КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

ГЕОМЕТРИЯ

- ✓ АТТЕСТАЦИЯ ПО ВСЕМ ТЕМАМ
- ✓ К ЕГЭ ШАГ ЗА ШАГОМ
- ✓ СИСТЕМА ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ
- ✓ СООТВЕТСТВИЕ ПРОГРАММЕ

10

КЛАСС

КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

ГЕОМЕТРИЯ

к учебникам

- **Л.С. Атанасяна и др. (*М.: Просвещение*)**
- **А.В. Погорелова и др. (*М.: Просвещение*)**

10 класс

МОСКВА • «ВАКО»

УДК 372.851
ББК 74.262.21
К64

Издание допущено к использованию
в образовательном процессе на основании
приказа Министерства образования и науки РФ
от 14.12.2009 № 729 (в ред. от 13.01.2011).

К64 **Контрольно-измерительные материалы.** Геометрия: 10 класс / Сост. А.Н. Рурукин. – М.: ВАКО, 2012. – 96 с. – (Контрольно-измерительные материалы).

ISBN 978-5-408-00724-0

В пособии представлены контрольно-измерительные материалы (КИМы) по геометрии для 10 класса – тесты в формате заданий ЕГЭ, а также самостоятельные и контрольные работы по всем изучаемым темам. Ко всем заданиям приведены ответы. Предлагаемый материал позволяет проводить проверку знаний, используя различные формы контроля.

Издание ориентировано на учителей, школьников и их родителей.

УДК 372.851
ББК 74.262.21

Учебно-методическое пособие

Составитель
Рурукин Александр Николаевич

КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ГЕОМЕТРИЯ
10 класс

Подписано к печати 07.02.2012. Формат 84×108/32.
Бумага офсетная. Гарнитура Newton. Печать офсетная.
Усл. печ. листов 5,04. Тираж 10 000 экз. Заказ № 3514

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»
142300, г. Чехов Московской области
Сайт: www.chpk.ru, e-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8 (496) 726-54-10, тел.: 8 (495) 988-63-87
Отдел продаж услуг: 8 (499) 270-73-59 (многоканальный)

ISBN 978-5-408-00724-0

От составителя

Контрольно-измерительные материалы по геометрии для 10 класса будут полезны при работе как по УМК Л.С. Атанасяна и др., так и по УМК А.В. Погорелова и др. (при определенном изменении порядка следования КИМов).

В пособии представлены 18 тематических тестов, 4 теста на обобщение пройденного материала, итоговый тест по программе 10 класса, 16 самостоятельных и 7 контрольных работ.

Предлагаемые КИМы могут быть использованы на любом этапе обучения – повторения и закрепления изученного, актуализации опорных знаний и др. Приведенные материалы избыточны и могут быть использованы как при работе в классе, так и дома. Рекомендуем задействовать различные формы контроля знаний, так как каждая из них имеет свои преимущества и недостатки. Все работы даны в двух равноценных вариантах. В конце пособия представлены ответы ко всем тестам и проверочным работам.

Преподавательская практика показывает, что предлагаемый подбор КИМов позволяет эффективно освоить материал 10 класса и подготовить учащихся к сдаче ЕГЭ по изученным темам.

Надеемся, что пособие поможет учителям при подготовке и проведении уроков, а также школьникам при изучении материала, закреплении и систематизации знаний.

Требования к уровню подготовки учащихся

В результате изучения курса учащиеся должны ***знать:***

- основные понятия и определения геометрических фигур;
- формулировки аксиом и основных теорем и их следствий;

уметь:

- изображать геометрические фигуры и тела, выполнять чертежи по условиям задачи, строить сечения многогранников;
- применять изученные свойства фигур и тел для решения задач;
- проводить обоснованные и доказательные рассуждения при решении задач;
- вычислять линейные и угловые элементы в фигурах.

Основные темы курса геометрии в 10 классе

«Аксиомы стереометрии и следствия из них», «Параллельность прямых и плоскостей», «Перпендикулярность прямых и плоскостей», «Многогранники», «Векторы в пространстве».

Рекомендации по оцениванию работ

Тесты

В соответствии с форматом ЕГЭ задания тестов разделены на три уровня сложности: А, В, С.

Задания уровня А (базового) предполагают выбор правильного ответа из четырех предложенных. Для заданий уровня В (повышенной сложности) требуется привести краткий ответ. В заданиях уровня С (творческих заданиях) необходимо изложить обоснованное решение.

Тематический тест содержит три задания уровня А (каждое оценивается в 1 балл), два задания уровня В (каждое оценивается в 2 балла) и одно задание уровня С (3 балла).

На выполнение теста отводится 15–20 мин. Рекомендуем следующее соответствие количества баллов и оценки: 3 балла – «3», 5 баллов – «4», 7 баллов – «5».

Итоговый тест содержит вдвое больше заданий, чем тематический. Соответственно, вдвое увеличиваются время на выполнение (40–45 мин) и количество баллов (6 баллов – «3», 10 баллов – «4», 14 баллов – «5»).

Самостоятельные работы

Формулировка задания теста (А, В) предполагает простой вопрос, который далеко не всегда позволяет понять степень усвоения изучаемого материала. Поэтому целесообразно некоторые тесты заменить самостоятельными работами, которые включают три задания уровня В (каждое задание оценивается в 2 балла). На выполнение работы отводится 15–20 мин. Критерии оценки: 2 балла – «3», 3 балла – «4», 5 баллов – «5».

Контрольные работы

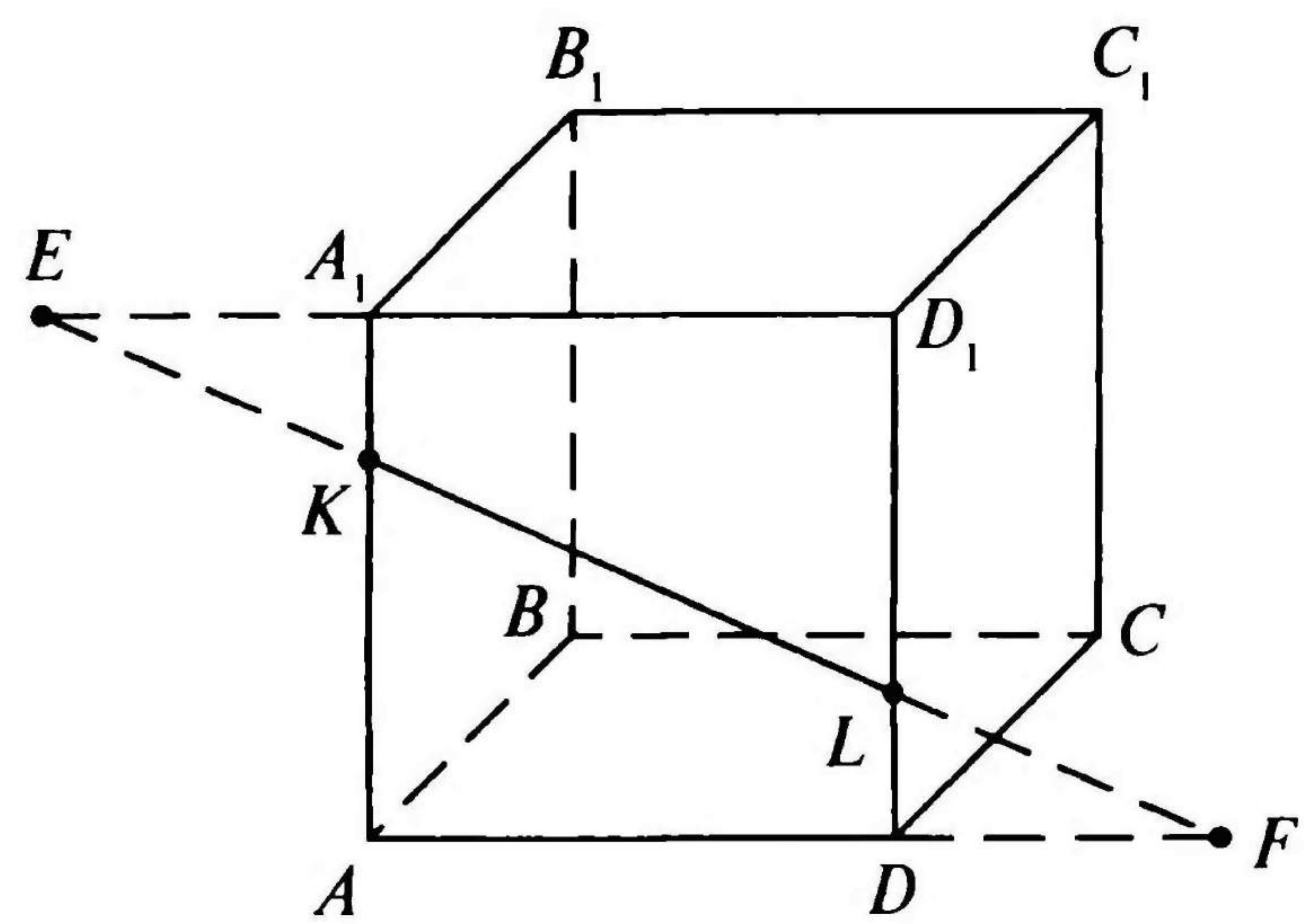
При изучении крупной темы (главы УМК) для контроля знаний рекомендуется использовать контрольные работы, которые содержат четыре задания уровня В и одно задание уровня С. На работу отводится 40–45 мин. Рекомендуемые критерии оценки: 5 баллов – «3», 7 баллов – «4», 9 баллов – «5».

Проведение самостоятельных и контрольных работ допускает более гибкие формулировки заданий и форму ответов (по сравнению с тестами). Это позволяет более объективно контролировать знания учащихся, выявить недочеты при изучении материала и т. д. Поэтому рекомендуем использовать разнообразные формы аттестации учащихся.

Тест 1. Аксиомы стереометрии и следствия из них (призма)

Вариант 1

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. Точка K принадлежит ребру AA_1, точка L – ребру DD_1. При этом $A_1K : KA = 1 : 3$, $D_1L : LD = 2 : 1$. Проведена прямая KL. Используя рисунок, ответьте на следующие вопросы.



А1. Укажите точку пересечения прямой KL и плоскости ABD.

☐ 1) E	☐ 3) L
☐ 2) F	☐ 4) K

А2. Найдите точку пересечения прямых KL и A_1D_1.

☐ 1) F	☐ 3) D_1
☐ 2) A_1	☐ 4) E

А3. Укажите линию пересечения плоскостей A_1AD и B_1EF.

☐ 1) KL	☐ 3) BK
☐ 2) B_1K	☐ 4) CL

В1. Найдите длину отрезка C_1L.

Ответ: ______________________________

В2. Вычислите длину отрезка KL.

Ответ: ______________________________

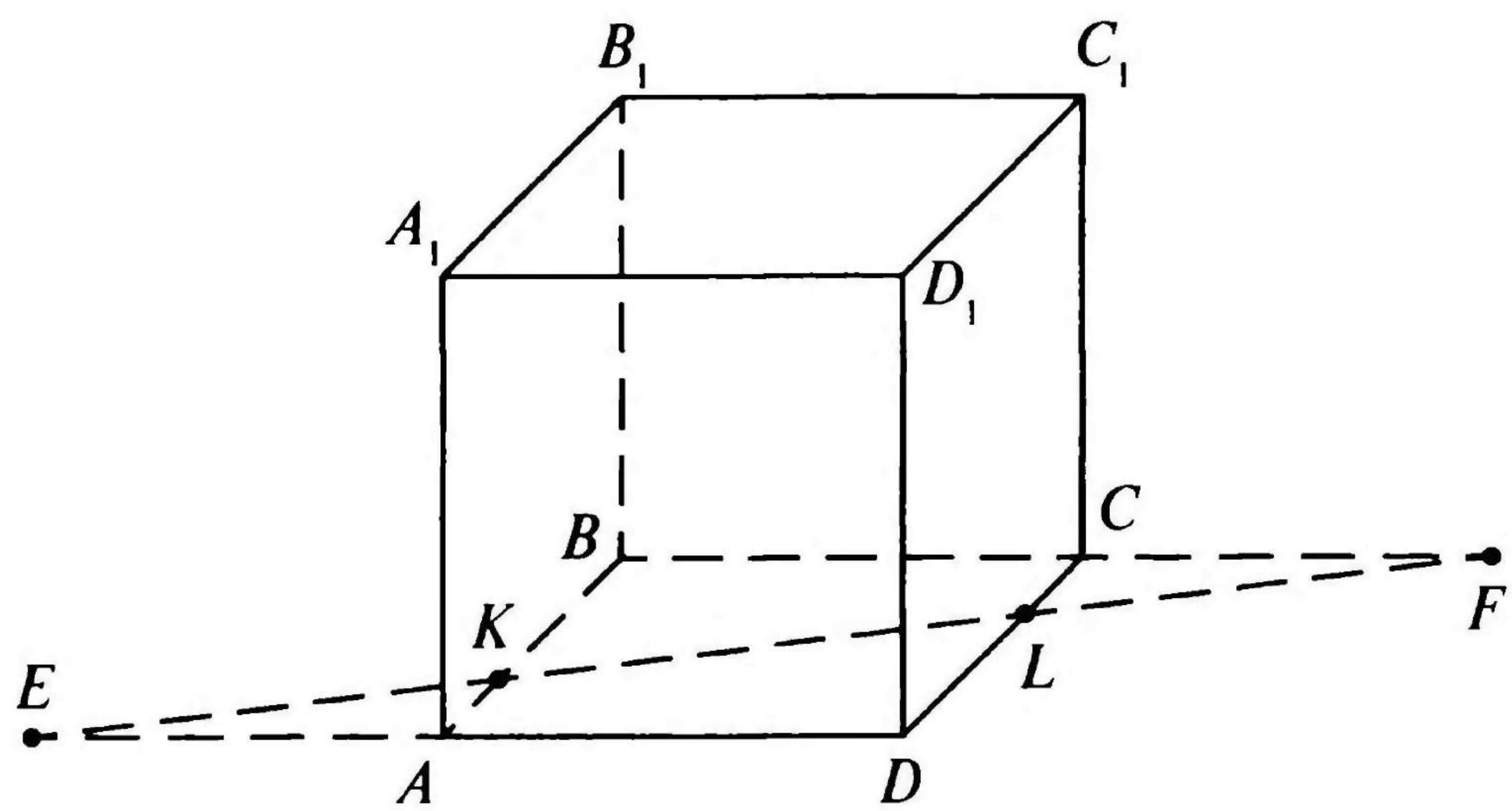
С1. Найдите длину отрезка EF.

Ответ: ______________________________

Тест 1. Аксиомы стереометрии и следствия из них (призма)

Вариант 2

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. Точка K принадлежит ребру AB, точка L – ребру CD. При этом $AK : KB = 1 : 3$, $CL : LD = 1 : 4$. Проведена прямая KL. Используя рисунок, ответьте на следующие вопросы.



А1. Укажите точку пересечения прямой KL и плоскости A_1D_1D.

☐ 1) F	☐ 3) E
☐ 2) L	☐ 4) K

А2. Найдите точку пересечения прямых KL и BC.

☐ 1) F	☐ 3) L
☐ 2) K	☐ 4) E

А3. Укажите линию пересечения плоскостей ABC и B_1EF.

☐ 1) A_1K	☐ 3) D_1K
☐ 2) KL	☐ 4) C_1L

В1. Найдите длину отрезка B_1K.

Ответ: ____________________

В2. Вычислите длину отрезка KL.

Ответ: ____________________

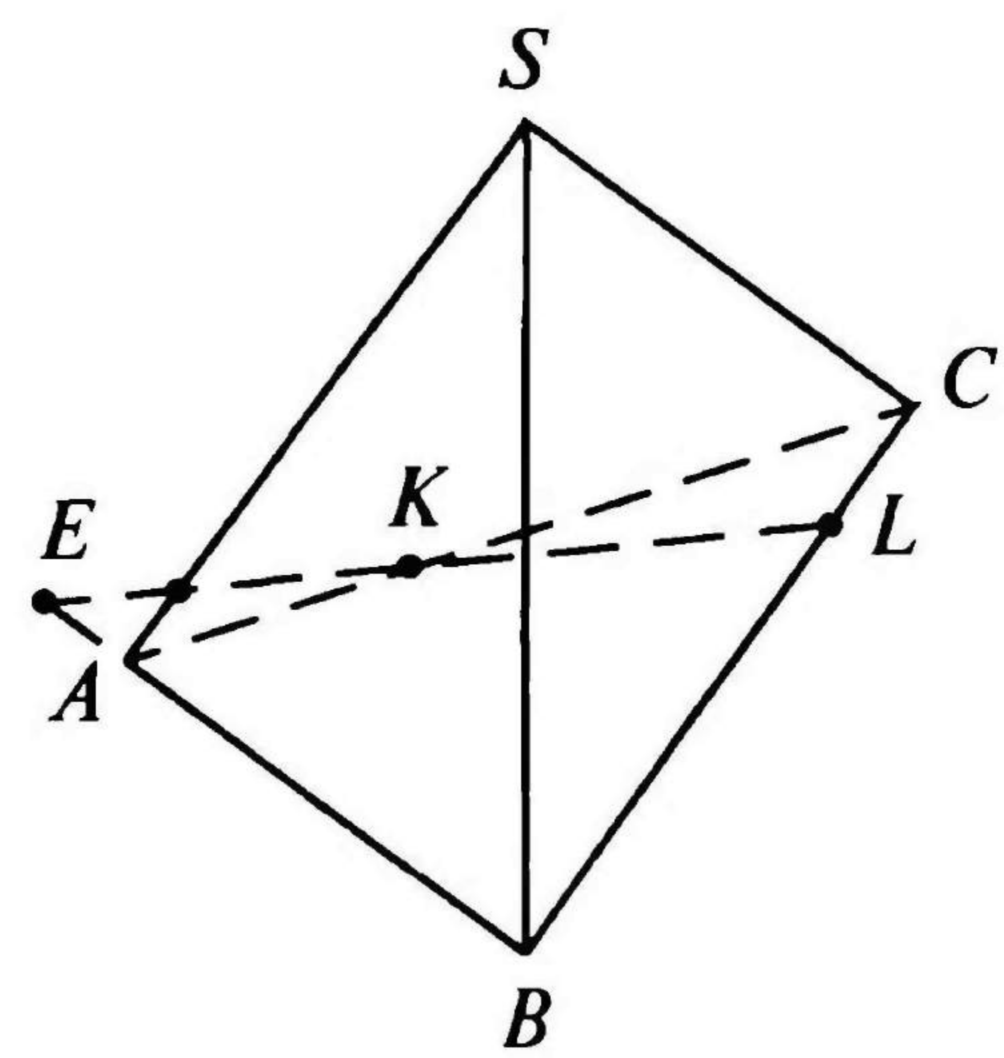
С1. Найдите длину отрезка EF.

Ответ: ____________________

Тест 2. Аксиомы стереометрии и следствия из них (пирамида)

Вариант 1

В пирамиде $SABC$ все ребра равны a. На ребре AC выбрана точка K, на ребре BC – точка L. При этом $AK : KC = 1 : 2$, $CL : LB = 1 : 4$. Через точки K, L, S проведена плоскость. Используя рисунок, ответьте на следующие вопросы.



A1. Укажите линию пересечения плоскостей SKL и SAB.

☐ 1) SE	☐ 3) SA
☐ 2) EL	☐ 4) SL

A2. Найдите линию пересечения плоскостей SEL и SBC.

☐ 1) KL	☐ 3) SK
☐ 2) SL	☐ 4) EL

A3. Укажите точку пересечения плоскостей ABC, SAC, SBC.

☐ 1) A	☐ 3) S
☐ 2) B	☐ 4) C

B1. Вычислите площадь треугольника BSL.

Ответ: ______________________________

B2. Найдите длину отрезка AE.

Ответ: ______________________________

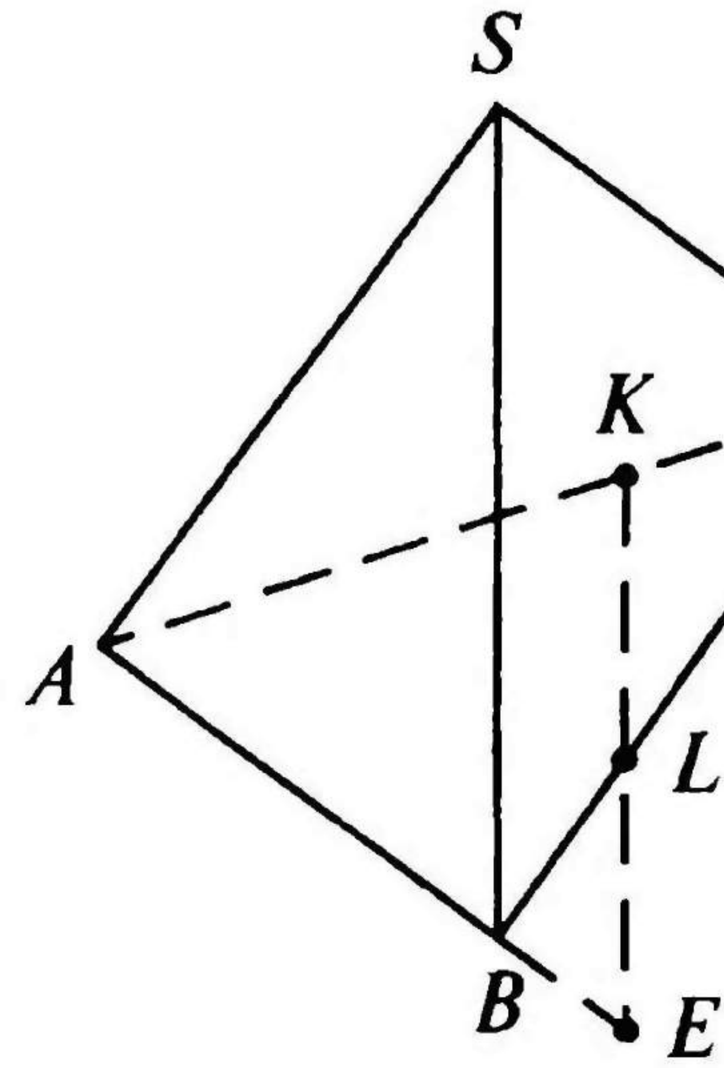
C1. Вычислите длину отрезка LE.

