И. М. Смирнова, В. А. Смирнов

Геометрические задачи с практическим содержанием

Издание второе, дополненное

Москва
Издательство МЦНМО
2015

УДК 514.11
ББК 22.151.0
С50

Смирнова И. М., Смирнов В. А.
С50 Геометрические задачи с практическим содержанием. — М.: МЦНМО, 2015. — 2-е изд., доп. — 216 с.

ISBN 978-5-94057-???-?

Пособие содержит геометрические задачи с практическим содержанием, решение которых позволит: усилить практическую направленность изучения геометрии, выработать необходимые навыки решения практических задач, сформировать представления о соотношениях размеров реальных объектов и связанных с ними геометрических величин, повысить интерес, мотивацию и, как следствие, эффективность изучения геометрии.

Первое издание книги вышло в 2010 году.

ББК 22.151.0

ISBN 978-5-94057-???-?

Оглавление

Ответы и решения

Введение

Данное пособие содержит двести геометрических задач с практическим содержанием, среди которых:

— задачи на нахождение расстояний с использованием теоремы Пифагора;

— задачи на нахождение углов;

— задачи, сводящиеся к нахождению длин дуг окружности;

— задачи на нахождение расстояний до недоступных объектов с использованием подобия;

— задачи на нахождение расстояний и углов с использованием табличных значений тригонометрических функций;

— задачи на нахождение площадей плоских и площадей поверхностей пространственных фигур;

— задачи на нахождение объемов пространственных фигур и др.

Решение геометрических задач с практическим содержанием позволяет:

— усилить практическую направленность изучения школьного курса геометрии;

— выработать необходимые навыки решения практических задач, умения оценивать величины и находить их приближенные значения;

— сформировать представления о соотношениях размеров реальных объектов и связанных с ними геометрических величин;

— выработать навыки работы с таблицами и другими справочными материалами;

— повысить интерес, мотивацию и, как следствие, эффективность изучения геометрии.

Предлагаемые задачи сопровождаются рисунками, позволяющими лучше понять условие, представить соответствующую геометрическую ситуацию, наметить план решения, при необходимости провести дополнительные построения и вычисления.

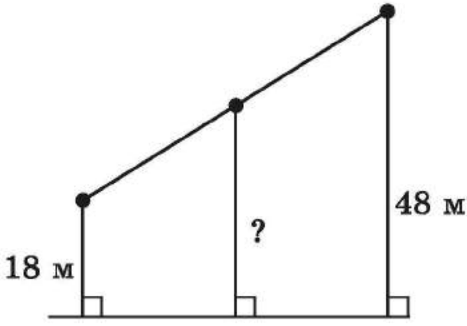
Во второй части пособия даны ответы и решения ко всем задачам. В качестве приложения приведена таблица приближенных значений тригонометрических функций.

Отметим, что в задачах с приближенным ответом разные решения могут приводить к различным приближенным ответам. Поэтому правильным считается не только ответ, указанный в пособии, но и приблизительно равный ему ответ.

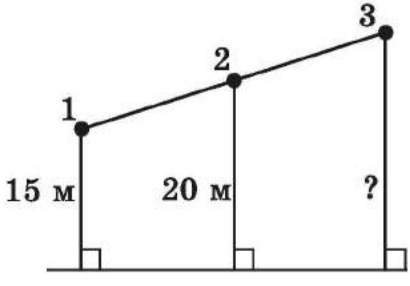
Пособие может быть использовано в качестве дополнительного сборника задач при изучении геометрии в 7—11 классах, при организации обобщающего повторения в 10—11 классах, в работе кружков, курсов по выбору или элективных курсов по геометрии, а также при подготовке к ГИА и ЕГЭ по математике.

1. Расстояния. Теорема Пифагора

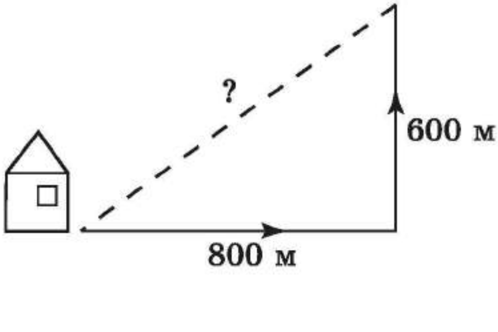
1. На одной прямой на равном расстоянии друг от друга стоят три телеграфных столба. Крайние находятся от дороги на расстояниях 18 м и 48 м. Найдите расстояние, на котором находится от дороги средний столб.



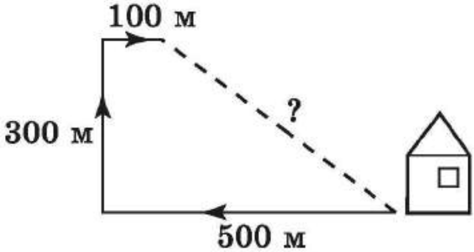
2. На одной прямой на равном расстоянии друг от друга стоят три телеграфных столба. Первый и второй находятся от дороги на расстояниях 15 м и 20 м. Найдите расстояние, на котором находится от дороги третий столб.



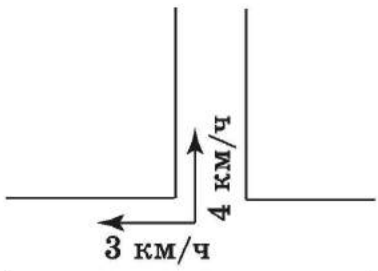
3. Мальчик прошел от дома по направлению на восток 800 м. Затем повернул на север и прошел 600 м. На каком расстоянии от дома оказался мальчик?



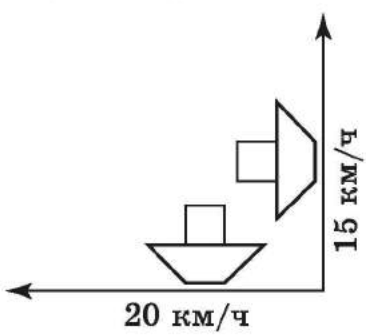
4. Девочка прошла от дома по направлению на запад 500 м. Затем повернула на север и прошла 300 м. После этого она повернула на восток и прошла еще 100 м. На каком расстоянии от дома оказалась девочка?



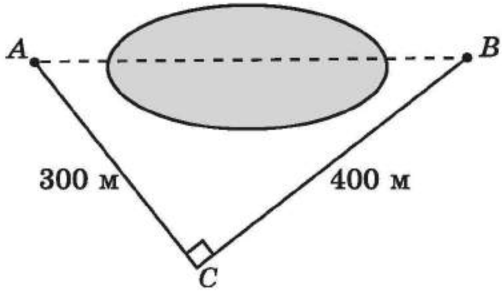
5. Мальчик и девочка, расставшись на перекрестке, пошли по взаимно перпендикулярным дорогам, мальчик со скоростью 4 км/ч, девочка — 3 км/ч. Какое расстояние (в км) будет между ними через 30 мин?



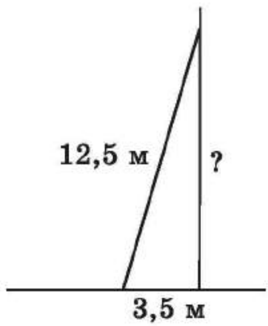
6. Два парохода вышли из порта, следуя один на север, другой на запад. Скорости их равны соответственно 15 км/ч и 20 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 2 ч?



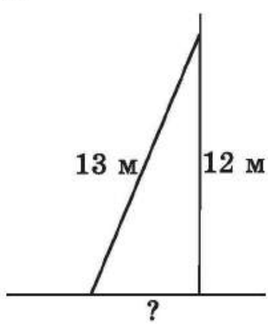
7. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите расстояние в метрах между пунктами A и B, расположенными на разных берегах озера.



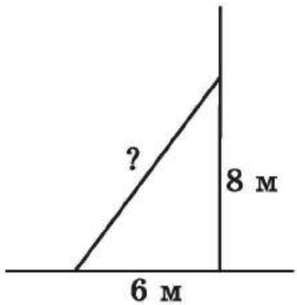
8. Лестница длиной 12,5 м приставлена к стене так, что расстояние от ее нижнего конца до стены равно 3,5 м. На какой высоте от земли находится верхний конец лестницы?



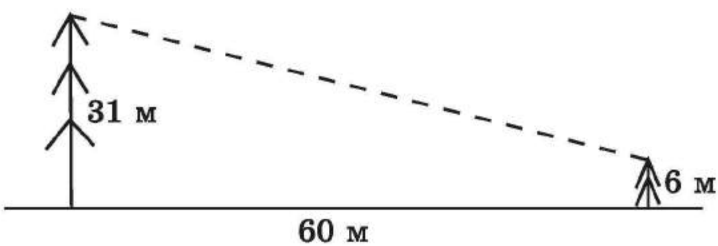
9. На какое расстояние следует отодвинуть от стены дома нижний конец лестницы, длина которой 13 м, чтобы верхний ее конец оказался на высоте 12 м?



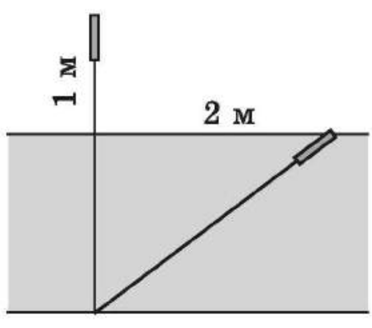
10. Какой длины должна быть лестница, чтобы она достала до окна дома на высоте 8 метров, если ее нижний конец отстоит от дома на 6 м?



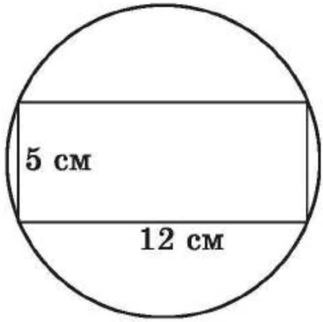
11. В 60 м одна от другой растут две сосны. Высота одной 31 м, а другой — 6 м. Найдите расстояние между их верхушками.



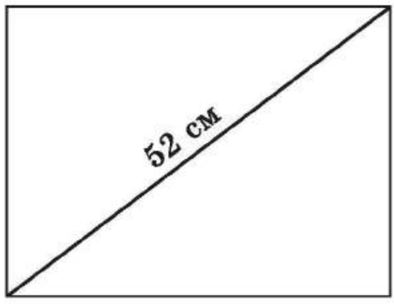
12. Стебель камыша выступает из воды озера на 1 м. Его верхний конец отклонили от вертикального положения на 2 м, и он оказался на уровне воды. Найдите глубину озера в месте, где растет камыш.



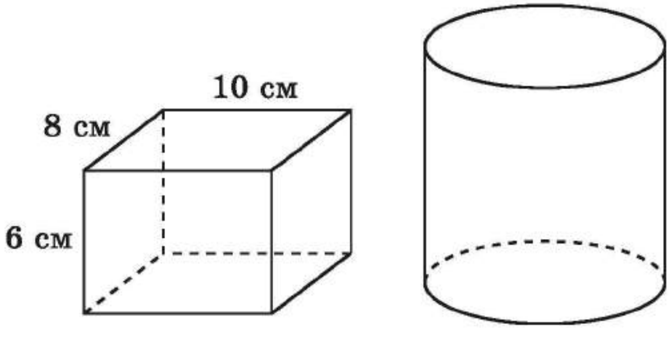
13. Из круглого бревна нужно вырезать брус с поперечным сечением 5×12 (см). Какой наименьший диаметр должно иметь бревно?



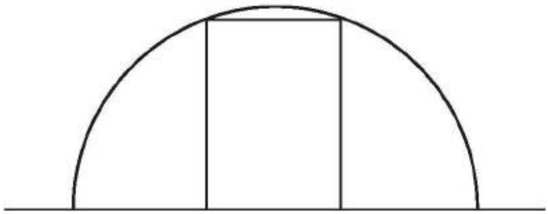
14. Отношение высоты к ширине экрана телевизора равно 0,75. Диагональ равна 60 см. Найдите ширину экрана.



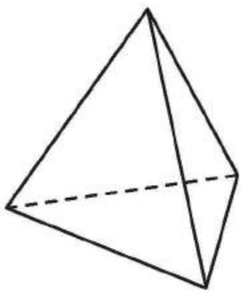
15. Какого наименьшего диаметра должен быть цилиндрический сосуд, чтобы в него можно было поместить деталь в форме прямоугольного параллелепипеда с размерами $6 \times 8 \times 10$ (см)?

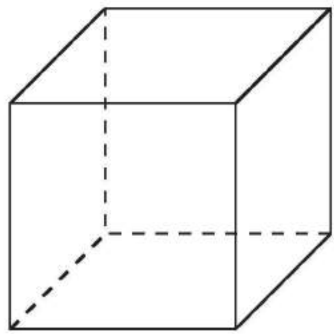


16. Туннель имеет форму полукруга радиуса 3 м. Какой наибольшей высоты должна быть машина шириной 2 м, чтобы она могла проехать по этому туннелю? В ответе укажите приближенное значение в метрах с точностью до одного знака после запятой.

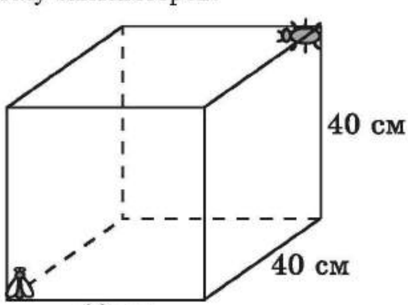


17. Какое наименьшее ребро должна иметь кубическая коробка, чтобы в нее поместился тетраэдр с ребром, равным 8 см? В ответе укажите целое число сантиметров.

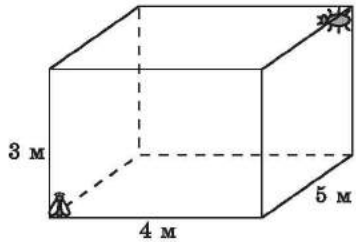




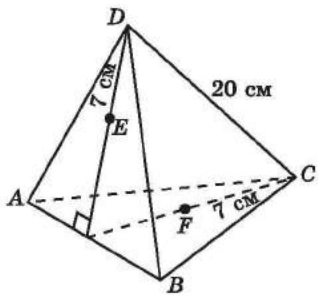
18. В одном углу кубической коробки с размерами $40 \times 40 \times 40$ (см) сидит муха. В противоположном углу сидит паук. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности коробки, по которому паук может доползти до мухи. В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу сантиметров.



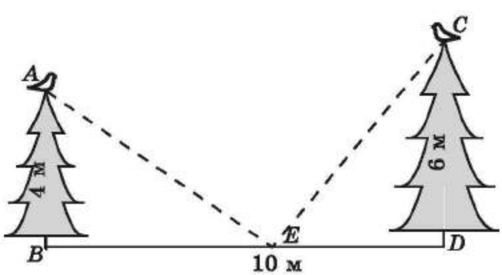
19. В одном углу комнаты с размерами $4 \times 5 \times 3$ (м), сидит муха. В противоположном углу сидит паук. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности комнаты, по которому паук может доползти до мухи. В ответе укажите приближенное значение в метрах с точностью до одного знака после запятой.



20. Найдите кратчайший путь по поверхности правильного тетраэдра $ABCD$, соединяющий точки E и F, расположенные на высотах боковых граней в 7 см от соответствующих вершин тетраэдра. Ребро тетраэдра равно 20 см.

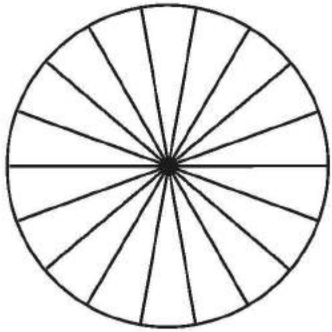


21. На вершинах двух елок сидят две вороны. Высота елок равна 4 м и 6 м. Расстояние между ними равно 10 м. На каком расстоянии BE нужно положить сыр для этих ворон, чтобы они находились в равных условиях, т. е. чтобы расстояния от них до сыра было одинаковыми?

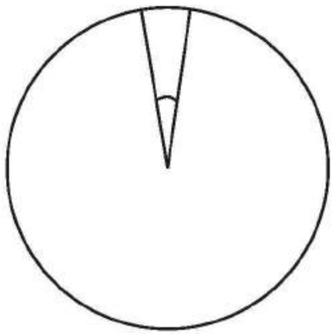


2. Углы

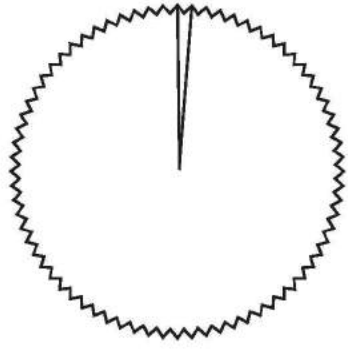
1. Колесо имеет 18 спиц. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.



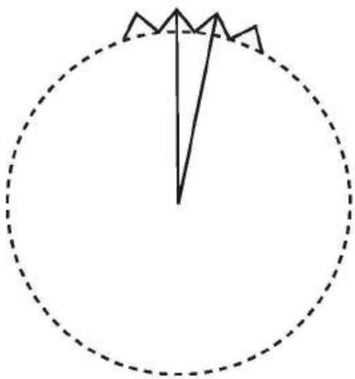
2. Сколько спиц в колесе, если углы между соседними спицами равны 18°?



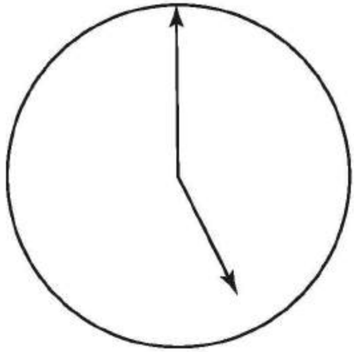
3. Колесо зубчатой передачи имеет 72 зубца. Сколько градусов содержится в дуге окружности, заключенной между серединами двух соседних зубцов?



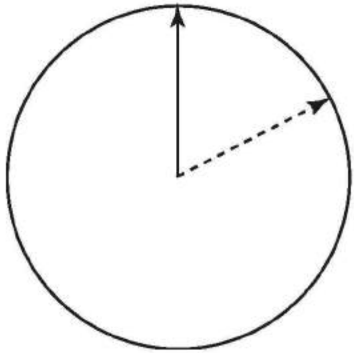
4. Сколько зубцов имеет колесо зубчатой передачи, если дуга окружности этого колеса, заключенная между двумя соседними зубцами, равна 12°?



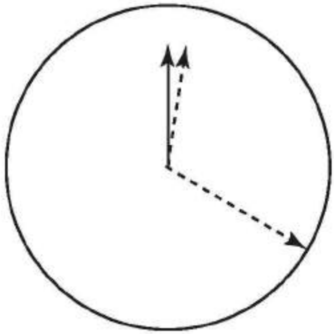
5. Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки часов в 5 ч?



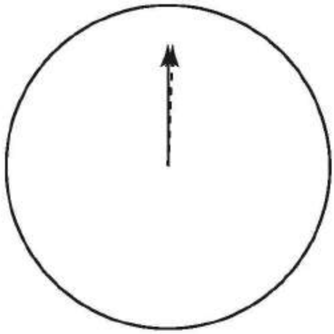
6. Какой угол описывает минутная стрелка за 10 мин?



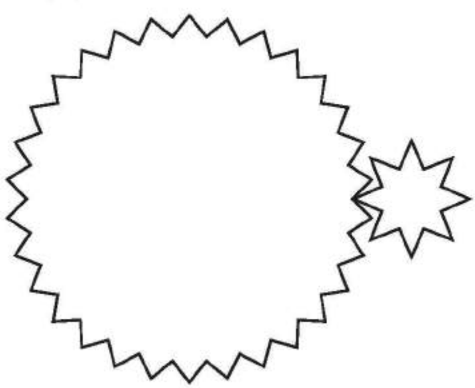
7. Какой угол описывает часовая стрелка за 20 мин?



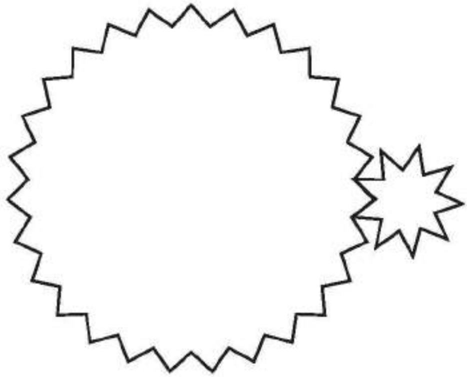
8. На какой угол поворачивается минутная стрелка пока часовая проходит $1^\circ 30'$?



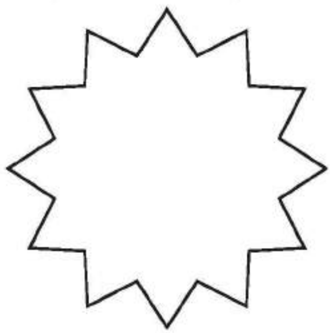
9. Сколько оборотов в минуту делает зубчатое колесо с 32 зубцами, если сцепленное с ним зубчатое колесо с 8 зубцами делает 12 оборотов в минуту?



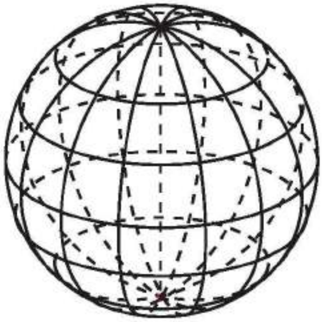
10. Диаметры двух зубчатых колес относятся как 3 : 8. На какой угол повернется большее колесо при одном обороте меньшего?



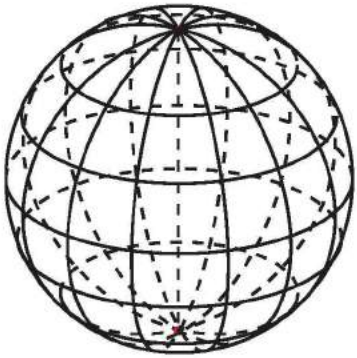
11. Зубчатое колесо имеет 12 зубцов. Сколько зубцов имеет сцепленное с ним второе зубчатое колесо, если при одном обороте первого колеса второе поворачивается на угол 120°?



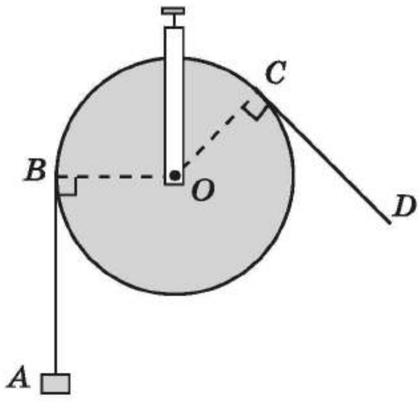
12. На сколько градусов повернется Земля вокруг своей оси за 8 часов?



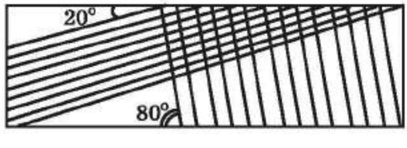
13. За сколько часов Земля повернется вокруг своей оси на 90°?



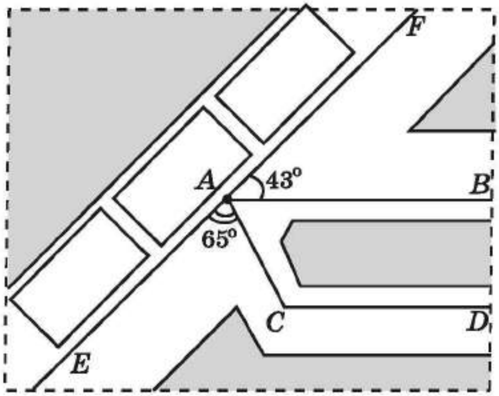
14. Груз *A* висит на шнуре, перекинутом через блок, изображенный на рисунке. Угол *BOC* равен 135°. Чему равен угол между прямыми *AB* и *CD*?



15. Найдите угол, образованный линиями насечек у напильника, изображенного на рисунке.



16. На плане города улицы, обозначенные как *AB* и *CD*, параллельны. Улица *EF* составляет с улицами *AB* и *AC* углы соответственно 43° и 65°. Найдите угол, который образуют между собой улицы *AC* и *CD*.

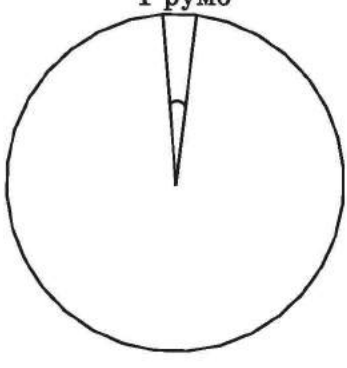


17. Для измерения углов артиллеристы употребляют особую единицу, которую называют тысячной. В трехстах шестидесяти градусах содержится 6000 тысячных. Сколько тысячных содержится в $1°30'$?

18. Для измерения углов артиллеристы употребляют особую единицу, которую называют тысячной. В трехстах шестидесяти градусах содержится 6000 тысячных. Сколько градусов составляют 100 тысячных?

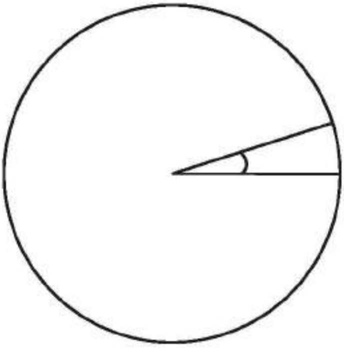
19. Угол в 1,5° рассматривают в лупу, увеличивающую в четыре раза. Какой величины кажется угол?

20. Окружность морских компасов делится на 32 равные части, называемые румбами. Сколько градусов составляют 4 румба?

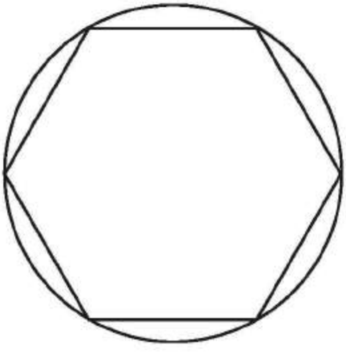


3. Окружность

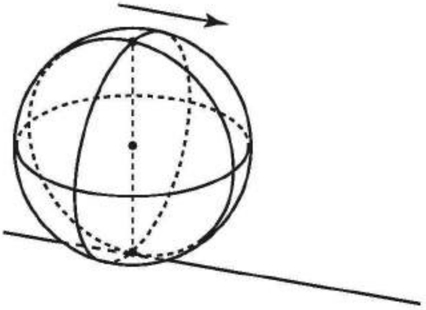
1. Длина окружности равна 60 см. Найдите длину дуги этой окружности, содержащую 18°.



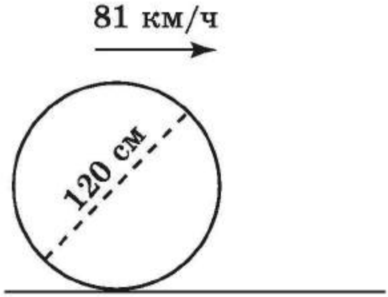
2. За длину окружности вавилоняне принимали периметр правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность. Найдите приближение для π, которым пользовались вавилоняне.



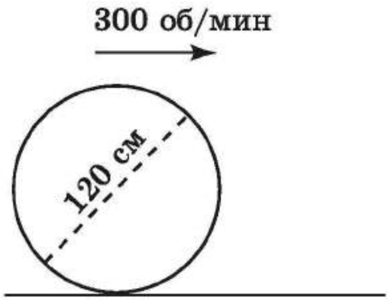
3. Шар диаметром 1 м откатился по прямой на 10 м. Сколько полных оборотов он сделал?



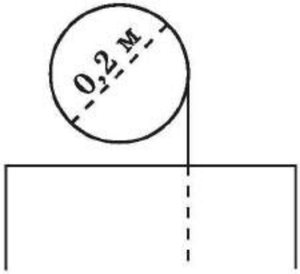
4. Поезд едет со скоростью 81 км/ч. Диаметр его колеса равен 120 см. Сколько оборотов в минуту делает колесо поезда? (Примите $\pi \approx 3$.)



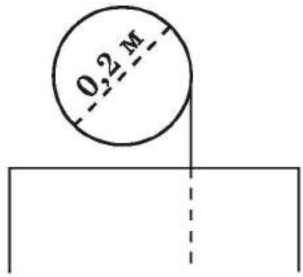
5. Какова скорость поезда (в км/ч), если диаметр его колеса равен 120 см и оно делает 300 оборотов в минуту? (Примите $\pi \approx 3$.)



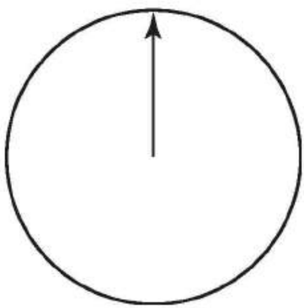
6. При поднятии воды из колодца вал делает 20 оборотов. Найдите глубину колодца (в метрах), если диаметр вала равен 0,2 м. (Примите $\pi \approx 3$.)



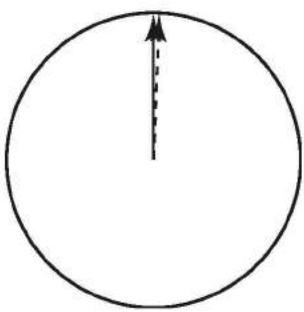
7. Сколько оборотов должен сделать вал, чтобы поднять воду из колодца глубиной 9 м, если диаметр вала равен 0,2 м? (Примите $\pi \approx 3$.)



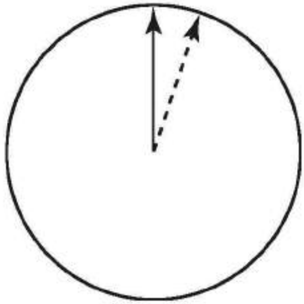
8. Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского кремля приблизительно равна 3,5 м. Найдите длину окружности (в метрах), которую описывает конец минутной стрелки в течение одного часа. (Примите $\pi \approx 3$.)



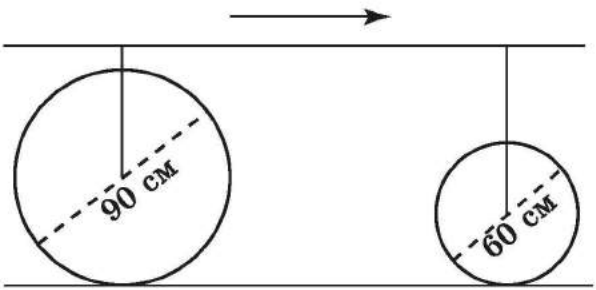
9. Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского кремля приблизительно равна 3,5 м. Какой путь (в сантиметрах) проходит ее конец за 1 мин? (Примите $\pi \approx 3$.)



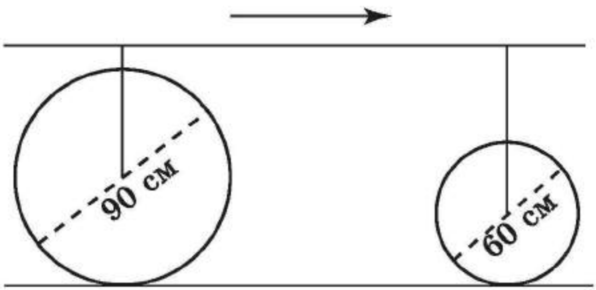
10. Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского кремля приблизительно равна 3,5 м. За сколько минут ее конец пройдет путь длиной 105 см? (Примите $\pi \approx 3$.)



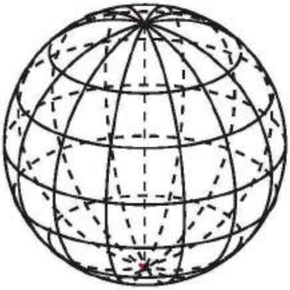
11. Телега проехала 5,4 км. Диаметры ее переднего и заднего колес равны соответственно 60 см и 90 см. На сколько больше оборотов сделает переднее колесо по сравнению с задним? (Примите $\pi \approx 3$.)



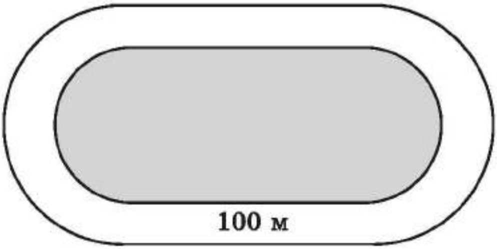
12. Диаметры переднего и заднего колес телеги равны соответственно 60 см и 90 см. Какое расстояние (в метрах) проехала телега, если ее переднее колесо сделало на 100 оборотов больше, чем заднее? (Примите $\pi \approx 3$.)



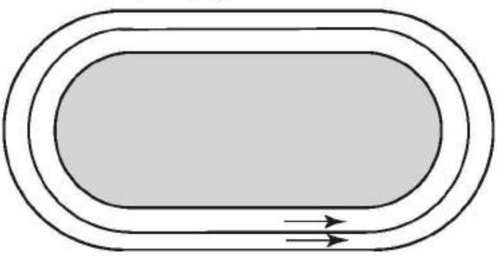
13. Длина экватора земного шара примерно равна 40 000 км. На сколько метров увеличился бы этот экватор, если бы радиус земного шара увеличился на 1 м? (Примите $\pi \approx 3$.)



14. Поле стадиона имеет форму прямоугольника с примыкающими к нему с двух сторон полукругами. Длина беговой дорожки вокруг поля равна 400 м. Длина каждого из двух прямолинейных участков дорожки равна 100 м. Найдите ширину l поля стадиона. В ответе укажите $l\pi$.



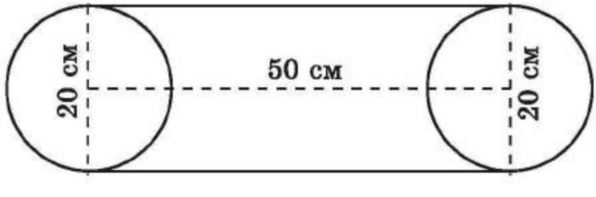
15. Два спортсмена должны пробежать один круг по дорожке стадиона, форма которого — прямоугольник с примыкающими к нему с двух сторон полукругами. Один бежит по дорожке, расположенной на 2 м дальше от края, чем другой. Какое расстояние должно быть между ними на старте, чтобы компенсировать разность длин дорожек, по которым они бегут? (Примите $\pi \approx 3$.)



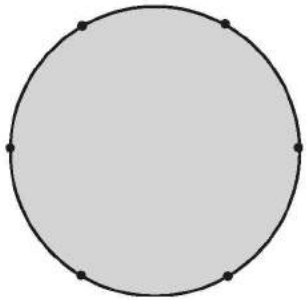
16. Москва и Новороссийск расположены примерно на одном меридиане под 56° и 44° северной широты соответственно. Найдите расстояние между ними по земной поверхности, считая длину большой окружности земного шара равной 40 000 км. В ответе укажите целое число километров.

17. Расстояние между Москвой и Вашингтоном, измеряемое по большой окружности поверхности Земли, примерно равно 7800 км. Найдите примерную величину соответствующей дуги большой окружности, считая длину всей окружности равной 40 000 км. В ответе укажите целое число градусов.

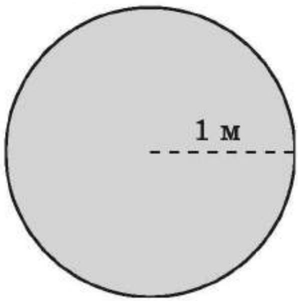
18. Какой длины должен быть приводной ремень, соединяющий два шкива с диаметрами 20 см, если расстояние между их центрами равно 50 см? (Примите $\pi \approx 3$.)



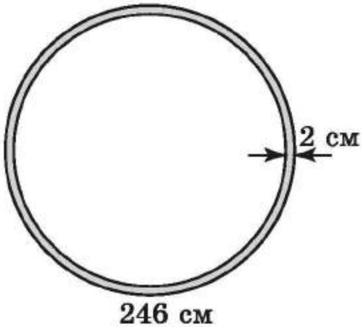
19. Столяру нужно сделать круглый стол на 6 человек. Каким должен быть диаметр стола (в сантиметрах), чтобы на каждого из сидящих за столом шести человек приходилось 80 см по окружности стола? (Примите $\pi \approx 3$.)



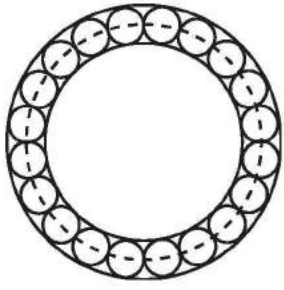
20. Какое наибольшее число людей можно рассадить за круглым столом радиуса 1 м так, чтобы на каждого человека приходилось не менее 60 см длины дуги окружности стола? (Примите $\pi \approx 3$.)



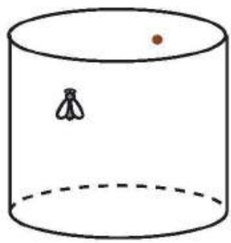
21. Водопроводная труба имеет в обхвате 246 см и толщину стенок 2 см. Найдите внутренний диаметр сечения трубы. (Примите $\pi \approx 3$.)



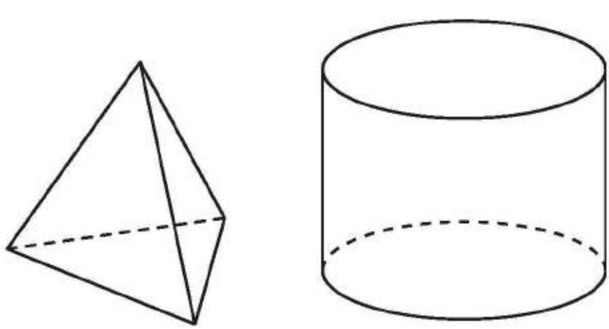
22. Двадцать стальных шариков диаметром по 16 мм каждый находятся в подшипнике. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите радиус внутреннего круга подшипника.



23. На внутренней стенке цилиндрической банки, радиус основания которой равен 4 см, в двух с половиной сантиметрах от верхнего края висит капля меда, а на наружной стенке, в диаметрально противоположной точке, сидит муха. Найдите длину кратчайшего пути, по которому муха может доползти до меда. (Примите $\pi \approx 3$.)



24. Какого наименьшего радиуса должна быть цилиндрическая банка, чтобы в нее можно было поместить тетраэдр, ребра которого равны 6 см?



25. Под каким углом человек видит ноготь своего указательного пальца вытянутой руки, если ширина ногтя примерно равна 1 см, а расстояние от него до глаза человека примерно равно 60 см? В ответе укажите целое число градусов. (Примите $\pi \approx 3$.)

26. Стрелок из лука видит мишень диаметра 120 см под углом 1°. Найдите расстояние до мишени. Укажите приближенное значение, выражаемое целым числом метров. (Примите $\pi \approx 3$.)

27. Человек среднего роста (1,7 м) виден издали под углом $12'$. Найдите расстояние до него. В ответе укажите целое число метров. (Примите $\pi \approx 3$.)

28. Телеграфный столб высотой 8 м виден под углом $30'$. Найдите расстояние до него. В ответе укажите целое число метров. (Примите $\pi \approx 3$.)

29. Луна видна с Земли под углом $30'$. Найдите приближенное расстояние до Луны, зная, что ее диаметр приближенно равен 3400 км. В ответе укажите целое число километров. (Примите $\pi \approx 3$.)

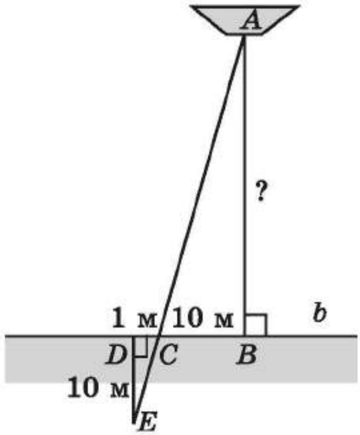
30. Солнце видно с Земли под углом $30'$. Найдите приближенное расстояние до Солнца, зная, что его диаметр приближенно равен 1 300 000 км. В ответе укажите целое число километров. (Примите $\pi \approx 3$.)

31. Расстояние от Земли до Луны приблизительно равно 408 000 км. Диаметр Земли приближенно равен 13 000 км. Найдите примерный угол, под которым Земля видна с поверхности Луны. В ответе укажите целое число градусов. (Примите $\pi \approx 3$.)

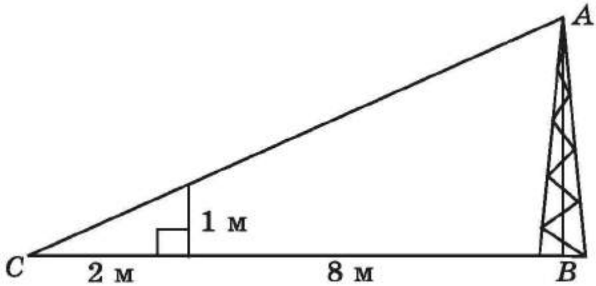
32. Под каким углом виден самолет, длина которого равна 30 м, пролетающий над наблюдателем на высоте 9000 м? В ответе укажите приближенное значение в минутах. (Примите $\pi \approx 3$.)

4. Подобие

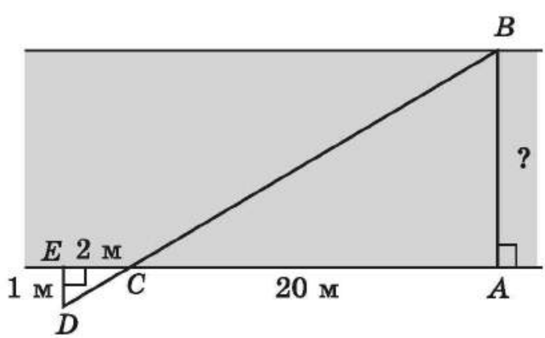
1. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите расстояние *AB* от лодки *A* до берега *b*.



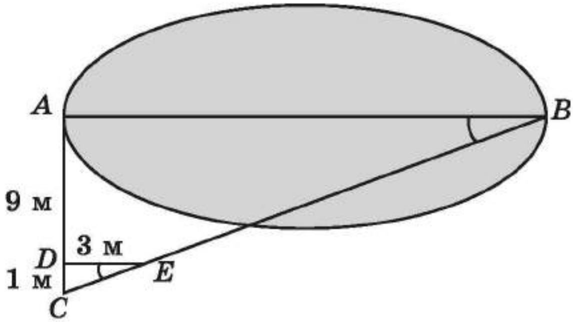
2. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите высоту мачты *AB*.



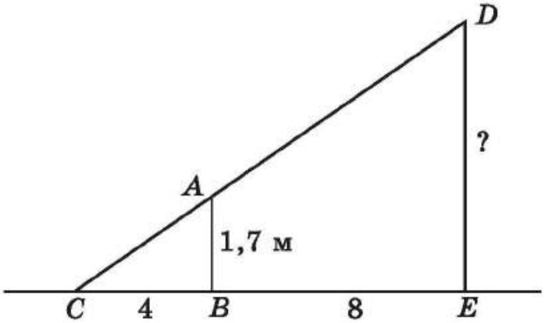
3. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите ширину *AB* реки.



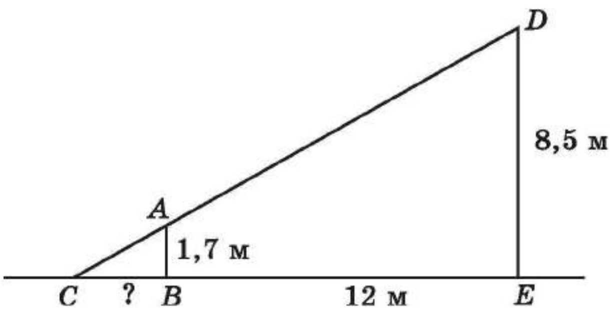
4. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите ширину *AB* озера.



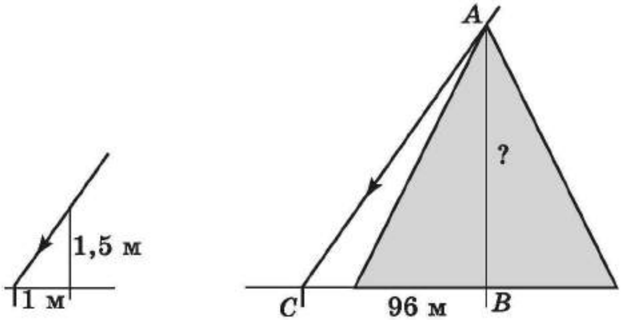
5. Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 шагов от столба, на котором висит фонарь. Тень человека равна четырем шагам. На какой высоте расположен фонарь?



