

CUPRINS

ANALIZĂ MATEMATICĂ

I. NUMERE REALE ȘI FUNCȚII	5
Mulțimea numerelor reale.....	5
Funcții reale	12
II. ȘIRURI DE NUMERE REALE.....	31
Moduri de definire ale unui șir	31
Recurențe liniare de ordinul doi.....	35
Șiruri mărginite.....	37
Șiruri monotone	39
Șiruri convergente.....	41
Proprietăți ale șirurilor	47
Operații cu șiruri convergente.....	50
Șiruri care au limita $\pm\infty$	55
Cazuri de nedeterminare	56
Criterii de comparație	59
Șiruri monotone și mărginite	62
Criteriul raportului	65
Numărul e	67
Cazul de nedeterminare 1^∞	70
Teorema Cezăro-Stolz	71
Aplicații ale șirurilor la rezolvarea unor probleme	73
III. LIMITE DE FUNCȚII	91
Definiția limitei unei funcții într-un punct.....	91
Limite laterale.....	95
Limita funcțiilor spre $\pm\infty$	96
Proprietățile limitelor.....	99
Limite fundamentale.....	102
IV. FUNCȚII CONTINUE.....	113
Definiția funcțiilor continue.....	113
Operații cu funcții continue	118
Funcții continue pe un interval	121
V. FUNCȚII DERIVABILE	133
Probleme care conduc la noțiunea de derivată.....	133
Definiția derivatei	134
Continuitatea funcțiilor derivabile	136
Derivate laterale.....	137
Derivatele funcțiilor elementare	138
Operații cu funcții derivabile	139
Derivate de ordin superior	150

VI. PROPRIETĂȚILE FUNCȚIILOR DERIVABILE	153
Teoremele fundamentale ale analizei matematice	153
VII. ELIMINAREA CAZURILOR DE NEDETERMINARE	161
Regula lui l'Hospital	161
Aplicațiile regulilor l'Hospital în cazurile de nedeterminare.....	167
VIII. STUDIUL FUNCȚIILOR	172
Studiul monotoniei, inegalități.....	172
Studiul derivabilității folosind teorema lui Lagrange	178
Funcții convexe și funcții concave.....	180
Reprezentarea grafică a funcțiilor.....	184
Studiul ecuațiilor.....	200
Aplicații ale studiului funcțiilor.....	204
Conice.....	211
IX. PROBLEME RECAPITULATIVE	230
 II ALGEBRĂ	
I. PERMUTĂRI	243
II. MATRICE	253
Operații cu matrice.....	254
Calculul puterilor unei matrice	267
III. REZOLVAREA SISTEMELOR LINIARE	279
Sisteme cu 2 sau 3 necunoscute	279
Proprietățile determinanților de ordin 2 și 3	289
Inversa unei matrice	300
Rangul unei matrice	303
Transformări elementare	310
Sisteme liniare cu n necunoscute și determinanți de ordin n	325
Inversa unei matrice	334
Rangul unei matrice de tip $m \times n$	338
Rezolvabilitatea sistemelor în caz general	346
IV. APLICAȚII GEOMETRICE	365
Ecuația dreptei. Recapitulare	365
Intersecția a două drepte în plan	367
Concurența a trei drepte.....	368
Aria unui triunghi	371
V. EXERCITII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE	379
VI. INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	400

ANALIZĂ MATEMATICĂ

I. NUMERE REALE ȘI FUNCȚII

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

AXIOME



Pe parcursul anilor anteriori de studii am folosit proprietățile numerelor naturale, întregi, raționale și reale. Cele mai multe proprietăți ale acestor numere se refereau la operațiile pe care le putem efectua cu aceste numere. În acest capitol introductiv vom trece în revistă principalele proprietăți ale operațiilor elementare, proprietăți care se referă la ordonarea numerelor reale și vom introduce alte câteva axiome care exprimă anumite calități ale mulțimii numerelor reale (deci nu numai ale numerelor). Vom nota mulțimea numerelor reale cu \mathbb{R} .

Definiția riguroasă, axiomatică, a mulțimii numerelor reale este o construcție matematică ce s-a cristalizat pe parcursul a mai multor secole, prin efortul celor mai mari matematicieni. Noi nu vom încerca să parcurgem această construcție, vom selecta numai elementele necesare pentru înțelegerea fenomenelor pe care le vom studia.

Reamintim reprezentarea grafică a numerelor reale folosind o axă orientată și gradată. Astfel, dacă pe o dreaptă fixăm o direcție (vezi figura 1), un punct numit origine și o unitate de măsură (deci, în fond, dacă fixăm două puncte), atunci am definit o axă reală.

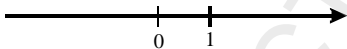


Figura 1a

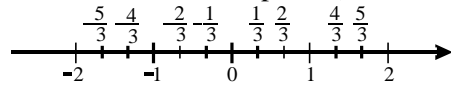


Figura 1b

Pe această axă putem construi (cu rigla și compasul) imaginea numerelor naturale, întregi și raționale. Numerele pozitive vor fi reprezentate în sensul pozitiv iar cele negative în sens negativ. De asemenea putem construi și alte mărimi care nu sunt raționale, de exemplu ipotenuza unui triunghi dreptunghic și isoscel cu cateta 1. Lungimea acestui segment este $\sqrt{2}$ și $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Folosind o procedură similară putem construi orice segment de lungime \sqrt{r} , unde $r \in \mathbb{Q}$. Dar mulțimea numerelor a căror imagine se pot construi efectiv (cu rigla negrădată și cu compasul, deci în sens geometric) nu este întreaga mulțime a numerelor reale.

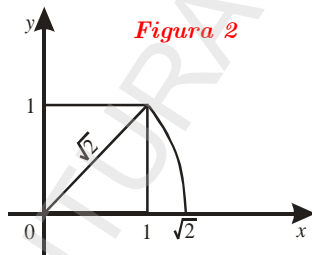


Figura 2

De exemplu nu putem construi imaginea numărului $\sqrt[3]{2}$. Demonstrația acestui fapt nu este deloc simplă și cu toate că problema este cunoscută încă din antichitate (problema dublării cubului, sau problema din Delos), demonstrația imposibilității construcției a fost dată în cadrul teoriei lui Galois abia în secolul XIX (între timp mai mulți matematicieni au dat soluții ingenioase folosind însă curbe speciale cum ar fi conchoida, sau cisoida). În cele ce urmează nu ne vom ocupa de acest aspect al constructibilității, ci vom

presupune că orice număr real poate fi reprezentat în mod unic pe axa reală, deci există o bijecție între punctele drepte și numerele reale.

Axiomele adunării și înmulțirii

Reamintim proprietățile fundamentale ale adunării și înmulțirii:

A1. Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ există un număr real unic notat cu $a + b$;

A2. $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (comutativitate);

A3. $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (asociativitate);

A4. Există un număr real notat cu 0 pentru care $a + 0 = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$;

A5. Pentru orice număr real a există un număr $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $a + x = 0$ (x este opusul numărului a și se notează cu $-a$).

M1. Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ există un număr real unic notat cu $a \cdot b$;

M2. $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (comutativitate);

M3. $(ab)c = a(bc)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (asociativitate);

M4. Există un număr în \mathbb{R}^* notat cu 1 , pentru care $1 \cdot a = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$;

M5. Pentru orice număr real a diferit de 0 există $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $a \cdot x = 1$ (numărul x este inversul numărului a , și se notează cu $\frac{1}{a}$).

Principala legătură între cele două operații este dată de axioma

D. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (înmulțirea este distributivă față de adunare).

Observație. Axiomele **A1**, ..., **A5**, **M1**, ..., **M5**, **D** se numesc axiomele structurii de corp și vor fi studiate pe larg în clasa a XII-a.

Consecințe

Operații cu numere reale

Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^*$, $d \in \mathbb{R}$ există un singur număr $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$a + x = b \text{ (respectiv } c \cdot x = d),$$

și anume $x = b + (-a)$ (respectiv $x = d \cdot \frac{1}{c}$).

Numărul precedent x este diferența numerelor b și a (în al doilea caz este câtul numerelor d și c) și se notează cu $b - a$ (respectiv $\frac{d}{c}$).

Demonstrăm existența și unicitatea soluției ecuației $a + x = b$ folosind axiomele. Dacă a și b sunt numere reale, atunci există $x = b + (-a)$. Pe baza axiomelor **A1** și **A5** deducem $a + x = a + (b + (-a)) = a + ((-a) + b)$.

Deci pe baza axiomei **A2** rezultă $a + x = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$.

Astfel x este într-adevăr o soluție a ecuației date.

Dacă pentru un $x \in \mathbb{R}$ are loc $a + x = b$, atunci adunând $(-a)$ în ambii membri obținem: $(a + x) + (-a) = b + (-a)$.

Folosind **A1** și **A2** rezultă $(x + a) + (-a) = b + (-a)$, și $x + (a + (-a)) = b + (-a)$.

Aplicând pe rând axiomele **A3**, **A5** și **A4** rezultă $x + 0 = b + (-a)$, $x = b + (-a)$.

În consecință există o singură soluție a ecuației $a + x = b$. În mod similar putem demonstra existența și unicitatea soluției în cazul ecuației $c \cdot x = d$.

Observații. 1. Din axiomele **A1**, ..., **A5**, **M1**, ..., **M5**, **D** putem demonstra toate proprietățile numerelor reale folosite până acum.

2. Conform **A3** are loc $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, deci putem defini suma a mai multor termeni:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c). \quad (1)$$

Din (1) și din axiomele **A2** și **A3** rezultă că rezultatul sumei nu depinde nici de ordinea termenilor, deoarece $b + c + a = (b + c) + a = a + (b + c) = a + b + c$.

Astfel pentru o sumă cu trei termeni rezultatul nu depinde de ordinea termenilor. Folosind un raționament inductiv putem arăta că numărul termenilor poate fi arbitrar.

În mod analog folosind **M3** obținem $abc = (ab)c = a(bc)$, și rezultatul produsului nu depinde de ordinea factorilor.

Axiomele ordonării

Următoarele patru axiome se referă la ordonarea numerelor reale:

R1. Pentru orice două numere reale $a, b \in \mathbb{R}$ are loc exact una din următoarele trei relații $a > b$, $a = b$, $b > a$ (trihotomie);

R2. Dacă $a > b$ și $b > c$, atunci $a > c$ (tranzitivitate);

R3. Dacă $a > b$, $c \in \mathbb{R}$, atunci $a + c > b + c$;

R4. Dacă $a > b$ și $c > 0$, atunci $ac > bc$.

Definiții și notații. Relația $a > b$ se citește: a este mai mare decât b (sau b este mai mic decât a), notațiile $a > b$ și $b < a$ reprezentând același lucru. Prin simbolul $a \geq b$ înțelegem faptul că are loc una din relațiile $a > b$ sau $a = b$. Dacă $a > 0$, atunci a este un număr pozitiv, iar dacă $a < 0$, atunci a este negativ. Inegalitatea $a \geq 0$ exprimă faptul că a este un număr nenegativ, iar inegalitatea $a \leq 0$ este verificată de numerele nepozitive.

Definiție. a) Dacă mulțimea $A \subset \mathbb{R}$ conține un element care este mai mare decât toate celelalte elemente ale mulțimii, atunci vom spune că acest element este *maximul mulțimii*, sau *cel mai mare element* al mulțimii A și îl vom nota cu $\max A$.

b) Dacă mulțimea A conține un element care este mai mic decât toate celelalte elemente, atunci vom numi acest element *cel mai mic element* al mulțimii A , sau *minimul mulțimii* A și îl notăm cu $\min A$.

Astfel avem:

$$M = \max A \Leftrightarrow a \leq M, \forall a \in A \text{ și } M \in A;$$

$$m = \min A \Leftrightarrow m \leq a, \forall a \in A \text{ și } m \in A.$$

Menționăm că nu orice mulțime are maxim sau minim. De exemplu intervalul $(1, 2)$ nu are nici cel mai mic element și nici cel mai mare element. Cel mai mic element al mulțimii $[1, 2)$ este 1 și nu are cel mai mare element, iar intervalul $(1, 2]$ nu are cel mai mic element și cel mai mare element al intervalului este 2.

Axioma supremului

DEFINIȚIE. Mulțimea de numere reale A este *mărginită superior (inferior)*, dacă există numărul real K (respectiv k) astfel încât pentru orice $x \in A$ să avem inegalitatea $x \leq K$ ($x \geq k$). Numărul K (k) este un *majorant (minorant)* al mulțimii A . Printr-o mulțime mărginită înțelegem o mulțime mărginită atât inferior cât și superior.

Următoarea axiomă, deși pare foarte intuitivă, exprimă o proprietate ce caracterizează mulțimea numerelor reale (dacă toate axiomele precedente sunt verificate).

F. Dacă $A \neq \emptyset$ este o mulțime mărginită superior, atunci există un număr real H cu următoarele două proprietăți:

1. pentru orice $x \in A$ are loc $x \leq H$;
2. dacă K este un majorant al mulțimii A , atunci $H \leq K$.

Intuitiv acest număr H este cel mai mic majorant al mulțimii A , deci axioma în fond afirmă că mulțimea majoranților ale unei mulțimi mărginite superior are un cel mai mic element.

Să observăm că acest număr H este unic. Dacă H și H^* ar avea aceleași proprietăți, atunci conform proprietății 1. atât H , cât și H^* ar fi un majorant pentru mulțimea A , deci aplicând proprietatea 2. odată pentru H și odată pentru H^* ar rezulta pe de o parte $H \leq H^*$, iar pe de altă parte $H^* \leq H$, deci $H^* = H$.

Numărul H a cărui existență este garantată de axioma **F** se numește cel mai mic majorant al mulțimii A , sau **supremumul** mulțimii A și se notează cu $\sup A = H$.

Din axioma **F** rezultă o proprietate analoagă relativ la mulțimile mărginite inferior:

PROPRIETATE. Dacă A este o mulțime mărginită inferior, atunci există un număr h cu proprietățile

1. pentru orice $x \in A$ are loc $x \geq h$;
2. dacă k este un minorant al mulțimii A , atunci $k \leq h$.

Numărul h este cel mai mare minorant al mulțimii A , sau **infimumul** mulțimii A și se notează cu $\inf A = h$.

DEMONSTRAȚIE. Considerăm mulțimea $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$. Dacă k este un minorant al mulțimii A , atunci $K = -k$ este un majorant al mulțimii B și invers, deci B este mărginit superior. Dacă $H = \sup B$, atunci pentru orice $y \in B$ are loc $y \leq H$, deci numărul $h = -H$ este un minorant al mulțimii A (pentru orice $x \in A$ are loc $h \leq x$)

Dacă k este un minorant arbitrar al mulțimii A , atunci $K = -k$ este un majorant al mulțimii B , deci conform axiomei **F** are loc inegalitatea $H \leq K$. Astfel $-K \leq -H$, deci $k \leq h$.

Din proprietățile (1) și (2) rezultă existența infimumului.

Astfel dacă A este o mulțime mărginită, atunci admite atât un infimum, cât și un supremum. Următoarele două caracterizări sunt importante în aplicații:

a) Fie A o mulțime mărginită superior și $H = \sup A$. Din definiția numărului H rezultă că mulțimea A nu conține nici un element mai mare decât H , dar pentru orice $\varepsilon > 0$ numărul $H - \varepsilon$ nu este majorant, deci există în A cel puțin un element $x \in A$ pentru care $x > H - \varepsilon$.

b) Dacă mulțimea B este mărginită inferior și $h = \inf B$, atunci B nu are nici un element mai mic decât h , însă pentru orice $\varepsilon > 0$ are cel puțin un element mai mic decât $h + \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0$ există $y \in B$ cu proprietatea $y < h + \varepsilon$).

Exemple. 1. Folosind notațiile:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}, \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}, \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}, \\ \mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$$

putem afirma că mulțimile \mathbb{R}_- și \mathbb{R}_-^* sunt mărginite superior și ambele mulțimi au supremumul 0 : $\sup \mathbb{R}_- = \sup \mathbb{R}_-^* = 0$. Mulțimea \mathbb{R}_- conține propriul său supremum, iar mulțimea \mathbb{R}_-^* nu conține acest supremum.

2. Mulțimea $A = (1, \infty)$ este mărginită inferior dar nu este mărginită superior. $0 \leq x, \forall x \in A$, deci 0 este un minorant al mulțimii A . Mulțimea minoranților mulțimii A este intervalul $(-\infty, 1]$ și cel mai mare element al acestui interval este 1 , deci infimumul mulțimii A este 1 . Se poate observa că mulțimea A nu are nici cel mai mic și nici cel mai mare element.

3. Mulțimea $B = [5, 2002)$ este mărginită atât inferior cât și superior deoarece $5 \leq x \leq 2002, \forall x \in B$. Mulțimea marginilor inferioare este $(-\infty, 5]$ și mulțimea marginilor superioare este $[2002, \infty)$. Astfel supremumul mulțimii B este 2002 și infimumul este 5 . În același timp se poate observa că cel mai mic element al mulțimii B este 5 , dar această mulțime nu are cel mai mare element.

4. Mulțimea \mathbb{N} nu este mărginită superior, dar 0 fiind cel mai mic element al mulțimii este și o margine inferioară, mai mult este chiar cea mai mare margine inferioară.

În paragrafele următoare demonstrăm câteva consecințe foarte importante ale axiomelor prezentate.

Axioma lui Arhimede

Vom aplica de foarte multe ori următoarea proprietate, numită axioma lui Arhimede:

A. Pentru orice două numere pozitive a și b există un număr natural n cu proprietatea $n \cdot a > b$.

Consecințe. 1. Pentru $a = 1$ rezultă că pentru orice număr real b există un număr natural mai mare decât b .

2. O consecință a axiomelor **A** și **F** este existența părții întregi a unui număr oarecare. Astfel pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ există $n \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea $n \leq x < n + 1$. Numărul n este partea întregă a numărului real x și se notează cu $[x]$:

$$[x] \leq x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cu ajutorul părții întregi definim și partea fracționară a numărului x , notată cu $\{x\}$, prin egalitatea

$$\{x\} = x - [x], \forall x \in \mathbb{R}.$$

Din definiție rezultă că $0 \leq \{x\} < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.





Exemple. 1. Partea întreagă a numărului $x = 2,3$ este $[2,3] = 2$ și partea fracționară este $\{2,3\} = 0,3$. În cazul numerelor pozitive cifrele de după virgula zecimală alcătuiesc partea fracționară și cele care sunt înaintea virgulei formează partea întreagă.

2. Pentru $x = -5,8$ avem $[-5,8] = -6$, deoarece $-6 \leq -5,8 < -5$. Astfel partea fracționară este $\{-5,8\} = -5,8 + 6 = 0,2$.

3. Pentru orice două numere reale $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $a < b$, există $r \in \mathbb{Q}$

astfel încât $a < r < b$.

Într-adevăr $b - a > 0$ și din axioma lui Arhimede pentru numerele pozitive $b - a$ și 1 , $\exists n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n(b - a) > 1$, deci $na + 1 < nb$. Pe de altă parte există $[na] = m \in \mathbb{Z}$, de unde rezultă că $m \leq na < m + 1$, deci $m + 1 \leq na + 1 < nb$.

Astfel $na < m + 1 < nb$, în consecință $a < \frac{m+1}{n} < b$ și $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Q}$.

4. Din consecința **2.** rezultă că între două numere reale oarecare $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ există o infinitate de numere raționale. Într-adevăr dacă $r \in \mathbb{Q}$ și $a < r < b$, atunci există $r_1 \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a < r_1 < r$, etc.

5. Pentru orice două numere reale $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $a < b$, există $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a < r < b$.

Dacă $a < b$, atunci conform **R3** are loc $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$, deci din consecința **2.** $\exists q \in \mathbb{Q}$ cu $a - \sqrt{2} < q < b - \sqrt{2}$, de unde $a < q + \sqrt{2} < b$, unde evident $q + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

6. Din consecința **4.** rezultă că între două numere reale oarecare $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ există o infinitate de numere iraționale.



Problemă rezolvată. Determinați minimul, maximul, infimumul și supremumul

mulțimii $A = \left\{ \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Deoarece $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, mulțimea A este mărginită, deci există atât infimumul mulțimii cât și supremumul acesteia. Cel mai mare element al mulțimii este $\frac{1}{2}$, deci acesta e și supremumul mulțimii. Demonstrăm că 0 este infimumul mulțimii.

Pentru a arăta această proprietate este necesar și suficient să arătăm:

- $0 < \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, care este adevărată;

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

Ultima inegalitate este echivalentă cu $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$, deci $n > \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1$. Pe de altă

parte $\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, deci numărul $n = \max\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right], 1\right)$ verifică inegalitatea cerută. Astfel $\inf A = 0$. Deoarece $0 \notin A$, mulțimea A nu poate avea cel mai mic element.

Exerciții propuse

1. Determinați infimumul, supremumul, minimul și maximul următoarelor mulțimi (dacă există):

a) $A = \mathbb{Z}$; **b)** $A = \mathbb{Q}$; **c)** $A = (-\infty, 5)$; **d)** $A = (-\infty, 10]$;

e) $A = (7, \infty)$; **f)** $A = [2000, \infty)$; **g)** $A = (-3, 100)$; **h)** $A = [-8, 13]$;

i) $(-3, 5] \cup \{11\}$; **j)** $A = (-\infty, 2] \cup (3, \infty)$; **k)** $(-2, 5] \cup (6, 103]$;

l) $A = \left\{ \frac{n}{n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$; **m)** $A = \left\{ \frac{2n^2}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$;

n) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| \leq 1\}$; **o)** $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid \sqrt{2x+3} \leq x\}$;

p) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2 - 5x + 4}{x+3} > 0 \right\}$; **q)** $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} > 1 \right\}$.

2. Determinați partea întreagă și partea fracționară a următoarelor numere:

a) $a = \frac{17}{5}$; **b)** $a = -\frac{135}{3}$; **c)** $a = \frac{n}{n+3}, n \in \mathbb{N}^*$; **d)** $a = \frac{3n^2}{n^2+2}, n \in \mathbb{N}$.

3. Rezolvați ecuațiile:

a) $\left\{ \frac{x+1}{3} \right\} = x-2$; **b)** $\left\{ \frac{2x+1}{3x-1} \right\} = 2$; **c)** $\left\{ \frac{4x+1}{5} \right\} = \left\{ \frac{3x-1}{2} \right\}$;

d) $\left\{ \frac{2x+1}{3} \right\} = \frac{1}{2}$; **e)** $\left\{ \frac{x+1}{2} \right\} = [x-1]$.

Probleme propuse

1. Demonstrați că dacă există expresiile din următoarele egalități ($A, B \subset \mathbb{R}$), atunci egalitățile sunt adevărate:

a) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$, unde $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$;

b) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$;

c) $\inf(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \inf A$, unde $\lambda \cdot A = \{\lambda \cdot a \mid a \in A\}$ și $\lambda \in \mathbb{R}_+$;

d) $\sup(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \sup A$, unde $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Demonstrați că obținem egalități dacă înlocuim în relațiile precedente infimumul cu supremum și minimul cu maxim.

2. Arătați că dacă $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și există expresiile din relațiile de mai jos, atunci inegalitățile sunt adevărate:

a) $\max_{x \in [a,b]} (f(x) + g(x)) \leq \max_{x \in [a,b]} f(x) + \max_{x \in [a,b]} g(x)$;



$$\text{b) } \min_{x \in [a, b]} (f(x) + g(x)) \geq \min_{x \in [a, b]} f(x) + \min_{x \in [a, b]} g(x);$$

$$\text{c) } \max_{x \in [a, b]} (f(x) \cdot g(x)) \leq \max_{x \in [a, b]} f(x) \cdot \max_{x \in [a, b]} g(x), \text{ dacă } f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

Inegalități similare au loc și pentru minimumul funcțiilor, respectiv infimumul și supremumul.

3. Demonstrați că dacă $a \leq b$, $\forall a \in A$ și $\forall b \in B$ ($A, B \subset \mathbb{R}$), atunci

$$\sup A \leq \inf B.$$

4. Calculați partea întreagă și partea fracționară a următoarelor expresii:

$$\text{a) } (2 + \sqrt{3})^{2001}; \quad \text{b) } \sqrt{n^2 + n - 1}, n \in \mathbb{N}^*; \quad \text{c) } \frac{n(n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}.$$

5. Calculați sumele:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n \left[\sqrt{k^2 + k + 1} \right]; \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{2003} \left[\frac{k(k+1)}{6} \right]; \quad \text{c) } \sum_{k=1}^n \left\{ (3 + 2\sqrt{2})^k \right\}.$$

6. Calculați $\min_{x, y, z \in \mathbb{R}} \left\{ \max \left\{ x^2 + y + z, y^2 + z + x, z^2 + x + y \right\} \right\}$.



FUNCȚII REALE

În clasele anterioare am definit noțiunea de funcție reală cu variabilă reală. Am studiat câteva proprietăți ale funcțiilor (monotonie, paritate, periodicitate, injectivitate, surjectivitate, bijectivitate, convexitate, concavitate). Am trasat graficele unor funcții importante, punând în evidență semnificația graficului în studiul acestora. Am studiat și câteva operații cu funcții, precum și funcția inversă.

În acest capitol vom trece în revistă cele mai importante funcții studiate (funcțiile putere, exponențiale, logaritmice, trigonometrice), de asemenea vom defini funcția polinomială. Vom reaminti proprietățile importante ale acestor funcții, vom trasa graficele lor, urmând ca în capitolele ulterioare să putem argumenta aceste proprietăți cu mijloacele analizei matematice.

Înainte de toate reamintim câteva proprietăți importante în studiul funcțiilor:

Monotonie

Spunem că funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este **crescătoare** (strict crescătoare) pe intervalul $I \subset D$, dacă pentru orice $x_{1,2} \in I$, $x_1 < x_2$ avem $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$).

Spunem că funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este **descrescătoare** (strict descrescătoare) pe $I \subset D$, dacă pentru orice $x_{1,2} \in I$, $x_1 < x_2$ avem $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Spunem că funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este **monotonă** (strict monotonă) pe $I \subset D$, dacă este crescătoare sau descrescătoare pe I (respectiv strict crescătoare sau strict descrescătoare).

Observații. 1. Orice funcție strict monotonă este în același timp și monotonă.

2. Monotonia funcției $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se poate studia și cu semnul raportului



$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \text{ unde } x_{1,2} \in D \text{ și } x_1 \neq x_2.$$

Dacă fracția este pozitivă (strict pozitivă) pentru $\forall x_{1,2} \in I \subset D, x_1 \neq x_2$, atunci funcția este crescătoare (strict crescătoare) pe I .

Dacă fracția este negativă (strict negativă) pentru $\forall x_{1,2} \in I \subset D, x_1 \neq x_2$, atunci funcția este descrescătoare (strict descrescătoare) pe I .

Puncte de extrem ale funcțiilor

Definiție. Spunem că punctul $(x_0, f(x_0))$ este *punct de maxim (minim)* al funcției $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($x_0 \in D$), dacă $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$) $\forall x \in D$.



Spunem că punctul $(x_0, f(x_0))$ este *punct de extrem* al funcției $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă este punct de minim sau maxim.

Convexitate și concavitate

Definiție. 1. Funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este *convexă* pe intervalul $I \subset D$, dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$ ($x_1 < x_2$) și orice $\lambda \in [0, 1]$ avem

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

2. Funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este *concavă* pe intervalul $I \subset D$, dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$ ($x_1 < x_2$) și orice $\lambda \in [0, 1]$ avem

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$



Observații. 1. Dacă inegalitățile din definiție sunt stricte, vorbim despre funcție strict convexă, respectiv strict concavă.

2. Aceste inegalități exprimă faptul că fiecare coardă a graficului funcției convexe f este deasupra arcului de grafic corespunzător (fig. 3) și fiecare arc al graficului funcției concave f este deasupra coardei respective (fig. 4). Astfel dacă vârfurile unui poligon cu n laturi se află pe graficul unei funcții convexe, atunci centrul de masă asociat acestor puncte și ponderilor $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ se va afla deasupra graficului funcției. În cazul graficului unei funcții concave situația este inversă, graficul este deasupra centrului de masă. Aceste proprietăți sunt exprimate prin teorema lui Jensen.

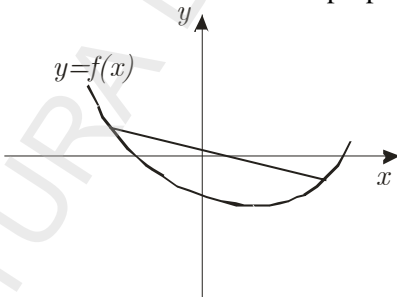


Figura 3

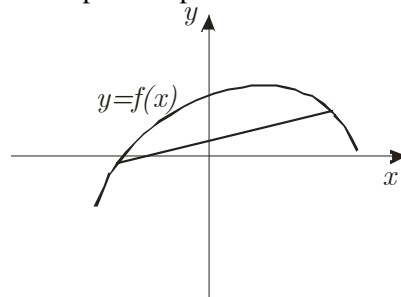


Figura 4

EDITURĂ

Teoremă. (Jensen) Funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă pe I , dacă și numai dacă pentru orice $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ și orice $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ cu $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ avem

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

Observații. 1. Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, atunci inegalitatea precedentă se

scrie sub forma $f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$.

2. Teorema precedentă se poate demonstra prin inducție după n .
3. În cazul funcțiilor concave are loc inegalitatea inversă.

Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate

Definiții

Funcția $f : A \rightarrow B$ este **injectivă**, dacă $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Funcția $f : A \rightarrow B$ este **surjectivă**, dacă $\forall y \in B \exists x \in A$ astfel încât $f(x) = y$.

Funcția $f : A \rightarrow B$ este **bijectivă**, dacă este injectivă și surjectivă.

Interpretare grafică

Dacă $A, B \subset \mathbb{R}$, atunci imaginea în sistemul cartezian a mulțimii $\text{Gr } f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ este graficul funcției $f : A \rightarrow B$.

Dacă o funcție este injectivă, atunci orice dreaptă paralelă cu axa Ox intersecțiază graficul funcției în cel mult un punct. Funcția din figura 5 nu este injectivă, deoarece de exemplu dreapta d_2 intersecțiază graficul în două puncte diferite (adică pentru $x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2)$). Funcțiile din figurile 6 și 7 sunt injective.

Dacă o funcție este surjectivă, atunci orice dreaptă paralelă cu axa Ox , dusă într-un punct al codomeniului reprezentat pe axa Oy , intersecțiază graficul funcției în cel puțin un punct. Funcția din figura 5 nu este surjectivă, dacă are codomeniul \mathbb{R} , deoarece de exemplu dreptele d_1 și d_3 nu intersecțiază graficul, dar este surjectivă dacă $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$. La fel funcția cu graficul în figura 6 nu este surjectivă dacă are codomeniul \mathbb{R} , dar se poate restrânge la o funcție surjectivă. Funcția din figura 7 este surjectivă.

În general pentru orice funcție $f : A \rightarrow B$, funcția $f_1 : A \rightarrow \text{Im } f$ este surjectivă ($\text{Im } f$ este imaginea funcției, $\text{Im } f = f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$).

Dacă o funcție este bijectivă, atunci orice dreaptă paralelă cu axa Ox intersecțiază graficul funcției într-un punct.

De exemplu funcția cu graficul în figura 7 este bijectivă.

Observație. Orice funcție strict monotonă este injectivă.

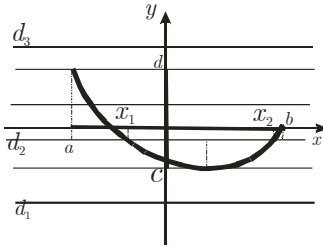


Figura 5

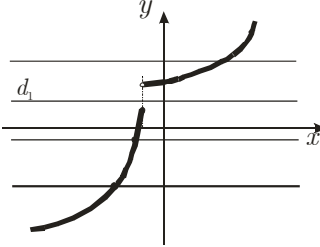


Figura 6

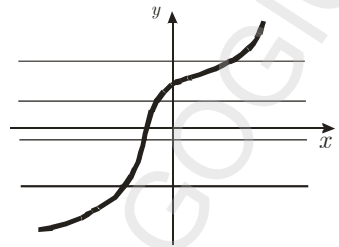


Figura 7

Funcția inversă

Definiție. O funcție $f : A \rightarrow B$ este *inversabilă*, dacă există funcția $g : B \rightarrow A$ astfel încât $f \circ g = 1_B$ și $g \circ f = 1_A$, unde $1_A : A \rightarrow A$, $1_A(x) = x \ \forall x \in A$ este funcția identică a mulțimii A .



Dacă există funcția g , atunci ea este unică și se notează cu $g = f^{-1}$.

Am demonstrat în clasa a X-a și următoarea teoremă:

Teoremă. Funcția $f : A \rightarrow B$ este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă.



Pe baza cunoștințelor din clasa a X-a mai putem afirma următoarea teoremă:

Teoremă. Dacă $f : A \rightarrow B$, $A, B \subset \mathbb{R}$ este bijectivă și $f^{-1} : B \rightarrow A$ este inversa sa, atunci sunt adevărate următoarele proprietăți:



- a) Dacă f este monotonă, atunci f^{-1} este monotonă cu aceeași monotonie.
- b) Dacă f este crescătoare și convexă (concavă) atunci f^{-1} este concavă (convexă)
- c) Dacă f este descrescătoare și convexă (concavă) atunci f^{-1} este convexă (concavă)

Figura 8

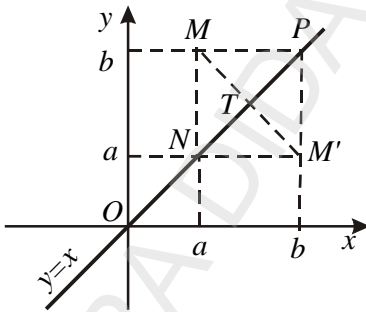
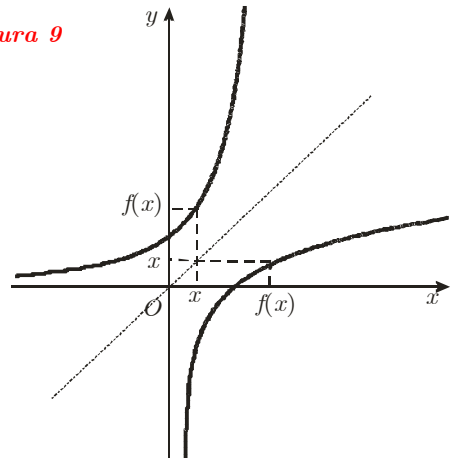


Figura 9



Interpretare grafică

Dacă punctul $M(a, b)$ ($a \in A \subset \mathbb{R}$, $b \in B \subset \mathbb{R}$) este un punct al graficului funcției inversabile $f : A \rightarrow B$, atunci $f(a) = b$, deci $f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$; rezultă că punctul $M'(b, a)$ aparține graficului funcției inverse. Punctele M și M'

sunt simetrice față de prima bisectoare ($y = x$) (fig. 8), deci putem afirma următoarea teoremă:

Teoremă. Dacă funcția $f : A \rightarrow B$ ($A, B \subset \mathbb{R}$) este bijectivă și $f^{-1} : B \rightarrow A$ este inversa sa, atunci graficele funcțiilor f și f^{-1} sunt simetrice față de prima bisectoare. (fig. 9)

Funcții cu graficul simetric față de o dreaptă, față de un punct, periodicitate

Definiții

1. Spunem că o mulțime $D \subset \mathbb{R}$ este simetrică față de $a \in \mathbb{R}$, dacă pentru orice $x \in D$ avem $2a - x \in D$ (adică $a - \alpha \in D \Rightarrow a + \alpha \in D$).

Pentru $a = 0$ spunem că mulțimea este simetrică ($x \in D \Rightarrow -x \in D$).

2. Dacă mulțimea $D \subset \mathbb{R}$ este simetrică față de $a \in \mathbb{R}$ și $f(2a - x) = f(x) \forall x \in D$, atunci graficul funcției este simetric față de dreapta $x = a$ (fig. 10).

3. În cazul $a = 0$, dacă $f(x) = f(-x)$, pentru orice $x \in D$, spunem că funcția este **funcție pară**, și graficul funcției este simetric față de axa Oy .

4. Dacă mulțimea $D \subset \mathbb{R}$ este simetrică față de $a \in \mathbb{R}$ și $f(2a - x) = 2b - f(x)$ pentru orice $x \in D$, atunci graficul funcției este simetric față de punctul (a, b) . Dacă $a \in D$, atunci $f(a) = b$ (fig. 11).

5. În cazul $a = b = 0$, dacă $f(-x) = -f(x) \forall x \in D$, spunem că funcția este **funcție impară**, și graficul funcției este simetric față de origine.

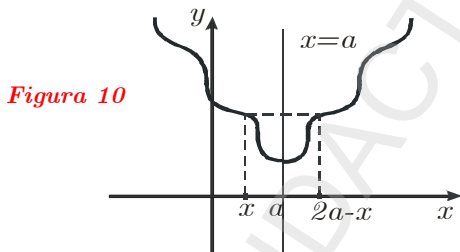


Figura 10

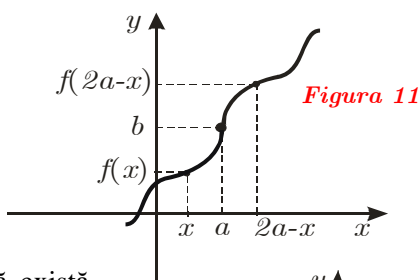


Figura 11

6. Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este **periodică**, dacă există $t \in \mathbb{R}^*$ cu $x \in D$ implică $x + t \in D$ și $f(x + t) = f(x) \forall x \in D$. Deci graficul funcției se poate obține din graficul restrâns pe mulțimea $[a, b] \cap D$ ($b - a = t$) prin translații paralele cu axa Ox , de lungime $|nt|$, $n \in \mathbb{Z}$ (fig. 12). Cel mai mic număr pozitiv T (dacă există) cu proprietatea $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in D$ se numește **perioadă principală** a funcției, toate celelalte numere t cu această proprietate fiind perioade ale funcției.

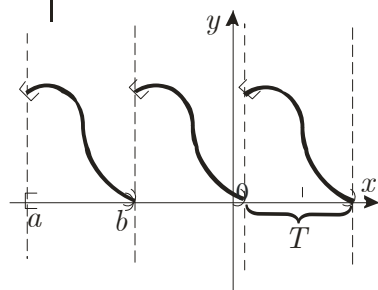


Figura 12

Funcția putere

Definiție. Numim *funcție putere* funcția $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = x^\alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{R}^*$.



Teoremă



- a)** Dacă $\alpha > 0$, atunci funcția $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = x^\alpha$ este strict crescătoare.
- b)** Dacă $\alpha < 0$, atunci funcția $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = x^\alpha$ este strict descrescătoare.
- c)** Dacă $\alpha = 0$, atunci funcția $f_0 : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$ este constantă.

Observații



- 1.** Dacă n este număr natural nenul, atunci funcția putere f_n poate fi definită pe \mathbb{R} și are următoarele proprietăți:
 - a)** Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este număr par, atunci funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ este pară, strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și strict crescătoare pe $[0, \infty)$.
 - b)** Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este număr impar, atunci funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ este impară și strict crescătoare pe \mathbb{R} .
- 2.** Dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus [0, 1)$, atunci funcția f_α este strict convexă, iar dacă $\alpha \in (0, 1]$, atunci funcția f_α este strict concavă.
- 3.** Dacă $\alpha \in \mathbb{R}^*$ atunci $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f_\alpha(x) = x^\alpha$ este bijectivă, inversa sa fiind $f_{\frac{1}{\alpha}} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f_{\frac{1}{\alpha}}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$.
- 4.** N-am tratat separat funcția radical deoarece $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, deci funcția $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ este tot o funcție putere și este inversa funcției f_n , care în cazul n impar poate fi definită pe \mathbb{R} .

În figura 13 am reprezentat grafic câteva funcții putere.

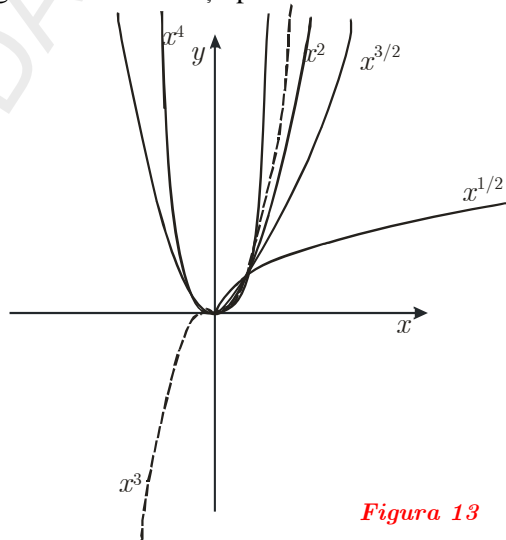


Figura 13

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ

Funcția exponențială și funcția logaritmică

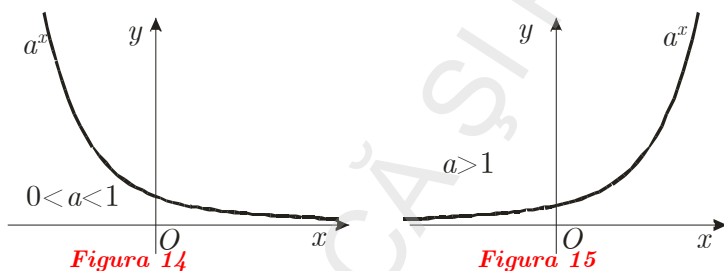
DEFINIȚIE. Numim *funcție exponențială* de bază $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ funcția $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f_a(x) = a^x$.

Pe baza studiilor din clasa a X-a putem afirma următoarele proprietăți referitoare la monotonie, convexitatea, bijectivitatea funcției:

Teoremă

- Dacă $a > 1$, atunci funcția f_a este strict crescătoare.
- Dacă $0 < a < 1$, atunci funcția f_a este strict descrescătoare.
- Funcția f_a este bijectivă pentru orice $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$.
- Funcția f_a este convexă pentru orice $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$.

În figurile 14 și 15 am trasat graficele funcțiilor exponențiale pentru cazurile $0 < a < 1$ și $a > 1$.



DEFINIȚIE. *Funcția logaritmică* de bază $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ este inversa funcției exponențiale $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f_a(x) = a^x$, $f_a^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a^{-1}(x) = \log_a x$.

Pe baza proprietăților funcției exponențiale putem afirma următoarea teoremă:

Teoremă

- Dacă $a > 1$, atunci funcția $\log_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ este strict crescătoare și concavă.
- Dacă $0 < a < 1$, atunci funcția $\log_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ este strict descrescătoare și convexă.
- Funcția $\log_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ este bijectivă $\forall a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$.

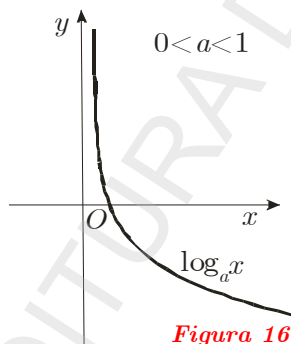


Figura 16

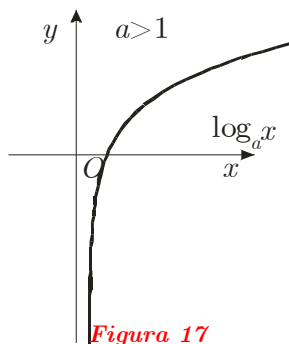


Figura 17

În figurile 16 și 17 am trasat graficele funcțiilor logaritmice pentru cazurile $0 < a < 1$ și $a > 1$.

Funcțiile trigonometrice

Din clasele precedente cunoașteți cercul trigonometric și funcțiile trigonometrice. Vom reaminti doar cele mai importante proprietăți ale lor, respectiv vom trasa graficul lor.

Funcțiile sin și arcsin

Cele mai importante proprietăți ale funcției $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt:

- a) Este periodică cu perioada principală 2π , astfel $\sin(x + 2\pi) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.
- b) Este funcție impară, $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.
- c) Este crescătoare pe intervalele de forma $\left[\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right]$

și descrescătoare pe intervalele $\left[\frac{(4k+1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{2}\right]$, unde $k \in \mathbb{Z}$.

d) Este mărginită, $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. În punctele $\frac{(4k-1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ are puncte de minim, minimul funcției fiind -1 , iar în punctele $\frac{(4k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ are puncte de maxim, maximul funcției fiind 1 .

e) În punctele $k\pi$ se anulează, deci $\sin k\pi = 0, k \in \mathbb{Z}$.

f) Este convexă pe intervalele $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ și concavă pe intervalele $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ ($k \in \mathbb{Z}$).

g) Restricția $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ este bijectivă.

În figurile 18, 19 și 20 am trasat graficul funcției sin pe $[0, \pi], [-\pi, \pi]$ și \mathbb{R} , bazându-ne pe proprietățile menționate.

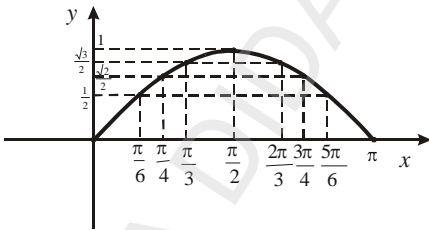


Figura 18

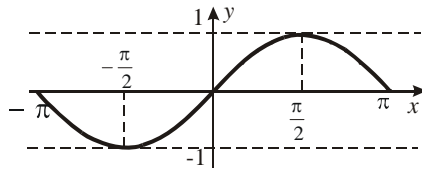


Figura 19

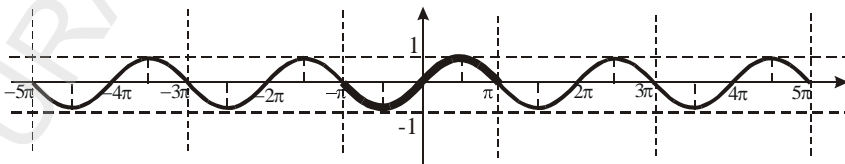


Figura 20



DEF

Definiție. Inversa funcției
 $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ este funcția **arcsinus**:

 $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pentru $x \in [-1, 1]$,

 $\arcsin x = y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ și $\sin y = x$.

Principalele proprietăți ale funcției

 $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sunt:

- a)** Este crescătoare pe $[-1, 1]$.
- b)** Este funcție impară.
- c)** Se anulează în punctul 0.
- d)** Este concavă pe $[-1, 0]$ și convexă pe $[0, 1]$.

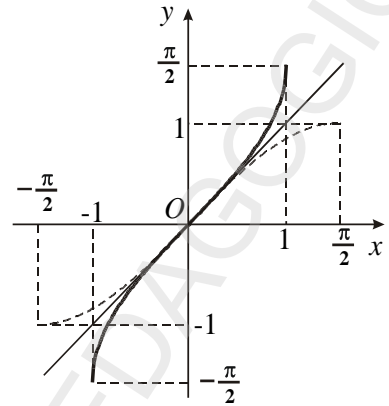


Figura 21

Graficul funcției este simetricul graficului funcției $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ față de prima bisectoare și este reprezentat în figura 21.

Funcțiile cos și arccos

Cele mai importante proprietăți ale funcției $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt:

- a)** Este periodică cu perioada principală 2π , astfel $\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- b)** Este funcție pară, $\cos(-x) = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- c)** Este crescătoare pe intervalele de forma $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ și descrescătoare pe intervalele $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, unde $k \in \mathbb{Z}$.
- d)** Este mărginită, $-1 \leq \cos x \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. În punctele $(2k-1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ are puncte de minim, minimul funcției fiind -1 , iar în punctele $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ are puncte de maxim, maximul funcției fiind 1 .
- e)** În punctele $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ se anulează, deci $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2} = 0, k \in \mathbb{Z}$.
- f)** Este convexă pe intervalele $\left[\frac{(4k+1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{2}\right]$ și concavă pe intervalele $\left[\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- g)** Restricția $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ este bijectivă.
- h)** $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Pe baza ultimei relații graficul funcției \cos se poate obține din graficul funcției \sin printr-o translație de vector $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, ceea ce este reprezentat în figura 22.

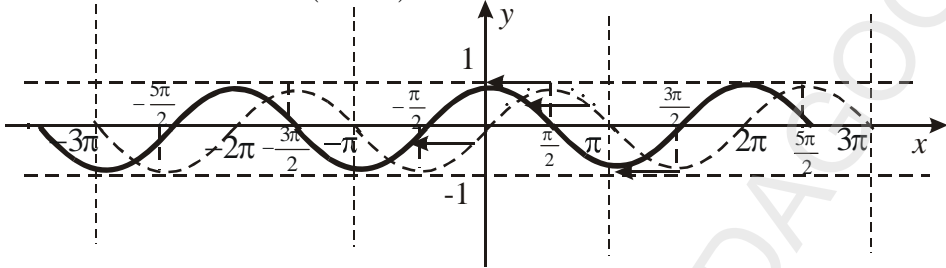


Figura 22

Definiție. Inversa funcției $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ este funcția **arccosinus**: $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, pentru $x \in [-1, 1]$, $\arccos x = y \Leftrightarrow y \in [0, \pi]$ și $\sin y = x$.



Principalele proprietăți ale funcției $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ sunt:

- a) Este descrescătoare pe $[-1, 1]$.
- b) Nu este nici pară, nici impară.
- c) Se anulează în punctul 1.
- d) Este convexă pe $[-1, 0]$ și concavă pe $[0, 1]$.

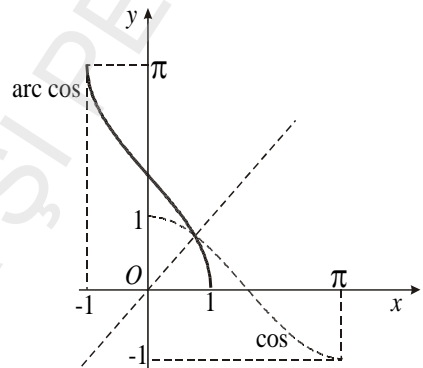


Figura 23

Graficul funcției este simetricul graficului funcției $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ față de prima bisectoare și este reprezentat în figura 23.

Funcțiile tg și arctg

Definiție. Funcția $\text{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$ se numește funcția **tangentă** (s-au scos din domeniul de definiție valorile, unde \cos se anulează).



Cele mai importante proprietăți ale funcției sunt:

- a) Este periodică cu perioada principală π , astfel $\text{tg}(x + \pi) = \text{tg } x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- b) Este funcție impară, $\text{tg}(-x) = -\text{tg } x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- c) Este crescătoare pe intervalele de forma $\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2} \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.



d) Este surjectivă.

e) În punctele $k\pi$ se anulează, deci $\operatorname{tg} k\pi = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

f) Este convexă pe intervalele $\left[k\pi, \frac{(2k+1)\pi}{2} \right)$ și concavă pe intervalele $\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, k\pi \right]$, ($k \in \mathbb{Z}$).

g) Restricția $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$ este bijectivă.

Graficul funcției este trasat în figura 24.

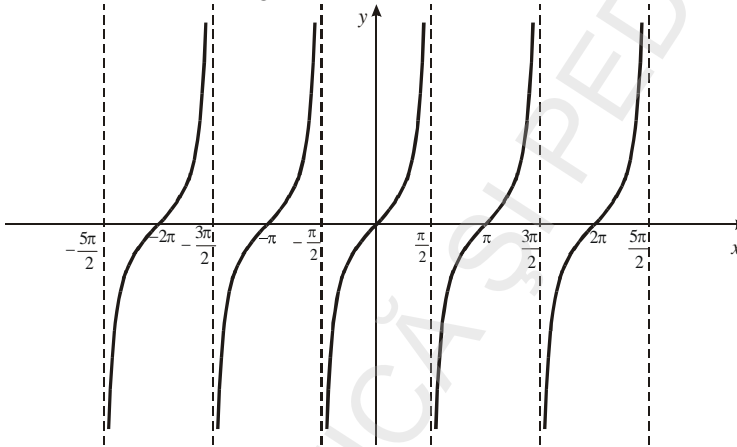


Figura 24

Definiție. Inversa funcției $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$ este funcția *arctangentă*:

$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, pentru $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, $\operatorname{tg} y = x$.

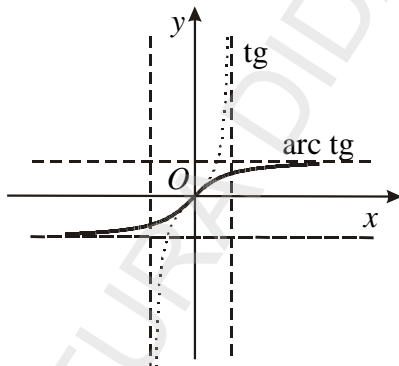


Figura 25

Principalele proprietăți ale funcției

$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ sunt:

a) Este crescătoare pe \mathbb{R} .

b) Este impară, $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

c) Se anulează în punctul 0.

d) Este mărginită $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

e) Este convexă pe \mathbb{R}_- și concavă pe \mathbb{R}_+ .

Graficul funcției este simetricul graficului funcției

$\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$ față de prima bisectoare și

este reprezentat în figura 25.

Funcțiile ctg și arctctg

Definiție. Funcția $\text{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{ctg } x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\text{tg } x}$ se numește funcția *cotangentă* (s-au scos din domeniul de definiție valorile, unde sin se anulează).

DEF

Cele mai importante proprietăți ale funcției sunt:

a) Este periodică cu perioada principală π , astfel $\text{ctg}(x + \pi) = \text{ctg } x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.



b) Este funcție impară, $\text{ctg}(-x) = -\text{ctg } x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Este descrescătoare pe intervalele de forma $(k\pi, (k + 1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Este surjectivă.

e) În punctele $\frac{(2k + 1)\pi}{2}$ se anulează, deci $\text{ctg} \frac{(2k + 1)\pi}{2} = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

f) Este convexă pe intervalele $\left[k\pi, \frac{(2k + 1)\pi}{2} \right]$ și concavă pe intervalele $\left[\frac{(2k - 1)\pi}{2}, k\pi \right)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

g) Restricția $\text{ctg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ este bijectivă.

Graficul funcției este trasat în figura 26.

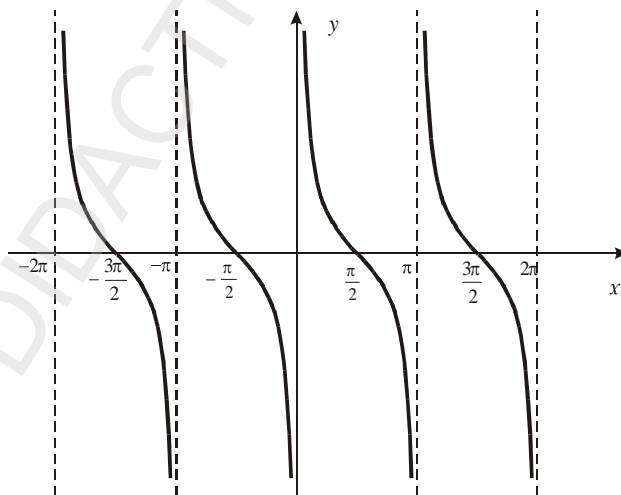


Figura 26

Definiție. Inversa funcției $\text{ctg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ este funcția *arccotangentă*: $\text{arctctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, pentru $x \in \mathbb{R}$, $\text{arctctg } x = y \Leftrightarrow y \in (0, \pi)$, $\text{ctg } y = x$.

DEF

EDICIA DRACTICĂ



Principalele proprietăți ale funcției $\text{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ sunt:

a) Este descrescătoare pe \mathbb{R} .

b) Este mărginită $0 < \text{arctg } x < \pi$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

c) Este concavă pe \mathbb{R}_- și convexă pe \mathbb{R}_+ .

Graficul funcției este simetricul graficului funcției $\text{ctg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ față de prima bisectoare și este reprezentat în figura 27.

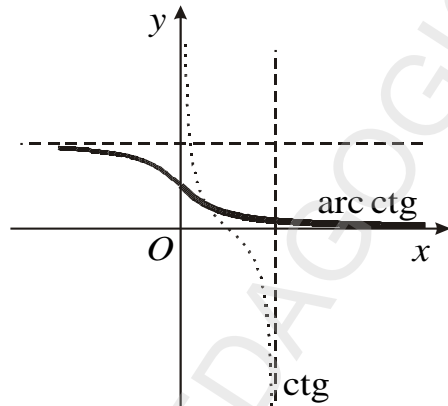


Figura 27

Funcții polinomiale

Definiții. Se numește *funcție polinomială* funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0.$$

Numărul natural n se numește *gradul funcției polinomiale* și se notează $\text{gr } f = n$.

Numerele a_i se numesc *coeficienții funcției*, $a_n x^n$ se numește *termenul dominant*, a_n *coeficientul dominant*, iar a_0 *termenul liber*.

Observații. 1. Funcțiile sumă și produs a două funcții polinomiale sunt funcții polinomiale, deoarece se obțin din adunarea și înmulțirea termenilor de forma $a_i x^i$ și $b_j x^j$.

2. Dacă $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții polinomiale, atunci $\text{gr}(f + g) \leq \max(\text{gr } f, \text{gr } g)$ (termenii dominanți se reduc, dacă coeficienții dominanți sunt numere reale opuse) și $\text{gr}(f \cdot g) = \text{gr } f + \text{gr } g$.

În prezentul paragraf vom reaminti mai detaliat funcțiile polinomiale studiate în clasele anterioare, adică cele de gradul 0, 1 respectiv 2, urmând ca în capitolele ulterioare să le putem studia și pe cele de grad mai mare cu mijloacele analizei matematice.

Funcția polinomială de grad 0 este de fapt funcția constantă cu graficul o dreaptă paralelă cu axa Ox . (Fig.28)

Funcția polinomială de grad 1 este de forma $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Știm din clasele anterioare că pentru $a < 0$ funcția este strict descrescătoare, este pozitivă pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ și

negativă pe $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$, iar pentru $a > 0$ este strict crescătoare, negativă pe intervalul

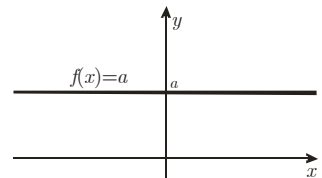


Figura 28.

$\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ și pozitivă pe $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$. $x = -\frac{b}{a}$ este rădăcina funcției în ambele cazuri. Graficul funcției este o dreaptă. (Fig. 29 și 30)

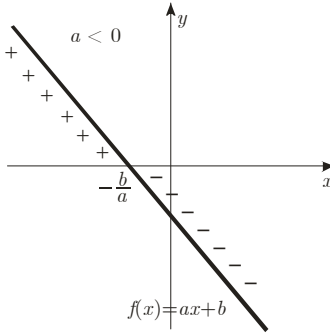


Figura 29

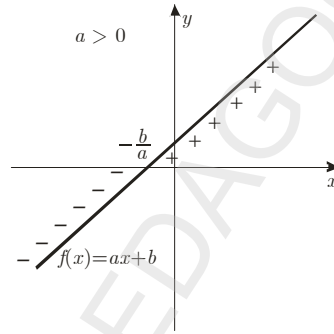


Figura 30

Funcția polinomială de gradul doi este de forma

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Graficul funcției este o parabolă concavă pentru $a < 0$ și convexă pentru $a > 0$.

Dacă discriminantul $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, atunci parabola intersectează axa Ox în două puncte distincte $\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$ și $\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$. Dacă $\Delta = 0$, parabola este tangentă la axa Ox în punctul $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$. Dacă $\Delta < 0$ atunci parabola nu intersectează axa Ox .

Pentru $a < 0$ funcția este strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ și strict descrescătoare pe $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. Pentru $a > 0$ este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ și strict crescătoare pe $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. Dreapta $x = -\frac{b}{2a}$ este axă de simetrie a parabilei.

Vârful parabolei este punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, care este punct de minim al funcției pentru $a > 0$, respectiv punct de maxim pentru $a < 0$.

Semnul funcției pentru $\Delta < 0$ este același cu semnul lui a pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Dacă $\Delta = 0$, atunci pentru $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ funcția ia valoarea 0, iar în celelalte numere reale are același semn cu semnul lui a .

Dacă $\Delta > 0$, atunci în $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ia valoarea 0, între rădăcini are semnul opus lui a , iar în afara rădăcinilor are același semn cu semnul lui a .



Observație. Se poate demonstra că punctele graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ sunt la aceeași distanță de punctul $F\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta+1}{4a}\right)$ și dreapta $y = -\frac{\Delta-1}{4a}$. Punctul F se numește focarul parabolei, iar dreapta $y = -\frac{\Delta-1}{4a}$ se numește dreapta directoare a parabolei.

Proprietățile funcției de gradul doi, respectiv graficele, sunt schițate pentru fiecare caz în parte în următorul tabel:

	$\Delta < 0$ ($x_{1,2} \notin \mathbb{R}$)	$\Delta = 0$ ($x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$)	$\Delta > 0$ $x_{1,2} \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$			
$a < 0$						
	x	$-\frac{b}{2a}$	x	$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$	x	$x_1 \quad -\frac{b}{2a} \quad x_2$
	$f(x)$	-----	$f(x)$	--- 0 ---	$f(x)$	-- 0+ + + 0 --
$a > 0$						
	x	$-\frac{b}{2a}$	x	$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$	x	$x_1 \quad -\frac{b}{2a} \quad x_2$
	$f(x)$	++++	$f(x)$	++ 0 ++	$f(x)$	++ 0 - -Delta/4a - 0 +

În următoarele figuri sunt schițate graficele unor funcții polinomiale de grad mai mare.

Figura 31

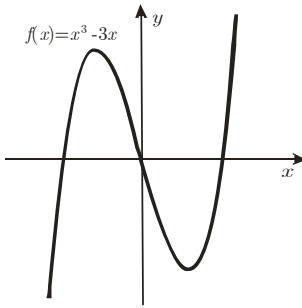


Figura 32

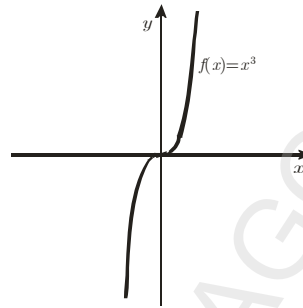


Figura 33

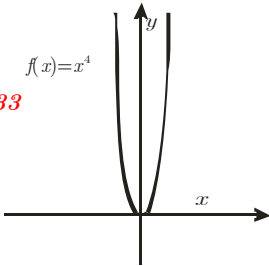
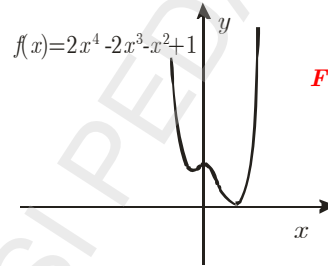


Figura 34



Știm din clasele anterioare că dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sunt rădăcinile funcției de gradul doi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$), atunci funcția se poate scrie în forma $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, iar dacă în plus $x_1 = x_2$, atunci spunem că x_1 este rădăcină dublă și $f(x) = a(x - x_1)^2$. De asemenea, pentru funcția de gradul întâi $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$), avem $g(x) = a\left(x + \frac{b}{a}\right) = a(x - x_1)$, unde $x_1 = -\frac{b}{a}$ este rădăcina funcției.



Să studiem dacă avem asemenea proprietăți și pentru funcțiile polinomiale de grad mai mare.

Dacă $x_1 \in \mathbb{R}$ este rădăcina funcției, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, atunci avem $f(x_1) = 0$, deci

$$f(x) = f(x) - f(x_1) = a_n(x^n - x_1^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \dots + a_1(x - x_1) = a_n(x - x_1)(x^{n-1} + x_1 x^{n-2} + \dots + x_1^{n-1}) + a_{n-1}(x - x_1)(x^{n-2} + x_1 x^{n-3} + \dots + x_1^{n-2}) + \dots + a_1(x - x_1) = (x - x_1)g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

unde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție polinomială de grad $n - 1$. Reciproc, dacă funcția polinomială f se poate scrie sub forma $f(x) = (x - x_1)g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ cu g funcție polinomială, atunci x_1 evident este rădăcina lui f . Deci putem afirma următoarea teoremă:

Teoremă. $x_1 \in \mathbb{R}$ este rădăcina funcției polinomiale f de grad n , dacă există funcția polinomială g de grad $n - 1$ astfel încât $f(x) = (x - x_1)g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Observații. 1. Teorema precedentă este de fapt Teorema lui Bézout (care se referă la polinoame) în formă funcțională.

2. O funcție polinomială de grad n nu poate avea mai mult de n rădăcini.

3. Dacă funcția polinomială $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ are n rădăcini distincte (x_1, x_2, \dots, x_n) , atunci se poate scrie sub forma:

$$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

4. Dacă x_1 este rădăcină a funcției polinomiale f , $f(x) = (x - x_1)g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și este și rădăcină a funcției polinomiale g , $g(x) = (x - x_1)h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, dar nu este rădăcină a funcției polinomiale h , spunem că x_1 este rădăcină dublă a lui f . În cazul acesta f se scrie: $f(x) = (x - x_1)^2 h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

5. Analog se poate defini rădăcina multiplă. Spunem că x_1 este rădăcină *multiplă de ordin k* a funcției polinomiale f de grad n , dacă există funcția polinomială g de grad $n - k$ astfel încât $f(x) = (x - x_1)^k g(x)$ și $g(x_1) \neq 0$. k se numește *ordinul de multiplicitate* a rădăcinii x_1 .

6. Dacă $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ sunt rădăcini multiplu de ordin $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, atunci $f(x) = a_n (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_k)^{n_k}$.

Problemă rezolvată

Să se determine rădăcinile funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$ și apoi să se studieze monotonia și semnul funcției.

Rezolvare. Fie funcțiile $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 5x^2 - 3x - 2$ și $h(x) = x^2$; atunci $f = g \circ h$. Rădăcinile funcției g sunt $y_1 = 1$ și $y_2 = -\frac{2}{5}$. Deci pentru calculul

rădăcinilor funcției f avem $h(x) = x^2 \in \left\{1, -\frac{2}{5}\right\}$, de unde rădăcinile funcției f sunt

$x_{1,2} = \pm 1$ (h nu poate lua valoarea $-\frac{2}{5}$).

Tabelele de variație ale funcțiilor g și h sunt:

x	$-\infty$	-1	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	1	$+\infty$						
$h(x)$	$+\infty$	\searrow	1	\searrow	$\frac{3}{10}$	\searrow	0	\nearrow	$\frac{3}{10}$	\nearrow	1	\nearrow	$+\infty$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{3}{10}$	1	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	0	-2	$-\frac{49}{10}$	0	$+\infty$
	+++++		-----		+++++	

Considerăm restricțiile funcțiilor h și g funcțiile $h_1 : \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{10}}\right] \rightarrow \left[\frac{3}{10}, +\infty\right)$

descrescătoare, $h_2 : \left[-\sqrt{\frac{3}{10}}, 0\right] \rightarrow \left[0, \frac{3}{10}\right]$ descrescătoare, $h_3 : \left[0, \sqrt{\frac{3}{10}}\right] \rightarrow \left[0, \frac{3}{10}\right]$

crescătoare, $h_4 : \left[\sqrt{\frac{3}{10}}, +\infty\right) \rightarrow \left[\frac{3}{10}, +\infty\right)$ crescătoare, $g_1 : \left[0, \frac{3}{10}\right] \rightarrow \mathbb{R}$

descrescătoare, $g_2 : \left[\frac{3}{10}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$ crescătoare. Astfel

$$f = \begin{cases} g_2 \circ h_1 & \text{pe } \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{10}}\right] \\ g_1 \circ h_2 & \text{pe } \left[-\sqrt{\frac{3}{10}}, 0\right] \\ g_1 \circ h_3 & \text{pe } \left[0, \sqrt{\frac{3}{10}}\right] \\ g_2 \circ h_4 & \text{pe } \left[\sqrt{\frac{3}{10}}, +\infty\right) \end{cases}$$

din proprietatea compunerii funcțiilor monotone, avem f descrescătoare pe

$\left(-\infty, \sqrt{\frac{3}{10}}\right]$ și $\left[0, \sqrt{\frac{3}{10}}\right]$, iar crescătoare pe intervalele $\left[-\sqrt{\frac{3}{10}}, 0\right]$ și $\left[\sqrt{\frac{3}{10}}, +\infty\right)$.

Pentru studiul semnului funcției f trebuie să studiem semnul lui g doar pe mulțimea $[0, \infty)$, deoarece h ia numai valori pozitive. Deci dacă $h(x) \in (0, 1)$, adică pe $(-1, 1)$ $f(x) < 0$ și pe $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ $f(x) > 0$.

Aceasta nu este cea mai simplă cale a studiului monotoniei și semnului funcției; mai târziu le vom putea studia cu mijloacele analizei matematice.

Exerciții și probleme

1. Studiați care din următoarele funcții sunt pare sau impare (D este domeniul maxim de definiție):

- a)** $f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{x^2}{x^4 - 1}$; **b)** $f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}$;
c) $f_3 : D \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = x^2 + \sin x$; **d)** $f_4 : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = x^5 + x^3$.



2. Studiați periodicitatea funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{3x\};$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ (funcția Dirichlet).

3. Demonstrați că dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface egalitatea

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

atunci f este periodică.

4. Demonstrați că dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ satisface egalitatea

$$f(x+2) = \frac{1}{1-f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

atunci f este periodică.

5. Studiați monotonia următoarelor funcții:

a) $f: (-\infty, -1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1+x^2};$

b) $g: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1};$

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1.$

6. Demonstrați că dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+ (a_0 \neq 0)$, atunci funcția $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

este crescătoare. Dați exemplul de funcție $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, care nu este monotonă pe \mathbb{R}_+ .

7. Stabiliți dacă este adevărată afirmația:

Rădăcinile ecuației $x^2 + bx + c = 0$ sunt în intervalul $(-1, 1)$ dacă și numai dacă $1 + b + c > 0, 1 - b + c > 0$ și $|c| < 1$.

8. Trasați graficul următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \max\{x, x^2\};$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \min\{x, x^2\}.$

9. Considerăm graficele familiei de funcții $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_m(x) = x^2 + 2mx + m$ ($m \in \mathbb{R}$). Pentru ce valori ale lui m vârful parabolei asociate se regăsește în primul cadran? Deduceți o relație independentă de m între coordonatele vârfului.

10. Studiați injectivitatea funcției $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ n(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}), & n > 0 \end{cases}$$

11. Există funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $(f \circ f)(x) = x^2 - 2, \forall x \in \mathbb{R}?$

12. Determinați numerele $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât rădăcinile ecuațiilor $x^2 + ax + b = 0$ și $x^2 + bx + a = 0$ să fie numere raționale.

13. Există funcții injective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x^2) - f^2(x) \geq \frac{1}{4}, \forall x \in \mathbb{R}?$

II. ȘIRURI DE NUMERE REALE

Definiții. 1. O funcție $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sau $f: \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, \dots, k\} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *șir de numere reale* ($k \in \mathbb{N}^*$).

2. Dacă $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ este un șir de numere reale, atunci numerele $f(n)$ sunt *termenii șirului*, mai precis $f(n)$ este termenul de rang n (al n -lea termen). De regulă pentru termenul general vom folosi notația $a_n = f(n)$, iar cu simbolul $(a_n)_{n \geq 1}$ sau $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vom nota șirul.

Observație. Nu este necesar ca numerele a_n să fie distincte. Indicele precizează locul termenului respectiv în șir. De exemplu termenii șirului definit de funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ sunt

$$0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, \dots$$

Am studiat diferitele proprietăți ale șirurilor și în clasele anterioare. În paragraful următor vom recapitula câteva proprietăți fundamentale.

