega(f;\ x) \geqslant \varepsilon\}.$$

Mulţimea D_ε este închisă. Într-adevăr, fie ξ un punct de acumulare pentru D_ε. În orice vecinătate V_ξ a lui ξ există puncte x pentru care $\omega(f;\ x) \geqslant \varepsilon$. Rezultă că $\omega(f;\ V_\xi) \geqslant \varepsilon$, deci $\omega\ (f;\ \xi) \geqslant \varepsilon$ şi $\xi \in D_\varepsilon$. Aşadar, D_ε este închisă.

Să observăm acum că avem

$$D = \bigcup_{p=1}^{\infty} D_{\frac{1}{p}},$$

deci lema este demonstrată punînd

$$F_p = D_{\frac{1}{p}}.$$

Să mai observăm că

O mulţime închisă şi mărginită, de măsură Lebesgue nulă, este de măsură Jordan nulă.

Într-adevăr, dacă E este închisă, mărginită şi de măsură Lebesgue nulă, atunci, fiind dat $\varepsilon > 0$, există un şir de intervale $\{I_n\}$ $(1 \leqslant n < \infty)$ care acoperă pe E şi de lungime totală mai mică decît ε; în baza teoremei de acoperire Borel-Lebesgue, din familia $\{I_n\}$ se poate extrage o subfamilie finită de intervale care acoperă pe E. Deci, E este de măsură Jordan nulă.

b. Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate riemanniană

Cu pregătirile din §-ul precedent putem trece la enunţarea şi demonstrarea teoremei lui Lebesgue.

Criteriul lui Lebesgue. Fie f o funcţie reală, definită şi mărginită pe domeniul compact $D \subset R^n$. Funcţia f este integrabilă Riemann pe D dacă şi numai dacă mulţimea D a punctelor de discontinuitate ale lui f este de măsură Lebesgue nulă.

Demonstraţie. Ne vom ocupa, în mod explicit, de funcţii de o singură variabilă reală. Consideraţiile se transpun, cu modificări neînsemnate, la funcţii de mai multe variabile reale.

Condiţia este necesară. În baza lemei de mai sus avem

$$D = \bigcup_{p=1}^{\infty} D_{\frac{1}{p}},$$

unde

$$D_{\frac{1}{p}} = \left\{x;\ x \in D,\ \omega(f;\ x)\ \geqslant \frac{1}{p}\right\}$$

şi $D_{\frac{1}{p}}$ este închisă pentru orice p natural. Să presupunem că f este integrabilă Riemann pe intervalul $D = [a, b]$ şi să admitem, prin reducere la absurd, că D nu este de măsură nulă. În acest caz, în baza uneia dintre proprietăţile stabilite mai sus, există o valoare p_0 a lui p, astfel încît mulţimea $D_{\frac{1}{p_0}}$ să nu fie de măsură Lebesgue nulă; deci nici de măsură Jordan nulă. Să notăm cu λ măsura Jordan a mulţimii $D_{\frac{1}{p_0}}$. Fie $\Delta = (a = x_0 < < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i)$, unde $\omega_i = \omega(f;\ [x_i, x_{i+1}])$.

Să punem

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \Sigma'\ \omega_i(x_{i+1} - x_i) + \Sigma''\ \omega_i(x_{i+1} - x_i), \tag{1}$$

unde Σ' conţine acei termeni din suma de mai sus pentru care intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ este disjunct de $D_{\frac{1}{p}}$, iar Σ'' conţine toţi ceilalţi termeni.

Rezultă că pentru orice interval $[x_i, x_{i+1}]$ a cărui contribuţie figurează în Σ'', avem

$$\omega_i \geqslant \frac{1}{p_0}, \text{ deci}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) \geqslant \Sigma'' \frac{1}{p_0}(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{p_0} \Sigma''(x_{i+1} - x_i) \geqslant \frac{1}{p_0} \lambda > 0.$$

De aici deducem că, pentru orice diviziune Δ a lui $[a, b]$, avem

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \geqslant \frac{1}{p_0} \lambda > 0,$$

deci, în baza unui binecunoscut criteriu de integrabilitate, f nu este integrabilă Riemann pe $[a, b]$, în contradicţie cu ipoteza. Aşadar, presupunerea că D nu ar fi de măsură nulă este falsă şi necesitatea condiţiei este demonstrată.

Condiţia este suficientă. Fie D de măsură Lebesgue nulă. Să presupunem, prin reducere la absurd, că f nu este integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Aceasta înseamnă că există un număr $\lambda > 0$, astfel încît, pentru orice $\eta > 0$, să existe o diviziune Δ de normă inferioară lui η, pentru care

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) > \lambda. \tag{2}$$

Fie

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2(b-a)}.$$

Să adoptăm descompunerea (1) cu următoarea convenţie: Σ' conţine termenii din Σ relativi la intervale $[x_i, x_{i+1}]$ pentru care $\omega(f; [x_i, x_{i+1}]) < \varepsilon$, iar Σ'' conţine toţi ceilalţi termeni din Σ.
Rezultă că

$$\Sigma' \omega_i(x_{i+1} - x_i) \leqslant \varepsilon(b-a) = \frac{\lambda}{2}, \tag{3}$$

$$\Sigma'' \omega_i(x_{i+1} - x_i) \leqslant \omega \Sigma''(x_{i+1} - x_i) = \omega L, \tag{4}$$

unde $\omega = \omega(f; [a, b])$, iar $L = \Sigma''(x_{i+1} - x_i)$.

Însumînd inegalităţile (4) şi (3), obţinem

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) \leqslant \frac{\lambda}{2} + \omega L. \tag{5}$$

Dacă presupunem acum că diviziunea Δ, la care se referă ultima sumă, este o diviziune pentru care are loc inegalitatea (2), atunci din (2) deducem

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) \geqslant \lambda \tag{6}$$

şi din (5) şi (6) obţinem

$$\lambda \leqslant \frac{\lambda}{2} + \omega L,$$

adică

$$L \geqslant \frac{\lambda}{2\omega} > 0,$$

cu alte cuvinte suma lungimilor intervalelor $[x_i, x_{i+1}]$, pe care oscilaţia lui f nu este inferioară lui ε, este mai mare decît $\frac{\lambda}{2\omega}$ şi aceasta *oricare* ar fi diviziunea Δ pentru care are loc (2).

Însă există diviziuni de normă oricît de mică, pentru care are loc egalitatea (2). Fie $\{\Delta_n\}$ un şir de diviziuni din ce în ce mai fine, de normă tinzînd la zero, diviziuni pentru care are loc (2). (Exerciţiu: să se arate existenţa acestui şir!) Pentru fiecare Δ_n să notăm cu L_n valoarea corespunzătoare a lui L; L_n este deci suma lungimilor acelor intervale din Δ_n în care oscilaţia lui f nu este inferioară lui ε. Să notăm cu E_n mulţimea punctelor acelor intervale a căror lungime totală a fost notată cu L_n. E_n este deci o reuniune finită de intervale fără puncte interioare comune. Lungimea totală a acestor intervale este deci mai mare sau egală cu $\frac{\lambda}{2\omega}$ şi aceasta oricare ar fi numărul natural n. Să observăm că, în baza faptului că şirul $\{\Delta_n\}$ este format din diviziuni din ce în ce mai fine, avem

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \ldots$$

Punînd

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n,$$

rezultă că

$$A = D_\varepsilon = \{x;\ a \leqslant x \leqslant b;\ \omega(f, x) \geqslant \varepsilon\};$$

deci D_ε, neputînd fi acoperită cu un număr finit de intervale de lungime totală oricît de mică, nu este de măsură Jordan nulă. Ţinînd seama că, în baza demonstraţiei lemei de mai sus, D_ε este închisă şi cum în orice caz D_ε este mărginită, rezultă că D_ε nu este nici de măsură Lebesgue nulă. (Am văzut mai sus că orice mulţime închisă şi mărginită, de măsură Lebesgue nulă, este de măsură Jordan nulă.) Dar

$$D_\varepsilon \subset D,$$

deci cu atît mai mult D nu este de măsură Lebesgue nulă. Am ajuns astfel la o contradicţie cu ipoteza. Rezultă că presupunerea că f n-ar fi integrabilă Riemann pe $[a, b]$ este falsă.

C o r o l a r u l 1. **Dacă f este integrabilă Riemann şi pozitivă pe D, atunci $\sqrt{f}$ este de asemenea integrabilă Riemann pe D.**

Într-adevăr, din faptul că f este integrabilă pe D rezultă că f este mărginită pe D, deci şi $\sqrt{f}$ este mărginită pe D. Pe de altă parte, punctele de discontinuitate ale lui $\sqrt{f}$ sînt exact punctele de discontinuitate ale lui f, deci, în baza teoremei de mai sus (necesitatea condiţiei) mulţimea lor este de măsură Lebesgue nulă. Folosind din nou teorema de mai sus (suficienţa condiţiei), rezultă că $\sqrt{f}$ este integrabilă Riemann pe D.

Observație. Corolarul 1 a fost folosit în demonstrația teoremei care dă expresia lungimii unei curbe printr-o integrală Riemann.

Corolarul 2. Dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ este un şir uniform convergent de funcții integrabile Riemann pe D, iar $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, atunci f este integrabilă Riemann pe D şi

$$\int\limits_D f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_D f_n(x)\,dx. \tag{7}$$

Demonstrație. Să notăm cu $\mathfrak{D}_n$ mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției $f_n (n = 1, 2, \ldots)$ şi cu $\mathfrak{D}$ mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui f pe D. Este uşor de văzut că

$$\mathfrak{D} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}_n$$

(aceasta rezultă din faptul că, pe baza uniformității convergenței, f este continuă în orice punct în care toate funcțiile f_n sînt continue). Însă conform criteriului lui Lebesgue (necesitatea condiției), fiecare mulțime $\mathfrak{D}_n$ este de măsură Lebesgue nulă, deci şi reuniunea lor este de măsură nulă. Aşadar D, ca parte a unei mulțimi de măsură nulă, este de măsură nulă. Pe de altă parte, fiecare funcție f_n este mărginită pe D, deoarece este integrabilă pe D (acest fapt se demonstrează ca şi în cazul funcțiilor de o variabilă). f, ca limită a unui şir uniform convergent de funcții mărginite, este o funcție mărginită pe D (exercițiu!). Aplicînd din nou criteriul lui Lebesgue (suficiența condiției) rezultă că f este integrabilă Riemann pe D.

În ceea ce priveşte relația (7), ea se demonstrează exact la fel ca în cazul funcțiilor de o singură variabilă.

Corolarul 3. Dacă f este integrabilă pe D, atunci $|f|$ este de asemenea integrabilă pe D.

Într-adevăr, din faptul că f este mărginită pe D rezultă că $|f|$ este mărginită pe D. Notînd cu $\mathfrak{D}(f)$, respectiv $\mathfrak{D}(|f|)$, mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui f, respectiv $|f|$, este uşor de văzut că

$$\mathfrak{D}(|f|) \subset \mathfrak{D}(f).$$

Însă, în baza criteriului lui Lebesgue (necesitatea condiției), $\mathfrak{D}(f)$ este de măsură nulă, deci şi $\mathfrak{D}(|f|)$ este de măsură nulă. Folosind din nou criteriul lui Lebesgue (suficiența condiției) rezultă că $|f|$ este integrabilă Riemann pe D.

Corolarul 4. Dacă f şi g sînt integrabile Riemann pe D, atunci fg este integrabilă Riemann pe D.

Demonstrație. Notînd cu $\mathfrak{D}_\varphi$ mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții φ, avem

$$\mathfrak{D}_{fg} \subset \mathfrak{D}_f \cup \mathfrak{D}_g$$

Deoarece $\mathfrak{D}_f$ şi $\mathfrak{D}_g$ sînt de măsură Lebesgue nulă, rezultă că şi $\mathfrak{D}_{fg}$ este de măsură nulă deci, în baza suficienței criteriului lui Lebesgue şi ținînd seamă că fg este mărginită pe D, fg este integrabilă pe D.

Capitolul XIII

CADRUL GENERAL AL DESCOMPUNERII UNEI INTEGRALE DUBLE ÎN INTEGRALE SIMPLE

TEOREMA DE DESCOMPUNERE A INTEGRALEI DUBLE ÎN INTEGRALE SIMPLE, PENTRU FUNCŢII INTEGRALE RIEMANN

Într-un paragraf precedent, am dat o teoremă de descompunere a integralei duble în integrale simple, însă această teoremă privea numai funcţiile continue. Acum vom da o generalizare a acestei teoreme, folosind metoda sumelor riemanniene; deci teorema care urmează se referă la integrala Riemann definită prin sume riemanniene. Vom considera mai întîi cazul unui interval bidimensional, urmînd ca într-o etapă ulterioară să trecem la domenii simple.

Fie f o funcţie reală definită pe intervalul bidimensional compact I, definit de inegalităţile $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Să punem, în ipoteza că acest lucru are sens,

$$\Phi(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Dacă funcţia Φ este definită şi integrabilă Riemann pe $[a, b]$, această integrală se scrie

$$\int_a^b \Phi(x)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy$$

şi se numeşte *integrala iterată a funcţiei f pe I, în ordinea y, x.*

Să punem, în ipoteza că acest lucru are sens,

$$\psi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Dacă funcţia ψ este definită şi integrabilă Riemann pe $[c, d]$, această integrală se scrie

$$\int_c^d \psi(y)\, dy = \int_c^b dy \int_a^d f(x, y)\, dx$$

şi se numeşte *integrala iterată a funcţiei f pe I, în ordinea x, y.*

Cele două integrale definite mai sus se numesc, cu un singur termen, *integralele iterate ale lui f pe I.*

Dacă funcţia f este continuă pe I atunci, evident, funcţia Φ este definită şi continuă pe $[a, b]$, iar funcţia ψ este definită şi continuă pe $[c, d]$. În general însă, din integrabilitatea funcţiei f pe I nu rezultă existenţa funcţiilor Φ şi ψ şi, cu atît mai mult, nu rezultă că integralele iterate există. De asemenea, există funcţii f definite pe I pentru care are sens numai una dintre cele două integrale iterate, după cum există funcţii definite pe I pentru care integralele iterate există, dar au valori diferite. În acest caz, funcţia f nu este integrabilă pe I. Vom da cîteva exemple care ilustrează astfel de situaţii:

1° Fie f definită pe I în felul următor:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \neq \dfrac{a+b}{2} \text{ sau dacă } x = \dfrac{a+b}{2} \text{ iar } y \text{ este raţional.} \\ 1, \text{ dacă } x = \dfrac{a+b}{2} \text{ iar } y \text{ este iraţional.} \end{cases}$$

Această funcţie este, evident, mărginită pe I. Mulţimea punctelor de discontinuitate este segmentul de dreaptă care uneşte punctele $\left(\dfrac{a+b}{2}, c\right)$ şi $\left(\dfrac{a+b}{2}, d\right)$, deci este de măsură bidimensională Lebesgue nulă. În baza criteriului lui Lebesgue, f este integrabilă Riemann pe I. Totuşi, funcţia Φ nu este definită pentru $x = \dfrac{a+b}{2}$, deoarece $\Phi(y) = f\left(\dfrac{a+b}{2}, y\right)$ este discontinuă pentru orice valoare a lui y din intervalul $[c, d]$, deci mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui φ nu este de măsură nulă şi, prin urmare, φ nu este integrabilă Riemann pe $[c, d]$.

2° Fie f definită pe pătratul unitate, în felul următor:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{2}, \ x \text{ raţional sau } \dfrac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1, \ x \text{ iraţional.} \\ 0, \text{ dacă } \dfrac{1}{2} < y \leqslant 1, \ x \text{ raţional sau } 0 \leqslant y < \dfrac{1}{2}, \ x \text{ iraţional.} \end{cases}$$

Pentru un x fixat avem:

$$\Phi(x) = \int_0 f(x, y)\, dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2}, \text{ dacă } x \text{ este raţional}$$

şi

$$\Phi(x) = \int_0^1 f(x, y)\, dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy = \frac{1}{2}, \text{ dacă } x \text{ este irațional.}$$

Rezultă că

$$\int_0^1 \Phi(x)\, dx = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}.$$

Cealaltă integrală iterată nu există; într-adevăr, pentru $0 < y_0 < 1$, funcția $\varphi(x) = f(x, y_0)$ este discontinuă în fiecare punct din $[0, 1]$, deci în baza criteriului lui Lebesgue, φ nu este integrabilă Riemann pe $[0, 1]$.

3° Fie f definită pe pătratul unitate în felul următor:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^3} \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ și punctul } (x, y) \text{ este diferit de origine,} \\ 0 \text{ dacă } x = y = 0. \end{cases}$$

Avem

$$\int_0^1 \Phi(x)\, dx = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{2x}{(x+y)^3} - \frac{1}{(x+y)^2}\right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{y}{(x+y)^2}\right]_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\int_0^1 \psi(y)\, dy = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx = \int_0^1 dy \left[\frac{-x}{(x+y)^2}\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{2},$$

deci cele două integrale iterate există, dar au valori diferite. Se observă că funcția f este nemărginită pe pătratul unitate (anume, în vecinătatea originii), deci f nu este integrabilă Riemann pe pătratul unitate.

Se poate arăta că nemărginirea lui f, în condițiile în care integralele iterate există și au valori diferite, este un fenomen inevitabil. Într-adevăr, există o teoremă care afirmă că din mărginirea lui f pe I și existența integralelor iterate rezultă egalitatea lor.

Vom da acum o teoremă de descompunere a integralei duble în integrale simple, teoremă care, deși nu se aplică *tuturor* funcțiilor integrabile Riemann într-un interval bidimensional compact, cuprinde totuși clase largi de funcții discontinue.

Teorema de descompunere a integralelor duble în integrale simple, într-un interval bidimensional. Fie f o funcție reală, integrabilă Riemann pe intervalul definit de inegalitățile $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Să presupunem că, pentru orice $x \in [a, b]$, există integrala Riemann

$$\int_c^d f(x, y)\, dy.$$

În aceste condiții, există integrala iterată

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

şi avem

$$\iint_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

D e m o n s t r a ţ i e. Să punem

$$\Phi(x) = \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Vom arăta că Φ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$.

Fie $\Delta' = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b)$ o diviziune a lui $[a, b]$. Fie $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, altfel arbitrar $(i = 0, 1, \ldots n - 1)$.

Avem

$$\Phi(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i) = (x_{i+1} - x_i) \int_c^d f(\xi_i, y)\,dy = (x_{i+1} - x_i) \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)\,\mathrm{d}y,$$

unde $\Delta'' = (c = y_0 < y_1 < \ldots < y_j < y_{j+1} < \ldots < y_m = d)$ este o diviziune a intervalului $[c, d]$.

Diviziunea Δ' a lui $[a, b]$ şi diviziunea Δ'' a lui $[c, d]$ definesc, laolaltă, o descompunere Δ a lui I în intervale bidimensionale compacte $I_{ij}(i = 0, \ldots, n - 1;\ j = 0, \ldots, m - 1)$, intervalul I_{ij} fiind definit de inegalităţile $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$, $y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1}$ (figura 26 a).

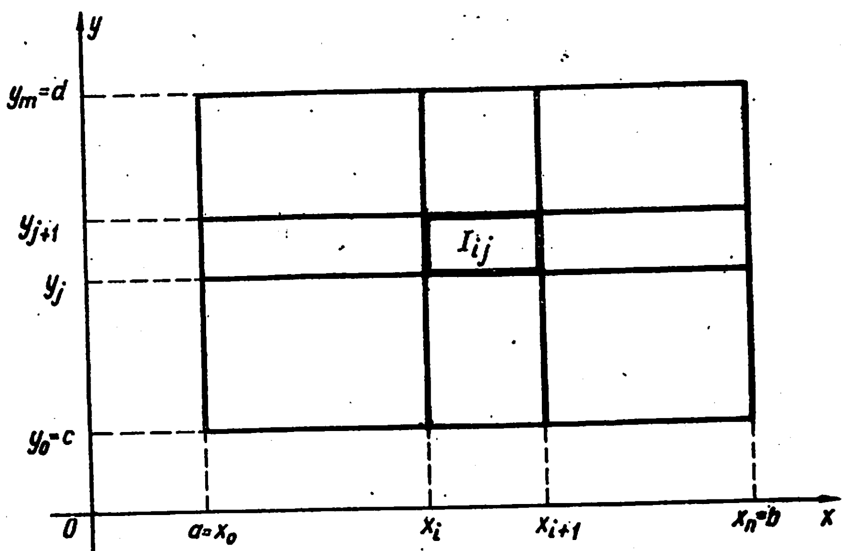


Fig. 26 a

Aplicînd teorema de medie pentru integrala Riemann, rezultă existenţa unui număr μ_{ij}, cu proprietatea

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)\, dy = \mu_{ij}(y_{j+1} - y_j)$$

şi astfel încît, notînd cu m_{ij} şi M_{ij} marginile funcţiei f pe I_{ij}, să avem:

$$m_{ij} \leqslant \mu_{ij} \leqslant M_{ij} (i = 0, ..., n-1; \ j = 0, ... m-1).$$

Deci, pentru sumele riemanniene asociate lui Φ pe $[a, b]$, au loc următoarele reprezentări:

$$\sigma_{\Delta'}(\Phi; \ \xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \left(\sum_{j=0}^{m-1} \mu_{ij}(y_{j+1} - y_j)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mu_{ij}(x_{i+1} - x_i)\ (y_{j+1} - y_j),$$

de unde, în baza inegalităţilor satisfăcute de μ_{ij},

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)\ (y_{j+1} - y_j) \leqslant \sigma_{\Delta'}(\Phi; \xi_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)\ (y_{j+1} - y_j).$$

Însă, prima şi ultima sumă din acest şir de inegalităţi sînt tocmai suma Darboux inferioară şi suma Darboux superioară relative la funcţia f pe I şi la descompunerea Δ a lui I:

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)\ (y_{j+1} - y_j),$$

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)\ (y_{j+1} - y_j).$$

Putem, deci, scrie

$$s_\Delta(f) \leqslant \sigma_{\Delta'}(\Phi; \xi_i) \leqslant S_\Delta(f). \tag{1}$$

Fie $\{\Delta'_p\}$ un şir de diviziuni ale lui $[a, b]$, de normă tinzînd la zero. Fie $\{\Delta''_p\}$ un şir de diviziuni ale lui $[c, d]$ de normă tinzînd la zero. Să notăm cu Δ_i descompunerea lui I definită de diviziunile Δ'_p şi Δ''_p ale lui $[a, b]$, respectiv $[c, d]$. Este clar că norma descompunerii Δ_p tinde la zero cînd $p \to \infty$ (deoarece, dacă într-un şir de dreptunghiuri, şirul lungimilor bazelor şi şirul lungimilor înălţimilor tind la zero, atunci şi şirul lungimilor diagonalelor tinde la zero). În baza integrabilităţii riemanniene a lui f pe I, rezultă că

$$\lim_{p\to\infty} s_{\Delta_p}(f) = \lim_{p\to\infty} S_{\Delta_p}(f) = \iint_I f(x, y)\, dx\, dy.$$

Din inegalităţile (1) deducem atunci

$$\lim_{p\to\infty} \sigma'_{\Delta_p}(\Phi;\ \xi_p^i) = \iint_I f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{2}$$

pentru orice alegere a valorilor $\xi_i^p \in [x_i^p,\ x_{i+1}^p]$,

unde $\Delta_p^{\prime} = (a = x_0^p < x_1^p < \ldots < x_i^p < x_{i+1}^p < \ldots < x_{n_p}^p = b)$.

Însă, după cum se ştie, dacă limita din (2) există, finită şi independentă de şirul de diviziuni de normă tinzînd la zero şi de alegerea valorilor intermediare ξ_i^p, atunci Φ este, prin definiţie, integrabilă Riemann pe $[a,\ b]$ şi

$$\lim_{p\to\infty} \sigma'_{\Delta_p}(\Phi;\ \xi_i^p) = \int_a^b \Phi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Din confruntarea egalităţilor (2) şi (3) rezultă teorema enunţată.

Observaţie. Schimbînd, în ipoteze şi în demonstraţie, rolurile lui x şi y, se obţine următoarea

Teoremă. Fie f o funcţie reală, integrabilă Riemann pe intervalul I definit de inegalităţile $0 \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d$. Să presupunem că, pentru orice $y \in [c,\ d]$, există integrala Riemann

$$\int_a^b f(x,\ y)\,\mathrm{d}x.$$

În aceste condiţii, există integrala iterată

$$\int_c^a \mathrm{d}y \int_a^b f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$$

şi avem egalitatea

$$\iint_I f(x,\ y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,\ y)\,\mathrm{d}x.$$

Corolar. Dacă f este integrabilă Riemann pe I şi dacă, pentru orice $y \in [c,\ d]$ şi pentru orice $x \in [a,\ b]$, integralele

$$\int_a^b f(x,\ y)\ \mathrm{d}x \text{ şi } \int_c^d f(x,\ y)\,\mathrm{d}y$$

există, atunci următoarele două integrale iterate există şi sînt egale cu integrala dublă a lui f pe I.

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,\ y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,\ y)\,\mathrm{d}x = \iint_I f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

a. Descompunerea integralei duble în integrale simple, pentru funcții integrabile Riemann pe un domeniu simplu

Vom da acum o extindere a teoremei precedente, înlocuind intervalul bidimensional cu un domeniu simplu în raport cu una dintre axele de coordonate.

T e o r e m ă. Fie D un domeniu simplu în raport cu axa ordonatelor, definit de următoarele inegalități: $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$, unde φ și ψ sînt funcții continue pe $[a, b]$. Fie f o funcție reală integrabilă Riemann pe D_y. Dacă, pentru orice $x \in [a, b]$, există integrala Riemann

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y, \tag{4}$$

atunci există și integrala iterată

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(\varphi)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

și are loc egalitatea

$$\iint_{D_y} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_b^b \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

D e m o n s t r a ț i e. Funcțiile φ și ψ, fiind continue pe $[a, b]$, sînt mărginite pe $[a, b]$. Există deci două numere reale c și d cu proprietatea $c < \varphi(x) < d$, $c < \psi(x) < d$, pentru orice $x \in [a, b]$. Fie I intervalul bidimensional I definit de inegalitățile $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Să notăm cu D_1 domeniul compact definit de inegalitățile $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant \varphi(x)$ și cu D_2 domeniul compact definit de inegalitățile $a \leqslant x \leqslant b$, $\psi(x) \leqslant y \leqslant d$. Avem

$$I = D_1 \cup D_y \cup D_2.$$

Se știe că aria graficului unei funcții continue pe $[a, b]$ este egală cu zero; deci, aria graficului lui φ pe $[a, b]$ și aria graficului lui ψ pe $[a, b]$ sînt egale cu zero. Rezultă că frontiera domeniilor D_1, D_y și D_2 este de arie nulă, deci domeniile D_1, D_y și D_2 au arie. Aceste domenii, luate două cîte două, nu au, evident, puncte interioare comune.

Să considerăm acum funcția auxiliară F, definită pe I în modul următor:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), \text{ dacă } (x, y) \in D_y, \\ 0, \text{ dacă } (x, y) \in I - D_y. \end{cases}$$

Singurele puncte de discontinuitate pe care F le poate avea în plus, față de punctele de discontinuitate ale lui f pe D_y, sînt în orice caz situate pe frontiera unuia dintre domeniile D_1, D_y, D_2. Însă cum, pe de o parte, frontierele acestor domenii sînt de arie nulă şi, pe de altă parte, în baza teoremei lui Lebesgue (necesitatea condiţiei) punctele de discontinuitate ale lui f pe D_y formează o mulţime de măsură Lebesgue (bidimensională) egală cu zero, rezultă că punctele de discontinuitate ale lui F pe I formează o mulţime de măsură Lebesgue nulă. Din integrabilitatea lui f pe D_y rezultă mărginirea lui f pe D_y, deci mărginirea lui F pe I. Aplicînd din nou teorema lui Lebesgue (suficienţa condiţiei), rezultă că F este integrabilă Riemann pe I, pe D_1, pe D_y şi pe D_2. Folosind teorema de aditivitate a integralei duble ca funcţie de domeniu, obţinem

$$\iint_I F(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} F(x, y)\,dx\,dy + \iint_{D_y} F(x, y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} F(x, y)\,dx\,dy.$$

Însă este uşor de arătat (exerciţiu!), în baza faptului că punctele din D_1 şi D_2 în care $F(x, y) \neq 0$ formează o mulţime de măsură bidimensională nulă, că

$$\iint_{D_1} (Fx, y)\,dx\,dy = \iint_{D_2} F(x, y)\,dx\,dy = 0$$

şi, pe de altă parte, avem, evident,

$$\iint_{D_y} F(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D_y} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Rezultă astfel că

$$\iint_I F(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D_y} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{5}$$

În baza existenţei integralei (4) şi a faptului că, pentru orice $x_0 \in [a, b]$, funcţia $\lambda(y) = F(x_0, y)$ are cel mult un punct de discontinuitate pe fiecare dintre intervalele $[c, \varphi(x_0)]$, $[\psi(x_0), d]$ situate pe dreapta $x = x_0$ (fig. 26, b) rezultă că λ este integrabilă Riemann pe aceste intervale şi

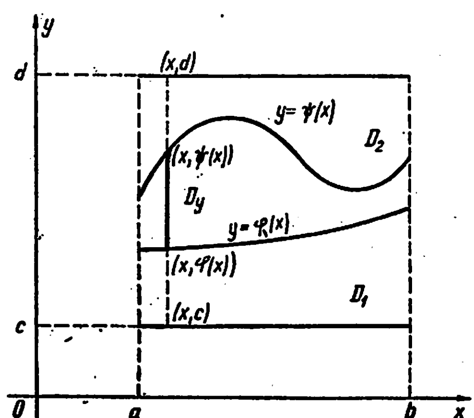


Fig. 26, b

$$\int_c^d F(x, y)\,dy = \int_c^{\varphi(x_0)} F(x_0, y)\,dy + $$

$$+ \int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} F(x_0, y)\,dy + \int_{\psi(x_0)}^{d} F(x_0, y)\,dy =$$

$$= 0 + \int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x_0, y)\,dy + 0 =$$

$$= \int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x_0, y)\,dy, \tag{6}$$

deci F satisface pe I toate condiţiile pentru a i se putea aplica teorema de descompunere a integralei duble în integrale simple. Avem astfel

$$\iint_I F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d F(x, y)\,\mathrm{d}y$$

şi, folosind egalităţile (5) şi (6), obţinem

$$\iint_{D_y} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

adică tocmai ceea ce trebuia de demonstrat.

Observaţie. Schimbînd, în ipotezele şi în demonstraţia de mai sus, rolurile lui x şi y, obţinem următoarea

Teoremă. Fie D_x un domeniu simplu în raport cu axa absciselor, definit de următoarele inegalităţi: $c \leqslant y \leqslant d$, $\mu(y) \leqslant x \leqslant \mu(y)$, unde μ şi ν sînt funcţii continue pe $[c, d]$. Fie f o funcţie reală integrabilă Riemann pe D_x. Dacă, pentru orice $y \in [c, d]$, există integrala Riemann

$$\int_{\mu(y)}^{\nu(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

atunci există şi integrala iterată

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_{\mu(y)}^{\nu(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

şi are loc egalitatea

$$\iint_{D_x} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\mu(y)}^{\nu(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

b. Descompunerea integralei duble în integrale simple, în cazul general

Putem trece acum la cazul general al unei funcţii integrabile în intervalul

$$R : a \leqq x \leqq b,\quad c \leqq y \leqq d.$$

Vom stabili, în prealabil, două propoziţii ajutătoare:

Lema 1. (**Jordan**[1]. **Dacă** f **este o funcţie mărginită în intervalul bidimensional** R, **atunci avem**

$$\underline{\iint_R} f(P)\,\mathrm{d}P \leq \underline{\int_a^b} \mathrm{d}x \underline{\int_c^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y \leq \overline{\int_a^b} \mathrm{d}x \overline{\int_c^d} f(x, y)\,\mathrm{d}y \leq \overline{\iint_R} f(P)\,\mathrm{d}P, \tag{1}$$

unde bara inferioară (superioară) desemnează integrala Darboux inferioară (superioară). (Definiţia integralelor Darboux duble se face după modelul celor simple.)

Demonstraţie. Să descompunem intervalul R în intervale parţiale, prin paralele duse la axele de coordonate

$$x = x_i \qquad (i = 1, \dots m),$$

$$y = y_k \qquad (k = 1, \dots n),$$

cu

$$x_0 = a, \qquad x_m = b,$$

$$y_0 = c, \qquad y_n = d.$$

Pentru simplificarea scrierii, vom pune

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i, \qquad y_k - y_{k-1} = \Delta y_k, \qquad e_{ik} = \Delta x_i \Delta y_k.$$

Numărul e_{ik} nu reprezintă altceva decît aria dreptunghiului limitat de dreptele

$$x = x_{i-1}, \quad x = x_i, \quad y = y_{k-1}, \quad y = y_k.$$

Tot cu e_{ik} vom nota şi dreptunghiul însuşi.

Să însemnăm cu M_{ik} marginea superioară a funcţiei f în intervalul de arie e_{ik} şi să punem

$$J(\xi) = \overline{\int_c^d} f(\xi, y)\,\mathrm{d}y.$$

Dacă ξ se află în intervalul $[x_{i-1}, x_i]$, atunci integrala lui Darboux $J(\xi)$ se descompune, potrivit proprietăţii de aditivitate, în n integrale superioare, luate pe intersecţia dreptunghiurilor $e_{ik}(k = 1, 2, \dots n)$ cu dreapta $x = \xi$. Integrala corespunzătoare unui dreptunghi e_{ik} nu poate, evident, depăşi valoarea

$$M_{ik} \cdot \Delta_{yk}.$$

Deci

$$J(\xi) \leq \sum_{k=1}^{n} M_{ik} \Delta_{yk} = \mu_i,$$

de unde

$$\overline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} J(\xi)\,\mathrm{d}\xi < \mu_i \Delta_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} \cdot e_{ik},$$

[1] Camille Jordan, *Cours d'Analyse* vol. I., 1893, p. 41.

iar, prin însumare în raport cu i,

$$\int_{a}^{\overline{b}} J(\xi)\,\mathrm{d}\xi \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} M_{ik}\cdot e_{k},$$

adică, în definitiv,

$$\int_{a}^{\overline{b}} \mathrm{d}x \int_{c}^{\overline{d}} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y \leq \overline{\iint_{R}} f(P)\,\mathrm{d}P.$$

În mod asemănător se demonstrează şi relaţia

$$\underline{\iint_{R}} f(P)\,\mathrm{d}P \leq \int_{\underline{a}}^{b} \mathrm{d}x \int_{\underline{c}}^{d} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y.$$

În sfîrşit, putem scrie

$$\int_{\underline{a}}^{b} \mathrm{d}x \int_{\underline{c}}^{d} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y \leq \int_{a}^{\overline{b}} \mathrm{d}x \int_{\underline{c}}^{d} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y \leq \int_{a}^{\overline{b}} \mathrm{d}x \int_{c}^{\overline{d}} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y.$$

Cu aceasta, lema este demonstrată.

C o r o l a r. **Dacă f este integrabilă în R, atunci avem**

$$\int_{\underline{a}}^{b} \mathrm{d}x \int_{\underline{c}}^{d} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y = \int_{a}^{\overline{b}} \mathrm{d}x \int_{c}^{\overline{d}} f(xy)\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Într-adevăr, în acest caz membrii extremi ai inegalităţilor (1) sînt egali între ei.

L e m a 2. Dacă f este integrabilă în R, atunci integrala

$$\int_{c}^{d} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y$$

există pentru toate valorile lui x din intervalul $[a,\ b]$, cu excepţia posibilă a unei mulţimi de puncte de măsură nulă.

Demonstraţie. Să punem

$$\varphi(x) = \int_{c}^{\overline{d}} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y,\quad \psi(x) = \int_{\underline{c}}^{d} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y.$$

Din inegalitățile evidente

$$\underline{\int_a^b} \mathrm{d}x \underline{\int_c^d} f(x, y)\, \mathrm{d}y \leq \underline{\int_a^b} \varphi(x)\, \mathrm{d}x, \overline{\int_a^b} \psi(x)\, \mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} \mathrm{d}x \overline{\int_c^d} f(x\, y)\, \mathrm{d}y,$$

precum și din corolarul precedent, deducem

$$\underline{\int_a^b} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} \varphi(x)\, \mathrm{d}x, \underline{\int_a^b} \psi(x)\, \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} \psi(x)\, \mathrm{d}x,$$

deci funcțiile φ și ψ sînt integrabile în intervalul $[a, b]$. Relațiile (1) devin atunci

$$\iint_R f(P)\, \mathrm{d}P = \int_a^b \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b \psi(x)\, \mathrm{d}x, \tag{3}$$

iar relația (2), care se poate scrie

$$\overline{\int_a^b} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} \psi(x)\, \mathrm{d}x,$$

devine

$$\int_a^b [\varphi(x) - \psi(x)]\, \mathrm{d}x = 0. \tag{4}$$

Din definiția funcțiilor φ și ψ, rezultă

$$\varphi(x) - \psi(x) \geqq 0.$$

Deoarece diferența

$$\varphi(x) - \psi(x)$$

este integrabilă în $[a, b]$, rezultă că această funcție este continuă aproape peste tot. Fie atunci x_0 un punct în care funcția este continuă.

Vom arăta că, într-un astfel de punct, avem neapărat

$$\varphi(x_0) - \psi(x_0) = 0.$$

Să presupunem, prin absurd, că

$$\varphi(x_0) - \psi(x_0) > 0.$$

Potrivit unei proprietăți cunoscute, există un interval $[a', b']$ interior intervalului $[a, b]$, care conține punctul x_0 și astfel încît, în orice punct al acestui interval, să avem

$$\varphi(x) - \psi(x) > 0.$$

Avem atunci

$$\int_a^{a'} [\varphi(x) - \psi(x)]\, dx + \int_{a'}^{b'} [\varphi(x) - \psi(x)]\, dx + \int_{b'}^{b} [\varphi(x) - \psi(x)]\, dx = 0,$$

cu

$$\int_a^{a'} [\varphi(x) - \psi(x)]\, dx \geqq 0, \int_{a'}^{b'} [\varphi(x) - \psi(x)]\, dx > 0, \int_{b'}^{b} [\varphi(x) - \psi(x)]\, dx \geqslant 0,$$

ceea ce este absurd. Aşadar,

$$\varphi(x_0) - \psi(x_0) = 0,$$

lică, aproape peste tot în $[a, b]$, avem

$$\underline{\int_c^d} f(x, y)\, dy = \overline{\int_c^d} f(x, y)\, dy$$

şi lema este demonstrată.

Din aceste două leme rezultă că există o funcţie $h(x)$ integrabilă în $[a, b]$ şi egală cu

$$\int_c^d f(x, y)\, dy$$

în toate punctele x pentru care această integrală există. Într-adevăr, funcţiile φ şi ψ definite mai sus constituie exemple de astfel de funcţii. Obţinem alte funcţii care să se bucure de această proprietate, modificînd, de pildă, într-un mod arbitrar, valorile funcţiilor φ sau ψ într-un număr finit de puncte. Cu această observaţie, putem enunţa:

Teorema de descompunere a integralelor duble. Fie f o funcţie integrabilă în R şi h o funcţie integrabilă $[a, b,]$ pentru care

$$h(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

în toate punctele x în care această integrală există. Atunci avem

$$\iint_R f(P)\, dP = \int_a^b h(x)\, dx.$$

Demonstraţie. Să însemnăm cu E mulţimea punctelor x pentru care integrala precedentă există şi cu E_0 mulţimea, de măsură nulă, a punctelor x pentru care această integrală încetează de a avea un sens. Este evident că orice subinterval al lui $[a, b]$ conţine cel puţin un punct din E, deoarece altfel E_0 nu ar mai fi de măsură nulă.

Funcţia f fiind integrabilă în R, din relaţiile (1) şi din lemele precedente deducem imediat

$$\iint\limits_R f(P)\,\mathrm{d}P = \int_a^h \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Teorema este deci demonstrată, dacă arătăm că avem

$$\int_a^h h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

pentru orice funcţie $h(x)$ integrabilă în $[a, b]$ şi care este egală cu $\varphi(x)$ în punctele mulţimii E. Să considerăm un şir de diviziuni (d^n), de normă tinzînd către zero odată cu $\frac{1}{n}$ şi să însemnăm cu

$$a = x_1^n,\ x_2^n, \ldots x_{pn}^n = b$$

punctele diviziunii de rang n. Ştim atunci că

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum h(\xi_i^n)\ (x_{i+1}^n - x_i^n),\ \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum \varphi(\overline{\xi_i^n})\,(x_{i+1}^n - x_i^n);$$

unde ξ_i^n sînt puncte arbitrare în intervalul (x_i^n, x_{i+1}^n). Putem, evident, lua

$$\xi_i^n = \overline{\xi_i^n}$$

şi mai putem încă să luăm totdeauna pe ξ_i^n din mulţimea E, potrivit observaţiei de mai sus. Dar atunci

$$h(\xi) = \varphi(\xi_i^n),$$

deci

$$\int_a h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^h \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

şi teorema este demonstrată.

Teorema fundamentală de mai sus ridică o seamă de probleme, pe care vom încerca să le lămurim aici, în cadrul impus acestui manual.

Astfel, pentru funcţia $h(x)$ din enunţul acestei teoreme se poate lua, în afară de una din integralele lui Darboux

$$\int_{\underline{c}}^d f(x, y)\,\mathrm{d}x,\ \int_c^{\overline{d}} f(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

orice funcţie cuprinsă între acestea.

Într-adevăr, din dubla inegalitate

$$\underline{\int_{c}^{d}} f(x, y)\,\mathrm{d}y \leqslant h(x) \leqslant \overline{\int_{c}^{d}} f(x, y)\,\mathrm{d}y \tag{6}$$

deducem imediat

1° că, aproape peste tot în intervalul $[a, b]$, avem

$$h(x) = \int_{c}^{d} f(x, y)\,\mathrm{d}y;$$

2° că $h(x)$ este integrabilă în acest interval și că avem

$$\iint_{D} f(P)\,\mathrm{d}P = \int_{a}^{b} h(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Cu aceasta nu se epuizează însă clasa funcțiilor $h(x)$ care verifică ecuația precedentă. Se pot construi exemple de funcții h care nu aparțin intervalului (6) și care totuși verifică relația (7). (Vom da mai tîrziu un astfel de exemplu).

O altă problemă pe care o ridică enunțul teoremei de mai sus este următoarea: dacă f este integrabilă în intervalul R, atunci, alături de formula de descompunere (5), putem scrie foarte bine și formula

$$\iint_{R} f(P)\,\mathrm{d}P = \int_{c}^{d} \mathrm{d}y \int_{a}^{b} f(x, y)\,\mathrm{d}x, \tag{8}$$

cu aceeași îndreptățire și cu ipoteze analoge privind integrarea iterată din membrul al doilea. Existența uneia din integralele iterate sau chiar a ambelor integrale iterate figurînd în membrul al doilea al acestor formule este, oare, suficientă pentru a asigura existența integralei

$$\iint_{R} f(P)\,\mathrm{d}P?$$

Răspunsul este negativ. Să considerăm, de pildă, funcția următoare:

$$f(x, y) = \begin{cases} a, & \text{dacă } x \text{ este transcendent,} \\ b, & \text{dacă } x \text{ și } y \text{ sînt simultan algebrice,} \\ c, & \text{dacă } x \text{ este algebric, iar } y \text{ transcendent} \end{cases} \tag{9}$$

a, b, c, fiind numere date, diferite între ele. Din definiție rezultă imediat că avem

$$\int_{0}^{1} f(x, y)\,\mathrm{d}y = a,$$

dacă x este transcendent. Dacă α este un număr algebric, funcţia $f(\alpha, y)$ este discontinuă în orice punct, după cum rezultă imediat din definiţia de mai sus, deci nu este integrabilă în nici un interval. Completînd atunci integrala precedentă cu valoarea a, acolo unde nu există (adică pentru valorile algebrice ale lui x), obţinem o funcţie de x integrabilă în intervalul [0, 1] şi avem

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x, y)\, \mathrm{d}y = \int_0^1 a\, \mathrm{d}x = a.$$

Pe de altă parte, oricare ar fi β, funcţia $f(x, \beta)$ este discontinuă în orice punct x, deci şi funcţia $f(x, y)$ este discontinuă în orice punct. Deci nici una din integralele

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 f(x, y)\, \mathrm{d}x, \quad \iint_R f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

nu există. Pentru a construi un al doilea exemplu, să considerăm mulţimea — numărabilă — a numerelor algebrice din intervalul [0, 1] şi să însemnăm cu b_n numărul algebric care, într-o anumită corespondenţă a mulţimii considerate cu mulţimea numerelor naturale, corespunde numărului natural n. Vom defini, în pătratul

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1,$$

o funcţie $f(x, y)$, în felul următor:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{dacă } x \text{ este transcendent şi } y = b_n, \\ 0, & \text{dacă } y \text{ este transcendent}, \\ 1, & \text{dacă } x \text{ şi } y \text{ sînt algebrice.} \end{cases} \tag{10}$$

Este uşor de verificat că $f(x, y)$ este, în raport cu y, continuă pe orice dreaptă

$$x = \text{transcendent.}$$

Deci, integrala

$$\int_0^1 f(x, y)\, \mathrm{d}y$$

are un sens, pentru orice x transcendent.

Prin urmare,

$$\int_0^1 f(x, y)\, \mathrm{d}y = \underline{\int_0^1} f(x, y)\, \mathrm{d}y = \sup \sum_1^n m_i \delta_i = 0,$$

deoarece marginea inferioară a lui f este zero în orice interval. Mulţimea valorilor lui x, pentru care integrala de mai sus nu există, este numărabilă, deci de măsură nulă. Integrala

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy$$

există deci, cu condiţia de a înlocui integrala din interior prin zero pentru valorile excepţionale ale lui x. Valoarea acestor integrale iterate este, evident, zero.

Pe de altă parte, $f(x, y)$, considerată ca funcţie de x, este identic nulă pentru orice valoare transcendentă a lui y. Deci

$$\int_0^1 f(x, y)\, dy = 0$$

pentru orice y transcendent. Pentru y algebric, $f(x, y)$ este total discontinuă în raport cu x[1], deci nu este integrabilă.

Cum mulţimea valorilor algebrice ale lui y este numărabilă, deci de măsură nulă, vom completa cu valoarea zero valoarea integralei în orice astfel de punct y. În asemenea condiţii, integrala

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)\, dx$$

are sens şi valoarea sa este nulă.

Avem deci

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)\, dx.$$

Cu toate acestea, funcţia f nu este integrabilă în pătratul considerat, deoarece este discontinuă în orice punct al acestui pătrat.

Aceste două exemple ne arată că, în afară de cazul în care integrala dublă a funcţiei f există, caz în care existenţa integralelor simple iterate în ambele sensuri, ca şi egalitatea lor cu integrala dublă, sînt asigurate prin teorema fundamentală de mai sus, *integralele simple iterate pot amîndouă să existe şi chiar să fie egale între ele, fără ca f să fie integrabilă în intervalul bidimensional considerat.*

Trebuie deci să ne ferim să vedem în simbolurile

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy, \text{ sau } \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx$$

o definiţie a integralei duble.

[1] Adică f este discontinuă în orice punct x.

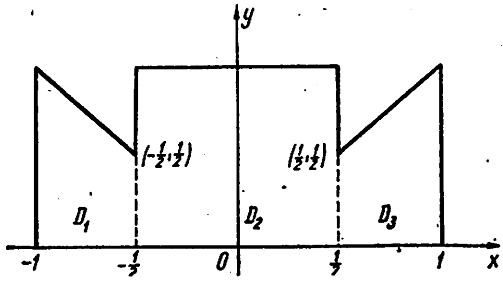


Fig. 27

c. Aplicații și complemente la teoria integralei Riemann

Să calculăm integrala

$$\iint_D \sqrt{1+x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

unde D este domeniul din figura 27.

Cu notațiile din definiția domeniului simplu, avem

$$\varphi(x)=0,\quad \psi(x)=\begin{cases} -x, \text{ dacă } -1\leqslant x<-\frac{1}{2}, \\ 1, \text{ dacă } -\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2}, \\ x, \text{ dacă } \frac{1}{2}<x\leqq 1. \end{cases}$$

Va trebui deci să descompunem domeniul D în trei domenii D_1, D_2, D_3, prin paralelele

$$x=-\frac{1}{2},\ x=0,\ x=\frac{1}{2}.$$

Avem atunci

$$\iint_{D_1}\sqrt{x+y+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{-x}\sqrt{x+y+1}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}[1-(x+1)^{\frac{2}{3}}]\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{2}{3}\left[x-\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}=\frac{10-\sqrt{2}}{30},\quad \iint_{D_2}\sqrt{x+y+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^1\sqrt{x+y+1}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}[(x+2)^{2/3}-(x+1)^{3/2}]\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{4}{15}\left[(x+2)^{5/2}-(x+1)^{5/2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}=\frac{25\sqrt{10}-18\sqrt{6}+\sqrt{2}}{30},$$

$$\iint_{D_3}\sqrt{x+y+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{x+y+1}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}[(2x+1)^{3/2}-$$

$$-(x+1)^{3/2}]\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{5}(2x+1)^{5/2}-\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{36\sqrt{3}-48\sqrt{2}+9\sqrt{6}}{30}$$

În definitiv,

$$\iint_D \sqrt{x+y+1}\, dx\, dy = \frac{10 + 36\sqrt{3} - 48\sqrt{2} - 9\sqrt{6} + 25\sqrt{10}}{30}$$

d. Un exemplu de derivată mărginită și neintegrabilă în sensul lui Riemann

Teorema lui Lebesgue ne dă posibilitatea să prezentăm un alt exemplu de derivată mărginită, neintegrabilă.

Exemplul lui V. Volterra. Fie E o mulțime lineară de puncte, mărginită, perfectă ($E = E'$) și nedensă (în orice interval există un subinterval fără puncte din E). Să presupunem că E nu este de măsură Lebesgue nulă. Se poate arăta că există mulțimi care să îndeplinească toate condițiile de mai sus.

Fie $[a, b]$ un interval contiguu[1] cu E. Să considerăm funcția

$$\varphi(x, a) = (x - a)^2 \sin \frac{1}{x - a};$$

derivata ei se anulează de o infinitate de ori între a și b. Fie $a + c$ cea mai mare valoare care anulează pe φ' și nu este mai mare ca $\frac{a+b}{2}$. Să definim o funcție F prin următoarele condiții:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in E, \\ \varphi(x, a) \text{ dacă } a \leqq x \leqq a + c, \\ \varphi(a + c, a) \text{ dacă } a + c < x < b - c, \\ \varphi(x, b) \text{ dacă } b - c \leqq x \leqslant b, \end{cases}$$

unde $[a, b]$ este un interval contiguu cu E.

Funcția F este continuă pentru orice x. Ea este și derivabilă; aceasta este evident pentru punctele care nu aparțin lui E; fie x_0 un punct din E. Raportul

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$$

este nul dacă $x_0 + h$ aparține lui E. Altfel, $x_0 + h$ aparține unui interval contiguu cu E. Fie α acea extremitate a acestui interval care se află între x_0 și $x_0 + h$. Avem

$$\left|\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}\right| = \left|\frac{F(x_0 + h)}{h}\right| \leqq \frac{(x_0 + h - \alpha)^2}{|h|} \leqq |h|,$$

deci F este derivabilă și are derivata egală cu zero în toate punctele mulțimii E.

---

[1] Aceasta înseamnă că $(a, b) \cap E = 0$, dar $a \in E$ și $b \in E$.

Derivata F' este mărginită, deoarece derivata funcției $x^2 \sin \frac{1}{x}$ este mărginită. Dar F' nu este integrabilă, deoarece, în orice interval conținînd un punct din E, marginea superioară a funcției F' este $+1$, iar cea inferioară este -1. Însă, prin ipoteză, E nu este de lungime nulă. Deci, mulțimea acelor discontinuități ale lui F' în care oscilația lui F' nu scade sub 2 nu este de măsură nulă. Conform teoremei lui Lebesgue, F' nu este integrabilă Riemann.

e. Aplicații la transformări punctuale

Fie d un domeniu al planului (u, v) și D transformatul său din planul (x, y) prin transformarea regulată (φ, ψ). Să se arate că între diametrele acestor domenii avem relația

$$\delta(D) \leq 2\sqrt{2}M_1 \cdot \delta(d),$$

unde M_1 este o margine a valorilor absolute ale derivatelor parțiale ale funcțiilor φ și ψ.

Răspuns. Dacă (u_0, v_0), (u, v) sînt două puncte din primul plan și (x_0, y_0), (x, y) punctele corespunzătoare din al doilea plan, avem

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} =$$

$$= \sqrt{\left[(u - u_0)\frac{\partial\varphi}{\partial u} + (v - v_0)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right]^2 + \left[(u - u_0)\frac{\partial\psi}{\partial u} + (v - v_0)\frac{\partial\psi}{\partial v}\right]^2}$$

de unde

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq M_1 \cdot \sqrt{2}(|u - u_0| + |v - v_0|),$$

sau încă

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq 2M_1\sqrt{2} \cdot \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}.$$

Relația cerută rezultă de aici imediat.

Să se arate că

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{1}{\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}}.$$

Răspuns. Într-adevăr, din exercițiul precedent rezultă că

$$\lim_{\delta(d)\to 0} \delta(D) = 0,$$

deci, în baza teoremei de transformare a ariilor printr-o transformare regulată,

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \lim_{\delta(D)\to 0} \frac{\text{aria } d}{\text{aria } D},$$

de unde rezultă relația cerută.

Să se calculeze

$$\iint\limits_D x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

domeniul de integrare fiind sectorul circular determinat de axa Ox, prima bisectoare şi cercul $x^2 + y^2 = 1$.

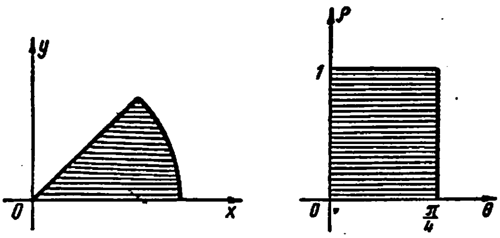


Fig. 28

Răspuns. Schimbarea de variabile $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ transformă acest sector în dreptunghiul (fig. 28)

$$0 \leqq \theta \leqslant \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leqq \rho \leqq 1.$$

Prin urmare, însemnînd cu I valoarea integralei căutate, avem

$$I = \int_0^1 \rho^5\,\mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta \cos^2\theta \cdot \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{160}.$$

Să se calculeze integrala dublă

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

extinsă la porţiunea din elipsa $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$, cuprinsă în primul cadran ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$).

Răspuns. Schimbarea de variabile $x = 2\rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ transformă sfertul de elipsă în dreptunghiul (fig. 29)

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1.$$

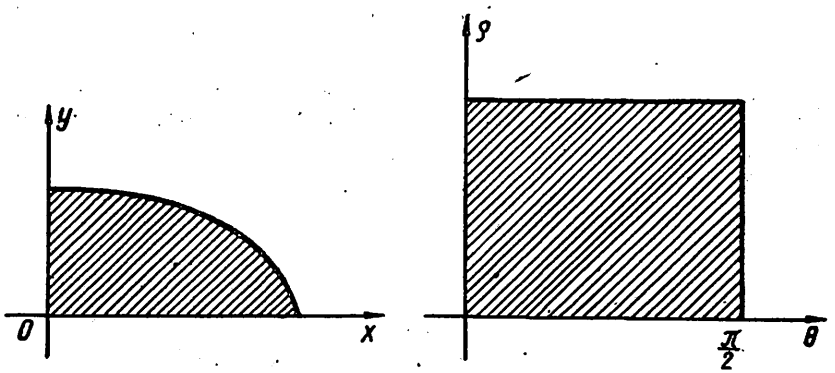


Fig. 29

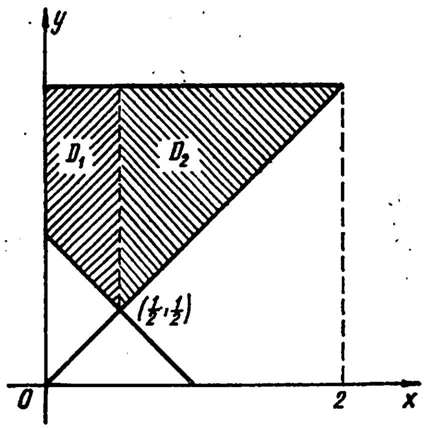


Fig. 30

Deci

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{16}.$$

Să se calculeze integrala dublă

$$\iint\limits_D (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

extinsă la patrulaterul limitat de dreptele

$$x = 0, \quad y = 2, \quad x + y = 1, \quad y = x.$$

Răspuns. Vom descompune domeniul D de integrare (domeniul haşurat din fig. 30) în două domenii D_1 şi D_2, prin paralele la Oy duse prin punctul de întîlnire a ultimelor două drepte. Acest punct are coordonatele $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, deci

$$\iint\limits_D (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{2} (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \mathrm{d}x \int_x^2 (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y.$$

Valoarea integralei este $\frac{253}{98}$.

Să se deducă formula ariei în coordonate polare din schimbarea de variabile la integralele duble.

Răspuns. Aria unui domeniu D poate fi exprimată prin integrala dublă

$$\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Dacă luăm ca domeniu D sectorul cuprins între două drepte $y = x \operatorname{tg} \theta_1$ şi $y = x \operatorname{tg} \theta_2$ ($\theta_2 > \theta_1$) şi curba $\rho = \rho(\theta)$, atunci avem, trecînd la coordonate polare,

$$\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta,$$

D' fiind transformatul lui D. Dar D' este un domeniu simplu. Deci

$$\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{d}\theta \int_0^{\rho(\theta)} \rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2\,\mathrm{d}\theta.$$

f. Aplicații la relațiile dintre integrala dublă și integralele iterate

1° *Fie* $\{a_n\}$ *mulțimea numerelor algebrice din intervalul* [0, 1]. *Să se arate că funcția f, definită astfel*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{dacă } x = a_n, \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este transcendent,} \end{cases}$$

este integrabilă în intervalul considerat.

Indicație. Se va arăta că f este continuă în orice punct transcendent.

2° *Fie funcția definită în intervalul* $R_0(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$ *în felul următor:*

$$f(x, y) = \begin{cases} k + \dfrac{1}{n}, & \text{dacă } x = a_n, \text{ sau } y = a_n, \\ k, & \text{în toate celelalte puncte,} \end{cases}$$

k fiind o constantă dată. Să se arate că această funcție este integrabilă în pătratul considerat.