Ответ: ______________________________

Тест 2. Аксиомы стереометрии и следствия из них (пирамида)

Вариант 2

В пирамиде $SABC$ все ребра равны a. На ребре AC выбрана точка K, на ребре BC – точка L. При этом $AK : KC = 2 : 1$, $CL : LB = 3 : 1$. Через точки K, L, S проведена плоскость. Используя рисунок, ответьте на следующие вопросы.



A1. Укажите линию пересечения плоскостей SKL и SAB.

☐ 1) SA ☐ 3) KE

☐ 2) SE ☐ 4) SB

A2. Найдите линию пересечения плоскостей SKL и SAC.

☐ 1) SL ☐ 3) SE

☐ 2) KE ☐ 4) SK

A3. Укажите точку пересечения плоскостей SAB, ABC, SAC.

☐ 1) A ☐ 3) C

☐ 2) B ☐ 4) S

B1. Вычислите площадь треугольника SLC.

Ответ: ______________________________

B2. Найдите длину отрезка BE.

Ответ: ______________________________

C1. Вычислите длину отрезка KE.

Ответ: ______________________________

Тест 3. Параллельность прямых, прямой и плоскости

Вариант 1

A1. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Точки K, L, M, N – середины отрезков AB, BC, CD, AD соответственно. Укажите прямые, параллельные прямой AC.

☐ 1) KL ☐ 2) нет ☐ 3) KL и MN ☐ 4) MN

A2. Точка C лежит на отрезке AB. Через точку A проведена плоскость, а через точки B и C – параллельные прямые, пересекающие эту плоскость в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если $AC : CB = 3 : 2$ и $BB_1 = 20$ см.

☐ 1) 12 см ☐ 2) 8 см ☐ 3) 4 см ☐ 4) 16 см

A3. Вершина A треугольника ABC лежит на плоскости α, вершины B и C расположены по разные стороны от этой плоскости. Отрезок BD – медиана треугольника ABC. Через точки B, D, C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках B_1, D_1, C_1 соответственно. Найдите длину DD_1, если $BB_1 = 2$ см и $CC_1 = 12$ см.

☐ 1) 7 см ☐ 2) 5 см ☐ 3) 10 см ☐ 4) 8 см

B1. В тетраэдре $ABCD$ точки K, L, M, N – середины ребер AC, BC, BD, AD соответственно. Определите вид четырехугольника $KLMN$ и его периметр, если $AB = 16$ см и $CD = 18$ см.

Ответ: ____________________________________

B2. Точка C лежит на отрезке AB, и $AC : CB = 2 : 3$. Через точки A, B, C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Найдите CC_1, если $AA_1 = a$ и $BB_1 = b$ ($b > a$).

Ответ: ____________________________________

C1. Даны параллелограмм $ABCD$ и не пересекающая его плоскость. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Найдите DD_1, если $AA_1 = 2$ см, $BB_1 = 3$ см, $CC_1 = 8$ см.

Ответ: ____________________________________

Тест 3. Параллельность прямых, прямой и плоскости

Вариант 2

A1. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Точки K, L, M, N – середины отрезков AB, BC, CD, AD соответственно. Укажите прямые, параллельные прямой BD.

☐ 1) нет ☐ 2) KN и LM ☐ 3) KN ☐ 4) LM

A2. Точка C лежит на отрезке AB. Через точку A проведена плоскость, а через точки B и C – параллельные прямые, пересекающие эту плоскость в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если $AC : CB = 4 : 3$ и $BB_1 = 14$ см.

☐ 1) 12 см ☐ 2) 7 см ☐ 3) 8 см ☐ 4) 6 см

A3. Вершина A треугольника ABC лежит на плоскости α, вершины B и C расположены по разные стороны от этой плоскости. Отрезок BD – медиана треугольника ABC. Через точки B, D, C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках B_1, D_1, C_1 соответственно. Найдите длину DD_1, если $BB_1 = 14$ см и $CC_1 = 8$ см.

☐ 1) 3 см ☐ 2) 11 см ☐ 3) 6 см ☐ 4) 7 см

B1. В тетраэдре $ABCD$ точки K, L, M, N – середины ребер AC, BC, BD, AD соответственно. Определите вид четырехугольника $KLMN$ и его периметр, если $AB = 12$ см и $CD = 24$ см.

Ответ: ____

B2. Точка C лежит на отрезке AB, и $AC : CB = 3 : 4$. Через точки A, B, C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Найдите CC_1, если $AA_1 = a$ и $BB_1 = b$ ($b > a$).

Ответ: ____

C1. Даны параллелограмм $ABCD$ и не пересекающая его плоскость. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Найдите DD_1, если $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 4$ см, $CC_1 = 10$ см.

Ответ: ____

Тест 4. Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми

Вариант 1

А1. В тетраэдре $ABCD$ укажите прямую, скрещивающуюся с прямой AB.

☐ 1) BD
☐ 2) CD
☐ 3) AD
☐ 4) AC

А2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в плоскости $ABCD$ найдите прямые, параллельные прямой A_1B_1.

☐ 1) AB и CD
☐ 2) AB
☐ 3) CD
☐ 4) AC

А3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между скрещивающимися прямыми AA_1 и BD.

☐ 1) 45°
☐ 2) 60°
☐ 3) 30°
☐ 4) 90°

В1. Прямые OB и CD параллельные, а OA и CD – скрещивающиеся прямые. Найдите угол между прямыми OA и CD, если $\angle AOB = 138°$.

Ответ: ____________________

В2. Даны параллелограмм $ABCD$ и трапеция $ABEK$ с основанием EK, не лежащие в одной плоскости. Выясните взаимное расположение прямых CD и EK. Найдите периметр трапеции, если в нее можно вписать окружность и $CD = 22$ см, $EK = 16$ см.

Ответ: ____________________

С1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре DD_1 выбрана точка E так, что $DE : ED_1 = 1 : 2$. Вычислите косинус угла между прямыми AE и CE.

Ответ: ____________________

Тест 4. Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми

Вариант 2

A1. В тетраэдре $ABCD$ укажите прямую, скрещивающуюся с прямой AD.

☐ 1) AC
☐ 2) BD
☐ 3) BC
☐ 4) AB

A2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в плоскости $ABCD$ найдите прямые, параллельные прямой B_1C_1.

☐ 1) AD
☐ 2) CD
☐ 3) BC
☐ 4) AD и BC

A3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между скрещивающимися прямыми BB_1 и AC.

☐ 1) 30°
☐ 2) 90°
☐ 3) 45°
☐ 4) 60°

B1. Прямые OB и CD параллельные, а OA и CD – скрещивающиеся прямые. Найдите угол между прямыми OA и CD, если $\angle AOB = 156°$.

Ответ: ____________________

B2. Даны параллелограмм $ABCD$ и трапеция $ABEK$ с основанием EK, не лежащие в одной плоскости. Выясните взаимное расположение прямых CD и EK. Найдите периметр трапеции, если в нее можно вписать окружность и $CD = 18$ см, $EK = 24$ см.

Ответ: ____________________

C1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре DD_1 выбрана точка E так, что $DE : ED_1 = 1 : 3$. Вычислите косинус угла между прямыми AE и CE.

Ответ: ____________________

Тест 5. Параллельность плоскостей

Вариант 1

A1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите плоскость, параллельную плоскости CC_1D_1.

☐ 1) BAD ☐ 3) AA_1D_1

☐ 2) B_1BC ☐ 4) ABB_1

A2. В основании пирамиды $SABCD$ ($SA = SB = SC = SD = b$) лежит квадрат $ABCD$ со стороной a. Точки K, L, M, N – середины ребер AD, SA, SB, BC соответственно. Найдите периметр четырехугольника $KLMN$.

☐ 1) $a + b$ ☐ 3) $2a + b$

☐ 2) $\frac{3}{2}a + b$ ☐ 4) $a + 2b$

A3. Через точку A, расположенную по одну сторону от параллельных плоскостей α и β, проведены две прямые, которые пересекают эти плоскости в точках B, B_1 и C, C_1 соответственно. Найдите длину отрезка BC, если $B_1C_1 = 21$ см, $AC = 3$ см, $CC_1 = 4$ см.

☐ 1) 9 см ☐ 3) 6 см

☐ 2) 12 см ☐ 4) 15 см

B1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите плоскость, параллельную плоскости A_1BD.

Ответ: ____

B2. Через точку O, расположенную между параллельными плоскостями α и β, проведены три прямые, которые пересекают эти плоскости в точках A, A_1; B, B_1 и C, C_1 соответственно. Найдите стороны треугольника $A_1B_1C_1$, если его площадь равна 21 см^2 и $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см.

Ответ: ____

C1. Три плоскости параллельны. Скрещивающиеся прямые пересекают эти плоскости в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3. Найдите длину отрезков A_1A_3 и B_1B_3, если $B_1B_2 = 5$ см, $A_2A_3 = 6$ см, $A_1A_2 : B_2B_3 = 8 : 15$.

Ответ: ____

Тест 5. Параллельность плоскостей

Вариант 2

A1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите плоскость, параллельную плоскости BB_1C_1.

☐ 1) A_1AB ☐ 3) $A_1B_1C_1$
☐ 2) ADD_1 ☐ 4) BCD

A2. В основании пирамиды $SABCD$ ($SA = SB = SC = SD = a$) лежит квадрат $ABCD$ со стороной b. Точки K, L, M, N – середины ребер AD, SD, SC, BC соответственно. Найдите периметр четырехугольника $KLMN$.

☐ 1) $2a + b$ ☐ 3) $a + \frac{3}{2}b$
☐ 2) $\frac{3}{2}a + b$ ☐ 4) $a + b$

A3. Через точку A, расположенную по одну сторону от параллельных плоскостей α и β, проведены две прямые, которые пересекают эти плоскости в точках B, B_1 и C, C_1 соответственно. Найдите длину отрезка B_1C_1, если $BC = 10$ см, $AC = 5$ см, $CC_1 = 4$ см.

☐ 1) 24 см ☐ 3) 20 см
☐ 2) 16 см ☐ 4) 18 см

B1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите плоскость, параллельную плоскости A_1BC_1.

Ответ: ______________________

B2. Через точку O, расположенную между параллельными плоскостями α и β, проведены три прямые, которые пересекают эти плоскости в точках A, A_1; B, B_1 и C, C_1 соответственно. Найдите стороны треугольника $A_1B_1C_1$, если его площадь равна 336 см^2 и $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см.

Ответ: ______________________

C1. Три плоскости параллельны. Скрещивающиеся прямые пересекают эти плоскости в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3. Найдите длину отрезков A_1A_3 и B_1B_3, если $A_1A_2 = 4$ см, $B_2B_3 = 9$ см, $A_2A_3 = B_1B_2$.

Ответ: ______________________

Тест 6. Тетраэдр и параллелепипед

Вариант 1

А1. Сумма всех ребер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 120 см. Найдите длины ребер, если $AB : BC : AA_1 = 4 : 5 : 6$.

☐ 1) 4 см, 5 см, 6 см
☐ 2) 16 см, 20 см, 24 см
☐ 3) 8 см, 10 см, 12 см
☐ 4) 12 см, 15 см, 18 см

А2. Через точку пересечения медиан грани BCD тетраэдра проведена плоскость, параллельная грани ABC. Найдите площадь полученного сечения, если площадь треугольника ABC равна 36 см^2.

☐ 1) 16 см^2 ☐ 3) 18 см^2
☐ 2) 24 см^2 ☐ 4) 9 см^2

А3. В тетраэдре $DABC$: $\angle DBC = \angle DBA = \angle ABC = 90°$, $BD = BA = BC = 2$ см. Найдите площадь грани ADC.

☐ 1) $4\sqrt{3}$ см^2 ☐ 3) 4 см^2
☐ 2) $2\sqrt{3}$ см^2 ☐ 4) $3\sqrt{3}$ см^2

В1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание $ABCD$ – квадрат со стороной, равной 16 см, остальные грани – прямоугольники. Боковое ребро равно 15 см, E – середина A_1B_1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, C, E, и найдите периметр сечения.

Ответ: ______________________________

В2. В тетраэдре $DABC$ точка M – середина AD, $P \in DC$ и $DP : PC = 1 : 3$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M и P и параллельной BC. Найдите площадь сечения, если все ребра тетраэдра равны a.

Ответ: ______________________________

С1. В тетраэдре $DABC$ в основании лежит правильный треугольник ABC, O – точка пересечения биссектрис этого треугольника, $AD = BD = CD$, $\angle DAB = 45°$. Найдите косинус угла DAO.

Ответ: ______________________________

Тест 6. Тетраэдр и параллелепипед

Вариант 2

А1. Сумма всех ребер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 288 см. Найдите длины ребер, если $AB : BC : AA_1 = 5 : 6 : 7$.

☐ 1) 20 см, 24 см, 28 см
☐ 2) 10 см, 12 см, 14 см
☐ 3) 30 см, 36 см, 42 см
☐ 4) 15 см, 18 см, 21 см

А2. Через точку пересечения медиан грани BCD тетраэдра проведена плоскость, параллельная грани ABC. Площадь полученного сечения равна 48 см². Найдите площадь грани ABC.

☐ 1) 104 см²
☐ 2) 72 см²
☐ 3) 96 см²
☐ 4) 108 см²

А3. В тетраэдре $DABC$: $\angle DBC = \angle DBA = \angle ABC = 60°$, $BD = BA = BC = 4$ см. Найдите площадь грани ADC.

☐ 1) 8 см²
☐ 2) 4 см²
☐ 3) $4\sqrt{3}$ см²
☐ 4) $2\sqrt{3}$ см²

В1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание $ABCD$ – квадрат со стороной, равной 8 см, остальные грани – прямоугольники. Боковое ребро равно 3 см, E – середина A_1B_1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, C, E, и найдите периметр сечения.

Ответ: ____________________

В2. В тетраэдре $DABC$ точка M – середина AD, $P \in DC$ и $DP : PC = 1 : 2$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M и P и параллельной BC. Найдите площадь сечения, если все ребра тетраэдра равны a.

Ответ: ____________________

С1. В тетраэдре $DABC$ в основании лежит правильный треугольник ABC, O – точка пересечения высот этого треугольника, $AD = BD = CD$, $\angle DAB = 30°$. Найдите косинус угла DAO.

Ответ: ____________________

Тест 7. Обобщение темы «Аксиомы стереометрии. Параллельность прямых и плоскостей»

Вариант 1

В тетраэдре $DABC$ все ребра равны a, точка $K \in AD$ и $AK : KD = 2 : 1$, точка $L \in BD$ и $BL = LD$ (рис. 1). Построено сечение KLM, параллельное прямой BC. Используя рисунок, ответьте на следующие вопросы.

A1. Укажите линию пересечения плоскостей KLM и ABD.

- ☐ 1) KM
- ☐ 2) KE
- ☐ 3) LM
- ☐ 4) BC

A2. Найдите параллельные прямые.

- ☐ 1) KM и AC
- ☐ 2) KL и BC
- ☐ 3) LM и BC
- ☐ 4) KM и AB

A3. Определите периметр треугольника KLM.

- ☐ 1) $\dfrac{a\left(3+2\sqrt{7}\right)}{6}$
- ☐ 2) $\dfrac{3}{2}a$
- ☐ 3) $\dfrac{a\left(1+\sqrt{7}\right)}{6}$
- ☐ 4) $\dfrac{a\left(3+\sqrt{7}\right)}{6}$

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a, точка $K \in A_1D_1$ и $A_1K = \dfrac{a}{4}$, точка $L \in B_1C_1$ и $B_1L = \dfrac{a}{3}$, точка $M \in BC$ и $BM = \dfrac{a}{2}$. Проведена плоскость KLM (рис. 2). Пользуясь рисунком, ответьте на следующие вопросы.

A4. Укажите вид четырехугольника $KLMN$.

- ☐ 1) квадрат
- ☐ 2) параллелограмм
- ☐ 3) прямоугольник
- ☐ 4) ромб

A5. Найдите длину отрезка AN.

- ☐ 1) $\dfrac{a}{3}$
- ☐ 2) $\dfrac{2a}{5}$
- ☐ 3) $\dfrac{3a}{7}$
- ☐ 4) $\dfrac{5a}{12}$

A6. Вычислите площадь четырехугольника $KNDD_1$.

- ☐ 1) $\dfrac{2}{3}a^2$
- ☐ 2) $\dfrac{3}{8}a^2$
- ☐ 3) $\dfrac{4}{7}a^2$
- ☐ 4) $\dfrac{3}{7}a^2$

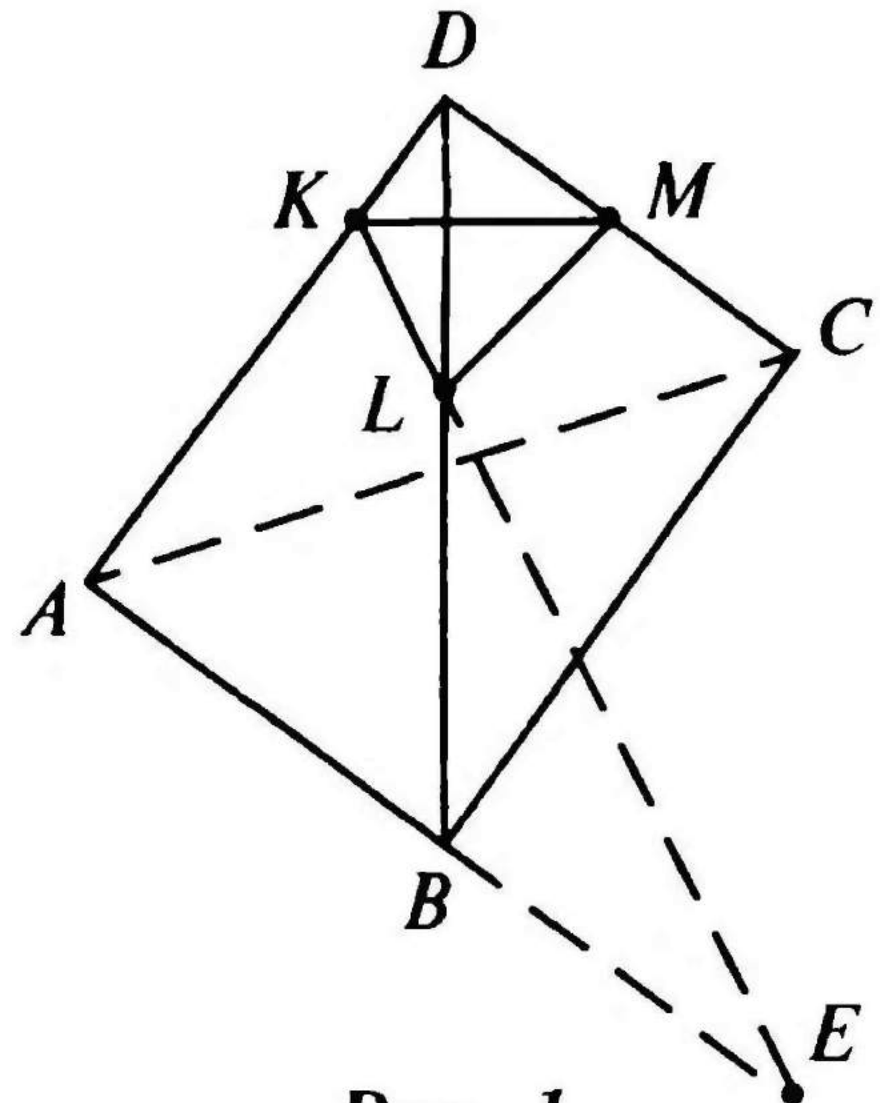


Рис. 1

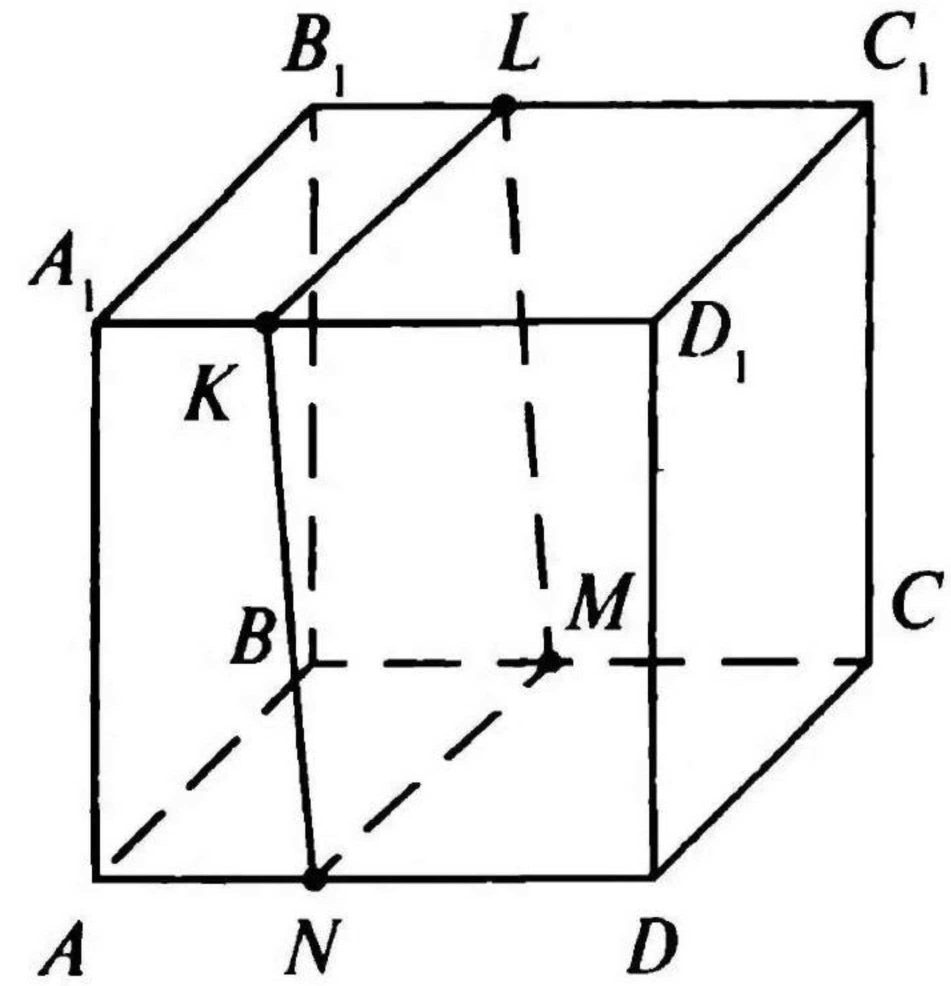


Рис. 2

B1. В тетраэдре $DABC$ (рис. 1) найдите площадь сечения KLM.