MODURI DE DEFINIRE ALE UNUI ȘIR

1. Definiția șirului prin termenul general. Cel mai simplu mod este de a defini termenul general în funcție de indicele termenului respectiv. De exemplu pentru șirul $a_n = \frac{n-1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avem $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, ..., $a_{100} = \frac{99}{100}$, ..., $a_{2002} = \frac{2001}{2002}$,

deci am obținut următorul șir: $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$

Putem folosi și notația $\left(\frac{n-1}{n} \right)_{n \geq 1}$.

2. Definiția recursivă. Dacă precizăm o metodă de calcul prin care putem calcula fiecare termen (de la un rang încolo) folosind termenii precedenți, atunci spunem că am definit șirul în mod recursiv (sau prin recurență).

Exemple

1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n \quad \forall n \geq 1$.

Această recurență determină o progresie geometrică, termenul general este $a_n = 2^{n-1}$.

2) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = 2a_n - 1$.

Primii termeni ai șirului sunt: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 3$, $a_5 = 1$, $a_6 = 5$, $a_7 = 1$, $a_8 = 9$, $a_9 = 1$, $a_{10} = 17$. Se poate observa că termenii de rang impar sunt egali cu 1 iar cei de rang par $a_{2k} = 2^{k-1} + 1$, ceea ce se demonstrează prin inducție matematică.

3) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, dacă $n \geq 3$.

Primii termeni ai șirului sunt:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13, \dots$$

Formula termenului general nu se poate observa, deși procedeul de calcul este foarte simplu. Se poate demonstra prin inducție că


$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Acest șir poartă numele de șirul lui *Fibonacci* și apare în mai multe probleme de numărare. În paragraful următor vom demonstra o teoremă care ne va permite să calculăm termenul general.

4) Dacă $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, unde $n \geq 3$, atunci primii zece termeni sunt: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

Astfel putem formula o ipoteză relativ la formula termenului general, și anume $a_n = 2n - 1$. Această formulă se poate demonstra foarte ușor folosind metoda inducției matematice.

5) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, astfel $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$ și se poate demonstra prin inducție matematică, că $a_n = 2^{n-1}$. Se poate observa că $a_{n+1} = a_n + a_n = 2a_n$, deci recurența se poate scrie mult mai simplu.

 **3.** Ca și în cazul funcțiilor putem avea o serie întreagă de alte modalități de a defini un șir. De exemplu dacă considerăm șirul format din cifrele zecimale ale numărului $\sqrt{3}$, atunci șirul este definit, dar calcularea termenului general nu este o problemă simplă. În unele cazuri demonstrarea echivalenței dintre diversele definiții ale aceluiași șir impune dificultăți de ordin tehnic. De exemplu considerăm șirul

$$a_n = \min_{x+y=1} (x^n + y^n).$$

Să demonstrăm că $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Folosind inegalitatea $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ în care egalitatea are loc pentru $x = y = \frac{1}{2}$ rezultă $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Pentru a avea o imagine intuitivă asupra comportării șirului putem reprezenta grafic termenii șirului. Astfel pentru șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ putem reprezenta:

a) punctele (n, a_n) în plan;

b) punctele de abscisă a_n pe axă.

 **Exemplu.** Să reprezentăm grafic șirul

$$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}, \dots$$

Reprezentările grafice sunt date în figura 35.



Figura 35

Exerciții și probleme rezolvate

1. Să se determine termenul general al șirului $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{3}$.

Rezolvare. Primii termeni ai șirului sunt $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{5}{9}$, $a_4 = \frac{14}{27}$,

$a_5 = \frac{41}{81}$. Se observă că $a_n = \frac{3^{n-1} + 1}{2 \cdot 3^{n-1}}$, ceea ce se demonstrează prin inducție.

Nu întotdeauna se observă așa de ușor termenul general din primii termeni. În cazul șirului de mai sus se observă că fiecare termen este „aproape” o treime a termenului precedent, deci seamănă cu o progresie geometrică. În general șirurile date de recurență de forma $a_{n+1} = a \cdot a_n + b$ ($a \neq 1$, $b \neq 0$) se pot numi și *progresii aritmetico-geometrice* și au termenul general de forma $a_n = c_1 \cdot a^n + c_2$.

Dacă nu observăm din primii termeni termenul general al șirului, o putem transforma în progresie geometrică adunând α la ambele părți ai relației de recurență devenind

$a_{n+1} + \alpha = \frac{a_n + 1}{3} + \alpha$ și exprimăm numărul α astfel ca $\frac{a_n + 1}{3} + \alpha = \frac{a_n + \alpha}{3}$, de

aici $\alpha = -\frac{1}{2}$. Deci $a_n - \frac{1}{2} = \left(a_1 - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{3^{n-1}}$, de unde $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} = \frac{3^{n-1} + 1}{2 \cdot 3^{n-1}}$.

Tot o progresie geometrică obținem dacă scădem două relații de recurență consecutive, adică $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_{n+1} - a_n}{3}$, de unde $a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1) \cdot \frac{1}{3^{n-1}}$. Adunând aceste relații pentru $1, 2, \dots, n-1$, obținem același rezultat.

O altă modalitate ar fi să înmulțim ambii membri ai relației de recurență

$a_k = \frac{a_{k-1} + 1}{3}$ cu 3^{k-1} (sau cu $\frac{1}{3^{n-k}}$) și să le adunăm pentru $k = \overline{2, n}$ membru cu

membru: $\sum_{k=2}^n 3^{k-1} a_k = \sum_{k=2}^n (3^{k-2} a_{k-1} + 3^{k-2})$, de unde $3^{n-1} a_n = a_1 + \frac{3^{n-1} - 1}{2}$ obținând rezultatul precedent.

2. Să se determine termenul general al șirului $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{3 + 4a_n}$.

Rezolvare. Se poate proceda și aici prin calculul primilor termeni, respectiv demonstrarea formulei termenului general prin inducție.

Acum să transformăm relația prin înlăturarea fracției, devenind $3a_{n+1} + 4a_n a_{n+1} = a_n$.

Din recurența inițială rezultă imediat, că toți termenii șirului sunt nenuli, deci putem

împărți ultima relație cu $a_n a_{n+1}$, obținând $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3}{a_n} + 4$, care se poate transforma în

progresia geometrică $\frac{1}{a_{n+1}} + 2 = 3 \left(\frac{1}{a_n} + 2 \right)$. De aici $\frac{1}{a_n} + 2 = 3^{n-1} \left(\frac{1}{a_1} + 2 \right)$,

rezultând că $\frac{1}{a_n} = \frac{5 \cdot 3^{n-1}}{2} - 2$, deci $a_n = \frac{2}{5 \cdot 3^{n-1} - 4}$.

3. Să se determine termenul general al șirului $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n(a_{n+2} - a_{n+1})}$.

Rezolvare. Relația de recurență este echivalentă cu $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1}$, din această relație rezultând că, dacă doi termeni consecutivi sunt strict pozitivi, atunci și următorul termen este strict pozitiv; primii doi termeni ai șirului fiind strict pozitivi rezultă că toți termenii șirului sunt strict pozitivi. Împărțind ultima relație prin $a_n a_{n+1}$,

obținem $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} + 1$, deci $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_2}{a_1} + n - 1 = n + 1$. Înmulțind relațiile

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = k \text{ pentru } k = \overline{2, n}, \text{ obținem } \frac{a_n}{a_1} = n!, \text{ deci } a_n = n!.$$

Exerciții propuse

1. Următoarele șiruri sunt date prin termenul general. Calculați primii patru termeni și reprezentați grafic acești termeni:

a) $a_n = \frac{n-5}{n+2}$;

b) $a_n = \frac{2n+1}{n^2}$;

c) $a_n = \frac{n^2-n}{n+1}$;

d) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$;

e) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$; **f)** $a_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$;

g) $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2(n+1)}$; **h)** $a_n = 1 + \sin \frac{n\pi}{2}$; **i)** $a_n = \sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4}$;

j) $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$; **k)** $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$.

2. Calculați următorii șase termeni ai șirurilor:

a) $a_1 = 2$, $a_n = 3a_{n-1}$, dacă $n \geq 2$; **b)** $a_1 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{4}$, dacă $n \geq 2$;

c) $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$, dacă $n \geq 4$;

d) $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$, $a_4 = 8$, $a_5 = 5$, $a_6 = 7$, $a_n = a_{n-6}$, dacă $n \geq 7$.

3. Determinați termenul general al următoarelor șiruri:

a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n / 5$; **b)** $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n - 2$;

c) $a_1 = -1$, $a_{n+1} = 3a_n + 4$; **d)** $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + n$;

e) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 1$; **f)** $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n^2 - 4a_n + 6$;

g) $a_1 = 3$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} \cdot a_n = a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} \cdot a_n$.

4. Determinați termenul general al următoarelor șiruri:

a) $x_0 = \frac{1}{3}$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+2x_n} \quad \forall n \geq 0$; (admitere, 1991, Timișoara)

b) $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt[3]{1+x_n^3}} \quad \forall n \geq 0$; (admitere 1993, Timișoara)

c) $x_0 = 3$, $x_1 = 4$, $x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n \quad \forall n \geq 1$;

d) $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6\sqrt{x_{n-1}}} \quad \forall n \geq 1$;

e) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_{n+2} + \frac{1}{x_n} = 2 \quad \forall n \geq 1$.

RECURENȚE LINIARE DE ORDINUL DOI

Definiție. O relație de recurență de forma $x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este o relație de recurență liniară de ordinul doi, dacă $a, b \in \mathbb{C}$ (sau $a, b \in \mathbb{R}$), $b \neq 0$.

Prima dată vom studia câteva cazuri particulare.

Problemă. Determinați termenul general al șirului definit prin relațiile $x_{n+2} = 3 \cdot x_{n+1} - 2 \cdot x_n, x_1 = 3, x_2 = 5$.

Rezolvare. Următorii termeni sunt $x_3 = 9, x_4 = 17, x_5 = 33, x_6 = 65$. Se poate observa că termenii șirului sunt mai mari cu o unitate decât puterile lui 2. Astfel putem formula ipoteza $x_n = 2^n + 1$. Această relație se poate demonstra folosind metoda inducției matematice. În continuare prezentăm o metodă care se poate generaliza. Pentru acesta regrupăm termenii recurenței în modul următor:

$$x_{n+2} - x_{n+1} = 2(x_{n+1} - x_n).$$

Astfel cu notația $y_n = x_{n+1} - x_n$ recurența se reduce la $y_{n+1} = 2y_n$, adică șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică. Din formula termenului general rezultă $y_n = y_1 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, deci $x_{n+1} - x_n = 2^n$. De aici putem determina formula termenului general pentru șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ dacă scriem această relație pe rând pentru valorile $n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$ și adunăm relațiile obținute. Astfel ajungem la egalitatea

$$x_n - x_1 = 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1},$$

de unde rezultă că $x_n = 2^n + 1$. Acest raționament are avantajul că se poate aplica pentru orice valori inițiale. Dacă x_1 și x_2 sunt numere arbitrare, atunci obținem $y_n = (x_2 - x_1)2^{n-1}$ și astfel $x_n - x_1 = (x_2 - x_1)(2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-4} + \dots + 2 + 1)$, de unde $x_n = (2x_1 - x_2) + (x_2 - x_1)2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Să studiem ce relație trebuie să existe între r_1, r_2 și a, b pentru ca o relație de recurență de forma $x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n$ să se transforme prin schimbarea $y_n = x_{n+1} - r_1 \cdot x_n$ într-o recurență de forma $y_{n+1} = r_2 \cdot y_n$. Dacă înlocuim în relația $y_{n+1} = r_2 \cdot y_n$ expresia $y_n = x_{n+1} - r_1 \cdot x_n$, obținem $x_{n+2} - r_1 \cdot x_{n+1} = r_2 \cdot (x_{n+1} - r_1 \cdot x_n)$. De aici $x_{n+2} = (r_1 + r_2)x_{n+1} - r_1 r_2 \cdot x_n$, deci r_1 și r_2 sunt soluțiile sistemului algebric $\begin{cases} r_1 + r_2 = a \\ r_1 \cdot r_2 = -b \end{cases}$. Pe de altă parte soluțiile acestui sistem sunt rădăcinile ecuației de gradul doi $r^2 - a \cdot r - b = 0$, deci putem obține numerele r_1, r_2 pur și simplu rezolvând ecuația precedentă. Astfel obținem $x_n - r_1 x_{n-1} = (x_2 - r_1 x_1) \cdot r_2^{n-2}$, și dacă scriem această relație pentru $n, n - 1, n - 2, \dots, 2$, le înmulțim pe rând cu numerele $1, r_1, r_1^2, \dots, r_1^{n-1}$ și le adunăm membru cu membru, atunci obținem $x_n - r_1^{n-1} x_1 = (x_2 - r_1 \cdot x_1) \left(\sum_{k=0}^{n-2} r_1^k \cdot r_2^{n-2-k} \right)$ după cum se vede din următoarea schemă:

$$\begin{aligned} x_n - r_1 x_{n-1} &= (x_2 - r_1 x_1) \cdot r_2^{n-2} \\ x_{n-1} - r_1 x_{n-2} &= (x_2 - r_1 x_1) \cdot r_2^{n-3} \\ x_{n-2} - r_1 x_{n-3} &= (x_2 - r_1 x_1) \cdot r_2^{n-4} \\ &\dots\dots\dots \\ x_2 - r_1 x_1 &= (x_2 - r_1 x_1) \cdot r_2^0 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot r_1 \\ \cdot r_1^2 \\ \dots\dots\dots \\ \cdot r_1^{n-2} \end{array} \right. +$$

$$x_n - r_1^{n-1} x_1 = (x_2 - r_1 \cdot x_1) \left(\sum_{k=0}^{n-2} r_1^k \cdot r_2^{n-2-k} \right)$$

Dacă $r_1 \neq r_2$, atunci $r_1^{n-1} - r_2^{n-1} = (r_1 - r_2) \left(\sum_{k=0}^{n-2} r_1^{n-2-k} r_2^k \right)$, deci $x_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n$, unde

$$c_1 = \frac{x_2 - r_2 x_1}{r_1 (r_1 - r_2)} \text{ și } c_2 = \frac{x_2 - r_1 x_1}{r_2 (r_2 - r_1)} \text{ (evident } r_{1,2} \neq 0 \text{ deoarece } b \neq 0 \text{)..}$$

Dacă $r_1 = r_2 = r$, atunci $\sum_{k=0}^{n-2} r_1^{n-2-k} r_2^k = (n-1)r^{n-2}$, deci $x_n = (k_1 + k_2 \cdot n) \cdot r^n$, unde $k_1 = \frac{2rx_1 - x_2}{r^2}$

și $k_2 = \frac{x_2 - rx_1}{r^2}$ (evident $r \neq 0$ deoarece $b \neq 0$).

În cazul în care coeficienții sunt numere reale dar rădăcinile nu sunt reale, atunci cele două rădăcini complexe sunt conjugate. Folosind forma trigonometrică avem $r_{1,2} = \rho(\cos \varphi \pm i \cdot \sin \varphi)$, și astfel

rezultă $x_n = \rho^n (k_1 \cdot \cos n\varphi + k_2 \cdot \sin n\varphi)$, unde $k_1 = \frac{2\rho x_1 \cos \varphi - x_2}{\rho^2}$ și $k_2 = \frac{x_2 \cos \varphi - x_1 \rho^2 \cos 2\varphi}{\rho^2 \cos \varphi}$.

Pe baza acestor cazuri putem enunța următoarea teoremă:

Teoremă. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin recurența $x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$b \neq 0$ și ecuația caracteristică $r^2 - a \cdot r - b = 0$.

1. Dacă rădăcinile ecuației caracteristice sunt $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$, atunci termenul general al șirului de forma $x_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n$, c_1 și c_2 constante.

2. Dacă rădăcinile ecuației caracteristice sunt numerele $r_1 = r_2 = r$, atunci termenul general al șirului are forma $x_n = (k_1 + k_2 \cdot n) \cdot r^n$, k_1 și k_2 constante.

3. Dacă rădăcinile ecuației caracteristice sunt $r_1 = \bar{r}_2 \notin \mathbb{R}$, atunci termenul general al șirului este de forma $x_n = \rho^n (k_1 \cdot \cos n\varphi + k_2 \cdot \sin n\varphi)$, unde φ și ρ sunt argumentul respectiv modulul rădăcinilor, k_1 și k_2 constante.

Constantele se pot determina în fiecare caz din valorile inițiale x_1 și x_2 .

Observație. Primele două cazuri sunt valabile și pentru $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ cu rădăcinile ecuației caracteristice nu neapărat reale.

Probleme rezolvate

1. În cazul șirului lui Fibonacci (pag. 32) ecuația caracteristică este $x^2 - x - 1 = 0$, deci rădăcinile sunt $r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ și astfel din relațiile $\begin{cases} c_1 r_1 + c_2 r_2 = 1 \\ c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 = 1 \end{cases}$ determinăm constantele c_1 și c_2 . În final obținem formula de la pagina 32.

2. Să se determine termenul general al șirului, $x_{n+1} x_n = 5x_n x_{n+2} + 6x_{n+1} x_{n+2}$,

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{41}.$$

Rezolvare. Din relația de recurență reiese că primii termeni fiind strict pozitivi, toți

termenii șirului sunt strict pozitivi. Putem împărți ambii membri ai relației cu $x_n x_{n+1} x_{n+2}$, obținând $\frac{1}{x_{n+2}} = \frac{5}{x_{n+1}} + \frac{6}{x_n}$, acesta fiind o recurență liniară de ordinul

doi pentru șirul $(y_n)_{n \geq 1}$, $y_n = \frac{1}{x_n}$ cu ecuația caracteristică $x^2 - 5x - 6 = 0$.

Rădăcinile ecuației sunt $r_1 = -1$ și $r_2 = 6$, deci șirul are termenul general de forma $y_n = c_1 (-1)^n + c_2 \cdot 6^n$.

Rezolvând sistemul $\begin{cases} -c_1 + 6c_2 = 1 \\ c_1 + 36c_2 = 41 \end{cases}$, obținem $c_1 = -5$ și $c_2 = 1$, deci

$$y_n = 5 \cdot (-1)^{n-1} + 6^n \text{ și } x_n = \frac{1}{5 \cdot (-1)^{n-1} + 6^n}.$$

Exerciții și probleme

1. Determinați termenul general al șirurilor:

a) $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{13}{5}$; **b)** $6x_{n+2} = 5x_{n+1} - x_n$, $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{5}{36}$;

c) $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$, $x_1 = 6$, $x_2 = 20$; **d)** $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$;

e) $\frac{5}{x_n} = \frac{3}{x_{n+1}} + \frac{2}{x_{n-1}}$, $x_1 = 5$, $x_2 = 11$; **f)** $x_{n+1}x_n = 3x_n x_{n+2} - 2x_{n+1}x_{n+2}$.

2. Arătați că dacă termenii șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ verifică relația $x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $x_{n+1}^2 - a \cdot x_{n+1} \cdot x_n - b \cdot x_n^2 = (-1)^{n+1} b^{n-1} (x_2^2 - ax_2x_1 - bx_1^2)$.

3. Demonstrați că există o infinitate de numere întregi x_1 astfel încât toți termenii șirului $x_{n+1} = 2x_n \pm \sqrt{3x_n^2 + 1}$ sunt numere întregi, unde semnul se alege arbitrar pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$. (Concursul Radó Ferenc, 2002)

ȘIRURI MĂRGINITE

Definiție. Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este *mărginit* dacă mulțimea T formată din termenii șirului este mărginită. Dacă T este mărginită superior, atunci șirul este *mărginit superior*, iar în cazul în care T este mărginită inferior, atunci spunem că șirul este *mărginit inferior*.

Folosind definiția mărginirii obținem

1. Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit dacă există numărul pozitiv M astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ să avem $|a_n| \leq M$.

2. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit inferior dacă există un număr real M cu proprietatea $a_n \geq M$, oricare ar fi $n \geq 1$.

3. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit superior dacă există un număr real M cu proprietatea $a_n \leq M$, oricare ar fi $n \geq 1$.



Din aceste definiții rezultă că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit dacă și numai dacă este mărginit superior și mărginit inferior.

Dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ nu este mărginit, atunci pentru orice număr pozitiv M există cel puțin un termen a_k cu proprietatea $|a_k| > M$.

Exercițiu. Formulați următoarele două proprietăți folosind inegalități:

a) șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ nu este mărginit superior; **b)** șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ nu este mărginit inferior.

Exerciții rezolvate

Să studiem mărginirea următoarelor șiruri:

1. Șirul cu termenul general $a_n = \frac{2n+3}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este mărginit, deoarece

$$0 < a_n = \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1} < 2+1 = 3, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Șirul $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este mărginit deoarece 0 este un

minorant și 2 este un majorant: $a_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$, deci $0 < a_n < 2$,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. Șirul $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este mărginit, un minorant fiind 1 și un majorant fiind 2. Într-adevăr inegalitatea $1 < a_n$ este evidentă din definiția șirului. Demonstrăm $a_n < 2$.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

4. Șirul $a_n = \frac{\sin 1}{n} + \frac{\sin 2}{n} + \dots + \frac{\sin n}{n}$ este mărginit deoarece $-1 \leq a_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5. Șirul $a_n = (-1)^n \frac{n^2+2}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}^*$ nu este mărginit. Într-adevăr pentru $n \geq 3$ are loc

inegalitatea $|a_n| > \frac{n^2+2}{n+n} = \frac{n}{2} + \frac{1}{n} > \frac{n}{2}$, deci oricum am fixa numărul real M există

numărul natural $n > 2M$, și astfel $|a_n| > M$.

6. Să se studieze mărginirea șirului $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Termenii șirului sunt numere pozitive, deci șirul este mărginit inferior. Demonstrăm că 2 este un majorant. Este clar că $a_1 < 2$. Pe de altă parte dacă $a_n < 2$, atunci $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2$, deci pe baza principiului inducției matematice rezultă

$$a_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

7. Să se studieze mărginirea șirului $(n \sin n)_{n \geq 1}$.

Știm că $\sin n$ este între -1 și 1 , dar s-ar putea întâmpla ca pentru n oricât de mare $\sin n$ să fie atât de mic încât produsul $n \sin n$ să fie mărginit de un număr M . Pe de altă parte dacă reușim să arătăm că există $x_0 > 0$ astfel încât

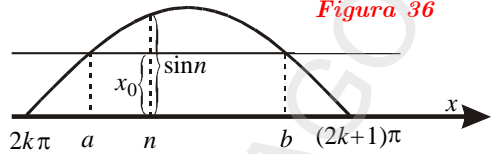


Figura 36

oricum am fixa numărul $N > 0$ găsim un $n_0 > N$ cu proprietatea $\sin n_0 > x_0$, atunci rezultă că șirul studiat nu este mărginit deoarece $n_0 \sin n_0 > n_0 x_0 > N x_0$, și N poate fi arbitrar de mare.

Considerăm graficul funcției sinus pe intervalul $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. Dacă alegem $x_0 \in (0, 1)$ astfel încât lungimea intervalului $[a, b]$ să fie mai mare decât 1, atunci în intervalul (a, b) există cel puțin un număr natural. Valoarea funcției în

acest număr natural este mai mare decât x_0 . Intervalul $\left(2k\pi + \frac{\pi}{6}, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

satisface această condiție deoarece lungimea intervalului este $\frac{2\pi}{3} > 1$ și x_0 este

$$\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

În consecință șirul studiat nu este mărginit.

ȘIRURI MONOTONE

Definiții. Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este *crescător* (*descrescător*) dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea $a_n \leq a_{n+1}$ (respectiv $a_n \geq a_{n+1}$).

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este *strict crescător* (*strict descrescător*) dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea $a_n < a_{n+1}$ (respectiv $a_n > a_{n+1}$).

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este *monoton*, dacă este crescător sau descrescător.

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este *strict monoton*, dacă este strict crescător sau strict descrescător.

Observație. Dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict monoton, atunci este monoton.

Exemple. 1. Să se studieze monotonia șirului $3, 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{n+2}{n}, \dots$

Examinând primii termeni, rezultă că dacă șirul este monoton, atunci poate fi numai

descrescător. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $a_n - a_{n+1} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)} > 0$,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Astfel șirul este strict descrescător.

2. Să se studieze monotonia șirului $b_n = \frac{n^3 + 1}{n + 2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.



$b_1 = \frac{2}{3}$, $b_2 = \frac{9}{4}$, $b_3 = \frac{28}{5}$, deci încercăm să demonstrăm că șirul este crescător.

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $b_n = \frac{n^3 + 1}{n + 2} < \frac{(n + 1)^3 + 1}{(n + 1) + 2} = b_{n+1}$, deoarece

$$(n^3 + 1)(n + 3) = n^4 + 3n^3 + n + 3,$$

$$((n + 1)^3 + 1)(n + 2) = n^4 + 5n^3 + 9n^2 + 8n + 4,$$

și $n^4 + 5n^3 + 9n^2 + 8n + 4 > n^4 + 3n^3 + n + 3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Șirul cu termenul general $a_n = (-1)^n$ nu este monoton deoarece $a_1 < a_2 > a_3$.

4. Să se studieze monotonia șirului $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Din egalitățile $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2}$ și $a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} > \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_2$ rezultă că șirul nu poate fi descrescător. Pe de altă parte, dacă primii n termeni sunt în ordine crescătoare, atunci din relația $a_{n-1} < a_n$ rezultă $\sqrt{2 + a_{n-1}} < \sqrt{2 + a_n}$, deci pe baza relației de recurență $a_n < a_{n+1}$. Pe baza principiului inducției matematice șirul este crescător.

Observație. În cazul șirurilor cu termeni pozitivi raportul $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ este subunitar

(supraunitar) pentru orice $n \geq 1$ dacă și numai dacă șirul este descrescător (crescător). De exemplu dacă $a_n = \frac{2^n}{n!}$, atunci $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} < 1$, deci șirul este descrescător.

Exerciții și probleme

1. Studiați monotonia și mărginirea următoarelor șiruri ($n \in \mathbb{N}^*$):

a) $a_n = \frac{1}{n}$;

b) $a_n = \frac{n-3}{n^2+1}$;

c) $a_n = \frac{3n-1}{6n+5}$;

d) $a_n = \cos n \frac{\pi}{4}$;

e) $a_n = n^2 \sin n \frac{\pi}{2}$;

f) $a_n = \frac{1}{1 + n^2 \sin^2 \frac{n\pi}{2}}$.

2. Studiați monotonia și mărginirea următoarelor șiruri recurente:

a) $a_1 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$; **b)** $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{2 + a_n}$; **c)** $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{4}$;

d) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}$; **e)** $a_1 = 10$, $a_{n+1} = a_n^2 - 10a_n + 30$.

3. Studiați mărginirea următoarelor șiruri $(a_n)_{n \geq 1}$:

a) $a_n = \frac{1}{n+1}$;

b) $a_n = 2n^2 + 3$;

c) $a_n = \frac{-7n^2 + 1}{n}$;

d) $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}$;

e) $a_n = \cos \frac{n\pi}{5} + \sin \frac{n\pi}{5}$;

f) $a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2 + 2^2 + \dots + 2^n}$;

g) $a_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{3n^2 + 5n}$

h) $a_n = \frac{3^n + 4^n}{5^n}$;

i) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

4. Stabiliți monotonia următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{n^2}{n+2}$; b) $a_n = \frac{n+1}{3^n}$; c) $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$; d) $a_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{2n}}$;

e) $a_n = \frac{\sum_{k=1}^n k(k+1)}{\sum_{k=1}^n k^3}$; f) $a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$; g) $a_n = \frac{(-1)^n \cdot 5^n}{(n+1)!}$; h) $a_n = \frac{4 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 4n}{5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n+1)}$.

5. Fie a_1, a_2, a_3, a_4 și a_5 cinci numere reale. Demonstrați că putem șterge două dintre acestea astfel încât cele care rămân să formeze un șir finit monoton.

ȘIRURI CONVERGENTE

Vecinătăți ale unui număr real

Definiție. Mulțimea V se numește vecinătate a punctului x , dacă există un interval $(a, b) \subseteq V$ astfel încât $a < x < b$. Mulțimea tuturor vecinătăților ale punctului x o notăm cu $V(x)$.

Observații. 1. Orice număr real x are o infinitate de vecinătăți.

2. Dacă $\varepsilon > 0$, atunci intervalul $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ se numește vecinătatea de rază ε a numărului a . Aceste vecinătăți se numesc vecinătăți simetrice ale punctului a .

3. În orice vecinătate a punctului x există o vecinătate simetrică și orice vecinătate a punctului x poate fi inclusă într-o vecinătate simetrică.

Exemple. 1) Intervalul $(-1, 5)$ este o vecinătate a punctului 0.

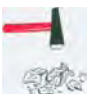
2) Intervalul $(-7, 11)$ este o vecinătate simetrică a numărului 2 (raza fiind 9).

Problemă rezolvată

a) Să se arate că toți termenii șirului $a_n = \frac{1}{2n^2}$, $n \geq 1$ sunt în vecinătatea simetrică de lungime 2 a originii.

b) Să se arate că termenii șirului $a_n = \frac{2}{n^3}$, $n \geq 1$, exceptând doi termeni, sunt în vecinătatea simetrică de lungime $\frac{1}{3}$ a punctului 0.

c) Să se determine raza celei mai mici vecinătăți simetrice a originii care



conține toți termenii șirului $x_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ cu indice mai mare decât 100.

Rezolvare. a) Vecinătatea simetrică de lungime 2 a originii este intervalul $(-1, 1)$.

Cum $-1 < \frac{1}{2n^2} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, toți termenii șirului sunt în această vecinătate.

b) Vecinătatea simetrică de lungime $\frac{1}{3}$ este intervalul $\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$. Inegalitățile

$-\frac{1}{6} < \frac{2}{n^3} < \frac{1}{6}, \forall n \geq 3$ implică faptul că toți termenii șirului cu indice mai mare

decât 2 sunt în această vecinătate. În același timp $a_1 = 2 > \frac{1}{6}$ și $a_2 = \frac{1}{4} > \frac{1}{6}$, deci acești termeni nu sunt în vecinătatea considerată.

c) Vecinătățile simetrice ale originii sunt intervalele de forma $(-\varepsilon, \varepsilon)$, deci pentru ca

termenii șirului să fie în această vecinătate este necesar ca $-\varepsilon < \frac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon$ pentru

orice $n \geq 101$. Astfel $(n+1)^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, adică inegalitatea $n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} - 1$ trebuie să fie

verificată pentru $n \geq 101$. Astfel obținem $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 < 101$, deci intervalul căutat este

$$\left(-\frac{1}{101^2}, \frac{1}{101^2}\right).$$

Folosind un raționament analog putem demonstra că orice vecinătate a punctului 0 conține cel puțin un termen al șirului și că nu există alt punct cu această proprietate. Pe de altă parte dacă considerăm mulțimea $A = [0, 1)$, atunci fiecare punct x al acestei mulțimii A are următoarea proprietate: orice vecinătate a punctului x conține cel puțin un punct al mulțimii $A \setminus \{x\}$. Pentru a descrie mai ușor asemenea situații introducem următoarele noțiuni:

DEFINIȚII. 1. Punctul $a \in \mathbb{R}$ este un *punct de acumulare* pentru mulțimea $A \subseteq \mathbb{R}$, dacă orice vecinătate a punctului a conține cel puțin un element al mulțimii A , diferit de a ($\forall V \in \mathcal{V}(a) : V \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$).

2. Punctul $a \in A$ este un *punct izolat* al mulțimii $A \subseteq \mathbb{R}$, dacă există o vecinătate a punctului a care nu intersectează mulțimea $A \setminus \{a\}$ (deci dacă punctul a nu este punct de acumulare) ($\exists V \in \mathcal{V}(a) : V \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset$).

Închiderea mulțimii numerelor reale

DEFINIȚII. Pentru o tratare mai unitară introducem mulțimea $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Vom spune că punctul ∞ are vecinătăți de forma (a, ∞) , iar punctul $-\infty$ are vecinătăți de forma $(-\infty, a)$. Mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$ se numește *închiderea mulțimii numerelor reale*.

Limita unui șir, șiruri convergente

Definiție. Numărul $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este *limita șirului* $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă în afara oricărei vecinătăți a punctului a șirul are cel mult un număr finit de termeni.



Notăție. Prin simbolul $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ înțelegem că limita șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ este a ; mai putem citi și sub forma: „ a_n tinde la a ” sau „ a_n tinde la a când n tinde la infinit”. Se mai poate folosi și notația $a_n \rightarrow a$.

Deoarece orice vecinătate a punctului $a \in \mathbb{R}$ poate fi inclusă într-o vecinătate simetrică și în același timp orice vecinătate conține o vecinătate simetrică, în definiția anterioară este suficient să considerăm vecinătăți simetrice. Pe de altă parte numărul a_n este în vecinătatea de rază ε a punctului a dacă și numai dacă are loc inegalitatea $|a_n - a| < \varepsilon$. Dacă în afara acestei vecinătăți V șirul are numai un număr finit de termeni, atunci de la un rang încolo toți termenii șirului sunt în vecinătatea V , deci notând cu $n(\varepsilon)$ maximul indicilor termenilor din afara vecinătății putem scrie că $|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > n(\varepsilon) (n \in \mathbb{N}^*)$. Astfel definiția anterioară este echivalentă cu următoarea caracterizare:

Criteriul de convergență cu ε . Numărul $a \in \mathbb{R}$ este limita șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul natural $n(\varepsilon)$ astfel încât:

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > n(\varepsilon) (n \in \mathbb{N}^*).$$



Exemple. 1) Pentru șirul $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} n \geq 1$ și $\forall \varepsilon > 0$ are loc inegalitatea



$|a_n - 0| < \varepsilon$, dacă $n \geq \left\lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \right\rceil$, deci limita șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ este 0.

2) Calculând termenii șirului $a_n = \frac{2n^2 + (-1)^n \cdot n}{n^2 + 1}$ obținem $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 2, a_3 = \frac{3}{2}, a_4 = \frac{40}{17}, a_5 = \frac{45}{26}, a_6 = \frac{78}{37} = 2 \frac{4}{37}, a_7 = \frac{90}{50} = 1 \frac{41}{50}$. Astfel termenii cu indice par sunt mai mari decât 2, și termenii cu indice impar sunt mai mici decât 2. Mai mult se poate observa că distanța față de 2 este din ce în ce mai mică. Din acest motiv încercăm să arătăm că limita șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ este 2. Avem următoarele echivalențe:

$$a_n \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) \Leftrightarrow |a_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{(-1)^n \cdot n - 2}{n^2 + 1} \right| < \varepsilon \quad (1)$$

Dacă n este par atunci (1) este echivalentă cu $\frac{n-2}{n^2+1} < \varepsilon$, iar dacă n este impar,

atunci cu inegalitatea $\frac{n+2}{n^2+1} < \varepsilon$. Mulțimea soluțiilor primei inegalități este

$$\left(\left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{-4\varepsilon^2 - 8\varepsilon + 1}}{2\varepsilon} \right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{-4\varepsilon^2 - 8\varepsilon + 1}}{2\varepsilon}, \infty \right) \right) \cap \mathbb{N},$$

iar mulțimea soluțiilor celei de a doua inegalități este

$$\left(\left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{-4\varepsilon^2 + 8\varepsilon + 1}}{2\varepsilon} \right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{-4\varepsilon^2 + 8\varepsilon + 1}}{2\varepsilon}, \infty \right) \right) \cap \mathbb{N}.$$

Dacă una din expresiile de sub radical este negativă, atunci inegalitatea corespunzătoare are loc pentru orice număr natural. Astfel pentru numărul (expresiile inexistente nu se iau în considerare)

$$n(\varepsilon) = \max \left\{ \frac{1 + \sqrt{-4\varepsilon^2 - 8\varepsilon + 1}}{2\varepsilon}, \frac{1 + \sqrt{-4\varepsilon^2 + 8\varepsilon + 1}}{2\varepsilon}, 0 \right\},$$

are loc inegalitatea $|a_n - 2| < \varepsilon$, $\forall n \geq n(\varepsilon)$. În consecință limita șirului este 2.

DEFINIȚIE. Șirurile care au limită finită se numesc *șiruri convergente*, iar șirurile care nu au limită finită sau nu au limită se numesc *șiruri divergente*.

Observații. 1. Numărul $n(\varepsilon)$ din definiție se numește număr de prag. Numărul de prag nu este determinat în mod unic, deoarece dacă $n(\varepsilon)$ este număr de prag, atunci orice număr mai mare decât $n(\varepsilon)$ este un număr de prag. În general nu se determină cel mai mic prag posibil.

2. Conform definiției un șir este divergent dacă nu are limită sau are limită și aceasta este $\pm\infty$.

Exemple. 1. Șirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ apare foarte frecvent în exerciții. Intuiția ne sugerează că limita acestui șir este 0. Pentru a demonstra acest fapt considerăm $\varepsilon > 0$.

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon, \text{ dacă } n > \frac{1}{\varepsilon} \text{ și } n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă $\varepsilon > 0$, atunci există $\frac{1}{\varepsilon}$ și cel mai mic număr natural mai mare decât $\frac{1}{\varepsilon}$ este

$n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, deci oricare ar fi $n > n_0$ are loc inegalitatea $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$. Astfel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. Folosind definiția limitei putem afirma, că orice șir constant este convergent și limita șirului este chiar valoarea comună a termenilor.

3. Șirul $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu este convergent (este divergent), deoarece oricum am alege numărul real a există $\varepsilon > 0$ și $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $|n - a| > \varepsilon$ (din axioma lui Arhimede).

4. Șirul $\left((-1)^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ este divergent, deoarece distanța a doi termeni consecutivi este 2 și astfel pentru orice $a \in \mathbb{R}$, vecinătatea punctului a de rază $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nu poate conține doi termeni consecutivi (această vecinătate fiind un interval de lungimea 1).

Pentru cazul în care limita șirului este $\pm\infty$ putem formula caracterizări similare cu caracterizarea ε , folosind vecinătățile punctelor $\pm\infty$. Obținem următoarea teoremă:

Teoremă. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, dacă pentru $\forall M \in \mathbb{R}$ există $n(M) \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $a_n > M, \forall n \geq n(M)$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, dacă pentru $\forall M \in \mathbb{R}$ există $n(M) \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $a_n < M, \forall n \geq n(M)$.

Probleme rezolvate

De foarte multe ori studiul convergenței unui șir nu este o problemă ușoară, deoarece studiul șirului se poate reduce la studiul altor șiruri, eventual mai simple. Din acest motiv este foarte util rezolvarea multor probleme și exerciții. Pentru a formula ipoteze corecte relativ la comportarea și limita unui șir calculatorul poate fi un instrument util.

1. Să se studieze convergența șirului $a_n = \frac{3n-1}{5n+2}, n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare. Deoarece $\frac{3n-1}{5n+2} = \frac{3-\frac{1}{n}}{5+\frac{2}{n}}$, și pentru n suficient de mare $\frac{1}{n}$ și $\frac{2}{n}$ sunt

foarte mici în raport cu ceilalți operanzi, valoarea fracției ar trebui să fie foarte aproape de $3/5$. Demonstrăm că limita șirului este $3/5$. Fie $\varepsilon > 0$ un număr fixat.

$$\text{Inegalitatea } \left| a_n - \frac{3}{5} \right| = \left| \frac{3n-1}{5n+2} - \frac{3}{5} \right| = \left| \frac{15n-5-15n-6}{5(5n+2)} \right| = \frac{11}{5(5n+2)} < \varepsilon$$

are loc dacă $\frac{5(5n+2)}{11} > \frac{1}{\varepsilon}$, adică, dacă $n > \frac{1}{5} \left(\frac{11}{5\varepsilon} - 2 \right)$. Astfel luând

$$n(\varepsilon) = \max \left\{ 1, \left\lceil \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{11}{5\varepsilon} - 2 \right) \right\rceil + 1 \right\}$$

are loc inegalitatea $\left| a_n - \frac{3}{5} \right| < \varepsilon$ pentru orice $n > n(\varepsilon)$, deci limita șirului este $\frac{3}{5}$.

2. Să se studieze convergența șirului $a_n = \frac{2n^2-3n+1}{3n^2-1}$.

Rezolvare. Procedând în mod analog $\frac{2n^2-3n+1}{3n^2-1} = \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}}$, deci limita

șirului ar trebui să fie $\frac{2}{3}$. Fie $\varepsilon > 0$ un număr fixat.

$$\left| a_n - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2n^2-3n+1}{3n^2-1} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{-9n+5}{3(3n^2-1)} \right| = \frac{9n-5}{3(3n^2-1)} < \frac{9n}{3(3n^2-1)} < \frac{3n}{2n^2} = \frac{3}{2n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deci $\left| a_n - \frac{2}{3} \right| < \frac{3}{2n} < \varepsilon$, dacă $n > \frac{3}{2\varepsilon}$ și astfel un prag

corespunzător este $n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{3}{2\varepsilon} \right\rceil + 1$. În consecință $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n^2 - 1} = \frac{2}{3}$.

Se poate observa că pentru a obține numărul de prag am folosit estimări grosiere dar totuși eficiente pentru scopul propus. În foarte multe cazuri asemenea majorări sau minorări sunt esențiale pentru a reduce volumul de calcul, sau efectiv pentru a nu ajunge la inegalități care nu se pot rezolva.

3. Să se studieze convergența șirului $a_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n^3 - 1}$.

Rezolvare. $\frac{2n^2 - 3n + 1}{3n^3 - 1} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{3 - \frac{1}{n^3}}$, deci vom încerca să demonstrăm că

limita șirului este 0. $\left| \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n^3 - 1} - 0 \right| = \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n^3 - 1} < \frac{3n^2}{2n^3} = \frac{3}{2n} < \varepsilon$, dacă

$n > \frac{3}{2\varepsilon}$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n^3 - 1} = 0$.

4. Să se studieze convergența șirului $a_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$.

Rezolvare. Folosind identitatea $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ obținem

$$a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right),$$

deci limita șirului ar trebui să fie $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Dacă $\varepsilon > 0$ este un număr fixat, atunci

$$\left| a_n - \frac{1}{3} \right| = \frac{3n+1}{6n^2} < \frac{4n}{6n^2} = \frac{2}{3n} < \varepsilon, \text{ pentru } n > \frac{2}{3\varepsilon},$$

deci putem alege $n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{2}{3\varepsilon} \right\rceil + 1$ și astfel rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$.

5. Să se studieze convergența șirului $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.

Rezolvare. $a_n = (\sqrt{n^2 + n} - n) \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$,

și astfel încercăm să arătăm că limita este $\frac{1}{2}$. Fie $\varepsilon > 0$ un număr fixat.

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}{2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}{2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} < \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}{4} = \frac{1 + \frac{1}{n} - 1}{4 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} < \frac{1}{8n} < \varepsilon, \text{ dacă } n > \frac{1}{8\varepsilon},$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \frac{1}{2}$.

6. Să se arate că șirul $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n \geq 1$, $x_1 = 1$ este convergent și să se calculeze limita șirului.

Rezolvare. Șirul este crescător și are termeni mai mici decât 2 (a se vedea problemele rezolvate la monotonia și mărginirea șirurilor). În cele ce urmează demonstrăm că limita șirului este 2.

$$x_{n+1} - 2 = \sqrt{2 + x_n} - 2 = \frac{x_n - 2}{\sqrt{2 + x_n} + 2}, \text{ deci } |x_{n+1} - 2| < \frac{1}{2} \cdot |x_n - 2| \text{ și astfel}$$

$$|x_n - 2| < \frac{1}{2^{n-1}} |x_1 - 2| = \frac{1}{2^{n-1}}. \text{ Din această inegalitate rezultă că pentru}$$

$$n(\varepsilon) = \left\lceil \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right\rceil + 1 \text{ are loc inegalitatea } |x_n - 2| < \varepsilon, \forall n \geq n(\varepsilon), \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

Din rezolvarea acestor probleme se vede foarte bine că folosirea definiției necesită în unele cazuri o ingeniozitate și o perspicacitate destul de mare. Astfel pentru a calcula într-un mod eficace limitele șirurilor avem nevoie de proprietăți cu ajutorul cărora putem evita folosirea definiției ori de câte ori acest lucru este posibil. Din acest motiv în restul capitolului vom demonstra astfel de proprietăți.

Exerciții propuse

Studiați convergența următoarelor șiruri, și calculați limitele lor.

- a) $a_n = \frac{2n - 5}{7n + 3}$; b) $a_n = \frac{3}{4n - 1}$; c) $a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$;
- d) $a_n = \frac{3n^2 + n - 5}{n^2 + n + 1}$; e) $a_n = \frac{2n - 3}{5n^2 + 1}$; f) $a_n = \frac{3n^2 - n + 1}{6n + 1}$;
- g) $a_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2}$; h) $a_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^4}$; i) $a_n = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4}$;
- j) $a_n = \frac{3^n + 1}{2 \cdot 3^n - 1}$; k) $a_n = \sqrt[n]{2}$; l) $a_n = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1}$;
- m) $a_n = \sqrt{n^3} + n - n$; n) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}$.

Proprietăți ale șirurilor

1. În definiția limitei, se cere numai existența numărului a pentru care orice vecinătate a acestui punct conține termenii șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ cu excepția unui număr finit de termeni. Intuitiv acest număr a trebuie să fie unic (dacă există), deoarece două numere diferite se pot separa cu ajutorul a două vecinătăți. Demonstrăm unicitatea limitei.



Să presupunem că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ are două limite, și anume a și b cu $a \neq b$.

Dacă considerăm vecinătățile punctelor a și b de rază $\varepsilon = \frac{|a-b|}{3}$, atunci aceste vecinătăți sunt disjuncte. Pe de altă parte există $n_1(\varepsilon)$ și $n_2(\varepsilon)$ astfel ca toți termenii șirului pentru care $n \geq n_1(\varepsilon)$ să fie în vecinătatea $\left(a - \frac{|b-a|}{3}, a + \frac{|b-a|}{3}\right)$ și toți termenii pentru care $n \geq n_2(\varepsilon)$ să fie în vecinătatea $\left(b - \frac{|b-a|}{3}, b + \frac{|b-a|}{3}\right)$. Cele două

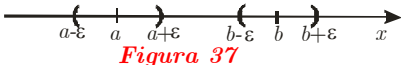


Figura 37

vecinătăți fiind disjuncte obținem o contradicție (ar trebui ca toți termenii șirului pentru care $n \geq \max(n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon))$ să fie în ambele intervale).

Folosind un raționament analog putem arăta că limita este unică și în cazul în care nu este finită. Astfel putem enunța următoarea teoremă:



Teoremă. Dacă există limita unui șir, atunci este unică.

2. Să studiem legătura dintre mărginirea unui șir și convergența acestuia. În exemplele precedente am văzut că există șiruri mărginite care nu sunt convergente (de exemplu $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$). Pe de altă parte toate șirurile convergente din aceste exemple erau și mărginite.

Să presupunem că $(a_n)_{n \geq 1}$ este un șir convergent și are limita a . În acest caz pentru $\forall \varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon)$ cu proprietatea $|a_n - a| < \varepsilon$, dacă $n > n(\varepsilon)$. Astfel în afara vecinătății $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ șirul poate avea un număr finit de termeni. Dacă șirul are termen mai mare decât $a + \varepsilon$, atunci fie M cel mai mare termen cu această proprietate, în caz contrar M să fie $a + \varepsilon$. În mod analog fie m cel mai mic termen mai mic decât $a - \varepsilon$, dacă există asemenea termen, și $a - \varepsilon$ dacă nu există termen mai mic decât $a - \varepsilon$. În consecință toți termenii șirului sunt în intervalul $[m, M]$, deci șirul este mărginit. Astfel am demonstrat următoarea teoremă:



Teoremă. Orice șir convergent este mărginit.

Această teoremă ne arată că mărginirea șirului este o condiție necesară pentru convergența acestuia. Pe de altă parte exemplul $a_n = (-1)^n$ arată că mărginirea nu este suficientă pentru convergență.

3. Folosind șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ să construim șirul $(c_n)_{n \geq 1}$ cu ajutorul relațiilor $c_{2n-1} = a_n$, $c_{2n} = b_n$, adică:

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$$

Demonstrăm că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Fie $\varepsilon > 0$ un număr fixat. Din condițiile date rezultă că există $N_1(\varepsilon)$ și $N_2(\varepsilon)$ cu proprietatea $|a_n - a| < \varepsilon$, pentru $n > N_1(\varepsilon)$ și $|b_n - a| < \varepsilon$, pentru $n > N_2(\varepsilon)$. Astfel

$|c_k - a| < \varepsilon$, dacă $k > 2 \max \{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $k > n(\varepsilon)$ are loc $|c_k - a| < \varepsilon$. În consecință $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$. Raționamentul este analog și în cazul în care limita nu este finită.

4. Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$. Șirurile

$$a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots; a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}, \dots; a_{10}, a_{100}, \dots, a_{10^m}, \dots$$

se obțin din $(a_n)_{n \geq 1}$ prin suprimarea unor termeni. Aceste șiruri le vom numi subșirurile șirului $(a_n)_{n \geq 1}$.

Definiție. Șirul $(a_{n_k})_{k \geq 1}$ este un *subșir* al șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ dacă

$$1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$$


Primul termen al subșirului este a_{n_1} , al doilea termen este a_{n_2} , etc. Din definiție rezultă că $n_k \geq k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Considerăm șirul $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ și subșirul $(\frac{1}{3n})_{n \geq 1}$. După cum am văzut $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Este evident că limita subșirului este aceeași ca și limita șirului. Este deci natural să ne întrebăm dacă acest fenomen este general. Mai precis dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ și $(a_{n_k})_{k \geq 1}$ este un subșir al șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, atunci $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Fie $a \in \mathbb{R}$ limita șirului și să fixăm un ε pozitiv. Conform presupunerii există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $n > n(\varepsilon)$ are loc $|a_n - a| < \varepsilon$. Astfel dacă $k > n(\varepsilon)$, atunci datorită inegalității $n_k \geq k$ are loc și inegalitatea $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. În consecință are loc egalitatea $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$. În cazul în care limita nu este finită, raționamentul este analog, deci obținem următoarea teoremă:

Teoremă. Dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ are limita a , atunci orice subșir al său are limita a .



Observație. Și un șir divergent poate avea subșiruri convergente după cum se vede din exemplul $a_n = (-1)^n$. Termenii de rang par respectiv cei de rang impar formează câte un subșir constant, deci și convergent.

5. Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ și construim un alt șir prin adăugarea unor termeni la începutul șirului. Astfel din șirul $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ construim șirul

$$b_1, b_2, \dots, b_k, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, atunci ce putem afirma despre convergența șirului construit? Fie V o vecinătate arbitrară a limitei a . Din condiția $a_n \rightarrow a$ rezultă că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ poate avea numai un număr finit de termeni în afara acestei vecinătăți, deci șirul nou construit poate avea cu cel mult k termeni mai mulți în afara vecinătății V . Astfel și limita șirului nou construit este a .

Problemă rezolvată. Demonstrați că dacă subșirurile $(a_{2n})_{n \geq 1}$ și $(a_{2n-1})_{n \geq 1}$ ale șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente și au aceeași limită, atunci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Demonstrație. Fie l limita comună a șirurilor $(a_{2n})_{n \geq 1}$ și $(a_{2n-1})_{n \geq 1}$. Pentru orice $\forall \varepsilon > 0$ există numerele naturale $n_1(\varepsilon)$ și $n_2(\varepsilon)$ astfel încât $|a_{2n} - l| \leq \varepsilon$, dacă $n \geq n_1(\varepsilon)$ și $|a_{2m-1} - l| \leq \varepsilon$, dacă $m \geq n_2(\varepsilon)$. Astfel pentru $n \geq \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$ are loc $|a_n - l| \leq \varepsilon$, deci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și are limita l .

Probleme propuse

1. Demonstrați că șirul $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ este divergent.
2. Studiați convergența șirului $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.
3. Demonstrați că dacă subșirurile $(a_{2n})_{n \geq 1}$, $(a_{2n-1})_{n \geq 1}$ și $(a_{3n})_{n \geq 1}$ ale șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente, atunci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Operații cu șiruri convergente

Într-unul din exemplele precedente am studiat șirul $a_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n^3 - 1}$. Am scris

termenul general în forma $a_n = \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{3 - \frac{1}{n^3}}$ și am demonstrat că limita șirului este 0.

Considerând numai numărătorul, acesta se poate scrie ca și suma șirurilor

$\left(\frac{2}{n}\right)_{n \geq 1}$, $\left(\frac{3}{n^2}\right)_{n \geq 1}$, $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n \geq 1}$. Aceste șiruri au limita 0, deci, dacă am putea calcula limita

unei sume în funcție de limitele termenilor, atunci am avea un procedeu de calcul care

să nu apeleze la vecinătăți. Mai mult, am demonstrat că șirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ are limita 0.

Folosind această egalitate putem arăta că $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \rightarrow 0$; $\frac{3}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \rightarrow 0$;

$\frac{3}{n^2} = \frac{3}{n} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$; $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Numărătorul poate fi descompus în mod similar; dacă considerăm numărul 3 ca și termenul general al șirului constant 3, atunci acest șir este convergent și are limita 3.

Dacă $\frac{1}{n^3} \rightarrow 0$, atunci rezultă de aici că $3 - \frac{1}{n^3} \rightarrow 3$? În final dacă numărătorul are

limita 0, iar numitorul limita 3, atunci putem afirma că fracția studiată are limita 0/3?

Aceste întrebări se pot formula în mod general astfel:

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ două șiruri convergente pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Rezultă de aici că

- a) șirul $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$;
- b) șirul $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$;
- c) pentru $b \neq 0$ șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$?

Studiem aceste întrebări pe rând:

a) Pentru ca șirul $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ să fie convergent și să avem $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$, considerăm un $\varepsilon > 0$ fixat. Din condițiile $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ rezultă existența numerelor naturale $N_1(\varepsilon)$ și $N_2(\varepsilon)$ cu proprietățile: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ dacă $n > N_1(\varepsilon)$ și $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, dacă $n > N_2(\varepsilon)$.

Astfel $|a_n + b_n - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,
dacă $n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$, deci are loc următoarea teoremă:

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b.$$

b) Demonstrăm că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, atunci

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ab$. Prin transformări simple putem scrie:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq \\ &\leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b|. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, din convergența șirului $(b_n)_{n \geq 1}$ rezultă mărginirea acestui șir, deci există un număr real $K > 0$ cu proprietatea $|b_n| \leq K$ pentru $n = 1, 2, \dots$. Dacă limita șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ este diferită de 0, atunci din $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ rezultă existența numărului

$N_1(\varepsilon)$ cu proprietatea că pentru orice $n > N_1(\varepsilon)$ avem $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K}$ și din $b_n \rightarrow b$ rezultă că există numărul natural $N_2(\varepsilon)$ pentru care $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2a}$, dacă $n > N_2(\varepsilon)$.

Astfel avem $|a_n b_n - ab| \leq |a_n - a| \cdot K + |a| \cdot |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2|a|} = \varepsilon$, pentru $n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\} = N(\varepsilon)$.

Dacă $a = 0$, atunci $|a| \cdot |b_n - b| = 0$, deci putem neglija acest termen din majorare și



astfel obținem același rezultat: $|a_n b_n - 0| \leq |a_n| \cdot K < \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, pentru $n > N_1(\varepsilon)$. Pe baza acestor considerații rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ cu proprietatea $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$. Astfel are loc următoarea teoremă:

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ab$.

c) Condiția $b \neq 0$ este esențială după cum se vede din exemplul următor:

Dacă $a_n = \frac{1}{n}$ și $b_n = \frac{1}{n^2}$, atunci $\frac{a_n}{b_n} = n$, deci $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq 1}$ nu este convergent.

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$, atunci pentru $\frac{|b|}{2}$ există $N \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ oricare ar fi $n > N$. Astfel $b_n \neq 0$, pentru $n > N$.

Schimbând un număr finit de termeni convergența nu se modifică, deci putem presupune că $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ și $b_n \neq 0$,

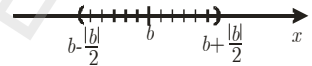


Figura 38

$\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă reușim să arătăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$, atunci

proprietatea **c)** se reduce la **b)**, deoarece conform proprietății **b)** am avea $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$, deci și $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

Studiem șirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \geq 1}$. Vrem să arătăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.

Din condițiile $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$ și $b_n \neq 0$ rezultă că există $d > 0$ cu proprietatea $|b_n| \geq d$, $n \in \mathbb{N}^*$ și $|b| \geq d$ (d este minimul modulului termenilor care se află în afara vecinătății de rază $\frac{|b|}{2}$ a numărului b). Pentru $\varepsilon > 0$ fixat din condiția $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

există $N(\varepsilon d^2)$ astfel ca $|b_n - b| < \varepsilon \cdot d^2$ pentru orice $n > N(\varepsilon d^2)$. Astfel

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n \cdot b|} < \frac{|b_n - b|}{d^2} < \frac{1}{d^2} \cdot \varepsilon d^2,$$

deci $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon$, $\forall n > N(\varepsilon d^2)$. În consecință sunt valabile următoarele teoreme:

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}^*$ și $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{1}{b}$.

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}^*$ și $b_n \neq 0$, $\forall n \geq 1$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

Observație. Din cazul **b)** rezultă că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ și $c \in \mathbb{R}$, atunci



$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ca.$$

Astfel dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -a$, iar de aici rezultă (folosind **a)** că

dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a - b$.

Exemple. 1. $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$, deoarece $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$, deoarece $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0$, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{5n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{5 + \frac{2}{n}} = \frac{3}{5}$, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{2}{n}\right) = 5$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 3n^3 + n - 1}{7n^4 + 5n^2 + 2n - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{7 + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^3} - \frac{4}{n^4}} = \frac{2}{7}$, din relațiile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}\right) = 2 \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^3} - \frac{4}{n^4}\right) = 7.$$

Este evident că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$, atunci folosind proprietatea **a)** de două ori obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n + c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = (a + b) + c = a + b + c.$$

6. Să se studieze convergența șirului $a_n = \frac{3n^3 - 2n^2 + n + 1}{4n^2 + n + 1}$.

Scriem termenul general sub forma $a_n = \frac{3n - 2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$. Numitorul are limita 4 și

numărătorul are limita ∞ . Astfel ar trebui să avem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, deși pentru a calcula această limită nu putem aplica proprietățile precedente. Efectuăm o demonstrație directă. Fixăm un număr real $K > 0$.

$$a_n = \frac{3n - 2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} > \frac{2n}{4 + 2} = \frac{n}{3} > K, \text{ dacă } n > 3K,$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

În cazul general fie $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ două șiruri cu proprietățile:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, b > 0, b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$



Rezultă de aici că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$?

Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $a_n > 0$ și $b_n > 0$. Din condiția $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$ rezultă că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior, deci există $M > 0$ cu proprietatea $b_n \leq M, \forall n \geq 1$. Dacă $K > 0$ este un număr fixat, atunci

$\frac{a_n}{b_n} > \frac{a_n}{M} > K$, pentru $a_n > MK$. Pe de altă parte egalitatea $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ implică existența unui număr natural N pentru care $a_n > MK$, dacă $n > N$. Astfel pentru $n > N$, are loc inegalitatea $\frac{a_n}{b_n} > K$. Numărul K fiind arbitrar rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

7. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ și $a_n \geq 0$ pentru orice număr natural n , atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = a \geq 0$.

Dacă $a < 0$ atunci în afara vecinătății de rază $\frac{|a|}{2}$ șirul are numai o infinitate de termeni și acesta contrazice ipoteza $a_n \geq 0, \forall n \geq 0$.

Problemă. Demonstrați că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}_+, a_n \geq 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Soluție. Dacă $a = 0$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ are loc $|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \varepsilon$, dacă $a_n < \varepsilon^2$. Pe de altă parte, din relația $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ rezultă pentru $\varepsilon^2 > 0$ există numărul natural $N(\varepsilon^2)$ cu proprietatea $a_n < \varepsilon^2$, oricare ar fi $n > N(\varepsilon^2)$. Astfel $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = 0$.

Dacă $a > 0$, atunci

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \left| (\sqrt{a_n} - \sqrt{a}) \cdot \frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \right| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ din relația $a_n \rightarrow a$ rezultă că $\varepsilon \cdot \sqrt{a} > 0$, deci există $N(\varepsilon \sqrt{a})$ cu proprietatea $|a_n - a| < \varepsilon \sqrt{a}$, oricare ar fi $n > N(\varepsilon \sqrt{a})$. Astfel pentru $n > N(\varepsilon \sqrt{a})$

are loc $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon$. În consecință

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt{a}.$$

În mod similar putem demonstra că pentru $k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, unde pentru k par au loc inegalitățile $a_n \geq 0, \forall n \geq 1$, este valabilă egalitatea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt[k]{a}.$$

Exerciții și probleme

1. Studiați convergența următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{1 - 2n}{3n + 5};$

b) $a_n = \frac{n^2 - n}{3n^2 + 5};$

c) $a_n = \frac{5n^3 - 1}{3n^4 - n + 1};$

d) $a_n = \frac{2n^2 + 1}{n + 2}$; **e)** $a_n = \left(3 - \frac{1}{n^2}\right)\left(6 + \frac{2}{n}\right)$; **f)** $a_n = \frac{6 - n}{3 + n} + \frac{n^2 - 2}{3n^2 + 1}$.

2. Studiați convergența următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{3\sqrt{n} + 2}$; **b)** $a_n = \frac{\sqrt[3]{2n} + \sqrt{3n} + 1}{\sqrt[3]{n} + \sqrt{5n} + 1}$;
c) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n} - 1}{\sqrt[5]{n} + 1}$; **d)** $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2}}{\sqrt{n^2 + 5}}$.

3. Stabiliți valoarea de adevăr a afirmației:

„Dacă $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ este convergent, atunci $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente”

(dacă afirmația este adevărată, atunci demonstrați afirmația, iar în caz contrar dați un contraexemplu.)

4. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) Dacă $(a_n - b_n)_{n \geq 1}$ este convergent, atunci $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente;

b) Dacă $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$ este convergent, atunci $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente;

c) Dacă $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq 1}$ este convergent, atunci $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente;

d) Dacă $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ este divergent, atunci $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ sunt divergente;

e) Dacă $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ este divergent, atunci $(a_n)_{n \geq 1}$ sau $(b_n)_{n \geq 1}$ este divergent;

f) Dacă $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ și $(a_n)_{n \geq 1}$ sunt divergente, atunci $(b_n)_{n \geq 1}$ este divergent;

g) Dacă $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$ și $(a_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente, atunci $(b_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

5. Demonstrați că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ și $a_n \geq b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $a \geq b$. Dacă $a_n > b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci rezultă că $a > b$?

Șiruri care au limita $\pm\infty$

După cum am văzut limita unui șir divergent fie că nu există, fie este $\pm\infty$. Șirurile pentru care limita există (dar nu este finită) se pot caracteriza cu ajutorul următoarei teoreme:

Teoremă. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, dacă pentru orice număr real K există $n(K) \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n > K$ oricare ar fi $n > n(K)$.
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, dacă pentru orice număr real K există $n(K) \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n < K$ oricare ar fi $n > n(K)$.

Exemplu. Șirul $(n^2 + 1)_{n \geq 1}$ are limita ∞ , șirul $(-n^3)_{n \geq 1}$ are limita $-\infty$, iar șirul $((-1)^n n^4)_{n \geq 1}$ nu are limită deoarece are două subșiruri cu limite diferite.

În paragraful următor vom studia operațiile ce se pot efectua cu asemenea șiruri.





Exerciții și probleme

- Pentru ca $a_n \rightarrow \infty$, nemărginirea șirului $(a_n)_{n \geq 1}$
 - este necesară;
 - este suficientă;
 - este necesară și suficientă;
 - nu este nici necesară și nici suficientă?
- Care dintre următoarele șiruri au limita ∞ și care au limita $-\infty$?
 - $a_n = \frac{n^2}{3n+1}$;
 - $a_n = \frac{1-n^3}{n+2}$;
 - $a_n = \frac{3n^3+n^2+1}{n^2+n+1}$;
 - $a_n = n \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$;
 - $a_n = n^3 \cos^2(n\pi)$.



CAZURI DE NEDETERMINARE

La studiul operațiilor cu șiruri convergente am văzut că în unele cazuri pentru a calcula limita unei expresii (de exemplu o sumă) nu este necesar ca toți termenii să convergă. De exemplu pentru a calcula limita $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n) = \infty$ este de ajuns să demonstrăm că fiecare termen (n^2 și n) are limita $+\infty$. Astfel e natural să admitem că $\infty + \infty = \infty$. Dar ce înțelegem de fapt prin această egalitate (termenii sumei nu sunt numere reale)? Prin egalitatea $\infty + \infty = \infty$ înțelegem faptul că pentru orice două șiruri $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ cu limita $+\infty$, șirul sumă $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ are limita $+\infty$. În mod similar dacă $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci prin egalitatea $a + b = c$, ($a \cdot b = c$, $a/b = c$, $a^b = c$ etc.) înțelegem faptul că pentru orice două șiruri $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, are loc $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = c$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = c$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / b_n = c$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = c$, etc.). Următorul exemplu ne arată că nu putem efectua orice operație cu elementele mulțimii $\overline{\mathbb{R}}$. De exemplu diferența dintre două șiruri care au limita $+\infty$ poate avea orice comportare $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n^2 + k) - n^2) = k$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(n + \sin \frac{1}{n} \right) - n \right)$ nu există. Astfel cazul $\infty - \infty$ este un caz de nedeterminare. Pentru a clarifica situația studiem pe rând cazurile de nedeterminare pentru fiecare operație elementară în parte.

1. Adunarea

Cazurile în care putem efectua adunarea sunt ($a \in \mathbb{R}$):

$$a + \infty = +\infty; \quad \infty + \infty = \infty, \quad a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty.$$

Demonstrarea acestor proprietăți este imediată pe baza definiției. Demonstrăm prima egalitate. Fie $a \in \mathbb{R}$, dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, atunci pentru orice $K \in \mathbb{R}$ și orice $\varepsilon > 0$ există $n(K) \in \mathbb{N}$ și $n(\varepsilon)$ astfel încât:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, \text{ dacă } n \geq n(\varepsilon) \text{ și } K - a + 1 < b_n, \text{ dacă } n \geq n(K).$$

Deci pentru $\varepsilon = 1$ există numărul natural $N(K) = \max\{n(\varepsilon), n(K)\}$, cu proprietatea

$$K < a_n + b_n, \text{ oricare ar fi } n \geq N(K).$$

Pe baza definiției obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$, deci $a + \infty = \infty$.

Observații.

1. Cazurile $\infty + (-\infty) = \infty - \infty$ și $-\infty + \infty$ sunt de nedeterminare deoarece din condițiile $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ nu rezultă nici convergența, nici divergența șirului $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$.

2. Dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit inferior și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$.

3. Dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$.

4. În general, dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \pm\infty$.

2. Înmulțirea

Cazurile în care putem efectua înmulțirea sunt:

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \text{ și } a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty, \text{ dacă } a > 0;$$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty \text{ și } a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty, \text{ dacă } a < 0;$$

$$\infty \cdot \infty = (-\infty)(-\infty) = \infty;$$

$$\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty.$$

Observații

1. Cazurile $0 \cdot \infty$ și $0 \cdot (-\infty)$ sunt de nedeterminare, deoarece din relațiile $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ (sau $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$) nu rezultă nici convergența și nici divergența șirului $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$.

2. Dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$

3. Împărțirea

Cazurile în care putem efectua împărțirea sunt

$$\frac{a}{\infty} = 0 \text{ și } \frac{a}{-\infty} = 0, \text{ dacă } a \text{ este un număr real oarecare.}$$

Observație. Din condițiile $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty$, sau

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, nu rezultă convergența sau divergența șirului $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq 1}$, deci

cazurile $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ sunt cazuri de nedeterminare.

4. Radicali

$$\sqrt[k]{\infty} = \infty \text{ și } \sqrt[k]{-\infty} = -\infty, \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

5. Puteri

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = a^b$.

Cazurile în care operația se poate efectua și apare simbolul $\pm\infty$ sunt:

Dacă $a > 1$, atunci $a^\infty = \infty$ și $a^{-\infty} = 0$.

Dacă $0 < a < 1$, atunci $a^\infty = 0$ și $a^{-\infty} = \infty$.

Dacă $a > 0$, atunci $\infty^a = \infty$, iar dacă $a < 0$, atunci $\infty^a = 0$.

$$\infty^\infty = \infty, \infty^{-\infty} = 0.$$

Dacă $a = 0$, $a_n > 0 \ \forall n \geq 1$ și $b \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 0$.

Dacă $a = 0$, $a_n > 0 \ \forall n \geq 1$ și $b \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = +\infty$.

Dacă $a = b = 0$, atunci șirul $(a_n^{b_n})$ poate avea orice comportare, deci cazul 0^0 este de nedeterminare. În mod similar și cazurile 1^∞ , ∞^0 , $1^{-\infty}$ sunt de nedeterminare.

Foarte des forma nedeterminării poate fi transformată într-una mai convenabilă. Pentru a calcula limitele care conduc la cazuri de nedeterminare vom demonstra criterii și teoreme speciale. Cele mai utile vor fi acelea care implică transformarea limitelor în limite de funcții și folosirea derivatelor.

Problemă. Fie $a_n = \frac{A_0 n^p + A_1 n^{p-1} + \dots + A_p}{B_0 n^q + B_1 n^{q-1} + \dots + B_q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0$, $n, n_0 \in \mathbb{N}^*$, $A_0, B_0 \in \mathbb{R}^*$, $B_0 n^q + \dots + B_q \neq 0 \ \forall n \geq n_0$. Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Rezolvare. Scriem șirul sub forma:

$$a_n = n^{p-q} \cdot \frac{A_0 + \frac{A_1}{n} + \dots + \frac{A_p}{n^p}}{B_0 + \dots + \frac{B_q}{n^q}}.$$

Dacă $p = q$, atunci $n^{p-q} = 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{A_0}{B_0}$ (deoarece

numărul termenilor este fixat atât în numitor cât și în numărător, deci putem aplica proprietățile șirurilor convergente). Dacă $p > q$, atunci $p - q > 0$, deci

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{p-q} = \infty^{p-q} = \infty$ și astfel $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(\operatorname{sgn} \frac{A_0}{B_0} \right) \cdot \infty$. Dacă $p < q$, atunci

$p - q < 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{p-q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\infty} = 0$ și astfel $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Am demonstrat următoarea proprietate:

Teoremă. Dacă $a_n = \frac{A_0 n^p + A_1 n^{p-1} + \dots + A_p}{B_0 n^q + B_1 n^{q-1} + \dots + B_q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0$, $n, n_0 \in \mathbb{N}^*$, $A_0, B_0 \in \mathbb{R}^*$, $B_0 n^q + \dots + B_q \neq 0 \ \forall n \geq n_0$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \frac{A_0}{B_0}, & p = q; \\ \operatorname{sgn} \left(\frac{A_0}{B_0} \right) \cdot \infty, & p > q; \\ 0, & p < q \end{cases}$$

Problemă rezolvată. Să se calculeze limitele:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n);$ **b)** $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - n).$

Rezolvare. **a)** Limita dată este o nedeterminare de forma $\infty - \infty$, deci transformăm termenul general pentru a înlătura această nedeterminare:

$$\sqrt{n^2 + 1} - n = \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1}.$$

A doua fracție are limita $\frac{1}{2}$, iar prima are limita 0, deci produsul lor are limita 0.

b) Conform punctului a) avem o nedeterminare de forma $\infty \cdot 0$. Pe de altă parte

$$n(\sqrt{n^2 + 1} - n) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1}, \text{ deci limita este } \frac{1}{2}.$$

CRITERII DE COMPARAȚIE

Dacă $0 \leq a_n \leq b_n$ și limita șirului $(b_n)_{n \geq 1}$ este 0, atunci folosind criteriul cu ε putem determina $n(\varepsilon)$ relativ la șirul a_n folosind același $n(\varepsilon)$ ca și în cazul șirului b_n . Același raționament se poate aplica și în cazul în care $a_n \leq b_n$ și limita șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ este ∞ . Aceste observații conduc la următoarea teoremă:

Teoremă. a) Dacă $0 \leq a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (*criteriul majorării*).

b) Dacă $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ (*criteriul minorării*).