Răspuns. În orice punct (x_0, y_0) cu ambele coordonate transcendente (punct în care funcția are valoarea k), f este continuă. Într-adevăr, în orice pătrat de dimensiuni 2δ, cu centrul în $(x_0\, y_0)$, se află o infinitate numărabilă de segmente paralele cu axa Oy,

$$x = a_{j_n},$$

de abscise algebrice, precum și o infinitate numărabilă de segmente paralele cu axa Ox, de ordonate algebrice:

$$y = a_{i_n}.$$

Presupunem numerele j_n, i_n așezate în ordinea lor crescătoare. Atunci $\varepsilon > 0$ fiind dat, putem lua $\delta(\varepsilon) > 0$; în consecință le putem lua astfel încît să avem, simultan,

$$j_1 > \frac{1}{\varepsilon}, \quad i_1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

În asemenea condiții avem, evident,

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

pentru orice punct din pătratul considerat.

Punctele (x, y) avînd una, cel puțin, dintre coordonate algebrică, se află pe o mulțime numărabilă de paralele, fie la axa Ox, fie la axa Oy. Ele pot fi închise în fîșii dreptunghiulare de arie oricît de mică voim, deci formează o mulțime de măsură nulă.

În rezumat, f este aproape peste tot continuă în pătratul considerat, deci integrabilă în acest pătrat.

3° *Să se calculeze integralele*

$$\int_{\underline{0}}^{1} \mathrm{d}y \int_{\underline{1}}^{1} f(x, y)\,\mathrm{d}x, \int_{\underline{0}}^{1} \mathrm{d}y \int_{0}^{\overline{1}} f(x, y)\,\mathrm{d}x, \int_{0}^{\overline{1}} \mathrm{d}y \int_{\underline{0}}^{1} f(x, y)\,\mathrm{d}x, \int_{0}^{\overline{1}} \mathrm{d}y \int_{0}^{\overline{1}} f(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

funcția f fiind definită de (9).

Răspuns. 1) $\min(a, b, c)$; 2) $\min\{\max(a, b), \max(a, c)\}$; 3) $\max\{\min(a, b), \min(a, c)\}$; 4) $\max\{a, b, c\}$.

4° *Să se cerceteze dacă funcția*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{p+q}, & \text{dacă } x, y \text{ sînt ambele raționale} \\ 0, & \text{în toate celelalte cazuri,} \end{cases}$$

unde p, q sînt numitorii lui x și y, în scrierea acestora sub formă de funcție ireductibilă, este integrabilă.

Indicație. Se va arăta: 1) că f este continuă în orice punct (x_0, y_0) în care cel puțin una din coordonate nu este rațională; 2) că mulțimea celorlalte puncte este de măsură nulă.

5° *Se consideră funcția*

$$h(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f(x, y)\,\mathrm{d}y, & \text{dacă } x \text{ este transcendent,} \\ \displaystyle\int_0^1 f(x, y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{n}, & \text{dacă } x \text{ este algebric } (= a_n), \end{cases}$$

unde f este funcția definită în exercițiul 2°, cu $k > 0$.
Să se arate că h este integrabilă în $[0, 1]$ *și că*

$$\iint_{R_0} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Indicație. Se va arăta că h este continuă pentru x transcendent.

6° *Să se arate că, cu notațiile din exercițiul precedent, avem*

$$h(x) \leq \int_{\underline{0}}^{1} f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Indicații. Se va observa mai întîi că valoarea integralei

$$\int_0^1 f(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

pentru valorile lui x pentru care are sens, nu depinde de x.

Fie c această valoare. Se va arăta apoi că, oricare ar fi x,

$$\int_0^1 f(x, y)\,\mathrm{d}y = c.$$

Capitolul XIV

CONTINUITATEA ŞI DERIVABILITATEA BIDIMENSIONALĂ

Pentru urmărirea, mai departe, a paralelismului dintre proprietăţile integralei simple şi proprietăţile integralei duble, este necesară constituirea unei teorii a proprietăţilor de continuitate şi de derivabilitate a funcţiilor de două variabile, care să angajeze ansamblul variabilelor independente (x, y), iar *nu* fiecare variabilă separat. Bazele unei astfel de teorii au fost constituite[1]. Vom consacra acest paragraf expunerii elementelor esenţiale ale acestei teorii, strict necesare pentru scopul urmărit.

Un interval bidimensional închis

$$a_1 \leqq x \leqq b_1,\ a_2 \leqq y \leqq b_2$$

va fi notat, pe scurt $[A, B]$, unde A este punctul de coordonate (a_1, a_2) iar B este punctul de coordonate (b_1, b_2).

Fie $f(P) = f(x, y)$ o funcţie definită în intervalul $[A, B]$. Vom pune

$$\Delta_2 f(x, y) = f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y)$$

şi vom numi această expresie *variaţia bidimensională* (sau *hiperbolică*) a lui $f(x, y)$.

Dacă însemnăm cu P' punctul de coordonate $(x + h, y + k)$, vom scrie această variaţie şi sub forma

$$\Delta_2[f;\ P,\ P'].$$

---

[1] După cercetările lui Lebesgue şi de la Vallée-Poussin, care rămîn în afara cadrului impus acestui volum, contribuţia cea mai sistematică în această direcţie este datorată lui Karl Bögel. Este expusă în memoriile.

1° *Mehrdimensionale Differentiation von Funktionen mehrerer Veranderlichen*, Crelles Journal 1934, vol. 170, p. 197—217.

2° *Über mehrdimensionale Differentiation, Integration und beschränkte Variation* (Ibid. 1935, vol. 173, p. 5—30).

În sfîrşit, vom mai întrebuinţa şi notaţia

$$\Delta_2[f;\ I],$$

unde I este intervalul $[P,\ P']$.

Să presupunem că împărţim intervalul I în două intervale I', I'', printr-o paralelă la una din axe. Este uşor de verificat că avem

$$\Delta_2[f;\ I] = \Delta_2[f;\ I'] + \Delta_2[f;\ I''].$$

Aşadar, *variaţia bidimensională a unei funcţii este o funcţie aditivă de interval.*

Vom spune că f este bidimensional continuă în punctul P, dacă

$$\lim_{P' \to P} \Delta_2[f;\ P,\ P'] = 0, \tag{1}$$

independent de modul în care punctul P' tinde către P.

O funcţie bidimensional continuă în toate punctele unui domeniu este, prin definiţie, bidimensional continuă în acest domeniu. Condiţia (1) se mai poate, dealtfel, scrie

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \Delta_2 f(x,\ y) = 0. \tag{2}$$

Vom spune că f este bidimensional derivabilă în punctul $(x,\ y)$ dacă raportul

$$\frac{\Delta_2 f(x, y)}{hk}$$

are o limită finită pentru $h \to 0,\ k \to 0$.

Vom pune

$$Df(x,\ y) = \lim_{h, k \to 0} \frac{\Delta_2 f(x, y)}{hk} \tag{3}$$

şi vom numi această limită derivata bidimensională (sau *hiperbolică*) *a lui f în punctul $(x,\ y)$.*

Să presupunem funcţia f bidimensional derivabilă în punctul $(x,\ y)$ şi să punem

$$\frac{\Delta_2 f(x, y)}{h \cdot k} - Df(x,\ y) = \sigma(x,\ y,\ h,\ k) = \sigma.$$

Din (3) deducem

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \sigma = 0.$$

Putem deci scrie

$$\Delta_2 f(x,\ y) = hk\,[Df(x,\ y) + \sigma],$$

relaţie din care deducem că *o funcţie bidimensional derivabilă este şi bidimensional continuă.*

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată. Vom da mai jos un exemplul în acest sens.

Din identitatea evidentă

$$\Delta_2 f(x, y) = [f(x + h, y + k) - f(x, y)] - [f(x + h, y) - f(x, y)] - \\ - [f(x, y + k) - f(x, y)]$$

deducem: *O funcție $f(x, y)$, continuă într-un punct, este bidimensional continuă în acest punct.* Reciproca acestei propoziții nu este adevărată. Să considerăm, într-adevăr, o funcție $F(x, y)$ continuă, precum și două funcții arbitrare de un singur argument

$$\varphi(x) \text{ și } \psi(y).$$

Punînd

$$f(x, y) = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y), \tag{4}$$

avem

$$\Delta_2 f(x, y) = \Delta_2 F(x, y);$$

deci f este bidimensional continuă, dar ea nu este continuă decît dacă φ și ψ sînt funcții continue de argumentele respective.

Dacă $f(x, y)$ admite derivatele f'_x, f''_{xy} și ultima derivată este continuă în punctul (x, y), atunci f este bidimensional derivabilă în punctul (x, y) și avem

$$Df(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}.$$

Într-adevăr, punînd în mod provizoriu

$$u(x) = f(x, y + k) - f(x, y),$$

putem scrie succesiv, aplicînd de două ori formula creșterilor finite,

$$\begin{aligned} \Delta_2 f &= u(x + h) - u(x) \\ &= hu'_x(x + \theta h) \\ &= h[f'_x(x + \theta h, y + k) - f'_x(x + \theta h, y)]. \\ &= hkf''_{xy}(x + \theta h, y + \theta' k) \end{aligned}$$

de unde

$$Df(x, y) = \lim \frac{\Delta_2 f}{hk} = f''_{xy}(x, y).$$

Reciproca acestei teoreme *nu* este adevărată.

Dacă, în relația (4), presupunem că DF există, atunci Df există (și anume, avem $Df = DF$) și cu toate acestea f poate fi chiar discontinuă.

L e m ă f u n d a m e n t a l ă. (K. Bögel). **Dacă $f(P)$, definită în intervalul $[A, B]$, este bidimensional derivabilă de-a lungul unui segment $x = x_0$ (respectiv $y = y_0$), atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate determina o funcție pozitivă $\eta(\varepsilon)$, astfel încît să avem**

$$|\Delta_2[f;\ P,\ Q]\,| < \varepsilon,$$

oricare ar fi perechea de puncte P, Q din banda

$$x_0 - \eta \leq x \leq x_0 + \eta.$$

Într-adevăr, relaţia de definiţie (3) ne arată că, pentru orice punct X de coordonate (x_0, y), există un interval închis $J(X)$ care îl acoperă şi astfel încît, pentru orice punct X' al acestui interval, avem

$$|\Delta_2[f; X, X']| \leq |x' - x_0| \cdot |y' - y| (|Df(X)| + \varepsilon), \tag{5}$$

(x', y') fiind coordonatele punctului X'.

Din familia $\{J\}$ de intervale care acoperă, în acest mod, segmentul $x = x_0$, putem extrage, potrivit teoremei lui Borel-Lebesgue, un număr finit de intervale

$$J(X_1) = J_1, \; J(X_2) = J_2, \; \ldots, \; J(X_n) = J_n,$$

care să îndeplinească această condiţie.

Să notăm, respectiv, cu $\xi(\varepsilon)$ şi $\bar{\xi}(\varepsilon)$ cea mai mică şi cea mai mare dimensiune a acestor intervale şi cu $\mu(\varepsilon)$ cel mai mare dintre numerele

$$|Df(X_k)| + \varepsilon, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Din (5) deducem atunci

$$|\Delta_2[f; X_k, X_k']| < |x_k' - x_0| \,\bar{\xi} \cdot \mu = c |x_k' - x_0|, \tag{5'}$$

oricare ar fi $k \leq n$ şi oricare ar fi punctul X_k' în intervalul J_k. Pentru orice subinterval $[A_k, B_k]$ al lui J_k, notînd cu $\bar{A}_k$, $\bar{B}_k$ celelalte două vîrfuri ale dreptunghiului, putem scrie identitatea evidentă

$$\Delta_2[f; A_k, B_k] = \Delta_2[f; X_k, A_k] - \Delta_2[f; X_k, \bar{A}_k] + \Delta_2[f; X_k, B_k] - \\ - \Delta_2[f; X_k, \bar{B}_k],$$

de unde, aplicînd relaţia (5'), obţinem

$$|\Delta_2[f; A_k, B_k]| \leq 4c \cdot \max \{|a_k - x_0|, |b_k - x_0|\}, \tag{6}$$

relaţie în care am notat, respectiv, cu a_k, b_k abscisele punctelor A_k, B_k.

Să considerăm acum în banda

$$x_0 - \xi \leq x \leq x_0 + \xi$$

două puncte oarecare P şi Q, de abscise respective p şi q. Vom împărţi intervalul $[P, Q]$ în intervale parţiale, prin segmente paralele la axa Ox, în felul următor: dacă presupunem că P se află în J_k, Q în J_l şi că $l = k + p$, vom împărţi intervalul $[P, Q]$ în $p + l$ intervale parţiale

$$J_k', \; J_{k+1}', \; \ldots, \; J_l',$$

astfel încît J_k' să fie cuprins în J_k, J_{k+1}' în J_{k+1}, ..., J_l' în J_l[1]. Vom avea atunci, potrivit proprietăţii de aditivitate,

$$\Delta_2[f; P, Q] = \Delta_2[f; J_k'] + \Delta_2[f; J_{k+1}'] + \ldots + \Delta_2[f; J_l'],$$

[1] Este suficient pentru aceasta ca segmentele paralele la Ox să fie duse astfel: primul în porţiunea comună intervalelor J_k, J_{k+1}, al doilea în porţiunea comună intervalelor J_{k+1}, J_{k+2} etc.

de unde, aplicînd relația (6) și ținînd seama că $p + l \leq n$,

$$|\Delta_2[f;\ P,\ Q]\,| \leq 4n \cdot c \cdot$$
$$\cdot \max\ \{|p - x_0|,\ \ |q - x_0|\}.$$

Este suficient să luăm

$$\left.\begin{matrix}|p - x_0| \\ |q - x_0|\end{matrix}\right\} < \frac{\varepsilon}{4 \cdot c \cdot n} = \eta(\varepsilon),$$

pentru ca să avem

$$|\Delta_2[f;\ P,\ Q]\,| < \varepsilon$$

și lema este astfel demonstrată.

Trebuie să observăm că obținem o proprietate absolută analogă dacă, în considerațiile precedente, schimbăm rolul variabilelor x, y.

Pe lema precedentă se bazează toate proprietățile de continuitate sau de derivabilitate bidimensională ale funcțiilor de două variabile.

Să presupunem că funcția f este bidimensional derivabilă în tot intervalul $[A,\ B]$. Atunci, din lema precedentă rezultă că variația

$$\Delta_2[f;\ \ P,\ Q],$$

unde P și Q sînt două puncte oarecare din $[A,\ B]$, tinde către zero cînd intervalul $[P,\ Q]$ tinde către un segment. Din această simplă observație deducem imediat că

$$\varphi(P,\ Q) = \Delta_2[f;\ P,\ Q]$$

este o funcție continuă de ansamblul punctelor P, Q. Într-adevăr, diferența

$$\varphi(P',\ Q') - \varphi(P,\ Q)$$

se poate scrie ca o sumă de patru variații bidimensionale (fig. 31), care tind către zero cînd P' și Q' tind simultan către P și Q.

În particular, $\varphi\ (P,\ Q)$ este o funcție continuă de Q cînd P rămîne fix.

Sîntem acum în măsură să enunțăm și să demonstrăm principalele proprietăți ale funcțiilor bidimensional derivabile:

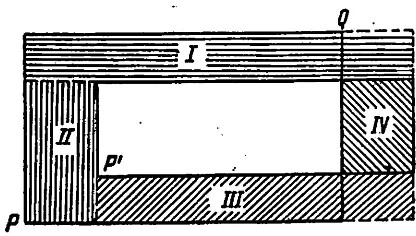


Fig. 31

I. Extensiunea teoremei lui Rolle (K. Bögel). Dacă f este bidimensional derivabilă în intervalul $[A,\ B]$ și dacă avem

$$\Delta_2[f;\ A,\ B] = 0,$$

atunci, în interiorul intervalului $[A,\ B]$, există cel puțin un punct P, astfel încît

$$Df(P) = 0.$$

Pentru demonstrarea acestei teoreme, vom stabili două propoziții premergătoare:

Lema 1. **Fie φ o funcție continuă în intervalul $[a, b]$. Dacă $\varphi(a) = \varphi(b)$, există o pereche de puncte (c, d) în acest interval, astfel încît să avem**

$$\varphi(c) = \varphi(d).$$

Putem chiar alege punctele c, d astfel încît, numărul $\varepsilon > 0$ fiind dat, să avem (în ipoteza $c < d$)

$$\left| d - c - \frac{1}{2}(b - a) \right| < \varepsilon.$$

Vom elimina din considerațiile noastre cazul $\varphi = \text{const.}$, în care lema este evidentă. Dacă φ nu este constantă în intervalul considerat, atunci cel puțin una din marginile funcției în acest interval nu coincide cu $\varphi(a)$. Să presupunem, pentru a face o alegere, că marginea superioară M nu este egală cu $\varphi(a)$. Atunci $M > \varphi(a)$. Există, în $[a, b]$, cel puțin un punct x_0 pentru care

$$M = \varphi(x_0).$$

Funcția fiind continuă în x_0, există un interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, astfel încît, în orice punct x al acestui interval, să avem $\varphi(x) > \varphi(a)$.

Fie c un punct al acestui interval, care să aparțină celui mai mare din intervalele (a, x_0) (x_0, b). Să presupunem, de pildă, că c aparține intervalului (a, x_0). Atunci, din dubla inegalitate

$$\varphi(x_0) > \varphi(c) > \varphi(b),$$

ca și din continuitatea lui φ, deducem existența, în intervalul (x_0, b), a cel puțin unui punct d, pentru care

$$\varphi(d) = \varphi(c).$$

Pe de altă parte,

$$d - c < b - c = (b - x_0) + (x_0 - c) < \frac{1}{2}(b - a) + \varepsilon,$$

de unde justificarea completă a lemei.

Lema 2. **Dacă funcția f este bidimensional derivabilă în intervalul $[A, B]$ și dacă**

$$\Delta_2[f;\ A,\ B] = 0,$$

atunci există un subinterval $[A_1, B_1]$ al lui $[A, B]$, astfel încît

$$\Delta_2[f;\ A_1,\ B_1] = 0.$$

Numărul $\varepsilon > 0$ fiind dat, se poate alege în plus subintervalul $[A_1, B_1]$, astfel încît să avem

$$\text{norma } [A_1, B_1] < \frac{1}{2} \text{norma } [A, B] + \varepsilon.$$

Fie, respectiv, a şi b abscisele punctelor A şi B. Presupunem, pentru a face o alegere, că $a < b$. Pe frontiera intervalului $[A, B]$, de aceeaşi ordonată ca punctul B, vom considera un punct X, de abscisă x (fig. 32).

Vom pune $\varphi(x) = \Delta_1[f; A, X]$. Funcţia φ este continuă în intervalul $[a, b]$. În plus, avem

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Potrivit lemei 1, există atunci două numere c, d în intervalul $[a, b]$, astfel încît

$$\varphi(c) = \varphi(d)$$

şi, numărul ε fiind dat,

$$|d - c| < \frac{1}{2}(b - a) + \varepsilon. \qquad (7)$$

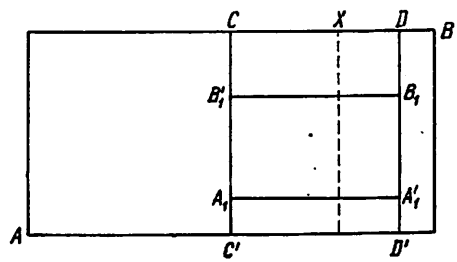


Fig. 32

Acestor două puncte le corespund, pe frontiera considerată a intervalului $[A, B]$, două puncte C şi D (fig. 32), astfel încît

$$\Delta_2[f; A, C] = \Delta_2[f; A, D].$$

Fie, respectiv, C' şi D' proiecţiile punctelor C şi D pe latura opusă a intervalului $[A, B]$. Din egalitatea precedentă şi din proprietatea de aditivitate a variaţiei bidimensionale, deducem

$$\Delta_2[f; C', D] = 0.$$

Cu intervalul $[C', D]$ vom proceda ca şi cu intervalul $[A, B]$, schimbînd de data aceasta pe x cu y. Potrivit raţionamentului făcut, vom putea găsi pe latura CC' două puncte A_1 şi B_1', astfel încît, însemnînd cu A_1' şi B_1 punctele de aceeaşi ordonată pe latura DD', să avem

$$\Delta_2[f; A_1, B_1] = 0$$

şi

$$\overline{A_1B_1'} < \frac{1}{2}\overline{CC'} + \varepsilon. \qquad (7')$$

Din (7) şi (7') deducem că

$$\text{norma } [A_1, B_1] < \frac{1}{2}\text{norma } [A, B] + \varepsilon.$$

Cu aceasta, lema este complet demonstrată.

Pentru ceea ce urmează, vom lua

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\text{norma } [A, B].$$

Atunci, inegalitatea precedentă devine

$$\text{norma } [A_1, B_1] < \frac{3}{4}\text{norma } [A, B]. \qquad (8)$$

Putem trece acum la demonstrarea teoremei.

Potrivit lemei 2, există un subinterval $[A_1, B_1]$ al lui $[A, B]$, de arie mai mică decît jumătatea ariei lui $[A, B]$, pentru care

$$\Delta_2[f; A_1, B_1] = 0.$$

Intervalului $[A_1, B_1]$ putem să-i aplicăm iarăşi lema 2. Există un interval $[A_2, B_2]$ conţinut în $[A_1, B_1]$, de arie mai mică decît jumătatea ariei lui $[A_1, B_1]$ şi astfel încît

$$\Delta_2[f; A_2, B_2] = 0.$$

Continuînd în acest mod, obţinem un şir de intervale

$$[A, B], [A_1, B_1], \ldots, [A_n, B_n], \ldots,$$

fiecare conţinut în precedentul şi astfel încît

$$\text{norma } [A_n, B_n] < \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{norma } [A, B].$$

Aceste intervale tind deci către un punct P interior. Vom arăta că

$$Df(P) = 0.$$

Să presupunem, într-adevăr, $Df(P) \neq 0$. Pentru a face o alegere, vom presupune $Df(P) > 0$. Să însemnăm, respectiv, cu A' şi B' celelalte două extremităţi ale intervalului $[A, B]$. Însemnînd, respectiv, cu (x_0, y_0) coordonatele punctului P, cu $(a_n, \bar{a}_n)$ şi $(b_n, \bar{b}_n)$ coordonatele punctelor A_n, B_n, vom presupune, ceea ce este totdeauna realizabil,

$$a_n < x_0 < b_n, \quad \bar{a}_n < y_0 < \bar{b}_n.$$

Coordonatele punctelor A'_n, B'_n vor fi, respectiv, $(b_n, \bar{a}_n)$ şi $(a_n, \bar{b}_n)$. Putem atunci scrie, funcţia f fiind bidimensional derivabilă în P,

$$Df(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_2[f; P, A_n]}{(a_n - x_0)(\bar{a}_n - y_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_2(f; P, A'_n)}{(b_n - x_0)(\bar{a}_n - y_0)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_2(f; P, B_n)}{(b_n - x_0)(\bar{b}_n - y_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_2(f; P, B'_n)}{(a_n - x_0)(\bar{b}_n - y_0)}.$$

Deoarece am presupus $Df(P) > 0$, există un n pentru care toate cele patru rapoarte din dreapta sînt pozitive. Ţinînd seama de numitorii acestor rapoarte, vom avea deci, pentru numărătorii respectivi, relaţiile

$$\Delta_2[f; P, A_n] > 0, \qquad \Delta_2[f; P, A'_n] < 0,$$

$$\Delta_2[f; P, B_n) > 0, \qquad \Delta_2[f; P, B'_n] < 0.$$

Prin urmare,

$$\Delta_2[f; P, A_n] - \Delta_2[f; P, A'_n] + \Delta_2[f; P, B_n] - \Delta_2[f; P, B'_n] > 0.$$

Dar, potrivit unei identităţi evidente, primul membru al acestei inegalităţi este egal cu $\Delta_2[f; A_n, B_n]$, care este nul, prin construcţie. Ipoteza $Df(P) \neq 0$ ne duce, aşadar, la o contradicţie şi avem $Df(P) = 0$.

II. Extensiunea formulei creşterilor finite (K. Bögel.) Dacă f este bidimensional derivabilă în intervalul $[A, B]$, atunci pentru orice pereche de puncte P, P' din acest interval, de coordonate respective (a, b) şi (a', b'), există un punct C în intervalul (P, P'), astfel încît să avem

$$\Delta_2(f; P, P') = (a' - a)(b' - b) \cdot Df(C). \tag{9}$$

Să considerăm, într-adevăr, funcţia auxiliară

$$F(X) = f(X) + k(x - a)(y - b). \tag{10}$$

Vom determina pe k astfel încît să avem

$$\Delta_2[F; P, P'] = 0.$$

Dar

$$\Delta_2[F; P, X] = \Delta_2[f; P, X] + k(x - a)(y - b).$$

Deci k va fi determinat prin ecuaţia

$$\Delta_2[f; P, P'] + k(a' - a)(b' - b) = 0,$$

de unde

$$k = -\frac{\Delta_2[f; P, P']}{(a' - a)(b' - b)}.$$

Potrivit teoremei I, există atunci un punct C în intervalul $[P, P']$, astfel încît să avem

$$DF(C) = 0.$$

Din (10) deducem însă

$$DF(X) \doteq Df(X) + k,$$

prin urmare

$$Df(C) + k = 0.$$

Înlocuind aici pe k prin valoarea găsită mai sus, obţinem tocmai formula căutată (9).

Conşecinţă importantă. *Dacă derivata bidimensională a unei funcţii f este nulă în intervalul $[A, B]$, atunci f este, în acest interval, de forma*

$$f(X) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Într-adevăr, să înlocuim în formula (9) punctul P' prin punctul X, de coordonate (x, y). În ipoteza $Df \equiv 0$ şi presupunînd punctul P fix, formula (9) ne dă

$$\Delta_2[f; P, X] = 0$$

sau, dezvoltat,

$$f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y),$$

cu $\varphi(x) = f(x, b) - f(a, b)$, $\psi(y) = f(a, y)$.

Trebuie să observăm că, reciproc, derivata bidimensională a unei funcţii de forma

$$\varphi(x) + \psi(y),$$

unde φ şi ψ sînt arbitrare, este nulă. De aceea, vom numi o astfel de funcţie o *constantă hiperbolică* (sau *bidimensională*). Rezultatului precedent putem atunci să-i dăm şi o altă formă utilă:

Dacă două funcţii f şi g au aceeaşi derivată bidimensională, ele diferă printr-o constantă bidimensională.

a. Primitiva hiperbolică

Să considerăm o funcţie f, definită în intervalul bidimensional

$$a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d,$$

integrabilă în acest interval. Să considerăm în acest interval un punct $Q(x, y)$. Integrala

$$\iint_{R'} f(P)\,\mathrm{d}P$$

extinsă asupra intervalului R', în care două vîrfuri opuse sînt punctele (a, c) şi (x, y), variază cu punctul Q. Vom pune

$$F(Q) = \iint_{R'} f(P)\,\mathrm{d}P. \tag{11}$$

Este uşor de demonstrat că: *integrala* (11) *este o funcţie continuă de punctul Q în tot intervalul R.*

Fie, într-adevăr, Q' punctul de coordonate $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ şi μ marginea superioară a lui $|f|$ în intervalul R. Avem, evident,

$$|F(Q') - F(Q)| < \mu(y + \Delta y)\Delta x + \mu(x + \Delta x)\Delta y,$$

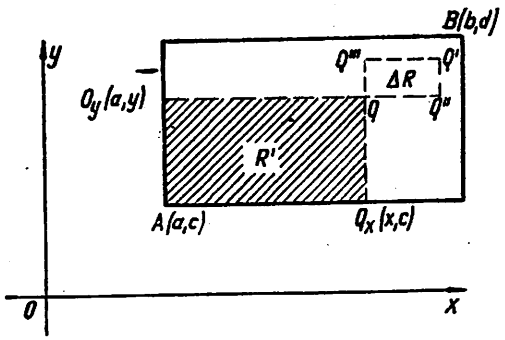


Fig. 33

de unde

$$\lim_{Q' \to Q} F(Q') = F(Q).$$

Putem merge mai departe:

Teorema 1. În orice punct în care f este continuă, integrala (11) este hiperbolic derivabilă şi derivata sa hiperbolică este f.

Într-adevăr, păstrînd notaţiile de mai sus, să însemnăm cu $\Delta R'$ intervalul determinat de punctele Q, Q', şi să numim cu Q'', Q''' celelalte două vîrfuri ale acestui interval (fig. 33). Avem

$$\Delta_2 F = F(Q') - F(Q'') - F(Q''') + F(Q) = \iint_{\Delta R'} f(P)\,\mathrm{d}P,$$

de unde, însemnînd cu M şi m marginile lui f în $\Delta R'$.

$$m \leqq \frac{\Delta_2 F}{\Delta x \, \Delta y} \leqq M.$$

Deoarece

$$m \leqq f(Q) \leqq M,$$

rezultă

$$\left| \frac{\Delta_2 F}{\Delta x \, \Delta y} - f(Q) \right| < \omega,$$

ω fiind oscilaţia lui f în intervalul $\Delta R'$.

Dacă f este continuă în punctul Q, atunci ω tinde către zero cînd $Q' \to Q$, deci

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta_2 F}{\Delta x \, \Delta y} = f(Q),$$

ceea ce stabileşte complet teorema enunţată.

Să numim primitivă hiperbolică a unei funcţii f orice funcţie a cărei derivată hiperbolică este f. Avem, în acest caz,

T e o r e m a II. Dacă $\Phi(P)$ este o primitivă hiperbolică oarecare a lui $f(P)$, atunci, în ipoteza că f este continuă în R, pentru orice punct Q din acest interval, avem

$$\iint_{R'} f(P) \, \mathrm{d}P = \Phi(x, y) - \Phi(x, c) - \Phi(a, y) + \Phi(a, c). \tag{12}$$

Într-adevăr, potrivit teoremei I, avem

$$D(F - \Phi) = 0,$$

identic în R, deci

$$F - \Phi = \varphi(x) + \psi(y).$$

Să însemnăm, respectiv, cu Q_x, Q_y punctele de coordonate (x, c) şi (a, y). Avem

$$\lim_{Q \to Q_x} (F - \Phi) = -\Phi(x, c),$$

deci

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) \quad \text{şi} \quad \lim_{y \to c} \psi(y)$$

există. Însemnînd, respectiv, cu φ_0 şi ψ_0 aceste limite, vom avea

$$\varphi_0 + \psi(y) = -\Phi(a, y),$$
$$\varphi(x) + \psi_0 = -\Phi(x, c),$$

de unde

$$\varphi_0 + \psi_0 = - \Phi(a, c).$$

Deducem, în definitiv,

$$\varphi(x) + \psi(x) = \Phi(a, c) - \Phi(x, c) - \Phi(a, y),$$

de unde

$$F(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi(x, c) - \Phi(a, y) + \Phi(a, c).$$

O primitivă hiperbolică a lui f se poate construi cu uşurinţă. Este suficient să ne mărginim la căutarea unei funcţii Φ, pentru care $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y}$ există şi este egală cu $f(P)$. Dar relaţia

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y} = f(P)$$

se poate scrie

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = f(x, y),$$

de unde, de pildă,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int_c^y f(x, y') \, \mathrm{d}y',$$

apoi

$$\Phi(x, y) = \int_a^x \mathrm{d}x' \int_c^y f(x', y') \, \mathrm{d}y'.$$

Pentru această primitivă particulară, avem

$$\Phi(a, y) = \Phi(x, c) = 0.$$

Deci,

T e o r e m a III. Dacă f este continuă în intervalul R, avem, oricare ar fi punctul $Q(x, y)$ în acest interval,

$$\iint_{R'} f(P) \, \mathrm{d}P = \int_a^x \mathrm{d}x' \int_c^y f(x', y') \, \mathrm{d}y'. \tag{13}$$

În particular,

$$\iint_{R} f(P) \, \mathrm{d}P = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y) \, \mathrm{d}y, \tag{13'}$$

formulă care reduce calculul integralei duble a unei funcţii continue, extinsă la un interval oarecare, la calculul a două integrale simple iterate; această formulă a fost obţinută, pe o altă cale, într-un capitol anterior.

Formulele (13) şi (13′) rămîn valabile şi în cazul în care f admite în R puncte de discontinuitate situate pe un număr finit de grafice de funcţii continue.

Capitolul XV

INTEGRALA DUBLĂ PE DOMENII NECOMPACTE

a. Domeniul de integrare nu este mărginit

Vom spune că un domeniu plan este nemărginit dacă el conține puncte exterioare oricărui interval mărginit, sau — ceea ce este tot una — oricărui cerc din plan. Un astfel de domeniu poate fi: 1° exteriorul unui domeniu mărginit sau al unui număr finit de domenii mărginite; 2° porțiunea de plan limitată de o curbă jordaniană, care se întinde indefinit în ambele sensuri (fig. 34 și 35).

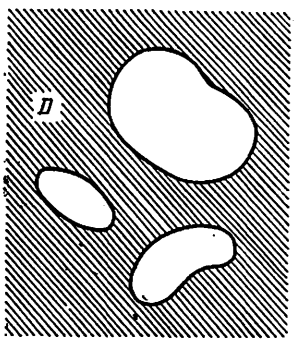


Fig. 34

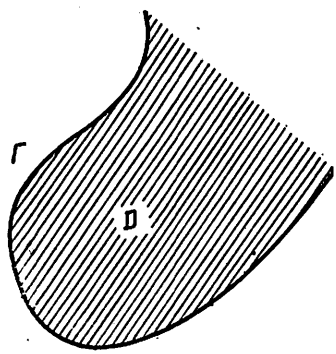


Fig. 35

Vom presupune că orice arc finit al frontierei unui astfel de domeniu este de arie nulă.

Fie K un cerc al planului. Dacă acest cerc are puncte comune cu domeniul nemărginit D, vom însemna prin DK porțiunea din D conținută în acest cerc.

Să considerăm acum un șir infinit de cercuri, cu centrul într-un punct oarecare O al planului

$$K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots,$$

de raze respective

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_n < \ldots,$$

tinzînd către infinit.

Orice punct $P \in D$ va fi conținut, pentru n suficient de mare, într-un DK_n. Într-adevăr, este suficient să luăm pe n astfel încît să avem $R_n > PO$, lucru care este totdeauna posibil, deoarece $\lim R_n = \infty$. Vom exprima această proprietate spunînd că *șirul*

$$DK_1, DK_2, ..., DK_n, ...$$

tinde către domeniul D și vom scrie, convențional

$$\lim_{n\to\infty} DK_n = D.$$

Mai general, șirul precedent de cercuri fiind dat, vom spune că un șir $\{D_n\}$ de subdomenii ale lui D tinde către D dacă oricărui număr natural n îi corespunde un altul N, astfel încît să avem

$$DK_n \subset D_{n'}, \tag{1}$$

îndată ce $n' > N$. Vom scrie și în acest caz

$$\lim D_n = D, \text{ sau } D_n \to D. \tag{1'}$$

Acest mod de „trecere la limită“ nu depinde nici de punctul O, nici de șirul $\{R_n\}$ crescător divergent.

Într-adevăr, să considerăm un alt șir de cercuri $\{K_n'\}$, cu centrul într-un punct O' diferite de O, de raze R_n' formînd un șir crescător divergent. Să presupunem că șirul de domenii $\{D_n\}$ tinde către D după primul sistem de cercuri, deci că relația (1) este verificată pentru n' suficient de mare. Să ne dăm atunci numărul natural m. Există, evident, un număr natural n, astfel încît cercul K_n să cuprindă în interiorul său cercul K_m', adică să avem

$$K_m' \subset K_n.$$

Atunci

$$DK_m' \subset DK_n,$$

de unde

$$DK_m' \subset D_{n'},$$

îndată ce $n' > N$. Regăsim astfel relația (1), în care cercurile K_n sînt înlocuite cu cercurile K_m'. Acest lucru ne va permite să fixăm, o dată pentru totdeauna, centrul cercurilor într-un anumit punct, de pildă în origine.

Pentru cele ce vor urma, este util să dăm o definiție: Vom spune că un domeniu D' constituie o *secțiune* a lui D, dacă există un cerc K cu centrul în origine, conținînd o porțiune din D și astfel încît să avem

$$DK \subset D' \subset D.$$

Domeniile unui șir $\{D_n\}$ convergent către D constituie, cel puțin de la un anumit rang, secțiuni ale lui D.

Următoarea proprietate ne va fi foarte utilă în cele ce urmează:

Din orice șir $\{D_n\}$ de secțiuni ale domeniului nemărginit D, tinzînd către D, se poate extrage un șir $\{D_{k_n}\}$, astfel încît

$$D_{k_1} \subset D_{k_2} \subset D_{k_3} \subset ...$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} D_{k_n} = D.$$

Vom lua $k_1 = 1$. Fie K_1 un cerc care să conţină domeniul D_1. Vom numi D_{k_2}, primul domeniu din şirul

$$D_2, D_3, \ldots,$$

pentru care $DK_1 \subset D_{k_2}$. Fie K_2 un cerc care să conţină pe D_{k_2}. Vom numi D_{k_3}, primul domeniu din şirul care începe cu D_{k_2}, şi pentru care $DK_2 \subset D_{k_3}$ ş.a.m.d. Şirul astfel construit îndeplineşte condiţia cerută. Vom numi şir monoton crescător de domenii orice şir în care fiecare domeniu este conţinut în următorul.

Fie f o funcţie definită în domeniul D, integrabilă pe orice subdomeniu D', măsurabil (J) (care are arie) al acestuia. Dacă există un număr real $J(D)$, astfel încît, pentru orice şir $\{D_n\}$ de secţiuni măsurabile (J) ale lui D, tinzînd către D, să avem

$$\lim_{D_n\to D} \iint_{D_n} f(P)\,\mathrm{d}P = J(D), \tag{2}$$

vom spune că f este integrabilă pe domeniul nemărginit D* şi vom scrie

$$J(D) = \iint_{D} f(P)\,\mathrm{d}P. \tag{2'}$$

Teorema 1. Dacă pentru orice şir monoton crescător $\{D'_n\}$ de secţiuni ale domeniului nemărginit D, tinzînd către D, şirul numeric corespunzător

$$\iint_{D'_n} f(P)\,\mathrm{d}P$$

este convergent către un număr real J', atunci:

1° Limita J' este independentă de şirul de secţiuni considerat;

2° Funcţia f este integrabilă pe domeniul D şi avem

$$\iint_{D} f(P)\,\mathrm{d}P = J'.$$

Fie, într-adevăr, $\{D'_n\}$ şi $\{D''_n\}$ două şiruri monoton crescătoare de secţiuni ale lui D, cu

$$\lim_{D'_n\to D} \iint_{D'_n} f(P)\,\mathrm{d}P = J', \qquad \lim_{D''_n\to D} \iint_{D''_n} f(P)\,\mathrm{d}P = J''.$$

---

* Se mai obişnuieşte să se spună că expresia care figurează în membrul din dreapta al relaţiei (2′) este o „integrală convergentă". Preferăm însă să spunem că „f este integrabilă pe D", deoarece relaţiile (2) şi (2′) exprimă o adevărată extensiune a integrabilităţii la domeniile nemărginite.

Utilizînd procedeul de mai sus, vom construi un şir monoton crescător $\{D_n\}$ de secţiuni care să aibă subşiruri infinite comune şi cu $\{D'_n\}$ şi cu $\{D''_n\}$, în felul următor:

Vom pune $D'_1 = D_1$. Vom nota cu D_2 prima secţiune din $\{D''_n\}$, care conţine pe D_2[1]. Vom nota apoi cu D_3 prima secţiune din şirul

$$D'_2, D'_3, \dots$$

care conţine pe D_2 ş.a.m.d. În acest fel, obţinem şirul monoton crescător $\{D_n\}$, în care subşirul

$$\{D_{2n+1}\}: \quad D_1, D_3, D_5, \dots$$

este şi un subşir al lui $\{D'_n\}$, iar subşirul $\{D_{2n}\}$: D_2, D_4, $D_6 \dots$ este şi un subşir al lui $\{D''_n\}$.

Prin ipoteză, şirul numeric

$$\left\{\iint\limits_{D_n} f(P)\,\mathrm{d}P\right\}$$

este convergent. Fie atunci

$$\lim_{D_n \to D} \iint\limits_{D_n} f(P)\,\mathrm{d}P = J.$$

Din proprietăţile elementare ale şirurilor numerice convergente, deducem

$$\lim_{D_{2n+1} \to D} \iint\limits_{D_{2n+1}} f(P)\,\mathrm{d}P = \lim_{D_{2n} \to D} \iint\limits_{D_{2n}} f(P)\,\mathrm{d}P = J$$

şi, cum $\{D_{2n+1}\}$ şi $\{D_{2n}\}$ sînt subşiruri ale şirurilor convergente $\{D'_n\}$, $\{D''_n\}$, deducem, în definitiv,

$$J' = J'' = J.$$

Să considerăm acum un şir oarecare de secţiuni $\{\bar{D}_n\}$ tinzînd către D. Şirul numeric

$$\left\{\iint\limits_{\bar{D}_n} f(P)\,\mathrm{d}P\right\}$$

este convergent către J. Într-adevăr, fie $\{D_n\}$ un şir monoton crescător de secţiuni în D. Vom însemna cu N cel mai mic număr natural pentru care $\bar{D}_N \supset D_1$. Atunci, pentru $n > N$, orice secţiune a şirului $\{\bar{D}_n\}$ poate fi închisă între două secţiuni ale şirului $\{D_n\}$. Mai precis, pentru orice $n > N$ există două numere naturale k'_n şi $k''_n > k'_n$, astfel încît

$$D'_{k_n} \subset \bar{D}_n \subset D''_{k_n}.$$

Să punem

$$\varphi(P) = f(P) + |f(P)|, \qquad \psi(P) = |f(P)|.$$

[1] O asemenea secţiune există totdeauna.

Avem atunci

$$f(P) = \varphi(P) - \psi(P),$$

cu $\varphi(P) \geqq 0$, $\psi(P) \geqslant 0$. Din dubla incluziune precedentă, deducem

$$\iint_{D'_{k_n}} \varphi(P)\, dP \leqq \iint_{\bar{D}_n} \varphi(P)\, dP \leqq \iint_{D''_{k_n}} \varphi(P)\, dP$$

şi o relaţie analogă pentru $\psi(P)$.

Dar şirurile $\{D'_{k_n}\}$ $\{D''_{k_n}\}$ fiind şiruri extrase din şirul monoton crescător $\{D_n\}$ avem, potrivit primei părţi a teoremei,

$$\lim_{D'_{k_n} \to D} \iint_{D'_{k_n}} \varphi(P) dP = \lim_{D''_{k_n} \to D} \iint_{D''_{k_n}} \varphi(P)\, dP = J_1,$$

$$\lim_{D'_{k_n} \to D} \iint_{D'_{k_n}} \psi(P) dP = \lim_{D''_{k_n} \to D} \iint_{D''_{k_n}} \psi(P)\, dP = J_2,$$

de unde, imediat,

$$\lim_{D'_{k_n} \to D} \iint_{D'_{k_n}} f(P)\, dP = \lim_{D''_{k_n} \to D} \iint_{D''_{k_n}} f(P)\, dP = J_1 - J_2.$$

Din inegalităţile precedente, precum şi din relaţia evidentă

$$\iint_{\bar{D}_n} f(P)\, dP = \iint_{\bar{D}_n} \varphi(P)\, dP - \iint_{\bar{D}_n} \psi(P)\, dP,$$

deducem atunci

$$\lim_{\bar{D}_n \to D} \iint_{\bar{D}_n} f(P)\, dP = J_1 - J_2,$$

ceea ce demonstrează şi partea a doua a teoremei, deoarece — potrivit primei părţi — numărul $J_1 - J_2$ este independent de şirurile $\{D'_{k_n}\}$, $\{D''_{k_n}\}$, deci de şirul $\{\bar{D}_n\}$.

Teorema demonstrată este foarte importantă, pentru că ea ne permite ca, în definirea cu ajutorul relaţiilor (2), (2′) a integrabilităţii şi a integralei lui f pe domeniul D, să ne mărginim la şiruri monoton crescătoare de secţiuni.

T e o r e m a II. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca f să fie integrabilă pe domeniul nemărginit D este ca oricărui număr pozitiv ε să-i corespundă o secţiune $\bar{D} = \bar{D}(\varepsilon)$, astfel încît, pentru orice pereche de secţiuni D', D'', verificînd relaţiile

$$D' \supset \bar{D}, \quad D'' \supset \bar{D},$$

să avem

$$\left| \iint_{D''} f(P)\, dP - \iint_{D'} f(P)\, dP \right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Condiția este necesară. Într-adevăr, să presupunem funcția f integrabilă pe D și să punem

$$J(D) = \iint_D f(P)\,\mathrm{d}P.$$

Vom arăta că putem determina o secțiune $\bar{D}$ în D, astfel încît, pentru orice secțiune $D' \supset \bar{D}$, să avem

$$\left| J(D) - \iint_{D'} f(P)\,\mathrm{d}P \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Într-adevăr, dacă acest lucru nu ar fi posibil, atunci, pentru orice $R > 0$, ar exista cel puțin o secțiune D_R, verificînd relația

$$DK \subset D_R,$$

în care K este un cerc de rază R cu centrul în origine, și astfel încît să avem

$$\left| J(D) - \iint_{D_R} f(P)\,\mathrm{d}P \right| \geqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Să considerăm atunci un șir crescător divergent $\{R_n\}$ și să punem $D_n = D_{R_n}$. Avem, pe de o parte,

$$\lim D_n = D,$$

iar pe de altă parte,

$$\left| J(D) - \iint_{D_n} f(P)\,\mathrm{d}P \right| \geqq \frac{\varepsilon}{2},$$

oricare ar fi n. Ajungem la concluzia absurdă că integrala

$$\iint_{D_n} f(P)\,\mathrm{d}P$$

nu poate să tindă către $J(D)$.

Așadar, relația (4) este satisfăcută pentru orice secțiune $D' \supset \bar{D}$. Fie atunci D'' o altă secțiune, astfel încît $D'' \supset \bar{D}$. Alături de relația (4), putem scrie relația:

$$\left| J(D) - \iint_{D''} f(P)\,\mathrm{d}P \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4'}$$

iar din (4) și (4′) deducem imediat relația (3).

Condiția este suficientă. Să considerăm, într-adevăr, un șir monoton crescător $\{D_n\}$ de secțiuni ale lui D. Există un număr natural $N(\varepsilon) = N$, astfel încît, pentru $n > N$, să avem $D_n \supset \bar{D}$. Dar atunci, potrivit relației (3), presupusă satisfăcută, vom avea

$$\left| \iint_{D_m} f(P)\,\mathrm{d}P - \iint_{D_n} f(P)\,\mathrm{d}P \right| < \varepsilon,$$

pentru orice pereche de indici (m, n), astfel încît $m > N$, $n > N$.

În baza criteriului general al lui Cauchy, aceasta înseamnă că şirul numeric

$$\left\{\iint_{D_n} f(P)\,\mathrm{d}P\right\}.$$

are o limită finită, deci $f(P)$ este integrabilă pe D, potrivit teoremei I.

Corolar. O condiţie necesară şi suficientă pentru ca $f(P)$ să fie integrabilă pe domeniul nemărginit D este ca să existe un număr real $J(D)$, astfel încît, pentru orice $\varepsilon > 0$, să avem

$$\left|J(D) - \iint_{D'} f(P)\,\mathrm{d}P\right| < \varepsilon, \tag{3'}$$

îndată ce $D' \supset \bar{D}$, unde $\bar{D}$ este o secţiune ce depinde de ε.

Justificarea acestui corolar nu prezintă nici o dificultate.

Integrala pe un domeniu nemărginit, aşa cum a fost definită mai sus, păstrează principalele proprietăţi ale integralei pe un domeniu mărginit. Astfel:

I. *Dacă domeniul nemărginit D este format din reunirea a două domenii D_1 şi D_2 şi dacă f este integrabilă pe fiecare din aceste domenii parţiale, atunci f este integrabilă pe D şi avem, de îndată ce D_1 şi D_2 n-au puncte interioare comune,*

$$\iint_{D} f(P)\,\mathrm{d}P = \iint_{D_1} f(P)\,\mathrm{d}P + \iint_{D_2} f(P)\,\mathrm{d}P. \tag{5}$$

Să presupunem, în primul rînd, că unul din domeniile parţiale, de pildă D_1, este mărginit. Atunci D_2 este nemărginit. Deoarece f este integrabilă pe D_2, aceasta înseamnă că există un număr $J(D_2)$, astfel încît, pentru orice $\varepsilon > 0$, să avem o secţiune D_2' în D_2, pentru care

$$\left|J(D_2) - \iint_{D_2'} f(P)\,\mathrm{d}P\right| < \varepsilon.$$

Să punem $D' = D_1 \cup D_2$ şi

$$J(D) = \iint_{D_1} f(P)\,\mathrm{d}P + J(D_2). \tag{6}$$

D' este o secţiune în D, iar din inegalitatea precedentă deducem

$$\left|J(D) - \iint_{D'} f(P)\,\mathrm{d}P\right| < \varepsilon,$$

ceea ce stabileşte integrabilitatea lui f pe domeniul D. În asemenea condiţii, ţinînd seama de definiţia numerelor $J(D)$, $J(D_2)$, formula (6) se reduce la formula (5).

Să presupunem acum domeniile D_1 şi D_2 nemărginite (fig. 36). Integrabilitatea lui f pe ambele domenii implică existenţa a două numere $J(D_1)$ şi $J(D_2)$, astfel încît, pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe o secţiune D_1' în D_1 şi o secţiune D_2' în D_2, pentru care să avem simultan

$$\left|J(D_1) - \iint_{D'} f(P)\,\mathrm{d}P\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|J(D_2) - \iint_{D'} f(P)\,\mathrm{d}P\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

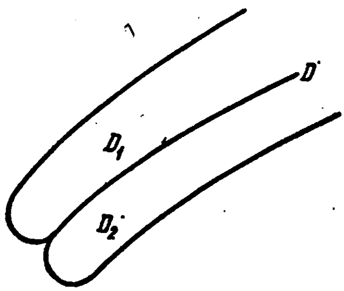


Fig. 36

Dar reuniunea domeniilor D_1' şi D_2' constituie evident o secţiune D' în D. În asemenea condiţii, punînd

$$J(D) = J(D_1) + J(D_2),$$

din inegalităţile scrise deducem imediat

$$\left|J(D) - \iint_{D'} f(P)\,\mathrm{d}P\right| < \varepsilon$$

şi propoziţia este demonstrată.

II. *Dacă f şi g sînt integrabile în D, atunci $f + g$ este integrabilă în D şi avem*

$$\iint_D [f(P) + g(P)]\,\mathrm{d}P = \iint_D f(P)\,\mathrm{d}P + \iint_D g(P)\,\mathrm{d}P. \tag{7}$$

Prin ipoteză, există două numere $J_f(D)$ şi $J_g(D)$, astfel încît, pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe o secţiune D' a lui D, pentru care avem simultan

$$\left|J_f(D) - \iint_{D'} f(P)\,\mathrm{d}P\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|J_g(D) - \iint_{D'} g(P)\,\mathrm{d}P\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deducem de aici

$$\left|J_f(D) + J_g(D) - \iint_{D'} (f + g)\,\mathrm{d}P\right| < \varepsilon,$$

inegalitate care demonstrează propoziţia enunţată.

III. *Dacă domeniul D nemărginit este o reuniune de domenii în număr finit şi dacă f este integrabilă pe domeniul D, atunci f este integrabilă pe fiecare din domeniile parţiale.*

Această proprietate va rezulta imediat din teorema fundamentală de mai jos.

Proprietatea următoare joacă un rol fundamental în problema integrabilităţii unei funcţii pe un domeniu nemărginit.

T e o r e m ă. O condiţie necesară şi suficientă pentru ca f să fie integrabilă pe domeniul nemărginit D este ca $|f|$ să fie integrabilă pe acest domeniu.

Suficienţa condiţiei rezultă imediat din teorema II şi din inegalitatea

$$\left|\iint_{\sigma} f(P)\,\mathrm{d}P\right| \leqslant \iint_{\sigma} \left| f(P) \right| \mathrm{d}P,$$

unde σ este secţiune a lui D.

Rămîne să demonstrăm *necesitatea condiţiei.* Vom studia, în prealabil, două cazuri particulare:

1° Propoziţia este evidentă dacă, în domeniul D, avem $f(P) \geqq 0$.

2° Să considerăm mulţimea E a punctelor din D pentru care

$$f(P) = 0.$$

Dacă această mulţime este mărginită, propoziţia este iarăşi adevărată.

Într-adevăr, este suficient să considerăm o secţiune D' în D care să conţină mulţimea E în interior. Atunci, în domeniul $D - D'$ avem $f(P) > 0$ şi sîntem reduşi, pentru acest domeniu, la cazul precedent. Integrabilitatea lui f pe domeniul D rezultă atunci din propoziţia I de mai sus.

Rămîne deci să stabilim suficienţa condiţiei, în cazul în care zerourile funcţiei f în domeniul D formează o mulţime E nemărginită (deci, a fortiori, infinită) de puncte.

Vom reproduce aici, cu mici modificări, demonstraţia foarte simplă şi naturală dată de G.M. Fichtengoltz în cursul său de analiză[1].

Vom pune

$$f_1(P) = \frac{|f(P)| + f(P)}{2}, \quad f_2(P) = \frac{|f(P)| - f(P)}{2}, \tag{8}$$

de unde

$$f(P) = f_1(P) - f_2(P), \quad |f(P)| = f_1(P) + f_2(P). \tag{8'}$$

Funcţiile f_1 şi f_2 nu sînt niciodată negative şi nu pot fi simultan pozitive. Într-adevăr, dacă într-un punct P_0 am avea $f_1(P_0) > 0$, aceasta înseamnă că $f(P_0) > 0$, în baza primei relaţii (8), deci $f_2(P_0) = 0$. Tot astfel, dacă $f_2(P) > 0$, aceasta înseamnă că $f(P_0) < 0$, de unde $f_1(P_0) = 0$.

Funcţiile f_1 şi f_2 sînt integrabile pe orice domeniu mărginit $D' \subset D$.

Să ne dăm acum numărul pozitiv ε. În baza ipotezei din enunţ şi a teoremei II, există o secţiune D' a lui D, astfel încît pentru orice secţiune $D'' \supset D'$ să avem

$$\left|\iint_{\sigma} f(P)\,\mathrm{d}P\right| < \varepsilon,$$

cu $\sigma = D'' - D'$. Să considerăm un şir de secţiuni $\{D_n\}$ ale lui D tinzînd către D.

---

[1] G. M. Fichtengoltz *Curs. diferentialnogo i integralnogo iscislenia*, Moskova, 1951, t. III, p. 265.

Integralele $\iint\limits_{D_n} \varphi(P)\,\mathrm{d}P, \iint\limits_{D_n} \psi(P)\,\mathrm{d}P$ tind, în acelaşi timp, către o limită sau către infinit. Într-adevăr, dacă una din integrale, de pildă prima, ar tinde către infinit, în timp ce a doua ar avea o limită finită, din egalitatea

$$\iint\limits_{D_n} f(P)\,\mathrm{d}P = \iint\limits_{D_n} \varphi(P)\,\mathrm{d}P - \iint\limits_{D_n} \psi(P)\,\mathrm{d}P$$

am deduce

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} f(P)\,\mathrm{d}P = \infty,$$

ceea ce este în contradicţie cu ipoteza noastră.

Aşadar: 1° sau ambele integrale de mai sus au cîte o limită finită şi atunci teorema este demonstrată în baza relaţiilor (8′); 2° sau ambele integrale tind — crescînd — către ∞.

Vom arăta că această din urmă ipoteză ne duce la o contradicţie. Într-adevăr, în acest caz, putem alege şirul de secţiuni $[D_n]$ satisfăcînd condiţiei $D_n \subset D_{n+1}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ şi astfel încît să avem, oricare ar fi n,

$$\iint\limits_{D_{n+1}} |f(P)|\,\mathrm{d}P > 3\iint\limits_{D_n} |f(P)|\,\mathrm{d}P + 2n. \tag{9}$$

Să punem $\Delta_n = D_{n+1} - D_n$. Inegalitatea (9) se poate scrie

$$\iint\limits_{\Delta_n} |f(P)|\,\mathrm{d}P > 2\iint\limits_{D_n} |f(P)|\,\mathrm{d}P + 2n. \tag{9′}$$

Să presupunem, de pildă,

$$\iint\limits_{\Delta_n} f_1(P)\,\mathrm{d}P \geq \iint\limits_{\Delta_n} f_2(P)\,\mathrm{d}P. \tag{10}$$

Atunci, ţinînd seama de a doua relaţie (8′) şi de inegalitatea (9′) deducem

$$\iint\limits_{\Delta_n} f_1(P)\,\mathrm{d}P > \iint\limits_{D_n} |f(P)|\,\mathrm{d}P + n. \tag{11}$$

În baza definiţiei integralei duble, putem să efectuăm o descompunere a domeniului Δ_n în domenii parţiale Δ_n^i, de arii respective ω_n^i, astfel încît, însemnînd cu m_n^i marginea inferioară a funcţiei f_1 în domeniul parţial Δ_n^i, să continuăm să avem, în baza inegalităţii (11),

$$\sum_i m_n^i \cdot \omega_n^i > \iint\limits_{D_n} |f(P)|\,\mathrm{d}P + n. \tag{11′}$$

Este evident că această din urmă inegalitate se menţine dacă, din domeniile parţiale Δ_n^i, vom păstra numai pe acelea în care $m_n^i > 0$[1]. Vom nota cu $\overline{\Delta}_n$ reuniunea acestor domenii. Inegalitatea (11′) devine

$$\sum_i{}' m_n^i \omega_n^i > \iint_{D_n} |f(P)| \, \mathrm{d}P + n, \tag{12}$$

unde Σ' reprezintă o însumare extinsă numai asupra domeniilor $\overline{\Delta}_n$. Să însemnăm cu

$$\iint_{\overline{\Delta}_n} f_1(P) \, \mathrm{d}P$$

suma integralelor funcţiei f_1, extinse la toate domeniile reunite în $\overline{\Delta}_n$.