Ответ: ____________________

B2. Определите длину отрезка AE (рис. 1).

Ответ: ____________________

B3. Найдите периметр четырехугольника $KLMN$ в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2).

Ответ: ____________________

B4. Вычислите площадь треугольника AEN (где E – точка пересечения прямых AA_1 и KN) в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2).

Ответ: ____________________

C1. В основании тетраэдра $DABC$ лежит правильный треугольник ABC, O – точка пересечения биссектрис этого треугольника, $DA = DB = DC$. Найдите косинус угла ADB, если $\cos \widehat{DAO} = \frac{2}{3}$.

Ответ: ____________________

C2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 8 см, точки P, M, T – середины ребер A_1B_1, C_1C и AD. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через эти точки, и найдите площадь сечения.

Ответ: ____________________

Тест 7. Обобщение темы «Аксиомы стереометрии. Параллельность прямых и плоскостей»

Вариант 2

В тетраэдре $DABC$ все ребра равны a, точка $K \in AD$ и $AK = KD$, точка $L \in DC$ и $CL : LD = 1 : 2$ (рис. 1). Построено сечение KLM, параллельное прямой AB. Используя рисунок, ответьте на следующие вопросы.

А1. Укажите линию пересечения плоскостей KLM и ACD.

☐ 1) KM ☐ 3) AC
☐ 2) LM ☐ 4) KL

А2. Найдите параллельные прямые.

☐ 1) ML и BC ☐ 3) KL и BC
☐ 2) AB и KM ☐ 4) AC и ML

А3. Определите периметр треугольника KLM.

☐ 1) $\frac{a(3 + 2\sqrt{13})}{6}$ ☐ 3) $\frac{a(3 + \sqrt{13})}{6}$

☐ 2) $\frac{3a}{2}$ ☐ 4) $\frac{a(1 + 2\sqrt{13})}{6}$

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a, точка $K \in A_1D_1$ и $A_1K = \frac{a}{2}$, точка $L \in B_1C_1$ и $B_1L = \frac{a}{5}$, точка $M \in BC$ и $BM = \frac{2}{3}a$. Проведена плоскость KLM (рис. 2).

Пользуясь рисунком, ответьте на следующие вопросы.

А4. Укажите вид четырехугольника $KLMN$.

☐ 1) ромб ☐ 3) параллелограмм
☐ 2) квадрат ☐ 4) прямоугольник

А5. Найдите длину отрезка AN.

☐ 1) $\frac{8}{9}a$ ☐ 2) $\frac{29}{30}a$ ☐ 3) $\frac{9}{10}a$ ☐ 4) $\frac{14}{15}a$

А6. Вычислите площадь четырехугольника $KNDD_1$.

☐ 1) $\frac{7}{9}a^2$ ☐ 2) $\frac{5}{7}a^2$ ☐ 3) $\frac{2}{3}a^2$ ☐ 4) $\frac{11}{15}a^2$

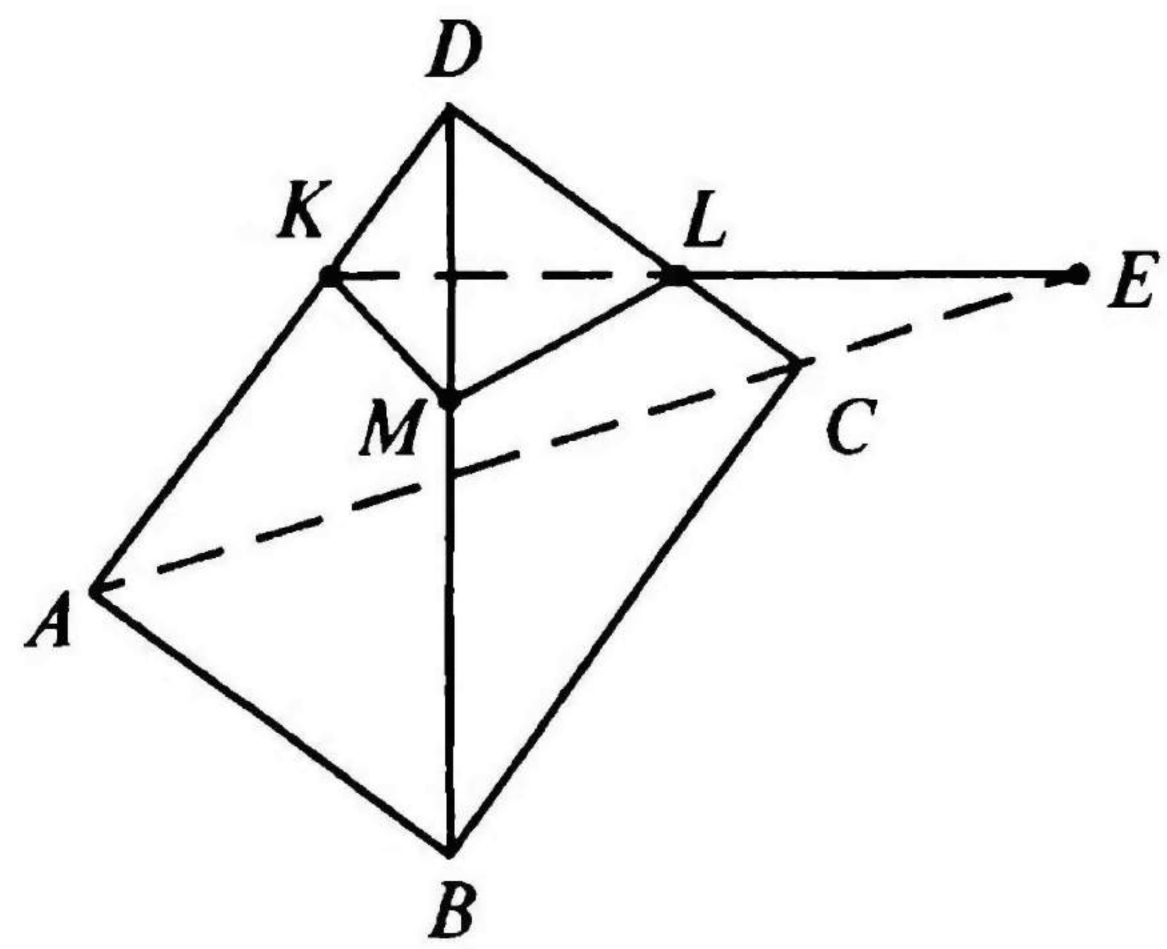


Рис. 1

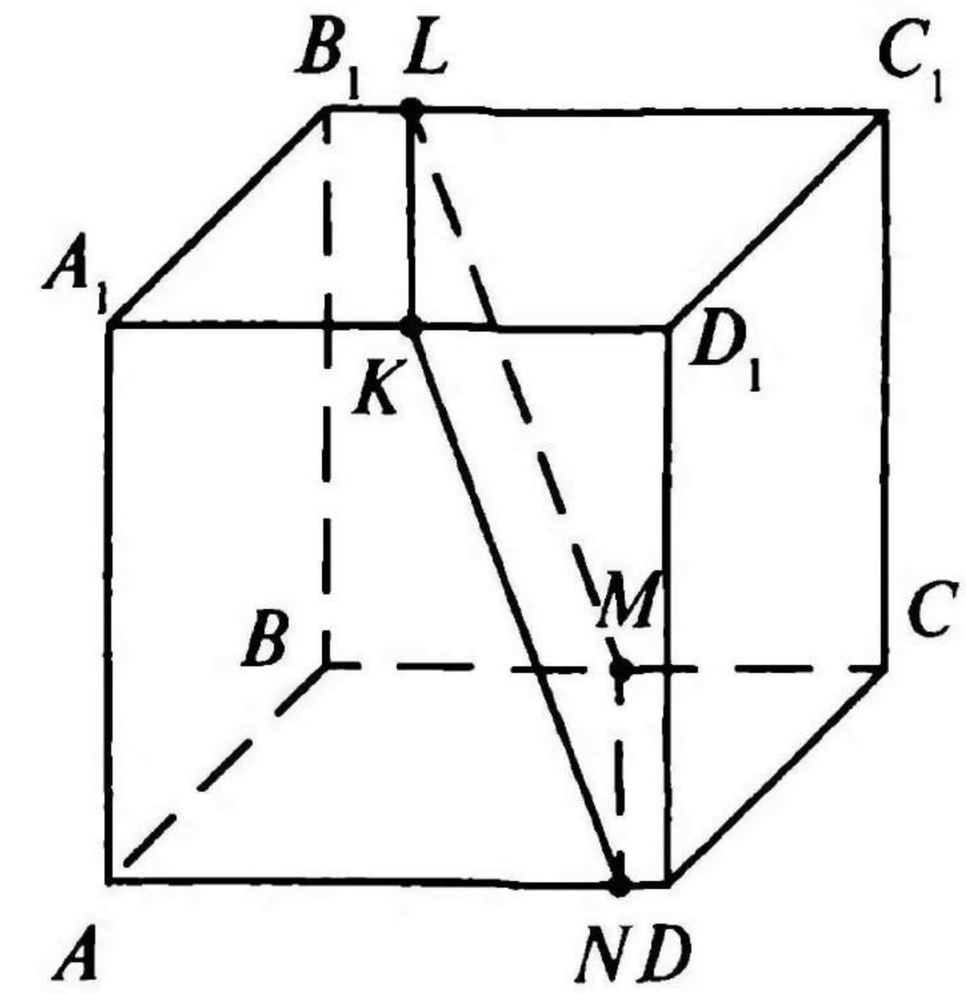


Рис. 2

B1. В тетраэдре $DABC$ (рис. 1) найдите площадь сечения KLM.

Ответ: ____________________

B2. Определите длину отрезка AE (рис. 1).

Ответ: ____________________

B3. Найдите периметр четырехугольника $KLMN$ в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2).

Ответ: ____________________

B4. Вычислите площадь треугольника AEN (где E – точка пересечения прямых AA_1 и KN) в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2).

Ответ: ____________________

C1. В основании тетраэдра $DABC$ лежит правильный треугольник ABC, O – точка пересечения высот этого треугольника, $DA = DB = DC$. Найдите косинус угла ADB, если $\cos\widehat{DAO} = \frac{1}{3}$.

Ответ: ____________________

C2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 4 см, точки P и T – середины ребер AD и CD. Диагонали оснований $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точках O и O_1, и точка M – середина отрезка OO_1. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки P, T, M, и найдите площадь сечения.

Ответ: ____________________

Тест 8. Перпендикулярность прямой и плоскости

Вариант 1

А1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите плоскости, перпендикулярные прямой AB.

☐ 1) ADC и $A_1B_1C_1$
☐ 2) A_1AD и B_1BC
☐ 3) A_1AD и D_1C_1C
☐ 4) B_1BC и A_1AB

А2. Точка O – центр квадрата со стороной, равной 6 см, OA – отрезок, перпендикулярный к плоскости квадрата и равный 3 см. Найдите расстояние от точки A до вершин квадрата.

☐ 1) 7 см
☐ 2) 5 см
☐ 3) $3\sqrt{3}$ см
☐ 4) 4 см

А3. Точка O удалена от вершин прямоугольного треугольника ABC с катетами $AB = 8$ см и $AC = 15$ см на расстояние $\frac{\sqrt{410}}{2}$ см. Найдите расстояние от точки O до плоскости ABC.

☐ 1) 5,5 см
☐ 2) 8 см
☐ 3) 9 см
☐ 4) 4 см

В1. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведена прямая AM, перпендикулярная плоскости BCD. Найдите расстояния от точки M до вершин квадрата, если $BC = 12$ см и $AM = 5$ см.

Ответ: ________________________________

В2. Через вершину A треугольника ABC проведена плоскость α, параллельная BC. Прямые BB_1 и CC_1 перпендикулярны плоскости α. Найдите BC, если $CC_1 = 4$, $AC_1 = \sqrt{209}$, $AB_1 = \sqrt{33}$, $\angle BAC = 60°$.

Ответ: ________________________________

С1. Все грани параллелепипеда являются прямоугольниками, и диагонали граней равны $\sqrt{65}, \sqrt{105}, 4\sqrt{5}$ см. Найдите длины ребер параллелепипеда.

Ответ: ________________________________

Тест 8. Перпендикулярность прямой и плоскости

Вариант 2

А1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите плоскости, перпендикулярные прямой AD.

☐ 1) A_1AB и $B_1C_1D_1$ ☐ 3) A_1AB и D_1DC
☐ 2) D_1DC и ABC ☐ 4) A_1D_1D и B_1BC

А2. Точка O – центр квадрата со стороной, равной 4 см, OA – отрезок, перпендикулярный к плоскости квадрата и равный 2 см. Найдите расстояние от точки A до вершин квадрата.

☐ 1) $2\sqrt{3}$ см ☐ 3) 3 см
☐ 2) 5 см ☐ 4) 4 см

А3. Точка O удалена от вершин прямоугольного треугольника ABC с катетами $AB = 12$ см и $AC = 5$ см на расстояние $\frac{\sqrt{194}}{2}$ см. Найдите расстояние от точки O до плоскости ABC.

☐ 1) 5 см ☐ 3) 4 см
☐ 2) 3 см ☐ 4) 2,5 см

В1. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведена прямая AM, перпендикулярная плоскости BCD. Найдите расстояния от точки M до вершин квадрата, если $BC = 8$ см и $AM = 15$ см.

Ответ: ____________________

В2. Через вершину A треугольника ABC проведена плоскость α, параллельная BC. Прямые BB_1 и CC_1 перпендикулярны плоскости α. Найдите BC, если $CC_1 = 8$, $AC_1 = 6$, $AB_1 = 8\sqrt{3}$, $\angle BAC = 60°$.

Ответ: ____________________

С1. Все грани параллелепипеда являются прямоугольниками, и диагонали граней равны $\sqrt{34}$, $\sqrt{61}$, $3\sqrt{5}$ см. Найдите длины ребер параллелепипеда.

Ответ: ____________________

Тест 9. Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью

Вариант 1

А1. Из некоторой точки проведены к данной плоскости перпендикуляр и наклонная, угол между которыми равен φ. Найдите наклонную и ее проекцию на данную плоскость, если перпендикуляр равен h.

☐ 1) $h/\cos\varphi$, $h\,\mathrm{tg}\,\varphi$ ☐ 3) $h\sin\varphi$, $h\cos\varphi$
☐ 2) $h\cos\varphi$, $h\,\mathrm{tg}\,\varphi$ ☐ 4) $h/\cos\varphi$, $h\sin\varphi$

А2. Из точки A к плоскости α проведены две наклонные, длины которых 18 см и $2\sqrt{109}$ см. Их проекции на эту плоскость относятся как 3 : 4. Найдите расстояние от точки A до плоскости α.

☐ 1) 12 см ☐ 3) 13 см
☐ 2) $\sqrt{147}$ см ☐ 4) $6\sqrt{5}$ см

А3. Концы отрезка AB расположены по разные стороны от плоскости α и удалены от нее на 2 см и 3 см. Точка C – середина AB. Найдите проекции отрезков AC и BC на плоскость α, если $AB = 13$ см.

☐ 1) 4 см ☐ 3) 6 см
☐ 2) 3 см ☐ 4) 5 см

В1. В треугольнике ABC: $AB = BC = 25$, $AC = 48$, BD – перпендикуляр к плоскости ABC, $BD = \sqrt{15}$. Найдите расстояние от точки D до прямой AC.

Ответ: ______________________________

В2. Длина стороны ромба $ABCD$ равна a, $\angle A = 60°$, $AM \perp ABC$, $AM = a$. Найдите расстояние то точки M до прямой CD.

Ответ: ______________________________

С1. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена наклонная AM к плоскости прямоугольника, составляющая углы α со сторонами AD и AB. Найдите синус угла между этой наклонной и плоскостью прямоугольника.

Ответ: ______________________________

Тест 9. Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью

Вариант 2

А1. Из некоторой точки проведены к данной плоскости перпендикуляр и наклонная, угол между которыми равен φ. Найдите перпендикуляр и проекцию наклонной, если наклонная равна m.

☐ 1) $m\cos\varphi$, $m\operatorname{tg}\varphi$
☐ 2) $m\operatorname{tg}\varphi$, $m\sin\varphi$
☐ 3) $m\cos\varphi$, $m\sin\varphi$
☐ 4) $m\operatorname{tg}\varphi$, $m\operatorname{ctg}\varphi$

А2. Из точки A к плоскости α проведены две наклонные, длины которых 19 см и $2\sqrt{70}$ см. Их проекции на эту плоскость относятся как 5 : 4. Найдите расстояние от точки A до плоскости α.

☐ 1) 12 см
☐ 2) $2\sqrt{34}$ см
☐ 3) 14 см
☐ 4) $\sqrt{145}$ см

А3. Концы отрезка AB расположены по разные стороны от плоскости α и удалены от нее на 9 см и 6 см. Точка C – середина AB. Найдите проекции отрезков AC и BC на плоскость α, если $AB = 17$ см.

☐ 1) 4 см
☐ 2) 5 см
☐ 3) 3 см
☐ 4) 7 см

В1. В треугольнике ABC: $AB = BC = 17$, $AC = 30$, BD – перпендикуляр к плоскости ABC, $BD = \sqrt{17}$. Найдите расстояние от точки D до прямой AC.

Ответ: ______________________________

В2. Длина стороны ромба $ABCD$ равна a, $\angle A = 30°$, $AM \perp ABC$, $AM = a$. Найдите расстояние то точки M до прямой CD.

Ответ: ______________________________

С1. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена наклонная AM к плоскости прямоугольника, составляющая углы α со сторонами AD и AB. Найдите $\sin\alpha$, если угол между этой наклонной и плоскостью прямоугольника равен φ.

Ответ: ______________________________

Тест 10. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей

Вариант 1

А1. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 3; 4; 5.

☐ 1) 7 ☐ 3) $4\sqrt{2}$

☐ 2) $5\sqrt{2}$ ☐ 4) 9

А2. Катет AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежит в плоскости α, $AC = 5$ см, $AB = 13$ см. Найдите угол между плоскостями α и ABC, если расстояние от точки B до плоскости α равно 6 см.

☐ 1) 15° ☐ 3) 60°

☐ 2) 45° ☐ 4) 30°

А3. Треугольник AMB и прямоугольник $ABCD$ расположены так, что их плоскости взаимно перпендикулярны. Найдите угол MAD.

