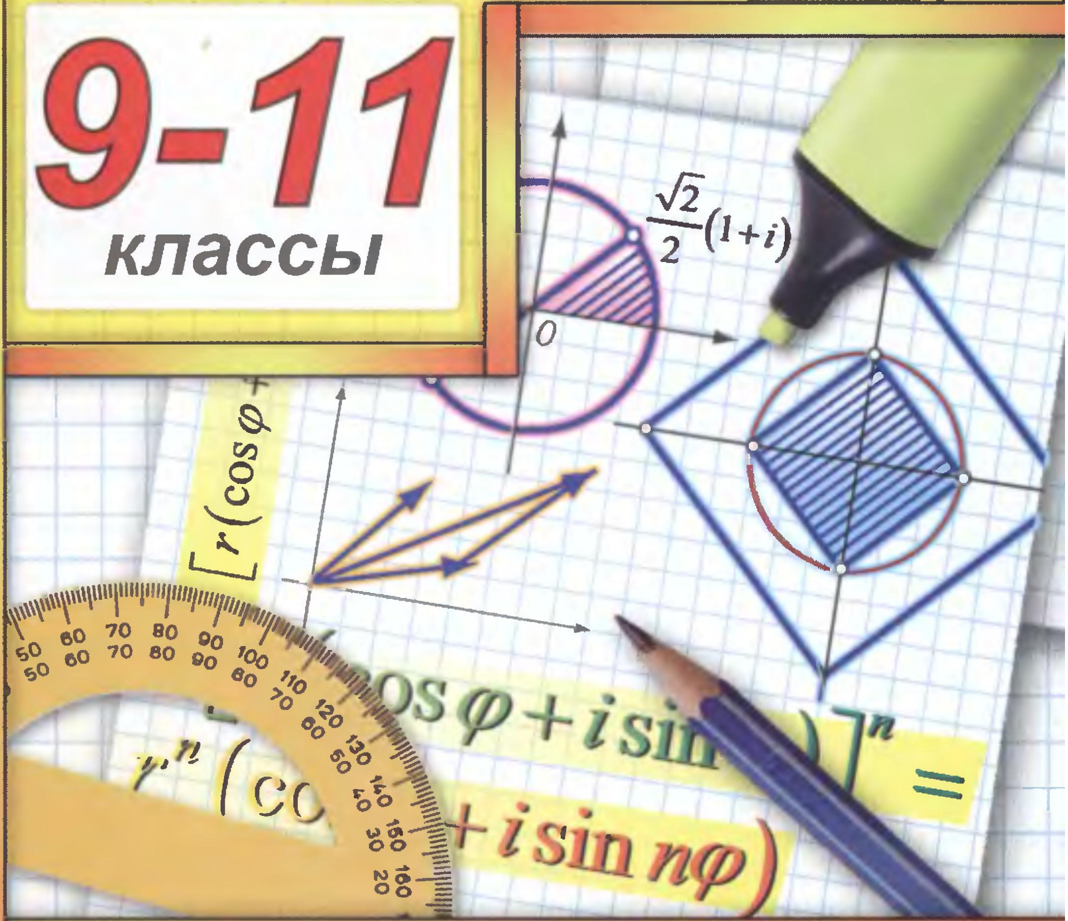
МАТЕМАТИКА

ПРЕДПРОФИЛЬНАЯ И ПРОФИЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА

Ю.А. Глазков, И.К. Варшавский
М.Я. Гаиашвили

Комплексные числа

9–11 классы



ЭКЗАМЕН®

Предпрофильная и профильная подготовка

Ю.А. Глазков
И.К. Варшавский
М.Я. Гаиашвили

Комплексные числа

9–11 классы

Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Тригонометрическая форма комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа

Степени и корни

Применение комплексных чисел в геометрии

Ответы

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА • 2012

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Г52

Глазков, Ю.А.

Г52 Комплексные числа. 9–11 классы / Ю.А. Глазков, И.К. Варшавский, М.Я. Гаиашвили. — М.: Издательство «Экзамен», 2012. — 157, [3] с. (Серия «Предпрофильная и профильная подготовка»)

ISBN 978-5-377-03467-4

В пособии подробно с большим количеством примеров изложена теория комплексных чисел, действия с комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, способы перехода от одной формы к другой. Большое внимание уделено геометрической интерпретации комплексных чисел, модуля и аргумента. В последней главе рассматривается применение комплексных чисел к решению геометрических задач. Каждая глава заканчивается задачами для самостоятельного решения и контрольной работой. К задачам приводятся ответы.

Книга предназначена учителям математики и старшеклассникам, изучающим комплексные числа.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях.

УДК 373:51
ББК 22.1я72

Подписано в печать 05 09 2011
Формат 84x108/32 Гарнитура «Школьная» Бумага газетная
Уч -изд л 1,79 Усл печ л 8,4 Тираж 3000 экз. Заказ № 11988

ISBN 978-5-377-03467-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКЦИИ

Математика — королева
и служанка всех наук.
К.Ф. Гаусс

Жизнь украшается двумя вещами —
занятием математикой и ее преподаванием
С. Пуассон

Уважаемый старшеклассник!

Вы держите в руках книгу новой серии «Предпрофильная и профильная подготовка», созданной в издательстве «Экзамен» для тех, кому интересна математика.

Книги этой серии помогут Вам изучить отдельные разнообразные разделы школьной математики. Наша цель — изложить их абсолютно понятно не только хорошо успевающим по математике школьникам, но и стремящимся стать такими.

Мы хотим донести до Вас суть представленных математических тем, исчерпывающую законченность (завершенность) математических доказательств, логику и красоту решений.

Отобранные нами для этой серии авторы — профессионалы математики: кандидаты и доктора наук, преподаватели МГУ им. М.В. Ломоносова, курирующие преподавание математики в России, а также талантливые титулованные учителя. Сведения о них Вы найдете на четвертой сторонке обложки.

ВВЕДЕНИЕ

Решение многих задач математики, физики и практики сводится к решению алгебраических уравнений. Невозможность решить те или иные уравнения приводила математиков к необходимости расширения понятия числа.

Так, для решения уравнений вида $x + a = b$ положительных чисел недостаточно. Например, уравнение $x + 3 = 1$ не имеет корней на множестве натуральных чисел. Поэтому приходится вводить отрицательные числа и нуль, расширяя тем самым множество натуральных чисел. Получаем множество целых чисел, которое включает в себя множество натуральных чисел.

Для того чтобы уравнения вида $ax = b$ $(a \neq 0)$ имели корни, целых чисел недостаточно. Например, уравнение $2a = 3$ не имеет целых корней. Поэтому приходится вводить дробные числа. Целые и дробные числа образуют множество рациональных чисел. Множество рациональных чисел является расширением множества целых чисел, то есть включает в себя это множество.

В множестве рациональных чисел разрешимы алгебраические уравнения первой степени, т.е. уравнения вида $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$. Однако алгебраические уравнения степени выше первой могут не иметь рациональных корней. Например, не имеют рациональных корней уравнения $x^2 = 2$, $x^3 = 5$. Необходимость решения таких уравнений явилась одной из причин введения иррациональных чисел. Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел. Множество действительных чисел является расширением множества рациональных чисел.

И каждый раз при расширении некоторого числового множества A до множества B соблюдаются четыре условия.

Условие 1. Множество A является подмножеством B, т.е. $A \subset B$.

Условие 2. Все операции, которые выполняются в множестве A, определяются и в множестве B, причем так, что применяя эти определения к элементам из A, мы получим те же результаты, что и по прежним правилам в множестве A. При этом свойства операций, имевшие место в A, выполняются и в B.

Условие 3. В множестве B выполнима операция, которая была невыполнима в множестве A (разрешимо уравнение, которое не было разрешимо в множестве A). Именно в этом условии заключена основная цель расширения множества.

Условие 4. Множество B должно быть «минимальным» расширением множества A. То есть любое множество, удовлетворяющее условиям 1–3, должно включать в себя множество B.

Поясним подробнее условие 2.

Во всех рассмотренных множествах определены две операции: сложения и умножения. Общими свойствами этих операций являются следующие:

Свойство 1. Ассоциативность: для любых трех элементов множества с некоторой операцией * выполняется равенство $(a*b)*c = a*(b*c)$.

Свойство 2. Наличие нейтрального элемента: в данном множестве существует элемент e такой, что для любого элемента a этого множества выполняется равенство $a*e = e*a = a$.

Свойство 3. Наличие для каждого элемента симметричного ему элемента: для любого элемента a данного множества существует единственный элемент a' такой, что $a * a' = a' * a = e$.

Например, в множестве рациональных чисел с операцией сложения выполняются все три свойства, при этом нейтральным элементом является число нуль, а для каждого числа симметричным ему является противоположное число. В том же множестве рациональных чисел с операцией умножения выполняются свойства 1 и 2, при этом нейтральным элементом является число 1. Если же исключить число 0, то будет выполняться и третье свойство: числом, симметричным числу a, будет обратное ему число $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

В множестве целых чисел умножение не обладает свойством 3.

В множестве натуральных чисел обе операции не обладают свойством 3, а сложение не обладает и свойством 2.

Кроме рассмотренных свойств сложения и умножения существует еще одно, связывающее эти операции.

Свойство 4. Дистрибутивность: для любых трех чисел a, b, c выполняются равенства: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ и $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$.

Операции сложения и умножения во всех рассматриваемых множествах обладают еще одним свойством:

Свойство 5. Коммутативность: для любых двух чисел a и b выполняется равенство $a * b = b * a$.

Благодаря ему, свойство дистрибутивности можно представлять только одним из записанных равенств.

Таким образом, при расширении множеств должны сохраняться перечисленные свойства операций.

Далее. При расширении множества целых чисел до множества рациональных чисел умножение рациональных чисел определяется следующим образом: для любых двух чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ их произведение находится по формуле: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$. Поскольку каждое целое число можно представить в виде дроби со знаменателем 1, произведение любых двух целых чисел m и n можно находить по той же формуле: $\frac{m}{1}\cdot\frac{n}{1}=\frac{m\cdot n}{1\cdot 1}=$ $=m\cdot n$. При этом получается тот же результат, что и раньше, когда эти числа умножались как целые.

В множестве действительных чисел не все уравнения имеют решение, например, уравнение $x^2+1=0$ и вообще все квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом.

Это обстоятельство приводит к необходимости расширения понятия о числе, к введению новых чисел более общей природы, частным случаем которых являются действительные числа. При этом существенно определить эти числа и действия над ними таким образом, чтобы для новых чисел соблюдались все условия 1–4.

В XVI веке при изучении кубических уравнений оказалось необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. Итальянский ученый Дж. Кардано вывел формулу корней кубического уравнения $x^3+px+q=0$:

$$x=u+v,$$

где $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$, $v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$,

$uv=-\frac{p}{3}$.

При решении кубических уравнений, дискриминант $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$ которых отрицательный, например, $x^3-21x+20=0$, получался парадоксальный результат: корни уравнения — действительные числа (в приведенном примере 1, 4 и — 5), а при вычислении значений u и v необходимо находить корни из отрицательных чисел:

$$u=\sqrt[3]{-10+\sqrt{-243}},\quad v=\sqrt[3]{-10-\sqrt{-243}}.$$

Чтобы объяснить получившийся парадокс, Кардано предложил ввести числа новой природы. Он называл такие величины «чисто отрицательными» и даже «софистически отрицательными», считал их бесполезными и стремился не применять их. В самом деле, с помощью таких чисел нельзя выразить ни результат измерения какой-нибудь величины, ни изменение этой величины.

Дальнейшее развитие математики «узаконило» такие числа (они получили название «комплексные числа»), расширило область их применения. На основе комплексных чисел были решены многие задачи теории упругости, аэро- и гидродинамики, квантовой теории поля.

Глава 1. ПОНЯТИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

§ 1. Понятие комплексного числа. Арифметические действия с комплексными числами

Рассмотрим множество всех упорядоченных пар действительных чисел $(a; b)$ и дадим следующие определения.

Определение 1. Две пары $(a; b)$ и $(c; d)$ равны, т.е. $(a; b)=(c; d)$, тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$.

Определение 2. Суммой пар $(a; b)$ и $(c; d)$ называется пара $((a+c); (b+d))$, то есть $(a; b)+(c; d)=$ $=((a+c); (b+d))$.

Определение 3. Пара $((ac-bd); \ (ad+bc))$, называется *произведением пар* $(a; b)$ и $(c; d)$, то есть $(a; \ b)\cdot(c; \ d)=((ac-bd); \ (bc+ad))$.

Каждому действительному числу a поставим в соответствие пару $(a; 0)$, то есть $a=(a; 0)$.

Если принять эти определения, то множество действительных чисел становится подмножеством нового множества, и операции на новом множестве не противоречат соответствующим операциям на множестве действительных чисел. Например,

$$(a;0)+(b;0)=((a+b);(0+0))=((a+b);0)=a+b.$$

Определение 4. Каждый элемент полученного множества называется *комплексным числом*. Полученное множество называется *множеством комплексных чисел*.

Обозначим *множество комплексных чисел* буквой C.

Исходя из определений 1–4, имеем:

$$(a;\,0)+(b;\,0)\cdot(0;\,1)=$$
$$=(a;\,0)+\big((b\cdot 0-0\cdot 1);\,(0\cdot 0+b\cdot 1)\big)=$$
$$=(a;\,0)+(0;\,b)=(a;\,b).$$

Введем обозначение: $(0;1)=i$. Тогда, учитывая, что $(a;\,0)=a$ и $(b;\,0)=b$, любое комплексное число $z=(a;\,b)$ можно записать в виде $z=a+bi$.

Определение 5. Форма записи $z=a+bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Числа вида $a+0i$ являются действительными числами. В записи действительного числа слагаемое $0i$ часто опускают, то есть $a+0i=a$.

Определение 6. Число $0+1i=i$ называется *мнимой единицей*.

Из определения произведения комплексных чисел следует:

$$i\cdot i=(0+1i)\cdot(0+1i)=(0\cdot 0-1\cdot 1)+(1\cdot 0+0\cdot 1)i=$$
$$=-1+0i=-1.$$

Иначе говоря, $i^2=-1$.

Определение 7. Числа вида $0+bi$ — называются *чисто мнимыми числами*.

В записи чисто мнимого числа слагаемое 0 часто опускают, то есть $0+bi=bi$.

Определение 8. Действительные числа a и b в паре (a; b) называются, соответственно, *действительной* ($\mathrm{Re}(z)$) и *мнимой* ($\mathrm{Im}(z)$) *частями* комплексного числа z.

Пример 1. При каком значении x действительная часть комплексного числа $\left(x^2-2\right)+(x-3)i$ равна нулю?

Решение. Действительная часть этого числа равна x^2-2. Остается решить уравнение $x^2-2=0$: $x=\pm\sqrt{2}$.

Ответ: $\pm\sqrt{2}$.

Пример 2. Найдите действительные числа x и y из уравнения $(0+3xi)-(10x+2yi)=-5+3i$.

Решение. $(0+3xi)-(10x+2yi)=-5+3i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (0-10x)+(3x-2y)i=-5+3i.$$

Числа равны, тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

$$\begin{cases}-10x=-5\\3x-2y=3,\end{cases} \text{ откуда } \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\[2mm] y=-\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{4}\right)$.

На множестве комплексных чисел существует единственное число $0+0i=0$ такое, что $(a+bi)+$ $+(0+0i)=a+bi$. То есть существует нейтральный элемент сложения — пара (0; 0) — комплексный ноль.

На этом множестве имеется единственное число $1+0i=1$ такое, что $(a+bi)\cdot(1+0i)=a+bi$, то есть существует нейтральный элемент умножения — пара (1; 0) — комплексная единица.

Таким образом, действительные числа 0 = (0; 0) и 1 = (1; 0) служат нулем и единицей и в множестве комплексных чисел.

Докажем, что для любых двух комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ найдётся, и притом единственное, число $z_x = p + qi$ такое, что $z_1 + z_x = z_2$.

Доказательство.

Из определений суммы и равенства комплексных чисел следует:

$$z_1 + z_x = (a + bi) + (p + qi) = \big((a + p) + (b + q)i\big) = c + di,$$

откуда получаем $\begin{cases} a + p = c \\ b + q = d, \end{cases}$ причем единственную, пару чисел $(p;\ q)$:

$$\begin{cases} p = c - a \\ q = d - b. \end{cases}$$

Число z_x называется разностью чисел z_1 и z_2, и обозначается так: $z_x = z_2 - z_1$.

Теперь докажем, что существует операция, обратная умножению, то есть для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2, где $z_2 \neq 0$, найдётся, и притом единственное, число $z_y = m + ni$ такое, что $z_2 \cdot z_y = z_1$.

Доказательство.

Пусть $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$, где $z_2 \neq 0 + 0i$.

Тогда

$$(c + di) \cdot (m + ni) = a + bi. \qquad (1)$$

По правилу умножения комплексных чисел получаем:

$$(c + di) \cdot (m + ni) = (mc - nd) + (md + nc)i.$$

Поэтому уравнение (1) можно переписать в виде:

$$(mc-nd)+(md+nc)i=a+bi.$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и коэффициенты при мнимых частях. Поэтому

$$\begin{cases} cm-dn=a \\ dm+cn=b. \end{cases} \qquad (2)$$

Поскольку $c+di \neq 0+0i$, хотя бы одно из чисел c и d отлично от нуля. Но тогда $c^2+d^2 \neq 0$ и система уравнений (2) имеет, и притом единственное, решение:

$$m=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad n=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Итак,

$$z_y=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Число z_y называется частным чисел z_2 и z_1 и обозначается так: $z_y=z_1:z_2$ или $z_y=\frac{z_1}{z_2}$.

Определения операций сложения и умножения комплексных чисел сформулированы так, что верны законы, которые выполняются для операций с действительными числами:

коммутативный (переместительный)

1а. $z_1+z_2=z_2+z_1$;

1б. $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$;

ассоциативный (сочетательный)

2а. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$;

2б. $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$;

дистрибутивный (распределительный)

3. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_2 + z_3) \cdot z_1 = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Докажите выполнение этих законов самостоятельно.

На основе приведенных законов арифметические операции с комплексными числами, представленными в алгебраической форме, можно проводить по правилам действий с многочленами.

Пример 3. Выполните действия:

$(2+3i)\cdot(3-2i)+(2-3i)\cdot(3+2i)$.

Решение. Учитывая, что $i \cdot i = -1$, получаем:

$$(2+3i)\cdot(3-2i)+(2-3i)\cdot(3+2i) = 2\cdot 3 + 3\cdot 3i -$$
$$-2\cdot 2i - 3i\cdot 2i + 2\cdot 3 - 3\cdot 3i + 2\cdot 2i - 3i\cdot 2i = 2\cdot 3 +$$
$$+3\cdot 3i - 2\cdot 2i - 3\cdot 2\cdot(-1) + 2\cdot 3 - 3\cdot 3i + 2\cdot 2i - 3\cdot 2\cdot(-1) =$$
$$= 6 + 9i - 4i + 6 + 6 - 9i + 4i + 6 = 24 + 0i = 24.$$

Ответ: 24.

§ 2. Сопряженные комплексные числа. Свойства сопряженных чисел

Определение 9. Числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются *сопряженными*.

Свойство 1. Сумма и произведение двух комплексных сопряженных чисел $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ являются действительными числами:

$$z + \bar{z} = 2a, \quad z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2.$$

Доказательство.

$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a + 0i = 2a$;

$z \cdot \bar{z} = (a + bi)\cdot(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$.

Последнее равенство удобно использовать при делении комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Пример 4. Решите уравнение $z+2\bar{z}=3+i$.

Решение. Пусть $z=x+yi$, тогда $\bar{z}=x-yi$ и уравнение примет вид $x+yi+2x-2yi=3+i \Leftrightarrow 3x-yi=3+i$. Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны действительные и мнимые части.

Имеем систему $\begin{cases}3x=3\\-y=1,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x=1\\y=-1.\end{cases}$

Ответ: $1-i$.

Пример 5. Вычислите: $\dfrac{1+6i}{1-2i}$.

Решение. $\dfrac{1+6i}{1-2i}=\dfrac{(1+6i)\cdot(1+2i)}{(1-2i)\cdot(1+2i)}=\dfrac{1\cdot1-6\cdot2}{1^2+2^2}+\dfrac{6\cdot1+1\cdot2}{1^2+2^2}i=$
$=-2{,}2+1{,}6i$.

Ответ: $-2{,}2+1{,}6i$.

Свойство 2. Число, сопряженное сумме двух комплексных чисел, равно сумме чисел, сопряженных данным, т.е. $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.

Доказательство.

Пусть $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$. Тогда $z_1+z_2=$
$=(a+c)+(b+d)i$ и $\overline{z_1+z_2}=(a+c)-(b+d)i$.

С другой стороны, $\bar{z}_1=a-bi$, $\bar{z}_2=c-di$, значит, $\bar{z}_1+\bar{z}_2=(a+c)-(b+d)i$.

Итак, $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.

Свойство 3. Число, сопряженное разности двух комплексных чисел, равно разности чисел, сопряженных данным, т.е. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$.

Доказывается аналогично свойству 2.

Свойство 4. Число, сопряженное произведению двух комплексных чисел, равно произведению чисел, сопряженных данным числам, т.е $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

Доказательство.

Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$.

Тогда $z_1 z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$,

$\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) - (bc + ad)i$.

С другой стороны, $\overline{z}_1 = a - bi$, $\overline{z}_2 = c - di$, значит,

$\overline{z}_1\,\overline{z}_2 = (ac - bd) - (bc + ad)i$.

Итак, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

Свойство 4 можно обобщить на случай произведения любого конечного числа комплексных чисел:

Свойство 5. $\overline{z_1 z_2 \dots z_3} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \dots \overline{z_3}$.

Свойство 6. Число, сопряженное частному двух комплексных чисел (делитель отличен от нуля), равно частному чисел, сопряженных данным, т.е.

$$\overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)} = \frac{\overline{a+bi}}{\overline{c+di}}.$$

Доказательство.

$$\overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)} = \overline{\left(\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\right)} = \overline{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i\right)} =$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i.$$

С другой стороны,

$$\overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)}=\frac{a-bi}{c-di}=\frac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)}=\frac{(ac+bd)-(ad-bc)}{c^2+d^2}=$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Пример 6. Решите уравнение: $z(2+i)=3-i$.

Решение.

$$z(2+i)=3-i\Leftrightarrow z=\frac{3-i}{2+i}\Leftrightarrow z=\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5-5i}{5}=1-i.$$

О т в е т: $1-i$.

§ 3. Извлечение квадратных корней из отрицательных чисел

3.1. Решение квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом

Мы выяснили, что $i^2=-1$. Вместе с тем

$$(-i)^2=(-1\cdot i)^2=(-1)^2\cdot i^2=-1.$$

Таким образом, существуют, по крайней мере, два числа, квадраты которых равны -1, а именно i и $-i$. Но, может быть, есть еще какие-нибудь комплексные числа, квадраты которых равны -1?

Пусть квадрат комплексного числа $a+bi$ равен -1. Тогда

$$(a+bi)^2=-1,$$

$$a^2+2abi-b^2=-1.$$

Так как два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и коэффициенты мнимых частей, то

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ ab = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения полученной системы следует, что хотя бы одно из чисел a и b должно равняться нулю. Если $b = 0$, то из первого уравнения получается $a^2 = -1$. Число a действительное, и поэтому $a^2 \geq 0$. Неотрицательное число a^2 не может равняться отрицательному числу -1. Поэтому равенство $b = 0$ в данном случае невозможно. Следовательно, $a = 0$, но тогда из первого уравнения системы получаем: $-b^2 = -1$, $b = \pm 1$.

Значит, комплексными числами, квадраты которых равны -1, являются только числа i и $-i$. Условно это записывается в виде $\sqrt{-1} = \pm i$.

Аналогично можно доказать, что существует ровно два числа, квадраты которых равны отрицательному числу a. Такими числами являются $\sqrt{a}\,i$ и $-\sqrt{a}\,i$. Условно это записывается так: $\sqrt{a} = \pm\sqrt{-a}\,i$.

Например,

$$\sqrt{-4} = \pm 2i, \sqrt{-9} = \pm 3i.$$

В множестве комплексных чисел любые квадратные уравнения имеют решение. Квадратные уравнения с отрицательными дискриминантами имеют комплексные корни. Эти корни получаются по известным нам формулам.

Пример 10. Решите уравнение $x^2+2x+5=0$.

Решение. $x=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm\sqrt{-4}=-1\pm 2i$.

Итак, данное уравнение имеет два корня.

Ответ: $x_1=-1+2i$, $x_2=-1-2i$.

Пример 11. Решите уравнение $x^2+16=0$.

Решение. Разложим левую часть уравнения $x^4-16=0$ на множители.

$$x^4-16=0 \Leftrightarrow \left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-4\right)\left(x^2-4i^2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)=0.$$

Следовательно, корни исходного уравнения — числа ± 2, $\pm 2i$.

Ответ: ± 2; $\pm 2i$.

Интересно отметить, что сумма корней равна -2, а произведение равно 5, то есть выполняется теорема Виета.

Подведем некоторые итоги.

Множество комплексных чисел удовлетворяет трем важным условиям.

Условие 1. Множество комплексных чисел содержит все действительные числа — числа вида $(a; 0)$.

Условие 2. В множестве комплексных чисел операции сложения и умножения определены так, что их применение к действительным числам приводит к тем же результатам, что и сложение и умножение в множестве действительных чисел. Выполняются и все законы для операций сложения и умножения: коммутативный, ассоциативный и дистрибутивный.

Условие 3. В множестве комплексных чисел выполняется операция извлечение корня четной степени из отрицательного числа, которая была невыполнима в множестве действительных чисел (то есть разрешимо квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом).

Можно доказать, что выполняется и последнее условие.

Условие 4. Множество комплексных чисел минимально, т.е. любое другое множество, обладающее первыми тремя свойствами, будет содержать в себе множество комплексных чисел.

Таким образом, множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел.

Задачи для самостоятельного решения

1. При каком значении x мнимая часть комплексного числа $\left(x^2-4\right)+\left(x^2-5\right)i$ равна нулю?

2. Найдите действительные числа x и y из равенств:

а) $(-3y+xi)+(2x-5yi)=-2-12i$;

б) $\left(\frac{3}{4}x-2yi\right)-\left(\frac{1}{3}y+6xi\right)=0+21i$;

в) $(2-3xi)-(3y+2yi)=2x+i$;

г) $(1-2xi)-(3x+yi)=x+3yi$.

3. Найдите сумму комплексных чисел:

а) $z_1=2-3i$ и $z_2=-3+2i$;

б) $z_1=5-i$ и $z_2=4i$;

в) $z_1 = 1$ и $z_2 = -1 - i$;

г) $z_1 = 1{,}5 - 2{,}7i$ и $z_2 = -1{,}7 - 3{,}2i$.

4. Найдите разность комплексных чисел:

а) $z_1 = -2 + 3i$ и $z_2 = 3 - 2i$;

б) $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 5i$;

в) $z_1 = 5$ и $z_2 = -1 - i$;

г) $z_1 = 1{,}3 - 2{,}5i$ и $z_2 = -0{,}5 - 2{,}3i$.

5. Найдите произведение комплексных чисел:

а) $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 5i$;

б) $z_1 = 5$ и $z_2 = -1 - i$;

в) $z_1 = -2 + 3i$ и $z_2 = 3 - 2i$;

г) $z_1 = 1{,}5 - 0{,}8i$ и $z_2 = 1{,}5 + 0{,}8i$.

6. Выполните действия:

а) $(4 + 3i) \cdot (3 - 4i) + (4 - 3i) \cdot (3 + 4i)$;

б) $(4 + 3i) \cdot (-3i) - (4i) \cdot (3 - 4i)$;

в) $(5 + 3i) \cdot (3 - 5i) + (5 - 3i) \cdot (3 + 5i)$;

г) $(2 + 4i) \cdot (4 - 2i) - (2 - 4i) \cdot (4 + 2i)$.

7. Найдите $z \cdot \bar{z}$, если

а) $z = 3 - 4i$;

б) $z = 5 + 12i$;

в) $z = -1{,}1 + 0i$;

г) $z = -3{,}5i$.

8. Найдите частное комплексных чисел:

а) $z_1 = -1 + 4i$ и $z_2 = 3 - 4i$;

б) $1 - 4i$ и $z_2 = 1 + 2i$;

в) $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 5i$;

г) $z_1 = 5$ и $z_2 = 2 - i$.

9. Решите уравнение:

а) $z(1-2i)=2+5i$;

б) $z(1-i)+3=i$;

в) $z^2+\overline{z}=0$;

г) $3z-\overline{z}=-4+2i$;

д) $2\overline{z}=i-z$.

10. Решите уравнение:

а) $x^2+1=0$;

б) $x^2-2x+4=0$;

в) $x^2-6x+10=0$;

г) $x^2+8x+18=0$.

Контрольная работа

Вариант 1

1. Найдите сумму комплексных чисел $z_1=1{,}3-2{,}5i$ и $z_2=-0{,}5-2{,}3i$.

2. Выполните действия: $(3+2i)\cdot(2-3i)+(3-2i)\cdot(2+3i)$.

3. Найдите действительные числа x и y из равенства $(2+3xi)-(6x+2yi)=-y+3i$.

4. Найдите частное комплексных чисел $z_1=-1+4i$ и $z_2=4-3i$.

5. Решите уравнение $x^2+2x+4=0$.

6. Решите уравнение $\overline{z}=2+2z$.

Вариант 2

1. Найдите разность комплексных чисел $z_1=1{,}5-2{,}7i$ и $z_2=-1{,}7-3{,}2i$.

2. Выполните действия:
$(4+3i)\cdot(3-4i)-(4-3i)\cdot(3+4i)$.

3. Найдите действительные числа x и y из равенства
$(1+2xi)+(6x+yi)=-2y+2i$.

4. Найдите частное комплексных чисел
$z_1=2-3i$ и $z_2=-6+8i$.

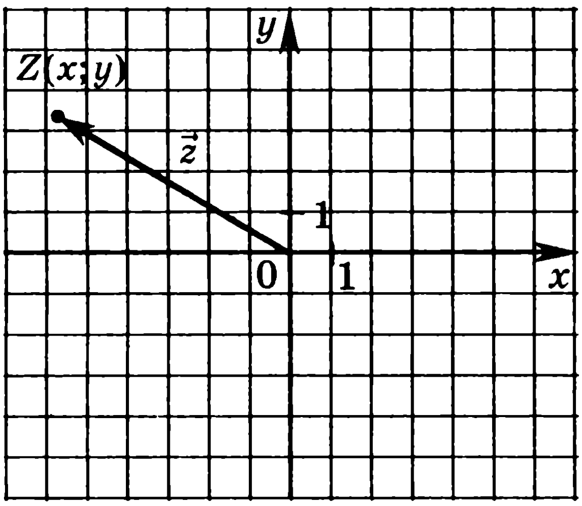
5. Решите уравнение $x^2+4x+20=0$.

6. Решите уравнение $\overline{z}=-4z$.

Глава 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Изображение комплексных чисел точками на плоскости

Рассмотрим плоскость с введенной на ней прямоугольной декартовой системой координат. Поставим в соответствие каждому комплексному числу $z = x + yi$ (x и y — действительные числа) в соответствие точку $Z(x;y)$ координатной плоскости. Заметим, что установленное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек координатной плоскости взаимно однозначно. Заметим также, что каждой точке $Z(x;y)$ координатной плоскости поставлен в соответствие радиус-вектор $\vec{z}$ (см. рис.), координаты которого совпадают с координатами точки Z.

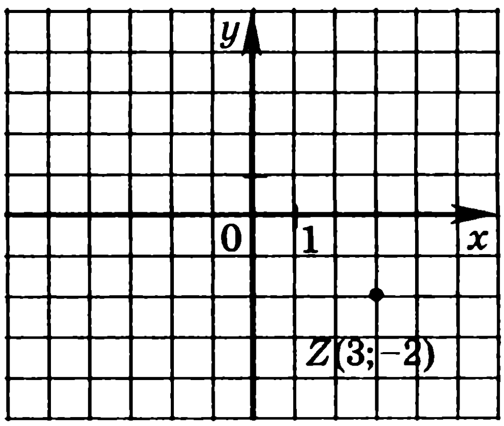


Определение. Плоскость, на которой изображаются в виде точек комплексные числа, называется комплексной плоскостью.

Любому действительному числу соответствует точка $Z(x;0)$, а любому чисто мнимому числу соответствует точка $Z(0;y)$. Поэтому все действительные числа изображаются точками оси абсцисс, которая называется *действительной осью*, а все чисто мнимые числа изображаются точками оси ординат, которая называется *мнимой осью*.

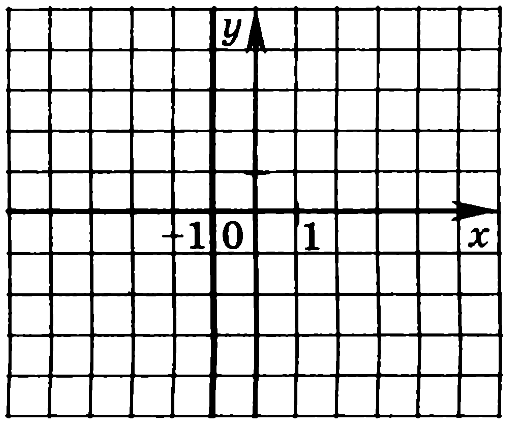
Пример 1. Изобразите на комплексной плоскости число $z = 3-2i$.

Решение. Этому числу соответствует точка комплексной плоскости с координатами (3; −2).



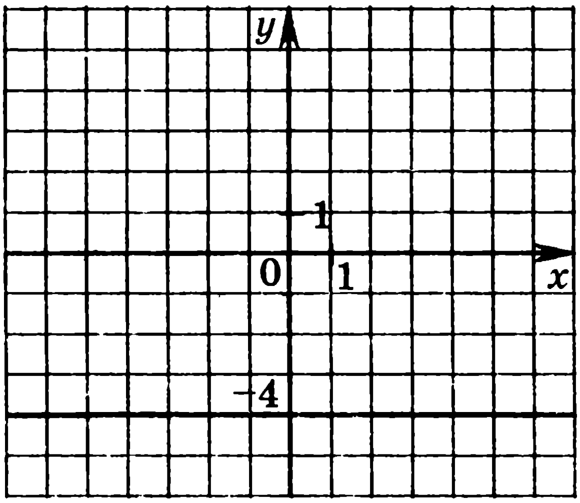
Пример 2. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа z, для которых верно равенство $\operatorname{Re} z = -1$.

Решение. В переводе на язык координат речь идет о множестве точек, абсциссы которых равны −1, то есть о прямой, задаваемой уравнением $x = -1$.



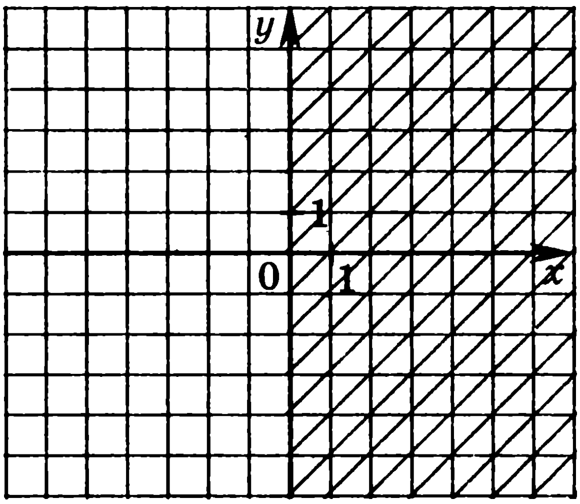
Пример 3. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа z, для которых верно равенство $\operatorname{Im} z = -4$.

Решение. В переводе на язык координат, речь идет о множестве точек, ординаты которых равны -4, то есть о прямой, задаваемой уравнением $y = -4$.



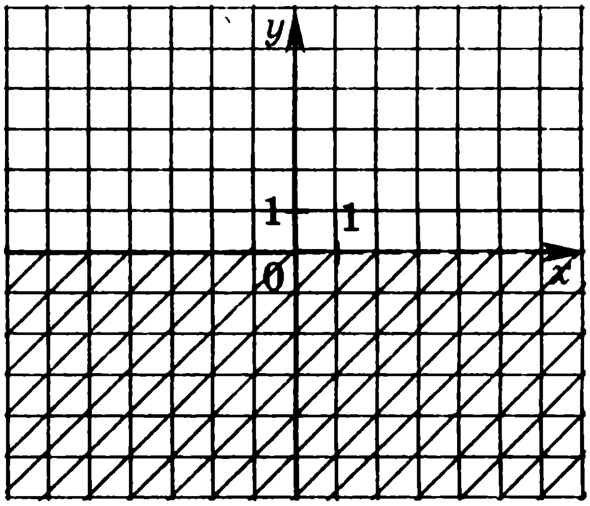
Пример 4. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} z \geq 0$.

Решение. И вновь переводим условие на язык координат. Теперь речь идет о множестве точек, абсциссы которых неотрицательны, то есть о полуплоскости, ограниченной осью ординат (граница включается).