În $\overline{\Delta}_n$, avem, după o observaţie făcută mai sus, $f_1(P) = f(P)$, deoarece în orice punct al acestor domenii $f_1(P) > 0$. Pe de altă parte,

$$\iint_{\overline{D}_n} f_1(P) \, \mathrm{d}P \geqq \sum_i{}' m_n^i \cdot \omega_n^i.$$

Inegalitatea (12) devine atunci

$$\iint_{\overline{\Delta}_n} f(P) \, \mathrm{d}P > \iint_{D_n} |f(P)| \, \mathrm{d}P + n.$$

Fie ε un număr pozitiv, inferior diferenţei dintre cei doi membri ai inegalităţii precedente, şi M marginea superioară a lui $|f(P)|$ în secţiunea D_{n+1}. Vom uni între ele, precum şi cu domeniul D_n, domeniile reunite în Δ_n prin „coridoare" (formate — de pildă — din linii frînte paralele între ele), formînd astfel o nouă secţiune D'_{n+1} în D (fig. 37). Dacă punem

$$\Delta'_n = D'_{n+1} - D_n$$

şi dacă construim coridoarele suficient de înguste, pentru ca suma ariilor lor să nu depăşească numărul $\frac{\varepsilon}{M}$, atunci, din inegalitatea (13), deducem

$$\iint_{\Delta'_n} f(P) \cdot \mathrm{d}P > \iint_{\Delta_n} |f(P)| \, \mathrm{d}P + n > n. \tag{14}$$

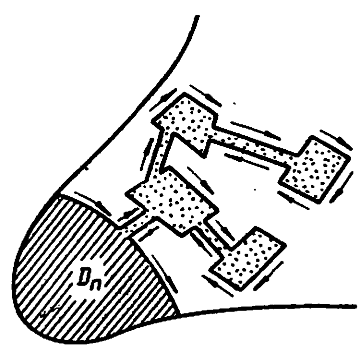


Fig. 37

[1] Este clar că nu putem avea în toate domeniile parţiale egalitatea $m = 0$, deoarece suma Darboux corespunzătoare ar fi nulă şi aceasta ar contrazice inegalitatea (11).

Dar, potrivit primei teoreme fundamentale, putem determina un număr natural N, astfel încît să avem

$$\iint\limits_{\Delta_n'} f(P)\,\mathrm{d}P < \varepsilon, \tag{15}$$

îndată ce $n > N$, ceea ce contrazice inegalitatea precedentă; teorema este astfel complet demonstrată.

Observație. Dacă, în loc de inegalitatea (10), ar fi fost satisfăcută relația

$$\iint\limits_{\Delta_n'} f_1(P)\,\mathrm{d}P \leqslant \iint\limits_{\Delta_n} f_1(P)\,\mathrm{d}P,$$

atunci, în locul inegalității (14), am fi obținut, printr-un raționament absolut analog, inegalitatea

$$\iint\limits_{\Delta_n'} f(P)\,\mathrm{d}P < -\iint\limits_{D_n} |f(P)|\,\mathrm{d}P - n < -n, \tag{14'}$$

în care Δ_n' (în afară de „coridoare") ar fi fost constituit din puncte în care $f(P) < 0$.

Inegalitatea (15) ar fi fost înlocuită prin

$$\iint\limits_{\Delta_n'} f(P)\,\mathrm{d}P > -\varepsilon \tag{15'}$$

pentru n destul de mare, ceea ce ne-ar fi dus iarăși la o contradicție.

Importanța teoretică a teoremei precedente este evidentă.

Într-adevăr, această teoremă confirmă faptul că definiția dată simbolului

$$\iint\limits_{D} f(P)\,\mathrm{d}P,$$

în cazul domeniilor nemărginite, conduce la un mod de convergență foarte „tare" pentru integralele respective, convergență care are ca urmare o solidarizare completă a soartei integralelor

$$\iint\limits_{D} f(P)\,\mathrm{d}P \quad \text{şi} \quad \iint\limits_{D} |f(P)|\,\mathrm{d}P.$$

O asemenea echivalență nu are loc în cazul unei singure dimensiuni.

Din punct de vedere practic, teorema precedentă aduce o simplificare considerabilă în studiul convergenței integralelor duble, întrucît noțiunea de integrală „semiconvergentă" din teoria integralelor simple nu-şi mai are corespondent în teoria integralelor duble; divergența integralei

$$\iint\limits_{D} |f(P)|\,\mathrm{d}P$$

atrage după sine totdeauna divergența integralei

$$\iint_D f(P)\,\mathrm{d}P.$$

Să considerăm, ca exemplu[1], funcția:

$$f(P) = e^{-xy} \cdot \sin x$$

și să luăm ca domeniu D unghiul drept determinat de relațiile

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0.$$

Ca secțiuni D_n în acest domeniu, vom considera pătratele determinate de axele de coordonate și de dreptele

$$x = n, \; y = n, \; (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

În asemenea condiții, putem scrie

$$\iint_{D_n} |f(P)|\,\mathrm{d}P = \int_0^n |\sin x|\,\mathrm{d}x \int_0^n e^{-xy}\,\mathrm{d}y = \int_0^n \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^n \frac{|\sin x|}{xe^{nx}}\,\mathrm{d}x.$$

În membrul drept, integrala a doua tinde către zero pentru $n \to \infty$. Însă prima integrală este divergentă. Deci integrala

$$\iint_D e^{-xy} \cdot \sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

este divergentă.

În acest exemplu este interesant de observat că integralele iterate

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \int_0^\infty e^{-xy} \cdot \sin x\,\mathrm{d}y \quad \text{și} \quad \int_0^\infty \mathrm{d}y \int_0^\infty e^{-xy} \cdot \sin x\,\mathrm{d}x$$

există și sînt egale între ele; valoarea lor comună este $\frac{\pi}{2}$. Cu toate acestea, după cum am văzut mai sus, funcția $e^{-xy} \sin x$ nu este integrabilă pe domeniul corespunzător (a se compara cu cazul domeniului mărginit).

Cazurile în care se poate stabili convergența unei integrale duble pe baza celor două teoreme precedente sînt foarte rare. De aceea, în practică, ca și în orice problemă de convergență, se caută condiții suficiente („criterii") pe baza cărora să se poată stabili dacă o integrală dublă dată este sau nu convergentă. Vom da aici cîteva condiții de acest gen:

I. *Dacă g este integrabilă pe domeniul nemărginit D și dacă*

$$|f(P)| \leqq |g(P)|,$$

atunci f este integrabilă pe D.

---

[1] G. Fichtengolz, op. cit.

Într-adevăr, integrabilitatea pe domeniul D a lui g atrage după sine integrabilitatea lui $|g|$. Pe de altă parte, pentru orice pereche de secțiuni D', D'', cu $D'' \supset D'$, avem

$$\left|\iint_{D''} f(P)\,\mathrm{d}P - \iint_{D'} f(P)\,\mathrm{d}P\right| \leq \iint_{D''-D'} \left|f(P)\right| \mathrm{d}P \leq \iint_{D''-D'} |g(P)|\,\mathrm{d}P.$$

II. *Dacă g este integrabilă pe domeniul nemărginit D și dacă există $M > 0$ astfel încît*

$$\left|\frac{f(P)}{g(P)}\right| < M,$$

oricare ar fi punctul P în acest domeniu, atunci f este integrabilă pe D.

Într-adevăr, fie

$$\varphi(P) = \frac{f(P)}{g(P)}.$$

Cu notațiile de mai sus, ținînd seama că g este integrabilă pe D și punînd $\sigma = D'' - D'$, avem

$$\left|\iint_{\sigma} f(P)\,\mathrm{d}P\right| = \left|\iint_{\sigma} g(P)\cdot\varphi(P)\mathrm{d}P\right| \leq M \iint_{\sigma} \left|g(P)\right| \mathrm{d}P,$$

relație care stabilește integrabilitatea lui f, întrucît M nu depinde de σ.

III. *Orice funcție f care se poate pune sub forma*

$$f(P) = \frac{\varphi(P)}{\overline{OP}^{\alpha}}, \qquad (\alpha > 2),$$

unde φ este mărginită pe domeniul nemărginit D, iar O un punct fix al planului, este integrabilă pe D.

Să punem

$$g(P) = \frac{1}{\overline{OP}^{\alpha}}.$$

În baza criteriului precedent, este suficient să arătăm că g este integrabilă pe D. Or, păstrînd notațiile anterioare, putem închide domeniul $\sigma = D'' - D'$ într-o coroană circulară K, cu centrul în O și cu razele R' și $R'' > R'$.

Evident,

$$\iint_{\sigma} g(P)\,\mathrm{d}P < \iint_{K} g(P)\,\mathrm{d}P = \frac{2\pi}{\alpha - 2}\left(\frac{1}{R''^{\alpha-2}} - \frac{1}{R'^{\alpha-2}}\right).$$

Convergența integralei

$$\iint_{D} g(P)\,\mathrm{d}P$$

rezultă imediat din faptul că membrul din dreapta tinde către zero cînd $R' \to \infty$.

E x e m p l u. Funcția

$$f(P) = e^{-(x^2+y^2)}$$

este integrabilă pe orice domeniu nemărginit.

Într-adevăr, este suficient să punem

$$\varphi(P) = \frac{x^3+y^3}{e^{x^2+y^2}}, \quad g(P) = \frac{1}{x^3+y^3}$$

şi să observăm că φ este mărginită în tot planul.

IV. *Dacă, pentru un şir particular $\{D_n\}$ de secțiuni ale domeniului nemărginit D, tinzînd către acest domeniu, şirul numeric corespunzător*

$$\left\{\iint_{D_n} |f(P)|\,\mathrm{d}P\right\} \tag{16}$$

este convergent, atunci f este integrabilă pe domeniul D.

Fie, într-adevăr, $J(D)$ limita şirului (16). Din şirul $\{D_n\}$ putem totdeauna extrage un şir monoton crescător de secțiuni $\{D_{k_n}\}$. Şirul numeric corespunzător

$$\left\{\iint_{D_{k_n}} |(P)|\,\mathrm{d}P\right\},$$

este extras din şirul (16), deci converge către aceeaşi limită $J(D)$. Presupunem extracția deja făcută, pentru a nu complica notațiile. În asemenea condiții, să considerăm un şir monoton crescător oarecare de secțiuni $\{\bar{D}_m\}$ în domeniul D. Pentru orice m există un n, astfel încît să avem

$$\bar{D}_m \subset D_n,$$

de unde

$$\iint_{\bar{D}_m} |\ (P)|\,\mathrm{d}P < \iint_{D_n} |f(P)|\,\mathrm{d}P < J(D),$$

deci şirul monoton

$$\left\{\iint_{\bar{D}m} |f(P)|\,\mathrm{d}P\right\}$$

este convergent. Rezultă că $|f|$, deci şi f, este integrabilă pe domeniul D.

O b s e r v a ț i i. 1° Din demonstrația precedentă rezultă că dacă $f(P) \geqq 0$ şi dacă şirul particular (16) converge către $J(D)$, atunci

$$\iint_D f(P)\,\mathrm{d}P = J(D).$$

2° În enunţul precedent nu se poate înlocui şirul (16) prin şirul

$$\left\{\iint\limits_{D_n} f(P)\,\mathrm{d}P\right\},$$

după cum arată exemplul următor. Să luăm

$$f(P) = \sin(x^2 + y^2)$$

şi să considerăm domeniul nemărginit D definit de relaţiile $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ (adică unghiul xOy). De asemenea, vom lua ca şir (D_n) un şir de pătrate definite de relaţiile

$$(D_n) : 0 \leqq x \leqq n, \quad 0 \leqq y \leqq n.$$

Avem atunci

$$\iint\limits_{D_n} f(P)\,\mathrm{d}P = 2\int_0^n \sin x^2\,\mathrm{d}x \int_0^n \cos y^2\,\mathrm{d}y,$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} f(P)\,\mathrm{d}P = 2\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x \int_0^\infty \cos y^2\mathrm{d}y = \frac{\pi}{8}.$$

Cu toate acestea, nu putem trage de aici concluzia că $f(P)$ este integrabilă în D. Într-adevăr, luînd ca domenii $\overline{D}_m$ sferturi de cerc cu centrul în origine, de raze respective, 1, 2, 3, ..., avem

$$\iint\limits_{\overline{D}_m} f(P)\,\mathrm{d}P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^m \rho \cdot \sin \rho^2\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{2} \sin^2(m^2),$$

de unde se vede că şirul

$$\left\{\iint\limits_{\overline{D}_m} f(P)\,\mathrm{d}P\right\}$$

nu este convergent. Deci, f nu este integrabilă în unghiul considerat.

În baza celor de mai sus, se stabileşte teorema: *Dacă domeniul nemărginit D este o reuniune finită de domenii şi dacă f este integrabilă pe domeniul D, atunci f este integrabilă pe fiecare din domeniile parţiale.*

Proprietatea nu are nevoie de demonstraţie decît pentru domeniile parţiale nemărginite ale lui D. Pe de altă parte, proprietatea este iarăşi evidentă dacă numai unul din domeniile parţiale ale lui D este nemărginit.

Vom presupune deci că D posedă cel puţin două subdomenii nemărginite; va fi chiar suficient să demonstrăm proprietatea pentru două domenii parţiale nemărginite, fie D' şi D''.

Să presupunem că f nu este integrabilă pe domeniul nemărginit D'. Atunci, potrivit teoremei precedente, $|f|$ nu este integrabilă pe acest domeniu. Să considerăm un şir $\{K_n\}$ de cercuri cu centrul în origine, cu razele $R_1, R_2, \ldots$ tinzînd către ∞, şi şirurile $\{D'_n\}$, $\{D''_n\}$ monoton crescătoare, de secţiuni în domeniile D', D'', astfel încît $D'_n \supset D'K_n$, $D''_n \supset D''K_n$. Domeniul D_n, format din reuniunea domeniilor D'_n, D''_n constituie o secţiune în D. Prin ipoteză,

$$\lim_{D'_n \to D} \iint_{D'_n} |f(P)|\, \mathrm{d}P = +\infty,$$

deci, cu atît mai mult,

$$\lim_{D_n \to D} \iint_{D_n} |f(P)|\, \mathrm{d}P = +\infty,$$

adică $|f|$ nu este integrabilă pe domeniul D. Dar atunci nici f nu este integrabilă pe acest domeniu, ceea ce este absurd. Aşadar, f este integrabilă pe domeniul parţial nemărginit D'.

b. Funcţia nu este mărginită

Fie f o funcţie definită în toate punctele unui domeniu închis şi mărginit D, în afară de un punct A al acestui domeniu. Să izolăm acest punct printr-o curbă închisă $C(A)$. Vom însemna tot cu $C(A)$ domeniul limitat de această curbă şi cu $DC(A)$ porţiunea din D conţinută în $C(A)$. Vom presupune că f nu este mărginită în regiunea rămasă prin excluderea punctului A din domeniul D, dar că este integrabilă în $D - DC(A)$, oricare ar fi $C(A)$. Dacă numim, ca de obicei, diametrul unui domeniu marginea superioară a distanţei dintre două puncte ale sale, vom spune că un şir de domenii $C_n(A)$, conţinînd punctul A, tinde către A, dacă şirul diametrelor corespunzătoare tinde către zero. În scris,

$$\lim C_n(A) = A.$$

Dacă există un număr real $J(D)$, astfel încît pentru orice *şir* $\{C_n(A)\}$ de domenii conţinînd punctul A, să avem, punînd $E_n = D - DC_n(A)$,

$$\lim_{C_n \to A} \iint_{E_n} f(P)\, \mathrm{d}P = J(D),$$

vom spune că $f(P)$ este integrabilă pe domeniul D şi vom scrie

$$J(D) = \iint_D f(P)\, \mathrm{d}P.$$

Rezultatele privitoare la integrabilitatea pe un domeniu nemărginit, demonstrate în paragraful precedent, se extind, cu modificări evidente ale enunţurilor, la cazul studiat aici.

I. *Dacă pentru orice şir* $\{C_n(A)\}$ *de domenii verificînd condiţiile*

$$C_1(A) \supset C_2(A) \supset \dots$$

şi tinzînd către punctul A, *şirul numeric corespunzător*

$$\left\{\iint\limits_{C_n(A)} f(P)\,\mathrm{d}P\right\}$$

converge, atunci: 1° *limita* J *a acestui şir numeric este independentă de şirul considerat;* 2° f *este integrabilă pe* D *şi integrala sa pe acest domeniu este egală cu* J.

II. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca* f *să fie integrabilă pe domeniul* D *este ca oricărui număr pozitiv* ε *să-i corespundă un număr pozitiv* δ, *astfel încît, pentru orice pereche de domenii* $C'(A)$, $C''(A)$, *de diametre inferioare numărului* δ, *să avem*

$$\left|\iint\limits_{C''(A)} f(P)\,\mathrm{d}P - \iint\limits_{C'(A)} f(P)\,\mathrm{d}P\right| < \varepsilon.$$

III. *Dacă* $|f|$ *este integrabilă pe domeniul* D, *atunci şi* f *este integrabilă pe acest domeniu şi reciproc.*

Demonstraţiile date proprietăţilor corespunzătoare în cazul domeniilor nemărginite se transpun şi aici fără modificări esenţiale.

Criteriile date pentru integrabilitatea pe un domeniu nemărginit îşi au corespondentul lor în cazul studiat aici. Astfel:

I. *Dacă* g *este integrabilă pe domeniul* D *şi* $|f(P)| < |g(P)|$, *atunci şi* f *este integrabilă pe acest domeniu.*

II. *Dacă* g *este integrabilă pe domeniul* D *şi dacă raportul* $\dfrac{f}{g}$ *este mărginit pe acest domeniu, atunci* f *este integrabilă pe* D.

III. *Dacă pentru un şir particular* $\{C_n(A)\}$ *de domenii tinzînd către punctul* A, *şirul numeric*

$$\left\{\iint\limits_{C_n(A)} |f(P)|\,\mathrm{d}P\right\}$$

este convergent, atunci f *este integrabilă pe* D.

Demonstraţiile sînt analoge demonstraţiilor deja utilizate în acest capitol.

Explicaţia paralelismului între proprietăţile enunţate mai sus şi proprietăţile corespunzătoare pentru domenii nemărginite este foarte simplă. Să presupunem, pentru simplificare, punctul A în originea coordonatelor şi să facem schimbarea de variabile

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad y = \frac{v}{u^2+v^2}, \quad (u^2+v^2 \neq 0). \tag{17}$$

Această schimbare este o inversiune de pol 0 şi de putere 1, al cărei determinant funcţional este

$$\frac{D(x, g)}{D(u, v)} = -\frac{1}{(u^2+v^2)^2} < 0.$$

Din formula (17) deducem

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{17'}$$

Prin urmare, orice curbă rectificabilă închisă C din planul (x, y) se transformă într-o curbă C_1 a planului (u, v), închisă sau cu ramuri infinite, după cum curba C conține sau nu conține polul A de inversiune. În primul

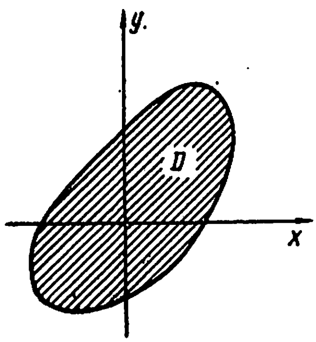


Fig. 38

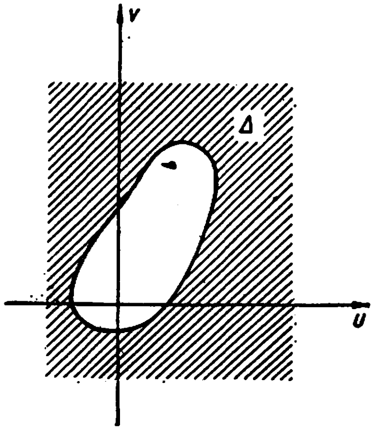


Fig. 39

caz (fig. 38 și 39), domeniului D închis de curba C îi corespunde, în planul (u, v), domeniul nemărginit Δ, exterior curbei C_1.

În cazul al doilea (fig. 40 și 41), domeniului D îi corespunde una din regiunile nemărginite ale planului, determinate de curba C_1.

În ambele cazuri, oricărui șir de domenii $\{C_n(A)\}$ tinzînd către punctul A, îi corespunde — în planul (u, v) — un șir de secțiuni $\{\Delta_n\}$ ale domeniului transformat Δ, tinzînd către acest domeniu și reciproc. Formula de schimbare a variabilelor

$$\iint_{C_n(A)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Delta_n} f\left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(u^2 + v^2)^2},$$

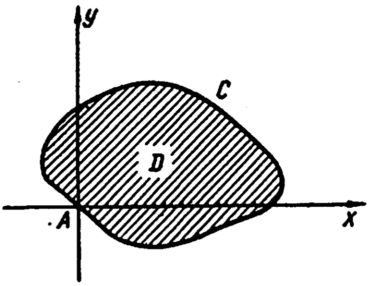


Fig. 40

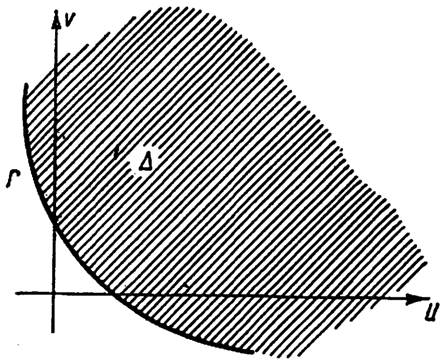


Fig. 41

ne arată că orice problemă privind integrabilitatea funcţiei f pe domeniul D se reduce la problema integrabilităţii funcţiei

$$F(u, v) = \frac{1}{(u^2+v^2)^2} \cdot f\left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right)$$

pe domeniul nemărginit D. Această observaţie ne dispensează, în fapt, să mai demonstrăm teoremele precedente o dată ce ele au fost demonstrate în cazul domeniilor infinite.

Ca aplicaţie, vom transpune la cazul studiat criteriul III de mai sus.

Să presupunem, că putem scrie funcţia f sub forma

$$f(P) = \frac{\varphi(P)}{\overline{OP}^{\alpha}}, \quad (\alpha > 0)$$

unde φ este mărginită pe domeniul D. Cu schimbarea de variabile (17), obţinem

$$\iint\limits_{C_n(A)} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\,dx\,dy = \iint\limits_{\Delta_n} \frac{\Phi(u, v)}{(u^2+v^2)^{2-\frac{\alpha}{2}}}\,du\,dv,$$

unde

$$\Phi(u, v) = \varphi\left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right).$$

Dar, potrivit criteriului III, funcţia

$$F(u, v) = \frac{\Phi(u, v)}{(u^2+v^2)^{2-\frac{\alpha}{2}}}$$

este integrabilă pe Δ dacă

$$4 - \alpha > 2,$$

adică

$$\alpha < 2.$$

Aşadar, *orice funcţie f care se poate scrie sub forma*

$$f(P) = \frac{\varphi(P)}{\overline{AP}^{\alpha}},$$

unde $\alpha < 2$, iar φ este integrabilă în sensul obişnuit (deci mărginită) pe domeniul D, este integrabilă pe acest domeniu.

Exemplu. Funcţia

$$f(P) = \mu(P) \cdot \log\frac{1}{r},$$

unde $r = \overline{AP}$, iar μ este continuă pe domeniul D, este integrabilă pe acest domeniu. Verificarea este imediată.

Să considerăm cazul unei funcţii f definite în toate punctele unui domeniu D, afară de punctele unei curbe Jordan, L, situate în întregime în acest domeniu. Vom presupune: 1° că f tinde către $+\infty$ cînd P tinde către un punct oarecare al curbei L; 2° că în porţiunile rămase din D prin izolarea curbei L cu ajutorul unui subdomeniu D' al lui D, care să conţină curba L în interior, funcţia f este integrabilă, oricare ar fi D' (fig. 42). Vom mai face, în sfîrşit, ipoteza că linia L se poate descompune într-un număr finit de arce L_n, care să fie tăiate de orice paralelă la o direcţie fixă, într-un singur punct. Dacă descompunem atunci domeniul D în domenii, astfel încît fiecare domeniu parţial să conţină o singură linie L_n, sîntem, în cele din urmă, reduşi la cazul unui domeniu D străbătut de o curbă Jordan L, reprezentabilă printr-o ecuaţie de forma

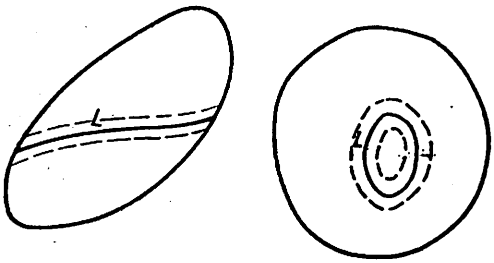


Fig. 42

$$y = \varphi(x), \ (a \leqq x \leqq b).$$

Fie

$$y = \varphi_2(x)$$

o curbă situată în D şi astfel încît $\varphi_2(x) > \varphi(x)$. O astfel de curbă o vom numi *curbă superioară curbei L*.

Orice curbă

$$y = \varphi_1(x),$$

situată în D şi pentru care $\varphi_1(x) < \varphi(x)$, va fi numită o *curbă inferioară curbei L*.

Să considerăm acum două şiruri arbitrare de curbe $\{C_n^1\}$ şi $\{C_n^2\}$, primul format din curbe inferioare, al doilea format din curbe superioare. Curba C_n^1 detaşează din D un domeniu parţial D_n^1, care nu conţine nici un punct al curbei L. Tot astfel, curba C_n^2 detaşează din D un domeniu D_n^2 care nu conţine nici un punct al curbei L. Funcţia f este prin ipoteză, integrabilă pe fiecare din domeniile D_n^1, D_n^2. Dacă integralele

$$\iint\limits_{D_n^1} f(P)\,\mathrm{d}P, \quad \iint\limits_{D_n^2} f(P)\,\mathrm{d}P,$$

au cîte o limită finită cînd curbele C_n^1, C_n^2 tind către L, vom spune că *f este integrabilă pe domeniul D*. Însemnînd respectiv cu J', J'' cele două limite, vom spune, prin definiţie,

$$\iint\limits_{D} f(P)\,\mathrm{d}P = J' + J''.$$

Toate teoremele enunţate mai sus se extind şi la cazul studiat aici: cititorul va putea transpune singur aceste propoziţii şi repeta, cu modificările necesare, demonstrațiile lor. Ne vom mulțumi, pentru aplicații, să formulăm un criteriu concret de integrabilitate.

Dacă funcția f se poate scrie sub forma

$$f(P) = \frac{\omega(P)}{[y - \varphi(x)]^{\beta}},$$

unde ω *este mărginită pe domeniul D, iar* $\beta < 1$, *atunci f este integrabilă pe acest domeniu.*

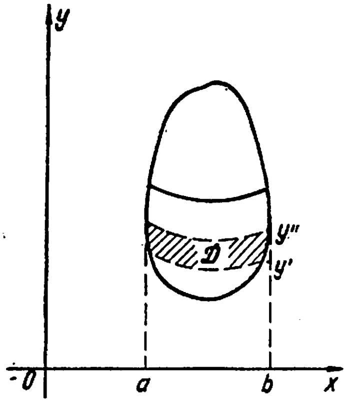


Fig. 43

Să considerăm, într-adevăr, domeniul Δ, definit prin relațiile

$$a \leqq x \leqq b,\ \varphi(x) - \varepsilon'' \leqq y \leqq \varphi(x) - \varepsilon^{1},$$

unde $0 < \varepsilon' < \varepsilon''$. Acest domeniu detașează din D un domeniu $\mathfrak{D}$ (fig. 43). Să definim, în Δ, o funcție $\overline{\omega}$, egală cu ω cînd punctul P este în $\mathfrak{D}$ și cu zero cînd P este în $\Delta - \mathfrak{D}$. Atunci

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}} \frac{\omega(P)\mathrm{d}P}{[y - \varphi(x)]^{\beta}} = \iint\limits_{\Delta} \frac{\overline{\omega}(P)\mathrm{d}P}{[y - \varphi(x)]^{\beta}}. \tag{18}$$

Dar dacă M este o margine pentru $|\omega(P)|$, deci și pentru $|\overline{\omega}(P)|$, atunci

$$\left|\iint\limits_{\Delta} \frac{\overline{\omega}(P)\mathrm{d}P}{[y - \varphi(x)]^{\beta}}\right| \leqq \iint\limits_{\Delta} \frac{|\overline{\omega}(P)|\mathrm{d}P}{[y - \varphi(x)]^{\beta}} < M \cdot \iint\limits_{\Delta} \frac{\mathrm{d}P}{|y - \varphi(x)|^{\beta}}.$$

Punînd

$$y' = \varphi(x) - \varepsilon',\quad y'' = \varphi(x) - \varepsilon'',$$

putem scrie

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{\mathrm{d}P}{|y - \varphi(x)|^{\beta}} = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y'}^{y''} \frac{\mathrm{d}y}{|y - \varphi(x)|^{\beta}} = \frac{b - a}{1 - \beta}\left(\frac{1}{\varepsilon''^{\beta-1}} - \frac{1}{\varepsilon'^{\beta-1}}\right).$$

Prin urmare, integrala (18) tinde către zero odată cu ε', ε'' dacă $\beta < 1$.

Același raționament este valabil, cu aceleași concluzii, și pentru integrala

$$\iint\limits_{\sigma_1} \frac{\omega(\varphi)\mathrm{d}P}{[y - \varphi(x)]^{\beta}},$$

unde σ_1 este domeniul detașat din D de către domeniul definit prin relațiile

$$a \leqq x \leqq b,\quad \varphi(x) + \varepsilon' < y < \varphi(x) + \varepsilon''.$$

Considerațiile din acest paragraf ne permit să reluăm problema integrabilității într-un domeniu nemărginit, în condiții mai generale.

Să presupunem că pe orice subdomeniu mărginit D' al domeniului nemărginit D există o mulțime formată din un număr finit de puncte și de linii astfel încît f tinde către $+\infty$ cînd P tinde către un punct al acestei mulţimi. Să mai presupunem că f este integrabilă, pe domeniul D', în sensul generalizat, definit în acest paragraf. În asemenea condiţii, vom spune că *f este integrabilă pe domeniul nemărginit D* dacă există un număr real $J(D)$, astfel încît, pentru orice şir $\{D_n\}$ de secţiuni măsurabile Jordan (pe care f este integrabilă în sens generalizat), tinzînd către D, să avem:

$$\lim_{D_n \to D} \iint_{D_n} f(P)\, \mathrm{d}P = J(D).$$

Vom scrie

$$J(D) = \iint_D f(P)\, \mathrm{d}P.$$

Subliniem că deosebirea dintre această definiţie şi definiţia dată mai sus constă în faptul că aici f este presupusă integrabilă în *sens generalizat* pe fiecare din secţiunile D_n, iar nu în sensul obişnuit, ca în relaţia (2). Acestei extensiuni a noţiunii de integrabilitate pe un domeniu nemărginit i se aplică toate rezultatele stabilite iniţial, în care nu intervine condiţia ca f să fie mărginită pe un domeniu mărginit. În schimb, demonstraţia dată teoremei fundamentale din acest număr nu se mai poate aplica acestei extensiuni. Dacă putem afirma şi în acest din urmă caz că integrabilitatea lui $|f|$ atrage după sine integrabilitatea lui f, nu mai putem preciza — fără o nouă demonstraţie, sau un exemplu care să infirme această propoziţie — dacă integrabilitatea lui f, în sensul extins, atrage după sine integrabilitatea lui $|f|$.

Exemple.

1° *Să se calculeze*

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

domeniul D fiind unghiul xOy. Să se deducă de aici valoarea integralei lui Gauss

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Funcţia $e^{-x^2-y^2}$ este integrabilă pe orice domeniu nemărginit. Să luăm, în primul rînd, ca şir $\{D_n\}$ de secţiuni, un şir de cercuri, de raze 1, 2, 3, ..., cu centrul în origine.

Obţinem

$$\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^n \rho e^{-\rho^2} \mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{e^{n^2}}\right),$$

de unde

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}.$$

Luînd acum, ca şir de secţiuni, şirul $\{D_n\}$ de pătrate, definit prin relaţiile

$$0 \leq x \leq n, \quad 0 \leq y \leq n,$$

obţinem

$$\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^n dx \int_0^n e^{-x^2-y^2}\,dy = \left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx\right)^2,$$

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Din confruntarea celor două rezultate, deducem

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Observaţie. Pe o altă cale, această ultimă integrală a fost evaluată şi în capitolul 5.

2° *Să considerăm semibanda D de laturi $x = a$, $y = b$. Să se arate că orice funcţie f care se poate pune, în această semibandă, sub forma*

$$f = \frac{\varphi}{x^\alpha},$$

unde φ este o funcţie integrabilă pe orice secţiune a lui D şi mărginită în D, este integrabilă pe această semibandă, dacă $\alpha > 1$.

Fie $|\varphi| < M$. Vom considera, ca secţiuni D_n, dreptunghiurile limitate de cele trei laturi ale lui D, precum şi de dreptele $x = n > a$.

Avem

$$\iint_{D_n} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^b dy \int_a^n \frac{\varphi(x, y)}{x^\alpha}\,dx,$$

de unde

$$\left|\iint_{D_n} f\,dx\,dy\right| < M \int_0^b dy \int_a^n \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{Mb}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right).$$

Membrul din dreapta are o limită finită pentru $n \to \infty$, dacă $\alpha > 1$.

3° *Vom spune că o funcţie $f(x, y)$ este parţial descrescătoare în raport cu fiecare dintre variabile, dacă ea este descrescătoare în raport cu x pentru orice valoare a lui y şi descrescătoare în raport cu y pentru orice valoare a lui x.*

Fie $f(x, y)$ o funcţie parţial descrescătoare în raport cu x şi cu y, în unghiul xOy, pozitivă în acest unghi. Să se arate că seria dublă

$$\sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty f(m, n)$$

este convergentă sau divergentă, după cum integrala

$$\iint\limits_{xOy} f(x, y)\, dx\, dy$$

are sens sau nu.

Vom lua, ca secţiuni D_p în unghiul xOy, pătratele

$$0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq y \leq p.$$

Să notăm cu $\Gamma_{m,n}$ pătratele

$$m \leq x \leq m + 1, \quad n \leq y \leq n + 1, \quad (m \leq p, \ n \leq p).$$

În baza ipotezei făcute asupra lui $f(x, y)$ şi a teoremei mediei, putem scrie

$$f(m + 1, n + 1) \leqslant \iint\limits_{\Gamma_{m,n}} f(x, y)\, dx\, dy \leqslant f(m, n),$$

de unde

$$\sum_{m=1}^{p+1} \sum_{n=1}^{p+1} f(m, n) \leqslant \iint\limits_{D_n} f(x, y)\, dx\, dy \leqslant \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{p} f(m, n)$$

şi propoziţia este demonstrată.

Această teoremă extinde, la seriile duble, criteriul integral de convergenţă al lui Cauchy pentru seriile simple.

4° *Să se arate că seria dublă*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha} \quad (\alpha > 1)$$

este convergentă.

Indicaţie. Aplicaţie imediată a criteriului precedent.

5° *Să se arate că seria dublă*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(am + bn)^\alpha},$$

unde $a > 0$, $b > 0$, *este convergentă pentru* $\alpha > 2$.

Punînd $c = \min(a, b)$ avem, evident,

$$(ax + by)^2 > c^2(x^2 + y^2),$$

de unde

$$\frac{1}{(ax + by)^\alpha} < \frac{1}{c^\alpha} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{c^\alpha} \cdot \frac{1}{\overline{OP}^\alpha},$$

P fiind punctul de coordonate (x, y).

Cum funcţia $\frac{1}{\overline{OP}^\alpha}$ este integrabilă, în unghiul xOy, pentru $\alpha > 2$, proprietatea enunţată devine o consecinţă a exerciţiului 3°.

6° *Funcția*

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2} x^{2\alpha-1} y^{2\beta-1}$$

este integrabilă în unghiul xOy, dacă $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Vom lua ca secțiuni D_n, în unghiul xOy, pătratele

$$0 \leqq x \leqq n, \quad 0 \leqq y \leqq n.$$

Dacă

$$\alpha \geqq \frac{1}{2}, \quad \beta \geqq \frac{1}{2},$$

este integrabilă pe D_n în sensul obișnuit. Rămîne deci să studiem cazul $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$. Se verifică ușor că produsul $x^\mu f(x, y)$ rămîne mărginit cînd $x \to 0$, dacă $\mu > 1$. Tot astfel, dacă $\mu > 1$, produsul $y^\mu \cdot f(x, y)$ rămîne mărginit pentru $y \to 0$.

Prin urmare, f este integrabilă, în sens generalizat, pe secțiunea D_n.

Pe de altă parte, punînd $\rho^2 = x^2 + y^2$, putem scrie

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\rho^{2+\varepsilon}},$$

cu $\varepsilon > 0$, unde

$$\varphi(x, y) = \frac{\rho^{2+\varepsilon} \cdot x^{2\alpha-1} \cdot y^{2\beta-1}}{e^{\rho^2}} = \frac{\rho^\varepsilon \cdot \cos^{2\alpha-1}\theta \cdot \sin^{2\beta-1}\theta}{e^{\rho^2}}.$$

Cum funcția φ rămîne mărginită în unghiul xOy, f este integrabilă în acest unghi.

7° *Să se calculeze integrala*

$$\iint_{xOy} f(x, y)\, dx\, dy,$$

unde f este funcția din exercițiul precedent.

Să considerăm pătratul

$$(\Delta_n) : \varepsilon \leqq x \leqq n, \ \varepsilon \leqq y \leqq n, \ (\varepsilon > 0).$$

Avem

$$\iint_{\Delta_n} f(x, y)\, dx\, dy = \int_\varepsilon^n e^{-x^2} \cdot x^{2\alpha-1}\, dx \cdot \int_\varepsilon^n e^{-y^2} y^{2\beta-1}\, dy. \qquad (*)$$

Punînd. $x = \sqrt{u}$, $y = \sqrt{v}$, obținem

$$4 \iint_{\Delta_n} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\varepsilon^2}^{n^2} e^{-u} \cdot u^{\alpha-1} du \cdot \int_{\varepsilon^2}^{n^2} e^{-v} \cdot v^{\beta-1} dv,$$

de unde

$$4\iint\limits_{xOy} f(x, y)\,dx\,dy = \Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta). \qquad (**)$$

8° *Punînd*

$$B(\alpha, \beta) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\alpha-1}\theta\cdot\sin^{2\beta-1}\theta\,d\theta,$$

să se deducă, din calculul precedent, relația

$$\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = B(\alpha, \beta).$$

Dacă în relația (*) din exemplul precedent facem $\varepsilon \to 0$, $n \to \infty$ și punem apoi $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, obținem

$$\iint\limits_{xOy} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\alpha-1}\theta\cdot\sin^{2\beta-1}\theta\,d\theta\,-$$

$$-\int_0^{\infty} e^{-r^2}\cdot r^{2\alpha+2\beta-1}\,dr = \frac{1}{2}B(\alpha, \beta)\cdot\Gamma(\alpha+\beta).$$

Din confruntarea acestei egalități cu (**), obținem relația cerută.

Observație. Funcția B (citit: „beta"), definită de relația precedentă, este o funcție euleriană de prima speță. După cum se vede, ea este simetrică în raport cu cele două argumente.

O altă expresie curentă a acestei funcții se obține dacă punem $\cos^2\theta = t$, de unde

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}\cdot(1-t)^{\beta-1}dt.$$

Această expresie este cunoscută din capitolul relativ la integrale cu parametri, unde s-a întreprins un studiu mai amănunțit al integralelor euleriene.

Capitolul XVI

NOŢIUNILE DE SUPRAFAŢĂ ŞI DE ARIE A UNEI SUPRAFEŢE

a. Pînze

Noţiunea de suprafaţă este un analog bidimensional al noţiunii de curbă. Pare deci natural ca teoria noţiunilor de suprafaţă şi de arie a suprafeţei să urmeze pas cu pas teoria noţiunilor de curbă şi de lungime a unei curbe. După cum se ştie, noţiunea de curbă s-a definit ca o clasă de drumuri echivalente. Însă noţiunea de „drumuri echivalente" s-a definit cu ajutorul noţiunii de funcţie continuă şi strict crescătoare. Deoarece, pentru aplicaţiile de la dreaptă la dreaptă, noţiunea de homeomorfism (= transformare topologică) este echivalentă cu noţiunea de funcţie continuă şi strict monotonă (exerciţiu!), este firesc să folosim în cele ce urmează noţiunea de homeomorfism ca un analog, ca o generalizare a noţiunii de aplicaţie continuă şi strict monotonă.

Să considerăm o aplicaţie continuă a pătratului unitate $I^2(0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1)$ în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni. O astfel de aplicaţie revine la un sistem de trei funcţii reale, continue pe I^2.

$$\begin{aligned} x &= f(u, v) \\ y &= g(u, v), \\ z &= h(u, v), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &(0 \leqslant u \leqslant 1), \\ &(0 \leqslant v \leqslant 1), \end{aligned} \tag{1}$$

sistem care constituie o reprezentare parametrică R. Totalitatea punctelor $(f(u, v), g(u, v), h(u, v))$ obţinute pentru $(u, v) \in I^2$ constituie, prin definiţie, *imaginea reprezentării* R şi se notează cu $I(R)$.

Vom numi pînză cuplul format dintr-o reprezentare parametrică R de tipul (1) *şi imaginea $I(R)$ a acestei reprezentări.* Notînd o pînză cu p, putem scrie $p = \{R, I(R)\}$. Prin „punct al pînzei p" înţelegem un punct care aparţine imaginii $I(R)$.

Pînza p definită de (1) este, prin definiţie, *închisă* dacă avem

$$\begin{aligned} f(u, 0) &= f(u, 1), & f(0, v) &= f(1, v), \\ g(u, 0) &= g(u, 1), & g(0, v) &= g(1, v), \\ h(u, 0) &= h(u, 1), & h(0, v) &= h(1, v), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &(0 \leqslant u \leqslant 1), \\ &(0 \leqslant v \leqslant 1). \end{aligned}$$

Un exemplu de pînză închisă se obţine cu ajutorul următoarei reprezentări parametrice:

$$x = \sin \pi u \cos 2\pi v, \quad y = \sin \pi u \sin 2\pi v, \quad z = \cos \pi u, \qquad (0 \leqslant u \leqslant 1), \quad (0 \leqslant v \leqslant 1).$$

Este uşor de văzut că, datorită periodicităţii sinusului şi cosinusului, toate condiţiile din definiţia pînzei închise sînt aici îndeplinite.

Un punct al pînzei p, de coordonate x, y, z, se numeşte *punct multiplu* pentru p, dacă există cel puţin două puncte $(u', v') \in I^2$, $(u'', v'') \in I^2$, cu următoarele proprietăţi:

1° $f(u', v') = f(u'', v'')$, $g(u', v') = g(u'', v'')$, $h(u', v') = h(u'', v'')$;

2° dacă $u' = 0$, atunci are loc cel puţin una dintre următoarele două situaţii: $u'' \neq 1$, $v'' \neq v'$;

3° dacă $u' = 1$, atunci are loc cel puţin una dintre următoarele două situaţii: $u'' \neq 0$, $v'' \neq v'$;

4° proprietatea care se deduce din 2°, înlocuind u' cu v' şi u'' cu v'';

5° proprietatea care se deduce din 3°, înlocuind u' cu v' şi u'' cu v''.

O pînză care nu admite nici un punct multiplu se numeşte pînză simplă.

Să considerăm două pînze $p = \{R, I(R)\}$ şi $p' = \{R', I(R')\}$. Să presupunem că R este dată de (1), iar R' este dată de

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \qquad (0 \leqslant u \leqslant 1), \quad (0 \leqslant v \leqslant 1), \tag{2}$$

unde φ, ψ şi χ sînt funcţii continue pe I^2. Vom spune că pînzele p şi p' sînt *echivalente* şi vom scrie $p \sim p'$, dacă există un homeomorfism ω al lui I^2 pe el însuşi, astfel încît următoarele condiţii să fie îndeplinite:

$$\omega(0, v) = (0, v),$$
$$\omega(u, 0) = (u, 0),$$
$$\omega(1, v) = (1, v),$$
$$\omega(u, 1) = (u, 1),$$

$$f(u, v) = \varphi(\omega(u, v)), \quad g(u, v) = \psi(\omega(u, v)), \quad h(u, v) = \chi(\omega(u, v)), \qquad (0 \leqslant u \leqslant 1), \quad (0 \leqslant v \leqslant 1). \tag{3}$$

Toate proprietăţile unei relaţii de echivalenţă sînt satisfăcute. Într-adevăr $p \sim p^1$, lucru care se observă luînd în rolul lui ω aplicaţia identică; deci are loc proprietatea de reflexivitate. Folosind homeomorfismul invers ω^{-1}, deducem uşor că din $p \sim p'$ rezultă $p' \sim p$, deci are loc proprietatea de simetrie. În sfîrşit, folosind faptul că prin compunerea a două homeomorfisme ale lui I^2 se obține tot un homeomorfism al lui I^2, rezultă că dacă $p \sim p'$ și $p' \sim p''$ atunci $p \sim p''$, deci are loc proprietatea de tranzitivitate.

Teoremă. Două pînze echivalente au aceeași imagine.

Demonstrație. Fie $p = \{R, I(R)\}$, $p' = \{R', I(R')\}$ și $p \sim p'$. Presupunem că R este dată de (1), iar R' este dată de (2). Vom arăta că $I(R) = I(R')$. Vom stabili mai întîi că $I(R) \subset I(R')$. Fie $P(x, y, z) \in \in I(R)$. Există două valori u și v, astfel încît $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$, $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ și $z = h(u, v)$. Deoarece $p \sim p'$, există un homeomorfism ω al lui I^2 pe I^2, astfel încît să aibă loc relațiile (3). Să punem $\pi = \omega(u, v)$. Avem $\pi \in I^2$ și, notînd cu u' și v' coordonatele lui π, obținem: $x = \varphi(u', v')$, $y = \psi(u', v')$, $z = \chi(u', v')$, deci punctul P de coordonate x, y, z aparține mulțimii $I(R')$ și incluziunea este stabilită.

În ceea ce privește incluziunea $I(R') \subset I(R)$, ea rezultă imediat din simetria relației de echivalență a două pînze, însă poate fi stabilită și fără a face uz de această proprietate, după cum urmează. Fie P' — de coordonate x', y', z' — un punct din $I(R')$. Există două valori u' și v', astfel încît $0 \leqslant u' \leqslant 1$, $0 \leqslant v' \leqslant 1$, $x' = \varphi(u', v')$, $y' = \psi(u', v')$, $z' = \chi(u', v')$. Deoarece ω este un homeomorfism al lui I^2 pe I^2, există un punct π (și numai unul) aparținînd lui I^2 și astfel încît $(u', v') = \omega(\pi')$. Notînd cu u și v coordonatele lui π', rezultă că $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$ și $(u', v') = \omega(u, v)$. Ținînd seama de ultimele trei dintre relațiile (3), avem deci $x' = f(u, v)$, $y' = g(u, v)$, $z' = h(u, v)$ — cu $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$. Deci punctul P', de coordonate x', y', z', aparține mulțimii $I(R)$ și teorema este complet demonstrată.

Teoremă. Dacă $p \sim p'$, iar pînza p este închisă, atunci și pînza p' este închisă.

Demonstrație. Fie u astfel încît $0 \leqslant u \leqslant 1$. În baza echivalenței lui p cu p', există un homeomorfism ω cu proprietățile (3). Avem deci, folosind și faptul că p este închisă,

$$\begin{aligned}
\varphi(u, 0) &= \varphi(\omega(u, 0)) = f(u, 0) = f(u, 1) = \varphi(\omega(u, 1)) = \varphi(u, 1),\\
\psi(u, 0) &= \psi(\omega(u, 0)) = g(u, 0) = g(u, 1) = \psi(\omega(u, 1)) = \psi(u, 1),\\
\chi(u, 0) &= \chi(\omega(u, 0)) = h(u, 0) = h(u, 1) = \chi(\omega(u, 1)) = \chi(u, 1),\\
\varphi(0, v) &= \varphi(\omega(0, v)) = f(0, v) = f(1, v) = \varphi(\omega(1, v)) = \varphi(1, v),\\
\psi(0, v) &= \psi(\omega(0, v)) = g(0, v) = g(1, v) = \psi(\omega(1, v)) = \psi(1, v),\\
\chi(0, v) &= \chi(\omega(0, v)) = h(0, v) = h(1, v) = \chi(\omega(1, v)) = \chi(1, v),
\end{aligned}$$

deci p' este închisă.

Teoremă. Dacă $p \sim p'$, iar p admite un punct multiplu, atunci și p' admite un punct multiplu.

Demonstrație. Să arătăm că din proprietatea 1° a lui p rezultă proprietatea 1° pentru p' (ne referim la proprietățile din definiția punctului multiplu). Există, în baza echivalenței lui p cu p', un homeomorfism ω și două puncte $(u_1', v_1') \in I^2$, $(u_1'', v_1'') \in I^2$, astfel încît $(u_1', v_1') = \omega(u', v')$, $(u_1'', v_1'') = \omega(u'', v'')$ și

$$\varphi(u_1', v_1') = \varphi(\omega(u', v')) = f(u', v') = f(u'', v'') = \varphi(\omega(u'', v'')) = \varphi(u_1'', v_1''),$$
$$\psi(u_1', v_1') = \psi(\omega(u', v')) = g(u', v') = g(u'', v'') = \psi(\omega(u'', v'')) = \psi(u_1'', v_1''),$$
$$\chi(u_1', v_1') = \chi(\omega(u', v')) = h(u', v') = h(u'', v'') = \chi(\omega(u'', v'')) = \chi(u_1'', v_1''),$$

deci există două puncte $(u_1', v_1') \in I^2$ și $(u_1'', v_1'') \in I^2$ pentru care p' satisface 1°.

Să arătăm că din proprietatea 2° a lui p rezultă proprietatea 2° pentru p'. Într-adevăr, dacă am avea, în relațiile de mai sus, $u_1' = 0$, $u_1'' = 1$ și $v_1' = v_1''$, atunci, ținînd seamă că $(0, v_1') = \omega(0, v_1')$ (în baza primei proprietăți din (3)), ar rezulta $u' = 0$, deci conform proprietății 2° pentru p, am avea $u'' \neq 1$ sau $v'' \neq v'$. Dacă $u'' \neq 1$, atunci, conform uneia din proprietățile (3), am avea $u_1'' \neq 1$, ceea ce este contradictoriu; dacă $v'' \neq v$, atunci $\omega(0, v') \neq \omega(0, v'')$, deci $(0, v_1') \neq (0, v_1'')$, deci $v_1' \neq v_1''$, ceea ce este iarăși contradictoriu. Deci 2° are loc pentru p'.

În mod analog se arată că, în ipotezele teoremei, și proprietățile 3°, 4° și 5° au loc pentru p' dacă ele au loc pentru p, și teorema este demonstrată.

Corolar. Dacă $p \sim p'$, iar p este o pînză simplă, atunci și p' este o pînză simplă.

Exemplul de două pînze care au aceeași imagine, dar nu sînt echivalente. Fie $p = \{R, I(R)\}$, $p' = \{R', I(R')\}$, unde R este dată de $x = u$, $y = v$, $z = 0$, iar R' este dată de $x = |2u - 1|$, $y = |2v - 1|$, $z = 0$, $(0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1)$. Este ușor de văzut că pînzele p și p' au aceeași imagine, și anume pătratul unitate din planul Ouv. Pînza p este, evident, simplă. Pînza p' nu este simplă, deoarece $\left|2\cdot\frac{1}{4} - 1\right| = \left|2\cdot\frac{3}{4} - 1\right|$, deci punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ este multiplu. Conform corolarului de mai sus, p' nu este echivalentă cu p.

Urmează acum să dăm un sens matematic noțiunii de „pînză care are arie“ și noțiunii de „arie a unei pînze“. Vom încerca să transpunem procedeele folosite în cazul drumurilor, deoarece noțiunea de pînză este analogul bidimensional al noțiunii de drum.

Fie o pînză p dată de reprezentarea (1). Să considerăm o descompunere Δ a lui I^2 în domenii triunghiulare compacte $T_1, T_2, \ldots, T_i, \ldots, T_n$, astfel încît, pentru $i \neq j$, T_i să n-aibă puncte interioare comune cu T_j și $I^2 = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$. Să notăm cu $P_1^i(u_1^i, v_1^i)$, $P_2(u_2^i, v_2^i)$ și $P_3^i(u_3^i, v_3^i)$ vîrfurile triunghiului T_i. Reprezentarea R asociază fiecăruia dintre aceste puncte un punct bine determinat pe $I(R)$. Să notăm aceste puncte de pe $I(R)$ cu $\pi_1^i, \pi_2^i, \pi_3^i$. Dacă nu sînt colineare, punctele $\pi_1^i, \pi_2^i, \pi_3^i$ determină un triunghi τ_i cu vîrfurile pe $I(R)$. Obținem astfel un poliedru τ, dat de

$$\tau_\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \tau_i.$$

Aria poliedrului τ_Δ va fi notată cu „aria τ“, iar aria triunghiului τ_i va fi notată cu „aria τ_i“. Bineînțeles, aici este vorba despre aria în sensul elementar, învățat în școala medie[1]. Avem

$$\text{aria } \tau_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \text{aria } \tau_i.$$

La două descompuneri diferite —Δ și Δ' — ale lui I^2 corespund poliedre τ_Δ și $\tau_{\Delta'}$ de asemenea diferite, deci, în general, aria $\tau_\Delta \neq$ aria $\tau_{\Delta'}$. Obținem astfel o mulțime $\{\tau_\Delta\}$, în general infinită, formată din numere reale pozitive. Urmînd metoda folosită în cazul drumurilor, apare natural să spunem că pînza p are arie atunci cînd mulțimea $\{\tau_\Delta\}$ este majorată. Marginea superioară a acestei mulțimi ar urma să fie, prin definiție, aria pînzei p.

Acest mod de definire a ariei unei pînze a părut acceptabil pînă în momentul în care s-a constatat că el vine în contradicție cu ideea intuitivă pe care și-o formează oamenii despre acest concept. Anume, s-a constatat încă la sfîrșitul secolului trecut că, dacă am urma definiția de mai sus, atunci o cutie cilindrică nu ar avea arie. Iată, în mod precis, despre ce este vorba.

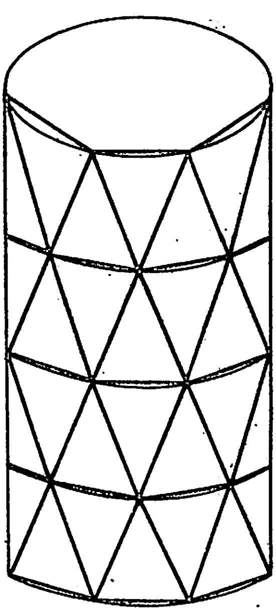


Fig. 44

Exemplul lui H.A. Schwarz. Fie reprezentarea R dată de

$$x = \cos u, \qquad (0 \leqslant u \leqslant 2\pi),$$
$$y = \sin u, \qquad (0 \leqslant v \leqslant h).$$
$$z = v.$$

Acestei reprezentări i se asociază pînza $p = \{R, I(R)\}$. Este ușor de văzut că $I(R)$ este aici un cilindru circular drept, cu centrul bazei în origine, cu raza bazei egală cu 1 și cu înălțimea egală cu h (fig. 44). Să considerăm un poliedru înscris în $I(R)$, în felul următor. Împărțim cilindrul în n părți egale prin secțiuni drepte echidistante (fig. 44; $n = 4$). Împărțim apoi fiecare cerc de secțiune în cîte m părți egale (în fig. 44 s-a luat $m = 6$), avînd grijă ca punctele de diviziune ale unui cerc să fie deplasate față de punctele de diviziune ale cercului precedent printr-o rotație de un unghi egal cu $\frac{\pi}{m}$ în jurul axei cilindrului. Prin unirea tuturor acestor puncte de diviziune, obținem un poliedru înscris în cilindru, format din 2 mn triunghiuri isoscele. Aria unui astfel de triunghi se calculează în modul următor (fig. 45).

[1] Trebuie să atragem atenția că noțiunea de arie a unui triunghi ca și noțiunea de arie a unui poligon nu sînt chiar așa de simple cum pot să pară la prima vedere. Pentru unele probleme legate de aceste noțiuni, a se vedea J. Hadamard, *Lecții de geometrie elementară*, vol. I, *Geometria plană*, Ed. tehnică.

Din faptul că $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$, iar $AC = OC - OA = 1 - \cos\frac{\pi}{m}$, $BC = \frac{h}{n}$, rezultă că aria triunghiului BDE este

$$\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)+\left(\frac{h}{n}\right)^2} = \sin\frac{\pi}{m}\sqrt{4\sin^4\frac{\pi}{2m}+\frac{h^2}{n^2}}.$$

Aria totală a poliedrului format din cele 2 mn triunghiuri va fi

$$2\,m\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{h^2+4n^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

Profitînd de alegerea arbitrară a numerelor naturale m şi n, să considerăm un şir de poliedre înscrise în cilindrul circular drept pe care ni l-am dat, poliedre care să fie de tipul celui de mai sus şi astfel încît

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\frac{n}{m^2}$$

să existe. Fie λ valoarea acestei limite. Este clar că λ poate avea diverse valori şi, în particular, se poate întîmpla ca $\lambda = +\infty$. Dacă λ este finit, atunci limita şirului de arii ale poliedrelor considerate va fi dată de

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\left(2\pi\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\sqrt{h^2+\frac{4\pi^4n^2}{16m^4}\,\frac{\sin^4\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi^4}{16\,m^4}}}\right) = 2\pi\sqrt{h^2+\frac{\lambda^2\pi^4}{4}}.$$

Dacă $\lambda = 0$, atunci valoarea limitei corespunde ariei reale a cilindrului considerat. Dacă însă $\lambda \neq 0$, se obţine un rezultat diferit; se observă că valoarea limitei poate fi oricît de mare, cu condiţia ca λ să fie suficient de mare.

Poliedrele ale căror arii le-am cercetat mai sus au forma indicată în figura 44. În figura 45 este reprezentată o porţiune dintre două secţiuni plane consecutive, paralele cu planul $z = 0$.

Poliedrului înscris în cilindru în modul arătat îi corespunde, în planul Ouv al parametrilor, o anumită descompunere Δ a intervalului bidimensional I, definit de inegalităţile $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant v \leqslant h$. Anume, această descompunere este dată de o dublă reţea de drepte paralele

$$v - \frac{2hm}{\pi n}u = \frac{hi}{n}, \quad v = \frac{hj}{n}$$

$$(i, j = 0, \pm 1, \ldots, \pm n),$$

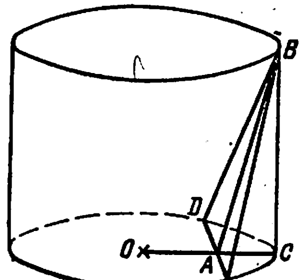


Fig. 45

precum şi de o reţea de drepte paralele cu axa Ou, drepte care furnizează diagonalele orizontale în paralelogramele constituite de prima reţea (fig. 46).

Şirul de poliedre considerat mai sus corespunde unui anumit şir de descompuneri ale lui I, de normă tinzînd la zero. Din faptul că limita ariilor acestor poliedre poate fi oricît de mare (pentru un şir de descompuneri convenabil ales), rezultă că, în conformitate cu definiţia dată mai sus, aria pînzei cilindrice considerate este infinită.