Demonstrație. a) Conform condițiilor date pentru $\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $0 \leq b_n \leq \varepsilon, \forall n \geq n(\varepsilon)$, deci are loc și inegalitatea $0 \leq a_n \leq \varepsilon$ pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$. Astfel pe baza criteriului cu ε , rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

b) Din criteriul cu ε rezultă că pentru orice $K > 0$, există $n(K) \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $K \leq a_n$, pentru orice $n \geq n(K)$. Astfel are loc și inegalitatea $K \leq b_n$ pentru orice $n \geq n(K)$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

Proprietățile anterioare sunt cazuri particulare ale următoarei teoreme (care însă poate fi demonstrată folosind aceste cazuri speciale):

Teoremă. (criteriul cleștelui) Dacă $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \geq 1$ și au loc relațiile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l.$$

Demonstrație. Presupunem $l \in \mathbb{R}$. Din $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$, $\forall n \geq 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - a_n) = l - l = 0$, rezultă (criteriul majorării) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Pe de altă parte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$. În cazul $l \in \{\pm\infty\}$ implicația rezultă aplicând partea a doua din teorema precedentă. De fapt în cazul $l = +\infty$ este suficientă inegalitatea $a_n \leq b_n$ iar în cazul $l = -\infty$ inegalitatea $b_n \leq c_n$.

Aplicații

1. Pentru orice număr real $x_0 \in \mathbb{R}$ există un șir de numere raționale, respectiv un șir de numere iraționale, care să tindă la x_0 .

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ avem $x_0 < x_n = x_0 + \frac{1}{n}$, deci există $a_n \in \mathbb{Q}$, respectiv $b_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $x_0 < a_n < x_n$ și $x_0 < b_n < x_n$, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, deci pe baza criteriului cleștelui $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$.

2. Considerăm șirul $x_n = \frac{n^2}{n^3 + 1} + \frac{n^2}{n^3 + 2} + \dots + \frac{n^2}{n^3 + n}$.

Să se studieze convergența șirului și calculați limita acestuia în caz de convergență. Fiecare termen al sumei are limita 0, totuși nu putem afirma că suma are limita 0, deoarece numărul termenilor nu este fixat (depinde de n). Pentru a calcula limita șirului x_n construim o aproximare inferioară și o aproximare superioară.

$$x_n \geq \frac{n^2}{n^3 + n} + \frac{n^2}{n^3 + n} + \dots + \frac{n^2}{n^3 + n} = n \cdot \frac{n^2}{n^3 + n} = \frac{n^3}{n^3 + n},$$

$$x_n \leq \frac{n^2}{n^3 + 1} + \frac{n^2}{n^3 + 1} + \dots + \frac{n^2}{n^3 + 1} = n \cdot \frac{n^2}{n^3 + 1} = \frac{n^3}{n^3 + 1}.$$

Astfel pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ au loc inegalitățile $a_n = \frac{n^3}{n^3 + n} \leq x_n \leq \frac{n^3}{n^3 + 1} = b_n$. Pe de altă parte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, deci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și are limita 1.

3. Să se studieze convergența șirului $b_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n}$ și să se calculeze limita șirului.

Construim două aproximări pentru b_n folosind cel mai mare și cel mai mic termen al

$$\text{sumei: } a_n = n \cdot \frac{1}{n^2 + n} \leq b_n \leq n \cdot \frac{1}{n^2 + 1} = c_n.$$

Din relațiile $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ pe baza criteriului cleștelui rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

4. Să se studieze convergența șirului $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ și calculați limita acestui șir.

Ca și în problema precedentă $n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq b_n \leq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Pe de altă parte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1 \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1, \text{ deci}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1.$$

5. Să se studieze convergența șirului $(\sqrt[n]{n})_{n \geq 1}$ și să se calculeze limita șirului.

Este evident că pentru $n > 1$, avem $\sqrt[n]{n} > 1$. Prezența radicalului de ordin n sugerează o aproximare folosind inegalitatea mediilor. Pentru a obține o estimare superioară corespunzătoare alegem factorii produsului în modul următor:

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-2} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} \leq \frac{n-2 + \sqrt{n} + \sqrt{n}}{n} = 1 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right).$$

Dacă $a_n = 1$, $c_n = 1 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$a_n = 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right) = c_n;$$

deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$, deducem din criteriul cleștelui că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

6. Să se calculeze limita șirului $a_n = \frac{n}{2^n}$, $n \geq 1$.

$$0 < \frac{n}{2^n} = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n} \leq \frac{n}{C_n^1 + C_n^2} = \frac{1}{1 + \frac{n-1}{2}},$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

7. Să se calculeze limita șirului $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^m}}_{2^{m-1} \text{ ori}} = 1 + \frac{m}{2}, \text{ unde}$$

$2^{m+1} \leq n < 2^{m+2}$, deci $m = [\log_2 n] - 1$. Dacă $n \rightarrow \infty$, atunci și $m \rightarrow \infty$, în consecință $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

8. Să se calculeze limita șirului $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$, $n \geq 1$.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2n-1} > 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^m}}_{2^{m-2} \text{ buc.}} = 1 + \frac{m}{4},$$

analog ca în problema precedentă rezultând $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.



Exerciții și probleme

1. Studiați convergența următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n}$; b) $a_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}$;

c) $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + n}}$; d) $a_n = \frac{\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n}{n^2}$;

e) $a_n = \frac{5^n}{n!}$;

f) $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$.

2. Studiați convergența șirului

$$a_n = \frac{n^3}{n^3 + 1} + \frac{n^3}{n^3 + 2} + \frac{n^3}{n^3 + 3} + \dots + \frac{n^3}{n^3 + n^2}.$$

3. Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$.

4. Studiați convergența șirului

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \frac{n}{n^2 + 3^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2}.$$



Observație. Dacă în problema 4. folosim estimări bazate pe cel mai mic și cel mai

mare termen, atunci obținem $b_n = \frac{n^2}{2n^2}$, $c_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$ cu proprietatea $b_n \leq a_n \leq c_n$.

Pe de altă parte $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2} \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, deci nu putem aplica criteriul cleștelui pentru studiul convergenței. Dacă însă șirul este convergent, atunci din inegalitățile precedente rezultă că limita șirului este între $\frac{1}{2}$ și 1.



ȘIRURI MONOTONE ȘI MĂRGINITE

Problemă. Să se studieze legătura între limita unui șir convergent și punctele de acumulare ale mulțimii formate din termenii șirului.

Rezolvare. Dacă mulțimea formată din termenii șirului este finită, atunci mulțimea nu are puncte de acumulare. Dacă însă această mulțime este infinită, atunci limita șirului (l) este un punct de acumulare deoarece orice vecinătate a punctului l conține o infinitate de termeni și astfel conține și termeni diferiți de l . Pe de altă parte dacă $a \neq l$, atunci a are o vecinătate care conține numai un număr finit de termeni ai șirului și astfel există și o vecinătate V_1 pentru care $V_1 \setminus \{a\}$ este mulțime vidă. În consecință dacă șirul nu este constant de la un rang încolo și este convergent, atunci limita șirului este de fapt unicul punct de acumulare al mulțimii formate din termenii șirului.

Problemă. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir strict crescător și mărginit superior. Câte puncte de acumulare poate avea mulțimea formată din termenii șirului?

Rezolvare. Notăm cu H mulțimea formată din termenii șirului. H este mărginită superior, deci are un supremum. Demonstrăm că numărul $s = \sup H$ este singurul punct de acumulare. Deoarece șirul este strict crescător, $s \notin H$. Din definiția supremumului rezultă că orice vecinătate a punctului s conține cel puțin un element al șirului (în caz contrar ar exista o margine superioară mai mică decât s), deci s este un punct de acumulare al mulțimii H . Pe de altă parte dacă $a > s$, atunci există o vecinătate a punctului a care nu conține numărul s , deci nu conține nici un termen al șirului. Dacă $a < s$, atunci din definiția supremumului rezultă existența unui număr n_0 cu proprietatea $a < a_{n_0} < s$. De aici rezultă că vecinătatea punctului a care are ca și extremitate superioară numărul a_{n_0} conține un număr finit de termeni ai șirului. Dacă notăm cu m cea mai mică distanță nenulă dintre numerele a_n cu $n \leq n_0$ și punctul a , atunci vecinătatea punctului a de rază $\frac{m}{2}$ nu conține nici un termen diferit de a și astfel punctul a nu este un punct de acumulare. În consecință singurul punct de acumulare este s .

Pe baza criteriului cu ε rezultă că acest supremum este chiar limita șirului, deoarece dacă $\varepsilon > 0$, atunci există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $s - \varepsilon < a_{n(\varepsilon)} < s$ și din monotonia șirului obținem $s - \varepsilon < a_n < s$, pentru $n \geq n(\varepsilon)$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$. Dacă șirul nu este strict crescător, dar este crescător, atunci egalitatea $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$ se păstrează deoarece dacă șirul are o infinitate de termeni diferiți, atunci raționamentul precedent este valabil, iar dacă mulțimea formată din termenii șirului este finită, atunci șirul este constant de la un rang încolo, adică există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n = s$, pentru $n \geq k$.

Folosind un raționament analog putem demonstra că pentru un șir descrescător și mărginit inferior limita șirului este chiar infimumul mulțimii formate din termenii șirului. Obținem astfel următoarea teoremă:

Teoremă

1. Dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este crescător și mărginit superior, atunci este convergent.
2. Dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este descrescător și mărginit inferior, atunci este convergent.
3. Dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit, atunci este convergent

Exemple. 1) Șirul $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ este crescător și 2 este

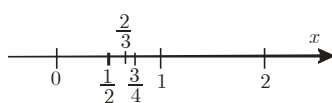


Figura 39

un majorant, deci șirul este convergent.

În figura 39 am reprezentat câțiva termeni ai șirului. Datorită monotoniei șirului punctele corespunzătoare vor avea abscise din ce în ce mai mari, dar totuși nu vor depăși numărul 2 (de fapt nu vor depăși nici numărul 1). Astfel este necesară o condensare a acestor puncte. Este foarte ușor de arătat că

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$, deci această condensare a punctelor se realizează în jurul punctului 1.



2) Considerăm șirul $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2, \end{aligned}$$

deci 2 este un majorant al șirului. Deoarece $a_n > 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, șirul este mărginit.

Pe de altă parte $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, $\forall n \geq 1$, deci șirul este crescător, rezultă că șirul este convergent.

Limita șirului se poate calcula folosind criteriul cleștelui, dar este necesar construirea unor șiruri aproximante. L. Euler a demonstrat pentru prima dată că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$.

3) Să se studieze convergența șirului $a_n = a^n$, dacă $a \in \mathbb{R}$.

Cazul 1. Dacă $a \in [0, 1)$, atunci $0 < a^{n+1} < a^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul este descrescător și mărginit inferior. În consecință este convergent. Pe de altă parte $a_{n+1} = a \cdot a_n$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Dar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, și astfel cu notația $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$, obținem $l = 0$, deoarece $a < 1$.


Cazul 2. Dacă $a > 1$, atunci $a_{n+1} > a_n$. Dacă șirul ar fi mărginit superior, atunci ar fi convergent, deci cu notația $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$ am obține $l = a \cdot l$. Astfel limita ar trebui să fie 0, ceea ce este absurd deoarece toți termenii șirului sunt mai mari decât 1. În consecință șirul nu este mărginit, deci pe baza monotoniei rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Cazul 3. Dacă $a \in (-1, 0)$, atunci $|a^n| = |a|^n$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Cazul 4. Dacă $a \leq -1$, atunci șirul nu este convergent deoarece distanța dintre doi termeni consecutivi este cel puțin 2. Subșirul format din termenii cu indice par are limita $+\infty$, iar subșirul format din termenii de indice impar are limita $-\infty$.

Cazul 5. Dacă $a = 1$, atunci $a_n = 1$, $\forall n \geq 1$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Obținem astfel următoarea teoremă:



Teoremă. $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0, & -1 < a < 1; \\ 1, & a = 1; \\ \infty, & a > 1; \\ \nexists, & a \leq -1. \end{cases}$

4) Să se studieze monotonia șirului $a_{n+1} = a_n - a_n^2$, $a_1 = a \in [0, 1]$ și să se calculeze limita șirului.

Din relația de recurență obținem $a_{n+1} - a_n = -a_n^2 \leq 0$, deci șirul este descrescător.

Din condiția $a_1 \in [0, 1]$ deducem $a_2 = a_1(1 - a_1) \in [0, 1]$ și în general dacă $a_n \in [0, 1]$, atunci $a_{n+1} = a_n(1 - a_n) \in [0, 1]$. Pe baza principiului inducției matematice $a_n \in [0, 1]$, $\forall n \geq 1$. Șirul fiind descrescător și mărginit, este convergent. Dacă l este limita șirului, atunci trecând la limită în relația de recurență rezultă că $l = l - l^2$, deci $l = 0$. Astfel $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Aplicație (lema lui Cesaro)

Orice șir mărginit are un subșir convergent.

Demonstrație. Notăm cu M și cu m supremumul respectiv infimumul mulțimii H formată din termenii șirului. Dacă H este mulțime finită, atunci cel puțin o valoare se repetă de o infinitate de ori, deci există un subșir constant și acest subșir este convergent. Dacă H este mulțime infinită atunci ideea demonstrației este următoarea observație:

Dacă intervalul $[a, b]$ conține o infinitate de elemente dintr-o mulțime H , atunci unul

din intervalele $\left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ și $\left[\frac{a+b}{2}, b \right]$ conține o infinitate de elemente ale mulțimii H .

Această observație este trivială, deoarece în caz contrar reuniunea celor două subintervale ar conține un număr finit de elemente ale mulțimii H . Folosind această observație în mod repetat putem construi șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ pentru care $a_1 = m$, $b_1 = M$ și $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ este jumătatea intervalului $[a_n, b_n]$ care conține o

infinitate de elemente ale mulțimii H . Astfel $b_n - a_n = \frac{M - m}{2^{n-1}}$, ambele șiruri sunt monotone și mărginite. În consecință șirurile sunt convergente și pe baza egalității $b_n - a_n = \frac{M - m}{2^{n-1}}$ rezultând că șirurile au aceeași limită. Dacă l este limita comună a celor două șiruri, atunci orice vecinătate de rază $\varepsilon > 0$ conține o infinitate de termeni ai șirului, deci putem extrage un subșir care să converge către l .

Exercițiu. Demonstrați că următoarele șiruri sunt convergente și calculați limita lor:

- a) $a_n = \sqrt[n]{a}$, unde $a \in (0, \infty)$ este un număr fixat;
- b) $a_n = \sqrt[n]{n}$, $\forall n \geq 1$.

Criteriul raportului

În paragraful precedent am văzut că progresele geometrice care au rația mai mică decât 1 sunt convergente și au limita 0. Un șir poate să aibă aceeași comportare chiar dacă nu este progresie geometrică, dar poate fi majorat de o progresie cu această proprietate. Următoarea teoremă exprimă de fapt condițiile cu ajutorul cărora un șir poate fi comparat cu o progresie geometrică.



Teoremă. (criteriul raportului) Dacă $(a_n)_{n \geq 1}$ este un șir format din termeni pozitivi, și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, atunci au loc următoarele implicații:

1. Dacă $l < 1$, atunci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și are limita 0.
2. Dacă $l < 1$, atunci șirul $x_n = \sum_{k=1}^n a_k$ este convergent.
3. Dacă $l > 1$, atunci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este divergent și are limita ∞ .
4. Dacă $l > 1$, atunci șirul $x_n = \sum_{k=1}^n a_k$ este divergent.
5. Dacă $l = 1$, atunci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ poate fi convergent, dar poate fi și divergent.

Demonstrație. 1. Datorită condiției $l < 1$, pentru orice $\varepsilon > 0$ cu proprietatea $l + \varepsilon < 1$ există numărul natural $n(\varepsilon)$ cu proprietatea $\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon < 1, \forall n \geq n(\varepsilon)$. Astfel $a_{n+k} \leq a_n \cdot (l + \varepsilon)^k, k \geq 1$, deci $a_n \leq a_{n(\varepsilon)} \cdot (l + \varepsilon)^{n-n(\varepsilon)}$, dacă $n \geq n(\varepsilon)$. ε fiind fixat (deci și $n(\varepsilon)$ este fixat) pe baza criteriului majorării rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

2. Pe baza inegalităților precedente

$$x_n \leq \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)-1} a_k + a_{n(\varepsilon)} \cdot \sum_{k=0}^{n-n(\varepsilon)} (l + \varepsilon)^k \leq \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)-1} a_k + a_{n(\varepsilon)} \cdot \frac{1}{1 - l - \varepsilon},$$

deci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior. Pe de altă parte termenii șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ fiind pozitivi $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător, deci este convergent.

3-4. Din condiția $l > 1$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ cu proprietatea $l - \varepsilon > 1$ există numărul natural $n(\varepsilon)$ cu proprietatea $\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \varepsilon > 1, \forall n \geq n(\varepsilon)$. Din această inegalitate rezultă că $a_{n+k} > a_n \cdot (l - \varepsilon)^k, k \geq 1$, deci $a_n > a_{n(\varepsilon)} \cdot (l - \varepsilon)^{n-n(\varepsilon)}$, dacă $n \geq n(\varepsilon)$. ε fiind fixat șirul cu termenul general $a_{n(\varepsilon)} \cdot (l - \varepsilon)^{n-n(\varepsilon)}$ are limita ∞ , deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. De aici divergența șirului x_n este evidentă, deoarece $x_n > a_n$.

5. Pentru $a_n = n^2$ respectiv $a_n = \frac{1}{n^2}$ limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ este 1, dar în primul caz atât șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cât și $(x_n)_{n \geq 1}$ este divergent, iar în al doilea caz ambele sunt convergente.



Aplicații

1. Să se studieze convergența șirului $a_n = P(n)a^n$, unde P este o funcție polinomială de grad m și $a \in (-1, 1)$.

Din relația $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{P(n+1)}{P(n)} \right| \cdot |a|$ rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |a|$, deci pentru $|a| < 1$ limita șirului este 0.

2. Să se calculeze limita șirului $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $n \geq 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}, \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Exerciții și probleme

1. Considerăm următoarele posibile proprietăți ale șirului $(x_n)_{n \geq 0}$:

p_1 : $(x_n)_{n \geq 0}$ este monoton; p_2 : $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit;

p_3 : $(x_n)_{n \geq 0}$ are limită; p_4 : $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent;

p_5 : $(x_n)_{n \geq 0}$ este periodic; p_6 : $(x_n)_{n \geq 0}$ este constant.

a) Scrieți (justificând răspunsul) toate implicațiile $p_i \rightarrow p_j$.

b) Scrieți (justificând răspunsul) toate implicațiile $(p_i \wedge p_j) \rightarrow p_k$.

2. Studiați monotonia următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{a^n}{n!}$, $a > 0, n \geq 1$; b) $a_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$, $a > 0, n \geq 1$;

c) $a_n = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\dots(b+n)}$, $0 < a < b, n \geq 1$;

3. Demonstrați că dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ are termeni pozitivi, iar șirul $x_n = a_{n+1} - \alpha \cdot a_n$ este convergent pentru un număr $0 < \alpha < 1$, atunci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

4. Demonstrați că dacă termenii șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ sunt numere pozitive și satisfac inegalitatea $a_{n+2} \leq \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$ pentru orice $n \geq 1$, atunci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Numărul e

Să studiem convergența șirului $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Metoda 1. Aplicăm inegalitatea lui Bernoulli:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrăm că șirul este crescător și mărginit superior. $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{9}{4}$, $a_3 = \frac{64}{27}$,

deci $a_1 < a_2 < a_3$. Demonstrăm că $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = a_n$.

Prin transformări echivalente obținem:

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n > 1 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} \right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} > 1.$$

$$\left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} \right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2 + 2n + 1} \right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} >$$

$$> \left(1 - \frac{n}{n^2 + 2n + 1} \right) \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1,$$

unde am aplicat inegalitatea lui Bernoulli. Astfel $a_{n+1} > a_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrăm mărginirea șirului folosind dezvoltarea binomului:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + C_n^n \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n} \right),$$

deci:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + 2 = 3.$$

În consecință șirul este mărginit ($2 \leq a_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$) și crescător, deci este convergent și limita șirului satisface inegalitățile $2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 3$.

Metoda 2. Demonstrăm că șirul $e_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ este crescător, șirul

$\bar{e}_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$ este descrescător și că cele două șiruri au aceeași limită. Inegalitatea

$e_n \leq e_{n+1}$ este echivalentă cu inegalitatea $\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \cdot 1 \leq \frac{n+2}{n+1}$, și aceasta este

inegalitatea mediilor pentru numerele $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1 + \frac{1}{n}$ și $x_{n+1} = 1$.

În mod similar inegalitatea $\bar{e}_{n+1} \leq \bar{e}_n$ poate fi pusă sub următoarele forme:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+2} < \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} < \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+2} \Leftrightarrow \sqrt[n+2]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}} \cdot 1 < \frac{n+1}{n+2}.$$

Ultima inegalitate este inegalitatea mediilor pentru numerele

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = \frac{n}{n+1} \text{ și } x_{n+2} = 1.$$

Pe de altă parte $e_n < \bar{e}_n$, deci ambele șiruri sunt convergente deoarece termenii șirului

$(e_n)_{n \geq 1}$ sunt majorați de termenii șirului $(\bar{e}_n)_{n \geq 1}$ și termenii șirului $(\bar{e}_n)_{n \geq 1}$ sunt minorați de termenii șirului $(e_n)_{n \geq 1}$ datorită inegalităților de mai jos:

$$e_1 < e_2 < e_3 < \dots < e_n < \bar{e}_n < \dots < \bar{e}_3 < \bar{e}_2 < \bar{e}_1.$$

Astfel dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = l$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{e}_n = \bar{l}$, atunci din relația $\bar{e}_n = e_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ rezultă că cele două limite coincid. Pe de altă parte $e_1 = 2$ și $\bar{e}_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^6 \simeq 2,985984... < 3$, deci $2 < e_n < 3, \forall n \geq 1$.

Limita șirului $(e_n)_{n \geq 1}$ se notează cu e . Valoarea aproximativă a acestei constante este $e = 2,718281...$. Numărul e este baza logaritmului natural notat cu $\ln x$.

Pe baza celor precedente: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$

Consecință. Din inegalitățile $e_n < e_{n+1}$ și $\bar{e}_{n+1} < \bar{e}_n$ rezultă că

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, n \geq 1.$$

Aplicație. Să studiem convergența șirului $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n, n \geq 1$

Inegalitatea $c_{n+1} < c_n$ este echivalentă cu $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n$, deci pe baza

inegalității precedente șirul $(c_n)_{n \geq 1}$ este descrescător. Pe de altă parte putem scrie:

$$\ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{2}$$

$$\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{3}$$

$$\dots \dots \dots < \frac{1}{n}$$

$$\frac{\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n-1}}{\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}}$$

Deci $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < c_n$. Astfel șirul este mărginit inferior (are termeni pozitivi) și fiind descrescător este convergent. Limita șirului $(c_n)_{n \geq 1}$ se notează cu c și se numește constanta lui Euler. Este o problemă încă nerezolvată, dacă această constantă este un număr rațional sau nu.

Probleme propuse

1. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$.

2. Arătați că dacă pentru șirul cu termeni pozitivi $(a_n)_{n \geq 1}$ are loc egalitatea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = l > 0, \text{ atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$





Cazul de nedeterminare 1^∞

Cazul de nedeterminare de forma 1^∞ se poate transforma în alte nedeterminări folosind următoarea teoremă:



Teoremă. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$, dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ (sau $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$) și $(x_n)_{n \geq 1}$ este un șir de numere reale.

Demonstrație. Presupunem că $x_n > 0, \forall n \geq 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Dacă $[x_n] = m_n$, atunci din condiția $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \infty$. Pe baza proprietăților părții întregi avem: $m_n \leq x_n < m_n + 1$, deci $\frac{1}{m_n} \geq \frac{1}{x_n} > \frac{1}{m_n + 1}$, deci

$$1 + \frac{1}{m_n} \geq 1 + \frac{1}{x_n} > 1 + \frac{1}{m_n + 1}.$$

Ridicând această inegalitate la puterea x_n deducem

$$\left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{x_n} \geq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} > \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{x_n}.$$

Pe de altă parte $\left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{x_n} > \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n}$ și $\left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n + 1}$, deci

$$\left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n + 1} \geq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} > \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n}.$$

Dar $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$, deci pe baza criteriului cleștelui

obținem: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

Folosind un raționament similar putem arăta și următoarea proprietate:

Consecințe

1. Dacă $x_n > 0 \forall n \geq 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$.

2. Dacă $-1 < x_n < 0 \forall n \geq 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$.

Într-adevăr $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + x_n}\right)^{-\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left((1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}}\right)^{\frac{1}{1 + x_n}} = e$, unde

$$0 < y_n = \frac{-x_n}{1 + x_n} \rightarrow 0.$$

3. Pe baza consecințelor anterioare rezultă că dacă $-1 < x_n \forall n \geq 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$,

atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$.

Exemple

1. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3}{n^2} \right)^{n^2 - 2}$.

Avem cazul de nedeterminare 1^∞ și încercăm să aducem șirul la forma $(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}}$ cu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3}{n^2} \right)^{n^2 - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n^2} \right)^{\frac{n^2 \cdot 3 \cdot (n^2 - 2)}{3 \cdot n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{3}} = e^3$$

2. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n\sqrt{n} - n + 1}{n\sqrt{n} + n + 1} \right)^{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n\sqrt{n} - n + 1}{n\sqrt{n} + n + 1} \right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2n}{n\sqrt{n} + n + 1} \right)^{\frac{n\sqrt{n} + n + 1}{2n} \cdot \frac{-2n\sqrt{n}}{n\sqrt{n} + n + 1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Exerciții și probleme

1. Calculați următoarele limite:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 3}{n + 1} \right)^{3n - 2}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 2}{2n + 1} \right)^{3n - 2}$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + n + 1} \right)^n$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + \sqrt{n}}{n + 3\sqrt{n} + 2} \right)^{n^2}$;

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right)^n$; f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$; g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sum_{k=1}^n k}{n^3} \right)^n$; h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{1}{n} \right)^n$.

2. Demonstrați că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, atunci

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = 1$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = 1$.

3. Demonstrați că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n} = e^a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \ln a$.

4. Calculați limitele a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^p \sqrt[k]{a_k}}{p} \right)^n$.

Teorema Cezăro-Stolz

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir oarecare, iar $(b_n)_{n \geq 1}$ un șir strict monoton și nemărginit. Dacă există limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$, atunci există și limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ și are loc egalitatea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l.$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ un număr fixat. Conform condițiilor există $N \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea

$$\left| \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ oricare ar fi } n > N. \text{ Astfel } -\frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l < \frac{\varepsilon}{2}, n > N$$

deci
$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < l + \frac{\varepsilon}{2}, n > N.$$

Înmulțind cu $b_{n+1} - b_n > 0$ rezultă

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2} \right) (b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < \left(l + \frac{\varepsilon}{2} \right) (b_{n+1} - b_n), \text{ dacă } n > N.$$

Pentru $n \in \{N+1, N+2, \dots, n, \dots\}$ obținem

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2} \right) (b_{N+k+1} - b_{N+k}) < a_{N+k+1} - a_{N+k} < \left(l + \frac{\varepsilon}{2} \right) (b_{N+k+1} - b_{N+k}).$$

Însumând aceste inegalități obținem

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2} \right) \sum_{k=1}^n (b_{N+k+1} - b_{N+k}) < \sum_{k=1}^n (a_{N+k+1} - a_{N+k}) < \left(l + \frac{\varepsilon}{2} \right) \sum_{k=1}^n (b_{N+k+1} - b_{N+k}).$$

Dar două din cele trei sume se pot calcula, și astfel obținem:

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2} \right) (b_{N+n+1} - b_{N+1}) < (a_{N+n+1} - a_{N+1}) < \left(l + \frac{\varepsilon}{2} \right) (b_{N+n+1} - b_{N+1}),$$

adică:
$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2} \right) (b_{N+n+1} - b_{N+1}) + a_{N+1} < a_{N+n+1} < \left(l + \frac{\varepsilon}{2} \right) (b_{N+n+1} - b_{N+1}) + a_{N+1}.$$

Împărțind această inegalitate cu b_{N+n+1} rezultă că

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{(b_{N+n+1} - b_{N+1})}{b_{N+n+1}} + \frac{a_{N+1}}{b_{N+n+1}} < \frac{a_{N+n+1}}{b_{N+n+1}} < \left(l + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{(b_{N+n+1} - b_{N+1})}{b_{N+n+1}} + \frac{a_{N+1}}{b_{N+n+1}},$$

adică
$$-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{b_{N+1}}{b_{N+n+1}} - \frac{lb_{N+1}}{b_{N+n+1}} + \frac{a_{N+1}}{b_{N+n+1}} < \frac{a_{N+n+1}}{b_{N+n+1}} - l < \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon b_{N+1}}{2b_{N+n+1}} - \frac{lb_{N+1}}{b_{N+n+1}} + \frac{a_{N+1}}{b_{N+n+1}}.$$

Pe de altă parte
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_{N+1}}{b_{N+n+1}} \cdot \frac{\varepsilon}{2} - \frac{lb_{N+1}}{b_{N+n+1}} + \frac{a_{N+1}}{b_{N+n+1}} \right) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\varepsilon}{2} \frac{b_{N+1}}{b_{N+n+1}} - \frac{lb_{N+1}}{b_{N+n+1}} + \frac{a_{N+1}}{b_{N+n+1}} \right),$$

deoarece $\frac{1}{b_{N+n+1}} \rightarrow 0$ (șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ fiind nemărginit). Criteriul cleștelui implică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} - l \right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Observație. Teorema este valabilă și în cazul în care $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ sunt șiruri cu limita 0 și $(b_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător (a se vedea RMT 2/1992, articolul semnat de Irina Rizzoli)

Consecințe

1. Dacă șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = l$.

Demonstrație. Șirurile $a_n = \sum_{k=1}^n x_k$ și $b_n = n$ satisfac condițiile teoremei Cesaro-

Stolz și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = l$.

2. Dacă șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are termeni pozitivi și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n} = l.$$

Demonstrație. Șirul $y_n = \ln \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln x_k$ este convergent și are limita $\ln l$, pe baza proprietății precedente. De aici rezultă că șirul $z_n = e^{y_n}$ are limita $e^{\ln l} = l$.

3. Dacă pentru șirul cu termeni pozitivi $(x_n)_{n \geq 1}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

Demonstrație. Șirurile $a_n = \ln x_n$ și $b_n = n$ satisfac condițiile teoremei Cesaro-Stolz, și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_{n+1} - \ln x_n}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ln l,$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln x_n = \ln l$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

Exerciții

1. Calculați următoarele limite folosind criteriul Cesaro-Stolz :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^5}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}^*$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^k}{n^n}$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$;

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + 3! + \dots + n!}{(2n)!}$; f) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} - \frac{1}{p+1} \right)$.

2. Calculați următoarele limite folosind consecințele criteriului Cesaro-Stolz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n \sqrt[3]{k}}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k + 1}{k^4 + 2k}}$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)! \cdot 6^n}}$;

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^{3n} (n!)^3}{(3n)!}}$; e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$; f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \dots \cdot \sin \frac{\pi}{n}}$.

Aplicații ale șirurilor la rezolvarea unor probleme

1. Determinați numărul real x , dacă $[nx^2] = [nx] + n$, pentru orice $n \geq 100$, unde $[z]$ reprezintă partea întregă a numărului z .

Soluție. Prima dată demonstrăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[ny]}{n} = y$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$. Din definiția părții întregi rezultă $[ny] \leq ny < [ny] + 1$,

adică

$$y - \frac{1}{n} < \frac{[ny]}{n} \leq y.$$

Trecând la limită în această inegalitate (pe baza criteriului cleștelui) rezultă

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[ny]}{n} = y$. Astfel dacă împărțim ambii membri ai ecuației date și trecem la limită

cu $n \rightarrow \infty$, obținem: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[nx^2]}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[nx]}{n} + 1$, adică $x^2 = x + 1$.

Rezolvând această ecuație de gradul 2 obținem $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Pentru aceste valori

obținem $x_{1,2}^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, deci $[nx_{1,2}^2] = \left[n \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right] = \left[n + n \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right] = n + [nx_{1,2}]$,

ceea ce arată că valorile determinate satisfac într-adevăr egalitatea dată pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (deci și pentru $n \geq 100$).

2. Fie $x, y \in \mathbb{R}^*$ două numere diferite. Demonstrați că dacă $[nx][ny]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci x, y și $\frac{y}{x}$ sunt numere întregi. (András Szilárd)

Soluție. Din axioma lui Arhimede rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $[nx] \neq 0$, pentru orice $n \geq n_0$. Conform condițiilor date funcția $f: \{x \in \mathbb{N} | x \geq n_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(n) = \frac{[ny]}{[nx]}$ ia numai valori întregi. Pe de altă parte

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[ny]}{[nx]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[ny]}{n} \cdot \frac{n}{[nx]} = \frac{y}{x} \in \mathbb{R}$, deci există n_1 astfel încât funcția f este constantă pentru $n \geq n_1$. Astfel $\frac{y}{x}$ este în imaginea funcției f , deci este un

număr întreg. Notăm cu $k \in \mathbb{Z}$ valoarea acestui raport. Din proprietatea dată rezultă că $[nkx] = k[nx]$, $\forall n \geq n_1$ și \cdot . Dacă $nx = [nx] + \alpha_n$, atunci $nkx = k[nx] + k\alpha_n$, deci egalitatea $[nkx] = k[nx]$ are loc pentru orice $\forall n \geq n_1$, dacă și numai dacă

$\alpha_n = \{nx\} < \frac{1}{k}$, $\forall n \geq n_1$. $nx = n[x] + n\{x\}$, deci $\{nx\} = \{n\{x\}\} < \frac{1}{k}$, $\forall n \geq n_1$.

Dacă $\{x\} > 0$, există datorită axiomei lui Arhimede $n > n_1$ astfel încât $(n - n_1) \cdot \{x\} > 1$, deci șirul $([n\{x\}])_{n \geq n_1}$ nu este constant, în consecință există doi termeni consecutivi diferiți, adică $\exists n \geq 1$ cu $[(n+1) \cdot \{x\}] - [n \cdot \{x\}] = 1$. Mai mare de 1 nu poate fi, deoarece diferența numerelor este $\{x\} < 1$.

Știind că $\{n\{x\}\} < \frac{1}{k}$, rezultă că $\{x\} > 1 - \frac{1}{k}$, de unde toți termenii șirului

$([n\{x\}])_{n \geq n_1}$ sunt diferiți, ceea ce conduce la relația $[(n+1)\{x\}] = [n\{x\}] + 1$ $\forall n \geq n_1$, de unde prin inducție matematică deducem că $[(n+m)\{x\}] = [n\{x\}] + m$

$\forall n \geq n_1$ și $\forall m \in \mathbb{N}$. Având $\{x\} < 1$ și șirul $1 - (1/n) \rightarrow 1$, rezultă că există $m \in \mathbb{N}$ astfel ca $\{x\} < 1 - \frac{1}{m}$, de aici obținem $m\{x\} < m - 1$, deci

$$[n\{x\}] + m = [n\{x\} + m\{x\}] \leq [n\{x\} + m - 1] = [n\{x\}] + m - 1 \quad \text{contradicție.}$$

Deci $\{x\} = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.

Folosind un raționament analog rezultă că și partea fracționară a numărului y este 0, deci $y \in \mathbb{Z}$. Astfel $x \in \mathbb{Z}$, $\frac{y}{x} \in \mathbb{Z}$, deci și $y \in \mathbb{Z}$.

3. Pe o tablă goală scriem perechea de numere (x_0, y_0) și în fiecare pas ștergem perechea de pe tablă și în locul perechii (x, y) scriem perechea $\left(\frac{6x + 3y}{5}, \frac{3x + 14y}{5}\right)$. Care este condiția necesară și suficientă pentru ca să apară două numere egale? (Concursul Radó Ferenc, 2003)

Soluție. Notăm cu $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ perechea care se află pe tablă după n pași. Recurența dată

se scrie sub forma $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$, unde $A = \begin{bmatrix} 6/5 & 3/5 \\ 3/5 & 14/5 \end{bmatrix}$. Astfel obținem

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{bmatrix}, \text{ unde } a_n = \frac{9+3^n}{10}, b_n = \frac{3^{n+1}-3}{10} \text{ și } c_n = \frac{3^{n+2}+1}{10}, \forall n \geq 1.$$

Dacă $x_n = y_n = z$, atunci obținem sistemul liniar $\begin{cases} a_n x_0 + b_n y_0 = z \\ b_n x_0 + c_n y_0 = z \end{cases}$. Folosind regula

lui Cramer rezultă $x_0 = \frac{z(c_n - b_n)}{\det A^n}$ și $y_0 = \frac{z(a_n - b_n)}{\det A^n}$, deci $\frac{x_0}{y_0} = \frac{c_n - b_n}{a_n - b_n} = \frac{3^{n+1} + 2}{6 - 3^n}$.

De aici $3^n = \frac{6x_0 - 2y_0}{x_0 + 3y_0}$, deci condiția necesară și suficientă pentru apariția a două

numere egale este $\log_3 \frac{6x_0 - 2y_0}{x_0 + 3y_0} \in \mathbb{N}$.

4. Considerăm șirul definit prin relațiile $d_1 = 2$,

$$d_{n+1} = \sqrt{d_n^2 + \frac{3 \cdot (-1)^n + 1}{2} n + 2 \cdot (-1)^n}, \quad \forall n \geq 1.$$

a) Să se demonstreze că dacă M și N sunt două puncte fixate în plan și $MN = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există un punct P_n în plan pentru care $P_n M = d_{2n-1}$ și $P_n N = d_{2n}$.

b) Să se demonstreze că dacă toate punctele $(P_n)_{n \geq 1}$ se află în același semiplan față de dreapta MN , atunci punctele $(P_n)_{n \geq 1}$ sunt coliniare. (Concursul Radó Ferenc, 2004)

Rezolvare. Din recurență $d_1 = 2$ și $d_2 = 1$, deci folosind teorema cosinusului rezultă $m(\widehat{MP_1N}) = 150^\circ$. Pe de altă parte $d_3 = \sqrt{7}$ și $d_4 = \sqrt{2}$. Dacă $\alpha = m(\widehat{P_2P_1N})$, atunci aplicând teorema cosinusului în triunghiurile MP_1P_2 și NP_1P_2 rezultă $\cos \alpha = \frac{x^2 - 1}{2x}$ și $\cos(210 - \alpha) = \frac{x^2 - 3}{4x}$, unde $P_1P_2 = x$. De aici $\sin \alpha = -(1 + \sqrt{3}) \frac{x^2 - \sqrt{3}}{2x}$, și pe

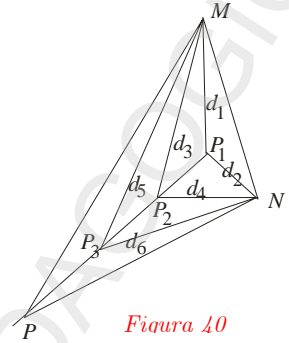


Figura 40

baza relației $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ rezultă:

$$-(1 + \sqrt{3})^2 \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 3)}{4x^2} = \frac{(x^2 - 1)^2}{4x^2}. \text{ Astfel } x^2 \in \left[1, \frac{29 + 4\sqrt{3}}{13}\right]. \text{ Dacă } x^2 = 1,$$

atunci $P_1P_2 = 1$, $m(\widehat{P_2P_1N}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{P_2P_1M}) = 120^\circ$. Deoarece acest caz furnizează o construcție posibilă putem renunța la cazul $x^2 = \frac{29 + 4\sqrt{3}}{13} > 1$. În continuare vom demonstra că toate punctele P_j , $j \geq 3$ se află pe dreapta P_1P_2 .

Folosind recurența obținem $d_{2n+2}^2 = d_{2n}^2 + 2n - 1$, deci:

$$d_{2n+2}^2 = 1 + \sum_{k=1}^n (2k - 1) = 1 + n^2 \quad \text{și} \quad d_{2n+1}^2 = 3 + (n + 1)^2 = n^2 + 4 + 2n, \quad \text{dacă}$$

$n \geq 1$. Dacă considerăm pe dreapta P_1P_2 punctele $(P_{n+1})_{n \geq 1}$ astfel ca $P_1P_{n+1} = n$,

$\forall n \geq 1$, atunci $MP_{n+1}^2 = n^2 + 4 + 2 \cdot 2 \cdot n \cdot \frac{1}{2} = d_{2n+1}^2$ și $NP_{n+1}^2 = 1 + n^2 = d_{2n+2}^2$.

Din unicitatea construcției rezultă proprietatea cerută.

5. Să se demonstreze că dacă n progresii aritmetice având rațiile r_1, r_2, \dots, r_n formează o partiție a mulțimii numerelor naturale (fiecare număr natural aparține exact

unei progresii), atunci $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} = 1$.

Soluție. Vom prezenta două soluții:

I. Fie a_j , $j = \overline{1, n}$ primul element din progresia cu rația r_j și considerăm sumele

$$S_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^{a_j + kr_j} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{a_j + kr_j} = \frac{x^{a_j}}{1 - x^{r_j}}, \text{ pentru } x \in (-1, 1).$$

Deoarece $(a_j + kr_j)_{k \geq 0}$ sunt progresii aritmetice și formează a partiție a mulțimii \mathbb{N} ,

$$\text{avem } \sum_{j=1}^n S_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}.$$

Astfel $\sum_{j=1}^n \frac{x^{a_j}}{1 - x^{r_j}} = \frac{1}{1 - x}$, deci $\sum_{j=1}^n \frac{x^{a_j}}{1 + x + x^2 + \dots + x^{r_j - 1}} = 1$. Dacă $x \rightarrow 1$, atunci

membrul stâng are limita $\sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j}$, deci $\sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} = 1$.

Observație. r_1, r_2, \dots, r_n nu pot fi toate diferite.

Numerele S_j există și sunt aceleași pentru numere complexe cu $|x| < 1$. Dacă

$r = \max\{r_j \mid j = \overline{1, n}\}$, atunci există cel puțin două valori $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ pentru care $r = r_j$. În caz contrar dacă x tinde către rădăcina de ordin n a unității r cu cel mai mic argument nenul, atunci membrul stâng tinde la ∞ , ceea ce este imposibil. (Dacă $z_n = x_n + iy_n$ este un șir de numere complexe, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x + iy$ dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.)

II. Fie a_1, a_2, \dots, a_n primii termeni ai progresiilor și N un număr natural nenul.

Există exact N numere naturale mai mici decât N ; anume $0, 1, 2, \dots, N - 1$

Să presupunem că k_i termeni ai progresiei de ordin i sunt mai mici decât N : aceștia sunt $a_i, a_i + r_i, \dots, a_i + (k_i - 1)r_i$ și atunci avem $a_i + (k_i - 1)r_i < N$ și $a_i + k_i r_i \geq N$.

Rezultă $\frac{N - a_i}{r_i} \leq k_i < \frac{N - a_i}{r_i} + 1$ (1)

Avem, $k_1 + k_2 + \dots + k_n = N$ și însumând relațiile (1) deducem

$\frac{N - a_1}{r_1} + \frac{N - a_2}{r_2} + \dots + \frac{N - a_n}{r_n} \leq N < \frac{N - a_1}{r_1} + \frac{N - a_2}{r_2} + \dots + \frac{N - a_n}{r_n} + n$, de

unde $1 - \frac{n}{N} < \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} - \frac{1}{N} \left(\frac{a_1}{r_1} + \frac{a_2}{r_2} + \dots + \frac{a_n}{r_n} \right) \leq 1$

Trecând la limită după N ; rezultă egalitatea cerută.

6. O expediție sosește la marginea deșertului. Pentru a traversa deșertul au la dispoziție un vehicul în care se poate încărca combustibil (cu rezerve cu tot) pentru a parcurge distanța de x km. În schimb au la dispoziție o cantitate nelimitată de combustibil și pot crea depozite de combustibil în deșert (tot cu ajutorul vehiculului). Să se demonstreze că oricât de lat ar fi deșertul, expediția poate să traverseze.

Soluție. Pentru a străbate ultima porțiune de x km au nevoie de un depozit în care să aibă combustibilul necesar pentru acești x km. Acest depozit poate fi creat în trei ture dacă cu $\frac{x}{3}$ km înainte pot crea un depozit cu combustibil suficient pentru $2x$ km (în prima tură pornim cu combustibil pentru x km și ajungem cu combustibil pentru $\frac{2x}{3}$ km, din care depozităm $\frac{x}{3}$, reținând $\frac{x}{3}$ pentru întoarcere, a doua tură la fel, astfel rămâne $\frac{2x}{3}$, din care nu mai trebuie să reținem pentru întoarcere). Acest depozit poate

fi creat dacă cu $\frac{x}{5}$ km înainte reușim să depozităm combustibil pentru $3x$ km

(deoarece în 3 ture consumăm combustibil pentru $2 \cdot \frac{2x}{5} + \frac{x}{5} = x$ km, și astfel depozităm combustibil pentru $2 \cdot \frac{3x}{5} + \frac{4x}{5} = 2x$ km). Folosind acest raționament la pasul j avem nevoie de $(j+1)$ ture în care putem crea un depozit suficient pentru jx km cu depozitul precedent la $\frac{x}{2j+1}$ km distanță cu combustibil pentru $(j+1)x$ km (combustibilul consumat fiind $j \cdot \frac{2x}{2j+1} + \frac{x}{2j+1} = x$ și cel depozitat $j \cdot \frac{(2j-1)x}{2j+1} + \frac{2jx}{2j+1} = jx$). Distanțele între punctele de depozit sunt $x, \frac{x}{3}, \frac{x}{5}, \dots, \frac{x}{2j+1}$, deci distanța parcursă este $x \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2j+1} \right)$. Pe de altă parte șirul $x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1}$ este divergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, deci dacă d este lățimea deșertului, atunci există $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $x_n > d$. Astfel expediția poate străbate deșertul folosind algoritmul precedent.

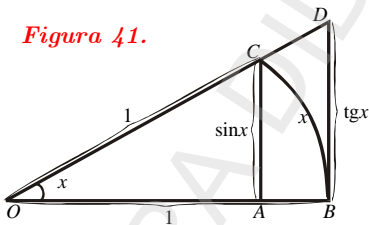
Probleme rezolvate

1. Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin relațiile $a_1 = 1, a_{n+1} = \sin a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Să se demonstreze că șirul $(na_n^2)_{n \geq 1}$ este mărginit. Ce se poate afirma despre convergența șirului $(na_n^2)_{n \geq 1}$?

Soluție. Demonstrăm inegalitatea $\cos x < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, pentru $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Figura 41.



Pe figura 41 aria triunghiului OBC este $\frac{\sin x}{2}$, aria sectorului de cerc OBC este $\frac{x}{2}$ și aria triunghiului OBD este $\frac{\operatorname{tg} x}{2}$, deci are loc inegalitatea $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Deci rezultă $\sqrt{1+x^2} \cos x < \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} \cos x = \cos x \cdot \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$,

$$\cos x \cdot \sqrt{1+x^2} < 1 \Rightarrow \cos x < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ dacă } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Folosind metoda inducției matematice arătăm că $0 < a_n < 2\sqrt{\frac{1}{n}}$, $\forall n \geq 1$.

Pentru $n = 1$ avem $0 < a_1 = \sin 1 \leq 1 < 2\sqrt{\frac{1}{1}} = 2$, deci inegalitatea este adevărată;

Pentru $n = 2$ avem $0 < \sin(\sin 1) < 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, adevărat.

Dacă pentru un $k \geq 2$ fixat avem $a_k < 2\sqrt{\frac{1}{k}}$, atunci

$$a_{k+1} = \sin a_k < \sin\left(2\sqrt{\frac{1}{k}}\right),$$

$$0 < a_{k+1} = \sin a_k < \sin\left(2\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = 2 \sin \frac{1}{\sqrt{k}} \cos \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k}}},$$

$$a_{k+1} < 2 \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{k+1}{k}}} = 2\sqrt{\frac{1}{k+1}},$$

deci conform principiului inducției matematice inegalitatea este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Astfel deducem $0 \leq na_n^2 < 4$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul $(na_n^2)_{n \geq 1}$ este mărginit.

Se poate demonstra că șirul este monoton, deci este și convergent. Vom reveni asupra acestui șir după introducerea limitelor de funcții și a derivatelor.

2. Fie $a > 1$, să se studieze convergența șirului $(\sqrt[n]{a})_{n \geq 1}$.

Rezolvare. $n+1\sqrt[n+1]{a} < n\sqrt[n]{a}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deoarece ridicând la puterea $n(n+1)$ inegalitatea este echivalentă cu $a^n < a^{n+1}$. Astfel șirul $(\sqrt[n]{a})_{n \geq 1}$ este descrescător și

mărginit inferior (deoarece $\sqrt[n]{a} > 1$), deci este convergent. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ și limita exponentului este 0, deci conform operațiilor cu limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Să demonstrăm această egalitate folosind criteriul cu ε . Inegalitățile $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$, $\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$ și $\sqrt[n]{a} < \varepsilon + 1$ sunt echivalente, iar ultima inegalitate este echivalentă cu $\lg \sqrt[n]{a} < \lg(\varepsilon + 1)$, adică $\frac{\lg a}{n} < \lg(\varepsilon + 1)$, care este verificată pentru $n > \frac{\lg a}{\lg(\varepsilon + 1)}$

(deoarece $\varepsilon + 1 > 1$). Astfel $n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\lg a}{\lg(\varepsilon + 1)} \right\rceil + 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

3. Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Rezolvare. Prima dată demonstrăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$.

Demonstrăm această inegalitate folosind metoda inducției matematice:


Pentru $n = 1$, inegalitatea este adevărată deoarece $1 > \frac{1}{3}$.

Presupunem că inegalitatea are loc pentru n și arătăm că are loc și pentru $(n + 1)$.

$$(n + 1)! = (n + 1)n! > (n + 1)\left(\frac{n}{3}\right)^n = \left(\frac{n + 1}{3}\right)^{n+1} \cdot \frac{3}{\left(\frac{n + 1}{n}\right)^n} > \left(\frac{n + 1}{3}\right)^{n+1},$$

deoarece $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$. Conform principiului inducției matematice inegalitatea are loc

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Astfel $0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{3}{n}$ și criteriul cleștelui implică $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

 **Observație¹.** Dacă folosim consecința criteriului Cesaro-Stolz, atunci obținem o demonstrație mult mai simplă și mai schematică.

4. Să se studieze convergența șirului $\left(\frac{3^n}{n!}\right)_{n \geq 1}$.

Rezolvare. Dacă $n > 3$, atunci

$$0 < \frac{3^n}{n!} = \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{3}{n} \leq \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} = \frac{32}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n. \quad \text{Cum } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0, \quad \text{din}$$

criteriul cleștelui rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.

 **Observație.** Dacă folosim criteriul raportului, putem evita majorările concrete.

5. Să se studieze convergența șirului $\left(\frac{n^3}{5^n}\right)_{n \geq 1}$.

Rezolvare. $\frac{n^3}{5^n} = \left(\frac{n}{\sqrt[3]{5^n}}\right)^3$, deci este suficient să studiem șirul $a_n = \frac{n}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^n}$.

Inegalitatea $\sqrt[3]{5} > 1$ sugerează că numitorul crește mult mai rapid decât numărătorul, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{5^n}} = 0$. Fie $\sqrt[3]{5} = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$. Astfel avem

$$0 < \frac{n}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^n} = \frac{n}{(1 + \alpha)^n} < \frac{n}{1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \dots} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2}.$$

Pe de altă parte $\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2} = \frac{2}{(n-1)\alpha} \rightarrow 0$, deci conform criteriului cleștelui șirul

$(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

¹ Soluțiile prezentate aici nu sunt cele mai simple și nici nu exemplifică eficacitatea criteriilor demonstrate, dar conțin totuși idei care se pot folosi și în alte cazuri.

De aici deducem că șirul $\left(\frac{n^3}{5^n}\right)_{n \geq 1} = (a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și are limita 0.

Observație. Folosind criteriul raportului obținem o rezolvare mai simplă.

6. Fie $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ și $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$. Să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e$.

Rezolvare. Șirul $(s_n)_{n \geq 1}$ este crescător, deoarece $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ și în plus este mărginit superior pentru că $s_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$. Astfel șirul $(s_n)_{n \geq 1}$ este convergent, și rămâne de arătat că are limita e .

Folosind binomul lui Newton deducem

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + n \frac{n-1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{n^n} \cdot \frac{1}{n!} \leq \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = s_n, \end{aligned}$$

deci $e_n \leq s_n$ și astfel $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \geq e$. (1)

Pe de altă parte fixând $k \in \mathbb{N}^*$, pentru $n > k$ neglijând termenii de rang mai mare decât $(k+1)$ din dezvoltarea binomului rezultă că:

$$\begin{aligned} e_n &> 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \cdot \frac{1}{3!} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Dar limita membrului stâng ($n \rightarrow \infty$) este e , iar limita membrului drept este chiar s_k :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right] = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}.$$

Astfel $e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!} = s_k$, deci $e \geq \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$. (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = e$. Convergența șirului $(s_n)_{n \geq 1}$ fiind mai rapidă este mai ușor de folosit în aproximarea numărului e .

7. Să se demonstreze că numărul e este irațional!

Demonstrație. Presupunem contrariul, deci $e = \frac{p}{q}$, unde $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Din inegalitățile $2 < e < 3$, rezultă că e nu este număr întreg, deci $q \geq 2$. Din problema precedentă $2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < e \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte pentru s_n din problema 6 avem:

$$\begin{aligned}
 s_{n+k} - s_n &= \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*. \\
 &\quad \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} < \\
 &< \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{1}{n+3} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+4)(n+5)} + \dots + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} \right) \\
 &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{2}{n+3} - \frac{1}{n+k} \right)
 \end{aligned}$$

Deci

$$s_{n+k} < 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{2}{n+3} - \frac{1}{n+k} \right) \right)$$

Trecând la limită după k în ultima inegalitate, obținem:

$$e \leq 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right), \text{ de unde}$$

$$\text{rezultă că } e < 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n! \cdot n}$$

Deci există $\theta_n \in (0, 1)$ astfel încât $e = 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}$. De aici rezultă că

$$\frac{p}{q} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{q!} + \frac{\theta_q}{q \cdot q!},$$

unde $0 < \theta_q < 1$. Înmulțind atât membrul stâng cât și membrul drept cu $q!$ deducem

$$p(q-1)! = \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) q! + \frac{\theta_q}{q}, \text{ unde } 0 < \frac{\theta_q}{q} < \frac{1}{q} < 1, \text{ deci } \frac{\theta_q}{q} \text{ nu este}$$

număr întreg. Pe de altă parte $p(q-1)!$ și $\left(2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) q!$ sunt numere întregi,

deci și numărul $\frac{\theta_q}{q}$ trebuie să fie întreg. Contradicția obținută implică faptul că e este

irațional.

8. Considerăm șirul definit prin $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, dacă $n \in \mathbb{N}^*$.

Să se studieze convergența șirului.

Rezolvare. Termenii șirului sunt $\sqrt{2}$, $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ..., $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$, ... Folosind principiul inducției matematice demonstrăm că șirul este crescător.

$a_2 > a_1$ și dacă $a_n > a_{n-1}$, atunci $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$, $a_n^2 = 2 + a_{n-1}$, deci

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) > a_n - a_{n-1}.$$

Din ipoteza de inducție deducem $a_{n+1} > a_n$ și astfel șirul este crescător. Pe de altă parte $a_1 = \sqrt{2} < 2$ și dacă $a_n < 2$, atunci $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$, deci tot pe baza principiului inducției matematice rezultă că $a_n < 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Șirul fiind crescător și mărginit superior este convergent. Dacă notăm cu a limita șirului, atunci trecând la limită în relația de recurență $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, obținem $a = \sqrt{2 + a}$ (deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$), deci $a = \frac{1 \pm 3}{2}$. Termenii șirului sunt numere pozitive, deci $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

Atragem atenția că trecerea la limită în recurență este posibilă numai după demonstrarea convergenței (sau pentru a obține un raționament intuitiv, care ulterior va fi transformat într-un raționament riguros). Exemplul următor arată că trecerea la limită în recurență, fără demonstrarea convergenței poate conduce la rezultate greșite. Dacă $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = 2a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci cu notația $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$ și astfel $a = 2a$. Această egalitate are loc numai pentru $a = 0$ (dacă $a \in \mathbb{R}$). Pe de altă parte termenul general este $a_n = 2^n$, iar șirul $(2^n)_{n \geq 1}$ nu este convergent. Raționamente de acest tip pot fi folosite tocmai pentru a arăta că anumite șiruri nu sunt convergente.

9. Determinați termenul general al șirului definit prin relațiile

$$x_n = x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + n + 1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \forall n \geq 2 \text{ și } x_1 = 1. \text{ Demonstrați că } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 1.$$

(Concursul Radó Ferenc, 2003)

Soluție. Am întocmit următorul tabel cu primii 16 termeni ai șirului:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
x_n	1	3	4	6	7	8	9	11	12	13	14	15	16	17	18	20
$x_n - n$	0	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4

Se poate observa că dacă indicele este între două puteri consecutive ale lui 2 termenii șirului sunt numere consecutive și dacă indicele este o putere a lui 2, atunci diferența între x_n și x_{n-1} este 2. Astfel diferența $x_n - n$ este k , dacă n este între 2^k și $2^{k+1} - 1$. Dacă $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$, atunci $k = \lceil \log_2 n \rceil$, deci termenul general ar fi $x_n = n + \lceil \log_2 n \rceil$. Demonstrăm această egalitate folosind metoda inducției matematice:

$$P(n): \quad x_k = k + \lceil \log_2 k \rceil, \forall k \leq 2^n - 1.$$

Pe baza tabelului de mai sus este adevărată pentru $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Dacă $P(n)$ este adevărată și $2^n \leq k \leq 2^{n+1} - 1$, atunci $2^{n-1} \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \leq 2^n - 1$, deci

$$\begin{aligned} x_k &= x_{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} + k + 1 - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left[\log_2 \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right] + k + 1 - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \\ &= n - 1 + k + 1 = k + n = k + \lceil \log_2 k \rceil, \end{aligned}$$

adică este adevărată și $P(n+1)$. Pe baza principiului inducției matematice

$$x_k = k + \lceil \log_2 k \rceil, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Pe de altă parte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x \cdot \ln 2} \stackrel{vH}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \cdot \ln 2} = 0$, deci folosind inegalitatea $-1 + \log_2 n < \lceil \log_2 n \rceil \leq \log_2 n$ și criteriul cleștelui rezultă $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 1$.

10. Termenii șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ satisfac relația de recurență $x_{n+1} = 2x_n + \left\lfloor \frac{x_n}{2} \right\rfloor$, $\forall n \geq 1$.

Determinați termenul general dacă $x_1 = 5$. (Concursul Radó Ferenc, 2004)

Soluție. Pe baza recurenței avem

$$x_2 = 10 + 2 = 12, x_3 = 24 + 3 = 27, x_4 = 54 + 3 = 57.$$

Folosind inducția după n , demonstrăm că $\left\lfloor \frac{x_n}{2^n} \right\rfloor = 3, \forall n \geq 2$, mai precis demonstrăm

afirmația: $P(n): \left\lfloor \frac{x_k}{2^k} \right\rfloor = 3, \forall 2 \leq k \leq n$.

Însumând egalitățile $\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{x_n}{2^n} + 3 \cdot \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{x_n}{2^n} = \frac{x_{n-1}}{2^{n-1}} + 3 \cdot \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{x_3}{2^3} = \frac{x_2}{2^2} + 3 \cdot \frac{1}{2^3}$

rezultă că $\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{x_2}{4} + \frac{3}{8} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) = 3 + \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$,

deci $4 > \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} > 3$ și astfel $\left\lfloor \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} \right\rfloor = 3$. Pe baza principiului inducției matematice

$\left\lfloor \frac{x_n}{2^n} \right\rfloor = 3, \forall n \geq 2$, deci $x_{n+1} = 12 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} - 3 = 15 \cdot 2^{n-1} - 3, \forall n \geq 2$.

Exerciții și probleme

I.

1. Studiați convergența următoarelor șiruri și calculați limita fiecărui șir convergent:

a) $a_n = \frac{n-2}{5n+1} - \frac{2n^2+1}{3n^2+2}$;

b) $a_n = \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{1+n-n^2}$;

c) $a_n = \frac{n}{1+3+5+\dots+(2n-1)}$;

d) $a_n = \frac{1+3+\dots+3^{n-1}}{9^n}$;

e) $a_n = \frac{3+6+9+\dots+3n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$;

f) $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$;

$$\text{g)} a_n = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}};$$

$$\text{h)} a_n = \frac{3n^2 + 2n + 1}{(n+1) + (n+2) + \dots + (n+n)};$$

$$\text{i)} a_n = \frac{\sqrt{2n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 1}}{n + 3};$$

$$\text{j)} a_n = \frac{(3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n}{\sqrt{n^4 + n^2 + 2}};$$

$$\text{k)} a_n = \frac{2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1)}{n + 5};$$

$$\text{l)} a_n = \frac{n^3}{\sqrt{n^4 + n + 1} + \sqrt{n^4 + 1}}.$$

2. Calculați limitele:

$$\text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 - 2n + 5); \quad \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} (-7n^3 + 2n^2 + 3); \quad \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n^5 - 3n^4 + 1}{2n^5 - n^2};$$

$$\text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n} - 2}{3n^2 + 1}; \quad \text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2\sqrt{2}n^4 + 3\sqrt{3}n^2 + n}{\sqrt{5}n^3 + 1}; \quad \text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n^2 + 2n - 3}{2n^3 - 5n^2 + 2};$$

$$\text{g)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2 + 2n - 3}{2n^3 - 5n^2 + 2}; \quad \text{h)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n^3} + 2n - 3}{-2n^2\sqrt{n} - 5n^2 + 2}; \quad \text{i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n-1};$$

$$\text{j)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}}; \quad \text{k)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt[3]{n^2+1}}{2\sqrt{n+1}}; \quad \text{l)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{-3n^3+2}}{\sqrt{2n+1}};$$

$$\text{m)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right]; \quad \text{n)} \lim_{n \rightarrow \infty} [5^n + (0,5)^n]; \quad \text{o)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 \left(\frac{5}{2} \right)^n - 3 \left(\frac{2}{5} \right)^n \right];$$

$$\text{p)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{4}{n^2+1} - (1,2)^n \right]; \quad \text{q)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^n}{3^n + 8^n}; \quad \text{r)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{2^{2n} - 1}.$$

3. Calculați următoarele limite:

$$\text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}; \quad \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k^2 - 4}; \quad \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)};$$

$$\text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}; \quad \text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}; \quad \text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot [(k+1)!]}{(n+1)!};$$

$$\text{g)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}; \quad \text{h)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k - 1}{(k+2)!};$$

$$\text{i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4k}{4k^4 + 1}; \quad \text{j)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}.$$

4. Calculați următoarele limite:

$$\text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)^2}{\sum_{k=1}^n (3k-2)^2}; \quad \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{3n^2 + 1}; \quad \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k(k+2)}{100n^3 + 5}; \quad \text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k(2k-1)}{C_{n+3}^n}.$$

5. Calculați și discutați următoarele limite:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - n + 1})$;

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 1} - \lambda \sqrt{n^2 - 1}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1})$;

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2n^3 + 1} - \lambda \sqrt[3]{n^3 - 1}$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + 2\sqrt{n+1}} - \sqrt{n + 4\sqrt{n+1}})$;

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(1-a^2)^2 n^2 + 2n}}{n}$;

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2} - n)$;

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 1} - \lambda \sqrt[3]{n^3 - 1}$;

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n + \sqrt{n - \sqrt{n}}}$;

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}$;

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - n^2 + 1})$;

l) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k (\sqrt[n]{n+a} - \sqrt[n]{n+b})$.

6. Calculați următoarele limite:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right)^{n^2 - 2}$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \right)^{3n+1}$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3}{3n^2} \right)^{n^2 - 2}$;

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 3}{n^2} \right)^{n^2 - 2}$;

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n\sqrt{n} + n - 1}{\sqrt{n^3 - 1}} \right)^{n - n^2}$;

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{4} - 2)$;

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2006} - \sqrt[n]{1989})$.

7. Determinați numerele $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n + 2} + an + b) = 1$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn + c} - n) = a$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{an^3 + bn^2 + cn + 1}{-cn^2 + 3} \right)^{(b+1)n+1} = e^{2b}$

8. Studiați convergența următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1}$; b) $a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \dots + \frac{1}{3^n+1}$;

c) $a_n = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!}$; d) $a_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$;

e) $a_n = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots + \frac{1}{n^x}$, $x \in (1, +\infty)$.

9. Arătați că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$.

10. Dacă $(a_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent rezultă că și $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent?

11. Studiați convergența șirului $(n \sin n)_{n \geq 1}$.

12. Pentru $|q| < 1$ considerăm șirul $a_n = 1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1}$. Demonstrați că acest șir este convergent și calculați limita sa.

- 13.** Fie $a_n = 1 - 2q + 3q^2 - 4q^3 + \dots + (-1)^{n+1} nq^{n-1}$, unde $|q| < 1$. Studiați convergența șirului și calculați limita în caz de convergență.
- 14.** Considerăm șirul $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Studiați convergența șirului și calculați limita în caz de convergență.
- 15.** Calculați limita șirului $(\sqrt[n]{a^n + b^n})_{n \geq 1}$, dacă $a > b > 0$.
- 16.** Calculați limita șirului $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, dacă $a > b > c > 0$.
- 17.** Calculați limita șirului $a_n = \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.
- 18.** Calculați limita șirului definit prin $a_n = \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^n$.
- 19.** Considerăm șirul $a_n = \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n}$, unde $|a| < 1$ și $|b| < 1$. Calculați limita șirului.
- 20.** Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2})$.
- 21.** Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}\right)$.
- 22.** Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n^2]{n^2} \sin(n!) }{n+1}$.
- 23.** Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n}\right) = 0$.
- 24.** Arătați că $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$.
- 25.** Definim șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ prin relațiile $a_1 = 1$ și $a_{n+1}^3 = 99a_n^3$, dacă $n > 1$.
Determinați termenul general al șirului și calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4^n}$.
- 26.** Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$ și $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$, dacă $n > 1$. Determinați formula termenului general a_n și calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(n-1)2^n}$.
- 27.** Termenii șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ verifică relația $x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 1$. Determinați formula termenului general, dacă $x_0 = 1$ și $x_1 = 2$.

II.

- 1.** Determinați toate șirurile de numere naturale pentru care

$$x_{n+2} = \frac{n \cdot x_n + 1}{x_n + n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



2. Arătați că șirul $x_{n+1} = \frac{2}{2-x_n}$, $n \geq 1$ este periodic (dacă este definit).

3. Demonstrați că dacă $x_0, x_1 \in (-k, k)$, $x_{n+2} = \frac{k^2 \cdot (x_{n+1} - x_n)}{k^2 - x_n \cdot x_{n+1}}$, $\forall n \geq 0$ atunci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este periodic.

4. Determinați formula termenului general al șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ dacă $x_n = x_{n-1}^2 - 3x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$, $x_0 \in [-2, 2]$.

5. Determinați termenul general al șirului definit prin

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} \left(1 + \sqrt{1 + x_n^2}\right) = x_n, \quad \forall n \geq 0$$

(Bencze Mihály)

6. Calculați termenul general al șirului $x_0 = -1$, $x_n = \frac{2x_{n-1} - 3}{3x_{n-1} - 4}$, $\forall n \geq 1$.

7. Termenii șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfac relația $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n - 3(-1)^n$, $\forall n \geq 1$.
Demonstrați că $x_{n+1} = 2^n + (-1)^n$, $\forall n \geq 1$.

(Bacalaureat, 1998, Israel)

8. Demonstrați că termenii șirului definit prin

$$x_0 = 1, x_1 = 41, x_{n+2} = 3x_n + \sqrt{8(x_n^2 + x_{n+1}^2)}, \quad \forall n \geq 0$$

sunt numere naturale.

9. Un bloc cu n etaje trebuie vopsit cu două culori (roșu și alb) în așa fel încât să nu aibă două etaje consecutive vopsite cu roșu (fiecare etaj este fie roșu, fie alb). Câte colorări distincte există?

10. Studiați convergența șirului $x_{n+1} = 2^{x_n} - 1$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

11. Considerăm șirul definit prin $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Determinați valorile x_0 pentru care șirul este corect definit și studiați convergența șirului.

12. Studiați convergența următoarelor șiruri recurente:

$$\text{a) } a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_{n-1}}, \quad a_1 = 0; \quad \text{b) } a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n}, \quad a_1 = 1.$$

13. Demonstrați că șirul $x_n = -2\sqrt{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ este convergent și limita șirului este în intervalul $(-2, 1)$.

14. Calculați următoarele limite:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right); \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right).$$

15. Calculați suma $\sum_{k=1}^n \arctg \frac{1}{k^2 + k + 1}$ și apoi limita sumei când $n \rightarrow \infty$.

16. Calculați limita următoarelor șiruri:

- a) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$;
 b) $b_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\left(1 - \frac{3}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$;
 c) $c_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \frac{4^3 - 1}{4^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$.

17. Calculați următoarele limite:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k}$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{5^k}$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3k^2 + 3k + 1}{k^3(k+1)^3}$
 e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^4 + k^2 + 1}{k^4 + k}$; f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k}$; g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k}$; h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^4 + n}$;
 i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{C_n^k}$; j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{n^2 + k}$; k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n k^n}$; l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n k^n}$.

18. Calculați limitele:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (\sqrt[n]{a} - n^{\frac{1}{n}})$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{\frac{1}{a}} - 2 \right)$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + 1)}{n}$;
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - 1 \right)$; e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k^2}{n^3}} - 1 \right)$; f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k}{n^2}$;

19. Arătați că șirul cu termenul general $a_n = \sin n$ nu are limită.

20. Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left[\pi \sqrt{n(n+1)} \right]$.

21. Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (2 + \sqrt{3})^n \right\}$, dacă $\{x\}$ este partea fracționară a numărului x .

22. Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ $x_0 > 0$, $x_n = x_{n-1}(2 - ax_{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $a > 0$ este convergent și calculați limita sa. (Concursul Hegyi Lajos, 2005)

23. Fie șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ definite prin relațiile de recurență $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ și $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ cu $a_1 = a$, $b_1 = b$, $0 < a \leq b$. Demonstrați că șirurile sunt convergente și au aceeași limită.