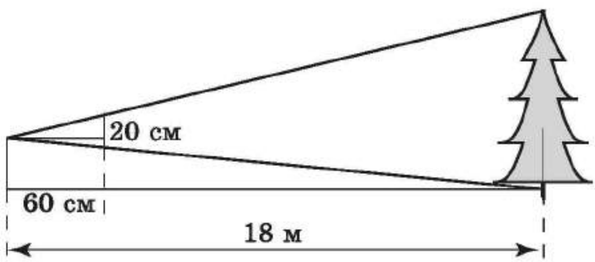
6. Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 12 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 5,4 м. Найдите длину тени человека в метрах.



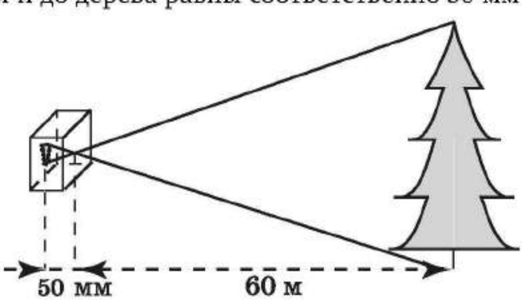
7. Для нахождения высоты египетской пирамиды недалеко от нее был установлен шест длиной 1,5 м. Его тень составила 1 м. В тот же момент тень пирамиды была равна 96 м. Чему равна высота пирамиды?



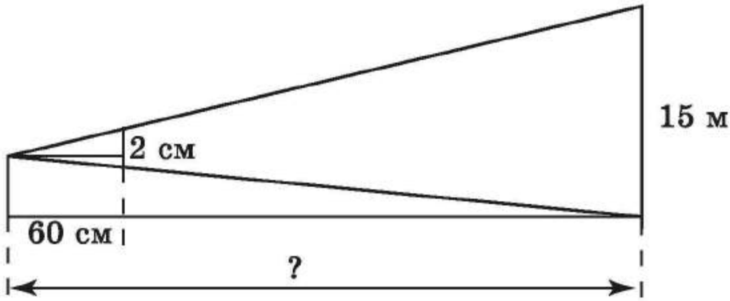
8. Чтобы измерить высоту дерева, ученик держит линейку в вертикальном положении на расстоянии вытянутой руки. Расстояние от глаза ученика до линейки равно 60 см. Часть линейки, закрывающая дерево, составляет 20 см. Расстояние от ученика до дерева равно 18 м. Чему равна высота дерева?



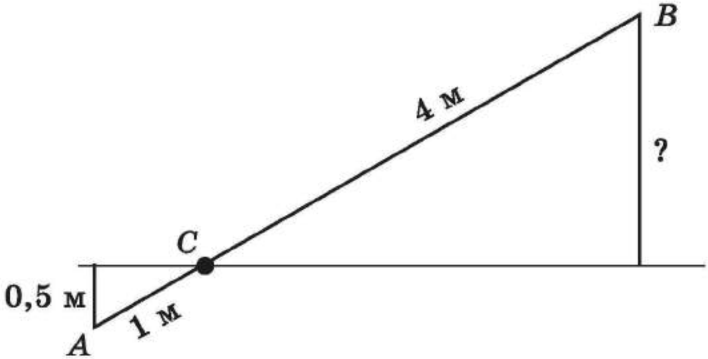
9. Изображение дерева на фотопленке имеет высоту 15 мм. Найдите высоту дерева, если расстояния от объектива фотоаппарата до изображения и до дерева равны соответственно 50 мм и 60 м.



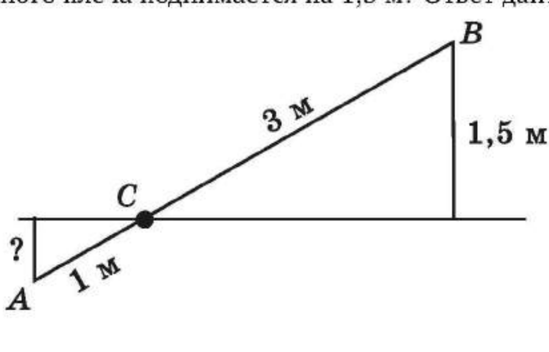
10. Столб высотой 15 м закрывается монетой диаметром 2 см, если ее держать на расстоянии 60 см от глаза. Найдите расстояние (в м) от наблюдателя до столба.



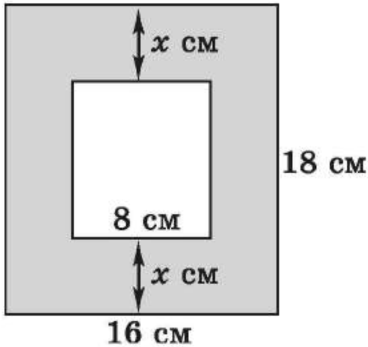
11. Короткое плечо шлагбаума имеет длину 1 м, а длинное плечо — 4 м. На какую высоту поднимается конец длинного плеча, когда конец короткого плеча опускается на 0,5 м?



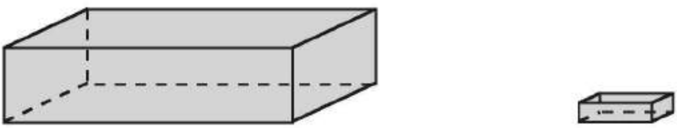
12. Короткое плечо шлагбаума имеет длину 1 м, а длинное плечо — 3 м. На какую высоту опускается конец короткого плеча, когда конец длинного плеча поднимается на 1,5 м? Ответ дайте в метрах.



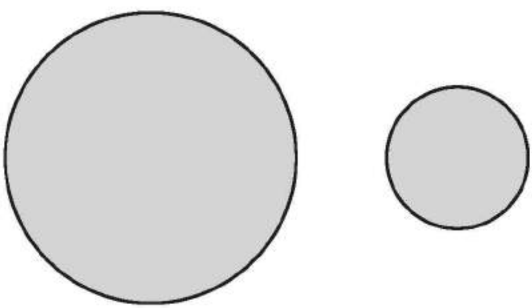
13. Какой должна быть ширина (x) прямоугольной рамки для фотографии, указанной на рисунке, чтобы прямоугольники рамки и фотографии были подобны?



14. Строительный кирпич весит 4 кг. Сколько граммов весит игрушечный кирпич из того же материала, все размеры которого в четыре раза меньше?



15. Апельсин в два раза больше мандарина. Мандарин весит 40 г. Считая их форму шарообразной и удельный вес одинаковым, найдите вес апельсина.



16. Эйфелева башня в Париже высотой 300 м весит 8 000 000 кг. Некто захотел изготовить точную копию этой башни весом один килограмм. Какова будет высота этой модели. Ответ дайте в сантиметрах.

17. Диаметр Луны приближенно равен 3400 км, и она находится на расстоянии 408 000 км от Земли. На какое расстояние (в сантиметрах) от наблюдателя нужно удалить монету диаметра 1 см, чтобы она казалась ему такой же величина, как Луна? В ответе укажите целое число сантиметров.

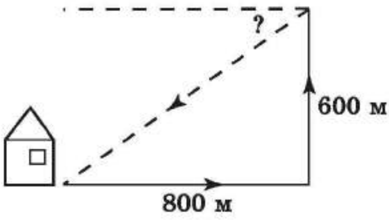
18. Диаметр Луны приближенно равен 3400 км, и она находится на расстоянии 408 000 км от Земли. На какое расстояние (в метрах) от наблюдателя нужно удалить тарелку диаметра 25 см, чтобы она казалась ему такой же величина, как Луна?

19. Диаметр Луны приближенно равен 3400 км. Диаметр Солнца приближенно равен 1 400 000 км, и оно кажется с Земли такой же величины, как Луна. Во сколько раз расстояние от Земли до Солнца больше чем расстояние от Земли до Луны? В ответе укажите целое число сотен раз.

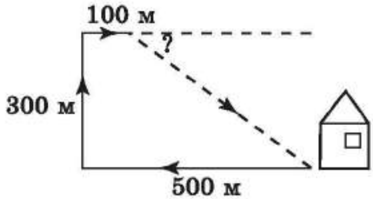
20. Диаметр Луны приближенно равен 3400 км, и она находится на расстоянии 408 000 км от Земли. Диаметр Солнца приближенно равен 1 400 000 км, и оно кажется с Земли такой же величины, как Луна. Найдите приближенное расстояние от Земли до Солнца (в км).

5. Тригонометрические функции

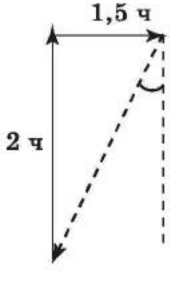
1. Мальчик прошел от дома по направлению на восток 800 м. Затем повернул на север и прошел 600 м. Под каким углом к направлению на запад он должен идти, чтобы вернуться домой? В ответе укажите целое число градусов. (Используйте таблицу тригонометрических функций.)



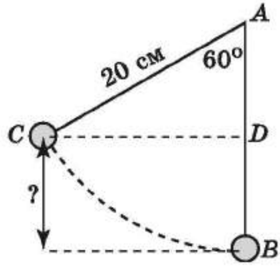
2. Девочка прошла от дома по направлению на запад 500 м. Затем повернула на север и прошла 300 м. После этого она повернула на восток и прошла еще 100 м. Под каким углом к направлению на восток она должна идти, чтобы вернуться домой? В ответе укажите целое число градусов. (Используйте таблицу тригонометрических функций.)



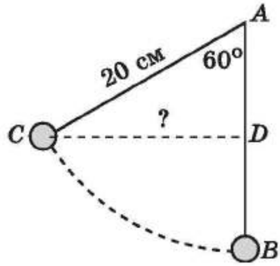
3. Грибник, войдя в лес, в течение двух часов шел в направлении на север, а затем с той же скоростью в течение полутора часов — на восток. Под каким углом к направлению на юг он должен идти, чтобы вернуться к месту, где он вошел в лес? В ответе укажите целое число градусов. (Используйте таблицу тригонометрических функций.)



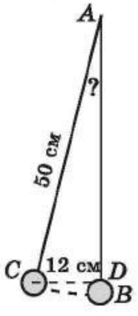
4. Маятник в виде груза, подвешенного на нитке, отклонили от положения равновесия на угол 60°. Длина *AC* маятника 20 см. На сколько изменилась высота груза по сравнению с положением равновесия?



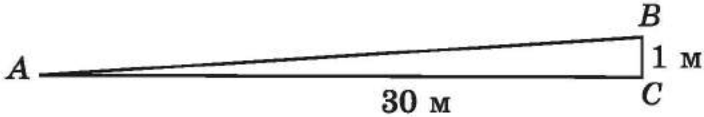
5. Маятник в виде груза, подвешенного на нитке, отклонили от положения равновесия на угол 60°. Длина *AB* маятника 20 см. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите расстояние *CD* от груза *C* до прямой *AB*, проходящей через начальное положение маятника.



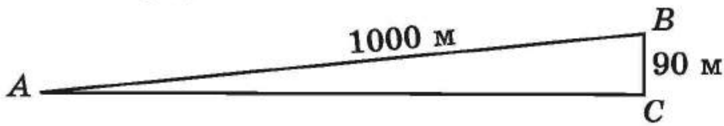
6. Маятник *AB* длиной 50 см отклонили от положения равновесия на расстояние *CD*, равное 12 см. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол, который образует новое положение *AC* маятника с положением равновесия *AB*.



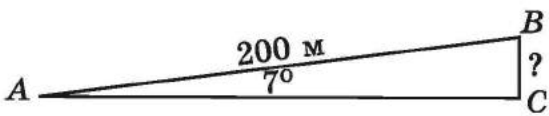
7. Горная железная дорога поднимается на 1 м на каждые 30 м пути. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол подъема в градусах. В ответе укажите приближенное значение, выражаемое целым числом градусов.



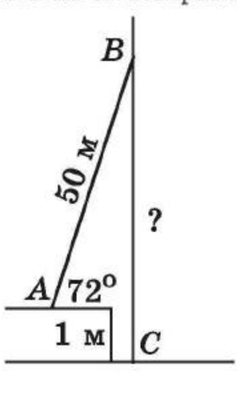
8. Человек, пройдя вверх по склону холма 1000 м, поднялся на 90 м над плоскостью основания холма. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите (в среднем) угол наклона холма в градусах. В ответе укажите приближенное значение, выражаемое целым числом градусов.



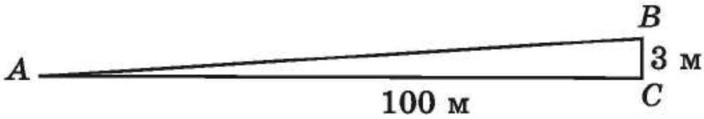
9. Угол подъема дороги равен 7°. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите высоту, на которую поднимется пешеход, пройдя 200 м.



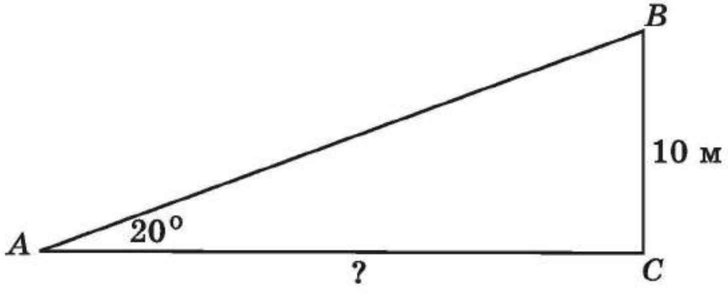
10. Пожарная лестница выдвинута на 50 м при предельном угле подъема 72°. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите высоту, которой достиг верхний конец лестницы, если ее нижний конец отстоит от поверхности земли на 1 м.



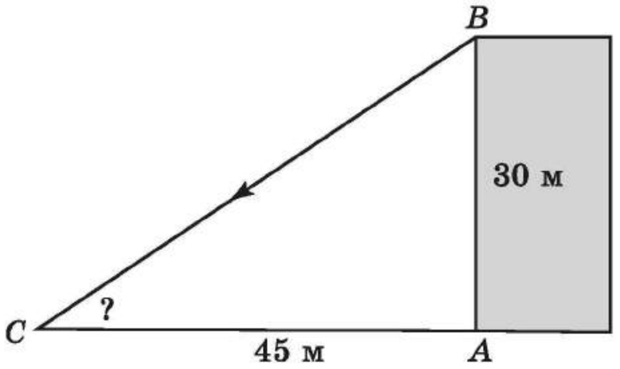
11. Использую таблицу тригонометрических функций, найдите приближенное значение угла, под которым виден столб высотой 3 м, находящийся от наблюдателя на расстоянии 100 м. В ответе укажите целое число градусов.



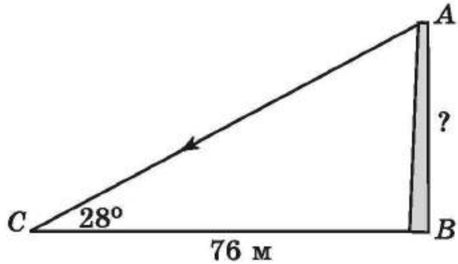
12. Телеграфный столб высотой 10 м находится на берегу реки. Верхний конец столба виден с другого берега под углом 20° к горизонту. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите ширину реки.



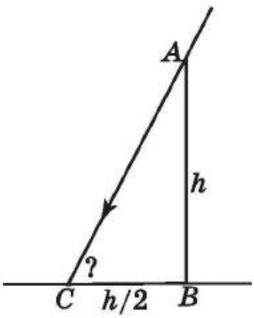
13. Строение высоты 30 м бросает тень длиной 45 м. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол наклона солнечных лучей. В ответе укажите приближенное значение, выражаемое целым числом градусов.



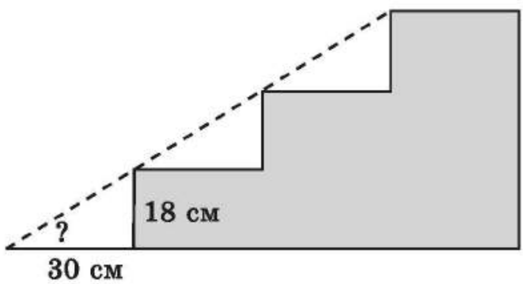
14. При высоте солнца в 28° заводская труба бросает тень длиной 76 м. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите высоту трубы. В ответе укажите приближенное значение, выражаемое целым числом метров.



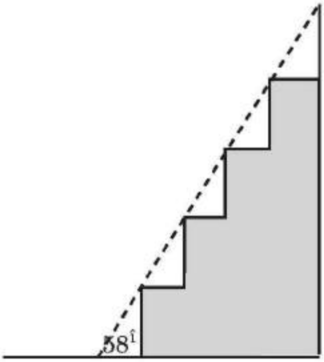
15. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол наклона солнечных лучей, если длина тени стоящего человека в два раза меньше его роста. В ответе укажите приближенное значение, выражаемое целым числом градусов.



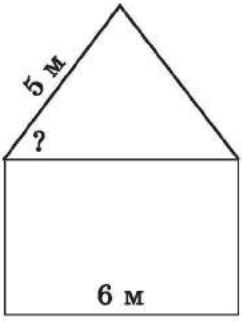
16. Лестница имеет ступеньки, ширина которых равна 30 см, а высота — 18 см. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол подъема лестницы. В ответе укажите приближенное значение, выражаемое целым числом градусов.



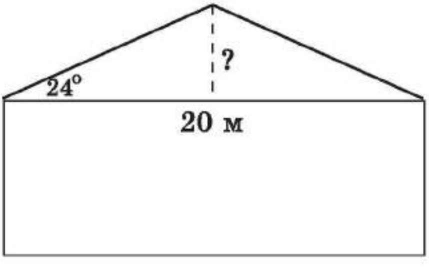
17. Угол подъема лестницы дачного домика равен 58°. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите высоту ступенек лестницы, если ширина ступенек равна 20 см.



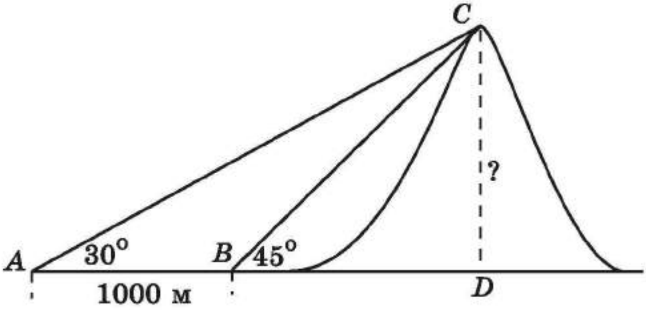
18. Ширина дачного домика равна 6 м, ширина одного ската его двускатной крыши равна 5 м. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол между стропилами крыши и потолком.



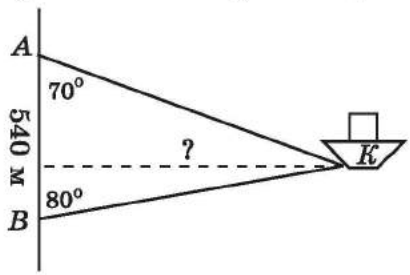
19. Длина балки, на которую опираются стропила крыши, равна 20 м. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите высоту крыши, зная, что стропила с этой балкой образуют угол 24°.



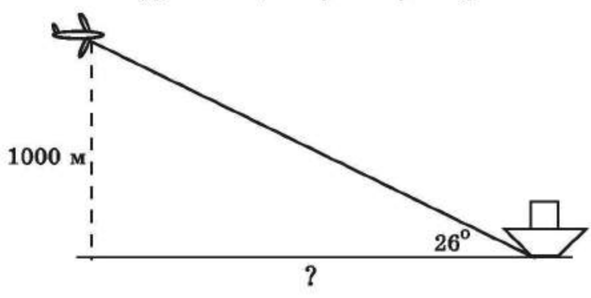
20. Из некоторой точки вершина горы видна под углом 30°. При приближении к горе на 1000 м вершина стала видна под углом 45°. Найдите приближенную высоту горы. В ответе укажите целое число метров.



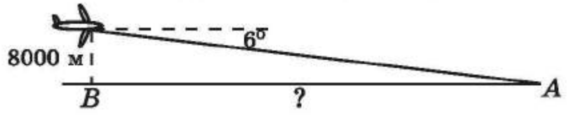
21. Используя данные, указанные на рисунке, найдите расстояние от корабля K до берега AB. В ответе укажите целое число метров.



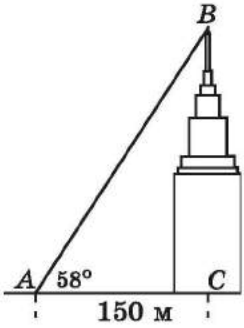
22. С самолета радируют капитану рыболовецкого судна, что самолет находится над косяком рыбы на высоте 1000 м. С судна определяют, что угол, под которым виден самолет над горизонтом, равен 26°. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите расстояние от судна до косяка рыбы. В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу метров.



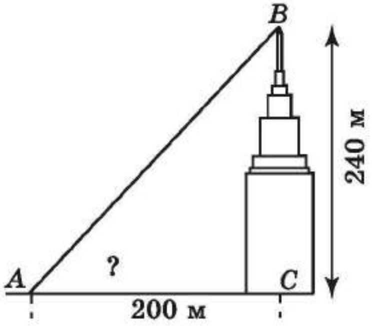
23. Самолет приближается к аэропорту A на высоте 8000 м. Пилот имеет предписание производить снижение для посадки под постоянным углом в 6°. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите расстояние AB от посадочной полосы до того места, над которым самолет должен начать снижение. В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу метров.



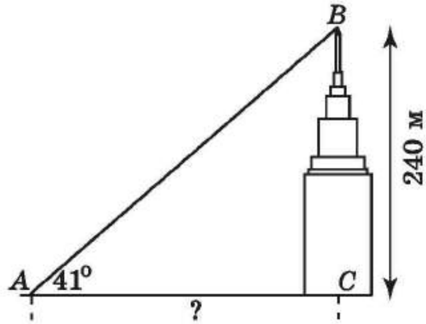
24. Расстояние от наблюдателя до башни главного здания МГУ имени М.В. Ломоносова равно 150 м, а угол, под которым видно здание, равен 58°. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите высоту башни. В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу метров.



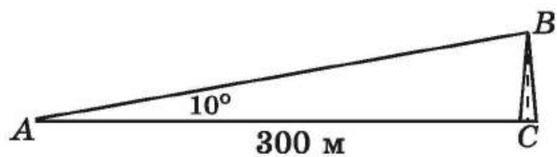
25. Высота башни главного здания МГУ имени М.В. Ломоносова равна 240 м. Под каким углом видна эта башня с расстояния 200 м? В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу градусов.



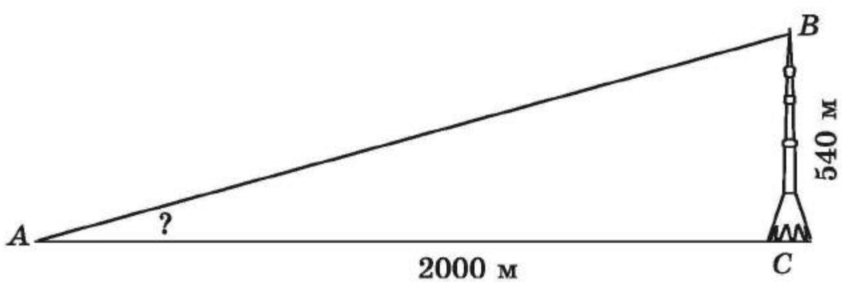
26. Башня главного здания МГУ имени М.В. Ломоносова, высота которой равна 240 м, видна под углом 41°. Найдите расстояние от наблюдателя до башни. В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу метров.



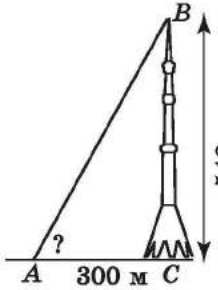
27. Вершина радиомачты видна с расстояния 300 м от ее основания под углом 10°. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите высоту радиомачты.



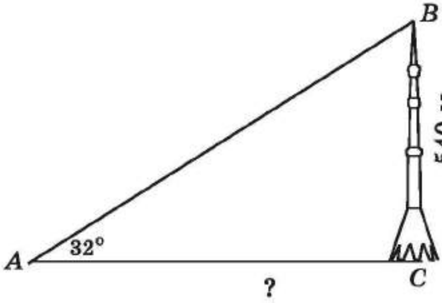
28. Высота Останкинской телевизионной башни — 540 м. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол в градусах, под которым видна башня с расстояния 2000 м.



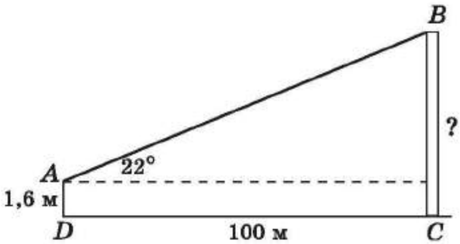
29. Высота Останкинской телевизионной башни равна 540 м. Под каким углом видна эта башня с расстояния 300 м? В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу градусов.



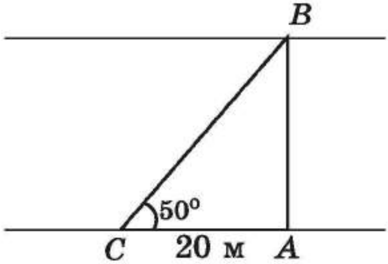
30. Высота Останкинской телевизионной башни — 540 м. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите расстояние от нее до человека, который видит башню под углом 32°. В ответе укажите целое число метров.



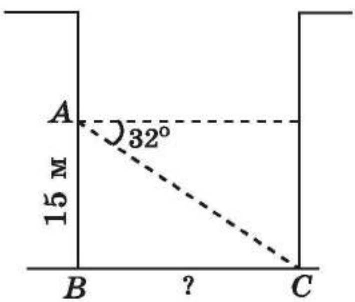
31. Для определения высоты колонны поступили следующим образом: отошли от ее основания на 100 м, поставили угломерный прибор высотой 1,6 м и установили, что вершина колонны видна под углом 22°. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите высоту колонны.



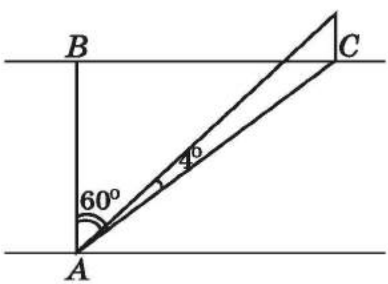
32. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите ширину AB реки.



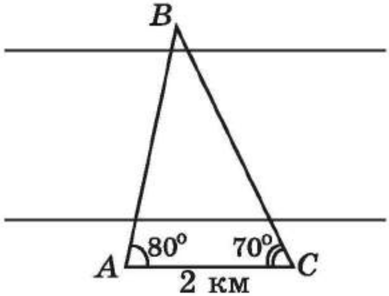
33. Из окна, расположенного на высоте 15 м над поверхностью земли, нижний край дома, стоящего прямо на другой стороне улицы, виден под углом понижения 32°. Найдите ширину улицы. В ответе укажите целое число метров.



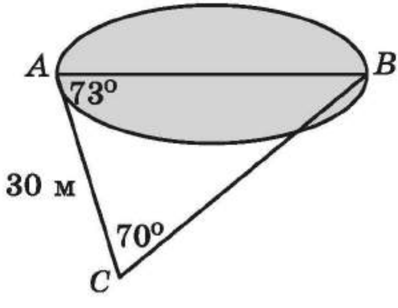
34. Наблюдатель A, стоящий на берегу реки, видит человека C на другом берегу под углом 4°. Направление на этого человека составляет угол в 60° с направлением AB, перпендикулярным берегам реки. Найдите ширину AB реки, считая рост человека, равным 1 м 70 см. В ответе укажите целое число метров.



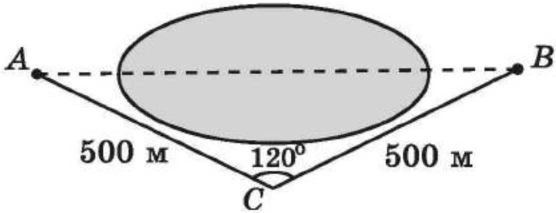
35. Найдите расстояние между населенными пунктами A и B, расположенными на разных берегах реки, если расстояние между пунктами A и C, расположенными на одном берегу этой реки, равно 2 км, угол CAB равен 80°, угол ACB равен 70°. В ответе укажите целое число метров.



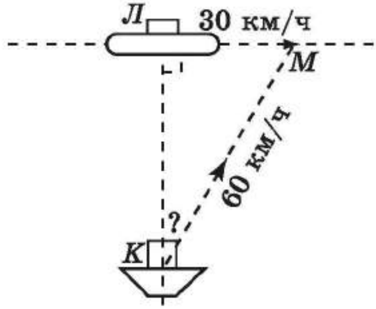
36. Используя данные, указанные на рисунке, найдите ширину AB озера. В ответе укажите целое число метров.



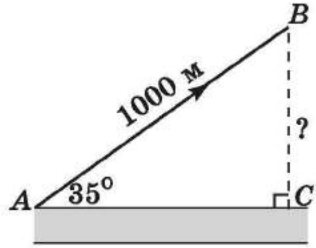
37. Используя данные, указанные на рисунке, найдите расстояние между населенными пунктами A и B, расположенными на разных берегах озера. В ответе укажите целое число метров.



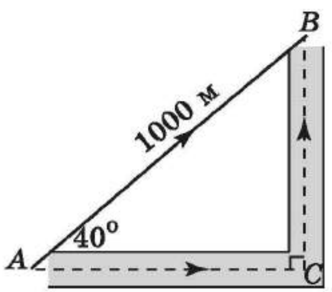
38. Подводная лодка, находясь впереди корабля, погрузилась в воду и пошла в направлении, перпендикулярном направлению на корабль со скоростью 30 км/ч. Под каким углом к направлению хода подводной лодки должен идти корабль со скоростью 60 км/ч, чтобы в некоторой точке пройти над подводной лодкой? Ответ укажите в градусах.



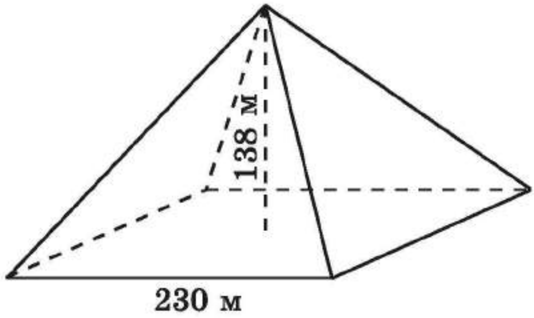
39. Пешеход пошел по направлению, составляющему угол 35° с направлением дороги. На сколько метров он удалится от дороги, пройдя 1000 м?



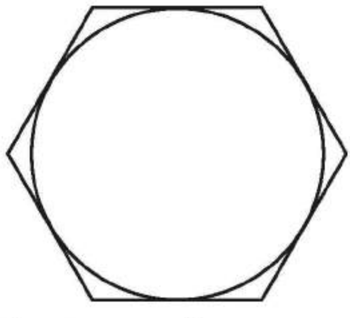
40. Используя данные, указанные на рисунке, выясните, на сколько метров путь из A в B по прямой короче пути из A в B по дороге. В ответе укажите целое число метров.



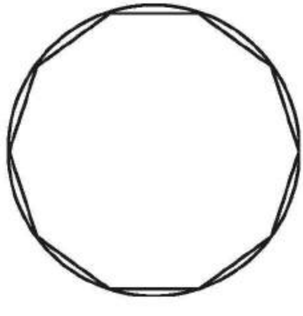
41. Пирамида Хеопса имеет форму правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 230 м, а высота около 138 м. Найдите угол наклона ее боковой грани к плоскости основания. В ответе укажите целое число градусов.



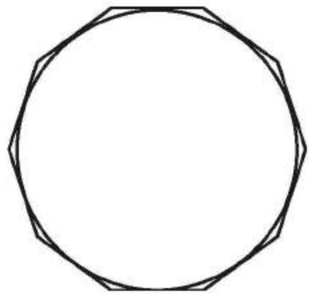
42. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите приближенное значение числа π, принимая за длину окружности периметр описанного около нее правильного шестиугольника.



43. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите приближенное значение числа π, принимая за длину окружности периметр вписанного в нее правильного десятиугольника.



44. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите приближенное значение числа π, принимая за длину окружности периметр описанного около нее правильного десятиугольника.

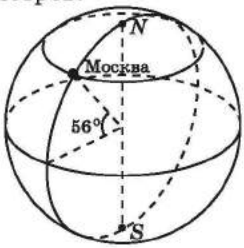


45. Ширина футбольных ворот равна 8 ярдам. Расстояние от 11-метровой отметки до линии ворот равно 12 ярдам. Найдите угол, под которым видны ворота с 11-метровой отметки. В ответе укажите целое число градусов.

46. Ширина футбольных ворот равна 8 ярдам. Для разметки вратарской площадки на расстоянии 6 ярдов от каждой стойки ворот под прямым углом к линии ворот вглубь поля проводятся два отрезка длиной 6 ярдов каждый. Концы этих отрезков соединяются отрезком, параллельным линии ворот. Найдите угол, под которым видны ворота с угла вратарской площадки. В ответе укажите целое число градусов.

47. Ширина футбольных ворот равна 8 ярдам. Для разметки штрафной площади на футбольном поле на расстоянии 18 ярдов от каждой стойки ворот под прямым углом к линии ворот вглубь поля проводятся два отрезка, длиной 18 ярдов каждый. Концы этих отрезков соединяются отрезком, параллельным линии ворот. Найдите угол, под которым видны ворота с угла штрафной площади. В ответе укажите целое число градусов.

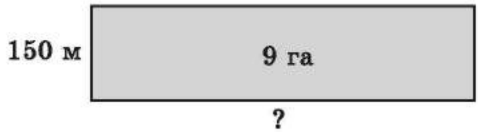
48. Поверхность Земли имеет форму сферы, длина большой окружности которой приближенно равна 40 000 км. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите длину окружности параллели, на которой находится г. Москва, считая широту Москвы, равной 56°. В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу километров.



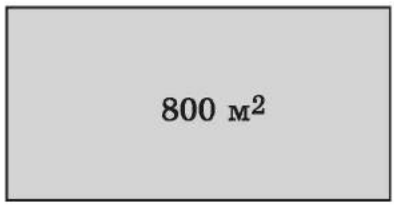
49. Поверхность Земли имеет форму сферы, длина большой окружности которой приближенно равна 40 000 км. Длина окружности параллели, на которой находится г. Санкт-Петербург, приближенно равна 20 000 км. Найдите широту Санкт-Петербурга в градусах.

6. Площадь

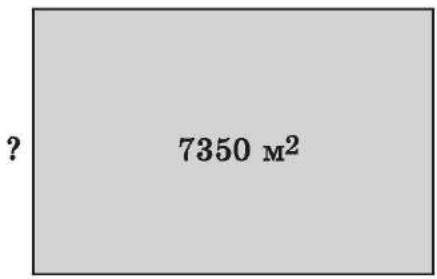
1. Площадь земельного участка, имеющего форму прямоугольника, равна 9 га, ширина участка равна 150 м. Найдите длину этого участка.



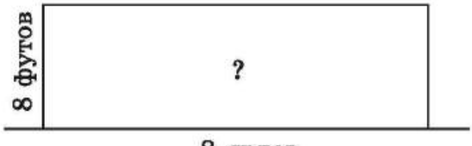
2. Найдите периметр прямоугольного участка земли, площадь которого равна 800 м^2 и одна сторона в 2 раза больше другой.



3. Футбольное поле имеет форму прямоугольника, длина которого в 1,5 раза больше ширины. Площадь футбольного поля равна 7350 м^2. Найдите его ширину.

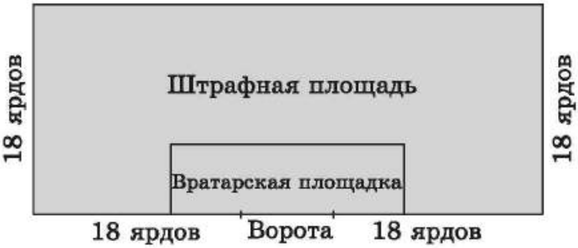


4. Ширина футбольных ворот равна 8 ярдам, высота — 8 футам. Найдите площадь футбольных ворот в квадратных футах (один ярд составляет три фута).



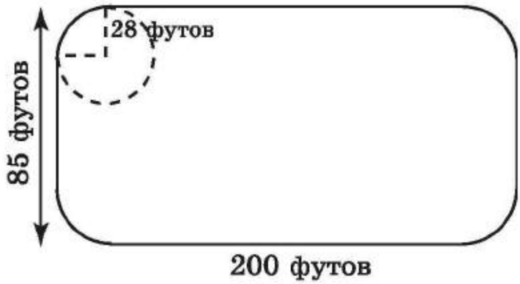
5. Для разметки вратарской площадки на футбольном поле на расстоянии 6 ярдов от каждой стойки ворот под прямым углом к линии ворот вглубь поля проводятся два отрезка длиной 6 ярдов. Концы этих отрезков соединяются отрезком, параллельным линии ворот. Найдите площадь вратарской площадки в квадратных футах, учитывая, что ширина ворот равна 8 ярдам (один ярд составляет три фута).

6. Для разметки штрафной площади на футбольном поле на расстоянии 18 ярдов от каждой стойки ворот под прямым углом к линии ворот вглубь поля проводятся два отрезка длиной 18 ярдов. Концы этих отрезков соединяются отрезком, параллельным линии ворот. Найдите приближенную площадь штрафной площади в квадратных метрах, учитывая, что ширина ворот равна 8 ярдам (один ярд приближенно равен 0,9 м). В ответе укажите целое число квадратных метров.

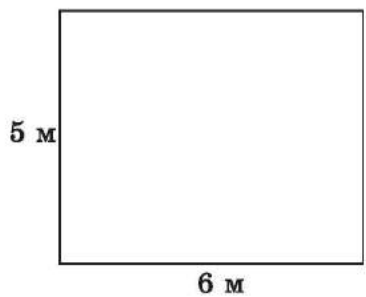


7. Ширина хоккейных ворот равна 6 футам, высота — 4 футам. Найдите приближенную площадь ворот в квадратных метрах с точностью до двух знаков после запятой. (Один фут равен 30,5 см.)

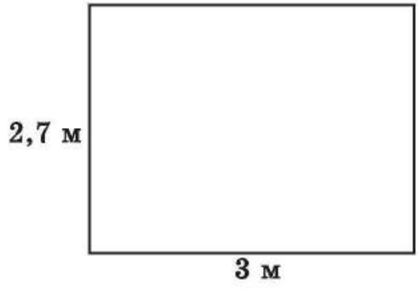
8. Хоккейная площадка имеет форму прямоугольника размером 200×85 (футов) с углами, закругленными по дугам окружностей радиуса 28 футов. Найдите примерную площадь хоккейной площадки в квадратных футах. (Примите $\pi \approx 3$.)



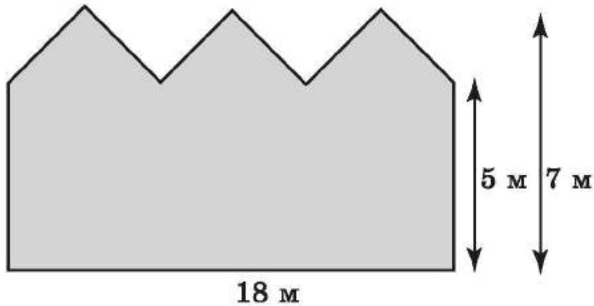
9. Пол комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 5 м и 6 м, требуется покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 5 см и 30 см. Сколько потребуется таких дощечек?



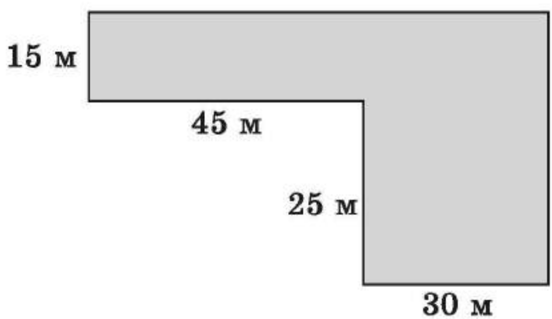
10. Сколько потребуется кафельных плиток квадратной формы со стороной 15 см, чтобы облицевать ими стену, имеющую форму прямоугольника со сторонами 3 м и 2,7 м?



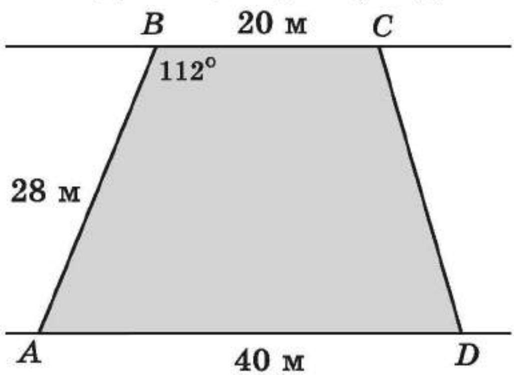
11. Найдите площадь стены заводского здания, изображенной на рисунке.



12. Найдите площадь земельного участка, изображенного на рисунке.



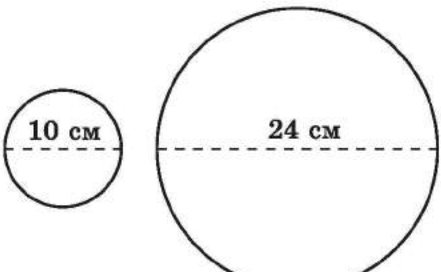
13. Участок между двумя параллельными улицами имеет вид четырехугольника $ABCD$ $(AD||BC)$ $AB = 28$ м, $BC = 20$ м, $AD = 40$ м, $\angle B = 112^\circ$. Найдите площадь этого участка. В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу квадратных метров.



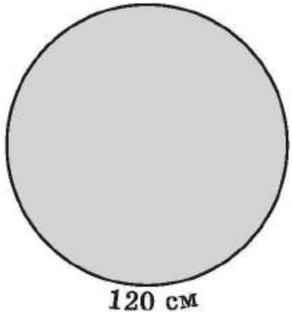
14. Площадь участка земли равна 1200 $м^2$. Чему равна его площадь (в $дм^2$) на плане, если масштаб равен $1:100$?

15. Площадь плана участка земли равна 3,75 $дм^2$, масштаб плана $1:200$. Чему равна площадь самого участка (в $м^2$)?

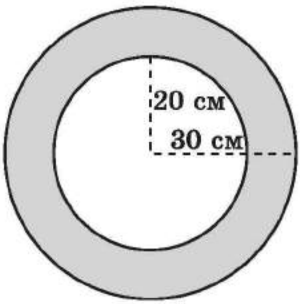
16. Две трубы, диаметры которых равны 10 см и 24 см, требуется заменить одной, не изменяя их пропускной способности. Каким должен быть диаметр новой трубы?



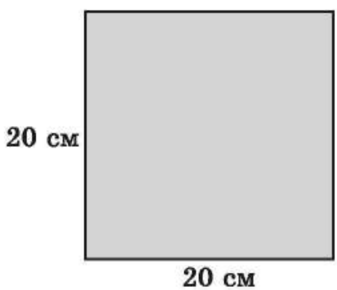
17. Дерево имеет в обхвате 120 см. Найдите примерную площадь поперечного сечения (в см^2), имеющего форму круга. (Примите $\pi \approx 3$.)



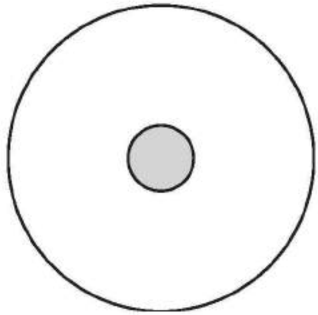
18. Бумажная лента плотно намотана на катушку, внутренний диаметр которой равен 20 см. Толщина бумаги равна 0,5 мм, а толщина намотанного рулона — 30 см. Найдите длину бумажной ленты. Ответ дайте в метрах. (Примите $\pi \approx 3$.)



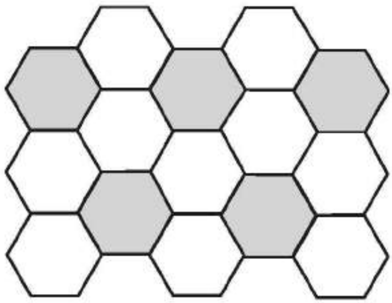
19. Из квадратного листа жести со стороной 20 см вырезали круг наибольшего диаметра. Какой примерный процент площади листа жести составляет площадь обрезков? (Примите $\pi \approx 3$.)



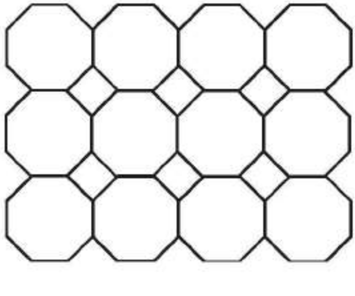
20. Зрачок человеческого глаза, имеющий форму круга, может изменять свой диаметр в зависимости от освещения от 1,5 мм до 7,5 мм. Во сколько раз при этом увеличивается площадь поверхности зрачка?



