РАДУ ГЫСКА

ЭЛЕМЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Кишинёв, 2018

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ

Настоящая брошюра по тригонометрии предназначена учащимся и студентам в помощь лучшего усвоения главы алгебры – „**Тригонометрия**” и больше всего решение тригонометрических уравнений, которые очень разнообразны, трудны и в то же время интересны из-за множества тригонометрических формул.

Рассмотрим сначала определения тригонометрических функций синус, косинус, тангенс и котангенс а также их главные свойства. Потом последует список основных тригонометрических формул и опишем виды тригонометрических уравнений и методы их решения.

1) Тригонометрические функции *синус* и *косинус*

В школьном курсе функции синус и косинус действительного числа $t \in R$ введены с помощью вспомогательной функции f с областью определения множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ и с областью значений множество точек на тригонометрической окружности C.

$$f : R \to C$$

Определение. Тригонометрической окружностью называется окружность единичного радиуса и центром в начале координат.

Таким образом любому действительному числу t сопоставляем упорядоченную пару чисел (X_M, Y_M), которые являются координатами точки $f(t) = M$ на тригонометрической окружности C относительно декартовой системе координат xOy.

Определение 1. Называется функцией синус определённой на $\boldsymbol{R}$ со значениями в $\boldsymbol{R}$ функция, которая сопоставляет действительному числу t ординату Y_M точки $M = f(t)$ на тригонометрической окружности и обозначаемая $\sin t$.

Другими словами: Функция синус это: $\sin : R \to R,\ \sin t = Y_M$. (ордината точки M на тригонометрической окружности).

Определение 2. Называется функцией косинус определённой на $\boldsymbol{R}$ со значениями в $\boldsymbol{R}$ функция, которая сопоставляет

действительному числу t абсциссу X_M точки $M = f(t)$ на тригонометрической окружности и обозначаемая $\cos t$.

Другими словами: Функция косинус это: $\cos : R \to R,\ \cos t = X_M$. (абсцисса точки M на тригонометрической окружности).

Основные свойства тригонометрических функций

1) Для любого $t \in R$ имеем: $-1 \le \sin t \le 1$ и $-1 \le \cos t \le 1$, т.к. точка $M(\cos t, \sin t)$ находится на тригонометрической окружности единичного радиуса и центром в начале координат.

2) Для любого $t \in R$ имеем: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Это основное тригонометрическое тождество основано на вычислении расстояния от точки $M(\cos t, \sin t)$ до начала координат $O(0;0)$, расстояние равной 1 – радиус тригонометрической окружности.

3) Тригонометрические функции синус и косинус периодичны с основным периодом 2π. Действительным числам вида: t, $t \pm 2\pi$, $t \pm 4\pi$, $t \pm 6\pi$, …, $t \pm 2k\pi$, где $k \in Z$, соответствует одна и та же точка M на тригонометрической окружности. Поэтому можно написать: $\sin(t \pm 2k\pi) = \sin t$ и $\cos(t \pm 2k\pi) = \cos t$, где $k \in Z$.

4) Тригонометрическая функция косинус чётна, а функция синус нечётна, т.е. $\cos(-t) = \cos t$, а $\sin(-t) = \sin t$ для любого $t \in R$.

2) Тригонометрические функции *тангенс* и *котангенс*

С помощью функций синус и косинус можно определить и другие тригонометрические функции. Важную роль в тригонометрии отнесено функциям тангенс и котангенс, обозначенные: тангенс – tg, котангенс – ctg.

Функция tg (тангенс). Пусть A множество действительных чисел вида $\frac{\pi}{2} + k\pi$, где $k \in Z$. Функция tg определяется: $tg : R \setminus A \to R$, $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$. Легко проверить что функция тангенс нечётна:

$$tg(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tgx.$$

Функция ctg (котангенс). Пусть B множество действительных чисел вида $k\pi$, где $k \in Z$. Функция ctg определяется: $ctg : R \setminus B \to R$,

$ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Легко проверить что функция котангенс нечётна:

$ctg(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \dfrac{\cos x}{-\sin x} = -ctgx$.

Функции *тангенс* и *котангенс* периодичны с основным периодом π, т.е. $tg(t \pm k\pi) = tgt$ и $ctg(t \pm k\pi) = ctgt$ для любого $t \in R$ и $k \in Z$.