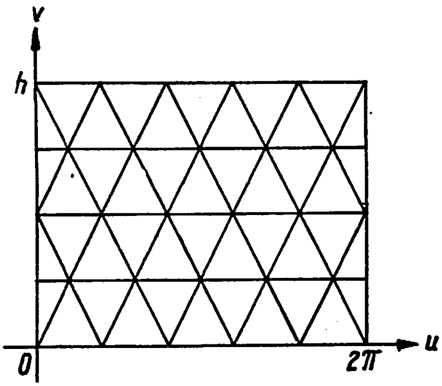


Fig. 46

Exemplul dat de Schwarz a determinat o reconsiderare nu numai a problemei ariei unei pînze, dar şi a problemei lungimii unui drum. Într-adevăr, faptul că o metodă care dăduse bune rezultate în cazul lungimii se dovedise defectuoasă în cazul ariei necesita o analiză mai profundă, care să explice esenţa acestui fenomen şi să conducă la remedierea lui.

O astfel de explicaţie a fost dată de către Henri Lebesgue, la începutul secolului nostru. În cele ce urmează, vom expune ideile sale. Pentru a le face mai accesibile, ne vom referi mai întîi la noţiunea de lungime.

În primul rînd trebuie să precizăm ce înseamnă apropierea dintre două drumuri. Fie d_1 şi d_2 două drumuri definite pe [0, 1]. Fie h un homeomorfism al intervalului [0, 1] pe el însuşi. Fie t_1 şi t_2 două valori din [0, 1], care se corespund prin h (deci $t_2 = h(t_1)$). Fie M_1 punctul de pe d_1 corespunzător lui t_1 şi fie M_2 punctul de pe d_2 corespunzător lui t_2. Să punem

$$\alpha_{1,2}(h) = \sup_{(M_1, M_2)} \{\text{dist}\,(M_1, M_2)\}$$

unde marginea superioară este luată în raport cu toate perechile de puncte corespondente prin h. *Prin definiţie, distanţa dintre drumul d_1 şi drumul d_2 va fi dată de*

$$\text{dist}\,(d_1, d_2) = \inf_h \alpha_{1,2}(h),$$

unde marginea inferioară este luată în raport cu toate homeomorfismele h posibile.

Pentru a obţine noţiunea de distanţă între două pînze, se procedează exact ca mai sus, cu singura deosebire că în locul intervalului [0, 1] se consideră pătratul unitate.

Vom spune că şirul de drumuri $\{d_n\}$ (de pînze $\{p_n\}$) converge în distanţă către drumul d (pînza p) dacă

$$\lim_{n\to\infty} \text{dist}\,(d_n, d) = 0, \qquad (\lim_{n\to\infty} \text{dist}\,(p_n, p) = 0).$$

Scriem acest lucru în modul următor: $\{d_n\} \xrightarrow{\text{dist.}} d(\{p_n\} \xrightarrow{\text{dist.}} p)$.

Fie un drum d şi fie $\{d_n\}$ un şir de drumuri poligonale care converge în distanţă către d. Să presupunem că şirul care are ca termen general lungimea lui d_n (această lungime se poate calcula pe cale elementară) are limită şi fie λ limita lui. Fie Δ mulţimea numerelor λ astfel obţinute — inclusiv $+\infty$ — pentru diferitele şiruri $\{d_n\}$ cu proprietăţile de mai sus. Oricare ar fi drumul d, mulţimea Δ este nemărginită superior, dar este mărginită inferior, iar marginea ei inferioară este tocmai lungimea drumului d (dacă drumul d nu este rectificabil, atunci Δ conţine un singur element: $+\infty$). Vom numi *pînză poliedrală* orice pînză a cărei imagine este o reuniune finită de domenii plane (dar situate în plane diferite) poligonale, fără puncte interioare comune două cîte două. Fie o pînză p şi fie $\{p_n\}$ un şir de pînze poliedrale care converge în distanţă către p. Să presupunem că şirul care are ca termen general aria lui p_n (această arie se poate defini pe cale elementară, ca sumă a ariilor domeniilor poligonale care alcătuiesc pe p_n) are limită şi fie γ limita lui. Fie Γ mulţimea numerelor γ astfel obţinute — inclusiv $+\infty$ (pentru diferitele şiruri $\{p_n\}$ cu proprietăţile de mai sus). Oricare ar fi pînza p, mulţimea Γ este nemărginită superior, dar este mărginită inferior, iar marginea ei inferioară va fi, prin definiţie, aria pînzei p. Dacă Γ conţine un singur element (pe $+\infty$), atunci spunem că p nu are arie; în cazul contrar, pînza p are arie.

Teoremă. Dacă pînzele p şi p' sînt echivalente, iar p are arie, atunci şi p' are arie şi cele două arii sînt egale.

Demonstraţie. Principiul demonstraţiei va fi următorul: vom arăta că dacă un şir de pînze poliedrale converge în distanţă către p, atunci acest şir converge în distanţă şi către p' şi reciproc; orice şir de pînze poliedrale care converge în distanţă către p', converge în distanţă şi către p. Vom presupune că p este dată de reprezentarea (1), iar p' este dată de reprezentarea (2). Fie P o pînză poliedrală de reprezentare

$$x = F(u, v),\quad y = G(u, v),\quad z = H(u, v),\qquad (0 \leqslant u \leqslant 1),\quad (0 \leqslant v \leqslant 1),$$

unde F, G şi H sînt continue pe I^2.

Să presupunem că distanţa dintre P şi p este inferioară lui $\varepsilon > 0$. Aceasta înseamnă că există un homeomorfism h al lui I^2 pe I^2, astfel încît, dacă $M(u_0, v_0) \in P$ şi $M(u, v) \in p$ sînt două puncte care se corespund prin h, atunci distanţa de la $M(u_0, v_0)$ la $M(u, v)$ este inferioară lui ε:

$$|F(u_0, v_0) - f(u, v)| < \varepsilon,\ |G(u_0, v_0) - g(u, v)| < \varepsilon,\ |H(u_0, v_0) - h(u, v)| < \varepsilon.$$

Există un punct $(u', v') \in I^2$, astfel încît $(u, v) = \omega(u', v')$, ω fiind homeomorfismul care apare în definiţia echivalenţei lui p cu p'. Avem deci

$$F(u_0, v_0) - f(u, v) = F(u_0, v_0) - \varphi(\omega(u, v)) = F(u_0, v_0) - \varphi(u', v'),$$

$$G(u_0, v_0) - g(u, v) = G(u_0, v_0) - \psi(\omega(u, v)) = G(u_0, v_0) - \psi(u', v'),$$

$$H(u_0, v_0) - h(u, v) = H(u_0, v_0) - \chi(\omega(u, v)) = H(u_0, v_0) - \chi(u', v').$$

Notînd cu M' punctul de pe p' de coordonate $\varphi(u', v')$, $\psi(u', v')$, $\chi(u', v')$ şi ţinînd seamă că

$$|F(u_0, v_0) - \varphi(u', v')| < \varepsilon, \ |G(u_0, v_0) - \psi(u', v')| < \varepsilon,$$

$$|H(u_0, v_0) - \chi(u', v')| < \varepsilon,$$

rezultă că distanţa dintre M şi M' este inferioară lui $\varepsilon\sqrt{3}$.

Să notăm prin k homeomorfismul obţinut prin compunerea homeomorfismelor h şi ω. Din cele de mai sus rezultă uşor că dacă $M(u_0, v_0) \in P$, $M(u', v') \in p'$, iar (u_0, v_0) şi (u', v') se corespund prin k, atunci distanţa dintre $M(u_0, v_0)$ şi $M(u', v')$ este inferioară lui $\varepsilon\sqrt{3}$, deci distanţa dintre P şi p' este inferioară lui $\varepsilon\sqrt{3}$.

Reciproc, se arată că dacă distanţa dintre P şi p' este inferioară lui ε, atunci distanţa dintre P şi p este inferioară lui $\varepsilon\sqrt{3}$.

Fie acum $\{P_n\}$ un şir de pînze poliedrale care converge în distanţă către p. Aceasta înseamnă că, fiind dat $\varepsilon > 0$, există N cu proprietatea că, de îndată ce $n > N$, dist $(P_n, p) < \varepsilon$. Rezultă că, pentru $n > N$, dist. $(P_n, p') < \varepsilon\sqrt{3}$, deci $\{P_n\}$ converge în distanţă către p'. Reciproc, dacă $\{P_n\}$ converge în distanţă către p', atunci $\{P_n\}$ converge în distanţă către p. Deci mulţimea valorilor limită ale şirurilor de tipul {aria P_n} este aceeaşi pentru p şi pentru p'; marginea inferioară a acestei mulţimi este aria comună a pînzelor p şi p'.

b. Noţiunea de suprafaţă. Suprafeţe care au arie

Teoremele de mai sus fac naturale şi legitime următoarele definiţii:

Se numeşte suprafaţă o clasă de pînze echivalente.

Se numeşte suprafaţă închisă o clasă de pînze închise echivalente.

Se numeşte suprafaţă simplă o clasă de pînze simple şi echivalente.

Prin definiţie, o suprafaţă are arie dacă pînzele din care este ea formată au arie. Valoarea comună a ariilor acestor pînze este, prin definiţie, aria suprafeţei.

Aşa cum noţiunea de *pînză* corespunde noţiunii de *drum*, noţiunea de *suprafaţă* este analogul noţiunii de *curbă* iar noţiunea de *suprafaţă care are arie* este analogul noţiunii de *curbă rectificabilă.*

Desigur, că ar fi de dorit să obţinem, pentru suprafeţe, un analog al criteriului de rectificabilitate al lui Jordan; un astfel de analog există, însă din cauza complicaţiilor tehnice renunţăm de a-l da aici. Vom prezenta, în schimb, un alt aspect al teoriei ariei unei suprafeţe, relativ la suprafeţele care admit plan tangent. În particular, vom obţine, în anumite condiţii, o teoremă de reprezentare a ariei unei suprafeţe cu ajutorul unei integrale duble.

c. Unghiul a două pînze

Fie $p_1 = \{R_1, I(R_1)\}$ şi $p_2 = \{R_2, I(R_2)\}$ două pînze care au plan tangent în fiecare punct, cu alte cuvinte pentru care aplicaţiile vectoriale R_1 şi R_2 sînt diferenţiabile în fiecare punct din I^2. Fie γ un homeomorfism al lui I^2 pe I^2 şi fie (u_1, v_1) şi (u_2, v_2) două puncte generice din I^2, care se corespund prin γ, deci pentru care $(u_2, v_2) = \gamma((u_1, v_1))$. Vom nota cu $R_1(u_1, v_1)$ imaginea lui (u_1, v_1) prin aplicaţia R_1 şi cu $R_2(u_2, v_2)$ imaginea punctului (u_2, v_2) prin aplicaţia R_2. Vom nota cu $\alpha_{12}(\gamma;\, u_1, v_1;\, u_2, v_2)$ unghiul ascuţit format de planul tangent în punctul $R_1(u_1, v_1)$ la pînza p_1 cu planul tangent în $R_2(u_2, v_2)$ la pînza p_2. Să punem

$$\alpha_{12}(\gamma) = \sup.\ \alpha_{12}(\gamma;\, u_1, v_1;\, u_2, v_2),$$

marginea superioară fiind luată în raport cu toate perechile de puncte corespondente (u_1, v_1), (u_2, v_2) prin homeomorfismul γ. Să punem

$$\alpha_{12} = \inf_{\gamma}.\ \alpha_{12}(\gamma);$$

deci α_{12} este marginea inferioară a mulţimii $\{\alpha_{12}(\gamma)\}$, adică a mulţimii diferitelor margini superioare $\alpha_{12}(\gamma)$ obţinute pentru diferitele homeomorfisme γ ale lui I^2 pe I^2.

Unghiul format de pînza p_1 cu pînza p_2 va fi, prin definiţie, dat de

$$\widehat{p_1, p_2} = \alpha_{12}.$$

Evident că se poate defini, în mod analog, unghiul format de două drumuri cu tangentă.

Să observăm că definiţia dată unghiului a două pînze cu plan tangent se extinde şi la cazul în care pînzele (sau una dintre ele) au, în unele puncte, mai multe plane tangente, cu condiţia ca în fiecare punct să avem un număr finit de plane tangente. Într-adevăr, este suficient, în acest caz, să desemnăm prin $\alpha_{12}(\gamma;\, u_1, u_2;\, v_1, v_2)$ pe cel mai mare dintre unghiurile format de un plan tangent în $R_1(u_1, v_1)$ la p_1, cu un plan tangent în $R_2(u_2, v_2)$ la p_2. Operaţiile ulterioare, aplicate mulţimii $\{\alpha_{12}(\gamma;\, u_1, v_1,;\, u_2, v_2)\}$, rămîn neschimbate.

O pînză pentru care, în fiecare punct, planele tangente sînt în număr finit, va fi numită, în cele ce urmează, *o pînză cu plan tangent generalizat.* Este deci clar că definiţia dată mai sus unghiului a două pînze este valabilă nu numai pentru pînze cu plan tangent, dar şi pentru pînze cu plan tangent generalizat.

d. Convergenţa în direcţie

Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ un şir de pînze cu plan tangent generalizat. Vom spune că şirul $\{p_n\}$ converge în direcţie către pînza p cu plan tangent generalizat, dacă

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{p_n, p} = 0.$$

Introducîndu-se, pe o cale asemănătoare, noţiunea de *drum cu tangentă generalizată* se va putea defini noţiunea de convergenţă în direcţie şi pentru şiruri de drumuri cu tangentă generalizată.

Un caz particular important de drum cu tangentă generalizată îl constituie orice drum poligonal, înţelegînd, ca şi altă dată, prin drum poligonal un drum a cărui imagine este o linie poligonală.

Convergența în direcție este independentă de convergența în distanță. Pentru simplitate, vom ilustra aceasta pe exemple care folosesc șiruri de drumuri.

Există un șir $\{d_n\}$ de drumuri cu tangentă, care converge în direcție către un anumit drum d, dar nu converge în distanță către d.

Pentru demonstrație, să considerăm drumul d_n definit de aplicația

$$R: \begin{cases} x = t, \\ y = 1 + \frac{1}{n} \end{cases} (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

și drumul d definit de aplicația

$$R: \begin{cases} x = t, \\ y = 0, \end{cases} (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Este ușor de văzut că

$$\widehat{d_n, d} = 0 \text{ pentru } n = 1, 2, \ldots$$

deci șirul $\{d_n\}$ converge în direcție către drumul d. Pe de altă parte, avem

$$\text{dist. } (d_n, d) = 1 + \frac{1}{n},$$

deci șirul $\{d_n\}$ *nu* converge în distanță către d.

Există un șir $\{d_n\}$ de drumuri poligonale care converge în distanță către un anumit drum d, dar nu converge în direcție către d.

Pentru demonstrație, vom considera șirul $\{d_n\}$ definit în modul următor. Se împarte segmentul [0, 1] în 2^n intervale de aceeași lungime. Pe fiecare dintre aceste intervale, luat ca bază, se construiește triunghiul isoscel al cărui vîrf are ordonata egală cu $\frac{1}{n}$. Drumul $d_n = \{R_n, I(R_n)\}$ va fi definit astfel încît $I(R_n)$ să fie reuniunea laturilor egale ale triunghiurilor isoscele construite ca mai sus. Aplicația R_n va fi obținută luînd, ca funcție care dă abscisa, aplicația identică, iar ca interval al parametrului, intervalul [0, 1].

Drumul d va fi prin definiție, dat de $x = t$, $y = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Este ușor de văzut că

$$\text{dist. } (d_n, d) = \frac{1}{n},$$

deci șirul $\{d_n\}$ converge în distanță către d. Pe de altă parte, unghiul

$$\widehat{d_n, d}$$

are o valoare diferită de zero și independentă de numărul natural n; deci șirul $\{d_n\}$ *nu* converge în direcție către d.

Exemple similare se pot da și pentru pînze.

Ca și altădată, vom numi *pînză poliedrală* orice pînză a cărei imagine este o reuniune finită de domenii plane poligonale. Vom numi *pînză polie-*

dralǎ în sens generalizat orice reuniune finită de pînze, fiecare avînd ca imagine un domeniu plan care are arie, iar aceste domenii fiind fără puncte interioare comune.

Pentru o pînză poliedrală în sens generalizat, noţiunea de arie se impune în mod natural ca sumă a ariilor domeniilor plane din care ea este alcătuită.

Noţiunea de pînză poliedrală este analogă noţiunii de drum poligonal. Definiţia dată de Jordan lungimii unui drum foloseşte şiruri de drumuri poligonale înscrise în drumul considerat şi corespunzînd unor şiruri de diviziuni de normă tinzînd la zero. Despre astfel de şiruri de drumuri poligonale se poate arăta că converg către drumul considerat atît în distanţă cît şi în direcţie. Însă o teoremă asemănătoare pentru şiruri de pînze poliedrale nu are loc. Mai precis, fiind dată o pînză p şi un şir de descompuneri triunghiulare Δ_n ale intervalului parametrilor, de normă tinzînd la zero, este posibil ca şirul corespunzător de pînze poliedrale înscrise să conveargă către pînza p numai în distanţă, nu şi în direcţie. Tocmai aceasta este situaţia în exemplul dat de Schwarz.

Fie p o pînză cu plan tangent. Fie $\{p_n\}_{n\in N}$ un şir de pînze poliedrale în sens generalizat, care converge către p atît în distanţă cît şi în direcţie. Să presupunem că şirul

$$\text{aria } p_1, \text{ aria } p_2, \ldots, \text{ aria } p_n, \ldots$$

este convergent. În aceste condiţii, se poate demonstra că pînza p are arie, iar aria este dată tocmai de limita şirului de termen general aria p_n.

Nu putem da aici demonstraţia acestui fapt. Eventual, el poate fi luat ca definiţie a ariei unei pînze cu plan tangent, însă în acest caz ar trebui arătat că pentru două şiruri de pînze poliedrale în sens generalizat, care au proprietăţile de mai sus, limitele şirurilor de arii asociate sînt egale.

e. Reprezentarea ariei unei pînze printr-o integrală dublă

Folosind acest fapt, vom da următoarea

Teoremă de reprezentare a ariei unei pînze printr-o integrală dublă. Fie $p = \{r, I(r)\}$ o pînză pentru care r este dată de

$$r:\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v), \end{cases}$$

unde f admite derivate parţiale continue în domeniul compact D, care are arie. În aceste condiţii, pînza p are arie şi

$$\text{aria } p = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Demonstraţie. Fie Δ o descompunere a domeniului $D : D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_i \cup \ldots \cup D_n$. Fie $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ şi fie P_i acel punct din $I(r)$ ale cărui coordonate sînt ξ_i, η_i şi $f(\xi_i, \eta_i)$. Fie T_i acel domeniu din planul tangent la p în P_i, a cărui proiecţie ortogonală în planul Oxy este domeniul D_i. Avem

$$\text{aria } D_i = (\text{aria } T_i) \cdot \cos \gamma_i,$$

unde γ_i este unghiul ascuţit format de planul care conţine pe T_i cu planul Oxy. Rezultă imediat că

$$\cos \gamma_i = \frac{+1}{+\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{(\xi_i \eta_i)} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{(\xi_i \eta_i)}}},$$

deci

$$\text{aria } T_i = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\right)_{(\xi_i \eta_i)} \cdot \text{aria } D_i.$$

Să punem

$$F(x, y) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2};$$

avem atunci

$$\sum_{i=1}^{n} \text{aria } T_i = \sigma_\Delta (F; \xi_i, \eta_i),$$

unde în membrul al doilea figurează suma riemanniană a lui F relativă la Δ şi la punctele (ξ_i, η_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Să notăm cu $\tau_i(\Delta)$ pînza a cărei imagine este T_i şi a cărei reprezentare parametrică este definită pe D_i, luînd, ca parametri chiar abscisa şi ordonata. Să notăm cu $\tau(\Delta)$ pînza poliedrală în sens generalizat care se obţine ca reuniune a pînzelor $\tau_i(\Delta)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Avem deci

$$\text{aria } \tau(\Delta) = \sigma_\Delta (F; \xi_i, \eta_i).$$

Deoarece F este continuă pe D, rezultă că F este integrabilă pe D, deci, pentru un şir Δ_n de descompuneri ale lui D de normă tinzînd la zero, avem

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_{\Delta_n}(F; \xi_i^n, \eta_i^n) = \iint_D F(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

deci şi

$$\lim_{n \to \infty} \text{aria } \tau(\Delta_n) = \iint_D F(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Teorema va fi demonstrată de îndată ce vom reuşi să arătăm că şirul $\{\tau(\Delta_n)\}_{n \in N}$ converge către pînza p, atît în distanţă cît şi în direcţie.

Pentru a stabili convergenţa în distanţă, este suficient să demonstrăm că pentru $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta > 0$, astfel încît

$$\text{dist. } (\tau(\Delta), p) < \varepsilon \text{ de îndată ce } \nu(\Delta) < \eta.$$

Va fi deci suficient să arătăm că pentru $\varepsilon > 0$ există un $\eta > 0$, astfel încît, dacă $\nu(\Delta) < \eta$, atunci există un homeomorfism h_Δ al domeniului D, care induce o corespondență între $\tau(\Delta)$ şi p, pentru care, notînd cu M_Δ şi M două puncte care se corespund prin h_Δ ($M_\Delta \in \tau(\Delta)$, $M \in p$), să avem

$$\text{dist.}\ (M_\Delta, M) < \varepsilon.$$

Fie Δ o descompunere jordaniană oarecare a lui D. Vom considera homeomorfismul identic al domeniului D, care induce între $\tau(\Delta)$ şi p o corespondență în modul următor: dacă $M \in p$, atunci M_Δ va fi acel punct din $\tau(\Delta)$ care are aceeaşi abscisă ca şi M şi aceeaşi ordonată ca şi M. Avem deci, notînd cu x şi y abscisa şi ordonata punctului M şi cu $F(x, y)$ cota punctului M_Δ,

$$\text{dist.}\ (M_\Delta, M) = |F(x, y) - f(x, y)|.$$

Există un număr natural $j (1 \leqslant j \leqslant n)$, astfel încît $(x, y) \in D_j$. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece f este continuă pe domeniul compact D, rezultă că f este uniform continuă pe D, deci există $\eta' > 0$ astfel încît

$$|f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon,$$

de îndată ce

$$\text{dist.}\ (P_1, P_2) < \eta'.$$

Putem admite că $\eta' < \varepsilon$.

Să presupunem că norma ν a descompunerii Δ este inferioară lui η. Rezultă că diametrul lui D_j este inferior lui η', deci

$$|f(x, y) - f(\xi_j, \eta_j)| < \varepsilon.$$

Pe de altă parte, deoarece $(x, y) \in D_j$, avem, din ecuaţia planului tangent în P_j la pînza p,

$$F(x, y) = f(\xi_j, \eta_j) + (x - \xi_j)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j + (y - \eta_j)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j,$$

deci

$$|F(x, y) - f(\xi_j, \eta_j)| \leqslant |x - \xi_j| \cdot \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j\right| + |y - \eta_j| \cdot \left|\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j\right|.$$

Din faptul că derivatele parţiale ale lui f sînt continue pe domeniul compact D, rezultă că ele sînt mărginite în D, deci există un număr real K, astfel încît

$$|F(x, y) - f(\xi_j, \eta_j)| \leqslant K(|x - \xi_j| + |y - \eta_j|).$$

Însă din $\nu(\Delta) < \eta'$ rezultă

$$|x - \xi_j| < \eta',\ |y - \eta_j| < \eta',$$

deci

$$|F(x, y) - f(\xi_j, \eta_j)| < 2K\eta'$$

şi, ţinînd seama că $\eta' < \varepsilon$, obţinem

$$|F(x, y) - f(x, y)| \leqslant |F(x, y) - f(\xi_j, \eta_j)| + |f(x, y) - f(\xi_j, \eta_j)| < \varepsilon(1 + 2K).$$

Am stabilit astfel convergenţa în distanţă a şirului $\{\tau(\Delta_n)\}_{n\in N}$ către pînza p.

Pentru a stabili că şirul $\{\tau(\Delta_n)\}_{n\in N}$ converge în direcţie către p, folosim un raţionament oarecum analog, însă aplicat nu diferenţei $|F(x, y) - f(x, y)|$, ci diferenţelor

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

Avem, pentru $(x, y) \in D_j$,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x,y)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x,y)} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j,$$

deci

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j\right|,$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j\right|.$$

Folosind continuitatea uniformă a derivatelor parţiale ale lui f pe D şi admiţînd, pentru a nu mai complica scrierea, că pentru $\varepsilon > 0$ putem alege pe $\eta' > 0$ acelaşi cu cel de mai sus, astfel încît

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j\right| < \varepsilon,$$

pentru $(x, y) \in D_j$, rezultă imediat convergenţa în direcţie a şirului $\{\tau(\Delta_n)\}_{n\in N}$ către p.

Vom schiţa acum extinderea teoremei precedente la cazul general al unei pînze $p = \{r, I(r)\}$, unde r este dată de

$$r: \begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v), \\ z = h(u, v), \end{cases} \quad \begin{matrix} (0 \leqslant u \leqslant 1), \\ (0 \leqslant v \leqslant 1). \end{matrix}$$

Vom presupune că f, g şi h au derivate parţiale de primul ordin continue în I^2 (pătratul unitate din planul Ouv) şi că matricea

$$\begin{Vmatrix} f'_u & g'_u & h'_u \\ f'_v & g'_v & h'_v \end{Vmatrix}$$

are, în fiecare punct din I^2, rangul egal cu doi. Aceasta înseamnă că, în fiecare punct din I^2, cel puţin unul dintre determinanţii

$$A(u, v) = A = \begin{vmatrix} g'_u & h'_u \\ g'_v & h'_v \end{vmatrix}, \; B(u, v) = B = \begin{vmatrix} h'_u & f'_u \\ h'_v & f'_v \end{vmatrix}, \; C(u, v) = C = \begin{vmatrix} f'_u & g'_u \\ f'_v & g'_v \end{vmatrix}$$

este diferit de zero.

În aceste condiţii, vom da următoarea

Teoremă. *Pînza p are arie şi*

$$\text{aria}\, p = \iint_{I^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv = \iint_{I^2} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

unde

$$E = f_u'^2 + g_u'^2 + h_u'^2,$$
$$G = f_v'^2 + g_v'^2 + h_v'^2,$$
$$F = f_u'f_v' + g_u'g_v' + h_u'h_v'.$$

Demonstraţie. A doua egalitate rezultă din egalitatea

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$

care, la rîndul ei, este o consecinţă imediată a identităţii lui Lagrange

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2.$$

Rămîne să stabilim că

$$\text{aria}\, p = \iint_{I^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv.$$

Vom considera o descompunere Δ a lui I^2, formată cu paralele echidistante la axele de coordonate: $I^2 = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \ldots \cup \alpha_i \cup \ldots \cup \alpha_n$. Deci α_i este un pătrat ale cărui vîrfuri M_0, M_1, M_2 şi M_3 au coordonate de forma

$$M_0(u_i, v_i),\ M_1(u_i + k, v_i),\ M_2(u_i + k, v_i + k),\ M_3(u_i, v_i + k).$$

Să punem

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= x_i + f'_{u_i}(u - u_i) + f'_{v_i}(v - v_i), \\ \psi(u, v) &= y_i + g'_{u_i}(u - u_i) + g'_{v_i}(v - v_i), \\ \chi(u, v) &= z_i + h'_{u_i}(u - u_i) + h'_{v_i}(v - v_i), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{array}{lll} x_0^* = \varphi(u_i, v_i), & y_0^* = \psi(u_i, v_i), & z_0^* = \chi(u_i, v_i), \\ x_1^* = \varphi(u_i + k, v_i), & y_1^* = \psi(u_i + k, v_i), & z_1^* = \chi(u_i + k, v_i), \\ x_2^* = \varphi(u_i + k, v_i + k), & y_2^* = \psi(u_i + k, v_i + k), & z_2^* = \chi(u_i + k, v_i + k) \\ x_3^* = \varphi(u_i, v_i + k), & y_3^* = \psi(u_i, v_i + k), & z_3^* = \chi(u_i, v_i + k). \end{array}$$

Să notăm cu P_i^* punctul de coordonate x_i^*, y_i^*, z_i^* $(0 \leqslant i \leqslant 3)$. Punctele P_0^*, P_1^*, P_2^*, P_3^* sînt vîrfurile unui paralelogram Q_i, situat în planul tangent la pînza p în punctul P_0^* (se observă că $x_0^* = x_i$, $y_0^* = y_i$, $z_0^* = z_i$). Fie $q_i^{(\Delta)}$ pînza $\{r, I(r)\}$, unde r este reprezentarea definită pe α_i şi dată de (4), iar $I(r) = Q_i$. Fie $q(\Delta)$ pînza poliedrală generalizată care se obţine ca reuniune a pînzelor $q_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. Ca şi în teorema precedentă, se arată că, pentru un şir Δ_n de descompuneri de normă tinzînd la zero, şirul $\{q(\Delta_n)\}_{n\in N}$ converge către q în distanţă şi în direcţie. Rămîne să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty} \text{aria } q(\Delta_n) = \iint_{I^2} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\, dv.$$

Pentru aceasta, va trebui să evaluăm aria paralelogramului Q_i. Observăm că vectorul $\overline{P_0^*P_1^*}$ are drept componente pe axele de coordonate mărimile

$$kf'_{u_i},\ kg'_{u_i},\ kh'_{u_i},$$

iar vectorul $\overline{P_0^*P_3^*}$ are drept componente pe axele de coordonate mărimile

$$kf'_{v_i},\ kg'_{v_i},\ kh'_{v_i}.$$

Aria paralelogramului Q_i este egală, după cum se ştie, cu mărimea vectorului care se obţine ca produs vectorial al vectorilor $\overline{P_0^*P_1^*}$ şi $\overline{P_0^*P_3^*}$. Aşadar

$$\text{aria } Q_i = h^2 \sqrt{\begin{vmatrix} f'_{u_i} & g'_{u_i} \\ f'_{v_i} & g'_{v_i}\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} g'_{u_i} & h'_{u_i} \\ g'_{v_i} & h'_{v_i}\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} h'_{u_i} & f'_{u_i} \\ h'_{v_i} & f'_{v_i}\end{vmatrix}^2} = h^2\sqrt{A_i^2+B_i^2+C_i^2},$$

unde

$$A_i = A(u_i, v_i),\quad B_i = B(u_i, v_i),\quad C_i = C(u_i, v_i).$$

Deci, ţinînd seama că $h^2 =$ aria α_i, avem

$$\text{aria } q^{(\Delta)} = \sum_{i=1}^{n} \text{aria } q_{i(\Delta)} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i^2+B_i^2+C_i^2}\cdot \text{aria } \alpha_i = \sigma_\Delta(F; u_i, v_i),$$

unde

$$F(u,v) = A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v).$$

Deoarece F este continuă pe I^2, rezultă că, pentru $\nu(\Delta_n)\to 0$, avem

$$\lim_{n\to\infty} q(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta n}(F; u_i, v_i) = \iint_{I^2} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\, dv$$

şi teorema este complet demonstrată.

Exemple. 1° Să se determine aria pînzei p definită de $x = u$, $y = v$, $z = \frac{1}{2}(u^2+v^2)$, unde punctul (u, v) aparţine domeniului D constituit de unul dintre ochiurile lemniscatei $(u^2+v^2)^2 = u^2 - v^2$ (fig. 47).

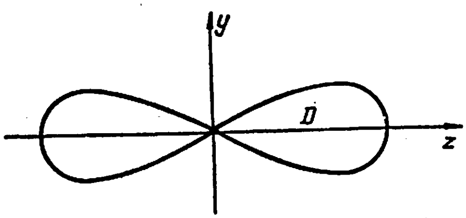


Fig. 47

Punînd $f(u,v) = \frac{1}{2}(u^2+v^2)$, observăm că f admite derivate parţiale continue pe D, deci, conform uneia dintre teoremele de mai sus, p are arie şi

$$\text{aria } p = \iint_D \sqrt{1+u^2+v^2}\, du\, dv.$$

Trecînd la coordonate polare, obținem

$$\text{aria } p = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho \mathrm{d}\rho = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sqrt{2}\cos^3\theta - 1)\,\mathrm{d}\theta = \frac{10}{9} - \frac{\pi}{6}.$$

2° Fie f o funcție cu derivată continuă pe $[a, b]$ și astfel încît $f(x) > 0$ pentru $a \leqslant x \leqslant b$. Să presupunem că planul xOz, în care se află mulțimea punctelor cu coordonate de forma $(x, f(x))$, se rotește cu 360° în jurul axei Ox. Mulțimea descrisă în acest fel de imaginea drumului $x = t$, $z = f(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ este imaginea pînzei p date de

$$\begin{aligned} x &= u, & &(a \leqslant u \leqslant b),\\ y &= f(u)\sin v, & &(0 \leqslant v \leqslant 2\pi),\\ z &= f(u)\cos v, \end{aligned}$$

unde v este unghiul format de planul de rotație cu planul Oxz (fig. 48).

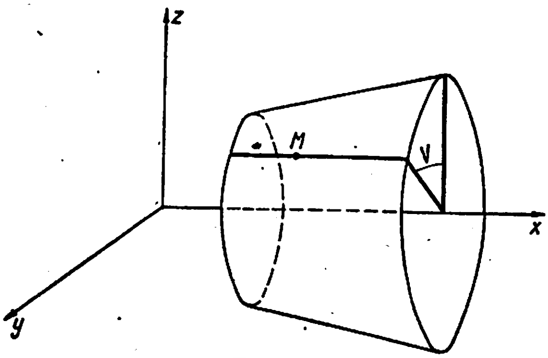


Fig. 48

Avem

$$E = 1^2 + f'^2(u)\sin^2 v + f'^2(u)\cos^2 v = 1 + f'^2(u),$$
$$G = 0 + f^2(u)\cos^2 v + f^2(u)\sin^2 v = f^2(u),$$
$$F = 1\cdot 0 + f(u)f'(u)\sin v\cos v - f(u)f'(u)\sin v\cos v = 0,$$

deci

$$\text{aria } p = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}v\int_a^b \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u = 2\pi\int_a^b f(u)\sqrt{1+f'^2(u)}\,\mathrm{d}u.$$

Capitolul XVII

INTEGRALA TRIPLĂ

Modul în care a fost construită teoria integralei duble permite aplicarea ei atît la funcțiile de două variabile cît și la funcțiile de trei sau mai multe variabile. Însă, deoarece, în mod explicit, considerațiile s-au referit la funcțiile de două variabile, vom relua aici aceste considerații, referindu-ne de astă dată la funcțiile de trei variabile. Vom trece mai repede peste chestiunile care revin la o simplă schimbare de terminologie (înlocuirea „ariei" prin „volum", a „domeniului bidimensional" prin „domeniu tridimensional" etc.), oprindu-ne mai cu seamă la acele chestiuni care implică modificări mai puțin banale. Urmînd pas cu pas etapele prin care am ajuns, în plan, la noțiunea de mulțime care are arie și la noțiunea de arie a unei mulțimi, se obțin, în spațiu, noțiunea de mulțime care are volum și noțiunea de volum al unei mulțimi. Pentru aceasta, se vor considera, în loc de poligoane, poliedre sau chiar numai poliedre care sînt reuniuni de intervale tridimensionale. Ținînd seama că pentru poliedre noțiunea de volum este cunoscută (a se revedea această chestiune, care pune totuși și unele probleme mai delicate), vom putea defini volumul interior și volumul exterior al unei mulțimi de puncte din R^3. Dacă aceste două volume sînt egale, atunci spunem că mulțimea respectivă are volum și acest volum este — prin definiție — dat de valoarea comună a volumelor interior și exterior. Despre un domeniu din R^3 care are volum se spune că este măsurabil Jordan. În cele ce urmează, atîta vreme cît nu se va specifica contrariul, toate domeniile considerate vor fi presupuse compacte (adică mărginite și luate împreună cu frontiera) și măsurabile Jordan.

Fie F o funcție reală de domeniu, definită în domeniul $G \subset R^3$, adică o funcție care asociază fiecărui domeniu $D \subset G$ un număr real bine determinat $F(D)$.

Dacă, pentru orice pereche de domenii D_1 și D_2, conținute în G și fără puncte interioare comune, astfel încît $D_1 \cup D_2$ este tot un domeniu, avem $F(D_1 \cup D_2) = F(D_1) + F(D_2)$, atunci spunem că F este o *funcție aditivă de domeniu*. Cel mai simplu exemplu de funcție aditivă de domeniu este volumul unui domeniu din R^3; într-adevăr, avem vol. $(D_1 \cup D_2) =$ vol. $D_1 +$ $+$ vol. D_2 ori de cîte ori D_1 și D_2 n-au puncte interioare comune.

Amintim că diametrul unei mulţimi este marginea superioară a distanţelor dintre punctele acestei mulţimi.

Fie (x, y, z) un punct din G. Să presupunem că are loc următoarea situaţie: există un număr real ξ astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe un $\eta > 0$ cu proprietatea că, oricare ar fi domeniul D conţinînd punctul (x, y, z) şi de diametru inferior lui η, are loc inegalitatea

$$\left| \xi - \frac{F(D)}{\text{vol. } D} \right| < \varepsilon.$$

În aceste condiţii, spunem că funcţia F este derivabilă în punctul (x, y, z), iar numărul ξ se numeşte derivata funcţiei F în punctul (x, y, z) şi *se notează*

$$\xi = \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V}\right)_{(x,y,z)}.$$

Fie f o funcţie reală definită în domeniul $G \subset R^3$. Dacă există o funcţie F aditivă de domeniu, definită în G, astfel încît

$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V}\right)_{(x,y,z)} = f(x, y, z)$$

pentru orice punct $(x, y, z) \in G$, atunci spunem că f admite primitivă în domeniul G, iar F este, prin definiţie, o primitivă în G a funcţiei f. Deci, derivata unei funcţii de domeniu este o funcţie de punct, în timp ce primitiva unei funcţii de punct este o funcţie aditivă de domeniu.

Ca şi pentru funcţiile de două variabile, se demonstrează că *primitiva unei funcţii definite în G este unic determinată* (atunci cînd această primitivă există). În demonstrarea acestei teoreme intervine proprietatea de aditivitate a primitivei ca funcţie de domeniu.

Teorema 1. Dacă f este o funcţie de punct, continuă în domeniul $G \subset R^3$, atunci f admite primitivă în G.

Demonstraţie. Să considerăm mai întîi cazul particular în care $f(x, y, z) \geqslant 0$ în G. Fie D un domeniu conţinut în G. Să considerăm familiile de plane $x = \frac{p}{n}$, $y = \frac{p}{n}$, $z = \frac{p}{n}$, unde p parcurge mulţimea numerelor întregi (atît cele negative cît şi cele pozitive — inclusiv zero), iar n este un număr natural arbitrar, dar fixat. Fie $K_1, K_2, \ldots, K_m$ cuburile închise, de muchie egală cu $\frac{1}{n}$, formate cu planele de mai sus şi care conţin puncte din domeniul D. Fie M_i marginea superioară a funcţiei f în cubul $K_i (1 \leqslant i \leqslant m)$. Să punem

$$W_n = \sum_{i=1}^{m} M_i \text{ vol. } K_i. \tag{1}$$

Este uşor de văzut că W_n nu creşte atunci cînd n creşte şi, deoarece $W_n \geqslant 0$ (în baza faptului că $f(x, y, z) \geqslant 0$), există şi este finită limita

$$W = \lim_{n \to \infty} W_n.$$

Valoarea W depinde, evident, de domeniul D, deci putem scrie: $W = F(D)$. Vom arăta că F este tocmai primitiva funcţiei f în G.

Mai întîi să arătăm că funcţia F este aditivă. Fie, pentru aceasta, o descompunere a domeniului D în două domenii D' şi D'', fără puncte interioare comune. Să notăm cu W_n' suma de tipul (1) asociată domeniului D', cu W_n'' suma de tipul (1) asociată domeniului D'' şi cu W_n''' suma de tipul (1) asociată mulţimii $D' \cap D''$. Avem

$$W_n = W_n' + W_n'' - W_n''', \tag{2}$$

deoarece cuburile care-şi dau contribuţia în W_n''' îşi vor da contribuţia atît în W_n' cît şi în W_n''. Să notăm cu V_n''' suma volumelor cuburilor K_i care conţin puncte din $D' \cap D''$. Deoarece toate domeniile cu care lucrăm au volum, rezultă că frontiera fiecărui domeniu care apare mai sus este de volum egal cu zero. Deoarece D' şi D'' n-au puncte interioare comune, rezultă că $D' \cap D''$ este o mulţime conţinută atît în frontiera lui D' cît şi în frontiera lui D''. Deci vol. $(D' \cap D'') = 0$. Aceasta arată că, pentru n destul de mare, V_n''' devine oricît de mic dorim, deci

$$\lim_{n\to\infty} V_n''' = 0.$$

Să notăm cu M marginea superioară a funcţiei f în domeniul D. Avem

$$0 \leqslant W_n''' < M \cdot V_n'''.$$

Din relaţiile stabilite rezultă

$$\lim_{n\to\infty} W_n''' = 0.$$

De aici şi din (2) rezultă, prin trecere la limită,

$$F(D) = F(D') + F(D'')$$

şi aditivitatea funcţiei F este stabilită.

Să arătăm acum că

$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V}\right)_{(x,y,z)} = f(x,y,z) \text{ pentru } (x,y,z) \in G. \tag{3}$$

Notînd cu m_D şi M_D marginile inferioară şi superioară ale funcţiei f pe domeniul D şi punînd

$$V_n = \sum_{i=1}^{m} \text{vol. } K_i,$$

obţinem, în baza relaţiei (1),

$$m_D V_n \leqslant W_n \leqslant M_D V_n,$$

deci, pentru $n \to \infty$,

$$m_D \text{ vol. } D \leqslant W \leqslant M_D \text{ vol. } D.$$

Însă $W = F(D)$, deci

$$m_D \text{ vol. } D \leqslant F(D) \leqslant M_D \text{ vol. } D$$

şi

$$m_D \leqslant \frac{F(D)}{\text{vol. } D} \leqslant M_D.$$

Însă din faptul că D este compact rezultă existenţa a două puncte P'_D şi P''_D aparţinînd lui D şi astfel încît $m_D = f(P'_D)$, $M_D = f(P''_D)$. Rezultă deci că

$$f(P'_D) \leqslant \frac{F(D)}{\text{vol. } D} \leqslant f(P''_D). \tag{4}$$

Ţinînd seama acum de faptul că f este continuă în G, rezultă că dacă (x, y, z) este un punct din G, iar $\{D_n\}$ este un şir de domenii conţinute în G, conţinînd punctul (x, y, z) şi de diametru tinzînd la zero, atunci din (4) se obţine, prin trecere la limită,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(D_n)}{\text{vol.} D_n} = f(x, y, z)$$

şi, după cum se ştie, această situaţie este echivalentă cu exprimarea prin ε a relaţiei (3). Teorema este astfel demonstrată în cazul $f(x, y, z) \geqslant 0$.

Fie acum f o funcţie continuă arbitrară. În baza continuităţii lui f pe domeniul compact G, rezultă că f este mărginită pe G. Există deci un număr real k, astfel încît

$$g(x, y, z) = f(x, y, z) + k \geqslant 0, \text{ pentru } (x, y, z) \in G.$$

Deoarece funcţia g este continuă şi nenegativă în G, ei i se aplică rezultatul obţinut în prima parte a demonstraţiei. Există o funcţie F_1 aditivă de domeniu, derivabilă în fiecare punct din G şi astfel încît

$$\frac{dF_1}{dV} = g(x, y, z), \text{ pentru } (x, y, z) \in G.$$

Să punem

$$F(D) = F_1(D) - k \cdot \text{vol. } D.$$

Funcţia F, ca diferenţă a două funcţii aditive de domeniu, este tot o funcţie aditivă de domeniu; ca diferenţă a două funcţii derivabile este tot o funcţie derivabilă şi

$$\frac{dF}{dV} = \frac{dF_1}{dV} - k = g(x, y, z) - k = (f(x, y, z) + k) - k = f(x, y, z),$$

deci F este primitiva funcţiei f. Teorema este astfel complet demonstrată.

Observaţie. După cum se vede, demonstraţia teoremei de mai sus diferă întrucîtva de demonstraţia teoremei corespunzătoare la funcţiile de două variabile. Explicaţia este următoarea: în cazul funcţiilor de două variabile, s-a lucrat cu „volumul cilindroidului asociat funcţiei f şi avînd ca bază domeniul G". Corespondentul acestei noţiuni în cazul în care f este o funcţie de trei variabile conduce la considerarea unui „cilindroid situat în R^4 şi avînd ca bază un domeniu din R^3" şi a „măsurii jordaniene a unui astfel de cilindroid". Pentru a evita introducerea unor astfel de concepte destul de complicate şi neintuitive, s-a folosit calea de mai sus.

Definiția integrabilității unei funcții de trei variabile și definirea integralei triple. Fie f o funcție de punct, definită în domeniul $G \subset R^3$. Spunem că f este *integrabilă pe* G dacă f admite primitivă pe G. În acest caz, notînd cu F primitiva lui f, valoarea $F(G)$ (totdeauna unic determinată) se numește *integrala funcției* f *pe domeniul* G și se notează

$$F(G) = \iiint_G f(x, y, z) dx\, dy\, dz \tag{5}$$

sau încă

$$F(G) = \iiint_G f(x, y, z)\, dV. \tag{6}$$

Integrala funcției f se mai numește și *integrală triplă*, pentru motivul că se referă la funcții de trei variabile reale.

Teorema de mai sus conduce imediat la următorul rezultat:

Orice funcție f, continuă pe domeniul $G \subset R^3$, este integrabilă pe G. Proprietățile generale enunțate și demonstrate pentru integrala dublă se transferă, cu simple modificări de terminologie, la integrala triplă. Vom enunța, în mod explicit, una dintre teoremele de bază. Însă mai întîi cîteva definiții.

Fie Δ o descompunere a domeniului $G \subset R^3$ în domeniile $D_1, D_2, \ldots, D_i, \ldots, D_n$ fără puncte interioare comune două cîte două. Numim *norma descompunerii* Δ cel mai mare dintre diametrele domeniilor $D_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. Fie $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in D_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ și fie f o funcție definită pe G. Expresia $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \text{vol. } D_i$ se numește sumă riemanniană asociată funcției f, domeniului G, descompunerii Δ și punctelor (ξ_i, η_i, ζ_i) și se notează $\sigma_\Delta (f; \xi_i, \eta_i, \zeta_i)$.

T e o r e m a d e r e p r e z e n t a r e a i n t e g r a l e i t r i p l e c a l i m i t ă d e s u m e r i e m a n n i e n e. **Fie f continuă pe domeniul $G \subset R^3$. Să punem**

$$I = \iiint_G f(x, y, z) dx\, dy\, dz.$$

În aceste condiții, fiecărui număr $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr $\eta > 0$, astfel încît, pentru orice descompunere Δ a lui G, de normă inferioară lui η, să aibă loc inegalitatea

$$|I - \sigma_\Delta (f; \xi_i, \eta_i, \zeta_i)| < \varepsilon, \tag{7}$$

oricare ar fi punctele $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in D_i (1 \leqslant i \leqslant n)$.

Demonstrația acestei teoreme urmează pas cu pas demonstrația dată teoremei corespunzătoare pentru integrala Riemann a funcțiilor de două variabile.

De obicei, proprietatea conținută în teorema de mai sus este luată ca *definiție* a integrabilității și a integralei funcțiilor de trei variabile. Mai precis, se adoptă următoarea

Definiție. Fie f o funcție reală, definită pe domeniul $G \subset R^3$. Să presupunem că există un număr real I cu următoarea proprietate: oricărui număr $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr $\eta > 0$, astfel încît, pentru orice descompunere Δ a lui G, de normă inferioară lui η, să avem inegalitatea (7), oricare ar fi punctele $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in D_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. În aceste condiții, spunem că f este integrabilă Riemann pe G, iar numărul I se numește integrala Riemann a lui f pe G și se notează ca în (5) sau (6).

Pentru funcțiile continue, această definiție este echivalentă cu definiția precedentă, atît în ceea ce privește integrabilitatea cît și în ceea ce privește valoarea integralei.

Să considerăm un domeniu D situat în planul Oxy. Fie Φ și ψ două funcții continue pe D, astfel încît $\Phi(x, y) < \psi(x, y)$ pentru orice punct (x, y) interior lui D. Să notăm cu G domeniul din R^3 definit de inegalitățile $\Phi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y)$, unde $(x, y) \in D$. Un astfel de domeniu G se numește *simplu în raport cu axa Oz* (fig. 49). În mod analog se definesc noțiunile de *domeniu simplu în raport cu Ox* și *domeniu simplu în raport cu Oy*.

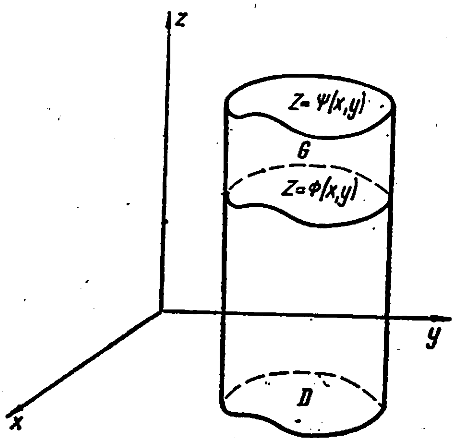


Fig. 49

Procedînd exact ca în cazul corespunzător la funcții de două variabile (teorema de descompunere a unei integrale duble în integrale simple), se obține următoarea

Teoremă de descompunere a unei integrale triple într-o integrală simplă urmată de una dublă. **Fie f o funcție continuă pe domeniul $G \subset R^3$, simplu în raport cu axa Oz. Presupunînd că domeniul G este definit de inegalitățile $\Phi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y)$, $(x, y) \in D$, unde Φ și ψ sînt continue în domeniul $D \subset R^2$, următoarele integrale există și sînt egale:**

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left[\int_{\Phi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dx\, dy. \tag{8}$$

Dacă, în plus, domeniul D este simplu în raport cu axa Oy, cu alte cuvinte dacă D este definit de inegalități de tipul $g(x) \leqslant y \leqslant h(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, unde g și h sînt continue pe $[a, b]$ și $g(x) < h(x)$ pentru $a < x < b$, atunci avem și

$$\iiint_G f(x; y, z) dx\, dy\, dz = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} \left(\int_{\Phi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx. \tag{9}$$

Integrala din membrul al doilea se scrie de obicei

$$\int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} dy \int_{\Phi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Teoreme asemănătoare se pot da pentru cazurile în care G este simplu în raport cu Oy sau în raport cu Ox. Dacă domeniul G este simplu în raport cu două sau trei dintre axele de coordonate, atunci există mai multe moduri de descompunere a integralei triple. Fireşte că fiecare dintre aceste descompuneri conduce la acelaşi rezultat; însă, din punctul de vedere al comodităţii calculelor, una dintre aceste descompuneri poate fi preferabilă celorlalte. În această privinţă nu se pot da reţete generale. În fiecare caz particular trebuie să ne orientăm după specificul situaţiei respective. Exemplele care urmează sînt semnificative în acest sens.

Exemplul 1. Să se studieze integrala

$$I = \iiint_G xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

unde G este definit de inegalităţile $0 \leqslant x \leqslant 1$, $2 \leqslant y \leqslant 4$, $5 \leqslant z \leqslant 8$. Evident, G are volum, iar funcţia de sub integrală este continuă. G este simplu în raport cu Oz: avem $\Phi(x, y) \equiv 5$, $\psi(x, y) \equiv 8$, iar domeniul D, proiecţia ortogonală a lui G în planul Oxy, este definit de inegalităţile $0 \leqslant x \leqslant 1$, $2 \leqslant y \leqslant 4$. Deci D este simplu în raport cu $Oy (g(x) \equiv 2, h(x) \equiv 4)$ şi putem aplica formula (9):

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_2^4 \mathrm{d}y \int_5^8 xyz\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_2^4 \left(\frac{xyz^2}{2}\right)\Bigg|_{z=5}^{z=8} \mathrm{d}y = \frac{39}{2} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_2^4 xy\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{39}{2} \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_{y=2}^{y=4} \mathrm{d}x = 117 \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 117 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{117}{2}.$$

Exemplul 2. Să se studieze integrala

$$I = \iiint_G \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1 + x + y + z)^3},$$

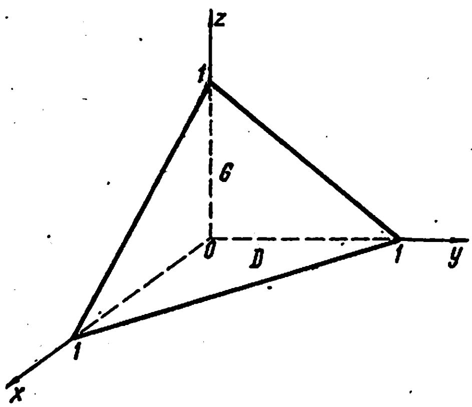


Fig. 50

unde G este tetraedrul delimitat de planele

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

$$x + y + z = 1 \quad \text{(fig. 50)}.$$

Domeniul G este definit de următoarele inegalităţi:

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 - x,$$
$$0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y.$$

Deci G este simplu în raport cu Oz, iar D este simplu în raport cu Oy. Deoarece expresia $1 + x + y + z$ *nu* se anulează în G, rezultă că funcţia de sub integrală este continuă în G, deci putem aplica formula (9)

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

Însă avem

$$\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]$$

şi

$$\frac{1}{2}\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]dy=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+x+y}-\frac{y}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{3-x}{4}\right),$$

deci

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{3-x}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\log(1+x)+\frac{(3-x)^2}{8}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(\log 2-\frac{5}{8}\right).$$

Exemplul 3. Să se studieze integrala

$$I=\iiint_G z\,dx\,dy\,dz,$$

unde G este definit de inegalităţile

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, z\geqslant 0.$$

Este uşor de văzut că G este simplu în raport cu axa Oz, iar D este simplu în raport cu Oy. Avem

$$\Phi(x, y)\equiv 0,\ \psi(x, y)=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

$$g(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ h(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

deci, în baza formulei (9),

$$I=\int_{-a}^{a} dx\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z\,dz,$$

de unde

$$I = \frac{c^2}{2}\int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = c^2 \int_{-a}^{a} dx \int_{0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy,$$

de unde, în baza parității funcției de sub integrală,

$$I = \frac{2bc^2}{3a^3}\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{4bc^2}{3a^3}\int_{0}^{a} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{\pi}{4} abc^2.$$

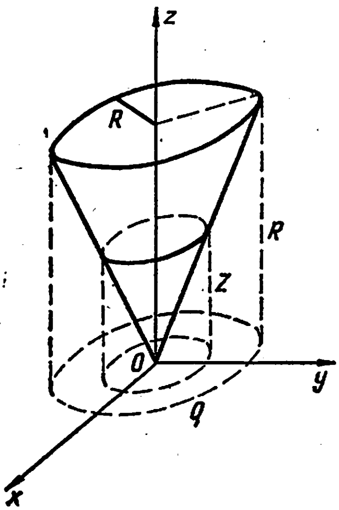


Fig. 51

Exemplul 4. Să se studieze integrala

$$I = \iiint_G z\, dx\, dy\, dz,$$

unde G este delimitat de conul

$$z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$$

și de planul $z = h$ (fig. 51).

Proiecția Q a conului pe planul Oxy este discul $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

Aplicînd formula 8, obținem

$$I = \iint_Q dx\, dy \int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2-y^2}}^{h} z\, dz =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_Q \left[h^2 - \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)\right] dx\, dy.$$

Trecînd la coordonate polare, obținem

$$I = \frac{h^2}{2R^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (R^2 - \rho^2)\,\rho\, d\rho = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

a. Schimbarea de variabile la integrala triplă

Teorema de schimbare de variabile la integrala triplă, deși se enunță în mod asemănător cu teorema de schimbare de variabile la integrala dublă, nu mai poate fi stabilită pe aceeași cale, deoarece formula lui Green se aplică numai la domenii plane.

Ne vom mulțumi, în cele ce urmează, să enunțăm această teoremă și să dăm unele aplicații ale ei.

Fie p o pînză simplă, închisă (în sensul indicat în capitolul următor) şi cu plan tangent continuu, a cărei imagine este frontiera unui domeniu compact. Fie T o transformare de la spaţiul (u, v, w) la spaţiul (x, y, z), care aplică biunivoc domeniul Δ din spaţiul (u, v, w) pe domeniul D din (x, y, z) şi care, în plus, admite în Δ derivate parţiale de primul ordin continue, astfel încît jacobianul

$$\frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(u, v, w)} \neq 0 \text{ în } \Delta,$$

unde ecuaţiile

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v, w), \\ y &= \psi(u, v, w), \qquad (u, v, w) \in \Delta, \\ z &= \chi(u, v, w), \end{aligned}$$

definesc transformarea T.

O astfel de transformare punctuală este, prin definiţie, o *transformare regulată* a lui Δ pe D.

Teoremă. Dacă f este continuă pe D, iar T este o transformare regulată a lui Δ pe D, atunci

$$\iiint_D f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \iiint_\Delta f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \left|\frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(u, v, w)}\right| \mathrm{d}u \mathrm{d}v \mathrm{d}w.$$

Observaţie. În fapt, ipotezele formulate asupra transformării T sînt esenţiale doar în ceea ce priveşte interiorul domeniilor Δ şi D. Pe frontiera lor, ipotezele de biunivocitate şi continuitate, precum şi ipoteza de neanulare a jacobianului pot să nu fie îndeplinite, fără teamă că teorema de schimbare de variabile va fi invalidată (o situaţie asemănătoare are loc şi la integrala dublă).