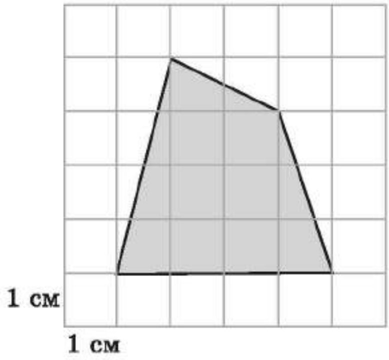
21. Пол требуется покрыть паркетом из белых и черных плиток, имеющих форму правильных шестиугольников. Фрагмент паркета показан на рисунке. Во сколько раз белых плиток паркета больше чем черных?



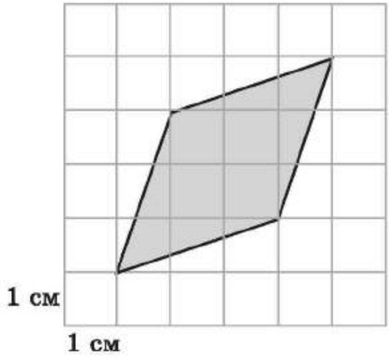
22. Пол требуется покрыть паркетом из восьмиугольных и квадратных плиток. Фрагмент паркета показан на рисунке. Найдите отношение числа квадратных плиток к числу восьмиугольных.



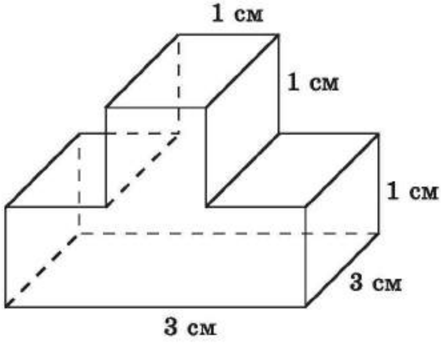
23. Найдите площадь лесного массива (в $м^2$), изображенного на плане с квадратной сеткой 1×1 (см) в масштабе 1 см — 200 м.



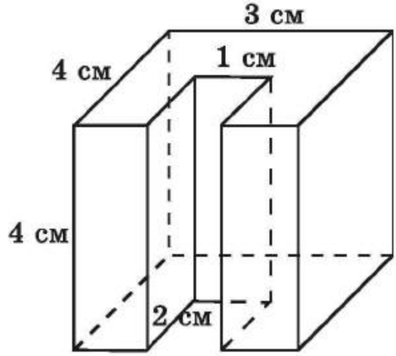
24. Найдите площадь поля (в $м^2$), изображенного на плане с квадратной сеткой 1×1 (см) в масштабе 1 см — 200 м.



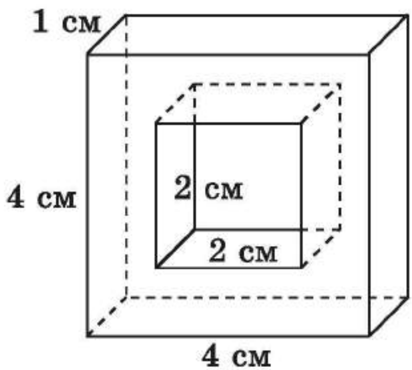
25. Найдите площадь поверхности детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы — прямые).



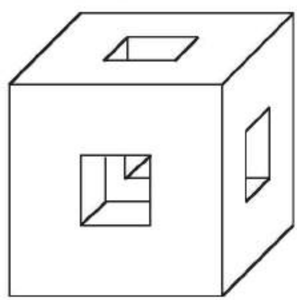
26. Найдите площадь поверхности детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы — прямые).



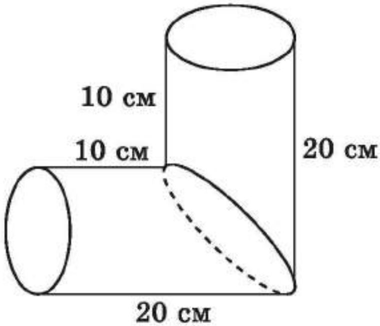
27. Найдите площадь поверхности детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы — прямые).



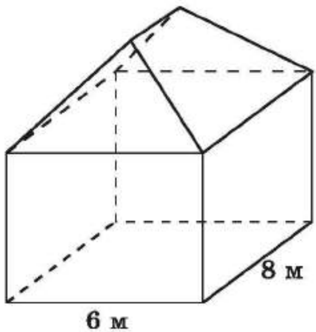
28. В каждой грани куба с ребром 3 см проделали сквозное квадратное отверстие со стороной квадрата 1 см. Найдите площадь полной поверхности оставшейся части.



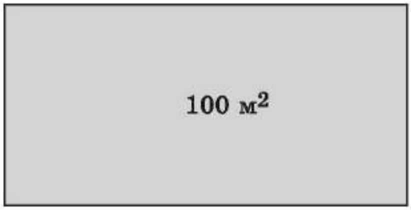
29. Найдите площадь поверхности детали, изображенной на рисунке, составленной из двух частей цилиндров. (Примите $\pi \approx 3$.)



30. Основание садового домика — прямоугольник 6×8 (м). Крыша наклонена под углом 45° к основанию. Найдите площадь крыши. В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу квадратных метров.



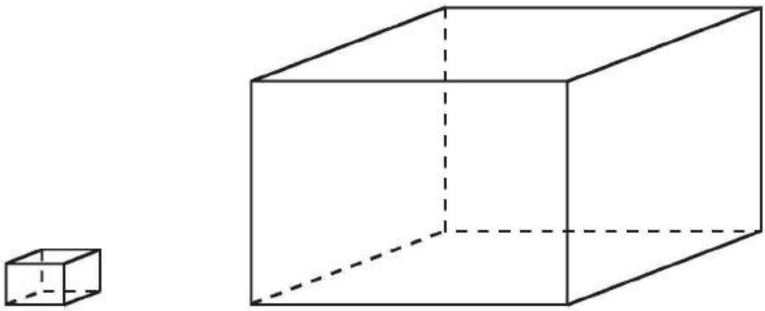
31. Какого наименьшего периметра может быть прямоугольная площадка площади 100 $м^2$?



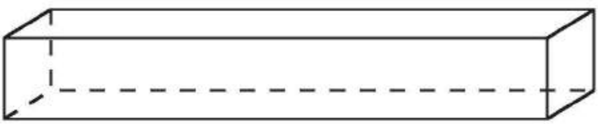
32. Диаметр Солнца в 400 раз больше диаметра Луны. Во сколько раз площадь поверхности Солнца больше площади поверхности Луны?

7. Объем

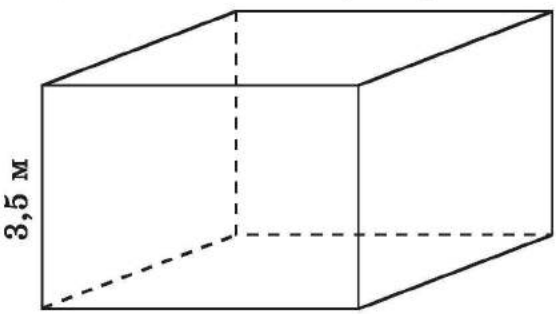
1. Сколько коробок в форме прямоугольного параллелепипеда размерами 30 × 40 × 50 (см) можно поместить в кузов машины размерами 2 × 3 × 1,5 (м)?



2. Сколько досок длиной 3,5 м, шириной 20 см и толщиной 20 мм выйдет из четырехугольной балки длиной 105 дм, имеющей в сечении прямоугольник размером 30 см × 40 см?

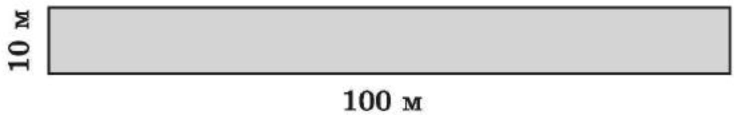


3. Размеры кирпича 25 × 12 × 6,5 (см). Найдите вес одного кирпича в граммах, если объемный вес кирпича равен 1700 кг/м^3.

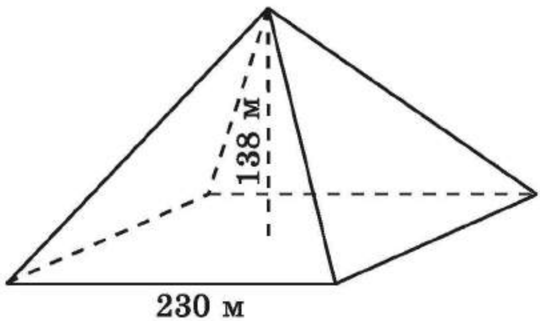


4. Какова должна быть площадь кабинета высотой 3,5 м для класса в 28 человек, если на каждого ученика нужно 7,5 м^3 воздуха?

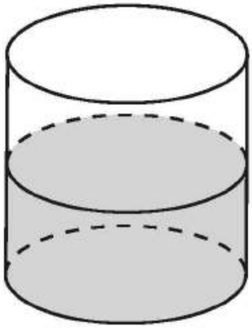
5. Прямолинейный участок дороги шириной 10 м и длиной 100 м требуется покрыть асфальтом толщиной 5 см. Сколько потребуется машин асфальта, если объемный вес асфальта равен 2,4 т/м^3, а грузоподъемность одной машины — 5 тонн?



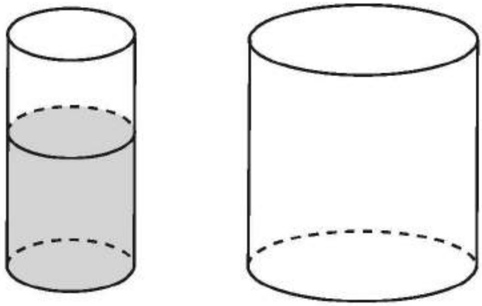
6. Пирамида Хеопса имеет форму правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 230 м, а высота около 138 м. Найдите ее объем в кубических метрах.



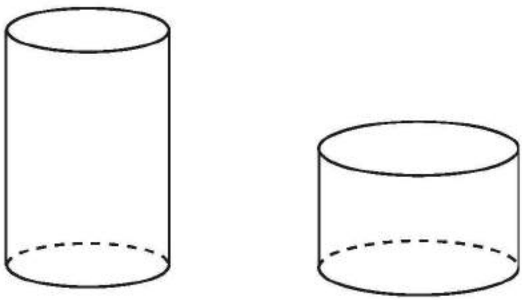
7. В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 дм^3 воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объем детали в кубических дециметрах?



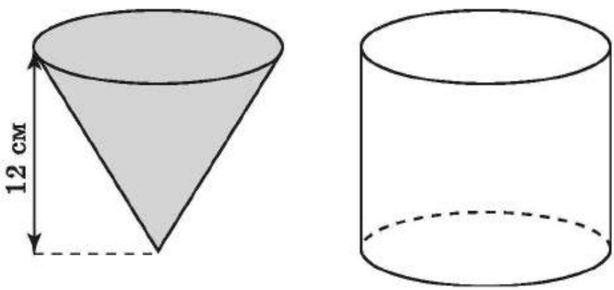
8. Воду, находящуюся в цилиндрическом сосуде на уровне 12 см, перелили в цилиндрический сосуд, в два раза большего диаметра. На какой высоте будет находиться уровень воды во втором сосуде?



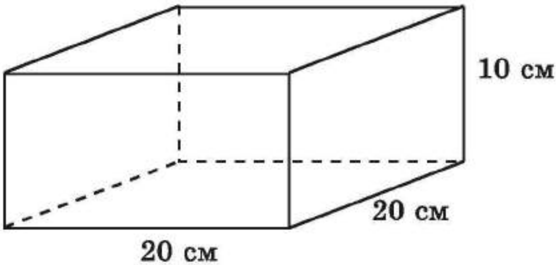
9. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.



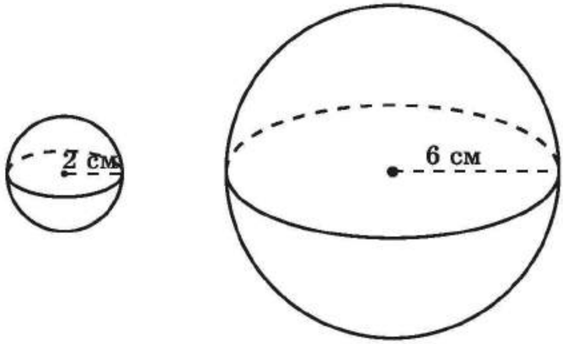
10. Воду, заполняющую всю коническую колбу высотой 12 см, перелили в цилиндрический сосуд, радиус основания которого равен радиусу окружности конической колбы. На какой высоте от основания цилиндрического сосуда будет находиться поверхность воды?



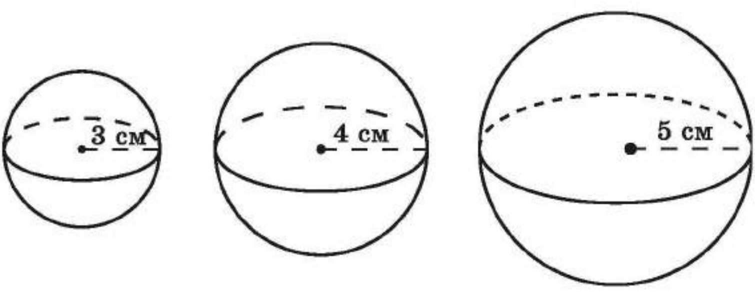
11. Медный прямоугольный параллелепипед, ребра которого равны 20 см, 20 см и 10 см, переплавлен в шар. Найдите радиус шара. (Примите $\pi \approx 3$.)



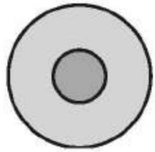
12. Сколько нужно взять медных шаров радиуса 2 см, чтобы из них можно было выплавить шар радиуса 6 см?



13. Найдите радиус шара, который можно выплавить из трех медных шаров радиусов 3 см, 4 см и 5 см.

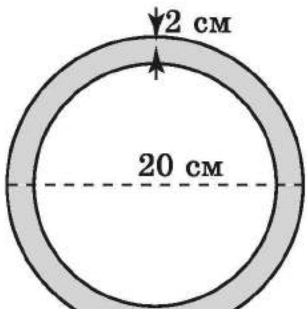


14. Мякоть вишни окружает косточку толщиной, равной диаметру косточки. Считая шарообразной форму вишни и косточки, найдите отношение объема мякоти к объему косточки.

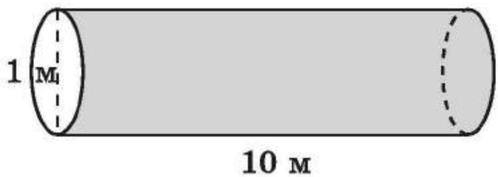


15. Профиль русла реки имеет форму равнобедренной трапеции, основания которой равны 10 м и 6 м, а высота — 2 м. Скорость течения равна 1 м/сек. Какой объем воды проходит через этот профиль за 1 мин? Ответ дайте в кубических метрах.

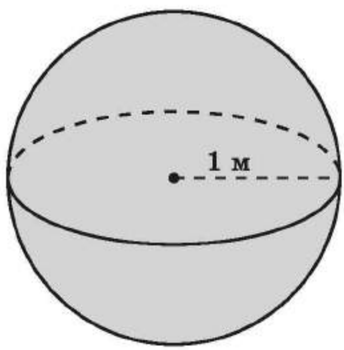
16. Чугунная труба имеет длину 2 м и внешний диаметр 20 см. Толщина стенок трубы равна 2 см. Найдите вес трубы, если удельный вес чугуна примерно равен 7,5 г/см^3. Ответ дайте в килограммах. (Примите $\pi \approx 3$.)



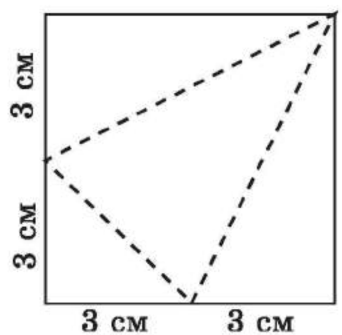
17. Какой объем краски потребуется, чтобы окрасить внешнюю поверхность цилиндрической трубы диаметра 1 м и длины 10 м слоем краски в 1 мм? Ответ дайте в кубических дециметрах. (Примите $\pi \approx 3$.)



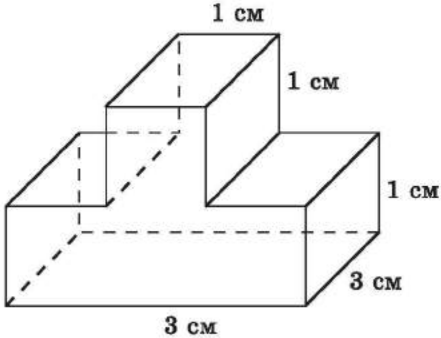
18. Какой объем краски потребуется, чтобы окрасить поверхность шара радиуса 1 м слоем краски в 0,5 мм? Ответ дайте в кубических дециметрах. (Примите $\pi \approx 3$.)



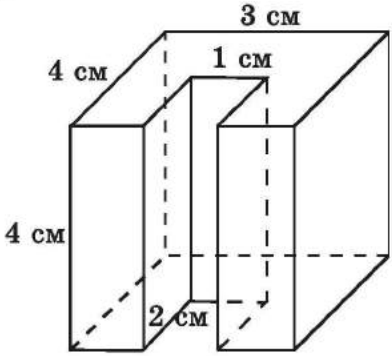
19. Квадратный лист бумаги со стороной 6 см перегнули по пунктирным линиям, показанным на рисунке, и сложили треугольную пирамиду. Найдите ее объем.



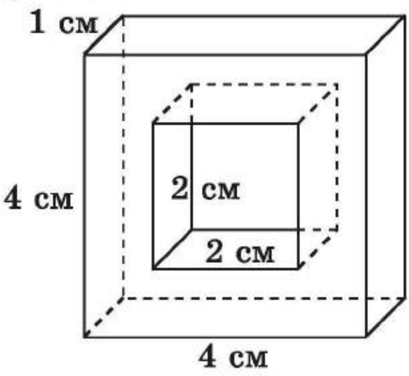
20. Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы — прямые).



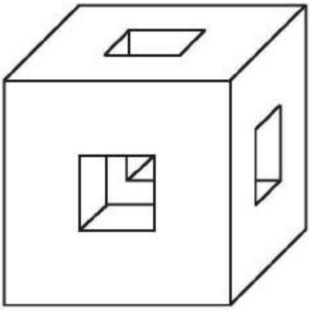
21. Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы — прямые).



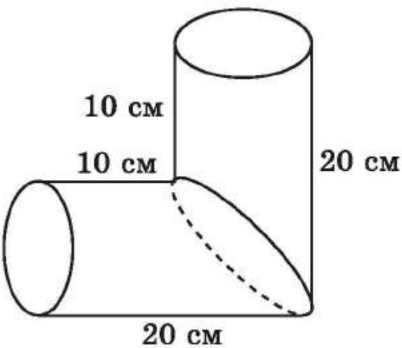
22. Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы — прямые).



23. В каждой грани медного куба с ребром 6 см проделали сквозное квадратное отверстие со стороной квадрата 2 см. Найдите вес оставшейся части, считая удельный вес меди приблизительно равным 0,9 г/см^3.



24. Найдите объем детали, изображенной на рисунке, составленной из двух частей цилиндров. (Примите $\pi \approx 3$).



25. Найдите объем детали, изображенной на рисунке, вырезанной из цилиндра. (Примите $\pi \approx 3$.)

26. Диаметр Солнца примерно в 400 раз больше диаметра Луны. Во сколько раз объем Солнца больше объема Луны?

8. Траектории

Одним из древнейших способов образования кривых является кинематический способ, при котором кривая получается как траектория движения точки.

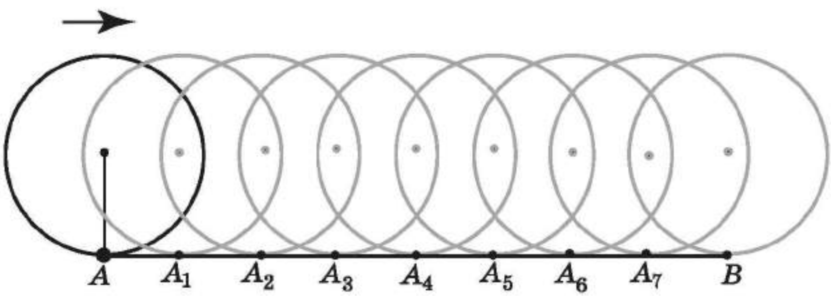
Например, кривая, которую описывает точка, закреплённая на ободе колеса велосипеда, катящегося по ровной дороге, называется циклоидой, что в переводе с греческого языка означает кругообразная.

Первым, кто стал изучать циклоиду, был Галилео Галилей. Он же придумал и её название.

1. Изобразите окружность радиуса 2 см и отрезок AB, равный длине окружности, как показано на рисунке. Разделите отрезок AB на 8 равных частей точками $A_1, \ldots, A_7$. Пусть точка, закреплена на окружности. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки:

а) B; б) A_4; в) A_2; г) A_6;
д) A_1; е) A_3; ж) A_5; з) A_7.

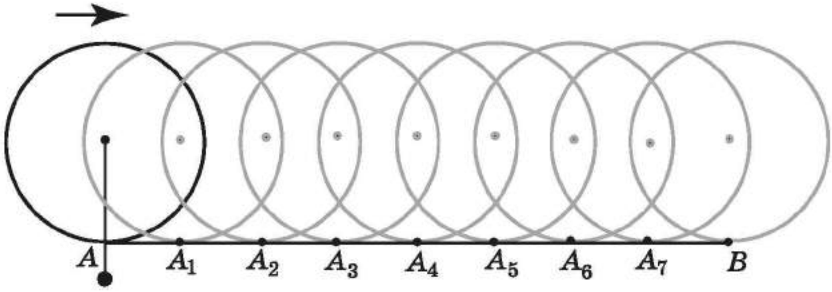
Соедините полученные точки плавной кривой. Получите циклоиду.



2. Изобразите окружность радиуса 2 см и отрезок AB, равный длине окружности, как показано на рисунке. Разделите отрезок AB на 8 равных частей точками $A_1, \ldots, A_7$. Пусть точка, закреплена на продолжении радиуса окружности. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки:

а) B; б) A_4; в) A_2; г) A_6;
д) A_1; е) A_3; ж) A_5; з) A_7.

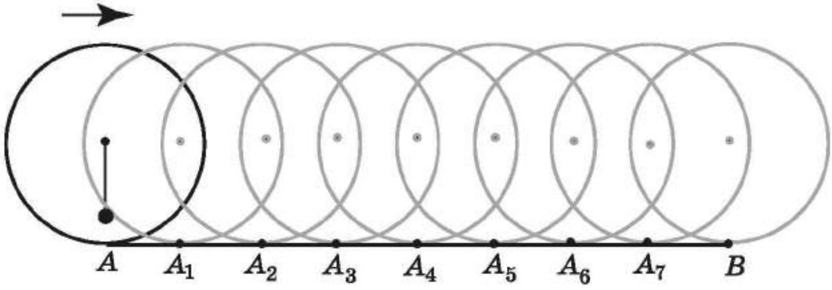
Соедините полученные точки плавной кривой. Получите удлинённую циклоиду.



3. Изобразите окружность радиуса 2 см и отрезок AB, равный длине окружности, как показано на рисунке. Разделите отрезок AB на 8 равных частей точками $A_1, \ldots, A_7$. Пусть точка, закреплена на окружности. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки:

а) B; б) A_4; в) A_2; г) A_6;
д) A_1; е) A_3; ж) A_5; з) A_7.

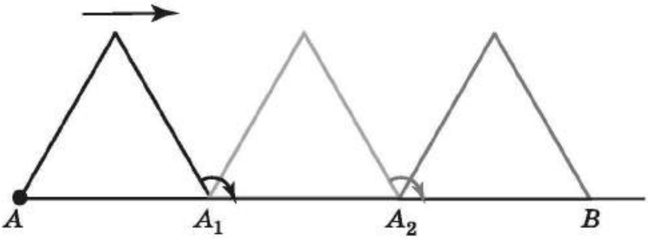
Соедините полученные точки плавной кривой. Получите укороченную циклоиду.



4. Правильный треугольник катится по прямой AB. Точка закреплена в вершине A. Изобразите треугольники, как показано на рисунке. Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона треугольника займёт положение:

а) A_1A_2; б) A_2B.

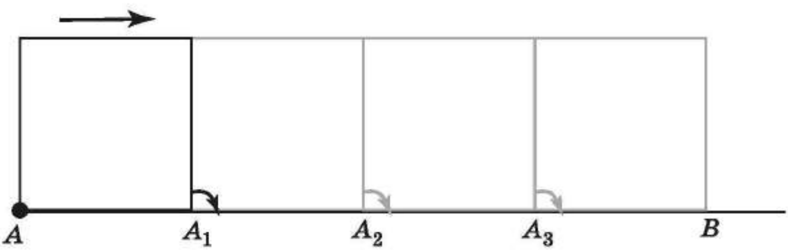
Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины правильного треугольника, катящегося по прямой.



5. Квадрат катится по прямой AB. Точка закреплена в вершине A. Изобразите квадраты, как показано на рисунке. Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона квадрата займёт положение:

а) A_1A_2; б) A_2A_3; в) A_3B.

Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины квадрата, катящегося по прямой.



6. Правильный шестиугольник катится по прямой AB. Точка закреплена в вершине A. Изобразите шестиугольники, как показано на рисунке. Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона шестиугольника займёт положение:

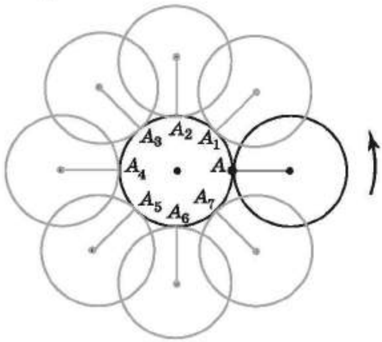
а) A_1A_2; б) A_2A_3; в) A_3A_4; г) A_4A_5; д) A_5B.

Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины шестиугольника, катящегося по прямой.

7. Окружность катится по другой окружности того же радиуса. Изобразите окружности, как показано на рисунке. Разделите окружность на 8 равных частей точками $A_1, \ldots, A_7$. Пусть точка, закреплённая на окружности, находится в положении A. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки:

а) A_4; б) A_2; в) A_6; г) A_1;
д) A_3; е) A_5; ж) A_7.

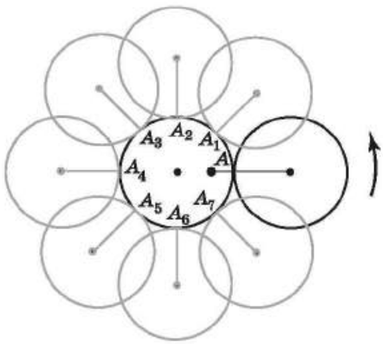
Соедините полученные точки плавной кривой. Получите кривую, называемую кардиоида.



8. Изобразите окружности, как показано на рисунке. Разделите окружность на 8 равных частей точками $A_1, \ldots, A_7$. Пусть точка, закреплённая на продолжении радиуса окружности, находится в положении A. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки:

а) A_4; б) A_2; в) A_6; г) A_1;
д) A_3; е) A_5; ж) A_7.

Соедините полученные точки плавной кривой. Получите удлинённую кардиоиду.

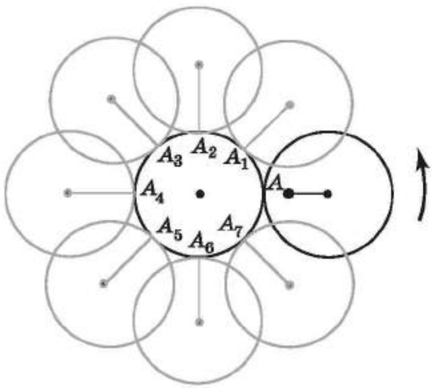


9. Изобразите окружности, как показано на рисунке. Разделите окружность на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплённая на радиусе окружности, находится в положении A. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки:

а) A_4; б) A_2; в) A_6; г) A_1;

д) A_3; е) A_5; ж) A_7.

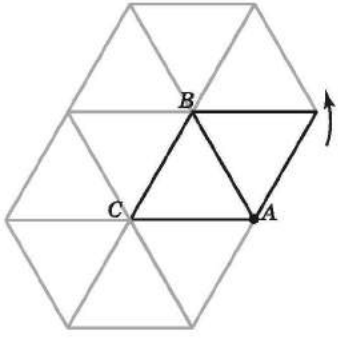
Соедините полученные точки плавной кривой. Получите укороченную кардиоиду.



10. Правильный треугольник катится по другому правильному треугольнику ABC. Точка закреплена в вершине A. Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона треугольника займёт положение:

а) BC; б) CA.

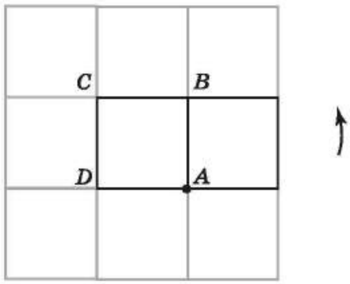
Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины правильного треугольника, катящегося по другому правильному треугольнику.



11. Квадрат катится по другому квадрату $ABCD$. Точка закреплена в вершине A. Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона квадрата займёт положение:

а) BC; б) CD; в) DA.

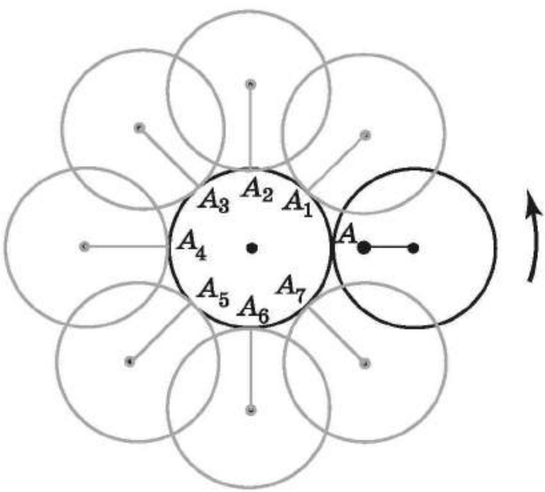
Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины квадрата, катящегося по другому квадрату.



12. Правильный шестиугольник катится по другому правильному шестиугольнику $ABCDEF$. Точка закреплена в вершине A. Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона квадрата займёт положение:

а) BC; б) CD; в) DE; г) EF; д) FA.

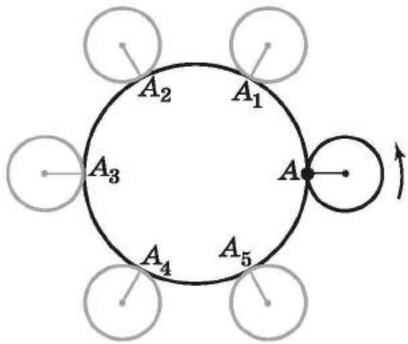
Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины квадрата, катящегося по другому квадрату.



13. Окружность катится по другой окружности в 3 раза большего радиуса. Изобразите окружности, как показано на рисунке. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Отметьте положения закреплённой точки, когда катящаяся окружность займёт положение:

а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4; д) A_5.

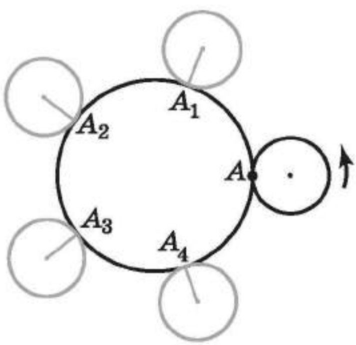
Соедините полученные точки плавной кривой.



14. Окружность катится по другой окружности в 2,5 раза большего радиуса. Изобразите окружности, как показано на рисунке. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Отметьте положения закреплённой точки, когда катящаяся окружность займёт положение:

а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4.

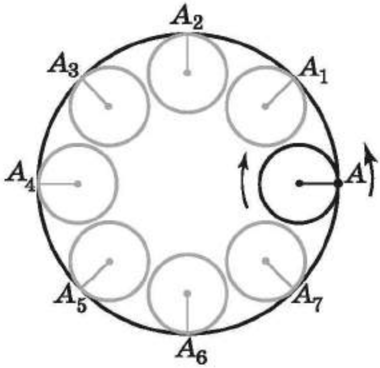
Соедините полученные точки плавной кривой.



15. Окружность катится внутри другой окружности в 4 раза большего радиуса. Изобразите окружности, как показано на рисунке. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Отметьте положения закреплённой точки, когда катящаяся окружность займёт положение:

а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4;
д) A_5; е) A_6; ж) A_7.

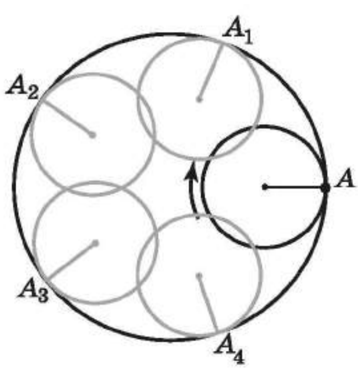
Соедините полученные точки плавной кривой. Полученная кривая называется астроидой.



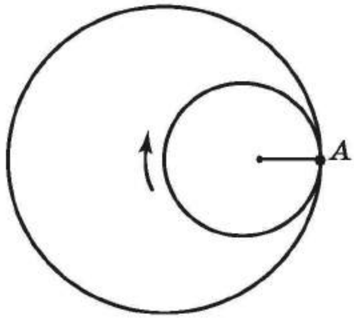
16. Окружность катится внутри другой окружности в 2,5 раза большего радиуса. Изобразите окружности, как показано на рисунке. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Отметьте положения закреплённой точки, когда катящаяся окружность займёт положение:

а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4;
д) A_5; е) A_6; ж) A_7.

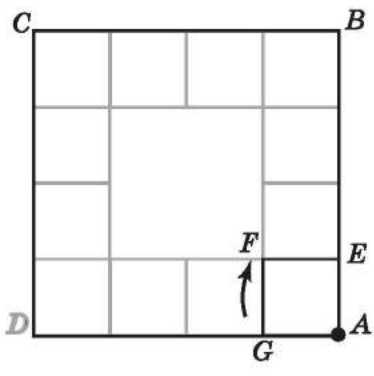
Соедините полученные точки плавной кривой.



17. Окружность катится внутри другой окружности в 2 раза большего радиуса. Изобразите окружности, как показано на рисунке. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Нарисуйте траекторию движения этой точки.



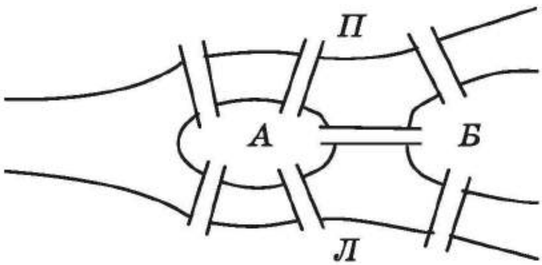
18. Квадрат $AEFG$ катится внутри другого квадрата $ABCD$. Точка закреплена в вершине A. Изобразите квадраты и траекторию движения точки, закреплённой в вершине квадрата.



9. Графы

Теория графов зародилась в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад. Одной из таких задач-головоломок была задача о кёнигсбергских мостах, которая привлекла к себе внимание Леонарда Эйлера (1707—1783), долгое время жившего и работавшего в России (с 1727 по 1741 год и с 1766 до конца жизни).

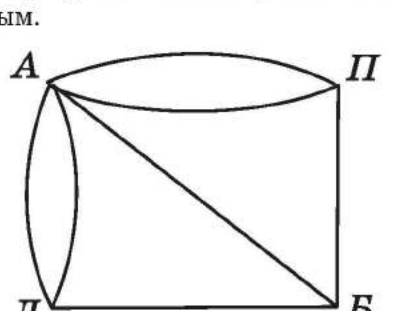
Задача Эйлера о кёнигсбергских мостах. В г. Кёнигсберге (ныне Калининград) было семь мостов через реку Прегель (Л — левый берег, П — правый берег, А и Б — острова). Можно ли, прогуливаясь вдоль реки, пройти по каждому мосту ровно один раз?



Эта задача связана с другими головоломками, суть которых заключалась в том, чтобы обвести контур некоторой фигуры, не отрывая карандаша от бумаги и не обводя ни одной линии контура дважды, т. е. «нарисовать одним росчерком». Такие контуры образуют, так называемые, уникурсальные графы.

Задаче о кёнигсбергских мостах Л. Эйлер посвятил целое исследование, которое в 1736 году было представлено в Петербургскую Академию наук.

На рисунке изображён граф, соответствующий задаче о кёнигсбергских мостах. Требуется выяснить, является ли этот граф является уникурсальным.



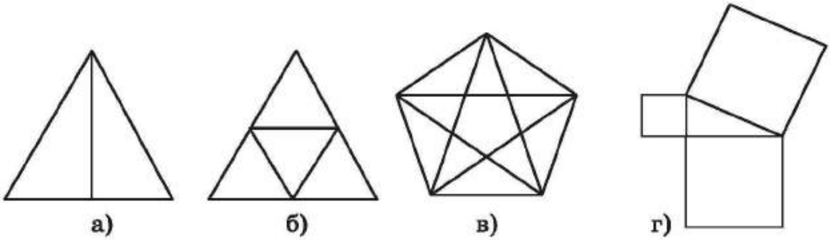
Для этого Л. Эйлер определил понятие индекса вершины — числа рёбер графа, сходящихся в данной вершине, и показал, что для уникурсального графа число вершин нечётного индекса равно нулю или двум.

Действительно, если граф уникурсален, то у него есть начало и конец обхода. Остальные вершины имеют чётный индекс, так как с каждым входом в такую вершину есть и выход. Если начало и конец не совпадают, то они являются единственными вершинами нечётного индекса. У начала выходов на один больше, чем входов, а у конца входов на один больше, чем выходов. Если начало совпадает с концом, то вершин с нечётным индексом нет.

Верно и обратное. Если у связного графа число вершин нечётного индекса равно нулю или двум, то он является уникурсальным.

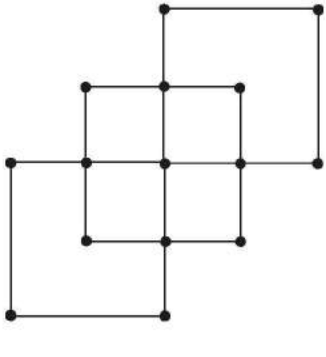
1. Решите задачу Эйлера. Выясните, можно ли, прогуливаясь вдоль реки Прегель, пройти по каждому мосту ровно один раз?

2. Нарисуйте одним росчерком графы, изображённые на рисунке.

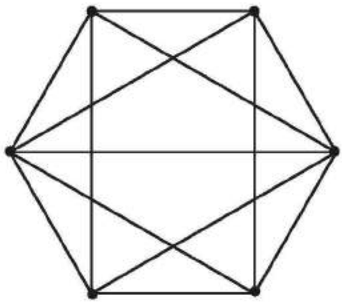


а) б) в) г)

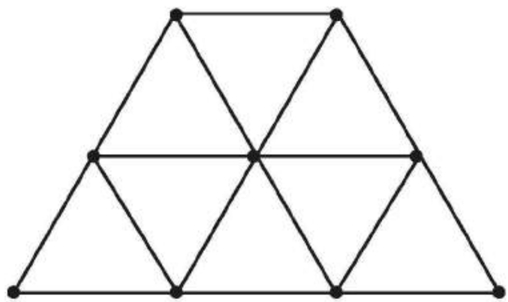
3. Укажите путь, проходящий по каждому ребру графа, изображённого на рисунке, ровно один раз.



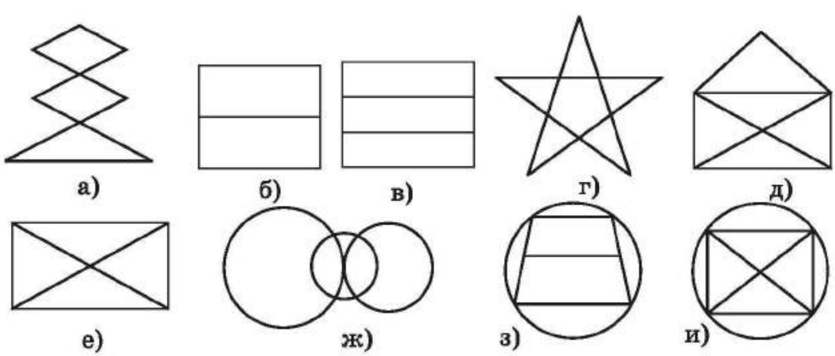
4. Укажите путь, проходящий по каждому ребру графа, изображённого на рисунке, ровно один раз.



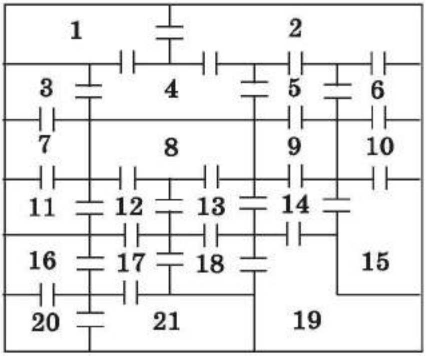
5. Укажите путь, проходящий по каждому ребру графа, изображённого на рисунке, ровно один раз.



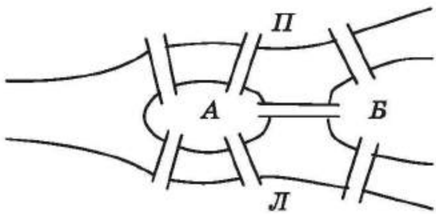
6. Какие графы, изображённые на рисунке, являются уникурсальными?



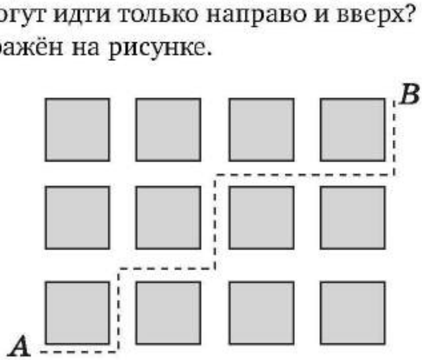
7. На рисунке изображён план подземелья, в одной из комнат которого находится клад. Для его отыскания нужно войти в одну из крайних комнат, пройти через все двери ровно по одному разу через каждую. Клад будет в комнате за последней дверью. В какой комнате находится клад?



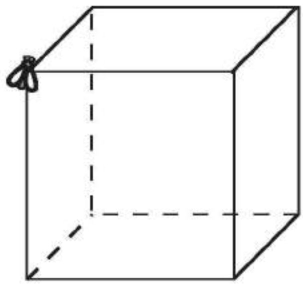
8. Какое наименьшее число мостов в задаче о кёнигсбергских мостах придётся пройти дважды, чтобы пройти по каждому мосту?



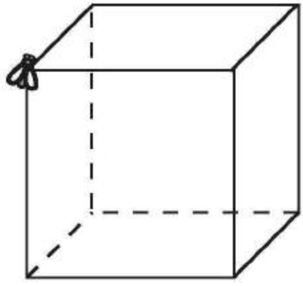
9. На рисунке изображен план кварталов города. Сколько различных путей по улицам города ведёт из пункта A в пункт B, если пути на плане могут идти только направо и вверх? Один из возможных путей изображён на рисунке.



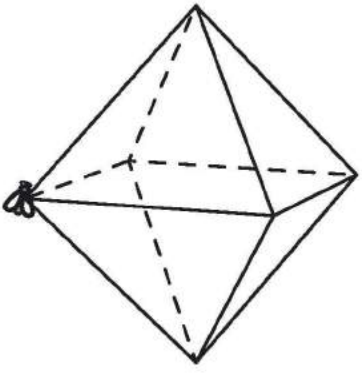
10. В вершине куба сидит муха. Может ли она проползти по каждому его ребру ровно один раз? Какое наименьшее число рёбер ей придётся проползти дважды?



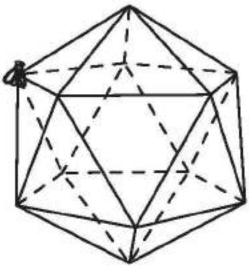
11. В вершине куба сидит муха. Она хочет проползти по каждому ребру куба и вернуться в исходную вершину. Какое наименьшее число рёбер ей придётся проползти дважды?



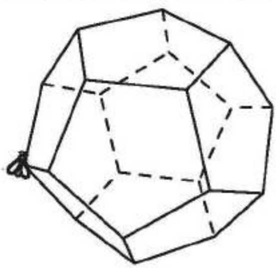
12. В вершине октаэдра сидит муха. Может ли она проползти по каждому его ребру ровно один раз?