24. Arătați că dacă șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ verifică relațiile:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_{n+k} = b$; c) $b_k > 0$, dacă $k \geq 1$,

atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{n+k} b_{n+k} = ab$. ($a, b \in \mathbb{R}$)

25. Pentru șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{n-k} b_k = ab$.

26. Termenii șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ verifică recurența:

$$\frac{2x_{n-1}}{x_{n+1} - x_n} = \frac{n(n+1)}{(n-1)^2},$$

pentru orice $n \geq 2$, iar $x_1 = 2$ și $x_2 = 2$.

a) Determinați formula termenului general.

b) Studiați mărginirea șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$.

c) Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}{x_{n+1}}$.

27. Termenii șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ verifică relația $4x_n x_{n+1} - 2(n-1)x_{n-1} = 3n - 2$,

pentru orice $n \geq 2$, $x_1 = 0$ și $x_2 = \frac{3}{4}$. Determinați formula termenului general și

calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{x_2 x_3 \dots x_n}}{n}$.

28. Arătați că dacă șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are proprietatea $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} = 0$,

atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = 0$. Este adevărată și reciproca?

29. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale și dreptele $e_n : a_{n+1}x + a_n y = 0$. Fie

$(a_{n_k})_{k \geq 1}$ și $(a_{m_k})_{k \geq 1}$ subșirurile pentru care $e_{n_{k+1}} \perp e_{n_k}$ respectiv $e_{m_{k+1}} \parallel e_{m_k} \quad \forall k \geq 1$.

Studiați convergența acestor subșiruri. (Concursul Hegyi Lajos, 2004).

30. Demonstrați că:

a) Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$, $n \geq 1$ este monoton;

b) Există șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, format din numerele 0 și 1 astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{n+2} + \dots + \frac{a_n}{n+n} \right) = \frac{1}{2} \quad (\text{OJM, 2001})$$

31. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale care verifică relația

$$(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n + 1) \leq 0, \quad \forall n \geq 0.$$

a) Demonstrați că șirul este mărginit.

b) Este posibil ca șirul să fie convergent?

III. LIMITE DE FUNCȚII



DEFINIȚIA LIMITEI UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT

Considerăm funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) și studiem comportarea valorilor funcției în jurul punctului x_0 . Pentru o formulare mai precisă: fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de puncte în care funcția este definită ($(x_n)_{n \geq 1} \subset D$), $x_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Dacă șirul valorilor $(f(x_n))_{n \geq 1}$ este convergent și are aceeași limită l oricum am alege șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ convergent la x_0 , atunci spunem că funcția f tinde la l când x tinde la x_0 .

Observație. Astfel de șiruri există dacă și numai dacă x_0 este punct de acumulare al mulțimii D , deci limita funcției se poate defini numai în punctele de acumulare ale domeniului de definiție.



Exemple. 1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1}, & x^2 \neq 1 \\ 1, & x^2 = 1 \end{cases}$. Pentru $x_0 = 1$



considerăm un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ și $x_n \neq \pm 1, \forall n \geq 1$. În acest caz $f(x_n) = \frac{x_n - 1}{(x_n - 1)(x_n + 1)} = \frac{1}{x_n + 1}$ și astfel folosind proprietățile operațiilor cu șiruri convergente deducem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1} = \frac{1}{2}$. Dacă luăm $x_0 = -1$, atunci din condițiile $x_n \neq \pm 1, \forall n \geq 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$ rezultă

$$f(x_n) = \frac{x_n - 1}{(x_n - 1)(x_n + 1)} = \frac{1}{x_n + 1}.$$

Astfel șirul $(f(x_n))_{n \geq 1}$ nu este convergent și nici nu are limită deoarece pentru șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea $x_n + 1 < 0$ obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$, iar pentru șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea $x_n + 1 > 0$ obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$.

Astfel dacă $x_0 = 1$, atunci există un număr l astfel ca pentru orice șir $(x_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ și $x_n \neq 1$

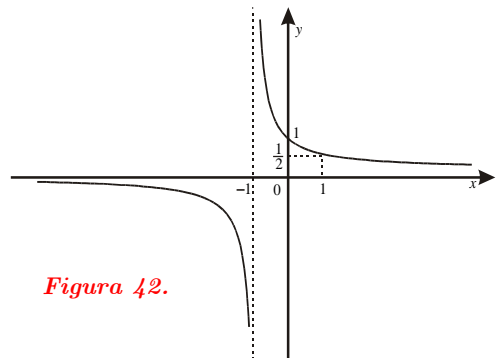


Figura 42.

$(x_n \in D)$ rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$. Pe de altă parte pentru punctul $x_0 = -1$ nu există un astfel de număr l . Dacă însă funcția ar fi definită numai pentru valorile $x > -1$ sau numai pentru valorile $x < -1$, atunci șirul $(f(x_n))_{n \geq 1}$ ar avea limită și în cazul $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$. În figura 42 am schițat graficul funcției. Comportarea se poate citi și de pe acest grafic, însă de regulă graficul funcției se poate construi numai studiind proprietățile funcției.

2. Să studiem comportarea funcției $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$ în vecinătatea punctului $x_0 = 1$.

$1 \notin D$, dar $x_0 = 1$ este un punct de acumulare al domeniului de definiție $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Astfel dacă $x_n \neq 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, atunci $|x_n - 1|$ are limita 0 și din inegalitatea $|x_n - 1| > 0$ rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n - 1|} = +\infty$.

Pentru fixarea noțiunilor dăm următoarea definiție:

DEFINIȚIE. Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ și x_0 un punct de acumulare al mulțimii D . Spunem că **limita funcției** f în punctul x_0 este l , dacă pentru orice șir $(x_n)_{n \geq 1}$ cu $x_n \in D$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ are loc $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

NOTAȚIE. Folosim notația $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ și spunem că în punctul x_0 funcția f are limita l sau $f(x)$ tinde la l când x tinde la x_0 .

Observații. 1. Folosind definiția limitei cu ajutorul vecinătăților putem formula următoarea definiție echivalentă:

DEFINIȚIA CU VECINĂȚĂȚI. Egalitatea $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ are loc dacă și numai dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ a lui l (l poate să fie un număr real sau $\pm\infty$) există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ pentru care are loc implicația: $x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$.

Demonstrație. Prima dată demonstrăm suficiența. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir pentru care $x_n \in D \setminus \{x_0\}$, $\forall n \geq 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ considerăm vecinătatea $V = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. Dacă are loc proprietatea enunțată, atunci există $U \in \mathcal{V}(x_0)$ și deci există și o vecinătate simetrică în interiorul acesteia, deci există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca $0 < |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow x_n \in U \Rightarrow f(x_n) \in V$. Pe de altă parte din egalitatea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ deducem existența unui număr $n(\delta) \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $|x_n - x_0| < \delta$, dacă $n \geq n(\delta(\varepsilon))$. Astfel pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul natural $n(\varepsilon) (= n(\delta(\varepsilon)))$ cu proprietatea $|f(x_n) - l| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$. Astfel $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$, deci

$(x_n)_{n \geq 1}$ fiind arbitrar obținem $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Pentru a demonstra că această proprietate este și necesară folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că pentru orice șir $(x_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea $x_n \in D$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \neq x_0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ și nu are loc proprietatea cu vecinătățile. Astfel există $V \in V(l)$ astfel încât în orice vecinătate $U \in V(x_0)$ există $x \in U \setminus \{x_0\}$ pentru care $f(x) \notin V$. Considerăm vecinătățile de forma $U_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$ și notăm un punct $x \in U_n$ pentru care $f(x) \notin V$ cu x_n . Am construit astfel un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea $x_n \in U_n \setminus \{x_0\}$ și $f(x_n) \notin V$. Pe de altă parte limita șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ este x_0 , deci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$. Această egalitate contrazice relațiile $f(x_n) \notin V$, $\forall n \geq 1$ deci proprietatea enunțată este echivalentă cu definiția dată.

2. Geometric această definiție înseamnă în cazul $l \in \mathbb{R}$, că pentru orice $V \in V(l)$ există un dreptunghi determinat de această vecinătate astfel ca în afara punctului $(x_0, f(x_0))$ toate punctele graficului corespunzătoare mulțimii U_1 să fie în interiorul acestui dreptunghi. În figura 43 vecinătății V_1 a lui l îi corespunde vecinătatea U_1 a lui x_0 (nu este unică!) și toate punctele graficului corespunzătoare mulțimii U_1 mai puțin punctul $(x_0, f(x_0))$

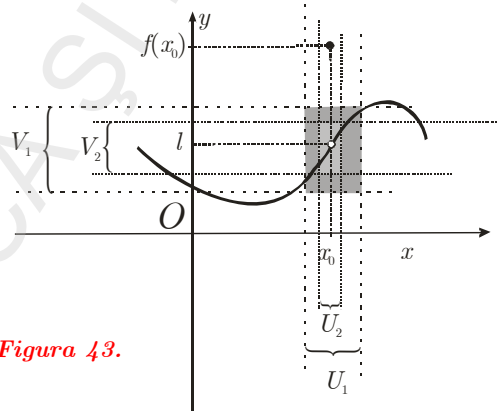


Figura 43.

sunt în interiorul dreptunghiului hașurat cu culoare mai închisă. Pentru vecinătatea mai mică V_2 a lui l analog se poate construi un astfel de dreptunghi (hașurat cu culoare mai deschisă) și vecinătatea U_2 a lui x_0 .

Menționăm, că nu este obligatoriu ca punctul $(x_0, f(x_0))$ să fie în afara acestui dreptunghi.

3. Folosind numai vecinătăți simetrice putem formula o altă definiție echivalentă:

Criteriul $\epsilon - \delta$. Egalitatea $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ are loc dacă și numai dacă pentru orice $\epsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât are loc implicația: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$.

4. În cazul $l = \pm\infty$ acest criteriu are următoarea formă:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (sau $-\infty$), dacă pentru orice $K \in \mathbb{R}$ există $\delta > 0$ astfel încât inegalitatea $0 < |x - x_0| < \delta$ să implice $f(x) > K$ ($f(x) < K$).





Exemple. 1. $f : (0, 3) \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$. Să studiem existența limitei în punctul $x_0 = 2$.

Punctul $x_0 = 2$ este un punct de acumulare al domeniului de definiție (deși funcția nu este definită în x_0), deci putem vorbi de limita funcției în acest punct.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}, \text{ dacă } x \neq 2, \text{ deci pentru orice șir cu}$$

$$\text{proprietatea } x_n \rightarrow 2, x_n \neq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{2}} \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{În consecință } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

2. Graficul funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2(1-x)}$ este reprezentat în figura 44.

Să studiem existența limitelor $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

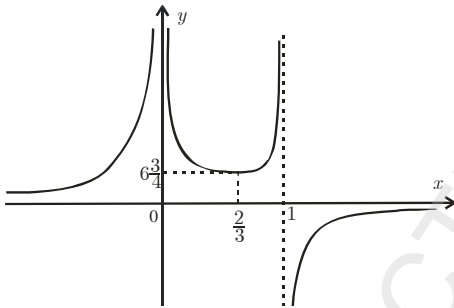


Figura 44

Conform graficului în vecinătatea punctului $x = 0$ funcția are limita ∞ .

Dacă $K > 0$ este un număr arbitrar, atunci

$$\frac{1}{x^2(1-x)} > \frac{2}{x^2} > K, \text{ pentru } x < \frac{1}{2} \text{ și}$$

$$|x| < \sqrt{\frac{2}{K}}. \text{ Astfel dacă } \delta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{2}{K}} \right\},$$

atunci pentru $0 < |x| < \delta$ obținem

$$\frac{1}{x^2(1-x)} > K. \text{ De aici rezultă că pentru}$$

orice număr pozitiv K există $\delta > 0$ astfel

încât din inegalitatea $0 < |x| < \delta$ rezultă $f(x) = \frac{1}{x^2(1-x)} > K$. Conform definiției

$$\text{acesta înseamnă } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2(1-x)} = \infty.$$

În capitolul precedent am văzut că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ și invers

dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ și $a_n > 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$. Folosind această proprietate putem

demonstra aceleași egalitate pe baza definiției cu șiruri. Dacă $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ este un șir arbitrar, atunci pentru n suficient de mare are loc inegalitatea $x_n^2 \cdot (1 - x_n) > 0$. Pe de altă parte $x_n^2 \cdot (1 - x_n) \rightarrow 0$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^2(1-x_n)} = \infty.$$

Conform graficului, în punctul $x_1 = 1$ funcția nu are limită, deoarece pentru $x < 1$ valorile funcției tind spre $+\infty$, iar pentru $x > 1$ valorile funcției tind spre $-\infty$. Demonstrăm acest fapt folosind șiruri. Dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este un șir pentru care $x_n > 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, atunci $x_n^2(1 - x_n) < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și astfel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^2(1 - x_n)} = -\infty.$$

Dacă însă $x_n < 1$, atunci $x_n^2(1 - x_n) > 0$ și $x_n^2(1 - x_n) \rightarrow 0$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^2(1 - x_n)} = \infty.$$

Din cele două proprietăți anterioare rezultă că funcția nu are limită în punctul $x_1 = 1$.

3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{|x|}$. În punctul $x_0 = 0$ funcția nu are limită

deoarece $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ și astfel pentru orice vecinătate U a punctului x_0 avem

$f(U) = \{f(x) | x \in U\} = \{-1, 1\}$ și această mulțime nu poate fi inclusă în vecinătăți oricât de mici ale unui punct l .

Din exemplele studiate rezultă că în unele cazuri ar fi mai simplu să calculăm limitele numai când $x_n < x_0, \forall n \geq 1$ sau $x_n > x_0, \forall n \geq 1$. Pentru a clarifica rolul acestor limite introducem noțiunea de limite laterale.

Limite laterale



Definiții

1. Dacă x_0 este punct de acumulare al mulțimii $D \cap (-\infty, x_0)$ și pentru orice șir $(x_n)_{n \geq 1}$ cu proprietățile $x_n < x_0, x_n \in D$ și $x_n \rightarrow x_0$ are loc $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l_s$, atunci l_s este **limita la stânga** a funcției f în punctul x_0 .

DEF

Folosim următoarele notații: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_s$ sau $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l_s$.

Câteodată pentru simplificarea notațiilor se folosește $f(x_0 - 0)$ în loc de l_s .

2. Dacă x_0 este punct de acumulare al mulțimii $D \cap (x_0, \infty)$ și pentru orice șir $(x_n)_{n \geq 1}$ cu proprietățile $x_n > x_0, x_n \in D$ și $x_n \rightarrow x_0$ are loc $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l_d$, atunci l_d este **limita la dreapta** a funcției f în punctul x_0 .

DEF

Folosim următoarele notații: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d$ sau $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = l_d$.

Câteodată pentru simplificarea notațiilor se folosește $f(x_0 + 0)$ în loc de l_d .

Cele două limite (limita la stânga și limita la dreapta) se numesc **limite laterale**.

Astfel în exemplul 3 din paragraful precedent avem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = l_d = \lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{|x|} = 1; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = l_s = \lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{x}{|x|} = -1.$$

Observații. 1. Dacă $l_s \neq l_d$, atunci nu există limita funcției în punctul x_0 .

2. Dacă limita funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ în punctul x_0 este l și x_0 este punct de acumulare atât pentru $D \cap (-\infty, x_0)$ cât și pentru $D \cap (x_0, \infty)$, atunci în punctul x_0 există limite laterale și avem relațiile: $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

3. Astfel dacă x_0 este punct de acumulare atât pentru $D \cap (-\infty, x_0)$ cât și pentru $D \cap (x_0, \infty)$, atunci limita funcției în punctul x_0 există dacă și numai dacă există limitele laterale în acest punct și acestea sunt egale.

Exemple

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Dacă $x_n > 0$ și $x_n \rightarrow 0$, atunci (din proprietățile demonstrate în capitolul precedent) $l_d = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e = \lim_{x \searrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

În mod similar obținem $\lim_{x \nearrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ și din egalitatea celor două limite laterale rezultă $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x-x_0)^{2k}} = \infty$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Dacă $x_n \rightarrow x_0$ și $x_n \neq x_0, \forall n \geq 1$, atunci $x_n - x_0 \rightarrow 0$ și astfel $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_0)^{2k} = 0$. Pe de altă parte $(x_n - x_0)^{2k} > 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(x_n - x_0)^{2k}} = \infty$, adică $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x-x_0)^{2k}} = \infty$.

Limita funcțiilor spre $\pm\infty$

În cazurile precedente am studiat limita unei funcții într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$. În mod similar putem defini limita funcției la $+\infty$ sau la $-\infty$ folosind limita unor șiruri $(x_n)_{n \geq 1}$ pentru care $x_n \rightarrow \infty$. Dacă funcția f este definită pe un interval $(a, +\infty)$, atunci prin limita șirului spre $+\infty$ înțelegem limita comună a șirurilor $(f(x_n))_{n \geq 1}$, când $x_n \rightarrow \infty$, bineînțeles în cazul în care această limită comună există.

Definiție. Limita funcției $f: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}$), spre ∞ este l , dacă pentru orice șir $x_n \in (a, +\infty)$ cu proprietatea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

Folosim notația $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$.

Observație. Limita funcției $f: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}$), spre ∞ este $l \in \mathbb{R}$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $K \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x > K$, avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Definiție. Limita funcției $f : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}$), spre $-\infty$ este l , dacă pentru orice șir $x_n \in (-\infty, a)$ cu proprietatea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

DEF

Folosim notația $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

Observații. 1. Limita funcției $f : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}$), în $-\infty$ este $l \in \mathbb{R}$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $K \in \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$x < K \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Dacă limita din definițiile precedente nu este un număr real (deci este $+\infty$ sau $-\infty$), atunci spunem că f tinde la $\pm\infty$ când x tinde la $\pm\infty$. De exemplu pentru $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ avem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. Dacă există limita la $+\infty$ a funcției $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, atunci există și limita șirului $(f(n))_{n \geq n_0}$ ($n_0 > a$): $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$; **b)** $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$; **c)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$; **d)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + x}$.

Rezolvare. a) Considerăm un șir arbitrar $(x_n)_{n \geq 1}$, care tinde la ∞ ; atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + 1}{x_n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x_n^2}}{1 - \frac{1}{x_n^2}} = 1 \text{ (pe baza operațiilor cu șiruri).}$$

Altfel trebuie să demonstrăm că $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru $\forall x > K$ $\left| \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - 1 \right| < \varepsilon$. Pentru $x > 1$ ultima inegalitate este echivalentă cu $x^2 > \frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon}$ deci

există $K = \sqrt{\frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon}}$. Deci $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1$.

b) Pentru șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, care tinde la ∞ avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{x_n^2 + 1} - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x_n^2 + 1} + x_n} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$$

c) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, care tinde la $-\infty$; atunci șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ $y_n = -x_n$ tinde la ∞ și

putem scrie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x_n^2 + 1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{y_n^2 + 1}}{-y_n} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{y_n^2}} = -1$, deci

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = -1.$$

d) analog punctului **c)** considerăm șirul $(y_n)_{n \geq 1}$, care tinde la ∞ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-y_n^3 - y_n^2 + 1}{y_n^2 - y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-y_n \left(1 - \frac{1}{y_n} + \frac{1}{y_n^3} \right)}{1 - \frac{1}{y_n}} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + x} = -\infty.$$

2. Să se studieze existența limitei la $+\infty$ pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin x$.

Rezolvare. Demonstrăm că nu există limită spre $+\infty$.

I. Considerăm șirul $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. În mod evident $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ și

$$f(x_n) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty.$$

II. Pentru șirul cu termenul general $y_n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ avem $y_n \rightarrow \infty$ și

$$f(y_n) = \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right) \sin \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right) = \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right) (-1), \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = -\infty.$$

Conform I. și II. nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \sin x)$.

3. Să se calculeze: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + n} \right)$.

Rezolvare. Efectuăm următoarele transformări:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \pi \sqrt{n^2 + n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi + \left[\pi \sqrt{n^2 + n} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right] \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2 \left\{ \pi \left[\sqrt{n^2 + n} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2 \left(\pi \cdot \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2 + n} + n + \frac{1}{2}} \right) = \cos^2 0 = 1. \end{aligned}$$

4. Să se calculeze limita $\lim_{x \searrow 0} x^x$ (limita la stânga nu are sens).

Rezolvare. Pentru funcția $f(x) = x^x$ avem $\ln f(x) = x \cdot \ln x$, deci cu notația $\ln x = y$ obținem $y \rightarrow -\infty$ când $x \rightarrow 0$ și $x > 0$. Avem de calculat limita expresiei $e^y \cdot y$ când $y \rightarrow -\infty$. Cu schimbarea de variabilă $z = -y$ este suficient să calculăm

limita funcției $-z \cdot \left(\frac{1}{e} \right)^z$ când $z \rightarrow \infty$. Dacă $z_n \rightarrow \infty$, atunci din inegalitatea

$$[z_n] \leq z_n < [z_n] + 1$$

rezultă $[z_n] \left(\frac{1}{e} \right)^{[z_n]+1} < z_n \left(\frac{1}{e} \right)^{z_n} < ([z_n] + 1) \left(\frac{1}{e} \right)^{[z_n]}$.

Pe de altă parte $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a^n = 0$, dacă $0 < a < 1$ și astfel din criteriul cleștelui rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \left(\frac{1}{e} \right)^{z_n} = 0. \text{ De aici rezultă } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-z_n \left(\frac{1}{e} \right)^{z_n} \right) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n e^{y_n} = 0, \text{ unde } y_n = -z_n$$

și în final $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \ln x_n = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{x_n} = 1$. Deci $\lim_{x \searrow 0} x^x = 1$.

PROPRIETĂȚILE LIMITELOR

Am văzut și pe parcursul rezolvării exercițiilor precedente că în anumite cazuri putem efectua aceleași operații atât cu limite de funcții cât și cu limite de șiruri. Astfel, dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ și $l_{1,2} \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice șir $(x_n)_{n \geq 1}$ cu proprietățile $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ și $(x_n)_{n \geq 1} \subset (D_f \cap D_g) \setminus \{x_0\}$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l_1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = l_2$. Pe baza proprietăților șirurilor convergente rezultă că șirul $h(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$ este convergent și are limita $l_1 + l_2$. De aici deducem $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$. Acest raționament este corect și în cazul $l_{1,2} \in \overline{\mathbb{R}}$ cu condiția ca $l_1 + l_2$ să nu fie un caz de nedeterminare.

Teoremă. Dacă există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$, iar $l_1 + l_2$ nu este un caz de nedeterminare ($\infty - \infty$ sau $-\infty + \infty$), atunci funcția $h : D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + g(x)$ are limită în punctul x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 + l_2.$$

În mod similar toate proprietățile demonstrate pentru limite de șiruri se transferă în mod natural la limite de funcții. În teorema următoare am cuprins aceste proprietăți:

1. Dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 este un punct de acumulare a mulțimii D și există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ atunci există $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$ și are loc relația $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$.
2. Dacă $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $|f(x) - l| \leq g(x) \quad \forall x \in D$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, atunci există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.
3. Dacă $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq g(x)$, pentru orice $x \in D$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.
4. Dacă $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$, pentru orice $x \in D$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.
5. Dacă funcțiile $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ au limită în punctul x_0 și există $V \in V(x_0)$ în care are loc relația $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Consecințe

- a) Dacă $f(x) \geq 0$ și există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$.
 - b) Dacă $f(x) \leq 0$ și există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$.
6. Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ și $l_1 + l_2$ nu este un caz de nedeterminare, atunci există $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 + l_2$.

7. Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ și $l_1 \cdot l_2$ nu este un caz de nedeterminare, atunci

există $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right) = l_1 l_2$.

Consecință. Dacă există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = cl$, pentru orice $c \in \mathbb{R}^*$.

8. Dacă funcțiile f și g au limita l_1 respectiv l_2 în x_0 , $l_2 \neq 0$ și $g(x) \neq 0$ într-o

vecinătate a punctului x_0 , atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$, dacă $\frac{l_1}{l_2}$ nu este un caz

de nedeterminare. Cazurile exceptate (de nedeterminare) sunt: $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{a}{0}$ ($a \neq 0$).

9. Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ cu $g(x) > 0$ (sau $g(x) < 0$) într-o

vecinătate a lui g , atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \operatorname{sgn} l \cdot \infty$ (respectiv $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \operatorname{sgn} l \cdot (-\infty)$).

Deci $\frac{l}{0_+} = \operatorname{sgn} l \cdot \infty$ și $\frac{l}{0_-} = \operatorname{sgn} l \cdot (-\infty)$.

10. Dacă $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 este un punct de acumulare pentru D_g , $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ și

$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, l_2 este un punct de acumulare pentru D_f , iar $\lim_{x \rightarrow l_2} f(x) = l_1$, atunci

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = l_1$.

Observație. Proprietățile de mai sus sunt adevărate și pentru $x_0 = \pm\infty$, dacă domeniile de definiție sunt de forma $(-\infty, a)$ sau $(a, +\infty)$.

Cazuri particulare. 1. Dacă $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 este un punct de acumulare pentru D_f și $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} e^{f(x)} = e^l$.

2. Dacă $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 este un punct de acumulare pentru D_f și $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln(f(x)) = \ln l$.

3. Dacă $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ este un polinom, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$.

4. Dacă $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n) = \operatorname{sgn} a_n \cdot \infty \text{ și}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n) = \operatorname{sgn} a_n \cdot (-1)^n \cdot \infty, \text{ dacă } a_n \neq 0.$$

5. Dacă $P(x)$ și $Q(x)$ sunt funcții polinomiale și $Q(x_0) \neq 0$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

6. Dacă $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $Q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ sunt funcții polinomiale, cu $a_n \neq 0$ și $b_m \neq 0$, atunci:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & m = n; \\ \operatorname{sgn} \frac{a_n}{b_m} \cdot \infty, & n > m, x \rightarrow \infty; \\ \operatorname{sgn} \frac{a_n}{b_m} \cdot (-1)^{n-m} \cdot \infty, & n > m, x \rightarrow -\infty; \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

Probleme rezolvate

1. Să se demonstreze că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, atunci

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \ln x_0$, unde $x_0 > 0, x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n} = e^{x_0}$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \sin x_0$.

Să se formuleze aceste proprietăți folosind limite de funcții.

Demonstrație. a) $\ln x_n - \ln x_0 = \ln \frac{x_n}{x_0} = \ln \left(1 + \frac{x_n - x_0}{x_0} \right)$. Conform condițiilor

date avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{x_0} = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_n - x_0}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{x_n - x_0}} = e$ și astfel pentru $\forall \varepsilon > 0$

există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $e - \varepsilon < \left(1 + \frac{x_n - x_0}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{x_n - x_0}} < e + \varepsilon, \forall n \geq n(\varepsilon)$.

Presupunem că exponentul este pozitiv (în caz contrar semnul inegalităților se schimbă, dar raționamentul rămâne valabil). Astfel avem

$$\ln(e - \varepsilon) \frac{x_n - x_0}{x_0} < \ln \left(1 + \frac{x_n - x_0}{x_0} \right) < \ln(e + \varepsilon) \frac{x_n - x_0}{x_0}, \forall n \geq n(\varepsilon),$$

deci pe baza criteriului cleștelui $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{x_n - x_0}{x_0} \right) = 0$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \ln x_0$.

b) Din $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ rezultă că pentru $\forall \varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$-\ln \left(\frac{\varepsilon}{e^{x_0}} + 1 \right) < x_n - x_0 < \ln \left(\frac{\varepsilon}{e^{x_0}} + 1 \right) \forall n \geq n(\varepsilon), \text{ de unde}$$

$$\frac{e^{x_0}}{e^{x_0} + \varepsilon} < e^{x_n - x_0} < \frac{\varepsilon}{e^{x_0}} + 1 \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{e^{x_0} + \varepsilon} < e^{x_n - x_0} - 1 < \frac{\varepsilon}{e^{x_0}} \Rightarrow$$

$$-\frac{\varepsilon}{e^{x_0}} < e^{x_n - x_0} - 1 < \frac{\varepsilon}{e^{x_0}} \Rightarrow -\varepsilon < e^{x_n} - e^{x_0} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n} = e^{x_0}.$$

c) $|\sin x_n - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x_n - x_0}{2} \cos \frac{x_n + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x_n - x_0}{2} \right| < |x_n - x_0|,$

dacă $|x_n - x_0| < \frac{\pi}{2}$. Am folosit inegalitatea $\sin x < x$ pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$.



Criteriul majorării implică $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \sin x_0$.

Folosind limite de funcții putem formula aceste proprietăți în modul următor:

$$\mathbf{a)} \lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0; \quad \mathbf{b)} \lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}; \quad \mathbf{c)} \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0.$$

2. Să se demonstreze că dacă $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ este o funcție bijectivă și $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $\forall x_0 \in [a, b]$, atunci $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$, $\forall y_0 \in [c, d]$.

Demonstrație. Considerăm un șir arbitrar $y_n \rightarrow y_0$ cu $y_n \neq y_0, n \geq 1$. Din bijectivitatea funcției f rezultă că există un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ astfel ca $f(x_n) = y_n, n \geq 1$. Pentru a arăta egalitatea propusă este suficient să demonstrăm că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și are limita $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Pe de altă parte șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit, deci are un subșir convergent. Fie l limita acestui subșir. Aplicând condiția dată acestui subșir rezultă că $f(l) = y_0$, deci $l = f^{-1}(y_0)$. Dacă șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ nu ar fi convergent, atunci ar exista un alt subșir convergent cu limita $l' \neq l$. Dar pentru această limită l' am avea $f(l') = y_0$ și astfel din bijectivitatea funcției f ar rezulta $l' = l$. În consecință șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și are limita $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Consecință. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin x_n = \arcsin x_0$, unde $x_0 \in [-1, 1]$.

3. Să se calculeze limitele laterale ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3, & x < -1 \\ e^{x+1}, & x \geq -1 \end{cases}$

în punctul $x_0 = -1$.

Soluție. $\lim_{x \nearrow -1} f(x) = \lim_{x \nearrow -1} (x^2 + 2x + 3) = 1 - 2 + 3 = 2$, deoarece pentru un șir arbitrar cu proprietatea $x_n \rightarrow -1$ avem $x_n^2 + 2x_n + 3 \rightarrow 1 - 2 + 3 = 2$. În mod similar avem $\lim_{x \searrow -1} f(x) = \lim_{x \searrow -1} e^{x+1} = e^0 = 1$, deci limita la dreapta este 1 și limita la stânga este 2.



LIMITE FUNDAMENTALE

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (x este dat în radiani).

Demonstrație. $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$, deci $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ este o funcție pară, și astfel este suficient să calculăm limita în cazul $x > 0$.

Dacă împărțim fiecare membru cu $\sin x > 0$, obținem $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, adică

$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$. Pe de altă parte $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ și $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, deci pe baza criteriului cleștelui rezultă

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Consecință. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$; **2)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; **3)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

Demonstrație. 1) Din relația $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0$ deducem $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x = 0$ și astfel din proprietatea 9 rezultă $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x} = 1$. Dar $\sin(\arcsin x) = x$, deci

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1 \text{ și astfel pe baza proprietății 8. rezultă } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$ din proprietatea 7, deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ și $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$.

3) Ca și 1), din $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$ rezultă $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} x = 0$ și astfel din proprietatea 9 și punctul 2) obținem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{arctg} x} = 1$. Dar $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ și astfel $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} = 1$. Pe baza proprietății 8. rezultă $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Demonstrație. Am demonstrat această egalitate în paragraful *Limite laterale*.

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Demonstrație. Din limita precedentă și proprietatea 9 (cazul particular 2) obținem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Demonstrație. Dacă $x \rightarrow 0$, atunci $\ln(1+x) \rightarrow \ln 1 = 0$, deci în limita considerată efectuând schimbarea de variabilă $x = \ln(1+y)$ obținem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(1+y)} - 1}{\ln(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1.$$

Consecință. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \cdot \ln a} - 1}{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = \ln a$, deci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.


Exerciții rezolvate

Să se calculeze următoarele limite:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$;

4) $\lim_{x \nearrow \pi} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{x - \pi}$;

5) $\lim_{x \searrow \pi} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{x - \pi}$;

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$;

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x + a) - \operatorname{arctg} a}{x}$, unde $a \in \mathbb{R}$;

8) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$;

9) $\lim_{x \rightarrow 1} (x + \sin \pi x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$;

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$;

11) $\lim_{x \rightarrow 0} (3^x + x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$;

12) $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln ex)^{\frac{1}{\sin \pi x}}$;

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2x + \dots + \operatorname{arctg} nx}{\ln(1 + x) + \ln(1 + 2x) + \dots + \ln(1 + mx)}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$

14) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - x^3}{x - 3}$;

15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}$;

16) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$, $a, b > 0$;


17) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin x} - e^{\sin 2x}}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi}$;

18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{\ln(\cos 2x)}$, $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $a \neq b$;

19) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln(1 + 2^x) \cdot \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right)$.

Rezolvare. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$ din proprietatea 7.

deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} = 1$ și $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$.



Observație. În general $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{bx}{\sin bx} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$.

Analog, dacă funcțiile f și g sunt bine definite, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $f(x) \in \{ax, \sin ax, \operatorname{tg} ax, \operatorname{arcsin} ax, \operatorname{arctg} ax\}$ și

$g(x) \in \{bx, \sin bx, \operatorname{tg} bx, \operatorname{arcsin} bx, \operatorname{arctg} bx\}$, atunci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{\frac{\pi}{2} - x} = -1$ din proprietatea 9.

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = -\frac{1}{2}$.

$$4) \lim_{x/\pi} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{x - \pi} = \lim_{x/\pi} \frac{\sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{x - \pi} = \sqrt{2} \lim_{x/\pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{x - \pi} = \sqrt{2} \lim_{x/\pi} \frac{\sin \frac{\pi - x}{2}}{x - \pi} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$5) \lim_{x \searrow \pi} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{x - \pi} = \lim_{x \searrow \pi} \frac{\sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{x - \pi} = -\sqrt{2} \lim_{x \searrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{x - \pi} = -\sqrt{2} \lim_{x/\pi} \frac{\sin \frac{\pi - x}{2}}{x - \pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} (\sqrt{1 + x \sin x} + \sqrt{\cos 2x})} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + 2 \sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + 2 \cdot \left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right)^2 \right) = 6.$$

7) Se știe că pentru $x, y, x - y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ avem

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \text{ de unde pentru } x = \operatorname{arctg} a \text{ și } y = \operatorname{arctg} b \text{ (} ab \neq -1 \text{)}$$

rezultă că $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b) = \frac{a - b}{1 + ab}$. Dacă $\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci

$\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a - b}{1 + ab}$. Deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg}(x + a) = \operatorname{arctg} a$, pentru

$\varepsilon = \frac{\pi}{2} > 0$, $\exists \delta > 0$ astfel încât $\operatorname{arctg}(x + a) - \operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\forall x \in (-\delta, \delta)$.

Deci putem scrie limita cerută:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{1 + (x+a)a}}{\frac{x}{1 + (x+a)a}} \cdot \frac{1}{1 + (x+a)a} = \frac{1}{1 + a^2}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}} \right]^x = e^0 \text{ deoarece } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}} = e \text{ conform}$$

proprietății 9. și egalității $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} (x + \sin \pi x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} = \lim_{1 \pm x} \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + (x - 1 + \sin(\pi - \pi x)) \right)^{\frac{1}{x-1 + \sin(\pi - \pi x)} \cdot (x-1 + \sin(\pi - \pi x)) \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1 + \sin(\pi(1 - x))) \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1 + \sin(\pi(1 - x))) \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 + \sin(\pi(1 - x))}{\sin \frac{\pi(1 - x)}{2}} = -\frac{2}{\pi} + 2. \text{ Deci } \lim_{x \rightarrow 1} (x + \sin \pi x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} = e^{2 - \frac{2}{\pi}}.$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x} - 1} = \infty. \text{ Deci avem cazul de}$$

$$\text{nedeterminare } 1^\infty. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x - x}{x} \right)^{\frac{x}{\sin x - x} \left(-\frac{\sin x}{x} \right)} = e^{-1}.$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} (3^x + x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3^x + x - 1)^{\frac{1}{3^x + x - 1} \frac{3^x + x - 1}{\operatorname{tg} x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3^x + x - 1)^{\frac{1}{3^x + x - 1} \left(\frac{3^x - 1}{x} \frac{x}{\operatorname{tg} x} + \frac{x}{\operatorname{tg} x} \right)} = e^{\ln 3 + 1} = 3e.$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} (\ln ex)^{\frac{1}{\sin \pi x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \ln x)^{\frac{1}{\ln x} \frac{\ln(1+x-1)}{x-1} \frac{x-1}{\sin \pi(1-x)}} = e^{-\frac{1}{\pi}}.$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2x + \dots + \operatorname{arctg} nx}{\ln(1+x) + \ln(1+2x) + \dots + \ln(1+mx)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + 2 \cdot \frac{\operatorname{arctg} 2x}{2x} + \dots + n \cdot \frac{\operatorname{arctg} nx}{nx}}{\frac{\ln(1+x)}{x} + 2 \cdot \frac{\ln(1+2x)}{2x} + \dots + m \cdot \frac{\ln(1+mx)}{mx}} =$$

$$= \frac{1 + 2 + \dots + n}{1 + 2 + \dots + m} = \frac{n(n+1)}{m(m+1)}.$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - x^3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - 3^3 + 3^3 - x^3}{x - 3}. \text{ Pe de altă parte}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - 3^3}{x - 3} = 3^3 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^{x-3} - 1}{x - 3} = 3^3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3^y - 1}{y} = 27 \cdot \ln 3 \text{ și}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^3 - x^3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)(9+3x+x^2)}{x-3} = -\lim_{x \rightarrow 3} (9+3x+x^2) = -27,$$

$$\text{deci } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - x^3}{x - 3} = 27(\ln 3 - 1).$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos 2x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 x)}{-2\sin^2 x} \cdot \frac{-2\sin^2 x}{x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 x)}{-2\sin^2 x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = -2.$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^x - 1 + b^x - 1}{2} \right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{a^x - 1 + b^x - 1}{2} \right)^{\frac{2}{a^x - 1 + b^x - 1}} \right]^{\frac{a^x - 1 + b^x - 1}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1 + b^x - 1}{2x}} = e^{\frac{\ln a + \ln b}{2}} = \sqrt{ab}.$$

$$\begin{aligned}
 17) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin x} - e^{\sin 2x}}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin 2x} (e^{\sin x(1-2\cos x)} - 1)}{\sin x(1-2\cos x)} \cdot \frac{\sin x(1-2\cos x)}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi} = \\
 &= 3 \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin(\pi - x)}{\pi(x^2 - \pi^2)} \cdot (\sqrt[3]{\pi^2 x^4} + \pi\sqrt[3]{\pi x^2} + \pi^2) \right) = 9\pi \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{(x - \pi)(x + \pi)} = -\frac{9}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{\ln(\cos 2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} - 1}{x^2} - \frac{b^{x^2} - 1}{x^2} \right) \cdot \frac{-2\sin^2 x}{\ln(1 - 2\sin^2 x)} \cdot \frac{x^2}{-2\sin^2 x} = \\
 &= (\ln a - \ln b) \left(-\frac{1}{2} \right) = \ln \sqrt{\frac{b}{a}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln(1 + 2^x) \cdot \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3 \ln\left(2^x \left(\frac{1}{2^x} + 1\right)\right)}{x} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x \ln 2 + 3 \ln\left(\frac{1}{2^x} + 1\right)}{x} = 3 \ln 2 + 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2^x} + 1\right)}{\frac{1}{2^x}} \cdot \frac{1}{x \cdot 2^x} = 3 \ln 2.
 \end{aligned}$$

Exerciții

Calculați următoarele limite:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 100x}{x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3}$; 7) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\operatorname{tg} 4x}$; 8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin 4x}$;

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{x + \sin x}$; 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$; 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$;

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$; 14) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$; 15) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right)$;

16) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x^2}}$; 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin x^2 \right)^{\frac{1}{x^2}}$; 18) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} x}$;

19) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(2 - \frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{x-3}}$; 20) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$; 21) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

22) $\lim_{x \searrow 0} x^{\sin x}$; 23) $\lim_{x \searrow 0} \sin x^x$; 24) $\lim_{x \searrow 0} (1 - \sqrt{x})^{x-1}$;

25) $\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}$; 26) $\lim_{x \searrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \right)^{x-1}$; 27) $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$;



$$28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arcsin x)}{x}; \quad 29) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin x}; \quad 30) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\sin x} - a^{\sin a}}{x - a};$$

$$31) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{n}{x^n - 1} \right), \quad n \geq 2, \quad n \in \mathbb{N}^*; \quad 32) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{x^n - 1} - \frac{m}{x^m - 1} \right), \quad n, m \in \mathbb{N}^*.$$

Exerciții și probleme

1. Formulați cu ajutorul inegalităților:

- a) limita funcției f spre ∞ este $-\infty$;
 b) limita funcției f spre $-\infty$ este $+\infty$;
 c) limita funcției f spre $-\infty$ este $-\infty$.

2. Demonstrați că dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este periodică și nu este constantă, atunci nu are limită la $+\infty$ și nici la $-\infty$.

3. Considerăm funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 1}{3x^3 + x + 2}$. Calculați limitele $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

4. Calculați următoarele limite:

a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$; b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{x^3}$;

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}$; e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$, $n \in \mathbb{N}^*$; f) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a}$;

g) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$; h) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$; i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$;

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$; k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x}}{x}$; l) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$; n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$; o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$;

p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$; q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$;

r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

5. Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) = 1$.

6. Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)$, dacă $a > 0$.

Calculați următoarele limite:

7. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 4}$; 8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{10-x} - 3}$; 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sqrt{1+2x} - 1}$;

10. $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x+9} - 5}{\sqrt{x} - 4}$; 11. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2 - a^2}$, $a > b$; 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 6x}{\sin^2 3x}$;
13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$; 14. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin x}$; 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^2}$;
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$; 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}$; 18. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(\sin x))^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}$;
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin x}{\ln \sqrt{1-x^2}}$; 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{-x})}{x}$; 21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n}$, $x > 0$;
22. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$; 23. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
24. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \dots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$, unde $n > 2$, $n \in \mathbb{N}$;
25. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2) \dots (x+a_n) - x} \right]$; 26. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$;
27. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$; 28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; 29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}$;
30. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$, unde $a > 0$, $b > 0$ și $c > 0$;
31. Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$, dacă $a > 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.
32. Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0$, dacă $a > 1$ și $\varepsilon > 0$.
33. Reprezentați punctele $M(x, y)$ pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = 1$.
34. Demonstrați că dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ și g este o funcție mărginită, definită într-o vecinătate a originii, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$. Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x - \cos x}{x}$.
35. Determinați x , dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2000}}{n^x - (n-1)^x} = \frac{1}{2001}$.
36. Demonstrați că funcția $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ nu are limită spre ∞ .
37. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, dacă $a > b > c > 0$.
38. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n b^n + a^n c^n + b^n c^n}$, dacă $a > b > c > 0$.
- Calculați următoarele limite:
39. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - x^a}{x - a}$, $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; 40. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{\ln \cos 2x}$, $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $a \neq b$;

$$41. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos ax} - \sqrt[m]{\cos bx}}{\arctg^2 x};$$

$$42. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1};$$

$$43. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1};$$

$$44. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + e^{ax})}{\ln(1 + e^{bx})}, a, b \in \mathbb{R};$$

$$45. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \ln(e + ax)}{\ln \ln(e + bx)}, a, b \in \mathbb{R}_+^*;$$

$$46. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 - \sqrt[3]{\cos x}) \dots (1 - \sqrt[n]{\cos x})}{x^{2n-2}};$$

$$47. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x) \dots (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x};$$

$$48. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \dots \cdot \cos nx}{x^2};$$

$$49. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt[4]{x}) \dots (1 + \sqrt[2^n]{x})]}{x^{\frac{1}{2^n}}}.$$



50. Funcția $f: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ satisface condiția $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ iar pentru șirul $(x_{k,n})_{n \geq 1, k = \overline{1, n}}$ are loc următoarea proprietate:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } |x_{k,n}| < \varepsilon, \forall n \geq n(\varepsilon), \forall k = \overline{1, n}.$$

Demonstrați că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n f(x_{k,n})}{\sum_{k=1}^n x_{k,n}} = 1.$$

51. Calculați următoarele limite ($p \in \mathbb{N}$):

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k^p}{n^{p+1}}} - 1 \right); \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k^p}{n^{p+1}}; \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \sin \frac{k}{n^2} \right).$$

52. Arătați că dacă $f: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ și $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, atunci șirul

$$a_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{k}\right) - \ln n \quad \text{este convergent.}$$

53. Demonstrați că dacă $f: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ și $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{p}{n+k}\right) = p \ln 3.$$

54. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ nu are limită în nici un punct $x \in \mathbb{R}$.

55. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \text{ cu } m, n \in \mathbb{Z}, (m, n) = 1, n > 0; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Arătați că funcția are limita 0 în fiecare punct irațional.

56. Determinați numerele pozitive x pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \{x^n\} = 0$, unde $\{x^n\} = x^n - [x^n]$ este partea fracționară a numărului x^n .

57. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$.

58. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} \right)$.

59. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este definit prin relațiile $x_1 = 2$, $x_2 = 2 + \frac{1}{3}$,
 $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x_{n-1}}}$, $n \geq 2$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

60. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin relațiile $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 > 0$ și $a > 0$. Demonstrați că șirul este convergent și calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

61. Calculați limita șirului definit prin $x_1 = 2001$, $x_{n+1} = \frac{1}{4 - 3x_n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

62*. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ satisface inegalitatea $0 \leq x_{n+m} \leq x_n + x_m$, pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$.

Arătați că: **a)** șirul $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ este mărginit; **b)** șirul $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ este convergent.

Calculați limita șirului $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n \geq 1}$.

Probleme pregătitoare pentru bacalaureat și admitere

1. Calculați limita $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1 - \sqrt{ax^2 + x + 3})$ (discuție). (Admitere, 1991.)

2. Calculați limitele laterale ale funcției $f: \mathbb{R} \setminus \{0, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$

în punctul $x_0 = 0$. (Admitere, 1992, București)

3. Calculați $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x$. (Admitere, 1992, București)



4. Studiați convergența șirului $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $x_1 \in [1, 2]$ și în caz de convergență calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. (Admitere, 1992, București)

5. Determinați numerele $a \in \mathbb{R}$ pentru care limita $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2n} - 2x^n - a}{(x-1)^2}$ există și este finită. (Admitere, 1997, București)

6. Considerăm numerele fixate $(x_k)_{k=1, n}$ și definim șirul $(L_n)_{n \geq 1}$ prin relația

$$L_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt[n]{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} \right).$$

Calculați L_n în funcție de $(x_k)_{k=1, n}$, iar apoi calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n}$.

(Admitere, 1997, București)

7. Determinați valorile parametrilor a, b astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{dacă } x \leq 2; \\ ax + b, & \text{dacă } x > 2; \end{cases} \text{ să satisfacă egalitatea } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \text{ și să existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}. \quad (\text{Admitere, 1998, Timișoara})$$

8. Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx)^{\frac{1}{x}}$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

(Admitere, 1999, Baia Mare)

9. Calculați limita $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$. (Admitere, 1999, Constanța)

10. Determinați valorile parametrilor a, b dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{ax^3 + bx^2} - 2x \right) = -\frac{1}{3}$.

(Admitere, 1999, Constanța)

11. Determinați valorile parametrilor a, b astfel ca funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x - 1} \text{ să verifice relațiile } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \text{ și } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = 2.$$

(Variantă bacalaureat, 1997)

12. Calculați $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(x^2 + 1) - \ln(\pi^2 + 1)}{x - \pi}$. (Variantă bacalaureat, 2001)

13. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx)^{\frac{1}{x^2 n^3}} \right)$. (Variantă bacalaureat, 2002)

14. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}(\cos x - 1)$ nu are limită în punctul $x = 0$. (Variantă bacalaureat, 2002)

IV. FUNCȚII CONTINUE

În capitolul precedent am studiat comportarea funcțiilor în vecinătatea unui punct de acumulare al domeniului de definiție. Dacă punctul x_0 aparține mulțimii D și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție, atunci comportarea în jurul punctului x_0 se poate raporta la valoarea funcției în punctul x_0 . Mai precis studiem următoarea problemă:

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D$ un punct. Ce consecințe și ce semnificații (geometrice, etc.) are faptul că pentru orice șir $(x_n)_{n \geq 1}$ cu termenii din mulțimea D , pentru care $x_n \rightarrow x_0$, șirul $(f(x_n))_{n \geq 1}$ tinde la $f(x_0)$?

Funcțiile care posedă această proprietate se numesc funcții continue în punctul x_0 . În această formulare nu este necesar ca punctul x_0 să fie punct de acumulare al mulțimii D , deoarece în cazul în care x_0 este un punct izolat al mulțimii D , atunci din condiția $x_n \rightarrow x_0$ rezultă că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este constant de la un rang încolo, adică $x_n = x_0$, pentru $n \geq k$. Astfel $f(x_n) = f(x_0)$, pentru $n \geq k$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

DEFINIȚIA FUNCȚIILOR CONTINUE

Definiție. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$. Funcția f este continuă în punctul x_0 , dacă pentru orice șir cu proprietatea $x_n \rightarrow x_0, x_n \in D, \forall n \geq 1$ are loc egalitatea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Observații. 1. Din această definiție rezultă automat că funcția este continuă în toate punctele izolate ale mulțimii D .

2. Folosind definiția limitei cu ajutorul vecinătăților putem formula următoarea definiție echivalentă:

Definiția cu vecinătăți. Funcția f este continuă în punctul x_0 , dacă dacă pentru orice vecinătate $V \in V(f(x_0))$ a lui $f(x_0)$ există o vecinătate $U \in V(x_0)$ pentru care are loc implicația:

$$x \in U \Rightarrow f(x) \in V.$$

3. Geometric această definiție înseamnă că pentru orice $V \in V(f(x_0))$ există un dreptunghi determinat de această vecinătate astfel ca toate punctele graficului corespunzătoare mulțimii U_1 să

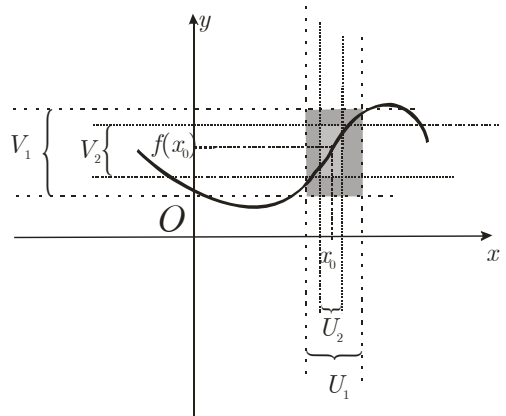


Figura 45.

fie în interiorul acestui dreptunghi. În figura 45, vecinătății V_1 a lui l îi corespunde vecinătatea U_1 a lui x_0 (nu este unică!) și toate punctele graficului corespunzătoare mulțimii U_1 sunt în interiorul dreptunghiului hașurat cu culoare mai închisă. Pentru vecinătatea mai mică V_2 a lui l , analog, se poate construi un astfel de dreptunghi (hașurat cu culoare mai deschisă) și vecinătatea U_2 a lui x_0 .

4. Pe baza criteriului $\varepsilon - \delta$ pentru limite de funcții putem formula următoarea caracterizare:

Criteriul $\varepsilon - \delta$. Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în $x_0 \in D$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D$ cu proprietatea $|x - x_0| < \delta$, să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (dacă x_0 este punct izolat, atunci există δ pentru care în vecinătatea de rază δ a punctului x_0 mulțimea D nu mai are alte puncte în afară de x_0).

Exemple

1. Să studiem continuitatea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$. Fie un șir de numere reale $x_n \rightarrow x_0$; atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (ax_n + b) = ax_0 + b = f(x_0)$. Deci f este continuă în orice punct.

2. Să studiem continuitatea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + 1$ în punctul $x_0 = 2$. Folosim definiția. Presupunem că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$, $x_n \in \mathbb{R}$ și studiem convergența șirului $f(x_n) = 2x_n^3 + 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2x_n^3 + 1) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^3 + 1 = 2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^3 + 1 = 17 = f(2),$$

deci funcția dată este continuă în punctul $x_0 = 2$.

Folosind criteriul $\varepsilon - \delta$ avem de stabilit corespondența între ε și δ . Fie $\varepsilon > 0$ un număr fixat.

$$|f(x) - f(x_0)| = |2x^3 + 1 - 2 \cdot 2^3 - 1| = 2|x^3 - 2^3| = 2|x - 2||x^2 + 2x + 2^2|;$$

$$|f(x) - f(x_0)| = 2|x - 2||x^2 + 2x + 4| = 2(x^2 + 2x + 4)|x - 2| < \varepsilon,$$

$$\text{dacă } |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2(x^2 + 2x + 4)} < \frac{\varepsilon}{2 \min_{x \in \mathbb{R}} (x^2 + 2x + 4)} = \frac{\varepsilon}{2f(-1)} = \frac{\varepsilon}{6}.$$

Astfel pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \frac{\varepsilon}{6} > 0$ cu proprietatea $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $|x - 2| < \delta$. Astfel funcția este continuă în punctul $x_0 = 2$.

3. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ este continuă în fiecare punct $x_0 \in \mathbb{R}$, deoarece $|f(x) - f(x_0)| = |\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot 1$, și astfel inegalitatea $|f(x) - f(x_0)| = |\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0| < \varepsilon$ este adevărată dacă $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

4. Funcția f nu este continuă în punctul $x_0 \in D$ dacă există un șir $(x_n)_{n \geq 1} \subset D$ pentru care

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(x_0).$$

Acesta se poate realiza dacă limita nu există, sau dacă limita există dar nu este egală cu valoarea funcției în x_0 . Fie $x_0 \in D$ un punct de acumulare atât pentru $D \cap (x_0, \infty)$ cât și pentru $(-\infty, x_0)$. Folosind limite laterale este evident că pentru continuitatea în x_0 este necesar și suficient ca limitele laterale să existe și să fie egale cu $f(x_0)$. Dacă funcția f nu este continuă în punctul $x_0 \in D$, atunci spunem că x_0 este un punct de discontinuitate al funcției f . Având în vedere diferitele comportări în jurul unui punct de discontinuitate introducem următoarele noțiuni.

Definiție. Punctul $x_0 \in D$ este un *punct de discontinuitate de speța întâi*, dacă în x_0 există cele două limite laterale și ambele sunt finite. Toate celelalte puncte de discontinuitate se numesc *puncte de discontinuitate de speța a doua*.

Exemplu. Să se studieze continuitatea următoarelor funcții și stabiliți natura discontinuităților.

a) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \text{sgn } x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ b) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0; \\ 2, & x = 0. \end{cases}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ d) $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

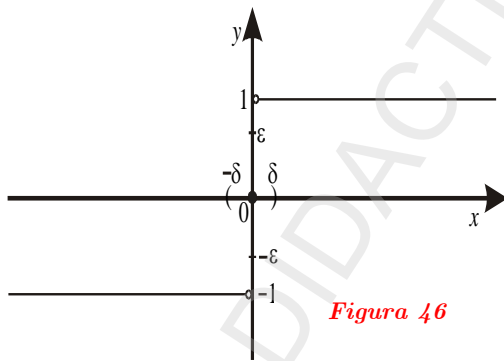


Figura 46

Soluție. a) Funcția f_1 este constantă în orice vecinătate a punctului $x_0 \neq 0$, care nu conține punctul 0. Astfel funcția f_1 este continuă în orice punct $x_0 \neq 0$. În punctul $x_1 = 0$ avem $\lim_{x \nearrow 0} f_1(x) = 1$ și $\lim_{x \searrow 0} f_1(x) = -1$, deci funcția nu are limită în punctul $x_1 = 0$ și astfel nu este continuă. Cum ambele limite laterale sunt finite, punctul $x_1 = 0$ este un punct de discontinuitate de prima speță (Fig. 46).

b) Funcția f_2 este de gradul întâi în orice vecinătate a punctului $x_0 \neq 0$, care nu conține punctul 0. Astfel f_2 este continuă în orice punct $x_0 \neq 0$. În punctul $x_0 = 0$, avem $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, deci există limita funcției în acest punct. Cu toate acestea funcția nu este continuă deoarece această limită nu este egală cu valoarea funcției în punctul $x_0 = 0$.

c) Limita $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nu există deoarece pentru șirurile $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ și $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$,

$n \geq 1$ valorile funcției au limite diferite, deci funcția nu este continuă. Pe de altă parte



din șirurile precedente fiind cu termeni pozitivi, nu există nici limita de la dreapta (și nici limita de la stânga deoarece funcția este impară), deci punctul $x_0 = 0$ este un punct de discontinuitate.

d) Din $\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ și $\lim_{x \nearrow 0} f_4(x) = 0$ rezultă că funcția nu este continuă în 0 și are un punct de discontinuitate de speța a doua.

5. Funcția $f(x) = x^3$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0 = 1$, deoarece $|f(x) - f(1)| = |x^3 - 1^3| = |x - 1| |x^2 + x + 1| < \varepsilon$, dacă

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{x^2 + x + 1} < \frac{\varepsilon}{\min(x^2 + x + 1)} = \frac{\varepsilon}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1} = \frac{\varepsilon}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\varepsilon.$$

Astfel $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$, dacă $|x - 1| < \frac{4\varepsilon}{3}$, deci $\delta = \frac{4\varepsilon}{3}$ și funcția este continuă în $x_0 = 1$.

Observație. În studiul continuității funcțiilor care sunt definite prin legi (formule) diferite în mulțimile $D \cap (x_0, \infty)$ și $D \cap (-\infty, x_0)$ folosim de regulă limitele laterale deoarece funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în $x_0 \in (a, b)$ dacă și numai dacă

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Exerciții

Studiați continuitatea următoarelor funcții în punctele precizate:

1. $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, $x = 0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$.

2. $f: [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x = 0, 2, -1$.

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ 3x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $x = 0, -1, 2$.

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < -1 \\ x^2 - 3, & x \in [-1, 1] \\ 3x + 1, & x > 1 \end{cases}$, $x = 0, -1, 1$.

5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\} = x - [x]$, $x = 1, 2, \frac{1}{2}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului x și $\{x\}$ este partea fracționară a numărului x .

6. Determinați domeniul de continuitate a funcției $f(x) = \operatorname{tg} x$.

7. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $x = 0, 1, -1$.

8. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \end{cases} x = 0, 1, -2.$

9. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x^3, x = 1, 3.$

10. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x + \cos x, x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi.$

11. $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{1}{x}, x = \frac{3}{2}.$

12. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Arătați că f nu este continuă în nici un punct x_0 .

13*. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea $f\left(r + \frac{1}{n}\right) = f(r)$ pentru orice număr rațional r și $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că f este o funcție constantă.

Ecuția funcțională a lui Cauchy

Problemă. Determinați toate funcțiile continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Din relația (1) pentru $x = y = 0$ obținem:

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0),$$

deci $f(0) = 0$. Pentru $x = y$ rezultă

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$$

și astfel prin inducție matematică putem demonstra că

$$f(n \cdot x) = n \cdot f(x), \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr dacă această proprietate este valabilă pentru n , atunci

$$f((n + 1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n + 1)f(x),$$

deci este valabilă și pentru $(n + 1)$. Pe baza principiului inducției matematice relația (2) este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x),$$

deci $f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$f((-n)x) = f(-nx) = -f(nx) = -nf(x),$$

deci pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ și $x \in \mathbb{R}$ avem

$$f(k \cdot x) = k \cdot f(x).$$

Dacă $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$, atunci

$$m \cdot f(x) = f(m \cdot x) = f\left(n \cdot \frac{m}{n} x\right) = n \cdot f\left(\frac{m}{n} x\right), \text{ deci}$$

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x).$$

De aici rezultă că pentru orice $r \in \mathbb{Q}$ și $x \in \mathbb{R}$ avem

$$f(r \cdot x) = r \cdot f(x),$$

deci pentru $r \in \mathbb{Q}$ avem $f(r) = r \cdot f(1)$. În continuare demonstrăm că această egalitate se poate extinde și la cazul $r \in \mathbb{R}$. Pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ considerăm un șir de numere raționale $(r_n)_{n \geq 1}$ pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha$. Folosind continuitatea funcției f în punctul α obținem

$$f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n f(1)) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n\right) f(1) = \alpha f(1).$$

În consecință $f(\alpha) = \alpha \cdot f(1)$ pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, deci singurele funcții continue care satisfac relația (1) pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ sunt cele de forma $f(x) = m \cdot x$, unde $m \in \mathbb{R}$.

Observații. Ecuția funcțională (1) se numește ecuația lui *Cauchy* și are o infinitate de soluții care nu sunt continue. Funcțiile elementare (funcția putere, funcția exponențială, funcția logaritmică, etc.) se pot defini prin ecuații funcționale și foarte multe dintre acestea se pot rezolva printr-un procedeu analog celui prezentat mai înainte.

OPERAȚII CU FUNCȚII CONTINUE

Pentru a studia într-un mod mai convenabil continuitatea funcțiilor avem nevoie de proprietăți care leagă operațiile algebrice de continuitate. Astfel de exemplu pentru a studia continuitatea funcției $f(x) = \sin x + \cos x$ ar fi mai simplu să studiem separat funcțiile $\sin x$ și $\cos x$ dacă continuitatea s-ar transfera de la operanzi la rezultat.

Problemă. Să studiem dacă continuitatea funcțiilor f și g în punctul x_0 garantează continuitatea funcției sumă $f + g$ în același punct x_0 .

Rezolvare. Considerăm un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea $x_n \rightarrow x_0$. Din continuitatea funcțiilor f și g în punctul x_0 rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0)$.

Astfel pe baza proprietăților șirurilor convergente obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n) + g(x_n)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_n) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x_n) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0),$$

deci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0),$$

adică $f + g$ este continuă în x_0 .

Din acest raționament rezultă că toate proprietățile limitelor de șiruri se pot transfera automat la studiul funcțiilor continue. Pentru fixarea ideilor și a noțiunilor enunțăm următoarea teoremă:

Teoremă. Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții și $x_0 \in D$.

- a) Dacă funcțiile f și g sunt continue în x_0 , atunci și $f + g$ este continuă în x_0 .
- b) Dacă funcțiile f și g sunt continue în x_0 , atunci și $f \cdot g$ este continuă în x_0 .
- c) Dacă funcțiile f și g sunt continue în x_0 , și $g(x_0) \neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este continuă în punctul x_0 .
- d) Dacă funcția $f : D \rightarrow E$ este continuă în punctul $x_0 \in D$ și funcția $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în punctul $y_0 = f(x_0)$, $y_0 \in E$ ($D \subseteq \mathbb{R}$ și $E \subseteq \mathbb{R}$), atunci funcția compusă $g \circ f$ este continuă în x_0 .
- e) Dacă funcțiile $f : D \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ și $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue în punctul x_0 , atunci și funcția $u : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ $u(x) = [f(x)]^{g(x)}$ este continuă în x_0 .

Cazuri particulare. Dacă funcția $f : D \rightarrow E$ este continuă în $x_0 \in D$, atunci funcțiile de mai jos sunt continue în $x_0 \in D$:

- a) $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = a^{f(x)}$, unde $a > 0$ și $a \neq 1$.
- b) $h : D \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \log_a f(x)$, unde $f(x) > 0$, $\forall x > 0$ și $a > 0$, $a \neq 1$.
- c) $k : D \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = \sin f(x)$.

În loc de funcția sinus putem considera orice altă funcție trigonometrică $\cos, \text{tg}, \text{ctg}, \arcsin, \arccos, \arctg, \text{arcctg}$ cu condiția ca $f(x_0)$ să fie în domeniul de definiție al funcției respective (de exemplu la tangentă $f(x_0)$ să nu fie de forma $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$).

Observație. În capitolul „Limite de funcții” am văzut că funcțiile polinomiale, exponențiale, trigonometrice și inversele acestora sunt de fapt funcții continue (vezi exercițiile rezolvate). În cele ce urmează vom numi **funcții elementare** funcțiile care se pot obține din acestea printr-un număr finit de adunări, înmulțiri, împărțiri, ridicări la putere, compunere. Pe baza proprietăților de mai sus funcțiile elementare sunt continue pe domeniul lor de definiție.

Exerciții și probleme

1. Determinați punctele de continuitate ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Studiați continuitatea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ în punctele $x = 0$ și $x = \pi$.
3. a) Demonstrați că dacă funcția f este continuă în punctul x_0 și $f(x_0) \neq 0$, atunci și funcția $\frac{1}{f}$ este continuă în punctul x_0 .
b) Demonstrați că dacă funcțiile f și g sunt continue în x_0 și $g(x_0) \neq 0$, atunci și $\frac{f}{g}$ este continuă în x_0 .

4. Determinați domeniul de continuitate al următoarelor funcții

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2};$ b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x};$

c) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 - 1};$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \max(\sin x, \cos x).$

5. Demonstrați că dacă funcția f este continuă în punctul x_0 atunci și $|f|$ este continuă în acel punct.

6. Determinați valoarea de adevăr a reciprocei propoziției precedente.

7. Studiați continuitatea următoarelor funcții:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases};$ b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (2x + 1)^3;$

c) $f(x) = \cos^2 x + 2 \cos x + 1;$ d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1 \\ 0, & -1 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{x^3}, & x < -1 \end{cases};$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2}, & x \neq -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases};$ f) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + 1)^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(x+1)^4, & x > 0 \end{cases};$

g) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 3x - 2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};$ h) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-\sqrt{2}}, & x \in \mathbb{Q} \\ 3x - 2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$

8. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ este continuă pe domeniul de definiție.

9. Determinați domeniul maxim de definiție a funcției $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ și demonstrați că funcția dată este continuă pe acest domeniu.

10. Determinați punctele de discontinuitate ale următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^{2n}};$ b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}};$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 \cdot e^{nx}}{1 + e^{nx}};$ d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \max(x^2, x).$

11. Studiați continuitatea următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x],$ unde $[x]$ este partea întreagă a numărului x .

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\},$ unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului x .

12. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care sunt continue în punctul $x = 0$ și satisfac ecuația funcțională $f(x) + f(2x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

13. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă

$$x \cdot f(y) + y \cdot f(x) = (x + y) \cdot f(x) \cdot f(y)$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Câte funcții continue satisfac ecuația precedentă?

14*. Funcțiile periodice $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfac relația

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

Demonstrați că $f = g$.

15*. Determinați toate funcțiile continue $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f(x) = f(x^2)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$.

16. Determinați toate funcțiile continue $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică ecuația funcțională $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$, pentru orice $x, y \in (-1, 1)$.

FUNCȚII CONTINUE PE UN INTERVAL

Definiție. Funcția f este continuă pe intervalul I , dacă este continuă în fiecare punct al intervalului I . Mai general funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă dacă este continuă în fiecare punct $x_0 \in D$.

Teorema din paragraful precedent implică următoarea teoremă:

Teoremă. **a)** Dacă funcțiile $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue atunci și funcția $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ este continuă.

b) Dacă funcțiile $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue, atunci funcția $f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ pentru orice $x \in D$, este continuă.

c) Dacă funcțiile $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue, și $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in D$, atunci funcția $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in D$ este continuă.

d) Dacă funcțiile $f : D \rightarrow E$ și $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue ($D \subseteq \mathbb{R}$ și $E \subseteq \mathbb{R}$), atunci funcția compusă $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă.

e) Dacă funcția $f : D \rightarrow E$ este continuă și bijectivă ($D \subseteq \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$ sunt intervale), atunci funcția inversă $f^{-1} : E \rightarrow D$ este continuă.

f) Dacă funcțiile $f : D \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ și $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue, atunci funcția $u : D \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ $u(x) = (f(x))^{g(x)}$ este continuă.

Cazuri particulare. Dacă funcția $f : D \rightarrow E$ este continuă, atunci următoarele funcții sunt continue:

a) $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = a^{f(x)}$, unde $a > 0$ și $a \neq 1$.

b) $h : D \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \log_a f(x)$, unde $f(x) > 0$, $\forall x \in D$ și $a > 0$, $a \neq 1$.

c) $k : D \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = \sin f(x)$.

**Exemple.**

1. $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$ este continuă pe intervalul $I = [-1, 1]$;
2. $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + 1$ este continuă pe intervalul $I = [1, 4]$;
3. $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ este continuă pe intervalul $I = [1, 2]$;
4. $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ este continuă pe intervalul $I = (0, 1)$.

Majoritatea funcțiilor studiate până acum sunt continue pe un interval corespunzător. Astfel intuiția ne sugerează că aceste funcții (definite pe un interval închis) sunt mărginite și în plus dacă $f(x_1) < f(x_2)$, atunci f ia toate valorile între $f(x_1)$ și $f(x_2)$ pe intervalul determinat de punctele x_1 și x_2 . Totuși intuiția poate fi greșită, mai ales dacă se bazează pe o reprezentare grafică. Se pot defini curbe continue care nu se pot reprezenta grafic și astfel pentru a demonstra validitatea unei afirmații referitoare la funcții continue este necesar un raționament care este oarecum independent de reprezentările intuitive. În paragrafele care urmează vom demonstra proprietăți foarte simple din punct de vedere intuitiv, dar care necesită totuși o demonstrație riguroasă.

Teorema lui Bolzano¹ și proprietatea lui Darboux

Să considerăm următoarele trei proprietăți:

1. O funcție continuă transformă orice interval în interval.

În termeni mai preciși dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, $x_{1,2} \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ două puncte arbitrare, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, atunci pentru orice $y_0 \in [y_1, y_2]$ (sau $y_0 \in [y_2, y_1]$) există $x_0 \in [x_1, x_2]$ cu proprietatea $f(x_0) = y_0$.

2. Dacă funcția continuă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ia o valoare pozitivă în $x_1 \in [a, b]$ și o valoare negativă în $x_2 \in [a, b]$, atunci există $c \in [x_1, x_2]$ astfel încât $f(c) = 0$.

3. Imaginea unei funcții continue, definite pe un interval închis este un interval închis.

A doua proprietate este un caz particular al primei proprietăți; totuși vom vedea că prima proprietate poate fi demonstrată cu ajutorul acesteia. Deși intuitiv prima proprietate pare a fi echivalentă cu continuitatea funcției, vom vedea că există funcții care nu sunt continue și totuși au această proprietate. Din acest motiv această proprietate poartă denumirea de „proprietatea valorilor intermediare” sau proprietatea lui Darboux. Pentru fixarea noțiunilor formulăm următoarea definiție:

Definiție. Funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ are *proprietatea lui Darboux*, dacă pentru orice $x_{1,2} \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ și orice $y_0 \in (f(x_1), f(x_2))$ (sau $y_0 \in (f(x_2), f(x_1))$) există $x_0 \in (x_1, x_2)$ cu proprietatea $f(x_0) = y_0$.

¹ Bernard Bolzano (1781-1848) a fost un preot creștin cu preocupări scolastice care a pus un accent foarte mare pe fundamentarea riguroasă a analizei matematice.

Observație. Această definiție este echivalentă cu faptul că funcția transformă orice subinterval al domeniului de definiție $[a, b]$ într-un interval.

Exemplu. Să demonstrăm că funcția $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ are proprietatea lui Darboux.