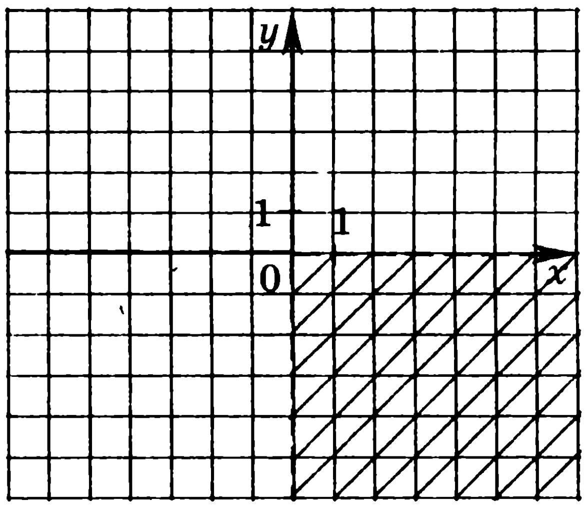
Пример 5. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $\operatorname{Im} z < 0$.

Решение. В данной задаче речь идет о множестве точек, ординаты которых отрицательны, то есть о полуплоскости, ограниченной осью абсцисс (граница не включается).



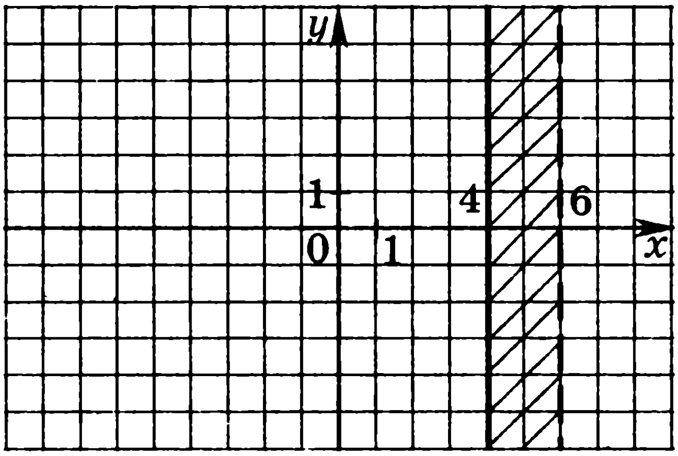
Пример 6. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условиям $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$.

Решение. В данной задаче речь идет о множестве точек, абсциссы которых положительны, а ординаты отрицательны, то есть о четвертой четверти координатной плоскости (границы не включаются).



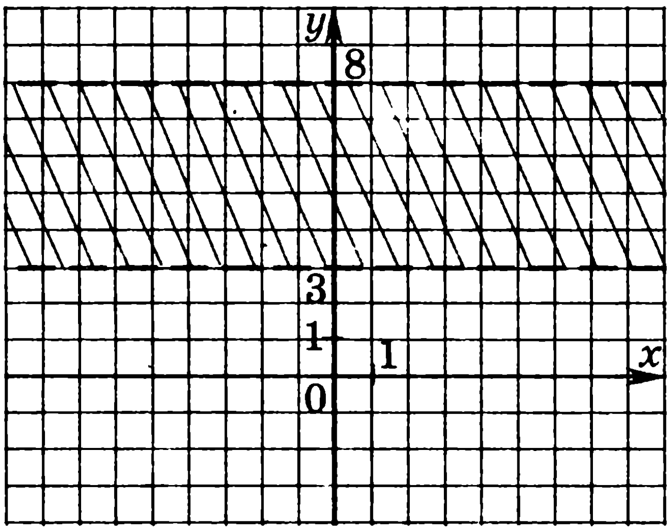
Пример 7. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условиям $4 \le \operatorname{Re} z < 6$.

Решение. В данной задаче рассматривается множество точек, абсциссы которых больше либо равны 4 и меньше 6, то есть полоса, ограниченная прямыми $x=4$ и $x=6$ (первая прямая включена в множество, вторая — нет).



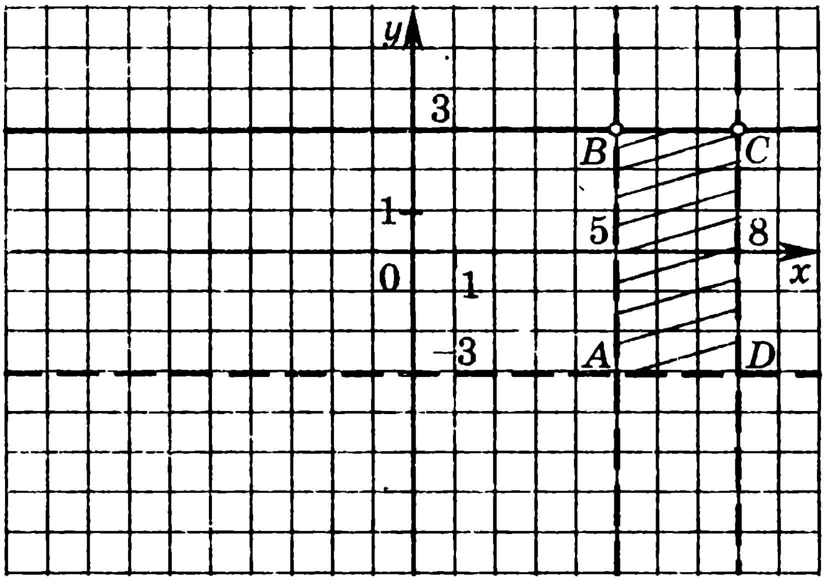
Пример 8. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $3 < \operatorname{Im} z < 8$.

Решение. В данной задаче рассматривается множество точек, ординаты которых больше 3 и меньше 8, то есть полоса, ограниченная прямыми $y = 3$ и $y = 8$ (прямые не включаются в множество).



Пример 9. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условиям $5 < \operatorname{Re} z < 8$ и $-3 < \operatorname{Im} z \leq 3$.

Решение. В данной задаче рассматривается множество точек, абсциссы которых больше 5 и меньше 8, а ординаты больше -3 и меньше или равны 3, то есть часть плоскости, ограниченная прямыми $x = 5$, $x = 8$, $y = -3$ и $y = 3$. Очевидно, что это прямоугольник (первые три прямые не включаются, отрезок BC включается в множество без точек B и C).

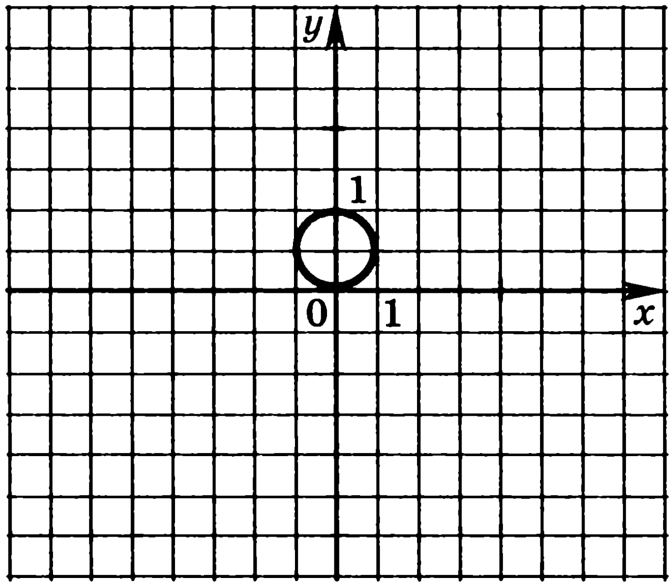


Пример 10. Найдите длину линии, заданной на плоскости равенством $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть $z = x + yi$, тогда $\frac{1}{z} = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} =$
$= \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i$, значит, $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2}$, откуда $2y = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Это уравнение задает на плоскости окружность радиуса 1, следовательно, длина линии равна 2π.

Ответ: 2π.

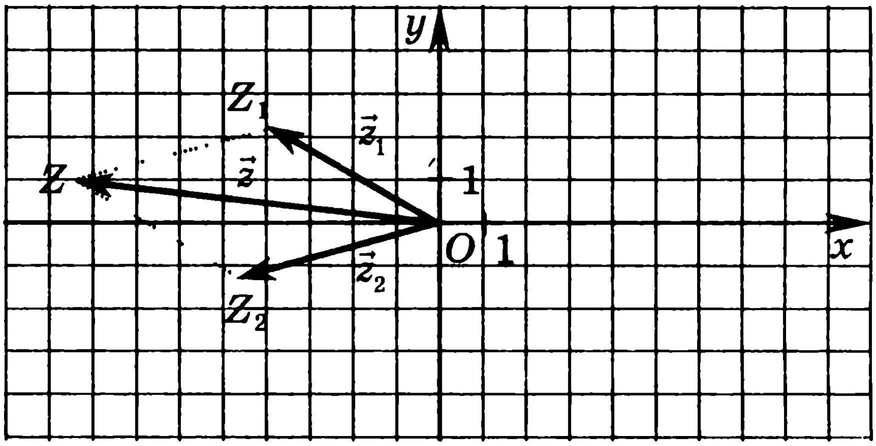
Замечание. Из полученного уравнения окружности следует, что ее центр — точка (0; 1). Изобразим эту окружность на плоскости.



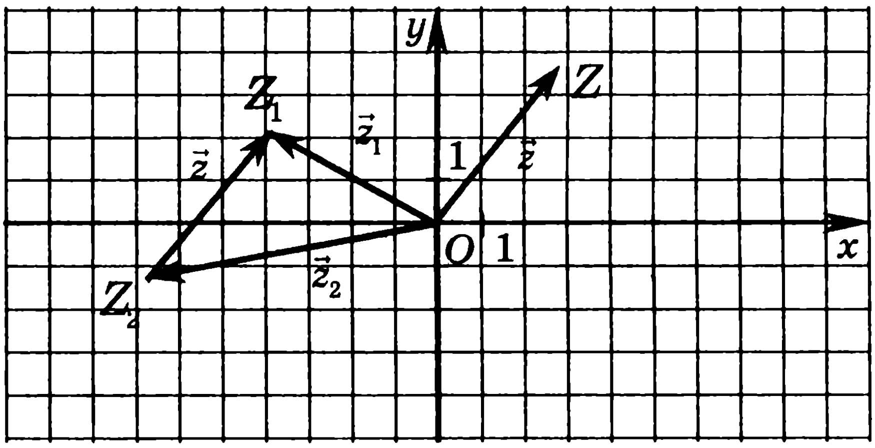
§ 2. Векторная интерпретация операций с комплексными числами

Проиллюстрируем операции сложения и вычитания комплексных чисел на комплексной плоскости.

Пусть даны комплексные числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$. Как известно, их сумма равна комплексному числу $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$. Рассмотрим соответствующие числам z_1, z_2 и z радиус-векторы $\vec{z}_1(x_1; y_1)$, $\vec{z}_2(x_2; y_2)$ и $\vec{z}(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$. Тогда $\vec{z} = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$. Пусть векторы $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$ неколлинеарны. Так как они имеют общее начало — начало координат точку O, то их сумму — вектор $\vec{z} = \overrightarrow{OZ}$ — можно построить по правилу параллелограмма (см. рис.). Конец этого вектора — точка $Z(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$ — изображение комплексного числа $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$. Случай, когда векторы $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$ коллинеарны, рассмотрим в следующей главе.



Рассмотрим разность комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$. Она равна комплексному числу $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$. Рассмотрим соответствующие числам z_1, z_2 и z радиус-векторы $\vec{z}_1(x_1; y_1)$, $\vec{z}_2(x_2; y_2)$ и $\vec{z}(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$. Теперь видно, что $\vec{z} = \vec{z}_1 - \vec{z}_2$. Векторы $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$ имеют общее начало — начало координат точку O. Построим их разность — вектор $\vec{z}$ — и отложим его от начала координат (см. рис.). Конец этого вектора — точка Z — изображение числа $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$.



Задачи для самостоятельного решения

1. Изобразите на комплексной плоскости комплексное число z, если его действительная часть равна -3, а мнимая часть равна 4.

2. Изобразите на комплексной плоскости комплексное число z, для которого верны равенства $\operatorname{Re} z = -1$ и $\operatorname{Im} z = -4$.

3. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа z, для которых верно равенство $\operatorname{Re} z = 2$.

4. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа z, для которых верно равенство $\operatorname{Im} z = 3$.

5. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, заданное уравнением:
   а) $\operatorname{Re} z = 0$;
   б) $\operatorname{Im} z = 0$.

6. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условию
   а) $\operatorname{Re} z \le 0$;
   б) $\operatorname{Re} z > 0$;
   в) $\operatorname{Im} z \le 0$;
   г) $\operatorname{Im} z \ge 0$.
   д) $\operatorname{Re} z < 0$ и $\operatorname{Im} z > 0$;
   е) $\operatorname{Re} z > 5$ и $\operatorname{Im} z > -2$;
   ж) $-4 \le \operatorname{Re} z < -1$;
   з) $-3 < \operatorname{Im} z \le 2$.

7. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условиям:

а) $-5 < \operatorname{Re} z \le 1$ и $2 \le \operatorname{Im} z < 5$;

б) $-6 \le \operatorname{Re} z < -3$ и $-2 < \operatorname{Im} z \le 5$.

8. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условию:

а) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) \le \dfrac{1}{6}$;

б) $-\dfrac{1}{2} < \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) < \dfrac{1}{2}$;

в) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) > -\dfrac{1}{4}$;

г) $\dfrac{1}{4} < \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) < \dfrac{1}{2}$;

д) $\dfrac{1}{6} < \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) < \dfrac{1}{2}$;

е) $-\dfrac{1}{4} < \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) < \dfrac{1}{2}$;

ж) $-\dfrac{1}{4} \le \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) - \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) \le -\dfrac{1}{8}$.

9. Найдите площадь фигуры, которая ограничена линией, заданной на плоскости равенством $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{2}$.

10. Изобразите на комплексной плоскости точки, соответствующие числам z_1 и z_2, радиус-векторы этих точек и радиус-вектор точки, соответствующей числу $z = z_1 + z_2$, если

а) $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 4$;

б) $z_1 = -4i$, $z_2 = 3 + i$;

в) $z_1 = -1 + 4i$, $z_2 = 4 - i$;

г) $z_1 = -4 + 2i$, $z_2 = 2 - 4i$.

11. Изобразите на комплексной плоскости точки, соответствующие числам z_1 и z_2, радиус-векторы этих точек и радиус-вектор точки, соответствующей числу $z = z_1 - z_2$, если

а) $z_1 = -1 + 4i$, $z_2 = 3$;

б) $z_1 = -4i$, $z_2 = 3 + i$;

в) $z_1 = -1 - 3i$, $z_2 = 5 - i$;

г) $z_1 = -5 + i$, $z_2 = 1 - 3i$.

Контрольная работа

Вариант 1

1. Изобразите на комплексной плоскости комплексное число z, для которого верны равенства $\operatorname{Re} z = -2$ и $\operatorname{Im} z = 5$.

2. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа z, для которых верно равенство $\operatorname{Re} z = -6$.

3. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} z > 3$ и $\operatorname{Im} z < -1$.

4. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $-3 \le \operatorname{Re} z < 2$.

5. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $-\frac{1}{6} < \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \le \frac{1}{2}$.

6. Постройте на комплексной плоскости точки, соответствующие числам z_1 и z_2, радиус-векторы этих точек и радиус-векторы точек, соответствующих числам $z_3 = z_1 + z_2$ и $z_4 = z_1 - z_2$, если $z_1 = -2 + 6i$, $z_2 = 3 - i$.

Вариант 2

1. Изобразите на комплексной плоскости комплексное число z, для которого верны равенства $\operatorname{Re} z = 6$ и $\operatorname{Im} z = -4$.

2. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа z, для которых верно равенство $\operatorname{Im} z = 5$.

3. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} z \le -4$ и $\operatorname{Im} z > 3$.

4. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $-2 < \operatorname{Im} z \le 5$.

5. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условию

$$-\frac{1}{4} \le \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) < \frac{1}{4}.$$

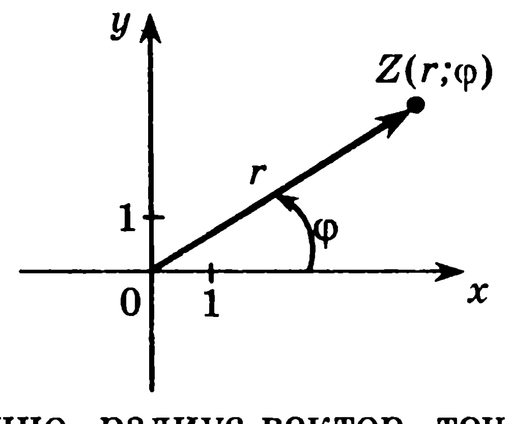
6. Постройте на комплексной плоскости точки, соответствующие числам z_1 и z_2, радиус-векторы этих точек и радиус-векторы точек, соответствующих числам $z_3 = z_1 + z_2$ и $z_4 = z_1 - z_2$, если $z_1 = -2 - 4i$, $z_2 = 5 + 2i$.

Глава 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. МОДУЛЬ И АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

§ 1. Полярные координаты точки и ее радиус-вектора

В предыдущей главе мы показали, что каждому комплексному числу $z = x + yi$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$ может быть поставлена в соответствие точка $Z(x; y)$ на комплексной плоскости, а каждой точке — радиус-вектор $\vec{z}(x; y)$.

Точку Z можно задать также другой парой чисел — полярными координатами: r — расстоянием от начала координат (точки O) и углом φ между лучом OZ и положительным направлением оси абсцисс.



Соответственно радиус-вектор точки Z задается теми же числами, то есть $\vec{z}(r; \varphi)$, где r — длина (модуль) вектора, φ — угол между вектором и осью Ox.

Для дальнейшего изучения комплексных чисел нам необходимо вспомнить некоторые сведения о векторах.

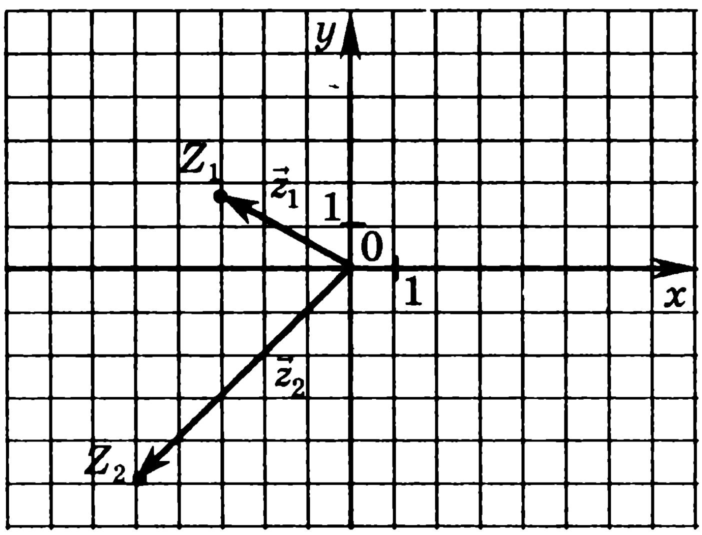
Замечание 1. Модуль (длина) вектора $\vec{z}(x;y)$ равен $|\vec{z}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Замечание 2. Угол между радиус-вектором и положительным направлением оси абсцисс — это угол поворота, при котором положительное направление оси абсцисс переходит в луч, задающий направление данного вектора, при этом начало луча есть начало координат. Угол считается положительным при повороте против часовой стрелки и отрицательным при повороте по часовой стрелке.

Пример 1. В координатной плоскости заданы векторы $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$ (см. рис.). Найдите их модули (длины). Какие углы они образуют с положительным направлением оси абсцисс?

Решение. Так как $\vec{z}_1(-3;\sqrt{3})$, $\vec{z}_2(-5;-5)$, то $|\vec{z}_1|=\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$, $|\vec{z}_2|=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$.

Луч OZ_1 является образом луча Ox при повороте на угол, равный $\frac{5\pi}{6}$, а также при повороте на угол $\frac{5\pi}{6}+2\pi=\frac{17\pi}{6}$, или $\frac{5\pi}{6}-4\pi=-\frac{19\pi}{6}$ и так далее.



Поэтому верно утверждение, что вектор $\vec{z}_1$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, где n — произвольное целое число.

Аналогичным образом определяем, что вектор $\vec{z}_2$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол $-\frac{3\pi}{4}$, или $-\frac{3\pi}{4}-2\pi=-\frac{11\pi}{4}$, или $-\frac{3\pi}{4}+6\pi=\frac{21\pi}{4}$ и так далее, то есть $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, где n — произвольное целое число.

Замечание 3. Нулевой вектор *однозначно* определяется модулем (длиной), то есть угол между нулевым вектором и положительным направлением оси Ox не рассматривается. Модуль нулевого вектора равен 0.

Замечание 4. Пусть вектор $\vec{z}$ в прямоугольной декартовой системе координат имеет координаты x и y и образует с положительным направлением оси абсцисс угол φ. Тогда

$$\begin{cases} x=|\vec{z}|\cos\varphi=r\cos\varphi, \\ y=|\vec{z}|\sin\varphi=r\sin\varphi. \end{cases}$$

§ 2. Модуль комплексного числа

Определение. *Модулем* комплексного числа $z=x+yi$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ называется число $r=\sqrt{x^2+y^2}$, то есть $|z|=r$.

Свойство 1. Если $z=x+yi$, где $x\in\mathbb{R}, y=0$, то $|z|=|x|$.

Доказательство этого свойства очевидным образом получается из определения модуля комплексного числа.

Таким образом, понятие модуля комплексного числа является развитием и обобщением понятия модуля действительного числа.

Свойство 2. Модуль комплексного числа равен модулям противоположного и сопряженного этому числу чисел.

Доказательство. Рассмотрим комплексное число $z=x+yi$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, а также противоположное $z_1=-x-yi$ и сопряженное $z_2=x-yi$ ему числа. Найдем их модули:

$$|z|=|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$|z_1|=|-x-yi|=\sqrt{(-x)^2+(-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$|z_2|=|x-yi|=\sqrt{x^2+(-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Свойство доказано.

Замечание. Число $r=\sqrt{x^2+y^2}$ равно модулю (длине) вектора $\vec{z}(x;y)$, то есть $r=|\vec{z}|$.

Пример 2. Найдите $|5|$.

Решение. Так как 5 — действительное число, то по свойству 1 получаем: $|5|=5$.

Ответ: 5.

Пример 3. Найдите $|i|$.

Решение. Запишем число i в алгебраической форме: $i=0+1i$. Тогда, по определению модуля комплексного числа, получим: $|i|=\sqrt{0^2+1^2}=1$.

Ответ: 1.

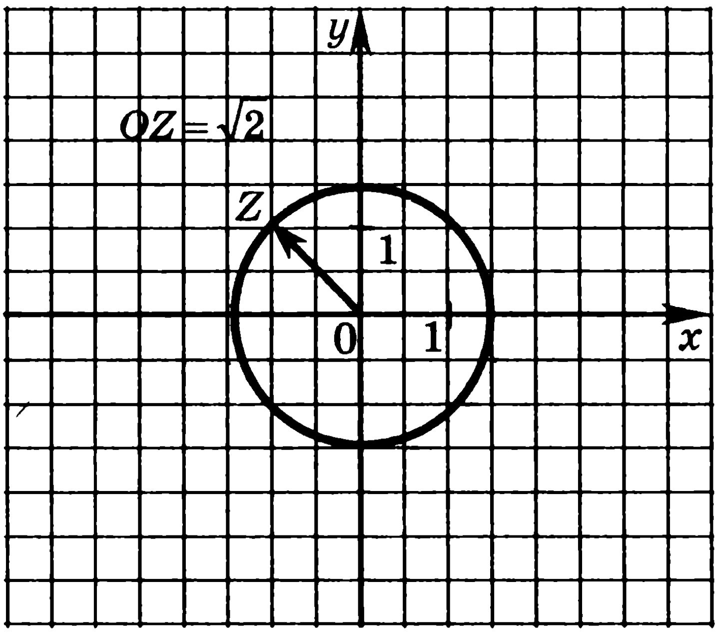
Пример 4. Найдите $|7-4i|$.

Решение. Число $7-4i$ представлено в алгебраической форме. По определению модуля комплексного числа получим: $|7-4i|=\sqrt{7^2+(-4)^2}=\sqrt{65}$.

Ответ: $\sqrt{65}$.

Пример 5. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа с модулем, равным $\sqrt{2}$.

Решение. Все комплексные числа с модулем $\sqrt{2}$ изображаются точками комплексной плоскости, которые являются концами радиус-векторов длины $\sqrt{2}$. Множество таких точек есть окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{2}$.



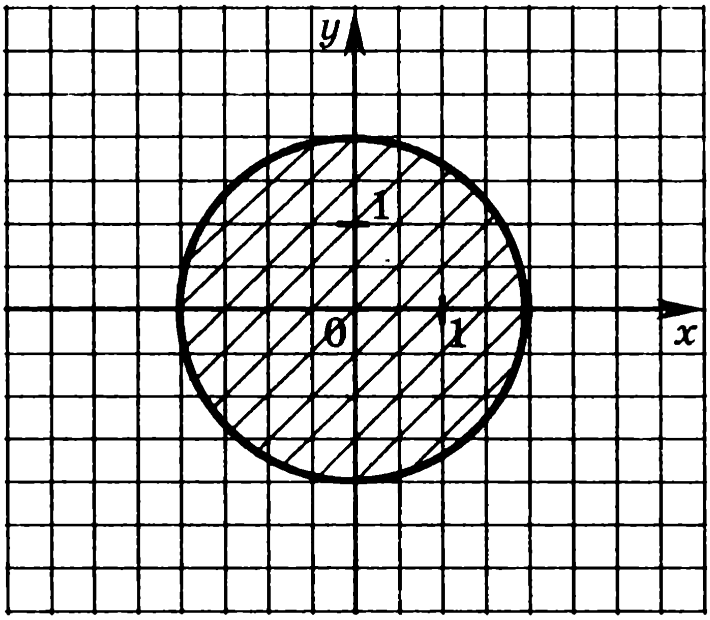
Не нарушая общности рассуждений, можно сделать следующий вывод.

Свойство 3. Изображением множества комплексных чисел с модулем $r \neq 0$ на комплексной плоскости является окружность с центром в начале координат и радиусом r.

Доказательство этого утверждения состоит в последовательном применении определения модуля комплексного числа и определения окружности с центром в начале координат и радиусом r.

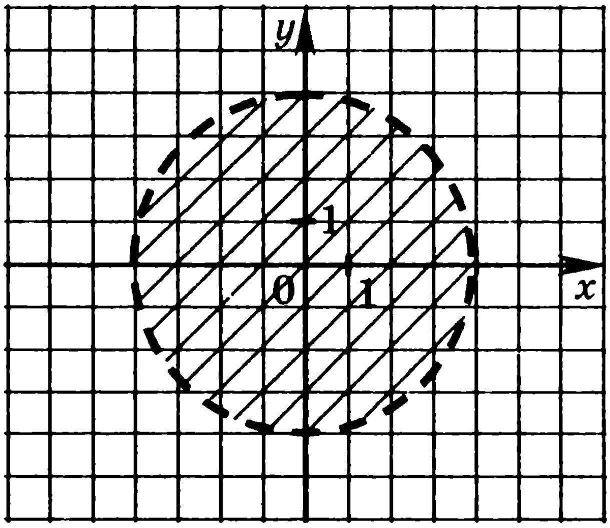
Пример 6. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа с модулем, меньшим или равным 2.

Решение. Все комплексные числа с модулем, меньшим или равным 2, изображаются точками комплексной плоскости, которые являются концами радиус-векторов длины, меньшей или равной 2. Множество таких точек есть круг с центром в начале координат и радиусом 2.



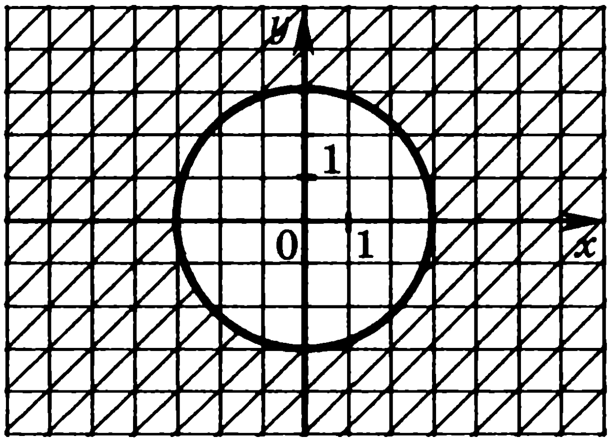
Пример 7. Изобразите на комплексной плоскости все такие комплексные числа, что $|z| < 4$.

Решение. Все комплексные числа с модулем, меньшим 4, изображаются точками комплексной плоскости, которые являются концами радиус-векторов длины, меньшей 4. Множество таких точек есть внутренняя часть круга с центром в начале координат и радиусом 4.



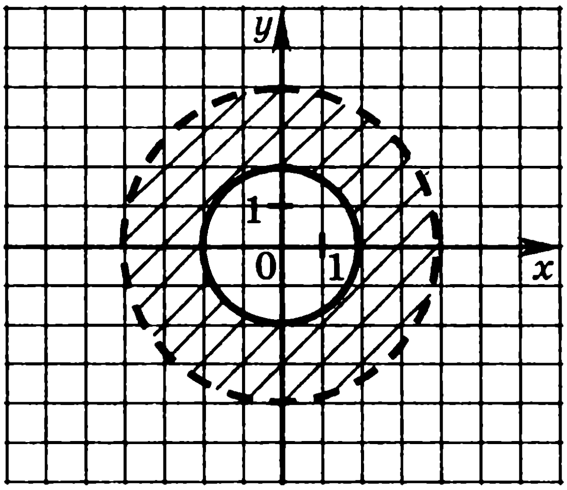
Пример 8. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа с модулем, большим или равным 3.

Решение. В данной задаче рассматриваются все точки плоскости, кроме внутренних точек круга с центром в начале координат и радиусом 3.



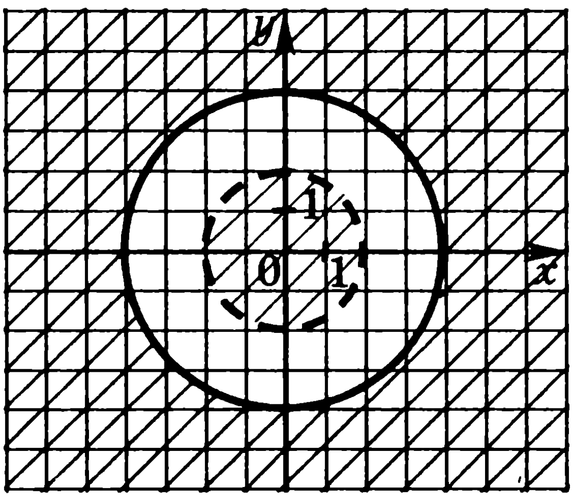
Пример 9. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа z, удовлетворяющие условию $2 \le |z| < 4$.

Решение. В данной задаче рассматриваются точки комплексной плоскости, которые являются концами радиус-векторов длины, большей или равной 2 и меньшей 4. Множество таких точек есть внутренняя часть круга с центром в начале координат и радиусом 4 без внутренней части круга с тем же центром и радиусом 2. Это кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями с центром в начале координат и радиусами 2 и 4 (при этом внутренняя окружность включена в множество, а внешняя — не включена).



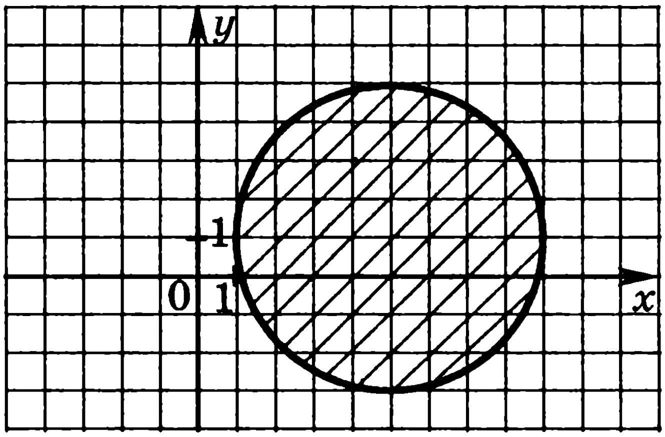
Пример 10. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа, удовлетворяющие условию $\frac{|z|-4}{|z|-2} \geq 0.$

Решение. В данной задаче рассматриваются все точки плоскости, кроме точек, расположенных между концентрическими окружностями и на меньшей окружности. Центры окружностей — начало координат, радиусы равны 2 и 4.



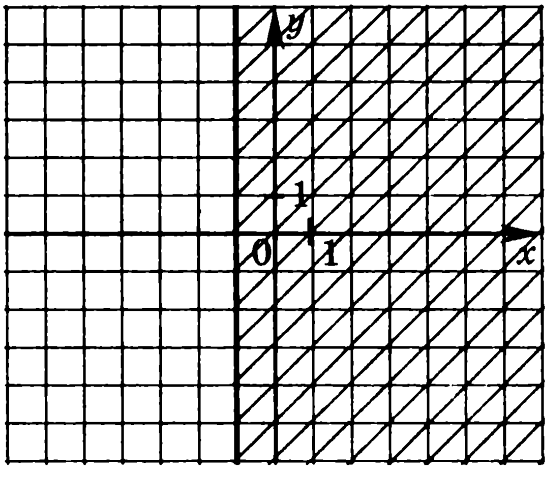
Пример 11. Изобразите на комплексной плоскости множество чисел z таких, что $|z-5-i| \le 4$.

Решение. Напомним, что геометрической интерпретацией модуля разности двух чисел, в том числе и комплексных, является расстояние между соответствующими точками. В данном случае речь идет о расстоянии от некоторой точки z комплексной плоскости до точки $z_0 = 5+i$. Таким образом, получаем круг радиуса 4 с центром в точке $z_0 = 5+i$.



Пример 12. Изобразите на комплексной плоскости множество чисел z таких, что $|z-5| \le |z+7|$.

Решение. В данной задаче нужно изобразить множество точек комплексной плоскости, расстояние от каждой из которых до точки (5; 0) меньше или равно расстоянию до точки (−7; 0). Это прямая $x=-1$ и правая полуплоскость, ограниченная этой прямой.



§ 3. Аргумент комплексного числа

Радиус-вектор точки Z комплексной плоскости задается двумя числами: r — длиной (модулем) вектора, φ — углом между вектором и положительным направлением оси Ox.

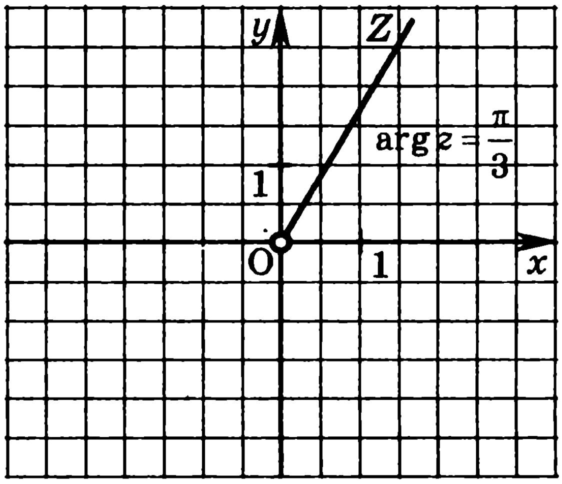
Замечание 5. Если φ — аргумент комплексного числа z, то любое число вида $\varphi+2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, также является аргументом данного числа z. Верно и обратное утверждение: если число ϕ является аргументом данного комплексного числа z, то оно представимо в виде $\phi=\varphi+2\pi n$, где n — некоторое целое число. Оба утверждения очевидным образом следуют из свойства периодичности тригонометрических функций.

Свойство 4. Два ненулевых комплексных числа равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Предлагаем читателю доказать этот факт самостоятельно.

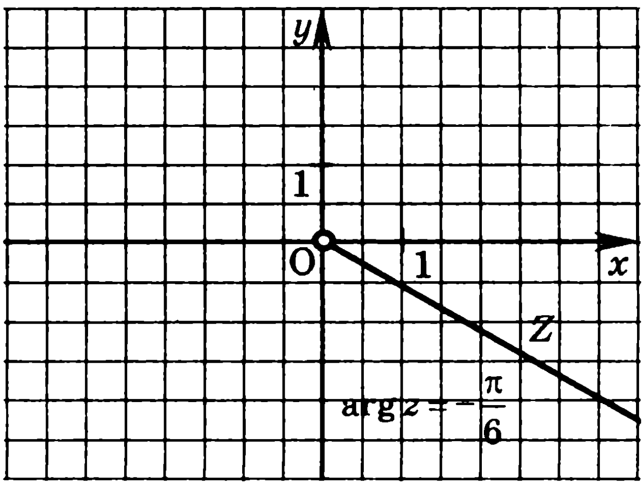
Пример 13. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа с аргументом $\frac{\pi}{3}$.