13. В вершине икосаэдра сидит муха. Она хочет проползти по каждому его ребру и вернуться в исходную вершину. Какое наименьшее число рёбер ей придётся проползти дважды?



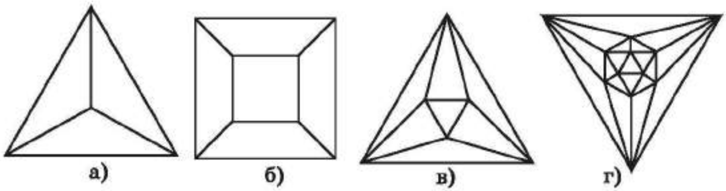
14. В вершине додекаэдра сидит муха. Она хочет проползти по каждому его ребру и вернуться в исходную вершину. Какое наименьшее число рёбер ей придётся проползти дважды?



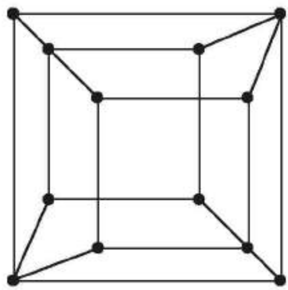
В 1859 г. ирландский математик У. Р. Гамильтон предложил головоломку, в которой требовалось найти путь по рёбрам додекаэдра, проходящий через каждую вершину ровно один раз. К вопросу о нахождении такого пути приводят многие практические задачи, в частности, задача о нахождении пути торговца, который должен посетить несколько городов, побывав в каждом городе ровно один раз.

15. Задача Гамильтона. Укажите путь по рёбрам додекаэдра, проходящий через каждую вершину ровно один раз.

16. Укажите путь по рёбрам графа, проходящий через каждую вершину ровно один раз.



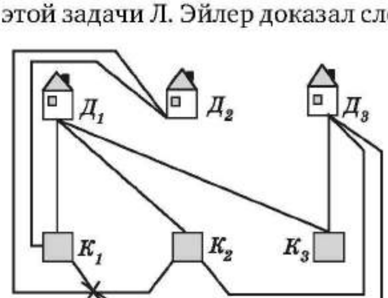
17. Докажите, что граф, изображённый на рисунке, не является гамильтоновым, т. е. для него нет пути, проходящего через каждую вершину ровно один раз.



Ещё одной задачей, поставленной Л. Эйлером, и приведшей к созданию целого направления в математике — комбинаторной топологии, является следующая задача.

Задача Эйлера о трёх домиках и трёх колодцах. Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

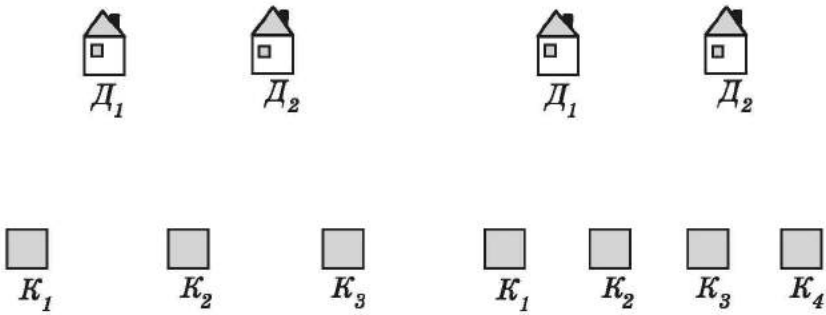
То, что не получилось на данном рисунке, не является доказательством невозможности соединения дорожками домиков и колодцев. Для решения этой задачи Л. Эйлер доказал следующую теорему.



Теорема Эйлера. Для связного простого графа имеет место равенство $В - Р + Г = 2$, где В — число вершин, Р — общее число рёбер, Г — число областей (граней), на которые граф разбивает плоскость.

18. Решите задачу Эйлера. Выясните, можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

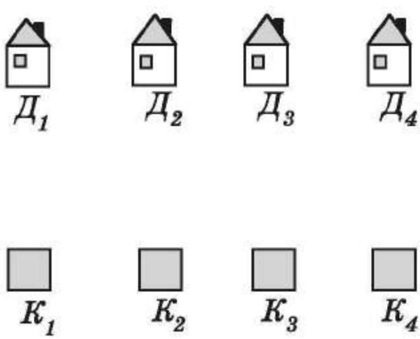
19. Два соседа имеют: а) три общих колодца; б) четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?



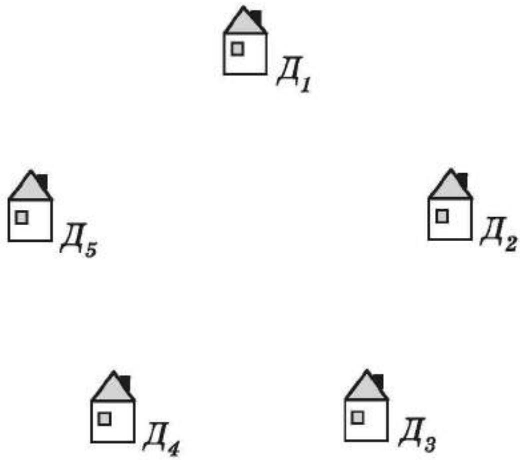
а) б)

20. Три соседа имеют: а) два общих колодца; б) четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

21. Четыре соседа имеют четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки так, чтобы каждый домик был соединен с тремя колодцами?



22. Можно ли пять домиков соединить непересекающимися дорожками так, чтобы каждый домик был соединен со всеми другими домиками?



10. Карты

В 1850 году шотландский физик Фредерик Гутри обратил внимание на то, что задачи раскрашивания карт очень популярны среди студентов-математиков в Лондоне, а сформулировал проблему четырёх красок его брат Фрэнсис Гутри, который, раскрасив карту графств Англии четырьмя красками, выдвинул гипотезу о том, что этого количества красок достаточно для раскраски любой карты. Он привлек к проблеме внимание своего преподавателя математики А. Де Моргана, а тот сообщил о ней своему другу В. Гамильтону и тем самым способствовал её широкому распространению.

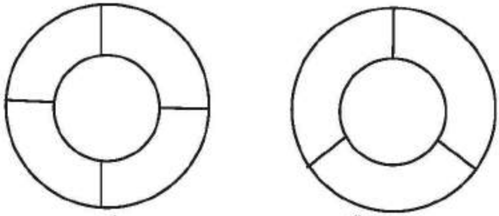
Годом рождения проблемы четырёх красок считается 1878 год. Именно тогда на одном из заседаний Британского географического общества выдающийся английский математик А. Кэли чётко сформулировал поставленную задачу: «Доказать, что любую географическую карту на плоскости (или на глобусе) можно правильно закрасить четырьмя красками». Раскраска карты называется правильной, если любые две страны, имеющие на карте общую границу, окрашены в различные цвета. Именно с этого момента проблема привлекла к себе внимание многих крупных математиков.

В 1890 году английский математик П. Хивуд доказал, что любую карту на плоскости можно раскрасить пятью красками. Однако долгое время проблема четырёх красок не поддавалась решению.

В 1968 году американские математики Оре и Стемпл показали, что любую карту, имеющую не более 40 стран, можно раскрасить четырьмя красками.

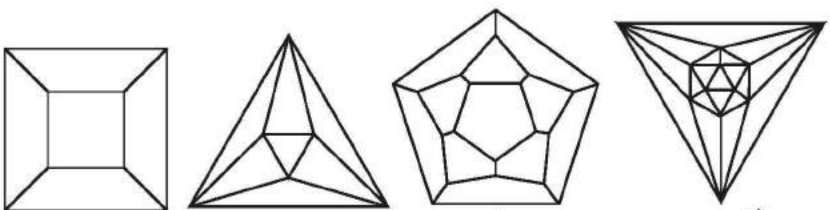
В 1976 году американскими учеными К. Аппелем и В. Хакеном было получено решение проблемы четырёх красок. С помощью компьютера они просматривали различные типы карт, и для каждого из них компьютер решал, может ли в данном типе найтись карта, которая не раскрашивается четырьмя красками. Было просмотрено почти 2000 типов карт, и для всех был получен ответ: «Нет», — что и позволило объявить о компьютерном решении проблемы четырёх красок.

1. Сколько красок требуется для правильной раскраски карты, изображённой на рисунке?



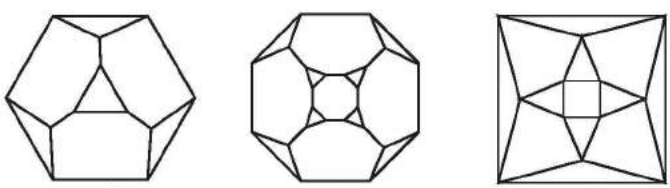
а) б)

2. Сколько красок требуется для правильной раскраски карты, изображённой на рисунке?



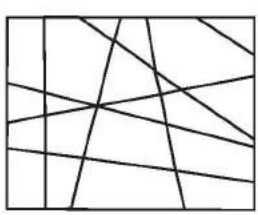
а) б) в) г)

3. Сколько красок требуется для правильной раскраски карты, изображённой на рисунке?

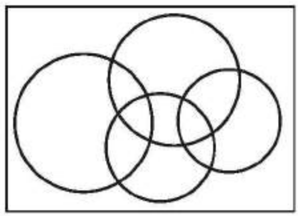


а) б) в)

4. Докажите, что любую карту на плоскости, образованную прямыми, можно правильно раскрасить двумя красками.



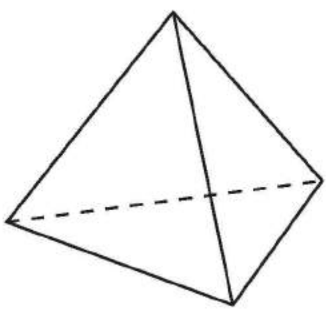
5. Докажите, что любую карту на плоскости, образованную окружностями, можно раскрасить двумя красками.



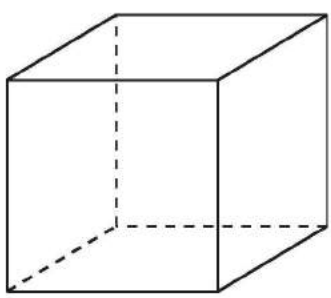
6. Докажите, что если карту можно правильно раскрасить двумя красками, то каждая её внутренняя вершина имеет чётный индекс (т. е. в ней сходится чётное число сторон).

7. Докажите, что если карту, в каждой вершине которой сходится три стороны, можно правильно раскрасить тремя красками, то каждая её внутренняя страна имеет чётное число сторон.

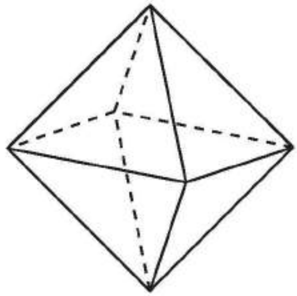
8. Сколько красок требуется для правильной раскраски граней тетраэдра?



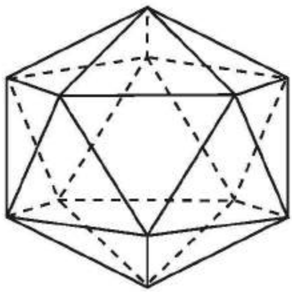
9. Сколько красок требуется для правильной раскраски граней куба?



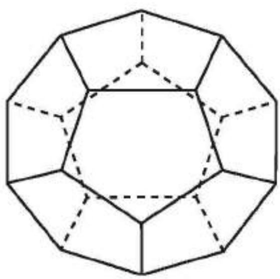
10. Сколько красок требуется для правильной раскраски граней октаэдра?



11. Сколько красок требуется для правильной раскраски граней икосаэдра?



12. Сколько красок требуется для правильной раскраски граней додекаэдра?

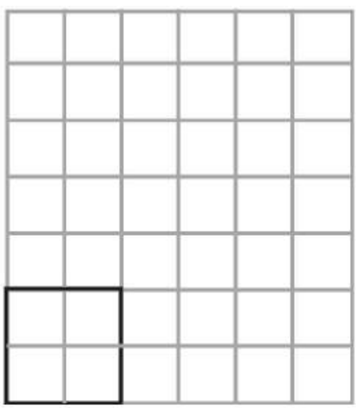


11. Паркеты

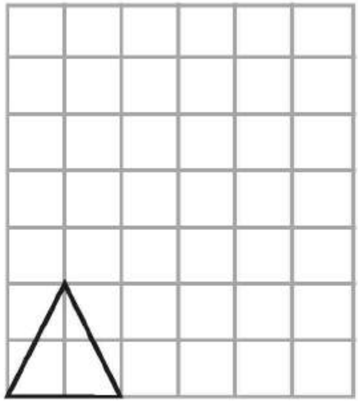
Паркеты с древних времен привлекали к себе внимание людей. Ими мостили дороги, украшали полы в помещениях, стены домов, использовали в декоративно-прикладном искусстве. Знаменитый голландский художник М. Эшер посвятил паркетам несколько своих картин.

Паркеты являются объектом исследования математиков, физиков, химиков и др. Глубокие результаты здесь получены отечественными учёными, академиками: А. Д. Александровым, Б. Н. Делоне, Е. С. Федоровым. Нобелевская премия по физике 2010 г. была присуждена отечественным учёным А. Гейму и К. Новоселову за основополагающие эксперименты по созданию двумерного материала графена, структуру которого составляет паркет из правильных шестиугольников. Нобелевская премия по химии 2011 г. была присуждена израильскому учёному Д. Шехтману за открытие квазикристаллов, двумерную модель которых составляют мозаики Р. Пенроуза.

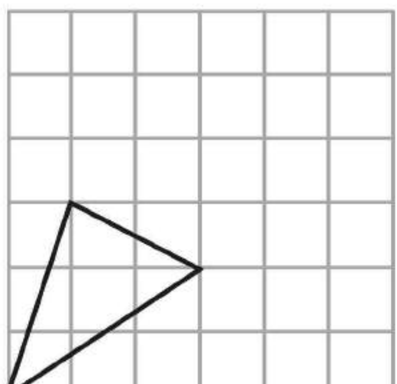
1. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из квадратов, равных данному на рисунке, Раскрасьте квадраты так, чтобы соседние квадраты были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



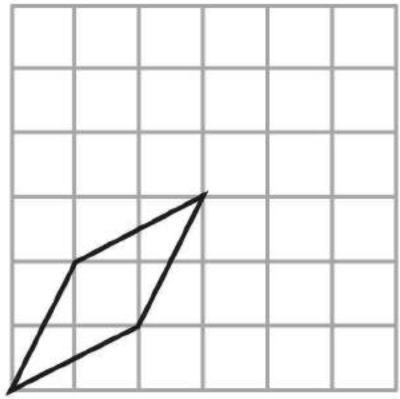
2. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из треугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте треугольники так, чтобы соседние треугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



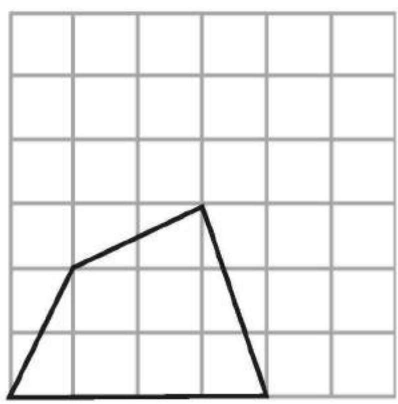
3. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из треугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте треугольники так, чтобы соседние треугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



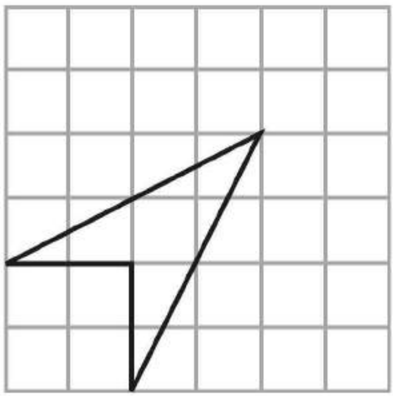
4. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте четырёхугольники так, чтобы соседние четырёхугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



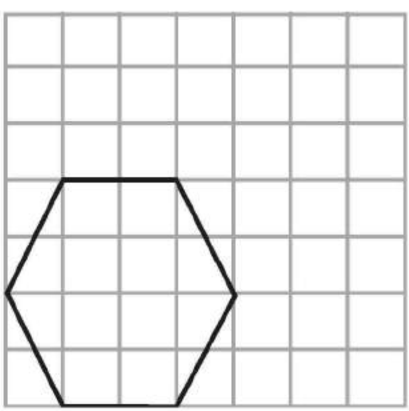
5. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте четырёхугольники так, чтобы соседние четырёхугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



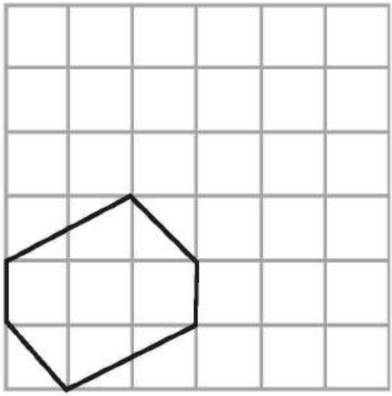
6. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте четырёхугольники так, чтобы соседние четырёхугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



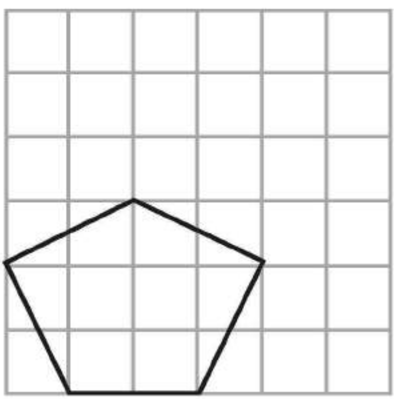
7. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте шестиугольники так, чтобы соседние шестиугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



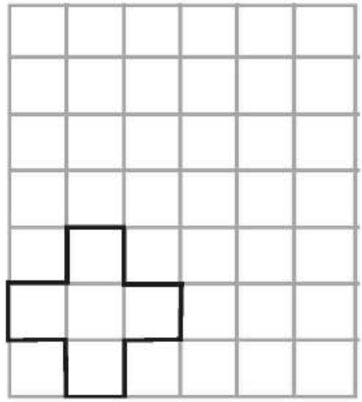
8. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте шестиугольники так, чтобы соседние шестиугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



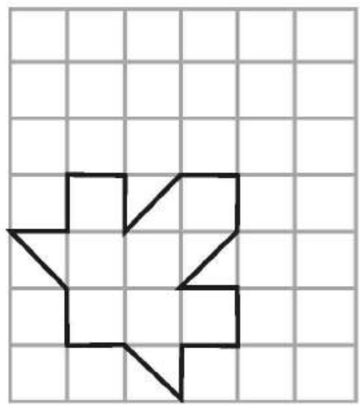
9. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из пятиугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте пятиугольники так, чтобы соседние пятиугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



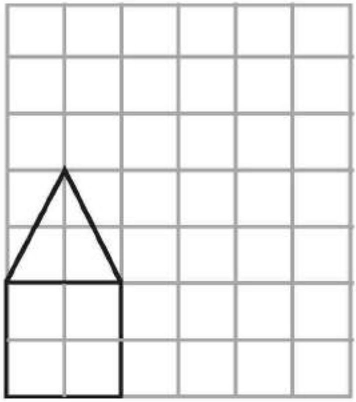
10. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из многоугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние многоугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



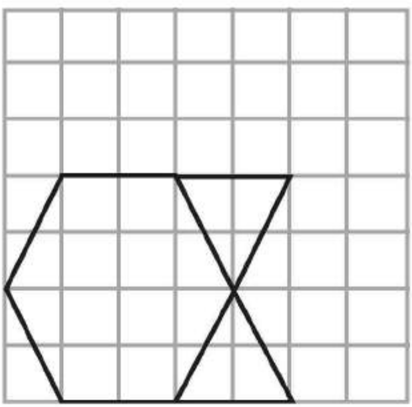
11. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из многоугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние многоугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



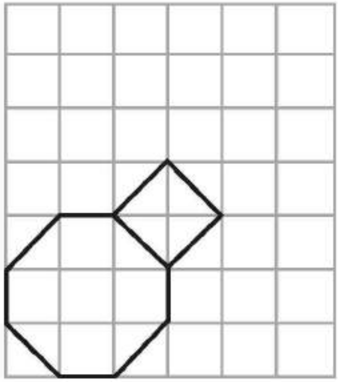
12. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, в каждой вершине которого сходится два квадрата и три треугольника, равные данным на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



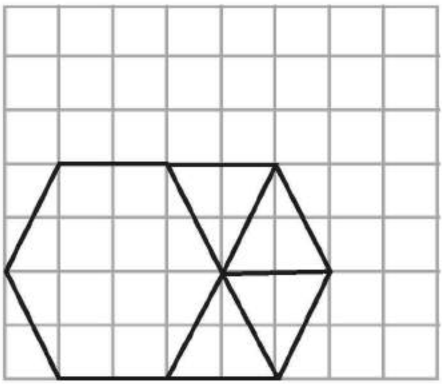
13. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, в каждой вершине которого сходится два шестиугольника и два треугольников, равные данным на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



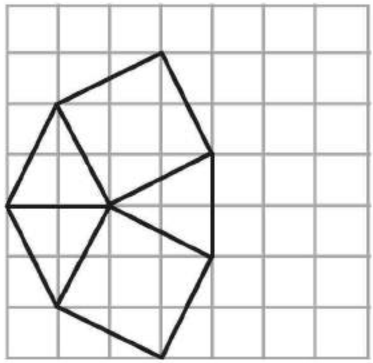
14. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, в каждой вершине которого сходится два восьмиугольника и квадрат, равные данным на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



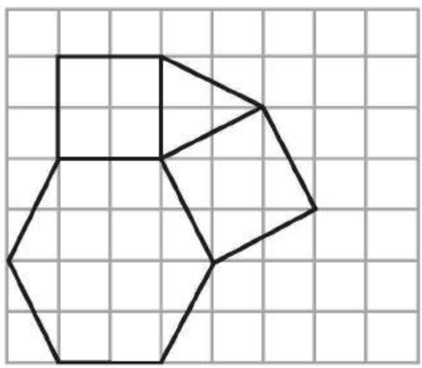
15. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, в каждой вершине которого сходится шестиугольник и четыре треугольника, равные данным на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



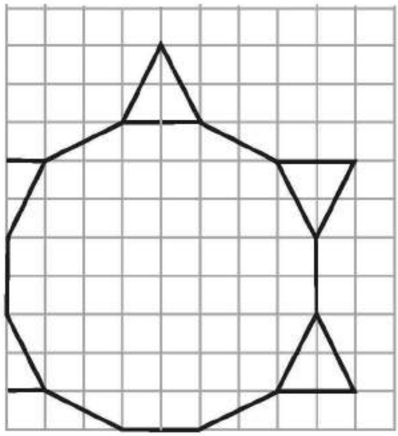
16. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, в каждой вершине которого сходится два квадрата и три треугольника, равные данным на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



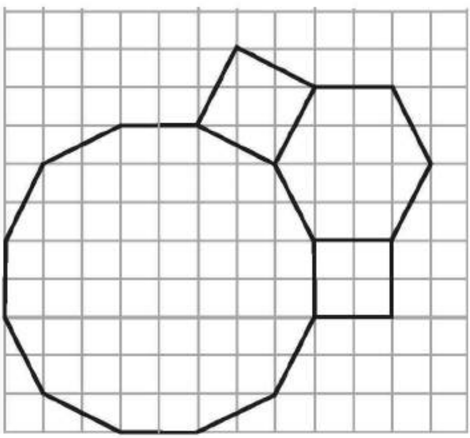
17. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, в каждой вершине которого сходится шестиугольник, два квадрата и треугольник, равные данным на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



18. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, в каждой вершине которого сходится два двенадцатиугольника и треугольник, равные данным на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

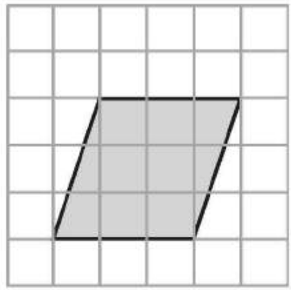


19. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, в каждой вершине которого сходится двенадцатиугольник, шестиугольник и квадрат, равные данным на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

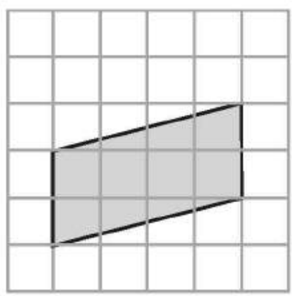


12. Разрезания

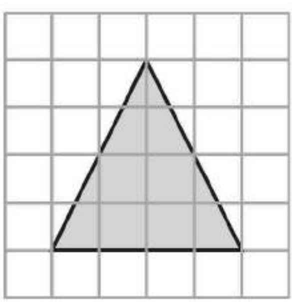
1. Изобразите параллелограмм, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой этот параллелограмм, из полученных частей можно сложить прямоугольник.



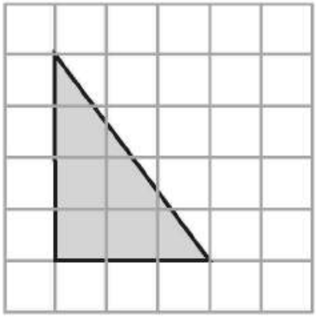
2. Изобразите параллелограмм, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой этот параллелограмм, из полученных частей можно сложить прямоугольник.



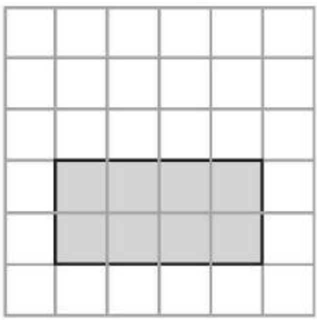
3. Изобразите треугольник, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой этот треугольник, из полученных частей можно сложить прямоугольник.



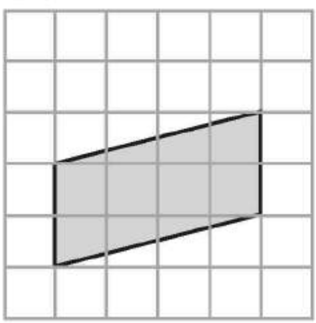
4. Изобразите треугольник, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой этот треугольник, из полученных частей можно сложить прямоугольник.



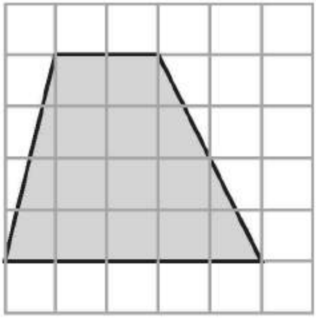
5. Изобразите прямоугольник, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой этот прямоугольник, из полученных частей можно сложить треугольник.



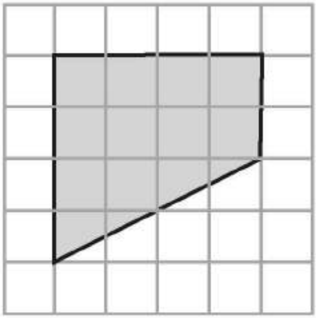
6. Изобразите параллелограмм, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой этот параллелограмм, из полученных частей можно сложить треугольник.



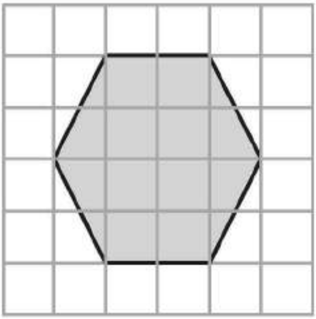
7. Изобразите трапецию, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой эту трапецию, из полученных частей можно сложить треугольник.



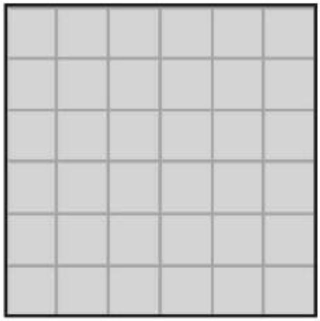
8. Изобразите трапецию, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой эту трапецию, из полученных частей можно сложить треугольник.



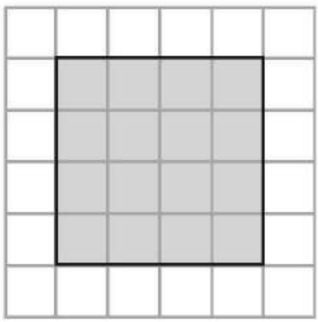
9. Изобразите шестиугольник, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой этот многоугольник, из полученных частей можно сложить параллелограмм.



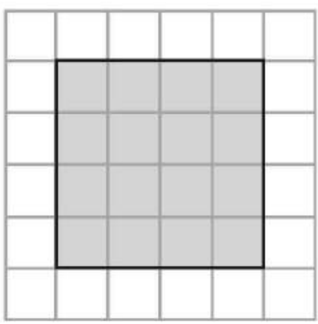
10. Разрежьте квадрат на шесть квадратов.



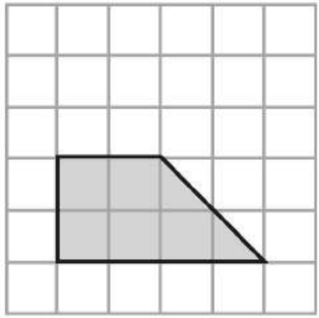
11. Разрежьте квадрат на семь квадратов.



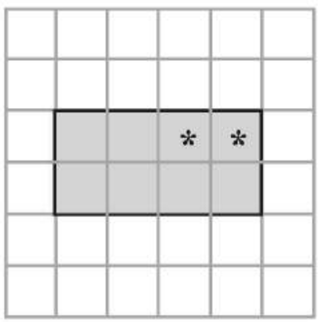
12. Разрежьте квадрат на восемь квадратов.



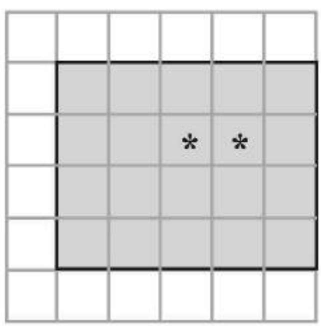
13. Разрежьте трапецию на четыре равные части.



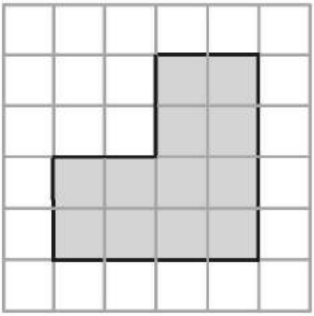
14. Разрежьте прямоугольник на две равные части так, чтобы в каждой из них была звёздочка.



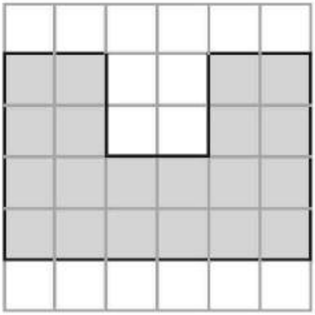
15. Разрежьте прямоугольник на две равные части так, чтобы в каждой из них была звёздочка.



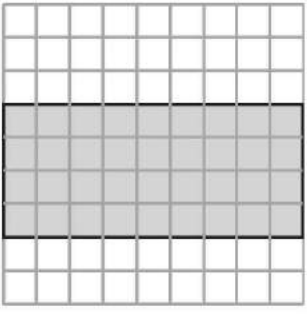
16. Изобразите многоугольник, как на рисунке. Разрежьте его на четыре равные части.



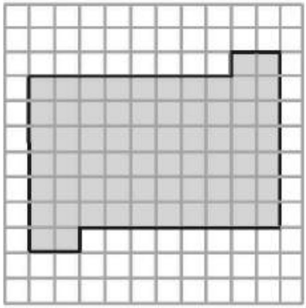
17. Изобразите многоугольник, как на рисунке. Разрежьте его на четыре равные части.



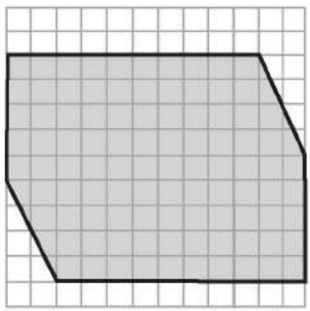
18. Прямоугольник разрежьте на две части, из которых можно сложить квадрат.



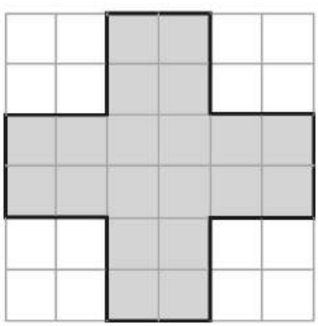
19. Многоугольник разрежьте на две части, из которых можно сложить квадрат.



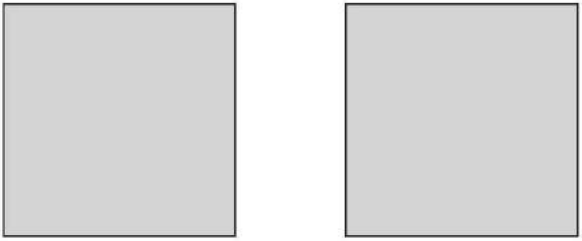
20. Многоугольник разрежьте на две части, из которых можно сложить квадрат.



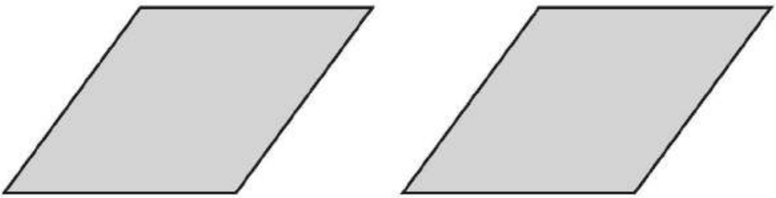
21. Многоугольник разрежьте на несколько частей, из которых можно сложить квадрат.



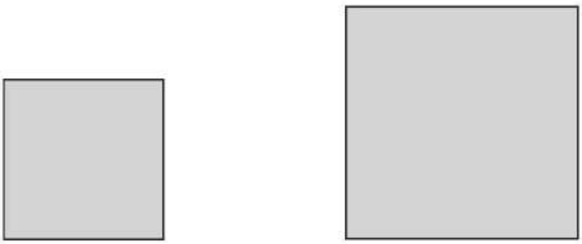
22. Один из двух равных квадратов разрежьте на несколько частей и составьте из них и другого квадрата один квадрат.



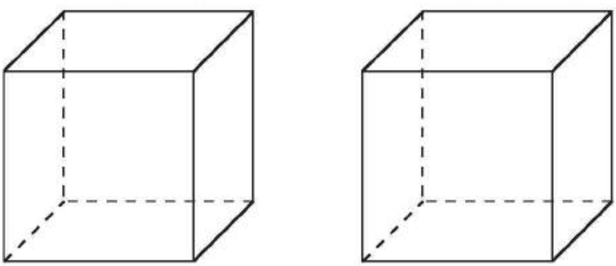
23. Каждый из двух равных ромбов разрежьте на две части и сложите из них прямоугольник.



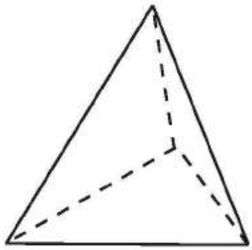
24. Один из двух квадратов разрежьте на несколько частей и составьте из них и другого квадрата один квадрат.

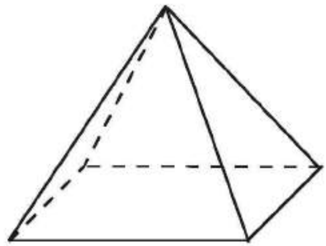


25. Один из двух равных кубов разрежьте на несколько частей и составьте из них и другого куба правильную четырёхугольную призму.

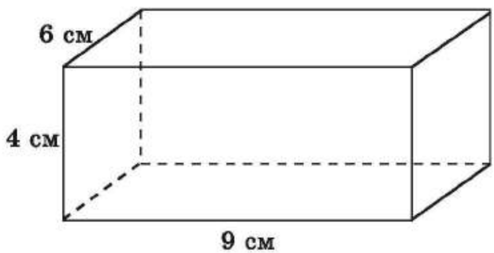


26. Даны единичный тетраэдр и правильная четырёхугольная пирамида, все ребра которой равны 1. Разрежьте эту пирамиду на четыре части и сложите из них и тетраэдра куб.

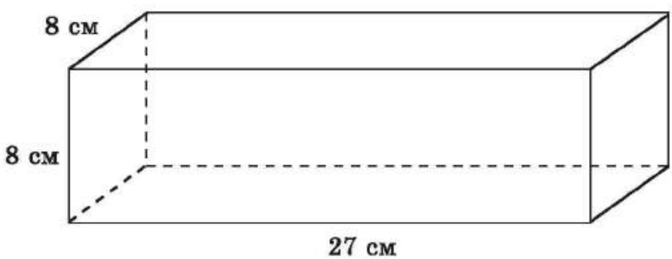




27. Прямоугольный брусок размерами 4 см × 6 см × 9 см разрежьте на две части и сложите из них куб.

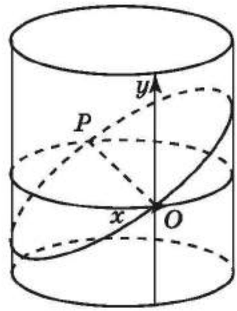


28. Прямоугольный брусок размерами 8 см × 8 см × 27 см разрежьте на четыре части и сложите из них куб.

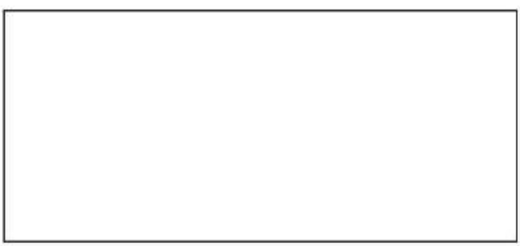


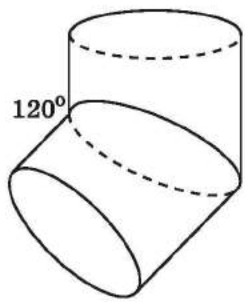
29. Возьмём прямоугольный лист бумаги и нарисуем на нем оси координат Ox и Oy. Затем свернём этот лист в боковую поверхность цилиндра, радиус основания которого примем за единицу. Ось Ox свернется в окружность радиуса 1, а ось Oy станет образующей цилиндра. Разрежем эту поверхность по сечению, проходящему через диаметр OD, и составляющему с плоскостью окружности угол 45°.

Развернём нижнюю часть поверхности. Выясните, какую кривую будет образовывать её верхний край.



30. Имеется лист металла прямоугольной формы. Укажите разрез этого листа на две части, из которых можно сделать трубу, изображенную на рисунке, состоящую из частей цилиндра, соединённых под углом 120°.





13. Экстремальные задачи

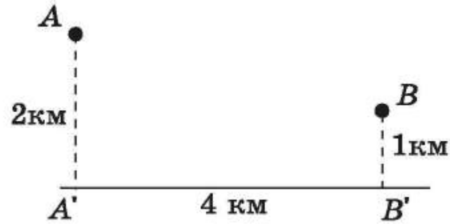
Обычно экстремальные задачи, или задачи на нахождение наибольших и наименьших значений, решаются в курсе алгебры и начал анализа старших классов с помощью производной.

Вместе с тем, имеется важный класс геометрических экстремальных задач, которые решаются своими методами без помощи производной.

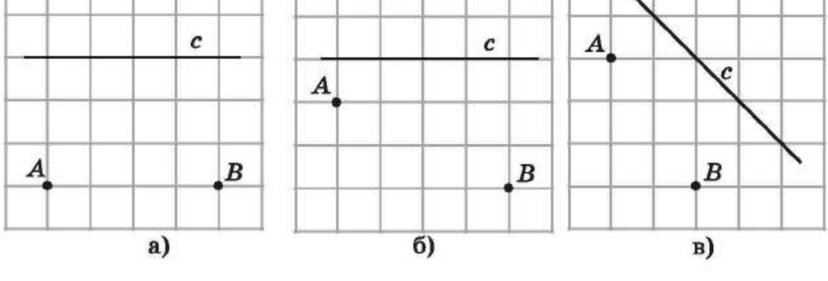
Эти задачи с древних времён привлекали к себе внимание учёных, имеют большое значение, как для математики, так и для ее приложений.

Здесь мы рассмотрим некоторые классические экстремальные задачи и их приложения.

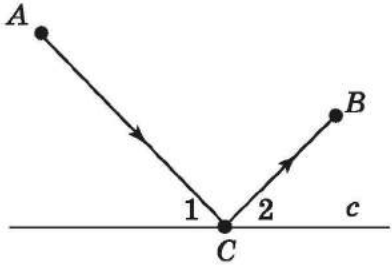
1. Населённые пункты A и B расположены по одну сторону от шоссе на расстоянии 2 км и 1 км соответственно. Требуется построить автобусную остановку и проложить от неё дорожки до населённых пунктов. Найдите наименьшую возможную суммарную длину дорожек.



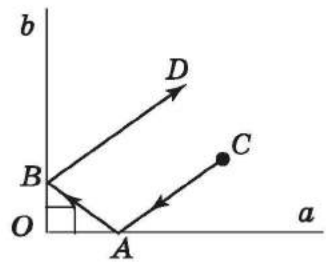
2. На прямой c укажите точку C, для которой сумма расстояний $AC + CB$ наименьшая. Найдите эту сумму, если стороны клеток равны 1.



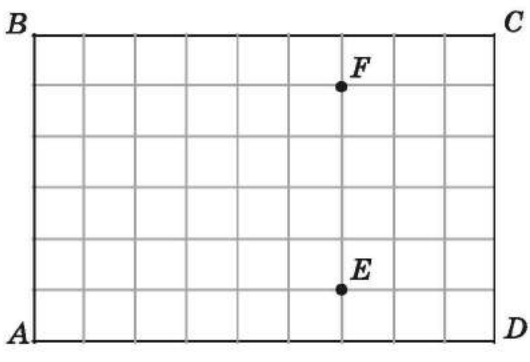
3. Докажите, что если луч света исходит из точки A, отражается от прямой c и приходит в точку B, то углы 1 и 2 равны. Используйте то, что свет распространяется по кратчайшему пути.



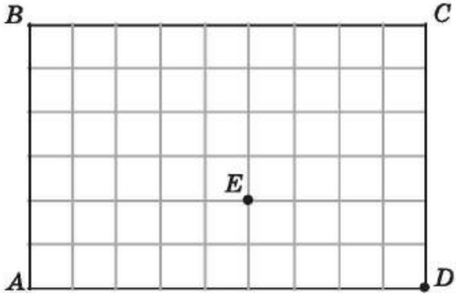
4. Докажите, что луч света, исходящий из точки C внутри прямого угла, отразившись от его сторон, пойдет в направлении, противоположном исходному ($BD \parallel CA$). Используйте то, что свет распространяется по кратчайшему пути.



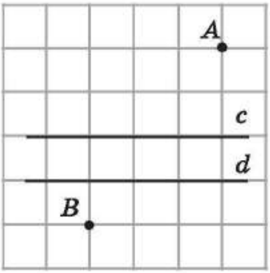
5. Укажите траекторию бильярдного шара E, при которой он, отразившись от бортов AD и AB, попадает в шар F.



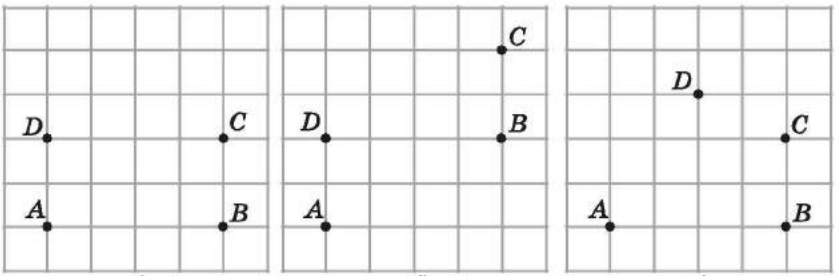
6. Укажите траекторию бильярдного шара E, при которой он, отразившись от бортов AD, AB и BC, попадает в лузу D.



7. Населённые пункты A и B расположены на противоположных берегах реки. В каком месте реки следует построить мост CD и проложить дороги AC и BD, чтобы путь $AC+CD+DB$ имел наименьшую длину? (Берега c, d реки предполагаются параллельными, а мост строится перпендикулярно этим берегам).

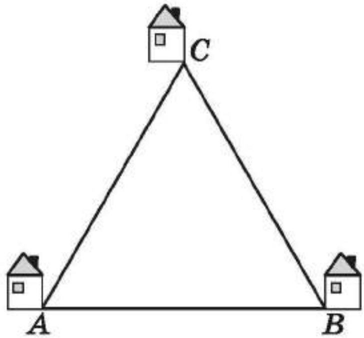


8. Четыре соседа по садовым участкам решили вырыть общий колодец и проложить от него непересекающиеся дорожки к своим домикам A, B, C, D. Укажите расположение колодца, при котором сумма расстояний от него до домиков наименьшая.