Dacă $x_{1,2} \in \mathbb{R}_+$ și $y_0 \in (x_1^2 + 1, x_2^2 + 1)$, atunci numărul $x_0 = \sqrt{y_0 - 1}$ este în intervalul (x_1, x_2) și $f(x_0) = y_0$, deci funcția f are proprietatea lui Darboux.

Prima dată demonstrăm a doua proprietate. Datorită importanței acesteia în aplicații o enunțăm ca o teoremă separată.

Teoremă. (Bolzano) Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă ($a < b$) și $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există $c \in (a, b)$ cu proprietatea $f(c) = 0$.

Demonstrație. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $f(a) < 0$. Considerăm mulțimea $H = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$. H este o mulțime nevidă și mărginită deoarece este o submulțime a intervalului $[a, b]$, și $a \in H$. Conform axiomei supremumului există $s = \sup H$. Demonstrăm că $f(s) = 0$ și $a < s < b$. Din condițiile teoremei rezultă că există $\varepsilon > 0$ pentru care $f(a) + \varepsilon < 0 < f(b) - \varepsilon$. Datorită continuității funcției f , obținem $\lim_{x \searrow a} f(x) = f(a)$ și $\lim_{x \nearrow b} f(x) = f(b)$, deci există $\delta(\varepsilon) > 0$ cu proprietatea $f(x) < f(a) + \varepsilon < 0 < f(b) - \varepsilon < f(y)$, pentru orice $a < x < a + \delta(\varepsilon)$ și $b - \delta(\varepsilon) < y < b$. De aici rezultă că $a < s < b$. Dacă $f(s) < 0$, atunci datorită continuității în s a funcției f rezultă că există $\delta > 0$ astfel încât $f(x) < 0$ pentru orice $x \in (s - \delta, s + \delta)$ și astfel H are și elemente mai mari decât s . Din această contradicție deducem $f(s) \geq 0$. Pe de altă parte dacă $f(s) > 0$, atunci continuitatea funcției f în punctul s implică existența unui număr $\delta > 0$ cu proprietatea $f(x) > 0$ pentru orice $x \in (s - \delta, s + \delta)$. Din această inegalitate rezultă că H admite o margine superioară mai mică decât s , ceea ce contravine alegerii lui s . În consecință $f(s) = 0$.

Din această teoremă rezultă prima proprietate:

Teoremă. Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, atunci are proprietatea lui Darboux.

Demonstrație. Fie $x_{1,2} \in [a, b]$ două numere fixate și $y_0 \in [f(x_1), f(x_2)]$ un număr oarecare. Considerăm funcția continuă $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - y_0$. Datorită alegerii acestor valori avem $g(x_1) = f(x_1) - y_0 < 0$ și $g(x_2) = f(x_2) - y_0 > 0$, deci există $x_0 \in (x_1, x_2)$ pentru care $g(x_0) = f(x_0) - y_0 = 0$. În consecință funcția f are proprietatea lui Darboux.



Exemplu. Să demonstrăm că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ are

proprietatea lui Darboux pentru orice $a \in [-1, 1]$.

Demonstrație. Dacă $0 < x_1 < x_2$ sau $x_1 < x_2 < 0$, atunci funcția f este continuă pe intervalul $[x_1, x_2]$, deci are proprietatea lui Darboux pe acest interval. Astfel ia toate valorile între $f(x_1)$ și $f(x_2)$ pe intervalul (x_1, x_2) . Dacă $x_1 \leq 0 < x_2$, sau

$x_1 < 0 \leq x_2$, atunci în șirurile $z_{n,1} = \pm \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \geq 1$ și $z_{n,2} = \pm \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$, $n \geq 1$

putem alege semnele astfel încât termeni acestora să fie în interiorul intervalului (x_1, x_2) de la un rang $n(x_1, x_2) \in \mathbb{N}$ încolo. Astfel

$$[-1, 1] \supset f([x_1, x_2]) \supset f([z_{n,1}, z_{n,2}]) = [-1, 1],$$

deci imaginea funcției pe intervalul $[x_1, x_2]$ este $[-1, 1]$ (independent de a). Din toate acestea rezultă că funcția are proprietatea lui Darboux.



Observații. 1. Interpretarea grafică este următoarea: Dacă graficul unei funcții continue trece prin punctele $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$, iar A este deasupra axei reale și B este sub axa Ox , atunci graficul se intersectează cu axa Ox în cel puțin un punct de abscisă $c \in (a, b)$ (sau cu alte cuvinte ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție între a și b). Vezi figura 47.

2. Dacă considerăm funcția al cărei grafic este reprezentat în figura 48, atunci proprietățile anterioare nu mai sunt valabile. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} 1+x, & x > 0 \\ -1+x, & x \leq 0 \end{cases}$ nu are nici una din cele trei proprietăți enumerate.

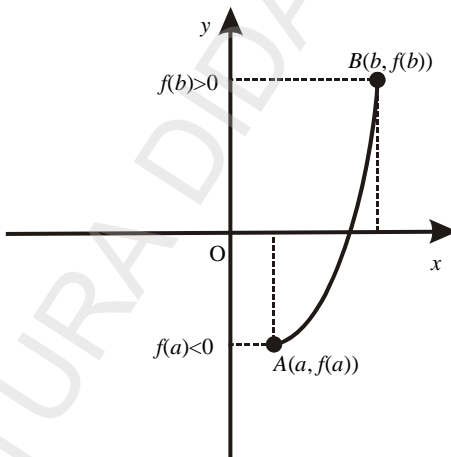


Figura 47

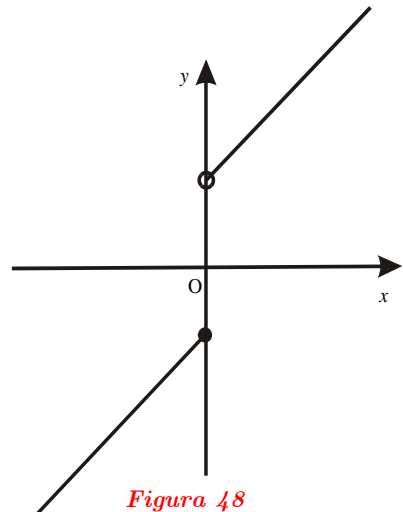


Figura 48

Teorema lui Weierstrass

Proprietatea a treia din paragraful precedent poartă numele matematicianului Karl Weierstrass (1815-1897).

Teoremă. Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă ($a < b$), atunci există $c_1, c_2 \in [a, b]$ astfel încât

$$f(c_1) = M = \max_{x \in [a, b]} f(x); \quad f(c_2) = m = \min_{x \in [a, b]} f(x).$$

Observație. Proprietatea poate fi formulată și în modul următor: orice funcție continuă pe un interval închis este mărginită și își atinge marginile pe acest interval.

Demonstrație. Demonstrăm că imaginea funcției este o mulțime mărginită. Dacă nu ar fi așa, atunci ar exista un șir $(y_n)_{n \geq 1} \subset \text{Im } f$ cu limita ∞ sau $-\infty$. Pentru acest șir există șirul $(x_n)_{n \geq 1} \subset [a, b]$ pentru care $f(x_n) = y_n, n \geq 1$. Dar șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ fiind mărginit admite un subșir convergent $(x_{n_k})_{k \geq 1}$. Dacă l este limita acestui subșir convergent, atunci din faptul că intervalul este închis rezultă că $l \in [a, b]$ și astfel funcția f este continuă în l , deci $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(l)$. Pe de altă parte această egalitate este în contradicție cu alegerea șirului $(y_n)_{n \geq 1}$, deoarece șirul $(f(x_{n_k}))_{k \geq 1}$ este un subșir al șirului $(y_n)_{n \geq 1}$ și astfel nu poate avea limită finită. Dacă imaginea este mărginită, atunci datorită axiomei supremumului și a infimumului există $M = \sup \text{Im } f$ și $m = \inf \text{Im } f$. Rămâne să arătăm că $M, m \in \text{Im } f$. Din definiția supremumului rezultă că există un șir $(x_n)_{n \geq 1} \subset [a, b]$ pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$. Din $(x_n)_{n \geq 1} \subset [a, b]$ deducem că acest șir admite un subșir convergent, deci notând cu l_1 limita subșirului convergent rezultă $M = f(l_1) \in \text{Im } f$. În mod similar deducem $m \in \text{Im } f$.

Probleme rezolvate

1. Să se demonstreze că dacă funcția $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ este continuă, atunci există $x_0 \in [0, 1]$ cu proprietatea $f(x_0) = x_0$ (x_0 este un punct fix al funcției f).

Demonstrație. Considerăm funcția continuă $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = f(x) - x$. Dacă $\varphi(0) = 0$, atunci $f(0) - 0 = 0$, adică $f(0) = 0$. Dacă $\varphi(1) = 0$, atunci $f(1) = 1$, deci putem presupune că

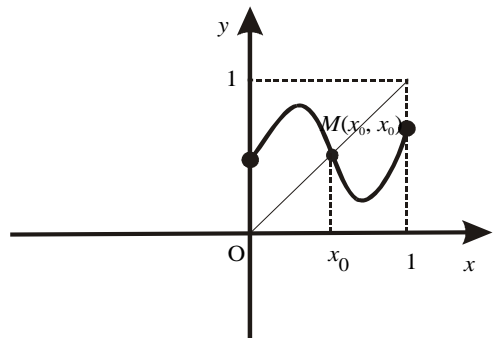


Figura 49

$\varphi(0) \neq 0$ și $\varphi(1) \neq 0$. Din aceste condiții și din faptul că valorile funcției f sunt în intervalul $[0,1]$ rezultă că $\varphi(0) = f(0) > 0$ și $\varphi(1) = f(1) - 1 < 1 - 1 = 0$. Astfel putem aplica funcției φ teorema lui Bolzano pe intervalul $[0,1]$. În consecință există $x_0 \in (0,1)$ astfel încât $\varphi(x_0) = 0$. Această egalitate implică $f(x_0) = x_0$, deci funcția f are cel puțin un punct fix.

2. Să se demonstreze că fiecare funcție polinomială de grad impar admite cel puțin o rădăcină nenulă.

Demonstrație. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că coeficientul dominant este 1 (în caz contrar împărțim ecuația polinomială cu coeficientul dominant): $f(x) = x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \dots + a_{2n}x + a_{2n+1}$.

Din relațiile $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-\infty)^{2n+1} = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty)^{2n+1} = +\infty$ rezultă că funcția ia atât valori negative cât și valori pozitive. Pe baza teoremei lui Bolzano există $x_0 \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x_0) = 0$.

3. Funcția $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + 2 \sin x$ este continuă pe intervalul $[0, \pi]$. Să se determine valorile extreme ale acestei funcții.

Rezolvare. Din inegalitățile $0 \leq \sin x \leq 1$, pentru orice $x \in [0, \pi]$, rezultă $0 \leq 2 \sin x \leq 2$ și deci $1 \leq 1 + 2 \sin x \leq 3$. Astfel $1 \leq f(x) \leq 3$, pentru orice $x \in [0, \pi]$. Pe de altă parte $\max_{x \in [0, \pi]} f(x) = 3 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ și $\min_{x \in [0, \pi]} f(x) = 1 = f(0) = f(\pi)$, deci pe baza continuității funcției f , imaginea intervalului $[0, \pi]$ este $\text{Im } f = f([0, \pi]) = [1, 3]$.

4. Să se demonstreze că dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, $f(a) = f(b)$ și pentru orice $x \in (a, b)$ are loc inegalitatea $f(x) \geq f(a)$, atunci pentru orice $0 < l < b - a$ există o coardă paralelă cu axa Ox și de lungime l pe graficul funcției f .

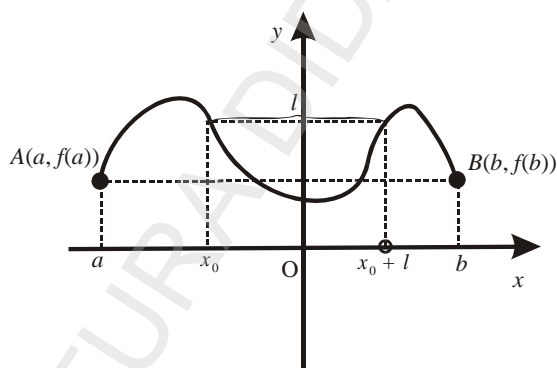


Figura 50

Demonstrație. Fie $0 < l < b - a$. Pe intervalul $[a, b - l]$ definim funcția h în modul următor:

$$h(x) = f(x + l) - f(x).$$

Datorită condițiilor avem

$$h(a) = f(a + l) - f(a) \geq 0 \text{ și}$$

$$h(b - l) = f(b) - f(b - l) \leq 0.$$

Dacă în una din cele două inegalități precedente are loc egalitatea, atunci nu avem ce demonstra. În caz contrar putem aplica teorema lui Bolzano ($h(a) > 0$ și $h(b - l) < 0$), deci

există $x_0 \in (a, b - l)$ cu proprietatea $h(x_0) = 0$. Această egalitate este echivalentă cu $f(x_0 + l) - f(x_0) = 0$, deci graficul admite o coardă de lungime l , paralelă cu Ox .

5. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface următoarele două proprietăți:

(1) pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc $f(x) - f(y) \leq k \cdot (x - y)$, unde $k > 0$;

(2) funcția f este continuă pe mulțimea \mathbb{R} .

Să se demonstreze că funcția f este bijectivă.

Demonstrație. I. Pentru $x_1 < x_2$ avem $f(x_1) - f(x_2) \leq k(x_1 - x_2) < 0$, deci $f(x_1) < f(x_2)$. De aici rezultă că funcția este strict monotonă, deci injectivă.

II. Din condiția (1) $f(x) \leq k \cdot x - k \cdot y + f(y)$. Pentru y fixat și $x \rightarrow -\infty$ rezultă $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, deoarece $\lim_{x \rightarrow -\infty} (kx - ky + f(y)) = -\infty$. În mod analog $f(y) \geq ky + f(x) - kx$, deci pentru $x \in \mathbb{R}$ fixat și $y \rightarrow \infty$ rezultă $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = +\infty$, deoarece $\lim_{y \rightarrow \infty} (ky + f(x) - kx) = +\infty$.

Din aceste proprietăți rezultă că funcția f ia toate valorile între $-\infty$ și $+\infty$, deci este și surjectivă. În consecință f este bijectivă.

6. Studiul semnului unei funcții continue.

Dacă f este o funcție continuă pe intervalul I și $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f nu își poate schimba semnul pe I .

Într-adevăr dacă ar exista $a, b \in I$ cu proprietatea $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$, atunci pe baza teoremei lui Bolzano am avea $c \in I$ cu proprietatea $f(c) = 0$.

Această proprietate se poate folosi pentru studiul semnului unei funcții continue. Presupunem că funcția continuă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ are un număr finit de rădăcini în intervalul I notate cu $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ (în ordine crescătoare). Cum funcția f nu are rădăcină în nici unul din intervalele $I_k = (x_k, x_{k+1})$, își păstrează semnul pe aceste intervale. În mod similar dacă ecuația $f(x) = 0$ nu are rădăcini mai mici decât x_1 și nici rădăcini mai mari decât x_n , atunci are semn constant și pe intervalele $(-\infty, x_1) \cap I$ respectiv $(x_n, \infty) \cap I$. Calculând valoarea funcției într-un punct arbitrar al intervalului I_k putem stabili semnul funcției pe întregul interval I_k .

Să studiem semnul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Rezolvare. $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ sunt $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Astfel funcția își păstrează semnul pe intervalele $I_1 = (-\infty, 1)$; $I_2 = (1, 2)$; $I_3 = (2, 3)$; $I_4 = (3, +\infty)$. Calculând

valorile funcției în $\frac{3}{2}$ și $\frac{5}{2}$, respectiv limita spre $+\infty$ și limita spre $-\infty$ putem întocmi următorul tabel:



x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	---	0	+++	0	---	0	+++	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{39}{8} > 0, f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

7*. Să se determine funcțiile $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ pentru care

$$(1) f(x \cdot f(y)) = y \cdot f(x) \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}_+^*;$$

$$(2) f(x) \rightarrow 0, \text{ dacă } x \rightarrow +\infty.$$

(A XXIV.-a OIM)

Rezolvare. Din relația (1) pentru $y = x$ obținem

$$f(x \cdot f(x)) = x \cdot f(x).$$

Astfel $b = x \cdot f(x)$ este punct fix al funcției f pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^*$ (adică $f(b) = b$).

Fie $a \in \mathbb{R}_+^*$ un punct fix al funcției f . Dacă pentru $n \geq 2$ are loc relația:

$$f(a^{n-1}) = a^{n-1},$$

atunci $f(a^n) = f(a \cdot a^{n-1}) = f(a \cdot f(a^{n-1})) = a^{n-1} \cdot f(a) = a^{n-1} \cdot a = a^n$, deci toate numerele a^n ($n \in \mathbb{N}^*$) sunt puncte fixe ale funcției f . Pe de altă parte

$$a = f(a) = f(1 \cdot a) = f(1 \cdot f(a)) = a \cdot f(1)$$

deoarece $a \neq 0$ și astfel din relația $a = a \cdot f(1)$ rezultă $f(1) = 1$. Dar

$$a \cdot f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{1}{a} \cdot f(a)\right) = f\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) = f(1) = 1,$$

de unde $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$ și printr-un raționament analog $f\left(\frac{1}{a^n}\right) = \frac{1}{a^n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Astfel toate numerele a^k ($k \in \mathbb{Z}$) sunt puncte fixe. Dacă $a \neq 1$, atunci există un șir de forma $x_n = a^{\pm n}$ ($+n$ pentru $a > 1$ și $-n$ pentru $a < 1$) cu limita $+\infty$ pentru care limita șirului $(f(x_n))_{n \geq 1}$ este tot $+\infty$ (deoarece termenii șirului sunt puncte fixe).

Această proprietate este în contradicție cu condiția a doua, deci $a = 1$. În consecință pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^*$ avem $x \cdot f(x) = 1$, deci $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$.

8. Să se demonstreze că ecuația $x^n - x^{n-1} - 1 = 0$, $n \geq 2$ are o singură rădăcină în intervalul $[1, 2]$. Notând cu α_n această rădăcină, să se demonstreze că șirul $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent și să se calculeze limita șirului.

Demonstrație. Considerăm funcția $f_n: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - x^{n-1} - 1$. Din inegalitățile $f_n(1) = -1 < 0$ și $f_n(2) = 2^{n-1} - 1 > 0 \quad \forall n \geq 2$ și din continuitatea funcției f_n rezultă pe baza teoremei lui Bolzano că există cel puțin o rădăcină în

intervalul $[1, 2]$. Pe de altă parte, funcția este strict crescătoare pe acest interval, deci nu poate avea mai mult de o rădăcină. Dacă $\alpha_n = 1 + t_n$, este singura rădăcină a ecuației, atunci din $1 < \alpha_n < 2$, rezultă $1 > t_n > 0$. Astfel avem

$$0 = (1 + t_n)^n - (1 + t_n)^{n-1} - 1 = (1 + t_n)^{n-1} [1 + t_n - 1] - 1 = t_n (1 + t_n)^{n-1} - 1.$$

Aplicând inegalitatea lui Bernoulli deducem

$$1 = t_n (1 + t_n)^{n-1} \geq t_n [1 + (n-1)t_n],$$

deci

$$(n-1)t_n^2 + t_n - 1 \leq 0.$$

Din $t_n > 0$ rezultă

$$0 < t_n \leq \frac{-1 + \sqrt{4n-3}}{2(n-1)} < \frac{2\sqrt{n-1}}{2(n-1)} = \frac{1}{\sqrt{n-1}}.$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} = 0$, pe baza criteriului cleștelui rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$. Astfel șirul

$(\alpha_n)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$.

9. Să se dea exemplul de o funcție continuă și inversabilă a cărei funcție inversă nu este continuă.

Rezolvare. În mod evident domeniul de definiție nu poate fi un interval. Considerăm mulțimea $E \subseteq \mathbb{R}$ definită prin $E = (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$ și funcția $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < -1 \\ 0, & x = 0 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Funcția este strict crescătoare și este continuă (punctul $x = 0$ este punct izolat al domeniului de definiție, deci funcția este continuă în acest punct). Pe de altă parte

$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow E$ este definită prin $f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$ și este o funcție discontinuă

în $x_0 = 0$ ($\lim_{x \nearrow 0} f^{-1}(x) = -1$, $f^{-1}(0) = 0$ și $\lim_{x \searrow 0} f^{-1}(x) = 1$).

10. Se dau în plan sistemele de puncte A_1, A_2, \dots, A_n și B_1, B_2, \dots, B_n având centre de greutate diferite. Demonstrați că există un punct P astfel încât

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n = PB_1 + PB_2 + \dots + PB_n.$$

(Marius Cavachi, ONM, 2006)

Rezolvare. Considerăm un sistem de coordonate în care cele două centre de greutate au abscise diferite și notăm coordonatele punctelor $A_i(x_i, y_i)$, $B_i(x'_i, y'_i)$,

$1 \leq i \leq n$. Dacă $P(x, 0)$ este un punct variabil, atunci definim funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n - PB_1 - PB_2 - \dots - PB_n.$$

Această funcție este continuă și avem următoarele egalități:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \sum_{k=1}^n \left[\sqrt{(x-x_k)^2 + y_k^2} - \sqrt{(x-x'_k)^2 + y_k'^2} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x(x_k - x'_k) + y_k^2 - y_k'^2}{\sqrt{(x-x_k)^2 + y_k^2} + \sqrt{(x-x'_k)^2 + y_k'^2}} = \sum_{k=1}^n x'_k - \sum_{k=1}^n x_k = l \neq 0 \text{ și} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \sum_{k=1}^n \left[\sqrt{(x-x_k)^2 + y_k^2} - \sqrt{(x-x'_k)^2 + y_k'^2} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x(x_k - x'_k) + y_k^2 - y_k'^2}{\sqrt{(x-x_k)^2 + y_k^2} + \sqrt{(x-x'_k)^2 + y_k'^2}} = \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n x'_k = -l. \end{aligned}$$

Din cele două limite precedente rezultă că funcția f ia atât valori negative cât și valori pozitive, deci fiind continuă există x_0 pentru care $f(x_0) = 0$. În consecință pentru punctul $P(x_0, 0)$ avem $PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n = PB_1 + PB_2 + \dots + PB_n$.

Exerciții și probleme

1. Studiați continuitatea următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2+1}-1}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{3}{2}, & x = 0 \end{cases};$ (Bacalaureat, 1989.)

b) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x + \ln x, & x \in (0, 1] \\ \frac{1}{x^{x-1}}, & x > 1 \end{cases};$

c) $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases};$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 \left[\frac{1}{x^2} \right], & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases};$

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x, & x \in \mathbb{Q} \\ 4x + 3, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};$

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos x + |x-1| \cdot e^{nx}}{1 + e^{nx}};$ (Admitere, 1990, Galați)

g) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + x^n \cdot (x^2 + 5)}{x(x^n + 5)}.$

2. Determinați valoarea parametrului a astfel încât funcțiile următoare să fie continue:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} (\sin x + e^x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$;

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3 + a^2, & x \in (-\infty, a], \\ 3x - a, & x \in (a, \infty) \end{cases}$;

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-1| \cdot e^{nx} + a(x+1)^2 e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}$; (Admitere, 1977, Galați)

d) $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x \in [0, 1] \\ a \cdot \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}, & x \in (1, 2] \end{cases}$ (Admitere, 1996, București)

3. Demonstrați că următoarele funcții au proprietatea lui Darboux:

a) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

4. Demonstrați că următoarele funcții nu au proprietatea lui Darboux:

a) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.

5. Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ nu are proprietatea

lui Darboux și determinați toate intervalele a căror imagine este tot un interval.

6. Demonstrați că ecuația $x^5 - 6x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ are cel puțin o rădăcină pozitivă.

7. Demonstrați că ecuația $x = \cos x$ are cel puțin o rădăcină reală.

8. Demonstrați că ecuația $\sqrt{x^4 + x + 2} = \sqrt[3]{x^5 - 8x + 1}$ are cel puțin o rădăcină reală.

9. Stabiliți semnul funcțiilor:

a) $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 5x + 6) \cdot \ln(x - 1)$;

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$;

c) $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x + \cos x$;

d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x + 2$;

e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - x) \cdot e^x$;

10. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ este inversabilă și $f^{-1}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă.

11. Determinați toate funcțiile continue $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f(x \cdot f(x)) = f(x)$ oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

12. Demonstrați că dacă funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux, atunci nu are puncte de discontinuitate de prima speță

13. Arătați că dacă funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este injectivă și continuă, atunci este strict monotonă.

14. Demonstrați că dacă funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este monotonă și $\text{Im } f = f(I)$ este un interval, atunci f este continuă.

15. Demonstrați că dacă funcția $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ are proprietatea lui Darboux și admite un număr finit de discontinuități, atunci are cel puțin un punct fix.

16. Determinați funcțiile continue $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y > 0.$$

17. Demonstrați că dacă $f: [a, b] \rightarrow (a, b)$ este o funcție continuă, atunci pentru orice $n \geq 3$ există o progresie aritmetică $(c_k)_{k=1, \overline{n}} \subset (a, b)$ cu proprietatea

$$\sum_{k=1}^n f(c_k) = \sum_{k=1}^n c_k \quad (\text{OJM, Dan Ștefan Marinescu})$$

18. Funcția continuă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are următoarea proprietate:

șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent dacă și numai dacă șirul $(f(x_n))_{n \geq 1}$ este convergent.

Demonstrați că funcția f nu este mărginită. (Olimpiada județeană)

19. Demonstrați că ecuația $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \dots + \frac{1}{n+x} = \ln 2$ are o singură rădăcină pozitivă. Dacă notăm cu x_n această rădăcină pozitivă, calculați limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}. \quad (\text{OJM, Cristinel Mortici})$$

20. Determinați toate funcțiile continue $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ pentru care

$$f(f(x)) + f(x) = 2x, \quad \forall x \in [0, \infty). \quad (\text{Dorel Mihet})$$

V. FUNCȚII DERIVABILE

PROBLEME CARE CONDUC LA NOȚIUNEA DE DERIVATĂ

1. Definiția vitezei instantanee

Fie M un punct mobil care efectuează o mișcare uniformă de-a lungul unei drepte. Astfel traiectoria este o dreaptă și în intervale de timp egale punctul parcurge distanțe egale, deci distanța parcursă este direct proporțională cu timpul. Constanta de proporționalitate este chiar viteza punctului și arată distanța parcursă într-o unitate de timp. Dacă notăm viteza cu v , timpul mișcării cu t și distanța parcursă cu s , atunci $v = \frac{s}{t}$.

Mișcarea fiind uniformă putem spune că viteza este aceeași în fiecare moment. Dacă mișcarea este rectilinie (deci traiectoria este o dreaptă) dar nu mai este uniformă, atunci distanțele parcurse într-o unitate de timp nu mai sunt egale. Dacă notăm cu $s(t)$ distanța parcursă până în momentul t , atunci distanța parcursă între momentele t_0 și t este $\Delta s = s(t) - s(t_0)$. Astfel viteza medie pe această perioadă $\Delta t = t - t_0$ este

$$v_k = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Dacă această fracție are limită când $t \rightarrow t_0$, atunci vom spune că limita expresiei este viteza instantanee în momentul t_0 , sau simplu viteza în momentul t_0 . Vom nota această viteză cu $v(t_0)$. Astfel $v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$,

dacă această limită există.

Observație. Dacă funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ descrie o mărime oarecare M în funcție de timp, atunci viteza de schimbare a mărimii M în momentul t_0 se poate defini prin

$$v_M(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

dacă această limită există.

2. Problema tangentei

Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ și notăm cu $m(x)$ panta secantei ce trece prin punctul fixat $M_0(1,1)$ și punctul mobil $M(x, x^2)$. Să studiem dacă această funcție are limită în punctul 1.

Panta coardei M_0M se poate exprima prin relația

$$m(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1},$$

deci suntem conduși la calcularea limitei

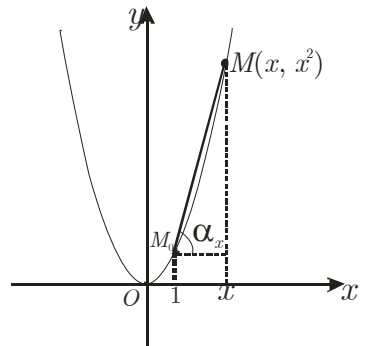


Figura 51



$$m = \lim_{x \rightarrow 1} m(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Când punctul mobil M se apropie de punctul $M_0(1,1)$, atunci coarda corespunzătoare se apropie de tangenta în acest punct, deci vom spune că dreapta care trece prin M_0 și are panta $m = 2$ este tangenta în acest punct la graficul funcției. Astfel ecuația tangentei este

$$y - 1 = 2(x - 1).$$

În general dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție, $x_0 \in D$ este un punct de acumulare a domeniului D , atunci pantele cordelor ce trec prin x_0 sunt de forma

$$m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \text{ Astfel, dacă există limita } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m, \text{ atunci vom}$$

spune că graficul funcției admite o tangentă în acest punct și limita precedentă este chiar panta tangentei. Dacă $m \in \mathbb{R}$ atunci ecuația tangentei în punctul x_0 la graficul funcției este

$$y - f(x_0) = m(x - x_0).$$

Dacă $m \in \{\pm\infty\}$, atunci vom spune că tangenta este verticală și astfel ecuația tangentei este de forma $x = x_0$.

Observație. În cazul curbelor studiate în gimnaziu (de exemplu cercul) am definit tangenta ca dreapta care intersectează curba într-un singur punct. Această definiție nu se poate folosi în general. De exemplu relativ la graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ toate dreptele care trec prin origine au această proprietate, totuși nu putem spune că acestea ar fi tangentele graficului. (vezi figura 52).

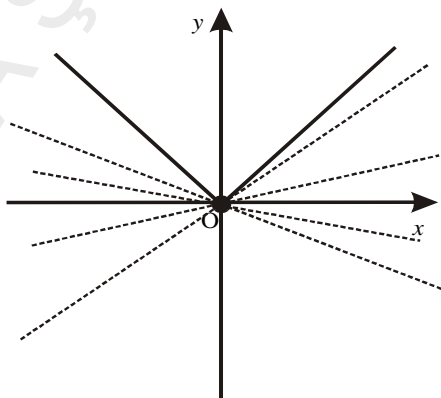


Figura 52

DEFINIȚIA DERIVATEI

În problemele anterioare am fost nevoiți să studiem (calculăm)

$$\text{limite de forma } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

unde f este o funcție oarecare. Datorită frecvenței cu care această expresie apare în diverse situații precum și proprietăților importante care înlesnesc studiul altor proprietăți ale funcției f introducem această limită ca o noțiune separată.

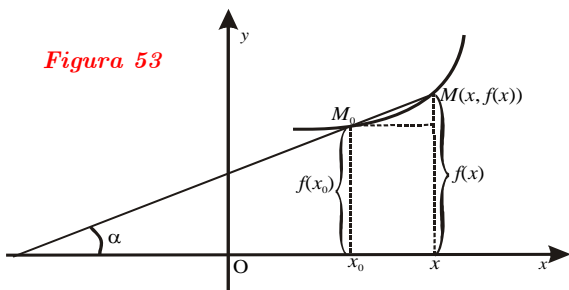


Figura 53

Definiții. 1. Fie $x_0 \in D$ un punct de acumulare a mulțimii D . Spunem că funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ are derivată în punctul x_0 , dacă există limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ în cazul în care această limită este m spunem că m este **derivata** funcției f în punctul x_0 și o notăm cu $f'(x_0)$. Adică $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

2. Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **derivabilă** în punctul x_0 , dacă există limita $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ și această limită este finită.

Observații. 1. Dacă există numărul real $f'(x_0)$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru $0 < |x - x_0| < \delta$ să avem $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$.

Astfel putem scrie că $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| = 0$.

2. Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, atunci funcția f nu este derivabilă în x_0 , dar are derivată în acest punct, derivata fiind $\pm\infty$.

Definiții. 1. Dacă funcția f este derivabilă în fiecare punct al mulțimii $E \subseteq D$, atunci spunem că funcția f este derivabilă pe mulțimea E .

2. Funcția $f' : E \rightarrow \mathbb{R}$ care atașează fiecărui $x \in E$ valoarea derivatei în punctul x_0 , adică $f'(x_0)$ este derivata funcției f și se notează cu f' sau cu $\frac{df}{dx}$ (notația lui Leibniz)

Interpretarea derivatei. Conform problemelor introductive putem spune că dacă funcția f admite derivată în punctul x_0 , atunci graficul funcției are tangentă în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ iar în cazul în care $f'(x_0) = m \in \mathbb{R}$, derivata este chiar panta tangentei. Dacă derivata este $\pm\infty$, atunci tangenta este verticală. În primul caz ecuația tangentei se scrie sub forma $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, iar în al doilea caz ecuația tangentei este $x = x_0$.

Exemple. 1. Să se studieze derivabilitatea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Soluție. Fixăm punctul arbitrar $x_0 \in \mathbb{R}$ și calculăm limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Astfel funcția f este derivabilă în orice punct $x_0 \in \mathbb{R}$ și derivata în x_0 este $f'(x_0) = 2x_0$.

De aici rezultă că derivata funcției f este funcția $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

Geometric această proprietate exprimă faptul că în punctul $M_0(x_0, x_0^2)$ există tangentă

la parabola $y = x^2$ și această tangentă are ecuația $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$, adică

$$y = 2x_0 \cdot x - x_0^2.$$

2. Să se studieze derivabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Soluție. Fixăm punctul $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \right) = n \cdot x_0^{n-1},$$

deoarece $\lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1-k} x_0^k = x_0^{n-1}$, dacă $k \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ și suma din paranteză are n termeni. Astfel funcția studiată este derivabilă în orice punct $x_0 \in \mathbb{R}$, și $f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$. În consecință derivata funcției f este:

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f'(x) = n \cdot x^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Consecință. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$, unde $c \in \mathbb{R}$ este derivabilă și derivata este funcția identic nulă ($f'(x_0) = 0$ pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$).

3. Să se studieze derivabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

Rezolvare. Fixăm punctul $x_0 > 0$. Dacă $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$ atunci și x este pozitiv, deci

avem $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$. Deci $f'(x_0) = 1$, pentru

$x_0 > 0$. Dacă $x_0 < 0$, atunci în mod analog putem scrie

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = -1,$$

deci $f'(x_0) = -1$, pentru $x_0 < 0$. În punctul $x_0 = 0$ avem

$$\lim_{x \neq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \neq 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \neq 0} \frac{-x}{x} = -1 \text{ și } \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1,$$

deci în punctul $x_0 = 0$ nu există derivata funcției f . În consecință funcția f este derivabilă pe \mathbb{R}^* și în origine nu admite derivată.

Continuitatea funcțiilor derivabile



Teoremă. Dacă funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $x_0 \in D$, atunci este continuă în acest punct.

Demonstrație. Pe baza definiției x_0 este punct de acumulare al mulțimii D și

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \alpha(x), \text{ unde } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0, \text{ deci}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) - \alpha(x) \text{ și astfel}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - \alpha(x)(x - x_0).$$

De aici rezultă că $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, deci f este continuă în punctul $x_0 \in D$.

Derivate laterale

Folosind limite laterale în definiția derivatei obținem alte două noțiuni folositoare.

Definiții. 1. Dacă $x_0 \in D$ este un punct de acumulare al mulțimii $(-\infty, x_0) \cap D$ și există limita $\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, atunci numim această limită *derivata la stânga* a

funcției f în punctul x_0 și o notăm cu $f'_s(x_0)$ sau cu $f'(x_0 - 0)$. Astfel

$$f'_s(x_0) = f'(x_0 - 0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. Dacă $x_0 \in D$ este un punct de acumulare al mulțimii $(x_0, +\infty) \cap D$, și există limita $\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, atunci numim această limită *derivata la dreapta* a funcției

f în punctul x_0 și o notăm cu $f'_d(x_0)$ sau cu $f'(x_0 + 0)$. Astfel avem

$$f'_d(x_0) = f'(x_0 + 0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Observație. Dacă x_0 este punct de acumulare atât pentru mulțimea $(-\infty, x_0) \cap D$, cât și pentru mulțimea $(x_0, +\infty) \cap D$, atunci funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul x_0 dacă și numai dacă $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$ și ambele limite sunt finite.

Exerciții.

1. Studiați derivabilitatea funcțiilor de mai jos în punctele date.

a) $f(x) = x \cdot |x|$, în 0;

b) $f(x) = \ln|x|$, în 1 și -1;

c) $f(x) = |(x-1)^2(x+1)^3|$, în 1 și -1;

d) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{e^x + x + 1}$ în 1 și -1;

e) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1 \\ 1 - |x|, & |x| > 1 \end{cases}$ în 1 și -1;

f) $f(x) = \arccos(4x - 1)$ în $\frac{1}{4}$;

g) $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1), & x \geq 0 \\ x^7 + 5x^4, & x < 0 \end{cases}$ în 0;

h) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1}, & x \geq -1 \\ \frac{x+1}{x-1}, & x < -1 \end{cases}$ în -1;

i) $f(x) = \begin{cases} 3^x - 1, & x \geq 0 \\ \sin x, & x < 0 \end{cases}$ în $x_0 = 0$.

2. a) Determinați valorile parametrilor a, b astfel ca funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \ln^4 x, & x \in (0, e] \\ ax^2 + bx + c, & x > e \end{cases} \text{ să fie derivabilă în } e.$$

b) Determinați valorile parametrilor a, b astfel ca funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in [-1, 0) \\ x^3 + ax + b, & x \in [0, 1] \end{cases}$ să fie derivabilă în punctul 0, iar pentru valorile

determinate arătați că $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$.

DERIVATELE FUNCȚIILOR ELEMENTARE

1. Derivata funcției radical

Considerăm funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^*$ și punctul $x_0 > 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{(\sqrt[n]{x})^n - (\sqrt[n]{x_0})^n} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0})(\sqrt[n]{x}^{n-1} + \sqrt[n]{x}^{n-2}\sqrt[n]{x_0} + \dots + \sqrt[n]{x_0}^{n-1})} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[n]{x_0}^{n-1} + \sqrt[n]{x_0}^{n-2} + \dots + \sqrt[n]{x_0}^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x_0}^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x_0^{\frac{1}{n}-1}. \end{aligned}$$

Deci $f(x) = \sqrt[n]{x}$ este derivabilă în fiecare punct $x > 0$ și

$$(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x}^{n-1}}.$$

Exerciții. Determinați domeniul maxim de derivabilitate a următoarelor funcții și calculați derivatele:

1. $f(x) = \sqrt[5]{x}$; **2.** $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; **3.** $f(x) = x^2 \sqrt{x}$; **4.** $f(x) = (2x+1)(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} + 1)$

2. Derivata funcției exponențiale

Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = a^x$, unde $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = a^{x_0} \cdot \ln a.$$

Deci $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$. În caz particular avem $(e^x)' = e^x$.

3. Derivata funcției logaritm

Fie funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$ și punctul $x_0 > 0$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)}{\frac{x - x_0}{x_0}} \cdot \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{x_0},$$

deci $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \forall x > 0$. Din acest rezultat și relația $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ deducem că

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

4. Derivatele funcțiilor sinus și cosinus

1. Să calculăm derivata funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ este fixat, atunci

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} = 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0, \end{aligned}$$

deoarece funcția cosinus este continuă în orice punct $x_0 \in \mathbb{R}$. Astfel funcția $f(x) = \sin x$ este derivabilă și avem

$$(\sin x)' = \cos x$$

2. Să calculăm derivata funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ este un număr arbitrar fixat, atunci

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-2 \sin \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \sin \frac{x + x_0}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} = -\sin x_0, \text{ deci} \end{aligned}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

OPERAȚII CU FUNCȚII DERIVABILE

Ca și în cazul funcțiilor continue suntem interesați de compatibilitatea dintre proprietatea de derivabilitate și operațiile algebrice. Aceste proprietăți vizează în primul rând obținerea unor proceduri simple de calcul.

1. Derivata sumei

Presupunem că funcțiile $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile în punctul de acumulare

$x_0 \in D$. Astfel există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$. Pe

de altă parte raportul de creștere corespunzător funcției sumă $(f + g)$ este

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

și astfel
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

deci funcția $f + g$ este derivabilă și derivata sumei este suma derivatelor:

$$(f + g)' = f' + g'.$$



Exerciții

1. Calculați derivatele următoarelor funcții:

a) $x + x^2$; **b)** $x + 3$; **c)** $(x^2 + x - 1)^2$.

2. Calculați derivatele următoarelor funcții și determinați domeniul de derivabilitate a următoarelor funcții:

a) $f(x) = \sin x + \cos x$; **b)** $f(x) = \cos x - \operatorname{tg} x$; **c)** $f(x) = \operatorname{ctg} x + 5^x$;

d) $f(x) = \log_3 x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$; **e)** $f(x) = \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[4]{x^3}$; **f)** $f(x) = e^x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$.

3. Fie $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ funcții derivabile în punctul x_0 ($n \in \mathbb{N}^*$). Studiați

derivabilitatea funcției $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = \sum_{k=1}^n f_k$ în punctul x_0 și calculați derivata sumei, dacă există.

4. Demonstrați că dacă f și g sunt funcții derivabile în x_0 , atunci $f - g$ este derivabilă în x_0 și $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.

5. Dacă f și g nu sunt derivabile în punctul x_0 , rezultă că suma $f + g$ nu este derivabilă în x_0 ?

2. Derivata produsului

Presupunem că funcțiile $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile în punctul de acumulare $x_0 \in D$ și studiem derivabilitatea produsului $f \cdot g$ în punctul x_0 .

Dacă există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$, atunci putem

scrie

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \end{aligned}$$

deci
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Astfel dacă f și g sunt derivabile în x_0 , atunci funcția $f \cdot g$ este derivabilă în

punctul x_0 și $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Prescurtat putem scrie:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Consecință. Dacă funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul de acumulare $x_0 \in D$, și $c \in \mathbb{R}$ este o constantă, atunci funcția $(c \cdot f) : D \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în

x_0 și

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

Exerciții și probleme

1. Studiați derivabilitatea funcțiilor și calculați derivatele lor:

a) $f(x) = (x + 1)(2x^2 + 1)$;

b) $f(x) = |x|^3$;

c) $f(x) = (3x^3 + x - 1)(x^2 - 4x + 5)$; **d)** $f(x) = |x|^2 - |x| + 2$.

2. Calculați derivatele următoarelor funcții pe domeniile în care funcțiile sunt derivabile:

a) $f(x) = 3x \cdot \ln x$; **b)** $f(x) = x^2 \cdot e^x$; **c)** $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin x$;

d) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot 3^x$; **e)** $f(x) = 5^x \cdot \cos x$; **f)** $f(x) = \ln 2 \cdot (\lg x) \cdot \sqrt{x}$;

g) $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \sqrt{2}x^3 \cdot \operatorname{tg} x$; **h)** $f(x) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{7}} x \cdot \operatorname{ctg} x + \ln 4$.

3. Fie f_1, f_2, f_3 funcții derivabile în punctul x_0 . Studiați derivabilitatea produsului $f_1 f_2 f_3$ și exprimați derivata produsului în funcție de derivatele celor trei factori.

4. Considerăm funcțiile f_1, f_2, \dots, f_n derivabile în punctul x_0 . Studiați

derivabilitatea produsului $f_1 f_2 \dots f_n = \prod_{k=1}^n f_k$ și exprimați derivata acestui produs în funcție de derivatele factorilor.

5. Calculați derivatele următoarelor funcții:

a) $f(x) = 10x \cdot \ln x \cdot e^x$;

b) $f(x) = 7\sqrt{x} \cdot \sin x \cdot \operatorname{tg} x$;

c) $f(x) = \sqrt[4]{x} \cdot \log_3 x \cdot \cos x \cdot 5^x$.

6. **a)** Demonstrați că dacă rădăcinile polinomului $P \in \mathbb{R}[X]$ sunt numerele reale x_1, x_2, \dots, x_n distincte două câte două, atunci

$$\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n} = \frac{P'(x)}{P(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

b) Calculați suma $\frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \dots + \frac{1}{1 + x_n}$, dacă x_1, x_2, \dots, x_n sunt rădăcinile polinomului $P(X) = X^n - X + 1$.

7. Dacă f și g nu sunt derivabile în punctul x_0 , rezultă de aici că nici funcția $f \cdot g$ nu este derivabilă în x_0 ?



3. Derivata raportului

Studiem derivabilitatea fracției $\frac{f}{g}$ în punctul x_0 , dacă funcțiile $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile în punctul de acumulare $x_0 \in D$ și f . Pe baza egalității $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ este suficient să calculăm derivata funcției $\frac{1}{g}$, dacă g este derivabilă în punctul x_0 și $g(x_0) \neq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \left(-\frac{1}{g(x_0)g(x)} \right) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)},$$

deci $\frac{1}{g}$ este derivabilă și avem $\left(\frac{1}{g}(x_0) \right)' = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.


Prescurtat putem scrie:

$$\left(\frac{1}{g} \right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Astfel putem calcula derivata funcției $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ în punctul x_0 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g} \right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g} \right)'(x_0) = \\ &= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} - \frac{f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{aligned}$$

În consecință avem următoarea regulă de derivare: $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

 **Exemple. 1.** Funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x$ și $g(x) = x^4 + 2$ sunt derivabile în orice punct $x \in \mathbb{R}$ și $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă

în orice punct $x \in \mathbb{R}$. Derivata se poate calcula folosind formula precedentă:

$$\left(\frac{2x^2 - x}{x^4 + 2} \right)' = \frac{(6x^2 - 1)(x^4 + 2) - (2x^2 - x)(4x^3)}{(x^4 + 2)^2} = \frac{-2x^6 + 3x^4 + 12x^2 - 2}{(x^4 + 2)^2}.$$

2. Funcția $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ este derivabilă în fiecare punct al domeniului de definiție și derivata în x_0 este $\frac{1}{\cos^2 x_0}$, deoarece

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

În mod analog și funcția $f(x) = \operatorname{ctg} x$ este derivabilă ($x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)) și avem

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Exerciții

Calculați derivatele următoarelor funcții în punctele precizate și determinați domeniul maxim definiție și de derivabilitate

- a)** $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-x+1}$, $x_0 = 1$; **b)** $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 = 2$;
c) $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, $x_0 = -1$; **d)** $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $x_0 = \pm 1$;
e) $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$, $x_0 = 0$; **f)** $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+2}$; **g)** $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$;
h) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$; **i)** $f(x) = \frac{\ln x + x}{\ln x - x}$; **j)** $f(x) = \frac{4 \sin x}{3 \cos x + 1}$;
k) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$; **l)** $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\cos x + 2}$; **m)** $f(x) = \frac{\log_3 x}{\log_3 x - 1}$.

4. Derivata funcțiilor compuse

Funcțiile $\sin 2x$ sau $\sin^3 x$ sunt funcții compuse. Funcțiile $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, prin a căror compunere rezultă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2x)$ ($f = g \circ h$ cu $g(x) = \sin x$ și $h(x) = 2x$) sau $f(x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$ ($g(x) = x^3$ și $h(x) = \sin x$) sunt derivabile. Este important să putem calcula derivata funcției compuse folosind derivatele celor două funcții. În general calculăm derivata funcției $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ în punctul x_0 cu ajutorul derivatelor funcțiilor f și g .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] = \\ &= \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}, \end{aligned}$$

unde $u = g(x)$, $u_0 = g(x_0)$. Dacă $x \rightarrow x_0$, atunci $u \rightarrow u_0 = g(x_0)$, deci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Sub o formă mai compactă putem scrie:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$





Exemple. 1. Funcția $f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ este compunerea funcțiilor x^2 și $x^{\frac{1}{3}}$.

Pe de altă parte $(x^2)' = 2x$ și $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, deci

$$f'(x) = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = 2 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}.$$

În general dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}.$$

2. Dacă $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, atunci

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

3. Dacă $f(x) = \sin^{50} x$, atunci $f'(x) = 50 \sin^{49} x \cdot \cos x$.

4. Dacă $f(x) = \cos^4(x^3 + x)$, atunci $f'(x) = 4 \cos^3(x^3 + x) \cdot (\cos(x^3 + x))' =$
 $= 4 \cos^3(x^3 + x) (-\sin(x^3 + x))(x^3 + x)' = -4(3x^2 + 1) \cos^3(x^3 + x) \sin(x^3 + x).$

5. Dacă $f(x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$, atunci $f'(x) = 3 \sin^2 x (\sin x)' = 3 \sin^2 x \cos x$.

6. Dacă $f(x) = \sin 2x$, atunci $f'(x) = \cos 2x \cdot (2x)' = 2 \cos 2x$.

7. Dacă $f(x) = (2x^4 - 5x^2 + 6)^8$, atunci $f'(x) = 8(2x^4 - 5x^2 + 6)^7 (8x^3 - 10x)$.

8. Dacă $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, atunci

$$f'(x) = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \text{ pentru } x \in (-a, a).$$

9. Dacă $f(x) = \sin^3 5x$, atunci $f'(x) = 3 \sin^2 5x \cdot 5 \cos 5x = 15 \sin^2 5x \cdot \cos 5x$.



Exerciții

I. Determinați domeniul maxim de derivabilitate și calculați derivatele următoarelor funcții:

1) $f(x) = (1-x)(1+x)^2$; **2)** $g(x) = x^2 + 8x + 4$; **3)** $f(x) = \frac{\cos 2x}{e^x}$;

4) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{e^x + x + 1}$ **5)** $f(x) = x^3 \cdot \ln x$; **6)** $f(x) = e^x \cdot \ln x$;

7) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$; **8)** $f(x) = x^2 \cos x + x^3 \sin x$; **9)** $f(x) = x \sin x$;

- 10)** $f(x) = \sin x \cos x$; **11)** $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{x^2 - x + 1}$; **12)** $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 + 1}$;
13) $f(x) = (x^3 + 2)^4$; **14)** $f(x) = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}$; **15)** $f(x) = \sqrt{1 + 5x^2}$;
16) $f(x) = e^{x^2 - 3x}$; **17)** $f(x) = \ln(2x^3 - 4x^2)$; **18)** $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;
19) $f(x) = 5^{\sin x}$; **20)** $f(x) = \log_{0,3}(8x^2 - 2x^3)$; **21)** $f(x) = \cos(2x - 1)$;
22) $f(x) = \cos^2 3x$; **23)** $f(x) = \lg(2x^3 - 4x^2)$; **24)** $f(x) = x \cdot \operatorname{tg}^2 x$;
25) $f(x) = \sin \sqrt{ax}$; **26)** $f(x) = \sqrt[3]{\cos x - \sin x}$; **27)** $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$;
28) $f(x) = \frac{1}{\cos 2x}$; **29)** $f(x) = (x^2 + 5x - 8)^{100} \cdot x^5$; **30)** $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$;
31) $f(x) = \ln \sin x$; **32)** $f(x) = \frac{1}{\ln^5(3x)}$; **33)** $f(x) = \operatorname{tg}^2(x^2 + x^4)$;
34) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$; **35)** $f(x) = \frac{3}{\sqrt{\log_2(x^4 + x^2 + 1)}}$.

II.

- Arătați că funcția $f(x) = c\sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ verifică relația $f'(x) = \frac{xf(x)}{1+x^2}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- Deduceți o regulă de derivare pentru funcțiile de forma $h(x) = f(x)^{g(x)}$, unde $f: D \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ și $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile. Pe baza acestei reguli calculați derivatele următoarelor funcții:

a) $f(x) = x^x$; **b)** $f(x) = (x^2 + 1)^{\sin x}$; **c)** $f(x) = x^{x^x}$.
- Demonstrați că dacă funcțiile $f_{ij}: D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile $i, j = \overline{1, 3}$, atunci funcția

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix}, \forall x \in D$$

este derivabilă și

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & f'_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) & f'_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f'_{31}(x) & f'_{32}(x) & f'_{33}(x) \end{vmatrix}.$$

4. Calculați derivatele următoarelor funcții:

- a)** $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; **b)** $f(x) = \sqrt{x^2+2}$; **c)** $f(x) = x^3 \cdot e^{2x+1}$;
d) $f(x) = \ln \ln x$; **e)** $f(x) = (x^2+1)\sin(2x+1)$;
f) $f(x) = e^{2x+3}$; **g)** $f(x) = x \cdot \ln x$; **h)** $f(x) = (x+1)^2 e^{2x}$;
i) $f(x) = e^{2x} \ln x$; **j)** $f(x) = 2^{2x} \sin^2 x$; **k)** $f(x) = (e^x + x)^{12}$;
l) $f(x) = e^x \cos^3 x$; **m)** $f(x) = (\sin x + \cos x)^6$;
n) $f(x) = \frac{2 + \ln x}{1 + e^x}$; **o)** $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{\ln x}}$;
p) $f(x) = e^{\cos^2 x}$; **q)** $f(x) = (\sin^3 x + 7)^7$;
r) $f(x) = \sin \sin \sin x$; **s)** $f(x) = (x^2 - x + 2)^{100}$.

5. Calculați derivata funcției $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$ dacă α este un număr irațional.

6. Scrieți ecuația tangențelor la graficele următoarelor funcții în punctele precizate:

- a)** $f(x) = x^3 + x + 1$, $M_0(1, 3)$; **b)** $f(x) = \cos 2x$, $M_0(\pi, 1)$;
c) $f(x) = \ln x$, $M_0(3, \ln 3)$; **d)** $f(x) = e^x$, $M_0(0, 1)$;

7. Fie funcția $f(x) = x^2 - 3x - 6$. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0 = -1^1$ al acestui grafic.

8. $f(x) = x^2$. Scrieți ecuația tangentei în punctul arbitrar $x_0 \in \mathbb{R}$.

9. $f(x) = x(x-1)(x+2)(x+3)$. Scrieți ecuația tangentei în punctul $x_0 = 1$.

10. $f(x) = (x-2)^2(x+3)$. Scrieți ecuația tangentei în punctul $x_0 = 2$.

11. $f(x) = (x-3)\sqrt{7-x}$. Scrieți ecuația tangentei în punctul $x_0 = 3$.

12. $f(x) = \sqrt{5+x^2}$. Scrieți ecuația tangentei în punctul graficului cu ordonata $y_0 = 3$

13. Determinați coordonatele punctului M de pe graficul funcției $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ în care tangenta este paralelă cu dreapta $y = \frac{x}{2} + 1$.

14. Determinați punctul M de pe graficul funcției $f(x) = (1-x)(1+x)^2$ în care tangenta la grafic trece prin punctul $(-1, 0)$.

15. Studiați existența unei tangente comune pentru graficele funcțiilor $f(x) = x^2 + 4x + 8$ și $g(x) = x^2 + 8x + 4$.

¹ În cele ce urmează, dacă nu există pericolul creării unei confuzii, vom spune doar tangenta în punctul x_0 .

16. Determinați ecuația dreptei care este tangentă la graficul funcției $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2$ în două puncte.

17. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax + 2}{3x - 2}$, unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru real. Determinați valoarea parametrului astfel încât tangenta în punctul de abscisă x_0 să formeze un unghi de măsură 45° cu axa Oy .

18. Determinați valorile parametrilor m și n astfel ca graficele funcțiilor $f(x) = \frac{x}{x + 1}$ și $g(x) = mx^2 + nx + 1$ să fie tangente în punctul de abscisă 2.

5. Derivata funcției inverse

Dacă $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, atunci mulțimea $f(I)$ este tot un interval. Funcția $f: I \rightarrow f(I)$ este surjectivă, deci dacă f este și injectivă, atunci inversa acestei funcții $f^{-1}: J \rightarrow I$ (cu $J = f(I)$) este o funcție continuă. Următoarea teoremă asigură derivabilitatea funcției inverse în condiții foarte generale.

Teoremă. Dacă I și J sunt intervale, $f: I \rightarrow J$ este o funcție bijectivă și derivabilă în $x_0 \in I$ cu $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția f^{-1} este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0) \in J$ și avem egalitatea

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demonstrație. $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$, unde am efectuat schimbarea de variabilă $f^{-1}(y) = x$ în limită. De aici rezultă că funcția f^{-1} este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ și are loc relația din enunț.

Consecință. Dacă f este derivabilă pe I și $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$, atunci f^{-1} este derivabilă pe $J = f(I)$ și are loc relația $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \forall x \in I$ sau

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \forall x \in J$. Aceste relații pot fi obținute derivând egalitățile

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in I$, respectiv $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in J$.

Prescurtat putem scrie $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.




Exerciții rezolvate

1. Funcția $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ este strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, deci are o inversă $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(x) = \arcsin x$. Folosind regula de derivare a funcției inverse obținem:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ dacă } x \in (-1, 1).$$

2. Funcția $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ este strict descrescătoare, deci există $f^{-1} = \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, și

$$(f^{-1}(x))' = (\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

pentru $x \in (-1, 1)$.

3. Funcția $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ este strict crescătoare, deci există $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$, și are loc relația

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty)$, $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ este bijectivă, inversa sa este derivabilă și să se calculeze $(f^{-1})'(4)$.

Soluție. f este continuă și derivabilă, $f'(x) = 4x^3 + 2x + 1 > 0$, $\forall x \geq 0$, deci f strict crescătoare, în consecință este injectivă. $f(0) = 1$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, f fiind continuă și crescătoare, rezultă că $\operatorname{Im} f = [1, +\infty)$, deci este și surjectivă. $f'(x) \neq 0$, $\forall x \geq 0$ deci inversa este derivabilă cu $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. Pentru $y = 4$, avem

$$y = f(1), \text{ deci } (f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{7}.$$

Observație. În exemplul precedent am văzut că se poate calcula derivata funcției inverse într-un punct fără a calcula funcția inversă.


Exerciții

1. Determinați domeniul maxim de derivabilitate a următoarelor funcții și calculați derivatele lor:

a) $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}}$;

b) $f(x) = x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x + \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$;

c) $f(x) = \arcsin \frac{1+3x}{2}$;

d) $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$;

e) $f(x) = 5x \arcsin 3x$;

f) $\frac{1}{\sqrt{3}} \arccos(x^2 + 1)$;

g) $f(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$;

h) $f(x) = (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x$;

i) $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

2. Arătați că funcția $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ este inversabilă cu inversa derivabilă și calculați $(f^{-1})'(\sqrt{10})$ în două moduri (calculând funcția inversă respectiv fără a calcula inversa funcției).

3. Arătați că funcția $f: (-\infty, -1] \rightarrow (0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ este inversabilă cu inversa derivabilă și calculați $(f^{-1})'\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)$.

4. Arătați că funcția $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + \ln(x^2)$ este inversabilă cu inversa derivabilă și calculați $(f^{-1})'(3)$.

Derivate de ordin superior

Definiții. 1. Funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este *de două ori derivabilă* în punctul de acumulare $x_0 \in D$ dacă f este derivabilă într-o vecinătate $V \cap D$ a punctului x_0 și funcția derivată $f': V \cap D \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul x_0 . Derivata funcției f' în punctul x_0 este *derivata de ordinul doi* a funcției f în punctul x_0 și se notează cu

$$(f')'(x_0) = f''(x_0).$$

Dacă f' este derivabilă pe mulțimea D , atunci spunem că funcția f este de două ori derivabilă pe D și notăm derivata a doua cu $f'' = (f')'$ sau cu $f^{(2)}$.

2. Funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este *derivabilă de n ori* ($n \geq 2$) în punctul x_0 , dacă f este derivabilă de $(n-1)$ ori într-o vecinătate $V \cap D$ a punctului x_0 și derivata de ordin $(n-1)$ este derivabilă în punctul $x_0 \in D$.

Folosim notația $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$ pentru derivata de ordin n în punctul x_0 .

Dacă funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este de n -ori derivabilă pe D , atunci funcția $f^{(n)}: D \rightarrow \mathbb{R}$,

$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$ este *derivata de ordin n* a funcției f .

DEF

Dacă pentru orice $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ funcția f este de n ori derivabilă (într-un punct sau pe o mulțime), atunci spunem că f este *indefinit derivabilă* sau că f este de clasă ∞ (în punctul respectiv sau pe mulțimea respectivă). Pentru a păstra o notație unitară vom admite că derivata de ordin zero este chiar funcția f .

Exemple

1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^k$ ($k \in \mathbb{N}$) este indefinit derivabilă și $f^{(k)}(x) = k!$, $f^{(n)}(x) = 0$, dacă $n > k$.
2. Funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ admite derivate de orice ordin și avem $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$, unde $n \geq 1$, $x \neq 0$.
3. Pentru funcția $f(x) = e^x$ avem $f^{(n)}(x) = e^x$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.
4. $\sin^{(n)} x = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.
5. $\cos^{(n)} x = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.
6. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
7. $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$, ($a > 0$).

Exerciții

1. Dacă funcțiile $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ și $v: D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt de n ori derivabile, atunci
 - a) $(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$;
 - b) $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$ (Formula lui Leibniz)
2. Calculați derivata a doua pentru următoarele funcții:
 - a) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$;
 - b) $f(x) = x \ln x$;
 - c) $f(x) = e^{-x^2}$;
 - d) $f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$.
3. Calculați $f(0)$, $f'(0)$ și $f''(0)$, dacă $f(x) = e^{\sin x} \cdot \cos(\sin x)$.
4. Demonstrați că funcțiile date sunt de două ori derivabile în punctele precizate:
 - a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \geq 0 \\ x^3 + x, & x < 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$;
 - b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$;
 - c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 6|^5$, $x_0 = 3$.

5. Determinați valorile parametrilor $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel ca funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & x \geq 0 \\ cx + 4 + \ln(x^2 - x + 1), & x < 0 \end{cases} \quad \text{să fie de două ori derivabilă pe } \mathbb{R}.$$

6. Determinați valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ astfel ca funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \cdot e^{ax} \quad \text{să satisfacă relația } f'''(x) - f''(x) - 8f'(x) + 12f(x) = 0 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

7. Demonstrați că derivata de ordin n a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (3x^2 - 4)e^x$ are forma $f^{(n)}(x) = (3x^2 + a_n x + b_n)e^x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, unde a_n, b_n sunt numere reale. Exprimați numerele a_n și b_n în funcție de n .

8. Calculați derivata de ordin n a funcției $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

9. Considerăm funcția $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, unde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $f''(x) + f'(x) = 0$.

10. Calculați derivata de ordin n pentru următoarele funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^x$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$;

c) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \ln x$;

d) $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln(1 - x^2)$;

e) $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$;

f) $f: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2}$;

g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - x^2) \cdot \cos x$; **h)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$.

11. Spunem că graficele funcțiilor $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt tangente de ordin n în punctul x_0 dacă $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$, $k = \overline{0, n}$ și $f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$.

Determinați ordinul de tangentă a următoarelor perechi de funcții:

a) $f(x) = x^2$ și $g(x) = x + 1 - \frac{1}{x}$;

b) $f(x) = e^x$ și $g(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1$.

12. Calculați unghiul format de graficele funcțiilor f și g în punctele de intersecție:

a) $f(x) = (x - 2)^2$ și $g(x) = 4x - x^2 - 4$; **b)** $f(x) = \sin x$ și $g(x) = \cos x$.

13. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & x \in (-1, 1) \\ P(x), & x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \end{cases}$ este

indefinit derivabilă dacă și numai dacă funcția polinomială P este identic nulă.

(Admitere, Cluj Napoca)

f	f'	Domeniul de derivabilitate
$x^n, n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	\mathbb{R}
$x^n, n \in \mathbb{Z}_-$	nx^{n-1}	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x^a, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$a \cdot x^{a-1}$	$(0, \infty)$
e^x	e^x	\mathbb{R}
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$a^x \cdot \ln a$	\mathbb{R}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0, \infty)$
$\log_a x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(0, \infty)$
$\sin x$	$\cos x$	\mathbb{R}
$\cos x$	$-\sin x$	\mathbb{R}
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}
$\operatorname{arccctg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	\mathbb{R}

$(f + g)' = f' + g'$	
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	
$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	
$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$	
$(f(x)^{g(x)})' = g(x) \cdot f(x)^{g(x)-1} \cdot f'(x) + f(x)^{g(x)} \cdot \ln f(x) \cdot g'(x)$	

VI. PROPRIETĂȚILE FUNCȚIILOR DERIVABILE



În acest capitol studiem legătura dintre derivabilitatea unei funcții și diferitele alte proprietăți, cum ar fi injectivitatea, monotonia, convexitatea, punctele de extrem etc. Pentru a evidenția aceste legături avem nevoie de câteva teoreme fundamentale.

TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ANALIZEI MATEMATICE

Prima dată stabilim rolul derivatei în căutarea punctelor de extrem ale unei funcții derivabile. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție.

Definiții. 1. Punctul x_0 este un punct de *maxim local* al funcției f , dacă există o vecinătate $V \in V(x_0)$ (a punctului x_0) astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in D \cap V$.



2. Punctul x_0 este un punct de *minim local* al funcției f , dacă există o vecinătate $V \in V(x_0)$ (a punctului x_0) astfel încât $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in D \cap V$.

3. Dacă inegalitatea $f(x) \leq f(x_0)$ este verificată pentru orice $x \in D$, atunci punctul x_0 este un punct de *maxim global*.

4. Dacă inegalitatea $f(x) \geq f(x_0)$ are loc pentru orice $x \in D$, atunci x_0 se numește punct de *minim global* al funcției f .

5. Punctele de minim și de maxim local sunt punctele de *extrem local*, iar punctele de minim și de maxim global se numesc puncte de *extrem global*.

6. Valorile funcției în punctele de extrem se numesc *extremele funcției*. Acestea pot fi locale sau globale după cum punctul de extrem este un punct de extrem local sau unul global.

Funcția al cărei grafic este reprezentat în figura 54 are un punct de maxim global în b , un punct de minim global x_1 și în afară de aceste puncte de extrem funcția mai admite punctele de maxim local a și x_2 și punctul de minim local x_3 . Conform graficului tangentele în punctele x_1, x_2, x_3 sunt orizontale, iar în capetele intervalului tangenta poate avea orice direcție. Această comportare indică faptul că depistarea punctelor de extrem local interioare este o problemă diferită de determinarea punctelor de extrem. Bineînțeles dacă determinăm punctele de extrem interioare, atunci prin compararea valorilor în aceste puncte și capetele intervalului de definiție vom putea stabili punctele de extrem global. Pentru a fixa aceste idei vom demonstra câteva teoreme.

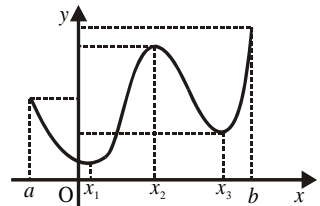


Figura 54

1. Teorema lui Fermat

Dacă I este un interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă în x_0 , și x_0 este un punct de extrem local în interiorul intervalului I , atunci $f'(x_0) = 0$.



Demonstrație. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că x_0 este un punct de maxim local. Astfel există $V \in \mathcal{V}(x_0)$ pentru care $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in I \cap V$, deci $f(x) - f(x_0) \leq 0$, $\forall x \in I \cap V$. De aici rezultă că

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ și } f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Dar funcția este derivabilă, deci cele două derivate laterale coincid, și astfel egalitatea $f'_d(x_0) = f'_s(x_0)$ implică $f'_d(x_0) = f'_s(x_0) = f'(x_0) = 0$.

Observații. 1. În cazul funcției $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ punctele $x = \pm 1$ sunt singurele puncte de extrem și $f'(\pm 1) = 3$. Acest contraexemplu arată că teorema se poate aplica numai punctelor de extrem interioare.

2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ are punctul de minim local (global) $x = 0$, dar $f'(0) \neq 0$, deoarece $f'(0)$ nu există în punctul de extrem ($f'_d(0) = 1, f'_s(0) = -1$).

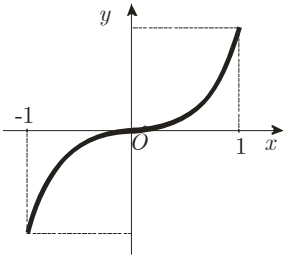


Figura 55

3. Din aceste observații rezultă că ipotezele sunt necesare.
4. Pentru funcția din exemplul 1. avem $f'(x) = 3x^2$, deci $f'(0) = 0$ și punctul $x = 0$ nu este punct de extrem, deoarece $f(x) < 0$ pentru $x < 0$ și $f(x) > 0$ pentru $x > 0$. Deci nu toate punctele x_0 pentru care $f'(x_0) = 0$ sunt puncte de extrem. În figura 55 se vede că axa Ox este tangentă la grafic.

Definiție. Dacă $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă, atunci elementele mulțimii $S_f = \{x \in \text{int } D \mid f'(x) = 0\}$ se numesc **punctele staționare** ale funcției f .

5. În consecință punctele de extrem ale unei funcții derivabile trebuie căutate printre rădăcinile derivatei, dar acestea nu sunt neapărat puncte de extrem.

2. Teorema lui Rolle

Dacă funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe intervalul $[a, b]$, este derivabilă pe (a, b) și $f(a) = f(b)$, atunci există $c \in (a, b)$ cu proprietatea $f'(c) = 0$.

Demonstrație. Dacă f este funcție constantă, atunci $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in (a, b)$. Dacă f nu este constantă, atunci există $x_0 \in (a, b)$ astfel încât $f(x_0) > f(a)$ sau $f(x_0) < f(a)$. Intervalul de definiție este un interval închis, deci pe baza teoremei lui Weierstrass există $M = f(c_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ și $m = f(c_2) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$. Numerele c_1 și c_2 nu pot fi ambele în capetele intervalului,

deci cel puțin unul dintre ele este un punct de extrem local în interiorul intervalului. Conform teoremei lui Fermat derivata în acest punct este 0. Deci există $c \in \{c_1, c_2\}$ astfel ca $f'(c) = 0$ și $c \in (a, b)$.

Interpretarea geometrică

Din interpretarea geometrică a derivatei rezultă că în cazul funcțiilor care satisfac condițiile teoremei, există un punct interior în care derivata este 0, deci tangenta la grafic în acest punct este orizontală. Folosind faptul că în acest caz și coarda AB este orizontală putem spune că tangenta este paralelă cu coarda AB. În teorema următoare demonstrăm că această proprietate este valabilă și în cazul în care coarda nu este orizontală.

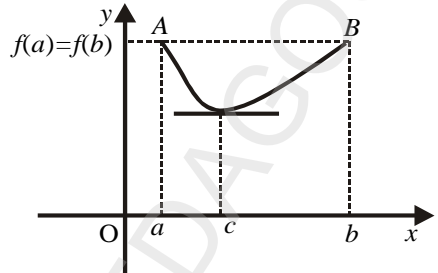


Figura 56

Observație. Funcțiile $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue pe $[a, b]$ și derivabile pe (a, b) se numesc *funcții cu proprietatea lui Rolle*.

Exemple. 1. Funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$ are proprietatea Rolle, $f(0) = f(1) = 0$, deci se poate aplica teorema lui Rolle, astfel există $c \in (0, 1)$ cu $f'(c) = 0$. $f'(x) = 2x - 1$, deci $c = \frac{1}{2} \in (0, 1)$.

2. Funcția $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{(x-1)(2-x)}$ este continuă pe $[1, 2]$, derivabilă pe $(1, 2)$ cu $f'(x) = \frac{-2x+3}{2\sqrt{(x-1)(2-x)}} \forall x \in (1, 2)$ și $f(1) = f(2)$, deci se poate aplica teorema lui Rolle, de unde rezultă că există $c \in (1, 2)$ astfel încât $f'(c) = 0$. În cazul acesta putem determina numărul $c = \frac{3}{2} \in (1, 2)$.