☐ 1) 30° ☐ 3) 90°

☐ 2) 60° ☐ 4) 45°

В1. На гранях двугранного угла взяты две точки, удаленные от ребра двугранного угла на 4 см и 10 см. Известно, что одна из этих точек удалена от второй грани на 5,5 см. Найдите расстояние от второй точки до противоположной грани двугранного угла.

Ответ: ____________________

В2. Стороны треугольника равны 13 см, 14 см, 15 см. Точка M расположена вне плоскости треугольника и удалена от всех сторон треугольника на 5 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости треугольника.

Ответ: ____________________

С1. Два правильных треугольника ABC и DBC расположены так, что их плоскости взаимно перпендикулярны. Найдите тангенс двугранного угла, образованного плоскостями ADC и ABC.

Ответ: ____________________

Тест 10. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей

Вариант 2

А1. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 8; 5; 6.

☐ 1) $5\sqrt{3}$ ☐ 3) 10

☐ 2) 9 ☐ 4) $5\sqrt{2}$

А2. Катет прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежит в плоскости α, $AC = 7$ см, $AB = 11$ см. Найдите угол между плоскостями α и ABC, если расстояние от точки B до плоскости α равно 6 см.

☐ 1) 45° ☐ 3) 60°

☐ 2) 30° ☐ 4) 15°

А3. Прямоугольник $ABCD$ и параллелограмм $BEMC$ расположены так, что их плоскости взаимно перпендикулярны. Найдите угол MCD.

☐ 1) 30° ☐ 3) 45°

☐ 2) 90° ☐ 4) 60°

В1. На гранях двугранного угла взяты две точки, удаленные от ребра двугранного угла на 6 см и 10 см. Известно, что одна из этих точек удалена от второй грани на 7,5 см. Найдите расстояние от второй точки до противоположной грани двугранного угла.

Ответ: ____

В2. Стороны треугольника равны 26 см, 28 см, 30 см. Точка M удалена от плоскости треугольника и расположена на одинаковом расстоянии от его сторон. Найдите это расстояние.

Ответ: ____

С1. Сторона правильного треугольника ABC равна a. Треугольник DBC равнобедренный: $DB = DC = 2a$. Их плоскости взаимно перпендикулярны. Найдите тангенс двугранного угла, образованного плоскостями ADC и ABC.

Ответ: ____

Тест 11. Скрещивающиеся прямые. Многогранные углы

Вариант 1

А1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 4 см, найдите угол и расстояние между скрещивающимися прямыми BD и AA_1.

☐ 1) 90°; 2 см
☐ 2) 45°; $2\sqrt{2}$ см
☐ 3) 90°; $2\sqrt{2}$ см
☐ 4) 90°; 3 см

А2. В тетраэдре все ребра равны 6 см. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми и тангенс двугранного угла.

☐ 1) 3 см; $2\sqrt{2}$
☐ 2) $3\sqrt{2}$ см; 2
☐ 3) 4 см; $2\sqrt{2}$
☐ 4) $3\sqrt{2}$ см; $2\sqrt{2}$

А3. В трехгранном угле два плоских угла равны 120° и 80°. В каких пределах может находиться величина третьего плоского угла?

☐ 1) 40°÷160°
☐ 2) 80°÷120°
☐ 3) 60°÷100°
☐ 4) 0°÷80°

В1. Вычислите расстояние между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней куба с ребром $5\sqrt{3}$ см.

Ответ: ____________________

В2. В основании тетраэдра лежит правильный треугольник со стороной a, все боковые ребра равны $2a$. Найдите косинусы двугранных углов тетраэдра.

Ответ: ____________________

С1. Плоские углы трехгранного угла равны 45°, 45° и 60°. Найдите двугранный угол, лежащий против плоского угла, равного 60°.

Ответ: ____________________

Тест 11. Скрещивающиеся прямые. Многогранные углы

Вариант 2

А1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 6 см, найдите угол и расстояние между скрещивающимися прямыми DD_1 и AC.

☐ 1) 45°; $3\sqrt{2}$ см

☐ 2) 90°; 3 см

☐ 3) 45°; 4 см

☐ 4) 90°; $3\sqrt{2}$ см

А2. В тетраэдре все ребра равны 8 см. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми и косинус двугранного угла.

☐ 1) 4 см; $\frac{1}{3}$ ☐ 3) $4\sqrt{2}$ см; $\frac{1}{4}$

☐ 2) $4\sqrt{2}$ см; $\frac{1}{3}$ ☐ 4) 4 см; $\frac{1}{5}$

А3. В трехгранном угле два плоских угла равны 110° и 100°. В каких пределах может находиться величина третьего плоского угла?

☐ 1) 100°÷110°

☐ 2) 0°÷100°

☐ 3) 10°÷150°

☐ 4) 70°÷80°

В1. Вычислите расстояние между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней куба с ребром $7\sqrt{3}$ см.

Ответ: ______________________________

В2. В основании тетраэдра лежит правильный треугольник со стороной a, все боковые ребра равны $3a$. Найдите косинусы двугранных углов тетраэдра.

Ответ: ______________________________

С1. Плоские углы трехгранного угла равны 45°, 60° и 90°. Найдите двугранный угол, лежащий против плоского угла, равного 60°.

Ответ: ______________________________

Тест 12. Обобщение темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей»

Вариант 1

A1. Центр правильного треугольника ABC – точка O, его сторона равна 3. Отрезок OM – перпендикуляр к плоскости ABC, $OM = 2$. Найдите расстояние от точки M до вершин треугольника.

☐ 1) 4 ☐ 3) $\sqrt{6}$
☐ 2) $\sqrt{7}$ ☐ 4) $\sqrt{5}$

A2. Концы A и B отрезка AB расположены по одну сторону от плоскости α. Точка $C \in AB$ и $AC : CB = 2 : 3$. Точки A_1, B_1, C_1 – проекции точек A, B, C на плоскость α. Найдите C_1C, если $A_1A = 4$ см и $BB_1 = 14$ см.

☐ 1) 8 см ☐ 3) 7,2 см
☐ 2) 9 см ☐ 4) 6 см

A3. Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, BE и FD – перпендикуляры к плоскости ABC. Найдите угол между плоскостями ABE и DFC.

☐ 1) 0° ☐ 3) 60°
☐ 2) 30° ☐ 4) 45°

A4. В треугольнике ABC угол CAB равен 26°, угол ACB равен 64°. Отрезок AD перпендикулярен плоскости треугольника ABC. Определите угол между прямыми BD и BC.

☐ 1) 30° ☐ 3) 90°
☐ 2) 60° ☐ 4) 45°

A5. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 5 см. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми AD_1 и B_1C.

☐ 1) $5\sqrt{2}$ см ☐ 3) $2{,}5\sqrt{2}$ см
☐ 2) 5 см ☐ 4) 10 см

A6. В каких пределах могут меняться плоские углы при стороне основания правильной двенадцатиугольной пирамиды?

☐ 1) 0°÷75° ☐ 3) 30°÷75°
☐ 2) 0°÷90° ☐ 4) 75°÷90°

B1. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие ее в точках C и D соответственно. Найдите расстояние между точками A и B, если $AC = 30$ см, $BD = 20$ см, $CD = 24$ см и отрезок AB не пересекает плоскость α.

Ответ: ____________________________

B2. Средняя линия прямоугольной трапеции равна 6 см. Острый угол равен 30°. Точка M удалена от плоскости трапеции на расстояние, равное 4 см, и находится на равном расстоянии от ее сторон. Найдите расстояние от точки M до сторон трапеции.

Ответ: ____________________________

B3. Из вершины прямого угла C треугольника ABC восстановлен перпендикуляр CD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы треугольника, если $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

Ответ: ____________________________

B4. В прямоугольнике $ABCD$: $AB = 3$ и $AD = 4$. Этот прямоугольник перегнут по диагонали AC так, что образовался прямой двугранный угол. Найдите расстояние между вершинами B и D.

Ответ: ____________________________

C1. Концы отрезка AB, равного 16 см, лежат на гранях двугранного угла, равного 120°. Из точек A и B опущены перпендикуляры AC и BD на ребро двугранного угла. Найдите CD, если $AC = 7$ см и $BD = 11$ см.

Ответ: ____________________________

C2. Из точки, расположенной вне плоскости, проведены перпендикуляр к плоскости и две наклонные под углом α к перпендикуляру. Найдите косинус угла между проекциями наклонных, если угол между наклонными равен β.

Ответ: ____________________________

Тест 12. Обобщение темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей»

Вариант 2

А1. Центр правильного треугольника ABC – точка O, его сторона равна 3. Отрезок OM – перпендикуляр к плоскости ABC, $OM = 3$. Найдите расстояние от точки M до вершин треугольника.

☐ 1) $\sqrt{11}$ ☐ 3) $2\sqrt{3}$
☐ 2) $\sqrt{13}$ ☐ 4) 4

А2. Концы A и B отрезка AB расположены по одну сторону от плоскости α. Точка $C \in AB$ и $AC : CB = 3 : 4$. Точки A_1, B_1, C_1 – проекции точек A, B, C на плоскость α. Найдите C_1C, если $A_1A = 3$ см и $BB_1 = 17$ см.

☐ 1) 9 см ☐ 3) 10 см
☐ 2) 8 см ☐ 4) 7 см

А3. Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, AE и CF – перпендикуляры к плоскости ACD. Найдите угол между плоскостями ADE и CBF.

☐ 1) 30° ☐ 3) 60°
☐ 2) 0° ☐ 4) 45°

А4. В треугольнике ABC угол CAB равен 38°, угол ACB равен 52°. Отрезок AD перпендикулярен плоскости треугольника ABC. Определите угол между прямыми BD и BC.

☐ 1) 45° ☐ 3) 60°
☐ 2) 30° ☐ 4) 90°

А5. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 8 см. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми BA_1 и C_1D.

☐ 1) 8 см ☐ 3) 4 см
☐ 2) $8\sqrt{2}$ см ☐ 4) $4\sqrt{2}$ см

А6. В каких пределах могут меняться плоские углы при стороне основания правильной девятиугольной пирамиды?

☐ 1) 0°÷70°
☐ 2) 0°÷40°
☐ 3) 70°÷90°
☐ 4) 40°÷90°

B1. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие ее в точках C и D соответственно. Найдите расстояние между точками C и D, если $AC = 32$ см, $BD = 56$ см, $AB = 26$ см и отрезок AB не пересекает плоскость α.

Ответ: ______________________________

B2. Точка M удалена от каждой стороны равнобедренной трапеции на расстояние, равное 16 см. Основания трапеции равны 18 см и 32 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости трапеции.

Ответ: ______________________________

B3. Из вершины прямого угла C треугольника ABC восстановлен перпендикуляр CD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы треугольника, если $AC = a$, $BC = b$, $CD = c$.

Ответ: ______________________________

B4. В прямоугольнике $ABCD$: $AB = 2$ и $AD = 1$. Этот прямоугольник перегнут по диагонали AC так, что образовался прямой двугранный угол. Найдите расстояние между вершинами B и D.

Ответ: ______________________________

C1. Концы отрезка AB, равного 25 см, лежат на гранях двугранного угла, равного 60°. Из точек A и B опущены перпендикуляры AC и BD на ребро двугранного угла, $AC =$ 5 см и $BD = 8$ см. Найдите CD.

Ответ: ______________________________

C2. Из точки, расположенной вне плоскости, проведены перпендикуляр к плоскости и две наклонные под углом α к плоскости. Найдите косинус угла между проекциями наклонных, если угол между наклонными равен β.

Ответ: ______________________________

Тест 13. Понятие многогранника. Призма

Вариант 1

А1. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь боковой и полной поверхности параллелепипеда.

☐ 1) 386 см^2 и 506 см^2 ☐ 3) 512 см^2 и 632 см^2
☐ 2) 204 см^2 и 324 см^2 ☐ 4) 442 см^2 и 562 см^2

А2. Через два противолежащих ребра куба проведено сечение, площадь которого равна $49\sqrt{2}$ см^2. Найдите ребро и диагональ куба.

☐ 1) 14 см и $14\sqrt{3}$ см ☐ 3) 7 см и $7\sqrt{3}$ см
☐ 2) 7 см и $7\sqrt{2}$ см ☐ 4) 14 см и $14\sqrt{2}$ см

А3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна $2\sqrt{3}/3$, боковое ребро – $2\sqrt{3}$, M – центр грани CC_1B_1B. Найдите угол между прямой AM и плоскостью основания.

☐ 1) 60° ☐ 2) 15° ☐ 3) 30° ☐ 4) 45°

В1. В основании прямой призмы лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$. Боковое ребро $AA_1 = 28$. Точка $M \in AA_1$ и $AM : MA_1 = 4 : 3$. Найдите площадь сечения BMC.

Ответ: ______________________________

В2. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием служит ромб со стороной, равной a, $\angle BAD = 60°$. Через сторону AD и вершину B_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол 45°. Найдите длину бокового ребра и площадь сечения.

Ответ: ______________________________

С1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ измерения равны: $AB = a$, $BC = 2a$, $AA_1 = 3a$. Через диагональ AC нижнего основания и среднюю линию треугольника $A_1B_1C_1$ проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

Ответ: ______________________________

Тест 13. Понятие многогранника. Призма

Вариант 2

А1. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 15 см и 8 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь боковой и полной поверхности параллелепипеда.

☐ 1) 782 $см^2$ и 1022 $см^2$ ☐ 3) 486 $см^2$ и 726 $см^2$
☐ 2) 512 $см^2$ и 752 $см^2$ ☐ 4) 524 $см^2$ и 764 $см^2$

А2. Через два противолежащих ребра куба проведено сечение, площадь которого равна $64\sqrt{2}$ $см^2$. Найдите ребро и диагональ куба.

☐ 1) 4 см и $4\sqrt{2}$ см ☐ 3) 4 см и $4\sqrt{3}$ см
☐ 2) 8 см и $8\sqrt{2}$ см ☐ 4) 8 см и $8\sqrt{3}$ см

А3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна $3\sqrt{2}$, боковое ребро – $3\sqrt{2}$, M – центр грани CC_1B_1B. Найдите угол между прямой AM и плоскостью основания.

☐ 1) 45° ☐ 2) 60° ☐ 3) 30° ☐ 4) 15°

В1. В основании прямой призмы лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 10$, $BC = 21$, $AC = 17$. Боковое ребро $AA_1 = 15$. Точка $M \in AA_1$ и $AM : MA_1 = 2 : 3$. Найдите площадь сечения BMC.

Ответ: ____________________

В2. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием служит ромб со стороной, равной a, $\angle ADC = 135°$. Через сторону DC и вершину A_1 проведена плоскость под углом 60° к плоскости основания. Найдите длину бокового ребра и площадь сечения.

Ответ: ____________________

С1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ измерения равны: $AB = a$, $BC = 3a$, $AA_1 = 2a$. Через диагональ AC нижнего основания и среднюю линию треугольника $A_1B_1C_1$ проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

Ответ: ____________________

Тест 14. Наклонная призма

Вариант 1

А1. Боковое ребро наклонной призмы равно 8 см и наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите высоту призмы.

☐ 1) 4 см ☐ 3) $4\sqrt{3}$ см

☐ 2) $4\sqrt{2}$ см ☐ 4) 6 см

А2. Расстояния между параллельными прямыми, содержащими боковые ребра наклонной треугольной призмы, равны 2 см, 3 см и 4 см, а боковые ребра 5 см. Найдите боковую поверхность призмы.

☐ 1) 45 см^2 ☐ 3) 90 см^2

☐ 2) 120 см^2 ☐ 4) 22,5 см^2

А3. Основание призмы – квадрат со стороной, равной a. Одна из боковых граней – также квадрат, другая – ромб с углом 45°. Определите площадь полной поверхности призмы.

☐ 1) $a^2\left(3+\sqrt{2}\right)$ ☐ 3) $a^2\left(2+\sqrt{2}\right)$

☐ 2) $a^2\left(4+2\sqrt{2}\right)$ ☐ 4) $a^2\left(4+\sqrt{2}\right)$

В1. Расстояние между любыми двумя боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равно a. Боковое ребро равно l и наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь полной поверхности призмы.

Ответ: ______________________________

В2. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 10 см, 17 см и 21 см. Вычислите расстояние между большей боковой гранью и противолежащим боковым ребром.

Ответ: ______________________________

С1. Основание параллелепипеда – квадрат со стороной a, боковое ребро равно $2a$. Одна из вершин верхнего основания равноудалена от вершин нижнего основания. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

Ответ: ______________________________

Тест 14. Наклонная призма

Вариант 2

A1. Боковое ребро наклонной призмы равно 12 см и наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите высоту призмы.

☐ 1) 8 см ☐ 3) $6\sqrt{3}$ см

☐ 2) 6 см ☐ 4) $6\sqrt{2}$ см

A2. Расстояния между параллельными прямыми, содержащими боковые ребра наклонной треугольной призмы, равны 3 см, 4 см и 5 см, а боковые ребра 6 см. Найдите боковую поверхность призмы.

☐ 1) 54 см^2 ☐ 3) 36 см^2

☐ 2) 360 см^2 ☐ 4) 72 см^2

A3. Основание призмы – квадрат со стороной, равной a. Одна из боковых граней – также квадрат, другая – ромб с углом 60°. Определите площадь полной поверхности призмы.

☐ 1) $a^2\left(4+2\sqrt{3}\right)$ ☐ 3) $a^2\left(2+\sqrt{3}\right)$

☐ 2) $a^2\left(4+\sqrt{3}\right)$ ☐ 4) $a^2\left(2+4\sqrt{3}\right)$

B1. Расстояние между любыми двумя боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равно a. Боковое ребро равно l и наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь полной поверхности призмы.

Ответ: ______________________________

B2. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 13 см, 14 см и 15 см. Вычислите расстояние между средней боковой гранью и противолежащим боковым ребром.

Ответ: ______________________________

C1. Основание параллелепипеда – квадрат со стороной a, боковое ребро равно $3a$. Одна из вершин верхнего основания равноудалена от вершин нижнего основания. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

Ответ: ______________________________

Тест 15. Правильная пирамида

Вариант 1

А1. В правильной четырехугольной пирамиде угол между противоположными боковыми гранями равен 40°. Найдите угол наклона боковых граней к плоскости основания.

☐ 1) 20° ☐ 2) 140° ☐ 3) 80° ☐ 4) 70°

А2. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен 90°. Вычислите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади ее основания.

☐ 1) $\sqrt{3}$ ☐ 3) $\sqrt{2}$

☐ 2) $2\sqrt{3}$ ☐ 4) $3\sqrt{2}$

А3. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, боковое ребро равно a. Через среднюю линию основания и середину бокового ребра проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

☐ 1) $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{24}$ ☐ 3) $\dfrac{a^2\sqrt{7}}{32}$

☐ 2) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$ ☐ 4) $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{48}$

В1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, угол между смежными боковыми гранями равен 120°. Определите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ: ________________________________

В2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, высота – a. Найдите двугранный угол между плоскостью основания и боковой гранью, а также двугранный угол между смежными боковыми гранями.

Ответ: ________________________________

С1. В правильной четырехугольной пирамиде со стороной основания a и боковым ребром b через сторону основания и среднюю линию противоположной боковой грани проведена плоскость. Вычислите площадь сечения.

Ответ: ________________________________

Тест 15. Правильная пирамида

Вариант 2

A1. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 50°. Найдите угол между противоположными боковыми гранями.

☐ 1) 80° ☐ 2) 130° ☐ 3) 25° ☐ 4) 50°

A2. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен 60°. Вычислите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади ее основания.

☐ 1) 3 ☐ 3) $\sqrt{3}$

☐ 2) $\sqrt{2}$ ☐ 4) $2\sqrt{2}$

A3. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, высота равна $\frac{a}{3}$. Через среднюю линию основания и середину бокового ребра проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

☐ 1) $\frac{a^2\sqrt{3}}{24}$ ☐ 3) $\frac{a^2\sqrt{7}}{36}$

☐ 2) $\frac{a^2\sqrt{2}}{36}$ ☐ 4) $\frac{a^2\sqrt{7}}{48}$

B1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a. Угол между смежными боковыми гранями равен 120°. Определите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ: ______________________________

B2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, высота – $2a$. Найдите двугранный угол между плоскостью основания и боковой гранью, а также двугранный угол между смежными боковыми гранями.

Ответ: ______________________________

C1. В правильной четырехугольной пирамиде со стороной основания a и высотой h через сторону основания и среднюю линию противоположной боковой грани проведена плоскость. Вычислите площадь сечения.

Ответ: ______________________________

Тест 16. Неправильная пирамида. Усеченная пирамида

Вариант 1

А1. Основанием пирамиды служит треугольник со стороной a и противолежащим углом в 150°. Ребра наклонены к основанию под углом 30°. Найдите высоту пирамиды.