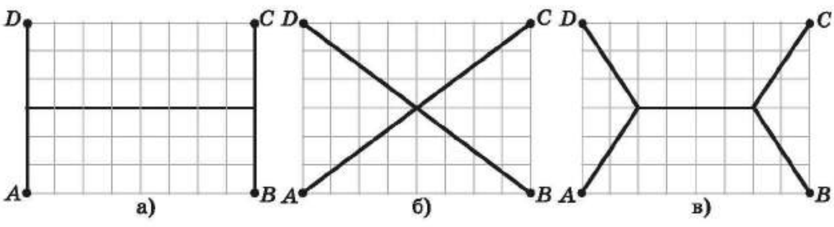


а) б) в)

9. Три соседа по садовым участкам, домики которых расположены в вершинах правильного треугольника, решили вырыть общий колодец и проложить от него дорожки к своим домикам. Укажите расположение колодца, при котором сумма расстояний от него до домиков наименьшая.



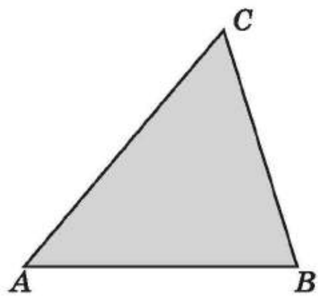
10. Требуется проложить шоссейные дороги, соединяющие населённые пункты A, B, C, D, расположенные в вершинах прямоугольника. Выберите из предложенных вариантов расположения дорог тот, в котором суммарная длина дорог наименьшая.



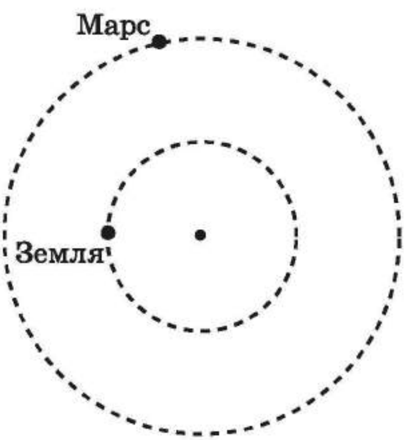
11. Какого наименьшего периметра может быть прямоугольная площадка площади 100 м^2?

12. Какой наибольшей площади может быть прямоугольная площадка периметра 100 м?

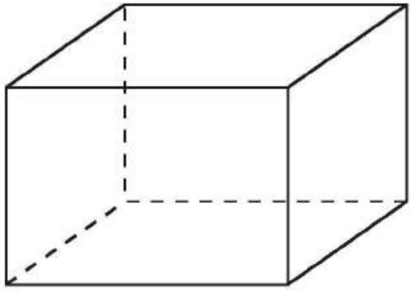
13. Найдите наименьший возможный периметр треугольника, одна сторона которого равна 6 см, а площадь равна 12 см^2.



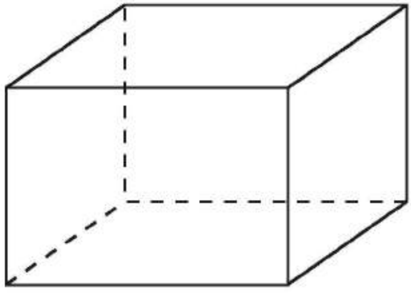
14. Земля и Марс обращаются вокруг Солнца по круговым (почти) орбитам радиусов 150 и 228 миллионов километров. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния между Землей и Марсом.



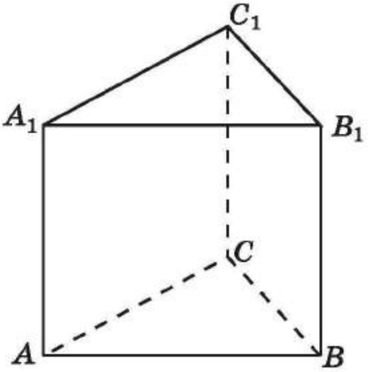
15. Какой наименьшей площади поверхности может быть коробка в форме прямоугольного параллелепипеда, объём которой равен 1000 см^3?



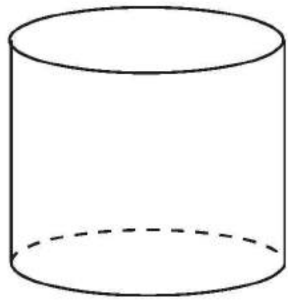
16. Какого наибольшего объёма может быть коробка в форме прямоугольного параллелепипеда, площадь поверхности которой равна 600 см^2?



17. Найдите размеры правильной треугольной призмы, объём которой равен 2, имеющей наименьшую площадь поверхности.



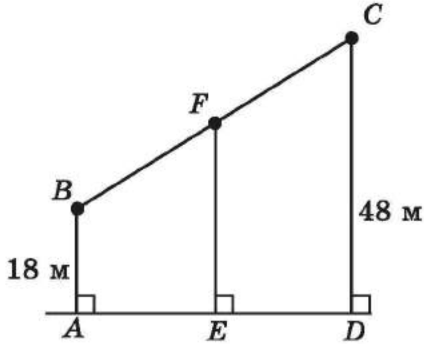
18. Найдите размеры цилиндра, объём которого равен 2π, имеющего наименьшую площадь поверхности.



Ответы и решения

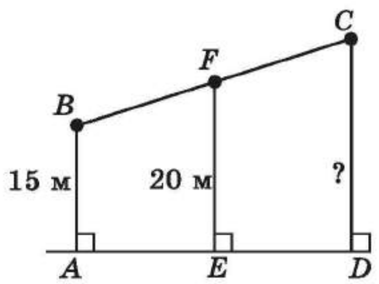
1. Расстояния. Теорема Пифагора

1. Четырехугольник $ABCD$ — трапеция, в которой искомый отрезок EF — средняя линия. Следовательно, $EF = 33$ м.



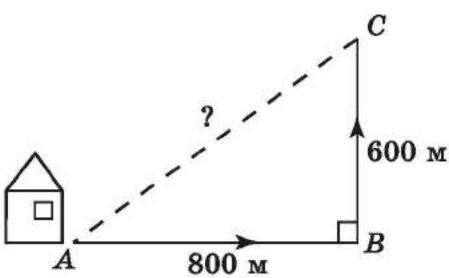
Ответ: 33.

2. Четырехугольник $ABCD$ — трапеция, EF — средняя линия. Следовательно, искомый отрезок CD равен 25 м.



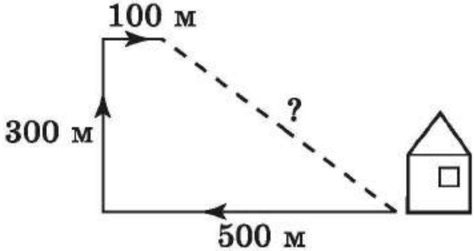
Ответ: 25.

3. Треугольник ABC — прямоугольный. По теореме Пифагора $AC = 1000$ м.



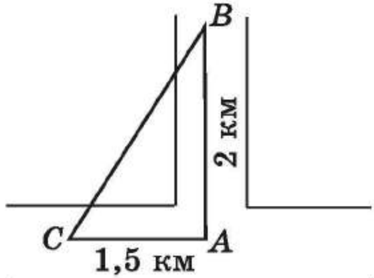
Ответ: 1000.

4. Треугольник ABC — прямоугольный, $AB = 400$ м, $BC = 300$ м. По теореме Пифагора $AC = 500$ м.



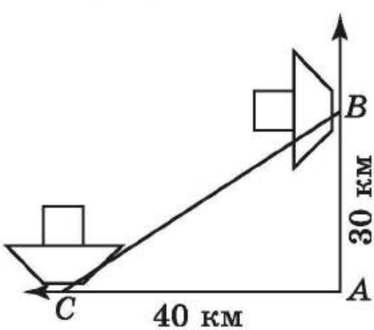
Ответ: 500.

5. Через 30 мин мальчик пройдет 2 км, девочка — 1,5 км. Расстояние BC между ними будет равно 2,5 км.



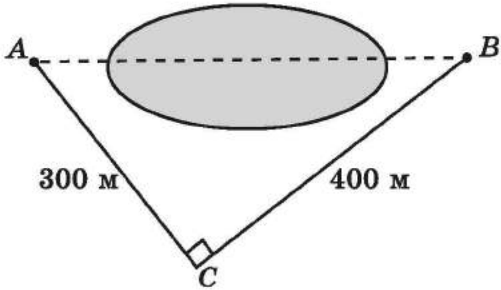
Ответ: 2,5.

6. Через два часа пароходы пройдут соответственно 30 км и 40 км. Расстояние между ними будет равно 50 км.



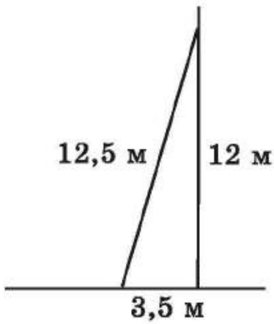
Ответ: 50.

7. По теореме Пифагора $AB = 500$ м.



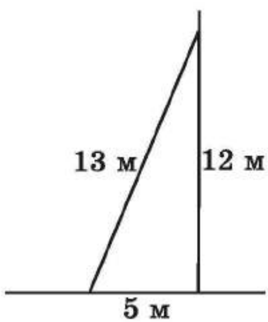
Ответ: 500.

8. По теореме Пифагора верхний конец лестницы будет находиться на расстоянии 12 м от земли.



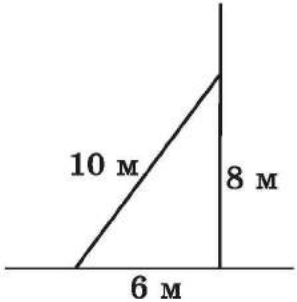
Ответ: 12.

9. Нижний конец лестницы следует отодвинуть от стены дома на расстояние 5 м.



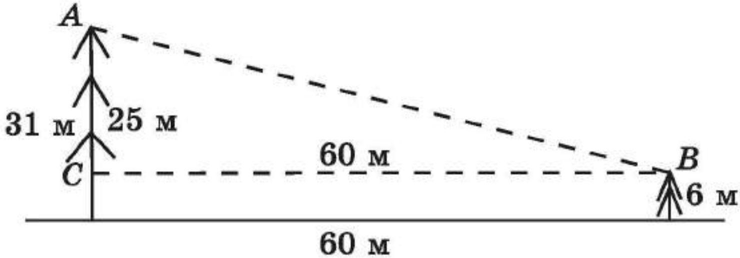
Ответ: 5.

10. Лестница должна иметь длину, равную 10 м.



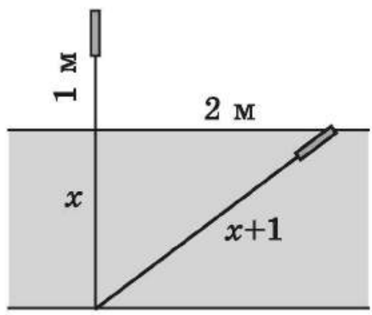
Ответ: 10.

11. Из прямоугольного треугольника ABC находим $AB = 65$ м.



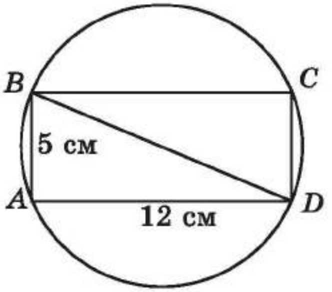
Ответ: 65.

12. Обозначим глубину озера x. Тогда по теореме Пифагора $x^2 + 2 = (x+1)^2$. Решая это уравнение, находим $x = 1{,}5$. Значит, глубина озера равна 1,5 м.



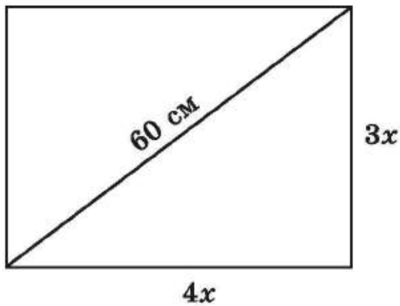
Ответ: 1,5.

13. Наименьшим диаметром является диагональ прямоугольника $ABCD$, которая равна 13 см.



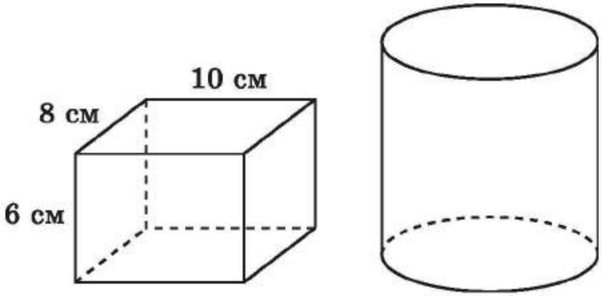
Ответ: 13.

14. Пусть ширина экрана равна $4x$, а высота $3x$. Тогда диагональ равна $5x$. Учитывая, что диагональ равна 60 см, находим $x = 12$. Следовательно, ширина экрана равна 48 см.



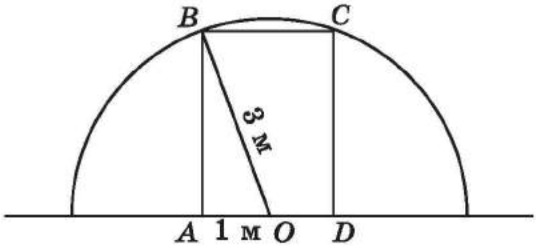
Ответ: 48.

15. Наименьший диаметр цилиндрического сосуда равен диагонали прямоугольника со сторонами 6 см и 8 см, т. е. равен 10 см.



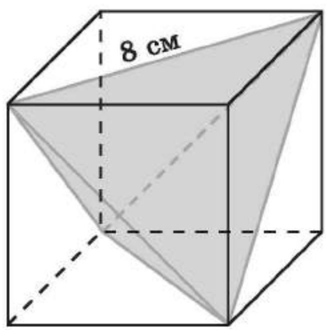
Ответ: 10.

16. Наименьшая высота машины равна катету AB прямоугольного треугольника OAB, где O — центр круга. Она равна $2\sqrt{2}$ м. Ее приближенное значение равно 2,8 м.



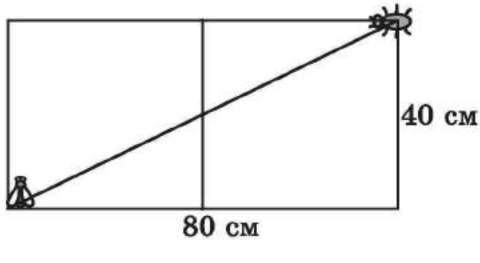
Ответ: 2,8.

17. Если тетраэдр поместить так, как показано на рисунке, то ребро кубической коробки равно $4\sqrt{2}$ см. Приближенное значение равно 6 см.



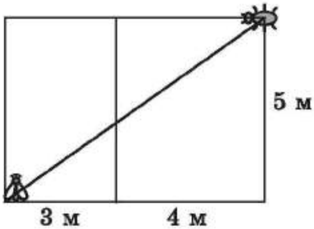
Ответ: 6.

18. Развертка двух соседних граней поверхности коробки представляет собой прямоугольник со сторонами 80 см и 40 см. Искомый кратчайший путь равен диагонали этого прямоугольника, т. е. равен $40\sqrt{5}$ см. Приближенное значение равно 89 см.



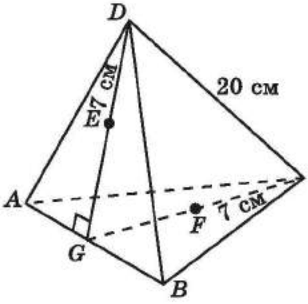
Ответ: 89.

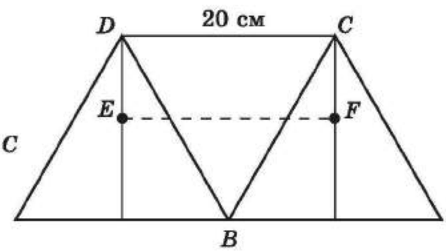
19. Искомый кратчайший путь равен диагонали прямоугольника со сторонами 7 м и 5 м, т. е. равен $\sqrt{74}$ м. Приближенное значение равно 8,6 м.



Ответ: 8,6.

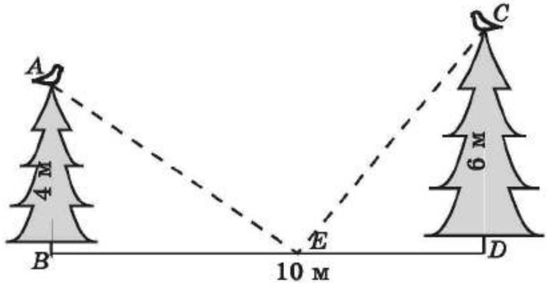
20. На рисунке показана развертка трех граней тетраэдра. Высоты CG и DG двух граней тетраэдра равны $10\sqrt{3}$ см, что больше 17 см. Значит, длина пути EGF больше 20 см. Следовательно, кратчайшим путем является путь EF, показанный на развертке, который равен 20 см.





Ответ: 20.

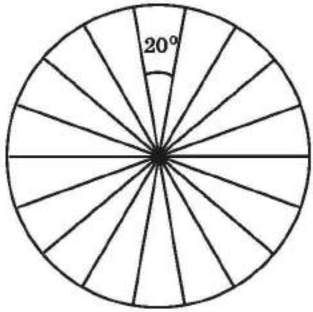
21. Пусть $BE = x$. Тогда $AE^2 = 16 + x^2$, $CE^2 = 36 + (10 - x)^2$. Приравнивая AE^2 и CE^2, находим, что $BE = 6$ м.



Ответ: 6.

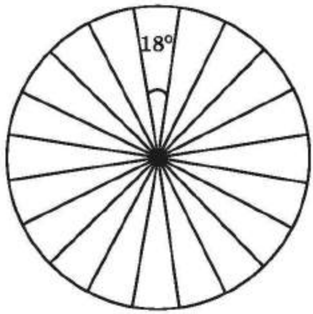
2. Углы

1. Угол между соседними спицами равен $360^\circ : 18 = 20^\circ$.



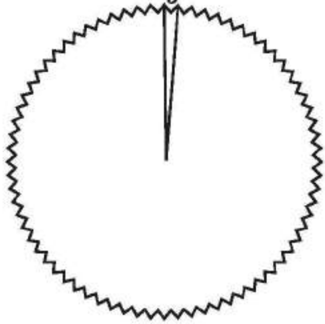
Ответ: 20.

2. Число спиц равно $360 : 18 = 20$.



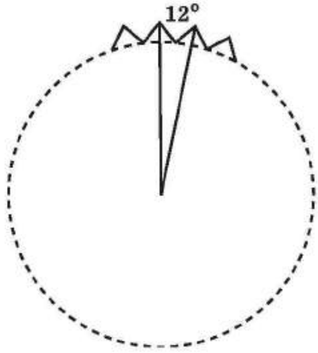
Ответ: 20.

3. Дуга окружности, заключенная между серединами двух соседних зубцов, содержит $360^\circ : 72 = 5^\circ$.



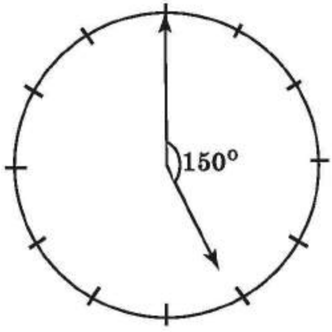
Ответ: 5.

4. Колесо зубчатой передачи имеет $360 : 12 = 30$ (зубцов).



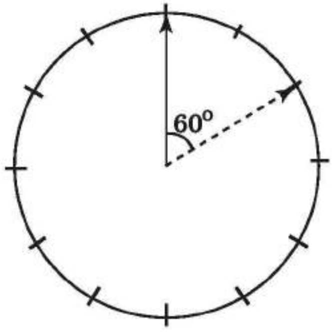
Ответ: 30.

5. Минутная и часовая стрелки часов в 5 ч образуют угол, равный 150°.



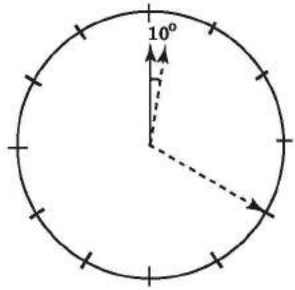
Ответ: 150.

6. За 10 минут минутная стрелка описывает угол, равный 60°.



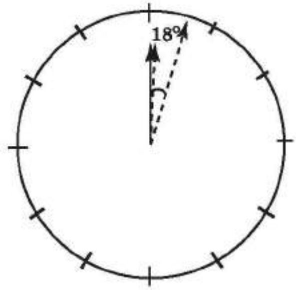
Ответ: 60.

7. За 1 час часовая стрелка описывает угол, равный 30°. Следовательно, за 20 минут часовая стрелка опишет угол, равный 10°.



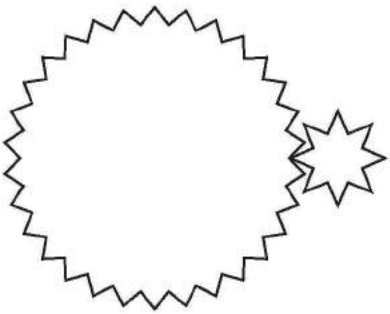
Ответ: 10.

8. За время пока часовая стрелка поворачивается на 30°, минутная стрелка поворачивается на 360°. Следовательно, пока часовая проходит 1°30′, минутная стрелка повернется на угол, равный 18°.



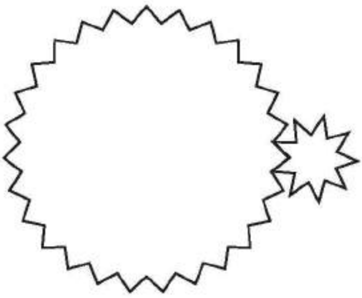
Ответ: 18.

9. Зубчатое колесо с 32 зубцами делает в 4 раза меньше оборотов в минуту, чем колесо с 8 зубцами, т. е. искомое число оборотов равно 3.



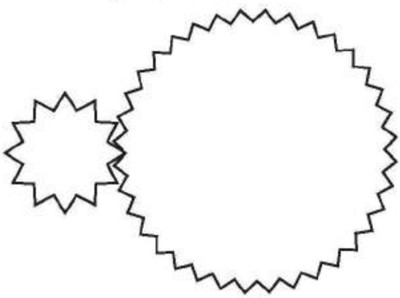
Ответ: 3.

10. Большее колесо повернется на угол, равный $\frac{3\cdot 360^\circ}{8}=135^\circ$.



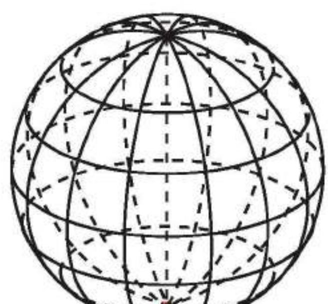
Ответ: 135.

11. Второе зубчатое колесо имеет в три раза больше зубцов, чем первое, т. е. оно имеет 36 зубцов.



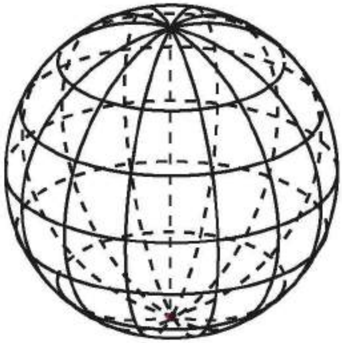
Ответ: 36.

12. Так как за 24 часа Земля поворачивается вокруг своей оси на угол 360°, то за 8 часов Земля повернется на угол, равный $360^\circ : 3$, т. е. на угол 120°.



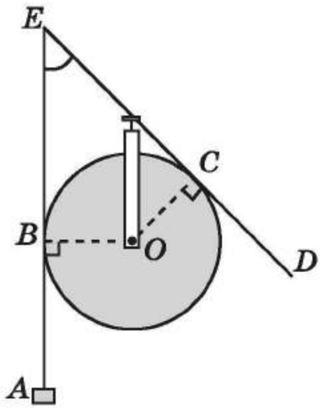
Ответ: 120.

13. На 90° Земля поворачивается вокруг своей оси за 6 часов.



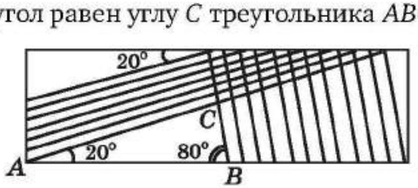
Ответ: 6.

14. Искомый угол равен углу E четырехугольника $OBEC$. Учитывая, что сумма углов четырехугольника равна 360°, угол BOC равен 135°, а углы OBE и OCE равны 90°, получаем, что угол между прямыми AB и CD равен 45°.



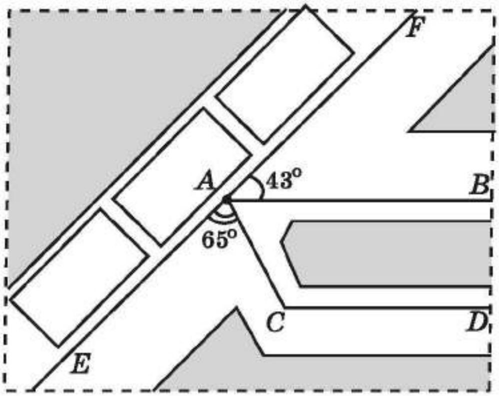
Ответ: 45.

15. Искомый угол равен углу C треугольника ABC, т. е. равен 80°.



Ответ: 80.

16. Угол BAC равен 72°. Сумма углов BAC и ACD равна 180°. Следовательно, искомый угол ACD равен 108°.



Ответ: 108.

17. В $1^\circ 30'$ содержится $\frac{6000}{360} \cdot \frac{3}{2} = 25$ (тысячных).

Ответ: 25.

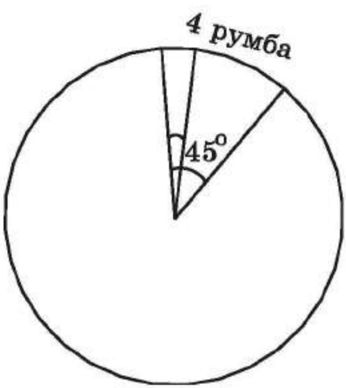
18. 100 тысячных составляют $\frac{360^\circ}{6000} \cdot 100 = 6^\circ$.

Ответ: 6.

19. Так как преобразование подобия сохраняет углы, то величина угла не изменится и будет равна $1{,}5^\circ$.

Ответ: 1,5.

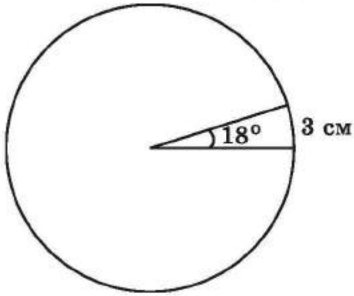
20. 4 румба составляют $\frac{360^\circ}{32} \cdot 4 = 45^\circ$.



Ответ: 45.

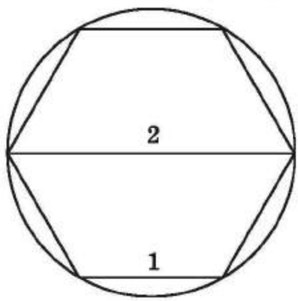
3. Окружность

1. Длина дуги окружности равна $60 \cdot \frac{18}{360} = 3$ (см).



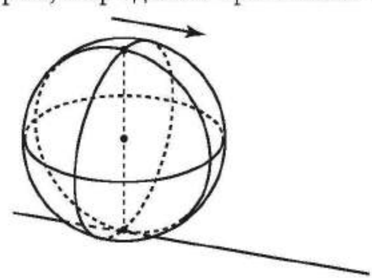
Ответ: 3.

2. Сторона правильного шестиугольника, вписанного в единичную окружность, равна 1. Его периметр равен 6. Учитывая, что число π равно отношению длины окружности к ее диаметру, получаем, что приближенное значение числа π будет равно 3.



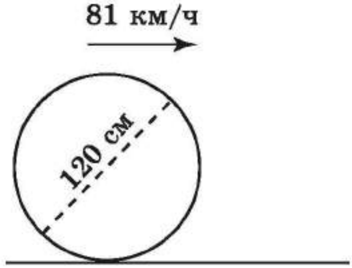
Ответ: 3.

3. За один оборот шар откатывается на π метров. Значит, откатившись на 10 метром, шар сделает три полных оборота.



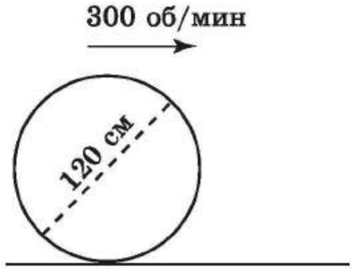
Ответ: 3.

4. Длина окружности колеса, если принять $\pi \approx 3$, примерно равна 360 см. За одну минуту поезд проходит 1350 м. Следовательно, за одну минуту колесо делает $135\,000 : 360 = 375$ (оборотов).



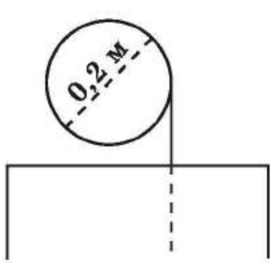
Ответ: 375.

5. Если принять $\pi \approx 3$, то длина окружности колеса примерно равна 360 см. За одну минуту оно пройдет 1080 м, а за один час 64,8 км. Таким образом, скорость поезда составляет 64,8 км/ч.



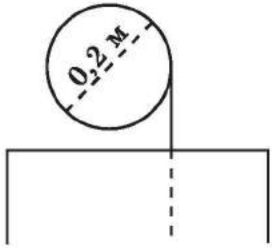
Ответ: 64,8.

6. Если принять $\pi \approx 3$, то длина окружности вала равна 0,6 м. Глубина колодца равна $0{,}6 \cdot 20 = 12$ (м).



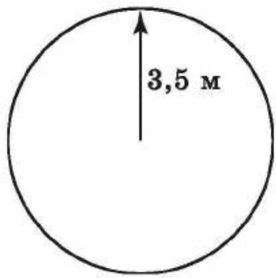
Ответ: 12.

7. Если принять $\pi \approx 3$, то длина окружности вала равна 0,6 м. Для того чтобы поднять воду из колодца глубиной 9 м, вал должен сделать $9 : 0{,}6 = 15$ (оборотов).



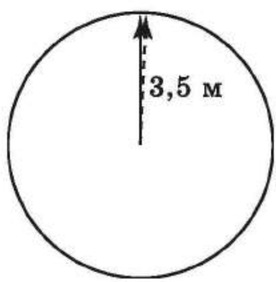
Ответ: 15.

8. Если принять $\pi \approx 3$, то длина окружности, которую описывает минутная стрелка длиной 3,5 м в течение одного часа, равна 21 м.



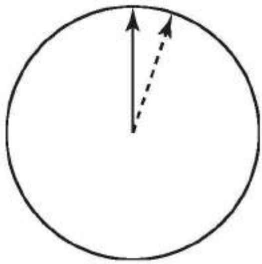
Ответ: 21.

9. Длина всей окружности равна 21 м. Длина дуги окружности, соответствующей одной минуте, составляет одну шестидесятую часть окружности и, следовательно, равна 35 см.



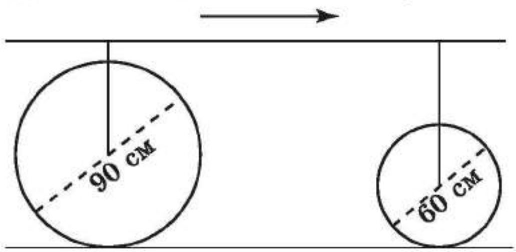
Ответ: 35.

10. Длина всей окружности равна 21 м. 105 см составляют одну двадцатую часть длины окружности. Конец минутной стрелки пройдет этот путь за 3 минуты.



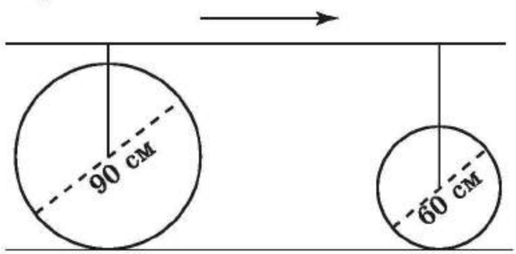
Ответ: 3.

11. Телега проехала 5,4 км. Так как длина окружности переднего колеса примерно равна 180 см, то оно сделает $\frac{540\,000}{180} = 3000$ (оборотов). Так как диаметр заднего колеса в 1,5 раза больше переднего, то оно сделает в 1,5 раза оборотов меньше, т. е. 2000 оборотов. Таким образом, переднее колесо сделает на 1000 оборотов больше заднего.



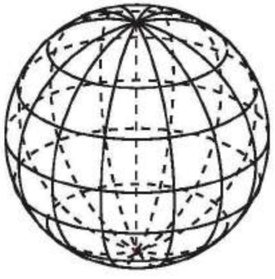
Ответ: 1000.

12. Пусть заднее колесо сделало x оборотов. Тогда имеет место равенство $270x = 180(x + 100)$. Откуда находим $x = 200$ и, следовательно, телега проехала 540 м.



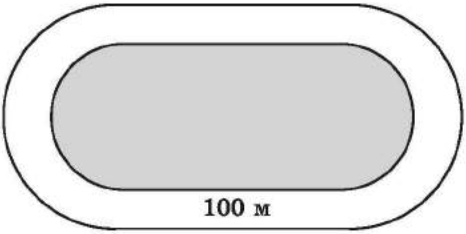
Ответ: 540.

13. Если радиус окружности увеличить на 1 м, то длина окружности увеличится на $2\pi \approx 6$ (м).



Ответ: 6.

14. Суммарная длина двух криволинейных участков беговой дорожки равна длине окружности и равна 200 м. Диаметр этой окружности равен ширине l поля стадиона и равен $200/\pi$. Следовательно, $l\pi = 200$.



Ответ: 200.

15. Разность длин дорожек равна разности длин криволинейных участков дорожек. Длины криволинейных участков равны длинам окружностей, радиус одной из которых на 2 м больше другой. Следовательно, длина одной окружности на $4\pi \approx 12$ (м) больше другой и, значит, спортсмен, бегущий по внешней дорожке, должен находиться на 12 м впереди другого.

Ответ: 12.

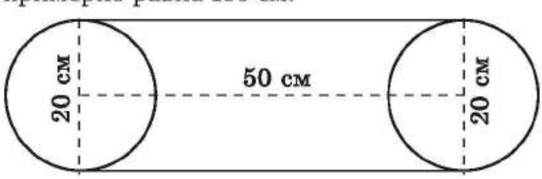
16. Москва и Новороссийск расположены примерно на одном меридиане под 56° и 44° северной широты соответственно. Величина соответствующего центрального угла составляет 12°, т. е. одну тридцатую величины всей окружности. Следовательно, расстояние между Москвой и Новороссийском равно $\frac{40\,000}{30} \approx 1333$ (км).

Ответ: 1333.

17. Примерная величина дуги большой окружности между Москвой и Вашингтоном составляет $\frac{7800 \cdot 360}{40\,000} \approx 70$ (градусов).

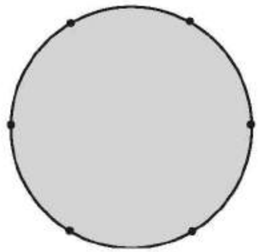
Ответ: 70.

18. Длина приводного ремня складывается из двух прямолинейных участков, суммарная длина которых равна 100 см, и двух криволинейных участков, суммарная длина которых равна длине окружности диаметра 20 см. Принимая $\pi \approx 3$, получим, что длина приводного ремня примерно равна 160 см.



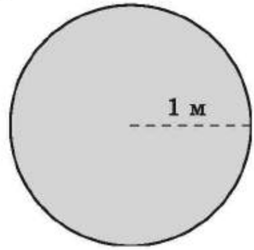
Ответ: 160.

19. Для того чтобы на каждого из сидящих за столом шести человек приходилось 80 см по окружности стола, нужно, чтобы длина окружности была равна 480 см. Принимая $\pi \approx 3$, получаем, что диаметр стола должен быть равен 160 см.



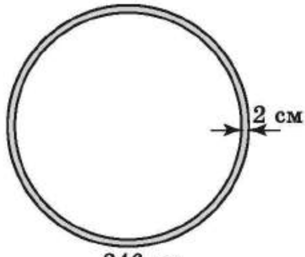
Ответ: 160.

20. Принимая $\pi \approx 3$, получим, что длина окружности стола равна 6 м. Следовательно, за таким столом можно рассадить 10 человек так, чтобы на каждого человека приходилось не менее 60 см длины дуги окружности стола?



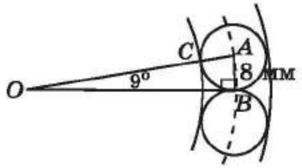
Ответ: 10.

21. Принимая $\pi \approx 3$, получим, что диаметр трубы приближенно равен $\frac{246}{3} = 82$ (см). Следовательно, внутренний диаметр сечения трубы равен 78 см.



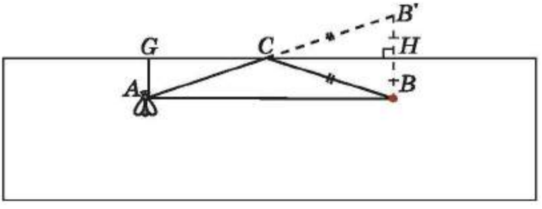
Ответ: 78.

22. Угол AOB, образованный радиусами, проведенными из центра O в центр шарика A и в точку касания B, равен 9°. Треугольник AOB — прямоугольный, угол B равен 90°, катет AB равен 8 мм. По таблице тригонометрических функций находим $\sin 9^\circ = 0{,}16$ и, следовательно, $OA = 50$ мм. Искомый радиус OC равен 42 мм.



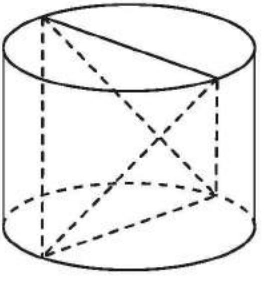
Ответ: 42.

23. Рассмотрим развертку боковой поверхности цилиндрической банки. Кратчайшим путем из A в B является путь ACB, длина которого равна длине отрезка AB'. Учитывая, что катет AB прямоугольного треугольника ABB' равен половине длины окружности, а катет BB' равен 5 см, то искомое кратчайшее расстояние равно $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (см).



Ответ: 13.

24. Тетраэдр можно поместить в банку так, как показано на рисунке. В этом случае диаметр банки равен ребру тетраэдра, т. е. радиус банки равен 3 см.



Ответ: 3.

25. Так как длина окружности радиуса 60 см приблизительно равна 360 см, то центральный угол, опирающийся на дугу 1 см, равен 1°. Таким образом, человек видит ноготь своего указательного пальца вытянутой руки под углом 1°.

Ответ: 1.

26. Если длина дуги окружности в 1° составляет 120 см, то длина всей окружности составляет $120 \cdot 360$ (см), а ее радиус будет примерно равен $\frac{120 \cdot 360}{6} = 7200$ (см). Таким образом, стрелок находится на расстоянии 72 м от мишени.

Ответ: 72.

27. Если длина дуги окружности в $12'$ составляет 1,7 м, то длина всей окружности составляет $1{,}7 \cdot 5 \cdot 360$ (м), а ее радиус будет примерно равен $\frac{1{,}7 \cdot 5 \cdot 360}{6} = 510$ (м). Таким образом, расстояние до человека равно 510 м.

Ответ: 510.

28. Если длина дуги окружности в $30'$ составляет 8 м, то длина всей окружности составляет $8 \cdot 2 \cdot 360$ (м), а ее радиус будет примерно равен $\frac{8 \cdot 2 \cdot 360}{6} = 960$ (м). Таким образом, расстояние до телеграфного столба равно 960 м.

Ответ: 960.

29. Если длина дуги окружности в $30'$ составляет 3400 км, то длина всей окружности составляет $3400 \cdot 2 \cdot 360$(км), а ее радиус будет примерно равен $\frac{3400 \cdot 2 \cdot 360}{6} = 408\,000$ (км). Таким образом, расстояние от Земли до Луны равно 408 000 км.

Ответ: 408 000.

30. Если длина дуги окружности в $30'$ составляет 1 300 000 км, то длина всей окружности составляет $1\,300\,000 \cdot 2 \cdot 360$ (км), а ее радиус будет примерно равен $\frac{1\,300\,000 \cdot 2 \cdot 360}{6} = 156\,000\,000$ (км). Таким образом, расстояние от Земли до Солнца равно 156 000 000 км.

Ответ: 156 000 000.

31. Длина окружности радиуса 408 000 км равна 2 448 000. Диаметр Земли приближенно составляет одну сто восьмидесятую часть окружности. Соответствующий центральный угол равен 2°. Таким образом, Земля видна с поверхности Луны под углом 2°.

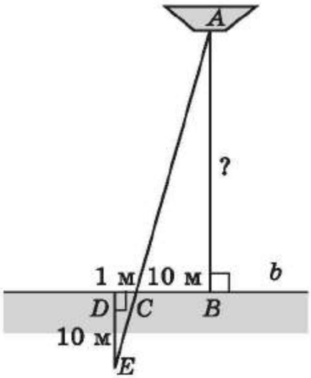
Ответ: 2.

32. Длина окружности радиуса 9000 м приближенно равна 54 000 м. Дуга в 30 м составляет одну 1800-ю часть окружности. Соответствующий центральный угол равен $12'$. Таким образом, самолет виден под углом $12'$.

Ответ: 12.

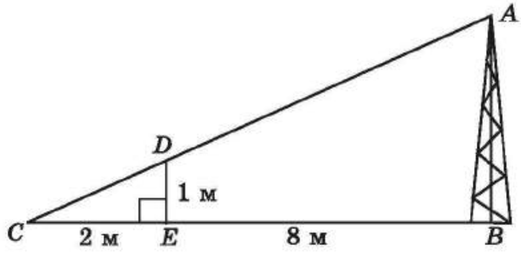
4. Подобие

1. Треугольники ABC и EDC подобны. Коэффициент подобия равен 10. Следовательно, $AB = 100$ м.



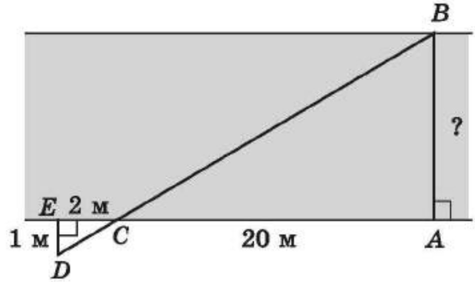
Ответ: 100.

2. Треугольники CDE и CAB подобны. Коэффициент подобия равен 5. Следовательно, $AB = 5$ м.



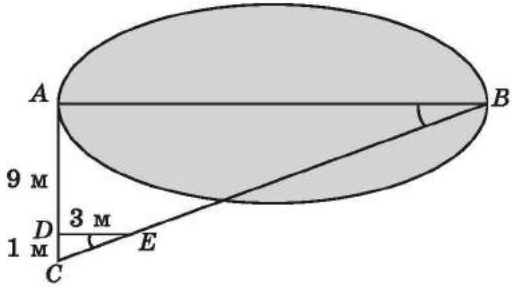
Ответ: 5.

3. Треугольники CDE и CBA подобны. Коэффициент подобия равен 10. Следовательно, $AB = 10$ м.



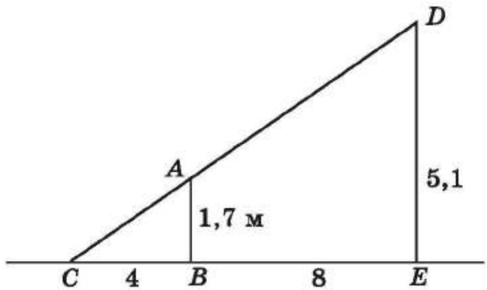
Ответ: 10.

4. Треугольники CDE и CAB подобны. Коэффициент подобия равен 10. Следовательно, $AB = 30$ м.



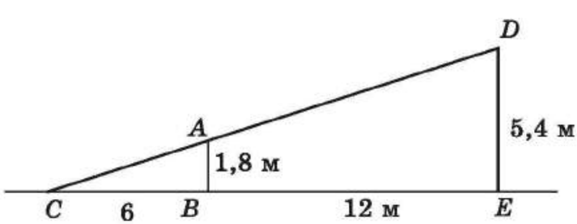
Ответ: 30.

5. Треугольники CAB и CDE подобны. Коэффициент подобия равен 3. Следовательно, $DE = 5{,}1$ м.