Observație. În exemplul precedent se observă că derivabilitatea funcției nu este necesară în capetele intervalului.

3. Teorema lui Lagrange

Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea lui Rolle pe intervalul $[a, b]$, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstrație. Intuitiv această proprietate s-ar putea demonstra prin schimbarea axelor de coordonate, astfel ca axa Ox să devină paralelă cu coarda AB. În acest caz am aplica teorema lui Rolle pentru transformata funcției. În locul schimbării axelor de coordonate vom construi o funcție ajutătoare a cărei derivată se anulează dacă și numai dacă este verificată relația din enunț (astfel evităm transformarea efectivă a intervalului de definiție). Dacă derivata funcției $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ atunci funcția este } F(x) = f(x) - x \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Această funcție este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) , și în plus verifică egalitățile

$F(a) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = F(b)$, deci putem aplica teorema lui Rolle. Astfel rezultă că există $c \in (a, b)$, pentru care $F'(c) = 0$ și deci:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

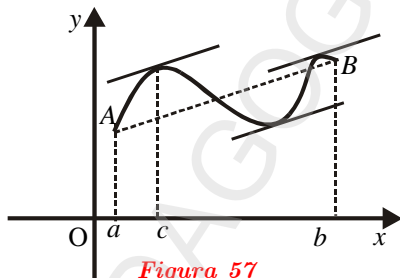


Figura 57

Interpretarea geometrică. Panta coardei AB este $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, deci relația din teoremă exprimă chiar faptul că există un punct interior c în care tangenta la graficul funcției este paralelă cu coarda AB . (vezi figura 57).



Exemple. 1. Funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$ este continuă și derivabilă pe

intervalul $[0, 1]$, $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, deci se poate aplica teorema lui Lagrange. Astfel

există $c \in (0, 1)$ cu $f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$, deci $\frac{1}{(c+1)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = -1 \pm \sqrt{2}$; dar

$c \in (0, 1)$, deci $c = \sqrt{2} - 1$ este singurul punct intermediar cu această proprietate.

2. Funcția $f : [n, n+1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, ($n \in \mathbb{N}^*$) are proprietatea lui Rolle, deci se poate aplica teorema lui Lagrange, astfel există $c \in (n, n+1)$ cu

$$f'(c) = \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1 - n}; \text{ adică } \frac{1}{c} = \ln(n+1) - \ln n, \text{ de unde } c = \frac{1}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}.$$



Observație. Deoarece $n < c < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$, de unde rezultă

inegalitatea demonstrată în capitolul *Șiruri*: $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$.

4. Teorema lui Cauchy

Din punct de vedere tehnic în teorema lui Lagrange structura numărătorului este identică cu structura numitorului dacă expresia $b - a$ o scriem sub forma $g(b) - g(a)$, unde g este funcția identică. În acest paragraf demonstrăm că la numitor putem avea o altă funcție derivabilă g .



Teoremă. Dacă funcțiile $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ au proprietatea lui Rolle pe intervalul $[a, b]$ și $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstrație. Din teorema lui Lagrange și din condiția $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, rezultă că $g(a) \neq g(b)$. Ca și în demonstrația teoremei lui Lagrange construim o funcție ajutătoare a cărei derivată se anulează dacă și numai dacă are loc relația din teoremă. Considerăm astfel funcția

$$h(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x)$$

definită pentru orice $x \in [a, b]$. Funcția h este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) . Pe de altă parte $h(a) = h(b)$, deci putem aplica teorema lui Rolle funcției h pe intervalul $[a, b]$. Astfel rezultă existența unei valori intermediare $c \in (a, b)$ cu proprietatea $h'(c) = 0$. Dar această relație se poate scrie sub forma

$$h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0,$$

și datorită condiției $g'(c) \neq 0$, rezultă

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Exemplu. Funcțiile $f, g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1, g(x) = \ln x$ au proprietatea lui Rolle pe $[1, 2]$, $f'(x) = 2x, g'(x) = \frac{1}{x}$, deci aplicând teorema lui Cauchy există

$$c \in (1, 2) \text{ cu } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} \Leftrightarrow 2c^2 = \frac{3}{\ln 2}, c > 0, \text{ deci } c = \sqrt{\frac{3}{\ln 4}}.$$

Observație. Teoremele lui Lagrange și Cauchy se numesc *teoreme de medii*, sau *teoreme ale creșterilor finite*.

5. Teorema lui Darboux

Dacă I este un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, atunci funcția f' are proprietatea lui Darboux.

Demonstrație. Fie $a, b \in I, a < b$. Considerăm $\lambda \in \mathbb{R}$ un număr între $f'(a)$ și $f'(b)$ și demonstrăm că există $c \in [a, b]$ astfel încât $f'(c) = \lambda$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $f'(a) < f'(b)$ și $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Construim funcția derivabilă $g : I \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) - \lambda x$. Este suficient să arătăm că această funcție are un punct de extrem local în interiorul intervalului (a, b) . Dacă există $c \in (a, b)$ astfel ca $g'(c) = 0$, atunci rezultă $f'(c) = \lambda$. Pe de altă parte $g'(b) = f'(b) - \lambda > 0$ și

$g'(a) = f'(a) - \lambda < 0$ deci $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} > 0$. Astfel există $\varepsilon > 0$ și un

$\delta > 0$ corespunzător pentru care:

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} < -\varepsilon, \text{ dacă } a < x < a + \delta \text{ și}$$

$$\frac{g(x) - g(b)}{x - b} > \varepsilon, \text{ dacă } b - \delta < x < b.$$

De aici rezultă că

$$g(x) < -\varepsilon(x - a) + g(a) < g(a), \text{ dacă } a < x < a + \delta \text{ și}$$

$$g(x) < g(b) + \varepsilon(x - b) < g(b), \text{ dacă } b - \delta < x < b.$$

Din aceste inegalități rezultă că funcția g nu își poate lua minimumul nici în punctul a și nici în punctul b . Astfel pe paza continuității își atinge marginile într-un punct interior deci există un punct $c \in (a, b)$ cu proprietatea $\lambda = f'(c)$. De aici rezultă că f' are proprietatea lui Darboux.

Consecință. Dacă I este un interval și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pentru care $f'(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I$, atunci $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in I$ sau $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in I$.

Exerciții

1. Determinați punctele staționare ale următoarelor funcții. Stabiliți care dintre ele sunt puncte de extrem, respectiv determinați și punctele de extrem, care nu sunt puncte staționare:

a) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$; **b)** $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 1|$; **d)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$.

2. Demonstrați că dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, atunci $|\cos x_1 - \cos x_2| \leq |x_1 - x_2|$.

3. Arătați că ecuația $x^2 = x \sin x + \cos x$ are exact două soluții în intervalul $[-2, 2]$.

4. Demonstrați că toate rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$ sunt reale dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$.

5. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + 2x$ este injectivă.

6. Determinați valoarea intermediară c din teorema lui Lagrange pentru următoarele funcții:

a) $f: [0, 2] \rightarrow [0, 4]$, $f(x) = x^2$; **b)** $f: [0, 1] \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $f(x) = \arctg x$.

7. Demonstrați că ecuația $x^5 + x^4 + x^2 + 10x - 5 = 0$ are o singură rădăcină pozitivă și această rădăcină se află în intervalul $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

8. Studiați aplicabilitatea teoremei lui Rolle în cazul următoarelor funcții:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $I = [-1, 1]$; **b)** $f(x) = \ln(1 + |x|)$, $I = [-1, 1]$;

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, $I = [-5, 5]$; **d)** $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin x, & \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \in [-1, 0] \\ x^3 + 3, & x \in (0, 1] \end{cases}$, $I = [-1, 1]$.

9. Demonstrați că dacă $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ și $a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x \geq n$, $\forall x \in \mathbb{R}$ atunci $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$.

10. Demonstrați că dacă funcțiile $f_{1,2,3}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue pe intervalul $[a, b]$ și derivabile pe (a, b) atunci există $c \in (a, b)$ cu proprietatea:

$$\begin{vmatrix} f_1'(c) & f_2'(c) & f_3'(c) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix} = 0.$$

11. Se poate aplica teorema lui Lagrange pentru funcțiile de mai jos (pe intervalele precizate)?

a) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}, I = [-1, 1];$

b) $f(x) = \frac{x}{1-x}, I = [0, a], a > 0;$

c) $f(x) = x \ln x, I = [a, b], b > a > 0;$

d) $f(x) = 1 + x - x^3, I = [-2, 1];$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2}, & x \in [-4, 0] \\ \sqrt{x+1}, & x \in (0, 3] \end{cases}, I = [-4, 3];$

12. Putem aplica teorema lui Lagrange funcției $f(x) = \frac{1}{x}$ pe intervalul (a, b) , dacă $a \cdot b < 0$?

13. Determinați punctele de pe graficul funcției $f(x) = x^3$ în care tangenta este paralelă cu dreapta determinată de punctele $A(-1, -1)$ și $B(2, 8)$.

14. Care dintre perechile de funcții date mai jos satisfac condițiile teoremei lui Cauchy:

a) $f(x) = \ln x$ și $g(x) = \frac{e}{x}, I = [1, e];$

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}, & -2 \leq x < 1 \\ \frac{x+7}{4}, & 1 \leq x \leq 5 \end{cases}, g(x) = x, I = [-2, 5];$

c) $f(x) = x^3, g(x) = x^2, I = [-1, 1];$

d) $f(x) = \ln x$ și $g(x) = \frac{x}{e} - 2, I = [1, e].$

Probleme

1. Considerăm ecuația $x \cdot \ln n - n \cdot \ln x = 0$, unde $n > 1, n \in \mathbb{N}, x > 0$. Stabiliți numărul rădăcinilor în intervalul $I = (0, +\infty)$.

2. Pentru ce valori α ecuația $1 + \sin^2 \alpha x = \cos x$ are exact o rădăcină?

3. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă și $a, b \in \mathbb{R}$ două numere cu proprietatea $a \cdot b > 0$. Demonstrați că există $c \in [a, b]$ astfel încât

$$\frac{1}{a-b} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(c) - c \cdot f'(c).$$



4. Fie $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$. Demonstrați că există $c \in (0, 1)$ cu

proprietatea $f'(c) = 0$.

5. Există funcții neliniare, definite pe \mathbb{R} , care admit derivate de orice ordin și pentru care $|f^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{2^k}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $k \in \mathbb{N}$?

6. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție impară derivabilă. Demonstrați că $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție pară. Este adevărată afirmația inversă?

7. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 12x^3 + 12ax^2 - 8ax - 3$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $(0, 1)$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

8. Numerele reale c_0, c_1, \dots, c_n verifică relația $c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} \dots + \frac{c_n}{n+1} = 0$. Arătați că ecuația $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n = 0$ are cel puțin o soluție între 0 și 1.

9. Demonstrați că dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface inegalitatea

$$|f(x+h) - f(x-h)| < h^2$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $h > 0$, atunci f este o constantă.

10. a) Exprimați derivata funcției

$$U: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, U(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

cu ajutorul derivatelor funcțiilor $f_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dacă $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ $i = \overline{1, 4}$.

b) Funcțiile $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt de două ori derivabile pe (a, b) .

Demonstrați că pentru $\forall x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ există $c \in (a, b)$ cu proprietatea:

$$f''(c) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & g(x_1) \\ 1 & x_2 & g(x_2) \\ 1 & x_3 & g(x_3) \end{vmatrix} - g''(c) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} = 0.$$

VII. ELIMINAREA CAZURILOR DE NEDETERMINARE



Regula lui l'Hospital

Folosind teorema lui Lagrange putem estima valoarea funcției f în punctul x cu ajutorul valorii în punctul x_0 și cu valoarea derivatei într-un punct intermediar. În anumite cazuri această estimare ne dă posibilitatea de a calcula anumite expresii (de exemplu limite). Dacă limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ este un caz de nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$, și

funcțiile f respectiv g satisfac condițiile teoremei lui Lagrange (sau Cauchy) în vecinătatea V a punctului x_0 , adică sunt continue și derivabile în vecinătatea V , atunci aplicând teorema lui Lagrange (sau Cauchy) pe intervalul $[x_0, x]$, când $x \in V$ deducem

$$\text{existența valorilor } c_{1,2}, \text{ pentru care: } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{x \cdot f'(c_1)}{x \cdot g'(c_2)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}.$$

La prima egalitate am folosit egalitățile $f(x_0) = g(x_0) = 0$ care exprimă tocmai faptul că avem o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$ (deoarece funcțiile sunt continue). Pentru $x \rightarrow x_0$

rezultă $c_{1,2} \rightarrow x_0$, deci dacă există limitele $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l_1$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g'(x) = l_2$ cu $l_2 \neq 0$,

atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$. Dacă aplicăm teorema lui Cauchy, atunci obținem aceeași valoare intermediară atât în numitor cât și în numărător, deci nu este nevoie de existența limitelor

$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l_1$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g'(x) = l_2$, este suficient să existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Astfel am obținut

următoarea proprietate importantă:

Teoremă. (regula lui l'Hospital pentru cazul 0/0)

Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) funcții continue în $x_0 \in [a, b]$ care satisfac următoarele proprietăți:

1. funcțiile f și g sunt derivabile pe $V \cap [a, b] \setminus \{x_0\}$ (unde $V \in V(x_0)$),
2. $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
3. $g'(x) \neq 0$ într-o vecinătate a punctului x_0 ,
4. există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

În aceste condiții există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demonstrație. Aplicăm teorema lui Cauchy pe intervalul $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, unde ε este ales astfel ca intervalul să fie în interiorul vecinătăților de la punctele 1 și 3 (funcția fiind derivabilă pe acest interval este și continuă, deci condițiile teoremei sunt

verificate).

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{(x - x_0) f'(c)}{(x - x_0) g'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$



Când $x \rightarrow x_0$ obținem $c \rightarrow x_0$, deci în cazul $x \rightarrow x_0$ limita membrului drept este

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Astfel și membrul stâng are aceeași limită, deci demonstrația este completă.

Putem renunța la condiția de continuitate în punctul x_0 . În schimb vom avea nevoie de existența limitelor celor două funcții în acest punct.

Teoremă. (regula lui l'Hospital pentru cazul $0/0$)

Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$) două funcții și $x_0 \in [a, b]$. Dacă

1. funcțiile f și g sunt derivabile pe $V \cap [a, b] \setminus \{x_0\}$, unde $V \in V(x_0)$,
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,
3. $g'(x)$ nu este 0 dacă x este în vecinătatea punctului x_0 și este diferit de x_0 ,
4. există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

atunci există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ și avem egalitatea $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demonstrație

Aplicăm teorema precedentă funcțiilor $f_1(x) = \begin{cases} 0, & x = x_0 \\ f(x), & x \neq x_0 \end{cases}$ și $g_1(x) = \begin{cases} 0, & x = x_0 \\ g(x), & x \neq x_0 \end{cases}$.

Observație. În teoremele precedente nu este necesară derivabilitatea în punctul x_0 . Dacă funcțiile sunt derivabile în acest punct, atunci din relațiile $f(x_0) = g(x_0) = 0$

deducem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

și astfel când $x \rightarrow x_0$ membrul drept tinde la $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ (cu condiția $g'(x_0) \neq 0$). În consecință și membrul stâng are aceeași limită. Avem deci următoarea teoremă:

Teoremă (Cauchy)

Dacă $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval, $x_0 \in I$ și $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcții cu proprietățile:

1. $f(x_0) = g(x_0) = 0$;
2. f și g derivabile în x_0 și $g'(x_0) \neq 0$,

atunci există o vecinătate V a punctului x_0 în care $g(x) \neq 0$, $\forall x \in V \setminus \{x_0\}$ și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Este evident că în anumite cazuri se pot aplica toate cele trei teoreme de mai înainte, dar sunt și cazuri în care putem aplica numai una din acestea.



Exemple. 1. Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$.

Rezolvare. Considerăm funcțiile $f, g: \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ și $g(x) = \ln x$. Aceste funcții sunt continue și derivabile pe domeniul de definiție și $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$, iar $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 = 2$. Astfel pe baza

teoremei lui l'Hospital (sau a teoremei lui Cauchy) avem $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} = 2$.

Observație. Folosind transformări elementare putem calcula limita și fără derivate:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x} \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t + 1)} \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = \frac{2}{1} = 2.$$



2. Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$.

Rezolvare. Fie $f, g: \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1$ și $g(x) = \sin x$. Aceste funcții sunt continue și derivabile pe domeniul de definiție, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ și

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1 \left(= \frac{f'(0)}{g'(0)} \right).$$

Din regula lui l'Hospital (sau teorema lui Cauchy) rezultă $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = 1$.

Observație. Ca și în cazul precedent limita se poate calcula și fără derivate:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = 1 \cdot 1 = 1.$$



3. Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$.

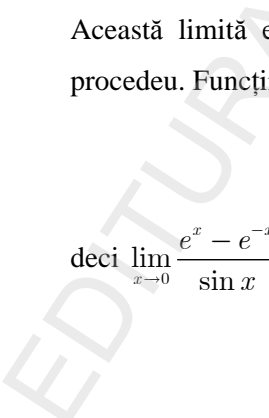
Rezolvare. Considerăm funcțiile $f, g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + e^{-x} - 2$ și $g(x) = 1 - \cos x$. Funcțiile sunt continue și derivabile și avem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}.$$

Această limită este tot de forma $\frac{0}{0}$, deci pentru a o calcula vom aplica același procedeu. Funcțiile f' și g' sunt derivabile și

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f')'(x)}{(g')'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2,$$

deci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = 2$ și astfel avem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = 2$.



Observație. Folosind numai limite elementare avem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{2e^x \sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^2 \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 = 2$$

4. Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

Rezolvare. Funcțiile $f, g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$ și $g(x) = x^3$ sunt continue și derivabile și avem pe rând egalitățile

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Pe baza teoremei lui l'Hospital (aici nu putem aplica teorema lui Cauchy)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

5. Considerăm șirul definit prin relațiile $x_{n+1} = \sin x_n$, $n \geq 1$, $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Să se calculeze limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot x_n$.

Rezolvare. Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător și cu termeni pozitivi, deci este convergent. Dacă trecem la limită în relația de recurență, deducem $l = \sin l$, unde l este limita șirului $(x_n)_{n \geq 0}$. De aici rezultă că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și are limita 0. Vom calcula limita pătratului expresiei $\sqrt{n} \cdot x_n$ folosind limita funcțiilor.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$$

Folosind criteriul Cesaro-Stolz este suficient să calculăm limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1 - n}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 x_{n+1}^2}{x_n^2 - x_{n+1}^2}.$$

Pe de altă parte $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, deci este suficient să calculăm limita funcției

$$f(x) = \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} \text{ în punctul } 0. \text{ Dar}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{6}{2} = 3$$

Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot x_n = \sqrt{3}$.

6. Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ dacă $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ \operatorname{tg} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ și

$$g(x) = \begin{cases} e^{x^2} - 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - \cos x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Rezolvare. Funcțiile f și g nu sunt continue și nici derivabile într-o vecinătate a punctului $x_0 = 0$, deci nu putem aplica regula lui l'Hospital. Pe de altă parte funcțiile sunt continue și derivabile în punctul $x_0 = 0$, $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = 1$ și $g'(0) = 1$. Astfel pe baza teoremei lui Cauchy obținem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{1} = 1$.

7. Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos \frac{1}{x}}{1 - \cos x}$.

Rezolvare. Derivata funcției $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \cos \frac{1}{x}$ este

$$f'(x) = 3x^2 \cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x}.$$

Astfel $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{3x^2 \cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$, unde $g(x) = 1 - \cos x$. De aici rezultă că limita

raportului $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ este o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Pe de altă parte limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$

nu există, deci nu putem aplica regula lui l'Hospital și nici teorema lui Cauchy. Folosind calcule elementare obținem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cos \frac{1}{x} \right) = 2 \cdot 0 = 0.$$

Observații. 1. Din exemplele precedente rezultă că pentru corectitudinea raționamentului este absolut necesar verificarea tuturor condițiilor, altfel putem ajunge la rezultat corect printr-un raționament absurd, sau putem ajunge la concluzii complet greșite.

2. În multe cazuri (vezi exemplul 5) este avantajoasă combinarea metodelor elementare cu regula lui l'Hospital în vederea simplificării calculelor.

Nedeterminările de forma $\frac{\infty}{\infty}$ se pot reduce la cazul studiat, totuși enunțăm teoremele precedente și pentru acest caz.

Teoremă. (l'Hospital) Dacă $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $x_0 \in (a, b)$ și funcțiile $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfac condițiile:

1. f și g sunt derivabile,
2. $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$,
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$,
4. există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

atunci există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ și avem $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demonstrație. Fie $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$. Din condiția $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ și $g'(x) \neq 0$, deducem $g(x) \neq 0$ și g este strict monotonă pe un interval $(a - \varepsilon, a)$. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in (a, b)$ este un șir cu proprietatea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, atunci pe baza teoremei lui Cauchy există $c_n \in (x_{n+1}, x_n)$ astfel încât $\frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{g(x_n) - g(x_{n+1})} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$.

Din condiția $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ și astfel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = l$. De aici deducem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{g(x_n) - g(x_{n+1})} = l$ și pe baza teoremei lui Cézaro-Stolz rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este arbitrar, deci avem egalitatea

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observație. Regula lui l'Hospital se poate aplica și în cazul în care x_0 este $\pm\infty$. În continuare ne vom referi la toate aceste teoreme sub numele de regula (regulile) lui l'Hospital.

Exemple. 1. Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$.

Rezolvare. Pentru funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ și $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$ avem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ și aceste funcții sunt derivabile pe domeniul de definiție, deci sunt verificate condițiile teoremei lui l'Hospital.

Pe de altă parte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, deci $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ există și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Observație. În mod analog $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$, dacă $a > 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0$, dacă P este o funcție polinomială.

2. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$.

Rezolvare. Funcțiile $f(x) = x$ și $g(x) = e^x$ sunt continue și derivabile pe \mathbb{R} , și

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0, \text{ deci pe baza regulii lui l'Hospital avem } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

3. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$.

Rezolvare. Funcțiile $f(x) = x^2$ și $g(x) = e^x$ sunt continue și derivabile pe \mathbb{R} , și

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = 0 \text{ (folosind exemplul precedent sau aplicând regula lui$$

l'Hospital), deci $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$.

Observație. În mod similar putem arăta că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$, dacă P este funcție polinomială.



APLICAȚIILE REGULILOR L'HOSPITAL ÎN CAZURILE DE NEDETERMINARE

1. Cazul $0 \cdot \infty$

Dacă $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $x_0 \in (a, b)$ și funcțiile $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ atunci limita $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$ (care este de forma $0 \cdot \infty$) se poate reduce la o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, deoarece $g(x) \neq 0$:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, \text{ unde } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = 0 \text{ sau}$$

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, \text{ unde } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty.$$

A doua transformare este posibilă numai în cazul în care f își păstrează semnul într-o vecinătate a originii.

Exemple

1. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{tg} x$.



Rezolvare. Limita este un caz de nedeterminare de forma $0 \cdot \infty$, deci efectuăm următoarele transformări:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)'}{\left(\operatorname{ctg} x\right)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(-\sin^2 x\right) = -1,$$

și astfel $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{tg} x = -1$.

2. Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\operatorname{tg}^2 x \cdot \ln \sin x\right)$.

Rezolvare. Și în acest caz avem o nedeterminare de forma $0 \cdot \infty$, deci putem scrie pe rând:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\operatorname{tg}^2 x \cdot \ln \sin x\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln \sin x}{\operatorname{ctg}^2 x} \text{ și } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(\ln \sin x)'}{\left(\operatorname{ctg}^2 x\right)'} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{2 \operatorname{ctg} x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)} = 0,$$

deci $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\operatorname{tg}^2 x \cdot \ln \sin x) = 0$.

2. Cazul $\infty - \infty$

Dacă limita de calculat are forma $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$, unde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, atunci $f(x) \neq 0$ și $g(x) \neq 0$, deci putem efectua următoarele transformări:

$$f(x) - g(x) = \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right) \cdot f(x) \cdot g(x) \text{ sau}$$

$$f(x) - g(x) = f(x) \cdot \left(1 - \frac{f(x)}{g(x)} \right).$$

În acest mod $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} \right)$, deci reducem problema la un caz de forma $\infty \cdot 0$. În al doilea caz limita $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$ se reduce la calculul unei limite de forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemple

1. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right)$.

Rezolvare. Avem o nedeterminare de forma $\infty - \infty$, deci o transformăm într-o formă pentru care se poate aplica regula lui l'Hospital. $\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} = \frac{x-1-x \ln x}{(x-1) \ln x}$, și pentru această expresie obținem o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$, adică se poate aplica regula lui l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \ln x - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x \ln x}{x \ln x + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\ln x - 1}{\ln x + 2} = -\frac{1}{2},$$

deci $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right) = -\frac{1}{2}$.

2. Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{e^x - 1} \right)$.

Rezolvare. Nedeterminarea este de forma $\infty - \infty$. Scriind expresia sub forma

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{e^x - 1} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{2x}{e^x - 1} \right),$$

avem $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 - \frac{2x}{e^x - 1} \right) = -1$, deci $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{e^x - 1} \right) = -\infty$.

3. Cazurile $0^0, \infty^0, 1^\infty$

Dacă $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$ și $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(x) > 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ sau $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ sau $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, atunci la calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)}$ pot apărea cazurile $0^0, \infty^0, 1^\infty$. În toate cele trei cazuri putem reduce calculul limitei la o nedeterminare de forma $0 \cdot \infty$ cu ajutorul egalității $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$. Mai precis dacă există $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \ln f(x)$, atunci există și limita $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)}$ și avem egalitatea

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \ln f(x)}.$$

Exemple

1. Să se calculeze limita $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{\text{tg } x}$.

Rezolvare. Nedeterminarea este de forma 0^0 . Însă $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\text{tg } x \cdot \ln x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\text{ctg } x}$ și

această limită este de forma $\frac{\infty}{\infty}$, deci aplicând regula lui l'Hospital obținem

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(-\frac{\sin^2 x}{x} \right) = 0, \text{ și astfel } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{\text{tg } x} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \text{tg } x \cdot \ln x} = e^0 = 1.$$

2. Să se calculeze limita $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x$.

Rezolvare. Este o nedeterminare de forma ∞^0 . Pe de altă parte

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln \left(\ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(-\ln x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{x}{\ln x} = 0,$$

deci $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln \ln \frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

3. Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\text{tg}^2 x}$.

Rezolvare. Este o nedeterminare de forma 1^∞ .

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \text{tg}^2 x \cdot \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\text{ctg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\sin^2 x}{2} \right) = -\frac{1}{2}, \text{ deci } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\text{tg}^2 x} = e^{-\frac{1}{2}}.$$



Exerciții

1. Calculați următoarele limite:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} \quad a > 0;$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}; \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}; \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0);$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} \quad (a > 0, n > 0); \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}; \quad \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cdot \sin^2 x};$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}; \quad \text{k) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1};$$

$$\text{l) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}, \quad a, b > 0; \quad \text{m) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x^2 \sin x + \sin^3 x};$$

$$\text{n) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - x \sin x - \cos x}{1 - \cos x}; \quad \text{o) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x^a}, \quad a > 0;$$

$$\text{p) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}; \quad \text{q) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} - 2}{\sin^2 x};$$

2. Studiați aplicabilitatea regulii lui l'Hospital în următoarele cazuri:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x} \cdot (\cos x + 2 \sin x) + e^{-x^2} \cdot \sin^2 x}{e^{-x} \cdot (\cos x + \sin x)};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}; \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x) e^{\sin x}}.$$

3. Calculați limitele:

$$\text{a) } \lim_{x \nearrow 1} [\ln x \cdot \ln(1-x)]; \quad \text{b) } \lim_{x \searrow 0} x^\varepsilon \cdot \ln x \quad (\varepsilon > 0); \quad \text{c) } \lim_{x \searrow 0} x^x; \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}};$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}; \quad \text{f) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x; \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right); \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} |\sin x|^{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + a}{x^2 - a} \right)^{\frac{1}{e^x + e^{-x} - 2}}; \quad \text{j) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \text{k) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x + 1}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{x \ln x} \right);$$

$$\text{l) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right); \quad \text{m) } \lim_{x \rightarrow 0} (a^x - 1)^x.$$

4. Demonstrați că dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admite derivate de orice ordin, atunci pentru funcția polinomială

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

are loc egalitatea $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ (Polinomul P_n se numește polinomul de

grad n al lui Taylor, atașat funcției f în punctul x_0).

5. Demonstrați că dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admite derivate de orice ordin iar șirul $(P_n(x))_{n \geq 1}$ este convergent, atunci limita este $f(x)$ (notațiile sunt cele din problema precedentă). Scrieți polinoamele Taylor de grad n pentru următoarele funcții:

a) $f(x) = e^x$;

b) $f(x) = \sin x$;

c) $f(x) = \cos x$;

d) $f(x) = (1+x)^a, a \in \mathbb{R}$;

e) $f(x) = \ln(1+x)$.

Probleme pregătitoare pentru examene



1. Arătați că funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ este strict descrescătoare.

(Admitere, 1976.)

2. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + xe^{nx}}{1 + e^{nx}}, g(x) = e^{x+1}$. Se poate aplica teorema lui Lagrange funcției $h: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = (g \circ f)(x)$? Determinați valoarea constantei $c \in (-1, 1)$ (dacă există) pentru care $\frac{h(1) - h(-1)}{2} = h'(c)$.

(Admitere, 1992)

3. Pentru funcția $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n, & x \in [-1, 0] \\ px^2 + 4x + 4, & x \in (0, 1] \end{cases}$ notăm cu S

suma valorilor parametrilor m, n, p pentru care funcția f satisface condițiile teoremei lui Rolle și cu C suma valorilor intermediare obținute prin aplicarea teoremei lui Rolle. Calculați S și A .

(Admitere, 1992)

4. Calculați derivata funcției $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot e^{\frac{x}{x^2-1}}$ și limitele $\lim_{x \searrow -1} f'(x)$ și $\lim_{x \nearrow -1} f'(x)$. Demonstrați că ecuația $f'(x) = 0$ admite o rădăcină mai mare decât 2.

(Variantă bacalaureat)

5. Demonstrați că funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \cos \frac{\pi}{x}$ verifică inegalitatea $f(x+1) - f(x) > 1$, dacă $x > 2$.

(Variantă bacalaureat 2001.)

6. Demonstrați că dacă x_1, x_2, \dots, x_n sunt numere reale distincte două câte două, atunci pentru funcția polinomială $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ avem

$$\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \dots + \frac{1}{P'(x_n)} = 0.$$



VIII. STUDIUL FUNCȚIILOR

STUDIUL MONOTONIEI, INEGALITĂȚI



Considerăm funcția continuă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și derivabilă pe (a, b) . În clasa a IX-a am studiat monotonia funcției f folosind semnul expresiei $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Dacă

această fracție este pozitivă pentru orice $x, y \in [a, b]$, atunci f este crescătoare pe $[a, b]$, iar dacă fracția este negativă pentru orice $x, y \in [a, b]$, atunci f este descrescătoare pe $[a, b]$. Pe de altă parte, pe baza teoremei lui Lagrange valoarea fracției este egală cu valoarea derivatei într-un punct intermediar, deci în cazul în care $f'(c) \geq 0$ pentru orice $c \in (a, b)$, atunci f este crescătoare pe $[a, b]$, iar în cazul în care $f'(c) \leq 0$, $\forall c \in (a, b)$, atunci f este descrescătoare pe intervalul $[a, b]$. Întrebarea este dacă aceste condiții sunt și necesare pentru monotonia funcției f . Dacă demonstrăm că aceste condiții sunt necesare și suficiente pentru monotonia funcției f , atunci obținem o caracterizare a monotoniei (pentru funcții derivabile) cu ajutorul căreia monotonia se poate studia prin semnul unor expresii de o singură

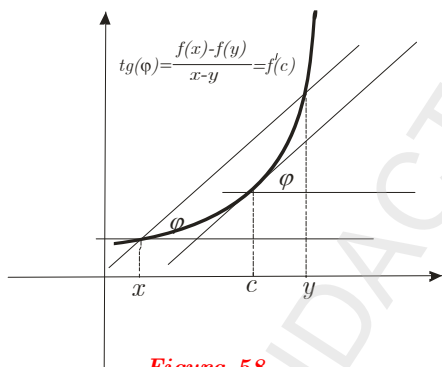


Figura 58

variabilă (pe când semnul fracției $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ se poate studia mult mai greu)

din cauza celor două variabile independente. Intuitiv dacă f este o funcție continuă cu derivata continuă (deci care admite o reprezentare grafică ca în figura alăturată) pentru orice $c \in (a, b)$ există x, y apropiate de c astfel încât $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$. Pentru a

clarifica aceste proprietăți demonstrăm următoarea teoremă.

Teoremă. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) .

- Dacă $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci f este strict crescătoare pe (a, b) .
- Dacă $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci f este crescătoare pe (a, b) .
- Dacă $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci f este strict descrescătoare pe (a, b) .
- Dacă $f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci f este descrescătoare pe (a, b) .

Reciprocele proprietăților b) și d) sunt de asemenea adevărate, pe când reciproccele afirmațiilor a) și c) nu sunt adevărate.

Demonstrație. Demonstrăm numai afirmația a), celelalte se pot demonstra în mod similar. Dacă $x_1 < x_2$ sunt două puncte arbitrare din intervalul (a, b) , atunci conform teoremei lui Lagrange există $x_1 < c < x_2$ astfel încât

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$$

Dacă $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci $f'(c) > 0$ și din condiția $x_2 - x_1 > 0$ rezultă $f(x_1) < f(x_2)$. Punctele $x_1 < x_2$ au fost alese arbitrar în intervalul (a, b) , deci f este strict crescătoare pe intervalul (a, b) .

Consecință. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) . Dacă derivata lui f este identic nulă pe (a, b) , atunci f este o funcție constantă.

Demonstrație. Pe baza teoremei precedente f este crescătoare și descrescătoare în același timp, deci pentru $x_1 < x_2$ avem $f(x_1) \leq f(x_2)$ și $f(x_1) \geq f(x_2)$. Din aceste două inegalități rezultă $f(x_1) = f(x_2)$, deci f este o funcție constantă.

Observație. Faptul că f este definit pe un interval, este crucial atât în teorema precedentă, cât și în consecințele ei. Ilustrăm acesta prin două exemple. Dacă

$$f : (0, 1) \cup (2, 3) \rightarrow \mathbb{R} \text{ este definită prin } f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ 2, & x \in (2, 3) \end{cases}$$

atunci f este derivabilă pe domeniul de definiție și $f'(x) = 0, \forall x \in (0, 1) \cup (2, 3)$, dar f nu este constantă pe domeniul de definiție. În mod similar funcția

$$f : [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 4x, & x \in [0, 1] \\ x, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

este derivabilă pe domeniul de definiție și derivata este strict pozitivă. Cu toate acestea f nu este crescătoare, deoarece $f(1) = 4 > 2 = f(2)$.

Determinarea punctelor de extrem. Conform teoremei lui Fermat dacă o funcție derivabilă pe un interval are un punct de extrem în interiorul acestui interval, atunci derivata în punctul de extrem este 0. Astfel punctele de extrem sunt zerourile derivatei sau nu sunt puncte interioare ale domeniului de definiție. În general punctele de extrem care nu sunt puncte interioare domeniului de definiție se pot depista foarte ușor (în cazul funcțiilor de o variabilă reală), deci rămâne să stabilim criterii pentru ca un punct în care derivata funcției este 0 să fie punct de extrem.

Pe baza teoremei lui Fermat, dacă D este un interval, atunci toate punctele de extrem din interiorul intervalului sunt puncte staționare. Am văzut în capitolul VI că nu toate punctele staționare sunt puncte de extrem. (De exemplu pentru funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ avem $f'(0) = 0$ și punctul $x = 0$ nu este punct de extrem (funcția f este crescătoare pe \mathbb{R} , se vede și în figura 59, că axa Ox este tangentă la grafic).

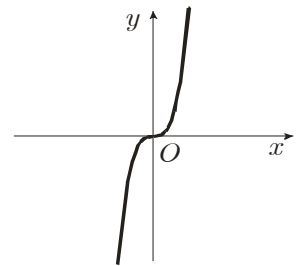


Figura 59



Teoremă. Dacă $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă și $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în punctul staționar x_0 și funcția f' își schimbă semnul în x_0 ($f'(x) < 0$, dacă $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ și $f'(x) > 0$, dacă $x \in (x_0, x_0 + \delta)$), unde $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ sau invers), atunci funcția f are punct de extrem în $x_0 \in (a, b)$.

Demonstrație. Dacă $f'(x) < 0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, atunci f este descrescătoare pe acest interval. Din $f'(x) > 0$, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ deducem că f este crescătoare pe intervalul $(x_0, x_0 + \delta)$. Astfel din continuitatea funcției f rezultă $f(x) \geq f(x_0)$ pentru orice $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, deci x_0 este un punct de minim local. Dacă pentru $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ avem $f'(x) > 0$ iar pentru $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, $f'(x) < 0$, atunci f este crescătoare pe intervalul $(x_0 - \delta, x_0)$ și este descrescătoare pe intervalul $(x_0, x_0 + \delta)$. Astfel x_0 este punct de maxim local. Pentru o vizualizare mai bună am inclus aceste cazuri în următoarele tabele:

		Punct de maxim		
x	$x_0 - \delta$	x_0	$x_0 + \delta$	
$f'(x)$	+++++	0	-----	
$f(x)$	↗	$f(x_0)$	↘	
		Punct de minim		
x	$x_0 - \delta$	x_0	$x_0 + \delta$	
$f'(x)$	-----	0	+++++	
$f(x)$	↘	$f(x_0)$	↗	



Aplicații

1. Pentru funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ avem $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ pe intervalul $I = (0, +\infty)$, deci f este strict crescătoare pe I .

2. Dacă $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$, atunci $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. Astfel punctele staționare sunt $x = -1$ și $x = 1$. Pentru a identifica punctele de extrem stabilim intervalele de monotonie studiind semnul derivatei. Pe baza rezultatelor obținute putem întocmi următorul tabel, numit și tabelul de variație al funcției f .

x	$-\infty$	-1	$-1 + \delta$	0	$1 - \delta$	1	$+\infty$
$f'(x)$	++++	0	-----		-----	0	++++
$f(x)$	↗	-2	↘		↘	2	↗

Funcția f este crescătoare pe intervalul $I_1 = (-\infty, -1]$ și descrescătoare pe intervalul $I_2 = [-1, 0)$ (deoarece derivata este pozitivă pe I_1 și negativă pe I_2). Astfel punctul $x = -1$ este un punct de maxim local.

Funcția f este descrescătoare pe intervalul $I_3 = (0, 1]$ și este crescătoare pe intervalul $I_4 = [1, +\infty)$, deci punctul $x = 1$ este un punct de minim local.

Pe baza acestor rezultate putem afirma că $f(x) \geq 2$, dacă $x > 0$, și $f(x) \leq -2$, dacă $x < 0$.

Observație. Aceste inegalități au fost demonstrate încă în clasa a VII-a, deci ele nu reprezintă nici o noutate. Noutatea constă în faptul că avem un instrument extrem de puternic pentru a stabili astfel de inegalități.

3. Să se demonstreze că $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, dacă $x > 0$.

Soluție. Fie $f_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x - \sin x$. Avem $f_1'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, dacă $x \geq 0$, ($f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$), deci f_1 este strict crescătoare pe $[0, \infty)$. De aici rezultă $f_1(0) < f_1(x)$, adică $0 < x - \sin x$, pentru orice $x > 0$. Pentru a stabili prima inegalitate considerăm o altă funcție ajutătoare. Fie funcția $f_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$. Calculând derivata obținem $f_2'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$. Pentru a stabili semnul acestei funcții studiem derivata acesteia, deci calculăm funcția f_2'' . $f_2''(x) = \sin x - x \leq 0$, dacă $x \geq 0$ ($f_2''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$) și astfel pe baza inegalității precedente deducem că f_2' este descrescătoare. Astfel $f_2'(0) > f_2'(x)$, pentru $x > 0$. Dar $f_2'(0) = 0$, deci $f_2'(x) < 0$, pentru $x > 0$, ceea ce înseamnă că f_2 este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$. În final obținem $f_2(x) < f_2(0) = 0$, deci inegalitatea cerută.

4. Să se arate că $\frac{1}{2} \ln^2(n+1) - \frac{1}{2} \ln^2 3 < \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k} < \frac{1}{2} \ln^2 n - \frac{1}{2} \ln^2 3 + \frac{\ln 3}{3}$.

Demonstrație. Funcția $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$ este derivata funcției $F(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$, $x > 0$ și această funcție satisface condițiile teoremei lui Lagrange. Dacă aplicăm teorema lui Lagrange pentru funcția F pe intervalul $[k, k+1]$, unde $3 \leq k \leq n$, atunci pentru fiecare $k \in \{3, 4, 5, 6, \dots, n\}$ există $c_k \in (k, k+1)$ astfel încât

$$\frac{1}{2} \ln^2(k+1) - \frac{1}{2} \ln^2 k = \frac{\ln c_k}{c_k}.$$

Pe de altă parte $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, deci $f'(x) < 0$ pentru $x \geq e$ și astfel din condiția

$k \geq 3 > e$ rezultă $\frac{\ln(k+1)}{k+1} < \frac{\ln c_k}{c_k} < \frac{\ln k}{k}$. Din considerațiile precedente rezultă:

$$\frac{\ln(k+1)}{k+1} < \frac{1}{2} \ln^2(k+1) - \frac{1}{2} \ln^2 k < \frac{\ln k}{k}, \text{ dacă } k \geq 3.$$

Însumând membrii corespunzători, obținem pe de o parte:

$$\sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{\ln 3}{3} + \sum_{k=4}^n \frac{\ln k}{k} < \frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{2} \sum_{k=4}^n [\ln^2 k - \ln^2 (k-1)]$$

iar pe de altă parte
$$\frac{1}{2} \sum_{k=3}^n [\ln^2 (k+1) - \ln^2 k] < \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k}.$$

Prima inegalitate este chiar a doua inegalitatea propusă, iar din egalitatea

$$\frac{1}{2} \sum_{k=3}^n [\ln^2 (k+1) - \ln^2 k] = \frac{1}{2} [\ln^2 (n+1) - \ln^2 3]$$

deducem și prima inegalitate propusă.

5. Să se demonstreze că funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} - 2 \operatorname{arctg} x$ este constantă.

Demonstrație. Calculăm derivata funcției f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{2x} \cdot \frac{4x}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0. \end{aligned}$$

Din $f'(x) = 0$, pentru $x > 0$ rezultă că f este constantă pe $(0, +\infty)$. Pe de altă parte $f(0) = 0$ și funcția f este continuă pe $[0, \infty)$, deci $f(x) = 0$, pentru orice $x > 0$.

Practic am demonstrat următoarea formulă trigonometrică:

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} x, \text{ dacă } x \geq 0.$$

6. Să se determine toate funcțiile derivabile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$f'(x) = a \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare. Reducem la 0 membrul drept și înmulțim egalitatea obținută prin e^{-ax} .

Obținem astfel $f'(x) \cdot e^{-ax} + f(x) \cdot (-a)e^{-ax} = 0$

deci derivata funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-ax} f(x)$ este identic 0 pe \mathbb{R} . Datorită consecințelor teoremei lui Lagrange funcția g este constantă pe \mathbb{R} , deci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $e^{-ax} f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$. De aici obținem $f(x) = c \cdot e^{ax}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

7. Să se construiască o piramidă regulată de volum minim, circumscrisă unui cub de latură a (baza piramidei este în planul determinat de o față a cubului, iar vârfurile cubului care nu sunt în acest plan sunt situate pe muchiile piramidei, vezi figura 60).

Soluție. Notăm $AC = h$ și exprimăm volumul piramidei în funcție de această mărime. Conform notațiilor din figură rezultă $AB = \frac{a}{2}$, $AO = a$ și $\frac{OM}{\frac{a}{2}} = \frac{h+a}{h}$,

deci $OM = \frac{a(a+h)}{2h}$. Baza piramidei este $2OM$, deci volumul piramidei se poate calcula prin formula

$$V(h) = \frac{(2OM)^2(a+h)}{3} = \frac{a^2(a+h)^3}{3h^2}.$$

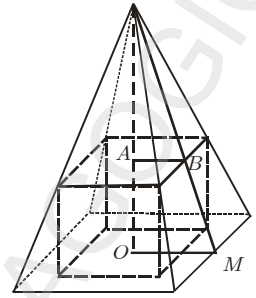
Pentru a obține volumul minim determinăm punctele de extrem ale funcției. Din ecuația $V'(h) = 0$ obținem

$$V'(h) = \frac{a^2 \left(3(a+h)^2 h^2 - 2h(a+h)^3 \right)}{3h^4} = 0,$$

$$3h^2 - 2h(a+h) = 0, \quad h^2 - 2ah = 0,$$

și din condiția $h > 0$ rezultă $h = 2a$. Se poate verifica foarte ușor că acest punct este într-adevăr un punct de minim pentru V .

Figura 60!



Exerciții și probleme

1. Studiați monotonia următoarelor funcții:

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \frac{1}{x};$

b) $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \ln x;$

c) $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x + \cos x;$ d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$

2. Are funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), f(x) = \arctg x$ puncte de extrem?

3. Determinați punctele de extrem ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 6x.$

4. Determinați intervalele de monotonie ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}.$

5. Arătați că dacă funcțiile F și G sunt derivabile pe $[a, b]$, pentru orice $x \in [a, b]$ avem $F'(x) \leq G'(x)$, și $F(a) = G(a)$, atunci $F(x) \leq G(x)$, pentru orice $x \in [a, b]$.

6. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arctg x$ și $g(x) = -\arctg \frac{1}{x}.$

Calculați $f'(x)$ și $g'(x)$. Studiați monotonia acestor funcții pe intervalele $I_1 = (-\infty, 0)$ și $I_2 = (0, +\infty)$, iar după aceea pe \mathbb{R} .

7. Demonstrați că dacă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifică inegalitatea

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \text{ pentru orice } x \text{ și } y, \text{ atunci } f \text{ este o funcție constantă.}$$

8. Considerăm funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu derivata mărginită ($|g'(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$).

Pentru $\varepsilon > 0$ fixat construim funcția $f_\varepsilon(x) = x + \varepsilon \cdot g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Demonstrați că pentru ε suficient de mic funcția f este injectivă.

9. Arătați că dacă funcția $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, atunci pentru funcția $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x+1) - f(x)$, avem $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

10. Funcția $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ satisface următoarele condiții:

a) f este continuă pentru $x \geq 0$, b) există $f'(x)$ dacă $x > 0$, c) f' este crescătoare.

Arătați că funcția $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad (x > 0)$ este crescătoare.

11. Demonstrați următoarele inegalități:

a) $e^x > 1 + x$, dacă $x \neq 0$; b) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, dacă $x > 0$;

12. Arătați că $\frac{2}{\pi} \cdot x < \sin x < x$, pentru $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
13. O statuie de înălțime l a fost așezată pe un piedestal de înălțime h . La ce distanță de statuie trebuie să se oprească un om cu înălțimea h_0 , pentru a vedea statuia sub un unghi maxim.
14. În interiorul unui acoperiș de forma unui con, vrem să punem un butoi cilindric. Determinați volumul maxim al butoiului dacă generatoarele conului formează un unghi de 45° cu planul bazei și raza bazei este R .
15. Notăm cu $f(x)$ raportul dintre volumul conului având raza bazei R și generatoarea x și volumul sferei înscrise în acest con. Determinați minimul funcției $f(x)$.
16. Dintr-un carton de dimensiunile $a \times b$ decupăm de la colțuri patru pătrate de latură x și îndoim cele patru dreptunghiuri ca să obținem o cutie de forma unui paralelipiped dreptunghic. Determinați valoarea lui x pentru care volumul cutiei este maxim.
17. Dintr-un carton de forma unui disc de rază R decupăm un sector circular având unghiul la centru egal cu α . Din partea rămasă formăm o pâlnie. Determinați valoarea unghiului α pentru care volumul pâlniei este maxim.
18. Țintim cu arcul un punct aflat la distanța d și înălțimea $n \cdot d$ față de noi. Determinați valoarea minimă a vitezei inițiale, pentru ca săgeata să atingă ținta (neglijăm rezistența aerului).
19. Prin ansamblul a două rezistoare R_1 și R_2 legate în paralel trece un curent de intensitatea I . Determinați relația dintre rezistențe și intensitatea curentului ce trece prin ele dacă pierderea de căldură datorată efectului Joule-Lenz este minimă. (dacă prin rezistența R trece curentul I , atunci pierderea de căldură este $R \cdot I^2$)

STUDIUL DERIVABILITĂȚII FOLOSIND TEOREMA LUI LAGRANGE

Din teorema lui Lagrange deducem următoarea teoremă:



Teoremă. Dacă funcția continuă $f : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ are derivată pe $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ și există $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$, atunci f are derivată și în x_0 și $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

Demonstrație. Fie $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ un punct arbitrar. Pe intervalul $[x, x_0]$ sau $[x_0, x]$ putem aplica teorema lui Lagrange (deoarece în capătul intervalului nu se cere derivabilitatea funcției), deci există $c_x \in (x, x_0)$ astfel ca

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \text{ Dacă } x \rightarrow x_0, \text{ din } c_x \in (x, x_0) \text{ rezultă că și } c_x \rightarrow x_0, \text{ deci}$$

limita membrului drept este $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$. Astfel funcția f este derivabilă în punctul x_0

și derivata este egală cu această limită.

Aplicații. 1. Să se studieze derivabilitatea funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$$

Rezolvare. Funcția este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ deoarece în fiecare punct al acestei mulțimi este funcție elementară (fie polinom, fie exponențială). Pentru a stabili continuitatea în punctul $x_0 = 0$ calculăm limitele laterale în acest punct $\lim_{x \searrow 0} f(x) = e^0 = 1$ și $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 1 = f(0)$, deci f este continuă în 0. Pe de altă

parte $f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$, deci $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = e^0 = 1$ și $\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = 1$. Din aceste relații deducem existența limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$. Conform teoremei precedente f este derivabilă în origine și avem $f'(0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = 1$.

Observație. Dacă f este derivabilă, atunci derivata are proprietatea lui Darboux. Pe de altă parte o funcție cu proprietatea lui Darboux nu poate avea punct de discontinuitate de prima speță. Astfel dacă funcția continuă $f : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă pe $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ și în punctul x_0 limitele laterale ale derivatei există, dar nu sunt egale, atunci funcția f nu este derivabilă în punctul x_0 .

2. Să se determine parametrii a, b astfel ca funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^4 + ax + 2, & x < 0 \\ b + \ln(1 + x^4), & x \geq 0 \end{cases} \text{ să fie derivabilă.}$$

Rezolvare. Orice funcție derivabilă pe un interval este continuă pe acel interval, deci prima dată trebuie studiată continuitatea acestei funcții. Condiția continuității este $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} f(x) = f(0)$. De aici rezultă $b = 2$. Conform observației de la exercițiul precedent este necesar și suficient să avem $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = \lim_{x \nearrow 0} f'(x)$, adică $a = 0$.

Exerciții

Studiați derivabilitatea următoarelor funcții:

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) - x, & x > 0 \\ x^4, & x \leq 0 \end{cases}$; **2.** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ x^2 + 1, & x \leq 0 \end{cases}$;

3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ x^2 + ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$; **4.** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \arctg x, & x < 0 \\ \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$;

5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \max\{x, x^2, x^3\}, & x \leq 0 \\ \min\left\{1 + x, \frac{1}{x}, e^x\right\}, & x > 0 \end{cases}$;

$$6. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} a \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + b, & x \leq 3; \\ bx + 1, & x > 3; \end{cases}$$

$$7. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$



FUNCȚII CONVEXE ȘI FUNCȚII CONCAVE

În acest paragraf cu I notăm un interval.

În capitolul I am reamintit definițiile funcțiilor convexe și concave și faptul că fiecare coardă a graficului funcției convexe este deasupra arcului de grafic corespunzător și fiecare arc a graficului funcției concave este deasupra coardei respective. Astfel, dacă f este o funcție convexă și este derivabilă pe $[a, b]$, atunci pentru fiecare punct $x_0 \in [a, b]$ graficul funcției este deasupra tangentei duse în punctul de abscisă x_0 al acestui grafic. Pentru funcții concave tangenta este deasupra graficului pentru fiecare punct $x_0 \in [a, b]$. Acest aspect intuitiv sugerează a caracterizare a convexității și a concavității cu ajutorul derivatelor. În acest paragraf vom clarifica legătura dintre convexitate și continuitate și vom deduce criterii simple de convexitate folosind derivata a doua.

Definiție. Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție și $x_0 \in I$ este un punct arbitrar, atunci introducem funcția $K_{x_0}: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $K_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ pe care o vom numi *funcția pantă* în punctul x_0 (această funcție ne dă panta coardei care trece prin punctele de abscisă x_0 și x ale graficului funcției f)

Teoremă. O funcție definită pe D este convexă pe intervalul $I \subset D$, dacă și numai dacă fiecare funcție pantă $K_{x_0}: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ (asociată punctelor $x_0 \in I$) este crescătoare.

Demonstrație. Fie $I \subset D$ un interval și $a \in I$ un punct arbitrar. Arătăm că dacă f este convexă atunci pentru fiecare $a \in I$ funcția K_a este crescătoare. Considerăm $x_1, x_2 \in I \setminus \{a\}$, $x_1 < x_2$ și demonstrăm

$$(1) \quad K_a(x_1) \leq K_a(x_2)$$

În funcție de poziția relativă a punctelor a , x_1 , x_2 distingem următoarele trei cazuri:

$$\mathbf{a)} \ a < x_1 < x_2; \quad \mathbf{b)} \ x_1 < x_2 < a; \quad \mathbf{c)} \ x_1 < a < x_2.$$

Dacă $x_1 \in (a, x_2)$, atunci există $\lambda \in (0, 1)$ astfel ca $x_1 = \lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot x_2$. Din definiția convexității obținem:

$$K_a(x_1) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \leq \frac{\lambda f(a) + (1 - \lambda) f(x_2) - f(a)}{x_1 - a} =$$

$$= (1 - \lambda) \frac{f(x_2) - f(a)}{x_1 - a} = \frac{a - x_1}{a - x_2} \cdot \frac{f(x_2) - f(a)}{x_1 - a} = \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} = K_a(x_2).$$

În mod analog deducem inegalitatea $K_a(x_1) \leq K_a(x_2)$ și în cazul **b)**. În cazul **c)** folosim cele două proprietăți deja demonstrate și egalitatea evidentă

$$(2) \quad K_x(y) = K_y(x) \quad (x, y \in I, x \neq y).$$

$$\text{Putem scrie } K_a(x_1) = K_{x_1}(a) \leq K_{x_1}(x_2) = K_{x_2}(x_1) \leq K_{x_2}(a) = K_a(x_2)$$

deci inegalitatea este adevărată și în acest caz.

Pentru a demonstra implicația inversă presupunem că fiecare funcție pantă $K_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ este crescătoare și demonstrăm că funcția f este convexă. Fixăm elementele $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ în mod arbitrar și considerăm punctul $x \in (x_1, x_2)$.

Pentru $\lambda = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$ avem relațiile

$$\lambda \in (0, 1), \quad x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \text{ și } 1 - \lambda = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}.$$

Folosind aceste relații și proprietatea (2) avem următoarele egalități:

$$K_x(x_1) = K_{x_1}(x) = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{(1 - \lambda)(x_1 - x_2)}$$

$$\text{și} \quad K_x(x_2) = K_{x_2}(x) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda(x_2 - x_1)}.$$

$$K_x \text{ este crescătoare, deci } \frac{f(x_1) - f(x)}{(1 - \lambda)(x_1 - x_2)} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda(x_2 - x_1)}$$

de unde obținem $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$

adică f este o funcție convexă.

Teoremă. Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție convexă pe $I = (a, b)$, atunci în fiecare punct $x_0 \in I$ există derivata la dreapta și la stânga a lui f și f este continuă pe (a, b) .



Demonstrație. Funcția K_{x_0} este crescătoare, deci există limitele $\lim_{x \rightarrow x_0} K_{x_0}(x)$ și

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} K_{x_0}(x)$. Dacă $a < x_1 < x_2 < b$, atunci pe baza teoremei precedente obținem

$K_{x_1}(x) = K_x(x_1) < K_x(x_2) = K_{x_2}(x)$, pentru orice $x_1 < x < x_2$. Astfel deducem

$$\text{inegalitățile} \quad f'_s(x_1) \leq f'_d(x_1) \leq f'_s(x_2) \leq f'_d(x_2).$$

Din aceste relații rezultă că în punctele interioare ale intervalului derivatele laterale sunt finite, deci funcția este continuă în aceste puncte.

Observație. Din demonstrația precedentă rezultă că în cazul unei funcții convexe derivabile derivata este o funcție crescătoare. De aici rezultă teorema de caracterizare a funcțiilor convexe pentru care derivata a doua există.





Teoremă. Considerăm funcția de două ori derivabilă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Funcția f este convexă dacă și numai dacă $f''(x) \geq 0$ pentru orice $x \in I$.
2. Funcția f este concavă dacă și numai dacă $f''(x) \leq 0$ pentru orice $x \in I$.

Demonstrație. Dacă $f''(x) \geq 0$ pentru $x \in I$, atunci funcția f' este crescătoare. Dacă $x_1 < x < x_2$, atunci aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalele $[x_1, x]$ și $[x, x_2]$. Astfel obținem $c_1 < x < c_2$ cu proprietatea

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1) < f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

adică $(x_2 - x_1)f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$.

Cu notația $x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ obținem chiar inegalitatea din definiția convexității.

Pe de altă parte dacă f este derivabilă de două ori și este convexă atunci din demonstrația teoremei precedente rezultă că f' este crescătoare și astfel derivata a doua este nenegativă.

Folosind această teoremă putem studia convexitatea unor funcții într-o manieră foarte simplă.

Definiție. Dacă funcția continuă $f : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ admite derivată în punctul x_0 , este convexă pe intervalul $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ și concavă pe $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, sau invers, atunci spunem că punctul x_0 este un *punct de inflexiune* al funcției f .

În figura 61 funcția reprezentată este convexă pe intervalele $(-\infty, x_1)$ și $(x_2, +\infty)$ și concavă pe intervalul (x_1, x_2) , deci punctele $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$ sunt puncte de inflexiune ale funcției.

Dacă f este de două ori derivabilă, atunci f'' are proprietatea lui Darboux, deci își poate schimba semnul numai dacă ia valoarea 0. Astfel obținem următoarea teoremă.

Teoremă. Dacă funcția $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă și $x_0 \in (a, b)$ este un punct de inflexiune, atunci $f''(x_0) = 0$.

Observație. Dacă funcția nu este de două ori derivabilă pe intervalul (a, b) , atunci pot exista puncte de inflexiune în care $f''(x)$ nu este 0.

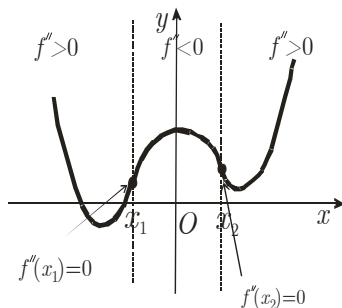


Figura 61

Legătura între punctele de extrem și derivata a doua

La studiul punctelor de extrem am văzut că pot exista puncte staționare care să nu fie puncte de extrem. Dacă însă în vecinătatea unui punct staționar funcția este convexă sau concavă, atunci intuiția ar cere ca punctul staționar să fie punct de extrem. Teorema următoare precizează condițiile necesare.

Teoremă. 1. Dacă funcția $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă, $\alpha \in (a, b)$ este un punct staționar și $f''(\alpha) > 0$, atunci $x_0 = \alpha$ este un punct de minim local.

2. Dacă funcția $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă $\alpha \in (a, b)$ este un punct staționar și $f''(\alpha) < 0$, atunci $x_0 = \alpha$ este un punct de maxim local.

În figura 62 în vecinătatea punctelor staționare x_1 și x_3 funcția este convexă, deci sunt puncte de minim local, iar în vecinătatea punctului staționar x_2 funcția este concavă, deci este punct de maxim local.

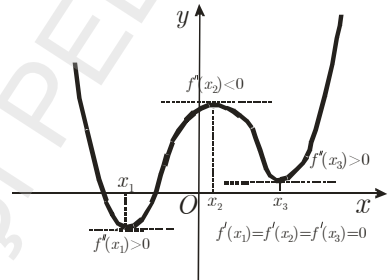


Figura 62

Exemple

1. $(\sin x)'' = -\sin x \leq 0$, pentru orice $x \in [0, \pi]$, deci funcția $f(x) = \sin x$ este concavă pe acest interval.

2. Pentru funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, avem $(x^4)'' = 12x^2 \geq 0$, deci f este convexă pe intervalul $[-1, 1]$.

3. În cazul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 6x$ avem $f'(x) = 6x^2 - 6$, $f''(x) = 12x$. Punctele staționare se obțin rezolvând ecuația $f'(x) = 0$, adică $6x^2 - 6 = 0$, de unde $x = 1$ sau $x = -1$. Funcția f este crescătoare pe intervalul $I_1 = (-\infty, -1)$, deoarece $f'(x) > 0$ pe I_1 , și este descrescătoare pe intervalul $I_2 = (-1, 1)$ deoarece pe acest interval $f'(x) < 0$. Pe intervalul $I_3 = (1, +\infty)$ avem $f'(x) > 0$, deci f este crescătoare. În mod similar din semnul derivatei a doua deducem intervalele de convexitate. $f''(x) < 0$, dacă $x < 0$ și $f''(x) > 0$, dacă $x > 0$. Pe baza acestor considerații putem întocmi tabelul de variație:

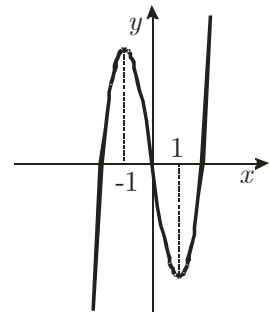


Figura 63

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	++++	0	----	0	++++
$f''(x)$	----	-12	----	0	++++
$f(x)$	concav	4	concav	0	convex
	↗	Max	↘	Infl.	↘
				Min	↗

În figura 63 am schițat graficul acestei funcții.

Exerciții și probleme

1. Studiați convexitatea și concavitata următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$; **b)** $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$; **d)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arctg x$;

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5 - x$; **f)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^6 - 3x^4 + 4x^2 - 32$.

2. Stabiliți intervalele de convexitate și de concavitata ale următoarelor funcții, precizând la fiecare și punctele de inflexiune (funcțiile sunt definite pe domeniul maxim de definiție):

a) $f(x) = 3x^2 - x^3$; **b)** $f(x) = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ ($a > 0$); **c)** $f(x) = x + x^{\frac{5}{3}}$;

d) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$; **e)** $f(x) = x + \sin x$; **f)** $f(x) = \ln(1 + x^2)$;

g) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$; **h)** $f(x) = x + \sin x$; **i)** $f(x) = x^n$ ($n > 1$);

j) $f(x) = e^x$; **k)** $f(x) = x \ln x$; **l)** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

3. Arătați că dacă funcția continuă $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ verifică inegalitatea

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in (a, b)$$

atunci f este convexă și dați exemplul de o funcție care nu este convexă și verifică relația de mai înainte.

4. Arătați că dacă f este convexă pe (a, b) și $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, atunci

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR

ASIMPTOTE

În cazul curbilor ale căror grafic nu este mărginit (nu se poate încadra într-un dreptunghi) se pune problema de a descrie comportarea spre infinit a acestora. Mai precis căutăm identificarea unor curbe simple (drepte, parabole, etc.) astfel încât graficul funcției f să se apropie oricât de mult de aceste curbe.

1. Asimptote verticale

Definiție. Dacă într-un punct a ($a \in \mathbb{R}$) cel puțin una din limitele laterale ale funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este egală cu ∞ sau $-\infty$, atunci dreapta de ecuație $x = a$ (care este paralelă cu axa Oy) se numește **asimptotă verticală** a funcției f .

Observație. Dacă f este definită în punctul a și este continuă în acest punct, atunci

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = f(a),$$

deci funcția nu poate avea asimptotă verticală în acest punct.



Exemple

1. În cazul funcției $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ avem $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty$ și

$\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} = -\infty$, deci dreptele $x = \frac{\pi}{2}$ și $x = -\frac{\pi}{2}$ sunt asimptote verticale ale acestei funcții. Dacă studiem funcția $\operatorname{tg} : D \rightarrow \mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție, atunci funcția are o infinitate de asimptote verticale și aceste asimptote sunt dreptele $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$.

2. Axa Oy este asimptota verticală a funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ deoarece $\lim_{x \searrow 0} \ln x = -\infty$.

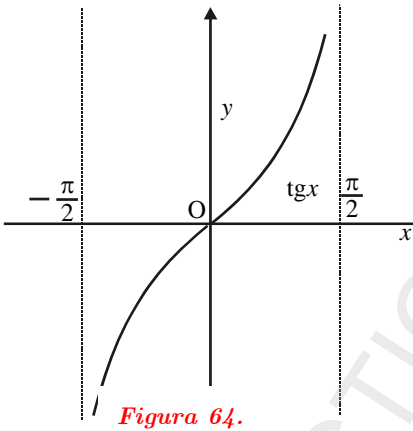


Figura 64.

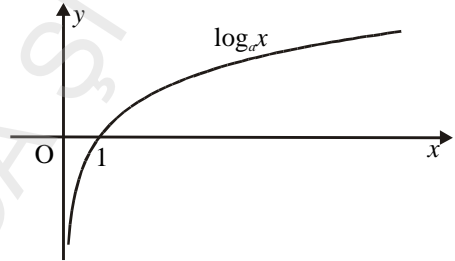


Figura 65.

3. Axa Oy este asimptota verticală a funcției $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, deoarece $\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ și $\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$.

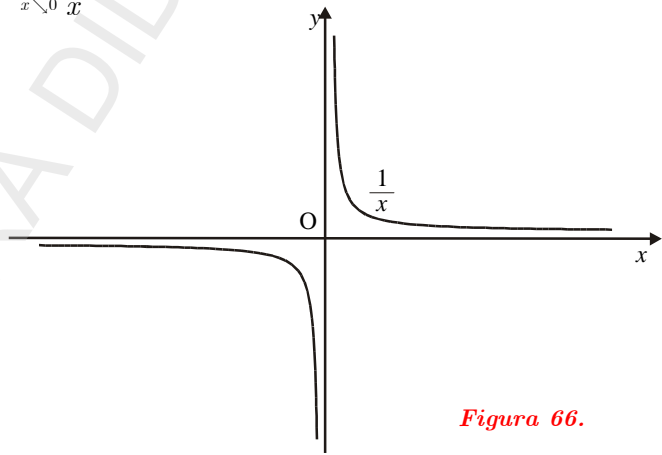


Figura 66.

2. Asimptote orizontale

Pe figura precedentă graficul se apropie de dreapta $y = 0$ când $x \rightarrow \pm\infty$. Dacă graficul unei funcții se apropie oricât de mult de o dreaptă orizontală, atunci vom numi această dreaptă o asimptotă orizontală a funcției respective.

Definiție. Dreapta $y = a$ este *asimptotă orizontală* a funcției $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ spre $+\infty$, dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$. În mod similar, dreapta $y = a$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ a funcției $f : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$, dacă $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$.

3. Asimptote oblice

Distanța dintre punctul de abscisă x_0 aparținând dreptei $y = mx + n$ și punctul cu aceeași abscisă de pe graficul funcției f este $|f(x_0) - mx_0 - n|$, deci graficul funcției se apropie oricât de mult de această dreaptă dacă și numai dacă limita acestei expresii este 0. Astfel obținem următoarea definiție:

Definiție. Dreapta $y = mx + n$ este *asimptotă oblică* a funcției $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ spre ∞ dacă și numai dacă

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0.$$

În mod similar dacă domeniul de definiție conține un interval de forma $(-\infty, a)$, atunci dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $-\infty$, dacă

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0.$$

Pentru a obține o regulă de calcul scriem (1) sub forma $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - m \right] = 0$, de

unde rezultă că $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ și $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$.

Astfel avem următoarea regulă de calcul pentru asimptotele oblice:

a) Calculăm $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Dacă m este finit, atunci calculăm $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$.

c) Dacă și n este finit, atunci dreapta de ecuație $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

În mod identic obținem asimptota oblică spre $-\infty$. Dreapta $y = m'x + n'$ este asimptotă oblică a funcției f spre $-\infty$ dacă și numai dacă $m' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ și $n' = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - m'x]$.

Observații. 1. Dacă una din cele două limite nu există sau nu este finită, atunci funcția nu are asimptotă oblică în direcția respectivă.

2. Din definiție rezultă că o funcție nu poate avea atât asimptotă orizontală cât și asimptotă oblică spre $+\infty$ (respectiv $-\infty$)

Exemple. 1. Să se determine asimptotele funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$.



Rezolvare. În punctul $x = 0$ funcția are o asimptotă verticală deoarece $f(+0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ și $f(-0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$. Cum $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$ și $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - 1 \cdot x\right) = 0$, dreapta $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$. Spre $-\infty$ obținem în mod similar $m' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ și $n' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = 0$, deci $y = x$ este asimptotă oblică și spre $-\infty$.

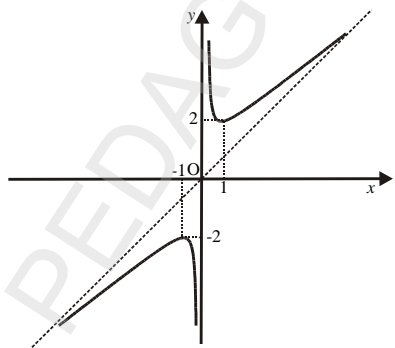


Figura 67

Studiind derivata $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ putem

întocmi următorul tabel de variație:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	++++	0	----	0	++++		
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	-2	\searrow	2	\nearrow	$+\infty$
		<i>Max</i>		<i>Min</i>			

$f'(x) = 0$, dacă $x_{1,2} = \pm 1$. $f''(x) = \frac{1}{x^3} > 0$, dacă $x > 0$. $f''(x) < 0$, dacă $x < 0$. Graficul funcției este reprezentat pe figura 67.

2. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nu are asimptote deoarece este continuă pe \mathbb{R} (deci nu are asimptote verticale) și $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$ iar $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ (deci f nu are nici asimptote oblice și nici orizontale).

3. Să se determine asimptotele funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Soluție. Spre $+\infty$ obținem $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$, și $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 1} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$, deci prima bisectoare este asimptotă spre ∞ . Pentru ramura spre $-\infty$ avem

$$m' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1,$$

$$n' = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0,$$

deci obținem asimptota $y = -x$.


Exerciții

1. Determinați asimptotele următoarelor funcții:

a) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$;

b) $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$;

c) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$;

d) $f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}$;

e) $f(x) = \frac{1 - x^3}{x^2}$;

f) $f(x) = e^x$;

g) $f(x) = \ln(1 - x^2)$;

h) $f(x) = xe^x$;

i) $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$;

j) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} + x$;

k) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$;

l) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;

m) $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$;

n) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x - 3}$;

o) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$;

p) $f: (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;

q) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}$.