Решение. Все комплексные числа с аргументом $\frac{\pi}{3}$ изображаются точками комплексной плоскости, которые являются концами ненулевых радиус-векторов, образующих с положительным направлением оси абсцисс угол $\frac{\pi}{3}$. Множество таких точек есть луч OZ, который образует с положительным направлением оси абсцисс угол $\frac{\pi}{3}$. Заметим, что при этом имеется в виду луч без начальной точки.



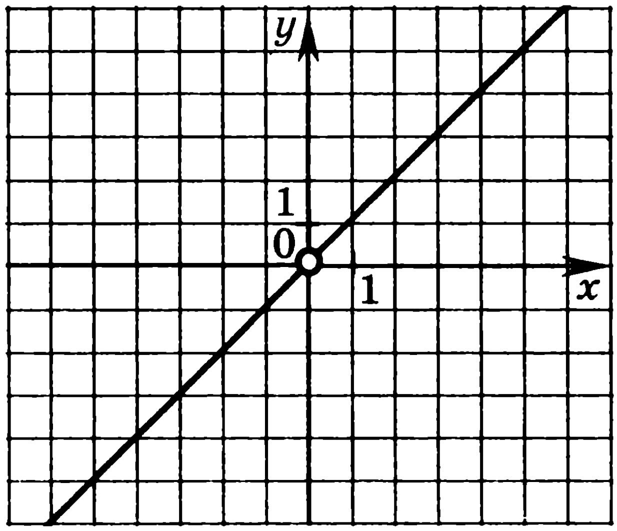
Пример 14. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа с аргументом $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Решение. Все комплексные числа с аргументом $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ изображаются точками комплексной плоскости, которые являются концами ненулевых радиус-векторов, образующих с положительным направлением оси абсцисс угол $-\frac{\pi}{6}$. Множество таких точек есть луч OZ, который образует с положительным направлением оси абсцисс угол $-\frac{\pi}{6}$. Напомним, что при этом имеется в виду луч без начальной точки.



Пример 15. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа с аргументами $-\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

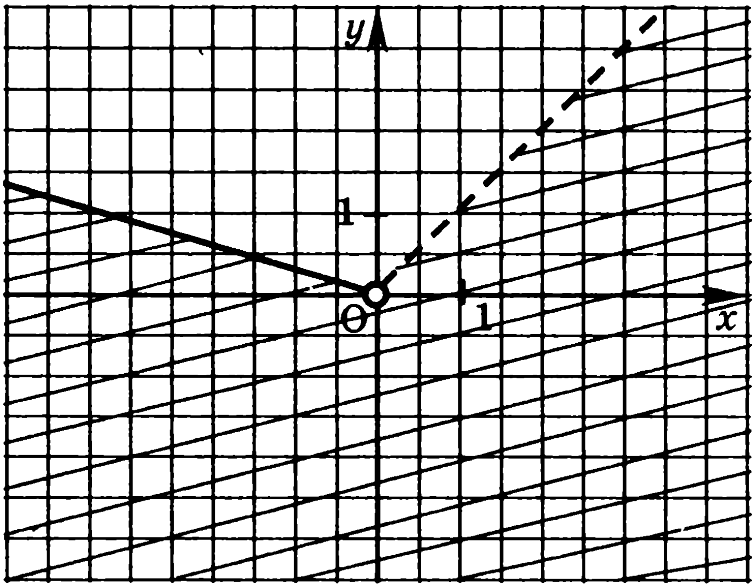
Решение. Все комплексные числа с аргументами $-\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ изображаются точками комплексной плоскости, которые являются концами ненулевых радиус-векторов, образующих с положительным направлением оси абсцисс углы $-\frac{3\pi}{4}$ или $\frac{\pi}{4}$. Множество таких точек есть прямая $y = x$ с выколотой точкой (0; 0).



Пример 16. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа с аргументами φ такими, что $\frac{11\pi}{12} \le \varphi < \frac{9\pi}{4}$.

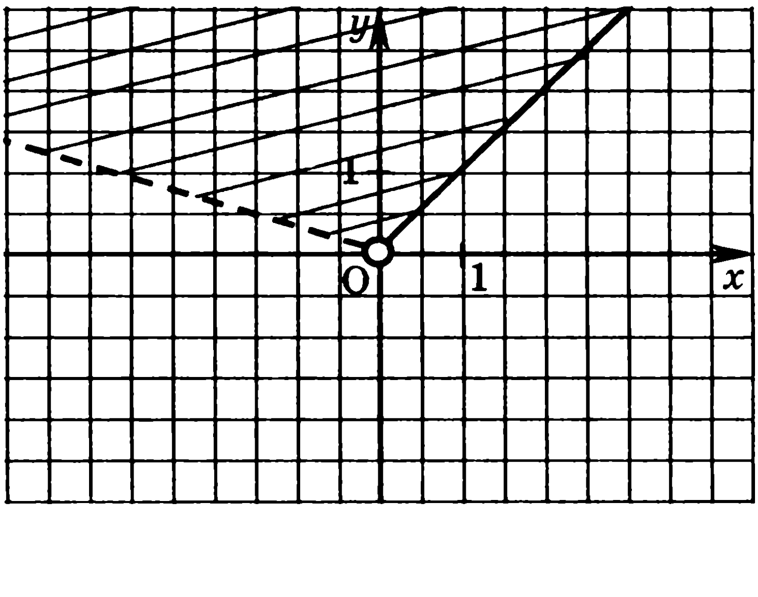
Решение. Все комплексные числа с указанными аргументами изображаются точками комплексной плоскости, расположенными ниже лучей $y = \left(\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12}\right)x$,

$x<0$ и $y=x$, $x>0$. Это угол без одной из сторон и вершины (см. рис.).



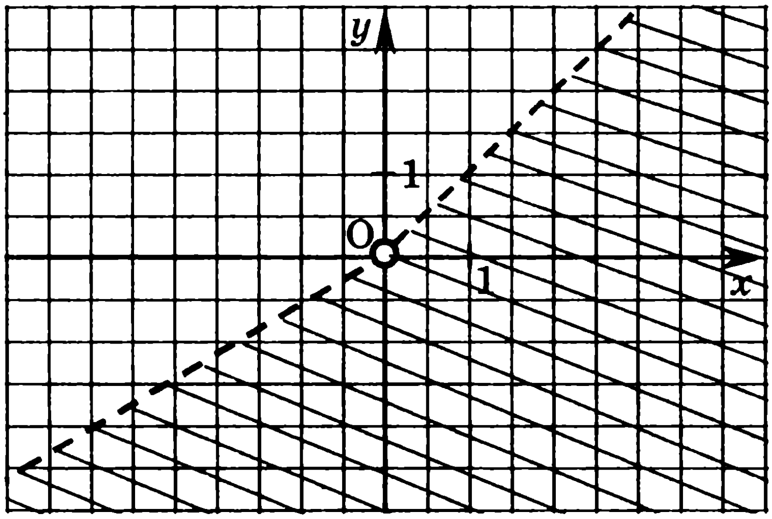
Пример 17. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа с аргументами φ такими, что $\frac{\pi}{4} \le \varphi < \frac{11\pi}{12}$.

Решение. Все комплексные числа с указанными аргументами изображаются точками комплексной плоскости, расположенными между лучами $y=x$, $x>0$ и $y=\left(\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12}\right)x$, $x<0$. Это угол без одной из сторон и вершины (см. рис.).



Пример 18. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа с аргументами φ такими, что $-\frac{5\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{4}$.

Решение. Все комплексные числа с указанными аргументами изображаются точками комплексной плоскости, расположенными ниже лучей $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$, $x < 0$ и $y = x$, $x > 0$. Это угол без сторон и вершины (см. рис.).



Пример 19. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа с аргументами φ такими, что $-\frac{11\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{4}$.

Решение. Заметим, что длина интервала значений φ равна $\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \frac{47\pi}{12}$ и она больше 2π. Напомним, что аргумент комплексного числа определяется с точностью до $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Это означает, что если аргумент комплексного числа z равен φ, то и любое число вида $\varphi + 2\pi n$, $n \in Z$ также является аргументом z. Поэтому заданное условие определяет все комплексные числа, кроме нуля. Изображением данного множества чисел является вся комплексная плоскость без точки O — начала координат.

Пример 20. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа с аргументами φ такими, что $-\frac{5\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{3}$.

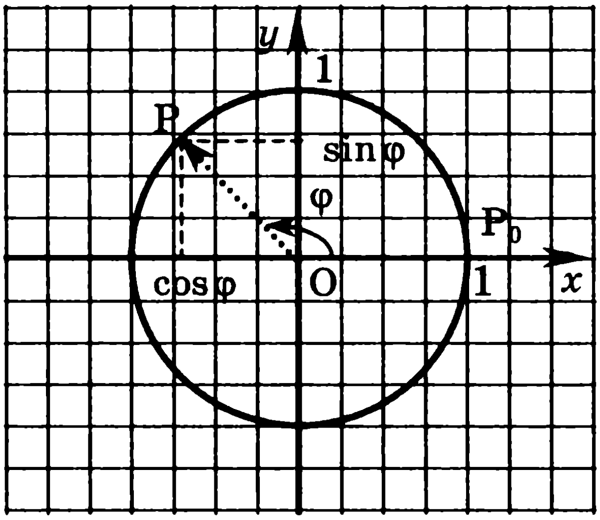
Решение. Заметим, что длина интервала значений φ равна $\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{5\pi}{3}\right) = 2\pi$. Но это — промежуток, не содержащий концов. Поэтому в задаче описаны все комплексные числа, имеющие аргумент, отличный от $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то есть все комплексные числа, кроме нуля и комплексных чисел с аргументом $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Изображением данного множества чисел является вся комплексная плоскость без точки O — начала координат, а также без луча $y = x\sqrt{3}$, $x > 0$.

Пример 21. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа с аргументами φ такими, что $-\frac{5\pi}{3} < \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

Решение. Заметим, что длина интервала значений φ равна $\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{5\pi}{3}\right) = 2\pi$. В данной задаче один из концов принадлежит интервалу. Поэтому в задаче описаны все комплексные числа, имеющие аргумент, то есть все комплексные числа, кроме нуля. Изображением данного множества чисел является вся комплексная плоскость без точки O — начала координат.

§ 4. Тригонометрическая форма комплексного числа

Рассмотрим на комплексной плоскости все комплексные числа с модулем 1. Изображением множества таких чисел является окружность с центром в начале координат и радиусом 1.



Пусть точка P_0 — точка пересечения окружности с положительным направлением оси абсцисс. Рассмотрим точку P окружности, изображающую некоторое комплексное число z. Точка P является образом точки P_0 при повороте с центром O на угол φ, причем угол определен с точностью до $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Тогда абсцисса x точки P равна $\cos\varphi$, а ордината y равна $\sin\varphi$. Поэтому комплексное число z задается формулой

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Теперь рассмотрим произвольное, отличное от нуля, комплексное число z с модулем r. Очевидно, $r \neq 0$. Тогда $\dfrac{z}{r}$ — комплексное число, модуль которого равен 1. Поэтому существует число φ такое, что $\frac{z}{r} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то есть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Определение. Запись $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ при $r \neq 0$ называется *тригонометрической формой* комплексного числа z.

Числа r и φ называются *модулем* и *аргументом* комплексного числа z. Для модуля и аргумента используются также обозначения:

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

Обычно выбирают значение $\arg z$, определенное неравенством $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Напомним, что модуль комплексного числа $z = x + yi$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ находится по формуле

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Поскольку $z = x + iy = r\cos\varphi + i \cdot r\sin\varphi$, получаем соотношения:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (*)$$

Замечание 6. Из определения следует, что число 0 непредставимо в тригонометрической форме. Модуль числа 0 равен нулю, а аргумент не определен.

Отметим, что любое положительное действительное число изображается радиус-вектором, коллинеарным оси абсцисс. Следовательно, аргумент любого положительного действительного числа равен $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, в том числе и нулю.

Аргумент любого отрицательного действительного числа равен числу π и вообще любому числу вида $(2k+1)\pi$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Аргумент любого числа вида bi, где $b>0$, равен $\frac{\pi}{2}$ и любому числу вида $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. При $b<0$ аргумент числа bi равен $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 22. Представьте в тригонометрической форме число 1.

Решение. Модуль данного числа равен 1, аргумент равен 0. Поэтому $1=\cos 0+i\sin 0$.

Ответ: $\cos 0+i\sin 0$.

Пример 23. Представьте в тригонометрической форме число 0.

Решение. Аргумент числа 0 не определен, поэтому число 0 невозможно представить в тригонометрической форме (по определению тригонометрической формы комплексного числа).

Ответ: число 0 представить в тригонометрической форме невозможно.

Пример 24. Представьте в тригонометрической форме число 5.

Решение. Модуль данного числа равен 5, аргумент равен 0. Поэтому $5=5(\cos 0+i\sin 0)$.

Ответ: $5(\cos 0+i\sin 0)$.

Пример 25. Представьте в тригонометрической форме число -8.

Решение. Модуль данного числа равен 8, аргумент равен π. Поэтому $-8=8(\cos\pi+i\sin\pi)$.

Ответ: $-8=8(\cos\pi+i\sin\pi)$.

Пример 26. Представьте в тригонометрической форме число i.

Решение. Модуль данного числа равен 1, аргумент равен $\frac{\pi}{2}$. Поэтому $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$.

Пример 27. Представьте в тригонометрической форме число $z=-1+i$.

Решение. Сначала найдем модуль числа:

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Для вычисления аргумента, используя формулы (*), получаем:

$$x=r\cos\varphi \Rightarrow -1=\sqrt{2}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$y=r\sin\varphi \Rightarrow 1=\sqrt{2}\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Теперь найдем одно из чисел φ таких, что $\cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$ например, $\frac{3\pi}{4}$ (точка, изображающая данное комплексное число, расположена во второй координатной четверти, и значение $\arg z=\frac{3\pi}{4}$ удовлетворяет условию $-\pi<\arg z\le\pi$). Получаем: $x=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}$, $y=\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4}$.

Итак, $-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Ответ: $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Пример 28. Представьте в тригонометрической форме число $z=1-\sqrt{3}\,i$.

Решение. $r=|z|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2$.

$1=2\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=\frac{1}{2}$, $2\sin\varphi=-\sqrt{3}\Rightarrow \sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, отсюда получаем: $\varphi=\arg z=-\frac{\pi}{3}$ (точка, изображающая заданное комплексное число, находится в четвертой четверти).

Итак, $1-\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Ответ: $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Замечание 7. Из формул (*) следует, что:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{y}{x}.$$

Если $x>0$, то число z расположено в первой или четвертой координатной четверти, и $\arg z=\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Если $x<0$ и $y>0$, то $\arg z=\varphi=\pi-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Если $x<0$ и $y<0$, то $\arg z=\varphi=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Пример 29. Представьте в тригонометрической форме число $z=-2-3i$.

Решение. $r=|z|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-3}{-2}=1{,}5$.

Поскольку $x=-2<0$, $y=-3<0$, то

$$\varphi=\arg z=-\pi+\operatorname{arctg}1{,}5.$$

Итак, $-2-3i=\sqrt{13}\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где

$$\varphi=-\pi+\operatorname{arctg}1{,}5.$$

Ответ: $\sqrt{13}\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$, где $\varphi=-\pi+\operatorname{arctg}1{,}5$.

Заметим, что с помощью микрокалькулятора можно вычислить <u>*приближенное*</u> значение аргумента, например, с тремя знаками после запятой: $\varphi \approx -2{,}159$. Тогда можно получить ответ не точный, но близкий к реальному: $\sqrt{13}\left(\cos(-2{,}159)+i\sin(-2{,}159)\right)$. Заметим также, что приближенные ответы получают при решении практических задач, в инженерных расчетах, да и в реальной жизни. Но с математической точки зрения верным является только точный ответ, в данном примере $\sqrt{13}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $\varphi=-\pi+\operatorname{arctg}1{,}5$.

Пример 30. Представьте в тригонометрической форме число $1+\frac{1}{i}$.

Решение. Сначала запишем данное число в алгебраической форме:

$$1+\frac{1}{i}=1+\frac{1\cdot(-i)}{-i^2}=1+(-1)i.$$

Модуль данного числа равен $\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. Тогда $1+(-1)i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i\right)$. Теперь найдем одно из чисел φ таких, что $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Например, $\varphi=-\frac{\pi}{4}$. Таким образом,

$$1+\frac{1}{i}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Ответ: $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Пример 31. Представьте в тригонометрической форме число $z=-5-4i$.

Решение. Найдем модуль числа z:

$$|-5-4i|=\sqrt{(-5)^2+(-4)^2}=\sqrt{41}.$$

Следовательно, $-5-4i=\sqrt{41}\left(-\frac{5}{\sqrt{41}}-\frac{4}{\sqrt{41}}i\right)$.

Поскольку $x=-\frac{5}{\sqrt{41}}<0$ и $y=-\frac{4}{\sqrt{41}}<0$, то

$$\arg z=\varphi=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{5}.$$

Ответ: $\sqrt{41}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $\varphi=-\pi+\operatorname{arctg}0{,}8$.

Пример 32. Представьте в тригонометрической форме число $\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$.

Решение. Обратите внимание: число записано не в тригонометрической форме, как может показаться с первого взгляда. Все дело в знаке «минус». Его не должно быть в тригонометрической форме комплексного числа. Для представления данного числа в тригонометрической форме можно найти модуль, вынести его за скобки, а потом подобрать аргумент. А можно поступить проще. Попробуем избавиться от знака «минус», изменив аргумент. Но изменить аргумент надо у обеих функций. Можно заметить, что $\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. Теперь число записано в тригонометрической форме.

Ответ: $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Пример 33. Представьте в тригонометрической форме число $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$.

Решение. И опять дана не тригонометрическая форма комплексного числа: у тригонометрических функций разные аргументы. Попробуем перейти к одному и тому же аргументу и сохранить знак «плюс». Для этого воспользуемся сначала формулой приведения, а потом четностью функции косинус и нечетностью функции синус:

$$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

Получена тригонометрическая форма комплексного числа.

О т в е т: $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Пример 34. Представьте в тригонометрической форме число $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{6}$.

Решение. И вновь дана не тригонометрическая форма комплексного числа: у тригонометрических функций разные аргументы. Но в отличие от предыдущего примера здесь не удастся обойтись несложными тригонометрическими преобразованиями. Придется сначала записать число в алгебраической форме, затем найти его модуль, вынести его за скобки, а потом подобрать аргумент числа: $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. Модуль числа равен $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Продолжим преобразования данного комплексного числа:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Задача решена.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Пример 35. Представьте в тригонометрической форме число $-3\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)$.

Решение. В данной записи два «лишних» минуса. Сначала внесем в скобки знак «минус», стоящий перед числом 3, и получим:

$$-3\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)=3\left(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right).$$

Теперь воспользуемся формулами приведения:

$$3\left(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)=3\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)\right)=$$

$$=3\left(\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right).$$

Задача решена.

Ответ: $3\left(\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$.

Пример 36. Представьте в тригонометрической форме число $4\cos\frac{3\pi}{4}-\left(5\sin\frac{3\pi}{4}\right)i$.

Решение. В данном случае для преобразования числа в тригонометрическую форму нужно сначала записать его в алгебраической форме, затем найти его модуль, вынести модуль за скобки, а потом подобрать аргумент числа.

Итак, $4\cos\frac{3\pi}{4}-5i\sin\frac{3\pi}{4}=4\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}i.$

Модуль числа равен

$$\sqrt{\left(-\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{32+50}{4}}=\frac{\sqrt{82}}{2}.$$

Тогда $4\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{\sqrt{82}}{2}\left(-\frac{4}{\sqrt{41}}+\left(-\frac{5}{\sqrt{41}}\right)i\right).$

Заметим, что $\left(-\frac{4}{\sqrt{41}}\right)^2+\left(-\frac{5}{\sqrt{41}}\right)^2=1$, поэтому существует число φ (не единственное, но нам нужно подобрать хотя бы одно) такое, что $\cos\varphi=-\frac{4}{\sqrt{41}}$, $\sin\varphi=-\frac{5}{\sqrt{41}}$, $-\pi<\varphi\le\pi$.

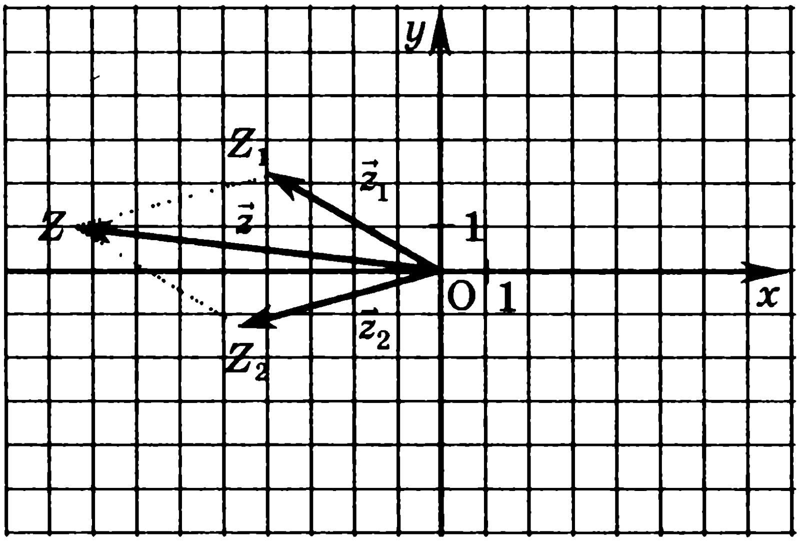
Поскольку $\operatorname{tg}\varphi=\left(-\frac{5}{\sqrt{41}}\right):\left(-\frac{4}{\sqrt{41}}\right)=\frac{5}{4}$, $x=-2\sqrt{2}<0$, $y=-\frac{5\sqrt{2}}{2}<0$, то

$$\operatorname{arctg} z=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{5}{4}.$$

О т в е т: $\frac{\sqrt{82}}{2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $\varphi=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{5}{4}$.

§ 5. Свойства модуля и аргумента комплексного числа

Еще раз вернемся к геометрической интерпретации сложения комплексных чисел. Пусть даны комплексные числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$, а также их сумма — число $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$. Рассмотрим соответствующие этим числам радиус-векторы $\vec{z}_1(x_1; y_1)$, $\vec{z}_2(x_2; y_2)$ и $\vec{z}(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$. При этом $\vec{z} = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$. Если векторы $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$ неколлинеарны, то существует треугольник OZ_1Z (см. рис.). В треугольнике OZ_1Z $OZ_1 = |z_1|$, $ZZ_1 = |z_2|$, $OZ = |z| = |z_1 + z_2|$.



Из неравенства треугольника получаем, что $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$. Заметим, что в данном случае рассмотрены комплексные числа z_1 и z_2, аргументы которых различны, причем отличаются не на число πn, где $n \in \mathbb{Z}$.

Обобщая полученный результат докажем следующее важное свойство сложения комплексных чисел.

Свойство 5. Каковы бы ни были комплексные числа z_1 и z_2, верно неравенство $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Доказательство. Если аргументы φ_1 и φ_2 чисел z_1 и z_2 отличаются не на число πn, где $n \in \mathbb{Z}$, то, как доказано выше, справедливо неравенство

$|z_1+z_2|<|z_1|+|z_2|$. Осталось доказать, что свойство верно и в случае, если $\varphi_1-\varphi_2=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Пусть $\varphi_1-\varphi_2=\pi n$, где n — нечетное целое число. Тогда соответствующие числам z_1 и z_2 радиус-векторы $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$ являются противоположно направленными, поэтому $|\vec{z}_1+\vec{z}_2|<|\vec{z}_1|+|\vec{z}_2|$ и $|z_1+z_2|<|z_1|+|z_2|$.

Если $\varphi_1-\varphi_2=\pi n$, где n — четное целое число, то соответствующие числам z_1 и z_2 радиус-векторы $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$ являются сонаправленными, поэтому $|\vec{z}_1+\vec{z}_2|=$ $=|\vec{z}_1|+|\vec{z}_2|$ и $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$.

До сих пор в доказательстве мы рассматривали комплексные числа, имеющие аргументы, то есть не равные нулю. Если хотя бы одно из чисел z_1 или z_2 равно 0, то $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$.

Таким образом, свойство доказано.

Свойство 6. Каковы бы ни были комплексные числа z_1 и z_2, верно неравенство $|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся только что доказанным свойством, а также равенством модулей противоположных чисел (свойство 2) и получим: $|z_1-z_2|=|z_1+(-z_2)|\le|z_1|+|-z_2|=|z_1|+|z_2|$.

Найдем произведение двух ненулевых комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Рассмотрим числа $z_1=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ и $z_2=\sigma(\cos\phi+i\sin\phi)$. Раскроем скобки и запишем числа z_1 и z_2 в алгебраической форме: $z_1=\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi$, $z_2=\sigma\cos\phi+i\sigma\sin\phi$. Найдем их произведение (напомним, что комплексные числа, записанные в алгебраической форме, можно умножать по правилу умножения многочленов):

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (\rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi)\cdot(\sigma\cos\phi + i\sigma\sin\phi) = \\ &= \left(\rho\cos\varphi\cdot\sigma\cos\phi + i^2\rho\sin\varphi\cdot\sigma\sin\phi\right) + \\ &+ i(\rho\cos\varphi\cdot\sigma\sin\phi + \rho\sin\varphi\cdot\sigma\cos\phi) = \\ &= \rho\sigma(\cos\varphi\cdot\cos\phi - \sin\varphi\cdot\sin\phi) + \\ &+ \rho\sigma i(\cos\varphi\cdot\sin\phi + \sin\varphi\cdot\cos\phi) = \\ &= (\rho\sigma)(\cos(\varphi+\phi) + i\sin(\varphi+\phi)) \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали следующее свойство умножения комплексных чисел.

Свойство 7. Произведением двух ненулевых комплексных чисел является комплексное число, модуль которого равен произведению модулей данных чисел, а аргумент равен сумме аргументов данных чисел, то есть

$$(\rho;\varphi)\cdot(\sigma;\phi) = ((\rho\sigma);(\varphi+\phi))$$

Это свойство можно распространить на произведение любого конечного количества комплексных чисел.

Свойство 8. Произведением n ненулевых комплексных чисел является комплексное число, модуль которого равен произведению модулей данных чисел, а аргумент равен сумме аргументов данных чисел.

Пример 37. Найдите произведение чисел

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{17\pi}{5} + i\sin\frac{17\pi}{5}\right) \text{ и } z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Укажите модуль и аргумент найденного числа.

Решение. Заметим, что первое число представлено в тригонометрической форме, а второе — нет. Поэтому представим второе число в тригонометрической форме:

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

Найдем модуль произведения. Он равен произведению модулей данных чисел, то есть $|z_1 z_2| = 3\sqrt{2}$. Аргумент произведения равен $\arg(z_1 z_2) = \frac{17\pi}{5} + \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{199\pi}{60} = 2\pi + \frac{79\pi}{60}$. Напомним, что аргумент комплексного числа определяется с точностью до 2π, поэтому $\arg(z_1 z_2) = \frac{199\pi}{60}$ или $\arg(z_1 z_2) = \frac{79\pi}{60}$.

Итак, $z_1 z_2 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{79\pi}{60} + i\sin\frac{79\pi}{60}\right)$.

О т в е т: $z_1 z_2 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{79\pi}{60} + i\sin\frac{79\pi}{60}\right)$, $|z_1 z_2| = 3\sqrt{2}$, $\arg(z_1 z_2) = \frac{79\pi}{60}$.

Рассмотрим операцию деления ненулевых комплексных чисел.

Свойство 9. Частным двух ненулевых комплексных чисел является комплексное число, модуль которого равен частному модулей данных чисел, а аргумент равен разности аргументов данных чисел.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны числа $z_1 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $z_2 = \sigma(\cos\phi + i\sin\phi)$. Напомним, что их частным называется комплексное число z такое, что $z_2 \cdot z = z_1$. Очевидно, что $z \neq 0$ (иначе $z_1 = 0$). Обозначим модуль числа z как τ, а его аргумент λ. По свойству умножения комплексных чисел в тригонометрической форме $\sigma\tau = \rho$, $\phi + \lambda = \varphi$. Тогда $\tau = \dfrac{\rho}{\sigma}$, $\lambda = \varphi - \phi$. Свойство доказано.

Пример 38. Найдите частное чисел

$$z_1 = 2,4\left(\sin\frac{29\pi}{9} + i\cos\frac{29\pi}{9}\right) \text{ и } z_2 = -4\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right).$$

Укажите модуль и аргумент найденного числа.

Решение. Сначала представим данные числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = 2,4\left(\sin\frac{29\pi}{9} + i\cos\frac{29\pi}{9}\right) = 2,4\left(\sin\frac{11\pi}{9} + i\cos\frac{11\pi}{9}\right) =$$

$$= 2,4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{9}\right)\right) =$$

$$= 2,4\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{18}\right) + i\sin\left(-\frac{13\pi}{18}\right)\right),$$

$$z_2 = -4\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right) = 4\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)\right) =$$

$$= 4\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right).$$

Найдем модуль частного. Он равен частному модулей данных чисел, то есть $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = 0,6$. Аргумент частного равен $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=-\dfrac{13\pi}{18}-\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{199\pi}{126}$ или $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=$ $=2\pi-\dfrac{199\pi}{126}=\dfrac{53\pi}{126}$.

Итак, $\dfrac{z_1}{z_2}=0,6\left(\cos\dfrac{53\pi}{126}+i\sin\dfrac{53\pi}{126}\right)$.

Ответ: $\dfrac{z_1}{z_2}=0,6\left(\cos\dfrac{53\pi}{126}+i\sin\dfrac{53\pi}{126}\right)$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=0,6$, $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\dfrac{53\pi}{126}$.

Из свойств 7 и 9 следуют еще два свойства модулей комплексных чисел.

Свойство 10. Каковы бы ни были комплексные числа z_1 и z_2, верно равенство $|z_1 z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

Свойство 11. Каковы бы ни были комплексные числа z_1 и z_2, верно равенство $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

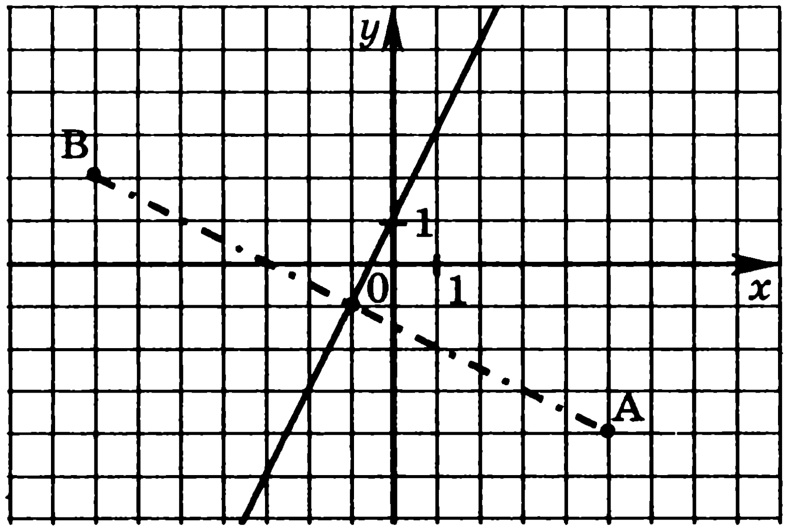
Доказанные утверждения позволяют нам рассмотреть еще несколько примеров геометрических мест точек, заданных уравнениями с комплексными переменными.

Пример 39. Изобразите на комплексной плоскости множество чисел z таких, что $\dfrac{|z-5+4i|}{|z+7-2i|}=1$.

Решение. Заметим, что данное уравнение равносильно системе

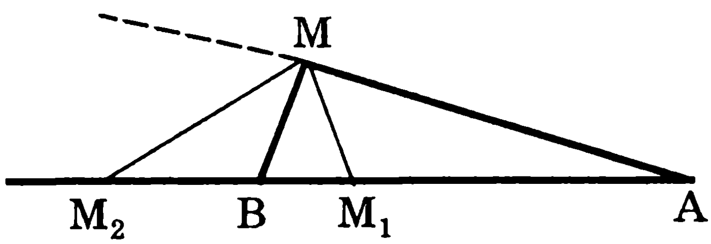
$$\begin{cases}|z-(5-4i)|=|z-(-7+2i)| & (1)\\ z-(-7+2i)\neq 0 & (2)\end{cases}$$

Уравнение (1) задает геометрическое место точек комплексной плоскости, равноудаленных от точек $A(5;\ -4)$ и $B(-7;\ 2)$, то есть серединный перпендикуляр к отрезку AB. Очевидно, что координаты всех точек полученной прямой удовлетворяют неравенству (2).



Пример 40. Изобразите на комплексной плоскости множество чисел z таких, что $\dfrac{|z-4{,}5-3i|}{|z+3+i|}=4.$

Решение. Это — уравнение геометрического места точек $M(x;\ y)$, расстояние от каждой из которых до точки $A(4{,}5;\ 3)$ в 4 раза больше расстояния до точки $B(-3;\ -1)$, то есть $MA = 4MB$. Геометрическим местом таких точек является окружность Аполлония. Напомним, как найти ее центр и радиус.



На прямой AB существуют ровно 2 точки, удовлетворяющие условию $MA = 4MB$, причем одна из них расположена на отрезке AB (обозначим ее M_1), а другая вне отрезка (обозначим ее M_2) так, что точка B лежит между A и M_2. Докажем, что отрезок $M_1 M_2$ — диаметр окружности Аполлония.

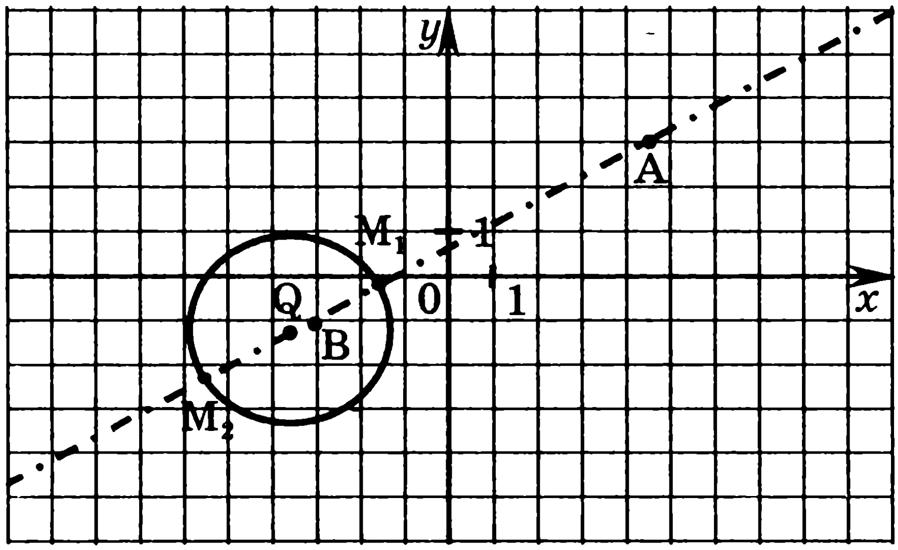
Рассмотрим произвольную точку M, отличную от точек M_1 и M_2, удовлетворяющую условию $MA = 4MB$. Тогда точки A, M, B являются вершинами треугольника, в котором $\frac{MA}{MB}=4$, но $\frac{M_1A}{M_1B}=\frac{M_2A}{M_2B}=4$. Напомним, что равенства $\frac{MA}{MB}=\frac{M_1A}{M_1B}$ и $\frac{MA}{MB}=\frac{M_2A}{M_2B}=4$ верны тогда и только тогда, когда MM_1 и MM_2 являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов треугольника ABM. При этом угол M_1MM_2 прямой, поэтому точка M лежит на окружности с диаметром M_1M_2.

Предлагаем Вам самостоятельно доказать обратное утверждение, а именно, что для любой точки M окружности с диаметром M_1M_2 верно равенство $MA = 4MB$.

Итак, искомым геометрическим местом точек является окружность. Покажем, как ее построить для данных точек $A(4{,}5;\ 3)$ и $B(-3;\ -1)$.

Заметим, что $BM_1=\frac{1}{5}AB$ и $BM_2=\frac{1}{3}AB$, при этом точка M_1 расположена на отрезке AB, а точка B лежит между точками A и M_2. Поэтому абсциссы точек M_1 и M_2 равны соответственно $-3+\frac{1}{5}|4{,}5-(-3)|=-1{,}5$ и $-3-\frac{1}{3}|4{,}5-(-3)|=-5{,}5$.

M_1M_2 — диаметр искомой окружности, ее центр — точка Q — также лежит на прямой AB и имеет абсциссу $\dfrac{-1,5-5,5}{2}=-3,5$.



§ 6. Примеры решения уравнений с комплексными переменными

Рассмотрим решение двух уравнений с комплексной переменной.

Пример 41. Решите уравнение $|z-4|=3$.

Решение. Пусть $z=x+yi$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, тогда уравнение имеет вид $|x+yi-4|=3$. Упрощая левую часть, получим:

$$|(x-4)+yi|=3,\ \sqrt{(x-4)^2+y^2}=3,\ (x-4)^2+y^2=9,$$

$$y=\pm\sqrt{9-(x-4)^2}.$$

При этом $|x-4|\le 3$, $-3\le x-4\le 3$, $1\le x\le 7$.