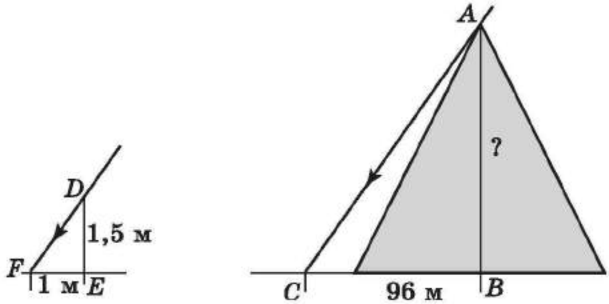
Ответ: 5,1.

6. Треугольники CAB и CDE подобны. Коэффициент подобия равен 3. Пусть $BC = x$. Тогда $(x + 12) : x = 3$. Откуда $x = 6$. Итак, длина тени равна 6 м.



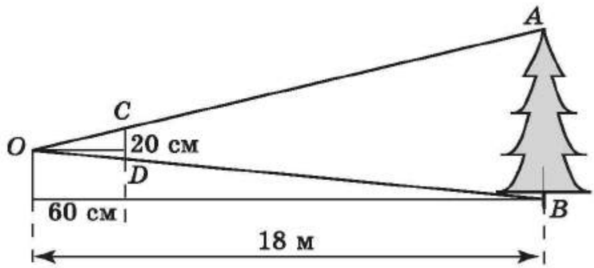
Ответ: 6.

7. Треугольники DEF и ABC подобны. Коэффициент подобия равен 96. Следовательно, $AB = 144$ м.



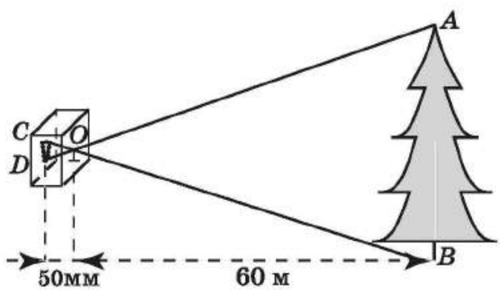
Ответ: 144.

8. Треугольники OCD и OAB подобны. Коэффициент подобия равен 30. Следовательно, $AB = 6$ м.



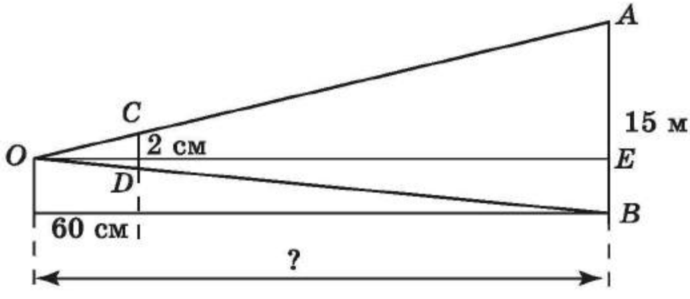
Ответ: 6.

9. Треугольники ODC и OAB подобны. Коэффициент подобия равен 1200. Следовательно, $AB = 0{,}015 \cdot 1200 = 18$ (м).



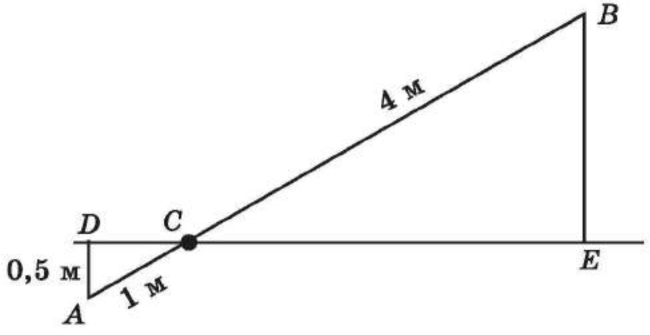
Ответ: 18.

10. Треугольники OCD и OAB подобны. Коэффициент подобия равен 750. Следовательно, $OE = 0,6 \cdot 750 = 450$ (м).



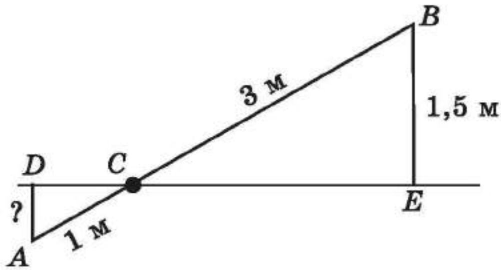
Ответ: 450.

11. Треугольники CAD и CBE подобны. Коэффициент подобия равен 4. Следовательно, $BE = 2$ м.



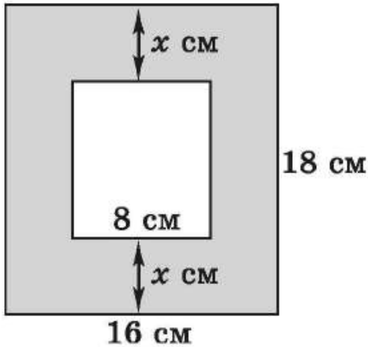
Ответ: 2.

12. Треугольники CAD и CBE подобны. Коэффициент подобия равен 3. Следовательно, $AD = 0,5$ м.



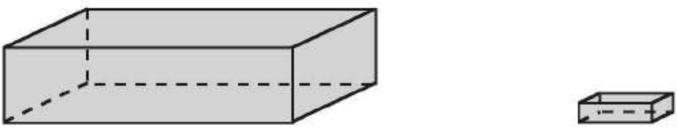
Ответ: 0,5.

13. Коэффициент подобия прямоугольников рамки и фотографии равен 2. Следовательно, высота фотографии равна 9 см, а ширина x рамки равна 4,5 см.



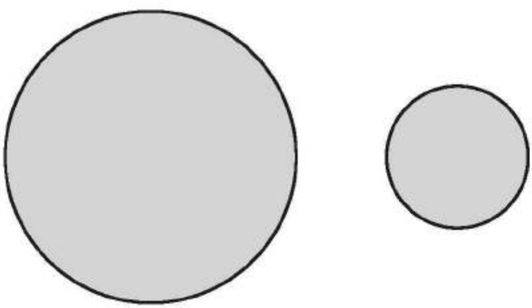
Ответ: 4,5.

14. Коэффициент подобия строительного и игрушечного кирпича равен 4. Следовательно, вес игрушечного кирпича в 4^3 раз меньше веса строительного кирпича, т. е. равен $4000 : 64 = 62{,}5$ г.



Ответ: 62,5.

15. Коэффициент подобия апельсина и мандарина равен 2. Следовательно, вес апельсина в 8 раз больше веса мандарина, т. е. равен 320 г.



Ответ: 320.

16. Коэффициент подобия Эйфелевой башни и ее копии равен 200. Следовательно, высота копии в 200 раз меньше высоты Эйфелевой башни, т. е. высота копии равна 150 см.

Ответ: 150.

17. Отношение расстояния до Луны к ее диаметру равно

$$408\,000 : 3400 = 120.$$

Следовательно, монету нужно удалить от наблюдателя на расстояние 120 см.

Ответ: 120.

18. Отношение расстояния до Луны к ее диаметру равно

$$408\,000 : 3400 = 120.$$

Следовательно, тарелку нужно удалить от наблюдателя на расстояние $120 \cdot 0{,}25 = 30$ (м).

Ответ: 30.

19. Отношение расстояния до Солнца к расстоянию до Луны равно отношению их диаметров, т. е. равно $1\,400\,000 : 3400 \approx 400$.

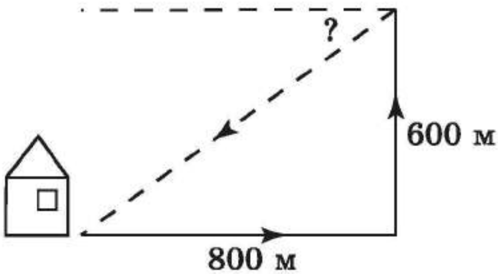
Ответ: 400.

20. Расстояние от Земли до Солнца в 400 раз больше расстояния от Земли до Луны, т. е. равно $408\,000 \cdot 400 = 163\,200\,000$ км.

Ответ: 163 200 000.

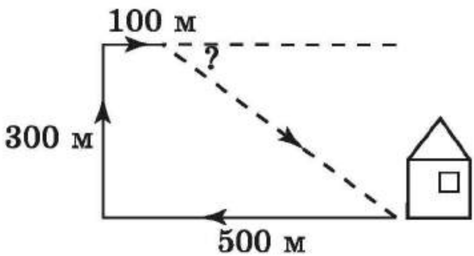
5. Тригонометрические функции

1. Тангенс искомого угла равен 0,75. По таблице тригонометрических функций находим, что угол равен 37°.



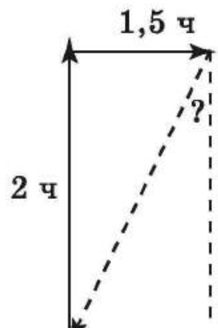
Ответ: 37.

2. Тангенс искомого угла равен 0,75. По таблице тригонометрических функций находим, что угол равен 37°.



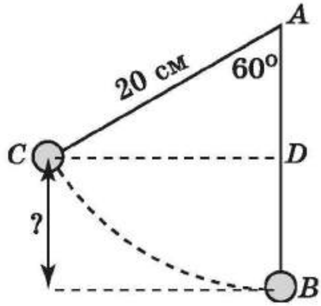
Ответ: 37.

3. Тангенс искомого угла равен 0,75. По таблице тригонометрических функций находим, что угол равен 37°.



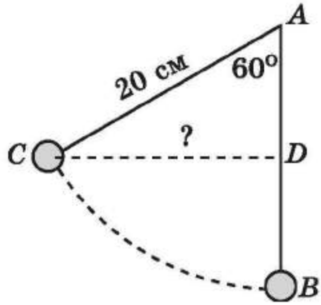
Ответ: 37.

4. $AD = AC \cdot \cos 60° = 10$ (см). Следовательно, $BD = 10$ см.



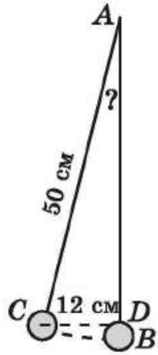
Ответ: 10.

5. $CD = AC \cdot \sin 60° = 20 \cdot 0{,}87 = 17{,}4$ (см).



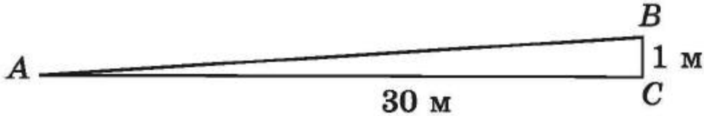
Ответ: 17,4.

6. Синус искомого угла равен 0,24. По таблице тригонометрических функций находим, что угол равен 14°.



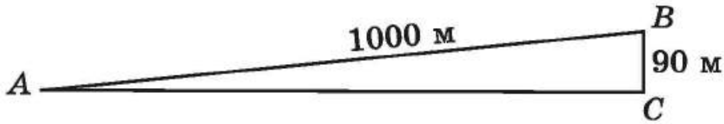
Ответ: 14.

7. Тангенс искомого угла примерно равен 0,03. По таблице тригонометрических функций находим, что угол равен 2°.



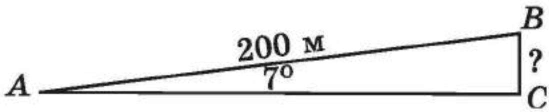
Ответ: 2.

8. Синус искомого угла равен 0,09. По таблице тригонометрических функций находим, что угол равен 5°.



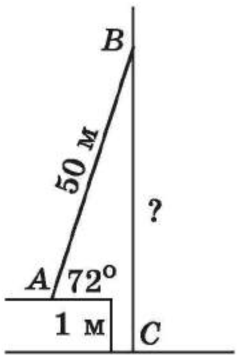
Ответ: 5.

9. Искомая высота BC равна $200 \cdot \sin 7° = 200 \cdot 0{,}12 = 24$ (м).



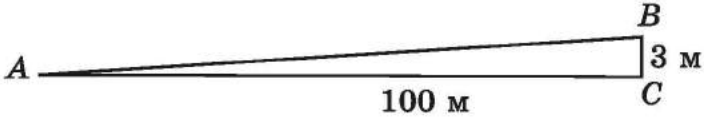
Ответ: 24.

10. Искомая высота BC равна $50 \cdot \sin 72° + 1 = 50 \cdot 0{,}95 + 1 = 48{,}5$ (м).



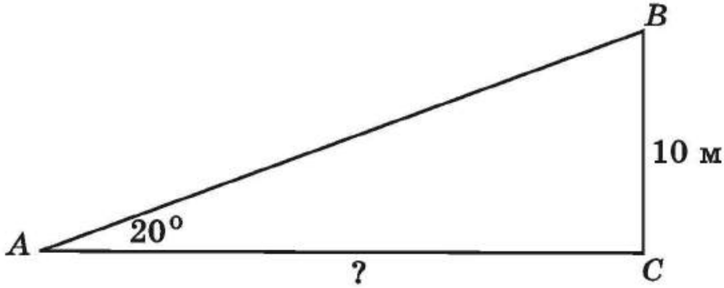
Ответ: 48,5.

11. Тангенс искомого угла равен 0,03. Используя таблицу тригонометрических функций, находим, что угол равен 2°.



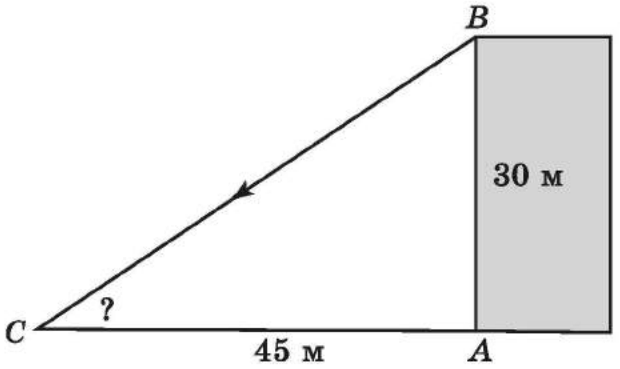
Ответ: 2.

12. Ширина реки равна $10 \cdot \mathrm{tg}\,70° = 10 \cdot 2{,}78 = 27{,}8$ (м).



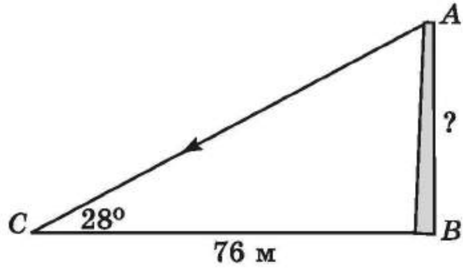
Ответ: 27,8.

13. Тангенс искомого угла приближенно равен 0,67. Используя таблицу тригонометрических функций, находим, что угол приближенно равен 34°.



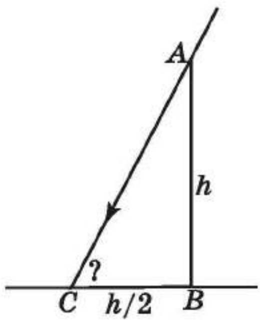
Ответ: 33.

14. Высота трубы равна $76 \cdot \operatorname{tg} 28^\circ = 76 \cdot 0{,}53 \approx 40$ (м).



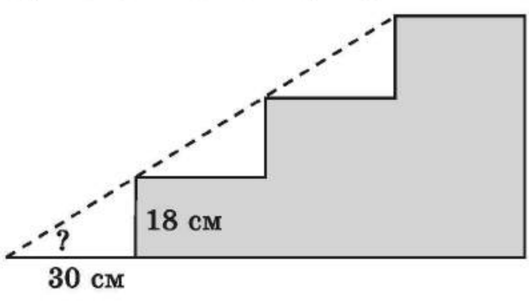
Ответ: 40.

15. Тангенс искомого угла равен 2. Используя таблицу тригонометрических функций, находим, что угол приближенно равен 64°.



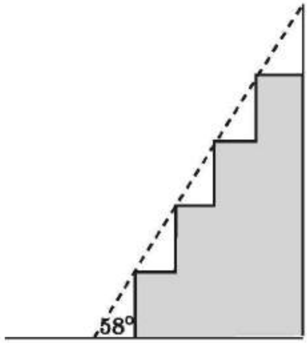
Ответ: 64.

16. Тангенс искомого угла равен 0,6. Используя таблицу тригонометрических функций, находим, что угол равен 31°.



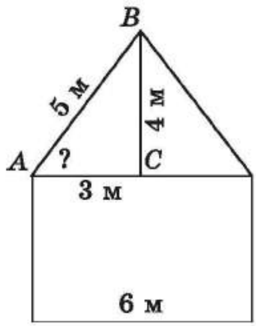
Ответ: 31.

17. Высота ступенек равна $20 \cdot \operatorname{tg} 58^\circ = 20 \cdot 1{,}6 = 32$ (см).



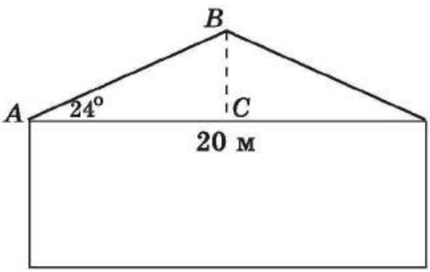
Ответ: 32.

18. В прямоугольном треугольнике ABC катет BC равен 4 м. Синус искомого угла равен 0,8. Используя таблицу тригонометрических функций, находим, что угол равен 53°.



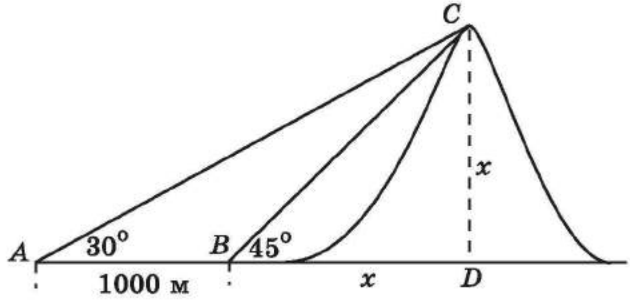
Ответ: 53.

19. Высота BC крыши равна $AC \cdot \operatorname{tg} 24^\circ = 10 \cdot 0{,}45 = 4{,}5$ (м).



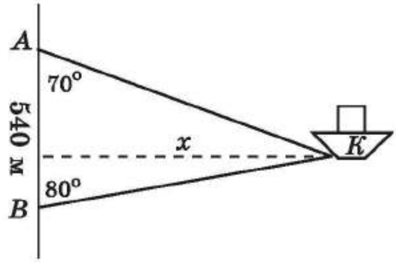
Ответ: 4,5.

20. Пусть высота CD горы равна x. Тогда имеет место равенство $(1000+x)\operatorname{tg}30^\circ = x$. Учитывая, что тангенс 30° приближенно равен 0,58, находим, что x приближенно равен 1381 м.



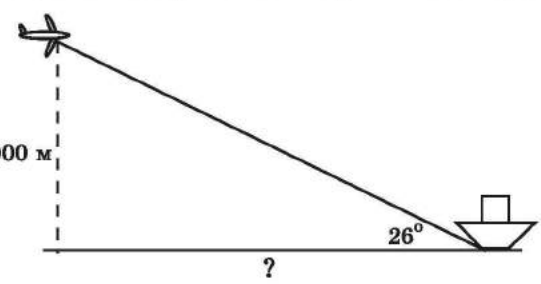
Ответ: 1381.

21. Пусть расстояние от корабля K до берега AB равно x. Тогда имеет место равенство $x\cdot\operatorname{tg}10^\circ + x\cdot\operatorname{tg}20^\circ = 540$. Учитывая, что $\operatorname{tg}10^\circ = 0{,}18$, $\operatorname{tg}20^\circ = 0{,}36$, находим, что $x = 1000$. Таким образом, искомое расстояние равно 1000 м.



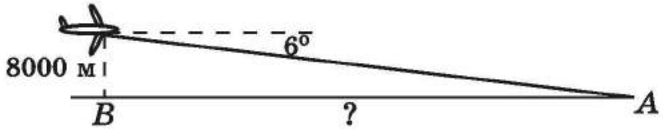
Ответ: 1000.

22. Искомое расстояние равно $1000\cdot\operatorname{tg}64^\circ = 1000\cdot 2{,}02 = 2020$ (м).



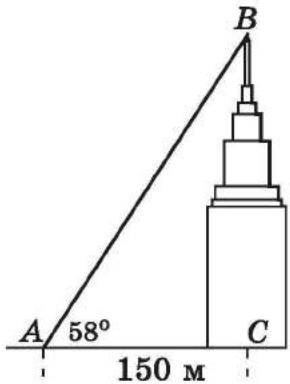
Ответ: 2020.

23. Искомое расстояние равно $8000 \cdot \operatorname{tg} 84° = 8000 \cdot 9{,}51 = 76\,080$ (м).



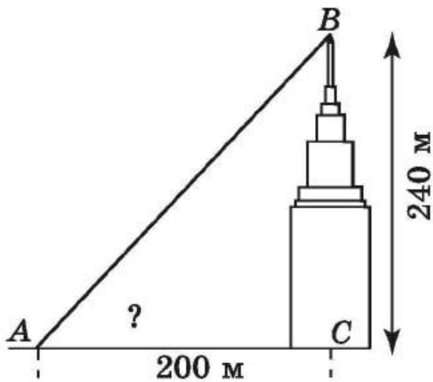
Ответ: 76 080.

24. Искомая высота башни равна $150 \cdot \operatorname{tg} 58° = 150 \cdot 1{,}6 = 240$ (м).



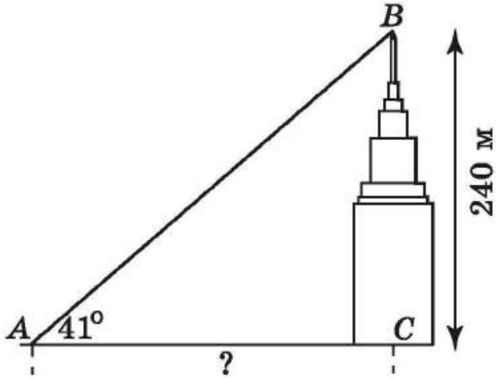
Ответ: 240.

25. Тангенс искомого угла равен 1,2. Следовательно, угол приближенно равен 50°.



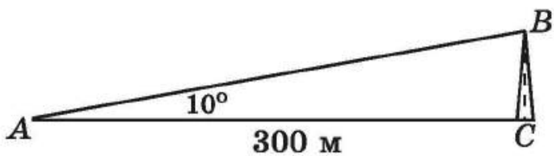
Ответ: 50.

26. Расстояние от наблюдателя до башни равно $240 \cdot \mathrm{tg}\, 49° = 240 \times \times 1{,}15 = 276$ (м).



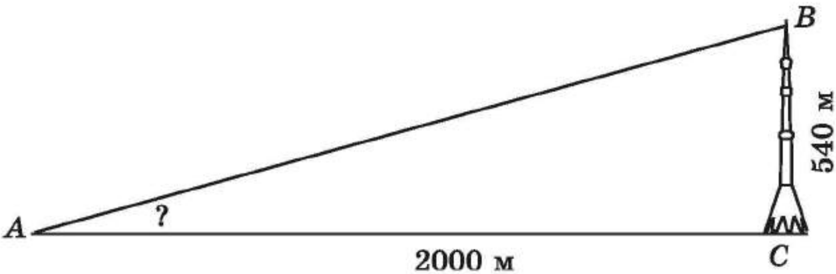
Ответ: 276.

27. Высота радиомачты равна $300 \cdot \mathrm{tg}\, 10° = 300 \cdot 0{,}18 = 54$ (м).



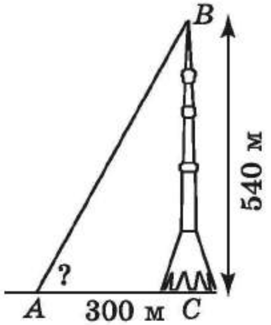
Ответ: 24.

28. Тангенс искомого угла равен 0,27. Следовательно, угол равен 15°.



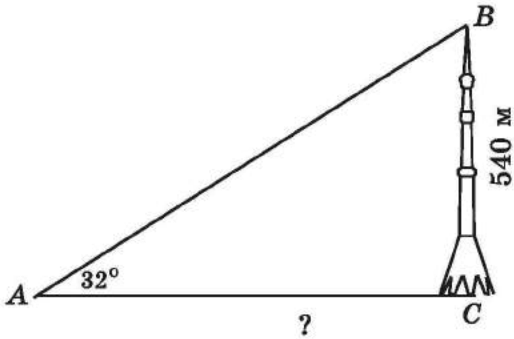
Ответ: 15.

29. Тангенс искомого угла равен 1,8. Следовательно, угол равен 61°.



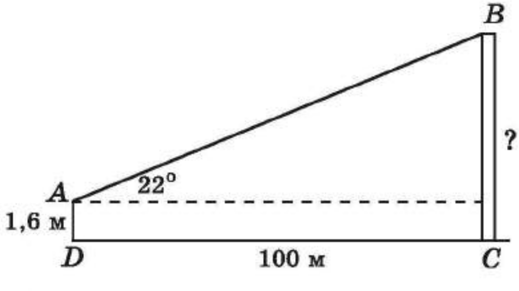
Ответ: 61.

30. Расстояние от Останкинской башни до человека равно $540 \times \times \operatorname{tg} 58^\circ = 540 \cdot 1{,}6 = 864$ (м).



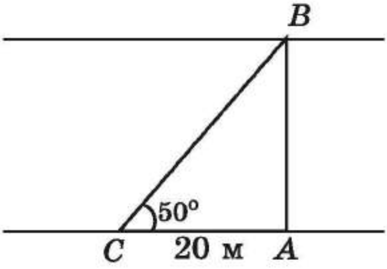
Ответ: 864.

31. Высота колонны равна $100 \cdot \operatorname{tg} 22^\circ + 1{,}6 = 100 \cdot 0{,}4 + 1{,}6 = 41{,}6$ (м).



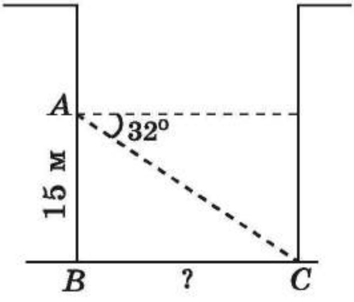
Ответ: 41,6.

32. Ширина реки равна $20 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = 20 \cdot 1{,}19 = 23{,}8$ (м).



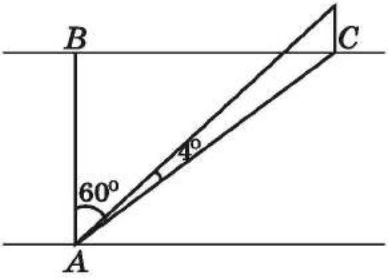
Ответ: 23,8.

33. Ширина улицы равна $15 \cdot \operatorname{tg} 58^\circ = 15 \cdot 1{,}6 = 24$ (м).



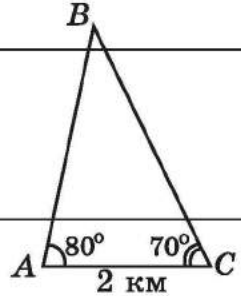
Ответ: 24.

34. Расстояние AC равно $1{,}7 \cdot \operatorname{tg} 86^\circ = 1{,}7 \cdot 14{,}3 = 24{,}31$ (м). Ширина AB реки составляет половину AC и приближенно равна 12 м.



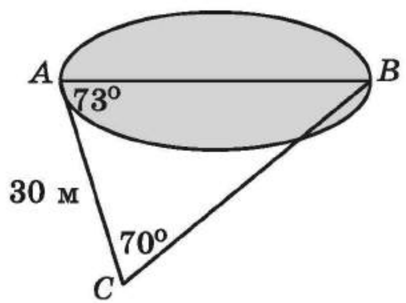
Ответ: 12.

35. Угол B равен $30°$. Используя теорему синусов, получаем $AC = 4 \cdot \sin 70° = 4 \cdot 0{,}94 = 3{,}76$ (км) $= 3760$ (м).



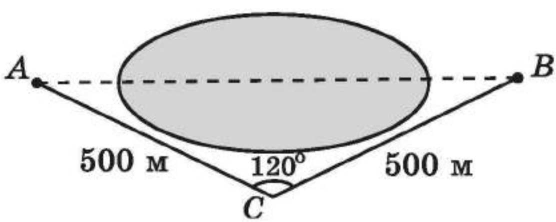
Ответ: 3760.

36. Угол B равен $37°$. Используя теорему синусов, находим $AB = \frac{30 \cdot \sin 70°}{\sin 37°} = \frac{30 \cdot 0{,}94}{0{,}6} = 47$ (м).



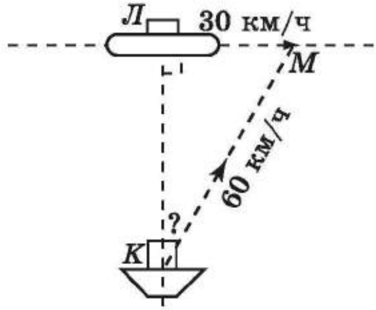
Ответ: 47.

37. Расстояние AD, равное половине расстояния AB, равно $500 \cdot \sin 60° = 500 \cdot 0{,}87 = 435$ (м). Откуда $AB = 870$ (м).



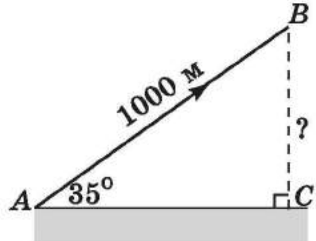
Ответ: 870.

38. В прямоугольном треугольнике *КЛМ* катет *ЛМ* равен половине гипотенузы *КМ*. Следовательно, искомый угол *ЛКМ* равен 30°.



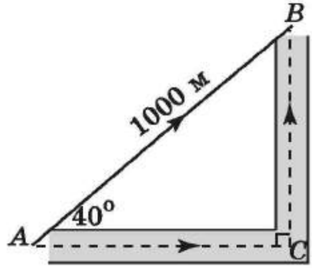
Ответ: 30.

39. Искомое расстояние BC равно $1000 \cdot \sin 35° = 1000 \cdot 0{,}57 = 570$ (м).



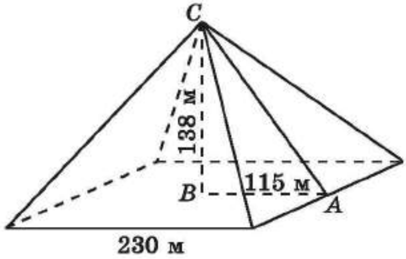
Ответ: 570.

40. Путь по дороге состоит из отрезков AC и BC. $BC = 1000 \times \sin 40° = 1000 \cdot 0{,}64 = 640$ (м), $AC = 1000 \cdot \sin 50° = 1000 \cdot 0{,}77 = 770$ (м). В сумме эти отрезки составляют 1410 м. Таким образом, прямой путь AB на 410 м короче пути по дороге.



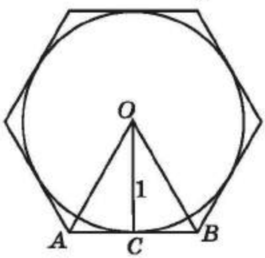
Ответ: 410.

41. Тангенс искомого угла BAC равен $\frac{138}{115} = 1{,}2$. Используя таблицу тригонометрических функций, находим, что угол приближенно равен 50°.



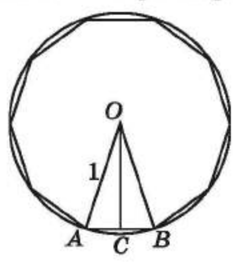
Ответ: 50.

42. Периметр шестиугольника, описанного около единичной окружности, равен $AC \cdot 12 = 1 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot 12 = 0{,}58 \cdot 12 = 6{,}96$. Число π приближенно равно половине этого периметра, т. е. равно 3,48.



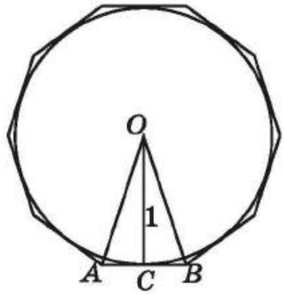
Ответ: 3,48.

43. Центральный угол AOB, опирающийся на сторону правильного десятиугольника, вписанного в единичную окружность, равен 36°. Периметр десятиугольника, вписанного в единичную окружность, равен $AC \cdot 20 = 1 \cdot \sin 18^\circ \cdot 20 = 0{,}31 \cdot 20 = 6{,}2$. Число π приближенно равно половине этого периметра, т. е. равно 3,1.



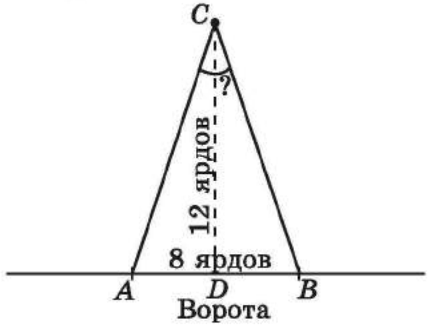
Ответ: 3,1.

44. Периметр десятиугольника, описанного около единичной окружности, равен $AC \cdot 20 = 1 \cdot \text{tg}\, 18^\circ \cdot 20 = 0{,}32 \cdot 20 = 6{,}4$. Число π приближенно равно половине этого периметра, т. е. равно 3,2.



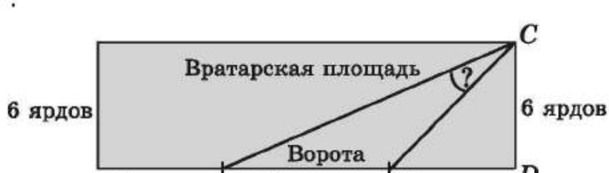
Ответ: 3,2.

45. В равнобедренном треугольнике ABC $AC^2 = BC^2 = 160$. По теореме косинусов $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle ACB$. Откуда $\cos\angle ACB = 0{,}8$ и, следовательно, $\sin\angle ACB = 0{,}6$. Используя таблицу тригонометрических функций, находим $\angle ACB = 37^\circ$.



Ответ: 37.

46. Угол BCD равен 45°. Тангенс угла ACD примерно равен 2,33. Следовательно, угол ACD примерно равен 67°, а искомый угол ACB равен 22°.

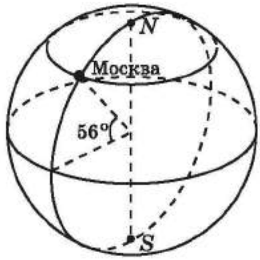


Ответ: 22.

47. Угол BCD равен 45°. Тангенс угла ACD примерно 1,44. Следовательно, угол ACD примерно равен 55°, а искомый угол ACB равен 10°.

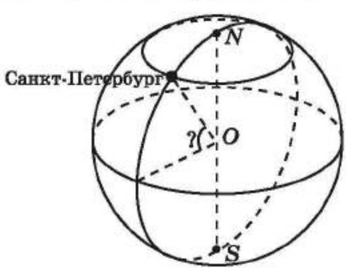
Ответ: 10.

48. Длина окружности параллели, на которой находится г. Москва, равна длине большой окружности, умноженной на синус 34°, т. е. равна $40\,000 \cdot 0{,}56 = 22\,400$ (км).



Ответ: 22 400.

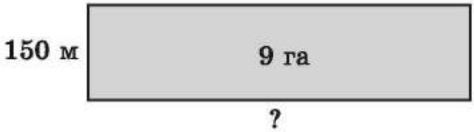
49. Так как длина окружности параллели, на которой находится г. Санкт-Петербург, вдвое меньше большой окружности, то катет OB прямоугольного треугольника OBC вдвое меньше гипотенузы OC. Следовательно, искомый угол AOC равен 60°.



Ответ: 60.

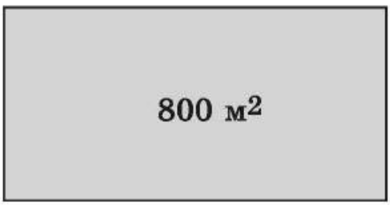
6. Площадь

1. 9 га составляют 90 000 м^2. Длина участка равна $90\,000 : 150 = 600$ (м).



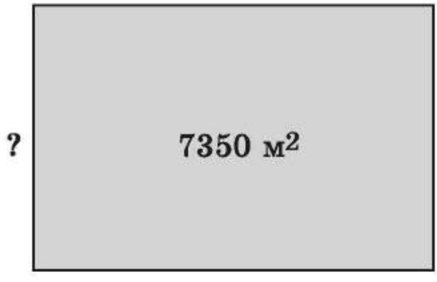
Ответ: 600.

2. Пусть меньшая сторона равна x. Тогда площадь участка равна $2x^2$. Решая уравнение $2x^2 = 800$, находим $x = 20$. Значит, периметр участка равен 120 м.



Ответ: 120.

3. Пусть ширина футбольного поля равна x. Тогда его площадь равна $1{,}5x^2$. Решая уравнение $1{,}5x^2 = 7350$, находим $x = 70$. Значит, ширина поля равна 70 м.



Ответ: 70.

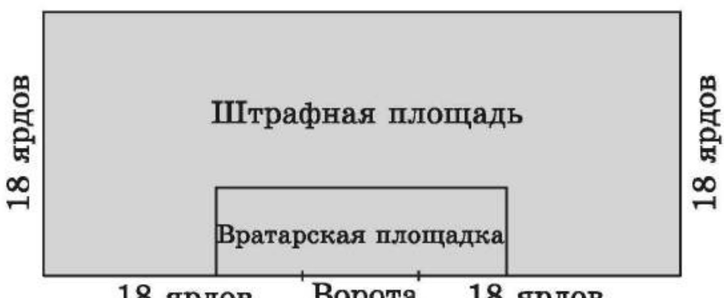
4. Ширина футбольных ворот равна 24 футам, высота — 8 футам. Следовательно, площадь футбольных ворот равна 192 квадратным футам.

Ответ: 192.

5. Площадь вратарской площадки равна 120 квадратным ярдам. В квадратных футах она составляет $120 \cdot 9 = 1080$ (квадратных футов).

Ответ: 1080.

6. Площадь штрафной площади равна 792 квадратным ярдам. В квадратных метрах она приближенно составляет $792 \cdot 0{,}81 = 641{,}52 \approx 642$ (м^2).

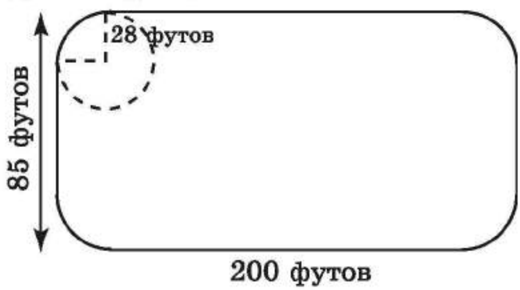


Ответ: 642.

7. Площадь ворот равна 24 квадратным футам. В квадратных метрах она приближенно составляет $24 \cdot 0{,}093 \approx 2{,}23$ (м^2).

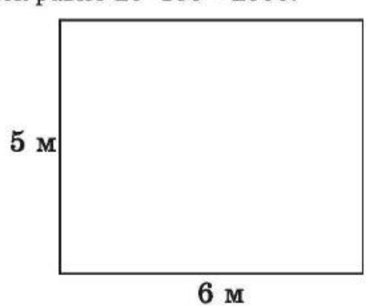
Ответ: 2,23.

8. Площадь прямоугольника размером 200×85 (футов) равна 17 000 квадратных футов. Площадь четырех квадратов со сторонами 28 футов равна $4 \cdot 784$ (квадратных фута). Принимая $\pi \approx 3$, получим, что площадь круга радиуса 28 футов равна $3 \cdot 784$(квадратных фута). Следовательно, площадь хоккейной площадки равна $17\,000 - 784 = {}$ $= 16\,216$ (квадратных футов).



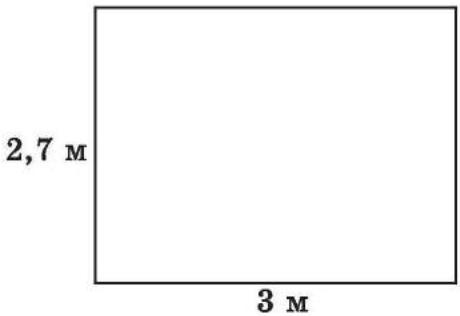
Ответ: 16 216.

9. Число дощечек равно $20 \cdot 100 = 2000$.



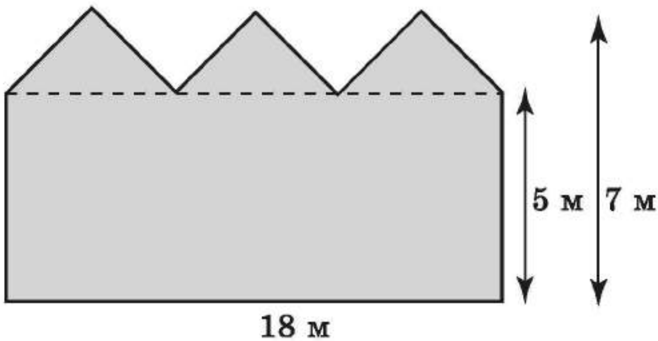
Ответ: 2000.

10. Число плиток равно $20 \cdot 18 = 360$.



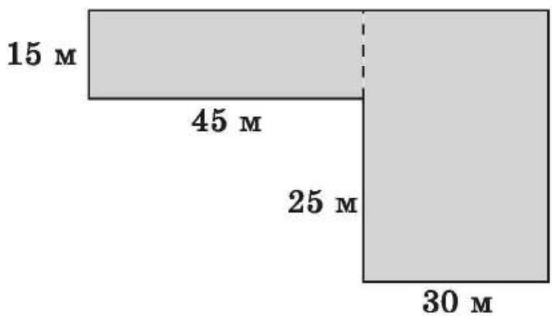
Ответ: 360.

11. Площадь стены равна $18 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 2 = 108$ (м^2).



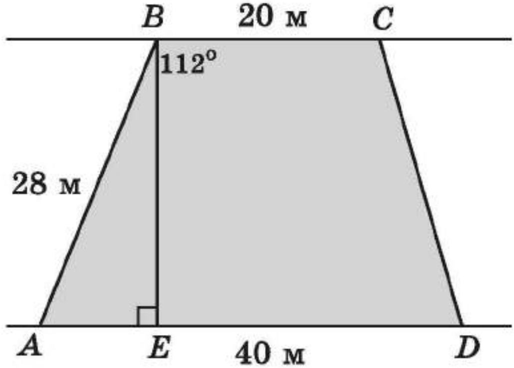
Ответ: 108.

12. Площадь участка равна $15 \cdot 45 + 30 \cdot 40 = 1875$ (м^2).



Ответ: 1875.

13. Высота BE трапеции $ABCD$ равна $28 \cdot \sin 68° = 28 \cdot 0{,}93 = 26{,}04$ (м). Площадь трапеции равна $30 \cdot 26{,}04 = 781{,}2 \approx 781$ (м^2).



Ответ: 781.

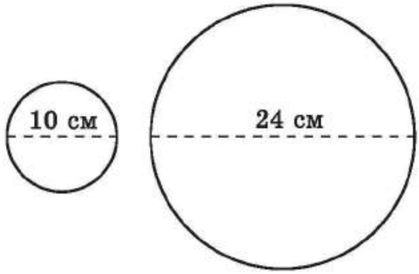
14. В 1200 квадратных метрах содержится 120 000 квадратных дециметров. Если масштаб равен 1 : 100, то площадь соответствующего участка на плане равна 12 дм^2.

Ответ: 12.

15. Площадь участка земли равна 3,75 $3{,}75 \cdot 200^2 = 150\,000$ (дм^2). Это составляет 1500 м^2.

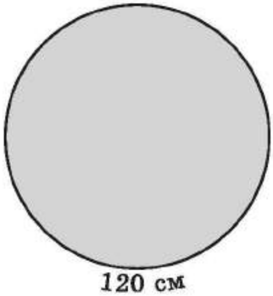
Ответ: 1500.

16. Суммарная площадь поперечных сечений двух труб равна $\pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 12^2 = \pi \cdot 13^2$. Таким образом, радиус новой трубы равен 13 см, а ее диаметр равен 26 см.



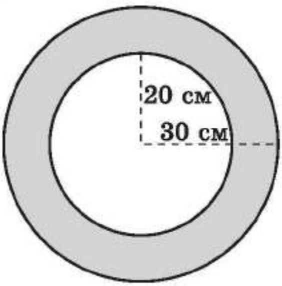
Ответ: 26.

17. Если принять $\pi \approx 3$, то радиус поперечного сечения будет равен 20 см, а искомая площадь равна 1200 см^2.



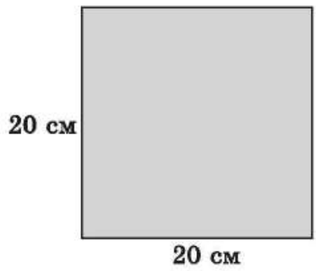
Ответ: 1200.