Представляем значения тригонометрических функций для некоторых часто встречающихся углов.

α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	–30°	–45°	–60°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не суще ствуе	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Не сущест вует	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–1	$-\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	Не сущес твует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–1	$-\sqrt{3}$	Не суще ствуе	0	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Основные тригонометрические формулы

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \forall \alpha \in R$.

2) $1 + tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z$.

3) $1 + ctg^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}, \ \alpha \neq k\pi, \ k \in Z$.

4) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

5) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

6) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

7) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

8) $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha . \cdot tg\beta}, \ \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z$.

9) $tg(\alpha - \beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}, \ \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z$.

10) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

11) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

12) $tg 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}, \alpha, 2\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z$.

13) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

14) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

15) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$.

16) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}$

17) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$.

18) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$.

19) $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$.

20) $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$.

21) $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$.

22) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$.

23) $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

24) $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.

25) $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

26) $\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$.

27) $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$.

28) $\left|tg\dfrac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}, \quad \alpha \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in Z$.

29) $\sin\alpha = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\dfrac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in Z$.

30) $\cos\alpha = \dfrac{1 - tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\dfrac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in Z$.

31) $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}, \quad \alpha \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in Z$.

32) $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha\neq k\pi,\ k\in Z.$

33) $|\sin\alpha|=\frac{|tg\alpha|}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in Z.$

34) $|\sin\alpha|=|\sin\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}, \quad \alpha\neq k\pi, \quad k\in Z.$

35) $|\cos\alpha|=|\cos\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in Z.$

36) $|\cos\alpha|=|\cos\alpha|=\frac{|ctg\alpha|}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}, \quad \alpha\neq k\pi, \quad k\in Z.$

37) $a\cdot\cos x+b\cdot\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\alpha), \quad a^2+b^2\neq0$

где $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Формулы приведения

Достаточно важную роль имеют формулы приведения, с помощью которых можно привести значение тригонометрических функций любого угла к значению тригонометрической функции угла со значениями в интервале $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Формулы приведения

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$
$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$
$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha$	$ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha$
$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha$	$ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha$
$tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha$	$ctg(\pi-\alpha)=-ctg\alpha$
$tg(\pi+\alpha)=tg\alpha$	$ctg(\pi+\alpha)=ctg\alpha$
$tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha$	$ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha$
$tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha$	$ctg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha$

4. Решение тригонометрических уравнений

1) Решение простейших тригонометрических уравнений

Простейшие тригонометрические уравнение это уравнения вида:

$$\sin x=\alpha, \qquad \cos x=\alpha, \qquad tgx=\alpha, \qquad ctgx=\alpha,$$

которые решаются следующим образом:

a) $\sin x=\alpha$

– если $|\alpha|>1$ тогда $x\in\varnothing$;

– если $|\alpha|\leq1$ тогда $x=(-1)^k\cdot\arcsin\alpha+k\pi$, $k\in Z$;

Отметим 3 частных случая, конкретнее:

$sinx=-1$ тогда, $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$;

$sinx=0$ тогда, $x=k\pi$, $k\in Z$;

$sinx=1$ тогда, $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$;

b) $\cos x=\alpha$

– если $|\alpha|>1$, тогда $x\in\varnothing$.

– если $|\alpha|\leq1$, тогда $x=\pm\arccos\alpha+2k\pi$, $k\in Z$.

И теперь отмечаем 3 частных случая:

$\cos x=-1$ тогда, $x=\pi+2k\pi$, $k\in Z$;

$\cos x=0$ тогда, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$;

$\cos x=1$ тогда, $x=2k\pi$, $k\in Z$;

c) $tgx=\alpha$ имеем $x=\mathrm{arctg}\alpha+k\pi$, $k\in Z$;

d) $ctgx=\alpha$ имем $x=\mathrm{arcctg}\alpha+k\pi$, $k\in Z$;

Следует отметить что при решении тригонометрических уравнений всегда придется решать простейшие тригонометрические уравнения, то что показывает важность умения решать простейшие тригонометрические уравнения, называемыми основными.

Упражнения:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$. **2)** $\cos 2x = 0$.

3) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **4)** $tgx = \sqrt{3}$.

5) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6)** $3tgx = \sqrt{3}$.

7) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **8)** $\cos^2 x = \frac{3}{4}$.