☐ 1) $a\sqrt{3}$ ☐ 2) $a\sqrt{3}/3$ ☐ 3) $a\sqrt{3}/2$ ☐ 4) $2a\sqrt{3}$

А2. В пирамиде $MABC$ боковое ребро MA перпендикулярно к плоскости основания ABC, а грань MBC составляет с ним угол 60°, $AB = AC = 10$, $BC = 16$. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

☐ 1) $48 + 60\sqrt{3}$ ☐ 3) 96

☐ 2) $60\sqrt{3}$ ☐ 4) $96 + 60\sqrt{3}$

А3. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны 6 см и 8 см, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

☐ 1) $100 + 28\sqrt{2}$ см² ☐ 3) 156 см²

☐ 2) 128 см² ☐ 4) $100 + 14\sqrt{2}$ см²

В1. В основании пирамиды лежит квадрат. Одно из боковых ребер равно стороне квадрата и перпендикулярно его плоскости. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если ее полная поверхность равна S.

Ответ: ______________________________

В2. Основанием пирамиды служит трапеция, основания которой равны 2 и 6. Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания. Высота боковой грани равна 5. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Ответ: ______________________________

С1. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде основания равны 10 см и 6 см, а площадь диагонального сечения $8\sqrt{10}$ см². Определите боковую поверхность пирамиды.

Ответ: ______________________________

Тест 16. Неправильная пирамида. Усеченная пирамида

Вариант 2

А1. Основанием пирамиды служит треугольник со стороной a и противолежащим углом в 30°. Ребра наклонены к основанию под углом 60°. Найдите боковое ребро пирамиды.

☐ 1) $2a$ ☐ 2) $a\sqrt{3}$ ☐ 3) $2a\sqrt{3}$ 4) $a\sqrt{3}/2$

А2. Основанием пирамиды $PEFM$ служит равнобедренный треугольник, $EF = EM$, $MF = 20\sqrt{6}$. Боковое ребро PE равно 10 и перпендикулярно к плоскости основания. Угол между PE и плоскостью MPF равен 60°. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

☐ 1) 500 ☐ 3) $200\sqrt{6}$

☐ 2) $300 + 200\sqrt{6}$ ☐ 4) $200 + 300\sqrt{6}$

А3. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 6 см и 8 см, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

☐ 1) $39\sqrt{3}$ см^2 ☐ 3) $14 + 25\sqrt{3}$ см^2

☐ 2) $7 + 25\sqrt{3}$ см^2 ☐ 4) 39 см^2

В1. В основании пирамиды лежит квадрат. Одно из боковых ребер равно стороне квадрата и перпендикулярно его плоскости. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если ее боковая поверхность равна S.

Ответ: ______________________________

В2. Основанием пирамиды служит трапеция, основания которой равны 2 и 4. Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания. Высота боковой грани равна 5. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Ответ: ______________________________

С1. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде основания равны 12 см и 8 см, а площадь диагонального сечения $10\sqrt{10}$ см^2. Определите боковую поверхность пирамиды.

Ответ: ______________________________

Тест 17. Правильные многогранники

Вариант 1

А1. Два плоских угла при вершине трехгранного угла равны 110° и 150°. В каких пределах может меняться величина третьего плоского угла?

☐ 1) 0°÷110°
☐ 2) 110°÷150°
☐ 3) 40°÷100°
☐ 4) 0°÷150°

А2. Найдите плоский угол и сумму всех плоских углов при вершине правильного тетраэдра.

☐ 1) 60°; 180°
☐ 2) 60°; 240°
☐ 3) 30°; 90°
☐ 4) 60°; 300°

А3. Вычислите площадь полной поверхности правильного октаэдра (восьмигранника), ребро которого равно a.

☐ 1) $\sqrt{3}a^2$
☐ 2) $2a^2$
☐ 3) $3\sqrt{2}a^2$
☐ 4) $2\sqrt{3}a^2$

В1. В правильной n-угольной пирамиде боковые ребра составляют с плоскостью основания угол φ. Найдите тангенс угла между плоскостью основания и боковой гранью.

Ответ: ____________________

В2. Ребро куба равно a. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого служат центры граней данного куба.

Ответ: ____________________

С1. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной a, боковое ребро AA_1 равно b. На ребрах AB и B_1C_1 выбраны точки M и N так, что $AM : MB = 1 : 3$ и $B_1N : NC_1 = 3 : 1$. Через эти точки параллельно диагонали BD основания проведена плоскость. Вычислите площадь полученного сечения.

Ответ: ____________________

Тест 17. Правильные многогранники

Вариант 2

А1. Два плоских угла при вершине трехгранного угла равны 90° и 160°. В каких пределах может меняться величина третьего плоского угла?

☐ 1) $70° \div 110°$
☐ 2) $0° \div 90°$
☐ 3) $90° \div 160°$
☐ 4) $0° \div 160°$

А2. Найдите плоский угол и сумму всех плоских углов при вершине правильного октаэдра (восьмигранника).

☐ 1) 60°; 180°
☐ 2) 30°; 120°
☐ 3) 60°; 240°
☐ 4) 30°; 90°

А3. Вычислите площадь полной поверхности правильного тетраэдра, ребро которого равно a.

☐ 1) $2a^2$ ☐ 3) $2\sqrt{3}a^2$
☐ 2) $\sqrt{3}a^2$ ☐ 4) $3\sqrt{2}a^2$

В1. В правильной n-угольной пирамиде боковые грани составляют с плоскостью основания угол φ. Найдите тангенс угла между плоскостью основания и боковым ребром.

Ответ: ____

В2. Ребро правильного октаэдра равно a. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого служат центры граней данного октаэдра.

Ответ: ____

С1. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной a, боковое ребро AA_1 равно b. На ребрах AB и B_1C_1 выбраны точки M и N так, что $AM : MB = 2 : 1$ и $B_1N : NC_1 = 1 : 2$. Через эти точки параллельно диагонали BD основания проведена плоскость. Вычислите площадь полученного сечения.

Ответ: ____

Тест 18. Обобщение темы «Многогранники»

Вариант 1

А1. Одна из граней многогранника – пятиугольник. Какое наименьшее число ребер и наименьшее число граней может иметь этот многогранник?

- ☐ 1) 6 ребер, 5 граней
- ☐ 2) 10 ребер, 6 граней
- ☐ 3) 8 ребер, 6 граней
- ☐ 4) 10 ребер, 5 граней

А2. В призме 261 ребро. Найдите количество граней и вершин этой призмы.

- ☐ 1) 87 граней, 174 вершины
- ☐ 2) 89 граней, 176 вершин
- ☐ 3) 89 граней, 174 вершины
- ☐ 4) 89 граней, 178 вершин

А3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$: $AB = a$, $CC_1 = 2a$. Вычислите угол между прямыми CB_1 и AA_1.

- ☐ 1) $\operatorname{arcctg} 2$
- ☐ 2) $\operatorname{arctg} 2$
- ☐ 3) $\arcsin \frac{1}{4}$
- ☐ 4) $\arccos \frac{1}{4}$

А4. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.

- ☐ 1) $2a^2 + a\sqrt{a^2 + 4h^2}$
- ☐ 2) $a^2 + 2a\sqrt{a^2 + 4h^2}$
- ☐ 3) $a^2 + a\sqrt{a^2 + 4h^2}$
- ☐ 4) $2a^2 + 3a\sqrt{a^2 + 4h^2}$

А5. В кубе через сторону основания проведена плоскость под углом φ ($\varphi \geqslant 45°$) к плоскости основания. Ребро куба равно a. Найдите площадь сечения.

- ☐ 1) $a^2 \operatorname{tg}\varphi$
- ☐ 2) $a^2/\cos\varphi$
- ☐ 3) $a^2 \operatorname{ctg}\varphi$
- ☐ 4) $a^2/\sin\varphi$

А6. Основания правильной усеченной треугольной пирамиды равны 4 см и 6 см, боковые грани наклонены под углом 45° к плоскости основания. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

- ☐ 1) $5\sqrt{2}$ см^2
- ☐ 2) $5\sqrt{6}$ см^2
- ☐ 3) $7\sqrt{2}$ см^2
- ☐ 4) $8\sqrt{6}$ см^2

B1. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, боковое ребро равно b. Найдите площадь полной поверхности призмы.

Ответ: ______________________________

B2. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с углом 60°. Сторона ромба равна a. Меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 45°. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

Ответ: ______________________________

B3. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной a. Двугранный угол при одном из ребер основания пирамиды прямой, а двугранные углы при соседних с ним ребрах основания равны 60° и 45°. Найдите высоту пирамиды.

Ответ: ______________________________

B4. В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона нижнего основания 8 см, верхнего – 5 см, а высота – 3 см. Через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведено сечение. Определите площадь сечения и угол между ним и нижним основанием.

Ответ: ______________________________

C1. Сечением наклонной треугольной призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, является прямоугольный треугольник с острым углом 45°, площадь которого Q. Боковое ребро призмы равно a. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Ответ: ______________________________

C2. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна h, плоский угол при вершине равен α. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ: ______________________________

Тест 18. Обобщение темы «Многогранники»

Вариант 2

А1. Одна из граней многогранника – семиугольник. Какое наименьшее число ребер и наименьшее число граней может иметь этот многогранник?

☐ 1) 14 ребер, 8 граней
☐ 2) 8 ребер, 7 граней
☐ 3) 7 ребер, 7 граней
☐ 4) 10 ребер, 8 граней

А2. В призме 282 ребра. Найдите количество граней и вершин этой призмы.

☐ 1) 98 граней, 188 вершин
☐ 2) 96 граней, 192 вершины
☐ 3) 94 грани, 180 вершин
☐ 4) 96 граней, 188 вершин

А3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$: $BC = a$, $BB_1 = 3a$. Вычислите угол между прямыми A_1C и BB_1.

☐ 1) $\operatorname{arctg} 3$
☐ 2) $\operatorname{arcctg} 3$
☐ 3) $\arccos\frac{1}{3}$
☐ 4) $\arcsin\frac{1}{3}$

А4. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и высотой b.

☐ 1) $2a^2 + a\sqrt{4b^2 + a^2}$
☐ 2) $a^2 + a\sqrt{4b^2 + a^2}$
☐ 3) $a^2 + 2a\sqrt{4b^2 - a^2}$
☐ 4) $a^2 + a\sqrt{4b^2 - a^2}$

А5. В кубе через сторону основания проведена плоскость под углом φ ($\varphi \leqslant 45°$) к плоскости основания. Ребро куба равно a. Найдите площадь сечения.

☐ 1) $a^2/\cos\varphi$
☐ 2) $a^2 \operatorname{tg}\varphi$
☐ 3) $a^2 \operatorname{ctg}\varphi$
☐ 4) $a^2/\sin\varphi$

А6. Основания правильной усеченной треугольной пирамиды равны 6 см и 8 см, боковые грани наклонены под углом 60° к плоскости основания. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

☐ 1) $7\sqrt{3}$ см²
☐ 2) $12\sqrt{3}$ см²
☐ 3) $14\sqrt{3}$ см²
☐ 4) $14\sqrt{2}$ см²

B1. Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна a, боковое ребро равно b. Найдите площадь полной поверхности призмы.

Ответ: ______________________________

B2. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с углом 60°. Сторона ромба равна a. Большая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 45°. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

Ответ: ______________________________

B3. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной a. Двугранный угол при одном из ребер основания пирамиды прямой, а двугранные углы при соседних с ним ребрах основания равны 30° и 45°. Найдите высоту пирамиды.

Ответ: ______________________________

B4. В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона нижнего основания 10 см, верхнего – 4 см, а высота – 3 см. Через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведено сечение. Определите площадь сечения и угол между ним и нижним основанием.

Ответ: ______________________________

C1. Сечением наклонной треугольной призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, является прямоугольный треугольник с острым углом 30°, площадь которого Q. Боковое ребро призмы равно a. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Ответ: ______________________________

C2. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна h, плоский угол при вершине равен φ. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ: ______________________________

Тест 19. Понятие вектора в пространстве

Вариант 1

А1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите векторы, противоположно направленные вектору $\overrightarrow{AB_1}$ и имеющие такую же длину.

☐ 1) $\overrightarrow{B_1A}$ и $\overrightarrow{DC_1}$ ☐ 3) $\overrightarrow{B_1A}$ и $\overrightarrow{C_1D}$

☐ 2) $\overrightarrow{B_1A}$ и $\overrightarrow{DD_1}$ ☐ 4) $\overrightarrow{C_1D}$ и $\overrightarrow{AA_1}$

А2. В тетраэдре $ABCD$: $|\overrightarrow{AB}| = 4$, $|\overrightarrow{DA}| = 7$, $|\overrightarrow{BD}| = 5$. Найдите величину $|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}|$.

☐ 1) 4 ☐ 3) 12

☐ 2) 2 ☐ 4) 3

А3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. Вычислите $|\overrightarrow{A_1C}|$.

☐ 1) $3a$ ☐ 3) $\sqrt{2}a$

☐ 2) $2a$ ☐ 4) $\sqrt{3}a$

В1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка $E \in B_1C_1$ и $B_1E : EC_1 = 2 : 1$, точка $F \in C_1D_1$ и $C_1F : FD_1 = 1 : 2$. Укажите векторы с началом и концом в вершинах параллелепипеда, сонаправленные с вектором $\overrightarrow{EF}$, и найдите их длину, если $|\overrightarrow{EF}| = a$.

Ответ: ____________________

В2. В тетраэдре $ABCD$: $|\overrightarrow{AD}| = 4$, $|\overrightarrow{CD}| = 5$, $|\overrightarrow{AC}| = 6$. Точка $E \in AD$ и $AE : ED = 1 : 3$, точка $F \in CD$ и $CF : FD = 2 : 3$. Вычислите $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FE}|$.

Ответ: ____________________

С1. Прямая a не лежит в плоскости α. Через прямую a проходит плоскость β, пересекающая плоскость α по прямой b. Точки A и B принадлежат прямой a, точки C и D – прямой b. При каком условии векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны?

Ответ: ____________________

Тест 19. Понятие вектора в пространстве

Вариант 2

А1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите векторы, противоположно направленные вектору $\overrightarrow{DA_1}$ и имеющие такую же длину.

- ☐ 1) $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{AA_1}$
- ☐ 2) $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{B_1C}$
- ☐ 3) $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{AD}$
- ☐ 4) $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{CB_1}$

А2. В тетраэдре $ABCD$: $\left|\overrightarrow{AD}\right| = 5$, $\left|\overrightarrow{CA}\right| = 6$, $\left|\overrightarrow{CD}\right| = 8$. Найдите величину $\left|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right|$.

- ☐ 1) 1
- ☐ 2) 2
- ☐ 3) 8
- ☐ 4) 11

А3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. Вычислите $\left|\overrightarrow{C_1A}\right|$.

- ☐ 1) $\sqrt{3}a$
- ☐ 2) $3a$
- ☐ 3) $2a$
- ☐ 4) $\sqrt{2}a$

В1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка $E \in AB$ и $AE : EB = 1 : 3$, точка $F \in AD$ и $DF : FA = 3 : 1$. Укажите векторы с началом и концом в вершинах параллелепипеда, сонаправленные с вектором $\overrightarrow{FE}$, и найдите их длину, если $\left|\overrightarrow{FE}\right| = a$.

Ответ: ______________________________

В2. В тетраэдре $ABCD$: $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 10$, $\left|\overrightarrow{CD}\right| = 6$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 8$. Точка $E \in BD$ и $BE : ED = 3 : 2$, точка $F \in CD$ и $CF : FD = 2 : 1$. Вычислите $\left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EF}\right|$.

Ответ: ______________________________

С1. Прямая γ пересекает плоскости α и β по прямым a и b соответственно. Точки A и B принадлежат прямой a, точки C и D – прямой b. При каком условии векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны?

Ответ: ______________________________

Тест 20. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число

Вариант 1

A1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Упростите сумму $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD}$ и укажите полученный вектор.

- [ ] 1) $\overrightarrow{D_1A}$
- [ ] 2) $\overrightarrow{DA}$
- [ ] 3) $\overrightarrow{AD}$
- [ ] 4) $\overrightarrow{AD_1}$

A2. Найдите связь между векторами $\vec{a} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C_1A_1}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$.

- [ ] 1) $\vec{a} = \vec{b}$
- [ ] 2) $\vec{a} = -\vec{b}$
- [ ] 3) $\vec{a} = -2\vec{b}$
- [ ] 4) $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$

A3. Упростите выражение: $3\left(2\vec{m} - 3\vec{n}\right) + 5\left(\vec{n} - 4\vec{m}\right) - 2\left(\vec{m} + \vec{n}\right)$.

- [ ] 1) $-16\vec{m} - 6\vec{n}$
- [ ] 2) $16\vec{m} - 6\vec{n}$
- [ ] 3) $16\vec{m} + 6\vec{n}$
- [ ] 4) $-16\vec{m} + 6\vec{n}$

B1. В пирамиде $MABCD$ основанием служит прямоугольник $ABCD$, $AB = 8$ см, $BC = 15$ см. Найдите $\left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{MA}\right|$.

Ответ: ____________________

B2. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ диагонали грани BB_1C_1C пересекаются в точке M. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Ответ: ____________________

C1. Диагонали параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Докажите, что векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{CO}$ и $\overrightarrow{C_1A}$ коллинеарны. При каком значении k выполняется равенство $\vec{a} = k\overrightarrow{C_1A}$?

Ответ: ____________________

Тест 20. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число

Вариант 2

А1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Упростите сумму $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA_1}$.

☐ 1) $\overrightarrow{AB}$

☐ 2) $\overrightarrow{A_1B}$

☐ 3) $\overrightarrow{BA_1}$

☐ 4) $\overrightarrow{BA}$

А2. Найдите связь между векторами $\vec{a} = -\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{KF}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{EC}$.

☐ 1) $\vec{a} = \vec{b}$

☐ 2) $\vec{a} = -2\vec{b}$

☐ 3) $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$

☐ 4) $\vec{a} = -\vec{b}$

А3. Упростите выражение: $2(4\vec{m} - 3\vec{n}) + 3(2\vec{n} - \vec{m}) - 4(\vec{m} + \vec{n})$.

☐ 1) $\vec{m} + 4\vec{n}$

☐ 2) $\vec{m} - 4\vec{n}$

☐ 3) $-\vec{m} + 4\vec{n}$

☐ 4) $-\vec{m} - 4\vec{n}$

В1. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит правильный треугольник ABC, сторона которого равна $2\sqrt{3}$ см, O – середина AB. Найдите $\left|\overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{A_1C}\right|$.

Ответ: ______________________________

В2. В пирамиде $MABC$ отрезок CE – медиана грани BMC, точка K – середина CE. Выразите вектор $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BM}$.

Ответ: ______________________________

С1. Диагонали параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Докажите, что векторы $\vec{a} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{A_1C}$ коллинеарны. При каком значении k выполняется равенство $k\vec{a} = \overrightarrow{A_1C}$?

Ответ: ______________________________

Тест 21. Компланарные векторы

Вариант 1

А1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Из приведенных троек векторов выберите тройку компланарных векторов.

☐ 1) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BB_1}$

☐ 2) $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{C_1C}$

☐ 3) $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD_1}$

☐ 4) $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{AD}$

А2. Вектор $\vec{m}$ разложен по трем некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{m} = -3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}$. Найдите разложение вектора $\vec{b}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{c}$ и $\vec{m}$.

☐ 1) $\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{m}$

☐ 2) $\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{m}$

☐ 3) $-\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{m}$

☐ 4) $\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{m}$

А3. В призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M – середина ребра A_1C_1. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CC_1}$.

☐ 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC_1}$

☐ 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC_1}$

☐ 3) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC_1}$

☐ 4) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC_1}$

В1. Среди четырех векторов $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{p} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{k} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ укажите тройку компланарных векторов и найдите связь между ними.

Ответ: ______________________________

В2. Точка K принадлежит ребру B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $B_1K : KC_1 = 1 : 2$. Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CC_1}$ и найдите длину этого вектора, если ребро куба равно m.

Ответ: ______________________________

С1. В основании пирамиды $PABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{PD}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{PC}$.

Ответ: ______________________________

Тест 21. Компланарные векторы

Вариант 2

А1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Из приведенных троек векторов выберите тройку компланарных векторов.

☐ 1) $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{D_1D}, \overrightarrow{AC}$

☐ 2) $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{D_1B_1}$

☐ 3) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC_1}$

☐ 4) $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$

А2. Вектор $\vec{m}$ разложен по трем некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 4\vec{c}$. Найдите разложение вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{m}$.

☐ 1) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{m}$

☐ 2) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{m}$

☐ 3) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{m}$

☐ 4) $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{m}$

А3. В призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M – середина ребра A_1B_1. Выразите вектор $\overrightarrow{MB}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$.

☐ 1) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB_1}$

☐ 2) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB_1}$

☐ 3) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB_1}$

☐ 4) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$

В1. Среди четырех векторов $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = -\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{k} = 3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ укажите тройку компланарных векторов и найдите связь между ними.

Ответ: ______________________________

В2. Точка K принадлежит ребру B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $B_1K : KC_1 = 2 : 1$. Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{C_1C}$ и найдите длину этого вектора, если ребро куба равно m.