Множеством корней уравнения является множество комплексных чисел $z = x + yi$ таких, что $x \in \mathbb{R}$, $1 \le x \le 7$, $y = \pm\sqrt{9-(x-4)^2}$.

Ответ: $z = x + yi$, где $x \in \mathbb{R}$, $1 \le x \le 7$, $y = \pm\sqrt{9-(x-4)^2}$.

Пример 42. Решите уравнение $z^2 - 6|z| + 8 = 0$.

Решение. Обратите внимание, что в множестве комплексных чисел равенство $z^2 = |z|^2$ не является тождеством. Например, оно неверно для $z = i$. Действительно, $i^2 = -1$, $|i|^2 = |0+1i|^2 = 0^2 + 1^2 = 1$. Поэтому данное уравнение не является квадратным. Для его решения нужно записать число z в алгебраической форме и упростить левую часть уравнения.

Пусть $z = x + yi$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, тогда исходное уравнение имеет вид:

$$(x+yi)^2 - 6|x+yi| + 8 = 0,$$

$$x^2 + 2xyi - y^2 - 6\sqrt{x^2+y^2} + 8 = 0,$$

$$\left(x^2 - y^2 - 6\sqrt{x^2+y^2} + 8\right) + 2xyi = 0.$$

Воспользуемся условием равенства комплексного числа нулю и получим следующую систему:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6\sqrt{x^2+y^2} + 8 = 0, \\ 2xy = 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-y^2-6\sqrt{y^2}+8=0,\\ x=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-6\sqrt{x^2}+8=0,\\ y=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим первое уравнение:

$$-y^2-6\sqrt{y^2}+8=0,$$

$$|y|^2+6|y|-8=0,$$

$$|y|=-3\pm\sqrt{17}.$$

Так как $|y|\geq 0$, то $|y|=-3+\sqrt{17}$, $y=\pm\left(-3+\sqrt{17}\right)$.

Решения первой системы: $\left(0;-3+\sqrt{17}\right)$, $\left(0;3-\sqrt{17}\right)$.

Аналогичным образом получаем решения второй системы: $(-2;0)$, $(2;0)$, $(-4;0)$, $(4;0)$.

Ответ: -4; -2; 2; 4; $\left(-3+\sqrt{17}\right)i$; $\left(3-\sqrt{17}\right)i$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите:

а) $|-9{,}1|$;

б) $\left|7-4\sqrt{2}\right|$;

в) $|3+6i|$;

г) $\left|\overline{-i+8}\right|$;

д) $|(2-3i)(2+3i)|$;

е) $\left|(2-5i)^2\right|$.

2. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа, модули которых

а) равны $\sqrt{5}$;

б) меньше или равны 4;

в) меньше 2;

г) больше или равны 2;

д) больше 1 и меньше или равны 5.

3. Изобразите на комплексной плоскости множество чисел z таких, что

а) $|z+3-2i| \le 2$;

б) $|z-2+3i| < 4$;

в) $1 \le |z+2+3i| \le 3$;

г) $|z+3| \le |z-7|$;

д) $|z+4-i| < |z+4+5i|$;

е) $\sqrt{|z+2i|} \le \sqrt{|z-6i|}$;

ж) $\log_{0,1}|z-2-3i| > \log_{0,1}|z-2+5i|$;

з) $\dfrac{|z+5|}{|z-7|} \le 1$;

и) $\dfrac{|z+3-i|}{|z-7+i|} > 1$.

4. Найдите множество чисел z таких, что

а) $|z-3i| = |z+3| = |z-5|$;

б) $|z+4-2i| = |z+2-5i| = |z-\overline{1-2i}|$.

5. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа с аргументом

а) $\frac{\pi}{3}$;

б) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

в) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

г) $\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$;

д) $-\frac{5\pi+\pi n}{6},\ n\in\mathbb{Z}$;

е) $\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{Z}$.

6. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа с аргументами φ такими, что

а) $\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}$;

б) $-\frac{11\pi}{6}<\varphi<-\frac{2\pi}{3}$;

в) $-\frac{7\pi}{6}\le\varphi<\frac{5\pi}{6}$;

г) $\frac{7\pi}{6}\le\varphi<\frac{19\pi}{4}$;

д) $\frac{7\pi}{3}<\varphi<\frac{13\pi}{3}$;

е) $-\frac{7\pi}{3}\le\varphi\le-\frac{\pi}{3}$.

7. Представьте в тригонометрической форме число:

а) -6;

б) $\sqrt{3}$;

в) $1+i$;

г) $1-i$;

д) $-4+3i$;

е) $3+4i$;

ж) $\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}$;

з) $\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2}$;

и) $-2\left(\sin\frac{7\pi}{4}+i\cos\frac{\pi}{4}\right)$;

к) $2-3i$.

8. Представьте в алгебраической форме число:

а) $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;

б) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$;

в) $3(\cos\pi + i\sin\pi)$;

г) $2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

9. Изобразите на комплексной плоскости множество чисел z таких, что

а) $\dfrac{|z+3+2i|}{|z-6-4i|} = 1$;

б) $\dfrac{|z+1+3i|}{|z-\overline{1-3i}|} = 1$;

в) $\dfrac{|z+4-3i|}{|z-4+3i|} = \dfrac{1}{3}$;

г) $\dfrac{|z-5-5i|}{|z+\overline{1+3i}|} \le 2$;

д) $\dfrac{|z+\overline{8-3i}|}{|z-4-3i|} > 5$;

е) $\begin{cases} \dfrac{|z-1+i|}{|z+5+3i|} = \dfrac{1}{5} \\ |z+12i| = |z-10i|. \end{cases}$

10. Найдите произведение чисел z_1 и z_2. Укажите модуль и аргумент найденного числа.

а) $z_1 = -5\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$,

$z_2 = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{16\pi}{7} - i\sin\dfrac{16\pi}{7}\right)$;

б) $z_1 = 3\sqrt{7}\left(\cos\dfrac{23\pi}{8} - i\sin\dfrac{23\pi}{8}\right)$,

$z_2 = -2\sqrt{3}\left(\sin\dfrac{13\pi}{8} + i\cos\dfrac{13\pi}{8}\right)$;

в) $z_1 = -3\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{25\pi}{8} - i\sin\dfrac{25\pi}{8}\right)$,

$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{10\pi}{9} + i\sin\dfrac{10\pi}{9}\right)$;

г) $z_1 = 15\left(\cos\frac{13\pi}{7} + i\sin\frac{13\pi}{7}\right)$,

$z_2 = 5\left(\sin\frac{12\pi}{5} + i\cos\frac{12\pi}{5}\right)$.

11. Решите уравнение:

а) $|z + 4i| = 3$;

б) $|z - 3 + 2i| = 4$;

в) $|z - \overline{3 - 2i}| = 4$;

г) $z^2 + 8|z| - 9 = 0$;

д) $5z^2 - 8|z| + 3 = 0$;

е) $4z^2 + 9|z| + 5 = 0$.

Контрольная работа

Вариант 1

1. Вычислите $|\overline{5 - 12i}|$.

2. Изобразите на комплексной плоскости множество чисел z таких, что

а) $2 < |z| \le 4$;

б) $\frac{|z - 2 + i|}{|z + 4 - 3i|} \ge 1$.

3. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа z с аргументами φ, удовлетворяющими условию $-\frac{\pi}{3} \le \varphi < \frac{5\pi}{6}$.

4. Представьте в тригонометрической форме число:

а) $\sin\frac{5\pi}{6} + i\cos\frac{5\pi}{6}$; б) $-2 + 3i$.

5. Представьте в алгебраической форме число

$$2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

6. Выполните действия и представьте полученное число в алгебраической форме:

а) $4\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\cdot 6\left(\cos\frac{7\pi}{8}-i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$;

б) $\dfrac{\cos 130^\circ + i\sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ}$.

7. Решите уравнение $|z-2+3i|=3$.

Вариант 2

1. Вычислите $|\overline{12+9i}|$.

2. Изобразите на комплексной плоскости множество чисел z таких, что

а) $3\le|z|<6$; б) $\dfrac{|z+3-2i|}{|z-4+i|}>1$.

3. Изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа z с аргументами φ, удовлетворяющими условию $-\frac{5\pi}{6}<\varphi\le\frac{2\pi}{3}$.

4. Представьте в тригонометрической форме число:

а) $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$;

б) $5+4i$.

5. Представьте в алгебраической форме число

$$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

6. Выполните действия и представьте полученное число в алгебраической форме:

а) $2\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)\cdot 7\left(\cos\frac{7\pi}{9}-i\sin\frac{7\pi}{9}\right)$;

б) $\frac{\cos 140^\circ + i\sin 140^\circ}{\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ}$.

7. Решите уравнение $|z+2-3i|=5$.

Глава 4. СТЕПЕНИ И КОРНИ

§ 1. Возведение в степень комплексных чисел. Формула Муавра

Определение 1. $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Определение 2. $z^1 = z$.

Определение 3. Для $z \neq 0$ $z^0 = 1$.

Определение 4. Для $z \neq 0$ $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Из приведенных определений и свойства 5 сопряженных чисел ($\overline{z_1 z_2 \ldots z_3} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \ldots \overline{z_3}$.) следует, что число, сопряженное n-й степени $(n \in \mathbb{N})$ комплексного числа z, равно n-й степени числа, сопряженного числу z, т.е.

$$\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим далее степени числа i.

По определению первой степенью числа i является само число i.

Более высокие степени числа i находятся следующим образом:

$$i^2 = -1;$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i;$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)^2 = 1;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i \text{ и так далее.}$$

Очевидно, что при любом натуральном n

$$i^{4n}=\left(i^4\right)^n=1;\ i^{4n+1}=i^{4n}\cdot i=i;$$

$$i^{4n+2}=i^{4n}\cdot i^2=-1;\ i^{4n+3}=i^{4n}\cdot i^3=-i.$$

Таким образом, степень числа i с натуральным показателем n равна степени числа i с показателем, равным остатку от деления числа n на 4.

Пример 1. Вычислите i^{397}.

Решение. $i^{397}=i^{99\cdot 4+1}=\left(i^4\right)^{99}\cdot i=(1)^{99}\cdot i=i.$

Ответ: i.

Пример 2. Вычислите i^{12537}.

Решение. $i^{12537}=i^{3134\cdot 4+1}=i^1=i.$

Пример 3. Вычислите: $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}$.

Решение. $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}=i^4\cdot i^2+\left(i^4\right)^4+$
$+\left(i^4\right)^6\cdot i^2+\left(i^4\right)^9+\left(i^4\right)^{11}\cdot i^2+\left(i^4\right)^{14}=0.$

Ответ: 0.

Пример 4. Вычислите $(1-i)^{15}$.

Решение. $(1-i)^{15}=\left((1-i)^2\right)^7\cdot(1-i)=(-2i)^7\cdot(1-i)=$
$=-128(-i)(1-i)=128+128i.$

Пример 5. Вычислите: $\left(\dfrac{1-i^5}{1+i^9}\right)^{14}$.

Решение. $\left(\dfrac{1-i^5}{1+i^9}\right)^{14}=\left(\dfrac{1-i^4\cdot i}{1+i^8\cdot i}\right)^{14}=\left(\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2\right)^7=$

$=\left(\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)^2}\right)^7=(-1)^7=-1.$

Ответ: -1.

Для упрощения вычислений полезно помнить, что

$(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i;$

$\left(\sqrt{3} \pm i\right)^3 = 3\sqrt{3} \pm 9i - 3\sqrt{3} \pm i = \pm 8i;$

$\left(1 \pm i\sqrt{3}\right)^3 = 1 \pm 3 \cdot i\sqrt{3} + 3 \cdot \left(i\sqrt{3}\right)^2 \pm \left(i\sqrt{3}\right)^3 = -8.$

Пример 6. Вычислите $\dfrac{\left(\sqrt{3} - i\right)^9}{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^6}$.

Решение. $\dfrac{\left(\sqrt{3} - i\right)^9}{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^6} = \dfrac{\left(\left(\sqrt{3} - i\right)^3\right)^3}{\left(\left(1 - i\sqrt{3}\right)^3\right)^2} = \dfrac{(-8i)^3}{(-8)^2} = 8i.$

Пример 7. Вычислите: $\left(\dfrac{i^5 + \sqrt{3}}{i^7 + \sqrt{3}}\right)^{15}$.

Решение. $\left(\dfrac{i^5 + \sqrt{3}}{i^7 + \sqrt{3}}\right)^{15} = \left(\dfrac{i^4 \cdot i + \sqrt{3}}{i^4 \cdot i^3 + \sqrt{3}}\right)^{15} = \left(\left(\dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}\right)^3\right)^5 =$

$= \left(\dfrac{8i}{-8i}\right)^5 = -1.$

Ответ: -1.

Для возведения комплексного числа в степень с натуральным показателем, можно применять формулу бинома Ньютона.

Пример 8. Вычислите $(1 + i)^5$.

Решение. $(1 + i)^5 = 1^5 + 5 \cdot 1^4 \cdot i + 10 \cdot 1^3 \cdot i^2 + 10 \cdot 1^2 \cdot i^3 +$
$+ 5 \cdot 1^1 \cdot i^4 + i^5 = 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i = -4 - 4i$

Степень комплексного числа с целым показателем проще находить в тригонометрической форме.

Теорема (Формула Муавра).

Пусть z — любое отличное от нуля комплексное число, n — любое целое число. Тогда

$$z^n = \left(r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right)^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right). \quad (1)$$

Доказательство.

1) Для любого натурального n докажем эту формулу методом математической индукции.

Для $n=1$ формула верна. Предположим, что формула верна для $n=k$.

То есть предположим, что справедливо равенство

$$z^k = \left(r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right)^k = r^k\left(\cos k\varphi + i\sin k\varphi\right). \quad (2)$$

Докажем, что из справедливости равенства (2) следует, что формула (1) справедлива для $n=k+1$. Применяя формулу (2), правила действий над комплексными числами и формулы для синуса и косинуса суммы двух углов, имеем

$$z^{k+1} = z^k z = r^k\left(\cos k\varphi + i\sin k\varphi\right)\left(r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right) =$$

$$= r^{k+1}\left(\left(\cos k\varphi\cos\varphi - \sin k\varphi\sin\varphi\right) +\right.$$

$$\left. + i\left(\sin k\varphi\cos\varphi + \cos k\varphi\sin\varphi\right)\right) =$$

$$= r^{k+1}\left(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi\right).$$

То есть формула (1) доказана для $n = k + 1$. Следовательно, по принципу математической индукции формула (1) справедлива для любого натурального n.

2) Если $n = 0$ и $z \neq 0$, то по определению $z^0 = 1$, поэтому $z^0 = 1\cdot\left(\cos 0\cdot\varphi + i\sin 0\cdot\varphi\right)$, т.е. формула (1) верна для $n=0$.

3) Пусть $n=-1$ и $z\neq 0$. Тогда имеем

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\cos 0+i\sin 0}{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{1}{r}(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)).$$

То есть для $n=-1$ формула (1) верна.

4) Пусть n — любое целое отрицательное число и $z\neq 0$. Тогда $n=-m$, где $m=|n|$ — натуральное число. Применяя определение степени с целым показателем, формулу (1) сначала для $n=-1$, а затем для любого натурального m, имеем

$$z^n=\left(\frac{1}{z}\right)^m=\left(\frac{1}{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\right)^m=\left(\frac{1}{r}(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))\right)^m=$$

$$=\left(\frac{1}{r}\right)^m(\cos(-m\varphi)+i\sin(-m\varphi))=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Итак, формула (1) верна для любого целого n. Теорема доказана.

Пример 9. Запишите в алгебраической форме число $\left(\sqrt{3}+i\right)^{17}$.

Решение. Запишем число $z=\sqrt{3}+i$ в тригонометрической форме: $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Тогда $z^{17}=\left(2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^{17}=$

$$=2^{17}\left(\cos\frac{17\pi}{6}+i\sin\frac{17\pi}{6}\right)=2^{17}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),$$

или $\left(\sqrt{3}+i\right)^{17}=2^{17}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-2^{16}\sqrt{3}+2^{16}i.$

Пример 10. Выразите $\sin 4x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Решение. Рассмотрим выражение $(\cos x + i\sin x)^4$. По формуле Муавра оно равно $\cos 4x + i\sin 4x$. С другой стороны

$$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos^4 x + 4i\cos^3 x \cdot \sin x - 6\cos^2 x\sin^2 x -$$

$$-4i\cos x \cdot \sin^3 x + \sin^4 x =$$

$$= \left(\cos^4 x - 6\cos^2 x \cdot \sin^2 x + \sin^4 x\right) +$$

$$+\left(4\cos^3 x \cdot \sin x - 4\cos x \cdot \sin^3 x\right)i.$$

Приравняв мнимые части, получим

$$\sin 4x = 4\cos^3 x \cdot \sin x - 4\cos x \cdot \sin^3 x.$$

§ 2. Извлечение корней из комплексного числа

Докажем, что для всякого комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ существует комплексное число $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ такое, что

$$\left(\rho(\cos\theta + i\sin\theta)\right)^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Используя формулу Муавра, получаем:

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Модули двух равных комплексных чисел, отличных от нуля, равны, а аргументы отличаются на угол, кратный 2π.

Поэтому $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$, откуда $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$, где k может быть любым целым числом.

В частности,

при $k = 0$ $\theta = \frac{\varphi}{n}$;

при $k = 1$ $\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$;

при $k = 2$ $\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n}$;

....

при $k = n - 1$ $\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$.

Среди этих значений аргумента нет равных. Рассмотрим разность двух чисел из этого множества. Пусть $k_1 > k_2$, тогда

$$\theta_1 - \theta_2 = \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k_1\pi}{n}\right) - \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k_2\pi}{n}\right) = 2\pi\frac{k_1 - k_2}{n}.$$

Так как $0 < k_1 < n$ и $0 \le k_2 < n$, $0 < k_1 - k_2 < n$ и $0 < \frac{k_1 - k_2}{n} < 1$, что доказывает наше утверждение.

Если $k < 0$ или $k \ge n$, то $k = k_0 + np$, где $0 < k_o < n$ и p — целое число. Тогда $\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(k_0 + pn)\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k_0\pi}{n} + 2\pi p$. Полученное значение корня равно одному из найденных ранее.

Итак, если только корень степени n из комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ существует, то он может принимать лишь следующие n значений:

$$\alpha_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right);$$

$$\alpha_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right);$$

....

$$\alpha_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

Непосредственной проверкой легко установить, используя формулу Муавра, что каждое из этих чисел удовлетворяет соотношению $\alpha^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и потому является корнем n-й степени из комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Таким образом, ***каждое комплексное число, отличное от нуля, имеет ровно n корней n-й степени.***

Геометрически все n значений корня n-й степени из комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ изображаются точками, лежащими на окружности с центром в начале координат, радиус которой равен r. Если эти точки соединить последовательно прямолинейными отрезками, то в результате получится правильный n-угольник.

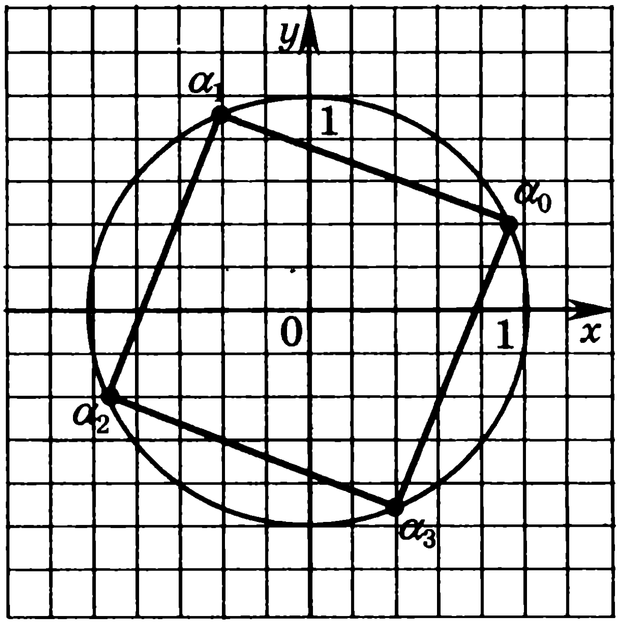
Пример 11. Найдите значение $\sqrt[4]{i}$.

Решение. Так как $i = \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}$, то $\sqrt[4]{i} = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4}$, где $k = 0,1,2,3$. Получаем 4 корня:

$$\alpha_0 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}; \qquad \alpha_1 = -\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8};$$

$$\alpha_2 = -\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}; \qquad \alpha_3 = \sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}.$$

Все точки α_i лежат на окружности радиуса 1 с центром в начале координат. Аргументы соседних точек отличаются друг от друга на $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, эти точки являются вершинами правильного четырехугольника, то есть квадрата.



Пример 12. Решите уравнение $z^3+1=0$.

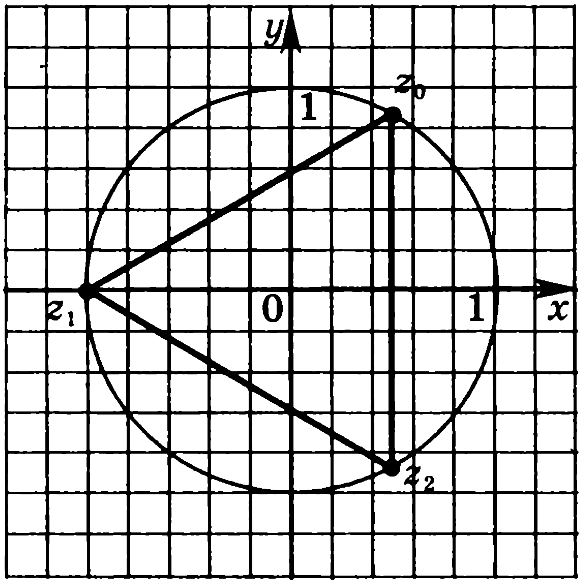
Решение. Найдем значения $\sqrt[3]{-1}$. Так как $-1=\cos\pi+i\sin\pi$, то $\sqrt[3]{-1}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}$, где $k=0,1,2$. Уравнение имеет три корня:

$$z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_1=\cos\pi+i\sin\pi=-1;$$

$$z_2=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Все точки z_i лежат на окружности радиуса 1 с центром в начале координат. Аргументы соседних точек отличаются друг от друга на $\frac{2\pi}{3}$. Следовательно, эти точки являются вершинами правильного треугольника.



Замечание. Уравнение $z^3+1=0$ можно решить, разложив на множители левую часть:

$$(z+1)\left(z^2-z+1\right)=0.$$

Первый множитель дает первый корень — число -1.

Из второго множителя находим:

$$z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ или } z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Таким образом, уравнение $z^3+1=0$ имеет три корня:

$$z_0=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\; z_1=-1;\; z_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Эти корни совпадают с корнями, полученными первым способом.

Пример 13. Решите уравнение $(z+1)^n = z^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Так как $z=0$ не является корнем данного уравнения, оно равносильно уравнению $\left(1+\frac{1}{z}\right)^n = 1$, откуда $1+\frac{1}{z} = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, где $k = 1,2,3,\ldots n-1$ (при $k=0$ уравнение $1+\frac{1}{z}=1$ не имеет решения). Таким образом

$$z_k = \frac{1}{\cos\frac{2\pi k}{n} - 1 + i\sin\frac{2\pi k}{n}} = \frac{\cos\frac{2\pi k}{n} - 1 - i\sin\frac{2\pi k}{n}}{\left(\cos\frac{2\pi k}{n} - 1\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi k}{n}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{2\pi k}{n} - 1 - i\sin\frac{2\pi k}{n}}{2\left(1-\cos\frac{2\pi k}{n}\right)} = \frac{1}{2}\left(-1 - i\cdot\frac{\sin\frac{2k\pi}{n}}{1-\cos\frac{2k\pi}{n}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 + i\cdot\frac{2\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}{2\sin^2\frac{k\pi}{n}}\right) = -\frac{1}{2}\left(1 + i\,ctg\frac{k\pi}{n}\right).$$

Уравнения $z_1 = z_2$ и $\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{z_2}$, вообще говоря, не равносильны. Второе равенство говорит, что для каждого значения $\sqrt[n]{z_1}$ найдется равное ему значение $\sqrt[n]{z_2}$ и наоборот.

Пример 14. Решите уравнение
$z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$

Решение. Так как $z=1$ не является корнем данного уравнения, обе его части умножим на $z-1$. Имеем $(z-1)\left(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1\right)=0$ или $z^6-1=0$.

Корнями этого уравнения являются значения $\sqrt[6]{1}$, то есть

$$z_0=1;$$

$$z_1=\cos\left(0+\frac{2\pi}{6}\right)+i\sin\left(0+\frac{2\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$z_2=\cos\left(0+\frac{4\pi}{6}\right)+i\sin\left(0+\frac{4\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$z_3=\cos\left(0+\frac{6\pi}{6}\right)+i\sin\left(0+\frac{6\pi}{6}\right)=-1;$$

$$z_4=\cos\left(0+\frac{8\pi}{6}\right)+i\sin\left(0+\frac{8\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$z_5=\cos\left(0+\frac{10\pi}{6}\right)+i\sin\left(0+\frac{10\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Корнями данного уравнения являются числа z_1, z_2, z_3, z_4, z_5.

§ 3. Показательная форма комплексного числа

Впервые понятие степени с комплексным показателем введено Леонардом Эйлером, который показал, что любое комплексное число вида $z=\cos\varphi+i\sin\varphi\neq 0$ может быть представлено в виде $z=e^{i\varphi}$. То есть

$$\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi=e^{i\varphi}.$$

Из этого равенства следует, что

$$r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) = r\cdot e^{i\varphi}. \qquad (**)$$

Запись $z = r\cdot e^{i\varphi}$ называется *показательной формой* комплексного числа.

Пример 15. Запишите в показательной форме число $z = -1 + i$.

Решение. Находим модуль и аргумент числа:

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \arg z = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-1}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Получаем показательную форму данного комплексного числа: $z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

Ответ: $z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

Пример 16. Представьте в алгебраической форме число $z = e^{\frac{\pi}{2}i}$.

Решение. По формуле (**) получаем:

$$z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1i = i.$$

Ответ: $z = i$.

Пример 17. Запишите в алгебраической форме число $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$.

Решение. По формуле (**) получаем:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i.$$

Ответ: $z = \sqrt{3} + i$.

Арифметические действия со степенями с комплексными показателями выполняются так же, как и со степенями с действительными показателями.

1) $z_1 \cdot z_2 = \left(r_1 \cdot e^{i\varphi_1}\right)\left(r_2 \cdot e^{i\varphi_2}\right) =$

$= r_1\left(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1\right)\cdot r_2\left(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2\right) =$

$= r_1 \cdot r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\cdot\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{(\varphi_1+\varphi_2)i};$

2) $z_1 : z_2 = \left(r_1 \cdot e^{i\varphi_1}\right) : \left(r_2 \cdot e^{i\varphi_2}\right) =$

$= r_1\left(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1\right) : r_2\left(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2\right) =$

$= \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\cdot\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right) = \dfrac{r_1}{r_2}\cdot e^{(\varphi_1-\varphi_2)i};$

3) $z^n = \left(r \cdot e^{i\varphi}\right)^n = \left(r\cdot\left(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi\right)\right)^n =$

$= r^n \cdot \left(\cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi\right) = r^n \cdot e^{n\varphi\cdot i};$

4) $\dfrac{1}{e^{i\varphi}} = \dfrac{\cos 0 + i\cdot\sin 0}{\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi} = \cos(-\varphi) + i\cdot\sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}.$

Пример 18. Найдите произведение комплексных чисел $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ и $z_2 = e^{\frac{\pi}{2}i}$. Результат представьте в алгебраической форме.

Решение. По формуле $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{(\varphi_1+\varphi_2)i}$ получаем:

$$z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 1\cdot e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)i} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

По формуле (**) получаем:

$$2e^{\frac{2\pi}{3}i} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}.$$

Ответ: $z_1 \cdot z_2 = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} = -1 + \sqrt{3}\,i.$

Пример 19. Найдите частное комплексных чисел $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ и $z_2 = e^{\frac{\pi}{2}i}$. Результат представьте в алгебраической форме.

Решение. По формуле $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{(\varphi_1 - \varphi_2)i}$ получаем:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{1} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)i} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}.$$

По формуле (**) получаем:

$$2e^{-\frac{\pi}{3}i} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}i.$$

Ответ: $\frac{z_1}{z_2} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i} = 1 - \sqrt{3}i.$

Используя показательную форму комплексного числа, можно определить показательную функцию комплексного аргумента.

Определение. Показательной функцией комплексного аргумента называется функция, которая каждому комплексному числу z, кроме нуля, ставит в соответствие e^z: $f(z) = e^z$.

Пусть $z = x + yi$. Тогда

$$e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right).$$

Пример 20. Найдите e^z, если $z = 2 - \frac{\pi}{2}i$.

Решение. $e^{2-\frac{\pi}{2}i} = e^2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -ie^2.$

Ответ: $-ie^2$.

Используя показательную форму комплексного числа, можно также выразить тригонометрические функции через степени с мнимым показателем:

$$\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

$$\cos(-\varphi) + i\cdot\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\cdot\sin\varphi = e^{-i\varphi}.$$

Следовательно, $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ и $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$.

Эти формулы называются формулами Эйлера.

Пример 21. Вычислите приближенно с точностью до сотых $\cos(5i)$.

Решение. $\cos(5i) = \dfrac{e^{i(5i)} + e^{-i(5i)}}{2} = \dfrac{e^{-5} + e^{5}}{2} \approx 74{,}21.$

Ответ: $\cos(5i) \approx 74{,}21.$

Замечание. Как следует из примера, значение косинуса комплексного аргумента может быть - больше 1.

Можно определить логарифмическую функцию комплексного аргумента, а также и другие известные вам функции. Все эти и многие другие функции изучаются в разделе математики, который называется теорией функций комплексного переменного.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите:

   а) i^{31};

   б) i^{53};

   в) i^{134};

   г) i^{155};

   д) $i^{3} + i^{13} + i^{23} + i^{33} + i^{43} + i^{53}$;

   е) $1 + i + i^{2} + i^{3} + \ldots + i^{2525}$;

ж) $\dfrac{1}{i^3}$;

з) $\dfrac{1}{i^{11}}-\dfrac{1}{i^{41}}+\dfrac{1}{i^{75}}-\dfrac{1}{i^{1023}}$.

2. Вычислите:

а) $\dfrac{(1+i)^{1000}}{(1-i)^{998}}$;

б) $\left(\dfrac{1-i^9}{1+i^7}\right)^{33}$;

в) $\left(\dfrac{1-i^9}{1+i^{17}}\right)^{36}$;

г) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{12}$;

д) $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i^7}{1-i^3}\right)^8$;

е) $(1+i)^8\cdot\left(1-i\sqrt{3}\right)^6$;

ж) $(1+i)^8\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6$;

з) $\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{12}-\left(1+i\sqrt{3}\right)^6}{(-1+i)^{12}}$.

3. Запишите в алгебраической форме число:

а) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{11}$;

б) $(2+2i)^7$.

4. Найдите:

а) $\sqrt{1+i}$;

б) $\sqrt{\sqrt{3}+i}$.

5. Выразите:

а) $\cos 4x$ через $\cos x$;

б) $\sin 5x$ через $\sin x$ и $\cos x$;

в) $\sin 3x$ через $\sin x$;

г) $\cos 3x$ через $\cos x$.

6. Найдите значения $\sqrt[3]{1}$. Изобразите полученные корни на комплексной плоскости.

7. Решите уравнение:

а) $z^4 - 1 = 0$;

б) $z^2 - z + 1 = 0$.

8. Найдите $\sqrt{2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}$.

9. Решите уравнение $(2-z)^n = z^n$, $n \in \mathbb{N}$

10. Решите уравнение $32z^5 + 16z^4 + 8z^3 + 4z^2 + 2z + 1 = 0$.

11. Представьте в алгебраической форме комплексные числа:

а) $e^{\pi i}$;   г) $4e^{-\frac{\pi}{6}i}$;

б) $e^{\frac{\pi}{2}i}$;   д) $\sqrt{3}e^{\frac{2\pi}{3}i}$;

в) $2e^{\frac{\pi}{4}i}$;   е) $e^{-\pi i}$.

12. Представьте в показательной форме комплексные числа:

а) $1 - i$;   г) $\sqrt{3} + i$;

б) $-1 + \sqrt{3}\,i$;   д) $-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$;

в) $-10 - 10i$;   е) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

13. Найдите произведение чисел:

а) $e^{\pi i}$ и $2e^{-\frac{\pi}{4}i}$;

б) $e^{-\frac{\pi}{2}i}$ и $z = \sqrt{3}\,e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

14. Найдите частное чисел:

а) $e^{-\pi i}$ и $2e^{-\frac{\pi}{4}i}$;

б) $\sqrt{3}\,e^{\frac{\pi}{2}i}$ и $e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

15. Найдите z^n, если:

а) $z = 2e^{-\frac{\pi}{4}i}$, $n = 3$;

б) $z = \sqrt{3}\, e^{-\frac{\pi}{3}i}$, $n = 2$.

Контрольная работа

Вариант 1

1. Найдите сумму $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{1526}$.
2. Вычислите $\dfrac{(1-i)^{1000}}{(1+i)^{998}}$.
3. Вычислите $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^6$.
4. Запишите в алгебраической форме число $\left(\sqrt{3}-i\right)^9$.
5. Выразите $\cos 4x$ через $\sin x$.
6. Найдите $\sqrt[3]{1+i}$.
7. Решите уравнение $z^4 - 16 = 0$.

Вариант 2

1. Найдите сумму $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{259}$.
2. Вычислите $\dfrac{(1+i)^{2000}}{(1-i)^{1998}}$.
3. Вычислите $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{60}$.
4. Запишите в алгебраической форме число $\left(\sqrt{3}+i\right)^{11}$.

5. Выразите $\sin 6x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

6. Найдите $\sqrt[3]{1-i}$.

7. Решите уравнение $z^3+8=0$.

Глава 5. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ГЕОМЕТРИИ

Алгебра комплексных чисел представляет собой один из эффективнейших методов решения планиметрических задач. Он позволяет решать планиметрические задачи вычислениями по готовым формулам. Рассмотрим некоторые из них.

Прежде всего, отметим, что каждой точке M плоскости соответствует единственное комплексное число $z = x + iy$ и обратно. Будем называть z комплексной координатой точки M. Вспомним также, что число, сопряженное числу $z = x + yi$, записывается в виде $\overline{z} = x - yi$.

1. Расстояние между двумя точками.

Пусть даны две точки $A(z_1)$ и $B(z_2)$. Тогда радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$ имеет координату z_1, радиус-вектор $\overrightarrow{OB}$ — координату z_2. Используя равенства $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ и $\overline{z_2 - z_1} = \overline{z_2} - \overline{z_1}$, получим:

$$AB^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right|^2 = |z_2 - z_1|^2 = (z_2 - z_1) \cdot \left(\overline{z_2 - z_1}\right) =$$

$$= (z_2 - z_1) \cdot \left(\overline{z_2} - \overline{z_1}\right).$$

Итак, расстояние между двумя точками $A(z_1)$ и $B(z_2)$ можно вычислить по формуле:

$$AB^2 = (z_2 - z_1) \cdot \left(\overline{z_2} - \overline{z_1}\right).$$

2. Уравнение окружности.

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $K(z_0)$ получаем из условия, что расстояние от любой точки $M(z)$ окружности до точки $K(z_0)$ равно R, то есть $(z-z_0)\cdot\left(\overline{z}-\overline{z_0}\right)=R^2$.

3. Деление отрезка в данном отношении.

Пусть точка C принадлежит прямой AB и $\overrightarrow{AC}=\lambda\cdot\overrightarrow{CB}$ $(\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda\neq-1)$. В этом случае говорят, что точка C делит отрезок AB в отношении λ. Обозначим комплексные координаты точек A, B и C соответственно z_1, z_2 и z_3. Тогда векторному равенству соответствует равенство $z_3-z_1=\lambda(z_2-z_3)$, откуда получаем: $z_3=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

При $\lambda=1$ точка C является серединой отрезка AB и $z_3=\dfrac{1}{2}(z_1+z_2)$.

Обозначив $\dfrac{1}{1+\lambda}=\alpha$ и $\dfrac{\lambda}{1+\lambda}=\beta$, получим

$$z_3=\alpha z_1+\beta z_2,$$

где $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha+\beta=1$.

Это — достаточное условие принадлежности точек $A(z_1)$, $B(z_2)$ и $C(z_3)$ одной прямой.

4. Скалярное произведение векторов.

Выразим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ через комплексные координаты z_1 и z_2 точек A и B. Для этого выразим сумму $z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2$ через x_1, y_1, x_2, y_2:

$$z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2=(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)+(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)=$$
$$=2(x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2)=2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}.$$

Отсюда получаем:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\left(z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2\right). \qquad (*)$$

Далее получим формулу скалярного произведения двух векторов, начала которых — точки A и C, концы — точки B и D комплексной плоскости.