9) $\sin x = -1$. **10)** $\sin^2 x = \frac{1}{2}$.

2) <u>Решение уравнений разложением на множители</u>

К этой группе относятся уравнения в которых имеются общие множители при всех слагаемых уравнения или уравнения приводимые к этим

<u>Пример 1</u>: $2\cos x \cdot \cos 2x = \cos x$

Уравнение равносильно уравнению:

$2\cos x \cdot \cos 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x \cdot (2\cos 2x - 1) = 0$, которая эквивалентна совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 2\cos 2x - 1 = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos 2x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z\\ 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi; n \in Z\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\\ x = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z\end{array}\right..$$

Ответ: $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \pm\frac{\pi}{6} + n\pi \ / \ k, n \in Z\right\}$.

<u>Пример 2</u>: $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$

$(2\sin x - \cos x)\cdot(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x \Rightarrow$

$(2\sin x - \cos x)\cdot(1 + \cos x) = (1 + \cos x)\cdot(1 - \cos x)$

$\Rightarrow (2\sin x - \cos x)\cdot(1 + \cos x) - (1 + \cos x)\cdot(1 - \cos x) = 0$.

Выносим общий множитель $(1 + \cos x)$ перед скобками и получаем:

$(1 + \cos x)\cdot(2\sin x - \cos x - (1 - \cos x)) = 0 \Rightarrow$

$(1 + \cos x)\cdot(2\sin x - \cos x - 1 + \cos x) = 0 \Rightarrow (1 + \cos x)\cdot(2\sin x - 1) = 0$.

Уравнение эквивалентна совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}1 + \cos x = 0\\ 2\sin x - 1 = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \sin x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + 2k\pi; k \in Z\\ x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi; n \in Z\end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left\{\pi + 2k\pi; (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi; k, n \in Z\right\}$.

Упражнения:

1) $\sin^3 x + \sin x = 0$. **2)** $\cos^3 x - \cos x = 0$ **3)** $\sin^2 x - \sin x = 0$.

4) $2\cos^2 x + \cos x = 0$. **5)** $4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3\sin x - 3 = 0$

6) $5\sin x \cdot tgx - \sin x - 5tgx + 1 = 0$. **7)** $ctgx \cdot \cos x - ctgx - \cos x + 1 = 0$.

8) $tg^3 x - tg^2 x + tgx = 1$.

3) <u>Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям</u>

<u>Пример 1</u>: $3\cos^2 x - 10\cos x + 3 = 0$.

Обозначая $\cos x = t$, уравнение принимает вид: $3t^2 - 10t + 3 = 0$, являющееся квадратным, и решаем:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4\cdot 3\cdot 3 = 100 - 36 = 64$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) - \sqrt{64}}{2\cdot 3} = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) + \sqrt{64}}{2\cdot 3} = \frac{10 + 8}{6} = \frac{18}{6} = 3.$$

Возвращаясь к обозначенному, получаем уравнения::

— $\cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\arccos\frac{2}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$.

— $\cos x = 3 \Rightarrow x \in \varnothing$ т.к. $|\cos x| \le 1$.

Ответ: $x \in \left\{\pm\arccos\frac{1}{3} + 2k\pi, k \in Z\right\}$.

<u>Пример 2</u>: $\cos 2x + 3\sin x = 2$.

Используя формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, получаем:

$1 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 2 \Rightarrow -2\sin^2 x + 3\sin x - 1 = 0$.

Обозначаем $\sin x = t$ и получаем уравнение второго порядка: $-2t^2 + 3t - 1 = 0$. Решаем данное уравнение.

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-1) = 9 - 8 = 1$.

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2\cdot(-2)} = \frac{-3 - 1}{-4} = \frac{4}{4} = 1,$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2\cdot(-2)} = \frac{-3 + 1}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

Учитывая сделанное обозначение получаем простейшие уравнения:

— $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in Z$;

— $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + n\pi = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z$.

Ответ: $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi; k, n \in Z\right\}$.

Упражнения:

1) $5\sin^2 x - 9\sin x + 4 = 0$. **2)** $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.
3) $2\sin^2 x = 3\cos x$. **4)** $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$.
5) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$. **6)** $\cos 2x - \sin x = 0$.
7) $1 - \cos 2x = 4\cos^2 x$. **8)** $1 - \cos 2x = 4\sin^2 x$.
9) $3\cos^2 x - \sin^2 x + 3\cos x = 0$. **10)** $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$.