18. Если принять $\pi \approx 3$, то площадь кольца будет равна 1500 см^2. При толщине ленты 0,5 мм, ее длина составит $1500 : 0{,}05 = 30\,000$ (см), т. е. 300 м.



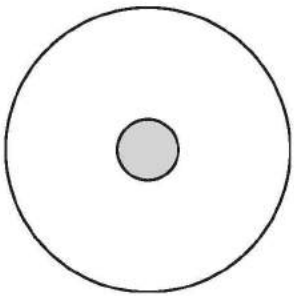
Ответ: 300.

19. Если принять $\pi \approx 3$, то площадь круга диаметра 20 см составляет 300 см^2. Площадь квадрата равна 400 см^2. Таким образом, площадь обрезков составляет одну четверть площади квадрата, т. е. 25%.



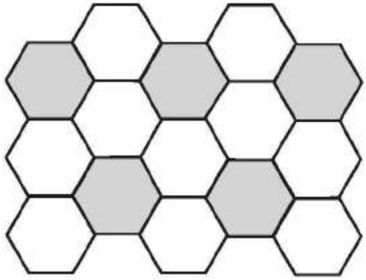
Ответ: 25.

20. Так как диаметр зрачка может увеличиваться в 5 раз, то площадь зрачка может увеличиваться в 25 раз.



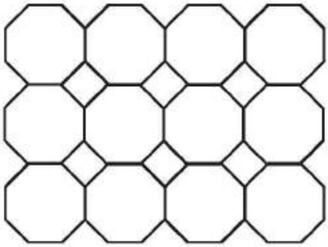
Ответ: 25.

21. В каждой вертикальной полоске паркета на одну черную плитку приходится две белых. Таким образом, белых плиток паркета в два раза больше, чем черных.



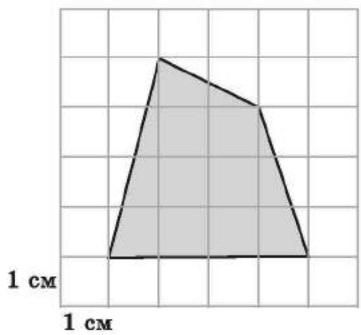
Ответ: 2.

22. На каждую восьмиугольную плитку приходится одна квадратная. Отношение числа квадратных плиток к числу восьмиугольных равно 1.



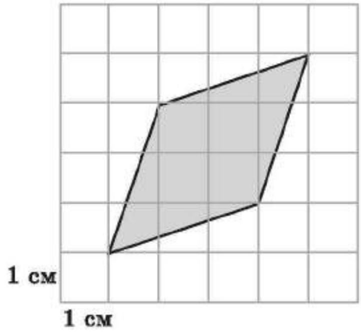
Ответ: 1.

23. Площадь четырехугольника на плане равна 10,5 см^2. Площадь лесного массива равна $10{,}5 \cdot 40\,000 = 420\,000$ (м^2).



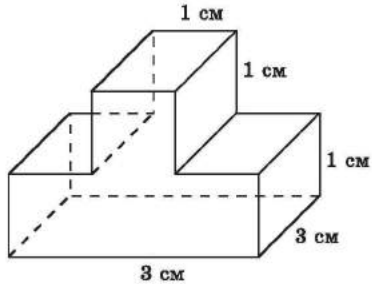
Ответ: 420 000.

24. Площадь четырехугольника на плане равна 8 см^2. Площадь лесного массива равна $8 \cdot 40\,000 = 320\,000$ (м^2).



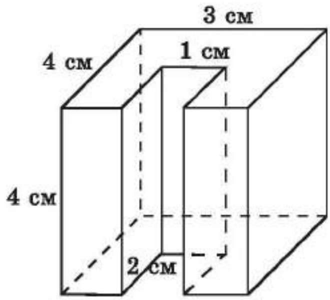
Ответ: 320 000.

25. Поверхность детали состоит из двух невыпуклых восьмиугольников площади 4 см^2 каждый, семи прямоугольников площади 3 см^2 каждый и одного квадрата площади 9 см^2. Площадь всей поверхности равна $8+21+9=38$ (см^2).



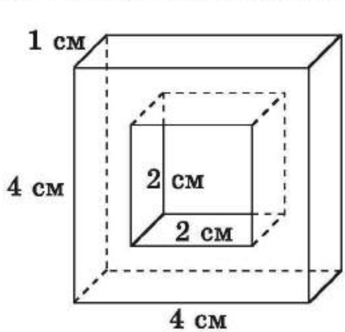
Ответ: 38.

26. Площадь поверхности детали, изображенной на рисунке, равна 92 см^2.



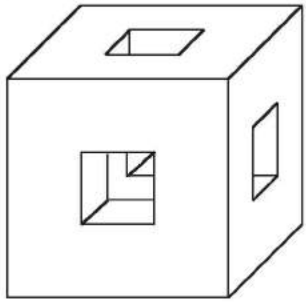
Ответ: 92.

27. Площадь поверхности детали, изображенной на рисунке, равна 48 см^2.



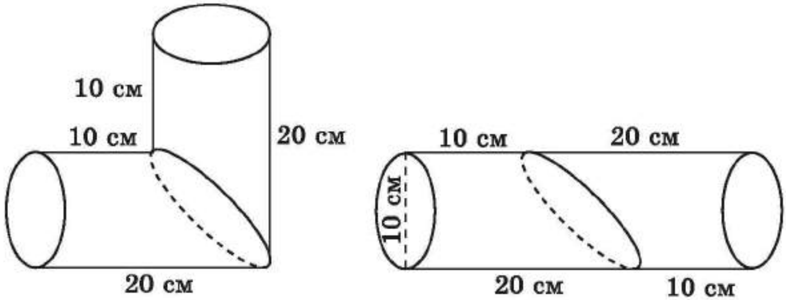
Ответ: 48.

28. Площадь поверхности равна 78 см^2.



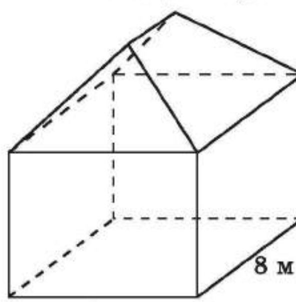
Ответ: 78.

29. Площадь поверхности детали, изображенной на рисунке слева, равна площади поверхности цилиндра, изображенного на рисунке справа, составленной из двух частей цилиндров. Принимая $\pi \approx 3$, получаем, что искомая площадь поверхности равна 1050 см^2.



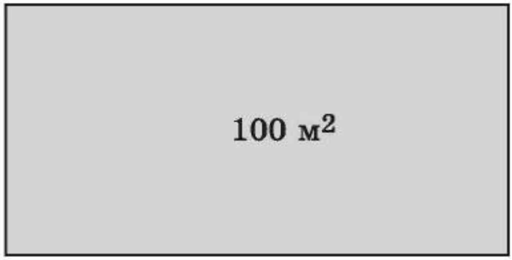
Ответ: 1050.

30. Площадь крыши равна $\frac{48}{\cos 45^\circ} = \frac{48}{0,71} \approx 68$ (м^2).



Ответ: 68.

31. Наименьший периметр будет в случае, если площадка имеет форму квадрата. Он равен 40 м.



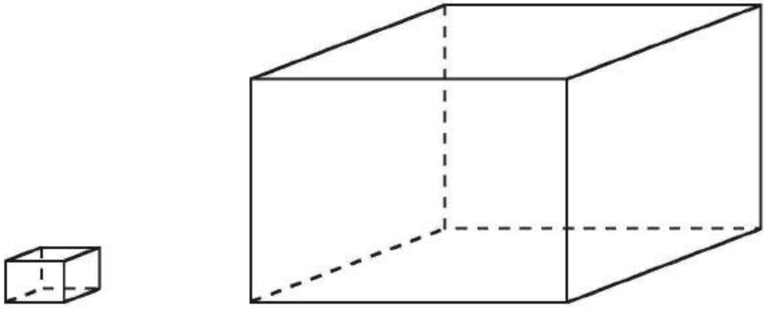
Ответ: 40.

32. Площадь поверхности Солнца больше площади поверхности Луны в $400^2 = 160\,000$ (раз).

Ответ: 160 000.

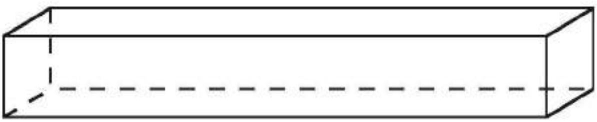
7. Объем

1. Число коробок равно $\frac{150}{30} \cdot \frac{200}{40} \cdot \frac{300}{50} = 150$.



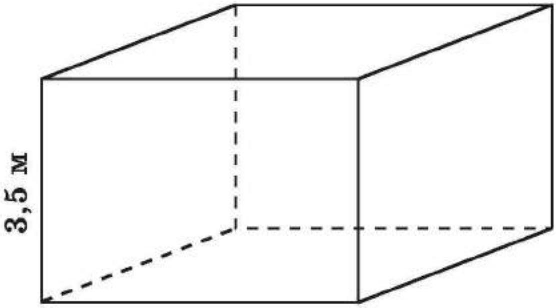
Ответ: 150.

2. Число досок равно $\frac{105}{35} \cdot \frac{40}{20} \cdot \frac{30}{2} = 90$.



Ответ: 90.

3. Объем кирпича равен 1950 см^3. Объемный вес кирпича равен 1,7 г/см^3. Следовательно, вес одного кирпича равен 3315 г.

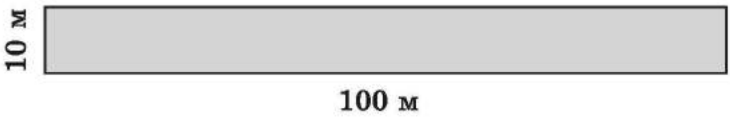


Ответ: 3315.

4. Объем кабинета должен быть равен $7{,}5 \cdot 28 = 210$ (м^3). Площадь кабинета должна быть равна $\frac{210}{3{,}5} = 60$ (м^2).

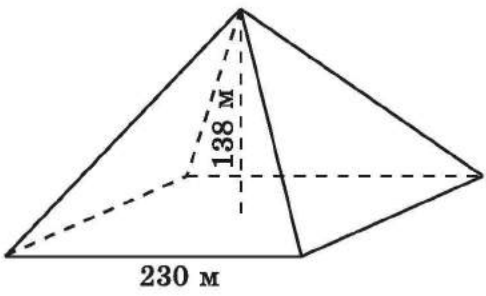
Ответ: 60.

5. Объем асфальта равен 50 м^3. Вес асфальта равен 120 т. Потребуется 24 машины.



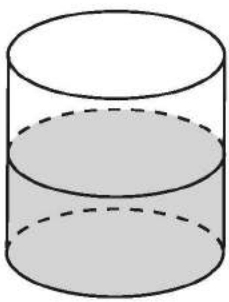
Ответ: 24.

6. Площадь основания пирамиды равна 52 900 м^2. Объем пирамиды равен 2 433 400 м^3.



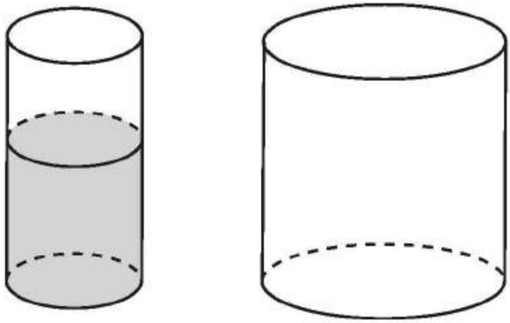
Ответ: 2 433 400.

7. Объем детали равен половине объема воды, т. е. равен 3 дм^3.



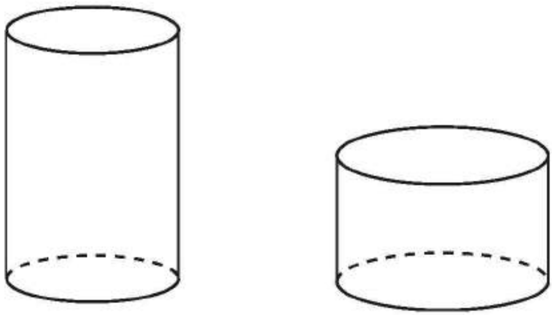
Ответ: 3.

8. Во втором сосуде вода будет находиться на уровне 3 см.



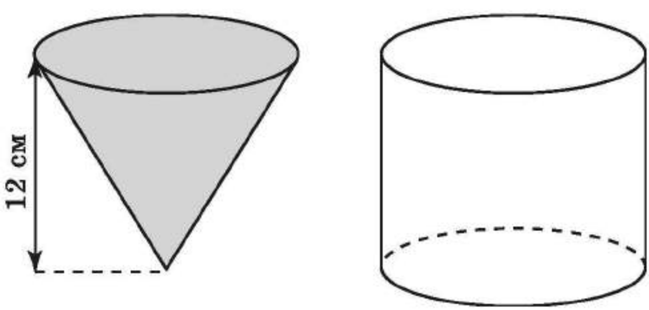
Ответ: 3.

9. Отношение объема второй кружки к объему первой равно 1,125.



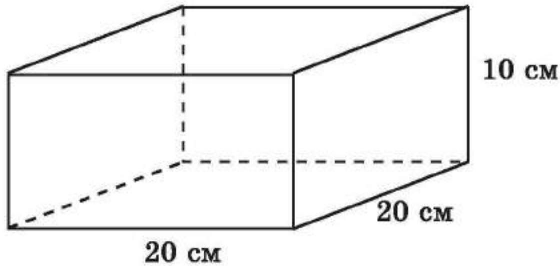
Ответ: 1,125.

10. В цилиндрическом сосуде поверхность воды будет находиться на высоте 4 см от основания.



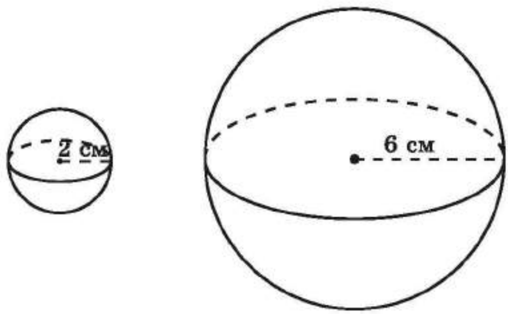
Ответ: 4.

11. Объем параллелепипеда равен 4000 см^3. Принимая $\pi \approx 3$, получаем, что радиус шара равен 10 см.



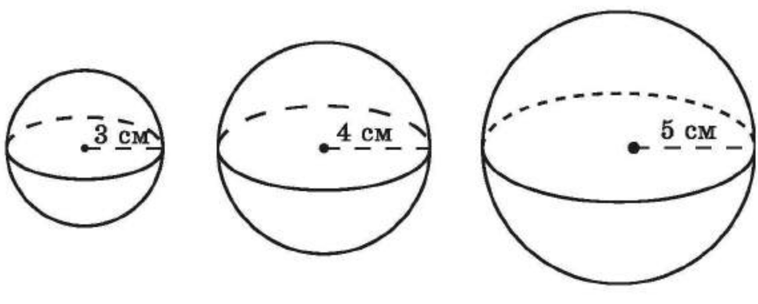
Ответ: 10.

12. Объем шара радиуса 6 см в 27 раз больше объема шара радиуса 2 см. Таким образом, нужно взять 27 шаров радиуса 2 см.



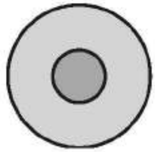
Ответ: 27.

13. Объем трех шаров равен $\frac{4}{3}\pi(27+64+125)=\frac{4}{3}\pi\cdot 216$. Следовательно, искомый радиус шара равен 6 см.



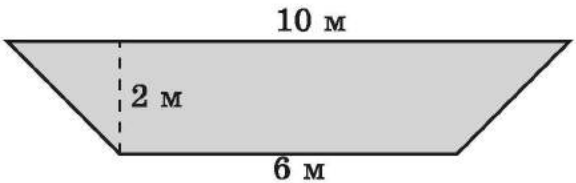
Ответ: 6.

14. Диаметр вишни в три раза больше диаметра косточки. Следовательно, объем вишни в 27 раз больше объема косточки и, значит, объем мякоти в 26 раз больше объем косточки.



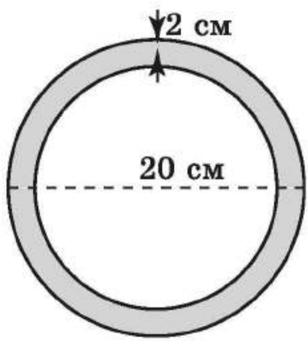
Ответ: 26.

15. Площадь профиля равна 16 м^2. За одну минуту через него пройдет $16 \cdot 60 = 960$(м^3) воды.



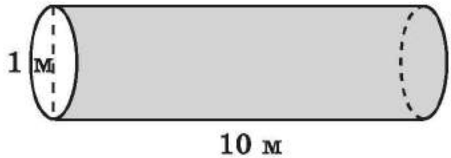
Ответ: 960.

16. Площадь поперечного сечения стенок трубы равна $36\pi \approx$ ≈ 108 (см^2). Объем трубы равен $108 \cdot 200 \approx 21\,600$ (см^3). Вес трубы равен $21\,600 \cdot 7{,}5 = 162\,000$ (г) $= 162$ (кг).



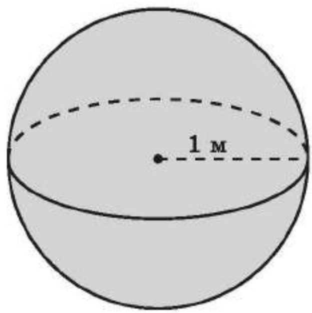
Ответ: 162.

17. Площадь внешней поверхности трубы примерно равна 30 м^2. Объем краски примерно равен 30 дм^3.



Ответ: 30.

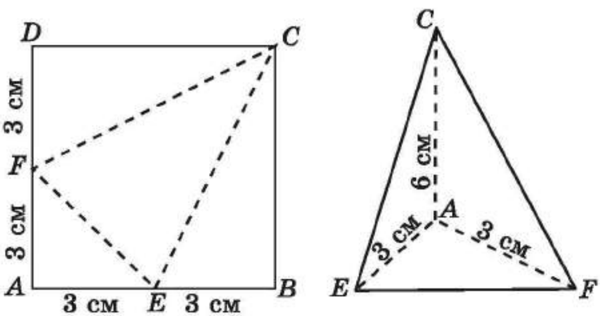
18. Площадь поверхности шара примерно равна 1200 дм^2. Объем краски примерно равен 6 дм^3.



Ответ: 6.

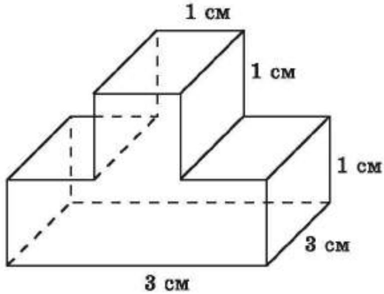
19. Пирамида изображена на правом рисунке. Ее площадь основания равна 4,5 см^2, а объем равен 9 см^3.

20 см



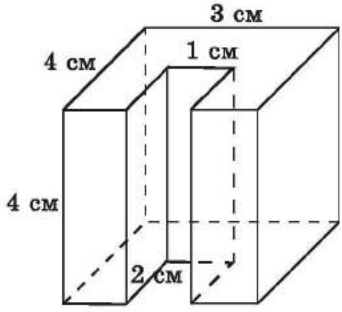
Ответ: 9.

20. Объем детали равен сумме объемов двух прямоугольных параллелепипедов размерами $3 \times 3 \times 1$ (см) и $3 \times 1 \times 1$ (см). Он равен 12 $см^3$.



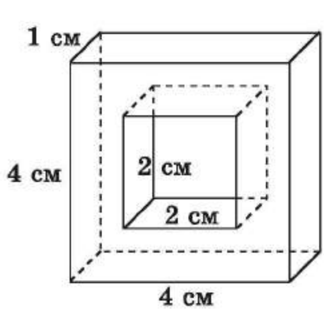
Ответ: 12.

21. Объем детали равен разности объемов двух прямоугольных параллелепипедов размерами $4 \times 3 \times 4$ (см) и $2 \times 1 \times 4$ (см). Он равен 40 ($см^3$).



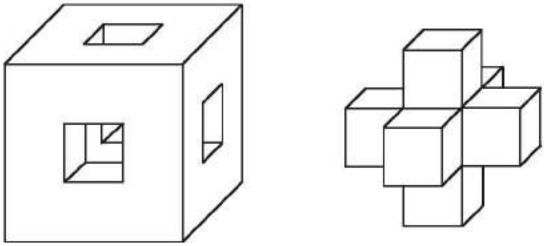
Ответ: 40.

22. Объем детали равен разности объемов двух прямоугольных параллелепипедов размерами $4 \times 1 \times 4$ (см) и $2 \times 1 \times 2$ (см). Он равен 12 $см^3$.



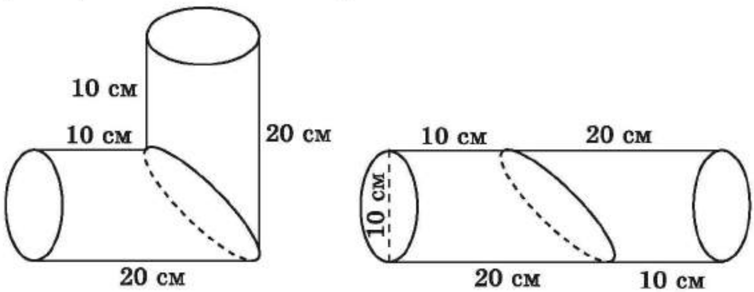
Ответ: 12.

23. Объем детали равен разности объемов куба с ребром 6 см и пространственного креста, состоящего из семи кубов с ребрами 2 см. Он равен 160 см^3. Вес детали равен 144 г.



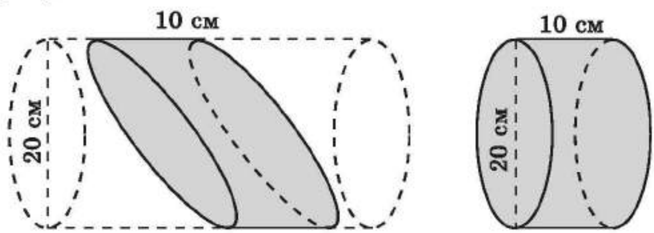
Ответ: 144.

24. Объем детали, изображенной на рисунке слева, равен объему цилиндра, изображенного на рисунке справа. Принимая $\pi \approx 3$, получаем, что искомый объем равен 2250 см^3.



Ответ: 2250.

25. Объем детали равен объему цилиндра, радиус основания и высота которого равны 10 см. Принимая $\pi \approx 3$, получаем, что его объем примерно равен 3000 см^3.



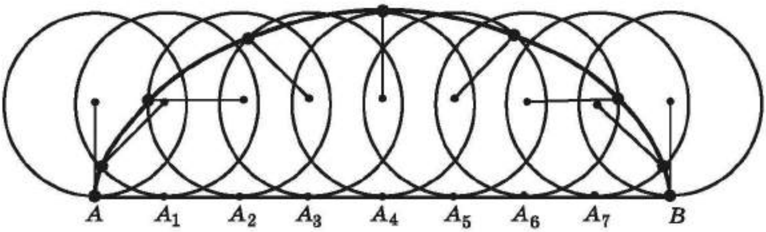
Ответ: 3000.

26. Объем Солнца в 64 000 000 раз больше объема Луны.

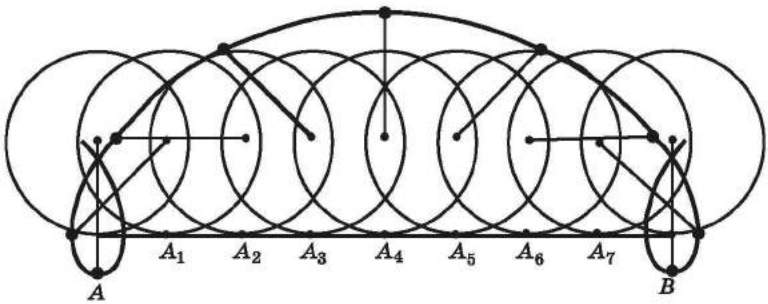
Ответ: 64 000 000.

8. Траектории

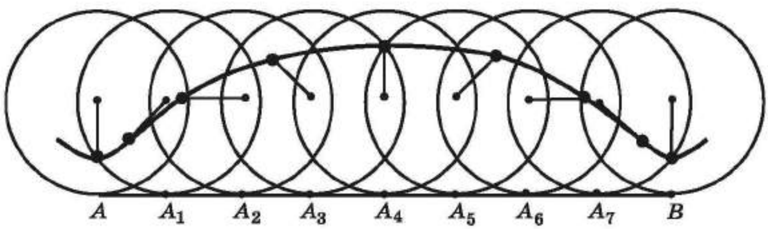
1.



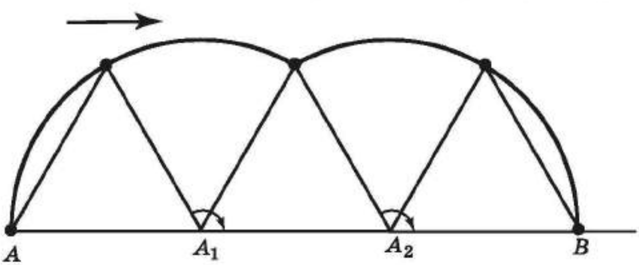
2.



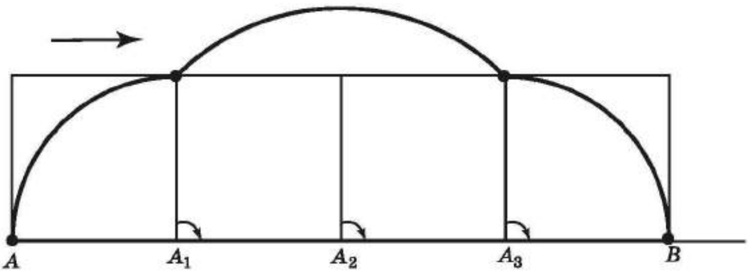
3.



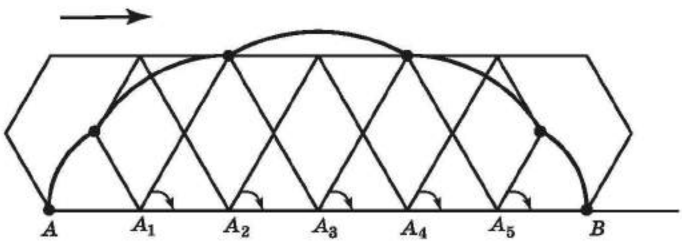
4.



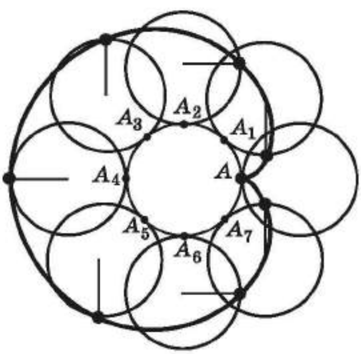
5.


A
A_1
A_2
A_3
B

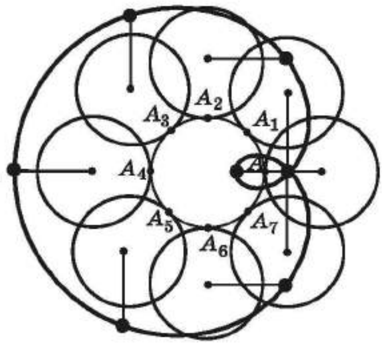
6.


A
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
B

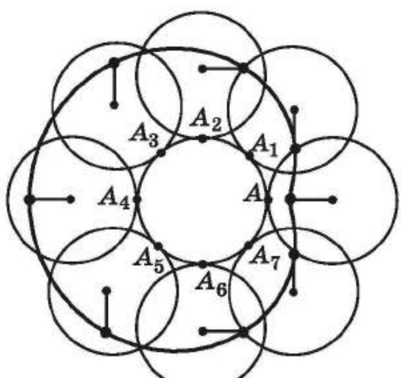
7.


A_3
A_2
A_1
A_4
A
A_5
A_6
A_7

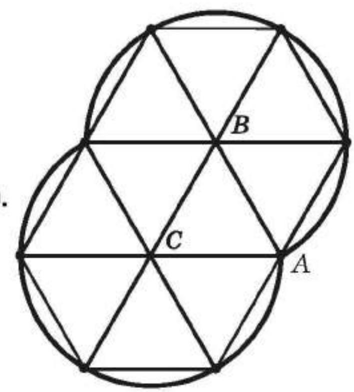
8.


A_2
A_3
A_1
A_4
A_5
A_6
A_7

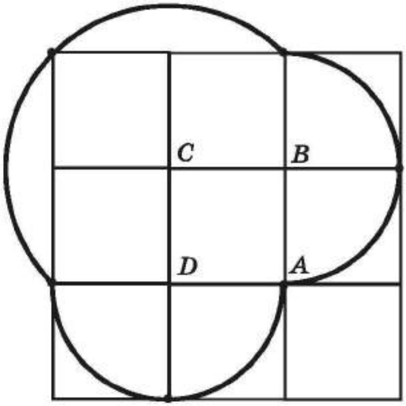
9.


A_2
A_3
A_1
A_4
A
A_5
A_7
A_6

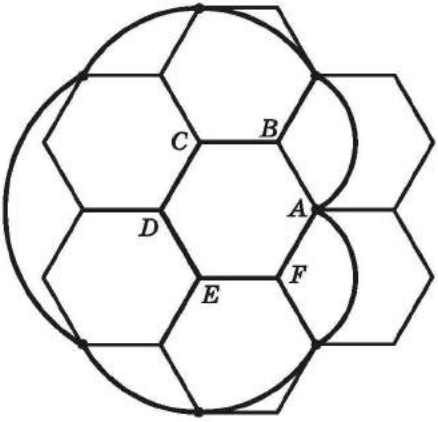
10.


B
C
A

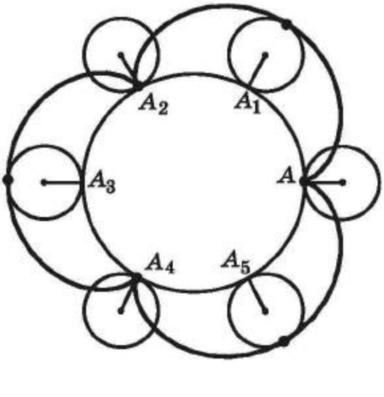
11.



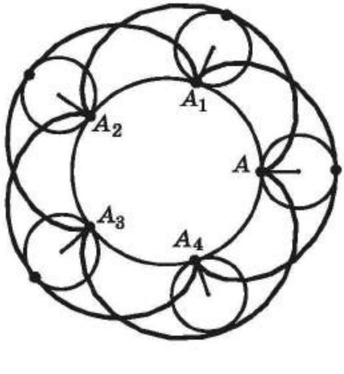
12.

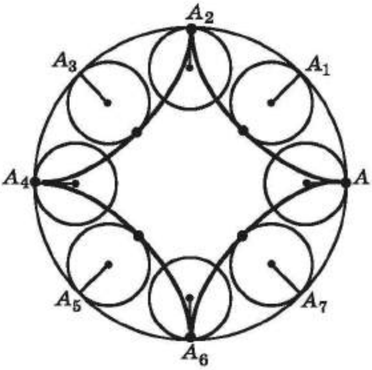


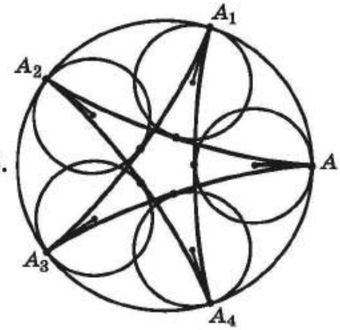
13.

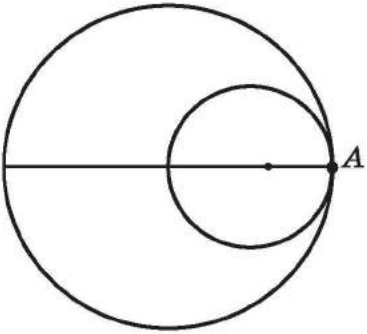


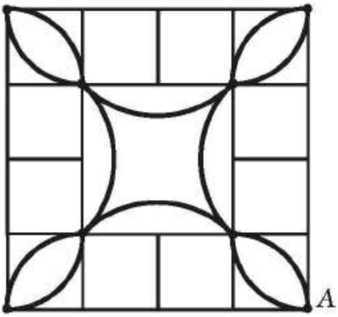
14.



15. 

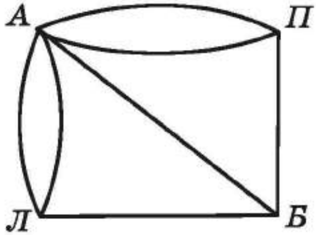
16. 

17. 

18. 

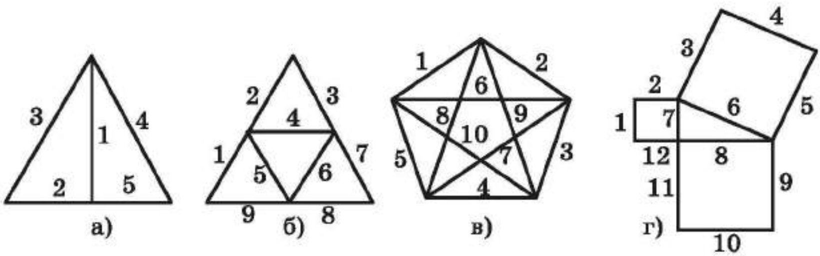
9. Графы

1. Определим чётность вершин графа в задаче Эйлера.

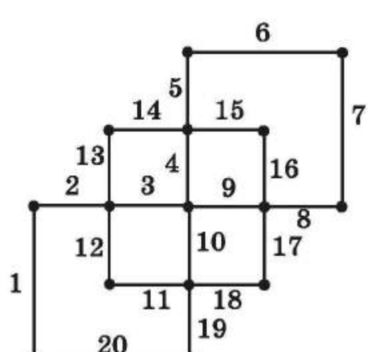


Вершина *А* имеет индекс 5, Б — 3, П — 3 и Л — 3. Таким образом, мы имеем четыре вершины нечётного индекса, и, следовательно, данный граф не является уникурсальным. Таким образом, во время прогулки по городу нельзя пройти по каждому из семи мостов только один раз.

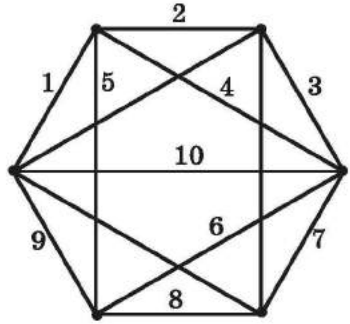
2. Один из возможных порядков обхода рёбер графа указан числами.



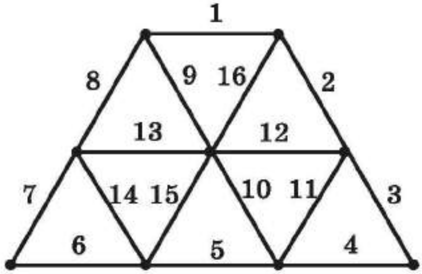
3. Один из возможных порядков обхода рёбер графа указан числами.



4. Один из возможных порядков обхода рёбер графа указан числами.

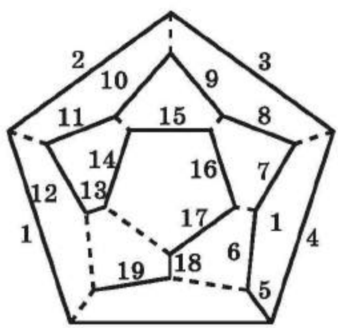


5. Один из возможных порядков обхода рёбер графа указан числами.

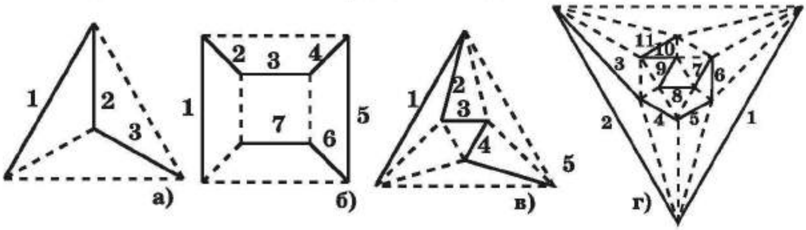


6. а), б) г), д), ж, з. **7.** 18. **8.** 2. **9.** 35. **10.** Нет, 3. **11.** 4. **12.** Да. **13.** 6. **14.** 10.

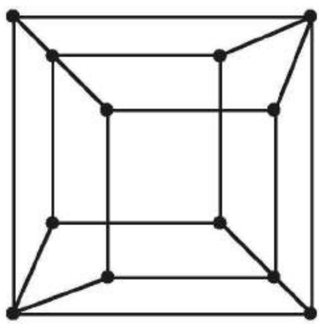
15. На рисунке изображён граф, состоящий из рёбер додекаэдра. Один из возможных порядков обхода вершин указан числами.



16. Один из возможных порядков обхода вершин указан числами.

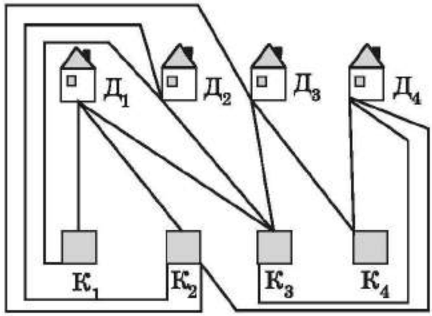


17. Граф, изображённый на рисунке, имеет вершины индекса 4 и 3, причём ребрами соединены только вершины разного индекса. Если бы существовал путь, проходящий через каждую вершину ровно один раз, то число вершин индекса 4 и число вершин индекса 3 должно или совпадать, или отличаться на 1. Однако в этом графе 6 вершин индекса 4 и 8 вершин индекса 3. Следовательно, искомого пути не существует.



18. Предположим, что можно провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу. Рассмотрим граф, вершинами которого являются домики и колодцы, а ребрами — дорожки. Воспользуемся теоремой Эйлера, согласно которой выполняется равенство $В - Р + Г = 2$, где В — число вершин графа, Р — число рёбер, Г — число областей, на который граф разбивает плоскость. У данного графа $В = 6$, $Р = 9$ и, следовательно, $Г = 5$. Каждая из пяти областей ограничена, по крайней мере, четырьмя ребрами, поскольку, по условию задачи, ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро разделяет две области, то количество рёбер должно быть не меньше $(5 \cdot 4)/2 = 10$, что противоречит тому, что их число равно 9. Таким образом, провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу нельзя.

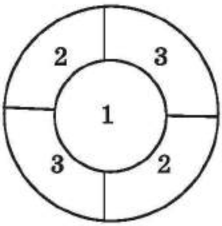
19. а), б) Да. **20.** а) Да, б) нет. **21.** Да, один из возможных способов показан на рисунке.



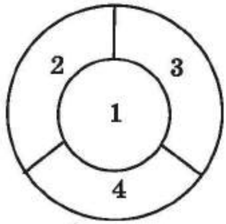
22. Предположим, что это сделать можно. Воспользуемся теоремой Эйлера, согласно которой выполняется равенство $В - Р + Г = 2$, где В — число вершин графа, Р — число рёбер, Г — число областей, на который граф разбивает плоскость. У данного графа $В = 5$, $Р = 10$ и, следовательно, $Г = 7$. С другой стороны, поскольку каждая область ограничена, по крайней мере, тремя рёбрами, то число рёбер должно быть больше или равно $(7 \cdot 3)/2 > 10$. Противоречие. Таким образом, соединить все домики непересекающимися дорожками нельзя.

10. Карты

1. а) 3; б) 4.

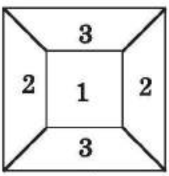


а)

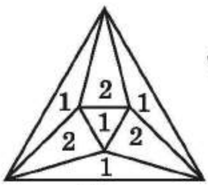


б)

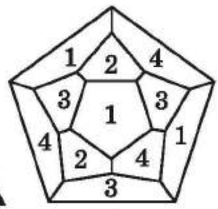
2. а) 3; б) 2; в) 4; г) 3.



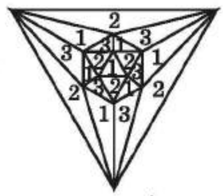
а)



б)

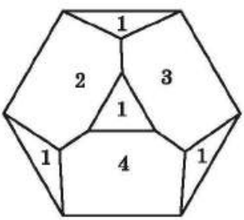


в)

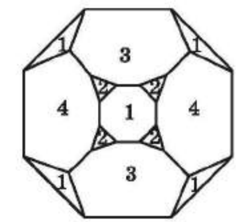


г)

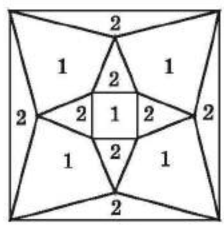
3. а) 4; б) 4; в) 2.



а)

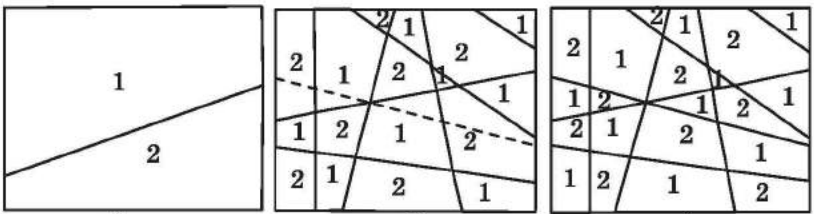


б)



в)

4. Ясно, что карту, образованную одной прямой можно раскрасить в два цвета. Докажем, что если карта, образованная прямыми, раскрашена в два цвета, то карта, полученная из неё добавлением новой прямой также может быть раскрашена в два цвета. Действительно, новая прямая делит раскрашенную карту на две карты, каждая из которых раскрашена в два цвета. Причем к самой прямой примыкают пары областей, закрашенные в один цвет. Перекрасим одну из карт-половинок (безразлично, какую именно), изменив цвет каждой области на противоположный. Получим раскраску в два цвета всей карты. Поскольку любую карту, образованную прямыми, можно получить последовательным добавлением прямых, то всякая такая карта может быть раскрашена в два цвета.



а) б) в)

5. Доказательство аналогично доказательству предыдущей задачи.

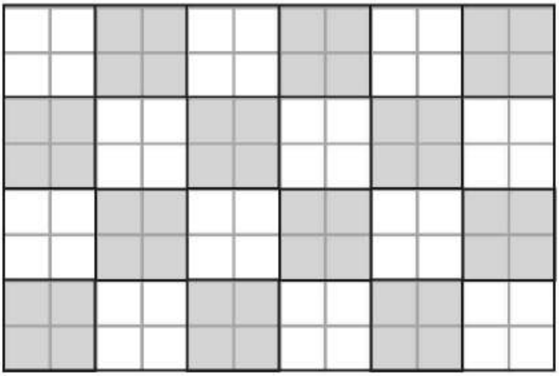
6. Если хотя бы одна внутренняя вершина карты имела бы нечётный индекс, то для правильной раскраски такой карты потребовалось бы более двух красок.

7. Если хотя бы одна страна карты имела бы нечётное число сторон, то для правильной раскраски такой карты потребовалось бы более трёх красок.

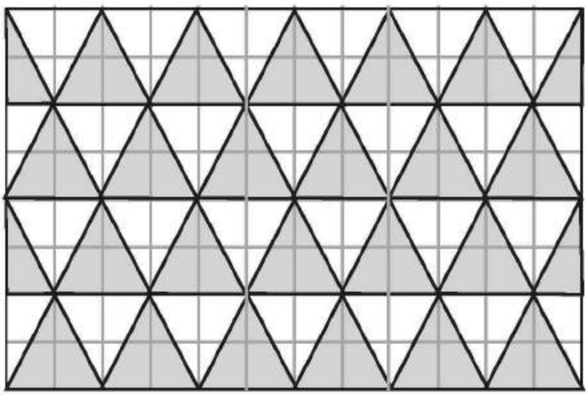
8. 4. **9.** 3. **10.** 2. **11.** 3. **12.** 4. **13.** 2. **14.** 2. **15.** 2. **16.** 3. **17.** 3. **18.** 2. **19.** 4. **20.** 3. **21.** 4. **22.** 2. **23.** 3. **24.** 3.

11. Паркеты

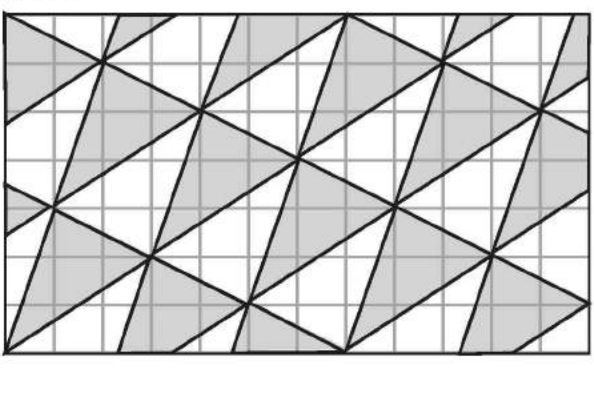
1. Два цвета.