Ответ: ______________________________

С1. В основании пирамиды $EABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{EA}$ через векторы $\vec{m} = \overrightarrow{EB}$, $\vec{n} = \overrightarrow{EC}$, $\vec{p} = \overrightarrow{ED}$.

Ответ: ______________________________

Тест 22. Обобщение темы «Векторы в пространстве»

Вариант 1

А1. При каких значениях чисел x и y векторы $\vec{m} = 3\vec{a} + (3y - 5)\vec{b}$ и $\vec{n} = (2x - 1)\vec{a} + 7\vec{b}$ равны ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы)?

☐ 1) $x = -2,\ y = 4$
☐ 2) $x = -2,\ y = -4$
☐ 3) $x = 2,\ y = 4$
☐ 4) $x = 2,\ y = -4$

А2. В пирамиде $SABC$ все ребра равны, апофема равна $18\sqrt{3}$. Точка $E \in AS$ и $AE : ES = 2 : 1$, точка $F \in AB$ и $BF : FA = 1 : 2$. Найдите $\left|\overrightarrow{EF}\right|$.

☐ 1) 22
☐ 2) 16
☐ 3) 8
☐ 4) 24

А3. Упростите векторное выражение: $\overrightarrow{LM} - \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{LK} - \overrightarrow{SP}$.

☐ 1) $\overrightarrow{KC}$
☐ 2) $\overrightarrow{LP}$
☐ 3) $\overrightarrow{MK}$
☐ 4) $\overrightarrow{SK}$

А4. Выполните действия: $5\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right) - 2\left(\vec{a} - 4\vec{b}\right) + 7\vec{b}$.

☐ 1) $-8\vec{a}$
☐ 2) $8\vec{a}$
☐ 3) $8\vec{a} - 2\vec{b}$
☐ 4) $8\vec{a} + 4\vec{b}$

А5. При каком значении числа x векторы $\vec{m} = 3\vec{a} + (x - 2)\vec{b}$ и $\vec{n} = 2\vec{a} + (5x + 1)\vec{b}$ коллинеарны (векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны)?

☐ 1) $-\frac{3}{13}$
☐ 2) $\frac{6}{13}$
☐ 3) $-\frac{7}{13}$
☐ 4) $\frac{15}{13}$

А6. Разложите вектор $\vec{m} - 2\vec{n}$ по неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{m} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ и $\vec{n} = -\vec{a} - \vec{b}$.

☐ 1) $-5\vec{a} + 2\vec{b}$

☐ 2) $-5\vec{a} - 2\vec{b}$

☐ 3) $5\vec{a} + 2\vec{b}$

☐ 4) $5\vec{a} - 2\vec{b}$

B1. При каких значениях чисел x и y векторы $\vec{m} = (2x-1)\vec{a} + 6\vec{b} + (4x+1)\vec{c}$ и $\vec{n} = 3\vec{a} + 2\vec{b} + (y+1)\vec{c}$ коллинеарны (векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны)?

Ответ: ______________________________

B2. Докажите, что векторы $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ и $\vec{k} = 7\vec{a} - \vec{b}$ компланарны. Найдите связь между векторами $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{k}$.

Ответ: ______________________________

B3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Найдите величины: $\left|\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{DC_1} - \overrightarrow{DA_1} + \overrightarrow{C_1C}\right|$ и $\left|\overrightarrow{AA_1}\right| + \left|\overrightarrow{DC_1}\right| - \left|\overrightarrow{DA_1}\right| + \left|\overrightarrow{C_1C}\right|$.

Ответ: ______________________________

B4. В тетраэдре $SABC$ отрезок SD – медиана треугольника SAB. Точка $O \in SD$ и $SO : OD = 4 : 1$. Разложите вектор $\overrightarrow{CO}$ по векторам $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SC}$.

Ответ: ______________________________

C1. Векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны, точка K лежит в плоскости треугольника ABC. Найдите значение числа x, если $\overrightarrow{MK} = 0{,}5\overrightarrow{MA} + 0{,}8\overrightarrow{MB} + x\overrightarrow{MC}$.

Ответ: ______________________________

C2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. Точка $E \in AD$ и $AE : ED = 1 : 2$, точка $F \in C_1C$ и $CF : FC_1 = 2 : 3$. Разложите вектор $\overrightarrow{EF}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ и найдите его длину.

Ответ: ______________________________

Тест 22. Обобщение темы «Векторы в пространстве»

Вариант 2

А1. При каких значениях чисел x и y векторы $\vec{m} = 11\vec{a} + (2y+3)\vec{b}$ и $\vec{n} = (4x-1)\vec{a} + 7\vec{b}$ равны ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы)?

☐ 1) $x = -3,\ y = 2$
☐ 2) $x = 3,\ y = -2$
☐ 3) $x = -3,\ y = -2$
☐ 4) $x = 3,\ y = 2$

А2. В пирамиде $SABC$ все ребра равны, апофема равна $12\sqrt{3}$. Точка $E \in SC$ и $SE : EC = 3 : 1$, точка $F \in BC$ и $CF : FB = 1 : 3$. Найдите $|\overrightarrow{FE}|$.

☐ 1) 12
☐ 2) 6
☐ 3) 18
☐ 4) 8

А3. Упростите векторное выражение: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$.

☐ 1) $\overrightarrow{AD}$
☐ 2) $\overrightarrow{FB}$
☐ 3) $\overrightarrow{AF}$
☐ 4) $\overrightarrow{CF}$

А4. Выполните действия: $4(3\vec{a} + 2\vec{b}) - 3(2\vec{a} + \vec{b}) - 6\vec{a}$.

☐ 1) $5\vec{b}$
☐ 2) $3\vec{a} - 5\vec{b}$
☐ 3) $-5\vec{b}$
☐ 4) $2\vec{a} + 5\vec{b}$

А5. При каком значении числа x векторы $\vec{m} = (2x-1)\vec{a} - 5\vec{b}$ и $\vec{n} = (x+3)\vec{a} + 3\vec{b}$ коллинеарны (векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны)?

☐ 1) $\dfrac{7}{11}$
☐ 2) $-\dfrac{9}{11}$
☐ 3) $\dfrac{13}{11}$
☐ 4) $-\dfrac{12}{11}$

А6. Разложите вектор $2\vec{m} + \vec{n}$ по неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{m} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{n} = -\vec{a} + 2\vec{b}$.

☐ 1) $7\vec{a} + 4\vec{b}$

☐ 2) $7\vec{a} - 4\vec{b}$

☐ 3) $-7\vec{a} + 4\vec{b}$

☐ 4) $-7\vec{a} - 4\vec{b}$

B1. При каких значениях чисел x и y векторы $\vec{m} = (6x+2)\vec{a} + 4\vec{b} + (3y+4)\vec{c}$ и $\vec{n} = (2x-1)\vec{a} + \vec{b} + (x+1)\vec{c}$ коллинеарны (векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны)?

Ответ: ____________________

B2. Докажите, что векторы $\vec{m} = 3\vec{a} - 4\vec{c}$, $\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$ и $\vec{k} = \vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$ компланарны. Найдите связь между векторами $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{k}$.

Ответ: ____________________

B3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 3. Найдите величины: $\left|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{BB_1}\right|$ и $\left|\overrightarrow{AD}\right| - \left|\overrightarrow{C_1D_1}\right| + \left|\overrightarrow{BB_1}\right|$.

Ответ: ____________________

B4. В тетраэдре $SABC$ отрезок SD – медиана треугольника SBC. Точка $O \in SD$ и $SO : OD = 2 : 3$. Разложите вектор $\overrightarrow{AO}$ по векторам $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SC}$.

Ответ: ____________________

C1. Векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны, точка K лежит в плоскости треугольника ABC. Найдите значение числа x, если $\overrightarrow{MK} = 1{,}8\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} - 0{,}3\overrightarrow{MC}$.

Ответ: ____________________

C2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. Точка $E \in BC$ и $BE : EC = 3 : 1$, точка $F \in A_1B_1$ и $A_1F : FB_1 = 1 : 2$. Разложите вектор $\overrightarrow{EF}$ по векторам $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ и найдите его длину.

Ответ: ____________________

Тест 23. Итоговый по программе 10 класса

Вариант 1

А1. Отрезок AB не пересекает плоскость α. Расстояния от точек A и B до плоскости α равны 2 см и 23 см. Точка $C \in AB$, $AC : CB = 3 : 4$. Найдите расстояние от точки C до плоскости α.

☐ 1) 10 см ☐ 3) 25 см
☐ 2) 11 см ☐ 4) 21 см

А2. Треугольник ABC правильный, O – центр треугольника, $OM \perp ABC$, $OM = \sqrt{33}$. Высота треугольника равна 6. Найдите расстояние от точки M до вершин треугольника.

☐ 1) $8\sqrt{2}$ ☐ 3) 7
☐ 2) 6 ☐ 4) $6\sqrt{3}$

А3. Правильные треугольники ABC и ADC расположены так, что вершина B треугольника ABC проектируется в центр треугольника ADC. Найдите косинус угла между плоскостями ABC и ADC.

☐ 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ☐ 3) $\frac{1}{2}$
☐ 2) $\frac{1}{4}$ ☐ 4) $\frac{1}{3}$

А4. Вычислите площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны a.

☐ 1) $2\sqrt{3}a^2$ ☐ 3) $\left(1+\sqrt{6}\right)a^2$
☐ 2) $\left(1+\sqrt{3}\right)a^2$ ☐ 4) $\left(2+\sqrt{3}\right)a^2$

А5. Через сторону основания правильной треугольной призмы под углом 60° к основанию проведено сечение, пересекающее противоположное боковое ребро. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна a, боковое ребро равно b.

☐ 1) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ ☐ 3) $a^2\sqrt{3}$
☐ 2) $a^2\sqrt{6}$ ☐ 4) $a^2\sqrt{2}$

А6. Вектор $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$ разложен по трем некомпланарным векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Разложите вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{m}$.

☐ 1) $\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{m}$ ☐ 3) $-\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{m}$

☐ 2) $\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{m}$ ☐ 4) $-\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{m}$

В1. Дан равнобедренный треугольник ABC: $BA = BC = 5$, $AC = 8$. Прямая BD перпендикулярна плоскости ABC, прямые CE и BD параллельны. Найдите расстояние между прямыми BD и AE.

Ответ: ______________________________

В2. Точки A и B принадлежат разным граням прямого двугранного угла. Точки A_1 и B_1 – проекции точек A и B на ребро двугранного угла, $AA_1 = 5$, $A_1B_1 = 6$, $BB_1 = 7$. Найдите AB.

Ответ: ______________________________

В3. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основание ABC – правильный треугольник со стороной, равной a, боковое ребро равно b, $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 60°$. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

Ответ: ______________________________

В4. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны a и b ($a > b$). Боковые грани наклонены к основанию под углом φ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ: ______________________________

С1. В правильной шестиугольной призме диагонали равны 10 и 8. Вычислите сторону основания призмы.

Ответ: ______________________________

С2. Векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны, вектор $\overrightarrow{MK} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 8\overrightarrow{MC}$. В каком отношении плоскость ABC делит отрезок MK (считая от точки M)?

Ответ: ______________________________

Тест 23. Итоговый по программе 10 класса

Вариант 2

А1. Отрезок AB не пересекает плоскость α. Расстояния от точек A и B до плоскости α равны 31 см и 6 см. Точка $C \in AB$, $AC : CB = 2 : 3$. Найдите расстояние от точки C до плоскости α.

☐ 1) 21 см ☐ 3) 37 см
☐ 2) 25 см ☐ 4) 12 см

А2. Треугольник ABC правильный, O – центр треугольника, $OM \perp ABC$, $OM = 2\sqrt{7}$. Высота треугольника равна 9. Найдите расстояние от точки M до вершин треугольника.

☐ 1) $8\sqrt{2}$ ☐ 3) $6\sqrt{3}$
☐ 2) 9 ☐ 4) 8

А3. Квадраты $ABCD$ и $ADFE$ расположены так, что сторона BC квадрата $ABCD$ проектируется на отрезок, проходящий через центр квадрата $ADFE$. Найдите косинус угла между плоскостями ABC и ADF.

☐ 1) $\frac{1}{3}$ ☐ 2) $\frac{1}{2}$ ☐ 3) $\frac{1}{4}$ ☐ 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

А4. Вычислите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, все ребра которой равны a.

☐ 1) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ ☐ 3) $a^2\sqrt{2}$
☐ 2) $2\sqrt{2}a^2$ ☐ 4) $a^2\sqrt{3}$

А5. Через сторону основания правильной треугольной призмы под углом 45° к основанию проведено сечение, пересекающее противоположное боковое ребро. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна a, боковое ребро равно b.

☐ 1) $a^2\sqrt{6}$ ☐ 3) $a^2\sqrt{3}$
☐ 2) $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$ ☐ 4) $a^2\sqrt{2}$

А6. Вектор $\vec{m} = 6\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ разложен по трем некомпланарным векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Разложите вектор $\vec{b}$ по векторам $\vec{a}, \vec{c}, \vec{m}$.

☐ 1) $-2\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{m}$

☐ 3) $2\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{m}$

☐ 2) $2\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{m}$

☐ 4) $2\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{m}$

B1. Дан равнобедренный треугольник ABC: $BA = BC = 17$, $AC = 16$. Прямая BD перпендикулярна плоскости ABC, прямые CE и BD параллельны. Найдите расстояние между прямыми BD и AE.

Ответ: ____________________

B2. Точки A и B принадлежат разным граням прямого двугранного угла. Точки A_1 и B_1 – проекции точек A и B на ребро двугранного угла, $AB = 13$, $AA_1 = 5$, $BB_1 = 7$. Найдите A_1B_1.

Ответ: ____________________

B3. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основание ABC – правильный треугольник ($\angle BAC = 90°$), $AB = AC = a$. Боковые ребра равны a, $\angle A_1AC = \angle A_1AB < 90°$. Расстояния от вершины A_1 до равных сторон основания равны b. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

Ответ: ____________________

B4. Стороны оснований правильной четырехугольной пирамиды равны a и b ($a > b$). Боковые грани наклонены к основанию под углом φ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ: ____________________

C1. В правильной шестиугольной призме сторона основания равна 7, меньшая диагональ – 24. Вычислите длину большей диагонали призмы.

Ответ: ____________________

C2. Векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны, вектор $\overrightarrow{MK} = 1{,}3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 0{,}9\overrightarrow{MC}$. Прямая MK пересекает плоскость ABC в точке T. Найдите отношение длин отрезков MT и MK.

Ответ: ____________________

ПРИЛОЖЕНИЯ

Самостоятельные работы

Самостоятельная работа № 1. Аксиомы стереометрии и следствия из них

Вариант 1

1. Плоский четырехугольник $ABCD$ и треугольник AMD не лежат в одной плоскости. По какой прямой пересекаются плоскости ABC и CDM?

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро равно a. Точка $K \in BB_1$ и $B_1K : KB = 1 : 3$, точка $L \in DD_1$ и $D_1L : LD = 2 : 1$. Постройте точку F пересечения прямых KL и BD. Найдите длину отрезка BF.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N – середины ребер AB и AD. Через точки A_1, M, N проведена плоскость. Постройте сечение куба плоскостью и вычислите площадь сечения, если ребро куба равно a.

Вариант 2

1. Плоский четырехугольник $ABCD$ и треугольник AMD не лежат в одной плоскости. По какой прямой пересекаются плоскости BCD и ABM?

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро равно a. Точка $K \in BB_1$ и $B_1K : KB = 1 : 4$, точка $L \in DD_1$ и $D_1L : LD = 3 : 1$. Постройте точку F пересечения прямых KL и BD. Найдите длину отрезка BF.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N – середины ребер AB и AD. Точка $K \in AA_1$ и $A_1K : KA = 1 : 2$. Через точки K, M, N проведена плоскость. Постройте сечение куба плоскостью и вычислите площадь сечения, если ребро куба равно a.

Самостоятельная работа № 2. Параллельность прямых, прямой и плоскости

Вариант 1

1. Квадрат $ABCD$ и трапеция $KMNL$ ($KL \parallel MN$) не лежат в одной плоскости. Точки A и D – середины отрезков KM и NL соответственно. Докажите, что прямые KL и BC параллельны. Найдите длину отрезка KL, если $MN = 6$ см, $BC = 9$ см.

2. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. K и M – точки пересечения медиан треугольников ABD и BCD соответственно. Докажите, что четырехугольник $AKMC$ является трапецией. Вычислите длину отрезка AC, если $KM = 6$ см.

3. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка A_1 так, что $DA_1 = 4$ см. Плоскость, параллельная диагонали AC, проходит через точку A_1 и пересекает сторону CD в точке C_1. Докажите, что треугольники A_1C_1D и ABC подобны. Найдите диагональ AC, если $A_1C_1 = 6$ см и $BC = 10$ см.

Вариант 2

1. Квадрат $ABCD$ и трапеция $KMNL$ ($KL \parallel MN$) не лежат в одной плоскости. Точки A и D – середины отрезков KM и NL соответственно. Докажите, что прямые MN и BC параллельны. Найдите длину отрезка MN, если $KL = 12$ см, $BC = 10$ см.

2. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. K и M – точки пересечения медиан треугольников ACD и BCD соответственно. Докажите, что четырехугольник $AKMB$ является трапецией. Вычислите длину отрезка KM, если $AB = 27$ см.

3. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка A_1 так, что $DA_1 = 6$ см. Плоскость, параллельная диагонали AC, проходит через точку A_1 и пересекает сторону CD в точке C_1. Докажите, что треугольники A_1C_1D и ABC подобны. Найдите диагональ AC, если $A_1C_1 = 9$ см и $BC = 14$ см.

Самостоятельная работа № 3. Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми

Вариант 1

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребрах AA_1 и CC_1 выбраны точки M и N так, что $AM : MA_1 = 3 : 1$ и $CN : NC_1 = 1 : 2$. Найдите угол между прямыми MN и AC.

2. Параллелограмм $ABCD$ расположен по одну сторону от плоскости α. Его диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Через вершины параллелограмма и точку O проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках A_1, B_1, C_1, D_1 и O_1. Вычислите длины отрезков OO_1 и DD_1, если $AA_1 = 13$ см, $BB_1 = 9$ см, $CC_1 = 21$ см.

3. Концы отрезка AB расположены по разные стороны от плоскости α. Точка $C \in AB$ и $AC : CB = 2 : 3$. Через точки A, B, C проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках A_1, B_1, C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если $AA_1 = 8$ см и $BB_1 = 3$ см.

Вариант 2

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребрах AA_1 и CC_1 выбраны точки M и N так, что $AM : MA_1 = 3 : 1$ и $CN : NC_1 = 1 : 4$. Найдите угол между прямыми MN и AC.

2. Параллелограмм $ABCD$ расположен по одну сторону от плоскости α. Его диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Через вершины параллелограмма и точку O проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках A_1, B_1, C_1, D_1 и O_1. Вычислите длины отрезков OO_1 и BB_1, если $AA_1 = 17$ см, $CC_1 = 15$ см, $DD_1 = 26$ см.

3. Концы отрезка AB расположены по разные стороны от плоскости α. Точка $C \in AB$ и $AC : CB = 3 : 2$. Через точки A, B, C проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках A_1, B_1, C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если $AA_1 = 9$ см и $BB_1 = 3$ см.

Самостоятельная работа № 4. Параллельность плоскостей

Вариант 1

1. На ребрах PA, PB и PC тетраэдра $PABC$ выбраны точки M, K и H так, что $PM : MA = PK : KB = PH : HC$. Докажите, что плоскости MKH и ABC параллельны. Найдите площадь треугольника MKH, если площадь треугольника ABC равна 10 см^2 и $PM : MA = 2 : 1$.

2. Через точку O, расположенную между параллельными плоскостями α и β, проведены две прямые. Они пересекают плоскость α в точках A и B, плоскость β – в точках A_1 и B_1. Вычислите длину отрезка A_1B_1, если $AB = 8$ см и $BB_1 : OB = 5 : 2$.

3. Три плоскости параллельны. Скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 пересекают эти плоскости в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3. Найдите длины отрезков A_1A_3 и B_1B_3, если $B_1B_2 = 18$ см, $A_2A_3 = 3$ см, $A_1A_2 : B_2B_3 = 2 : 3$.

Вариант 2

1. На ребрах SA, SB и SC тетраэдра $SABC$ выбраны точки K, L и M так, что $SK : KA = SL : LB = SM : MC$. Докажите, что плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника KLM равна 15 см^2 и $SK : KA = 3 : 2$.

2. Через точку O, расположенную между параллельными плоскостями α и β, проведены две прямые. Они пересекают плоскость α в точках A и B, плоскость β – в точках A_1 и B_1. Вычислите длину отрезка AB, если $A_1B_1 = 20$ см и $AA_1 : OA = 7 : 2$.

3. Три плоскости параллельны. Скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 пересекают эти плоскости в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3. Найдите длины отрезков A_1A_3 и B_1B_3, если $B_1B_2 = 12$ см, $A_2A_3 = 5$ см, $A_1A_2 : B_2B_3 = 3 : 5$.