Reprezentare grafică

Dacă $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) este o funcție, atunci mulțimea $G = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$

se numește **graficul funcției**. Reprezentarea grafică a unei funcții înseamnă reprezentarea acestei mulțimi în sistemul cartezian de coordonate.

Pentru a obține reprezentarea grafica, vom parcurge următorii pași:

I. determinăm domeniul maxim de definiție (dacă nu este precizat);

II. determinăm intersecțiile cu axele de coordonate;

III. determinăm asimptotele;

IV. studiem continuitatea funcției, iar în punctele de continuitate studiem derivabilitatea

V. folosind f' determinăm intervalele de monotonie și punctele de extrem;

VI. folosind f'' determinăm intervalele de convexitate și punctele de inflexiune;

VII. întocmim tabelul de variație a funcției;

VIII. trasăm graficul funcției.

Nu este absolut necesar respectarea ordinii acestor etape, și uneori este avantajos dacă putem identifica proprietăți specifice cu ajutorul cărora putem reduce intervalul de studiat, de exemplu paritatea, sau periodicitatea. La studiul continuității și a derivabilității este necesar calcularea limitelor respectiv a derivatelor laterale chiar dacă funcția nu este continuă sau derivabilă. Punctele de discontinuitate ale derivatei pot fi clasificate după cum urmează:

DEF 1. Puncte unghiulare. Punctul $x_0 \in (a, b)$ se numește **punct unghiular** al funcției continue $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dacă în x_0 tangenta spre dreapta și tangenta spre stânga

formează un unghi diferit de 0. Acesta înseamnă că cele două derivate laterale există dar nu sunt egale și cel puțin una din cele două limite laterale este finită. (fig. 68 și 69).

Figura 68

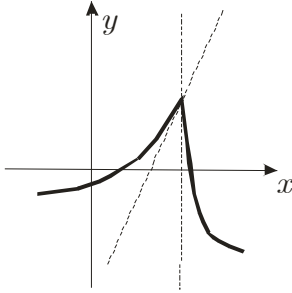
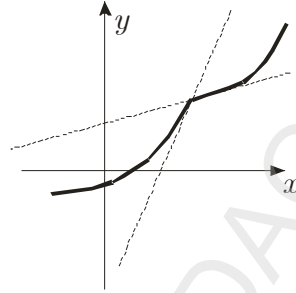


Figura 69



2. Punct de întoarcere. Punctul $x_0 \in (a, b)$ se numește *punct de întoarcere* a funcției continue $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dacă cele două derivate laterale există și una este egală cu $+\infty$, iar cealaltă cu $-\infty$. În acest caz cele două tangente formează un unghi de 0° .

DEF

Figura 70

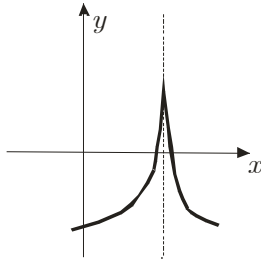
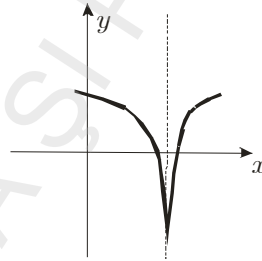


Figura 71



În figura 70 $f'_s(x_0) = +\infty$ și $f'_d(x_0) = -\infty$ (funcția este crescătoare și convexă pe un interval $(x_0 - \varepsilon, x_0)$, descrescătoare și convexă pe un interval $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, iar în figura 71 $f'_s(x_0) = -\infty$ și $f'_d(x_0) = +\infty$ (funcția este descrescătoare și concavă pe un interval $(x_0 - \varepsilon, x_0)$, crescătoare și concavă pe un interval $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, unde $\varepsilon > 0$ suficient de mic.

Observație. Punctul $x_0 \in (a, b)$ este punct de inflexiune a funcției $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, dacă cele două derivate laterale există în acest punct și ambele sunt egale cu $+\infty$ sau cu $-\infty$. În acest punct nu există a doua derivată, deci nu este necesară condiția anulării derivatei a doua într-un punct pentru a fi punct de inflexiune.



Figura 72

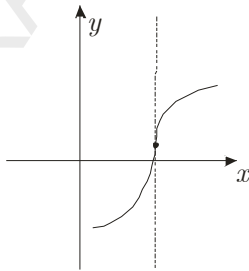
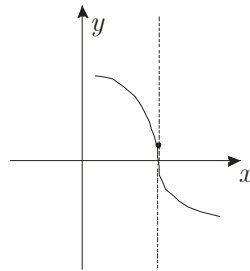


Figura 73



În figura 72 $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = +\infty$ și funcția este crescătoare pe un interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, convexă pe $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ și concavă pe $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, iar în fig 73 $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = -\infty$ și funcția este descrescătoare pe un interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, concavă pe $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ și convexă pe $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ pentru un $\varepsilon > 0$ suficient de mic.

Exemple

1. Să se reprezinte grafic funcția $f(x) = x^3$.

I. $D = \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

II. Graficul intersectează axele de coordonate în punctul $(0, 0)$.

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, deci funcția este impară (graficul este simetric față de origine)

III., IV. Funcția nu are asimptotă verticală, deoarece f este continuă pe \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

deci f nu admite nici asimptotă orizontală. Din egalitățile

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

deducem că f nu are nici o asimptotă.

V. $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, și egalitatea este verificată numai pentru $x = 0$.

Astfel funcția f este crescătoare pe \mathbb{R} .

VI. $f''(x) = 6x$, deci funcția este concavă pe $(-\infty, 0)$ și convexă pe $(0, \infty)$, iar punctul $x = 0$

este un punct de inflexiune.

VII. Conform considerațiilor de mai înainte tabelul de variație este

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	++++	0	++++
$f''(x)$	----	0	++++
$f(x)$		0	
	concav		convex

Pe baza tabelului obținem figura 74.

2. Să se reprezinte graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$.

Rezolvare. Graficul nu taie axa Ox , deoarece funcția exponențială ia numai valori strict pozitive. Din egalitatea $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = 0$ rezultă că axa Ox este asimptotă orizontală în ambele direcții. Graficul funcției intersectează axa Oy în punctul $(0,1)$ și $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, deci punctul $x = 0$ este singurul punct staționar. În acest punct

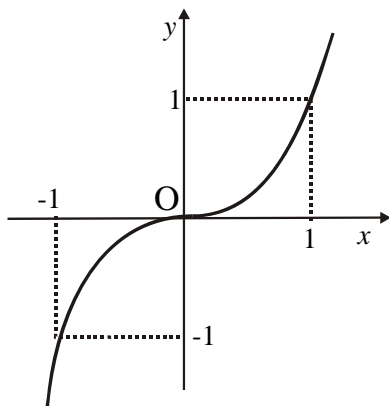


Figura 74

f' își schimbă semnul, deci este și un punct de extrem local. $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$ de unde rezultă că punctele de inflexiune sunt $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (în aceste puncte se schimbă semnul derivatei a doua). Pe baza acestor calcule putem întocmi următorul tabel de variație:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		++++	0	-----	
$f''(x)$	++++	0	-----	0	++++
$f(x)$	\nearrow	$e^{-\frac{1}{2}}$	1	$e^{-\frac{1}{2}}$	\searrow

Funcția este convexă pe intervalele $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ și $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ iar concavă pe $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Funcția este pară, deoarece $f(-x) = f(x)$, deci graficul funcției este simetric față de axa Oy . Graficul funcției (vezi figura 75) se numește curba lui Gauss și are foarte multe aplicații în statistică.

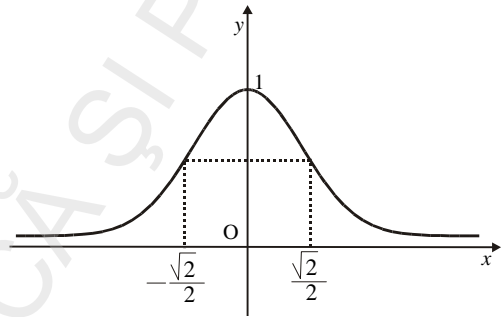


Figura 75

3. Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \sin x - \sin 2x$.

Rezolvare. Pe baza egalității $f(\pi - x) = -f(\pi + x)$ graficul funcției este simetric față de punctul $(\pi, 0)$. Pe de altă parte perioada principală a funcției este $T = 2\pi$, deci este suficient să reprezentăm graficul funcției pe intervalul $[0, 2\pi]$. Datorită simetriei este de ajuns și intervalul $[0, \pi]$. Graficul intersectează axele în punctele $(0, 0)$ și $(\pi, 0)$.

$$f(x) = 2 \sin x - 2 \sin x \cos x = 2 \sin x(1 - \cos x), \text{ deci}$$

$$f'(x) = 2(1 - \cos x)(2 \cos x + 1).$$

De aici rezultă că în intervalul considerat numai $x = 0$ și $x = \frac{2\pi}{3}$ sunt puncte staționare.

$$f''(x) = 2 \sin x(4 \cos x - 1) = 0,$$

deci $x = 0$, $x = \pi$, și $x = \arccos \frac{1}{4}$ sunt punctele de inflexiune în $[0, \pi]$. Conform acestor calcule obținem următorul tabel de variație:

x	0	$\arccos(1/4)$	$2\pi/3$	π
$f'(x)$	0	++++	0	-----
$f''(x)$	0	++++	0	-----
$f(x)$	0	\nearrow	Max	\searrow
		convexă		concavă

În figura 76 avem reprezentarea grafică a funcției.

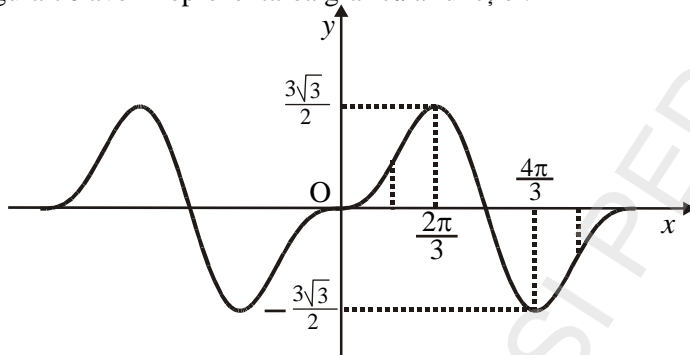


Figura 76

4. Să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Rezolvare. Graficul intersectează axele numai în origine. Din relațiile

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = 0$ rezultă că axa Ox este asimptotă

orizontală în ambele direcții. Funcția este impară, deci graficul este simetric în raport

cu originea. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$ (deci și $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$), adică dreptele $x = 1$ și $x = -1$ sunt asimptote verticale.

Derivata este negativă $f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0$, deci funcția este descrescătoare pe

toate intervalele domeniului de definiție. $f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$, și astfel obținem

următorul tabel de variație:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$	-----		-----		-----				
$f''(x)$	-----		++++	0	-----		++++	0	
$f(x)$	0	\searrow	$-\infty +\infty$	\searrow	0	\searrow	$-\infty +\infty$	\searrow	0
		concavă		convexă		concavă		convexă	

Reprezentarea grafică este dată în figura 77.

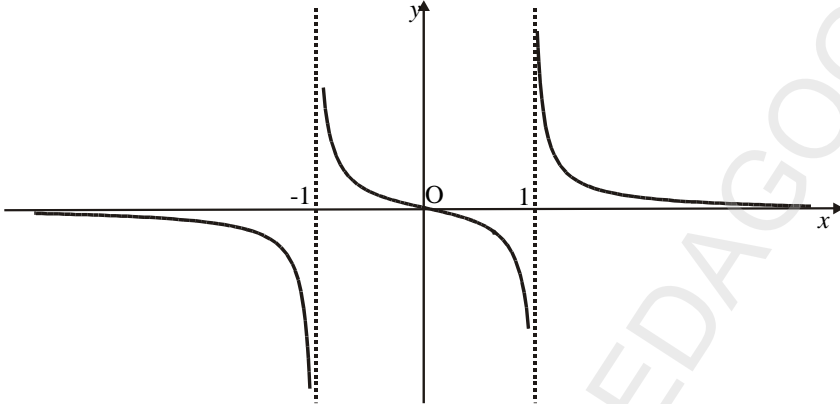


Figura 77

5. Să se reprezinte funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = a^x, a \neq 1, a > 0$.

I. $D = \mathbb{R}$.

II. $f(0) = 1$, deci graficul intersectează axa Oy în punctul $(0, 1)$. Din inegalitatea $f(x) = a^x > 0$ rezultă că graficul funcției nu intersectează axa Ox .

III. $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 0, & 0 < a < 1 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ \infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$. Deci axa Ox este

asimptotă orizontală spre $-\infty$ în cazul $a > 1$ și spre $+\infty$ dacă $0 < a < 1$.

IV. Funcția este continuă și derivabilă pe \mathbb{R} .

V. $f'(x) = a^x \ln a > 0$, dacă $a > 1$, și $f'(x) < 0$, dacă $0 < a < 1$, deci funcția este strict crescătoare pentru $a > 1$, strict descrescătoare pentru $0 < a < 1$ și nu are nici un punct de extrem.

VI. $f''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci funcția este convexă.

VII. Tabelul de variație pentru $a > 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	++++	++++	++++	++++	++++
$f''(x)$	++++	++++	++++	++++	++++
$f(x)$	0	↗	1	↗	$+\infty$
			convexă		

Tabelul de variație pentru $0 < a < 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	-----	-----	-----	-----	-----
$f''(x)$	++++	++++	++++	++++	++++
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	0
			convexă		

Reprezentarea grafică este dată în figura 78.

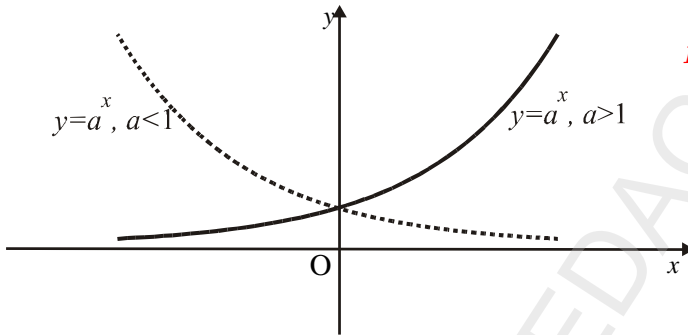


Figura 78

6. În exemplul precedent am construit graficul funcției exponențiale. Această funcție este injectivă (se vede atât din tabelul de variație, cât și din grafic), $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, deci funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ este și surjectivă. Astfel există inversa funcției exponențiale și graficul funcției inverse este simetricul graficului în raport cu prima bisectoare. Conform teoremelor generale referitoare la continuitatea și derivabilitatea funcției inverse, funcția $f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ este continuă și derivabilă. Graficul acestei funcții este reprezentat în figura 79, iar comportarea funcției se poate citi din următorul tabel de variație.

Cazul $0 < a < 1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$ <td> - - - -</td> <td>- - - -</td> <td></td>	- - - -	- - - -	
$f''(x)$ <td> + + + +</td> <td>+ + + +</td> <td></td>	+ + + +	+ + + +	
$f(x)$ <td> $-\infty$</td> <td>\searrow 0 \searrow</td> <td>$+\infty$</td>	$-\infty$	\searrow 0 \searrow	$+\infty$

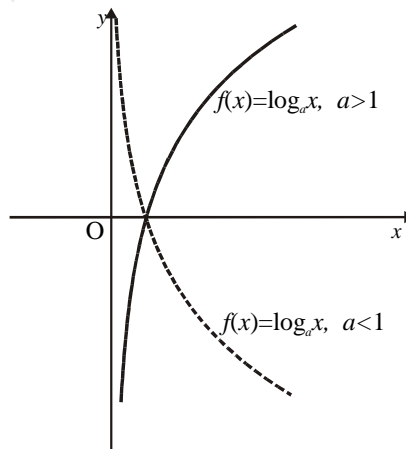
convexă

Cazul $a > 1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$ <td> + + + +</td> <td>+ + + +</td> <td></td>	+ + + +	+ + + +	
$f''(x)$ <td> - - - -</td> <td>- - - -</td> <td></td>	- - - -	- - - -	
$f(x)$ <td> $+\infty$</td> <td>\nearrow 0 \nearrow</td> <td>$-\infty$</td>	$+\infty$	\nearrow 0 \nearrow	$-\infty$

concavă

Figura 79



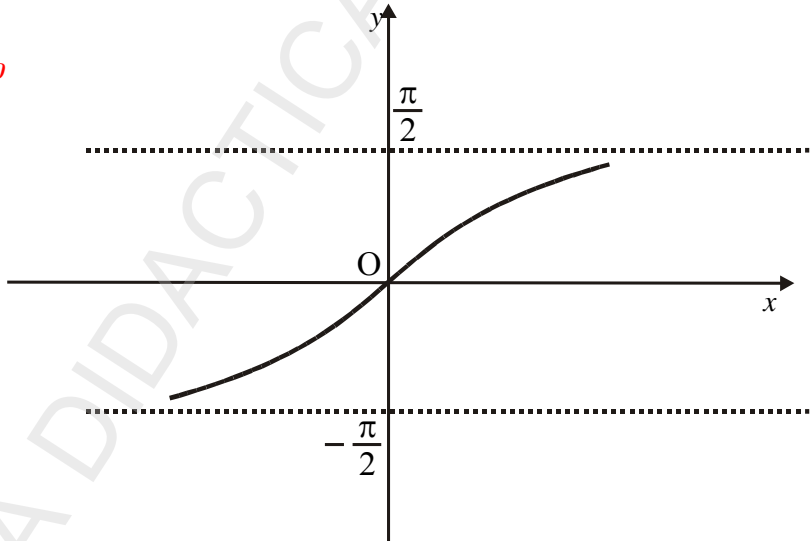
7. Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Rezolvare. $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$,
 $f(0) = 0$. $y = -\frac{\pi}{2}$ și $y = \frac{\pi}{2}$ sunt asimptote orizontale, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ pentru
 orice $x \in \mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare. $f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, deci $x = 0$ este
 singurul punct de inflexiune (deoarece $f''(x) > 0$, dacă $x < 0$ și $f''(x) < 0$, dacă
 $x > 0$). Putem întocmi următorul tabel de variație:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	++++				
$f''(x)$	++++		0	-----	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	\nearrow	0	\nearrow	$\frac{\pi}{2}$
	convexă			concavă	

Pe baza tabelului trasăm graficul funcției:

Figura 80



8. Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$ (sinus hiperbolic).

Rezolvare. Funcția este definită pe \mathbb{R} și este continuă. Graficul intersectează axele de coordonate în $(0, 0)$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ și

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, deci funcția nu admite nici o asimptotă. $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$,

deci f este strict crescătoare. $f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = f(x) < 0$, pentru $x < 0$ și

$f''(x) > 0$, dacă $x > 0$, deci obținem următorul tabel de variație:

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
$f'(x)$	+++++			
$f''(x)$	-----	0	+++++	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	
	↗ concavă		↖ convexă	

Reprezentarea grafică este dată în figura 81:

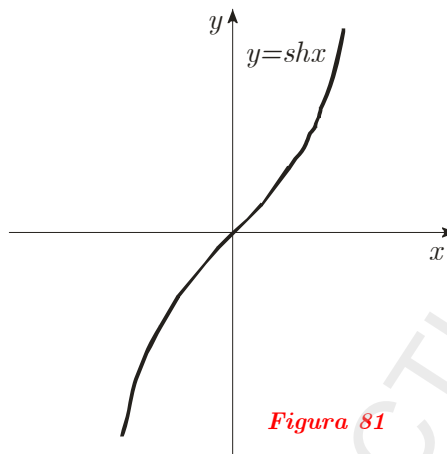


Figura 81

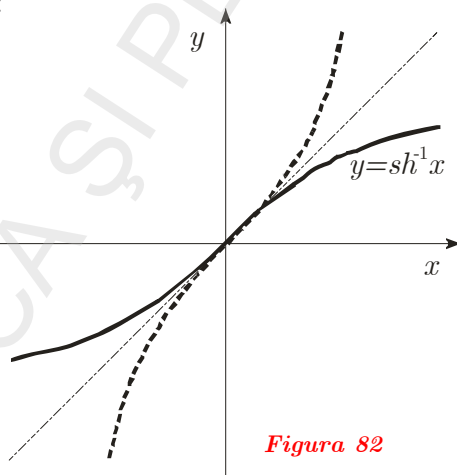


Figura 82

Observație. Deoarece $f'(0) = 1$, tangenta în origine este exact prima bisectoare. Este indicat câteodată și la reprezentarea grafică a altor funcții calculul derivatei în anumite puncte.

9. Funcția $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este bijectivă, deci admite inversa $\text{sh}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Calculați expresia funcției inverse și reprezentați grafic această funcție.

Rezolvare. Rezolvăm ecuația $\text{sh } t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = x$. Cu notația $e^t = u$ obținem

ecuația $u - \frac{1}{u} = 2x$, deci $u = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. Din relația $u = e^t$ rezultă că u este pozitivă, deci $e^t = x + \sqrt{x^2 + 1}$, și astfel $t = \text{sh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$. De aici funcția inversă este

$$\text{sh}^{-1} x = f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Reprezentarea grafică se poate obține fie studiind direct funcția f^{-1} , fie prin construirea simetricului graficului funcției f față de prima bisectoare. Tabelul de variație este următorul:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	+++++				
$f''(x)$	+++++		0	-----	
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	$+\infty$
		convexă		concavă	

Reprezentarea grafică a funcției inverse este dată în figura 82.

10. Reprezentați funcția $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ pe domeniul maxim de definiție.

Rezolvare. I. Din condiția de existență a radicalului avem $x^2 - 1 \geq 0$, deci

$$D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

II. Graficul funcției nu intersectează axele de coordonate, funcția nu este nici pară, nici impară, nici periodică.

III, IV. Funcția nu are asimptotă verticală deoarece este continuă pe D .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \frac{-1}{+\infty} = 0,$$

deci $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) = 2,$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{-1}{+\infty} = 0,$$

deci dreapta $y = 2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

V. $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, dacă $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ și funcția nu este

derivabilă în punctele $x = \pm 1$.

$$f'_b(-1) = f'(-1 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f'(x) = -\infty; f'_j(1) = f'(1 + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x) = +\infty,$$

deci în punctele $x = \pm 1$ derivata la stânga respectiv la dreapta este infinită (tangenta este paralelă cu axa Oy).

$f'(x) < 0$, dacă $x < -1$ și $f'(x) > 0$, dacă $x > 1$, deci funcția este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, -1)$ și este crescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$.

VI. $f''(x) = -\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} < 0, x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),$

adică f este concavă pe domeniul maxim de definiție.

VII. Obținem următorul tabel de variație:

x	$-\infty$	-1	////////////////////	1		$+\infty$	
$f'(x)$	-----	$-\infty$	////////////////////	$+\infty$	+++++	+++++	
$f''(x)$	-----		////////////////////		-----	-----	
$f(x)$	0	\searrow	-1	////////////////////	1	\nearrow	$+\infty$
		concavă				concavă	

Reprezentarea grafică este dată în figura 83.

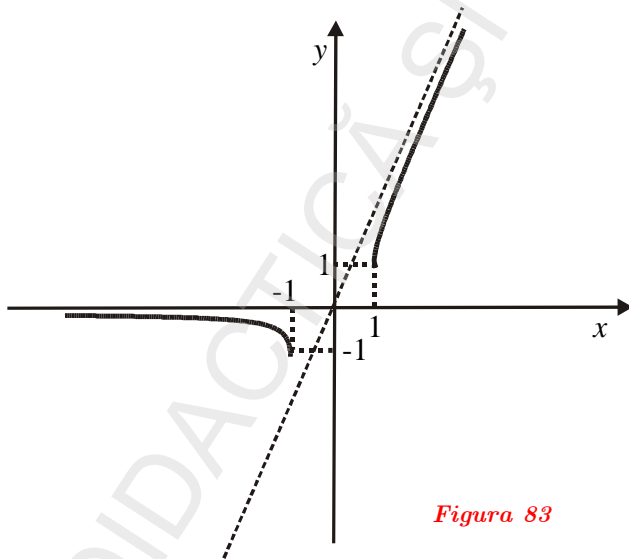


Figura 83

11. Să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$.

Rezolvare. Graficul funcției intersectează axele în punctele de coordonate $(0,0)$ și $(1,0)$. Funcția este continuă pe \mathbb{R} , deci nu are asimptote verticale. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ și

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, deci nu are nici asimptote orizontale.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3 - x^2}{x^3}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x) = -\frac{1}{3},$$

deci $y = x - \frac{1}{3}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ și spre $+\infty$.

Funcția este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ și $f'(x) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. $f'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \left(\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2} \right) = +\infty$, $f'_d(0) = -\infty$, deci

punctul $(0,0)$ este punct de întoarcere. $f'_s(1) = f'_d(1) = +\infty$, deci punctul $(1,0)$ este punct de inflexiune. Derivata se anulează în punctul $\left(\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$. Funcția derivată este

continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, deci nu își schimbă semnul pe intervalele $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{2}{3}\right)$,

$\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ și $(1, \infty)$. Astfel $f'(x) > 0$, dacă $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) \setminus \{1\}$, iar

$f'(x) < 0$, dacă $x \in (1, +\infty)$; punctul $\left(\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ este punct de minim local. Datorită

expresiei complicate a derivatei a doua, întocmim tabelul de variație cu aceste date, din care se poate intui și convexitatea respectiv concavitata funcției. Funcția este reprezentată în figura 84.

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	++++		$+\infty$	-----		0	++++		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗ ↗ ↗ ↗		0	↘ ↘ ↘ ↘		$-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	↗ ↗ ↗ ↗	

Funcția este reprezentată în figura 84.

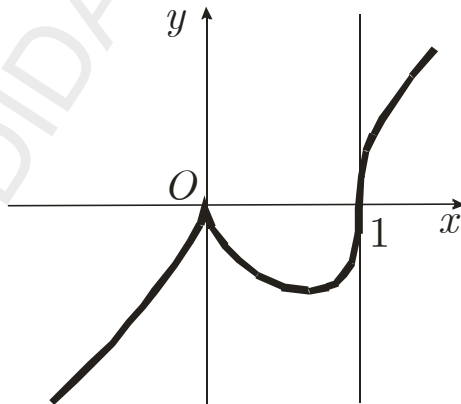


Figura 84



STUDIUL ECUAȚILOR

1. Separarea soluțiilor prin metoda grafică

Dacă soluțiile ecuației $f(x) = 0$ nu se pot calcula exact, atunci în multe cazuri este foarte util să determinăm pentru fiecare soluție x_0 un interval I_0 astfel încât $x_0 \in I_0$ și intervalele determinate pentru soluții distincte să fie disjuncte. Cu cât lungimea intervalului I_0 este mai mică cu atât localizarea soluției este mai precisă. Procedeu prin care se obțin aceste intervale se numește separarea zerourilor funcției f .

Dacă funcția f este continuă și derivabilă, atunci din tabelul de variație și eventual dintr-un grafic aproximativ putem identifica intervalele care conțin zerourile și prin încercări succesive putem eventual reduce lungimile acestor intervale. Acest procedeu deseori conține și pași intuitivi, deci ilustrăm procedeu numai prin exemple.

Exemple

1. Să se separe soluțiile ecuației $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$.

I. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ deci soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sunt $x_1 = -1$ și $x_2 = 3$. Folosind numai prima derivată obținem următorul tabel de variație:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	15	\searrow	-17	\nearrow	$+\infty$

Din acest tabel rezultă că funcția este strict crescătoare pe intervalul $I_1 = (-\infty, -1)$, deci poate avea un singur zero în acest interval. Pe de altă parte $f(-1) > 0$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, deci are un singur zero în acest interval. Pe intervalul $I_2 = (-1, 3)$ funcția este strict descrescătoare și $f(-1) = 15 > 0$ respectiv $f(3) = -17 < 0$, deci există un zero unic $x_2 \in (-1, 3) = I_2$. Pe intervalul $I_3 = (3, \infty)$ funcția este strict crescătoare și $f(3) = -17 < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, deci

și în I_3 există un singur zero. Astfel ecuația are trei soluții reale și acestea se află în intervalele $x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 \in (-1, 3)$, $x_3 \in (3, +\infty)$. Pentru o localizare mai precisă vom reduce lungimile intervalelor. Acesta se poate face prin încercări repetate căutând în fiecare interval câte un subinterval pe care funcția f își schimbă semnul. $x_1 \in (-3, -2)$, deoarece

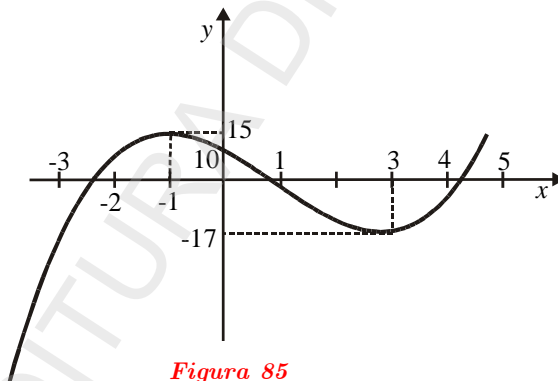


Figura 85

$f(-2) = 8 > 0$, $f(-3) = -17 < 0$. $x_2 \in (0,1)$, deoarece $f(0) = 10 > 0$, $f(1) = -1 < 0$ și $x_3 \in (4,5)$, deoarece $f(4) = -10 < 0$, $f(5) = 15 > 0$.

Graficul (aproximativ) este reprezentat în figura 85.

2. Să se determine numărul soluțiilor ecuației $\sin x = \frac{x}{2}$.

Rezolvare. Reprezentăm grafic funcțiile f și g corespunzătoare celor doi membri ai ecuației și determinăm numărul punctelor de intersecție. Conform graficelor celor două funcții dreapta $g(x) = \frac{x}{2}$ intersectează graficul funcției $f(x) = \sin x$ în trei puncte: $x_1 \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, $x_2 = 0$ și $x_3 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

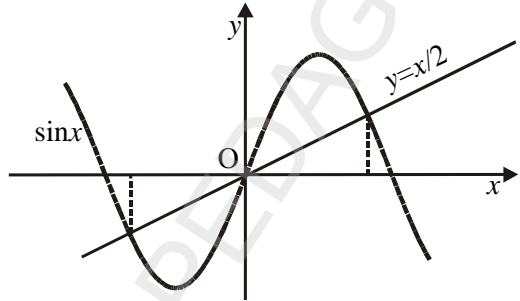


Figura 86

3. (Discuția în raport cu un parametru)

Să se discute numărul și poziția soluțiilor ecuației $P(x) = 0$ în funcție de parametrul real a , dacă $P(x) = x^3 - ax^2 + a$.

Rezolvare. Exprimăm parametrul a din ecuația dată: $a = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. Deoarece $P(1) = 1 \neq 0$ și $P(-1) = -1 \neq 0$ numerele $x = 1$ și $x = -1$ nu sunt soluții pentru nici o valoare a . În continuare studiem funcțiile $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ și $g(x) = a$:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{-2}$	$\searrow -\infty^{+\infty}$	0	$\searrow -\infty^{+\infty}$	$\searrow \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow +\infty$

Dreptele $x = \pm 1$ sunt asimptote verticale, $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $n = 0$, deci prima bisectoare este asimptotă oblică spre $+\infty$. Analog $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $n = 0$, deci dreapta $y = x$ este asimptotă oblică și spre $-\infty$. Din semnul derivatei deducem că $M\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ este singurul punct de maxim și $N\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ este singurul punct de minim, iar graficul este reprezentat în figura 87.

De pe acest grafic se poate citi numărul punctelor de intersecție al graficului cu graficul funcției $g(x) = a$ pentru diferitele valori ale parametrului a . Obținem următorul tabel:

Valorile lui a	Numărul și poziția soluțiilor
$a < -\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$x_1 \in (-\infty, -\sqrt{3})$ $x_2 \in (-\sqrt{3}, -1)$, , $x_3 \in (0, 1)$
$a = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$x_1 = x_2 = -\sqrt{3}$ $x_3 \in (0, 1)$
$-\frac{3\sqrt{3}}{2} < a < 0$	$x_1 \in (0, 1)$
$a = 0$	$x_1 = x_2 = x_3 = 0$
$0 < a < \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$x_1 \in (-1, 0)$
$a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$x_1 = x_2 = \sqrt{3}$ $x_3 \in (-1, 0)$
$a > \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$x_1 \in (-1, 0)$ $x_2 \in (1, \sqrt{3})$ $x_3 \in (\sqrt{3}, \infty)$

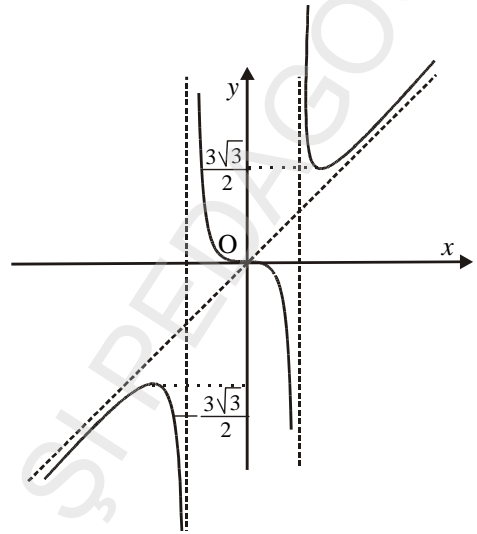


Figura 87



2. Separarea soluțiilor folosind teorema lui Rolle (Șirul lui Rolle)

Conform teoremei lui Rolle între două soluții ale ecuației $f(x) = 0$ există cel puțin o soluție a ecuației $f'(x) = 0$, dacă f satisface condițiile teoremei lui Rolle. Pe de altă parte dacă f este o funcție derivabilă și α respectiv β sunt două soluții consecutive ale ecuației $f'(x) = 0$, atunci între α și β ecuația $f(x) = 0$ nu poate avea mai mult de o soluție. Într-adevăr dacă ecuația $f(x) = 0$ ar avea soluțiile $x_1 < x_2$ între α și β , atunci aplicând teorema lui Rolle pe intervalul $[x_1, x_2]$ ar exista $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f'(c) = 0$ și $\alpha < c < \beta$. Acesta ar contrazice faptul că α și β sunt două soluții consecutive. Bineînțeles este posibil ca între două zerouri ale derivatei să nu existe nici un zero al funcției f . Acest caz însă se poate depista foarte ușor calculând valorile funcției în punctele α și β . Dacă $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are exact o soluție în intervalul (α, β) , în caz contrar ecuația $f(x) = 0$ nu are nici o soluție în acest interval. În consecință dacă soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sunt $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$, atunci numărul schimbărilor de semn în

tabelul alăturat este chiar numărul soluțiilor din interval $[a, b]$.

x	a	x_1	x_2	...	x_n	b
$f(x)$	$\lim_{x \searrow a} f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$...	$f(x_n)$	$\lim_{x \nearrow b} f(x)$

Șirul din al doilea rând se numește *șirul lui Rolle* atașat funcției f pe intervalul $[a, b]$ și se poate folosi pentru separarea soluțiilor ecuației $f(x) = 0$.

Exemple

1. Să se separe soluțiile ecuației $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10 = 0$.

Rezolvare. $f'(x) = 12x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 0, x = 2$. Astfel obținem următorul tabel:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+5$	$+10$	-22	$+\infty$

Pe intervalul $(-\infty, -1)$ funcția f nu are zerouri (derivata nu are zero, deci fiind continuă nu își schimbă semnul, adică f este monotonă; în capetele intervalului ia numai valori pozitive, deci ia valori pozitive în întregul interval). În capetele intervalului $(-1, 0)$ funcția are același semn și derivata nu are zerouri în acest interval, deci nici funcția nu poate avea zerouri. În intervalul $(0, 2)$ funcția are o singură zero $x_1 \in (0, 2)$, la fel și în intervalul $(2, +\infty)$, $x_2 \in (2, +\infty)$. Astfel ecuația are două soluții reale. Pentru a restrânge intervalele putem calcula valoarea funcției și în alte puncte. Din $f(1) = -3 < 0, f(3) = 37 > 0$, rezultă că $x_1 \in (1, 2)$ și $x_2 \in (2, 3)$.

2. (Discuția în raport cu un parametru)

Să se discute în raport cu parametrul a numărul și poziția soluțiilor reale ale ecuației:

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0.$$

Rezolvare. Soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sunt $x = -1, x = 0$ și $x = 2$, deci obținem următorul șir al lui Rolle:

$(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty)$:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$a - 5$	a	$a - 32$	$+\infty$

Pentru a calcula numărul schimbărilor de semn avem nevoie de semnul expresiilor din acest tabel. Astfel obținem următoarele tabele:

a	$-\infty$	5	$+\infty$	și	a	$-\infty$	32	$+\infty$
$a - 5$	$-$	0	$+$		$a - 32$	$-$	0	$+$

Conform acestor tabele valorile critice sunt $a_1 = 0, a_2 = 5, a_3 = 32$, deci obținem cazurile $a < 0, a = 0, 0 < a < 5, a = 5, 5 < a < 32, a = 32, a > 32$.

Efectuând calculele în fiecare din aceste cazuri putem întocmi următorul tabel:



$\downarrow a$	x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	Concluziile
	$f(x)$	$+\infty$	$a-5$	a	$a-32$	$+\infty$	
$a < 0$		+	-	-	-	+	$x_1 \in (-\infty, -1), x_2 \in (2, \infty)$
$a = 0$		+	-	0	-	+	$x_1 \in (-\infty, -1), x_2 = x_3 = 0, x_4 \in (2, \infty)$
$0 < a < 5$		+	-	+	-	+	$x_1 \in (-\infty, -1), x_2 \in (-1, 0), x_3 \in (0, 2), x_4 \in (2, \infty)$
$a = 5$		+	0	+	-	+	$x_1 = x_2 = -1, x_3 \in (0, 2), x_4 \in (2, \infty)$
$5 < a < 32$		+	+	+	-	+	$x_1 \in (0, 2), x_2 \in (2, \infty)$
$a = 32$		+	+	+	0	+	$x_1 = x_2 = 2$
$a > 32$		+	+	+	+	+	nu are soluții reale



Exerciții

1. Separați soluțiile reale ale ecuației $x^3 - 3x^2 - 9x + 8 = 0$.

2. Separați soluțiile reale ale următoarelor ecuații:

a) $x^3 - 4x^2 + 7x - 12 = 0$;

b) $x^5 - 5x^3 - 50x + 10 = 0$;

c) $\sqrt{x^2 - 2x} = 9 - x^2$;

d) $|x^4 - 1| = x + 2$.

3. Discutați în funcție de valoarea parametrului m soluțiile ecuației:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0.$$

4. Folosind metoda grafică separați soluțiile următoarelor ecuații:

a) $2^x = 3x^2$;

b) $e^x = \cos x$;

c) $\sin x = x^2$;

d) $\lg x + x = 0$;

e) $\lg x = \sin x$;

f) $\operatorname{tg} x + x - 1 = 0$.

5. Discutați soluțiile următoarelor ecuații în raport cu parametrul real $a \in \mathbb{R}$:

a) $x^3 - ax + 1 = 0$;

b) $ax^3 - x - a = 0$;

c) $e^x = x + a$;

d) $\ln x = x + a$;

e) $\sin x + \cos x = a$;

f) $x - \sqrt{x} + a = 0$;

g) $x^4 - 2x^2 + a = 0$;

h) $\operatorname{arctg} x = ax$.



Aplicații ale studiului funcțiilor

1. Să se calculeze suma $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}$.

Rezolvare. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n, \text{ adică } f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

două moduri:
$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$$

$$f'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Cele două moduri de calcul ne conduc la același rezultat, deci

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Înlocuind în această identitate $x = \frac{1}{2}$ și înmulțind cu $\frac{1}{2}$ obținem

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} \frac{n \frac{1}{2^{n+1}} - (n+1) \frac{1}{2^n} + 1}{\frac{1}{4}} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}.$$

2. Să se rezolve ecuația $3^x + 15^x = 7^x + 11^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluție. Scriem ecuația sub forma

$$15^x - 11^x = 7^x - 3^x$$

și considerăm funcția $f(y) = y^x$, unde x este fixat. Aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalele $[3, 7]$ și $[11, 15]$:

$$f(15) - f(11) = 4 \cdot f'(c_1) = 4 \cdot x \cdot c_1^{x-1}, \text{ cu } c_1 \in (3, 7)$$

$$f(7) - f(3) = 4 \cdot f'(c_2) = 4 \cdot x \cdot c_2^{x-1}, \text{ cu } c_2 \in (11, 15).$$

Astfel din ecuația dată obținem $x(c_2^{x-1} - c_1^{x-1}) = 0$. $x = 0$ este o soluție a ecuației inițiale, deci pentru a determina celelalte soluții putem presupune că $x \neq 0$. În acest caz $c_1^{x-1} = c_2^{x-1}$, și din condițiile $c_1 \in (3, 7)$ respectiv $c_2 \in (11, 15)$ deducem $x - 1 = 0$. În consecință ecuația dată are numai soluțiile $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$.

3. Funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă și satisface inegalitatea

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) \leq 0, \forall x \in [0, 1].$$

Demonstrați că dacă $f(0) = f(1) = 0$, atunci $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

(Concursul Székely Mikó, 2002)

Rezolvare. Înmulțim inegalitatea dată cu e^x și obținem $(f(x) \cdot e^x)'' \leq 0$,

$\forall x \in [0, 1]$, deci funcția $g(x) = f(x) \cdot e^x$ este concavă pe intervalul $[0, 1]$. Din

definiția concavității rezultă că arcul de grafic determinat de punctele de abscisă $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$ este deasupra coardei determinate de aceleași puncte, deci funcția g este nenegativă pe intervalul $[0, 1]$. De aici rezultă că nici funcția f nu ia valori negative.

4. Să se demonstreze că dacă $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, atunci

$$a) (x + y + z)^{x+y+z} \cdot x^x y^y z^z \leq (x + y)^{x+y} (y + z)^{y+z} (z + x)^{z+x};$$

$$b) (x + y + z)^{(x+y+z)^2} \cdot x^{x^2} y^{y^2} z^{z^2} \geq (x + y)^{(x+y)^2} (y + z)^{(y+z)^2} (z + x)^{(z+x)^2}.$$

(András Szilárd, American Mathematical Monthly, 106(1999), problema 10766)

Soluție. Considerăm funcția

$g(x) = (x + y + z)^p + x^p + y^p + z^p - (x + y)^p - (y + z)^p - (z + x)^p$, unde y și z sunt parametri nenegativi. Avem $g(0) = 0$ și

$$g'(x) = p[(x + y + z)^{p-1} + x^{p-1} - (x + y)^{p-1} - (z + x)^{p-1}].$$

Dacă $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(y) = p[(x + y + z)^{p-1} + x^{p-1} - (x + y)^{p-1} - (z + x)^{p-1}]$,

atunci $h(0) = 0$ și $h'(y) = p(p-1)[(x + y + z)^{p-2} - (z + x)^{p-2}]$. Dacă $p \geq 2$, atunci

$h'(y) \geq 0$, deci pe baza relației $h(0) = 0$, rezultă $h(y) \geq 0$, $\forall y \geq 0$. Pe de altă parte

această inegalitate implică $g'(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$ și astfel din relația $g(0) = 0$ deducem

$g(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$. În mod analog obținem $g(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$ și în cazul $p \in [0, 1]$

și $g(x) \leq 0$, $\forall x \geq 0$ pentru $p \in [1, 2]$. De aici rezultă că funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(p) = (x + y + z)^p + x^p + y^p + z^p - (x + y)^p - (y + z)^p - (z + x)^p$ (unde x, y, z sunt parametri nenegativi) are următorul tabel de variație:

p	$[0, 1]$	$[1, 2]$	$[2, \infty)$
$f(p)$	+	-	+

Datorită acestui tabel de variație și relațiilor $f(1) = 0$, $f(2) = 0$ este necesar să avem

$f'(1) \leq 0$ și $f'(2) \geq 0$. Pe de altă parte

$$f'(p) = (x + y + z)^p \ln(x + y + z) + x^p \ln x + y^p \ln y + z^p \ln z - (x + y)^p \ln(x + y) - (y + z)^p \ln(y + z) - (z + x)^p \ln(z + x),$$

deci inegalitățile $f'(1) \leq 0$ și $f'(2) \geq 0$ sunt echivalente cu următoarele

$$(x + y + z) \ln(x + y + z) + x \ln x + y \ln y + z \ln z \leq (x + y) \ln(x + y) + (y + z) \ln(y + z) + (z + x) \ln(z + x),$$

respectiv

$$(x + y + z)^2 \ln(x + y + z) + x^2 \ln x + y^2 \ln y + z^2 \ln z \geq (x + y)^2 \ln(x + y) + (y + z)^2 \ln(y + z) + (z + x)^2 \ln(z + x).$$

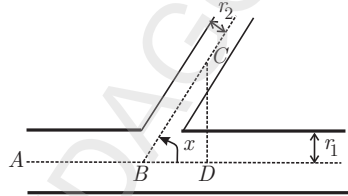
Aceste inegalități sunt echivalente cu cele propuse.

5. O pată de ulei curge pe un râu (presupunem că suprafața apei este netedă). La un moment dat ea intersectează umbra unui fir de telegraf. Să se demonstreze că există un moment în care umbra firului împarte pata de ulei în două porțiuni de aceeași arie.

Soluție. Considerăm momentul $t_0 = 0$ ca fiind momentul în care pata intersectează umbra firului, t_1 momentul în care pata trece complet de umbră și notăm cu $S_1(t)$ aria porțiunii care a trecut de umbră și cu $S_2(t)$ aria porțiunii care încă nu a trecut de umbra firului la momentul t . Funcția $f(t) = S_1(t) - S_2(t)$ este continuă, $f(t_0) < 0$ și $f(t_2) > 0$ deci există un moment t în care $f(t) = 0$. În acest moment umbra firului împarte în două părți de arii egale pata de ulei.

6. Considerăm ramificația $ABCD$ formată de două vase de sânge. Să se determine unghiul x astfel ca lucrul mecanic efectuat de inimă pe porțiunea ABC să fie minimă.

Soluție. Considerăm circulația sanguină ca fiind curgerea stratificată a unui fluid incompresibil. Conform legii lui Poiseuille rezistența întâmpinată într-un tub (vasul de sânge) de rază r este $\frac{k}{r^4}$. Cu notațiile $CD = h$ și $AD = d$ (vezi figura



alăturată) obținem $AB = d - h \operatorname{ctg} x$ și $BC = \frac{h}{\sin x}$,

deci rezistența pe porțiunea ABC este

$$f(x) = k \left(\frac{d - h \operatorname{ctg} x}{r_1^4} + \frac{h}{r_2^4 \sin x} \right)$$

Figura 88

Din $f'(x) = \frac{kh}{\sin^2 x} \left(\frac{1}{r_1^4} - \frac{\cos x}{r_2^4} \right)$ rezultă că unghiul optimal este $x = \arccos \frac{r_1^4}{r_2^4}$

7. Viteza unei bărci cu motor este $v_0 = 20 \text{ km/h}$ în momentul în care i se oprește motorul. În 40 s viteza bărcii scade la $v_1 = 8 \text{ km/h}$. Să se calculeze viteza bărcii după 2 minute de la oprirea motorului, dacă forța de rezistență a apei este direct proporțională cu viteza bărcii (și viteza apei este 0).

Soluție. Dacă $v(t)$ este viteza apei la momentul t , atunci accelerația momentanee este $a(t) = v'(t)$, deci a doua lege fundamentală a dinamicii ($F = m \cdot a$) implică relația

$$-k \cdot v(t) = F(t) = m \cdot v'(t).$$

De aici rezultă $v'(t) + \frac{k}{m} v(t) = 0$, deci înmulțind cu $e^{\frac{k}{m}t}$ această ecuație, deducem

$\left(v(t) e^{\frac{k}{m}t} \right)' = 0$. Consecințele teoremei lui Lagrange implică $v(t) e^{\frac{k}{m}t} = c$, deci

$v(t) = c \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$. Dacă $t = 0$, atunci obținem $\frac{20}{3,6} \text{ m/s} = v_0 = v(0) = c$, deci

$v(t) = \frac{20}{3,6} \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$. Folosind a doua condiție putem elimina și valoarea $\frac{k}{m}$, deoarece

$\frac{8}{3,6} \text{ m/s} = v_1 = v(40) = \frac{20}{3,6} \cdot e^{-\frac{k}{m}40}$, adică $-\frac{k}{m} = \frac{1}{40} \ln \frac{2}{5}$. Astfel $v(t) = \frac{20}{3,6} e^{\frac{t}{40} \ln \frac{2}{5}}$

și de aici obținem

$$v(120) = \frac{20}{3,6} \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8 \cdot 20}{3,6 \cdot 125} = \frac{32}{3,6 \cdot 25} m/s = \frac{32}{25} km/h \simeq 1,28 km/h.$$

8. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 6} \cdot \log_3(6 - y) = x \\ \sqrt{y^2 - 2y + 6} \cdot \log_3(6 - z) = y \\ \sqrt{z^2 - 2z + 6} \cdot \log_3(6 - x) = z \end{cases}$$

Rezolvare. Considerăm funcțiile $f, g : (-\infty, 6) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x + 6}}$.

$g(x) = \log_3(6 - x)$. Funcțiile sunt continue și derivabile cu $f'(x) = \frac{6 - x}{\sqrt{x^2 - 2x + 6}(x^2 - 2x + 6)} > 0 \quad \forall x \in (-\infty, 6)$ și $g'(x) = \frac{1}{(x - 6) \ln 3} < 0$

$\forall x \in (-\infty, 6)$. Deci f este strict crescătoare și g este strict descrescătoare. Pe de altă

parte sistemul este echivalent cu $\begin{cases} g(y) = f(x) \\ g(z) = f(y) \\ g(x) = f(z) \end{cases}$. Dacă presupunem $x \leq y \leq z$, avem

$f(x) \leq f(y) \leq f(z)$ și $g(x) \geq g(y) \geq g(z)$, de unde pe baza egalităților din sistem, avem $f(z) \geq f(x) \geq f(y)$, deci $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, deoarece f este strict monotonă, deci injectivă. Înlocuind în egalitățile sistemului, obținem $g(x) = f(x)$ și $g(z) = f(x) \Rightarrow x = z$, deci $x = y = z$. Analog dacă presupunem orice altă ordine între x, y și z , obținem $x = y = z$. Deci trebuie să rezolvăm ecuația $f(x) = g(x)$, acesta având maxim o soluție, deoarece o funcție crescătoare și una descrescătoare are maxim un punct de intersecție. Această soluție este $x = 3$, deci $x = y = z = 3$

9. Considerăm funcția $f(x) = x^3 - 3x + 3$ și definim șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ prin recurența

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ cu $x_0 \in \mathbb{R}$. Demonstrați că pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât șirul anterior să fie periodic, cu perioada p și $x_i \neq x_j$, dacă $0 \leq i, j \leq p - 1$ și $i \neq j$.

Soluție. $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{2x^3 - 3}{3(x^2 - 1)}$, deci șirul construit are forma $x_1 = F(x_0)$,

$x_2 = F(F(x_0)), \dots, x_n = F^{(n)}(x_0)$, unde $F^{(n)} = \underbrace{F \circ \dots \circ F}_n$. Pe de altă parte

$F'(x) = \frac{6x}{(3(x^2 - 1))^2} (x^3 - 3x + 3)$. Deoarece funcția f este crescătoare pe intervalul $(1, \infty)$ rezultă că $F'(x) > 0$ pe acest interval. $\lim_{x \searrow 1} F(x) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$, deci funcția $F : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este inversabilă. Dacă $G : \mathbb{R} \rightarrow (1, \infty)$ este inversa acestei funcții, atunci definim funcția $H : (-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $H(x) = F(x) - G^{(p-1)}(x)$. $G^{(p-1)}(-1)$ fiind definită, rezultă că $\lim_{x \searrow -1} H(x) = \infty$. Dar G ia numai valori mai mari decât 1 și $F(0) = 1$, deci $H(1) < 0$. Pe baza continuității funcției H rezultă că există $x_0 \in (-1, 0]$ pentru care $H(x_0) = 0$. Pentru această valoare x_0 avem $x_p = F^{(p)}(x_0) = F^{(p-1)}(F(x_0)) = F^{(p-1)}(G^{(p-1)}(x_0)) = x_0$ și $x_1 = G^{(p-1)}(x_0) > x_2 = G^{(p-2)}(x_0) > \dots > x_{p-1} = G(x_0) > x_0$ deoarece $G(x) > x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Exerciții și probleme

Reprezentați grafic următoarele funcții:

1. $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)$;
2. $f(x) = x + \frac{1}{x}$;
3. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$;
4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;
5. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{5 - x}$;
6. $f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 + 4}}$;
7. $f(x) = (x - 1)e^x$;
8. $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \cos x - \cos 2x$;
9. $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x + 1}$;
10. $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x$;
11. $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x$;
12. $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$;
13. $f(x) = \ln x - \operatorname{arctg} x$;
14. $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$;
15. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;
16. $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$;
17. $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x + 2}$;
18. $f(x) = |x|(x + 2)$;
19. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$;
20. $f(x) = x^3 - 2x + 20$;
21. $f(x) = \frac{x^2 - \ln x}{x}$;
22. $f(x) = \sin x + \cos x$;
23. $f(x) = x - \ln x$;
24. $f(x) = x - \sin x$;
25. $f(x) = \sqrt[3]{(x - 1)^2(x + 1)}$;
26. $f(x) = \frac{9x + x^3}{x - x^3}$;
27. Care număr este mai mare, $A = e^\pi$ sau $B = \pi^e$?
28. Ordonăți numerele $A = \sin 2002$ și $B = \sin 2001$.



29. Determinați numărul soluțiilor reale ale ecuației $x + e^x = 0$. Determinați un interval de lungime 1 care să conțină toate soluțiile ecuației.

30. Determinați numărul soluțiilor reale ale ecuației $x \lg x = 1$. Determinați un interval de lungime 1 care să conțină toate soluțiile ecuației.

31. Câte rădăcini are ecuația $x^2 = \cos x$? Determinați un interval $I \subset [-1, 1]$ care conține două rădăcini ale acestei ecuații.

32. Determinați valorile parametrilor a, b astfel ca dreapta de ecuație $y = ax + b$ să intersecteze graficul funcției $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ într-un punct de abscisă $x_0 = -1$.

33. Determinați parametrii b și c astfel ca graficul funcției $f(x) = x^2 + bx + c$ să fie tangent la graficul funcției $g(x) = e^x$ într-un punct de abscisă $x = 0$.

34. Calculați minimul funcției $f(x) = x - a \sin x$ pe intervalul $[0, \pi/2]$ în funcție de valoarea parametrului a .

35. Pentru ce valori a există cel puțin un număr x care să fie egal cu logaritmul său în baza a .

36. Reprezentați grafic următoarele funcții:

a) $f(x) = \arccos \frac{1-x}{1-2x}$; **b)** $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; **c)** $f(x) = e^{-2x} \sin^2 x$;

d) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$; **e)** $f(x) = 3x - x^3$; **f)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}$;

g) $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$; **h)** $f(x) = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

37. Determinați maximul funcției $f(x) = \max\{2|x|, |1+x|\}$.

38. Demonstrați următoarele inegalități:

a) $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$; **b)** $|3x - x^3| \leq 2$, ha $|x| \leq 2$.

39. Determinați punctele de extrem ale următoarelor funcții

a) $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ (n este un număr natural);

b) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

40. Demonstrați următoarele inegalități și evidențiați interpretarea lor geometrică:

a) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ ($x \neq y$);

b) $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}$, dacă $x > 0$ și $y > 0$.

CONICE

CERCUL

Definiția cercului ca loc geometric este cunoscută încă din ciclul gimnazial. Pentru fixarea ideilor reamintim definiția cercului:

Definiție. Cercul de centru O și rază r este locul geometric al punctelor din plan care se află la distanța r față de punctul O .

Ecuția cercului

Considerăm cercul de centru $O(0,0)$ și rază r . Distanța punctului $M(x, y)$ față de origine este $\sqrt{x^2 + y^2}$, deci din definiție obținem $\sqrt{x^2 + y^2} = r$. Astfel ecuația cercului de rază r cu centrul în origine este:

$$(C) \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad (1),$$

(Din transformările echivalente rezultă că toate punctele care satisfac ecuația (1) se află pe acest cerc)

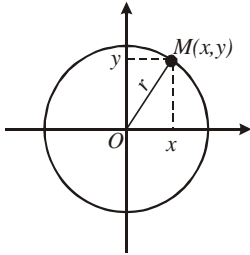


Figura 89

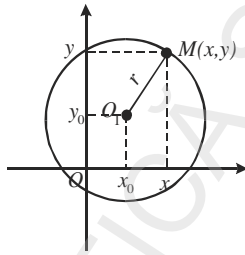


Figura 90

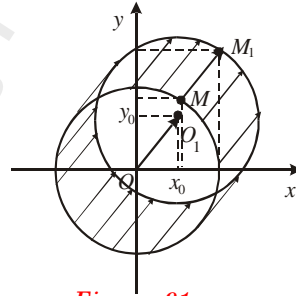


Figura 91

Dacă centrul cercului are coordonatele $O_1(x_0, y_0)$ și raza este r , atunci condiția ca punctul $M(x, y)$ să fie pe cerc se exprimă prin relația $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$, care este echivalentă cu ecuația

$$(C) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (2)$$

Ecuția (2) reprezintă ecuația cercului de centru $O_1(x_0, y_0)$ și rază r .

Observație. Cercul $C(O_1, r)$ se obține din cercul $C(O, r)$ prin translația cu vectorul (x_0, y_0) (figura 91), deci ecuația poate fi dedusă și pe baza acestei transformări.

Dacă în ecuația (2) efectuăm calculele, atunci obținem

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0,$$

deci comparând cu ecuația pătratică generală

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

deducem că această ultimă ecuație reprezintă un cerc numai în cazul $A = C \neq 0$ și $B = 0$. În acest caz prin împărțire cu A putem scrie

$$(C) \quad x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0. \quad (3)$$

Această ecuație este *ecuația carteziană generală* sau *ecuația implicită* a cercului.

Ecuția poate fi scrisă și sub forma

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 - (a^2 + b^2 - c) = 0,$$

deci în funcție de $a, b, c \in \mathbb{R}$ putem avea următoarele situații:

1° dacă $a^2 + b^2 < c$, atunci nu există perechi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ care să verifice relația (3). În acest caz se spune fie că avem un cerc imaginar, fie că locul geometric este o mulțime vidă (dacă se lucrează numai în \mathbb{R}^2);

2° dacă $a^2 + b^2 = c$, atunci locul geometric este format dintr-un singur punct $P(-a, -b)$ și se spune că avem un cerc degenerat;

3° dacă $a^2 + b^2 > c$, atunci ecuația (3) reprezintă cercul de centru $P(-a, -b)$ și rază $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Reprezentarea grafică a cercului

Fie cercul de centru $C(a, b)$ și rază r . Ecuția cercului este:

$$(C) \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Dacă exprimăm variabila y în funcție de x , obținem:

$$(y-b)^2 = r^2 - (x-a)^2, \quad y_{1,2} = b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2},$$

deci cercul este reuniunea graficelor următoarelor două funcții continue:

$$f_1(x) = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2} \quad \text{și} \quad f_2(x) = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}.$$

Astfel mulțimea C se poate scrie sub forma $C = G_{f_1} \cup G_{f_2}$.

Reprezentăm grafic funcția $f_1(x) = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$.

I. Domeniul maxim de definiție se obține din condiția $r^2 - (x-a)^2 \geq 0$. Inegalitatea $(x-a)^2 \leq r^2$ este echivalentă cu $|x-a| \leq r$, adică $-r \leq x-a \leq r$ și astfel $D = [a-r, a+r]$.

II. $f_1'(x) = \frac{-2(x-a)}{2\sqrt{r^2 - (x-a)^2}} = -\frac{(x-a)}{\sqrt{r^2 - (x-a)^2}}$, deci f_1 este crescătoare pe intervalul $[a-r, a]$ și este descrescătoare pe intervalul $[a, a+r]$. Din expresia derivatei a doua deducem că funcția este concavă.

III. Domeniul de definiție este un interval închis și mărginit, iar funcția este continuă pe acest interval, deci nu are nici o asimptotă.

IV. Tabelul de variație al funcției:

x	$a-r$		a		$a+r$
$f_1'(x)$	$ _{+\infty}$	+	0	-	$-\infty $
$f_1''(x)$	-	-	-	-	-
$f(x)$	b	\nearrow	$b+r$	\searrow	b

Astfel graficul funcției este reprezentat în figura 92. În mod similar obținem graficul

funcției f_2 reprezentat în figura 93.

Figura 92

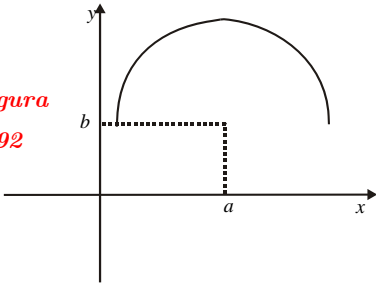
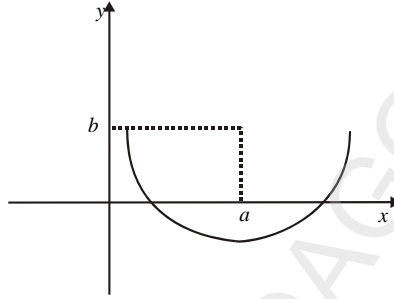


Figura 93



Poziția relativă a unui cerc și a unei drepte

După cum se știe din ciclul gimnazial pentru poziția relativă a unei drepte față de un cerc putem avea următoarele trei posibilități (vezi figurile 94, 95, 96):

1. cele două mulțimi sunt disjuncte, deci dreapta nu intersectează cercul (fig. 94)
2. cele două mulțimi au un singur punct comun, deci dreapta este tangentă a cercului (fig. 95)
3. cele două mulțimi au două puncte comune, deci dreapta este o secantă a cercului (fig. 96)

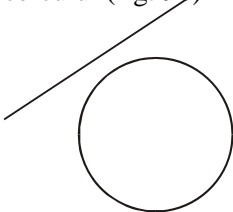


Figura 94

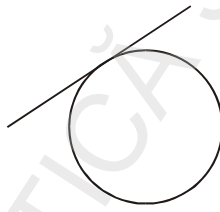


Figura 95

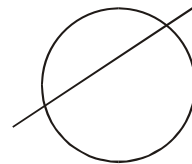


Figura 96

Aceste cazuri se pot caracteriza prin numărul soluțiilor sistemului

$$\begin{cases} C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \\ d : ax + by + c = 0 \end{cases}$$

Dacă numărul soluțiilor este 0, atunci dreapta d nu intersectează cercul C , dacă numărul soluțiilor este 1, atunci d este tangentă cercului C , iar în cazul în care există două soluții, atunci dreapta d este o secantă pentru cercul C . Dacă eliminăm una din necunoscute folosind a doua ecuație, atunci cazurile precedente se pot distinge după cum $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ sau $\Delta > 0$ în ecuația de gradul doi care se obține.

Ecuatia tangentei și a normalei într-un punct

Rezolvăm această problemă într-un cadru mai general. Considerăm curba de ecuație

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

și vom determina ecuația tangentei în punctul (x_1, y_1) . Din această ecuație se poate explicita y ca funcție de x ; astfel, derivând membrul doi și exprimând derivata y' se obține același rezultat ca și în cazul în care am proceda invers (explicitând prima dată

y și calculând derivata funcției obținute). Astfel avem

$$2Ax + 2Byy' + Cy + Cxy' + D + Ey' = 0,$$

deci $y' = -\frac{2Ax + Cy + D}{2By + Cx + E}$, ceea ce arată că panta tangentei în punctul (x_1, y_1) este

$$m = -\frac{2Ax_1 + Cy_1 + D}{2By_1 + Cx_1 + E}. \text{ De aici deducem ecuația tangentei:}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{2Ax_1 + Cy_1 + D}{2By_1 + Cx_1 + E} \Leftrightarrow$$

$$2Ax_1x + 2By_1y + C(x_1y + y_1x) + D(x - x_1) + E(y - y_1) - 2(Ax_1^2 + By_1^2 + Cx_1y_1) = 0, \quad (6)$$

Dar (x_1, y_1) este un punct al curbei, deci $Ax_1^2 + By_1^2 + Cx_1y_1 = -Dx_1 - Ey_1 - F$ și astfel obținem

$$(6) \Leftrightarrow 2Ax_1x + 2By_1y + C(x_1y + y_1x) + D(x + x_1) + E(y + y_1) + 2F = 0 \Leftrightarrow$$

$$Ax_1x + By_1y + C \cdot \frac{x_1y + y_1x}{2} + D \cdot \frac{x + x_1}{2} + E \cdot \frac{y + y_1}{2} + F = 0 \quad (7)$$

Ecuația (7) se numește ecuația tangentei obținută prin dublare, deoarece se obține din ecuația curbei prin următoarele transformări:

$$x^2 \rightarrow x_1x, \quad y^2 \rightarrow y_1y, \quad xy \rightarrow \frac{x_1y + y_1x}{2}, \quad x \rightarrow \frac{x_1 + x}{2} \text{ și } y \rightarrow \frac{y_1 + y}{2}$$

Astfel ecuația tangentei în punctul $(x_1, y_1) \in C$ la cercul (1) este:

$$x_1x + y_1y = r^2 \quad (8)$$

Observație. Aceleași rezultate se obțin și dacă scriem ecuația tangentei la graficul funcțiilor f_1 respectiv f_2 în punctele $(x_1, f_1(x_1))$ respectiv $(x_1, f_2(x_1))$. Într-adevăr ecuația tangentei în punctul de abscisă x_1 , la graficul funcției f_1 este

$$\frac{y - f_1(x_1)}{x - x_1} = f_1'(x_1) \Leftrightarrow \frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{x_1 - a}{\sqrt{r^2 - (x_1 - a)^2}} \Leftrightarrow \frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1x + y_1y - ax + ax_1 - by + by_1 - x_1^2 - y_1^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1x + y_1y - ax + ax_1 - by + by_1 - 2ax_1 - 2by_1 + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1x + y_1y - 2a \frac{x + x_1}{2} - 2b \frac{y + y_1}{2} + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Definiție. Perpendiculara dusă dintr-un punct al unei curbe pe tangenta din acel punct se numește *normala* curbei în acel punct. (fig. 97)

Din ecuația (8) rezultă că ecuația normalei la cercul (1) în punctul $(x_1, y_1) \in C$ este

$$y_1x - x_1y = 0 \quad (9)$$

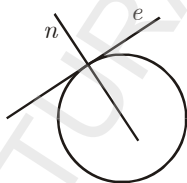


Figura 97

DEF



Exerciții și probleme

1. Determinați centrul și raza următoarelor cercuri:
 - a) $x^2 + y^2 - 4x = 0$
 - b) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$
 - c) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$
 - d) $3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 15 = 0$
2. Scrieți ecuația cercului de centru $M(-3, 2)$ și diametru $d = 8$. Scrieți ecuația tangentelor duse prin punctele de abscisă $x_1 = 0$.
3. Determinați coordonatele centrului și raza cercului de ecuație $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.
Scrieți ecuația tangentei în punctul $M(3, 7)$.
4. Determinați ecuația cercului circumscris triunghiului ABC , dacă coordonatele vârfurilor sunt: $A(-2, -1)$, $B(0, -5)$ și $C(6, 3)$.
5. Scrieți ecuația cercului cu centrul în punctul $M(6, 7)$ care este tangent dreptei $5x - 12y - 24 = 0$.
6. Fie cercul de ecuație $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$. Scrieți ecuația normalei care este perpendiculară pe dreapta $x - 2y + 1 = 0$.
7. Un cerc de centru $M(3, -1)$ determină un segment de lungime 6 pe dreapta $2x - 5y + 18 = 0$. Determinați ecuația cercului.
8. Diametrul AB al unui cerc cu centrul în O are lungimea $4a$ ($a > 0$). Fie M un punct variabil al acestui cerc.
 - a) Scrieți ecuațiile cercurilor circumscrise triunghiurilor AOM și BOM .
 - b) Notăm cu P și Q centrele celor două cercuri anterioare. Demonstrați că produsul distanțelor punctelor P și Q de la dreapta AB este constantă și $AP \perp BQ$.
 - c) Determinați locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor AP și BQ .
9. Determinați locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor $d_1 : x \cos \alpha + y = 1$ și $d_2 : x - y \cos \alpha = 1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

ELIPSA

Definiție. Locul geometric al punctelor M pentru care suma distanțelor de la punctele fixate A și B este constantă (și mai mare decât distanța AB) se numește elipsă. Punctele A și B sunt focarele elipsei, dreapta AB este dreapta focală iar segmentele determinate de un punct oarecare al elipsei și cele două focare sunt razele directoare.



Pentru a forma o imagine intuitivă asupra formei acestui loc geometric putem efectua următoarea construcție: să fixăm capetele unei sfori de lungime l în punctele A și B și mișcăm creionul astfel încât sfoara să rămână întinsă pe tot parcursul mișcării. Figura obținută va fi chiar o elipsă. (figura 98 și 99)

Figura 98

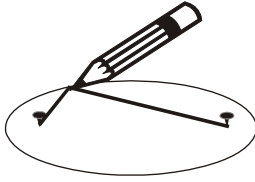
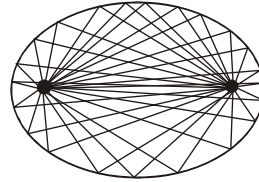


Figura 99



Observație. Dacă cele două focare coincid, atunci locul geometric obținut va fi chiar un cerc. Astfel elipsa poate fi considerată ca o generalizare a cercului.

Ecuția canonică a elipsei

Considerăm un sistem de coordonate în care dreapta determinată de cele două focare este axa Ox și mediatoarea segmentului determinat de cele două focare este axa Oy . Astfel putem presupune că cele două focare au coordonatele $F_1(c, 0)$ și $F_2(-c, 0)$. Notăm cu $2a$ suma distanțelor punctului $M(x, y)$ de la cele două focare (fig. 100).

Cele două distanțe sunt $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ și $\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, deci obținem următoarele ecuații echivalente:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a &\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

(dacă $(x+c)^2 + y^2 < 4a^2$ (1)).

Reducând termenii asemenea obținem:

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc \Leftrightarrow a^2((x+c)^2 + y^2) = (a^2 + xc)^2$$

dacă $a^2 + xc \geq 0$ (2), deci ajungem la ecuația $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

care poate fi scrisă sub forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ (3).