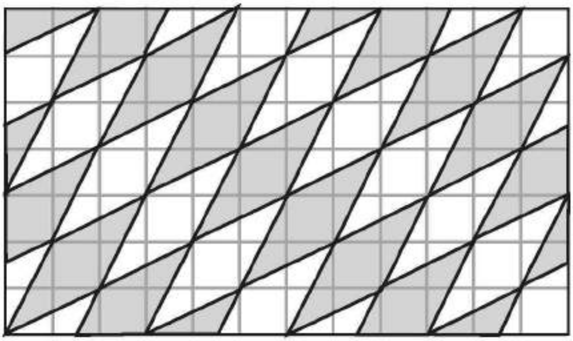
2. Два цвета.



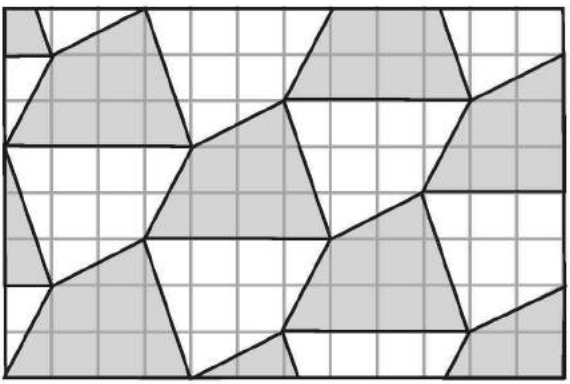
3. Два цвета.



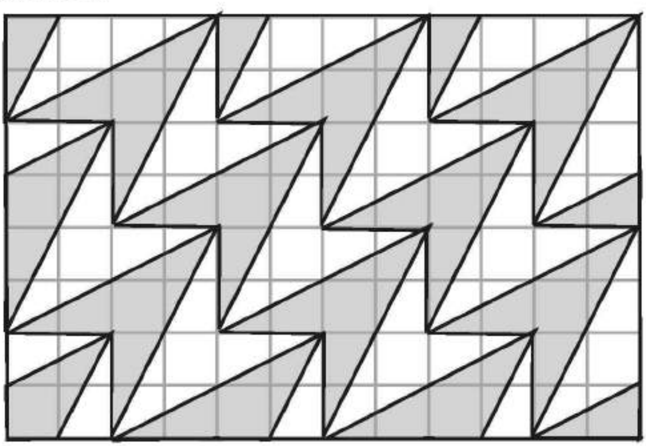
4. Два цвета.



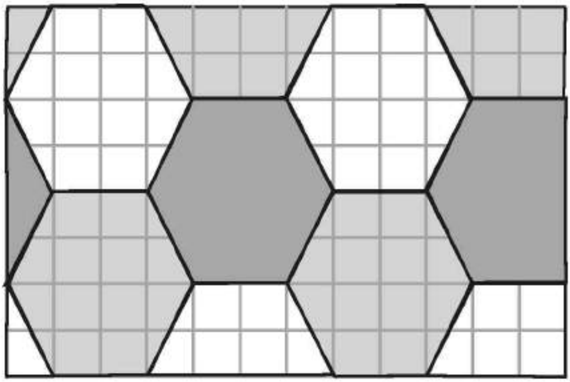
5. Два цвета.



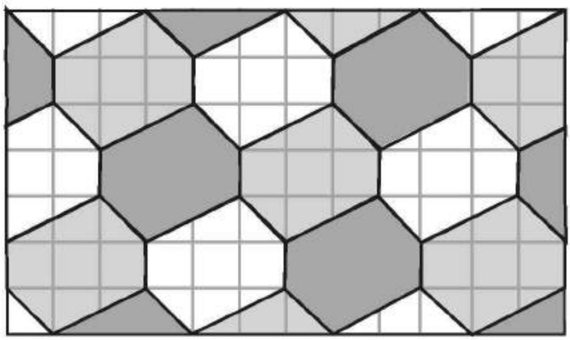
6. Два цвета.



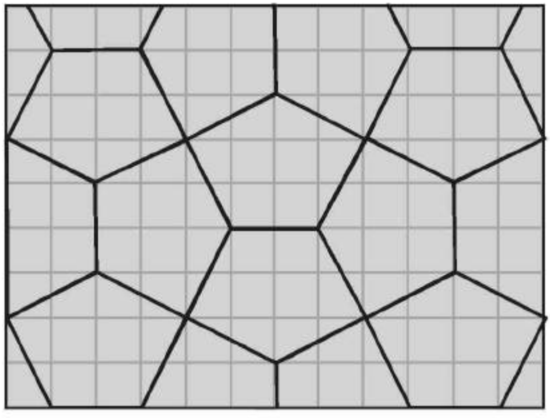
7. Три цвета.



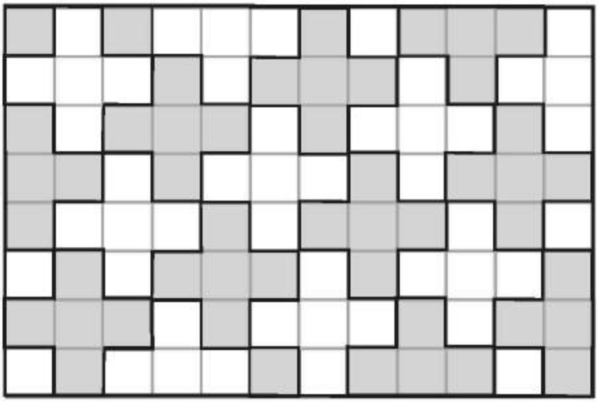
8. Три цвета.



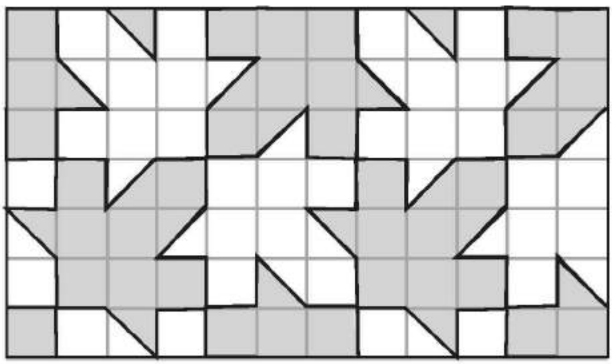
9. Четыре цвета.



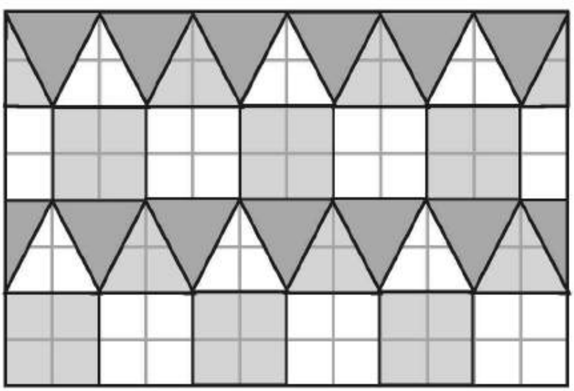
10. Два цвета.



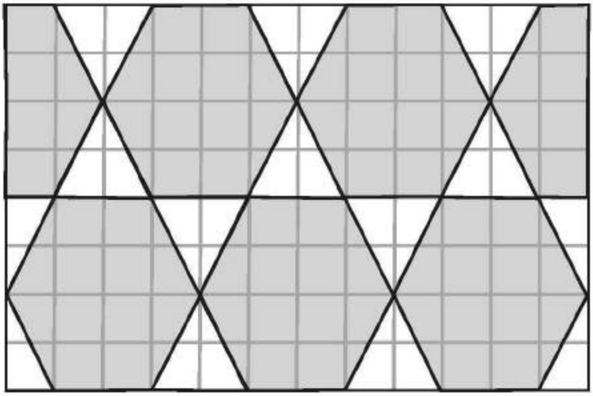
11. Два цвета.



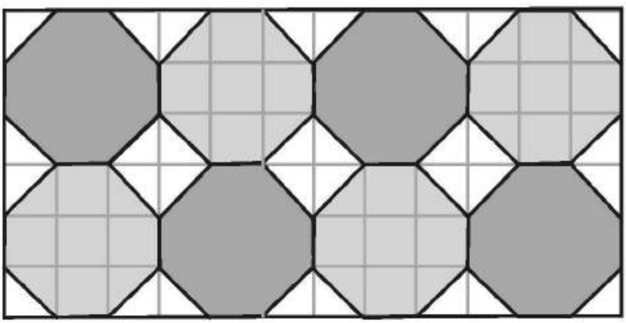
12. Три цвета.



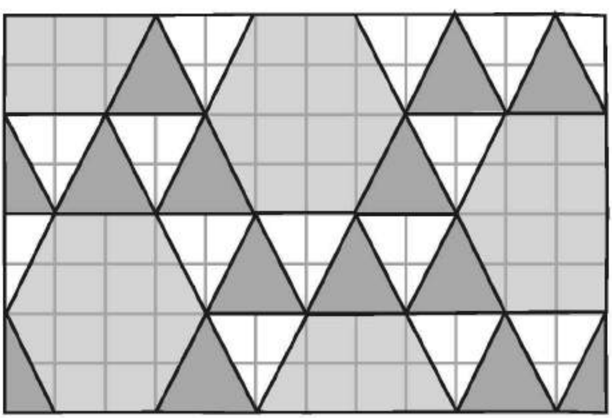
13. Два цвета.



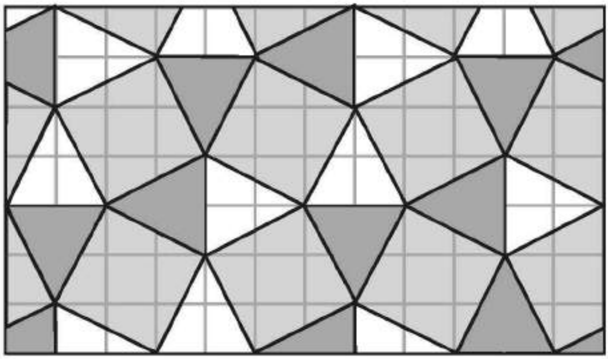
14. Три цвета.



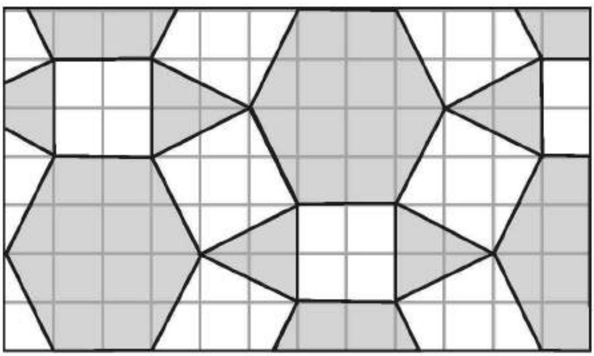
15. Три цвета.



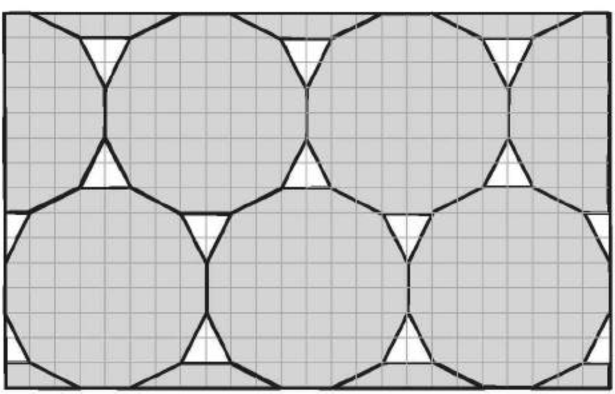
16. Три цвета.



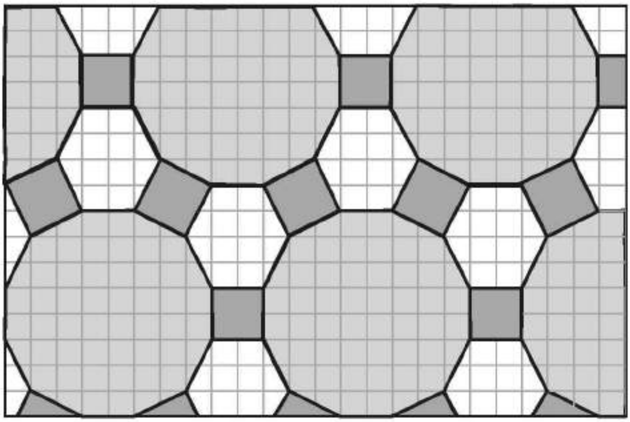
17. Два цвета.



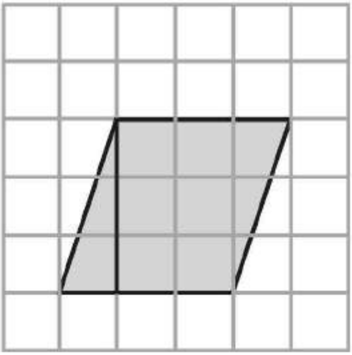
18. Четыре цвета.

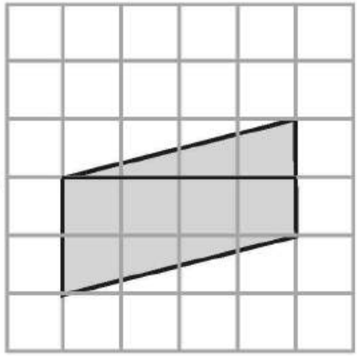


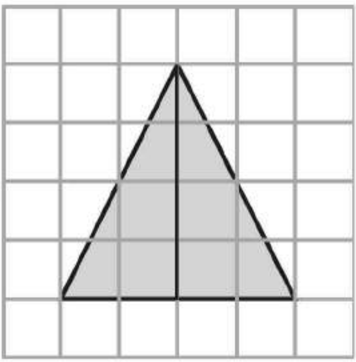
19. Три цвета.

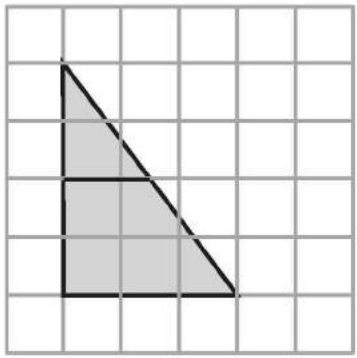


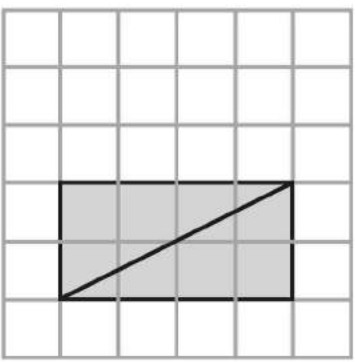
12. Разрезания

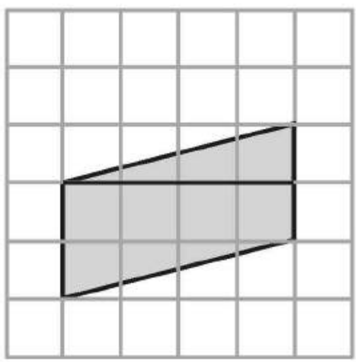
1. 

2. 

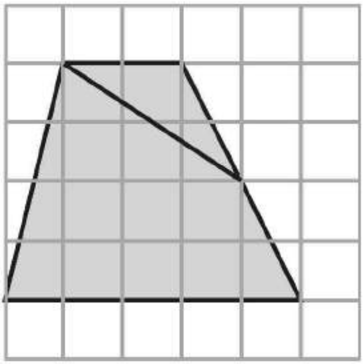
3. 

4. 

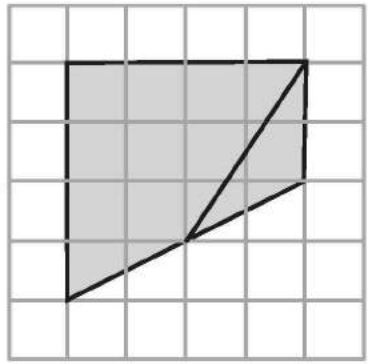
5. 

6. 

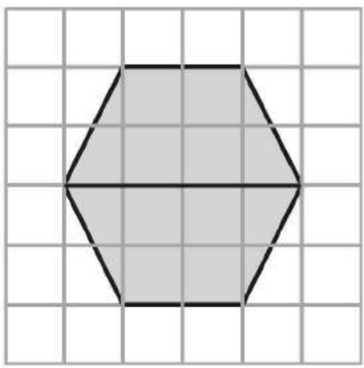
7.



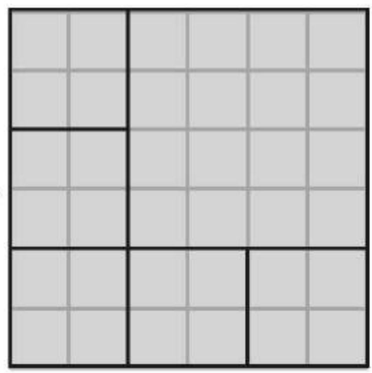
8.



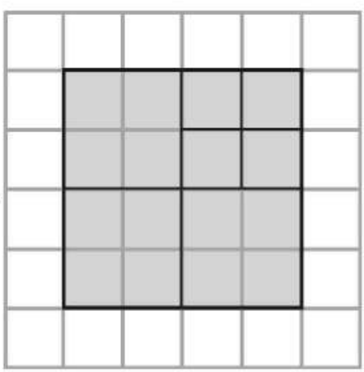
9.



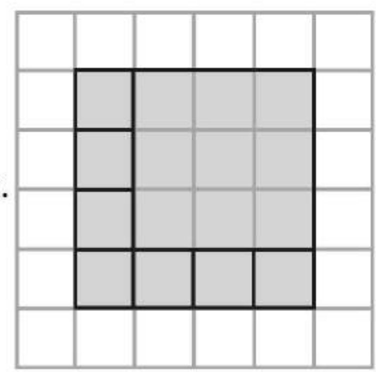
10.

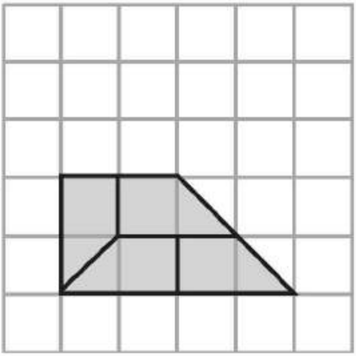


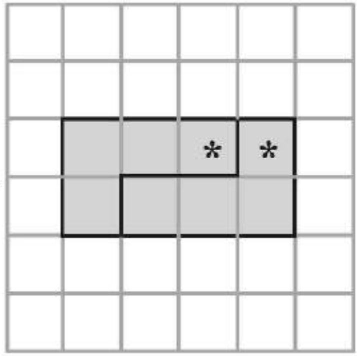
11.

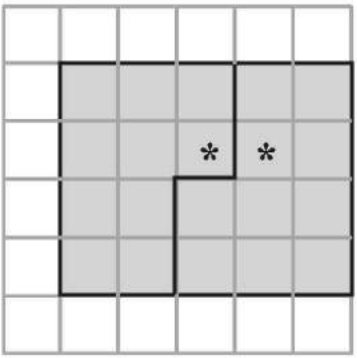


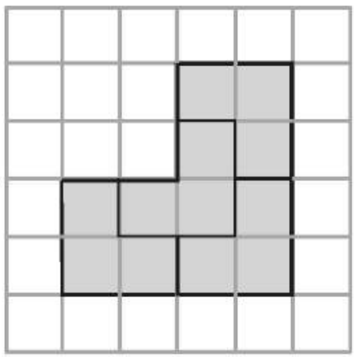
12.

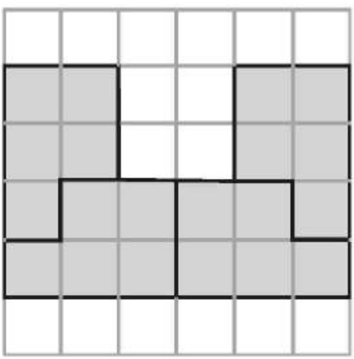


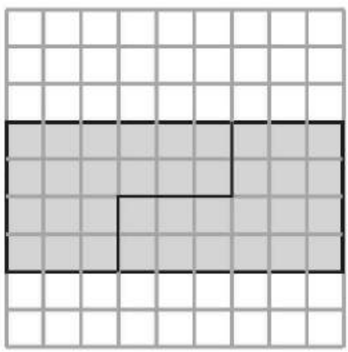
13. 

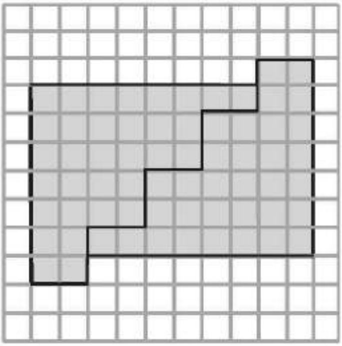
14. 

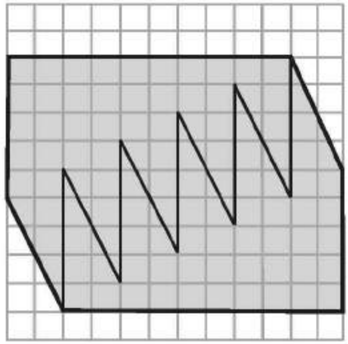
15. 

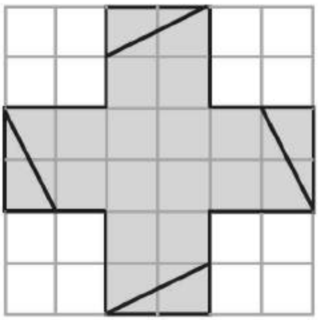
16. 

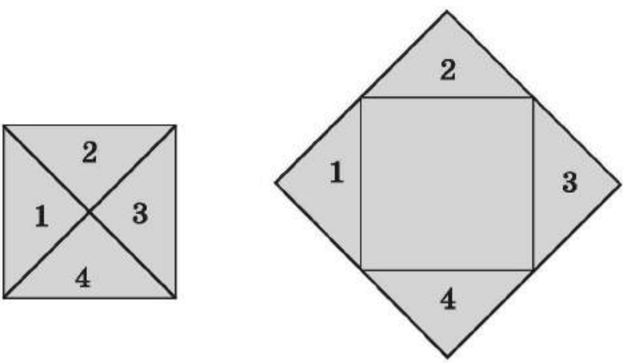
17. 

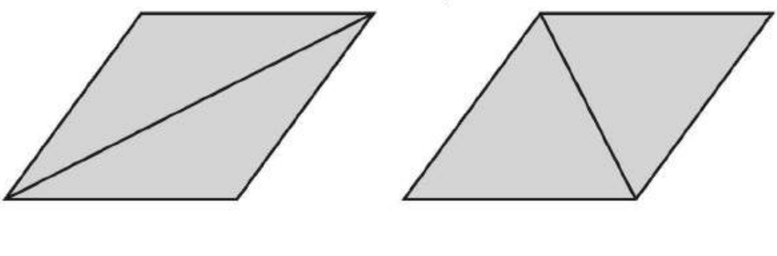
18. 

19. 

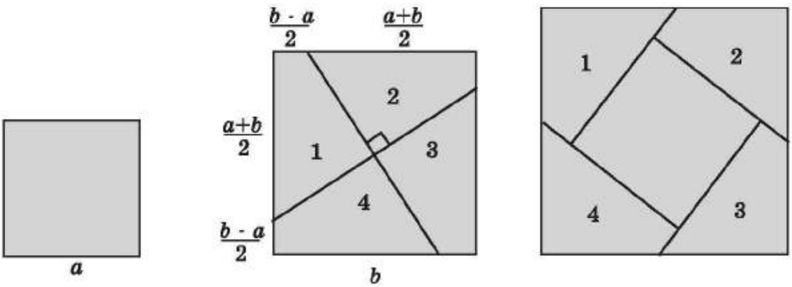
20. 

21. 

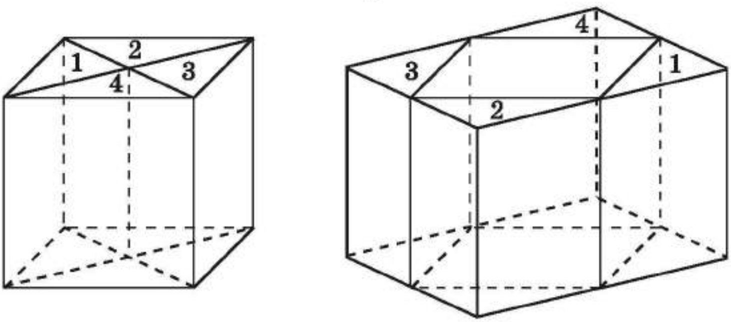
22. 

23. 

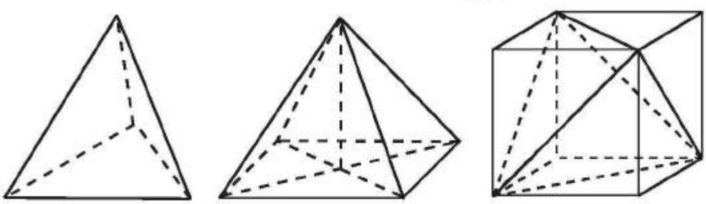
24.


$\frac{b-a}{2}$
$\frac{a+b}{2}$
$\frac{a+b}{2}$
$\frac{b-a}{2}$
1
2
3
4
a
b
1
2
3
4

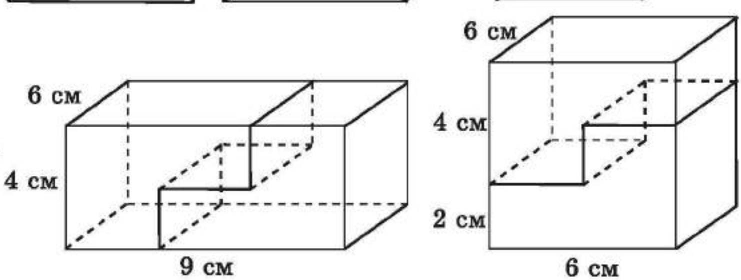
25.


1
2
3
4
3
4
1
2

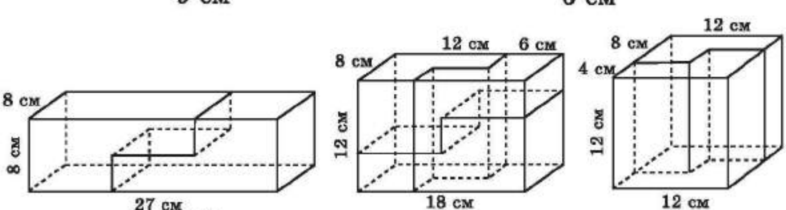
26.



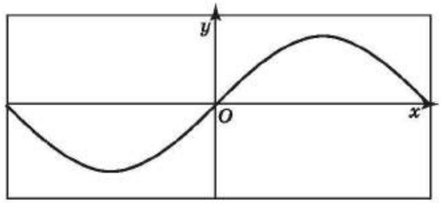
27.


6 см
4 см
9 см
6 см
4 см
2 см
6 см

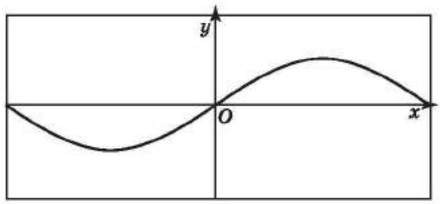
28.


8 см
8 см
27 см
а)
12 см
6 см
8 см
12 см
18 см
б)
12 см
8 см
4 см
12 см
12 см
в)

29. Синусоида.

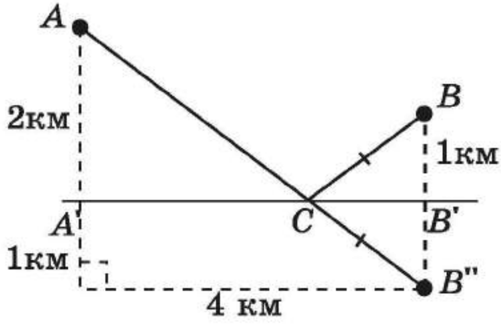


30. По синусоиде $y = k \cdot \sin x$, где $k = \operatorname{tg} 30^\circ$.

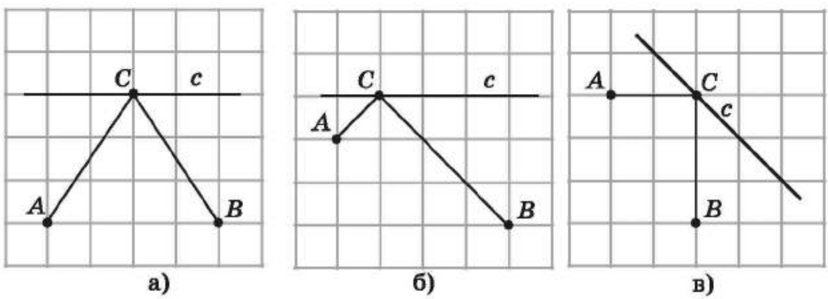


13. Экстремальные задачи

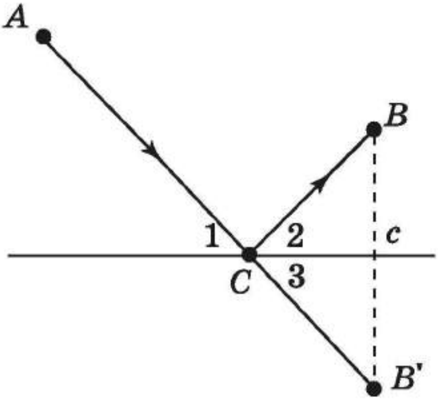
1. 5 км.



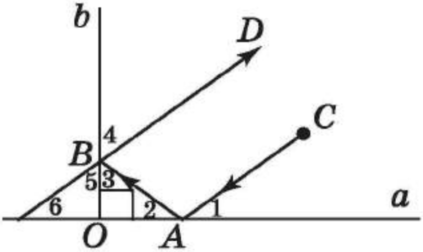
2. а) $2\sqrt{13}$; б) $4\sqrt{2}$; в) 5.



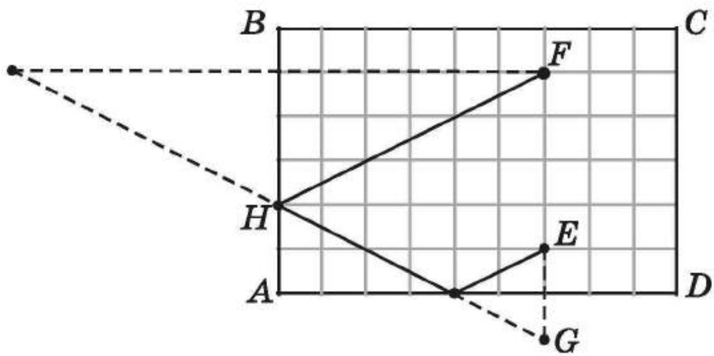
3. Углы 1 и 3 равны как вертикальные. Углы 2 и 3 равны как симметричные относительно прямой *c*. Следовательно, угол 1 равен углу 3.



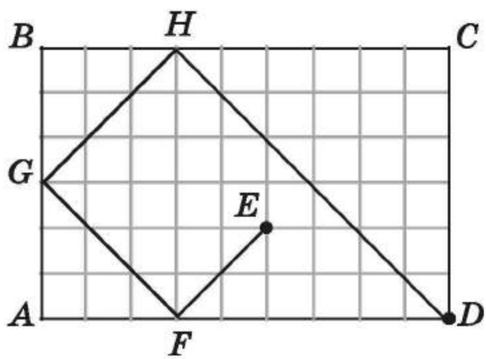
4. Так как свет распространяется по кратчайшему пути, то угол 1 равен углу 2, угол 3 равен углу 4, угол 4 равен углу 5. Следовательно, углы 1 и 6 равны, значит, прямые AC и BD параллельны.



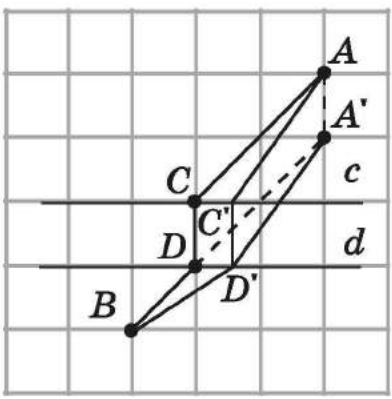
5. Искомой траекторией является ломаная $EGHF$.



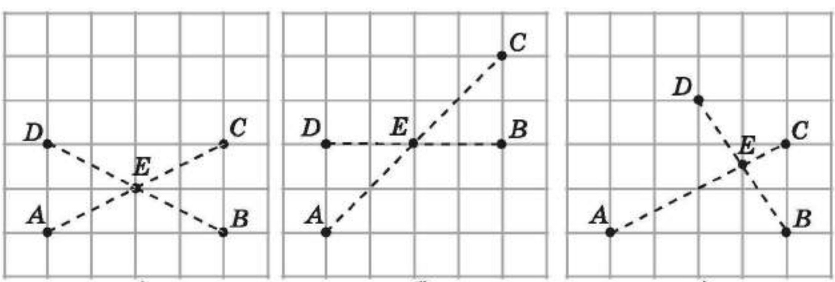
6. Искомой траекторией является ломаная $EFGHD$.



7. Отложим отрезок AA', равный ширине реки и перпендикулярный её берегам. Пусть D — точка пересечения отрезка $A'B$ и берега d, C — соответствующая точка берега c. Длина пути $ACDB$ равна ширине реки плюс длина отрезка $A'B$. Для любых других точек C', D' длина пути $AC'D'B$ равна ширине реки плюс длина ломаной $A'D'B$, которая больше длины отрезка $A'B$. Таким образом, указанные точки C и D являются искомыми.

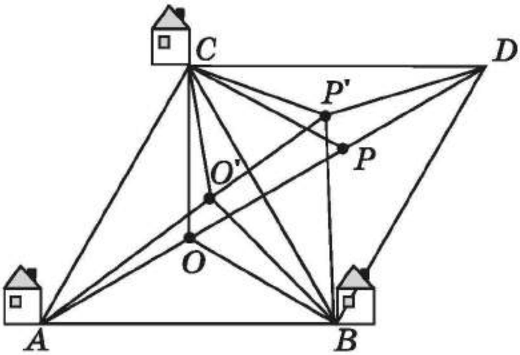


8. Общий колодец E следует расположить в пересечении отрезков AC и BD.



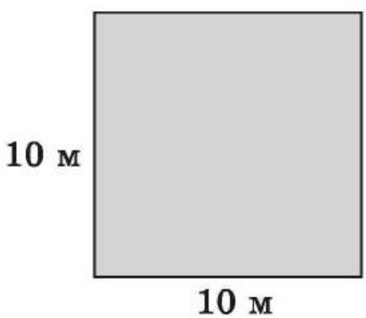
а) б) в)

9. Колодец должен располагаться в центре O окружности, описанной около правильного треугольника. Действительно, повернём треугольник ABC вокруг вершины C на угол 60°. При этом точка A перейдёт в точку B, точка B — в точку D, точка O — в точку P. Сумма расстояний $OA + OB + OC$ будет равна длине отрезка AD. Для любой другой точки O' и точки P', полученной из неё поворотом вокруг точки C на угол 60°, сумма расстояний $O'A+O'B+O'C$ будет равна длине ломаной $AO'P'D$, которая больше длины отрезка AD.

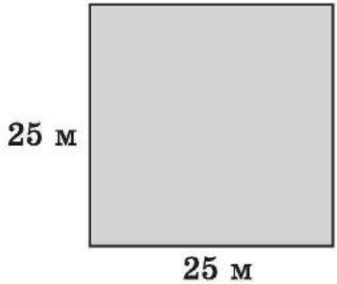


10. в).

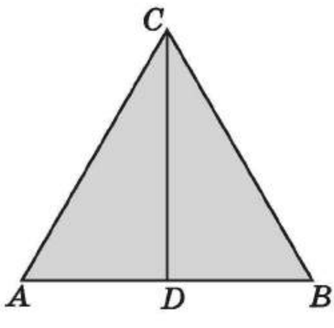
11. Наименьший периметр будет в случае, если площадка квадратная. Действительно, пусть a, b — соседние стороны прямоугольника площади S. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, равенство в котором принимается только в случае $a=b$. Из него следует, что периметр прямоугольника больше или равен $4\sqrt{S}$ и достигает этого значения в случае, если $a=b=\sqrt{S}$. В нашем случае он равен 40 м.



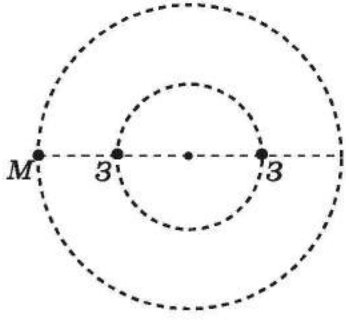
12. Наибольшая площадь будет в случае, если площадка квадратная. Действительно, пусть a, b — соседние стороны прямоугольника периметра P. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, равенство в котором принимается только в случае $a=b$. Из него следует, что площадь прямоугольника меньше или равна $\frac{P^2}{16}$ и достигает этого значения в случае, если $a=b=\frac{P}{4}$. В нашем случае она равна 625 м^2.



13. Наименьший периметр будет в случае равнобедренного треугольника с основанием $AB=6$ см и высотой $CD=4$ см. Периметр этого треугольника равен 16 см.



14. Наибольшее расстояние равно 378 миллионов километров, наименьшее — 78 миллионов километров.



15. Наименьшая площадь поверхности будет в случае, если коробка имеет форму куба. Действительно, пусть x, y, z — рёбра прямоугольного параллелепипеда объёма V. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc},$$

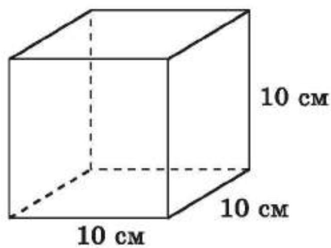
равенство в котором принимается только в случае $a=b=c$. Положим

$$a = xy, \quad b = xz, \quad c = yz.$$

Неравенство примет вид

$$\frac{xy+xz+yz}{3} \geqslant \sqrt[3]{V^2}.$$

Из него следует, что площадь поверхности больше или равна $6\sqrt[3]{V^2}$ и достигает этого значения в случае, если $x=y=z=\sqrt[3]{V}$. В нашем случае она равна 60 см^2.



16. Наибольший объём будет в случае, если коробка имеет форму куба. Действительно, пусть x, y, z — рёбра прямоугольного параллелепипеда, площадь поверхности которого равна S. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc},$$

равенство в котором принимается только в случае $a=b=c$. Положим

$$a = xy, \quad b = xz, \quad c = yz.$$

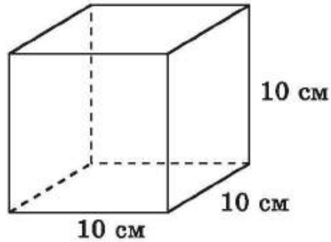
Неравенство примет вид

$$\frac{xy+xz+yz}{3} \geqslant \sqrt[3]{V^2}.$$

Из него следует, что объём меньше или равен $\sqrt{(S/6)^3}$ и достигает этого значения в случае, если

$$x = y = z = \sqrt{S/6}.$$

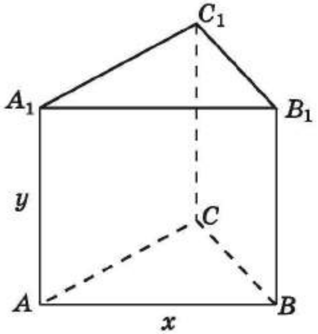
В нашем случае объём равен 1000 см^3.



17. Пусть x — сторона основания призмы, y — её высота. Тогда площадь S поверхности призмы равна $\frac{x^2\sqrt{3}}{2} + 3x \cdot y$. Объём V призмы равен $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot y$. Учитывая, что объём призмы равен 2, находим $y = \frac{8\sqrt{3}}{3x^2}$. Подставляя это выражение для y в формулу площади поверхности, получим

$$S = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{x}.$$

Для нахождения наименьшего значения этой функции найдём её производную. Имеем $S' = \sqrt{3}x - \frac{8\sqrt{3}}{x^2}$. Приравнивая производную к нулю, находим критическую точку $x = 2$. Так как производная в этой точке меняет знак с «−» на «+», то в этой точке функция принимает наименьшее значение. Используя формулу $y = \frac{8\sqrt{3}}{3x^2}$, находим $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



18. Пусть x — радиус основания цилиндра, y — его высота. Тогда площадь S поверхности цилиндра равна $2\pi x^2 + 2\pi xy$. Объём V цилиндра равен $\pi x^2 y$. Учитывая, что объём цилиндра равен 2π, находим $y = \frac{2}{x^2}$. Подставляя это выражение для y в формулу площади поверхности, получим $S = 2\pi x^2 + \frac{4\pi}{x}$. Для нахождения наименьшего значения этой функции найдём её производную. Имеем

$$S' = 4\pi x - \frac{4\pi}{x^2}.$$

Приравнивая производную к нулю, находим критическую точку $x = 1$. Так как производная в этой точке меняет знак с «$-$» на «$+$», то в этой точке функция принимает наименьшее значение. Используя формулу $y = \frac{2}{x^2}$, находим $y = 2$.

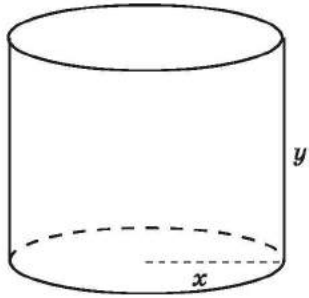


Таблица приближенных значений тригонометрических функций

A	$\sin A$	$\operatorname{tg} A$	A	$\sin A$	$\operatorname{tg} A$	A	$\sin A$	$\operatorname{tg} A$
30′	0,0087	0,0087	30°	0,50	0,58	60°	0,87	1,73
1°	0,0175	0,0175	31°	0,52	0,60	61°	0,87	1,80
2°	0,035	0,035	32°	0,53	0,62	62°	0,88	1,88
3°	0,05	0,05	33°	0,54	0,65	63°	0,89	1,96
4°	0,07	0,07	34°	0,56	0,68	64°	0,90	2,02
5°	0,09	0,09	35°	0,57	0,70	65°	0,91	2,15
6°	0,10	0,11	36°	0,59	0,73	66°	0,91	2,25
7°	0,12	0,12	37°	0,60	0,75	67°	0,92	2,36
8°	0,14	0,14	38°	0,62	0,78	68°	0,93	2,48
9°	0,16	0,16	39°	0,63	0,81	69°	0,93	2,61
10°	0,17	0,18	40°	0,64	0,84	70°	0,94	2,78
11°	0,19	0,19	41°	0,66	0,87	71°	0,95	2,90
12°	0,21	0,21	42°	0,67	0,9	72°	0,95	3,08
13°	0,23	0,23	43°	0,68	0,93	73°	0,96	3,27
14°	0,24	0,25	44°	0,69	0,97	74°	0,96	3,49
15°	0,26	0,27	45°	0,71	1,00	75°	0,97	3,73
16°	0,28	0,29	46°	0,72	1,04	76°	0,97	4,01
17°	0,29	0,31	47°	0,73	1,07	77°	0,97	4,33
18°	0,31	0,32	48°	0,74	1,11	78°	0,98	4,71
19°	0,33	0,34	49°	0,75	1,15	79°	0,98	5,15
20°	0,34	0,36	50°	0,77	1,19	80°	0,98	5,67
21°	0,36	0,38	51°	0,78	1,23	81°	0,99	6,31
22°	0,37	0,40	52°	0,79	1,28	82°	0,99	7,12
23°	0,39	0,42	53°	0,80	1,33	83°	0,992	8,14
24°	0,41	0,45	54°	0,81	1,38	84°	0,994	9,51
25°	0,42	0,47	55°	0,82	1,43	85°	0,996	11,43
26°	0,44	0,49	56°	0,83	1,48	86°	0,998	14,30
27°	0,45	0,51	57°	0,84	1,54	87°	0,999	19,08
28°	0,47	0,53	58°	0,85	1,60	88°	1,00	28,64
29°	0,48	0,55	59°	0,86	1,66	89°	1,00	57,29

Ирина Михайловна Смирнова
Владимир Алексеевич Смирнов

Геометрические задачи с практическим содержанием

Подписано в печать ??.??.2015 г. Формат $60 \times 90\ ^1\!/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 13,5. Тираж ??? экз. Заказ № .

Книга издана в авторской редакции

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ГУП «Типография „Наука“».
199034, Санкт-Петербург, В. О., 9 линия, 12.