4) <u>Решение однородных тригонометрических уравнений и сводящихся к ним</u>

Уравнения вида:

$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cdot \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x + ... + a_{n-1} \sin x \cdot \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0$

где $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ действительные числа, называются однородными относительно тригонометрических функций синус и косинус. Легко проверяется что функции $\sin x$ и $\cos x$ не могут равняться нулю одновременно. Выполняя деление на $\cos^n x$, получаем алгебраическое уравнение относительно tgx, т.е.

$a_0 tg^n x + a_1 tg^{n-1} x + a_2 tg^{n-2} x + ... + a_{n-1} tgx + a_n = 0$.

<u>Пример 1</u>: $2\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$.

Отметим что это однородное уравнение второй степени. Выполняя деление на $\cos^2 x$, получим уравнение:

$2tg^2 x - 3tgx + 1 = 0$, которое является уравнением второй степени относительно tgx. Обозначаем $tgx = t$ и получаем уравнение: $2t^2 - 3t + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1.$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Возвращаясь к обозначенному, получаем уравнения:

$tgx = \frac{1}{2}$ и $tgx = 1$, с решениями:

$x_1 = arctg\frac{1}{2} + k\pi, \ k \in Z$ и $x_2 = \frac{\pi}{4} + n\pi, \ n \in Z$.

Ответ: $x \in \left\{arctg\frac{1}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + n\pi; k, n \in Z\right\}$.

<u>Пример 2</u>: $5\sin^2 + \sin x \cdot \cos x = 3$.

Это уравнение приводима к однородному, следующим образом:

$5\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x) \Rightarrow$

$5\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x \Rightarrow$

$2\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Выполняя деление на $\cos^2 x$, получаем уравнение:

$2tg^2 x + tgx - 3 = 0$, которое является уравнением второй степени относительно tgx. Обозначаем $tgx = t$ и получаем уравнение: $2t^2 + t - 3 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-1-5}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2},$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-1+5}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Учитывая сделанное обозначение получаем простейшие уравнения:

$tgx = -\frac{3}{2}$ и $tgx = 1$, имеющие решения:

$x_1 = arctg\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi, \ k \in Z$ и $x_2 = \frac{\pi}{4} + n\pi, \ n \in Z$.

Ответ: $x \in \left\{arctg\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi, \frac{\pi}{4} + n\pi; k, n \in Z\right\}$.

Упражнения:

1) $2\sin^2 x + \cos^2 x = 5\sin x \cos x$.
2) $2\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$.
3) $\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 7\cos^2 x = 0$.
4) $3\sin^2 x - 2\sin 2x + \cos^2 x = 0$.
5) $\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 9\cos^2 x + 3 = 0$.
6) $31\cos^2 3x + 25\sin 3x \cos 3x = 6$.

5) Решение уравнений вида $a\cdot\cos x+b\cdot\sin x=c$

Уравнения вида $a\cdot\cos x+b\cdot\sin x=c$, $a^2+b^2\neq 0$ называются линейными уравнениями относительно тригонометрических функций *sinx* и *cosx*. Рассмотрим два метода решения.

I) **Метод вспомогательного угла.** Используя формулу (37)

$a\cdot\cos x+b\cdot\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\alpha)$,

где $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Тогда получаем уравнение $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\alpha)=c\Rightarrow$

$\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Данное уравнение является основным и следовательно имеем:

– если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|>1$ или $\frac{c^2}{a^2+b^2}>1\Rightarrow c^2>a^2+b^2$ имеем что $x\in\varnothing$.

– если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$ или $c^2\leq a^2+b^2$ имеем

$$x+\alpha=(-1)^k\cdot\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+k\pi,\quad k\in Z,$$

$$x=(-1)^k\cdot\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\alpha+k\pi,\quad k\in Z,$$

$$x=(-1)^k\cdot\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+k\pi,\quad k\in Z.$$

Ответ: $x\in\left\{(-1)^k\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+k\pi; k\in Z\right\}$.

II) **Метод приведения к квадратному уравнению.**

Используем формулы: $\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$, $\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$.