Самостоятельная работа № 5. Тетраэдр и параллелепипед

Вариант 1

1. Сумма длин всех ребер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 180 см. Найдите длину каждого ребра параллелепипеда, если $AB : BC : CC_1 = 3 : 5 : 7$.

2. В тетраэдре $SABC$ на ребре AB выбрана точка K так, что $AK : KB = 1 : 2$. Через точку K параллельно прямым BC и AS проведена плоскость. Постройте сечение и вычислите его периметр, если $BC = 6$ см и $AS = 9$ см.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a, через диагональ основания AC и вершину B_1 проведено сечение. Найдите площадь сечения и площадь поверхности куба.

Вариант 2

1. Сумма длин всех ребер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 336 см. Найдите длину каждого ребра параллелепипеда, если $AB : BC : CC_1 = 5 : 7 : 9$.

2. В тетраэдре $SABC$ на ребре AB выбрана точка K так, что $AK : KB = 1 : 3$. Через точку K параллельно прямым BC и AS проведена плоскость. Постройте сечение и вычислите его периметр, если $BC = 8$ см и $AS = 4$ см.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через диагональ основания AC и вершину D_1 проведено сечение. Найдите площадь сечения и площадь поверхности куба, если длина диагонали основания равна m.

Самостоятельная работа № 6. Перпендикулярность прямой и плоскости

Вариант 1

1. Через концы A и B отрезка AB проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие ее в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите длину отрезка A_1B_1, если $AB = 17$ см, $AA_1 = 32{,}3$ см, $BB_1 = 24{,}3$ см.

2. В параллелограмме $ABCD$: $AB = 6$ см, $AD = 5$ см, $\angle A = 60°$. Диагонали параллелограмма пересекаются в точке O, отрезок OM перпендикулярен плоскости ABC и $OM = 7$ см. Определите длины отрезков MC и MD.

3. В треугольнике ABC: $BC = 4$ см, $\angle A = 45°$. Точка M равноудалена от вершин этого треугольника. Найдите такое расстояние, если расстояние от точки M до плоскости ABC равно 5 см.

Вариант 2

1. Через концы A и B отрезка AB проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие ее в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите длину отрезка A_1B_1, если $AB = 13$ см, $AA_1 = 31{,}4$ см, $BB_1 = 26{,}4$ см.

2. В параллелограмме $ABCD$: $AB = 4$ см, $AD = 7$ см, $\angle A = 60°$. Диагонали параллелограмма пересекаются в точке O, отрезок OM перпендикулярен плоскости ABC и $OM = 5$ см. Определите длины отрезков MC и MD.

3. В треугольнике ABC: $BC = 6$ см, $\angle A = 45°$. Точка M равноудалена от вершин этого треугольника. Найдите такое расстояние, если расстояние от точки M до плоскости ABC равно 7 см.

Самостоятельная работа № 7. Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью

Вариант 1

1. Треугольник ABC расположен вне плоскости α. Его вершины удалены от плоскости α на расстояния, равные 23 см, 15 см и 28 см. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до этой плоскости.

2. В равнобедренном треугольнике ABC: $AC = BC = m$, $\angle ACB = \alpha$. Отрезок PA перпендикулярен плоскости ABC. Точка P удалена на расстояние, равное $2m$, от прямой BC. Вычислите расстояние от точки P до плоскости ABC.

3. Из одной точки к плоскости α проведены две наклонные одинаковой длины. Наклонные образуют между собой угол β, а их проекции на плоскость α – угол φ. Найдите угол, который образует каждая наклонная с плоскостью α.

Вариант 2

1. Треугольник ABC расположен вне плоскости α. Его вершины удалены от плоскости α на расстояния, равные 18 см, 23 см и 7 см. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до этой плоскости.

2. В равнобедренном треугольнике ABC: $AC = BC = m$, $\angle CAB = \alpha$. Отрезок PA перпендикулярен плоскости ABC. Точка P удалена на расстояние, равное $3m$, от прямой BC. Вычислите расстояние от точки P до плоскости ABC.

3. Из одной точки к плоскости α проведены две наклонные одинаковой длины, которые образуют с плоскостью углы, равные β. Наклонные образуют между собой угол φ, Найдите угол между проекциями наклонных на плоскость α.

Самостоятельная работа № 8. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей

Вариант 1

1. Найдите двугранный угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания правильного тетраэдра, если его боковое ребро равно $3m$, а сторона основания равна $2m$.

2. Вершины A и D параллелограмма $ABCD$ лежат в плоскости α, а две другие – вне этой плоскости, $AB = 10$ см, $BC = 8$ см. Проекции диагоналей параллелограмма на плоскость α равны 6 см и 12 см. Определите расстояние от стороны BC до плоскости α.

3. Из одной точки C проведены наклонные CA и CB к плоскости γ под углом α. Угол между проекциями на плоскость γ этих наклонных равен β. Найдите угол между плоскостями γ и ABC.

Вариант 2

1. Найдите двугранный угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания правильного тетраэдра, если его боковое ребро равно $2m$, а сторона основания равна m.

2. Вершины A и D параллелограмма $ABCD$ лежат в плоскости α, а две другие – вне этой плоскости, $AB = 11$ см, $BC = 9$ см. Проекции диагоналей параллелограмма на плоскость α равны 10 см и 14 см. Определите расстояние от стороны BC до плоскости α.

3. Из одной точки C проведены наклонные CA и CB к плоскости γ под углом α. Угол между наклонными равен β. Найдите угол между плоскостями γ и ABC.

Самостоятельная работа № 9. Понятие многогранника

Вариант 1

1. В трехгранном угле два плоских угла равны 90° и 120°. В каких пределах может меняться третий плоский угол?

2. В каких границах могут изменяться плоские углы при стороне основания правильной двенадцатиугольной пирамиды?

3. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен φ. Найдите двугранные углы между плоскостью основания и боковой гранью, а также между смежными боковыми гранями.

Вариант 2

1. В трехгранном угле два плоских угла равны 100° и 140°. В каких пределах может меняться третий плоский угол?

2. В каких границах могут изменяться плоские углы при стороне основания правильной пятнадцатиугольной пирамиды?

3. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен φ. Найдите двугранные углы между плоскостью основания и боковой гранью, а также между смежными боковыми гранями.

Самостоятельная работа № 10. Призма

Вариант 1

1. В правильной четырехугольной призме через диагональ основания проведено сечение параллельно диагонали призмы. Найдите площадь сечения, если высота призмы равна 4 см, а сторона ее основания равна 2 см.

2. Основанием прямой призмы служит ромб. Вычислите сторону основания, если диагонали призмы равны 8 см и 5 см, высота равна 2 см.

3. В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны, а их общее ребро, равное 24 см, отстоит от двух других боковых ребер на 12 см и 35 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Вариант 2

1. В правильной четырехугольной призме через диагональ основания проведено сечение параллельно диагонали призмы. Найдите площадь сечения, если высота призмы равна 8 см, а сторона ее основания равна 2 см.

2. Основанием прямой призмы служит ромб. Вычислите сторону основания, если диагонали призмы равны 9 см и 7 см, высота равна 4 см.

3. В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны, а их общее ребро, равное 28 см, отстоит от двух других боковых ребер на 16 см и 30 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Самостоятельная работа № 11. Параллелепипед

Вариант 1

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $AB = 2$ см, $AD = 3$ см и $AC_1 = 7$ см. Найдите расстояние между прямыми AB и B_1C_1.

2. Основанием параллелепипеда служит ромб со стороной b и острым углом α, а боковые грани – параллелограммы с острым углом β. Вычислите площадь меньшего диагонального сечения и площадь боковой поверхности параллелепипеда.

3. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной a. Боковое ребро параллелепипеда равно b. Точка $K \in A_1B_1$ и $A_1K : KB_1 = 2 : 1$. Через середины ребер AD и CD и точку K проведено сечение. Найдите его площадь.

Вариант 2

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $AB = 5$ см, $BC = 3$ см и $DB_1 = 7\sqrt{2}$ см. Найдите расстояние между прямыми CD и A_1D_1.

2. Основанием параллелепипеда служит ромб со стороной b и острым углом α, а боковые грани – параллелограммы с острым углом β. Вычислите площадь большего диагонального сечения и площадь боковой поверхности параллелепипеда.

3. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной a. Боковое ребро параллелепипеда равно b. Точка $K \in A_1B_1$ и $A_1K : KB_1 = 3 : 1$. Через середины ребер AD и CD и точку K проведено сечение. Найдите его площадь.

Самостоятельная работа № 12. Правильная пирамида

Вариант 1

1. Вычислите апофему правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a, высота пирамиды равна h.

2. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, а остальные четыре лежат в плоскости ее основания. Найдите ребро куба, если сторона основания пирамиды равна a и боковая грань наклонена к плоскости основания под углом φ.

3. В правильной треугольной пирамиде через сторону основания проведена плоскость перпендикулярно противолежащему боковому ребру. Определите площадь получившегося сечения, если сторона основания равна a, высота пирамиды равна h.

Вариант 2

1. Вычислите апофему правильной четырехугольной пирамиды, если сторона основания равна a, высота пирамиды равна h.

2. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, а остальные четыре лежат в плоскости ее основания. Найдите ребро куба, если сторона основания пирамиды равна a и боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом φ.

3. В правильной треугольной пирамиде через сторону основания проведена плоскость перпендикулярно противолежащему боковому ребру. Определите площадь получившегося сечения, если сторона основания равна a, боковое ребро пирамиды равно b.

Самостоятельная работа № 13. Неправильная пирамида. Усеченная пирамида

Вариант 1

1. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник. Основание этого треугольника равно 6 см, высота равна 9 см. Все боковые ребра пирамиды равны 13 см. Найдите высоту пирамиды.

2. Боковые грани треугольной пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, периметр основания равен 60 см. Два боковых ребра пирамиды равны 15 см и 20 см и образуют прямой угол. Вычислите длины сторон основания и длину третьего бокового ребра.

3. В правильной усеченной треугольной пирамиде сторона большего основания равна a, сторона меньшего – b. Боковое ребро образует с основанием угол в 45°. Найдите площадь сечения, проходящего через боковое ребро и ось пирамиды.

Вариант 2

1. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник. Основание этого треугольника равно 16 см, высота равна 8 см. Все боковые ребра пирамиды равны 17 см. Найдите высоту пирамиды.

2. Боковые грани треугольной пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, периметр основания равен 114 см. Два боковых ребра пирамиды равны 40 см и 30 см и образуют прямой угол. Вычислите длины сторон основания и длину третьего бокового ребра.

3. В правильной усеченной треугольной пирамиде сторона большего основания равна a, сторона меньшего – b. Боковое ребро образует с основанием угол в 60°. Найдите площадь сечения, проходящего через боковое ребро и ось пирамиды.

Самостоятельная работа № 14. Понятие вектора в пространстве

Вариант 1

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка $E \in A_1C_1$ и $A_1E : EC_1 = 1 : 2$. Найдите $|\overrightarrow{AE}|$, если $|\overrightarrow{AB}| = a$, $|\overrightarrow{AD}| = b$ и $|\overrightarrow{CC_1}| = c$.

2. Выясните связь между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если вектор $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ направлен противоположно вектору $\vec{n} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\dfrac{|\vec{m}|}{|\vec{n}|} = 2$.

3. В основании тетраэдра $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle A = 90°$, $AB = 15$, $AC = 20$, AD – высота. Точка $O \in AD$ и $AO : OD = 3 : 1$, SO – высота пирамиды и $SO = 12$. Найдите $|\overrightarrow{SA}|$.

Вариант 2

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка $E \in A_1C_1$ и $A_1E : EC_1 = 1 : 3$. Найдите $|\overrightarrow{EA}|$, если $|\overrightarrow{BA}| = a$, $|\overrightarrow{DA}| = b$ и $|\overrightarrow{CC_1}| = c$.

2. Выясните связь между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если вектор $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ направлен противоположно вектору $\vec{n} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\dfrac{|\vec{n}|}{|\vec{m}|} = 2$.

3. В основании тетраэдра $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle A = 90°$, $AB = 20$, $AC = 15$, AD – высота. Точка $O \in AD$ и $AO : OD = 2 : 1$, SO – высота и $SO = 6$. Найдите $|\overrightarrow{SA}|$.

Самостоятельная работа № 15. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число

Вариант 1

1. Известно, что $|\vec{a}| = 12$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 14$. Найдите $|\vec{a} - \vec{b}|$.

2. Точки A, B, C, D, E, F – середины сторон некоторого шестиугольника. Вычислите сумму векторов $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{EF}$.

3. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите такую точку, что справедливо равенство: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{AB}\right)$.

Вариант 2

1. Известно, что $|\vec{a}| = 12$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 15$. Найдите $|\vec{a} + \vec{b}|$.

2. Точки A, B, C, D, E, F – середины сторон некоторого шестиугольника. Вычислите сумму векторов $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA}$.

3. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите такую точку, что справедливо равенство: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A_1A}\right)$.

Самостоятельная работа № 16. Компланарные векторы

Вариант 1

1. Докажите, что векторы $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c}$ и $\vec{k} = 5\vec{a} - 8\vec{b} + 11\vec{c}$ компланарны, и найдите связь между векторами $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{k}$.

2. Векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{k}$ разложены по некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$. Найдите разложение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ по векторам $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{k}$.

3. В тетраэдре $ABCD$ точка $E \in DC$ и $DE : EC = 1 : 2$. Разложите вектор $\overrightarrow{AE}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Вариант 2

1. Докажите, что векторы $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} - 12\vec{b} + 7\vec{c}$ и $\vec{k} = \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$ компланарны, и найдите связь между векторами $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{k}$.

2. Векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{k}$ разложены по некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{m} = 3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}$. Найдите разложение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ по векторам $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{k}$.

3. В тетраэдре $ABCD$ точка $E \in DC$ и $DE : EC = 2 : 1$. Разложите вектор $\overrightarrow{AE}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Контрольные работы

Контрольная работа № 1. Аксиомы стереометрии. Параллельность прямых и плоскостей

Вариант 1

1. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Принадлежит ли точка C плоскости, в которой лежат точки A, B и O?

2. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведена прямая KA, не лежащая в плоскости квадрата. Докажите, что KA и CD – скрещивающиеся прямые. Найдите угол между прямыми KA и CD, если $\angle AKB = 78°$ и $\angle ABK = 54°$.

3. Параллельные прямые AC и BD пересекают плоскость α в точках A и B. Точки C и D лежат по одну сторону от плоскости α, $AC = 8$ см, $BD = 6$ см, $AB = 4$ см. Докажите, что прямая CD пересекает плоскость α в некоторой точке E. Вычислите длину отрезка BE.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ грани равна $4a$. Через середину ребра CD проведена плоскость, параллельная плоскости BC_1D. Найдите площадь сечения.

5. В тетраэдре $DABC$ точки M, N и P являются серединами ребер AB, BC и CD, $AC = 7$ см, $BD = 11$ см. Докажите, что плоскость MNP проходит через середину K ребра AD. Определите вид четырехугольника, полученного при пересечении плоскости MNP с тетраэдром, и периметр сечения.

Вариант 2

1. Точка O – центр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$. Точки A, O и C принадлежат плоскости. Принадлежит ли этой плоскости вершина D?

2. Через вершину A ромба $ABCD$ проведена прямая KA, не лежащая в плоскости ромба. Докажите, что KA и CD – скрещивающиеся прямые. Найдите угол между прямыми KA и CD, если $\angle AKB = 62°$ и $\angle ABK = 85°$.

3. Параллельные прямые AC и BD пересекают плоскость α в точках A и B. Точки C и D лежат по одну сторону от плоскости α, $AC = 14$ см, $BD = 12$ см, $AB = 3$ см. Докажите, что прямая CD пересекает плоскость α в некоторой точке E. Вычислите длину отрезка AE.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро равно $2a$. Через середину ребра CD проведена плоскость, параллельная плоскости BC_1D. Найдите площадь сечения.

5. В тетраэдре $DABC$ точки M, N и P являются серединами ребер AB, BC и CD, $AC = 9$ см, $BD = 13$ см. Докажите, что плоскость MNP проходит через середину K ребра AD. Определите вид четырехугольника, полученного при пересечении плоскости MNP с тетраэдром, и периметр сечения.

Контрольная работа № 2. Перпендикулярность прямых и плоскостей

Вариант 1

1. Дан прямоугольник $ABCD$. Прямая AE перпендикулярна плоскости ABC, точка $K \in BE$. Найдите угол между прямыми BC и AK.

2. В треугольнике ABC: $\angle ACB = 150°$ и $BC = 6$. Отрезок BD перпендикулярен плоскости ABC и $BD = 4$. Вычислите расстояние от точки D до прямой AC.

3. Точка P равноудалена от всех вершин правильного шестиугольника. Найдите расстояние от точки P до его вершин, если сторона шестиугольника равна 4, а расстояние от точки P до плоскости шестиугольника равно 8.

4. Параллелограмм $ABCD$ расположен вне плоскости α. Его вершины A, B, C удалены от плоскости α на расстояния 6 см, 9 см, 10 см. Определите расстояние от вершины D до плоскости α.

5. Точка M равноудалена от всех вершин прямоугольного треугольника. Длина медианы, проведенной из вершины прямого угла, равна a, расстояние от точки M до плоскости треугольника равно $2a$. Найдите расстояние от точки M до вершин треугольника.

Вариант 2

1. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Прямая BD перпендикулярна плоскости ABC, точка $K \in CD$. Найдите угол между прямыми AC и BK.

2. В параллелограмме $ABCD$: $\angle A = 45°$ и $AD = 6\sqrt{2}$. Отрезок AK перпендикулярен плоскости ABC и $AK = 8$. Вычислите расстояние от точки K до прямой CD.

3. Точка M равноудалена от всех вершин правильного шестиугольника на расстояние, равное 12, и от его плоскости – на расстояние, равное 4. Найдите длину стороны шестиугольника.

4. Параллелограмм $ABCD$ расположен вне плоскости α. Его вершины A, B, D удалены от плоскости α на расстояния 7 см, 4 см, 9 см. Определите расстояние от вершины C до плоскости α.

5. Точка P удалена от всех вершин прямоугольного треугольника на расстояние $2a$, а от его плоскости – на расстояние a. Найдите медиану треугольника, проведенную из вершины прямого угла.

Контрольная работа № 3. Двугранные углы, многогранные углы, перпендикулярные плоскости

Вариант 1

1. В гранях двугранного угла проведены две прямые, перпендикулярные к его ребру. Угол между прямыми равен 50°. Чему равна величина двугранного угла?

2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите двугранный угол B_1ADB, если четырехугольник $ABCD$ – квадрат, $AC = 6\sqrt{2}$ см, $AB_1 = 4\sqrt{3}$ см.

3. Основанием тетраэдра $MABC$ служит треугольник ABC, в котором $AB = BC$ и $AC = 2a$. Точка $O \in AC$, отрезок $MO \perp AC$ и $OA = OC$. Расстояние от точки O до прямой MB равно a. Вычислите угол между плоскостями AMB и CMB.

4. Точки A и B принадлежат разным граням прямого двугранного угла. Точки A_1 и B_1 – проекции точек A и B на ребро двугранного угла. Найдите длину отрезка AB, если $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 5$ см, $A_1B_1 = 6$ см.

5. Все плоские углы при вершине трехгранного угла равны 30°. Определите двугранные углы такого угла.

Вариант 2

1. В гранях двугранного угла проведены две прямые, перпендикулярные к его ребру. Угол между прямыми равен 70°. Чему равна величина двугранного угла?

2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите двугранный угол C_1ADB, если $BD = 6\sqrt{2}$ см, $AD = 6$ см, $AA_1 = 6\sqrt{3}$ см.

3. Основанием тетраэдра $MABC$ служит треугольник ABC, в котором $AB = BC$ и $AC = 2a\sqrt{3}$. Точка $O \in AC$, отрезок $MO \perp AC$ и $OA = OC$. Расстояние от точки O до прямой MB равно a. Вычислите угол между плоскостями AMB и CMB.

4. Точки A и B принадлежат разным граням прямого двугранного угла. Точки A_1 и B_1 – проекции точек A и B на ребро двугранного угла. Найдите длину отрезка AB, если $AA_1 = 7$ см, $BB_1 = 6$ см, $A_1B_1 = 3$ см.

5. Все плоские углы при вершине трехгранного угла равны 45°. Определите двугранные углы такого угла.

Контрольная работа № 4. Призма

Вариант 1

1. Чему равна сумма двугранных углов, прилежащих к ребрам обоих оснований n-угольной призмы?

2. В правильной треугольной призме диагональ боковой грани равна m и составляет со смежной боковой гранью угол φ. Найдите высоту основания призмы.

3. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами 4 см и 8 см, угол BAD равен 60°. Диагональ B_1D образует с плоскостью основания угол, равный 30°. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

4. В наклонной треугольной призме боковое ребро равно 10, площади двух боковых граней равны 50 и 120, угол между этими гранями прямой. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

5. Через вершину нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость. Постройте сечение и вычислите его площадь, если сторона основания призмы равна a, боковое ребро равно b.