Пусть даны четыре точки $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$, $D(z_4)$, тогда

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}\right)=$$

$$=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}.$$

Используя формулу $(*)$, получим:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(z_2\cdot\overline{z_4}+\overline{z_2}\cdot z_4-z_2\cdot\overline{z_3}-\overline{z_2}\cdot z_3-z_1\cdot\overline{z_4}-\right.$$

$$\left.-\overline{z_1}\cdot z_4+z_1\cdot\overline{z_3}+\overline{z_1}\cdot z_3\right).$$

Итак,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left((z_1-z_2)\cdot\left(\overline{z_3}-\overline{z_4}\right)+\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)\cdot(z_3-z_4)\right).$$

Как известно, необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух ненулевых векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

Таким образом, $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда, когда

$$(z_1-z_2)\cdot\left(\overline{z_3}-\overline{z_4}\right)+\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)\cdot(z_3-z_4)=0,$$

где z_1, z_2, z_3, z_4 — комплексные координаты точек A, B, C, D соответственно.

Последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = -\frac{\overline{z}_1 - \overline{z}_2}{\overline{z}_3 - \overline{z}_4}. \qquad (**)$$

Учитывая, что для любых двух комплексных чисел выполняются равенства $\overline{z}_m - \overline{z}_n = \overline{z_m - z_n}$ и $\overline{z}_p : \overline{z}_q = \overline{z_p : z_q}$, делаем вывод:

равенство (**) имеет вид: $z = -\overline{z}$. Если $z = x + yi$, то $-\overline{z} = -(x - yi) = -x + yi$. Поэтому из равенства $z = -\overline{z}$ следует $x + yi = -x + yi$. Но $x = -x$ только при $x = 0$, то есть $z = yi$.

Это означает, что прямые (отрезки) AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда число $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ является чисто мнимым.

5. Коллинеарность векторов. Параллельность прямых.

Пусть на плоскости даны две отличные от начала координат O точки $A(z_1)$ и $B(z_2)$. Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\arg z_1 - \arg z_2 = \arg\frac{z_1}{z_2} = 0$ (векторы сонаправлены) или $\arg z_1 - \arg z_2 = \arg\frac{z_1}{z_2} = \pi$ (векторы противоположно направлены).

Но числа с такими аргументами действительные, значит, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ или $z_1 \cdot \overline{z}_2 = \overline{z}_1 \cdot z_2$.

Векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда точки с комплексными координатами $z_1 - z_2$ и $z_3 - z_4$ лежат на одной прямой с началом координат, то есть

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = \overline{\frac{(z_1 - z_2)}{(z_3 - z_4)}} = \frac{\overline{z}_1 - \overline{z}_2}{\overline{z}_3 - \overline{z}_4} \Leftrightarrow (z_1 - z_2)\cdot(\overline{z}_3 - \overline{z}_4) =$$
$$= (\overline{z}_1 - \overline{z}_2)\cdot(z_3 - z_4).$$

Другими словами, отрезки AB и CD параллельны тогда и только тогда, когда $\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ число действительное.

6. Принадлежность трех точек одной прямой.

Три точки $A(z_1)$, $B(z_2)$ и $C(z_3)$ принадлежат одной прямой, если векторы AB и AC коллинеарны, то есть $(z_1 - z_2)\cdot(\overline{z}_1 - \overline{z}_3) = (\overline{z}_1 - \overline{z}_2)\cdot(z_1 - z_3)$. Существует и другое необходимое и достаточное условие принадлежности трех точек одной прямой: уравнение прямой, проходящей через точки $A(z_1)$ и $B(z_2)$, имеет вид $(z_1 - z_2)\cdot(\overline{z}_1 - \overline{z}) = (\overline{z}_1 - \overline{z}_2)\cdot(z_1 - z)$ или

$$z_1(\overline{z}_2 - \overline{z}) + z_2(\overline{z} - \overline{z}_1) + z(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = 0 \qquad (***)$$

7. Уравнение касательной к окружности.

Пусть дана точка $P(z_0)$. Найдем уравнение прямой, проходящей через эту точку перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OP}$. Условие $MP \perp OP$, где $M(z)$ — произвольная точка этой прямой, дает уравнение $z_0(\overline{z}_0 - \overline{z}) + \overline{z}_0(z_0 - z) = 0$, а значит, и уравнение $z_0\overline{z} + \overline{z}_0 z = 2z_0\overline{z}_0$.

Это уравнение можно рассматривать как уравнение касательной к окружности радиуса $z\bar{z}=|z_0|^2$ в точке $P(z_0)$.

Для единичной окружности это уравнение принимает вид $z_0\bar{z}+\bar{z}_0 z=2$.

Если точки $A(z_1)$ и $B(z_2)$ принадлежат единичной окружности, то есть

$$z_1\bar{z}_1=1\Leftrightarrow\bar{z}_1=\frac{1}{z_1}\ \text{и}\ z_2\bar{z}_2=1\Leftrightarrow\bar{z}_2=\frac{1}{z_2},$$

уравнение (***) принимает вид $z+z_1z_2\bar{z}=z_1+z_2$. Это уравнение есть уравнение прямой, содержащей хорду AB единичной окружности.

Пример 1. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда комплексные координаты a, b, c, d его вершин удовлетворяют условию $a+c=b+d$.

Решение. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, тогда комплексная координата середины отрезка AC равна $\frac{1}{2}(a+c)$, а середины BD — $\frac{1}{2}(b+d)$. В параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит

$$\frac{1}{2}(a+c)=\frac{1}{2}(b+d)\Leftrightarrow a+c=b+d.$$

Пусть теперь в четырехугольнике $ABCD$ $a+c=b+d$, тогда $\frac{1}{2}(a+c)=\frac{1}{2}(b+d)$, значит, диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Пример 2. Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.

Решение. Пусть комплексные координаты вершин треугольника ABC равны a, b, c соответственно, тогда координаты точек M_1, M_2, M_3, середин сторон BC, AC, BC соответственно, равны $\frac{1}{2}(b+c), \frac{1}{2}(a+c)$, $\frac{1}{2}(a+b)$. Сумма квадратов медиан треугольника равна

$$AM_1^2 + BM_2^2 + CM_3^2 =$$

$$= \left(a - \frac{1}{2}(b+c)\right)\left(\bar{a} - \frac{1}{2}(\bar{b}+\bar{c})\right) + \left(b - \frac{1}{2}(a+c)\right)\left(\bar{b} - \frac{1}{2}(\bar{a}+\bar{c})\right) +$$

$$+ \left(c - \frac{1}{2}(a+b)\right)\left(\bar{c} - \frac{1}{2}(\bar{a}+\bar{b})\right).$$

После преобразований получаем

$$\frac{3}{4}\left(2a\bar{a} + 2b\bar{b} + 2c\bar{c} - a\bar{b} - \bar{a}b - a\bar{c} - a\bar{c} - \bar{b}c - b\bar{c}\right).$$

Теперь найдем сумму квадратов сторон треугольника.

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 = (a-b)\left(\bar{a} - \bar{b}\right) + (b-c)\left(\bar{b} - \bar{c}\right) +$$

$$+ (a-c)(\bar{a} - \bar{c}).$$

После преобразований получим

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 =$$

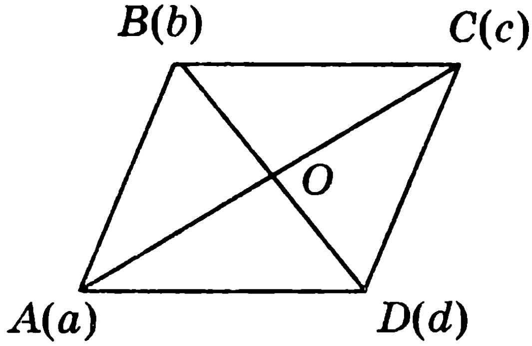
$$= 2a\bar{a} + 2b\bar{b} + 2c\bar{c} - a\bar{b} - \bar{a}b - a\bar{c} - a\bar{c} - \bar{b}c - b\bar{c}.$$

Таким образом,

$$AM_1^2 + BM_2^2 + CM_3^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2),$$

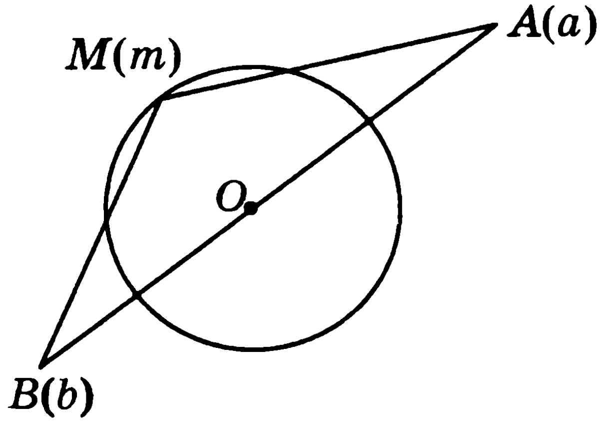
что и требовалось доказать.

Пример 3. Докажите, что если в плоскости параллелограмма $ABCD$ существует такая точка M, что $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$, то $ABCD$ — прямоугольник.



Решение. Примем в качестве начальной точки точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Будем считать числа a, b, c, d комплексными координатами вершин A, B, C, D параллелограмма, а координату точки M обозначим буквой z. Тогда $c = -a$, $d = -b$, и поэтому равенство, данное в условии, будет эквивалентно равенству $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) + (z+a)(\bar{z}+\bar{a}) = (z-b)(\bar{z}-\bar{b}) + (z+b)(\bar{z}+\bar{b})$. Преобразовав последнее равенство, получим: $a\bar{a} = b\bar{b}$. Но $a\bar{a} = OA^2 = \left(\frac{1}{2}AC\right)^2$, $b\bar{b} = OB^2 = \left(\frac{1}{2}BD\right)^2$. Это означает, что диагонали параллелограмма равны, т.е. он прямоугольник.

Пример 4. Точки A и B симметричны относительно центра некоторой окружности. Докажите, что для любой точки M этой окружности значение суммы MA^2+MB^2 величина постоянная.



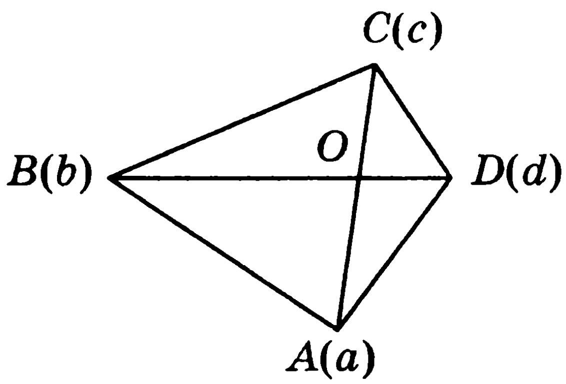
Решение. Примем за начальную точку центр окружности. Пусть комплексные координаты точек A, B, M равны a, b, m соответственно. Так как точки A и B симметричны относительно O, $b=-a$. Тогда

$$MA^2+MB^2=(m-a)(\bar{m}-\bar{a})+(m-b)(\bar{m}-\bar{b})=$$

$$=(m-a)(\bar{m}-\bar{a})+(m+a)(\bar{m}+\bar{a})=2m\bar{m}+2a\bar{a}.$$

Но $m\bar{m}=R^2$ и $a\bar{a}=OA^2=C$, значит $MA^2+MB^2=$ $=R^2+C$, что и требовалось доказать.

Пример 5. Докажите, что если средние линии (т.е. отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон) четырехугольника равны, то его диагонали взаимно перпендикулярны, и обратно.



Решение. Пусть комплексные координаты вершин A, B, C, D четырехугольника $ABCD$ равны a, b, c, d соответственно. Середина стороны AB имеет координату $\frac{a+b}{2}$, середина стороны BC координату $\frac{b+c}{2}$, середина стороны CD координату $\frac{c+d}{2}$ и середина стороны AD координату $\frac{a+d}{2}$. Так как средние линии четырехугольника равны, имеем равенство

$$\left(\frac{a+b}{2}-\frac{c+d}{2}\right)\left(\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}-\frac{\overline{c}+\overline{d}}{2}\right)=\left(\frac{b+c}{2}-\frac{a+d}{2}\right)\left(\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}-\frac{\overline{a}+\overline{d}}{2}\right),$$

откуда

$$\left((a+b)-(c+d)\right)\left(\left(\overline{a}+\overline{b}\right)-\left(\overline{c}+\overline{d}\right)\right)=$$
$$=\left((b+c)-(a+d)\right)\left(\left(\overline{b}+\overline{c}\right)-\left(\overline{a}+\overline{d}\right)\right).$$

После преобразований получим

$$\left((a-c)-(d-b)\right)\left(\left(\overline{a}-\overline{c}\right)-\left(\overline{d}-\overline{b}\right)\right)=$$
$$=\left((b-a)-(d-c)\right)\left(\left(\overline{b}-\overline{a}\right)-\left(\overline{d}-\overline{c}\right)\right),$$

$$(a+c)\left(\overline{b}+\overline{d}\right)+\left(\overline{a}+\overline{c}\right)(b+d)=0,$$

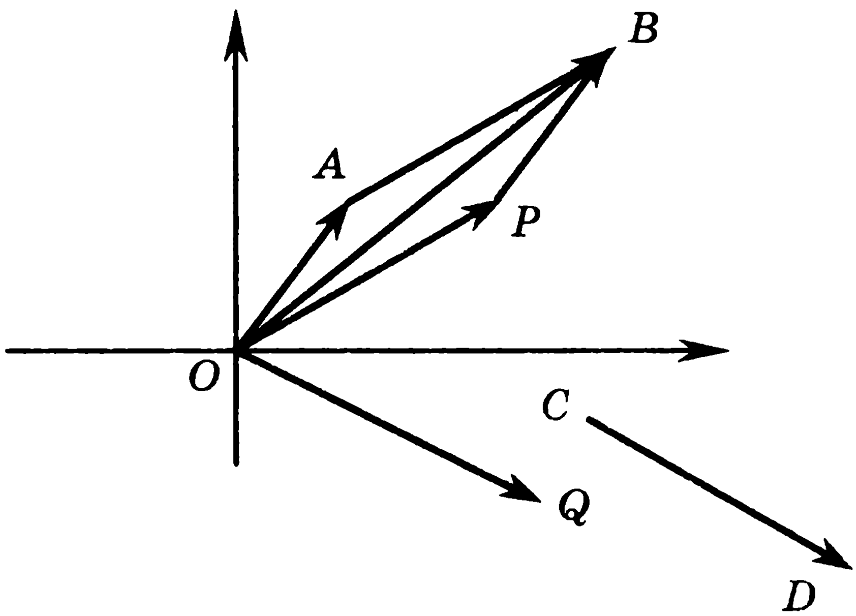
$$\frac{a+c}{b+d}=-\frac{\overline{a}+\overline{c}}{\overline{b}+\overline{d}}.$$

То есть отрезки AC и BD перпендикулярны.

Проводя эти рассуждения в обратном порядке, получим второе утверждение данной задачи.

8. Угол между векторами.

Пусть даны четыре точки $A(a), B(b), C(c), D(d)$. Найдем синус и косинус угла $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)$, на который надо повернуть вектор $\overrightarrow{AB}$, чтобы получить вектор, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{CD}$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{CD}$. Тогда $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}}\right)$.



Так как $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, координата точки P есть $b-a$. Аналогично найдем координату точки Q, она равна $d-c$.

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}}\right)=$$

$$=\arg(d-c)-\arg(b-a)=\arg\frac{d-c}{b-a}.$$

Напомним, что аргумент комплексного числа зависит от направления поворота. При повороте против часовой стрелки аргумент положительный, в обратном направлении — отрицательный, т.е.

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = -(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}).$$

Почленно складывая и вычитая равенства $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, получим $\sin\varphi = \dfrac{z-\bar{z}}{2ir}$, $\cos\varphi = \dfrac{z+\bar{z}}{2r}$.

При $z = \dfrac{d-c}{b-a}$ $\quad \sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{\dfrac{d-c}{b-a} - \dfrac{\bar{d}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{a}}}{2i\left|\dfrac{d-c}{b-a}\right|} =$

$$= \frac{(d-c)(\bar{b}-\bar{a}) - (\bar{d}-\bar{c})(b-a)}{2i|d-c|\cdot|b-a|}.$$

Аналогично найдем $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) =$

$$= \frac{(d-c)(\bar{b}-\bar{a}) + (\bar{d}-\bar{c})(b-a)}{2|d-c|\cdot|b-a|}.$$

Пример 6. Разность углов A и B треугольника ABC равна 90°. Докажите, что расстояние от основания высоты, проведенной к прямой AB, до середины этой стороны равно радиусу описанной около треугольника окружности.

Решение. Равенство $A - B = \dfrac{\pi}{2}$ равносильно равенству $\arg\dfrac{(c-a)(c-b)}{(b-a)(a-b)} = \dfrac{\pi}{2}$. Если треугольник вписан в окружность $z\cdot\bar{z} = 1$, предыдущее равенство сводится к равенству $ab = -c^2$. Если H — основание высоты, а K — середина AB, то $c - h - k$ и $HK^2 = c\cdot\bar{c} = 1$.

9. Площадь треугольника и четырехугольника.

Площадь S треугольника ABC равна:

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{1}{4i}\left((c-a)\left(\bar{b}-\bar{a}\right)-(b-a)\left(\bar{c}-\bar{a}\right)\right)$$

или

$$S=\frac{i}{4}\left(a\left(\bar{b}-\bar{c}\right)+b\left(\bar{c}-\bar{a}\right)+c\left(\bar{a}-\bar{b}\right)\right).$$

Площадь четырехугольника $ABCD$ равна

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}}\right)=$$

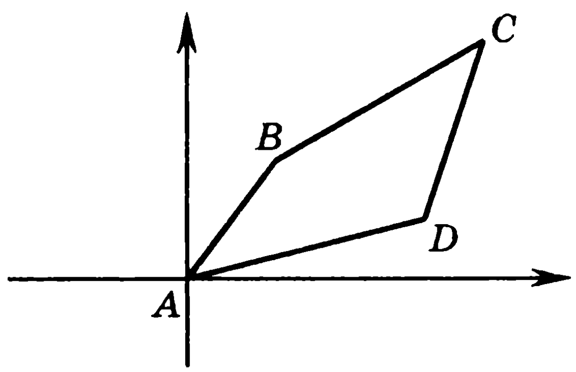
$$=\frac{1}{4i}\left((d-b)\left(\bar{c}-\bar{a}\right)-(c-a)\left(\bar{d}-\bar{b}\right)\right).$$

Пример 7. Докажите, что для всякого выпуклого четырехугольника $ABCD$ выполняется равенство

$$AC^2BD^2=AB^2CD^2+BC^2AD^2-$$

$$-2AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA\cdot\cos\left(\widehat{A}+\widehat{C}\right).$$

Решение.



Примем вершину A за начальную точку, а координаты точек B, C, D за b, c, d соответственно. Тогда $\widehat{A}=\arg d-\arg b=\arg\frac{d}{b}$, $\widehat{C}=\arg(b-c)-\arg(d-c)=$

$$=\arg\frac{b-c}{d-c},\quad \widehat{A}+\widehat{C}=\arg\frac{d}{b}+\arg\frac{b-c}{d-c}=\arg\frac{d(b-c)}{b(d-c)}.$$

Так как $\cos\varphi = \dfrac{z+\bar{z}}{2r}$, $\cos\left(\widehat{A}+\widehat{C}\right) = \dfrac{\dfrac{d(b-c)}{b(d-c)} + \dfrac{\bar{d}\left(\bar{b}-\bar{c}\right)}{\bar{b}\left(\bar{d}-\bar{c}\right)}}{2\left|\dfrac{d(b-c)}{b(d-c)}\right|}$.

После преобразований, учитывая, что $b\cdot\bar{b} = AB^2$, $(d-c)\left(\bar{d}-\bar{c}\right) = CD^2$, получим:

$$\cos\left(\widehat{A}+\widehat{C}\right) = \frac{d\bar{b}(b-c)\left(\bar{d}-\bar{c}\right) + \bar{d}b\left(\bar{b}-\bar{c}\right)(d-c)}{2AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA}.$$

Правая часть равенства, которое надо доказать, равна

$$b\bar{b}(d-c)\left(\bar{d}-\bar{c}\right) + d\bar{d}(b-c)\left(\bar{b}-\bar{c}\right) -$$
$$-d\bar{b}(b-c)\left(\bar{d}-\bar{c}\right) - \bar{d}b\left(\bar{b}-\bar{c}\right)(d-c) =$$
$$= c\bar{c}(d-b)\left(\bar{d}-\bar{b}\right) = AC^2\cdot BD^2,$$

что и требовалось доказать.

Следствием из полученного равенства является теорема Птолемея: во вписанном в окружность четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

Во вписанном четырехугольнике $\widehat{A}+\widehat{C} = 180°$, и доказанное равенство принимает вид $AC^2BD^2 = AB^2CD^2 + BC^2AD^2 + 2AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA$, откуда

$$(AC\cdot BD)^2 = (AB\cdot CD + BC\cdot AD)^2$$
$$AC\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot AD.$$

Теорема доказана.

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 являются вершинами параллелограмма.
2. Докажите, что сумма квадратов диагоналей четырехугольника равна удвоенной сумме квадратов его средних линий.
3. Докажите, что расстояние от вершины C треугольника ABC до точки D, симметричной центру описанной окружности относительно прямой AB, вычисляется по формуле $CD^2 = R^2 + AC^2 + BC^2 - AB^2$, где R — радиус описанной окружности.
4. Доказать, что сумма квадратов диагоналей AC, BD четырехугольника $ABCD$ равна удвоенной сумме квадратов отрезков MN, PQ, соединяющих середины противоположных сторон.
5. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух его противоположных сторон равна сумме квадратов двух других противоположных сторон.
6. Найдите угол между боковыми сторонами равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к боковым сторонам, перпендикулярны.
7. Докажите, что ортоцентр треугольника служит центром вписанной окружности для треугольника, вершинами которого являются основания высот данного треугольника.

ОТВЕТЫ

Глава 1

Задачи для самостоятельного решения

1. $\pm\sqrt{5}$.

2. а) $\left(\frac{26}{7}; \frac{22}{7}\right)$; в) $\left(-\frac{7}{5}; \frac{8}{5}\right)$;
 б) $(-2{,}5; -4{,}5)$; г) $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}\right)$.

3. а) $-1-i$; в) $-i$;
 б) $5+3i$; г) $-0{,}2-6i$.

4. а) $-5+5i$; в) $6+i$;
 б) $1-6i$; г) $1{,}8-0{,}2$.

5. а) $-5+5i$; в) $13i$;
 б) $-5-5i$; г) $2{,}89$.

6. а) 48; в) 60;
 б) $-7-24i$; г) $24i$.

7. а) 25;
 б) 169;
 в) 1,21;
 г) 12,25.

8. а) $-0{,}76+0{,}32i$;
 б) $-1{,}4-1{,}2i$;
 в) $-0{,}2+0{,}2i$;
 г) $2+i$.

9. а) $-\frac{8}{5}+\frac{9}{5}i$; г) $-2+0,5i$;

б) $-2-i$; д) $-i$.

в) $z=0$; $z=-1$; $z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

10. а) $\pm i$; в) $3\pm i$;

б) $1\pm i\sqrt{3}$; г) $-4\pm\sqrt{2}\,i$.

Контрольная работа

Вариант 1

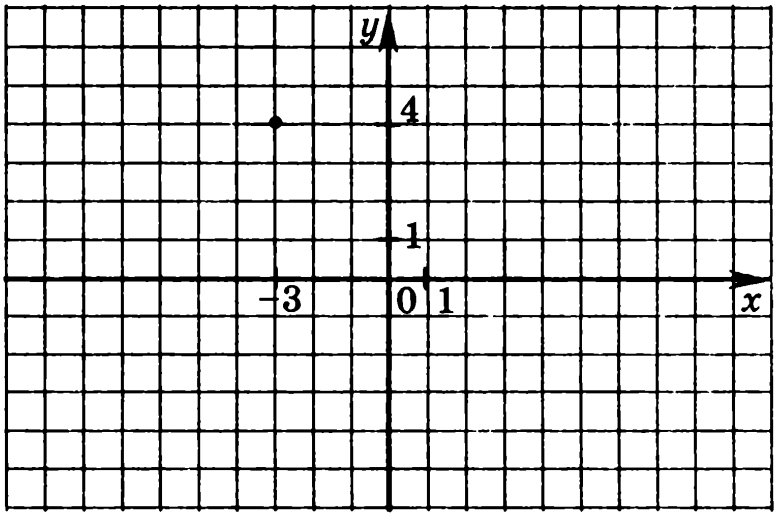
1. $0,8 - 4,8i$.
2. 24.
3. $x = \frac{1}{9}$, $y = -\frac{4}{3}$.
4. $-0,64 + 0,52i$.
5. $-1 \pm i\sqrt{3}$.
6. $z = -2$.

Вариант 2

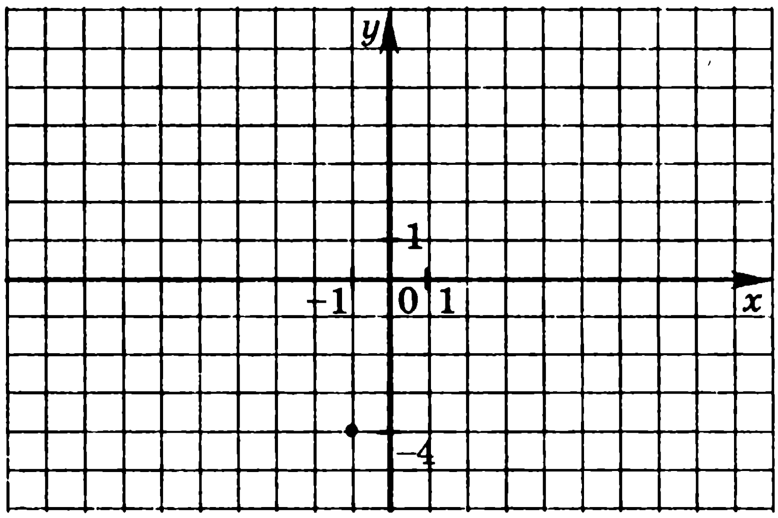
1. $3,2 + 0,5i$.
2. $-14i$.
3. $\left(-\frac{5}{2}; 7\right)$.
4. $-0,36 + 0,02i$.
5. $-2 \pm 4i$.
6. $z = 0$.

Глава 2

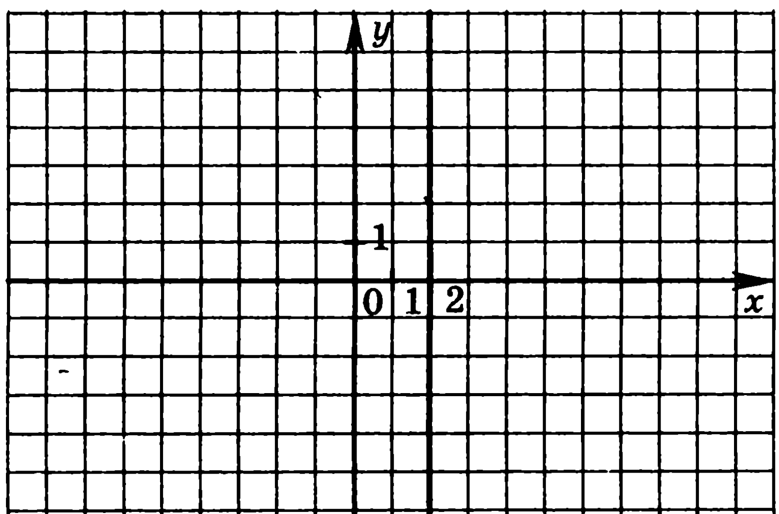
1.



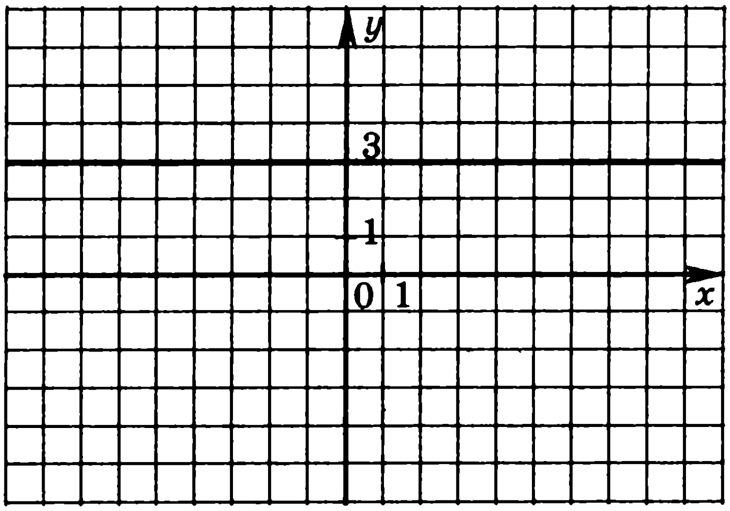
2.



3.

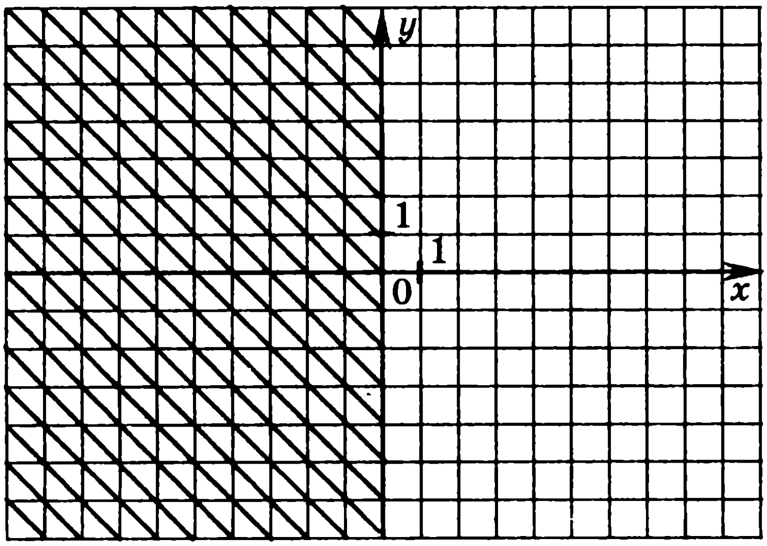


4.

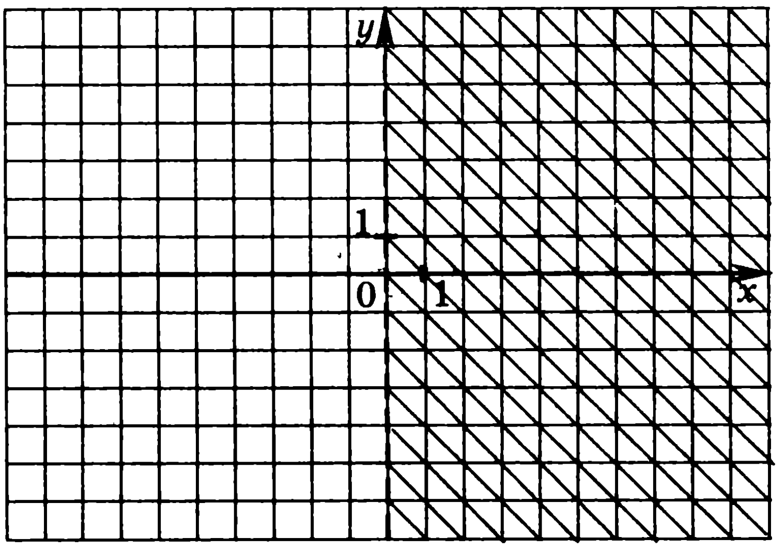


5. а) Ось Oy; б) Ось Ox.