Подставляя в первоначальном уравнении, получаем:

$$a\cdot\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}+b\cdot\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=c.$$

Отметим что это уравнение зависимое от $tg\frac{\alpha}{2}$. Обозначаем $tg\frac{\alpha}{2}=t$ и получим уравнение: $a\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+b\cdot\frac{2t}{1+t^2}=c$. Умножая уравнение на $1+t^2\neq 0$, получим:

$a(1-t^2)+2bt=c(1+t^2)$ $\Rightarrow a-at^2+2bt-c-ct^2=0$

$\Rightarrow -(a+c)t^2+2bt+(a-c)=0$

Решаем уравнение второго порядка.

$\Delta=(2b)^2-4\cdot(-(a+c))\cdot(a-c)=4b^2+4(a^2-c^2)=4(b^2+a^2-c^2)$.

В зависимости от знака дискриминанта имеем:

– если $b^2+a^2-c^2<0$ или $c^2>a^2+b^2$, то уравнение не имеет решений, т.е. $x\in\varnothing$.

– если $b^2+a^2-c^2=0$ или $c^2=a^2+b^2$, то уравнение допускает лишь одно решение

$t=\frac{-2b}{-2(a+c)}=\frac{b}{a+c}$, откуда $tg\frac{x}{2}=\frac{b}{a+c}\Rightarrow\frac{x}{2}=arctg\frac{b}{a+c}+k\pi$, $k\in Z\Rightarrow$

$x=2\,arctg\frac{b}{a+c}+2k\pi$, $k\in Z$.

Итак: $S=\left\{2arctg\frac{b}{a+c}+2k\pi; k\in Z\right\}$.

– если $b^2+a^2-c^2>0$ или $c^2<a^2+b^2$, то уравнение имеет два решения:

$$t_2=\frac{-2b-2\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{-2(a+c)}=\frac{b+\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a+c},$$

$$t_2=\frac{-2b+2\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{-2(a+c)}=\frac{b-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a+c}.$$

Возвращаясь к обозначению получаем уравнения:

$tg\frac{x}{2}=\frac{b+\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a+c}$ şi $tg\frac{x}{2}=\frac{b-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a+c}$

cu soluţiile $\frac{x}{2}=arctg\frac{b\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a+c}+k\pi$, $k\in Z\Rightarrow$

$$x=2\,arctg\frac{b\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a+c}+2k\pi,\quad k\in Z.$$

$$S=\left\{2arctg\frac{b\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a+c}+2k\pi; k\in Z\right\}.$$

Упражнения:

1) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2$.
2) $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=1$.
3) $\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}$.
4) $3\sin x-\sqrt{3}\cos x=3$.
5) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$.
6) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$.

6) Решение уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение

Используются формулы: 15), 16), 17), 18).

<u>Пример 1:</u> $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0.$

Вычислим сумму $\sin x+\sin 3x=2\sin 2x\cdot\cos x$.

Подставляем в уравнении и получаем:

$$2\sin 2x\cdot\cos x+\sin 2x=0\Rightarrow$$

$$\sin 2x\ (2\cos x+1)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ 2\cos x+1=0\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2x=k\pi;k\in Z\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{2};k\in Z\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2n\pi;n\in Z\end{array}\right..$$

Ответ: $x\in\left\{\dfrac{k\pi}{2},\pm\dfrac{2\pi}{3}+2n\pi;k,n\in Z\right\}$.

<u>Пример 2:</u> $\cos 3x+\sin 5x=0.$

Используя формулы приведения, выполняем преобразование:

$\cos 3x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)$, подставляя в уравнении получим:

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)+\sin 5x=0$, согласно формуле **15)**, имеем:

$$2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-3x+5x}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}-3x-5x}{2}=0\Rightarrow$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=0\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-4x\right)=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{4}+x=k\pi;k\in Z\\ \dfrac{\pi}{4}-4x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi;n\in Z\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;k\in Z\\ -4x=\dfrac{\pi}{4}+n\pi;n\in Z\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;k\in Z\\ x=-\dfrac{\pi}{16}-\dfrac{n\pi}{4};n\in Z\end{array}\right..$$

Ответ: $x\in\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,-\dfrac{\pi}{16}-\dfrac{n\pi}{4};k,n\in Z\right\}$.

Упражнения:

1) $\cos 10x+\cos 2x=0.$ **2)** $\sin 7x=\sin 5x$.

3) $\sin 8x+\sin 4x=0.$ **4)** $\cos 7x=\cos 5x$.