Вариант 2

1. Чему равна сумма двугранных углов, прилежащих к боковым ребрам n-угольной призмы?

2. В правильной треугольной призме диагональ боковой грани составляет со смежной боковой гранью угол φ. Высота основания призмы равна h. Найдите длину диагонали боковой грани призмы.

3. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами 6 см и 3 см, угол ABC равен 60°. Диагональ AC_1 образует с плоскостью основания угол, равный 60°. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

4. В наклонной треугольной призме боковое ребро равно 10, площади двух боковых граней равны 150 и 80, угол между этими гранями прямой. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

5. Через вершину нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость параллельно диагоналям оснований. Постройте сечение и вычислите его площадь, если сторона основания равна a, боковое ребро равно b.

Контрольная работа № 5. Пирамида

Вариант 1

1. Высота основания правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а двугранный угол при стороне основания равен 45°. Найдите площадь поверхности пирамиды и расстояние от вершины основания до противоположной боковой грани.

2. Определите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если сторона основания равна a и боковое ребро равно b.

3. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной a. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна ее основанию, а две соседние с ней грани образуют с основанием двугранные углы по 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

4. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с основанием, равным 12 см, и боковой стороной, равной 10 см. Вычислите высоту пирамиды, если все ее боковые грани образуют с плоскостью основания двугранные углы, равные 30°.

5. Через вершину основания правильной четырехугольной пирамиды перпендикулярно противолежащему боковому ребру проведена плоскость. Найдите площадь получившегося сечения, если сторона основания равна a, высота пирамиды равна h.

Вариант 2

1. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 8 см, а двугранный угол при стороне основания равен 45°. Найдите площадь поверхности пирамиды и расстояние от вершины основания до противоположной боковой грани.

2. Определите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если сторона основания равна a и высота пирамиды равна h.

3. В основании пирамиды лежит квадрат. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна ее основанию, а две соседние с ней грани образуют с основанием двугранные углы по 30°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если ее высота равна h.

4. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с основанием, равным 24 см, и боковой стороной, равной 20 см. Вычислите высоту пирамиды, если все ее боковые грани образуют с плоскостью основания двугранные углы, равные 60°.

5. Через вершину основания правильной четырехугольной пирамиды перпендикулярно противолежащему боковому ребру проведена плоскость. Найдите площадь получившегося сечения, если сторона основания равна a, боковое ребро равно b.

Контрольная работа № 6. Векторы в пространстве

Вариант 1

1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите один из векторов, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD}$.

2. В призме $ABCA_1B_1C_1$ укажите такую точку, что выполняется равенство: $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1}$.

3. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ со стороной основания, равной $\sqrt{3}$. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 60°. Найдите $\left|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

4. Дан тетраэдр $ABCD$. Точка M – середина ребра BC, точка E – середина отрезка DM. Выразите вектор $\overrightarrow{AE}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Медианы треугольника ABD пересекаются в точке P. Разложите вектор $\overrightarrow{B_1P}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{B_1A_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{B_1C_1}$, $\vec{c} = \overrightarrow{B_1B}$.

Вариант 2

1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите один из векторов, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{D_1A_1}$.

2. В призме $ABCA_1B_1C_1$ укажите такую точку, что выполняется равенство: $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{AA_1}$.

3. Основанием пирамиды $MABC$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), $AC = 6$, $BC = 8$. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60°. Найдите $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CB}\right|$.

4. Дан тетраэдр $ABCD$. Точка K – середина медианы DM треугольника ADC. Выразите вектор $\overrightarrow{BK}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BD}$.

5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Медианы треугольника ACD_1 пересекаются в точке M. Разложите вектор $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BB_1}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$.

Контрольная работа № 7. Итоговая по курсу 10 класса

Вариант 1

1. Сторона BC треугольника ABC ($AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$) лежит в плоскости α, расстояние от точки A до плоскости α равно 6. Определите расстояния от точек B_1 и C_1 до плоскости α, где BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K – середина ребра AD, точка $L \in CD$ и $CL : LD = 1 : 2$. Через точки K, L и D_1 проведена плоскость. Найдите угол между плоскостями KLD_1 и ABC, а также площадь полученного сечения, если ребро куба равно a.

3. Вычислите площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна 25 см, а диагонали боковых граней равны 15 см и $4\sqrt{34}$ см.

4. В каком отношении делится боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и середину высоты пирамиды?

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка $K \in B_1C_1$ и $B_1K : KC_1 = 1 : 2$. Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{B_1D_1}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$. Найдите $\left|\overrightarrow{AK}\right|$, если $\left|\vec{a}\right| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 5$, $\left|\vec{c}\right| = 6$.

Вариант 2

1. Сторона BC треугольника ABC ($AB = 13$, $BC = 15$, $AC = 14$) лежит в плоскости α, расстояние от точки A до плоскости α равно 7. Определите расстояние от точек B_1 и C_1 до плоскости α, где BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K – середина ребра AD, точка $L \in CD$ и $CL : LD = 2 : 1$. Через точки K, L и D_1 проведена плоскость. Найдите угол между плоскостями KLD_1 и ABC, а также площадь полученного сечения, если ребро куба равно a.

3. Вычислите площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна $\sqrt{689}$ см, а диагонали боковых граней равны 25 см и 17 см.

4. В каком отношении делится боковая поверхность правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и середину высоты пирамиды?

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка $K \in C_1D_1$ и $C_1K : KD_1 = 3 : 1$. Разложите вектор $\overline{AK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{B_1D_1}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$. Найдите $\left|\overrightarrow{AK}\right|$, если $\left|\vec{a}\right| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 5$, $\left|\vec{c}\right| = 6$.

Ответы к тестам

№ теста	Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	B3	B4	C1	C2
1	1	2	4	1	–	–	–	$\frac{a}{3}\sqrt{13}$	$\frac{13}{12}a$	–	–	$\frac{13}{5}a$	–
	2	3	1	2	–	–	–	$\frac{5}{4}a$	$\frac{a}{20}\sqrt{521}$	–	–	$\frac{a}{11}\sqrt{521}$	–
2	1	1	2	4	–	–	–	$\frac{\sqrt{3}}{5}a^2$	$\frac{a}{7}$	–	–	$\frac{4\sqrt{79}}{35}a$	–
	2	2	4	1	–	–	–	$\frac{3\sqrt{3}}{16}a^2$	$\frac{a}{5}$	–	–	$\frac{2\sqrt{61}}{15}a$	–
3	1	3	1	2	–	–	–	Параллелограмм; 34 см	$\left\lvert\frac{2}{5}b \pm \frac{3}{5}a\right\rvert$	–	–	7 см	–
	2	2	3	1	–	–	–	Параллелограмм; 36 см	$\left\lvert\frac{3}{7}b \pm \frac{4}{7}a\right\rvert$	–	–	12 см	–
4	1	2	1	4	–	–	–	42°	Параллельны; 96 см	–	–	$\frac{1}{10}$	–
	2	3	4	2	–	–	–	24°	Параллельны; 84 см	–	–	$\frac{1}{17}$	–

5	**1**	4	2	1	–	–	–	CB_1D_1	$\frac{13}{2}$ см; 7 см; $\frac{15}{2}$ см	–	–	10 см и 12,5 см	–
	2	2	3	4	–	–	–	AD_1C_1	26 см; 28 см; 30 см	–	–	10 см и 15 см	–
6	**1**	3	1	2	–	–	–	$\left(34+24\sqrt{2}\right)$ см	$\frac{a^2}{64}\sqrt{11}$	–	–	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	–
	2	1	4	3	–	–	–	$\left(10+12\sqrt{2}\right)$ см	$\frac{a^2}{36}\sqrt{6}$	–	–	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	–
7	**1**	2	3	1	2	4	1	$\frac{\sqrt{19}}{48}a^2$	$2a$	$\frac{a}{6}(\sqrt{145}+$ $+2\sqrt{37})$	$\frac{25}{48}a^2$	$\frac{1}{3}$	$48\sqrt{3}$ см^2
	2	4	2	1	3	2	4	$\frac{\sqrt{43}}{48}a^2$	$2a$	$\frac{a}{15}(2\sqrt{109}+$ $+3\sqrt{274})$	$\frac{841}{840}a^2$	$\frac{5}{6}$	$12\sqrt{3}$ см^2
8	**1**	2	3	1	–	–	–	$\sqrt{313}$ и 13 см	13	–	–	4 см; 7 см; 8 см	–
	2	3	1	4	–	–	–	$\sqrt{353}$ и 17 см	14	–	–	3 см; 5 см; 6 см	–

№ теста	Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	B3	B4	C1	C2
9	1	1	4	3	–	–	–	8	$\frac{a}{2}\sqrt{7}$	–	–	$\sqrt{2\sin^2\alpha - 1}$	–
	2	3	2	1	–	–	–	9	$\frac{a}{2}\sqrt{5}$	–	–	$\sqrt{\frac{1+\sin^2\varphi}{2}}$	–
10	1	2	4	3	–	–	–	2,2 см	3 см	–	–	2	–
	2	1	1	2	–	–	–	4,5 см	10 см	–	–	$2\sqrt{3}$	–
11	1	3	4	1	–	–	–	5 см	$\frac{\sqrt{5}}{15}; \frac{7}{15}$	–	–	90°	–
	2	4	2	3	–	–	–	7 см	$\frac{\sqrt{105}}{105}; \frac{17}{35}$	–	–	45°	–
12	1	2	4	1	3	2	4	26 см	$2\sqrt{5}$ см	$\sqrt{c^2 + b^2 - \frac{b^4}{a^2}}$	$\frac{\sqrt{97}}{5}$	3 см	$\frac{\cos\beta - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$
	2	3	1	2	4	1	3	10 см	$4\sqrt{7}$ см	$\sqrt{c^2 + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$	$\frac{\sqrt{85}}{5}$	24 см	$\frac{\cos\beta - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$
13	1	4	3	1	–	–	–	140 см²	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$	–	–	$\frac{3\sqrt{46}}{4}a^2$	–

	2	1	4	3	–	–	–	105 см^2	$\frac{a\sqrt{6}}{2}$ и $a^2\sqrt{2}$	–	–	$\frac{39}{8}a^2$	–
14	**1**	2	1	4	–	–	–	$3al + a^2$	8 см	–	–	$2a^2\left(1+\sqrt{15}\right)$	–
	2	3	4	2	–	–	–	$3al + a^2\sqrt{3}$	12 см	–	–	$2a^2\left(1+\sqrt{35}\right)$	–
15	**1**	4	1	2	–	–	–	$a^2\sqrt{2}$	$\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ и $\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$	–	–	$\frac{3a}{16}\sqrt{7a^2+4b^2}$	–
	2	1	3	4	–	–	–	$\frac{3a^2\sqrt{2}}{8}$	$\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$ и $\arccos\left(-\frac{1}{17}\right)$	–	–	$\frac{3a}{16}\sqrt{9a^2+4h^2}$	–
16	**1**	2	4	1	–	–	–	$\frac{\sqrt{2}S}{2}$	$40+8\sqrt{3}$	–	–	96 см^2	–
	2	1	2	3	–	–	–	$\sqrt{2}S$	$30+6\sqrt{2}$	–	–	120 см^2	–
17	**1**	3	1	4	–	–	–	$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\frac{180^\circ}{n}}$	$\sqrt{3}a^2$	–	–	$\frac{5}{16}a\sqrt{8b^2+9a^2}$	–
	2	1	3	2	–	–	–	$\cos\frac{180^\circ}{n}\cdot\operatorname{tg}\varphi$	$\frac{4}{3}a^2$	–	–	$\frac{5}{18}a\sqrt{18b^2+8a^2}$	–

№ теста	Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	B3	B4	C1	C2
18	1	2	3	1	3	4	2	$3ab+\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$	$(4+\sqrt{3})a^2$	$\frac{3-\sqrt{3}}{2}a$	24 см^2, 30°	$2(\sqrt{2}+1)a\sqrt{Q}$	$2h^2\mathrm{tg}\alpha$
	2	1	4	2	4	1	3	$6ab+3\sqrt{3}a^2$	$5\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}a$	30 см^2, 30°	$\sqrt[4]{12}(\sqrt{3}+1)a\sqrt{Q}$	$-2h^2\mathrm{tg}2\varphi$
19	1	3	1	4	–	–	–	$\overrightarrow{B_1D_1}, \overrightarrow{BD}, 3a$	1	–	–	$a \parallel \alpha$	–
	2	2	3	1	–	–	–	$\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{D_1B_1}, 4a$	4	–	–	$\alpha \parallel \beta$	–
20	1	4	2	1	–	–	–	17 см	$\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}-$ $-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$	–	–	$-\frac{1}{2}$	–
	2	3	4	2	–	–	–	3 см	$\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+$ $+\frac{1}{4}\overrightarrow{BM}$	–	–	-2	–
21	1	2	1	4	–	–	–	$\vec{k}=\vec{m}+\vec{n}$	$\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$ и $\frac{\sqrt{19}}{3}m$	–	–	$\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$	–

	2	1	3	2	–	–	–	$\vec{k}=\vec{m}+\vec{p}$	$\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}$ и $\frac{\sqrt{22}}{3}m$	–	–	$\vec{p}+\vec{m}-\vec{n}$	–
22	**1**	3	4	1	2	3	4	$x=5,\ y=2$	$\vec{k}=2\vec{m}+\vec{n}$	$2\sqrt{2}$ и 2	$\frac{2}{5}\overrightarrow{SA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}$	–0,3	$-\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AA_1}$ и $\frac{\sqrt{406}}{15}a$
	2	4	2	3	1	4	2	$x=3,\ y=4$	$\vec{m}=2\vec{n}-\vec{k}$	$3\sqrt{3}$ и 3	$-\overrightarrow{SA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$	–0,5	$-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CC_1}$ и $\frac{17}{12}a$
23	**1**	2	3	4	2	1	3	3	$\sqrt{110}$	$ab\left(\sqrt{3}+1\right)$	$\frac{\left(a^2-b^2\right)\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$	6	1 : 12
	2	1	4	2	4	2	1	15	$\sqrt{95}$	$a\left(2b+a\sqrt{2}\right)$	$\frac{a^2-b^2}{4\cos\varphi}$	25	5 : 4

Ответы к самостоятельным работам

№ п/п	Вари-ант	Задание 1	Задание 2	Задание 3
1	1	CD	$\frac{9\sqrt{2}}{5}a$	$\frac{3}{8}a^2$
	2	AB	$\frac{16\sqrt{2}}{11}a$	$\frac{\sqrt{21}}{24}a^2$
2	1	12 см	18 см	15 см
	2	8 см	9 см	21 см
3	1	$\mathrm{arctg}\frac{5\sqrt{2}}{24}$	17 см и 25 см	3,6 см
	2	$\mathrm{arctg}\frac{11\sqrt{2}}{40}$	16 см и 6 см	1, 8 см
4	1	$4\frac{4}{9}$ см^2	12 см	15 см и 27 см
	2	$41\frac{2}{3}$ см^2	8 см	11 см и 22 см
5	1	9 см; 15 см; 21 см	16 см	$\frac{a^2}{2}\sqrt{3}$ и $6a^2$

	2	20 см; 28 см; 36 см	10 см	$\frac{m^2\sqrt{3}}{4}$ и $3m^2$
6	**1**	15 см	$2\sqrt{35}$ см и $4\sqrt{5}$ см	$\sqrt{33}$ см
	2	12 см	$\sqrt{118}$ см и $\sqrt{62}$ см	$\sqrt{67}$ см
7	**1**	22 см	$m\sqrt{4-\sin^2\alpha}$	$\arccos\left\lvert\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right\rvert$
	2	16 см	$m\sqrt{9-\sin^2 2\alpha}$	$2\arcsin\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\beta}$
8	**1**	$\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\sqrt{74}$ см	$\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}\right)$
	2	$\arccos\frac{2\sqrt{5}}{15}$	$3\sqrt{6}$ см	$\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}\right)$

№ п/п	Вари-ант	Задание 1	Задание 2	Задание 3
9	1	$30° < \alpha < 150°$	$75° < \alpha < 90°$	$\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$ и $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}}$
	2	$40° < \alpha < 120°$	$78° < \alpha < 90°$	$\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$ и $2\arcsin\frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}$
10	1	$2\sqrt{3}$ см^2	4,5 см	2016 см^2
	2	6 см^2	$\frac{7\sqrt{2}}{2}$ см	2240 см^2
11	1	6 см	$2ab\sin\frac{\alpha}{2}$ и $4ab\sin\beta$	$\frac{59}{504}a\sqrt{72b^2+49a^2}$
	2	7 см	$2ab\cos\frac{\alpha}{2}$ и $4ab\sin\beta$	$\frac{3}{20}a\sqrt{32b^2+25a^2}$
12	1	$\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+\frac{a^2}{3}}$	$\frac{a\operatorname{tg}\varphi}{2+\operatorname{tg}\varphi}$	$\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$
	2	$\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+a^2}$	$\frac{a\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\varphi}$	$\frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}$

13	**1**	12 см	14 см; 21 см; 25 см; 13 см	$\frac{a^2-b^2}{4}$
	2	15 см	25 см; 39 см; 50 см; 25 см	$\frac{a^2-b^2}{4}\sqrt{3}$
14	**1**	$\frac{\sqrt{a^2+b^2+9c^2}}{3}$	$\vec{b}=-8\vec{a}$	15
	2	$\frac{\sqrt{a^2+b^2+16c^2}}{4}$	$\vec{b}=8\vec{a}$	10
15	**1**	$\sqrt{142}$	$\vec{O}$	D
	2	$\sqrt{113}$	$\vec{O}$	B
16	**1**	$\vec{k}=3\vec{m}-2\vec{n}$	$\vec{a}=\frac{3}{4}\vec{m}-\frac{1}{4}\vec{n}-\frac{1}{4}\vec{k}$; $\vec{b}=-\frac{1}{4}\vec{m}+\frac{3}{4}\vec{n}-\frac{1}{4}\vec{k}$; $\vec{c}=-\frac{1}{4}\vec{m}-\frac{1}{4}\vec{n}+\frac{3}{4}\vec{k}$	$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
	2	$\vec{n}=2\vec{m}-3\vec{k}$	$\vec{a}=\frac{2}{5}\vec{m}-\frac{1}{10}\vec{n}-\frac{1}{10}\vec{k}$; $\vec{b}=-\frac{1}{10}\vec{m}+\frac{2}{5}\vec{n}-\frac{1}{10}\vec{k}$; $\vec{c}=-\frac{1}{10}\vec{m}-\frac{1}{10}\vec{n}+\frac{2}{5}\vec{k}$	$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

Ответы к контрольным работам

№ п/п	Вариант	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5
1	1	Не всегда	48°	12 см	$a^2\sqrt{3}$	Параллелограмм; 18 см
	2	Не всегда	33°	21 см	$\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$	Параллелограмм; 22 см
2	1	90°	5	$4\sqrt{5}$	7 см	$\sqrt{5}a$
	2	90°	10	$8\sqrt{2}$	6 см	$\sqrt{3}a$
3	1	50° или 130°	30°	90°	$5\sqrt{5}$ см	$\arccos\left(2\sqrt{3}-3\right)$
	2	70° или 110°	60°	120°	$\sqrt{94}$ см	$\arccos\left(\sqrt{2}-1\right)$
4	1	$180°\cdot n$	$m\cdot\sin\varphi$	96 $см^2$	300	$\frac{a}{4}\sqrt{3a^2+4b^2}$
	2	$180°\cdot(n-2)$	$\frac{h}{\sin\varphi}$	162 $см^2$	400	$\frac{a}{2}\sqrt{4a^2+2b^2}$
5	1	$12\sqrt{3}\left(1+3\sqrt{2}\right)$ $см^2$ и $3\sqrt{2}$ см	$a\sqrt{4b^2-a^2}$	$\frac{a^2}{4}\left(8+\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)$	$\sqrt{3}$ см	$\frac{a^2\left(2h^2-a^2\right)\sqrt{2}}{h\sqrt{2h^2+a^2}}$

	2	$16\sqrt{3}\left(1+3\sqrt{2}\right)$ см^2 и $2\sqrt{6}$ см	$a\sqrt{4h^2+a^2}$	$\frac{h^2}{9}\left(12+5\sqrt{3}+\sqrt{39}\right)$	$6\sqrt{3}$ см	$\frac{4a^2\left(b^2-a^2\right)}{b\sqrt{4b^2-2a^2}}$
6	**1**	$\overrightarrow{A_1D_1}$	B_1	3	$\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$	$-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$
	2	$\overrightarrow{BA}$	A	10	$\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$	$-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$
7	**1**	$\frac{420}{169}$ и $\frac{84}{25}$	arctg5 и $\frac{\sqrt{26}}{6}a^2$	1056 см^2	4 : 5	$\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}; \sqrt{53}$
	2	$\frac{693}{169}$ и $\frac{9}{2}$	arctg$\sqrt{13}$ и $\frac{\sqrt{14}}{12}a^2$	1160 см^2	1 : 1	$\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}; \sqrt{46}$

Содержание