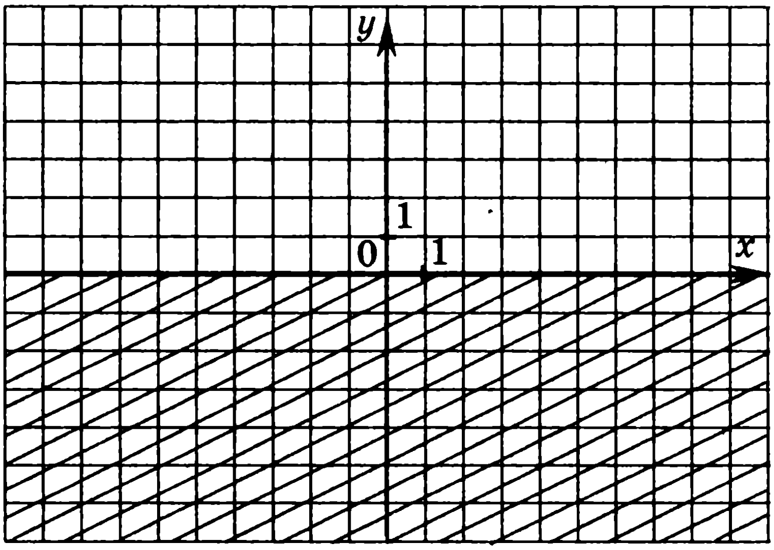
6. а)



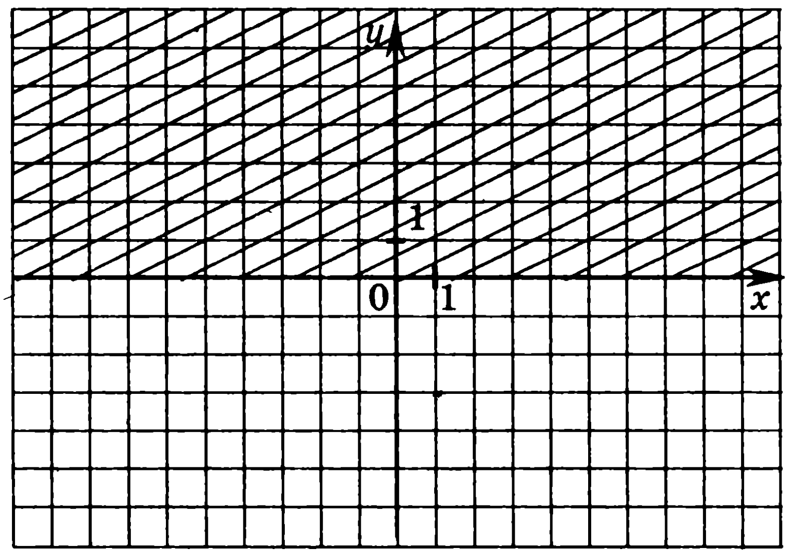
б)



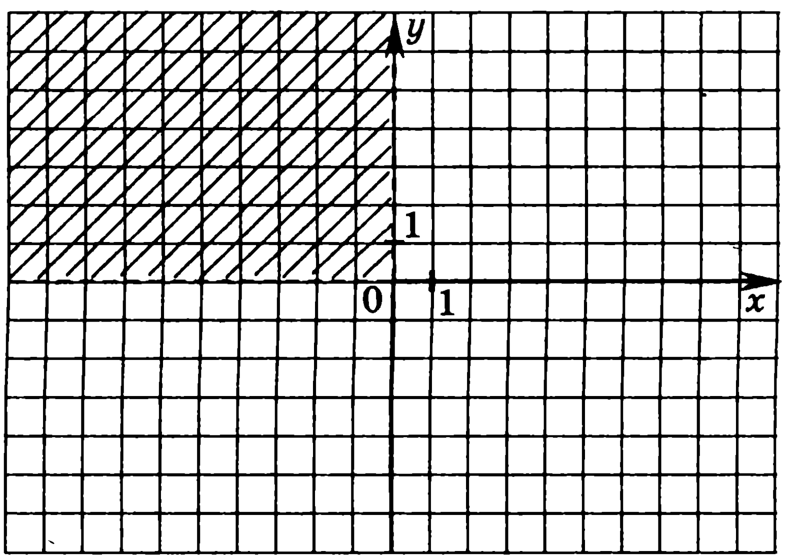
в)



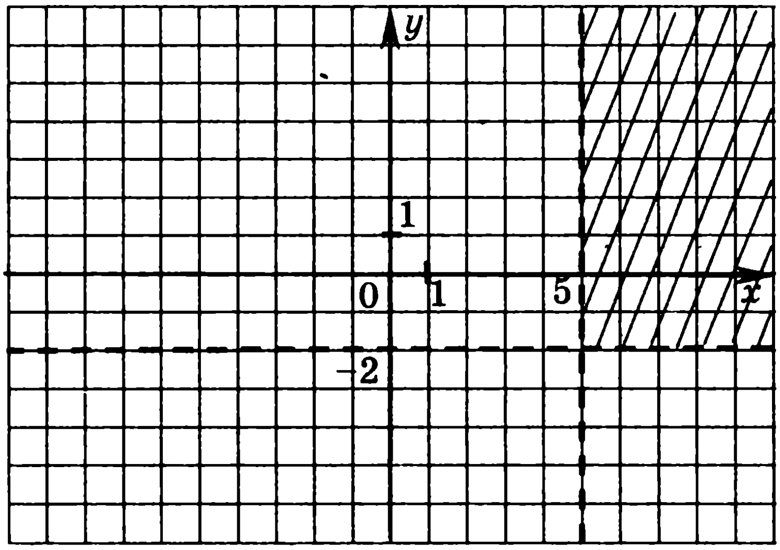
г)



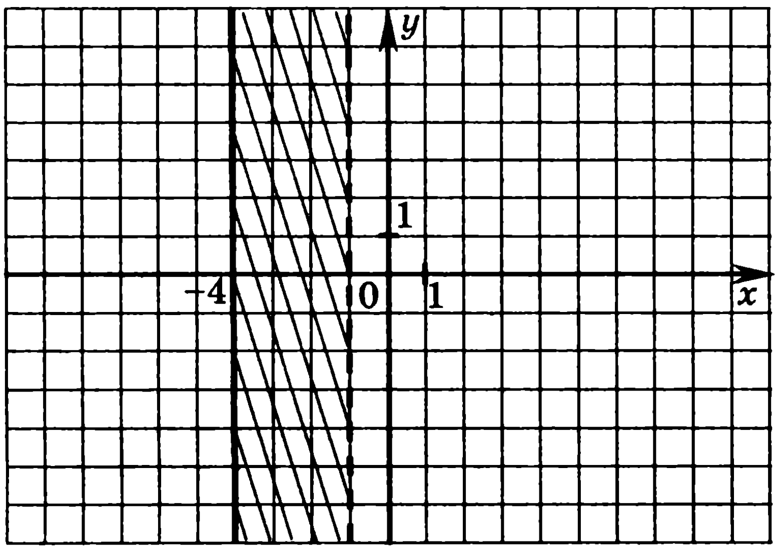
д)



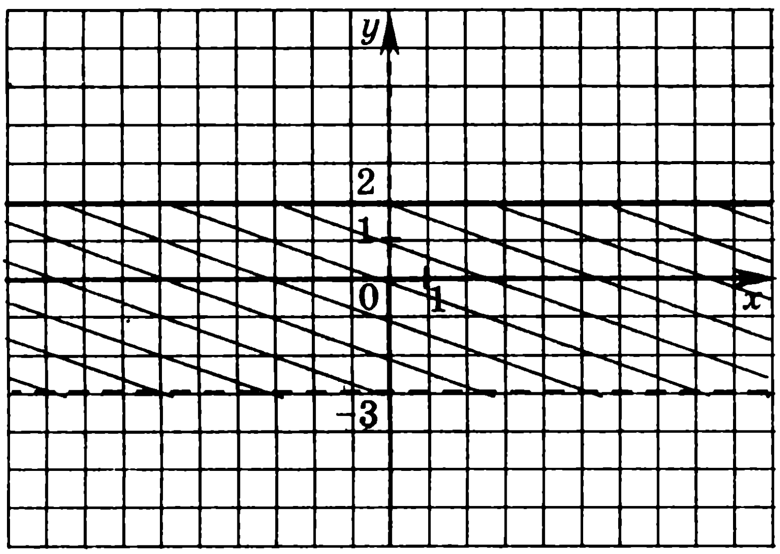
е)



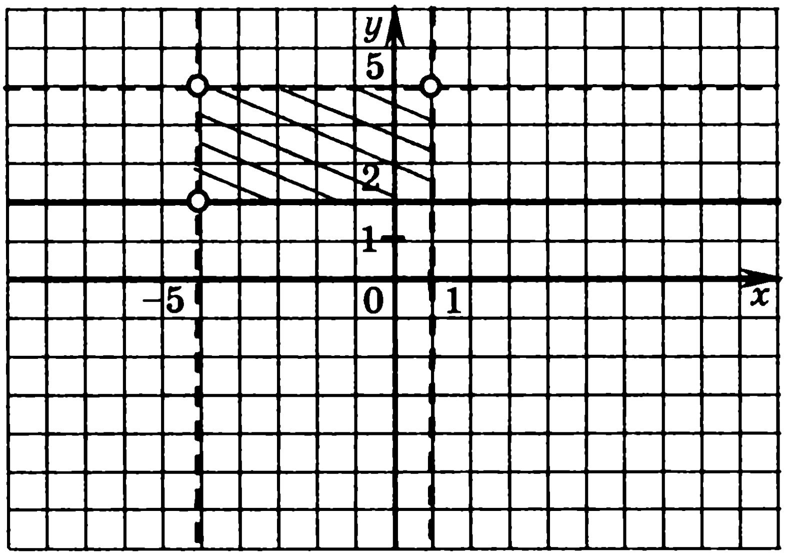
ж)



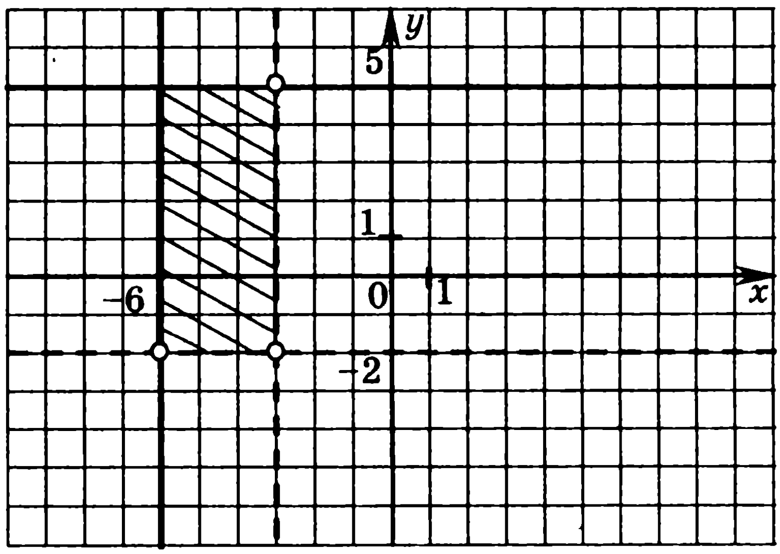
з)



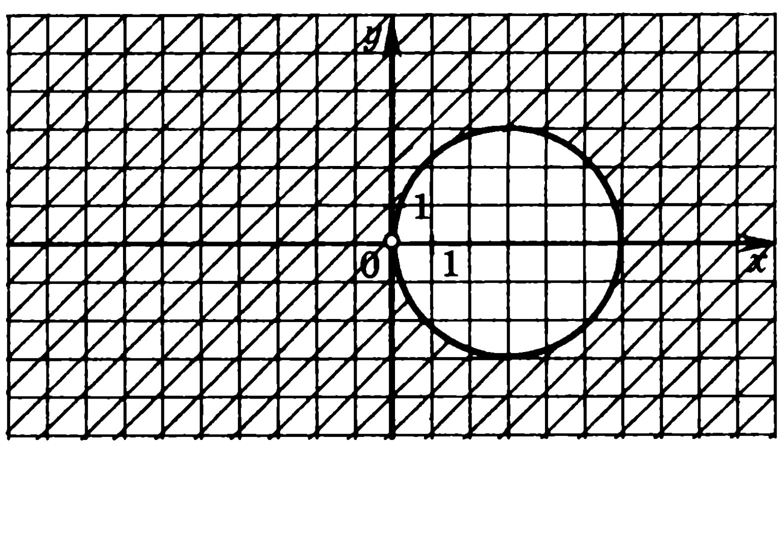
7. а)



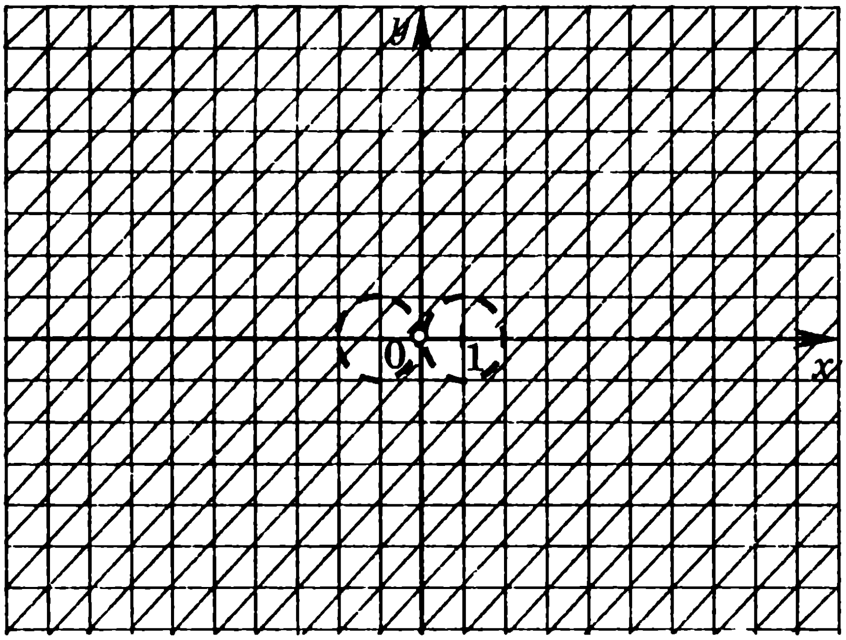
б)



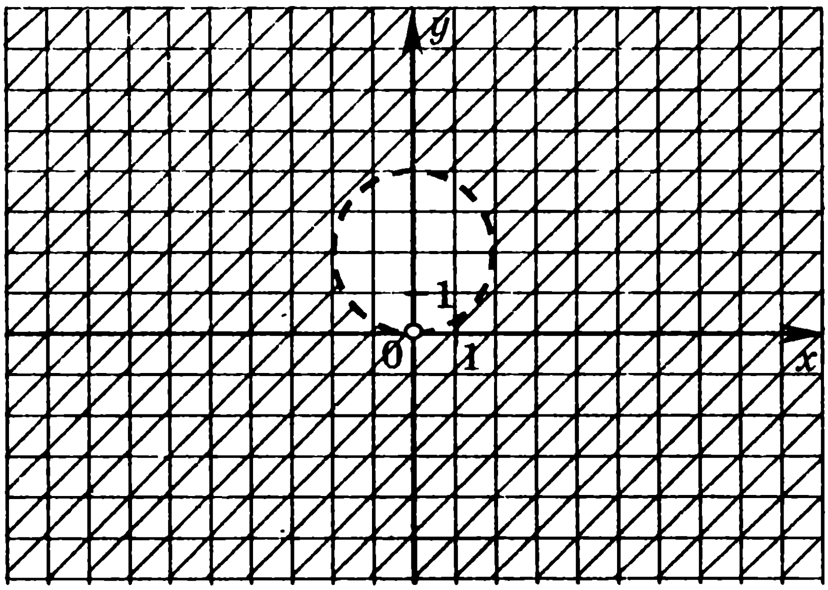
8. а) Плоскость без точки (0; 0) и внутренней части круга радиуса 3 с центром в точке (3; 0).



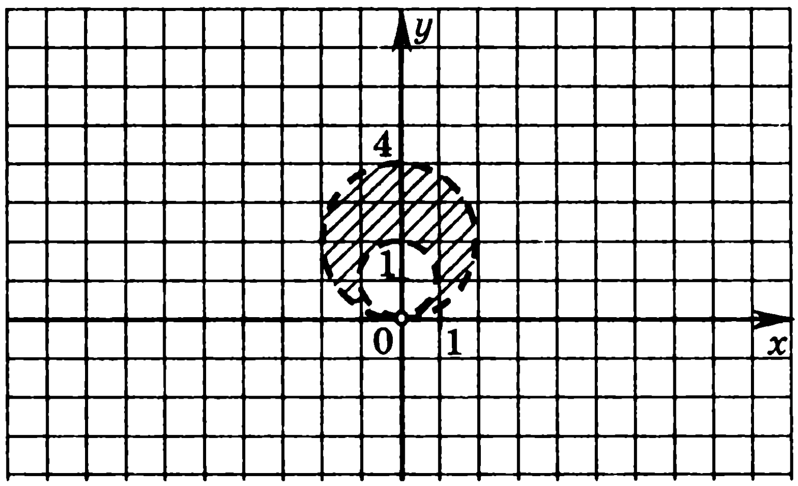
б) Плоскость без двух кругов радиуса 1 с центрами в точках (−1; 0) и (1; 0).



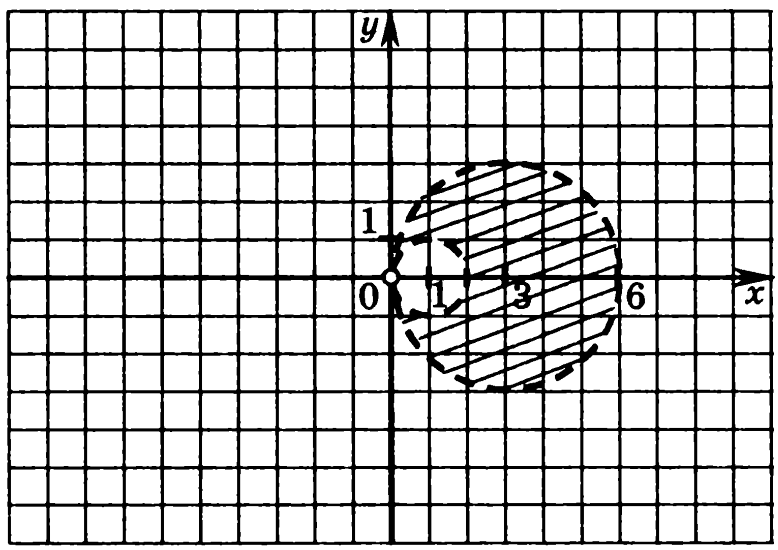
в) Плоскость без круга радиуса 2 с центром в точке (0; 2).



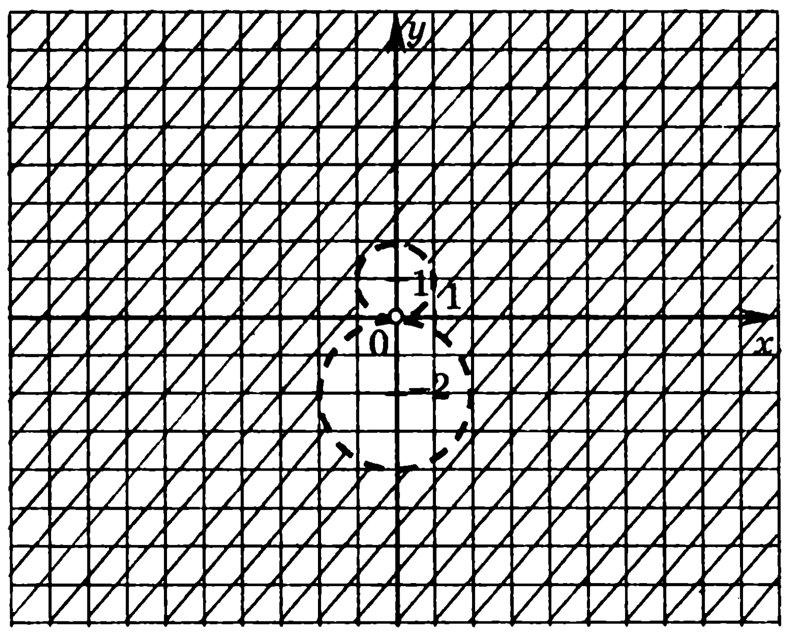
г) Множество всех внутренних точек большего круга, без меньшего круга (окружности, в том числе точка (0; 0), не принадлежат этому множеству).



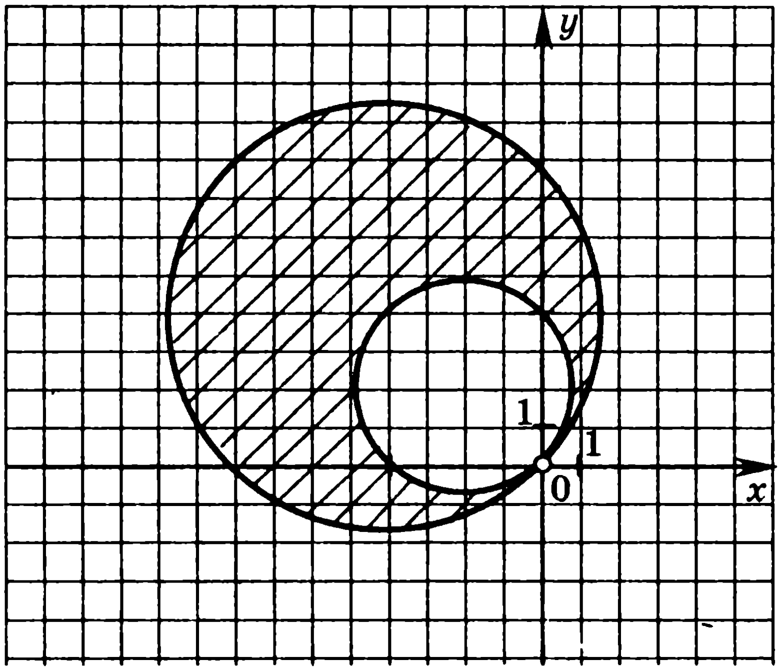
д)



е)

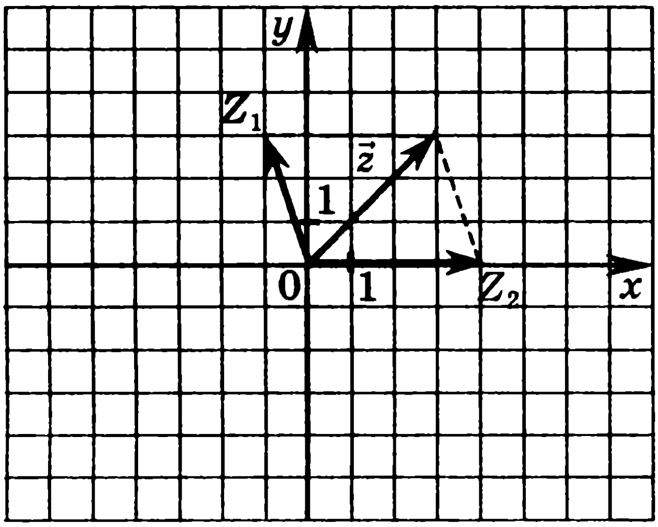


ж) Множество всех точек круга радиуса $4\sqrt{2}$ с центром в точке $(-4; 4)$ без внутренних точек круга радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в точке $(-2; 2)$ (окружности, за исключением точки $(0; 0)$, принадлежат этому множеству).

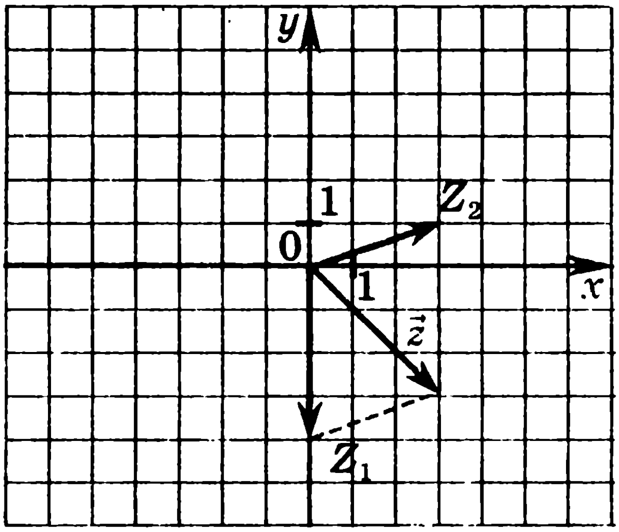


9. Фигура — круг с центром $(0; -1)$ и радиусом 1. Площадь круга равна π.

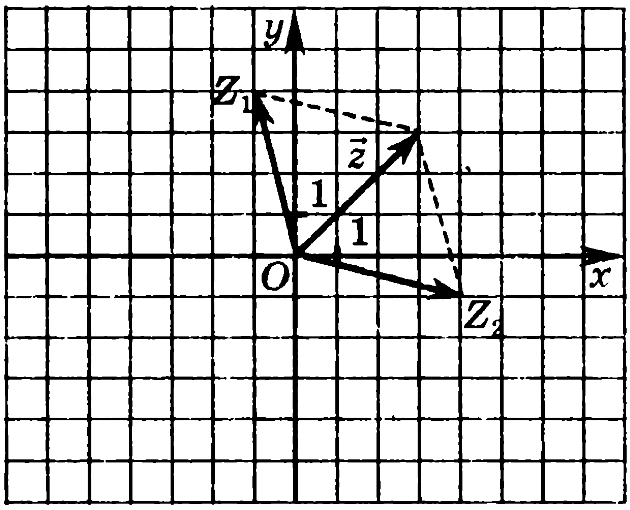
10. а)



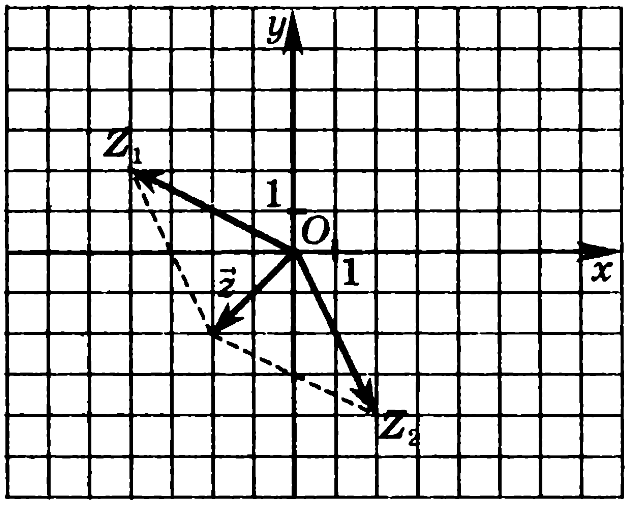
б)



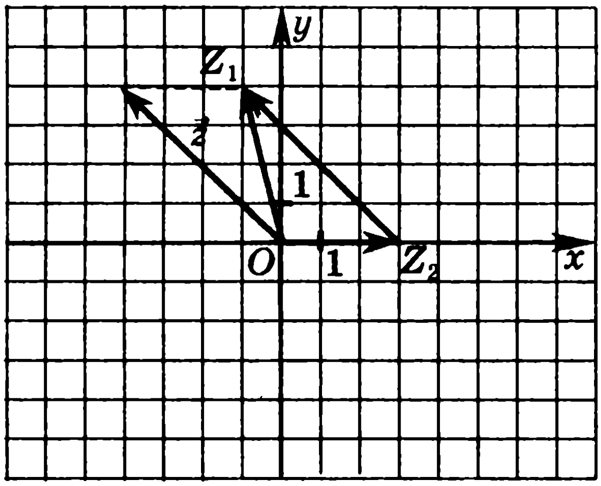
в)



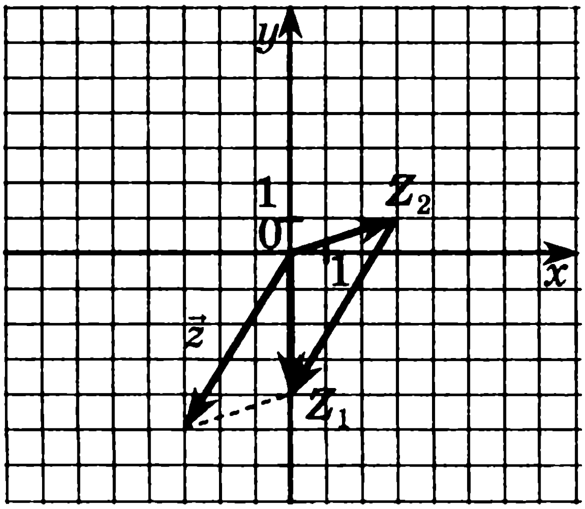
г)



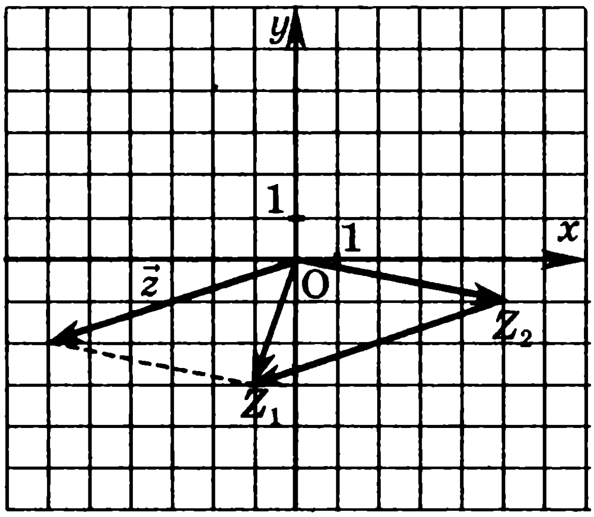
11. а)



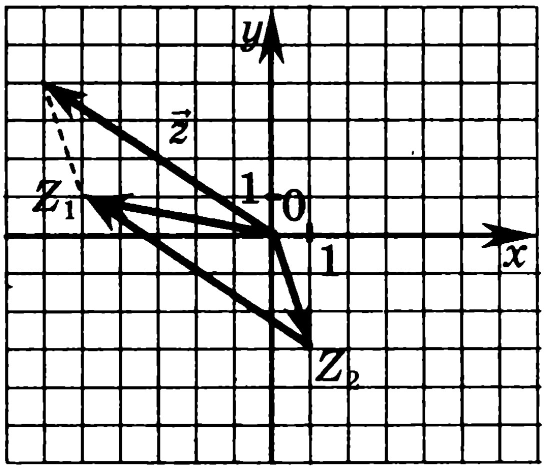
б)



в)



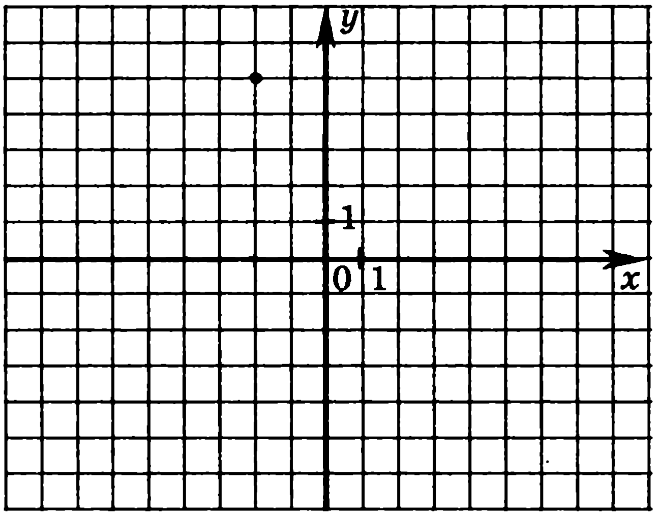
г)



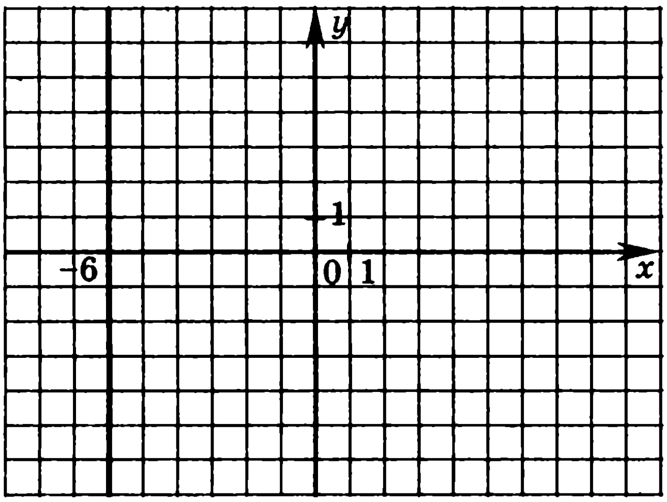
Контрольная работа

Вариант 1

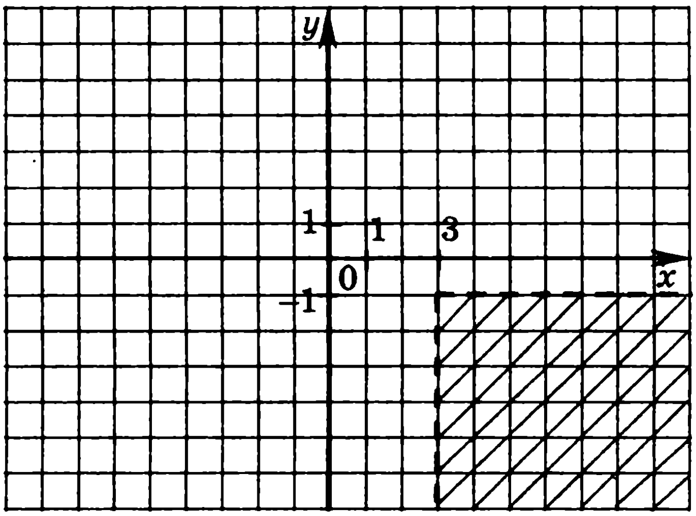
1.



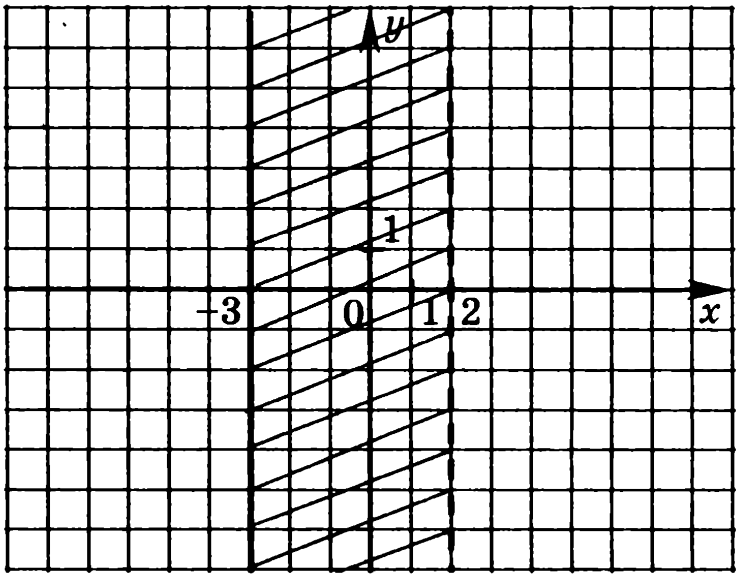
2.



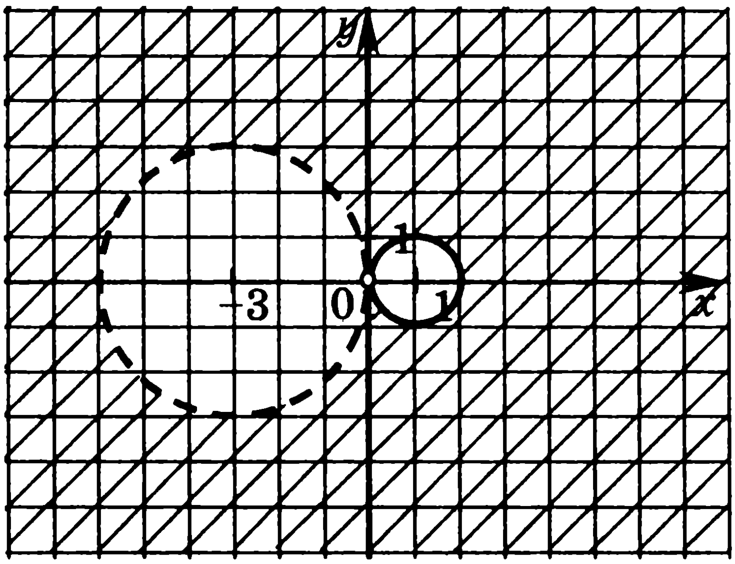
3.



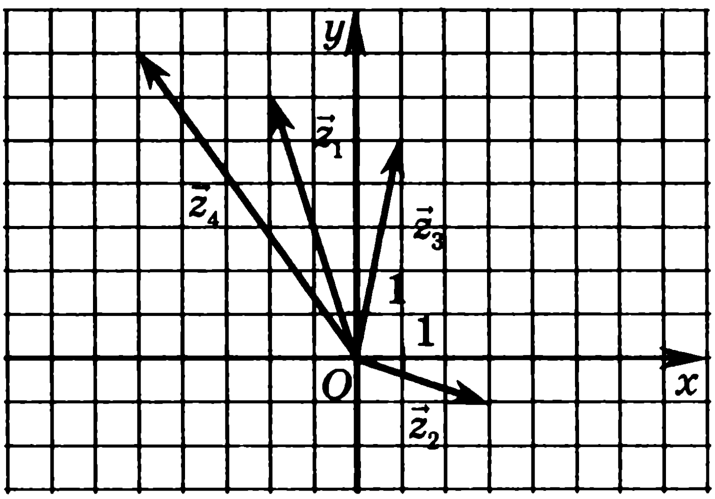
4.



5.

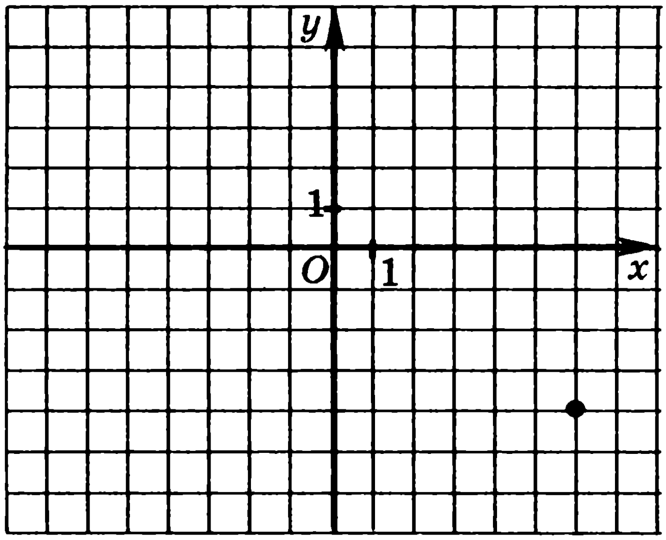


6.

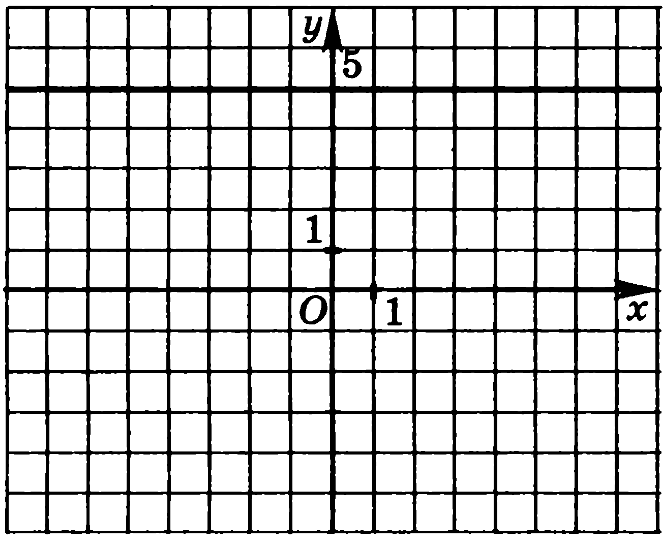


Вариант 2

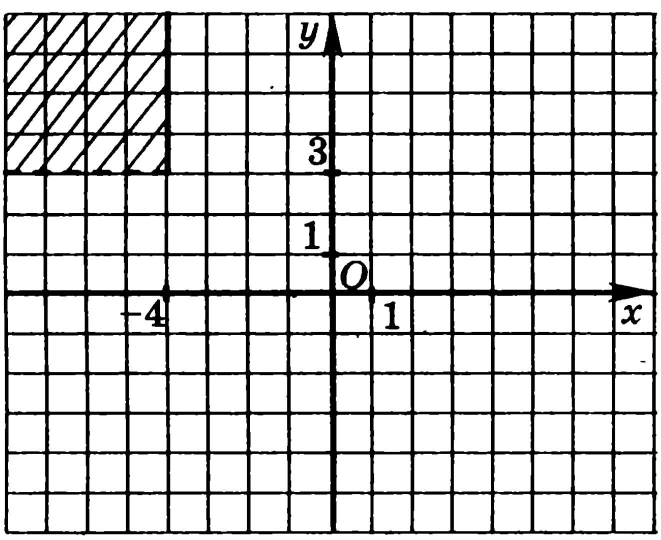
1.



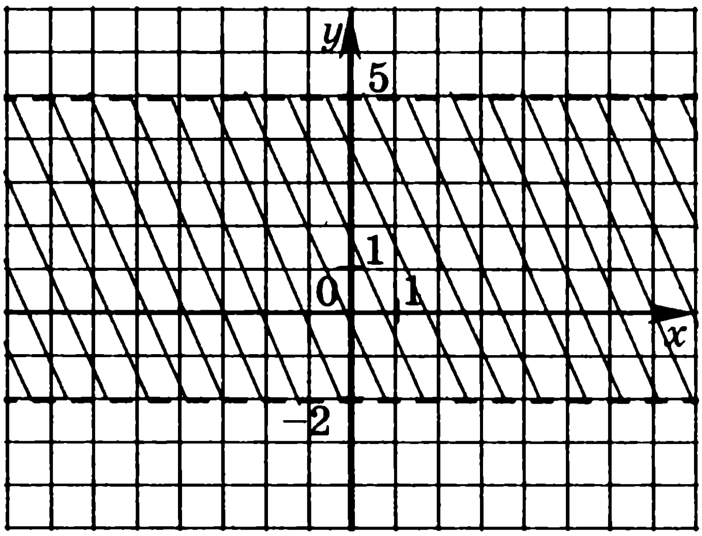
2.