5) $\cos 8x+\sin 4x=0.$ **6)** $\cos x-\cos 3x=\sin 2x$.

7) $sin2x+\sin 3x+\sin 4x=0.$ **8)** $\cos 3x-\cos 4x+\cos 5x=0.$

9) $\cos x-\cos 3x-\cos 5x+\cos 7x=0.$ **10)** $\cos(x-30°)-\cos(x+30°)=0.$

7) Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму

Используются формулы: **19), 20), 21).**

<u>Пример 1:</u> $2\cos x\cdot\sin 3x=\sin 4x+1.$

Используя формулу **19)**, получим:

$$2\cdot\frac{1}{2}(\sin(3x-x)+\sin(x+3x))=\sin 4x+1\ \Rightarrow\ \sin 2x+\sin 4x=\sin 4x+1\ \Rightarrow$$

$$\sin 2x=1\ \Rightarrow\ 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \ k\in Z\ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$$

Ответ: $x\in\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi;k\in Z\right\}$.

<u>Пример 2:</u> $\sin 2x\cdot\sin 6x=\cos x\cdot\cos 3x.$

Используются формулы: **20) и 21)**, получаем:

$$\frac{1}{2}(\cos(-4x)-\cos 8x)=\frac{1}{2}(\cos(-2x)+\cos 4x)\Rightarrow$$

$$\cos 4x-\cos 8x=\cos 2x+\cos 4x\ \Rightarrow\ \cos 2x+\cos 8x=0.$$

Используя формулу суммы тригонометрических функций косинус, получаем:

$$2\cos 5x\cdot\cos 3x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 5x=0\\ \cos 3x=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}5x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi;k\in Z\\ 3x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi;n\in Z\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k\pi}{5};k\in Z\\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{n\pi}{3};n\in Z\end{array}\right..$$

Ответ: $x\in\left\{\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k\pi}{5},\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{n\pi}{3};k,n\in Z\right\}$.

Упражнения:

1) $\cos 2x\cdot\cos 3x=\sin 2x\cdot\sin 3x$.

2) $\sin 2x\cdot\sin 3x+\cos 5x=0$.

3) $\sin 7x-\cos 3x\cdot\sin 4x=0$.

4) $\cos 5x\cdot\cos 11x=\cos 4x\cdot\cos 12x$.

5) $\sin 3x\cdot\cos 5x=\sin 7x\cdot\cos 9x$.

6) $\sin 2x\cdot\sin 8x=\sin 3x\cdot\sin 7x$.

8) Решение уравнений с применением формул понижения степени

К этому типу уравнений относятся уравнения в которых встречаются чётные степени тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$. Использованы формулы $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ и $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

Рассмотрим пример.

Пример: $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$.

Применяя формулу $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ получаем уравнение:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 1-\cos 2x + 1 - \cos 4x + 1 - \cos 6x = 3 \Rightarrow$$

$$3 - \cos 2x - \cos 4x - \cos 6x = 3 \Rightarrow -\cos 2x - \cos 4x - \cos 6x = 0$$

$\Rightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$.

Применяя формулу преобразования суммы в произведение, получим:

$$2\cos 4x \cdot \cos 2x + \cos 4x = 0 \Rightarrow \cos 4x(2\cos 2x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ 2\cos 2x + 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}; k \in Z \\ 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi; n \in Z \end{array}\right.,$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}; k \in Z \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi; n \in Z \end{array}\right..$$

Ответ: $x \in \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3} + n\pi; k, n \in Z\right\}$.

Упражнения:

1) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$.

2) $\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$.

3) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$.

4) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$.

5) $\cos^2 x - \cos^2 3x = \cos^2 2x - \cos^2 4x$.

6) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$.

9) Решение уравнений с помощью подстановки

Уравнения вида $P(\sin x \pm \cos x, \sin x \cdot \cos x) = 0$, где $P(y, z)$ является многочленом, решаются с помощью подстановки $\sin x \pm \cos x = t$. Prin ridicare la pătrat, avem: $1 \pm 2\sin x \cdot \cos x = t^2 \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \pm\frac{t^2-1}{2}$.

Подставляя, получается уравнение второй степени.

Пример: $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cdot \cos x$.

Обозначаем: $\sin x + \cos x = t \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{t^2-1}{2}$.