Exemple. Una dintre cele mai importante schimbări de variabile este trecerea de la coordonate carteziene la aşa-numitele coordonate sferice (fig. 52). Fie P un punct de coordonate carteziene x, y şi z. Fie θ unghiul format de direcţia pozitivă a axei Oz cu raza vectoare OM (a se vedea figura alăturată). Fie P' proiecţia ortogonală a punctului P în planul Oxy. Fie φ unghiul format de direcţia pozitivă a axei Ox cu raza vectoare OP'. Fie ρ lungimea segmentului de dreaptă OP. Mărimile ρ, θ şi φ constituie *coordonatele sferice* ale punctului P. Această denumire este justificată de faptul că, pentru ρ fix, se obţine o suprafaţă sferică (cu centrul în O). Este uşor de văzut că între x, y şi z, pe de o parte, ρ, θ şi φ, pe de altă parte, au loc relaţiile

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= \rho \cos \theta. \end{aligned}$$

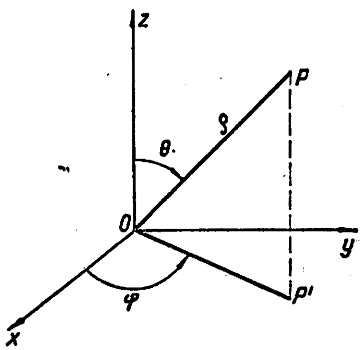


Fig. 52

În general avem

$$\rho \geqslant 0,$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Vom nota cu I intervalul tridimensional definit de aceste inegalități. Transformarea T, care definește trecerea de la coordonate sferice la coordonate carteziene, este o transformare regulată a lui I în R^3, deoarece condiția de biunivocitate este neîndeplinită doar pe frontiera lui I, iar jacobianul transformării este $\rho^2 \sin \theta$, deci nu se anulează decît pe frontiera lui I.

Iată un exemplu de utilizare a coordonatelor sferice.

Fie relația

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x \ (a > 0).$$

Această relație definește o mulțime de puncte care este frontiera unui domeniu compact D.

Să considerăm pînza

$$x = a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}\sin\theta\cos\varphi, \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi),$$
$$y = a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}\sin\theta\sin\varphi, \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$
$$z = a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}\cos\theta,$$

Este ușor de văzut că această pînză are ca imagine tocmai frontiera domeniului D. D are volum, deoarece mulțimea de puncte definită de relația $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x$ este de volum egal cu zero. Volumul lui D este dat de

$$\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Delta \rho^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$

unde Δ este domeniul din spațiul (ρ, θ, φ), care corespunde lui D prin transformarea T. Este ușor de văzut că Δ este definit de inegalitățile

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$
$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$
$$0 \leqslant \rho \leqslant a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}.$$

Avem deci

$$\iiint_\Delta \rho^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}} \rho^2 \mathrm{d}\rho.$$

Însă

$$\int_0^{a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}} \rho^2 d\rho = \frac{a^3}{3}\sin\theta\cos\varphi,$$

deci

$$\iiint_\Delta \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi \int_0^\pi \sin^2\theta \, d\theta = \frac{2a^3}{3}\int_0^\pi \sin^2\theta \, d\theta = \frac{\pi a^3}{3}$$

O altă schimbare de variabile importantă la integrala triplă este trecerea de la coordonatele carteziene la așa-numitele *coordonate cilindrice*, trecere definită de relațiile

$$x = \rho\cos\theta, \qquad (\rho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$
$$y = \rho\sin\theta,$$
$$z = z,$$

unde ρ și θ sînt coordonatele polare din planul Oxy.

Se pot considera *coordonate sferice generalizate*, definite de

$$x = \alpha\rho\sin\theta\cos\varphi, \qquad (\rho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi),$$
$$y = \beta\rho\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = \gamma\rho\cos\theta,$$

unde α, β și γ sînt numere reale, după cum se pot considera *coordonate cilindrice generalizate*, definite de relațiile

$$x = \alpha\rho\cos\theta, \qquad (\rho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$
$$y = \beta\rho\sin\theta,$$
$$z = \gamma z.$$

b. Aplicații ale integralelor triple în mecanică și în fizică

Integrala triplă

$$\iiint_D dx\, dy\, dz$$

are o semnificație geometrică deosebită; ea reprezintă volumul domeniului D.

Așa cum am definit noțiunea de densitate a unei plăci plane, se poate defini, cu ajutorul derivatei unei funcții de domeniu, noțiunea de densitate a unui corp material tridimensional. Dacă $f(x, y, z)$ este densitatea în punctul de coordonate x, y, z, a unui corp material care ocupă domeniul D, atunci masa acestui corp este dată de următoarea integrală triplă:

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

În afară de aceste semnificații geometrice și fizice imediate ale integralei triple, mai sînt și altele; o parte dintre ele vor fi prezentate în cele ce urmează.

Pentru a simplifica expunerea, vom adopta următorul mod de a vorbi, frecvent folosit în fizică: în loc de a spune că se consideră o descompunere δ a domeniului $D : D = D_1 \cup \ldots \cup D_i \cup \ldots \cup D_n$ și termenul generic $f(P_i)\cdot$ $\cdot$aria $D_i(P_i \in D_i)$ dintr-o sumă riemanniană a funcției f asociate descompunerii δ, vom spune că se consideră „elementul de funcție f" (dacă f reprezintă densitatea, atunci elementul de funcție f va fi numit „elementul de masă"). În loc de a spune că se consideră limita către care tind sumele riemanniene cînd norma descompunerii tinde la zero, vom spune că „sumăm elementele de funcție f" ş.a.m.d.

α) Fie un corp material care ocupă domeniul tridimensional D. Să presupunem că masele care se găsesc în acest corp exercită o atracție newtoniană asupra unui punct de masă 1, fie el punctul A de coordonate ξ, η, ζ.

Forța de atracție din partea unui element de masă $dm = \rho dV$ are următoarele proiecții pe axele de coordonate:

$$dF_x = \frac{x-\xi}{r^3}\rho dV, \qquad dF_y = \frac{y-\eta}{r^3}\rho dV,$$

$$dF_z = \frac{z-\zeta}{r^3}\rho dV, \tag{1}$$

unde

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

iar x, y și z sînt coordonatele unui punct P, căruia îi corespunde elementul de masă dm. Sumînd, obținem proiecțiile forței de atracție $\bar{F}$ exercitate de corpul considerat asupra punctului A ($\bar{F}$ are drept componente pe F_x, F_y și F_z; ρ este densitatea):

$$F_x = \iiint_D \frac{x-\xi}{r^3}\rho\, dx\, dy\, dz, \qquad F_y = \iiint_D \frac{y-\eta}{r^3}\rho\, dx\, dy\, dz,$$

$$F_z = \iiint_D \frac{z-\zeta}{r^3}\rho\, dx\, dy\, dz.$$

Tot așa, potențialul în punctul A va fi

$$W = \iiint_D \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r}.$$

Dacă punctul A se află în exteriorul domeniului D, $r > 0$, iar cele trei integrale triple au sens, atunci se poate arăta că este legitimă derivarea, sub integrală, în raport cu parametrii ξ, η şi ζ, şi obţinem

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = F_x, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = F_y, \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta} = F_z.$$

β) Potenţialul de atracţie al unei sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

în punctul A situat pe axa Oz şi de cotă a, este

$$W = \rho \int_{-R}^{R} dz \iint_{\Delta} \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}},$$

unde Δ este domeniul din planul xOy definit de inegalitatea

$$x^2 + y^2 \leqslant R^2 - z^2.$$

Rezultă că

$$W = 2r\rho \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - 2az + a^2} - |z - a|)\, dz.$$

Însă

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - 2az + a^2}\, dz = \frac{1}{3a}[(R+a)^3 - |R - a|^3] =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{1}{a} + 2Ra, & \text{dacă } a \geqslant R \\ \frac{2}{3} R^2 + 2R^2, & \text{dacă } a \leqslant R; \end{cases}$$

şi

$$\int_{-R}^{R} |z - a|\, dz = \begin{cases} 2Ra, & \text{dacă } a \geqslant R; \\ a^2 + R^2, & \text{dacă } a \leqslant R. \end{cases}$$

Avem deci

$$W = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{1}{a}, & \text{dacă } a \geqslant R; \\ \left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi a^2\right)\rho, & \text{dacă } a \leqslant R. \end{cases}$$

Dacă punctul A se află în exteriorul sferei, atunci potenţialul se calculează ca şi cum toată masa sferei ar fi concentrată în centrul sferei.

A doua dintre formulele obţinute arată că dacă am avea o coroană sferică cu raza interioară R_1 şi cu raza exterioară R_2, atunci potenţialul într-un punct interior ($a < R_1$) va fi dat de diferenţa

$$W = W_2 - W_1 = \left(2\pi R_2^2 - \frac{2}{3}\pi a^2\right)\rho - \left(2\pi R_1^2 - \frac{2}{3}\pi a^2\right)\rho = 2\pi(R_2^2 - R_1^2)\rho,$$

deci nu depinde de poziţia punctului interior.

Pentru a trata cazul în care punctul A aparţine corpului considerat, vom folosi formula de schimbare de variabile pentru integrala triplă, formulă care este valabilă şi pentru domenii necompacte. Anume, trecem la coordonate sferice, alegînd punctul A drept pol; în felul acesta, integrala triplă care ne interesează devine o integrală triplă pe un domeniu compact. Dacă izolăm din corpul considerat sfera S_0 de rază r_0 şi cu centrul în A, atunci obţinem

$$\iiint_{S_0} \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_0} \rho \frac{r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta}{r} \tag{2}$$

şi

$$\iiint_{S_0} \rho \frac{(x-\xi)}{r^3}\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_0} \rho \cos\varphi \sin^2\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \tag{3}$$

(funcţia ρ este presupusă continuă).

Mult mai dificilă este obţinerea formulelor (1) în cazul în care punctul A aparţine corpului considerat.

Din egalităţile (2) şi (3) rezultă

$$\iiint_{S_0} \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r} \leqslant 2\pi L r_0^2, \quad (L = \max.\ \rho), \tag{4}$$

$$\iiint_{S_0} \frac{\rho(x-\xi) dx\, dy\, dz}{r^3} \leqslant 2\pi L r_0. \tag{5}$$

Să dăm acum lui ξ creşterea h şi să considerăm punctul A_1 de coordonate $\xi + h$, η şi ζ. Notăm cu r distanţa AM de la A la un punct arbitrar $M(x, y, z)$ al corpului considerat. Notăm cu r_1 distanţa A_1M. Trebuie să arătăm că, pentru $h \to 0$, diferenţa

$$\Delta = \frac{1}{h}\left\{\iiint_D \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r_1} - \iiint_D \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r}\right\} - \iiint_D \rho \frac{x-\xi}{r^3}\, dx\, dy\, dz$$

tinde spre zero.

Izolăm din corpul considerat o sferă S_0 de rază $2h$, cu centrul în A. Δ se poate scrie

$$\Delta = \frac{1}{h}\iiint_{S_0} \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r_1} - \frac{1}{h}\iiint_{S_0} \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r} - \iiint_{S_0} \frac{\rho(x-\xi)}{r^3}\, dx\, dy\, dz +$$

$$+ \iiint_{D-S_0} \rho \left\{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) - \frac{x-\xi}{r^3}\right\} dx\, dy\, dz.$$

Cu ajutorul inegalităţilor (4) şi (5), putem evalua uşor primul şi al treilea termen $(r_0 = 2\,|h|)$

$$\frac{1}{|h|}\iiint\limits_{S_0}\frac{\rho\,dx\,dy\,dz}{r} \leqslant \frac{2\pi L(2h)^2}{|h|} = 8\pi L|h|,$$

$$\left|\iiint\limits_{S_0}\frac{\rho(x-\xi)}{r^3}\,dx\,dy\,dz\right| \leqslant 2\pi L\cdot 2|h| = 4\pi L|h|.$$

Pentru a evalua mai uşor primul termen, înconjurăm punctul A_1 cu sfera S_1 de rază $3|h|$, care conţine în întregime sfera S_0. Utilizînd din nou inegalitatea (4), obţinem

$$\frac{1}{|h|}\iiint\limits_{S_0}\frac{\rho\,dx\,dy\,dz}{r_1} \leqslant \frac{1}{|h|}\iiint\limits_{S_0}\frac{\rho\,dx\,dy\,dz}{r_1} \leqslant \frac{2\pi L(3h)^2}{|h|} = 18\pi\, L|h|.$$

În sfîrşit, introducînd funcţia

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r},$$

expresia între acolade din termenul al patrulea revine la

$$\frac{f(\xi+h, \eta, \zeta) - f(\xi, \eta, \zeta)}{h} - f'_\xi(\xi,\ \eta,\ \zeta),$$

ceea ce, în baza formulei lui Taylor, se poate înlocui cu

$$\frac{h}{2} f''_{\xi^2}(\xi + \theta h, \eta, \zeta) \quad (0 < \theta < 1).$$

Însă în cazul nostru avem

$$f''_{\xi^2} = \frac{3(x-\xi)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}$$

şi deci

$$f_{(\xi + \theta h,\ \eta,\ \zeta)} \leqslant \frac{4}{r_2^3},$$

unde r_2 este distanţa A_2M de la M la punctul A_2 de coordonate $\xi + \theta h$, η şi ζ.

Din triunghiul AMA_2 rezultă

$$A_2M > AM - AA_2.$$

Punctul M se află în afara sferei S_0 de rază $2|h|$, iar AA_2 este evident mai mică decît $|h|$, deci

$$AA_2 < \frac{1}{2}AM \text{ şi } A_2M > \frac{1}{2}AM,$$

adică

$$r_2 > \frac{1}{2}r.$$

Obţinem astfel inegalitatea

$$\left|\iiint\limits_{D-S_0}\rho\left\{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)-\frac{(x-\xi)}{r^3}\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right|\leqslant 16\,L|h|\iiint\limits_{D-S_0}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{r^3}.$$

Să considerăm acum o sferă S_1 de rază R, care să conţină în interior corpul considerat. Atunci, expresia obţinută este la rîndul ei majorată de

$$16\,L|h\iiint\limits_{S_1-S_0}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{r^3}=16\,L|h|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_{2|h|}^{R}\frac{\sin\varphi}{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta=$$

$$=64\,L|h|\;(\ln R-\ln 2|h|).$$

Avem, în sfîrşit,

$$|\Delta|\leqslant C_1|h|+C_2|h|\cdot\ln 2|h|,$$

unde C_1 şi C_2 sînt nişte constante uşor de calculat. Deci Δ tinde la zero împreună cu h şi

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\xi}=F_x.$$

În mod analog se obţin celelalte două relaţii din (1). Se poate arăta că $\frac{\partial W}{\partial \xi}$, $\frac{\partial W}{\partial \eta}$ şi $\frac{\partial W}{\partial \zeta}$ sînt funcţii continue chiar pentru puncte A aparţinînd domeniului D.

Capitolul XVIII

CURBE GENERALIZATE ŞI SUPRAFEŢE GENERALIZATE

În cele ce urmează vom folosi pentru drumuri şi pînze notaţia vectorială. Totodată, ţinînd seama că fiecare drum aparţine unei singure curbe şi fiecare pînză aparţine unei singure suprafeţe, vom reprezenta curbele prin drumuri, iar suprafeţele prin pînze. Această convenţie a mai fost dealtfel utilizată de-a lungul acestui manual. De asemenea, pentru uniformitatea scrierii şi pentru simplicitatea rezultatelor, vom considera orice curbă reprezentată printr-o aplicaţie a intervalului [0, 1] şi orice suprafaţă printr-o aplicaţie a intervalului bidimensional $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Prin definiţie, o *curbă generalizată* este un sistem finit

$$C = \{n_1 C_1, n_2 C_2, \ldots, n_k C_k\},$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_k$ sînt curbe, iar $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sînt numere întregi. În expresia $n_i C_i$, numărul n_i este un coeficient pur formal.

Facem convenţia că dacă în expresia unei curbe generalizate apare de mai multe ori aceeaşi curbă, cu diverşi coeficienţi, atunci elementele respective pot fi înlocuite printr-unul singur, reprezentat de curba respectivă, cu un coeficient egal cu suma algebrică a coeficienţilor elementelor din care el provine. De exemplu,

$$\{C_1, -C_2, 2C_2, 3C_2\} = \{C_1, 4C_2\}.$$

Dacă toţi n_i sînt egali cu zero, atunci C este, prin definiţie, *curba nulă*. În felul acesta, o curbă generalizată apare ca un obiect algebric; putem efectua cu aceste obiecte adunări şi scăderi, faţă de care curbele generalizate alcătuiesc un grup abelian. Adunarea şi scăderea se definesc efectuînd operaţiile corespunzătoare cu coeficienţii. Astfel, de exemplu, fiind date curbele C_1, C_2 şi C_3, curbele generalizate

$$\{C_1, 3C_2\},$$
$$\{C_2 - 2C_3\}$$

au ca sumă curba generalizată

$$\{C_1, 4C_2, -2C_3\},$$

iar ca diferență curba generalizată

$$(C_1, 2C_2, 2C_3).$$

În mod analog, se definește noțiunea de suprafață generalizată, ca un sistem finit

$$S = \{n_1S_1, n_2S_2, \ldots, n_kS_k\},$$

unde $S_1, S_2, \ldots, S_k$ sînt suprafețe, iar $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sînt numere întregi. Și aici, în expresia n_iS_i, numărul n este un coeficient pur formal.

Dacă în expresia unei suprafețe generalizate apare de mai multe ori aceeași suprafață, atunci elementele respective se înlocuiesc printr-unul singur, ca și la curba generalizată.

Mulțimea suprafețelor generalizate formează un grup abelian în raport cu operația de adunare.

a. Corpuri și corpuri generalizate

Prin analogie cu definițiile de mai sus, se poate defini noțiunea de *corp generalizat.* Vom numi *corp* (a nu se confunda cu noțiunea de corp din algebră) orice cuplu $\{r, I(r)\}$, unde r este o aplicație continuă a cubului unitate în spațiul cu trei dimensiuni, iar $I(r)$ este imaginea acestei reprezentări. Luînd ca model definiția echivalenței a două drumuri sau a două pînze, se poate defini echivalența a două corpuri. Vom numi corp generalizat orice sistem finit

$$K = \{n_1K_1, n_2K_2, \ldots, n_pK_p\},$$

unde $K_1, K_2, \ldots, K_p$ sînt corpuri, iar $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sînt numere întregi. În expresia n_iK_i, numărul n_i este un coeficient pur formal. Și aici se adoptă convenția făcută la curbe generalizate și la suprafețe generalizate.

Observație. În mod complet, ar fi trebuit să definim maiîntîi noțiunile de „drum generalizat“, „pînză generalizată“, „volum generalizat“ și apoi să definim curba generalizată ca o clasă de drumuri generalizate echivalente, suprafața generalizată ca o clasă de pînze generalizate echivalente, iar corpul generalizat ca o clasă de volume generalizate echivalente. Lăsăm pe seama cititorului efectuarea acestui program și stabilirea invarianților asociați relațiilor de echivalență care intervin.

b. Elemente degenerate

Vom spune că o curbă C, reprezentată prin aplicația r, este *degenerată* dacă aplicația r este constantă pe $[0, 1]$. În mod analog, vom spune că suprafața S, reprezentată prin aplicația

$$r : (u, v) \to r(u, v) \qquad (0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1),$$

este *degenerată*, dacă aplicația r este identic constantă cel puțin în raport cu una dintre cele două variabile.

În mod analog se definește noțiunea de *corp degenerat.*

În calculele pe care le vom face cu corpuri, suprafețe sau curbe, nu vom distinge între elementele care diferă doar prin elemente degenerate (elementele sînt aici curbe, suprafețe sau corpuri, după cum este cazul). De exemplu, dacă S_1 și S_2 sînt două suprafețe degenerate, atunci vom putea scrie

$$\{2S_1, S_2, -S_3\} = \{-S_3\}.$$

c. Noțiunea de bordură

Fie S o suprafață definită de aplicația

$$r : (u, v) \to r(u, v) \qquad (0 \leqslant u \leqslant 1), (0 \leqslant v \leqslant 1).$$

Să notăm prin C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ curbele definite de funcțiile $r_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$, după cum urmează:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= r(1, t), \\ r_2(t) &= r(0, t), \\ r_3(t) &= r(t, 1), \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1). \\ r_4(t) &= r(t, 0), \end{aligned} \tag{1}$$

Semnificația aplicațiilor $r_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$ este evidentă: fiecare dintre ele este restricția aplicației r la una dintre cele patru laturi ale pătratului unitate.

Prin definiție, *bordura suprafeței S* este curba generalizată notată bS și definită în felul următor:

$$bS = \{C_1, -C_2, -C_3, C_4\}. \tag{2}$$

Sensul acestei definiții nu este greu de explicat. Pentru a respecta conținutul intuitiv al noțiunii de bordură, este natural ca ea să se definească, cu ajutorul restricției aplicației r la frontiera pătratului unitate. Însă este ușor de văzut că, atunci cînd această frontieră este parcursă în sens direct, latura inferioară este parcursă în sensul abscisei crescătoare, iar latura din dreapta este parcursă în sensul ordonatei crescătoare; pe de altă parte, latura superioară este parcursă în sensul abscisei descrescătoare, iar latura din stînga este parcursă în sensul ordonatei descrescătoare. Această situație explică semnul + din fața curbelor C_1 și C_4 și semnul minus din fața curbelor C_2 și C_3.

Pentru a defini noțiunea de bordură a unei suprafețe generalizate, vom impune proprietatea de linearitate a bordurii, în felul următor.

Fie suprafața generalizată

$$S = \{n_1S_1, n_2S_2, \ldots, n_kS_k\}.$$

Bordura suprafeței generalizate S este, prin definiție, curba generalizată notată bS și dată de expresia

$$bS = \{n_1bS_1, n_2bS_2, \ldots, n_kbS_k\},$$

unde bS_i este bordura suprafeței S_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Pentru a defini bordura unui corp, procedăm în mod asemănător. Fie corpul K dat de aplicaţia continuă

$$r : (u_1, u_2, u_3) \to r(u_1, u_2, u_3), \quad (0 \leqslant u_1 \leqslant 1),$$
$$(0 \leqslant u_2 \leqslant 1),$$
$$(0 \leqslant u_3 \leqslant 1).$$

Considerînd restricţiile acestei aplicaţii la fiecare dintre cele şase feţe ale cubului unitate, obţinem suprafeţele $S_i(1 \leqslant i \leqslant 6)$ definite de aplicaţiile $r_i(1 \leqslant i \leqslant 6)$, după cum urmează:

$$\begin{aligned} S_1 &: r_1(u, v) = r(1, u, v), \\ S_2 &: r_2(u, v) = r(0, u, v), \\ S_3 &: r_3(u, v) = r(u, 1, v), \\ S_4 &: r_4(u, v) = r(u, 0, v), \\ S_5 &: r_5(u, v) = r(u, v, 1), \\ S_6 &: r_6(u, v) = r(u, v, 0). \end{aligned} \tag{3}$$

Bordura bK a corpului K este, prin definiţie, suprafaţa S definită în felul următor:

$$bK = S = \{S_1, -S_2, -S_3, S_4, S_5, -S_6\}. \tag{4}$$

Şi aici se neglijează elementele degenerate, ori de cîte ori ele apar.

Exemple

1) Fie curba definită în felul următor:

$$r(t) : \begin{cases} x = R \cos 2\pi t, \\ y = R \sin 2\pi t, \\ z = 0, \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{5}$$

Imaginea acestei curbe este cercul cu centrul în origine şi de rază egală cu R.

2) Aplicaţia

$$r(u, v) : \begin{cases} x = R\, u \cos 2\pi v, & (0 \leqslant u \leqslant 1), \\ y = R\, u \sin 2\pi v, & (0 \leqslant v \leqslant 1) \\ z = 0, \end{cases} \tag{6}$$

defineşte o suprafaţă D. Imaginea acestei suprafeţe este discul cu centrul în origine, situat în planul xOy şi avînd raza egală cu R.

Să determinăm bordura bD a suprafeţei D. În conformitate cu relaţiile (1) şi cu definiţia bordurii, avem

$$bD = \{C_1, -C_2, -C_3, C_4\},$$

unde

$$C_1 \text{ este dată de } r_1(t) = r(1, t) : \begin{cases} x = R\cos 2\pi t, \\ y = R\sin 2\pi t, \\ z = 0; \end{cases}$$

$$C_2 \text{ este dată de } r_2(t) = r(0, t) : \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0; \end{cases}$$

$$C_3 \text{ este dată de } r_3(t) = r(t, 1) : \begin{cases} x = tR, \\ y = 0, \\ z = 0; \end{cases}$$

$$C_4 \text{ este dată de } r_4(t) = r(t, 0) : \begin{cases} x = tR, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

După cum se vede, C_2 este degenerată iar C_3 coincide cu C_4, deci

$$bD = C_1.$$

Aşadar, bordura suprafeţei D este o curbă care are ca imagine cercul[1] cu centrul în origine, situat în planul xOy şi avînd raza egală cu R. Această situaţie corespunde perfect conţinutului intuitiv al noţiunii de bordură.

3) Fie suprafaţa S, definită în felul următor:

$$r(u, v) : \begin{cases} x = R\cos(2\pi v)\sin(\pi u), & (0 \leqslant u \leqslant 1), \\ y = R\sin(2\pi v)\sin(\pi u), & (0 \leqslant v \leqslant 1). \\ z = R\cos(\pi u), \end{cases} \tag{7}$$

Imaginea acestei suprafeţe este sfera cu centrul în origine şi de rază R. Să determinăm bordura suprafeţei S. Avem

$$bS = \{(C_1, -C_2, -C_3, C_4\},$$

unde

$$C_1 \text{ este dată de } r_1(t) = r(1, t) : \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = -R, \end{cases}$$

deci C_1 este degenerată;

$$C_2 \text{ este dată de } r_2(t) = r(0, t) : \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = R, \end{cases}$$

deci C_2 este degenerată;

$$C_3 \text{ este dată de } r_3(t) = r(t, 1) : \begin{cases} x = R\sin \pi t, \\ y = 0, \\ z = R\cos \pi t, \end{cases}$$

iar

$$C_4 \text{ este dată de } r_4(t) = r(t, 0) : \begin{cases} x = R \sin \pi t, \\ y = 0, \\ z = R \cos \pi t \end{cases}$$

deci C_3 coincide cu C_4.

În definitiv rezultă că, neglijînd elementele degenerate, avem

$$bS = \{-C_3, C_4\} = \{-C_3, C_3\} = \{0 \cdot C_3\} = 0,$$

în concordanță cu faptul intuitiv că o sferă nu are bordură.

4) Să considerăm un corp K definit de

$$r(u_1, u_2, u_3) : \begin{cases} x = Ru_1 \cos(2\pi u_3) \sin(\pi u_2), & (0 \leqslant u_1 \leqslant 1), \\ y = Ru_1 \sin(2\pi u_3) \sin(\pi u_2), & (0 \leqslant u_2 \leqslant 1), \\ z = Ru_1 \cos(\pi u_2), & (0 \leqslant u_3 \leqslant 1). \end{cases}$$

K este bula de rază R.

Bordura bK este dată de formula (4), unde

$$S_1 \text{ este dată de } r_1(u, v) = r(1, u, v) : \begin{cases} x = R \cos(2\pi v) \sin(\pi u), \\ y = R \sin(2\pi v) \sin(\pi u), \\ z = R \cos(\pi u), \end{cases}$$

$$(0 \leqslant u \leqslant 1, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1);$$

$$S_2 \text{ este dată de } r_2(u, v) = r(0, u, v) : \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0; \end{cases}$$

$$S_3 \text{ este dată de } r_3(u, v) = r(u, 1, v) : \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = -Ru; \end{cases}$$

$$S_4 \text{ este dată de } r_4(u, v) = r(u, 0, v) : \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = Ru; \end{cases}$$

$$S_5 \text{ este dată de } r_5(u, v) = r(u, v, 1) : \begin{cases} x = Ru \sin(\pi v), \\ y = 0, \\ z = Ru \cos(\pi v), \end{cases}$$

iar

$$S_6 \text{ este dată de } r_6(u, v) = r(u, v, 0) : \begin{cases} x = Ru \sin(\pi v), \\ y = 0, \\ z = Ru \cos(\pi v), \end{cases}$$

unde, peste tot, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$.

Constatăm că $S_5 = S_6$, iar S_2, S_3 şi S_4 sînt degenerate, deci conform relaţiei (4) avem

$$bK = S_1.$$

Însă S_1 este tocmai suprafaţa definită de (7), deci bula de rază R are ca bordură suprafaţa definită de (7). Această situaţie este în concordanţă cu accepţia intuitivă a bordurii.

5) Fie T suprafaţa numită *tor* şi definită de

$$r(u, v) : \begin{cases} x = R\cos(2\pi u) - r\sin(2\pi v)\cos(2\pi u), & (0 \leqslant u \leqslant 1), \\ y = R\sin(2\pi u) - r\sin(2\pi v)\sin(2\pi u), & (0 \leqslant v \leqslant 1), \\ z = r\cos(2\pi v), \end{cases}$$

unde $0 < r < R$.

Să determinăm bordura suprafeţei T. În baza relaţiilor (1), avem $bT = \{C_1, -C_2, -C_3, C_4\}$, unde

$$C_1 \text{ este dată de } r_1(t) = r(1, t) : \begin{cases} x = R - r\sin 2\pi t, \\ y = 0, \\ z = r\cos 2\pi t; \end{cases}$$

$$C_2 \text{ este dată de } r_2(t) = r(0, t) : \begin{cases} x = R - r\sin 2\pi t, \\ y = 0, \\ z = r\cos 2\pi t; \end{cases}$$

$$C_3 \text{ este dată de } r_3(t) = r(t, 1) : \begin{cases} x = R\cos 2\pi t, \\ y = R\sin 2\pi t, \\ z = r; \end{cases}$$

$$C_4 \text{ este dată de } r_4(t) = r(t, 0) : \begin{cases} x = R\cos 2\pi t, \\ y = R\sin 2\pi t, \\ z = r, \end{cases}$$

unde, peste tot, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Rezultă că C_1 coincide cu C_2, iar C_3 coincide cu C_4, deci

$$bT = 0.$$

Acest rezultat este în concordanţă cu aspectul intuitiv al problemei, deoarece imaginea unui tor este aceea a unui cauciuc de automobil, deci este lipsită de bordură.

d. Integrala de-a lungul unei curbe generalizate şi de-a lungul unei suprafeţe generalizate

În capitolul VIII s-a definit şi s-a studiat integrala curbilinie. Integrala de-a lungul unei curbe generalizate se defineşte imediat, impunînd condiţia de linearitate.

Fie F o funcţie vectorială, definită într-un domeniu $\hat{D}$ care conţine imaginea curbei C. Dacă P, Q şi R sînt componentele scalare ale lui F, iar f, g şi h sînt funcţiile care definesc o reprezentare parametrică a lui C, atunci, în ipoteza că integrala curbilinie

$$\int_C P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

există, ea poate fi scrisă sub formă condensată, vectorială,

$$\int_C F\,\mathrm{d}r.$$

Să ne dăm acum o curbă generalizată

$$C = \{n_1C_1, n_2C_2, \ldots, n_kC_k\}$$

şi să presupunem că funcţia vectorială F este definită într-un domeniu D care conţine imaginile tuturor curbelor $C_i(1 \leqslant i \leqslant k)$. Prin definiţie, vom spune că integrala

$$\int_C F\,\mathrm{d}r$$

există şi vom pune

$$\int_C F\cdot\mathrm{d}r = \sum_{i=1}^{k} n_i \int_{C_i} F\cdot\mathrm{d}r,$$

dacă fiecare integrală din membrul al doilea are sens. Deoarece existenţa şi valoarea unei integrale curbilinii obişnuite nu depind de alegerea parametrizării, rezultă că nici existenţa şi valoarea integralei de-a lungul unei curbe generalizate nu depind de alegerea parametrizărilor curbelor C $(1 \leqslant \leqslant i \leqslant k)$.

În ceea ce priveşte integrala relativă la o suprafaţă generalizată, vom proceda în modul următor.

Fie F o funcţie vectorială, definită şi continuă în domeniul $D \subset R^3$. Fie p o pînză definită de reprezentarea

$$r(u, v) : \begin{cases} x = f(u, v), & (0 \leqslant u \leqslant 1), \\ y = g(u, v), & (0 \leqslant v \leqslant 1), \\ z = h(u, v), & \end{cases}$$

unde f, g şi h admit derivate parţiale de primul ordin continue pe pătratul unitate şi

$$(f(u, v),\ g(u, v),\ h(u, v)) \in D \text{ pentru } 0 \leqslant u \leqslant 1 \text{ şi } 0 \leqslant v \leqslant 1.$$

Să considerăm vectorii

$$r_u = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial u}\right), \qquad r_v = \left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial v}\right).$$

Fie P, Q şi R componentele scalare ale lui F. Să punem $F(u, v) = = (P(f(u, v), g(u, v), h(u, v)), Q(f(u, v), g(u, v), h(u, v)), R(f(u, v), g(u, v), h(u, v)))$.

Fiind daţi doi vectori a şi b, vom nota prin

$$a \times b$$

produsul lor vectorial şi prin

$$a \cdot b$$

produsul lor scalar.

Amintim că, fiind daţi vectorii $a = (a_1, b_1, c_1)$ şi $b = (a_2, b_2, c_2)$, avem

$$a \cdot b = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2,$$

$$a \times b = (b_1 c_2 - c_1 b_2, c_2 a_1 - c_1 a_2, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Cu aceste notaţii, integrala funcţiei F relativă la pînza p va fi notată şi definită în modul următor:

$$\int_p F \cdot \mathrm{d}S = \iint_\Delta F(u, v) \cdot (r_u \times r_v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v,$$

unde Δ este pătratul unitate, iar integrala din membrul al doilea este o integrală dublă riemanniană. Această integrală dublă are sens, deoarece, după cum se vede uşor, funcţia scalară

$$F(u, v) \cdot (r_u \times r_v)$$

este continuă pe Δ.

Definiţia dată integralei relative la o pînză cu plan tangent continuu este corespondentul firesc, pentru pînze, al formulei de reducere a integralei curbilinii la o integrală Riemann (în cazul în care drumul considerat are tangentă continuă).

Pentru a defini integrala relativă la o suprafaţă S presupunem că, fiind date două pînze echivalente p' şi p'', definite prin funcţii r' şi r'' cu derivate parţiale de primul ordin continue pe Δ, avem:

$$\iint_\Delta F(u, v) \, (r'_u \times r'_v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \iint_\Delta F(u, v)(r''_u \times r''_v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

În baza acestei proprietăţi, putem defini integrala unei funcţii vectoriale F continue în domeniul D, relativă la o suprafaţă S cu imaginea conţinută în D, prin egalitatea

$$\int_S F \cdot \mathrm{d}s = \int_p F \cdot \mathrm{d}S,$$

unde p este o pînză a suprafeţei S. Bineînţeles, definiţia are sens pentru acele suprafeţe S care conţin cel puţin o pînză definită de funcţii cu derivate parţiale de primul ordin continue pe Δ. Despre o astfel de suprafaţă vom spune că admite plan tangent continuu.

Acum este uşor să definim noţiunea de integrală relativă la o suprafaţă generalizată

$$S = \{n_1 S_1, n_2 S_2, \ldots, n_k S_k\},$$

unde fiecare suprafaţă $S_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ admite plan tangent continuu.

Fie F o funcţie vectorială, definită şi continuă în domeniul D, care conţine imaginile tuturor suprafeţelor $S_i (1 \leqslant i \leqslant k)$. Vom pune, prin definiţie,

$$\int_S F \cdot dS = \sum_{i=1}^{k} n_i \int_{S_i} F \cdot dS.$$

Pentru cele ce urmează, este necesar să mai adoptăm cîteva notaţii şi să amintim unele noţiuni relative la vectori.

Vom însemna prin ∇ vectorul simbolic ale cărui componente sînt

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}.$$

Dacă F este o funcţie vectorială cu derivate parţiale de primul ordin continue în domeniul D, atunci convenim ca operaţiile formale cu ∇ şi F să capete următorul conţinut:

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

unde P, Q şi R reprezintă componentele scalare ale funcţiei vectoriale F.

Dacă f este o funcţie scalară cu derivate parţiale de primul ordin, atunci punem

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right),$$

unde x_1, x_2, x_3 sînt argumentele lui f.

Vom mai utiliza formula

$$(a_1 \times a_2) \cdot (b_1 \times b_2) = \det\,(a_i \cdot b_j) = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{vmatrix}$$

unde a_1, a_2, b_1 şi b_2 sînt vectori.

În sfîrşit, vom avea nevoie de formula de derivare a funcţiilor compuse. Dacă f este o funcţie de x_1, x_2, x_3, iar φ, ψ şi χ sînt funcţii de u şi v, atunci, punînd

$$r = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)),$$

$$\omega(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$

şi presupunînd că ω admite derivate parţiale de primul ordin, avem

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = (\nabla f)_{(u,v)} \cdot r_u, \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = (\nabla f)_{(u,v)} \cdot r_v,$$

$$(\nabla f)_{(u,v)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{(\varphi(u,v),\, \psi(u,v),\, \chi(u,v))}.$$

În sfîrşit, vom mai utiliza formula

$$\nabla \times fa = \nabla f \times a,$$

unde f este funcţia scalară de mai sus, iar a este un vector constant.

e. Formula lui Stokes

Teoremă. Fie S o suprafață definită de funcții cu derivate parțiale de al doilea ordin continue. Fie F o funcție vectorială definită, continuă și cu derivate parțiale de al doilea ordin continue într-un domeniu D, care conține imaginea suprafeței S. Avem

$$\int_S \nabla \times F \cdot dS = \int_C F \cdot dr, \text{ unde } C = bS.$$

D e m o n s t r a ț i e. Fie $r(u, v)(0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1)$ o funcție vectorială care definește o pînză a suprafeței S, astfel încît r să admită derivate parțiale de ordinul al doilea continue în Δ. Să presupunem că avem

$$\nabla \times F \cdot r_u \times r_v = F_u \cdot r_v - F_v \cdot r_u = (F \cdot r_v)_u - (F \cdot r_u)_v, \qquad (8)$$

egalitatea a doua fiind evidentă în baza continuității derivatelor parțiale de ordinul al doilea ale funcției r. În aceste condiții rezultă:

$$\int_S \nabla \times F \cdot dS = \iint_\Delta \nabla \times F \cdot r_u \times r_v \, du\, dv = \iint_\Delta (F \cdot r_v)_u \, du\, dv - \iint_\Delta (F \cdot r_u)_v du\, dv.$$

Folosind notația (1), avem, notînd cu $\dot{r}_i$ derivata vectorului r_i,

$$\int_S \nabla \times F \cdot dS = \int_0^1 (F(1, v) \cdot \dot{r}_1 - F(0, v) \cdot \dot{r}_2)\, dv - \int_0^1 (F(u, 1) \cdot \dot{r}_3 - F(u, 0)\dot{r}_4) \cdot du.$$

Notînd, peste tot, cu t variabila de integrare, obținem

$$\int_S \nabla \times F \cdot dS = \int_0^1 F(1, t) \cdot \dot{r}_1\, dt - \int_0^1 F(0, t) \cdot \dot{r}_2\, dt - \int_0^1 F(t, 1) \cdot \dot{r}_3\, dt +$$

$$+ \int_0^1 F(t, 0) \cdot \dot{r}_4\, dt = \int_{C_1} F \cdot dr - \int_{C_2} F \cdot dr - \int_{C_3} F \cdot dr + \int_{C_4} F \cdot dr = \int_{bS} F\, dr.$$

Teorema enunțată va fi deci demonstrată de îndată ce vom arăta că are loc prima dintre egalitățile (8).

Deoarece F intervine linear în (8), este suficient să demonstrăm prima dintre egalitățile (8) în cazul particular al unui cîmp de forma $F = fa$, unde a este un vector constant, iar f este o funcție numerică; într-adevăr, pentru o bază vectorială dată a_1, a_2, a_3, avem

$$F = f_1 a_1 + f_2 a_2 + f_3 a_3,$$

deci dacă prima dintre egalitățile (8) este stabilită pentru fiecare $f_i a_i$, atunci, ca urmare a linearității, ea va fi stabilită și pentru F.

Fie deci $F = fa$; trebuie să demonstrăm egalitatea

$$\nabla \times fa \cdot r_u \times r_v = f_u a \cdot r_v - f_v a \cdot r_u.$$

Deoarece $\triangle \times fa = \nabla f \times a$, avem

$$\triangle \times fa \cdot r_u \times r_v = \nabla f \times a \cdot r_u \times r_v.$$

Folosind egalitatea

$$a_1 \times a_2 \cdot b_1 \times b_2 = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{vmatrix},$$

rezultă

$$\nabla \times fa \cdot r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \nabla f \cdot r_u & \Delta f \cdot r_v \\ a \cdot r_u & a \cdot r_v \end{vmatrix}.$$

În sfîrşit, ţinînd seama de formula de derivare a funcţiilor compuse, obţinem

$$\nabla \times fa \cdot r_u \times r_v = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ a \cdot r_u & a \cdot r_v \end{vmatrix},$$

adică tocmai egalitatea care trebuie stabilită.

Teorema este astfel complet demonstrată.

Observaţie. Teorema de mai sus poate fi extinsă cu uşurinţă la suprafeţe generalizate.

Într-adevăr, dacă S este o suprafaţă generalizată dată de

$$S = \{n_1 S_1, n_2 S_2, \ldots, n_k S_k\},$$

atunci

$$\int_S \nabla \times F \cdot \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{k} n_i \int_{S_i} \nabla \times F \cdot \mathrm{d}S$$

şi, deoarece

$$bS = \{n_1 bS_1, \ldots, n_k bS_k\},$$

avem, în baza teoremei stabilite mai sus,

$$\int_S \nabla \times F \cdot \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{k} n_i \int_{bS_i} F \cdot \mathrm{d}r = \int_{bS} F \cdot \mathrm{d}r.$$

f. Formula lui Gauss-Ostrogradski

Vom defini mai întîi integrala pe un corp K definit de o funcţie vectorială $r(u_1, u_2, u_3)$, cu derivate parţiale de primul şi de al doilea ordin continue pe cubul unitate.

Fie f o funcţie reală definită într-un domeniu care conţine pe K. Să punem

$$r_i = \frac{\partial r}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

şi

$$(r_1, r_2, r_3) = r_1 \cdot r_2 \times r_3.$$

Prin definiţie,

$$\int_K f \,\mathrm{d}K = \iiint_{I^3} f(u_1, u_2, u_3)(r_1, r_2, r_3) \,\mathrm{d}u_1 \,\mathrm{d}u_2 \,du_3,$$

ori de cîte ori integrala triplă din membrul al doilea are sens.

Prin I^3 am notat cubul unitate.

Integrala funcţiei f relativă la un corp generalizat $K = \{n_1K_1, ..., n_pK_p\}$ există, prin definiţie, ori de cîte ori există integralele lui f relative la corpurile $K_i(i = 1, ..., p)$ şi avem, tot prin definiţie,

$$\int_K f \,\mathrm{d}K = \sum_{i=1}^{p} n_i \int_{K_i} f \,\mathrm{d}K.$$

Acum putem enunţa următoarea

Teoremă. Fie F o funcţie vectorială cu derivate parţiale continue într-un domeniu $D \subset R^3$. Fie K un corp conţinut în D şi definit de o funcţie vectorială r cu derivate parţiale de primul şi de al doilea ordin continue în I^3. În asemenea condiţii, avem

$$\int_K \nabla \cdot F \,\mathrm{d}K = \int_S F \cdot \mathrm{d}S, \text{ unde } S = bK. \tag{9}$$

Demonstraţie. Vom stabili mai întîi următoarea egalitate:

$$(r_1, r_2, r_3) \nabla \cdot F = (F_1 \cdot r_2, r_3) + (F_2, r_3, r_1) + (F_3, r_1, r_2). \tag{10}$$

Datorită faptului că F intervine linear în (10), este suficient să stabilim egalitatea (10) în cazul în care $F = fa$, unde a este un vector constant. Aşadar, avem de arătat că

$$f_{u_1}(a, r_2, r_3) + f_{u_2}(a, r_3, r_1) + f_{u_3}(a, r_1, r_2) = (r_1, r_2, r_3)a \cdot \nabla f$$

sau încă

$$f_1(r_2 \times r_3) + f_2(r_2 \times r_1) + f_3(r_1 \times r_2) = (r_1, r_2, r_3) \nabla f.$$

Vom folosi fórmula binecunoscută

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c,$$

punînd

$$a = r_1, \ b = \nabla f, \ c = r_2 \times r_3.$$

Ţinînd seamă că, în baza formulei de derivare a funcţiilor compuse , avem $f_1 = \nabla f \cdot r_1$, obţinem următoarea relaţie:

$$r_1 \times (\nabla f \times (r_2 \times r_3)) = (r_1, r_2, r_3) \nabla f - f_1(r_2 \times r_3).$$

Folosind din nou expresia de mai sus a produsului $a \times (b \times c)$, însă punînd de astă dată

$$a = \nabla f,\ b = r_2,\ c = r_3,$$

obținem

$$\nabla f \times (r_2 \times r_3) = f_3 \cdot r_2 - f_2 \cdot r_3;$$

deci

$$f_3(r_1 \times r_2) - f_2(r_1 \times r_3) = (r_1, r_2, r_3) \nabla f - f_1(r_2 \times r_3),$$

ceea ce revine, în esență, la formula (10).

Să observăm că următoarea egalitate este evidentă:

$$(F_1, r_2, r_3) + (F_2, r_3, r_1) + (F_3, r_1, r_2) = (F, r_2, r_3)_1 + (F, r_3, r_1)_2 + (F, r_1, r_2)_3.$$

De aici și din formula (10), deducem egalitatea

$$(r_1, r_2, r_3) \nabla \cdot F = (F, r_2, r_3)_1 + (F, r_3, r_1)_2 + (F, r_1, r_2)_3. \tag{11}$$

După însăși definiția integralei pe un corp K, avem

$$\int_K \nabla \cdot F \, dK = \iiint_{I^3} (r_1, r_2, r_3) \cdot \nabla \cdot F \, du_1 \, du_2 \, du_3,$$

deci, ținînd seama de (11),

$$\int_K \nabla \cdot F \, dK = \iiint_{I^3} (F, r_2, r_3)_1 du_1 \, du_2 \, du_3 + \iiint_{I^3} (F, r_3, r_1)_2 \, du_1 \, du_2 \, du_3 +$$
$$+ \iiint_{I^3} (F, r_1, r_2)_3 \, du_1 \, du_2 \, du_3.$$

Vom efectua, în prima dintre integralele triple din membrul al doilea, numai integrarea parțială în raport cu u_1; în a doua, numai integrarea parțială în raport cu u_2; în a treia, numai integrarea parțială în raport cu u_3. Obținem

$$\int_K \nabla \cdot F \, dK = \iint_{I_1^2} (F, r_2, r_3)_{u_1=1} \, du_2 \, du_3 - \iint_{I_1^2} (F, r_2, r_3)_{u_1=0} \, du_2 \, du_3 +$$
$$+ \iint_{I_2^2} (F, r_3, r_1)_{u_2=1} \, du_1 \, du_3 - \iint_{I_2^2} (F, r_3, r_1)_{u_2=0} \, du_1 \, du_3 +$$
$$+ \iint_{I_3^2} (F, r_1, r_2)_{u_3=1} \, du_1 \, du_2 - \iint_{I_3^2} (F, r_1, r_2)_{u_3=0} \, du_1 \, du_2.$$

(Prin I_i^2 s-a notat pătratul unitate din planul variabilelor u_j și u_k ($j \neq i \neq$ $\neq k, j, k = 1, 2, 3$).)

Să notăm cu u şi v variabilele de integrare în cele şase integrale duble de mai sus. În baza notaţiilor (3), avem

$$\int_K \nabla \cdot F \, dK = \iint_{I^2} F(1, u, v) r_{1u} \times r_{1v} \, du \, dv - \iint_{I^2} F(0, u, v) \cdot r_{2u} \times r_{2v} \, du \, dv +$$

$$+ \iint_{I^2} F(u, 1, v) \cdot r_{3v} \times r_{3u} \, du \, dv - \iint_{I^2} F(u, 0, v) \cdot r_{4v} \times r_{4u} \, du \, dv +$$

$$+ \iint_{I^2} F(u, v, 1) \cdot r_{5u} \times r_{5v} \, du \, dv - \iint_{I^2} F(u, v, 0) \cdot r_{6u} \times r_{6v} \, du \, dv =$$

$$= \int_{S_1} F \cdot dS - \int_{S_2} F \cdot dS - \int_{S_3} F \, dS + \int_{S_4} F \, dS + \int_{S_5} F \, dS - \int_{S_6} F \, dS =$$

$$= \int_S F \cdot d_{bK} = \int_{bK} F \cdot dS,$$

$$\text{unde } S = bK = S_1 - S_2 - S_3 + S_4 + S_5 - S_6$$

iar prin I^2 s-a notat pătratul unitate din planul variabilelor u şi v. Teorema este astfel complet demonstrată.

Observaţie. Formula (9) este valabilă şi în cazul mai general în care K este un corp generalizat (toate celelalte ipoteze din teorema de mai sus rămînînd neschimbate). Într-adevăr, fie $K = \{n_1 K_1, \ldots, n_p K_p\}$. Punînd, prin definiţie,

$$\int_K f \, dK = \sum_{i=1}^{p} n_i \int_{K_i} f \, dK_i$$

şi ţinînd seama că

$$bK = \{n_1 bK_1, n_2 bK_2, \ldots, n_p bK_p\},$$

iar integrala din membrul al doilea din (9) este de asemenea lineară, rezultă imediat valabilitatea formulei (9) pentru corpuri K generalizate.

Capitolul XIX

O GENERALIZARE A NOŢIUNII DE INTEGRALĂ DE SUPRAFAŢĂ

REGĂSIREA FORMULELOR LUI OSTROGRADSKI ŞI STOKES. APLICAŢII

În cele ce urmează, vom da o generalizare a noţiunii de integrală de suprafaţă. Pe baza noii definiţii, vom regăsi un caz particular al teoremelor lui Ostrogradski şi Stokes.

Fie p o pînză definită de aplicaţia $\bar{r}(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$, unde f, g şi h sînt funcţii reale definite şi continue pe domeniul compact D din planul Ouv. Prin ipoteză, domeniul D şi pînza p au arie.

Fie F o funcţie reală definită într-un domeniu tridimensional D, care conţine imaginea pînzei p. Fie δ o descompunere a domeniului D:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_i \cup \dots \cup D_n.$$

Vom nota cu p_i pînza definită de restricţia aplicaţiei $\bar{r}$ la domeniul compact $D_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. Să alegem în fiecare domeniu D_i cîte un punct A_i, ale cărui coordonate le vom nota cu u_i şi v_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Vom pune

$$\xi_i = f(u_i, v_i), \qquad \eta_i = g(u_i, v_i), \qquad \zeta_i = h(u_i, v_i)$$

şi vom forma suma

$$\sigma_\delta(F; \xi_i, \eta_i, \zeta_i) = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \text{ aria } p_i.$$

Să presupunem că există un număr I cu următoarea proprietate: pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta > 0$, astfel încît, oricare ar fi descompunerea δ a lui D, de normă inferioară lui η_ε, şi oricare ar fi alegerea punctelor $A_i(u_i, v_i)$ în domeniile D_i ale lui δ, să avem

$$|\sigma_\delta(F; \xi_i, \eta_i, \zeta_i) - I| < \varepsilon.$$

În aceste condiţii, spunem că *funcţia F este integrabilă pe pînza p*. Punem

$$I = \iint_{p} F(x, y, z)\, \mathrm{d}p$$

şi citim: *integrala funcţiei F pe pînza p.*

Originea fizică a acestei noţiuni este următoarea:

Să presupunem că p este o pînză materială, iar $F(x, y, z)$ reprezintă densitatea pînzei p în punctul de coordonate x, y, z (pentru definirea noţiunii de densitate se poate proceda ca şi în cazul densităţii unui fir). În aceste condiţii, dacă integrala funcţiei F pe pînza p există, ea dă masa pînzei p. Dacă $F(x, y, z)$ ar reprezenta densitatea de repartiţie a unei sarcini electrice, integrala lui F pe p ar reprezenta sarcina electrică totală, distribuită pe p.

În legătură cu integrala pe o pînză se demonstrează o serie de proprietăţi generale, ca distributivitatea, aditivitatea ca funcţie de pînză, omogenitatea etc.

Teorema de reprezentare a integralei pe o pînză printr-o integrală dublă. Păstrînd notaţiile şi ipotezele de mai sus, să presupunem, în plus, că funcţiile f, g şi h admit derivate parţiale de primul ordin continue pe D, iar integralele

$$I = \iint_p F(x, y, z)\mathrm{d}p$$

şi

$$J = \iint_D F(f(u, v), g(u, v), h(u, v)) \sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

există.

$\left(\text{Amintim că } A(u,v) = \frac{D(g, h)}{D(u, v)},\quad B(u,v) = \frac{D(h, f)}{D(u, v)},\quad C(u,v) = \frac{D(f, g)}{D(u, v)}.\right)$

În aceste condiţii avem

$$I = J.$$

Demonstraţie. În baza ipotezei de continuitate a derivatelor parţiale ale funcţiilor f, g şi h şi folosind teorema de reprezentare a ariei unei pînze printr-o integrală dublă, avem

$$\text{aria } p_i = \iint_{D_i} \sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Aplicînd teorema de medie pentru integrala dublă, obţinem existenţa unui punct $\bar{A}_i \in D_i$, astfel încît, notînd cu $\bar{u}_i$ şi $\bar{v}_i$ coordonatele lui $\bar{A}_i$, să avem

$$\iint_{D_i} \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u,v) + C^2(u, v)}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v =$$

$$= \sqrt{A^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i) + B^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i) + C^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i)} \cdot \text{aria } D_i,$$

pentru $1 \leqslant i \leqslant n$. Rezultă că, punînd

$$\bar{\xi}_i = f(\bar{u}_i, \bar{v}_i),\quad \bar{\eta}_i = g(\bar{u}_i, \bar{v}_i),\quad \bar{\zeta}_i = h(\bar{u}_i, \bar{v}_i),$$

avem

$$\sigma_\delta(F;\ \bar{\xi}_i,\ \bar{\eta}_i,\ \bar{\zeta}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F(f(\bar{u}_i, \bar{v}_i), g(\bar{u}_i, \bar{v}_i), h(\bar{u}_i, \bar{v}_i)) \sqrt{A^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i) + B^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i) + C^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i)} \cdot \text{aria } D_i =$$

$$= \sigma_\delta(\Phi;\ \bar{u}_i,\ \bar{v}_i),$$

unde

$$\Phi(u,\ v) = F(f(u,\ v),\ g(u,\ v),\ h(u,\ v)),$$

iar $\sigma_\delta = (\Phi;\ \bar{u}_i,\ \bar{v}_i)$ este o sumă riemanniană relativă la funcţia Φ, la descompunerea δ a lui D şi la punctele A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Deoarece integralele I şi J există, iar o egalitate se păstrează prin trecere la limită, rezultă că $I = J$ şi teorema este demonstrată.

Observaţie. Se poate arăta, printr-un raţionament asemănător celui de la reprezentarea lungimii unei curbe printr-o integrală Riemann, că teorema precedentă este valabilă şi fără ipoteza de existenţă a integralei I, cerînd în schimb ca F să fie continuă; în aceste condiţii, existenţa lui I rezultă din celelalte ipoteze.

Este uşor de văzut că

Dacă p şi p' sînt două pînze echivalente, iar integrala

$$\iint_p F(x,\ y,\ z)\, \mathrm{d}p$$

are sens, atunci şi integrala

$$\iint_{p'} F(x,\ y,\ z)\, \mathrm{d}p'$$

are sens, şi cele două integrale sînt egale.

Acest fapt dă posibilitatea să se definească integrabilitatea şi ıntegrala unei funcţii F pe o suprafaţă S care are arie.

Fie F o funcţie definită într-un domeniu care conţine imaginea suprafeţei S. Vom spune că *F este integrabilă pe S* dacă există o pînză p a suprafeţei S, astfel încît F să fie integrabilă pe p. Prin definiţie,

$$\iint_S F(x,\ y,\ z)\, \mathrm{d}S = \iint_p F(x,\ y,\ z)\, \mathrm{d}p.$$

a. Suprafeţe orientate

Fie S o suprafaţă cu plan tangent continuu. Vom spune că S este o *suprafaţă bilateră* dacă se poate asocia fiecărui punct $(x,\ y,\ z)$ din S un anumit sens pe normală în punctul respectiv, în aşa fel încît unghiurile

$\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$, $\gamma(x, y, z)$, făcute de sensul ales pe normală cu direcțiile pozitive ale axelor, să fie funcții continue în fiecare punct din $S - bS$.

O suprafață bilateră, împreună cu o alegere a sensului pe normală, care să asigure continuitatea funcțiilor α, β și γ, constituie o *suprafață orientată.*

Orice suprafață de forma $z = f(x, y)$, unde f are derivate parțiale continue pe domeniul d, este bilateră; alegînd în fiecare punct sensul normalei îndreptate în sus, obținem *pagina superioară* a suprafeței; alegînd în fiecare punct sensul normalei îndreptate în jos, obținem *pagina inferioară* a suprafeței.

Orice suprafață S simplă, închisă și cu plan tangent continuu este o suprafață bilateră. Într-adevăr, se poate arăta că există două domenii D_1 și D_2, D_1 fiind mărginit, iar D_2, fiind nemărginit, în așa fel încît imag. $S =$ $=$ Fr. $D_1 =$ Fr. D_2, $S \cup D_1 \cup D_2 = R^3$ și orice curbă care unește un punct din D_1 cu un punct din D_2 întîlnește suprafața S. (Corespondentul teoremei lui Jordan în spațiu.) Alegînd în fiecare punct din S sensul normalei îndreptate spre domeniul D_1, obținem *pagina interioară* a suprafeței S; alegînd în fiecare punct din S sensul normalei îndreptate spre domeniul D_2 obținem *pagina exterioară* a suprafeței S. Ca un caz particular, se obțin cele două pagini ale unei suprafețe sferice.

O suprafață nebilateră se numește *unilateră.* Un exemplu de suprafață unilateră este *banda lui Möbius*, care se construiește îndoind o foaie dreptunghiulară $ABCD$ (fig. 53) în așa fel încît vîrful A să coincidă cu C, iar vîrful D să coincidă cu B (fig. 54).

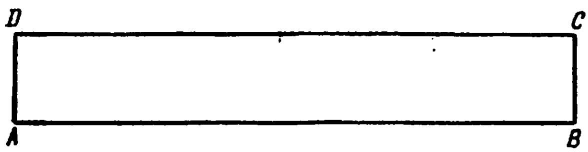


Fig. 53

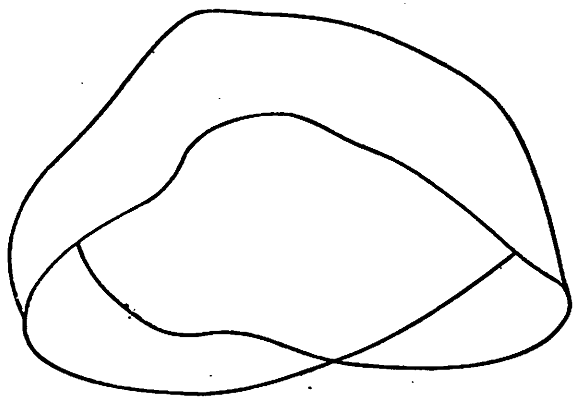


Fig. 54

b. Formula lui Ostrogradski

Ne propunem să stabilim o relaţie între integrala triplă pe un domeniu D şi integrala pe bordura domeniului D.