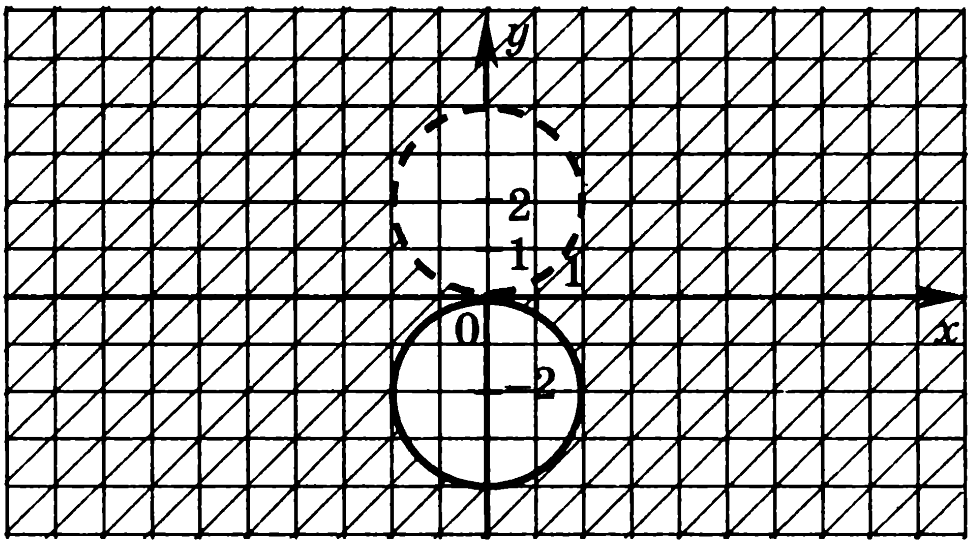
3.



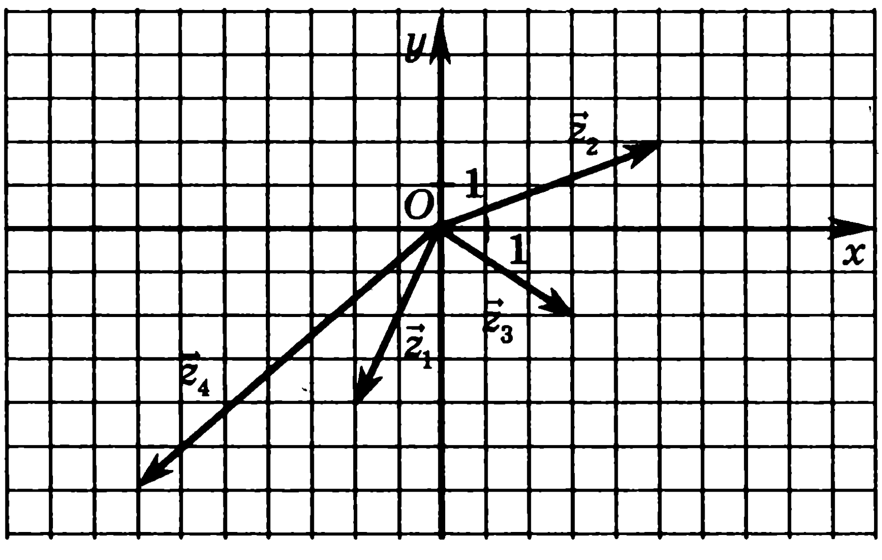
4.



5.



6.



Глава 3

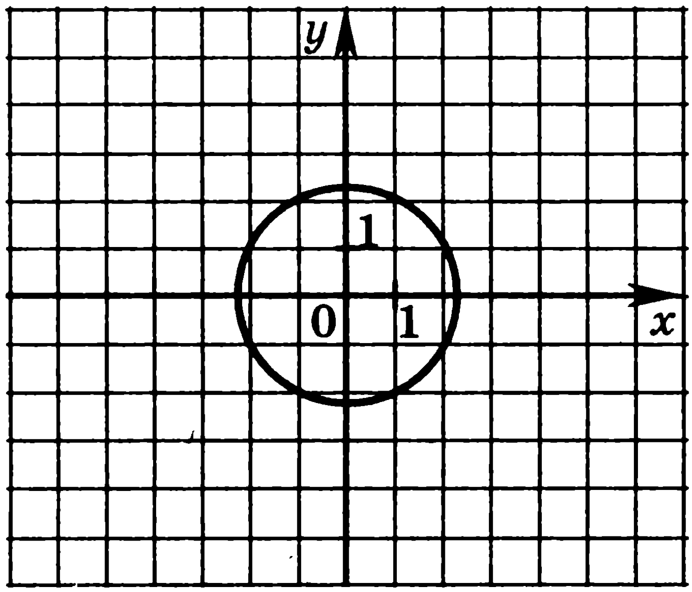
1. а) 9,1; г) $\sqrt{65}$;

   б) 9; д) 13;

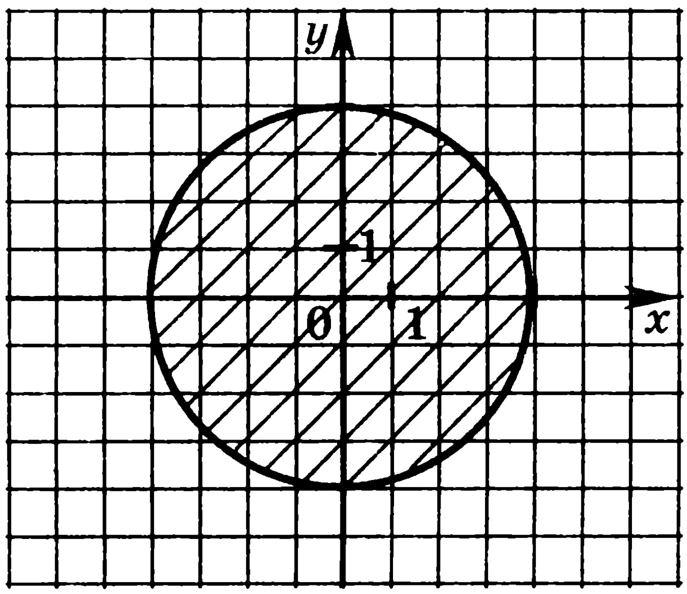
   в) $3\sqrt{5}$; е) $\sqrt{881}$.

2.

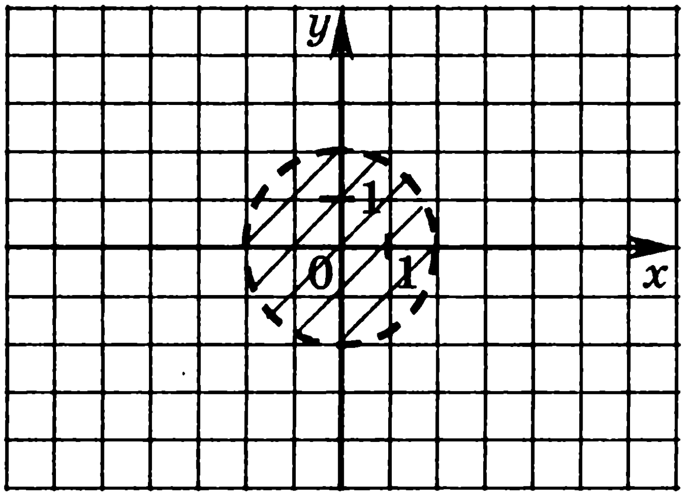
а)



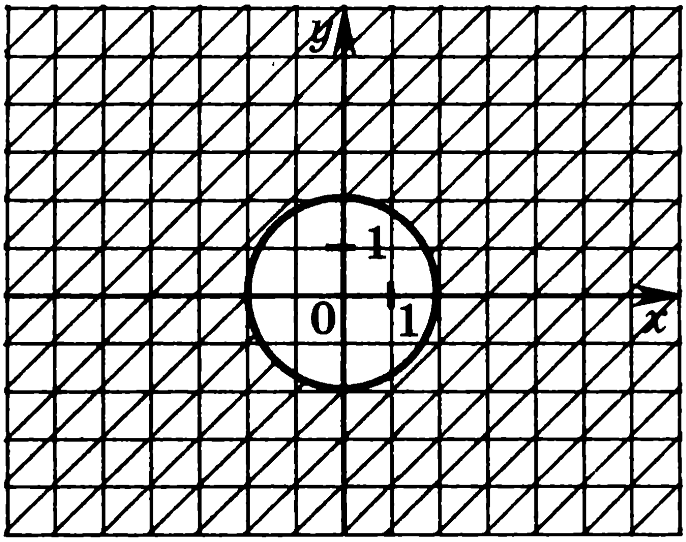
б)



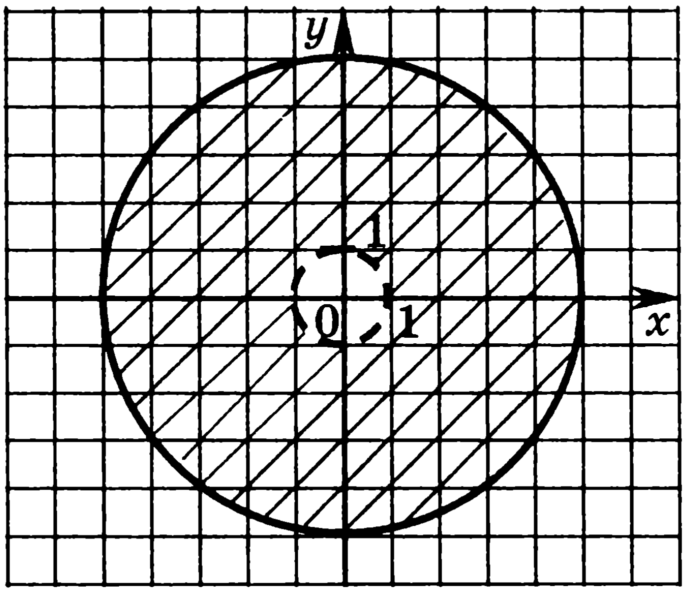
в)



г)

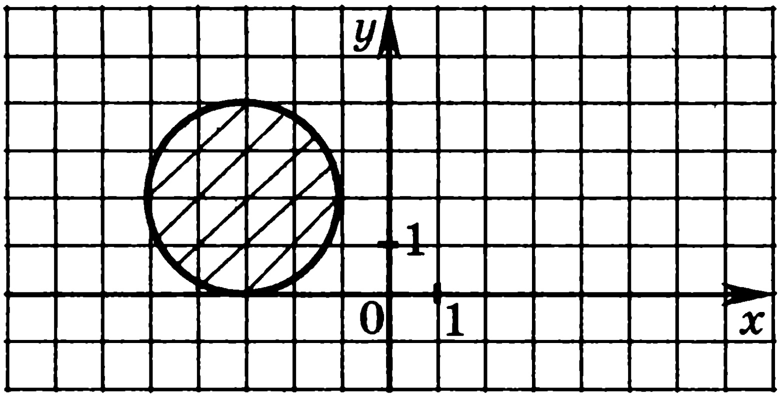


д)

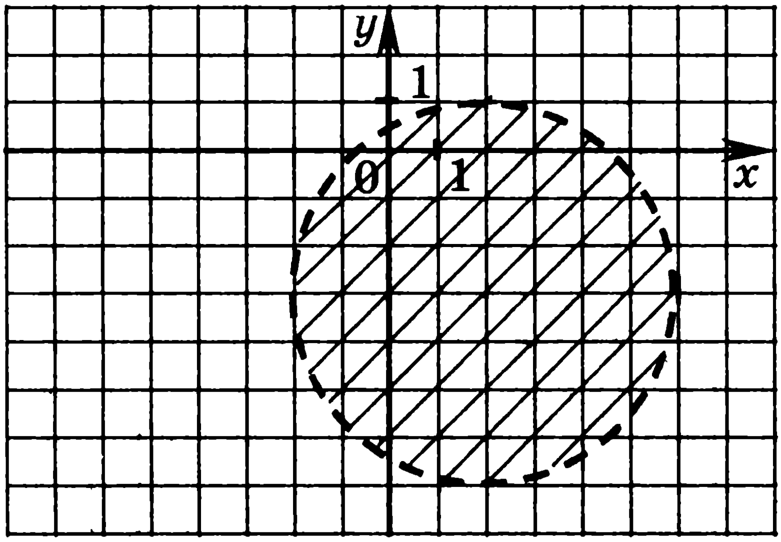


3.

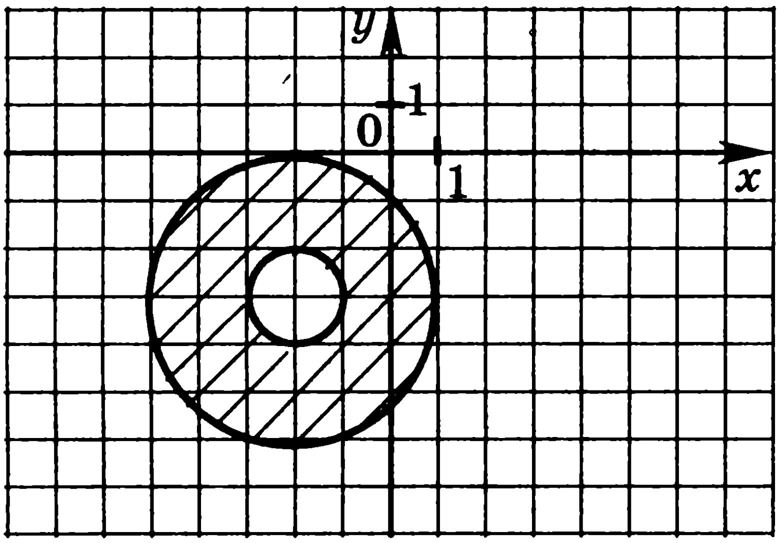
а)



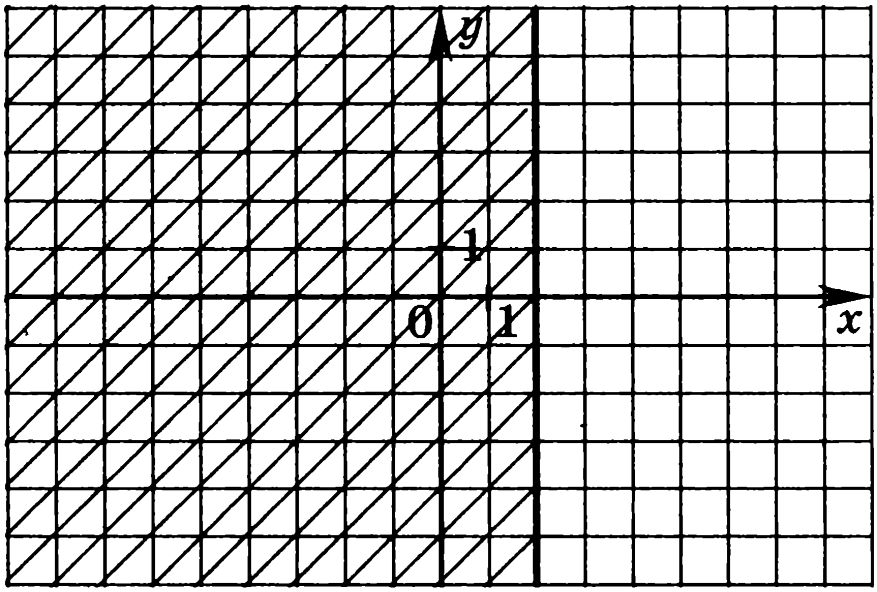
б)



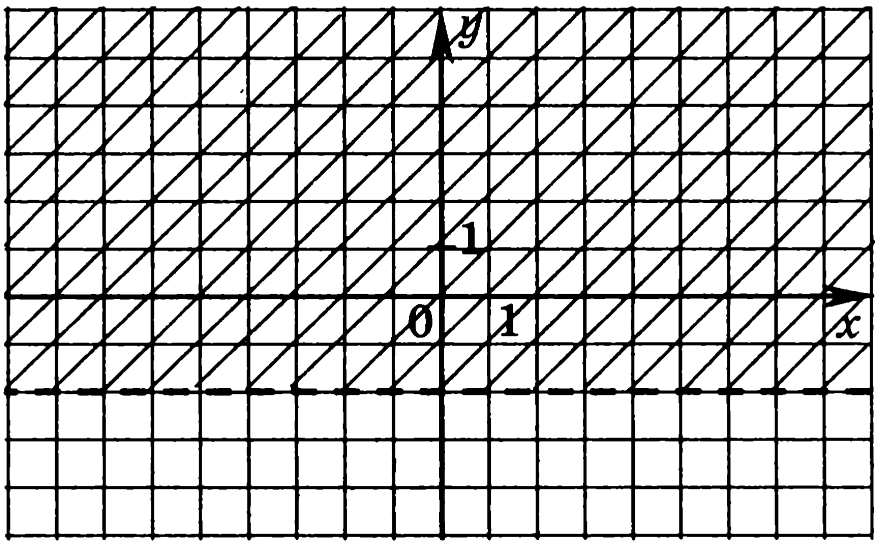
в)



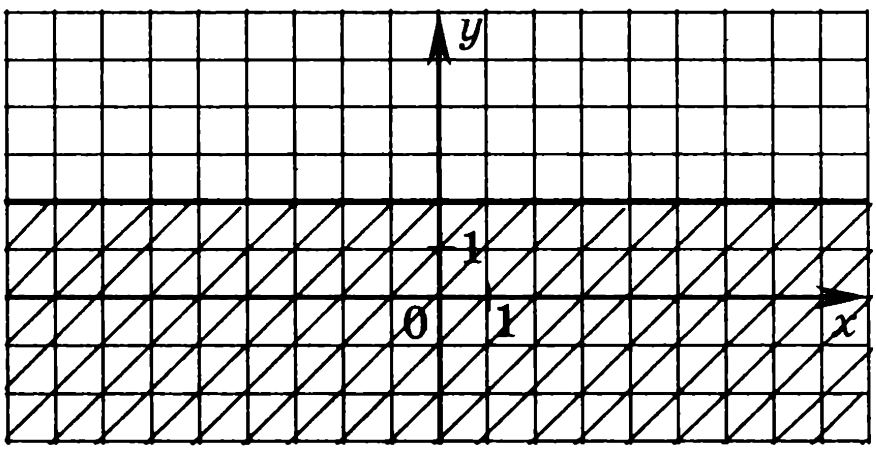
г)



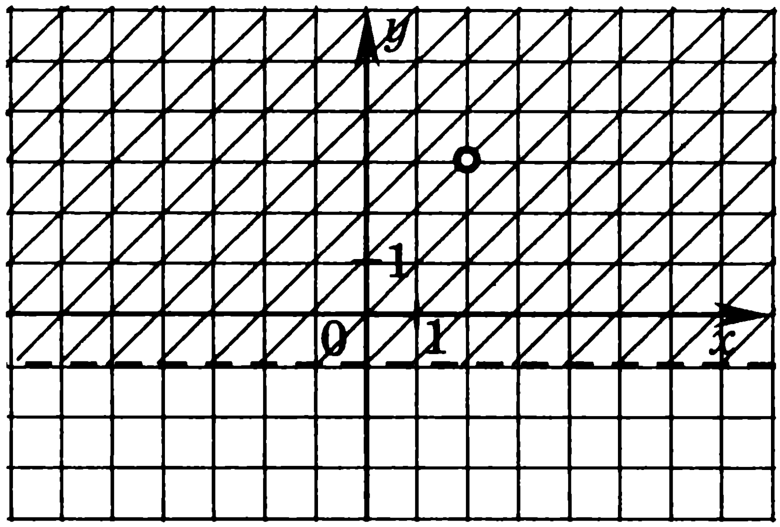
д)



е)



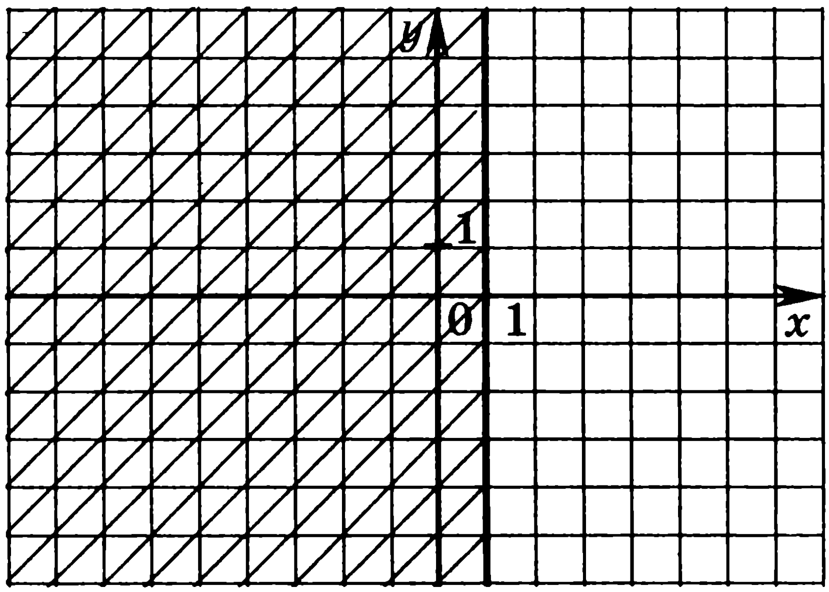
ж)



Полуплоскость без границы и точки (2; 3).

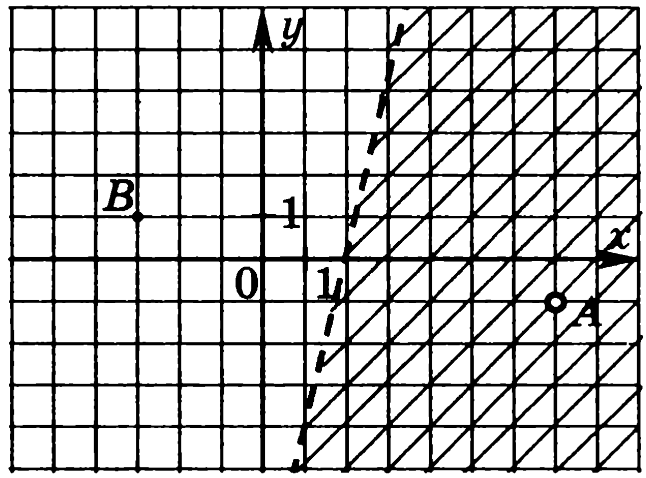
Указание. Данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} |z-2-3i|<|z-2+5i| \\ z\neq 2+3i \end{cases}$.

з)



Указание. Данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} |z+5|\leq|z-7| \\ z\neq 7 \end{cases}$.

и)



Полуплоскость без точки A(7; −1) и границы — прямой, проходящей через точку (2; 0) перпендикулярно к прямой AB.

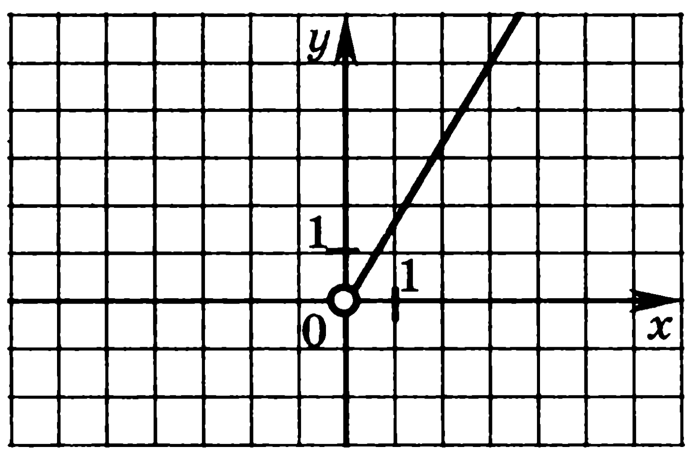
4. а) Указание. Условие задает множество точек, равноудаленных от трех данных: A(0; 3), B(−3; 0), C(5; 0). Это множество состоит из одной точки — центра окружности, описанной около треугольника с вершинами в указанных точках. Искомая точка M(1; −1) является точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и BC.

Ответ: $1-i$.

б) $-1{,}5 + 2{,}5i$.

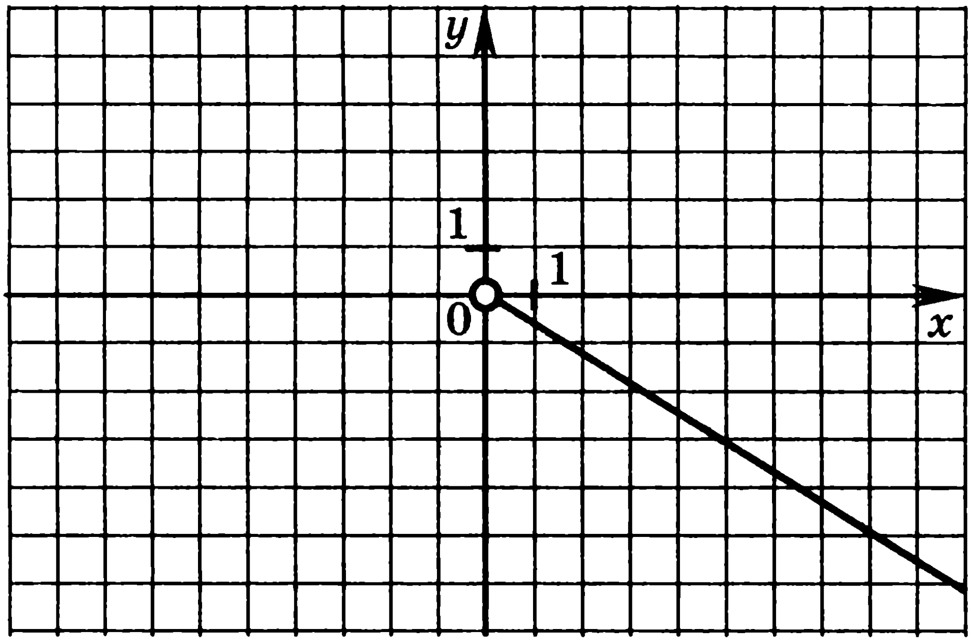
5.

а)



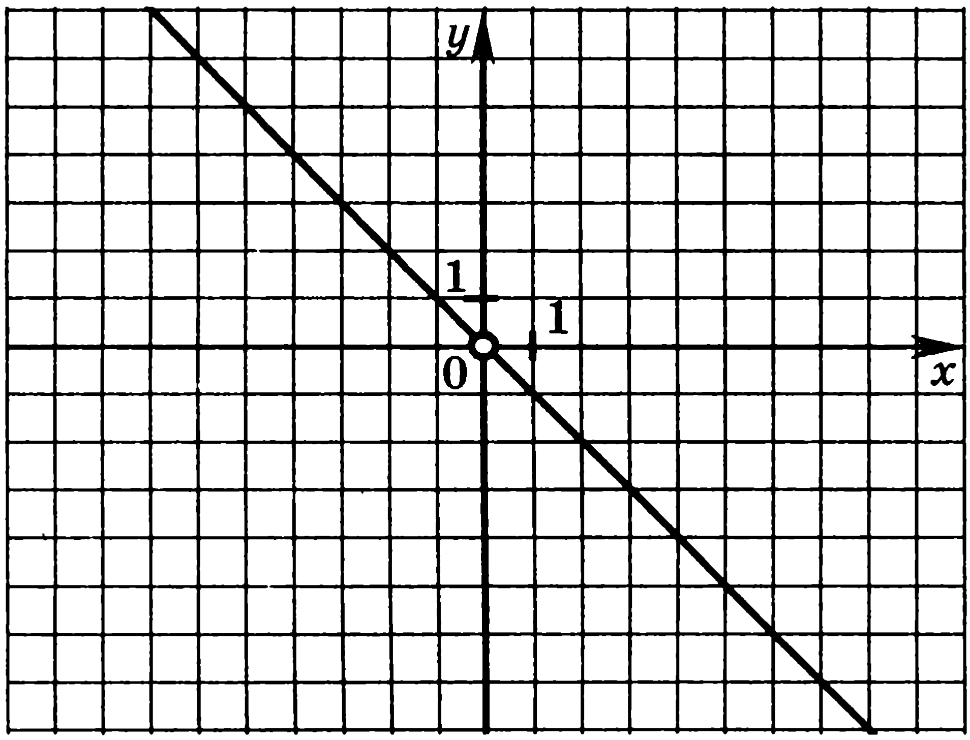
Луч без начальной точки.

б)



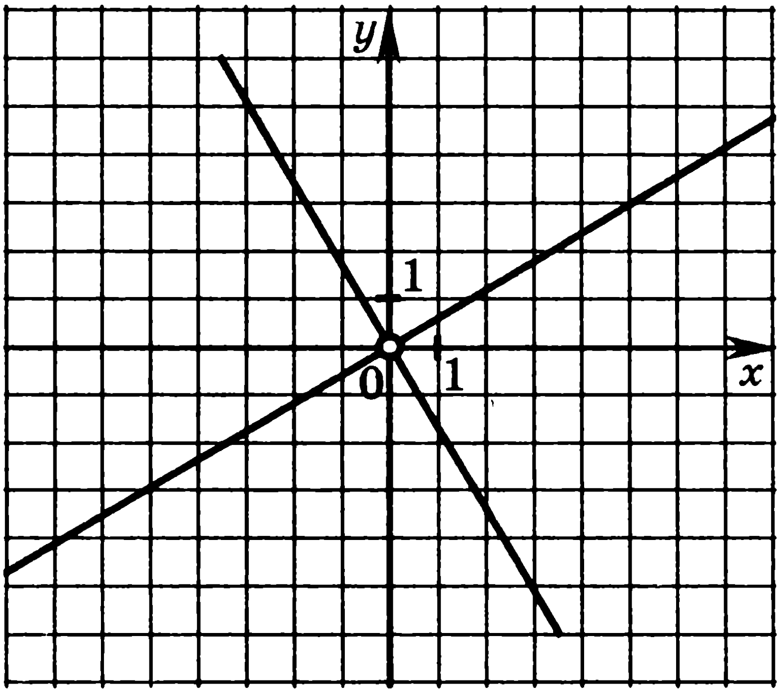
Луч без начальной точки.

в)

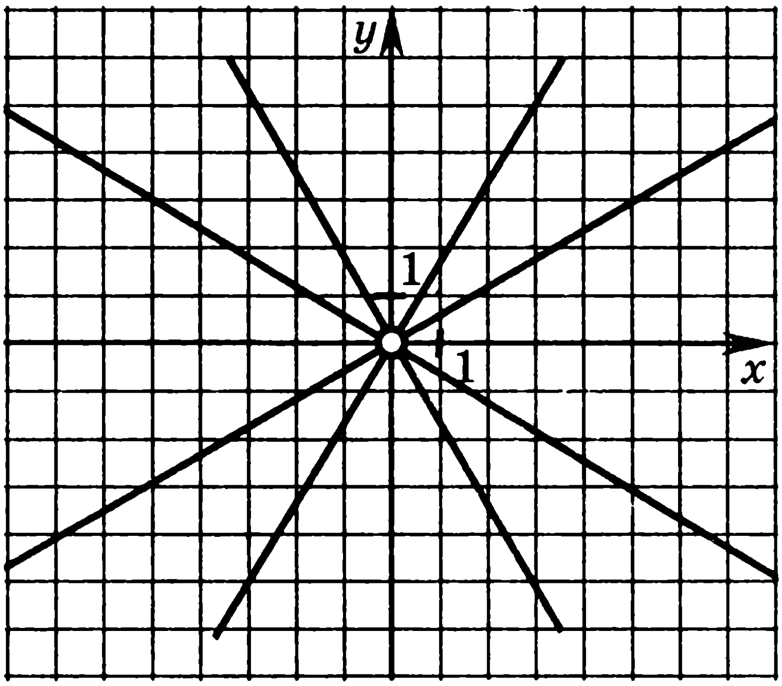


Прямая без точки (0; 0).

г)

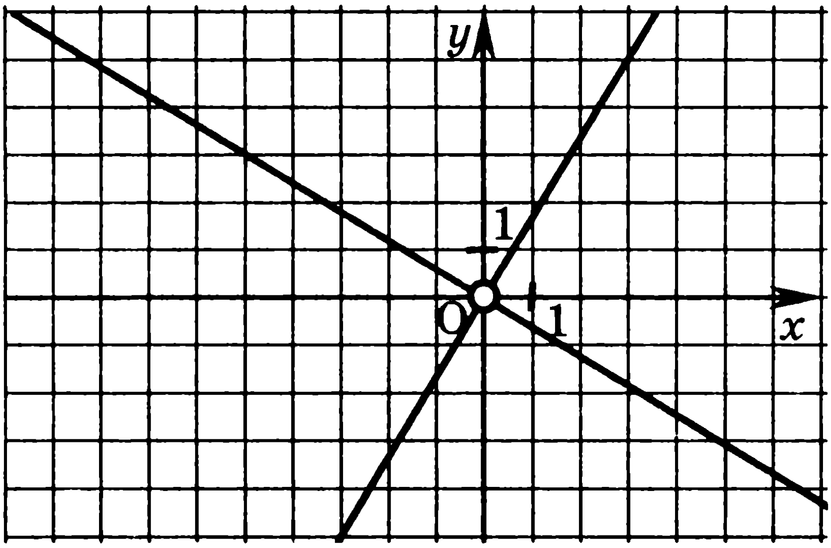


д)



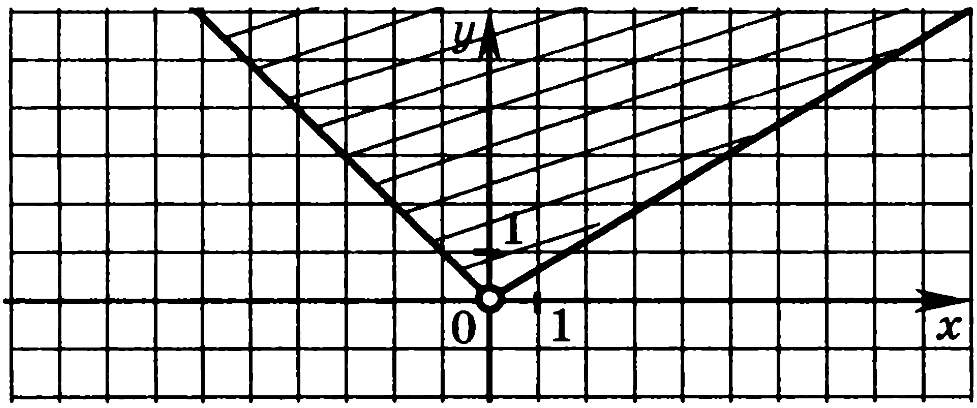
6 прямых, изображенных на рисунке, две из которых — оси координат без начала координат.

е)



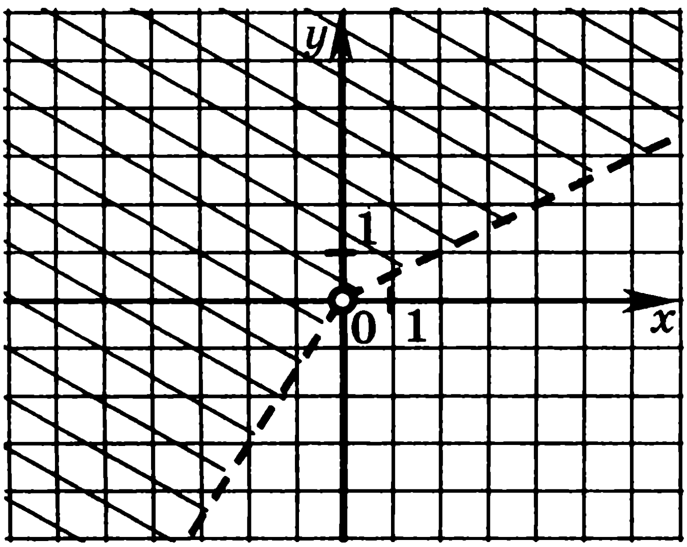
6.

а)

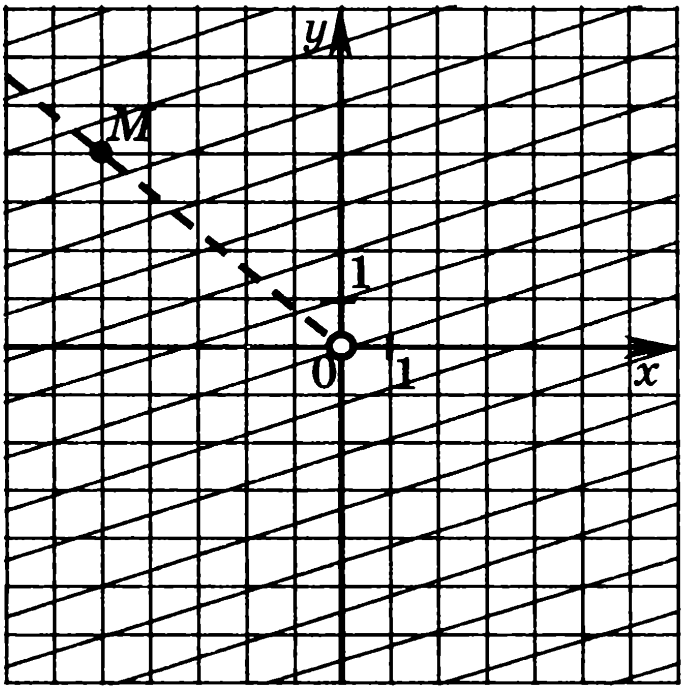


Угол без вершины — начала координат.