Подставляем и получаем: $t = 1 + \frac{t^2-1}{2} \Rightarrow 2t = 2 + t^2 - 1$

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Возвращаемся к обозначенному и получаем уравнение: $\sin x + \cos x = 1$.

Для решения используем метод вспомогательного угла. Делим на $\sqrt{2}$ и получаем уравнение: $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1$. Учитывая что:

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$, следует:

$$\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow$$

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in Z, \quad \Rightarrow \quad x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$$

Ответ: $x \in \left\{(-1)^k \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in Z\right\}$.

Упражнения:

1) $\sin x + \cos x = 1 + 2\sin x \cos x$.
2) $\sqrt{3}(\sin x + \cos x) + \sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2} = 0$.
3) $\sin 2x - 5\sin x + 5\cos x + 5 = 0$.

10) Решение тригонометрических уравнений вида $f(x) = \sqrt{g(x)}$.

В этой категории уравнений следует учитывать что выражение из-под корня должно быть неотрицательным. Другими словами, при решении следует отметить область допустимых значений (О.Д.З.).

Пример: $\frac{3}{2}-\sin 2x=\sqrt{9+10\sin 2x}$.

Определяем О.Д.З. $\begin{cases}\frac{3}{2}-\sin 2x\ge 0\\ 9+10\sin 2x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\Rightarrow\begin{cases}\sin 2x\le\frac{3}{2}\\ \sin 2x\ge-\frac{9}{10}\end{cases}$.

При условии что обе части положительны можем возвести в квадрат. Получаем:

$\frac{9}{4}-3\sin 2x+\sin^2 2x=9+10\sin 2x \quad\Rightarrow\quad \sin^2 2x-13\sin 2x+\frac{9}{4}-\frac{36}{4}=0 \quad\Rightarrow$

$\sin^2 2x-13\sin 2x-\frac{27}{4}=0.$

Обозначаем $\sin 2x=t$ и получаем уравнение: $t^2-13t-\frac{27}{4}=0$,

$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4\cdot 1\cdot\left(-\frac{27}{4}\right)=169+27=196.$

$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13-\sqrt{196}}{2\cdot 1}=\frac{13-14}{2}=-\frac{1}{2},$

$t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13+\sqrt{196}}{2\cdot 1}=\frac{13+14}{2}=\frac{27}{2}.$

Возвращаемся к обозначению и получаем уравнения:

— $\sin 2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2x=(-1)^k\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+k\pi; k\in Z\Rightarrow$

$\Rightarrow\ x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}; k\in Z.$

— $\sin 2x=\frac{27}{2}\Rightarrow\ x\in\varnothing$, так как $\frac{27}{2}>1$.

Ответ: $x\in\left\{(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}; k\in Z\right\}$.

Упражнения:

1) $\sin x=\frac{1}{2}$, **2)** $\cos x=-\frac{1}{2}$, **3)** $\cos x=-1$,

4) $tgx=\sqrt{3}$, **5)** $\cos 2x=0$, **6)** $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

7) $ctgx=-1$, **8)** $\cos 2x+3\sin x=2$,

9) $6\cos^2 x+5\sin x-7=0$,

10) $1+\cos x+\cos 2x=0$,

11) $(2\sin x-\cos x)\cdot(1+\cos x)=1-\cos^2 x$,

12) $\sqrt{2}\cdot\cos^2 7x-\cos 7x=0$,

13) $3\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x=0$,

14) $\cos^2 x-3\sin x\cos x=\sin\frac{3\pi}{2}$,

15) $\sin 3x+\sin x=\sin 2x$,

16) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$,

17) $\cos 3x+\cos 5x=0$,

18) $2\cos x\cdot\sin 3x=\sin 4x+1$,

19) $\cos x\cdot\cos 3x=\cos 5x\cdot\cos 7x$,

20) $\sin 2x\cdot\sin 6x=\cos x\cdot\cos 3x$,

21) $\sin^2 x+\sin^2 2x-\sin^2 3x-\sin^2 4x=0$,

22) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\cos^2 3x+\cos^2 4x$,

23) $\sin x-2\cos 2x=1$,

24) $\cos^3 x\cdot\sin x-\sin^3 x\cdot\cos x=\frac{\sqrt{2}}{8}$,

25) $\sin x-\cos x=1-0{,}5\sin 2x$,

26) $4\sin 3x+3=\sqrt{2\sin 3x+2}$.