Fie D_z un domeniu simplu în raport cu axa Oz, definit de inegalităţile

$$\varphi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y) \qquad ((x, y) \in d),$$

unde d este un domeniu compact din planul Oxy, avînd ca frontieră imaginea unei curbe cu tangentă continuă, iar φ şi ψ sînt funcţii cu derivate parţiale continue pe d şi

$$\varphi(x, y) < \psi(x, y)$$

pentru (x, y) interior lui d.

Fie R o funcţie continuă pe un domeniu D care conţine pe D_z. Să presupunem că derivata parţială

$$\frac{\partial R}{\partial z}$$

există şi este continuă în D.

În aceste condiţii avem

$$\iiint_{D_z} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z)\, dS,$$

unde $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, S_1 este dată de $z = \varphi(x, y)$, S_2 este dată de $z = \psi(x, y)$, S_3 este o suprafaţă arbitrară, cu plan tangent, şi a cărei imagine este mulţimea punctelor ale căror coordonate x, y şi z satisfac condiţiile

$$\varphi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y),\ (x, y) \in \mathrm{Fr.}\ d,$$

iar $\gamma(x, y, z)$ este unghiul format de direcţia pozitivă a axei Oz cu normala exterioară la S în punctul (x, y, z).

Integrala pe S se ia deci pe pagina exterioară.

Demonstraţie. Integrala

$$\iiint_{D_z} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

există în baza continuităţii funcţiei de sub integrală şi a faptului că D_z, fiind un domeniu simplu, are arie. Avem

$$\iiint_{D_z} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_d dx\, dy \int_{z=\varphi(x,y)}^{z=\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz = \iint_d [R(x, y, \psi(x, y)) -$$

$$- R(x, y, \varphi(x, y))]\, dx\, dy.$$

Deoarece, pentru $(x, y, z) \in S_2$, $\gamma(x, y, z) = \gamma$ este unghiul ascuţit format de direcţia pozitivă a axei Oz cu normala la S_2 în punctul de coordonate x, y, z avem

$$\cos \gamma(x, y, z) = \cos \gamma(x, y, \psi(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}}$$

deci

$$\iint_d R(x, y, \psi(x, y))\, dx\, dy =$$

$$= \iint_d R(x, y, \psi(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2} \cos \gamma(x, y, \psi(x, y))\, dx\, dy.$$

În baza teoremei de reprezentare a integralei pe o suprafaţă printr-o integrală dublă şi ţinînd seama că integrala

$$\iint_{S_2} R(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z)\, dS$$

există ca urmare a continuităţii funcţiilor R şi $\cos \gamma$, avem

$$\iint_d R(x, y, \psi(x, y))\, dx\, dy = \iint_{S_2} R(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z)\, dS.$$

Procedînd în mod analog cu integrala dublă

$$\iint_d R(x, y, \varphi(x, y))\, dx\, dy$$

şi ţinînd seama că pe suprafaţa S_1 va trebui considerat unghiul *neascuţit* al normalei la S_1 cu direcţia pozitivă a axei Oz (pentru că alegerea sensului pe normală trebuie să corespundă paginii exterioare a lui S), notînd cu $\gamma(x, y, z)$ acest unghi neascuţit, obţinem

$$\cos \gamma(x, y, z) = \cos \gamma(x, y, \varphi(x, y)) = \frac{-1}{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^3 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}$$

deci, prin calcule similare celor de mai sus, rezultă

$$\iint_d R(x, y, \varphi(x, y))\, dx\, dy = -\iint_{S_1} R(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z)\, dS.$$

În ceea ce priveşte suprafaţa S_3, ea are plan tangent, deoarece frontiera domeniului d este imaginea unei curbe cu tangentă; notînd cu $\gamma(x, y, z)$ unghiul normalei la S_3 cu axa Oz, avem

$$\gamma(x, y, z) = \frac{\pi}{2},$$

în orice punct din S_3, deci

$$\cos \gamma(x, y, z) = 0$$

în orice punct din S_3, deci

$$\iint_{S_3} R(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z)\, \mathrm{d}S = 0.$$

Aşadar

$$\iiint_{D_z} \frac{\partial R}{\partial x} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint_{S_1} R(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z)\, \mathrm{d}S +$$

$$+ \iint_{S_2} R(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z)\, \mathrm{d}S + \iint_{S_3} R(x, y, z) \cos \gamma\, (x, y, z)\, \mathrm{d}S =$$

$$= \iint_{S} R(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z)\, \mathrm{d}S$$

şi teorema este demonstrată.

Observaţie. Se foloseşte uneori şi următoarea notaţie:

$$\iint_{S} R(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z)\, \mathrm{d}S = \iint_{S} R(x, y, z) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

În felul acesta, egalitatea din teorema precedentă devine

$$\iint_{S_z} \frac{\partial R}{\partial x} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint_{S} R(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

integrala din membrul al doilea fiind luată pe pagina exterioară a lui S.

Schimbînd, în teorema precedentă, rolurile lui x, y şi z şi anume: înlocuind pe x cu y, pe y cu z şi pe z cu x, obţinem teorema.

Fie D_z un domeniu simplu în raport cu axa Ox, definit de inegalităţile

$$u(y, z) \leqslant x \leqslant v(y, z) \quad ((y, z) \in d_1),$$

unde d_1 este un domeniu compact din planul Oyz, avînd ca frontieră imaginea unei curbe cu tangentă continuă, iar u şi v sînt funcţii cu derivate parţiale continue pe d_1 şi

$$u(y, z) \leqslant v(y, z) \quad \textit{pentru} \quad (x, y) \textit{ interior lui } d_1.$$

Fie P o funcţie continuă pe un domeniu D_1 care conţine pe D_x. Să presupunem că derivata parţială

$$\frac{\partial P}{\partial x}$$

există şi este continuă în D_1.

În aceste condiții avem

$$\iiint\limits_{D_x} \frac{\partial P}{\partial x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint\limits_{S^1} P(x, y, z) \cos \alpha(x, y, z)\, \mathrm{d}S,$$

unde $S^1 = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, S_1 *este dată de* $x = u(y, z)$, S_2 *este dată de* $x = v(y, z)$, S_3 *este o suprafață arbitrară, cu plan tangent, și a cărei imagine este mulțimea punctelor ale căror coordonate* x, y *și* z *satisfac condițiile*

$$u(y, z) \leqslant x \leqslant v(y, z),\ (y, z) \in \mathrm{Fr.}\ d_1,$$

iar $\alpha(x, y, z)$ *este unghiul format de direcția pozitivă a axei* Ox *cu normala exterioară la* S^1 *în punctul* (x, y, z). *Integrala pe* S^1 *se ia deci pe pagina exterioară.*

Se folosește și notația

$$\iint\limits_{S^1} P(x, y, z) \cos \alpha(x, y, z)\, \mathrm{d}S = \iint\limits_{S^1} P(x, y, z)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$$

deci egalitatea de mai sus se scrie

$$\iiint\limits_{D_x} \frac{\partial P}{\partial x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint\limits_{S^1} P(x, y, z)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

În sfîrșit, în condiții care se deduc din ipotezele teoremei precedente schimbînd pe x cu y, pe y cu z și pe z cu x, obținem egalitatea

$$\iiint\limits_{D_y} \frac{\partial Q}{\partial y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint\limits_{S^2} Q(x, y, z) \cos \beta(x, y, z)\, \mathrm{d}S$$

unde integrala din membrul al doilea se ia pe pagina exterioară a lui S^2, iar semnificațiile literelor D_y, Q și S^2 se deduc, prin permutări circulare, din semnificațiile literelor D_x, P și S^1 din teorema precedentă.

Se folosește și notația

$$\iint\limits_{S^2} Q(x, y, z) \cos \beta(x, y, z)\, \mathrm{d}S = \iint\limits_{S^2} Q(x, y, z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x,$$

deci egalitatea de mai sus se mai poate scrie

$$\iiint\limits_{D_y} \frac{\partial Q}{\partial y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint\limits_{S^2} Q(x, y, z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x.$$

Fie acum un domeniu compact D, simplu în raport cu fiecare dintre axele de coordonate și avînd plan tangent continuu. Fie P, Q și R trei funcții reale, continue într-un domeniu Δ care conține pe D și astfel încît derivatele parțiale

$$\frac{\partial P}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial z}$$

sînt continue în Δ. Fiecăreia dintre funcțiile P, Q și R i se aplică, în ordine, cîte una dintre cele trei teoreme precedente. Se poate arăta că cele trei pînze care conduc la suprafețele S, S^1 și S^2 sînt pînze echivalente, deci suprafețele S, S^1 și S^2 sînt identice. Adunînd membru cu membru cele trei egalități din cele trei teoreme precedente, obținem următoarea formulă, cunoscută sub numele de formula lui Ostrogradski:

$$\iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z =$$

$$= \iint_S P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma\, \mathrm{d}S,$$

unde integrala din membrul al doilea este luată pe pagina exterioară a suprafeței S.

Formula lui Ostrogradski se mai poate scrie

$$\iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint_S P(x, y, z)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + Q(x, y, z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x +$$

$$+ R(x, y, z) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

În sfîrșit, în notație vectorială, formula lui Ostrogradski se scrie

$$\iiint_D \operatorname{div.} \bar{V}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint_S \bar{V}\bar{n}\, \mathrm{d}S,$$

unde $\bar{V}(x, y, z)$ este vectorul de componente $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, $\operatorname{div} \bar{V}$ este divergența lui $\bar{V}$, iar $\bar{n}$ este vectorul de componente $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$.

Integrala din membrul al doilea al formulei lui Ostrogradski definește *fluxul cîmpului de vectori $\bar{V}$ prin suprafața S* (prin expresia „cîmpul de vectori $\bar{V}$" înțelegem funcția vectorială $\bar{V}$).

În cele ce urmează, vom spune despre un domeniu D care satisface ipotezele de validitate ale formulei lui Ostrogradski că este un domeniu *ostrogradskian.*

Un cîmp de vectori $\bar{V}$ pentru care $\operatorname{div} \bar{V}(x, y, z) = 0$ în D este, prin definiție, un *cîmp solenoidal* în D. Are loc următoarea

Teoremă. În ipotezele și cu notațiile relative la formula lui Ostrogradski, cîmpul de vectori $\bar{V}$ este solenoidal dacă și numai dacă fluxul cîmpului prin suprafața frontieră a oricărui domeniu ostrogradskian conținut în D este egal cu zero.

Demonstrație. Dacă $\operatorname{div} V(x, y, z) = 0$ în D, atunci

$$\iiint_\Delta \operatorname{div} \bar{V}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = 0,$$

oricare ar fi domeniul compact $\Delta \subset D$.

Dacă, în plus, Δ este un domeniu ostrogradskian, atunci putem aplica formula lui Ostrogradski şi obţinem

$$\iint_{S_\Delta} \bar{V}\bar{n}\, \mathrm{d}S = 0,$$

unde S_Δ are ca imagine frontiera lui Δ.

Să presupunem acum că fluxul lui $\bar{V}$ este nul prin suprafaţa frontieră a oricărui domeniu ostrogradskian din D. În baza formulei lui Ostrogradski, integrala triplă a divergenţei lui $\bar{V}$ este nulă pe orice domeniu ostrogradskian din D. Să presupunem, prin reducere la absurd, că există un punct (ξ, η, ζ) pentru care

$$\operatorname{div} \bar{V}(\xi, \eta, \zeta) \neq 0$$

şi, pentru a face o alegere, fie

$$\operatorname{div} \bar{V}(\xi, \eta, \zeta) > 0.$$

Deoarece div. $\bar{V}$ este evident, o funcţie continuă în D, rezultă că există o sferă $S(\xi, \eta, \zeta)$ cu centrul în (ξ, η, ζ), astfel încît

$$\operatorname{div} \bar{V}(x, y, z) > 0, \text{ pentru } (x, y, z) \in S(\xi, \eta, \zeta).$$

De aici rezultă că

$$\iiint_{S(\xi, \eta, \zeta)} \operatorname{div} \bar{V}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z > 0$$

şi, ţinînd seama că sfera este un domeniu ostrogradskian, inegalitatea obţinută contrazice faptul că integrala divergenţei lui $\bar{V}$ este nulă pe orice domeniu ostrogradskian. Deci presupunerea că ar exista un punct (ξ, η, ζ), pentru care div $\bar{V}(\xi, \eta, \zeta) > 0$, este falsă. În mod analog se arată că nu există nici un punct în care div $\bar{V}$ să fie negativă. Teorema este astfel complet demonstrată.

c. Formula lui Stokes

Fie S o suprafaţă definită de relaţia $z = f(x, y)$, unde f este continuă pe un domeniu compact d din planul Oxy, iar derivatele parţiale.

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

există şi sînt continue pe d. Să presupunem că bordura Γ a suprafeţei S este dată de reprezentarea parametrică

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \qquad\qquad (a \leqslant t \leqslant b), \\ z &= f(\varphi(t), \psi(t)), \end{aligned}$$

unde funcțiile φ și ψ au derivate de primul ordin continue pe $[a, b]$, iar curba γ, definită de

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t), \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

este bordura domeniului d.

Fie P, Q și R trei funcții reale definite și continue într-un domeniu D care conține suprafața S. Să presupunem că derivatele parțiale

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$$

există și sînt continue în D.

În aceste condiții, avem

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z =$$
$$= \iint_{S} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S,$$

unde integrala din primul membru corespunde sensului direct pe Γ, integrala din membrul al doilea se ia pe pagina superioară a suprafeței S, iar $\alpha = \alpha(x, y, z)$, $\beta = \beta(x, y, z)$, $\gamma = \gamma(x, y, z)$ reprezintă unghiurile făcute de direcțiile pozitive ale axelor Ox, Oy, Oz cu normala superioară la S în punctul de coordonate x, y, z.

Formula de mai sus poartă numele de „formula lui Stokes".

Demonstrație. În baza continuității funcțiilor P, Q, R și a faptului că Γ este rectificabilă, rezultă existența integralei curbilinii. În plus, avem

$$I = \int_{\Gamma} P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z =$$
$$= \int_a^b \Big\{ P(\varphi(t), \psi(t), f(\varphi(t), \psi(t)))\, \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), f(\varphi(t), \psi(t)))\psi'(t) +$$
$$+ R(\varphi(t), \psi(t), f(\varphi(t), \psi(t)))\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t \varphi'(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_t \psi'(t)\right]\Big\}\mathrm{d}t,$$

unde indicele t arată că derivata se calculează în punctul de coordonate $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $f(\varphi(t), \psi(t))$. Mai departe, avem

$$I = \int_a^b \left[P(\varphi(t), \psi(t), f(\varphi(t), \psi(t))) + R(\varphi(t), f(\varphi(t), \psi(t))) \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t\right] \varphi'(t)\mathrm{d}t +$$
$$+ \int_a^b \left[Q(\varphi(t), \psi(t), f(\varphi(t), \psi(t))) + R(\varphi(t), \psi(t), f(\varphi(t), \psi(t)))\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_t\right] \psi'(t)\mathrm{d}t.$$

Să punem

$$P^*(x, y) = P(x, y, f(x, y)) + R(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$Q^*(x, y) = Q(x, y, f(x, y)) + R(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Avem

$$I = \int_a^b [P^*(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q^*(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]\mathrm{d}t =$$

$$= \int_\Gamma P^*(x, y)\mathrm{d}x + Q^*(x, y)\mathrm{d}y,$$

integrala curbilinie de-a lungul lui Γ fiind luată în sensul direct.

Avem

$$\frac{\partial P^*}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_f + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_f \frac{\partial f}{\partial y} + \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)_f + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)_f \frac{\partial f}{\partial y}\right] \frac{\partial f}{\partial x} + R(x, y, f(x, y)) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_f + \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_f \frac{\partial f}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_f + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)_f \frac{\partial f}{\partial x}\right] \frac{\partial f}{\partial y} + R(x, y, f(x, y)) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

unde indicele f arată că derivata se calculează în punctul de coordonate $x, y, f(x, y)$.

Aplicînd formula lui Green, obţinem

$$I = \int_\Gamma P^*(x, y)\mathrm{d}x + Q^*(x, y)\mathrm{d}y = \iint_d \left[-\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_f - \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_f \frac{\partial f}{\partial y}\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y +$$

$$+ \iint_d \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_f + \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_f \frac{\partial f}{\partial x}\right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \iint_d \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_f \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_f \frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)_f \frac{\partial f}{\partial x}\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y;\right.$$

într-adevăr, ceilalţi termeni din expresia diferenţei

$$\frac{\partial Q^*}{\partial x} - \frac{\partial P^*}{\partial y}$$

se reduc, deoarece derivatele parţiale mixte ale lui f, fiind continue, sînt egale.

Avem

$$-\iint_d \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_f \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -\iint_S \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \, \mathrm{d}S,$$

$$-\iint_d \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_f \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_S \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \cos \gamma \, \mathrm{d}S.$$

Însă

$$\cos\beta = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

deci

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

de unde rezultă că

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma\,\mathrm{d}S = -\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\,\mathrm{d}S,$$

prin urmare

$$\iint_d \left[-\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_f - \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_f \frac{\partial f}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S.$$

Ţinînd seama că

$$\cos\alpha = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} = -\frac{\partial f}{\partial x}\cos\gamma,$$

rezultă

$$\iint_d \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_f + \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_f \frac{\partial f}{\partial x}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial x}\cos\alpha\right)\mathrm{d}S$$

şi

$$\iint_d \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_f \frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)_f \frac{\partial f}{\partial x}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)\mathrm{d}S.$$

Însumînd cele trei egalităţi relative la integralele pe d, se obţine imediat formula lui Stokes.

Observaţie. 1° Formula lui Stokes constituie o generalizare a formulei lui Green. Într-adevăr, dacă S are ca imagine un domeniu din planul Oxy, atunci

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}, \ \gamma = 0,$$

deci

$$\cos\alpha = \cos\beta = 0, \ \cos\gamma = 1,$$

şi integrala de suprafaţă din membrul al doilea al formulei lui Stokes devine

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dS.$$

Ţinînd seama că pe S funcţiile P, Q şi R sînt funcţii numai de x şi y, iar contribuţia termenului în dz este nulă, cum pe de altă parte Γ se confundă cu γ, obţinem

$$\int_\gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dS.$$

Am regăsit astfel formula lui Green, însă într-o nuanţă puţin diferită faţă de cea cunoscută. Într-adevăr, în membrul al doilea figurează o integrală de suprafaţă relativă la pagina superioară a lui S, în timp ce integrala dublă

$$\iint_d \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

are un caracter neorientat. Bineînţeles însă că avem

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dS = \iint_d \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

2°. Cum am mai văzut, formula lui Stokes capătă o formă mai sintetică dacă se utilizează notaţia vectorială

$$\int_\Gamma \bar{v}\, d\bar{r} = \iint_S \bar{n} \operatorname{rot} \bar{v}\, dS,$$

unde $\bar{v}$ are componentele P, Q, R, $d\bar{r}$ este un vector simbolic de componente dx, dy, dz (aşa-numitul vector al deplasării elementare), iar $\bar{n}$ şi rot. $\bar{v}$ au semnificaţiile cunoscute. Deoarece integrala din primul membru constituie circulaţia funcţiei $\bar{v}$ de-a lungul curbei Γ, rezultă că, în condiţiile în care s-a stabilit formula lui Stokes, fluxul rotorului funcţiei $\bar{v}$ prin suprafaţa S are o valoare egală cu aceea a circulaţiei lui $\bar{v}$ de-a lungul bordurii lui S. După cum vedem, formula lui Stokes furnizează condiţii în care o integrală de suprafaţă nu depinde de suprafaţă, ci numai de bordura ei.

d. Cîmpuri potenţiale

Un cîmp de vectori $\bar{v}$ se numeşte *cîmp potenţial* în domeniul D dacă

$$\operatorname{rot} \bar{v}\,(x, y, z) = 0$$

în orice punct $(x, y, z) \in D$.

Ne propunem să caracterizăm cîmpurile potenţiale. Pentru aceasta, vom numi *suprafaţă Stokes* orice suprafaţă care satisface condiţiile în care s-a stabilit formula lui Stokes. Vom numi *bordură Stokes* în D orice curbă care este bordura unei suprafeţe Stokes conţinute în D.

Teoremă. **Fie $\bar{v}$ un cîmp de vectori definit în domeniul D şi care satisface în D condiţiile în care s-a stabilit formula lui Stokes. Cîmpul $\bar{v}$ este potenţial în D dacă şi numai dacă circulaţia sa de-a lungul oricărei borduri Stokes din D este egală cu zero.**

Demonstraţie. *Condiţia este necesară.* Să presupunem că

$$\text{rot. } \bar{v}(x, y, z) \equiv 0 \text{ în } D.$$

Fie Γ o bordură Stokes în D. Există deci o suprafaţă Stokes S conţinută în D şi astfel încît

$$bS = \Gamma.$$

Avem, în baza formulei lui Stokes,

$$\int_{\Gamma} \bar{v} \mathrm{d} \bar{r} = \iint_{S} \bar{n} \text{ rot. } \bar{v} \, \mathrm{d}S = 0$$

şi necesitatea condiţiei este stabilită.

Condiţia este suficientă. Să presupunem că circulaţia lui $\bar{v}$ este egală cu zero de-a lungul oricărei borduri Stokes din D şi să admitem, prin reducere la absurd, că există un punct în D, fie el de coordonate ξ, η, ζ, pentru care

$$\text{rot. } \bar{v}\,(\xi, \eta, \zeta) \neq 0.$$

Rezultă că cel puţin una dintre diferenţele

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

este diferită de zero în punctul (ξ, η, ζ). Fie, pentru a face o alegere,

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(\xi,\eta,\zeta)} \neq 0,$$

şi, pentru a fixa ideile, să presupunem că

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(\xi,\eta,\zeta)} > 0.$$

Deoarece funcţia

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

este continuă în punctul (ξ, η, ζ), rezultă că există o sferă σ cu centrul în (ξ, η, ζ), astfel încît

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0.$$

în orice punct din σ. Fie ρ raza sferei σ.

Vom considera suprafaţa S definită în felul următor:

$$x = u,$$
$$y = v,$$
$$z = \zeta,$$

funcţiile fiind definite pe discul circular d din planul Ouv, a cărui frontieră este cercul

$$(u - \xi)^2 + (v - \eta)^2 = \rho^2.$$

Este uşor de văzut că S are ca imagine discul care se obţine intersectînd sfera σ cu planul care trece prin centrul ei şi este paralel cu planul Oxy.

Deoarece suprafaţa S este o suprafaţă Stokes conţinută în σ, avem

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0,$$

în orice punct din S.

Pe de altă parte, în punctele lui S avem $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = 0$, deci $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$. Rezultă

$$\iint\limits_S \bar{n} \operatorname{rot} \bar{v}\, dS = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dS > 0.$$

Însă, în baza formulei lui Stokes, notînd cu Γ bordura lui S, avem

$$\int\limits_\Gamma \bar{v}\, d\bar{r} = \iint\limits_S \bar{n} \operatorname{rot} \bar{v}\, dS,$$

deci

$$\int\limits_\Gamma \bar{v}\, d\bar{r} > 0,$$

în contradicţie cu faptul că circulaţia lui $\bar{v}$ a fost presupusă egală cu zero de-a lungul oricărei borduri Stokes din D.

În baza raţionamentului prin reducere la absurd, suficienţa condiţiei este stabilită.

Capitolul XX

ELEMENTE DE ANALIZĂ NESTANDARD

1. INTRODUCERE

Creatorii calculului diferențial — în special Leibniz — au pus la baza Analizei matematice noțiunea de „infinit mic" — sau de „infinitezimală" — și pe aceea de „infinit mare". Aceste noțiuni, ca și terminologia corespunzătoare, au stat timp de secole la baza tratatelor de Analiză matematică. Abia în secolul al 19-lea „infiniții mici" și „infiniții mari" încep să cedeze locul unor noțiuni și unei terminologii mai riguroase, promovate de matematicieni ca A. Cauchy, K. Weierstrass, B. Riemann și alții, care introduc limbajul epsilon-delta, atît de familiar azi oricărui student matematician și chiar elevilor de liceu. Totuși, manualele și tratatele de Analiză au întîrziat să înregistreze această versiune mai riguroasă, dar mai puțin intuitivă. Multă vreme s-a crezut că, în acest domeniu, rigoarea și intuitivitatea nu pot coexista, fiecare dintre ele impunînd compromisuri celeilalte. I-a revenit matematicianului Abraham Robinson (*Non-standard Analysis*, Proceedings of the Royal Academy of Sciences, Amsterdam, Ser. A, vol. 64, 1960, p. 432—440; a se vedea și cartea sa cu același titlu, în colecția „Studies in Logic and the Foundations of Mathematics", North Holland, Amsterdam, 1966) meritul de a arăta că este posibilă recuperarea cantităților infinitezimale și a infiniților mari, fără a se plăti tribut rigorii. Astfel a luat naștere un nou domeniu, situat la intersecția Analizei cu Algebra și cu Logica matematică: Analiza nestandard. Ne propunem să prezentăm, în cele ce urmează, unele aspecte mai elementare ale Analizei nestandard, în versiunea lui Hilbert Levitz (*Nonstandard Analysis: an Exposition*, Enseignement mathématique, vol. 20, 1974, fasc. 1—2, p. 9—32), a lui A. Robinson (cartea menționată) și aceea mai generală a lui Machover și Hirschfeld (a se vedea referința în text).

2. CÎTEVA NOȚIUNI ȘI REZULTATE PRELIMINARE

După cum se știe, mulțimea Q a numerelor raționale este înzestrată cu o operație de adunare $+$ și o operație de multiplicare, reprezentată prin $\cdot$ sau prin simplă juxtapunere, satisfăcînd următoarele proprietăți:

1. Pentru orice $a, b \in Q$, avem $a + b \in Q$, $ab \in Q$.

2. Ambele operaţii sînt comutative şi asociative: $a + b = b + a$, $ab = ba$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ şi $(ab)c = a(bc)$.

3. Operaţia de adunare are ca element neutru pe zero, iar cea de multiplicare pe unu; deci, pentru orice $x \in Q$, avem $0 + x = x$ şi $1 \cdot x = x$.

4. Are loc distributivitatea: $a(b + c) = ab + ac$. (Rezultă uşor că $0 \cdot x = 0$ pentru orice $x \in Q$).

5. Ecuaţia $a + x = b$ are soluţie în Q pentru orice $a, b \in Q$. (Soluţia ecuaţiei $a + x = 0$ e notată $-a$).

6. Ecuaţia $ax = b$ are soluţie în Q pentru orice $a, b \in Q$ cu $a \neq 0$. (Soluţia ecuaţiei $ax = 1$ e notată $1/a$).

Cele şase proprietăţi de mai sus conferă mulţimii Q calitatea de *cîmp*.

Dar mulţimea Q este înzestrată şi cu o structură de ordine, legată de operaţiile de adunare şi de multiplicare prin următoarele proprietăţi:

7. $\geqslant$ este, în Q, o relaţie de ordine.

8. Dacă $b \geqslant c$, atunci, pentru orice $a \in Q$, $a + b \geqslant a + c$.

9. $1 > 0$.

10. Dacă $b \geqslant c$ şi $a \geqslant 0$, atunci $ab \geqslant ac$.

Dacă $a \neq 0$, atunci exact unul dintre numerele a şi $-a$ este pozitiv iar celălalt negativ. Aceasta rezultă din 8 şi din definiţia relaţiei de ordine. Putem defini $|a| = \max(a, -a)$ şi avem, pentru orice a, $|a| \geqslant 0$, $|a| = |-a|$ şi, pentru orice a şi b, $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. Pentru orice a pozitiv, există n natural cu $1/n < a < n$.

Proprietăţile 7, 8, 9 şi 10 conferă cîmpului Q calitatea de *cîmp ordonat*.

O altă proprietate importantă a lui Q.

11. Dacă $a > 0$ şi $b > 0$, atunci există n natural astfel încît $na > b$.

Proprietatea 11 conferă cîmpului ordonat Q calitatea de *cîmp ordonat arhimedean*. Să observăm că proprietatea 11 este, pentru cîmpuri ordonate, echivalentă cu proprietatea: pentru orice a există un număr natural n astfel încît $n > a$.

Toate proprietăţile unui cîmp ordonat arhimedean (de la 1 la 11) se regăsesc în mulţimea R a numerelor reale, care însă este înzestrată, în plus, cu proprietatea de *completitudine* (în sensul marginii superioare):

12. Orice parte S a lui R care este majorată, admite o cea mai mică majorantă. (Amintim că S e majorată dacă admite o majorantă, adică există în R un număr x astfel încît $x \geqslant y$ pentru orice $y \in S$. Dacă, în plus, pentru orice altă majorantă x' avem $x' \geqslant x$, atunci x este cea mai mică majorantă).

Următoarele rezultate privind cîmpurile ordonate vor fi folosite în cele ce urmează:

a. Orice cîmp ordonat conţine, ca un subcîmp ordonat, mulţimea Q a numerelor raţionale.

b. Orice două cîmpuri ordonate complete sînt izomorfe în raport cu operaţiile de adunare şi multiplicare şi în raport cu relaţia $\geqslant$.

c. Orice cîmp ordonat complet R' este arhimedean; deci, pentru orice $a \in R'$ există n natural cu $n > a$.

d. Există cîmpuri ordonate care conţin mulţimea R a numerelor reale ca un subcîmp ordonat propriu.

e. Orice cîmp ordonat F care conţine pe R ca un subcîmp ordonat propriu este nearhimedean (şi deci, în virtutea lui c, necomplet).

Dintre proprietăţile de mai sus, să demonstrăm pe ultimele două.

Pentru a obţine un cîmp cu proprietăţile menţionate la punctul *d*, să considerăm cîmpul $R(X)$ al funcţiilor raţionale cu o nedeterminată şi cu coeficienţi reali. R poate fi identificată cu mulţimea funcţiilor polinomiale de gradul zero, deci R este strict conţinută în $R(X)$. Vom considera pozitivă orice funcţie raţională care se exprimă ca raportul a două funcţii polinomiale în care termenii de gradul cel mai înalt au coeficienţi pozitivi. Pentru $\alpha, \beta \in R(X)$ punem $\alpha < \beta$ dacă $\beta - \alpha$ este o funcţie pozitivă. Obţinem astfel o relaţie de ordine în $R(X)$. Proprietatea *d* este astfel complet demonstrată; dar cîmpul $R(X)$ nu va juca nici un rol special în cele ce urmează.

Pentru a stabili proprietatea *e*, vom proceda prin reducere la absurd. Fie F arhimedean. Să alegem pe α astfel încît $\alpha \in F$ şi $\alpha \notin R$. Deoarece F este arhimedean, există n natural cu $|\alpha| < n$. (Aşa cum am văzut după proprietatea 10 a unui cîmp ordonat, noţiunea de valoare absolută are sens pentru orice element al unui cîmp ordonat). Fie acum $A = \{x \in R; x \leqslant |\alpha|\}$. A admite ca majorantă pe n, deci, ca parte a lui R, care este un cîmp ordonat complet, A admite o cea mai mică majorantă $s \in R$. Avem $s \neq |\alpha|$, deoarece $|\alpha|$ nu aparţine lui A. Deci $s - |\alpha| \neq 0$ şi putem găsi, datorită faptului că F e arhimedean, un număr natural k, astfel încît

$$k > \frac{1}{|s - |\alpha||},$$

de unde rezultă alternativa

$$s - |\alpha| > \frac{1}{k} \quad \text{sau} \quad |\alpha| - s > \frac{1}{k}.$$

În primul caz avem $s - 1/k > |\alpha|$ şi, ca urmare a definiţiei lui A, rezultă că $s - 1/k$ este o majorantă reală a lui A. În plus, $s - 1/k$ este inferioară celei mai mici majorante s, ceea ce este absurd.

În cazul al doilea, avem $|\alpha| > s + 1/k$, deci $(s + 1/k) \in A$, ca urmare a definiţiei lui A. Însă, deoarece s e o majorantă a lui A, avem $s + 1/k \leqslant s$, deci $k \leqslant 0$, în contradicţie cu faptul că numărul k este natural.

3. NUMERE INFINITEZIMALE, NUMERE FINITE ŞI NUMERE INFINITE

Ne vom situa acum într-un cîmp ordonat F care conţine pe R ca un subcîmp ordonat propriu (existenţa lui F rezultă din proprietatea *d*, paragraful 2). Din proprietatea *e* rezultă că F e nearhimedean. Ca de obicei, vom nota cu N mulţimea numerelor naturale.

Un element $a \in F$ este, prin definiţie, un *număr infinit mic* sau *infinitezimal* (sau o *infinitezimală*), dacă $|a| < r$ pentru *orice* număr real pozitiv r;

un *număr finit*, dacă $|a| \leqslant r$ pentru un *anume* $r \in R$;
un *număr infinit*, dacă $|a| > r$ pentru *orice* $r \in R$.

Evident, singurul număr real infinitezimal este zero, în timp ce orice număr real este finit. Dar *există, în $F - R$, atît numere infinitezimale cît şi numere infinite*; într-adevăr, din faptul că F nu este arhimedean, rezultă că există în F un element b cu proprietatea $b \geqslant n$ pentru orice $n \in N$. De aici rezultă $b > n$ pentru orice $n \in N$, deci $b > r$ pentru orice $r \in R$. Așadar b este un număr infinit, în timp ce $1/b$ este un număr infinitezimal.

Două numere α și β din F pot să difere printr-un număr infinitezimal. În acest caz, scriem $\alpha \approx \beta$ și spunem că α este lîngă β sau că α este infinit apropiat de β. Este ușor de văzut că $\approx$ e o relație de echivalență în F, infinitezimalele formînd clasa de echivalență a lui zero.

Orice număr infinitezimal este finit. Deoarece orice număr real este finit, rezultă că suma dintre un real și un infinitezimal este un număr finit. Reciproca este și ea adevărată:

Teorema 3.1. Orice număr finit se reprezintă într-un singur fel ca sumă a unui număr real cu unul infinitezimal (Altfel spus, orice număr finit este situat lîngă un număr real unic determinat).

Demonstrație. Vom stabili mai întîi existența reprezentării, apoi unicitatea ei.

Fie α finit și fie $A = \{x;\ x \in R,\ x < \alpha\}$. Din finitudinea lui α rezultă existența unui $r \in R$ cu $\alpha < r$, deci r este o majorantă a lui A. În baza completitudinii lui R, A admite un supremum (cea mai mică majorantă) $a \in R$. Există două posibilități:

I. Există $s \in R$ cu $|\alpha - a| = s$. În acest caz, avem $\alpha = (a + s) + 0$, unde $(a + s) \in R$, deci am obținut reprezentarea dorită.

II. $|\alpha - a|$ nu este real. Pentru a arăta că $\alpha - a$ este și în acest caz un infinitezimal, vom proceda prin reducere la absurd. Să admitem deci că există $s \in R$ cu $|\alpha - a| \geqslant s > 0$. Există două posibilități: II.1. $a - \alpha > s$, deci $a - s > \alpha$, deci $a - s$ este o majorantă reală a lui A; însă a este cea mai mică majorantă a lui A, deci $a \leqslant a - s$, deci $0 \geqslant s$, în contradicție cu faptul că $s > 0$. II.2. $\alpha - a > s$, deci $\alpha > a + s$, deci $(a + s) \in A$, deci $a + s \leqslant a$ (deoarece a e o majorantă a lui A). Rezultă că $s \leqslant 0$, în contradicție cu faptul că $s > 0$.

Pentru a stabili unicitatea reprezentării, fie $r_1 + \varepsilon_1 = r_2 + \varepsilon_2$, unde $r_1, r_2 \in R$ iar ε_1 și ε_2 sînt infinitezimale. Rezultă $r_1 - r_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, deci $r_1 - r_2$ este un număr real infinitezimal; însă singurul număr de acest fel este zero, deci $r_1 = r_2$ și $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Vom da acum unele reguli de calcul cu cele trei tipuri de elemente introduse.

Teorema 3.2. Suma, diferența și produsul a două cantități finite sînt cantități finite. Suma și diferența a două cantități infinitezimale sînt infinitezimale. Produsul dintre o infinitezimală și o cantitate finită este o infinitezimală. Suma și diferența dintre o cantitate finită și una infinită sînt infinite. Produsul a două cantități infinite este infinit. Inversul unei cantități infinite este o cantitate infinitezimală. Inversul unei infinitezimale nenule este infinit.

Demonstrație. Fie a și b finite. Există deci două numere reale r_1 și r_2 cu $|a| \leqslant r_1$ și $|b| \leqslant r_2$. Rezultă $|a + b| \leqslant |a| + |b| \leqslant r_1 + r_2$, deci $a + b$ și $a - b$ sînt finite. De asemenea, $|ab| = |a| \cdot |b| \leqslant r_1 \cdot r_2$, deci ab este finit. Fie acum a și b infinitezimale. Avem $|a| < r$ și $|b| < r$ pentru orice $r \in R$, deci $|a + b| \leqslant |a| + |b| < 2r$, deci $a + b$ și $a - b$

sînt infinitezimale. Fie α o infinitezimală şi b finit. Avem $|\alpha| < r$ pentru orice $r \in R$ şi există $r_1 \in R$ cu $|b| \leqslant r_1$. Fiind dat un număr real arbitrar r', să luăm pentru r valoarea r'/r_1; avem $|\alpha b| = |\alpha| \cdot |b| < r \cdot r_1 = r_1(r'/r_1) = r'$, deci αb este o infinitezimală. Fie a finit şi β infinit; deci $|\beta| > r$ pentru orice r real şi există r_1 real cu $|a| \leqslant r_1$. Avem $|\beta + a| \geqslant ||\beta| - |a|| > > r - |a|$ şi alegînd $r > r' + r_1$ (unde r' este un număr real dat), obţinem $|\beta \pm a| > r' + (r_1 - |a|) > r'$, deci $\beta + a$ şi $\beta - a$ sînt infinite. Fie acum α şi β infinite, deci $|\alpha| > r < |\beta|$ pentru orice r real. Rezultă $|\alpha\beta| > r^2$, deci $\alpha\beta$ este infinit. Fiind dat α infinit, avem $|\alpha| > r$ pentru orice r real, deci $1/|\alpha| < 1/r$ pentru orice r real, deci $1/|\alpha| < r'$ pentru orice r' real, deci $1/|\alpha|$ este o infinitezimală. Analog se arată că inversul unei infinitezimale este infinit.

Observaţie. Din teorema 3.2 rezultă că numerele finite formează un inel iar infinitezimalele formează un ideal în acest inel.

Următoarele situaţii sînt nedeterminate: infinit $\pm$ infinit, finit $\cdot$ infinit, infinitezimal/infinitezimal, infinit/infinit, finit/finit. Operaţia $0 \cdot$ infinit *nu* e nedeterminată, ci conduce la rezultatul zero.

Teorema 3.3. Pentru orice α, β, u şi v din F astfel încît $\alpha \approx \beta$ şi $u \approx v$ avem $\alpha + u \approx \beta + v$ şi $\alpha - u \approx \beta - v$. Dacă β şi v sînt finite, avem $\alpha \cdot u \approx \beta \cdot v$. Dacă β este finit iar v nu este infinitezimal, avem $\alpha/u \approx \approx \beta/v$.

Demonstraţie. Fie $\alpha - \beta = \varepsilon_1$, $u - v = \varepsilon_2$, unde ε_1 şi ε_2 sînt infinitezimale. Avem $(\alpha + u) - (\beta + v) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ şi, conform teoremei 3.2, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ este o infinitezimală. Totodată $(\alpha - u) - (\beta - v) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ şi, conform teoremei 3.2, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ e o infinitezimală. Am stabilit astfel primele două echivalenţe. Mai departe, să observăm că, dacă α şi u sînt finite, atunci din $\alpha - \beta = \varepsilon_1$ rezultă $\alpha = \beta + \varepsilon_1$ iar din $u - v = \varepsilon_2$ rezultă $u = v + \varepsilon_2$ (fără ipoteza de finitudine nu putem considera sumele $(\alpha - \beta) + \beta$ şi $(u - v) + v$, deoarece există pericolul ca ambii termeni ai sumei să fie infiniţi, deci expresiile obţinute să fie nedeterminate). Avem deci $\alpha u = \beta v + \beta\varepsilon_2 + v\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2$, unde αu are sens în virtutea teoremei 3.2, βv este, în baza aceleiaşi teoreme, finit, iar ceilalţi trei termeni din membrul al doilea sînt infinitezimale (în baza teoremei 3.2), deci $\beta\varepsilon_1 + v\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ este o infinitezimală şi $\alpha u \approx \beta v$.

Pentru a stabili ultima echivalenţă, trebuie să arătăm că

$$\frac{\beta + \varepsilon_1}{v + \varepsilon_1} - \frac{\beta}{v} = \frac{\beta}{v + \varepsilon_2} - \frac{\beta}{v} + \frac{\varepsilon_1}{v + \varepsilon_2}$$

este o infinitezimală. Din faptul că v nu e infinitezimal rezultă că $v + \varepsilon_2$ nu e infinitezimal. Dacă v e finit, există o infinitezimală ε_3 şi un număr real r astfel încît $v = r + \varepsilon_3$ (conform teoremei 3.1). Deci (punînd $\varepsilon = \varepsilon_3 + \varepsilon_2$ şi aplicînd teorema 3.2) există r_1 real astfel încît

$$\frac{1}{|v + \varepsilon_2|} = \frac{1}{|r + \varepsilon_3 + \varepsilon_2|} = \frac{1}{|r + \varepsilon|} < r_1$$

de unde rezultă că $1/(v + \varepsilon_2)$ este un număr finit. Dacă v este infinit, atunci $v + \varepsilon_2$ e infinit iar $1/(v + \varepsilon_2)$ e o infinitezimală (conform teoremei 3.2), deci nu un număr finit. Rezultă că, în orice caz, $1/(v + \varepsilon_2)$ e finit. Deci $\varepsilon_1/(v + \varepsilon_2)$, ca produs între o infinitezimală şi un număr finit, este o infinitezimală (teorema 3.2). Mai rămîne să arătăm că diferența primilor doi termeni din membrul al doilea este o infinitezimală. Avem

$$\frac{\beta}{v+\varepsilon_2} - \frac{\beta}{v} = \beta\left(\frac{1}{v+\varepsilon_2} - \frac{1}{v}\right) = \beta\,\frac{-\varepsilon_2}{(v+\varepsilon_2)v}$$

dacă v e finit, ultima expresie fiind produsul dintre infinitezimala ε_2 și un număr finit, deci (conform teoremei 3.2) o infinitezimală. Dacă v este infinit, atunci, conform teoremei 3.2, atît $\beta/(v+\varepsilon_2)$ cît și β/v sînt infinitezimale, deci și diferența lor e o infinitezimală.

4. NUMERE, FUNCȚII ȘI RELAȚII NESTANDARD

Fiind dat un număr finit α, numim *partea standard* a lui α — notată cu $\underline{\alpha}$, numărul real (unic determinat prin teorema 3.1) lîngă care se află α. Este ușor de văzut că pentru orice numere finite α și β avem $\underline{\alpha+\beta} = \underline{\alpha} + \underline{\beta}$, $\underline{\alpha-\beta} = \underline{\alpha} - \underline{\beta}$, $\underline{\alpha\cdot\beta} = \underline{\alpha}\cdot\underline{\beta}$ și, dacă β nu este un infinitezimal, $\underline{\alpha/\beta} = \underline{\alpha}/\underline{\beta}$. Faptele prezentate pînă aici au fost cunoscute mult timp înainte de 1960. Abia de aici înainte urmează partea esențială a Analizei nestandard. Este vorba în primul rînd de o teoremă datorată lui A. Robinson, care aduce precizări asupra mulțimilor în care pot fi găsite infinitezimale nenule, numere infinite și numere finite nereale. Această teoremă, avîndu-și originea în Logica matematică, este următoarea:

Teorema 4.1. (A. Robinson). **Există o mulțime R* cu următoarele proprietăți:**

1. R **este o submulțime strictă a lui** R^*.

2. Fiecărei aplicații f **a lui** R^n **în** R ($n \geqslant 1$) **îi corespunde o funcție** f^* **a lui** $(R^*)^n$ **în** R^*, **care coincide cu** f **pe** R^n.

3. Fiecărei relații n**-are** A **în** R ($n \geqslant 1$) **îi corespunde o relație** n**-ară** A^* **în** R^* **care coincide cu** A **pe** R. **Relației de egalitate în** R **îi corespunde relația de egalitate în** R^*.

4. Orice enunț $\mathcal{S}$ **formulat în termeni de:** *(i)* **anumite numere reale** *(fixate)*; *(ii)* **anumite funcții reale** *(fixate)*; *(iii)* **anumite relații în** R *(fixate)*; *(iv)* **anumite variabile cu valori în** R; *(v)* **anumiți cuantificatori și anumite operații logice, este adevărat în raport cu** R **dacă și numai dacă este adevărat, în raport cu** R^*, **enunțul** $\mathcal{S}^*$ **obținut din** $\mathcal{S}$ **prin înlocuirea fiecărei funcții** $f(x_1, \ldots, x_n)$ **cu funcția corespunzătoare** $f^*(x_1, \ldots, x_n)$, **prin înlocuirea fiecărei relații** $A(x_1, \ldots, x_n)$ **cu relația corespunzătoare** $A^*(x_1, \ldots, x_n)$ **și prin extinderea variabilelor de la punctul** *(iv)* **de la** R **la** R^*.

Înainte de a demonstra această teoremă, să facem cîteva observații.

Se poate arăta că mulțimea R^*, a cărei existență este afirmată în teorema 4.1, nu este unic determinată. Putem presupune că, de aici înainte, ne fixăm atenția asupra uneia dintre ele, de exemplu aceea care apare în demonstrația de mai jos a teoremei 4.1. Mai este poate necesară o indicație asupra sensului în care se folosește termenul *enunț* (la punctul 4 al teoremei 4.1). În terminologia logicii formale, este vorba aici de anumite enunțuri constînd în formule închise corect formate ale unui limbaj generalizat de primul ordin; dar două exemple și altele care vor urma vor fi edificatoare (precizăm că lucrăm numai cu enunțuri de lungime finită).

Exemplul 4.1. Fie enunțul $(\forall x)\ (0 + x = x)$ adevărat pentru $x \in R$; prin teorema 4.1, același enunț rămîne adevărat cînd $+$ se înlocuiește cu operația $+^*$ în R^* iar x parcurge pe R^*.

Exemplul 4.2. Fie f o aplicație a lui R pe R. Enunțul $(\forall y)\ (\exists x)\ (f(x) = y)$ este adevărat pentru $x,\ y \in R$. Prin teorema 4.1, același enunț rămîne adevărat cînd x și y parcurge pe R^* iar f se înlocuiește cu funcția asociată f^*; deci f^* e o aplicație a lui R^* *pe* R^*.

Convenim să spunem despre un enunț că este adevărat în R dacă el este adevărat cînd variabilele parcurg pe R.

Elementele din R sînt *numere standard* iar cele din $R^* - R$ sînt *numere nestandard*. Aplicațiile lui R^n în R $(n \geqslant 1)$, relațiile în R și submulțimile lui R vor fi, respectiv, *funcții standard, relații standard* și *submulțimi standard*. Deci numerele standard se confundă cu numerele reale.

Enunțurile care fac obiectul teoremei 4.1 (punctul 4) sînt *enunțuri admisibile*. Se poate proba caracterul admisibil al fiecărei axiome din definiția cîmpurilor ordonate (a se vedea paragraful 2). Aceste axiome sînt enunțuri adevărate în R, deoarece R este un cîmp ordonat. Din teorema 4.1 rezultă că ele rămîn adevărate în R^* dacă $+$, $\times$ și $<$ sînt înlocuite, respectiv, cu operațiile în R^*: $+^*$, $\times^*$, $<^*$; deci în raport cu aceste operații R^* e un cîmp ordonat care conține pe R ca un subcîmp propriu, deoarece operațiile din R^* coincid, în R, cu $+$, $\times$ și $<$. În virtutea teoremei 2.1, R^* nu e arhimedean și nu e complet.

Demonstrația teoremei 4.1. Notînd ca de obicei cu N mulțimea numerelor naturale, să considerăm inelul $R(N)$ al aplicațiilor lui N în R. Submulțimea $F(N)$ a lui $R(N)$ a aplicațiilor cu suport finit (adică nule pe complementara unei mulțimi finite) formează un ideal în $R(N)$, cu alte cuvinte $F(N)$ este un subgrup aditiv (deoarece diferența a două funcții din $F(N)$ e tot o funcție din $F(N)$) iar produsul dintre o funcție din $F(N)$ și una din $R(N)$ este o funcție din $F(N)$. Conform lemei lui Zorn, există în $R(N)$ un ideal maximal M care conține pe $F(N)$. În baza unei cunoscute teoreme din Algebră, factorizarea lui $R(N)$ prin idealul maximal M conduce la un corp R^*; dealtfel, acest fapt poate fi verificat și direct. Acest corp conține (strict) pe R, deoarece există aplicația injectivă naturală a lui R în R^*, care nu este o aplicație surjectivă; într-adevăr, clasa aplicației identice $f: N \to R$ definită prin $f(n) = n$ pentru orice $n \in N$ nu are preimagine. Rezultă din teorema 2.1 că R^* nu e arhimedean și nu e complet; R^* satisface toate condițiile stipulate în enunțul teoremei 4.1.

Observații. Ideea demonstrației teoremei 4.1 aparține lui Cristian Calude. (Hilbert Levitz enunță teorema fără demonstrație).

Corpul R^* care apare în demonstrație poate fi introdus într-o ordine de idei asemănătoare aceleia folosite în trecerea de la corpul Q al numerelor raționale la corpul R al numerelor reale. Așa cum un număr real este o clasă de șiruri echivalente de numere raționale, un număr din R^* este o clasă de șiruri echivalente de numere reale. Apare o deosebire în definirea relației de echivalență, în sensul că, în timp ce două șiruri de numere raționale sînt echivalente dacă ele diferă printr-un șir care tinde la zero, două șiruri de numere reale sînt considerate echivalente dacă diferă printr-un șir din M. Această modificare a relației de echivalență este necesară datorită faptului că, după cum se știe, prin repetarea, în R, a procedeului care ne transferă din Q în R, nu realizăm nici un progres, ci regăsim același corp R.

Suficientă din punctul de vedere al Analizei matematice, demonstrația de mai sus eludează unele aspecte logice importante ale teoremei lui A. Robinson, pentru a căror punere în evidență ar fi însă necesare considerații care depășesc cadrul și spiritul cărții de față. A se vedea, în acest sens, cartea lui A. Robinson *Non-Standard Analysis*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North Holland, Amsterdam, 1966.

Faptul că R^* nu este complet pune în evidență natura logică esențial diferită a proprietății de completitudine în raport cu proprietățile de definiție ale cîmpurilor ordonate. Într-adevăr, condiția de completitudine „Orice parte majorată, nevidă, a lui R admite un supremum“ conține o variabilă care parcurge o familie de părți ale lui R, în timp ce în enunțurile admisibile (adică în cele care fac obiectul teoremei 4.1 a lui Robinson) orice variabilă parcurge obligatoriu nu o familie de părți ale lui R, ci o parte a lui R.

În ceea ce privește axioma lui Arhimede, rațiunea profundă a invalidării ei în R^* este de o altă natură. Dacă notăm cu $N(y)$ enunțul „y este un număr natural“, faptul că R e arhimedean revine la enunțul admisibil $(\forall x)\ (\exists y)\ (N(y) \wedge x < y)$, de unde rezultă că enunțul $(\forall x)\ (\exists y)\ (N^*(y) \wedge x <^* y)$ este adevărat în R^*, *dar din el nu rezultă că R^* e arhimedean.* Într-adevăr, elementul y a cărui existență este afirmată aici și pentru care $N^*(y)$ poate fi un număr nestandard, adică situat în $R^* - R$. Dacă însă — așa cum de fapt se și procedează — cerem în definiția proprietății de a fi arhimedean apartenența lui y la N, atunci R^* nu este arhimedean.

Să mai observăm, în sfîrșit, că datorită utilizării lemei lui Zorn, R^* nu are o existență efectivă.

5. NUMERE NATURALE INFINITE

În cele ce urmează, pentru a nu încărca noțiunile, vom renunța uneori să mai notăm cu * enunțurile din R^*, dacă din context va rezulta clar că este vorba de astfel de enunțuri. De exemplu, dacă vrem să spunem că enunțul $(\forall x)\ (\forall y)\ (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$ este adevărat în R^*, atunci e de la sine înțeles că $<$ se interpretează ca $<^*$, f ca f^* iar x și y parcurg pe R^*.

Fie S o parte fixată a lui R. Putem interpreta pe S ca o relație unară $S(x)$, care are loc pentru x dacă $x \in S$; deci $S = \{x \in R;\ S(x)\}$. Putem defini acum $S^* \subseteq R^*$ prin $S^* = \{x \in R^*;\ S^*(x)\}$. Deoarece $S^*(x)$ coincide cu $S(x)$ pe R, avem $S \subseteq S^*$. Vom scrie uneori $x \in S$ în loc de $S(x)$ și $x \in S^*$ în loc de $S^*(x)$. Teorema 4.1 ne asigură, pentru orice $S \subseteq R$, de existența extensiei S^*. Putem admite ca enunțuri admisibile pe acelea care conțin fragmentul $x \in S$; în transferarea enunțurilor de la R la R^* înlocuim fragmentul $x \in S$ prin $x \in S^*$. Prin aceasta nu am încălcat cerinţa ca în enunţurile admisibile să intre numai variabile care parcurg părţi ale lui R. Într-un enunţ *dat*, funcţiile, relaţiile şi submulţimile trebuie să rămînă *fixe*.

Exemplul 5.1. Fie $S = \{x \in R;\ x < 6\}$. Enunţul $(\forall x)\ (x \in S \Leftrightarrow x < 6)$ este adevărat în R, deci enunţul $(\forall x)\ (x \in S^* \Leftrightarrow x <^* 6)$ este adevărat în R^*. Rezultă că $S^* = \{x \in R^*;\ x <^* 6\}$. Extensia S^* a lui S este proprie, deoarece, pentru orice infinitezimală ε, numărul $5 + \varepsilon$ aparţine lui S^*, dar, nefiind un număr standard, nu poate aparţine lui S.

Se poate arăta că pentru orice mulţime finită $T \subseteq R$ avem $T = T^*$. Într-adevăr, fie $T = \{a_1, ..., a_n\}$. Enunţul $(\forall x)\ (x \in T \Leftrightarrow [x = a_1 \vee x = a_2 \vee ... \vee x = a_n])$ e adevărat în R, deci enunţul $(\forall x)\ (x \in T^* \Leftrightarrow [x \in a_1 \vee x = a_2 \vee ... \vee x = a_n])$ e adevărat în R^*, cu alte cuvinte $T^* = \{a_1, ..., a_n\}$.

Teorema 4.1 nu menţionează funcţii f definite pe o parte proprie D a lui R. Putem însă, şi pentru o astfel de funcţie, să definim o funcţie $f^*: D^* \to R^*$ în modul următor: Prelungim, în mod arbitrar, pe f la o funcţie g definită pe R, apoi definim pe f^* ca restricţie a lui g^* la D^*. Definiţia aceasta este independentă de modul în care prelungim pe f la g.

Deoarece, aşa cum am văzut, putem asocia fiecărei părţi $S \subseteq R$ o extensie $S^* \subseteq R^*$, vom considera acum cazul particular $S = N$ (mulţimea numerelor naturale). Extensia N^* conţine şi numere nestandard. Într-adevăr, enunţul „N este nemărginită" e adevărat în R şi poate fi formulat ca un enunţ admisibil: $(\forall x)\ (\exists y)\ (y \in N \wedge y > x)$; deci $(\forall x)\ (\exists y)\ (y \in N^* \wedge y > x)$ este un enunţ adevărat în R^*, care afirmă că N^* e o parte nemărginită a lui R^*. Alegînd un element infinit α din R^*, N^* va trebui să conţină un element care majorează pe α, deci care, cu atît mai mult, va fi un element nestandard infinit. De fapt, *orice* element nestandard din N^* este infinit. Într-adevăr, putem formula ca enunţ admisibil oricare din următoarea listă infinită de enunţuri: 1) Toate numerele naturale sînt mai mari ca 0; 2) Nu există nici un număr natural strict cuprins între 0 şi 1; 3) Nu există nici un număr natural strict cuprins între 1 şi 2; ...; n) Nu există nici un număr natural strict cuprins între $n - 2$ şi $n - 1$; ... Oricare dintre aceste enunţuri va fi adevărat în R^* cînd înlocuim pe N cu N^*, deci oricare element din $N^* - N$ va fi mai mare decît orice număr real. Această situaţie ne îndreptăţeşte să numim elementele nestandard din N^* *numere naturale infinite.*

Datorită faptului că orice element din N are un succesor imediat rezultă că orice număr natural infinit are un succesor imediat în N^* şi un predecesor infinit imediat în N^*. Dar N^* nu este bine ordonată, deoarece, fiind dat un număr natural infinit α, în şirul descendent $\alpha > \alpha - 1 > \alpha - 2 > ...$ nu există un cel mai mic element. S-ar putea crede că buna ordonare a lui N^* ar putea fi dedusă din buna ordonare a lui N; dar această din urmă proprietate revine la enunţul „Orice parte nevidă a lui N conţine un cel mai mic element", care nu este admisibil, deoarece conţine o variabilă care parcurge *nu* o parte a lui N, ci o familie de părţi ale lui N. În schimb, concepte ca „număr par", „număr impar", „număr prim" îşi păstrează sensul pentru numere naturale infinite; de exemplu, dacă $E \subseteq N$ este mulţimea numerelor prime, atunci E^* este mulţimea numerelor prime din N^*. După cum se va vedea mai tîrziu, N^* este nenumărabilă.

Vom trece acum la prezentarea, în R^*, a conceptelor de bază ale Analizei matematice. Definiţia uzuală — în termeni de ε — δ — pentru $\lim f(x)=L$ cînd $x \to c$ revine la a spune că dacă x este infinit apropiat de (dar nu egal cu) c, atunci $f(x)$ este infinit apropiat de L. Acest din urmă limbaj îşi păstrează sensul şi în raport cu funcţia f^*; mai mult, după cum arată teorema care urmează, obţinem astfel o caracterizare corectă a limitei unei funcţii într-un punct.

Teorema 6.1. Fie f o funcţie standard definită pe un interval deschis standard (a, b), avînd pe c ca punct interior. Dacă L este un număr real standard, atunci (a) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ dacă şi numai dacă din $c \neq x \approx c$ rezultă $f(x) \approx L$; (b) f este continuă în c dacă şi numai dacă din $x \approx c$ rezultă $f(x) \approx f(c)$.