б)



в)

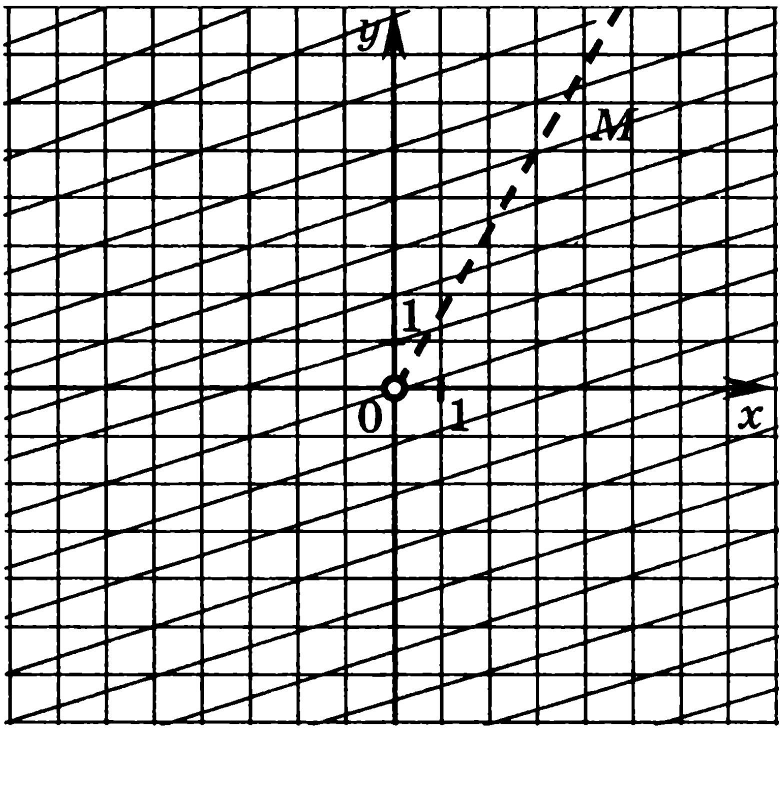


Плоскость без начала координат и луча OM.

г)

Плоскость без точки — начала координат.

д)



Плоскость без точки — начала координат и луча ОМ.

е) Плоскость без точки — начала координат.

7.

а) $6(\cos\pi + i\sin\pi)$;

б) $\sqrt{3}(\cos 0 + i\sin 0)$;

в) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

г) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

д) $5\left(\cos\left(\pi - \arccos\frac{4}{5}\right) + i\sin\left(\pi - \arccos\frac{4}{5}\right)\right)$;

е) $5\left(\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right) + i\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)\right)$

ж) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$;

з) $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$;

и) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

к) $\sqrt{13}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

где $\varphi = \mathrm{arctg}(-1{,}5)$.

8.

а) $-3 + i\sqrt{3}$;

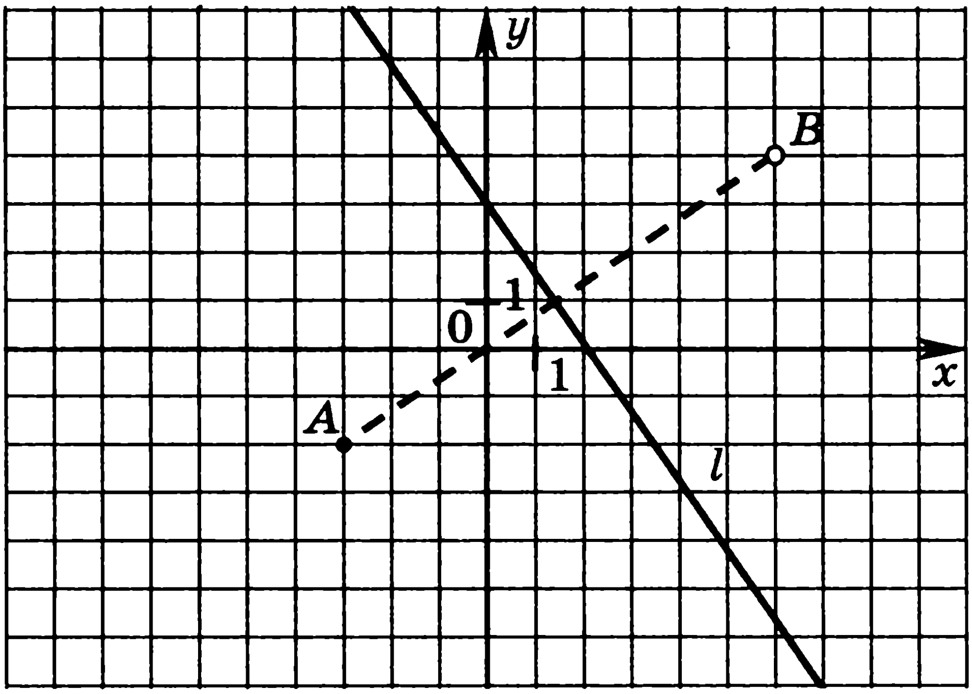
б) $-2 - 2i$;

в) -3;

г) $-2i$.

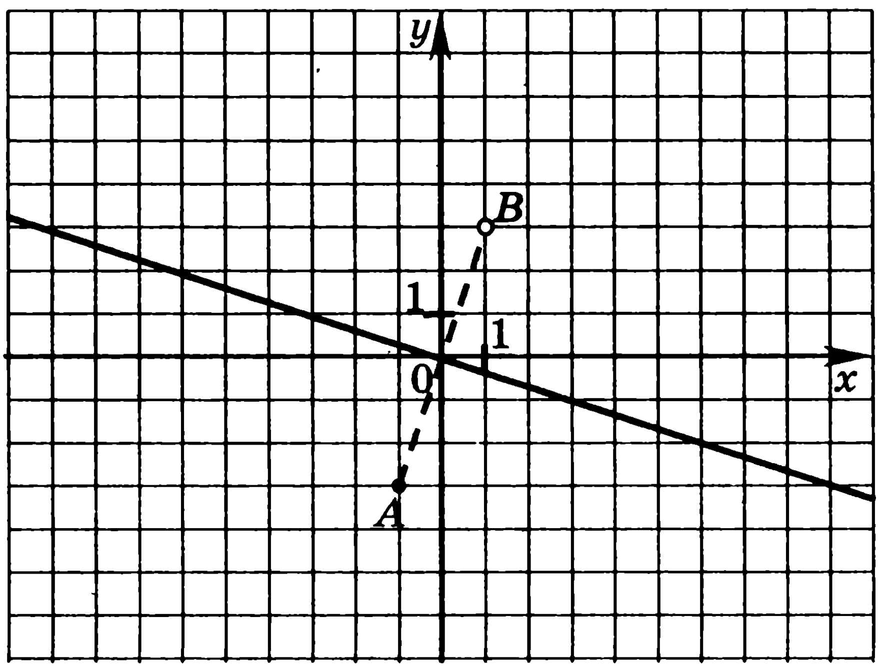
9.

а)



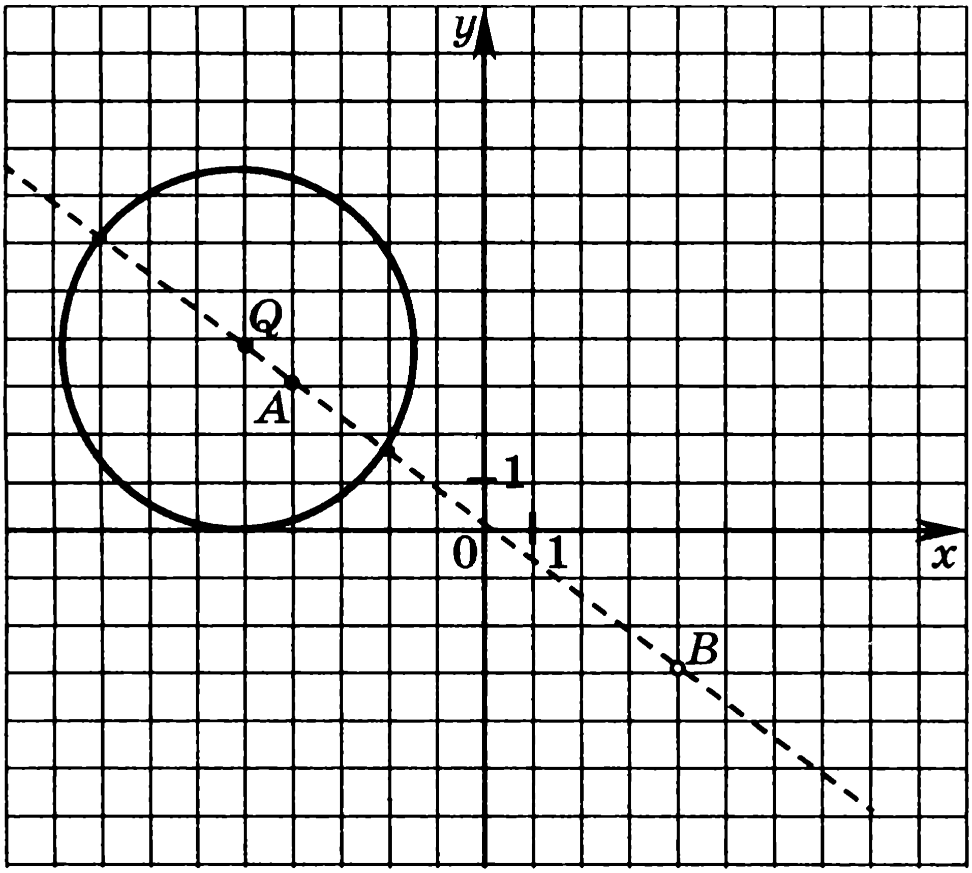
Серединный перпендикуляр к отрезку AB.

б)

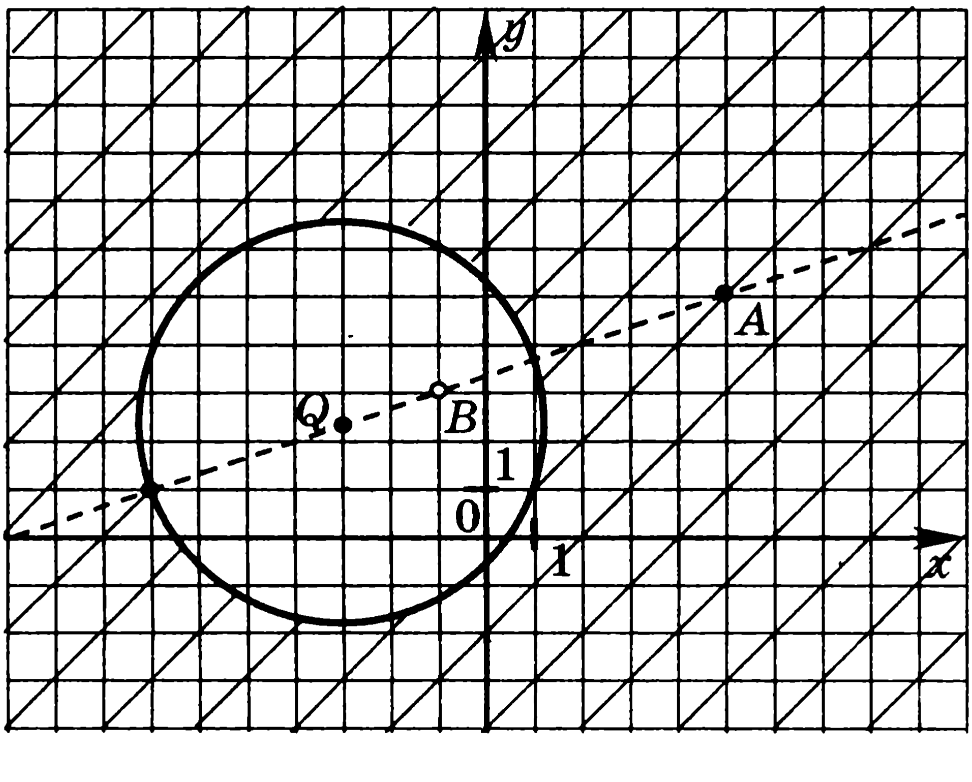


Серединный перпендикуляр к отрезку AB.

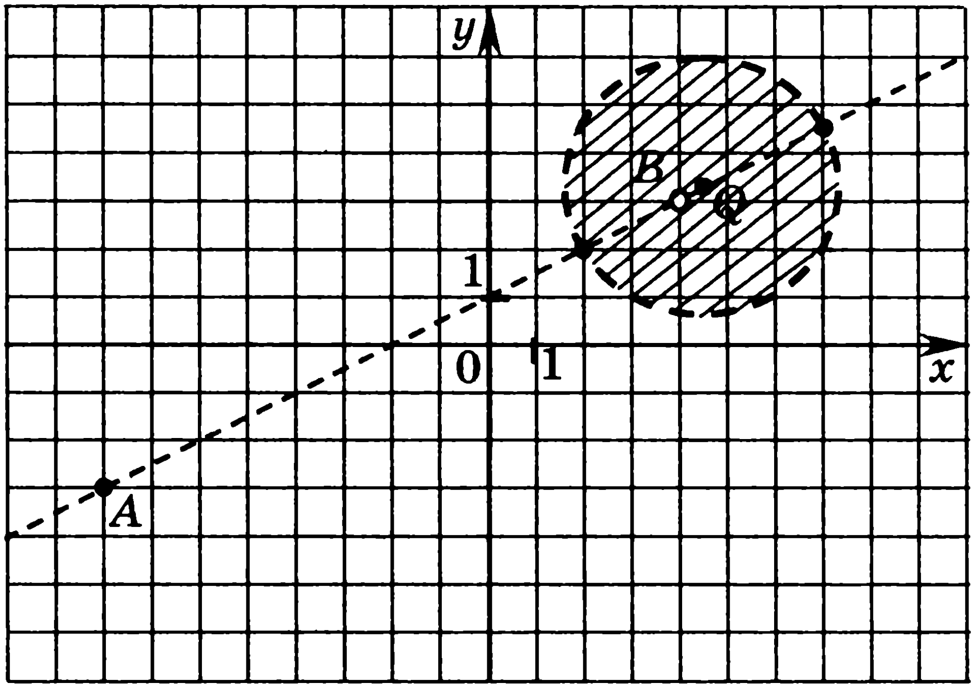
в)



г)

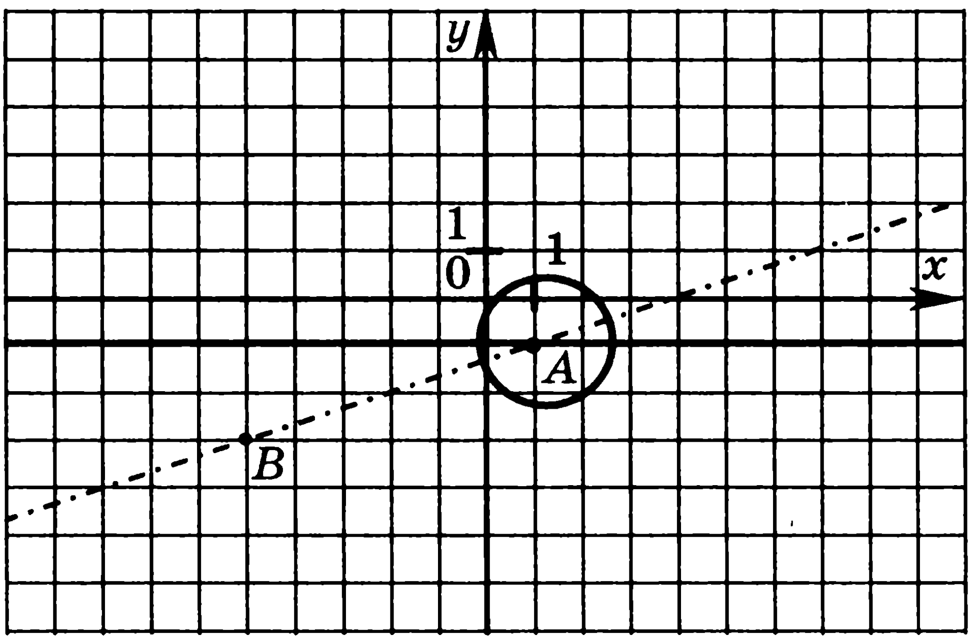


д)



Внутренняя область окружности без точки B.

е) Искомое геометрическое место точек состоит из двух точек пересечения окружности и прямой $y = -1$ (см. рис.).



10.

а) $z_1 z_2 = 10\sqrt{3}\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$, $|z_1 z_2| = 10\sqrt{3}$,

$\arg(z_1 z_2) = \frac{6\pi}{7}$.

б) $z_1 z_2 = 6\sqrt{21}(\cos\pi + i\sin\pi)$, $|z_1 z_2| = 6\sqrt{21}$,

$\arg(z_1 z_2) = \pi$.

в) $z_1 z_2 = 6\sqrt{6}\left(\cos\frac{71\pi}{72} + i\sin\frac{71\pi}{72}\right)$, $|z_1 z_2| = 6\sqrt{6}$,

$\arg(z_1 z_2) = \frac{71\pi}{72}$.

г) $z_1 z_2 = 75\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{70}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{70}\right)\right)$, $|z_1 z_2| = 75$,

$\arg(z_1 z_2) = \left(-\frac{3\pi}{70}\right)$.

Примечание. Аргумент указан с точностью до $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

11. а) 58. $z = x + yi$, где $y \in \mathbb{R}$,

$-7 \le y \le -1$,

$x = \pm\sqrt{9 - (y+4)^2}$

б) $z = x + yi$, где $y \in \mathbb{R}$,

$-6 \le y \le 2$,

$x = 3 \pm \sqrt{16 - (y+2)^2}$.

в) $z = x + yi$, где $y \in \mathbb{R}$,

$-2 \le y \le 6$,

$x = 3 \pm \sqrt{16 - (y-2)^2}$.

г) -1; 1; $-\left(4+\sqrt{7}\right)i$; $\left(4+\sqrt{7}\right)i$; $-\left(4-\sqrt{7}\right)i$; $\left(4-\sqrt{7}\right)i$.

д) -1; $-0{,}6$; $0{,}6$; 1; $\dfrac{4-\sqrt{31}}{5}i$; $\dfrac{-4+\sqrt{31}}{5}i$.

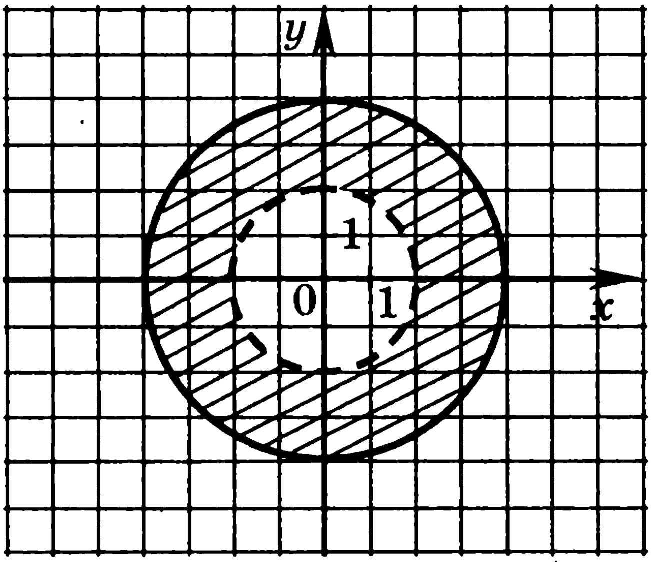
е) $-\dfrac{9+\sqrt{161}}{8}i$; $\dfrac{9+\sqrt{161}}{8}i$.

Контрольная работа

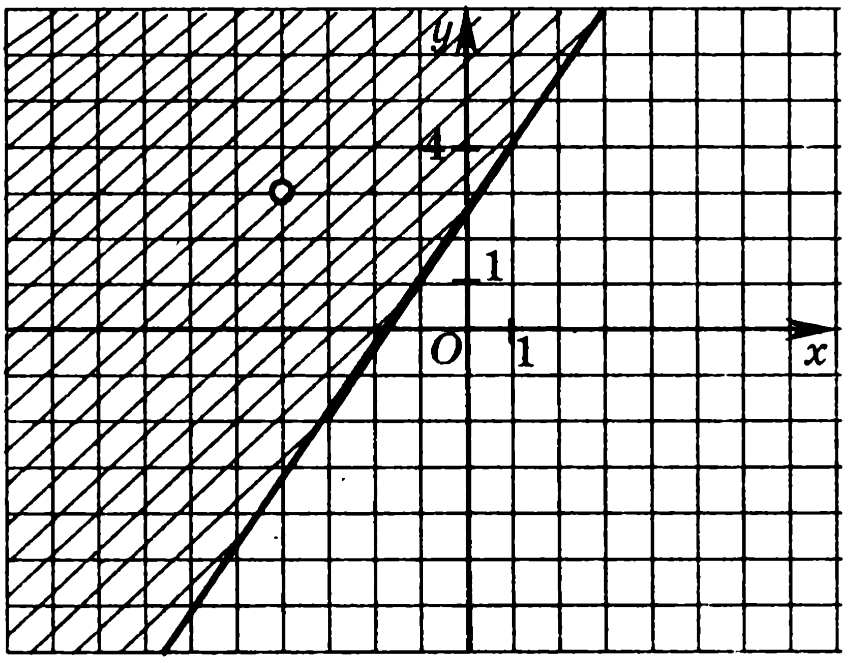
Вариант 1

1. 13;

2. а)

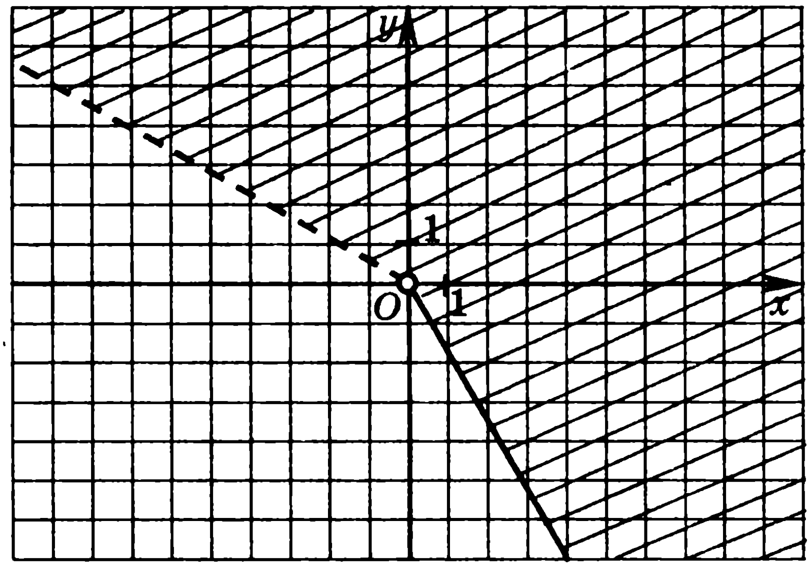


б)



Полуплоскость без точки $z=-4+3i$, граница полуплоскости — серединный перпедикуляр к отрезку с концами $z_1=-4+3i$ и $z_2=2-i$.

3.



4. а) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

б) $\sqrt{13}\cos\varphi+i\sin\varphi$, где $\varphi=-\operatorname{arctg}1{,}5+\pi$.

5. $3-\sqrt{3}\,i$.

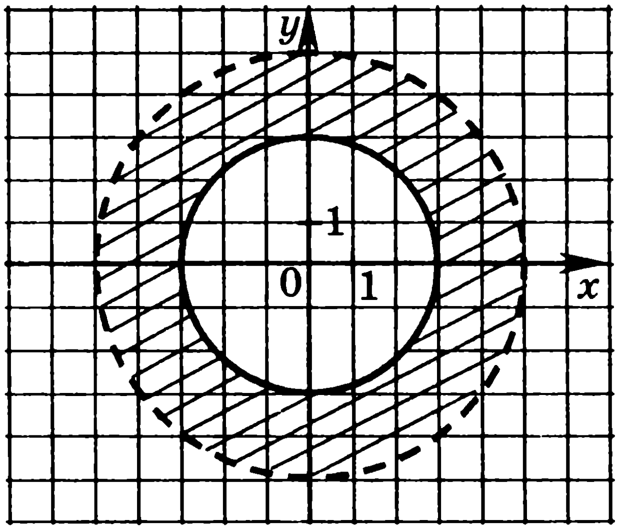
6. а) $-12\sqrt{2}-12\sqrt{2}i$; б) i.

7. $z=x+yi$, где $x\in\mathbb{R}$, $-1\le x\le 5$, $y=-3\pm\sqrt{9-(x-2)^2}$.

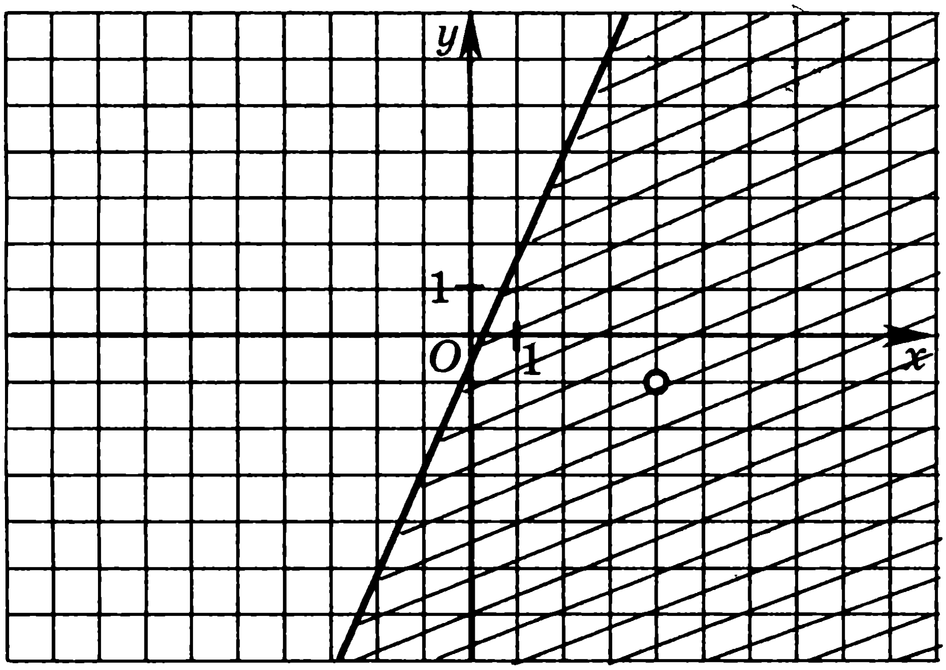
Вариант 2

1. 15;

2. а)

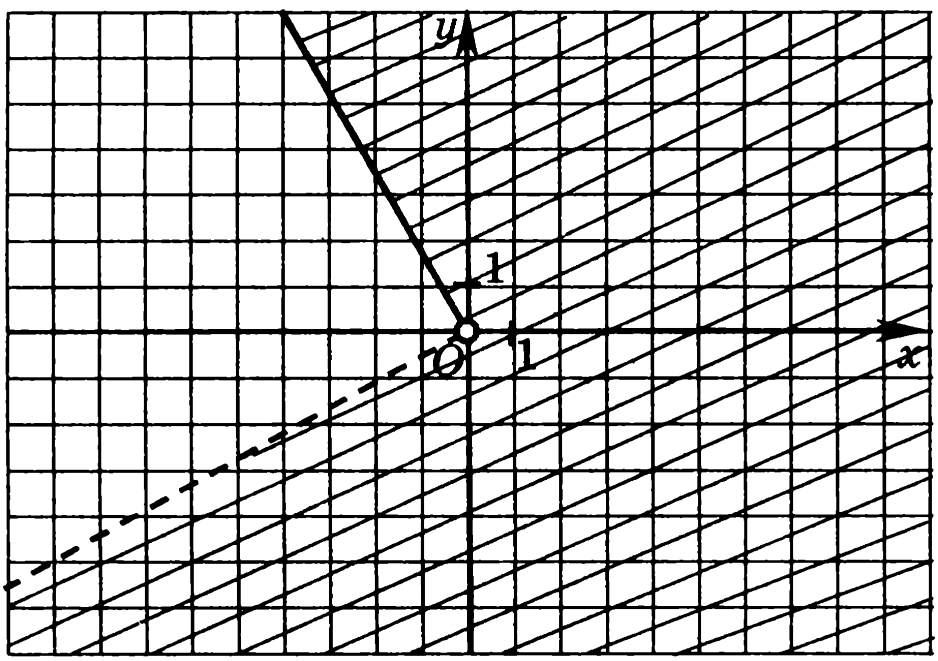


б)



Полуплоскость без точки $z = 4 - i$, граница полуплоскости — серединный перпедикуляр к отрезку с концами $z_1 = 4 - i$ и $z_2 = -2 + 3i$.

3.



4. а) $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

б) $\sqrt{41}\cos\varphi+i\sin\varphi$, где $\varphi=\operatorname{arctg}0{,}8$.

5. $-2-2i$.

6. а) $-7-7\sqrt{3}\,i$; б) i.

7. $z=x+yi$,

где $x\in\mathbb{R}$, $-7\le x\le 3$,

$y=3\pm\sqrt{25-(x+2)^2}$.

Глава 4

1. а) $-i$; д) 0;
   б) i; е) $1+i$;
   в) -1 з) $2i$;
   г) $-i$; ж) i.

2. а) $-2i$; д) 16;
   б) 1; е) 1024;
   в) 1; ж) $-128i$;
   г) -64 з) -63.

3. а) $2^{10}-2^{10}i\sqrt{3}$;
   б) $2^{10}-2^{10}i$.

4. а) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

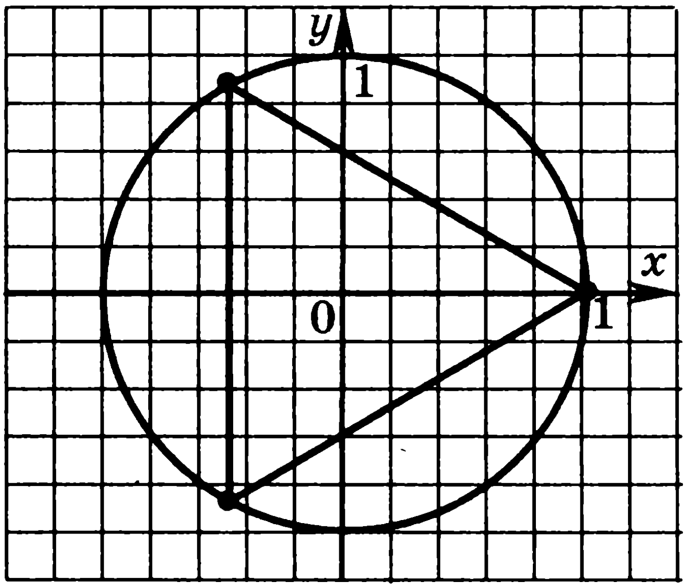
   $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$;

   б) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

   $\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$.

5. а) $8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$;
   б) $5\sin x\cdot\cos^4 x-10\cos^2 x\cdot\sin^3 x+\sin^5 x$;
   в) $3\sin x-4\sin^3 x$;
   г) $4\cos^3 x-3\cos x$.

6. $1;\ -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$



7. а) $\pm 1;\ \pm i;$

б) $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8. $2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right);\ \ 2\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right).$

9. $1 - i\,\mathrm{tg}\frac{k\pi}{n},\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N},\ 0 \le k < n\sqrt{b^2 - 4ac}.$

10. $-\frac{1}{2};\ \pm\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4}.$

11. а) -1 ;

б) i ;

в) $\sqrt{2} + i\sqrt{2};$

г) $2\sqrt{3} - 2i;$

д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i;$

е) $-1.$

12. а) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i};$

б) $2e^{\frac{2\pi}{3}i};$

в) $10e^{-\frac{3\pi}{4}i};$

г) $2e^{\frac{\pi}{6}i};$

д) $e^{\frac{5\pi}{4}i};$

е) $e^{\frac{\pi}{6}i}.$

13. а) $2e^{\frac{3\pi}{4}i};$

б) $\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}.$

14. а) $0{,}5e^{-\frac{3\pi}{4}i};$

б) $\sqrt{3}e^{\frac{7\pi}{6}i};$

15. а) $8e^{-\frac{3\pi}{4}i};$

б) $3e^{-\frac{2\pi}{3}i}.$

П р и м е ч а н и е. Аргумент указан с точностью до $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Контрольная работа

Вариант 1

1. i.
2. $2i$.
3. $8i$.
4. $512i$.
5. $8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1$.
6. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$.

7. ± 2; $\pm 2i$.

Вариант 2

1. 0.
2. $-2i$.
3. -2^{30}.
4. $2^{10}\sqrt{3} - 2^{10}i$.
5. $6\sin x \cdot \cos^5 x - 20\sin^3 x \cdot \cos^3 x + 6\sin^5 x \cdot \cos x$.
6. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$;

$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$;

$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$.

7. -2; $1 \pm \sqrt{3}i$.

Ответы и указания к решению задач к главе 5

1. Указание. Пусть A_2, B_2, C_2, D_2 середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 соответственно. Докажите, что число $\frac{c_2 - b_2}{a_2 - d_2}$ равно 1.
2. Указание. Воспользуйтесь формулой расстояния между точками и формулой координаты середины отрезка.
3. Указание. Примите за начальную точку O и найдите CD^2, зная, что $d = a + b$.
4. См. указание к задаче 2.
5. Указание. Воспользуйтесь формулой расстояния между точками и условием перпендикулярности отрезков.
6. $\arccos\frac{4}{5}$.
7. Указания. Пусть A_1, B_1, C_1 основания высот, а H — точка их пересечения. Необходимо доказать, что точка пересечения высот треугольника ABC есть точка пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$. Равенство углов C_1A_1H и B_1A_1H равносильно условию, что число $\frac{h - a_1}{b_1 - a_1} : \frac{c_1 - a_1}{h - a_1}$ действительное.
8. 30°, 60° и 90°.

Учебное издание

Глазков Юрий Александрович
Варшавский Игорь Константинович
Ганашвили Мария Яковлевна

Комплексные числа

9–11 классы

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. АЕ51. Н 15295 от 13.04.2011 г.

Главный редактор *Л.Д. Лаппо*
Редактор *И.М. Бокова*
Технический редактор *Т.В. Фатюхина*
Корректор *Г.М. Морозова*
Дизайн обложки *М.Н. Ершова*
Компьютерная верстка *Д.А. Ярош*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7
Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).

ПРЕДПРОФИЛЬНАЯ И ПРОФИЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА

МАТЕМАТИКА

Ю.А. Глазков, И.К. Варшавский
М.Я. Гаиашвили

Комплексные числа

9–11 классы

В пособии подробно с большим количеством примеров изложена теория комплексных чисел, действия с комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, способы перехода от одной формы к другой. Большое внимание уделено геометрической интерпретации комплексных чисел, модуля и аргумента. В последней главе рассматривается применение комплексных чисел к решению геометрических задач. Каждая глава заканчивается задачами для самостоятельного решения и контрольной работой. Книга предназначена учителям математики и старшеклассникам, изучающим комплексные числа.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «*ЭКЗАМЕН*» допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях.

Глазков Юрий Александрович — кандидат педагогических наук, профессор кафедры теории и методики обучения математике МГПУ. Научно-педагогический стаж — 35 лет, стаж работы в школе — 25 лет. Область научных интересов — тестовый контроль в обучении математике. Работал в Федеральном центре тестирования, с 2001 по 2009 г. в составе Федеральной предметной комиссии создавал контрольные измерительные материалы по математике для ЕГЭ. Автор свыше 300 научных статей и книг, в том числе более 40 пособий для школьников и абитуриентов.

Гаиашвили Мария Яковлевна — учитель математики высшей квалификационной категории школы № 192 города Москвы. Более 20 лет преподает в классах с углубленным изучением математики; является разработчиком и рецензентом тематических и аттестационных тестов для централизованного тестирования Федерального центра тестирования. Автор ряда учебных пособий по математике для 7—11 классов, задачников для подготовки к ЕГЭ, статей в математических журналах.

Варшавский Игорь Константинович — учитель высшей категории. Педагогический стаж — 50 лет, из них 40 — в классах с углубленным изучением математики. Лауреат конкурса «Грант Москвы»; является разработчиком тематических и аттестационн
го центра тестирования. Автор учебных по
7—11 классов, задачников для подготовки к
ских журналах.

9"785377"034874"

ЭКЗАМЕН®