Demonstraţie. În consideraţiile care urmează nu se va produce nici o confuzie dacă vom omite semnul *. Să observăm mai întîi că (b) rezultă imediat din (a), deci e suficient să stabilim pe (a).

Pentru a stabili implicaţia $\Rightarrow$ din (a), să presupunem că $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$. Fie x_0 astfel încît $c \neq x_0 \approx c$. Trebuie să arătăm că $f(x_0) - L$ e o infinitezimală, deci că $| f(x_0) - L | < \varepsilon$ pentru orice ε real pozitiv. Fie ε_0 un număr real pozitiv, ales arbitrar, dar fixat. Trebuie să arătăm că enunţul (1) $| f(x_0 - L | < \varepsilon_0$ este adevărat în R^*. Conform definiţiei limitei, există un număr real pozitiv δ pentru care din $0 < | x - c | < \delta$ rezultă $| f(x)-L|<\varepsilon_0$. Fie δ_0 un δ cu această proprietate. Rezultă că enunţul $(\forall x)$ $(0<|x-c|<\delta_0\Rightarrow$ $| f(x) - L | < \varepsilon_0)$ e adevărat în R, deci e adevărat şi în R^*. În particular, enunţul (2) Din $0 < | x_0 - c | < \delta$ rezultă $| f(x_0) - L | < \varepsilon_0$ este adevărat în R^*. Ştim însă că pentru $c \neq x_0 \approx c$ avem $0 < | x_0 - c | < r$ oricare ar fi r real pozitiv; deci, în particular, avem $0 < | x_0 - c | < \delta_0$ în R^*. Din aceasta şi din (2) rezultă $| f(x_0) - L | < \varepsilon_0$, adică tocmai enunţul (1) care trebuia stabilit.

Pentru a stabili implicaţia $\Leftarrow$ din (a), argumentul este diferit. Anume, presupunem că (3) Din $c \neq x \approx c$ rezultă $f(x) \approx L$. Fie ε_0 un număr real pozitiv arbitrar, dar fixat. Trebuie să arătăm că enunţul

$$(\exists \delta)\ (\delta > 0 \wedge (\forall x)\ [0 < | x - c | < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon_0])$$

este adevărat în R. Deoarece acest enunţ e admisibil, este suficient să arătăm că el rămîne adevărat în R^*. Ca enunţ relativ la R, el afirmă existenţa unui număr real δ cu anumite proprietăţi. Pentru a arăta că el este adevărat în R^*, putem alege pe δ în aşa fel încît să fie o infinitezimală pozitivă. De fapt, vom arăta că *orice* infinitezimală pozitivă poate îndeplini rolul lui δ. Într-adevăr, fie δ_0 o infinitezimală pozitivă. Trebuie să arătăm că enunţul

$$(\forall x)\ [0 < | x - c | < \delta_0 \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon_0]$$

e adevărat în R^*. Fie x_0 arbitrar în R^*; trebuie să arătăm că (4) Din $0 < | x_0 - c | < \delta_0$ rezultă $| f(x_0) - L | < \varepsilon_0$. Să presupunem deci că (5) $0 < | x_0 - c | < \delta_0$. Deoarece δ_0 e infinitezimal, din (5) rezultă că $c \neq x_0 \approx c$;

însă în aceste condiţii, ţinînd seamă de (3), rezultă $f(x_0) \approx L$, deci $f(x_0) - L$ e o infinitezimală. Deoarece ε_0 e real pozitiv, rezultă (4).

Exemplul 6.1. Pentru a arăta că prin compunerea a două funcţii continue se obţine o funcţie continuă putem folosi procedeul tradiţional, dar următorul procedeu „nestandard" este mai direct şi mai intuitiv. Fie g continuă în c şi f continuă în $g(c)$. Fie $x \approx c$. Deoarece g e continuă în c, avem $g(x) \approx g(c)$. Deoarece f e continuă în $g(c)$, rezultă $f(g(x)) \approx f(g(c))$. Pentru funcţii definite nu pe un interval, ci pe o mulţime S, modificări adecvate în raţionamentul de mai sus conduc la

Teorema 6.2. Funcţia standard f definită pe mulţimea standard S este continuă în punctul standard c dacă şi numai dacă pentru orice punct x din S^* infinit apropiat de c avem $f(x) \approx f(c)$.

Noţiunea de funcţie mărginită comportă o foarte utilă caracterizare nestandard, după cum rezultă din teorema următoare (prin mărginirea unei funcţii înţelegem existenţa unei margini standard).

Teorema 6.3. Funcţia standard f este mărginită pe mulţimea standard S dacă şi numai dacă $f^*(x)$ este un număr finit pentru orice x din S^*.

D e m o n s t r a ţ i e. Pentru a stabili implicaţia $\Rightarrow$, fie f mărginită pe S. Există deci un număr standard r_0 pentru care enunţul $(\forall x)\ (x \in S \Rightarrow \Rightarrow |f(x)| \leqslant r_0)$ este adevărat în R, deci şi în R^*. Aşadar, pentru $x_0 \in S^*$ avem $|f^*(x_0)| \leqslant r_0$, deci $f^*(x_0)$ este finit.

Pentru a stabili implicaţia $\Leftarrow$, să presupunem că $f^*(x)$ e finit pentru orice x din S^*. Urmează să arătăm că enunţul (6) $(\exists t)\ (\forall x)\ (x \in S \Rightarrow \Rightarrow |f(x)| \leqslant t)$ este adevărat în R. Pentru aceasta, va fi suficient să arătăm că (6) e adevărat în R^*; însă în R^* putem lua ca t orice număr pozitiv infinit. Deoarece $f^*(x)$ e finit, vom avea $|f^*(x)| \leqslant t$ pentru orice x din S^*, cu alte cuvinte enunţul (6) e adevărat în R^*.

Pentru a trece la teorema următoare, care stabileşte, printr-o demonstraţie nestandard, un rezultat clasic din Analiza standard, să observăm mai întîi că dacă $[c, d]$ e un interval închis standard, atunci $[c, d]^*$ e intervalul închis $\{x \in R^*;\ c \leqslant x \leqslant d\}$; într-adevăr, enunţul

$$(\forall x)\ (x \in [c, d] \Leftrightarrow (c \leqslant x \wedge x \leqslant d))$$

e adevărat în R, deci e adevărat şi în R^*. O situaţie asemănătoare are loc şi pentru celelalte tipuri de intervale.

Teorema 6.4. Dacă funcţia standard f este continuă în fiecare punct al intervalului standard închis $[c, d]$, atunci f este mărginită pe $[c, d]$.

D e m o n s t r a ţ i e. În baza teoremei precedente, va fi suficient să arătăm că $f^*(x)$ este finit pentru orice x din $[c, d]^*$. Un astfel de x este finit şi, în baza teoremei 3.1, el este infinit apropiat de un punct standard x_0; acest x_0 aparţine lui $[c, d]$. În baza proprietăţii de continuitate, avem $f^*(x) \approx \approx f(x_0)$. Deoarece f este o funcţie standard, $f(x_0)$ este finit, iar $f^*(x)$ este de asemenea finit, fiind infinit apropiat de $f(x_0)$.

Se ştie că teorema 6.4 nu e adevărată pentru intervale deschise. Încercarea de a o demonstra în aceste condiţii ar eşua în momentul în care ar trebui arătat că x_0 aparţine lui (c, d), deoarece se poate întîmpla ca x_0 să fie o extremitate a intervalului (c, d).

Deoarece, în demonstraţia de mai sus, nu s-a folosit, din ipoteza de „interval închis", decît faptul că orice punct din $[c, d]^*$ este infinit apropiat de un anume punct din $[c, d]$, teorema 6.4 poate fi generalizată prin înlocuirea lui $[c, d]$ cu o mulţime S cu aceeaşi proprietate, anume: (7) „Orice punct din S^* este infinit apropiat de un anume punct din S." Vom arăta acum că proprietatea (7) este o condiţie necesară ca *orice* funcţie continuă pe S să fie mărginită. Să presupunem deci că (7) nu are loc şi să arătăm că există o funcţie continuă pe S care ia o valoare infinită într-un punct din S^*; va rezulta astfel că funcţia nu este mărginită pe S. Din falsitatea lui (7) rezultă existenţa unui x_0 în S^*, astfel încît, pentru orice $y \in S$, x_0 nu e infinit apropiat de y. Dacă x_0 este infinit, atunci $f(x) = x$ e o funcţie continuă cu valoare infinită în $x = x_0$. Dar, dacă x_0 ar fi finit, atunci x_0 ar fi infinit apropiat de un anume număr standard y_0, care nu aparţine lui S, deoarece (7) nu are loc. Deci funcţia $f(x) = 1/(x - y_0)$ este continuă pe S (numitorul nu se poate anula pentru x în S, deoarece y_0 nu aparţine lui S); în plus, $f(x_0)$ este infinit, deoarece $x_0 - y_0$ este o infinitezimală nenulă.

Se ştie că pentru ca orice funcţie reală definită şi continuă pe o mulţime reală S să fie mărginită este necesar şi suficient ca S să fie compactă. Din consideraţiile de mai sus rezultă că condiţia (7) este şi ea necesară şi suficientă, deci au loc următoarele două teoreme:

Teorema 6.5. O mulţime $S \subseteq R$ este compactă dacă şi numai dacă orice punct din S^* este infinit apropiat de un punct din S.

Teorema 6.6. O funcţie standard, continuă pe o mulţime compactă S, este mărginită pe S.

Caracterizarea mulţimilor compacte (teorema 6.5.) rămîne valabilă şi în spaţii topologice generale.

Folosindu-se ideea din demonstraţia teoremei 6.1., se obţine următoarea caracterizare a funcţiilor uniform continue:

Teorema 6.7. O funcţie standard f este uniform continuă pe mulţimea standard S dacă şi numai dacă din $x \approx y$ rezultă $f^*(x) \approx f^*(y)$ pentru orice x şi y din S^*.

Ca un corolar se obţine

Teorema 6.8. O funcţie standard f continuă pe o mulţime compactă standard S este uniform continuă pe S.

Demonstraţie. Fie x şi y din S^*, astfel încît $x \approx y$. În baza compacităţii lui S, există x_0 în S astfel încît $x \approx x_0$, deci, deoarece $\approx$ e tranzitivă şi simetrică, $x_0 \approx y$. Datorită continuităţii lui f avem $f^*(x) \approx f(x_0) \approx f^*(y)$, deci $f^*(x) \approx f^*(y)$, de unde rezultă, în baza teoremei 6.7, că f este uniform continuă pe S.

Fie un şir infinit $\{a_n\}$ de numere reale, adică o aplicaţie a lui N în R; lui i se asociază, prin teorema 4.1., o aplicaţie a lui N^* în R^*, care se reduce, pe N, la şirul $\{a_n\}$. Altfel spus, după ce epuizăm termenii a_n de indice finit, şirul continuă cu termeni de indice infinit, după cum urmează: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ (termeni de indice finit) $\ldots, a_{\alpha-1}, a_\alpha, a_{\alpha+1}, \ldots$ (termeni de indice infinit). Şirul $0, 0, \ldots, 0, \ldots$ continuă cu valoarea zero şi la termenii de indice infinit, deoarece enunţul $(\forall x)\ (x \in N \Rightarrow a_x = 0)$ este adevărat în R, deci şi în R^*. În mod analog, şirul $1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$ continuă să alterneze cu aceleaşi valori 1 şi 0 pentru termenii de indice infinit, iar şirul numerelor prime $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ se extinde la numerele prime din N^*. Unele proprietăţi ale şirurilor standard pot fi caracterizate prin comportamentul extensiilor acestor şiruri la termeni de indice infinit. Vom da cîteva exemple în acest sens. (Prin $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ notăm şiruri standard iar prin a, b numere standard).

Teorema 7.1 (i) **$\{a_n\}$ e mărginit dacă şi numai dacă a_α e finit pentru toate numerele naturale infinite α;** (ii) **$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ dacă şi numai dacă $a_\alpha \approx a$ pentru orice număr natural infinit α;** (iii) **$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ dacă şi numai dacă a_α e infinit pentru orice număr natural infinit α;** (iv) **$\{a_n\}$ e un şir Cauchy dacă şi numai dacă $a_\alpha \approx a_\beta$ oricare ar fi numerele naturale infinite α şi β.**

Lăsăm demonstraţia acestei teoreme pe seama cititorului.

Teorema 7.2. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

Demonstraţie. Fie α un număr natural infinit. În baza teoremei 7.1., avem $a_\alpha \approx a$ şi $b_\alpha \approx b$. Rezultă că a_α şi b_α sînt numere finite şi, folosind teorema 3.3., obţinem $a_\alpha + b_\alpha \approx a + b$ şi $a_\alpha b_\alpha \approx ab$. Aplicînd din nou teorema 7.1., obţinem teorema 7.2.

Exemplul 7.1. Pentru a determina limita $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 - n)$, putem proceda direct. Fiind dat un număr natural infinit α, avem $\alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha - 1) =$ (infinit) (infinit). Aplicînd teorema 3.2, rezultă că $\alpha^2 - \alpha$ este infinit, deci limita căutată este infinită.

Să considerăm acum o partiţie a intervalului $[a, b]$ în n subintervale de aceeaşi lungime, cu ajutorul punctelor $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$. Dacă notăm cu a_i^j punctul de rang i al partiţiei formate cu j subintervale de aceeaşi lungime, avem $a_i^j = a + ((b - a)/j)i$. Membrul al doilea al acestei egalităţi este o aplicaţie a lui $I \times I$ în R, unde $I \subseteq R$ este mulţimea numerelor întregi. Extensia acestei aplicaţii — aşa cum rezultă ea din teorema 4.1 — este o aplicaţie a lui $I^* \times I^*$ în R^*. Vom păstra — pentru imaginea lui a_i^j prin această extensiune — aceeaşi notaţie a_i^j. Dacă α este un număr natural infinit fixat, atunci, pentru $0 \leqslant i \leqslant \alpha$, a_i^α aparţine intervalului $[a, b]^*$. Lungimea subintervalului de rang i $[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha]$ este egală cu infinitezimala $(b - a)/\alpha$. Două astfel de subintervale pot avea intersecţie nevidă numai dacă au o extremitate comună (intersecţia fiind chiar această extremitate). Pentru fiecare punct a_i^α (diferit de a şi b) al partiţiei există la stînga sa un punct a_{i-1}^α al partiţiei care-l precedă imediat şi există la dreapta sa un punct a_{i+1}^α al partiţiei, care-l succedă imediat. Se poate arăta că fiecare punct din $[a, b]^*$ aparţine unui subinterval $[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha]$. Într-adevăr, formulată ca un enunţ admisibil (adevărat în R), această aserţiune se exprimă astfel: „Pentru fiecare $j \in N$, orice punct din $[a, b]$ aparţine unui subinterval $[a_i^j, a_{i+1}^j]$ pentru un anume i din I, astfel încît $0 \leqslant i < j$". Prin teorema 4.1., obţinem un enunţ corespunzător, adevărat în R^*. Particularizîndu-l la cazul $j = \alpha$, obţinem enunţul „Orice punct din $[a, b]^*$ aparţine unui subinterval $[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha]$ pentru un anume i din I^*, astfel încît $0 \leqslant i < \alpha$".

Putem acum arăta că partiţia descrisă mai sus conţine o infinitate nenumărabilă de puncte, de unde rezultă că şi mulţimile $\{\beta \in N^*;\ \beta \leqslant \alpha\}$ şi N^* sînt nenumărabile. În acest scop, vom defini o anumită aplicaţie a mulţimii $\{a_0^\alpha, a_1^\alpha, ..., a_\alpha^\alpha\}$ pe intervalul standard $[a, b]$, interval despre care se ştie că are puterea continuului. Să observăm că, deoarece fiecare punct a_i^α al partiţiei este un număr finit, el este — datorită teoremei 3.1. — infinit apropiat de un număr real unic determinat; aplicaţia pe care o avem în vedere asociază fiecărui a_i^α tocmai acest număr real, care, evident aparţine lui $[a, b]$. În plus, orice număr real x din $[a, b]$ se obţine pe această cale. Într-adevăr, fie c în $[a, b]$. Conform observaţiilor de mai sus, c aparţine unui interval $[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha]$ pentru un anume i astfel încît $0 \leqslant i < \alpha$ şi, deoarece $a_i^\alpha \approx a_{i+1}^\alpha$, avem $c \approx a_i^\alpha$.

Vom regăsi acum, pe o cale inedită, o teoremă clasică.

Teorema 7.3. (Proprietatea lui Darboux a funcţiilor continue). Dacă funcţia standard f este continuă pe intervalul standard $[a, b]$ şi dacă $f(a) < 0 < f(b)$, atunci există în $[a, b]$ un punct c pentru care $f(c) = 0$.

Demonstraţie. Fie α un număr natural infinit. Să formăm partiţia infinit fină $\{a_0^\alpha, a_1^\alpha, ..., a_\alpha^\alpha\}$ descrisă mai sus. Următoarea aserţiune poate fi formulată ca un enunţ admisibil, adevărat în R: „Pentru fiecare j din N există un cel mai mic i în N pentru care $0 < i \leqslant j$ şi $f(a_i^j) \geqslant 0$". Prin teorema 4.1., obţinem un enunţ corespunzător, adevărat în R^*. Particularizînd acest enunţ pentru cazul $j = \alpha$, obţinem (renunţînd să mai folosim semnul $*$ peste tot unde este cazul) enunţul: „Există un cel mai mic i în N^*, pentru care $0 < i \leqslant \alpha$ şi $f(a_i^\alpha) \geqslant 0$". Pentru acest i avem $f(a_{i-1}^\alpha) < 0$. Deoarece a_i^α este finit, e infinit apropiat de un număr real c din $[a, b]$ (conform teoremei 3.1). Deoarece f e o funcţie standard, $f(c)$ e un număr standard. Din $a_{i-1}^\alpha \approx a_i^\alpha$ obţinem $c \approx a_i^\alpha$ şi $c \approx a_{i-1}^\alpha$, deci, datorită continuităţii lui f, $f(c) \approx f(a_i^\alpha)$ şi $f(c) \approx f(a_{i-1}^\alpha)$. Aceasta, împreună cu inegalităţile $f(a_i^\alpha) \geqslant 0$ şi $f(a_{i-1}^\alpha) < 0$ stabilite mai sus, implică faptul că $f(c)$ este un număr standard infinit apropiat atît de un număr negativ cît şi de unul nenegativ. Rezultă $f(c) = 0$.

Fie f o funcţie standard definită pe un interval deschis standard (a, b) şi fie x_0 un punct interior lui (a, b). Cu ajutorul caracterizării nestandard a noţiunii de limită, dată într-un paragraf precedent, condiţia ca f să fie diferenţiabilă în x_0 revine la existenţa unui număr standard L infinit apropiat de $(f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0))/\mathrm{d}x$ oricare ar fi infinitezimala nenulă $\mathrm{d}x$. Derivata lui f în x_0 este egală cu L. Dacă f este diferenţiabilă în x_0, atunci, punînd $\mathrm{d}y = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$, $f'(x_0)$ este tocmai partea standard a lui $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Cu alte cuvinte, raportul dintre infinitezimalele $\mathrm{d}y$ şi $\mathrm{d}x$ poate fi diferit de derivata $f'(x_0)$, dar este infinit apropiat de aceasta din urmă.

Exemplul 8.1. Să calculăm derivata funcţiei $f(x) = x^2$. Fie $\mathrm{d}x$ o infinitezimală nenulă arbitrară. Avem $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = ((x + \mathrm{d}x)^2 - x^2)/\mathrm{d}x = 2x+\mathrm{d}x \approx 2x$, deci partea standard a lui $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ este $2x$, adică derivata lui $f(x)$; deci f este diferenţiabilă.

Teorema 8.1. (Diferenţiabilitatea funcţiilor compuse). Dacă g e diferenţiabilă pe (a, b) iar f e diferenţiabilă pe un interval care conţine valorile lui g, atunci h dată de $h(x) = f(g(x))$ e diferenţiabilă pe (a, b) şi $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ pentru orice x din (a, b).

Demonstraţie. Fiind dată o infinitezimală nenulă $\mathrm{d}x$, să punem $\mathrm{d}g = g(x + \mathrm{d}x) - g(x)$ şi $\mathrm{d}h = h(x + \mathrm{d}x) - h(x)$. Avem $\mathrm{d}h = f(g(x + \mathrm{d}x)) - f(g(x)) = f(g(x) + \mathrm{d}g) - f(g(x))$. Vom arăta că $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x$ este infinit apropiat de $f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Deoarece $\mathrm{d}x$ e o infinitezimală iar g e continuă, rezultă că $\mathrm{d}g$ e o infinitezimală. Dacă $\mathrm{d}g = 0$, atunci $\mathrm{d}h = 0$, deci partea standard a lui $\mathrm{d}g/\mathrm{d}x$ este $g'(x) = 0$ şi $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x = 0$, cu alte cuvinte avem egalitate între $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x$ şi $f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Dacă $\mathrm{d}g \neq 0$, atunci $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x = (\mathrm{d}h/\mathrm{d}g) \cdot (\mathrm{d}g/\mathrm{d}x)$, deci

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{f(g(x) + \mathrm{d}g) - f(g(x))}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{g(x + \mathrm{d}x) - g(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Primul factor din membrul al doilea e infinit apropiat de $f'(g(x))$ iar cel de-al doilea factor e infinit apropiat de $g'(x)$. În baza teoremei 3.3., rezultă că $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x$ e infinit apropiat de produsul $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ şi teorema 8.1. e demonstrată.

Să trecem acum la prezentarea noţiunii de integrală. Fie f o funcţie standard integrabilă pe intervalul standard $[a, b]$. Fiind dat un număr natural standard n, fie $a = a_0^n < a_1^n < \ldots < a_n^n = b$ o partiţie a intervalului $[a, b]$ în n subintervale de aceeaşi lungime. Sumele Riemann asociate

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(a_i^n)\,(a_i^n - a_{i-1}^n)$$

formează un şir infinit care, prin teorema 4.1., poate fi extins la un şir definit pe N^*. Dacă α este un număr natural infinit, să notăm cu S_α termenul de rang α al acestui şir, termen avînd expresia

$$\sum_{i=1}^{\alpha} f(a_i^\alpha)\,(a_i^\alpha - a_{i-1}^\alpha),$$

pe care o putem considera ca o sumă Riemann asociată unei partiţii infinit de fine. Folosirea, aici, a notaţiei Σ e adecvată, datorită analogiei cu proprietăţile sumelor Riemann standard (intervine şi aici teorema 4.1). De exemplu, avem

$$\sum_{i=1}^{\alpha} = \sum_{i=1}^{\beta} + \sum_{i=\beta+1}^{\alpha}.$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a_i^n)\,(a_i^n - a_{i-1}^n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

rezultă, în baza caracterizării nestandard a noţiunii de limită a unui şir şi a faptului că α este un număr natural infinit, relaţia

$$\sum_{i=1}^{\alpha} f(a_i^\alpha)\,(a_i^\alpha - a_{i-1}^\alpha) \approx \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

9. CÎTEVA COMENTARII

În prezentarea de mai sus, scopul urmărit a fost acela de a expune cîteva noţiuni şi rezultate fundamentale ale Analizei nestandard, într-un mod pe cît posibil independent de instrumentele şi conceptele Logicii matematice (în cartea lui Robinson menţionată în primul paragraf, preliminariile logice ocupă aproape 50 de pagini). Evident, aceasta nu s-a putut face fără a se plăti un anumit tribut, vizibil în special în modul de prezentare a teoremei 4.1., care este de fapt teorema principală a Analizei nestandard. Dacă am fi utilizat instrumente corespunzătoare din logică: Calculul inferior (sau de primul ordin) al predicatelor; ultraprodusele lui Łoś; principiul finitudinii (Gödel, Malcev) sau, cum îl numeşte A. Tarski, teorema de compacitate (afirmînd că, dacă orice parte finită a unei mulţimi P de propoziţii este consistentă, atunci mulţimea P însăşi este consistentă); structurile de ordin superior şi limbajele corespunzătoare unor calcule de predicate de ordin superior (care să dea posibilitatea trecerii de la constante şi variabile individuale la constante şi variabile mulţimi ş.a.m.d.) cu un principiu corespunzător de finitudine, precum şi diferite tipuri de extensiune a unei mulţimi de propoziţii, am fi putut plasa teorema 4.1 într-un context mult mai general şi mai precis, metodele Analizei nestandard devenind astfel disponibile şi pentru alte compartimente ale matematicii. De exemplu, în loc de R s-ar fi putut considera, în acest caz, corpul C al numerelor complexe şi extensiunea sa la un cîmp C^*, care ar fi permis să se lucreze cu „poligoane" cu laturi infinitezimale şi cu vîrfuri indexate cu elemente din N^*. În acelaşi timp, legătura dintre R^* şi R este mai puternică decît s-a putut arăta pînă aici. Dar trebuie să observăm că unele restricţii care par impuse de natura restrictivă a teoremei 4.1 sînt în fapt inerente, neputînd fi depăşite prin nici o generalizare a teoremei 4.1. De exemplu, nici o atare generalizare nu ar permite să introducem, printre enunţurile admisibile, pe acelea conţinînd variabile care parcurg mulţimi de funcţii pe R, de relaţii în R sau de submulţimi ale lui R. Dacă aceasta ar fi fost posibil, atunci proprietatea de completitudine s-ar fi exprimat printr-un enunţ admisibil, care ar fi determinat completitudinea lui R^*, în contradicţie cu punctul e din paragraful 2. Se poate însă arăta că există o *anumită* clasă de funcţii pe R^*, o *anumită* clasă de relaţii în R^* şi o *anumită* clasă de părţi ale lui R^* astfel încît să poată fi permis orice enunţ conţinînd variabile care parcurg exclusiv funcţii, relaţii (sau) şi părţi din aceste anumite clase. Robinson numeşte aceste obiecte *funcţii interne*, *relaţii interne*, *submulţimi interne*. Se poate arăta că, prin folosirea unei forme ameliorate a teoremei 4.1, unele demonstraţii se simplifică şi, ceea ce e mai important, unele capitole ale Analizei nestandard, cum ar fi teoria integralei, pot fi dezvoltate în condiţii mai avantajoase.

În momentul de faţă, s-a acumulat, în domeniul Analizei nestandard, o literatură bogată. O sinteză bibliografică recentă (D. Randolph Johnson, Bibliography of Nonstandard Analysis — June 1975, Lecture Notes in Mathematics, No. 3, Dep. of Math., Univ. of Pittsburgh, 1975, 22 pp.) trece în revistă 275 de titluri. Încă în monografia deja menţionată a lui Robinson este realizat un program bogat, care acoperă aritmetica nestandard, convergenţa, continuitatea, diferenţiabilitatea, integrabilitatea pentru funcţii de una sau mai multe variabile, geometria diferenţială elementară, spaţiile topologice, spaţiile metrice, teoria măsurii şi integralei, teoria distribuţiilor, funcţiile de variabilă complexă, noţiunea de analiticitate, spaţiile normate, spaţiile Hilbert, teoria spectrală a operatorilor compacţi, grupurile topologice, algebrele Lie, calculul variaţional etc. Au apărut ulterior şi alte monografii, cum ar fi aceea a lui M. Machover şi J. Hirschfeld (Lectures on Non-Standard Analysis, Springer Verlag, Berlin /Heidelberg/ New York, 1969). Într-un paragraf ulterior vom arăta modul în care Machover a reuşit (parţial) să dea Analizei nestandard o prezentare care permite matematicienilor nefamiliarizaţi cu logica matematică să înţeleagă, într-un limbaj de teoria mulţimilor, faptele care stau la baza teoriei lui A. Robinson. În acest fel vor fi parţial clarificate unele fapte care stau la baza teoremei 4.1 sau care-i completează semnificaţiile, fapte care, în paragraful 4 şi în paragraful de faţă, au fost insuficient explicate.

Prezentarea de mai sus, în ciuda formei ei relativ rudimentare, permite abordarea unor chestiuni simple, cum ar fi următoarele exerciţii relative la funcţii, relaţii şi submulţimi standard:

1. O aplicaţie continuă şi bijectivă a unei mulţimi compacte, cu valori în R, admite o inversă continuă; 2. Imaginea continuă a unei mulţimi compacte e compactă; 3. Fiecare dintre proprietăţile: (a) „Mulţimea S e deschisă“, (b) „Punctul p (standard) e un punct de acumulare al mulţimii T“, admite o caracterizare nestandard; 4. O mulţime e compactă dacă şi numai dacă e mărginită şi închisă; 5. S e o submulţime proprie a lui S^* dacă şi numai dacă S e infinită; 6. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n = 0$.

10. PRIVIRE RETROSPECTIVĂ

Ne vom întoarce acum la originile Analizei matematice, pe care le vom reconsidera în lumina recentei dezvoltări a Analizei nestandard. Vom urma, în mod selectiv, analiza întreprinsă de către Abraham Robinson în ultimul capitol al cărţii sale menţionate anterior, precum şi într-un articol rezumativ „The Metaphysics of the Calculus" (expresia provine de la d'Alembert), publicat în culegerea „Problems in the Philosophy of Mathematics" (ed. Imre Lakatos), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967, p. 28—40.

Newton şi Leibniz sînt primii care elaborează o teorie generală a diferenţierii şi integrării; pînă atunci, nu se studiaseră decît cazuri particulare de determinare a unor arii, volume şi tangente. În timp ce Newton folosea un limbaj variabil, referindu-se cînd la infinitezimale, cînd la limite sau la anumite intuiţii fizice, Leibniz punea la baza consideraţiilor sale diferenţiale infiniţi mici de primul ordin şi de ordine superioare. În ciuda anumitor avantaje practice, atît versiunea lui Newton cît şi aceea a lui Leibniz au dus la anumite contradicţii interne ale Calculului diferenţial şi integral, o prezentare satisfăcătoare fiind obţinută abia de către Cauchy, autorul primei dezvoltări riguroase a Analizei matematice, care, ulterior, capătă un spor de rigoare prin Weierstrass. (Sporul de rigoare la care se referă Robinson poate fi apreciat prin următorul exemplu: În timp ce Cauchy credea că din continuitatea unei funcţii rezultă diferenţiabilitatea ei, Weierstrass dă, în 1872, un exemplu de funcţie continuă nederivabilă în nici un punct). Prin aceşti doi matematicieni, întreaga Analiză matematică se sprijină pe conceptul riguros de limită. Concomitent, utilizarea infiniţilor mici şi a infiniţilor mari se discreditează, supravieţuind numai terminologia corespunzătoare. La începutul secolului nostru, Bertrand Russell scria: „... deci infinitezimalele trebuie privite ca inutile, greşite şi contradictorii în sine din punctul de vedere al explicării noţiunii de continuitate." Făcînd această observaţie, Russell, evident, nici nu bănuia că tocmai opera sa de logică matematică avea să constituie o etapă importantă a acelei dezvoltări a logicii matematice care avea să ducă, la începutul celui de-al şaptelea deceniu al secolului 20, la reabilitarea infinitezimalelor.

În numeroase scrieri, Leibniz insista asupra faptului că numerele infinit mici şi cele infinit mari sînt elemente ideale, introduse pentru comoditate şi intuitivitate, argumentele în care ele sînt implicate fiind echivalente cu metoda exhaustiei a lui Arhimede. Leibniz pretinde că ne putem dispensa de numerele infinit mici sau mari, ele necorespunzînd la nici o realitate absolută. Dar el acceptă ideea infinitului potenţial, aşa cum e ilustrat de totalitatea termenilor unei progresii geometrice infinite. Dar nu e mai puţin adevărat, după cum observă Robinson, că Leibniz se foloseşte în mod constant de infiniţi mici sau mari.

Primul manual de calcul diferenţial îl are ca autor pe marchizul De l'Hospital, discipol fidel al lui Leibniz şi al fraţilor Bernoulli (după unii autori „regula lui Hospital" aparţine de fapt lui Bernoulli). Manualul apare în 1696 şi e intitulat „Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes". Ca punct de plecare sînt luate următoarele definiţii:

Definiţia 1. Se numesc cantităţi *variabile* acelea care cresc sau descresc în mod continuu; dimpotrivă, cantităţile *constante* rămîn aceleaşi, atunci cînd celelalte se schimbă...

Definiţia 2. Porţiunea infinit mică cu care o cantitate variabilă creşte sau descreşte continuu se numeşte *diferenţă*... (Pentru *diferenţă* a se citi *diferenţială)*. Sînt date exemple de diferenţiale de coordonate, de arc al unei curbe, de arie delimitată de o curbă. Urmează apoi două axiome sub formă de cereri sau ipoteze (amîndouă apar de fapt în lucrările lui Leibniz ca ipoteze admise, dar cea de-a doua are o lungă istorie, care merge înapoi pînă în antichitate): Cererea I. Se pot înlocui una cu alta două cantităţi care diferă printr-un infinit mic...; Cererea II. O linie curbă poate fi considerată ca provenind din asamblarea unei infinităţi de linii drepte infinit mici, deci ca o linie poligonală cu o infinitate de laturi infinit mici, care determină, prin unghiurile pe care le formează, curba....

Puţin timp mai devreme, Newton adoptase o schemă asemănătoare pentru noţiunile şi ipotezele fizice privind Principiile sale Matematice ale Filosofiei Naturale. În esenţă, acelaşi era şi procedeul lui Euclid şi Arhimede, pentru care o definiţie e de obicei o explicaţie a unui concept dat anterior şi înţeles în mod intuitiv, în timp ce o axiomă e un enunţ adevărat din care sînt obţinute pe cale deductivă alte rezultate. Deci calea axiomatică presupune încrederea în realitatea obiectelor care fac obiectul axiomelor (de exemplu infiniţii mici şi diferenţialele); dar tocmai această realitate nu era recunoscută de Leibniz. Nu este mai puţin adevărat că astăzi sensul termenului *axiomă* s-a schimbat, el referindu-se la o proprietate considerată ca punct de plecare într-o teorie.

Revenind la cele două axiome, trebuie să observăm că prima dintre ele implică o contradicţie, prin faptul că diferenţa infinitezimală dintre două cantităţi poate fi în acelaşi timp egală cu zero şi diferită de zero (deoarece o infinitezimală diferă de zero tot printr-o infinitezimală). În 1734, Berkeley a arătat că aceeaşi contradicţie apare şi în metoda lui Newton, a fluxiunilor. Această situaţie a contribuit la eclipsarea metodei infiniţilor mici şi infiniţilor mari la începutul secolului al 19-lea. În Analiza nestandard, contradicţia în discuţie nu mai apare, deoarece relaţia dintre două numere care diferă printr-o infinitezimală nu mai este aici obligatoriu o relaţie de egalitate, ci una de echivalenţă. Astfel, în Analiza nestandard $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ e echivalent cu $f'(x)$ (aceasta din urmă fiind partea standard a celei dintîi), în timp ce, după Leibniz, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f'(x)$.

O altă slăbiciune a teoriei lui Leibniz şi a succesorilor săi constă în incapacitatea de a stabili cu *suficientă precizie* regulile care stau la baza sistemului lor extins de numere (incluzînd, alături de numerele finite obişnuite, numerele infinit mici şi pe cele infinit mari). În 1701 (Mémoire de M.G.G. Leibniz touchant son sentiment sur le calcul différentiel, Journal de Trévoux, Mathematische Schriften, ed. C.I. Gerhardt, vol. 5, 1858, p. 350) Leibniz se exprimă în modul următor: „... şi se întîmplă că regulile finitului reuşesc în infinit ca şi cum ar exista atomi (adică elemente indivizibile ale naturii), deşi astfel de atomi nu există, materia fiind de fapt decompozabilă indefinit; şi, reciproc, regulile infinitului reuşesc în finit, ca şi cum ar exista infiniţi mici, în pofida faptului că ei nu sînt necesari, diviziunea materiei neparvenind niciodată la parcele infinit mici...". După cum observă Robinson, aceste reflecţii ale lui Leibniz exprimă intuitiv transferul de enunţuri din R în R^*

şi din R^* în R. Dar ce fel de enunţuri fac obiectul acestui transfer? De ce oare axioma lui Arhimede nu mai e valabilă în sistemul extins al numerelor? Un răspuns posibil ar fi acela că transferul se referă numai la enunţuri cu caracter algebric, dar acest criteriu nu e aplicabil decît în unele cazuri simple. În fapt, ceea ce lipsea pe vremea lui Leibniz era un limbaj formal care să permită o exprimare precisă, o delimitare a enunţurilor valabile atît pentru numerele finite cît şi pentru sistemul extins, incluzînd infiniţii mici sau mari. În teoria lui Robinson, răspunsul la întrebarea dacă axioma lui Arhimede e adevărată nu numai pentru R, ci şi pentru R * este în acelaşi timp afirmativ şi negativ! Dacă prin axioma lui Arhimede înţelegem acea propoziţie din P (a se vedea principiul finitudinii) care formalizează enunţul „Pentru orice pereche de numere reale a şi b astfel încît $0 < a < b$, există un număr natural n pentru care $b < na$", atunci axioma lui Arhimede e valabilă în R, deci şi în R^*; în R^* n putînd fi realizat ca număr natural infinit. Dacă însă prin axioma lui Arhimede înţelegem faptul că pentru orice pereche de numere reale a şi b, $0 < a < b$, există un număr natural n *în sensul uzual*, astfel încît $b < a + a + \ldots + a$ (de n ori), atunci axioma lui Arhimede nu e adevărată în R^*. Să observăm de asemenea că într-un cîmp ordonat nearhimedean R^* existenţa infinitezimalelor netriviale este obligatorie; altfel, R^* ar fi arhimedean.

În a doua jumătate a secolului al 18-lea, punctele slabe ale teoriei lui Leibniz deveniseră vizibile, astfel încît matematicienii caută o alternativă pentru fundamentarea Analizei matematice. În 1797, Lagrange propune ca punct de plecare în prezentarea Calculului diferenţial existenţa unei dezvoltări Taylor pentru orice funcţie continuă. În acest fel credea Lagrange că evită folosirea unor concepte contradictorii ca acelea de infinit mic, limită, fluxiune. Faptul este simptomatic pentru matematicienii acelui timp, a căror nelinişte nu privea metoda de deducţie folosită, ci alegerea conceptelor de bază. În ceea ce-l priveşte pe d'Alembert, el punea la baza Analizei noţiunea de limită: „Se spune că o mărime e *limita* alteia, cînd a doua se poate apropia de prima cu mai puţin decît o mărime dată, oricît de mică ar fi ea, fără totuşi ca mărimea care se apropie să poată depăşi vreodată mărimea de care se apropie...". Dar d'Alembert precizează: „... nu este vorba, cum se spune încă de obicei, de cantităţi infinit mici în calculul *diferenţial*; este vorba exclusiv de limite de cantităţi finite. Deci metafizica infinitului şi a cantităţilor infinit mici ... e total inutilă calculului *diferenţial*. Ne servim de termenul de *infinit mic* numai pentru a scurta exprimarea." Definiţia limitei este, la d'Alembert, conformă cu punctul modern de vedere, cu excepţia condiţiei pe care el o impune cantităţii care tinde către o limită de a nu deveni niciodată egală cu această limită. Într-adevăr, în acest fel o funcţie f n-ar putea avea limită în nici un punct de continuitate care este punct de acumulare în mulţimea sa de nivel (cum este zero pentru $x \sin(1/x)$). De fapt, d'Alembert preia ideea de limită de la Newton, dar nu este de acord cu versiunea acestuia din urmă, conform căreia „o cantitate e infinit mică nici înainte nici după dispariţia ei, ci în momentul dispariţiei ei".

Momentul următor este cel al lui Cauchy, care, contrar aşteptărilor, nu renunţă la infiniţii mici. Dar, pentru Cauchy, infiniţii mici nu sînt numere, ci anumite tipuri de variabile. Iată cum se exprimă Cauchy în faimosul său Curs de Analiză din 1821: „Se numeşte cantitate variabilă aceea care ia succesiv mai multe valori diferite... Dacă valorile succesive atribuite aceleiaşi variabile se apropie indefinit de o valoare fixă, astfel încît ele sfîrşesc prin a diferi de ea oricît de puţin dorim, aceasta din urmă e numită limita tuturor celorlalte". Dacă d'Alembert ilustra conceptul de limită cu ajutorul sumei unei progresii geometrice, Cauchy se referă la cerc ca limită de poligoane înscrise. Dar Cauchy se distanţează net de d'Alembert cînd scrie: „Dacă valorile numerice succesive ale aceleiaşi variabile descresc indefinit, coborînd sub orice număr dat, această variabilă devine ceea ce se numeşte un *infinit mic* sau o cantitate *infinit mică*. O variabilă de acest tip are ca limită pe zero". În mod analog, Cauchy explică ce înseamnă că o variabilă are ca limită infinitul pozitiv şi discută infiniţii mici sau mari de diferite ordine. Deşi infiniţii mici nu au, la Cauchy, statut de funcţii, ci statut de variabile, ei intervin esenţial în definiţia continuităţii unei funcţii: „... la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence $f(x+\alpha)-f(x)$ décroit indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même*". În termeni de Analiză nestandard, aceasta revine la faptul că f, definită în (a, b), este continuă în (a, b), dacă, pentru orice infinitezimală α, diferenţa $f(x+\alpha)-f(x)$ este tot o infinitezimală, oricare ar fi x în (a, b). (Dacă *oricare* se referă numai la valorile standard ale lui x, obţinem continuitatea; dacă se referă atît la valorile standard cît şi la cele nestandard, obţinem continuitatea uniformă a lui f). În contrast cu d'Alembert, care introducea limita *în locul* infiniţilor mici, Cauchy defineşte limita şi continuitatea *cu ajutorul* infiniţilor mici. Cauchy se distanţează şi de Leibniz, prin faptul că nu acceptă transferul de operaţii de la cantităţi finite la cele infinite, mici sau mari; totuşi, nu ezită să definească suma şi raportul a doi infiniţi mici (probabil că raportul se referă la posibilitatea ca ordinul infinitezimalei de la numărător să fie mai mare, egal sau mai mic decît ordinul celei de la numitor). Toate aceste fapte nu vin în contradicţie cu renumele lui Cauchy de a fi dat o formă mai riguroasă — apropiată de cea contemporană — Analizei. Cauchy introduce limbajul $\varepsilon-\delta$, dar se serveşte de el nu pentru a defini continuitatea, ci pentru a stabili o condiţie necesară şi suficientă de continuitate. Pentru Cauchy, infiniţii mici nu-s numai o chestiune de limbaj, ci o modalitate de a raţiona, după cum rezultă din celebra eroare care l-a condus la concluzia falsă că suma unei serii de funcţii continue este o funcţie continuă. Fie o serie de funcţii de sume parţiale s_n, resturi r_n şi sumă s. Avem $s = s_n + r_n$. Raţionamentul lui Cauchy este următorul: Să considerăm creşterile lui $s_n(x)$, $r_n(x)$ şi $s(x)$ cînd x creşte cu o cantitate infinit mică. În virtutea continuităţii lui s_n (pentru orice n), creşterea lui s_n va fi o cantitate infinit mică; creşterea lui r_n va fi insensibilă, după cum şi r_n va fi oricît de mic dorim, dacă n e destul de mare (Cauchy spune „très considérable"). Deci creşterea lui s va fi un infinit mic. Robinson traduce acest raţionament în limbajul Analizei nestandard: Fie x_1 un număr standard, $a < x_1 < b$. Pentru a stabili continuitatea lui s în x_1 încercăm să arătăm că $s(x_1+\alpha)-s(x_1)$ e o infinitezimală pentru orice infinitezimală α. Deoarece avem $s(x_1+\alpha)-s(x_1)=[s_n(x_1+\alpha)-s_n(x_1)]+ +[r_n(x_1+\alpha)-r_n(x_1)]$, am putea deduce, cu raţionamentul de mai sus al lui Cauchy, că primul membru al egalităţii e o infinitezimală, ca urmare a faptului că fiecare dintre expresiile din membrul al doilea $s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)$, $r_n(x_1 + \alpha)$ şi $r_n(x_1)$ este o infinitezimală; prima pentru orice n, celelalte două pentru n infinit. Însă, după cum observă Robinson, acest raţionament e greşit, căci, deşi $r_n(x_1)$ e infinitezimal pentru orice n infinit (deoarece x_1 e standard), $r_n(x_1 + \alpha)$ e infinitezimal numai pentru n infinit suficient de mare; în timp ce $s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)$ e infinitezimal pentru orice n finit şi, deci, şi pentru n infinit suficient de mic (aceasta rezultă din următoarea teoremă a lui Robinson — a se vedea cartea sa, p. 65: Fie $\{s_n\}$ un şir intern pentru care s_n e infinitezimal pentru orice n finit. În aceste condiţii, există un număr natural infinit ν pentru care s_n e infinitezimal pentru orice $n < \nu$). Pentru a demonstra că $s(x_1 + \alpha) - s(x_1)$ e infinitezimal, trebuie să ne asigurăm că există un n pentru care $r_n(x_1 + \alpha)$ şi diferenţa $s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)$ sînt simultan infinitezimale. Apar două posibilităţi: (i) să cerem ca seria în discuţie să fie uniform convergentă în intervalul (a, b), astfel încît $r_n(x_1 + \alpha)$ e infinitezimal pentru orice n infinit, sau (ii) să cerem ca familia $\{s_n(x)\}$ să fie echicontinuă pe (a, b), astfel încît $s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)$ să fie infinitezimal pentru orice n infinit). Dealtfel, la scurt timp după această greşeală a lui Cauchy, Abel produce, în 1826, un exemplu de serie convergentă de funcţii continue pe $(-\pi, \pi)$, a cărei sumă e o funcţie discontinuă în origine: $\sin x + (1/2) \sin 2x + (1/3) \sin 3x + \ldots$ (Suma este $(-1/2)(\pi + x)$ pentru $-\pi < x < 0$, $(1/2)(\pi - x)$ pentru $0 < x < \pi$ şi zero pentru $x = 0$). Ulterior, Cauchy a examinat cu atenţie contraexemplul lui Abel şi a revenit asupra rezultatului său.

Aceeaşi utilizare a infiniţilor mici apare şi în definiţia pe care Cauchy o dă derivatei, care e reprezentată ca limita raportului a doi infiniţi mici Δy şi Δx. Astfel, pentru $f(x) = x^m$, $f'(x) = mx^{m-1}$ rezultă ca limită a expresiei

$$\frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{m-1},$$

unde Δx şi, deci, şi $(x + \Delta x)^m - x^m$, sînt infiniţi mici. Pentru Cauchy, o funcţie nu se apropie de limita sa pe cale directă, ci prin intermediul unor expresii care conţin infinitezimale. Din punctul de vedere al Analizei nestandard, expresia „limita lui $\Delta y/\Delta x$, unde Δx şi Δy sînt infinitezimale" revine la „partea standard a lui $\Delta y/\Delta x$, unde Δx şi Δy sînt infinitezimale". Dar, observă Robinson, probabil că pentru Cauchy această exprimare ar fi fost inacceptabilă, deoarece pentru el infiniţii mici, deci Δx şi Δy, erau variabile, nu numere. Pentru a demonstra că dacă $f'(x_0) > 0$, atunci f e crescătoare într-o vecinătate a lui x_0, Cauchy argumentează că, deoarece $\Delta y/\Delta x$ are ca limită pe $f'(x_0)$ cînd Δx şi $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ sînt infinitezimale, şi deoarece $f'(x_0) > 0$, rezultă că $\Delta y/\Delta x$ trebuie să fie de asemenea pozitiv pentru valori numerice suficient de mici ale lui Δx. Aici, adjectivul *numerice* arată că Δx e un număr ordinar, adică, în terminologia Analizei nestandard, că Δx e un număr standard. Această trecere de la raportul a două numere infinit mici la raportul dintre două numere standard suficient de mici este legitim în Analiza nestandard, putînd fi justificat riguros. Însă, din punctul de vedere al lui Cauchy, este o inconsecvenţă şi implică o utilizare inconştientă a principiului continuităţii operaţiilor, în trecerea de la cantităţi finite la cele infinit mici sau mari, principiu pe care, anterior, Cauchy l-a respins. Şi în definiţia integralei Cauchy se foloseşte de infiniţi mici (intervalul de integrare este împărţit în intervale infinit mici). Chiar dacă ulterior, în 1844, Cauchy își schimbă unele opinii (considerînd, de exemplu, diferențialele ca niște cantități finite, care trebuie distinse cu grijă de creșterile infinit mici ale variabilelor, în timp ce în 1829 afirmase că dx e arbitrar și poate fi chiar infinitezimal), Cauchy rămîne în istoria Analizei ca cel care a corelat doctrina limitelor (în tradiția Newton-d'Alembert) cu aceea a infiniților mici și mari (în tradiția lui Leibniz), așezînd în centrul considerațiilor noțiunea de variabilă care tinde către o limită (în special către zero).

Momentul următor este cel al lui Bolzano (de fapt contemporan cu Cauchy) și Weierstrass. Chiar dacă jargonul $\varepsilon - \delta$ apare, în mod sporadic, încă la Cauchy, el capătă o utilizare generală și sistematică prin Bolzano și, mai ales, prin Weierstrass. Nu este vorba numai de un limbaj nou, ci de o gîndire nouă, mult mai apropiată de metoda exhaustiei, a lui Arhimede, decît aceea a lui Newton, Leibniz sau Cauchy. Acest lucru nu a fost sesizat ușor. Riemann, de exemplu, considera că noțiunea de continuitate într-un interval, în sensul lui Cauchy, este identică cu noțiunea de continuitate uniformă introdusă de Weierstrass, aceasta din urmă fiind însă mai concretă. Marea răspîndire a ideilor lui Weierstrass a determinat un reflux al gîndirii prin infiniți mici, dar a persistat limbajul infiniților mici (mai cu seamă în aplicațiile Analizei, de exemplu în Geometria diferențială), care nu lipsește nici din textele lui Weierstrass. Această din urmă situație a putut să dea unora (printre care am văzut că se afla și Riemann) impresia că nu ar exista o deosebire esențială între gîndirea lui Weierstrass și aceea a lui Cauchy. E adevărat că — cel puțin spre sfîrșitul carierei sale — Cauchy considera infiniții mici ca un simplu limbaj provizoriu, de natură să scurteze expunerea, dar nu există vreo indicație că ar fi dorit și ar fi fost capabil să-i elimine din raționamentele sale. Dealtfel, și Leibniz pretindea că infiniții mici sau mari nu-s decît o abreviere a metodei exhaustiei a lui Arhimede. Dar este greu, chiar numai pe baza exemplelor date în textul de față, să admitem că infiniții mici erau, pentru Leibniz și Cauchy, numai o chestiune de limbaj, deci nu una de mod de gîndire.

Influența lui Weierstrass asupra dezvoltării Analizei este aproape concomitentă cu aceea a lui Cantor, creatorul teoriei mulțimilor. În acest context al unor exigențe crescînde privind rigoarea conceptelor și raționamentelor, teoria infiniților mici și mari cunoaște și ea o nouă fază de dezvoltare. În conformitate cu ideea lui Cauchy după care cantitățile infinit mici sau mari sînt asociate cu comportarea unei funcții, atunci cînd argumentul ei tinde către o valoare finită, sau infinită, du Bois-Reymond elaborează în 1875 o teorie a ordinelor de mărime privind comportamentul asimptotic al funcțiilor. Reprezentarea adoptată pentru infinitul mic este acum aceea a unei funcții care tinde la zero; sub această formă, infinitul mic este utilizat corect, chiar dacă cu rezultate modeste, în Analiză, pînă în zilele noastre, cum se poate vedea, de exemplu, în *Cursul scurt de Analiză matematică* al lui A.I. Hincin (Moscova, 1953; există și o traducere românească a acestei cărți) sau în manualul lui Luzin, de asemenea tradus în românește.

Către mijlocul secolului nostru, interesul pentru cîmpurile nearhimedeene (cadrul natural al Analizei nestandard) devine preponderent algebric. Artin și Schreier dezvoltă teoria cîmpurilor formal-reale, care intervin ulterior în teoria cîmpurilor hiperreale a lui E. Hewitt (*Rings of Real-Valued Continuous Functions* I, Transactions of the American Mathematical Society, *64*, 1948, p. 54—99), cîmpuri care pot servi ca modele nestandard ale Analizei (deci pot îndeplini rolul lui R^*). Un factor important în dezvoltarea Analizei nestandard l-a jucat contribuţia lui T. Skolem (1934) privind modelele nestandard ale Aritmeticii.

Alte încercări de recuperare a infiniţilor mici au loc în 1904 (K. Geissler, *Grundgedanken einer übereuklidischen Geometrie durch die Weitenbehaftungen des Unendlichen*, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, *13*, 1904, p. 233—240), în 1923 (P. Natorp, *Die Logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, *Wissenschaft und Hypothese*, *12*, ed. 3—2, Leipzig—Berlin, 1923) şi, cu deosebire, în 1958, de către C. Schmieden şi D. Laugwitz (*Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung*, Mathematische Zeitschrift, *69*, 1958, p. 1—39; a se vedea şi D. Laugwitz, *Anwendungen unendlichkleiner Zahlen* I, *Zur Theorie der Distributionen*, II, *Ein Zugang zur Operatorenrechnung von Mikusinski*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, *207*, 1961, p. 53—60 şi *208*, 1961, p. 22—34). Aceşti din urmă autori consideră infiniţii mici sau mari ca funcţii, cu referire particulară la comportamentul lor asimptotic, însă aceste funcţii sînt acum şiruri, adică aplicaţii ale lui N în Q sau în R. Sistemul care rezultă în acest fel nu este un cîmp ordonat, ci un inel cu divizori ai lui zero. În ciuda acestui fapt, rezultatele se dovedesc interesante. Între altele, se obţine în acest cadru un substitut al teoriei distribuţiilor.

Nici teoria cardinalelor şi ordinalelor transfinite nu putea rămîne fără influenţă asupra Analizei matematice. Această influenţă s-a exercitat indirect, prin aceea că teoria lui Cantor constituie o bază pentru manipularea comodă a mulţimilor infinite care intervin în Analiza nestandard. Dar G. Cantor pretindea în 1887 (*Mitteilunger zur Lehre vom Transfiniten*, *Gesammelte Abhandlungen* — ed. E. Zermelo, Berlin 1932, p. 378—439) că poate demonstra, prin consideraţii de teoria mulţimilor, imposibilitatea numerelor infinit mici. Ulterior, A.H. Fraenkel (*Einleitung in die Mengenlehre*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, vol. 9, Berlin 1928,) a susţinut de asemenea că infiniţii mici nu au trecut cu succes proba eficacităţii lor în Analiza matematică.

După părerea lui A. Robinson, Analiza nestandard nu constă atît în introducerea unor noi entităţi matematice cît în dezvoltarea unor noi procedee deductive; numerele infinite şi cele infinit mici au, în cadrul Analizei nestandard, o realitate nici mai slabă nici mai puternică decît aceea a numerelor iraţionale în Analiza standard. Ca şi numerele iraţionale, numerele nestandard se introduc prin procese infinite. Prin exemplul de cîmp nearhimedean R^* pe care l-am utilizat în demonstraţia teoremei 4.1, am condus această analogie chiar mai departe decît o afirmă A. Robinson, deoarece elementele din R^* apar aici drept clase de şiruri echivalente de numere standard, întocmai cum numerele reale sînt clase de şiruri echivalente de numere raţionale (cu diferenţa de rigoare în definirea celor două relaţii de echivalenţă).

11. ANALIZĂ NESTANDARD FĂRĂ TEORIA TIPURILOR

Acum, după ce Analiza nestandard s-a dovedit a fi nu numai utilă, dar şi istoriceşte motivată, să examinăm o altă cale de acces la noţiunile şi rezultatele ei de bază, o cale mai accesibilă, poate, pentru cei care gîndesc Analiza matematică mai mult prin structurile ei ansambliste şi topologice decît prin cele logice. Ne referim aici la faptul că teoria lui Robinson face în mod esențial apel la teoria tipurilor, puțin familiară majorității matematicienilor; vom căuta deci s-o eludăm, în favoarea unor procedee mai familiare, în spiritul relației de apartenență din teoria mulțimilor. Vom urma, în această privință, pe M. Machover (prima parte din lucrarea M. Machover-J. Hirschfeld, *Lectures on Non-standard Analysis*, Lecture Notes in Mathematics 94, Springer Verlag, Berlin, 1969).

Punctul de plecare al lui Machover îl constituie noțiunea de aplicație continuă f a unui spațiu topologic X în spațiul topologic Y. Continuitatea în punctul P din X revine, intuitiv, la faptul că $f(x)$ e lîngă (aproape de) $f(p)$ de îndată ce x e lîngă P. În mod riguros, aceasta se exprimă, după cum se știe, cu ajutorul mulțimilor deschise, deci al vecinătăților. Dar — observă Machover — atunci cînd încercăm să descoperim o idee de demonstrație, deci din punct de vedere euristic, utilizăm versiunea *lîngă*, nu versiunea cu vecinătăți; e ca și cum x ar fi o minge foarte mică și care, apropiindu-se de P, determină apropierea mingii $f(x)$ de $f(P)$. Dar prin ce se traduce matematic versiunea *lîngă*, dacă nu prin noțiunea de vecinătate? Răspunsul tradițional la această întrebare era: prin noțiunea de distanță. Dar, în acest fel, ne întoarcem tocmai la ceea ce a constituit unul din punctele de plecare ale topologiei generale: eliberarea conceptelor de limită și continuitate de suportul lor metric. Machover pare să întoarcă istoria înapoi, prin readucerea ideii de continuitate la originea ei metrică. Numai că este vorba aici de o întoarcere în spirală, deoarece *lîngă* nu e modelat cu ajutorul distanței, ci cu ajutorul infinitezimalelor. Dar cît de aproape trebuie să fie un număr de zero pentru a fi o infinitezimală? Iar dacă numerele reale nenule nu pot fi infinitezimale, cum am putea adăuga infinitezimalele ca noi elemente, știind că dreapta reală nu poate fi scufundată într-un cîmp ordonat și complet, efectiv mai larg decît R? Teoria lui Robinson rezolvă aceste dileme, indicînd modul în care un spațiu topologic X poate fi scufundat într-un „spațiu topologic" $\hat{X}$, în așa fel încît: (i) Pentru orice p în X mulțimea $\{x;\ x \in \hat{X}$ și x este *lîngă* $p\}$ poate fi definită riguros, păstrîndu-și în același timp virtuțile intuitive despre care am vorbit mai sus; (ii) Pentru orice proprietate matematică a lui X, $\hat{X}$ are „aceeași" proprietate. Motivul pentru care, în aceste formulări, anumite expresii au fost așezate între ghilimele este acela că $\hat{X}$ nu are *realmente*, ci numai *formal* aceleași proprietăți ca și X. Aceasta înseamnă că, pentru o proprietate dată a lui X, se consideră un enunț care exprimă faptul că X are această proprietate (aceasta se face cu ajutorul unui limbaj care va fi descris în prealabil); apoi se *reinterpretează* acest enunț (într-un mod de asemenea specificat în prealabil), într-un mod care atribuie lui $\hat{X}$ o proprietate corespunzătoare, mai precis *impune* lui X această proprietate. Deci fiecărei proprietăți a lui X îi corespunde o proprietate a lui $\hat{X}$ exprimată *prin aceeași formulă*. Rezultă astfel că deducțiile și calculele pot fi dezvoltate pentru $\hat{X}$ în același fel ca pentru X. Dar anumite teoreme relative la X pot fi stabilite prin referire prealabilă la $\hat{X}$ și, apoi, prin întoarcere la X. Aceasta este esența Analizei nestandard; *ea nu ne permite să descoperim nici o teoremă din Analiza standard* *care nu poate fi obținută și direct* (adică fără a face apel la elemente nestandard), putîndu-se da chiar o metodă de a converti orice demonstrație nestandard în una standard. Aceasta se explică prin faptul că teoria lui Robinson nu adaugă Analizei standard nici o axiomă nouă de logică sau de teoria mulțimilor. Dar demonstrațiile nestandard sînt deseori mai intuitive și mai naturale, ele pot fi inventate mai ușor decît cele tradiționale. Vom dezvolta, în cele ce urmează, unele detalii ale acestui mod de a vedea; în acest fel, unele aspecte care au fost pînă acum eludate vor putea fi aduse în discuție iar altele, care au fost numai tangențial atinse, cum ar fi teorema de compacitate (sau principiul finitudinii) și mulțimile interne, se vor bucura de mai multă atenție și vor fi tratate într-un spirit mai apropiat de mentalitatea ansamblistă, deci fără a se face apel la teoria tipurilor, ca în teoria lui Robinson.

12. UNIVERSUL DISCURSULUI

În vederea construirii, în paragraful următor, a unui limbaj adecvat exprimării enunțurilor relative la X și $\hat{X}$, este nevoie în prealabil să construim un univers U al discursului, care conține toate obiectele matematice relevante pentru un anumit domeniu. Primul obiect al acestui univers va fi o mulțime V formată din toate obiectele considerate ca „atomi" (deci care nu-s privite ca mulțimi, ci ca puncte); de exemplu, în Analiza reală sau complexă V va fi mulțimea tuturor numerelor reale sau complexe. Vom introduce acum un operator aplicabil oricărui obiect X. Rezultatul aplicării sale la X este notat cu ωX și este: egal cu mulțimea vidă dacă X nu e o mulțime sau, fiind o mulțime, nu conține, ca element, nici o mulțime nevidă; egal cu $\{x;$ există $y \in X$, astfel încît $x \in y\}$. Punînd $V_0 = V$, să notăm cu V_1 rezultatul aplicării la V_0 a operatorului ω și, prin recurență, să definim pe V_{i+1} ca rezultat al aplicării aceluiași operator la V_i. Mulțimea U_0 obținută ca reuniune a mulțimilor $V_i (i = 0, 1, 2, ...)$ este cea mai mică mulțime tranzitivă (în sensul că din $x \in y$ și $y \in U_0$ rezultă $x \in U_0$) care conține pe V. Să notăm cu U_1 reuniunea lui U_0 cu mulțimea părților lui U_0 și, prin recurență, să definim mulțimea U_{i+1} ca reuniune a mulțimii U_i cu mulțimea părților lui U_i. *Universul discursului* va fi constituit de reuniunea U a mulțimilor $U_i (i = 0, 1, 2, ...)$. Din tranzitivitatea (ușor de verificat) a fiecărei mulțimi U_i rezultă tranzitivitatea lui U.

Să notăm cu $\mathcal{P}$ operatorul de trecere de la o mulțime A la mulțimea $\mathcal{P}(A)$ a părților lui A. Pentru un obiect B care nu e mulțime convenim că $\mathcal{P}(B) = 0$. O mulțime X e *închisă în raport cu* $\mathcal{P}$ dacă pentru orice x din X, $\mathcal{P}(x)$ e un element din X. Mulțimea X e *ereditară* dacă din $y \subseteq x$ și $x \in X$ rezultă $y \in U$. X e închisă față de operatorul ω dacă din $x \in X$ rezultă $\omega x \in X$.

Teorema 12.1. Mulţimea U este: închisă în raport cu $\mathcal{P}$; ereditară; închisă în raport cu ω; închisă în raport cu reuniuni finite.

D e m o n s t r a ţ i e. Fie $x \in U$; există i cu $x \in U_i$. Dacă x e mulţime, din tranzitivitatea lui U_i rezultă $x \subseteq U_i$, deci $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(U_i)$. Aceeaşi incluziune are loc şi în cazul în care x nu e mulţime: $\mathcal{P}(x) = 0 \subseteq \mathcal{P}(U_i)$. Însă $\mathcal{P}(U_i) \subseteq U_{i+1}$, deci $\mathcal{P}(x) \subseteq U_{i+1}$, de unde rezultă $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(U_{i+1}) \subseteq \subseteq U_{i+2} \subseteq U$, deci U este închisă în raport cu $\mathcal{P}$.

Fie acum $y \subseteq x \in U$. Avem $y \in \mathcal{P}(x)$, deci $\mathcal{P}(x) \in U$ (conform închiderii lui U în raport cu $\mathcal{P}$), de unde rezultă, în baza tranzitivităţii lui U, apartenenţa lui y la U.

Pentru a arăta că U e închisă faţă de operatorul ω introdus mai sus, fie x în U. Există i astfel încît $x \in U_i$ şi, pentru $z \in y$, obţinem, datorită tranzitivităţii lui U_i, $z \in U_i$, deci $\omega x \subseteq U_i$, deci $\omega x \in \mathcal{P}(U_i) \subseteq U_{i+1} \subseteq U$ şi ωx e un element din U.

Să arătăm acum că dacă $x_1, \ldots, x_n$ sînt elemente din U, atunci $x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$ e un element din U. Într-adevăr, mulţimea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e o parte finită a lui U, deci ea este un element din U. Însă avem $\omega\{x_1, \ldots x_n\} = = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$ şi, deoarece U e închisă în raport cu ω, rezultă proprietatea dorită.

O b s e r v a ţ i e. Nu orice submulţime a lui U este un element din U, dar orice parte a unui U_i e un element din U (deoarece avem $x \in \mathcal{P}(U_i) \subseteq \subseteq U_{i+1} \subseteq U$). În particular, orice parte finită a lui U e un element al unui U_i, deci al lui U (deoarece avem $U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots$). Acest fapt a fost folosit în demonstraţia ultimului punct al teoremei 12.1.

Interpretînd perechea ordonată (x, y) ca fiind mulţimea $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ (N. Wiener şi K. Kuratowski), rezultă că o pereche ordonată de elemente din U e de asemenea un element din U. Pentru $n > 2$, putem defini prin recurenţă sistemul ordonat $(x_1, \ldots, x_n)$ drept sistemul ordonat $((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$; pentru ca aceasta să fie valabilă şi pentru $n = 2$, punem $(x) = x$. Acum putem defini produsul cartezian: $X \times Y = \{(x, y);\ x \in X, y \in Y\}$ şi, mai general,

$$\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n} Y_i = (y_1, \ldots, y_n);\quad y_i \in Y_i,\quad i = 1, \ldots, n, \text{ deci}$$

$$\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n} Y_i = \left(\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n-1} Y_i\right) \times Y_n \text{ pentru orice } n \geqslant 2.$$

Prin inducţie în raport cu n, se obţine

Propoziţia 12.1. *Universul discursului este închis în raport cu produsele carteziene finite.* (Cu alte cuvinte, dacă $Y_i \in U$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, atunci produsul cartezian al mulţimilor Y_i aparţine de asemenea lui U.)

Obiectele cu care se lucrează într-un anumit domeniu al matematicii se obţin prin operatori de tipul ω sau $\mathcal{P}$ şi prin produse carteziene, în combinaţii adecvate şi pornind de la o mulţime V convenabilă. De exemplu, o mulţime de funcţii reale de n variabile reale este o parte a lui $\mathcal{P}(R^{n+1})$ (R fiind mulţimea numerelor reale), deci aparţine lui U. O măsură cu valori complexe, definită pentru mulţimi din spaţiul euclidian tridimensional, este un element din $\mathcal{P}(\mathcal{P}(R^3) \times R^2)$, deci un element din U.

Vom converti acum universul U într-un sistem matematic, prin specificarea, în U, a unei relaţii binare — relaţia de apartenenţă notată cu $\in$ şi restrînsă la U — şi a două operaţii binare, notate pr şi ap, definite astfel: x pr $y = (x, y)$ (deci trecerea de la x şi y la perechea lor ordonată) şi f ap $x = f(x)$ (deci trecerea de la elementul x şi funcţia f la valoarea lui f în x). Putem presupune că f ap x are sens pentru orice f şi orice x, dar dacă f nu e o funcţie sau e o funcţie care nu e definită în x, punem f ap x = mulţimea vidă. Evident, are loc

Propoziţia 12.2. *Universul U este închis în raport cu operaţiile pr şi ap.*

Vom scrie de obicei prescurtat (x, y) în loc de x pr y şi fx sau $f(x)$ în loc de f ap x, dar vom avea în vedere, ori de cîte ori este cazul, implicarea unei operaţii pr sau ap. De exemplu, adunarea $x + y$ va fi gîndită $+$ap($x$pr y).

13. UN LIMBAJ FORMAL PENTRU UNIVERSUL DISCURSULUI

Este vorba, de fapt, de limbajul matematic obişnuit, însă într-o formă ceva mai sistematizată şi mai explicită ca de obicei. Să notăm acest limbaj cu $\mathcal{L}$.

Mai întîi, pentru fiecare obiect din U vom dispune, în $\mathcal{L}$, de cel puţin un simbol pentru a-l desemna; aceste simboluri sînt *constante* sau, mai precis, *constante individuale*. Numărul lor poate fi infinit, chiar dacă numai un număr finit dintre ele pot fi scrise în mod efectiv. Exemple: 0 pentru mulţimea vidă, 8 pentru numărul opt, log pentru funcţia logaritm. Dacă pentru un anume obiect nu dispunem de o notaţie prealabilă, vom folosi o literă oarecare de la începutul sau mijlocul alfabetului — rezervînd literele de la sfîrşitul alfabetului pentru *variabile*; aceste variabile parcurg, de obicei, universul U. Vom include în $\mathcal{L}$ şi simbolurile pr şi ap definite în paragraful precedent; combinîndu-le pe acestea cu constante şi cu variabile şi considerînd posibile iteraţii ale unora sau altora obţinem *termenii* lui $\mathcal{L}$. Un exemplu de termen este „cos ap$\{+$ap$\{\pi$pr$x\}\}$", care poate fi abreviat „$\cos(\pi+x)$"; de fapt, limbajul matematic obişnuit foloseşte tocmai astfel de abrevieri. Un termen care nu conţine nici o variabilă desemnează un obiect din U, după cum un termen în care fiecare variabilă a fost înlocuită cu cîte un termen fără variabile desemnează de asemenea un obiect din U.

Simbolul $=$ desemnînd egalitatea şi simbolul $\in$ desemnînd apartenenţa sînt de asemenea incluse în $\mathcal{L}$. Vom numi *formule atomice* în $\mathcal{L}$ expresiile de forma $x = y$ sau $x \in y$, unde x şi y sînt termeni din $\mathcal{L}$. Pentru a obţine şi alte formule, vom mai include în $\mathcal{L}$ conectivele $\neg$ (simbolul negaţiei, citit *nu* sau *nu este cazul*), & (conjuncţia *şi*), $\Rightarrow$ (simbolul implicaţiei, echivalent cu *numai dacă*), $\vee$ (disjuncţia *sau*) şi $\Leftrightarrow$ (echivalenţa, citită *dacă şi numai dacă*). Mai introducem în $\mathcal{L}$ cuantificatorul universal $\forall$ şi pe cel existenţial $\exists$, care în mod obligatoriu trebuie să fie urmaţi de cîte o variabilă ($\forall x$ înseamnă *pentru orice x în U* iar $\exists x$ înseamnă *există x în U astfel încît*). Orice expresie obţinută pornind de la formule atomice, prin aplicarea, de un număr finit de ori, a unor conective şi cuantificatori, constituie o *formulă* în $\mathcal{L}$.

Există anumite contexte în care unei variabile nu i se poate substitui o constantă. Astfel, în expresiile $\exists x\Phi$ sau $\forall x\Phi$, unde x e o variabilă iar Φ o formulă care conţine variabila x, nu putem substitui lui x o constantă; spunem în acest caz, că variabila este *legată*. Situaţia variabilelor legate se aseamănă cu aceea a variabilelor de integrare sau a indicilor de sumare, care de asemenea nu pot fi substituite cu constante. În toate celelalte cazuri, spunem că variabilele sînt *libere*. O formulă în care există măcar o variabilă liberă nu exprimă o aserţiune cu valoare determinată (adevărată sau falsă), valoarea ei depinzînd de constantele care sînt substituite variabilelor. O formulă care nu conţine nici o variabilă liberă va fi numită *propoziţie*. O propoziţie exprimă o aserţiune determinată — adevărată sau falsă — relativă la sistemul matematic descris în paragraful anterior. Astfel, formula $\exists x[x \subseteq y]$ nu este o propoziţie, deoarece variabila y este liberă, în timp ce formula $\forall x \exists y[y \neq x]$ este o propoziţie adevărată, iar formula $\forall x \forall y[x \subseteq y]$ este o propoziţie falsă. (Am folosit pentru formula $\neg(y = x)$ abrevierea $y \neq x$ iar pentru formula $\forall t(t \in x \Rightarrow t \in y)$ abrevierea $x \subseteq y$). Uneori, scrierea $\Phi(x_1, ..., x_n)$ arată că este vorba de o formulă în care numai variabilele $x_1, ..., x_n$ sînt libere; în acest caz, rezultatul înlocuirii variabilelor $x_1, ..., x_n$ prin constantele $c_1, c_2, ..., c_n$ este propoziţia $\Phi(c_1, ..., c_n)$. Semnul $\models$ aşezat în faţa unei propoziţii arată că este vorba de o propoziţie adevărată.

14. MODELE STANDARD ŞI MODELE NESTANDARD

Fie I aplicaţia care asociază fiecărei constante din $\mathcal{L}$ obiectul (din U) pe care ea îl desemnează; aceasta este o aplicaţie *pe* U. Fie $\mathcal{U}$ sistemul de obiecte $(U, I, \in, \text{pr}, \text{ap})$, care rezumă acea interpretare a lui $\mathcal{L}$ care a fost descrisă pînă aici. Primul obiect, U, arată domeniul de acţiune al cuantificatorilor din $\mathcal{L}$ ($\exists x$ înseamnă „există x în U astfel încît" iar $\forall x$ înseamnă „pentru orice x din U are loc"); al doilea obiect, I, descrie semnificaţia constantelor din $\mathcal{L}$; $\in$ exprimă relaţia de apartenenţă în $\mathcal{L}$, iar pr şi ap sînt, în $\mathcal{L}$, operaţiile binare pe care le-am descris într-un paragraf anterior. În ceea ce priveşte conectivele şi relaţia de egalitate $=$, semnificaţia lor va rămîne aceeaşi în *orice* interpretare. Alături de interpretarea $\mathcal{U}$ putem însă considera şi alte interpretări ale lui $\mathcal{L}$. O interpretare oarecare $\mathcal{U}^*$ a lui $\mathcal{L}$ s-ar exprima printr-un sistem $(U^*, I^*, \in^*, \text{pr}^*, \text{ap}^*)$, unde U^* este o mulţime nevidă, I^* este o aplicaţie în U^* a mulţimii constantelor din $\mathcal{L}$, $\in^*$ este o relaţie binară în U^*, iar pr* şi ap* sînt operaţii binare (adică aplicaţii ale lui $U^* \times U^*$ în U^*) în raport cu care U^* este închisă. Semnul * are peste tot semnificaţia de *pseudo*. Interpretarea $\mathcal{U}^*$ a lui $\mathcal{L}$ revine la faptul că $\exists x$ are semnificaţia „există x în U^* astfel încît", o constantă din $\mathcal{L}$ desemnează acel element din U^* care i se asociază prin aplicaţia I^*, simbolul $\in$ din $\mathcal{L}$ desemnează relaţia $\in^*$ (care poate să fie sau să nu fie relaţia de apartenenţă) etc.; conectivele şi relaţia de egalitate îşi păstrează interpretarea uzuală. O propoziţie poate avea, în raport cu interpretarea $\mathcal{U}^*$, valoarea de adevăr sau fals. Notăm cu $^*|= p$ faptul că propoziţia p este adevărată în raport cu $\mathcal{U}^*$. Două interpretări diferite $\mathcal{U}^*$ şi $\overline{\mathcal{U}}^* = (\overline{\mathcal{U}}^*, \overline{I}^*, \overline{\in}^*, \overline{pr}^*, \overline{ap}^*)$ ale lui $\mathcal{L}$ sînt considerate *izomorfe* dacă există o aplicaţie bijectivă φ a lui U^* pe $\overline{U}^*$ astfel încît pentru orice constantă c din $\mathcal{L}$ avem $\overline{I}^*(c) = \varphi(I^*(c))$ şi astfel încît, pentru orice α şi β din U^* avem $\alpha \in^* \beta$ dacă şi numai dacă $\varphi(\alpha)\overline{\in}^*\varphi(\beta)$, $\varphi(\alpha\, pr^*\beta) = \varphi(\alpha)\overline{pr}^*\varphi(\beta)$ şi $\varphi(\alpha\ ap^*\beta) = \varphi(\alpha)\overline{ap}^*\varphi(\beta)$. O aplicaţie φ cu aceste proprietăţi (exceptînd eventual proprietatea de a fi o aplicaţie *pe)* este o *scufundare izomorfă* a lui $\mathcal{U}^*$ în $\overline{\mathcal{U}}^*$.

Spunem că $\mathcal{U}^*$ e un *model* pentru o colecţie $\mathcal{S}$ de propoziţii din $\mathcal{L}$ dacă pentru orice S din $\mathcal{S}$ avem $^*|=S$. Dacă două interpretări ale lui $\mathcal{L}$ sînt izomorfe şi dacă una din ele este un model al lui $\mathcal{S}$, atunci, evident, şi cealaltă este un model al lui $\mathcal{S}$. Cu ajutorul noţiunii de model, putem introduce distincţia dintre sistemele standard şi cele nestandard, distincţie care va reveni, în esenţă, la aceea dintre interpretarea iniţială $\mathcal{U}$ a lui $\mathcal{L}$ şi orice altă interpretare $\mathcal{U}^*$ a lui $\mathcal{L}$; anume, $\mathcal{U}$ va fi *modelul standard* (sau *lumea standard)* pentru colecţia $\mathcal{C}$ a propoziţiilor din $\mathcal{L}$ care sînt adevărate în $\mathcal{U}$, în timp ce orice alt model $\mathcal{U}^*$ al lui $\mathcal{C}$, care nu este izomorf cu $\mathcal{U}$, este un *model nestandard* (sau o *lume nestandard)* al lui $\mathcal{C}$. Se înţelege deci că orice model al lui $\mathcal{C}$ care este izomorf cu $\mathcal{U}$ e identificat cu acesta din urmă şi considerat o variantă a modelului standard al lui $\mathcal{C}$. Să observăm că din simplul fapt că o interpretare $\mathcal{U}^*$ a lui $\mathcal{L}$ este un model al colecţiei $\mathcal{C}$ rezultă că orice propoziţie adevărată în $\mathcal{U}^*$ este adevărată şi în interpretarea iniţială $\mathcal{U}$ şi reciproc, orice propoziţie adevărată în $\mathcal{U}$ este adevărată şi în $\mathcal{U}^*$

15. SCUFUNDAREA NATURALĂ. OBIECTE STANDARD ŞI OBIECTE NESTANDARD

Modelul standard al lui $\mathcal{C}$ are o situaţie privilegiată faţă de orice model nestandard al lui $\mathcal{C}$, după cum rezultă din

Teorema 15.1. Pentru orice model $\mathcal{U}^*$ al lui $\mathcal{C}$ există o scufundare izomorfă şi numai una a lui $\mathcal{U}$ în $\mathcal{U}^*$. (O vom numi scufundarea naturală a lui $\mathcal{U}$ în $\mathcal{U}^*$).

Demonstraţie. Pentru orice constantă c din $\mathcal{L}$ vom nota tot cu c imaginea ei în U prin aplicaţia I. Să notăm cu c^* imaginea în U a aceleiaşi constante c prin aplicaţia I^*. Într-o scufundare izomorfă a lui $\mathcal{U}$ în $\mathcal{U}^*$ este obligatoriu ca c^* să corespundă lui c. Dar, deoarece unul şi acelaşi obiect din U poate corespunde, prin I, la mai multe constante din $\mathcal{L}$, trebuie să ne asigurăm că imaginea acestui obiect în U^* nu depinde de modul în care alegem constanta (din $\mathcal{L}$) de la care el provine. Într-adevăr, fie d o altă constantă din $\mathcal{L}$ a cărei imagine prin I este obiectul c. Propoziţia „$c = d$" este adevărată în $\mathcal{U}$, deci, deoarece $\mathcal{U}^*$ e un model al lui $\mathcal{C}$, rezultă (a se vedea sfîrşitul paragrafului 14) că aceeaşi propoziţie este adevărată şi în $\mathcal{U}^*$, deci c^* trebuie să fie egal cu d^*. Dacă mai ţinem seamă că I e o aplicaţie *pe* U, rezultă că, prin corespondenţa de la c la c^* definită mai sus, întreaga mulţime U este aplicată în mulţimea U^*. Pentru a arăta că această aplicaţie este injectivă, fie c şi d două elemente distincte ale mulţimii U; ca şi pînă aici, să notăm tot cu c şi d simbolurile utilizate în $\mathcal{L}$ pentru desemnarea lor. Propoziţia „$c \neq d$" (sau, în formă neabreviată, „$\neg(c = d)$") din $\mathcal{L}$ este adevărată în $\mathcal{U}$, deci ea e adevărată şi în $\mathcal{U}^*$, cu alte cuvinte c^* trebuie să fie diferit de d^*.

Scufundarea lui $\mathcal{U}$ în $\mathcal{U}^*$ este izomorfă, deoarece, după cum se poate verifica uşor, pentru orice c, d şi e din U, relaţia $c \in d$ e echivalentă cu $c^* \in^* d^*$, în timp ce din $e = c \text{ pr } d$ rezultă $e^* = c^* \text{ pr}^* d^*$ iar din $e = c \text{ ap } d$ rezultă $e^* = c^* \text{ ap}^* d^*$.

Observaţie. Din demonstraţie rezultă că scufundarea lui $\mathcal{U}$ în $\mathcal{U}^*$ este o aplicaţie *pe* $\mathcal{U}^*$ dacă şi numai dacă I^* este o aplicaţie *pe* U^*. Deci un model $\mathcal{U}^*$ al lui $\mathcal{C}$ este standard dacă şi numai dacă I^* e o aplicaţie *pe* U^*.

Ori de cîte ori $\mathcal{U}^*$ e un model al lui $\mathcal{C}$, vom conveni să spunem că $\mathcal{U}^*$ e o extensie a lui $\mathcal{U}$. Cîştigăm astfel o anumită simplificare a notaţiei, putînd identifica pe c cu c^* (unde c e un obiect din U). Elementele din U^* care aparţin lui U se numesc *obiecte standard*, în timp ce cele din $U^* - U$ (putem presupune, în virtutea teoremei 15.1, că $U \subseteq U^*$) sînt *obiecte nestandard*; acestea din urmă sînt obiectele pentru care nu există nume în $\mathcal{L}$, deci care nu corespund, prin aplicaţia I^*, unor constante din $\mathcal{L}$. Dacă a şi b sînt obiecte standard, atunci avem $a \in b$ dacă şi numai dacă $a \in^* b$, în timp ce $a \text{ pr } b$ e tot una cu $a \text{ pr}^* b$ iar $a \text{ ap } b$ e tot una cu $a \text{ ap}^* b$. Într-adevăr, $\mathcal{U}^*$ fiind o extensie a lui $\mathcal{U}$, $\in^*$, pr^* şi ap^* au ca restricţie la U pe $\in$, pr şi, respectiv, ap. Deoarece U este închisă în raport cu operaţiile pr şi ap, rezultatul aplicării lor la obiecte standard e totdeauna un obiect standard. Dacă s e standard şi $\alpha \in s$, atunci şi α e standard (datorită tranzitivităţii lui U); deci $\alpha \in {}^*s$. Reciproca însă nu e adevărată; din faptul că s e standard şi $\alpha \in {}^*s$ nu rezultă că α e standard. *Deci o mulţime standard poate conţine elemente nestandard* (adică pseudoelemente); aceste elemente aparţin mulţimii numai ideal, nu şi efectiv. Vom vedea mai jos exemple de astfel de anomalii, care nu pot să apară decît la mulţimi infinite, după cum rezultă din

Propoziţia 15.1. *O mulţime standard finită nu poate conţine elemente nestandard.*

Demonstraţie. Fie $s = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ o mulţime standard. Propoziţia „$\forall x\{x \in s \Leftrightarrow x = a_1 \vee x = a_2 \vee ... \vee x = a_n\}$" e adevărată în $\mathcal{U}$, deci e adevărată în $\mathcal{U}^*$. Interpretînd această propoziţie în $\mathcal{U}^*$, rezultă că toate elementele din s sînt standard.

Observaţie. Demonstraţia propoziţiei 15.1 nu poate fi extinsă la mulţimi infinite, deoarece pentru $s = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ propoziţia corespunzătoare ar avea o lungime infinită, deci... n-ar mai fi o propoziţie.

16. MULŢIMI INTERNE ŞI MULŢIMI EXTERNE

Fiecărei noţiuni matematice relative la obiecte din lumea standard îi corespunde o noţiune —* care are sens pentru obiecte din orice model $\mathcal{U}^*$ al lui $\mathcal{C}$. De exemplu, o mulţime* e un obiect din U^* care sau e mulţimea vidă sau are un membru*. O mulţime ordonată* e rezultatul aplicării lui pr* la două obiecte din U^*; o relaţie în U^* este o mulţime* de perechi ordonate*. Orice mulţime în U este, cu atît mai mult, o mulţime* în U^* etc. Aceste exemple arată în ce sens va fi utilizat simbolul* în cele ce urmează.

Fie s o mulţime * şi fie $\hat{s}$ (numită *scopul lui s)* colecţia membrilor* ai lui s; deci $\hat{s} = \{\alpha;\ \alpha \in {}^*s\}$. Nu totdeauna mulţimea $\hat{s}$ aparţine lui U şi nici măcar nu e totdeauna o mulţime*, dar ea e un membru din $\mathcal{P}(U^*)$. Membrii lui $\hat{s}$ sînt membrii* ai lui s. Corespondenţa $s \to \hat{s}$ care asociază un scop fiecărei mulţimi* este o bijecţie.

Propoziţia 16.1. *Dacă t e o submulţime* a lui s, atunci $\hat{t}$ e o submulţime a lui $\hat{s}$.*

D e m o n s t r a ţ i e. În $\mathcal{U}$ — deci în $\mathcal{U}^*$ — este adevărată propoziţia „$\forall x \forall y[x \subseteq y \Rightarrow \forall z[z \in x \Rightarrow z \in y]]$", unde „$x \subseteq y$" este o exprimare abreviată a propoziţiei „$[x = 0 \vee \exists z[z \in x]] \,\&\, [y = 0 \vee \exists z[z \in y]] \Leftrightarrow \& \forall z[z \in x \Rightarrow$ $\Rightarrow z \in y]$".

Fiind dată o submulţime τ a lui $\hat{s}$, există două posibilităţi: 1° există t în U^* astfel încît $\tau = \hat{t}$ (în acest caz t trebuie să fie o submulţime* a lui s), caz în care Robinson numeşte pe τ *mulţime internă* sau, mai precis, *submulţime internă a lui $\hat{s}$*; 2° nu există t cu proprietatea de la 1°; în acest caz τ este o *mulţime externă.*

Fie f o funcţie* care aplică* mulţimea* A în* mulţimea* B. Fie $\alpha \in \hat{A}$. Avem $\alpha \in^* A$, deci f ap* α e un membru* al lui B, adică f ap* α e un membru al lui $\hat{B}$. Rezultă că f induce în mod natural o aplicaţie $\alpha \to f$ ap* α a lui $\hat{A}$ în $\hat{B}$. Dar poate exista o aplicaţie ψ a lui $\hat{A}$ în $\hat{B}$ care să nu fie indusă (în modul pe care tocmai l-am descris) de nici o funcţie* f; mai precis, aceasta se întîmplă exact atunci cînd ψ este o submulţime externă a lui $\hat{A} \times \hat{B}$, caz în care vom spune că ψ este o *funcţie externă.* Vom abrevia cu (α, β) relaţia α pr* β şi cu $f\alpha$ sau $f(\alpha)$ relaţia f ap* α, chiar dacă α, β şi f sînt nestandard.

Să presupunem că extindem limbajul $\mathcal{L}$ prin adăugarea, la stocul de simboluri, a unor constante noi, cu ajutorul cărora să desemnăm anumite obiecte din U^*, nu neapărat cele standard. O propoziţie ψ într-un astfel de limbaj extins poate fi încă interpretată ca specificînd o anumită propoziţie asupra lui $\mathcal{U}^*$. Mai precis, ar trebui să extindem I^* în aşa fel încît să aplice fiecare constantă nouă în obiectul din U^* pe care această constantă îl numeşte. Putem utiliza notaţia $^*|\!=\psi$ (introdusă într-un paragraf anterior ca o abreviere a propoziţiei „ψ e adevărată în $\mathcal{U}^*$") şi pentru propoziţii în extensiile lui $\mathcal{L}$ de tipul tocmai menţionat. Fie acum $\Phi(x)$ o formulă (în $\mathcal{L}$ sau într-o extensie a lui $\mathcal{L}$) şi să presupunem că simbolul α numeşte un anume obiect din U^*. Spunem despre acest obiect că *satisface formula* $\Phi(x)$ *în* $\mathcal{U}^*$ dacă $^*|\!=\Phi(\alpha)$.

Teorema 16.1. Fie s un simbol vechi sau nou, care numeşte o mulţime* din U^* şi fie $\tau \subseteq \hat{s}$. În aceste condiţii, τ e o submulţime internă a lui $\hat{s}$ dacă şi numai dacă există un număr natural n, n obiecte din U^*, numite cu simbolurile (vechi sau noi) $\beta_1, \ldots, \beta_n$ şi o formulă $\Phi(y_1, \ldots, y_n, x)$ în $\mathcal{L}$ astfel încît τ este mulţimea tuturor obiectelor care satisfac în $\mathcal{U}^*$ formula $\Phi(\beta_1, \ldots, \beta_n, x)$ & $x \in s$. (Despre τ spunem în aceste condiţii că este submulţimea lui $\hat{s}$ definită de formula $\Phi(\beta_1, \ldots, \beta_n, x)$).

D e m o n s t r a ţ i e. *Condiţia este necesară.* Fie τ internă. Există o submulţime* a lui s — fie ea β_1 — astfel încît $\hat{\beta}_1 = \tau$. Să luăm $n = 1$ şi fie $\Phi(y_1, x)$ formula „$x \in y_1$". În aceste condiţii, τ este exact mulţimea tuturor obiectelor care satisfac în $\mathcal{U}^*$ formula $x \in \beta_1$ & $x \in s$.

Condiţia este suficientă. Să admitem că este îndeplinită condiţia din enunţ şi fie propoziţia

$$\forall z\ \forall y_1\ \forall y_2 \ldots \forall y_n\ \exists v\ \forall x[x \in v \Leftrightarrow [\Phi(y_1, \ldots, y_n, x)\ \&\ x \in z]].$$

Această propoziţie din $\mathcal{L}$ este adevărată în $\mathcal{U}$; deci ea trebuie să fie adevărată şi în $\mathcal{U}^*$. În particular, propoziţia

$$\exists v\ \forall x[x \in v \Leftrightarrow [\Phi(\beta_1, \ldots, \beta_n, x)\ \&\ x \in s]]$$

(care nu-i neapărat în $\mathcal{L}$, deoarece conţine constantele $s, \beta_1, \ldots, \beta_n$, care ar putea fi noi) trebuie să fie adevărată în $\mathcal{U}^*$, ceea ce înseamnă că există în U^* un obiect ai cărui membri sînt exact obiectele care satisfac în $\mathcal{U}^*$ formula $\Phi(\beta_1, \ldots, \beta_n, x)$ & $x \in s$, cu alte cuvinte există un obiect în U^* ai cărui membri* sînt tocmai membrii lui τ; deci τ e internă şi teorema 16.1 e demonstrată.

O b s e r v a ţ i i. Se poate arăta că: 1° Dacă s e o mulţime standard, atunci $s \subseteq \hat{s}$; 2° Dacă s e o mulţime standard care conţine numai membri* standard, atunci $s = \hat{s}$ iar $\hat{s}$ conţine exclusiv submulţimi interne (în particular, aceasta se întîmplă ori de cîte ori s e o mulţime standard finită); 3° Dacă s e o mulţime standard numărabilă, dar s conţine măcar un membru* nestandard, atunci $\hat{s}$ conţine cel puţin o submulţime externă (pentru a se arăta aceasta, putem lua în rolul lui s mulţimea numerelor naturale; în virtutea lui 1° avem $s \subseteq \hat{s}$. Dacă $s = \hat{t}$, aplicăm inducţia* în raport cu t).

17. PRINCIPIUL FINITUDINII (TEOREMA DE COMPACITATE)

Pentru a putea demonstra existenţa extinderilor lui $\mathcal{U}$, avem nevoie de unele pregătiri. Să observăm mai întîi că limbajul $\mathcal{L}$ este un exemplu de *limbaj de primul ordin (cu egalitate)*. În general, un limbaj $\mathcal{L}'$ de primul ordin (cu egalitate) poate avea, în plus faţă de $\mathcal{L}$, diferite colecţii de constante individuale, de simboluri care numesc relaţii (nu neapărat binare) sau operaţii, fiecare simbol de acest fel fiind asociat cu o mulţime finită de argumente. Pentru un $\mathcal{L}'$ dat, noţiunea de sistem de interpretare se defineşte prin analogie cu modul în care s-a definit sistemul $\mathcal{U}^*$ pentru interpretarea lui $\mathcal{L}$.

Principiul finitudinii — sau *teorema de compacitate* — despre care am mai vorbit în acest capitol, afirmă că *dacă $\mathcal{L}'$ e un limbaj de primul ordin (cu egalitate) şi dacă $\mathcal{S}$ e o mulţime de propoziţii din $\mathcal{L}'$ astfel încît orice parte finită π a lui $\mathcal{S}$ admite un model (adică un sistem în care toate propoziţiile din π sînt adevărate), atunci $\mathcal{S}$ însăşi admite un model.* Această teoremă a fost demonstrată de K. Gödel în 1930 într-un caz particular, apoi extinsă de A. Malcev, L. Henkin şi A. Robinson. O demonstraţie accesibilă a ei poate fi găsită, de exemplu, în articolul lui Robert L. Vaught *Some aspects of the theory of models* (The American Mathematical Monthly, vol. 80, no. 6, June-July 1973, part. II, Papers in the Foundations of Mathematics, no. 13 of the Herbert Ellsworth slaught memorial papers, p. 3—37; a se vedea în mod special p. 7—9). O metodă indirectă de a demonstra această teoremă constă în specificarea regulilor prin care o propoziţie poate fi *dedusă formal* dintr-un număr finit de propoziţii date. Aceasta se realizează în aşa fel încît mulţimea propoziţiilor adevărate într-o anumită interpretare este închisă în raport cu aplicarea regulilor specificate. Mai mult, se arată că dacă $\mathcal{S}$ e o mulţime *formal consistentă* de propoziţii (adică astfel încît pentru nici o propoziţie Σ nu se pot deduce formal din $\mathcal{S}$ atît Σ cît şi negaţia ei), atunci $\mathcal{S}$ trebuie să aibă un model. Teorema de compacitate rezultă atunci din observaţia faptului că dacă $\mathcal{S}$ n-ar avea nici un model, atunci am putea deduce din propoziţii din $\mathcal{S}$ o propoziţie Σ împreună cu negaţia ei şi, deoarece în fiecare deducţie formală se folosesc numai un număr finit de propoziţii din $\mathcal{S}$, ar rezulta că Σ şi negaţia ar putea fi deduse dintr-o submulţime finită a lui $\mathcal{S}$; însă această submulţime nu ar putea avea un model, deoarece în acest caz s-ar obţine un sistem în care atît Σ cît şi negaţia ei ar fi adevărate — ceea ce ar fi absurd. (Pentru detalii, a se vedea L. Henkin, *The completeness of the first-order functional calculus*; Journal of Symbolic Logic, vol. 14 (1949), p. 159—166).

O metodă directă de stabilire a teoremei de compacitate constă în a considera, pentru fiecare parte finită $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, un sistem $\mathcal{U}(\mathcal{S}_0)$ care e un model al lui $\mathcal{S}_0$, construindu-se apoi, pentru fiecare $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, produsul direct al lui $\mathcal{U}(\mathcal{S}_0)$. Acest produs este apoi redus modulo (adică factorizat prin) un anume ultrafiltru peste mulţimea tuturor părţilor $\mathcal{S}_0$ iar produsul redus astfel obţinut se dovedeşte a fi un model al lui $\mathcal{S}$. (Pentru detalii, a se vedea Frayne, Morel şi Scott, *Reduced direct products*, Fundamenta Mathematicae, vol. 51, 1962, p. 195—228).

Teorema de compacitate nu presupune axioma alegerii, ci numai *principiul idealului maximal* (mai puţin restrictiv decît axioma alegerii) care afirmă că într-o algebră Boole orice ideal Boolean netrivial poate fi extins pînă la un ideal netrivial maximal. După cum observă M. Machover, acest principiu poate fi dedus, folosind metodele lui M.H. Stone din teoria sa a reprezentărilor algebrelor Booleene, din faptul că produsul topologic cu el însuşi, de un număr finit de ori, al unui spaţiu discret format din două elemente, este un spaţiu compact. Deci teorema de compacitate este de fapt — sub o formă deghizată — un caz foarte special al teoremei lui Tihonov privind produsele de spaţii topologice.

18. RELAŢII CONCURENTE

O relaţie binară peste U este o parte a produsului $U \times U$; o atare relaţie deci poate să fie sau să nu fie un membru al lui U. Putem scrie aRb ca o abreviere a lui $(a, b) \in R$ (adică a lui „a pr $b \in R$"). *Domeniul stîng* al unei relaţii binare R este mulţimea tuturor primilor membri ai perechilor ordonate din R, adică $\{a;\ aRb$ pentru un anume $b \in U\}$. După Robinson, relaţia binară R e *concurentă*, dacă pentru orice întreg pozitiv n şi pentru orice n obiecte $a_1, \ldots, a_n$ aparţinînd domeniului stîng al lui R, există un b pentru care $a_1Rb, \ldots, a_nRb$. Să observăm că dacă R e o relaţie binară oarecare iar $a_1, \ldots, a_n$ aparţin domeniului ei stîng, atunci există în orice caz $b_1, \ldots, b_n$ astfel încît $a_1Rb_1, \ldots, a_nRb_n$; dar pentru concurenţa lui R se cere ca pentru orice $a_1, \ldots, a_n$ să putem alege $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$. De exemplu, orice ordine lineară — fie ea strictă ($<$) sau slabă ($\leqslant$) — este concurentă. Deoarece U e infinită, relaţia de inegalitate $\{(a, b);\ a, b \in U,\ a \neq b\}$ este concurentă. Pentru a obţine un alt exemplu important de astfel de relaţie, fie $X \in U$ şi fie F un filtru peste X. (Avem $F \subseteq U$). Fie acum $R = \{(A, B);\ B \subseteq A \subseteq X,$ $B \in F\}$. Domeniul stîng al lui R este F. Dacă $A_1, \ldots, A_n \in F$, punînd $B = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ obţinem $B \in F$ şi $B \subseteq A_1, \ldots, B \in A_n$. Deci R e concurentă. Un alt exemplu important este următorul. Fie $X \in U$ şi $A \in X$. Să presupunem că $F \subset \mathcal{P}(X)$ şi nici o parte finită a lui F nu acoperă pe A (cu alte cuvinte, dacă G e o submulţime finită a lui F, atunci $A \nsubseteq \cup G$). Relaţia R definită prin $R = \{(B, a);\ B \in F,\ a \in A - B\}$ este concurentă.

19. EXISTENŢA EXTENSIILOR

Orice formulă din $\mathcal{L}$ cu două variabile libere — fie ea $\Phi(x, y)$ — *defineşte* o relaţie binară R_Φ în U astfel: $R_\Phi = \{(a, b);\ \models \Phi(a, b)\}$. Pentru fiecare formulă Φ pentru care R_Φ e concurentă, introducem o constantă nouă $c(\Phi)$ şi notăm cu $\mathcal{C}(\Phi)$ mulţimea tuturor propoziţiilor de forma $\Phi(a, c(\Phi))$, unde a e o constantă din $\mathcal{L}$ care numeşte un obiect din domeniul stîng al relaţiei R_Φ. Aceste propoziţii se află nu în $\mathcal{L}$, ci în limbajul $\mathcal{L}'$ obţinut din $\mathcal{L}$ prin adăugarea unor constante noi.

Propoziția 19.1. Fie $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup \{\mathcal{C}(\Phi);\ R_\Phi$ *e concurentă*$\}$. *Orice submulțime finită* $\mathcal{C}_0$ *a lui* $\mathcal{C}'$ *admite un model de forma* $\mathcal{U}_0 = (U, I_0, \in, \mathrm{pr}, \mathrm{ap})$, *unde* I_0 *(singurul obiect din componența lui* $\mathcal{U}_0$ *care diferă de obiectul corespunzător al sistemului standard* $\mathcal{U}$*) coincide cu* I *pentru toate constantele vechi (adică din* $\mathcal{L}$*).*

Demonstrație. Fie $\mathcal{C}_0$ finită, conținută în $\mathcal{C}'$. Fie Φ o formulă pentru care R_Φ e concurentă. În aceste condiții, numai un număr finit (posibil zero) de propoziții din $\mathcal{C}_\Phi$ se află în $\mathcal{C}_0$; fie aceste propoziții $\Phi(a_1, c(\Phi)),\ldots,$ $\ldots, \Phi(a_n, c(\Phi))$. Deoarece R_Φ e concurentă, există b în U astfel încît $a_1R_\Phi b, \ldots, a_nR_\Phi b$. Definim pe I_0 în așa fel încît să aplice simbolul $c(\Phi)$ pe b, dar pentru orice constantă veche c să avem $I_0(c) = I(c)$. Rezultă că $\mathcal{U}_0$ e un model al lui $\mathcal{C}_0$ și propoziția 19.1 e demonstrată.

Prin teorema de compacitate, există un sistem $\mathcal{U}' = (U', I', \mathrm{pr}', \mathrm{ap}')$ de interpretare a lui $\mathcal{L}'$, astfel încît orice propoziție din $\mathcal{C}'$ e adevărată în $\mathcal{U}'$. Fie acum U^*, $\in^*$, pr^* și ap^* aceleași ca și U', $\in'$, pr' și ap' și fie I^* restricția lui I' la vechile constante. Rezultă că $\mathcal{U}^* = (U^*, I^*, \in^*, \mathrm{pr}^*, \mathrm{ap}^*)$ e un sistem de interpretare a lui $\mathcal{L}$ în care orice propoziție din $\mathcal{C}$ este adevărată. Robinson numește *extensie* a lui $\mathcal{U}$ orice model $\mathcal{U}^*$ al lui $\mathcal{C}$ obținut în acest fel dintr-un model $\mathcal{U}'$ al lui $\mathcal{C}'$. Este imediată

Propoziția 19.2. *Un sistem* $\mathcal{U}^*$ *de interpretare a lui* $\mathcal{L}$ *e o extensie (a lui* $\mathcal{U}$*) dacă și numai dacă următoarele două condiții sînt satisfăcute:* (i) $\mathcal{U}^*$ *e un model al lui* $\mathcal{C}$; (ii) *pentru orice formulă* $\Phi(x, y)$ *din* $\mathcal{L}$ *astfel încît relația* R_Φ *e concurentă, există un obiect* $c(\Phi)$ *în* $\mathcal{U}^*$ *pentru care, dacă* $a \in U$ *și* $\models \Phi(a, b)$ *pentru un anume* $b \in U$, *atunci* $^*\!\models \Phi(a, c(\Phi))$.

20. CÎTEVA NOȚIUNI DE TOPOLOGIE NESTANDARD

Cadrul creat în paragrafele precedente pentru Analiza nestandard permite și o tratare nestandard a topologiei generale. Vom prezenta aici, urmîndu-i pe Machover și Hirschfeld (op. cit.) cîteva rudimente în acest sens.

Amintim mai întîi noțiunile de filtru și ultrafiltru, pe care dealtfel le-am utilizat deja mai sus. Un filtru F pe o mulțime X este o familie nevidă de părți ale lui X, astfel încît, pentru A, $B \in F$ avem $A \cap B \in F$ iar pentru $A \in F$ și $A \subseteq B \subseteq X$ avem $B \in F$. De obicei se mai cere unui filtru să nu conțină partea vidă a lui X, dar Machover renunță la această condiție. Fixînd o anumită mulțime $X \in U$, membrii lui X vor fi „puncte" iar filtrele vor fi considerate pe X. Fiind dată o familie G de părți ale lui X, vom nota cu G_1 familia intersecțiilor finite de membri ai lui G (intersecția unei colecții vide fiind chiar X). Vom considera filtrul $\bar{G}$ dat de $\bar{G} = \{A;\ A \supseteq B$ pentru un anume $B \in G_1\}$; acesta este filtrul generat de G. Dacă orice intersecție de două mulțimi din G conține o submulțime din G, spunem că G e o *bază* pentru filtrul generat de G. Deoarece avem $(G_1)_1 = G_1$, G_1 este o bază pentru $\bar{G}$. Deci orice filtru e o bază pentru el însuși.

Deoarece $G \subseteq \mathcal{P}(X)$, avem $G \in U$ şi $G \subseteq U$. Definim *nucleul* lui G drept mulţimea tuturor obiectelor din U^* care sînt puncte* ale tuturor membrilor lui G. Scriem Nuc $G = \bigcap \{\hat{A};\ A \in G\}$. Deci $a \in$ Nuc G dacă şi numai dacă $a^* \in A$ de îndată ce $A \in G$. (Aici, G şi A sînt mulţimi standard, în timp ce punctele* a pot să fie sau nu standard). Nuc G e o submulţime (externă în cele mai multe cazuri interesante) a lui $\hat{X}$. Dacă $\tau =$ Nuc G pentru o anume familie G de părţi ale lui X, spunem că τ e *nuclear*. Dăm fără demonstraţie

Teorema 20.1. Fie $G \subseteq \mathcal{P}(X)$ şi fie $F = \bar{G}$ (adică F e filtrul generat de G). În aceste condiţii Nuc $F =$ Nuc G.

Fie $G \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dacă $D^* \in G$ şi $\hat{D} \subseteq$ Nuc G, spunem că D e un *membru* infinitezimal* al lui G. Dăm fără demonstraţie

Teorema 20.2. Fie F un filtru; atunci F conţine un membru* infinitezimal. Mai general, dacă $G \subseteq F$, atunci G e o bază pentru F dacă şi numai dacă F conţine un membru* infinitezimal care aparţine* lui G.

Pentru $\tau \subseteq \hat{X}$, definim *filtrul* Fil τ *determinat de* τ prin Fil $\tau = \{A;\ A \subset X,\ \tau \subset \hat{A}\}$. Există un fel de conexiune Galois între Nuc şi Fil, după cum rezultă din teorema (pe care o reproducem fără demonstraţie):

Teorema 20.3. Dacă $\tau \subseteq \sigma \subseteq \hat{X}$, atunci Fil $\tau \supseteq$ Fil σ. Pentru orice filtru F, Fil (Nuc) $F = F$. Date două filtre F şi G, avem $F \subseteq G$ dacă şi numai dacă Nuc $F \supseteq$ Nuc G.

Există deci o bijecţie naturală între filtre şi nucleele lor; în acest fel, utilizarea filtrelor poate fi, în general, înlocuită cu utilizarea nucleelor, ceea ce constituie o simplificare, deoarece un filtru e o familie de părţi (ale lui X), în timp ce nucleul e o parte (a lui X).

Pentru $\tau \subseteq \hat{X}$ să punem $\bar{\tau} =$ Nuc (Fil τ). Avem $\tau \subseteq \bar{\tau}$, dar se poate demonstra

Teorema 20.4. $\bar{\tau}$ e cel mai mic $\tau \subseteq \hat{X}$ astfel încît σ e nuclear şi $\tau \subseteq \sigma$.

Două tipuri speciale de filtre sînt interesante din punctul de vedere al nucleelor lor: *filtrele principale* (F e principal dacă există $A \subseteq X$ astfel încît F e generat de $\{A\}$) şi *ultrafiltrele* (filtrul F e un ultrafiltru dacă e netrivial şi nu poate fi extins la un filtru netrivial mai cuprinzător). Din teorema 20.1 rezultă că, pentru F principal, avem Nuc $F = \hat{A}$, deci nucleele filtrelor principale sînt exact scopurile mulţimilor standard. În particular, mulţimea vidă e nucleul filtrului trivial $\mathcal{P}(X)$. Despre nucleele ultrafiltrelor se poate arăta (Machover, loc. cit., p. 20) că ele sînt exact mulţimile de forma $\overline{\{p\}}$ cu $p \in \hat{X}$. În plus, dacă $q \in \overline{\{p\}}$, atunci $\overline{\{q\}} = \overline{\{p\}}$. Se mai poate arăta că dacă $p \in X$, atunci $\overline{\{p\}} = \{p\}$ e nucleul unui ultrafiltru principal; dacă $p \in \hat{X} - X$ (adică p e un punct* nestandard), atunci $\overline{\{p\}}$ e nucleul unui ultrafiltru liber (adică neprincipal).

Teorema 20.5. Avem Nuc $(F \cap G) =$ Nuc $F \cup$ Nuc G, **oricare ar fi filtrele** F **şi** G. (Machover, op. cit., p. 21—22).

Putem acum introduce o topologie în $\hat{X}$, luînd drept mulţimi închise submulţimile nucleare. Într-adevăr, partea vidă e nucleul lui $\mathcal{P}(X)$ iar $\hat{X}$ e nucleul lui $\{X\}$. Din teorema 20.5. rezultă că reuniunea a două mulţimi nucleare e nucleară, în timp ce intersecţia unei familii arbitrare de mulţimi nucleare e o mulţime nucleară, în virtutea faptului că, pentru o familie $\{F_j;\ j \in J\}$ de filtre, avem Nuc $(\bigcap \{F_j;\ j \in J\}) = \overline{\bigcup \{\text{Nuc } F_j;\ j \in J\}}$ şi, în mod dual, Nuc $\overline{\bigcup \{F_j;\ j \in J\}} = \bigcap \{\text{Nuc } F_j;\ j \in J\}$ (se folosesc teoremele 20.3 şi 20.4). Se constată că o mulţime din $\hat{X}$ e închisă şi deschisă dacă şi numai dacă e nucleul unui filtru principal. $\hat{X}$ nu e un spaţiu Hausdorff. În fapt, $\overline{\{p\}} = \{p\}$ dacă şi numai dacă $\{p\}$ e standard; însă dacă p e nestandard, $\overline{\{p\}}$ e infinită. Fie $X \in U$ şi fie $\mathcal{Q}$ o topologie în X. Robinson defineşte *monada* $\mu(p)$ a unui punct $p \in X$ ca fiind partea comună a mulţimilor $\hat{B}$ pentru care B e o vecinătate a lui p. Familia F_p a vecinătăţilor lui p e un filtru şi avem $\mu(p) =$ Nuc F_p şi $p \in \mu(p)$. Evident, $\mu(p)$ depinde de topologia $\mathcal{Q}$, deci ar trebui să vorbim despre monada $\mu_{\mathcal{Q}}(p)$ indusă de topologia $\mathcal{Q}$; însă dacă $\mathcal{Q}$ e fixă, referinţa la $\mathcal{Q}$ poate fi omisă.

Conform teoremei 20.2., fiecare punct p are o vecinătate* infinitezimală (adică un $D^* \in F_p$ pentru care $\hat{D} \subseteq \mu(p)$) — şi deoarece vecinătăţile deschise ale lui p constituie o bază pentru F_p, p admite o vecinătate* deschisă* infinitezimală.

Dacă $q \in \mu(p)$, scriem $q \approx p$ şi spunem că q e *lîngă* (sau *infinit apropiat de*, sau *aproape egal cu*) p. *Lîngă* nu e, în general, o relaţie de echivalenţă; să observăm că dacă $q \approx p$, atunci q poate să fie sau să nu fie standard, însă p trebuie să fie standard, deoarece $\mu(p)$ a fost definit numai pentru cazul în care p e un punct, nu şi în cazul mai general în care el e un punct*. Dacă $q \approx p$ pentru un anume $p \in X$, spunem că q e un punct* *aproape-standard*. Un punct* care nu e aproape standard e numit *îndepărtat*.

Teorema 20.6. (Robinson). **Fie** $B \subseteq X$; B **e deschisă dacă şi numai dacă** $q \approx p \in B$ **implică** $q^* \in \hat{B}$, **cu alte cuvinte monada fiecărui punct din** B **e conţinută în** $\hat{B}$. B **e închisă dacă şi numai dacă** $q \approx p$, $q^* \in B$, **implică** $p \in B$, **adică orice punct a cărui monadă se intersectează cu** $\hat{B}$ **trebuie să aparţină lui** B.

Demonstrație. Conform teoremei 20.3, Fil $\mu(p) = F_p$. Deci B e o vecinătate a lui p dacă şi numai dacă $\mu(p) \subseteq \hat{B}$. B e deschisă dacă şi numai dacă B e o vecinătate a fiecărui punct din B. B e închisă dacă şi numai dacă $X - B$ e deschisă.

Vom încheia cu

Teorema 20.7 (Robinson). (i) **Topologia din X e de tipul T_0 dacă şi numai dacă nu există două puncte infinit apropiate (deci pentru $q \in \mu(p)$, $p \in \mu(q)$ avem $p = q$).** (ii) **Topologia lui X e de tipul T_1 dacă şi numai dacă nici un punct nu e infinit apropiat de un altul (deci dacă q e standard şi $q \in \mu(p)$, atunci $q = p$).** (iii) **Topologia lui X e de tipul T_2** (Hausdorff) **dacă şi numai dacă monadele unor puncte diferite sînt totdeauna disjuncte (adică nici un punct* nu e lîngă două puncte diferite).** (iv) **Punctul p e izolat dacă şi numai dacă singurul punct* infinit apropiat de p este p însuşi (adică $\mu(p) = \{p\}$).**

Demonstrație. Lăsînd (i), (ii) şi (iv) pe seama cititorului, vom demonstra (iii). Să presupunem mai întîi că topologia e Hausdorff. În acest caz, dacă p şi q sînt puncte diferite, există $A \in F_p$, $B \in F_q$ astfel încît A şi B sînt disjuncte. Deci A şi B sînt disjuncte*, deci $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ sînt disjuncte. Cu atît mai mult, $\mu(p)$ şi $\mu(q)$ trebuie să fie disjuncte. Reciproc, dacă $\mu(p)$ şi $\mu(q)$ sînt disjuncte, să considerăm o vecinătate* infinitezimală a lui p şi o vecinătate* infinitezimală a lui q. Propoziția

$$\exists x\, \exists y[x \in F_p \,\&\, y \in F_q \,\&\, \neg\exists z[z \in x \,\&\, z \in y\}]]$$

este adevărată în $\mathcal{U}^*$. Reinterpretînd această propoziție în lumea standard, rezultă că p şi q au vecinătăți disjuncte.

21. CONSIDERAȚII FINALE

Considerațiile de topologie nestandard din paragraful anterior ar putea fi mult continuate. Avem în vedere atît lucrarea menționată a lui Machover şi Hirschfeld cît şi altele ulterioare, cum ar fi cele ale lui Andrew Adler, Steven F. Bellenot, C. Ward Henson, L.J. Moore, Louis Narens şi Frank Wattenberg din volumul colectiv (editat de Albert Hurd şi Peter Loeb) *Victoria Symposium on Non-standard Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin, 1974. În acelaşi volum, studiul lui Elias Zakon *A new variant of nonstandard analysis* (p. 313—339) (ca şi articolul pe care acesta îl continuă, al lui A. Robinson şi E. Zakon *A set-theoretical characterization of enlargements*, Proceedings of the Pasadena Symposium

„Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability", editor A. Luxemburg, Holt, Reinhart & Winston, New York, 1969, p. 109—122) dezvoltă o prezentare mai simplă a Analizei nestandard, în cadrul căreia extensiunile se obţin prin consideraţii de teoria mulţimilor, în dauna celor privind logicile de ordin superior. Urmărind un scop asemănător celui pe care şi l-au propus Machover şi Hirschfeld, Zakon realizează, pe o cale diferită, un progres în simplificarea şi clarificarea prezentării Analizei nestandard. O altă prezentare sistematică şi accesibilă a domeniului în discuţie e realizată de W.A.J. Luxemburg în articolul *What is nonstandard analysis?* (American Mathematical Monthly, Number 13 of the Herbert Ellsworth Slaught Memorial Papers, *Papers in the Foundations of Mathematics*, Part II, vol. 80, nr. 6, June-July 1973, p. 38—67). În acest articol, extensiile sînt obţinute nu cu teorema de compacitate, ci cu ajutorul ultraproduselor. Utilizarea instrumentelor logice prezintă aici un spor de claritate, dar consideraţiile au tot timpul în vedere exclusiv extensiea corpului real R, spre deosebire de Machover şi Hirschfeld, care se situează de la început într-un cadru mult mai general.

Sperăm că prin prezentarea de mai sus am dat măcar o idee despre un domeniu fascinant al Analizei moderne, pe care K. Gödel l-a considerat la fel de important ca şi Geometria neeuclidiană. Elaborat cu doi trei ani în urmă, acest capitol va fi completat, la o viitoare ediţie, cu unele rezultate recente.

TABLA DE MATERII

Nr. colilor de tipar : 26
Bun de tipar : 4.04.1980

Com. nr. 70 215/5 702
Combinatul Poligrafic
„CASA SCÎNTEII“
București — R.S.R.