Pe de altă parte dacă condițiile (1) și (2) nu sunt verificate, atunci pornind de la relația inițială am ajunge la contradicție, deci nu pot exista puncte care să aibă proprietatea cerută și să nu satisfacă aceste două condiții. Pe de altă parte putem verifica ușor că

dacă x și y satisfac relația (3), atunci sunt verificate și condițiile (1) și (2). Astfel relația (3) este ecuația elipsei în sistemul de coordonate ales. Dacă elipsa intersectează axa Oy în punctele $B(0, b)$ și $B'(0, -b)$, atunci din triunghiul dreptunghic $OB'F_1$ obținem $b^2 = a^2 - c^2$. Astfel obținem ecuația canonică a elipsei:

$$(E) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

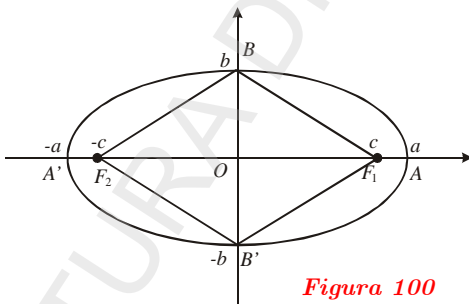


Figura 100

Dacă $(x, y) \in E$, atunci $(-x, y), (x, -y), (-x, -y) \in E$, deci elipsa este simetrică atât față de axele de coordonate, cât și față de origine. Dacă intersecțiile cu axa Ox sunt punctele A și A' , atunci avem relația:

$$2a = AF_1 + AF_2 = A'F_2 + AF_2 = AA',$$

deci punctele A și A' au abscisele a respectiv $-a$. Segmentul AA' este axa mare a elipsei, iar segmentul BB' este axa mică. Astfel a și b sunt lungimile celor două semiaxe. Numărul c care exprimă distanța dintre centrul elipsei (O) și cele două focare se numește excentricitatea liniară a elipsei, iar raportul dintre excentricitatea liniară și semiaxa mare se numește excentricitatea numerică a elipsei. Dacă ne referim la excentricitatea elipsei (fără a preciza dacă este vorba de excentricitatea liniară sau cea numerică), atunci în mod implicit ne referim la excentricitatea numerică. Această excentricitate se notează cu e și avem relația:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Jumătatea lungimii coardei ce trece printr-un focar și este perpendiculară pe axa mare se notează cu p și poartă numele de parametru elipsei. Din ecuația canonică obținem

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

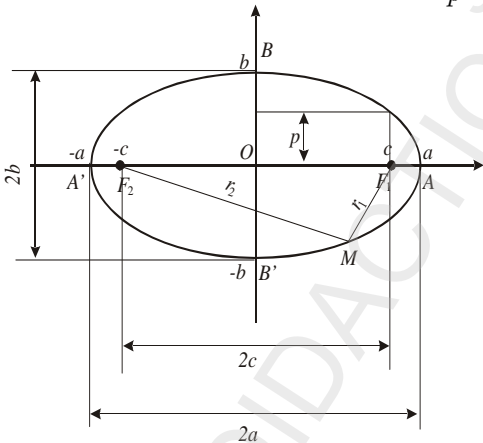


Figura 101: Datele elipsei

- F_1, F_2 - focare
- O - centru
- F_1F_2 - axa focală
- $F_1F_2 = 2c$ - distanța focală
- c - excentricitatea liniară
- $AA' = 2a$ - axa mare
- a - lungimea semiaxe mari
- $BB' = 2b$ - axa mică
- b - lungimea semiaxe mici
- r_1, r_2 - raze directoare
- $(r_1 + r_2 = 2a)$
- p - parametru

Dacă translatăm elipsa cu vectorul $(a, 0)$ (sau sistemul de coordonate cu $(-a, 0)$) obținem ecuația:

$$\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{2b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2} \Leftrightarrow E : y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 \quad (5).$$

Dacă translatăm elipsa cu vectorul (x_0, y_0) (figura 102),

atunci ecuația se transformă în:

$$(E) \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

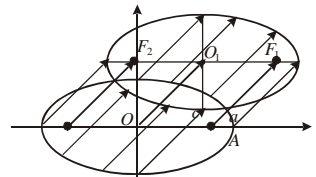


Figura 102

Reprezentarea grafică a elipsei

Vom reprezenta grafic elipsa de ecuație (E) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, unde $a, b > 0$.

Ca și în cazul cercului obținem $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, deci reprezentăm grafic funcțiile

$$f_1: [-a, a] \rightarrow [0, b], f_1(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ și } f_2: [-a, a] \rightarrow [-b, 0], f_2(x) = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

deoarece $E = G_{f_1} \cup G_{f_2}$.

Vom reprezenta grafic funcția f_1 .

I. Domeniul maxim de definiție se obține din condiția $a^2 - x^2 \geq 0$, astfel $D = [-a, a]$.

II. $f_1'(x) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$, deci f_1 este crescătoare pe intervalul $[-a, 0]$ și este descrescătoare pe intervalul $[0, a]$. Din expresia derivatei a doua deducem că funcția este concavă.

III. Domeniul de definiție este un interval închis și mărginit, iar funcția este continuă pe acest interval, deci nu are nici o asimptotă.

IV. Tabelul de variație al funcției:

x	$-a$		a		a
$f_1'(x)$	$ \infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f_1''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	\nearrow	b	\searrow	0

Graficele sunt reprezentate în figurile 103 și 104.

Figura 103

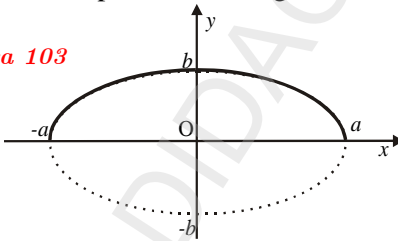
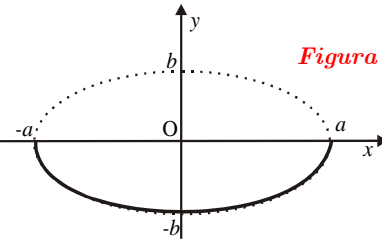


Figura 104



Poziția relativă a unei drepte și a unei elipse

Ca și în cazul cercului pot apărea următoarele trei situații:

1. dreapta nu intersectează elipsa (fig. 105)
2. dreapta este tangentă elipsei, deci există un singur punct comun (fig. 106)
3. dreapta este o secantă a elipsei, deci există două puncte de intersecție (fig. 107)

Coordonatele punctelor de intersecție se obțin și în acest caz rezolvând sistemul format din ecuația elipsei și ecuația drepte.

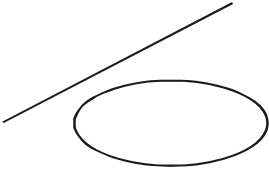


Figura 105.

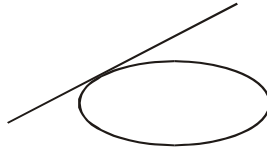


Figura 106

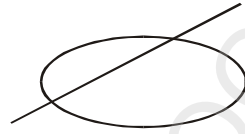


Figura 107

Ecuatia tangentei și a normalei într-un punct

Folosind ecuația generală obținută prin dublare putem scrie ecuația tangentei în punctul (x_1, y_1) :

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad (7)$$

(fig. 108). Pe baza acestei ecuații normala în același punct are ecuația:

$$\frac{x_1 y}{a^2} - \frac{y_1 x}{b^2} = x_1 y_1 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \quad (8)$$



Figura 108

Exerciții și probleme

1. Scrieți ecuația elipsei în următoarele cazuri și reprezentați grafic elipsa:
 - a) focarele sunt $F_1(-1, 0)$ și $F_2(1, 0)$, iar lungimea semiaxe mari este $a = 5$;
 - b) $F_1(1, 2)$ este un focar și $C(1, 4)$ este centrul elipsei, iar lungimea semiaxe mari este $a = 10$;
 - c) centrul este în origine, axele de coordonate sunt și axele elipsei, iar elipsa trece prin punctele $A\left(4, \frac{9}{5}\right)$ și $A\left(-3, \frac{12}{5}\right)$;
 - d) axa mare este egală cu 26, iar focarele sunt $F_1(14, 0)$ și $F_2(-10, 0)$.
2. Scrieți ecuația canonică a elipsei $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$.
3. Determinați ecuația tangentei prin punctul de abscisă $x_1 = 5$ al ei, dacă ecuația elipsei este $4x^2 + 9y^2 = 676$.
4. Demonstrați că dacă M este un punct arbitrar al elipsei cu centrul în O și cu focarele F_1 respectiv F_2 , atunci $MF_1 \cdot MF_2 + MO^2 = a^2 + b^2$, unde a și b reprezintă semiaxa mare, respectiv semiaxa mică.
5. Demonstrați că dintre toate triunghiurile care au o latură de lungime l și semiperimetrul p , cel isoscel are cea mai mare arie.
6. Demonstrați că tangenta și normala într-un punct al elipsei sunt bisectoarele unghiului determinat de cele două raze directoare (această proprietate poartă numele de proprietatea optică a elipsei deoarece, astfel, razele de lumină care pornesc dintr-un focar sunt reflectate spre celălalt focar).



Hiperbola

DEF

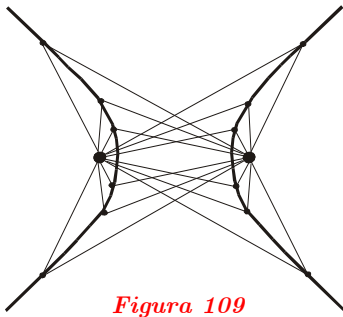


Figura 109

Definiție. Locul geometric al punctelor M pentru care

$$|MF_1 - MF_2| = 2a,$$

unde F_1 și F_2 sunt două puncte fixate și $F_1F_2 > 2a$, se numește **hiperbolă**. Punctele F_1 și F_2 sunt **focarele hiperbolei**, dreapta F_1F_2 este **dreapta focală**, iar segmentele determinate de focare și de un punct arbitrar al hiperbolei se numesc **raze directe**.

Ecuția canonică a hiperbolei

Considerăm un sistem de coordonate în care dreapta focală este axa Ox și dreapta Oy este mediatoarea segmentului F_1F_2 . Astfel, coordonatele focarelor sunt $F_1(c, 0)$ și $F_2(-c, 0)$. Dacă $M(x, y)$ este un punct arbitrar, atunci relația din definiție devine:

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a &\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &\Leftrightarrow \\ \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc &\Leftrightarrow a^2((x+c)^2 + y^2) = (a^2 + xc)^2 \Leftrightarrow \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \end{aligned}$$

Din această ecuație rezultă că punctele de intersecție ale hiperbolei cu axa Ox sunt punctele $A(a, 0)$ și $A'(-a, 0)$. Numim aceste puncte vârfurile hiperbolei, iar axa

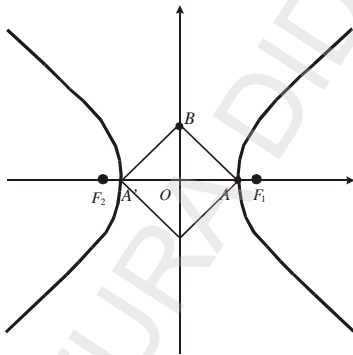


Figura 110

AA' axa reală. Lungimea $AA' = 2a$ se numește lungimea axei reale. Dacă construim rombul de diagonală AA' și latură c , atunci dreapta suport a celeilalte diagonale se numește axa imaginară a hiperbolei, iar lungimea $2b$ lungimea axei imaginare. Din construcție rezultă că $b^2 = c^2 - a^2$, și astfel ecuația hiperbolei este:

$$(H) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Această ecuație este ecuația canonică a hiperbolei.

Dacă $(x, y) \in H$, atunci $(x, -y)$, $(-x, y)$,

$(-x, -y) \in H$, deci hiperbola este simetrică atât față de axele ei cât și față de originea sistemului ales. Din acest motiv punctul O se numește centrul hiperbolei. Distanța c

se numește excentricitatea liniară iar raportul dintre excentricitatea liniară și lungimea semiaxe reale este excentricitatea numerică. Excentricitatea numerică se notează cu e

și avem formula $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Jumătatea lungimii coardei ce trece printr-un focar și este perpendiculară pe axa reală se numește parametrul hiperbolei și se notează cu p . Din ecuația (1) pentru $x = \pm c$ deducem $p = \frac{b^2}{a}$.

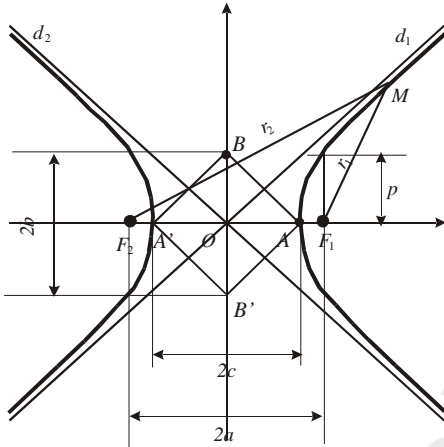


Figura 111: Datele hiperbolei

- F_1, F_2 – focare
- O – centru
- $F_1F_2 = 2c$ – distanța focală
- c – excentricitatea liniară
- $AA' = 2a$ – axa reală
- a – semiaxa reală
- $BB' = 2b$ – axa imaginară
- b – semiaxa imaginară
- r_1, r_2 – raze directoare
- $(|r_1 - r_2| = 2a)$
- p – parametru
- d_1, d_2 – asimptote

Dacă efectuăm o translație de vector $(-a, 0)$, atunci ecuația hiperbolei devine:

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{2b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow (H) \quad y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 \quad (4). \quad (\text{fig. 112})$$

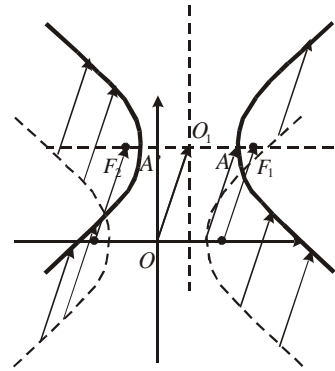


Figura 112

Reprezentarea grafică a hiperbolei

Vom reprezenta grafic hiperbola de ecuație:

$$(H) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ unde } a, b > 0.$$

Dacă exprimăm y în funcție de x rezultă:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Astfel hiperbola este reuniunea graficelor următoarelor două funcții:

$$f_1 : (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \text{ și}$$

$$f_2 : (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Reprezentăm grafic funcția f_1 . Graficul funcției f_2 este simetricul acestuia în raport cu axa Ox .

I. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$, iar

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{a}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{b}{a} |x| \sqrt{1 - \frac{a}{x^2}}}{x} = -\frac{b}{a},$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{b}{a} x \right] = 0,$$

deci spre $-\infty$ avem asimptota oblică $y = -\frac{b}{a}x$.

Pentru ramura spre $+\infty$ obținem $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{b}{a}, n = 0$, deci asimptota oblică

în acest caz este $y = \frac{b}{a}x$.

II. $f_1'(x) = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, nu este definită în punctele $x = \pm a$, este negativă pentru $x < 0$ și este pozitivă pentru $x > 0$.

$$\lim_{x \nearrow -a} f_1'(x) = \frac{-a}{+0} = -\infty, \lim_{x \searrow a} f_1'(x) = \frac{a}{+0} = +\infty,$$

deci în $f_1'(-a-) = -\infty$ și $f_1'(a+) = +\infty$.

III. Tabelul de variație:

x	$-\infty$		$-a$	/////	a		$+\infty$
$f_1'(x)$	-	-	$-\infty$	/////	$+\infty$	+	+
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	0	/////	0	\nearrow	$+\infty$

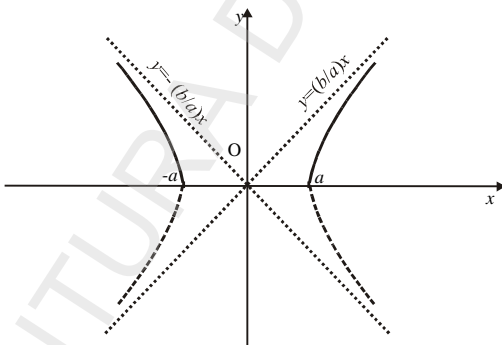


Figura 43

În figura 113 linia continuă reprezintă graficul funcției f_1 , asimptotele sunt trasate cu linie punctată, iar linia întreruptă corespunde graficului funcției f_2 .

Poziția relativă a unei drepte și a unei hiperbole

Coordonatele punctelor de intersecție ale dreptei $d: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ cu elipsa $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se pot obține rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

Acest sistem ne conduce la o ecuație de gradul doi, deci putem avea următoarele trei cazuri:

1. dreapta d nu intersectează hiperbola (fig. 114)
2. dreapta d este tangenta hiperbolei (fig. 115)
3. dreapta d intersectează hiperbola în două puncte (fig. 116)

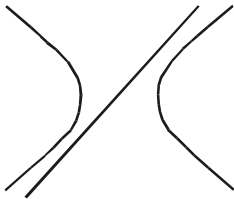


Figura 114



Figura 115

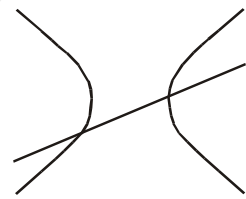


Figura 116

Ecuația tangentei și a normalei într-un punct

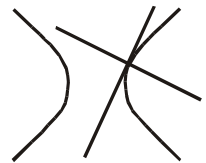
Prin dublare obținem ecuația tangentei prin punctul (x_1, y_1) care

aparține hiperbolei (1): $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$ (13)

Astfel ecuația normalei este:

$$\frac{x_1y}{a^2} + \frac{y_1x}{b^2} = x_1y_1 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \quad (14.)$$

Figura 117



Exerciții și probleme

1. Determinați semiaxele, coordonatele focarelor și scrieți ecuațiile asimptotelor pentru hiperbola $9x^2 - 16y^2 = 144$.
2. Scrieți ecuația canonică a hiperbolei $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$ și determinați coordonatele centrului.
3. Determinați ecuația hiperbolei care trece prin punctul $P(9, 4)$ și satisface următoarele două proprietăți:
 - a) axa reală are lungimea 6 ;
 - b) axa reală este chiar axa Ox .
4. Scrieți ecuația hiperbolei cu focarele $F_1(2, 2)$ și $F_2(-2, -2)$, dacă lungimea axei reale este 4. Determinați ecuațiile asimptotelor și ecuația tangentei în punctele de abscisă $x_1 = 3$.



5. Determinați ecuația hiperbolei cu focarele $F_1(4,0)$ și $F_2(-4,0)$, dacă lungimea axei reale este 6. Scrieți ecuațiile asimptotelor și ecuația tangențelor în punctele de abscisă $x_1 = -5$.
6. Scrieți ecuațiile asimptotelor și ecuațiile tangențelor în punctele de abscisă $x_1 = -4$ pentru hiperbola $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$.
7. Fie M un punct oarecare al hiperbolei cu centrul în O și cu focarele în F_1 respectiv F_2 . Demonstrați că $MO^2 - MF_1 \cdot MF_2 = a^2 - b^2$, unde a și b reprezintă lungimea celor două semiaxe.
8. Calculați aria triunghiului determinat de asimptotele hiperbolei $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ și dreapta $9x + 2y - 24 = 0$.
9. Pe axa Ox a sistemului cartezian de coordonate xOy să considerăm punctele M și N astfel încât produsul absciselor lor să fie a^2 . Prin punctele M și N ducem două drepte cu pantele $\frac{b}{a}$ respectiv $-\frac{b}{a}$. Să se determine locul geometric al punctului de intersecție a celor două drepte ($a, b \in \mathbb{R}_+^*$ sunt fixate).
10. Printr-un punct arbitrar P din planul unei hiperbole ducem paralele la asimptotele hiperbolei și notăm cu M și N punctele de intersecție ale acestor drepte cu hiperbola.
- a) Determinați locul geometric al punctelor P , pentru care MN trece prin centrul hiperbolei.
- b) Determinați locul geometric al punctelor P , pentru care MN este paralelă cu una din axele hiperbolei.
11. Demonstrați că tangenta și normala într-un punct al hiperbolei sunt bisectoarele unghiului determinat de cele două raze directoare (proprietatea optică).

Parabola

DEF

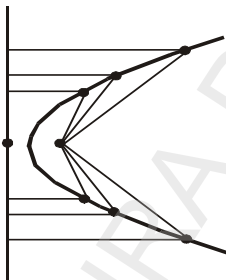


Figura 117.

Definiție. Locul geometric al punctelor egal depărtate de o dreaptă fixată v și un punct fix F se numește parabolă.

Punctul F este focarul parabolei, v este dreapta directoare, iar perpendiculara din focar pe dreapta directoare este axa parabolei. Distanța de la focar la dreapta directoare se notează cu p și este parametrul parabolei.

Ecuția canonică a parabolei

Considerăm un sistem de coordonate în care axa Ox este chiar axa parabolei și axa Oy este mediatoarea segmentului determinat de focar și proiecția focarului pe dreapta directoare. Astfel focarul are coordonatele $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ și

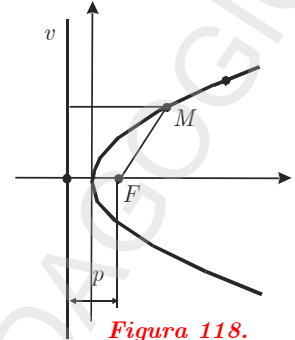


Figura 118.

ecuția dreptei directoare $v : x = -\frac{p}{2}$ (vezi figura 118).

Dacă $M(x, y)$ este un punct arbitrar al parabolei, atunci conform definiției avem:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \text{ adică } x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \text{ și astfel}$$

$$(P) \quad y^2 = 2px \quad (1).$$

Ecuția (1) se numește ecuația canonică a parabolei. Dacă $(x, y) \in P$, atunci $(x, -y) \in (P)$, deci axa Ox este și axă de simetrie. Punctul O este vârful parabolei.

Reprezentarea grafică a parabolei

Vom reprezenta parabola de ecuație

$$(P) \quad y^2 = 2px.$$

Presupunem $p > 0$. Exprimând y în funcție de x obținem $y = \pm\sqrt{2px}$, deci avem nevoie de reprezentarea grafică a funcțiilor:

$$f_1 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), f_1(x) = \sqrt{2px}, f_2 : [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0], f_2(x) = -\sqrt{2px}.$$

Pentru funcția f_1 obținem următorul tabel de variație:

x	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+\infty$	+
$f_1''(x)$		-
$f_1(x)$	0	\nearrow $+\infty$

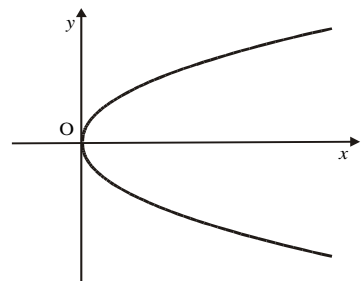


Figura 119

Ca și în cazul precedent graficul funcției f_1 este ramura superioară (partea care se află deasupra axei Ox), iar graficul funcției f_2 este ramura inferioară. (fig. 119)

Poziția relativă a unei drepte și a unei parabole

Ca și în cazul cercului, elipsei și a hiperbolei coordonatele punctelor de intersecție se obțin din rezolvarea sistemului format din ecuația dreptei și a parabolei. Acest sistem se reduce la o ecuație de gradul doi, deci putem avea următoarele cazuri:

1. dreapta nu intersectează parabola (fig. 120)
2. dreapta este tangentă parabolei (fig. 121)
3. dreapta are două puncte comune cu parabola (fig. 122)



Figura 120



Figura 121

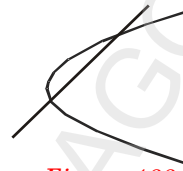


Figura 122

Ecuția tangentei și a normalei într-un punct al parabolei

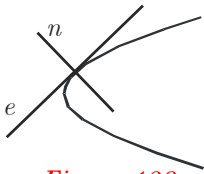


Figura 123

Folosind dedublarea, obținem pentru ecuația (1) în punctul (x_1, y_1) al parabolei ecuația $e : y_1 y = p(x + x_1)$ (6)

Din această ecuație rezultă ecuația normalei:

$$n : py - y_1 x = (p - x_1)y_1 \quad (7).$$

Exerciții și probleme

1. Scrieți ecuația parabolei cu vârful în origine, care
 - a) admite axa Ox ca axă de simetrie și trece prin punctul $A(-1, 3)$;
 - b) are ca axă de simetrie axa Oy și trece prin punctul $B(4, -8)$.
2. Determinați coordonatele vârfului, valoarea parametrului și panta axei de simetrie pentru parabola $y^2 - 10x^2 - 2y - 19 = 0$.
3. Determinați ecuațiile tangentelor parabolei $y^2 = 12x$ duse prin punctele acestuia de abscisă $x_1 = 2$.
4. Determinați ecuațiile tangentelor parabolei $y^2 = 2x$ duse prin punctul $A(-1, 0)$. Calculați aria patrulaterului determinat de cele două tangente și normalele în punctele de tangență.
5. Arcada unui pod este de forma unei parabole. Determinați parametrul parabolei dacă săgeata arcului (distanța de la cel mai înalt punct la dreapta determinată de punctele de sprijin) este de 6 m și distanța dintre piloanele de la extremități este 24 m.
6. În figura alăturată (figura 123) este dată structura unui dispozitiv de susținere parabolic (cele două arcuri sunt arcuri parabolice)
 - a) determinați ecuațiile celor două arcuri;
 - b) determinați lungimile A_1A_2 și A_1C_2 .

De ce conice?

Cercul, parabola, elipsa sau hiperbola apar des și în natură. Dacă aruncăm orizontal sau oblic un corp, atunci acesta descrie un arc de parabolă (fig. 124). Dacă ați rezolvat problemele propuse, cunoașteți și proprietățile optice ale acestor curbe. Legile lui *Kepler* (1571–1630) aparțin de cunoștințele astronomice elementare. Prima lege spune că planetele se rotesc în jurul Soarelui pe orbită eliptică și Soarele este într-unul din focarele acesteia (fig. 125)

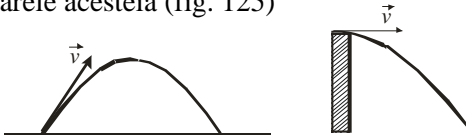


Figura 124



Figura 125

Astăzi este deja cunoscut faptul că sateliții artificiali se învârt în jurul Pământului pe orbite eliptice sau circulare. Pentru cercetarea corpurilor cerești îndepărtate au fost lansate sonde, care nu revin pe Pământ, cu o viteză inițială foarte mare, traiectoria acestora fiind o orbită hiperbolică.

Astăzi se consideră cunoștințe de fizică elementară faptul că orbitele rachetelor, a navelor cosmice trimise în spațiu depinzând de viteza de lansare, pot fi:

- elipsă cu focarul mai îndepărtat de locul lansării în centrul Pământului (fig.126)
- cerc (fig. 127)
- elipsă cu focarul mai apropiat de locul lansării în centrul Pământului (fig. 128)
- hiperbolă cu un focar în centrul Pământului, (fig. 129).

Acestea arată că cercul, elipsa, parabola și hiperbola sunt înrudite.

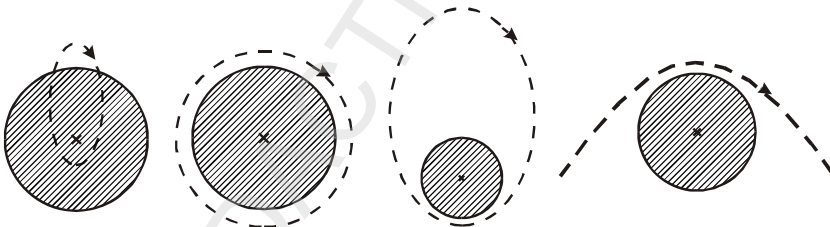


Figura 126

Figura 127

Figura 128

Figura 129

Studiul mișcării corpurilor cu metode matematice a început deja în secolele XVI–XVII., dar noțiunile de cerc, elipsă, parabolă au apărut cu mult în urmă, deja în secolul II. î.e., la grecii antici. Aceștia au descoperit în mai multe probleme matematice, că intersectând suprafața laterală a unui con drept cu plane diferite, se obțin curbe. Aceste curbe se numesc *conice*.

Conica este o *elipsă*, dacă planul secant nu este paralel cu nici o generatoare a conului. Dacă planul secant este perpendicular pe axa conului, atunci secțiunea este un cerc. Deci și acest fapt arată că cercul este o elipsă particulară.

Dacă planul secant este paralel cu o singură generatoare a conului, atunci conica este o *parabolă*.

Dacă planul secant este paralel cu două generatoare a conului, atunci conica este o *hiperbolă*.

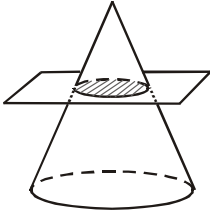


Figura 130:
Cerc

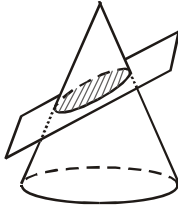


Figura 131:
Elipsă

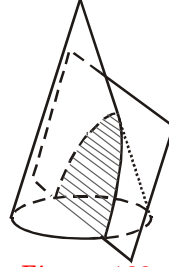


Figura 132:
Parabolă

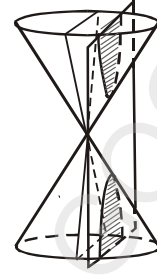


Figura 133:
Hiperbolă

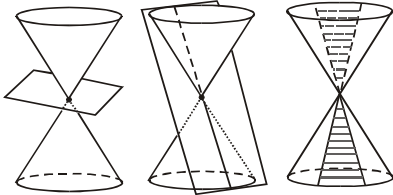


Fig 134
Conice degenerate

Dacă planul secant trece prin vârful conului, atunci obținem conice *degenerate*. În loc de elipsă obținem punct (*elipsă degenerată*), în loc de parabolă obținem dreaptă punct (*parabolă degenerată*) și în loc de hiperbolă obținem două drepte secante (*hiperbolă degenerată*).

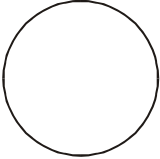
Ecuatia unei conice arbitrare este următoarea:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$), mai mult curbele cu ecuația precedentă sunt (am enumerat aici și cele degenerate, respectiv mulțimea vidă). Această ecuație cu câteva transformări se poate restrânge la una din următoarele:

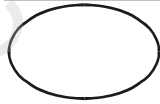
Cerc

$$x^2 + y^2 = r^2$$



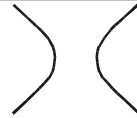
Elipsă

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Hiperbolă

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Parabolă

$$y^2 = 2px$$



Două drepte secante

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$



Două drepte paralele

$$x^2 - a^2 = 0$$



Două drepte confundate

$$x^2 = 0$$



Punct

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$



Mulțime vidă

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$



Fig. 135
Curbe de gradul doi



Exerciții

1. Demonstrați că cercul $K : x^2 + y^2 = 1$ nu este graficul unei funcții, dar se poate scrie ca reuniunea graficelor a două funcții.
2. Determinați aria triunghiului determinat de asimptotele hiperbolei $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ și dreapta de ecuație $9x + 2y - 25 = 0$.
3. Trasați graficele următoarelor funcții:
 - a) $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+1}$;
 - b) $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)(5-x)}$;
 - c) $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 2x - 3}$.
4. Graficul funcției $f(x) = e^{-x^2}$ ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) se numește curba lui Gauss. Determinați punctele în care cercul de centru O și rază 1 intersectează această curbă. Demonstrați că cele două curbe admit o tangentă comună.
5. Determinați locul geometric al punctelor $M(x, y)$ pentru care $\frac{x \cdot |x|}{4} + \frac{y \cdot |y|}{9} = 1$.
6. Construiți graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\left|\frac{x^2}{4} - 1\right|}$.
7. Înscrieți un dreptunghi de arie maximă în elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, astfel încât laturile dreptunghiului să fie paralele cu axele de coordonate ($0 < b < a$).
8. Determinați distanța minimă între punctul $M(p, p)$ și punctele parabolei de ecuație $y^2 = 2px$.
9. Determinați distanța punctului $A(2, 0)$ de la cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 1$.
10. Determinați cea mai lungă coardă a elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$), care trece prin punctul $B(0, b)$.

IX. PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Determinați numărul real α astfel ca limita $\lim_{x \rightarrow \infty} n^\alpha (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}})$ să fie un număr real.
2. Demonstrați că dacă $a + b + 1 = 0$, atunci
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} (a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}) = 0 \text{ și}$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} [a \ln(3+n) + b \ln(2+n) + \ln(1+n)] = 0.$$
3. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $|bc| < 1$, $b \neq 1$ și $|c| < 1$. Demonstrați că șirul
- $$x_n = ac + (a+ab)c^2 + (a+ab+ab^2)c^3 + \dots + (a+ab+\dots+ab^n)c^{n+1}$$
- este convergent și calculați limita acestui șir.
4. a) Determinați valorile parametrilor a și b , dacă
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-n^3} - an - b) = 0.$$
- b) Determinați valorile parametrilor a , b și c , dacă
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} n(an + \sqrt{2+bn+cn^2}) = 1.$$
5. Studiați convergența șirului $x_n = \frac{4^n + a^n}{3^n + 6^n}$ și calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
6. Studiați convergența șirului $b_n = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right) \dots \left(1+\frac{1}{n}\right)$ și calculați limita șirului $a_n = \left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^n$
7. Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$.
8. Calculați limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)$.
9. Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3+1} + \frac{2^2}{3^2+1} + \frac{2^3}{3^4+1} \dots + \frac{2^{n+1}}{3^{2^n+1}\right)$.
10. Fie șirul $x_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+2)}$. Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(x_n - \frac{1}{4}\right)^n$.
11. Dacă știm că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculați limita șirului $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}$.
12. Fie $x_n = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x \sin nx)^{\frac{1}{x^2}}$ și $y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Demonstrați că șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ este convergent și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.
13. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați limita șirului $\frac{a_n}{b_n}$, unde a_n și b_n sunt

elementele de pe prima linie a matricei A^n (în această ordine).

- 14.** Demonstrați că șirurile definite prin $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$ și $y_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ sunt convergente, au aceeași limită și limita lor este în intervalul $(-2, -1)$.
- 15.** Studiați convergența șirului $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}^2}$, $n > 1$ dacă $a_1 = 1$.
- 16.** Studiați convergența șirului $a_n = \frac{1}{2 - a_{n-1}}$, $n > 1$, dacă $a_1 = \frac{1}{2}$.
- 17.** Studiați convergența șirului definit prin relațiile $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 18.** Definim șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ prin relațiile $x_1 = 0$, $x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că toate elementele șirului sunt numere naturale.
- 19.** Există șiruri cu termeni strict pozitivi $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ pentru care $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$, $n \geq 1$?
- 20.** Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin recurența $x_{n+1} = n - x_n$. Arătați că dacă $x_1 = 0$, atunci șirurile $\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ și $(x_n - \sqrt{n})_{n \geq 1}$ sunt convergente. Calculați și limitele acestor șiruri!
- 21.** Studiați convergența șirurilor $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ definite prin relațiile $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n + y_n}$ și $y_n = \frac{y_n^2}{x_n + y_n}$, unde $x_1 + y_1 \neq 0$.
- 22.** Studiați convergența următoarelor șiruri și în caz de convergență calculați limita lor:
- a)** $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$; **b)** $x_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$;
- c)** $x_0 \in (0, 1)$, $x_{n+1} = x_n - x_n^3$; **d)** $x_0 = a$ ($a \neq 0$), $x_{n+1} = \frac{2 + x_n^2}{2x_n}$;
- e)** $x_0 \in [1, 2]$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$.
- 23.** Folosind limita funcțiilor, calculați următoarele limite:
- a)** $a_n = n \sin \frac{3}{n}$; **b)** $a_n = n\sqrt[3]{3} - n$; **c)** $a_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{tg} \frac{k}{n^2}$; **d)** $a_n = \frac{n^3}{5} \ln \left(\frac{n^3 + 1}{n^3} \right)$.
- 24.** Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = [x]$ și $g(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi x} \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right|, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Arătați că funcția $g \circ f$ are limită în punctul $x_0 = 0$, iar $f \circ g$ nu are limită în acest punct.
- 25.** Demonstrați că funcția $f(x) = \frac{1}{[x] + x + 1}$ nu are limită în punctul $x_0 = 0$, iar funcția $g(x) = \cos \frac{3}{x-1}$ nu are limită în punctul $x_0 = 1$.

- 26.** Determinați valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$, dacă inegalitatea $ax^2 + ax + 3 \geq 3$ este adevărată pentru $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru aceste valori a calculați limita

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2 - \sqrt{ax^2 + ax + 3}).$$

- 27.** Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ nu este o funcție polinomială.

- 28.** Studiați periodicitatea, continuitatea și derivabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin |x|$.

- 29.** Determinați punctele de discontinuitate ale următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3 + 4x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

- 30.** Demonstrați că dacă $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (0, 2)$ este o funcție pentru care

$$(g \circ f)(x) = \cos x, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ unde } g: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & x \in (0, 1] \\ \frac{x+1}{3}, & x \in (1, 2) \end{cases}, \text{ atunci } f \text{ este continuă pe intervalul } \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

- 31.** Funcțiile $f, g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue. Demonstrați că

- a)** dacă există $a, b \in [-1, 1]$, $a < b$ astfel ca $f(a) = g(b)$ și $f(b) = g(a)$, atunci există și $c \in [-1, 1]$ pentru care $f(c) = g(c)$.

- b)** există $u, v \in [-1, 1]$, astfel ca $f(u) = u$ și $f(v) = -v$.

- 32.** Studiați proprietatea Darboux pentru următoarele funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; **b)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ a, & x = 0 \end{cases}$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{2}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; **d)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

- 33.** Demonstrați că dacă funcția $f: [0, 2] \rightarrow [0, 1] \cup [2, 3]$ are proprietatea lui Darboux și $f(1) = 0$, atunci f nu este injectivă și nici surjectivă.

- 34.** Arătați că dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifică relația $f(f(x)) + x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ atunci f nu are proprietatea lui Darboux.

- 35.** Determinați toate funcțiile continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$f(f(x)) + \sin x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- 36.** Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă, astfel încât orice punct $x_0 \in [a, b]$ este de maxim local. Să se arate că f este constantă.
- 37.** Să se arate că nu există funcții continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea: $f(x) \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $f(x+1) \notin \mathbb{Q}$.
- 38.** Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă astfel ca $f(0) = f(1)$. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $x_1, x_2 \in [0, 1]$ astfel ca $|x_1 - x_2| = \frac{1}{n}$ și $f(x_1) = f(x_2)$.
- 39.** Determinați valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-1|e^{nx} + a(x+1)^2 e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}$$
 este continuă pe \mathbb{R} .
- 40.** Arătați că ecuația $x^3 + x^2 + mx - 1 = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[-1, 1]$ pentru orice $m \in \mathbb{R}$.
- 41.** Determinați funcțiile continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pentru care

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + a, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$
 unde a este o constantă fixată.
- 42.** Funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în 0 și verifică ecuația funcțională $f(x) = f(x^2)$, pentru orice $x \geq 0$. Demonstrați că f este o funcție constantă.
- 43.** Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifică egalitatea $|f(x) - f(y)| = 1$, dacă $|x - y| = 1$. Rezultă de aici că $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$?
- 44.** Există funcții continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f(f(x)) = e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$?
- 45.** Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + \cos \pi x$ nu este periodică.
- 46.** Determinați funcția derivabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 47.** Punctul x_0 este un punct fix al funcției $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ dacă $x_0 \in D$ și $\varphi(x_0) = x_0$. Demonstrați că dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și $(f \circ f)$ are cel puțin un punct fix, atunci și f are cel puțin un punct fix.
- 48.** Demonstrați că $\lim_{x \searrow 0} x^{f(x)} = 1$, dacă f este o funcție continuă și $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$.
- 49.** Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface inegalitatea $|f(x) - x^2| \leq 2|x|$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $f(0) = 0$ și f este continuă în origine.
- 50.** Determinați valorile parametrilor a, b astfel ca funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \leq 2 \\ bx + a, & x > 2 \end{cases}$$
 să fie derivabilă pe domeniul ei de definiție.
- 51.** Funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ verifică inegalitățile $x \leq f(x) \leq x^2 + x$, $\forall x \in [-1, 1]$. Arătați că f este derivabilă în 0 și calculați $f'(0)$.
- 52.** Studiați și discutați continuitatea și derivabilitatea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2}, & x \in (0, 3) \\ a \sin \pi x + b, & x \notin (0, 3) \end{cases} \text{ în raport cu valorile parametrilor } a \text{ și } b.$$

- 53.** Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - x^4} + \frac{1}{2}\arcsin \sqrt{x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiție. Determinați valorile parametrilor a, b, c astfel ca funcția definită prin $g: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1, 0) \\ ax^2 + bx + c, & x \geq 0 \end{cases}$ să fie de două ori

derivabilă.

- 54.** Determinați valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția

$$f(x) = (|x| - a)^3 - 3|x|$$

să fie derivabilă în punctul $x = 0$.

- 55.** Determinați valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția

$$f(x) = |x|^2 + a^2 - 2 \cdot (a + 1) \cdot |x|$$

să fie derivabilă în punctul $x = 0$.

- 56.** Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ definim funcția $f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ prin relațiile

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n x + e^{nx}, & x < 0 \\ x^2 + b_n, & x \geq 0 \end{cases}, \text{ unde } (a_n)_{n \geq 0} \text{ și } (b_n)_{n \geq 0} \text{ sunt două șiruri de numere}$$

reale. Determinați $(a_n)_{n \geq 0}$ și $(b_n)_{n \geq 0}$ astfel ca funcțiile f_n să satisfacă condițiile teoremei lui Lagrange. Notăm cu c_n valoarea intermediară obținută din teorema lui Lagrange, aplicată funcției f_n pe intervalul $[-1, 1]$. Calculați limita șirurilor $(c_n)_{n \geq 1}$ și $(n \cdot c_n)_{n \geq 1}$.

- 57.** Determinați valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$, dacă funcția $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left| (1+x)^3 - 3^{mx} \right| \text{ este derivabilă pe intervalul } (-1, 1).$$

- 58.** Determinați valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt[3]{ax^2 - (a-1)x + a} \text{ este derivabilă pe } \mathbb{R}.$$

- 59.** Demonstrați că există o unică funcție $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$(f(x))^3 + xf(x) = 1, \quad \forall x \geq 0. \text{ Arătați că această funcție este derivabilă și}$$

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{x + 3f^2(x)}, \quad \forall x \geq 0.$$

- 60.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \max(\sin x, m + \cos x)$. Pentru ce valoare $m \in \mathbb{R}$, funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} ?

- 61.** Calculați derivata de ordin n a funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+5}{x^3 - 11x^2 + 11x - 6}, \text{ unde } n \in \mathbb{N}^* \text{ și } D \text{ este domeniul maxim de}$$

definiție.

- 62.** Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x^2)$ nu este o funcție polinomială.

63. Considerăm funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin^2 x$.

a) Demonstrați că f admite derivate de orice ordin și pentru $k \geq 3$ există numerele reale a_k, b_k astfel ca

$$(1 - x^2)^{f^{(k)}}(x) + a_k \cdot x \cdot f^{(k-1)}(x) + b_k f^{(k-2)}(x) = 0, \forall x \in [-1, 1].$$

b) Calculați $f^{(n)}(0)$.

64. a) Calculați derivata funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & -2x & 1 \\ 1 - x^2 & x^2 & -1 \\ -2x - a + 2 & x - 2 & \end{vmatrix}$$

și rezolvați ecuația $f'(x) = 0$.

b) Determinați valoarea parametrului a astfel ca ecuația $f(x) = 0$ să admită cel puțin o rădăcină dublă.

65. Numerele x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sunt rădăcinile funcției polinomiale:

$$P(x) = 5x^5 - 3x^4 + x^2 + 2.$$

Calculați următoarele sume:

a) $\sum_{k=1}^5 \frac{1}{x_k + 3};$

b) $\sum_{k=1}^5 \frac{2}{(1 - 2x_k)^2}.$

66. Calculați următoarele sume, folosind derivatele unor funcții

a) $\sum_{k=1}^n k \cdot x^{k-1};$

b) $\sum_{k=1}^n k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2};$ c) $\sum_{k=1}^n k \cdot C_n^k;$

d) $\sum_{k=1}^n k \cdot (k-1) \cdot C_n^k;$

e) $\sum_{k=1}^n \frac{C_n^k}{k+1};$

f) $\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{5^{k-1}}.$

67. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + 2 \sin 2x + \dots + n \sin nx$ și $g(x) = \cos x + 2 \cos 2x + \dots + n \cos nx$. Arătați că există $c \in [0, 2\pi]$ astfel încât $f(c) = g(c)$.

68. Arătați că pentru orice $m \leq 1$, inegalitatea $e^x \geq mx + 1$ este verificată pentru orice $x \geq 0$.

69. Determinați numerele $a > 0$ pentru care inegalitatea $a^x \geq ax$ are loc pentru orice $x > 0$.

70. Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (1, +\infty)$, $f(x) = 4^x + 2^x + 1$ este bijectivă și calculați $(f^{-1})'(3)$.

71. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x^2) - mx$ este crescătoare pe \mathbb{R} ?

72. Care număr este mai mare $a = 3^{\sqrt{5}}$, sau $b = 5^{\sqrt{3}}$?

73. Determinați funcția polinomială $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de grad minim, pentru care 6 este un maxim local atins în punctul $x = 1$ și 2 este un minim local atins în punctul $x = 3$.

- 74. a)** Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - ax}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Determinați valoarea parametrului a , astfel ca f să admită un punct de extrem aflat la o distanță de 2 unități față de axa Oy .
- b)** Demonstrați că nu există $a \in \mathbb{R}$ pentru care f să fie strict monotonă pe \mathbb{R} .
- 75. a)** Arătați că pentru $\forall k \geq 2$ avem $0 < \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) < \frac{1}{k \ln k}$.
- b)** Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$.
- 76.** Determinați valorile parametrilor a, b , dacă graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2 + ax + b}{x + 1}$ admite dreapta $y = 2x + 3$ ca asimptotă oblică spre $+\infty$. Dacă $a = 5$, determinați valoarea parametrului b astfel ca f să aibă o asimptotă verticală.
- 77.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + x$. Arătați că f este bijectivă. Dacă notăm cu $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ inversa funcției f , calculați $g'(2)$, $g''(2)$ și limita $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p [g(x) - \sqrt[5]{x}]$, dacă $p \in \mathbb{R}$.
- 78.** Demonstrați că ecuația $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ admite o singură rădăcină reală. Dacă notăm cu x_1 rădăcina reală și cu x_2, x_3 celelalte două rădăcini, să se calculeze limita $\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^n + x_3^n$.
- 79. a)** Demonstrați că ecuația $2e^x + x^2 + 18x - 6 = 0$ are o singură rădăcină pozitivă x_0 .
- b)** Demonstrați că $x_0 \in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right)$.
- 80.** Discutați în raport cu parametrul m , numărul rădăcinilor următoarelor ecuații:
- a)** $\sqrt{\frac{x-5}{x+2}} = m$; **b)** $x^4 - 4x^3 + m = 0$; **c)** $e^x = mx^2$.
- Demonstrați că pentru $m = \sqrt{e}$ ultima ecuație admite o singură rădăcină și această rădăcină se află în intervalul $(-1, 0)$.
- 81. a)** Arătați că pentru orice valoare reală m , ecuația $x^3 + x + m = 0$ admite o singură rădăcină reală.
- b)** Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin relațiile $x_1 = a > 0$ și $x_{n+1}^3 + x_{n+1} = x_n$, $n \geq 1$ este definit corect. Calculați limita acestui șir.
- 82.** Considerăm funcția $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{a-x^3}}$ (D este domeniul maxim de definiție).
- a)** Determinați valoarea parametrului a astfel încât graficul funcției să admită în punctul $x = -1$ un punct de inflexiune;
- b)** pentru $a = \frac{1}{8}$ reprezentați grafic funcția f .

- 83.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.
- a)** Demonstrați că pentru $\forall n \geq 2$ derivata de ordin n a funcției f se poate scrie sub forma $f^{(n)}(x) = (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} Q_n(x)$, unde Q_n este o funcție rațională (raportul a două funcții polinomiale) ale cărui numitor nu are nici o rădăcină reală.
- b)** Demonstrați că f este o funcție bijectivă și calculați inversa sa.
- 84.** Considerăm funcția $f_a : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = \frac{a + \ln x^2}{x - 1}$.
- a)** Determinați locul geometric al punctelor de inflexiune ale lui f , dacă a este variabil.
- b)** Pentru $a = 2$ reprezentați grafic funcția f .
- 85.** Determinați numărul punctelor de inflexiune ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.
- 86.** Demonstrați că pentru funcția $f(x) = e^{-x} \sin x$ au loc inegalitățile $|f(x)| \leq 1$, $|f'(x)| \leq \sqrt{2}$, $|f''(x)| \leq 2$ pentru orice $x \geq 0$.
- 87.** Reprezentați grafic următoarele funcții $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, dacă D este domeniul maxim de definiție pentru fiecare funcție în parte:
- a)** $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$; **b)** $f(x) = 2x - 1 + \sqrt{x - 1}$;
- c)** $f(x) = |\ln|x|| + x$; **d)** $f(x) = x + \ln x^2$;
- e)** $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$; **f)** $f(x) = x^6 - 2x^3 + 1$.
- 88.** Demonstrați că există o singură funcție derivabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisface egalitatea $f'(x) = 3f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și pentru care $f(0) = 3$.
- 89.** Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Demonstrați că
- a)** dacă f este pară (impară), atunci f' este impară (pară);
- b)** dacă f este periodică de perioadă $p \neq 0$, atunci și f' este periodică și admite perioada p .
- Sunt adevărate reciprocele acestor proprietăți?
- 90.** Determinați funcția derivabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f(1) = 1$ și $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 91.** Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue în origine, pentru care $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 92.** Arătați că există $c \in (0, 1)$ astfel încât $f(c) < f'(c)$, dacă f este o funcție derivabilă și neconstantă definită pe intervalul $[0, 1]$ și $f(0) = 0$.
- 93.** Demonstrați că $\frac{x}{x + 1} < \ln(x + 1)$, pentru orice $x > 0$.
- 94.** Demonstrați că $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$, dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

95. Demonstrați că dacă funcția f admite derivata a doua $f''(x)$, atunci

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

96. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisfac ecuația funcțională $f(x) \cdot f(y) = f(x-y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

97. Determinați valorile a pentru care ecuația $\sqrt{x-2} + \sqrt{8-2x} = a$ are cel puțin o soluție?

98. Considerăm ecuația $\sin x = \lambda x$, unde $0 < \lambda < 1$. Demonstrați că cea mai mică rădăcină strict pozitivă a acestei ecuații este o funcție descrescătoare a parametrului λ . Câte rădăcini pozitive are această ecuație dacă $\lambda = \frac{2}{(4n+1)\pi}$, unde n este un număr întreg?

99. Rezolvați ecuația $e^x - e^{-x} = 2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

100. Rezolvați ecuația $(\sqrt{3})^x - 2^{x-1} = 1$.

101. Rezolvați sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^y = y^x \end{cases}$, unde $x > 0, y > 0$.

102. Rezolvați ecuația $x^3 - [x] = 4$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real $x \in \mathbb{R}$.

103. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 3 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3 \\ x^6 + y^6 + z^6 = 3 \end{cases}$$

104. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 \\ x_2 + x_3 = x_4^2 \\ x_3 + x_4 = x_5^2 \\ x_4 + x_5 = x_1^2 \\ x_5 + x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

105. Ce valori poate lua expresia $\frac{xy + yz + xz}{x + y + z}$, dacă $x > 0, y > 0, z > 0$ și

$$xyz = 1?$$

106. Câte soluții are următorul sistem de ecuații

$$\begin{cases} \cos x_1 = x_2 \\ \cos x_2 = x_3 \\ \dots \\ \cos x_{2001} = x_{2002} \\ \cos x_{2002} = x_1 \end{cases}$$

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU BACALAUREAT



1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$ și șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \frac{a}{x^2+1} + \frac{b}{(x+1)^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Determinați ecuația asimptotei spre ∞ la graficul funcției.

d) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x + 3^{-x}$.

a) Arătați că funcția este pară.

b) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Arătați că f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, +\infty)$.

d) Arătați că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .

e) Rezolvați ecuația $3^{1+x} + 3^{1-x} = 4x + 6$.

3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 0}$ și $(b_n)_{n \geq 0}$ definite prin $a_0 = 2$,

$2a_{n+1} = a_n - 2n - 3$ și $b_n = a_n + 2n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Calculați a_2 și b_2 .

b) Arătați că $(b_n)_{n \geq 0}$ este progresie geometrică.

c) Determinați termenul general al șirului $(a_n)_{n \geq 0}$.

d) Calculați suma $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

e) Studiați existența limitelor șirurilor $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ și $(s_n)_{n \geq 0}$.

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 + x)$.

a) Determinați asimptotele graficului funcției.

b) Determinați punctele de inflexiune ale graficului.

Arătați că $f^{(n)}(x) = e^x(x^2 + (2n+1)x + n^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Arătați că $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

d) Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(0) + f''(0) + f'''(0) + \dots + f^{(n)}(0)}{n^3}$.

5. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{2x}$.

a) Calculați limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2}$.

b) Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n(na_n - 1)$.

- c)** Dacă $f^{(n)}(x) = e^{2x}(a_n x + b_n)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, stabiliți relația de recurență pentru $(b_n)_{n \geq 1}$.
- d)** Arătați că $b_n = n \cdot 2^{n-1}$.
- 6.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.
- a)** Calculați limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- b)** Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- c)** Determinați mulțimea valorilor funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x^2 + 1) \cdot f'(x)$.
- d)** Arătați că $f^{(n+1)}(x) \cdot (x^2 + 1) + 2n \cdot f^{(n)}(x) \cdot x + n(n-1) \cdot f^{(n-1)}(x) = 0$,
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$.
- e)** Arătați că $f^{(n+1)}(0) = n(1-n)f^{(n-1)}(0) \quad \forall n \geq 1$.
- f)** Calculați $f^{(2007)}(0)$.
- 7.** Se consideră funcția $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$, $a > 0$.
- a)** Arătați că f_a este funcție impară și că are o singură asimptotă.
- b)** Calculați $f'_a(x)$ și determinați punctele de extrem ale funcției.
- c)** Stabiliți intervalele de monotonie ale funcției.
- d)** Calculați $f''_a(x)$ și determinați punctele de inflexiune.
- e)** Dacă M și N punctele de minim, respectiv maxim ale funcției, iar I și J punctele de inflexiune diferite de originea reperului. Arătați că $MINJ$ este paralelogram. Determinați $a > 0$ astfel încât $MINJ$ să fie dreptunghi.
- 8.** Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$ și $g(x) = \sin(x^2)$.
- a)** Calculați $f^{(5)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- b)** Arătați că $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(5)}(0) = 0$.
- c)** Calculați limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^7}$.
- d)** Demonstrați că $f^{(5)}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- e)** Demonstrați că $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad \forall x \geq 0$.
- 9.** Fie funcțiile $f, g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ și
- $$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$
- a)** Calculați $f'(x)$ și $g'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- b)** Arătați că $g(x) < 0 < f(x) \quad \forall x > 0$.
- c)** Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

d) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\ln a_n - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}$, unde $a_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$.

e) Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} n (a_n - \sqrt{e})$

10. Fie funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos \frac{\pi}{x}$ și $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \cos x + \sin x.$$

a) Calculați $f'(x)$ pentru $x \in (0, \infty)$ și $g'(x)$ pentru $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

b) Arătați că $g'(x) > 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$.

c) Arătați că $g(x) > 1$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$.

d) Demonstrați că $f(x+1) - f(x) > 1$, $\forall x > 2$.

e) Demonstrați că $f(n) > n - 2$, $\forall n \geq 3$.

f) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n^2}$.

(Variantă bacalaureat, 2001)

11. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că există $c_a \in (2, 3)$ și $d_a \in (4, 5)$ astfel încât $3^a - 2^a = a \cdot c_a^{a-1}$ și $5^a - 4^a = a \cdot d_a^{a-1}$.

c) Arătați că pentru orice funcții $g : \mathbb{R} \rightarrow (2, 3)$ și $h : \mathbb{R} \rightarrow (4, 5)$, ecuația $x \cdot (g(x))^{x-1} = x \cdot (h(x))^{x-1}$ are numai soluțiile $x = 0$ și $x = 1$.

d) Rezolvați ecuația $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$, $x \in \mathbb{R}$.

e) Arătați că $3^x + 4^x > 2^x + 5^x$, $\forall x \in (0, 1)$.

f) Arătați că $\frac{2}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 4} > \frac{1}{\ln 2} + \frac{4}{\ln 5}$.

(Variantă bacalaureat, 2001)

12. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - e \ln x$.

a) Calculați $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .

c) Arătați că $f(x) \geq 0$, $\forall x > 0$.

d) Arătați că $e^x \geq x^e$, $\forall x > 0$.

e) Arătați că $e^x > \frac{x^{e+1}}{e+1} + 1$, $\forall x > 0$.

(Variantă bacalaureat, 2001)

13. Fie funcția $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = x(1 - \sqrt{x})^2$. Considerăm șirul $(x_n)_{n \geq 1}$.cu

$$x_1 \in (0, 1), x_{n+1} = f(x_n), n \geq 1.$$

a) Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.

b) Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

c) Pentru $a \in \mathbb{R}$, arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^a - n^a}{n^{a-1}} = a$.

d) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x_{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right) = 1$.

e) Dacă șirul $(y_n)_{n \geq 1}$, $y_n = n^a x_n$ are limită finită și nenulă, calculați numărul $a \in \mathbb{R}$.

14. Fie funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha - \alpha x$, unde $\alpha \in (0, 1)$.

a) Calculați $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

b) Arătați că $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0, 1)$ și $f'(x) < 0$, $\forall x \in (1, \infty)$.

c) Arătați inegalitatea $x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha$, $\forall x > 0$.

d) Demonstrați că $a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$ $\forall a, b, \alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$.

e) Arătați că $st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$ $\forall s, t > 0$ și $p, q > 1$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

f) Arătați că, dacă $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

(Bacalaureat 2004)

15. Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, și $(b_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{2}{3}\right)$,

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
 Fie funcțiile $f, g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(x + \frac{3}{2}\right) + \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) \text{ și}$$

$$g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(x + \frac{5}{3}\right) + \ln\left(x + \frac{2}{3}\right).$$

a) Calculați $f'(x)$ și $g'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

c) Arătați că $f'(x) > 0$ și $g'(x) < 0$ $\forall x \in (0, \infty)$.

d) Arătați că $g(x) < 0 < f(x)$ $\forall x > 0$.

e) Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător și șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.

f) Demonstrați că $0 < b_n - a_n < \frac{1}{6n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

g) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și limita sa are primele două zecimale egale cu primele două zecimale ale termenului a_{17} .

(Bacalaureat 2004)

ALGEBRĂ

I. PERMUTĂRI



DEF

Definiție. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci numim orice funcție bijectivă $f : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ o permutare de ordin n sau o permutare a mulțimii $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Notații. 1. Pentru n fixat notăm mulțimea permutărilor de ordin n cu S_n .

2. De obicei definim o permutare cu tabelul care definește funcția. Astfel dacă $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ este definit prin tabelul

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 x & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \hline
 f(x) & 3 & 2 & 4 & 1
 \end{array}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

atunci vom scrie

3. În general vom nota permutările cu litere grecești, excepție făcând permutarea identică (care corespunde funcției identice $f(k) = k, 1 \leq k \leq n$) pe care o notăm cu e_n :

$$e_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Observație. În definiția unei permutări $\sigma \in S_n$ prima linie conține numerele $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ în ordine crescătoare, iar al doilea rând conține aceleași numere (deci fiecare număr exact odată) într-o ordine oarecare.



Dacă $\sigma \in S_n$, atunci inserând $n + 1$ în linia a doua și înlocuind prima linie cu numerele $\{1, 2, 3, \dots, n, n + 1\}$ obținem o permutare de ordin $(n + 1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

În acest mod din fiecare permutare $\sigma \in S_n$ putem genera $(n + 1)$ permutări de ordin $(n + 1)$. Pe de altă parte această generare se poate inversa deoarece decupând numărul $(n + 1)$ din a doua linie și păstrând ordinea celorlalte elemente (înlocuind prima linie cu $\{1, 2, 3, \dots, n\}$) obținem permutarea din care am pornit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & \boxed{5} & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Astfel sunt de $(n + 1)$ ori mai multe permutări de ordin $(n + 1)$, decât permutări de ordin n , deci notând cu P_n numărul permutărilor de ordin n ($P_n = |S_n|$), obținem $P_{n+1} = (n + 1) \cdot P_n$. Astfel deducem:

$$P_n = n \cdot P_{n-1} = n(n-1)P_{n-2} = n(n-1)(n-2)P_{n-3} = \dots = n(n-1)\dots 2 \cdot P_1 = n!.$$

Am obținut următoarea teoremă:

Teoremă. Numărul permutărilor de ordin n este $P_n = n!$.

Acest rezultat este cunoscut din clasele anterioare, permutările fiind studiate în cadrul combinatoricii. În acest capitol vom studia și operațiile care se pot efectua cu permutări.

Considerăm permutările $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și calculăm compunerea lor.

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \beta)(1) &= \alpha(\beta(1)) = \alpha(2) = 2, & (\alpha \circ \beta)(2) &= \alpha(\beta(2)) = \alpha(3) = 1, \\ (\alpha \circ \beta)(3) &= \alpha(\beta(3)) = \alpha(1) = 3, \end{aligned}$$

deci $\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Pentru simplitatea notațiilor vom nota această compunere cu

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

și vom spune că am înmulțit cele două permutări.

În mod analog obținem

$$\begin{aligned} \beta\alpha(1) &= \beta(\alpha(1)) = \beta(3) = 1, & \beta\alpha(2) &= \beta(\alpha(2)) = \beta(2) = 3, \\ \beta\alpha(3) &= \beta(\alpha(3)) = \beta(1) = 2, \end{aligned}$$

deci $\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Observăm că $\alpha\beta \in S_3$, $\beta\alpha \in S_3$ și $\alpha\beta \neq \beta\alpha$.

În general prin înmulțirea a două permutări obținem o altă permutare, deoarece compunerea a două funcții bijective este bijectivă. Exemplul precedent arată că înmulțirea permutărilor nu este comutativă.

Un procedeu simplu de calcul a înmulțirii este următoarea:

a) scriem elementele primei linii (putem înmulți numai permutări de același ordin deci prima linie o putem scrie din start)

b) pentru un element fixat i din prima linie a produsului căutăm numărul corespunzător acestui element din a doua linie a ultimului factor:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

și astfel pentru un j am identificat $\tau(j)$;

c) căutăm acest număr în prima linie a primei permutări:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

și astfel am identificat $\sigma(\tau(i))$, deci acest număr va fi elementul corespunzător

numărului i în produsul celor două permutări.

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 2 & \boxed{3} & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 3 & & & \end{pmatrix}$$

deci

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 2 & \boxed{3} & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 3 & & & \end{pmatrix}.$$

Astfel obținem produsul:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Orice permutare fiind o funcție bijectivă, are și o inversă. Pentru a calcula inversa unei permutări folosim definiția inversei:

$$\sigma(i) = j \Leftrightarrow \sigma^{-1}(j) = i,$$

deci schimbând cele două linii și ordonând coloanele după elementele primei linii obținem *inversa permutării* σ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

deci inversa permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ este $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. În mod evident

compunerea (înmulțirea) permutărilor σ și σ^{-1} este permutarea identică.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze $\sigma\tau$ și $\tau\sigma$, dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Rezolvare. Folosind algoritmul precedent avem:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ și } \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Să se calculeze inversele permutărilor precedente.

Rezolvare. Inversând liniile și ordonând obținem:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Să se calculeze $\sigma^{-1}\tau^{-1}$ și să se arate că $\sigma^{-1}\tau^{-1} = (\tau\sigma)^{-1}$.

$$\sigma^{-1}\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (\tau\sigma)^{-1}.$$



4. Să se calculeze σ^2 și să se determine cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\sigma^n = e_6$.

Rezolvare. Folosind algoritmul de înmulțire obținem pe rând:

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } \sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

deci cel mai mic număr natural pentru care $\sigma^n = e_6$ este $n = 4$.

5. Să se arate că $S_3 = \{\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_3\}$.

Demonstrație

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}; \text{ mulțimea}$$

inverselor acestora este:

$$S'_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \text{ Imediat se}$$

constată că $S_3 = S'_3$.

Observație. În general $S_n = S'_n$, unde $S'_n = \{\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_n\}$.

Incluziunea $S'_n \subset S_n$ este evidentă, deoarece inversa oricărei permutări din S_n este o permutare din S_n . Reciproc, dacă $\tau \in S_n$, atunci pentru $\sigma = \tau^{-1} \in S_n$ avem $\sigma^{-1} = \tau$, deci $\tau \in S'_n$. În consecință $S_n \subset S'_n$, deci $S_n = S'_n$.

De fapt observația precedentă este echivalentă cu faptul că funcția $f: S_n \rightarrow S_n$, $f(\sigma) = \sigma^{-1}$ este bijectivă.

6. Să se arate că pentru $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, avem $S_3 = \{\sigma\tau \mid \tau \in S_3\} = \{\tau\sigma \mid \tau \in S_3\}$.

Demonstrație.

Compunând elementele mulțimii

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

la stânga, respectiv la dreapta cu σ respectând ordinea, obținem:

$$S'_3 = \{\sigma\tau \mid \tau \in S_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\},$$

respectiv

$$S''_3 = \{\tau\sigma \mid \tau \in S_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Deci $S_3 = \{\sigma\tau \mid \tau \in S_3\} = \{\tau\sigma \mid \tau \in S_3\}$.

Observație. În general pentru orice $\sigma \in S_n$, avem $S_n = \{\sigma\tau \mid \tau \in S_n\} = \{\tau\sigma \mid \tau \in S_n\}$. De fapt funcțiile $f, g : S_n \rightarrow S_n$, $f(\tau) = \sigma\tau$ și $g(\tau) = \tau\sigma$ sunt bijective. Este suficient să demonstrăm injectivitatea, deoarece domeniul și codomeniul au același număr de elemente. În cazul funcției f , dacă $f(\tau_1) = f(\tau_2)$, atunci $\sigma\tau_1 = \sigma\tau_2$ înmulțind la stânga această ultimă relație cu σ^{-1} , obținem că $\tau_1 = \tau_2$, deci funcția f este injectivă. Analog se demonstrează și injectivitatea funcției g .

Cicluri

Definiție. Fie i_1, i_2, \dots, i_r numere naturale diferite între 1 și n . Dacă restricția permutării $\alpha \in S_n$ la mulțimea $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ este funcția identică și au loc egalitățile

$$\alpha(i_1) = i_2, \alpha(i_2) = i_3, \dots, \alpha(i_{r-1}) = i_r, \alpha(i_r) = i_1,$$

atunci spunem că α este un *ciclu* de lungime r (sau un r ciclu) și notăm

$$\alpha = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_r).$$

Observații

1. Ciclurile de lungime 1 sunt de fapt permutările identice.
2. Ciclurile de lungime 2 se numesc *transpoziții*.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3 \ 4); \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 5 \ 3 \ 4 \ 2);$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3)(4)(5) = (1 \ 2 \ 3).$$

Definiție. Dacă α și β sunt două *permutări* din S_n , atunci vom spune că acestea sunt *disjuncte*, dacă pentru orice $x \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ cu proprietatea $\alpha(x) \neq x$, are loc $\beta(x) = x$ și pentru orice $y \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ cu proprietatea $\beta(y) \neq y$, are loc $\alpha(y) = y$. Bineînțeles pot exista elemente $z \in \{1, 2, \dots, n\}$ pentru care $\alpha(z) = \beta(z) = z$.

Exemple

1. Permutările $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ și $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ sunt disjuncte deoarece $\alpha(k) \neq k$ pentru $k \in \{1, 2, 5, 6, 7\}$, iar $\beta(k) = k$ pentru aceste valori; pe de altă parte $\beta(k) \neq k$ pentru $k \in \{3, 8\}$, iar $\alpha(k) = k$ pentru aceste valori. Există și elementul 4 pentru care $\alpha(4) = \beta(4) = 4$.

2. Ciclurile $\alpha = (1 \ 3 \ 7)$ și $\beta = (2 \ 6)$ din S_8 sunt disjuncte, deoarece elementele pentru care $\alpha(k) \neq k$ sunt 1, 3 și 7, valori în care $\beta(k) = k$, iar elementele pentru care $\beta(k) \neq k$ sunt 2 și 6, valori în care $\alpha(k) = k$.

Observație. Ciclurile $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_r)$ și $(j_1 \ j_2 \ \dots \ j_k)$ din S_n sunt disjuncte, dacă mulțimile

$\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ și $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ sunt disjuncte.

Exercițiu rezolvat. Fie $\alpha = (1 \ 2)$ și $\beta = (1 \ 3 \ 4 \ 2 \ 5)$ din S_5 . Să se calculeze $\gamma = \alpha\beta$ și să se descompună produsul în produsul unor cicluri disjuncte.

Rezolvare. $\gamma(1) = \alpha(\beta(1)) = \alpha(3) = 3$, $\gamma(3) = \alpha(\beta(3)) = \alpha(4) = 4$,

$\gamma(4) = \alpha(\beta(4)) = \alpha(2) = 1$. Astfel am obținut un ciclu al produsului. Pentru a calcula $\gamma(2)$ și $\gamma(5)$ scriem

$$\gamma(2) = \alpha(\beta(2)) = \alpha(5) = 5 \text{ și } \gamma(5) = \alpha(\beta(5)) = \alpha(1) = 2, \text{ deci}$$

$$\alpha\beta = (1 \ 2)(1 \ 3 \ 4 \ 2 \ 5) = (1 \ 3 \ 4)(2 \ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se poate observa că în cazul ciclurilor disjuncte produsul este comutativ și se poate calcula doar scriind ciclurile în aceeași permutare, fără partea identică și completând cu corespondența identică în rest. Formulăm această proprietate și în forma unei teoreme:

Teoremă. Dacă α și β sunt cicluri disjuncte, atunci permutarea

$$\sigma(k) = \begin{cases} \alpha(k), & \alpha(k) \neq k \\ \beta(k), & \beta(k) \neq k \\ k, & \alpha(k) = \beta(k) = k \end{cases} \text{ este egală atât cu } \alpha\beta \text{ cât și cu } \beta\alpha, \text{ deci } \alpha\beta = \beta\alpha = \sigma.$$

Din această proprietate rezultă un algoritm de descompunere în cicluri disjuncte a permutărilor. Luăm de

exemplu permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 5 & 9 & 1 & 4 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Pornind din 1 putem identifica ciclul $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$. Primul element care nu este inclus în acest ciclu este 2. Pornind din acest element obținem ciclul $2 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 2$. Primul element care nu este inclus în nici una din ciclurile precedente este 7, și astfel obținem ciclul $7 \rightarrow 8 \rightarrow 7$. În final pe baza teoremei precedente deducem $\sigma = (1 \ 3 \ 5)(2 \ 6 \ 4 \ 9)(7 \ 8)$. Este clar că procedeul se va termina într-un număr finit de pași pentru orice permutare și vom obține cicluri disjuncte, deci avem următoarea teoremă:

Teoremă. Orice permutare $\alpha \in S_n$ se poate descompune în mod unic în produs de cicluri disjuncte (având lungimea cel puțin 2).

Consecință. Orice permutare se poate descompune în produs de transpoziții.

Demonstrație. Pe baza teoremei precedente este suficient să descompunem un ciclu oarecare în produs de transpoziții. Pe de altă parte $(1 \ 2 \ \dots \ r) = (1 \ r)(1 \ r-1)\dots(1 \ 2)$, deci proprietatea este adevărată.

Observație. Descompunerea în transpoziții nu mai este unică după cum rezultă din următorul exemplu:

$$(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 3)(1 \ 2) = (2 \ 3)(1 \ 3) = (1 \ 3)(4 \ 2)(1 \ 2)(1 \ 4).$$

Totuși putem observa că în aceste descompuneri paritatea numărului de transpoziții din descompunere nu se schimbă. Pentru a demonstra această proprietate avem nevoie de o noțiune importantă.

Definiție. Perechea (i, j) se numește o *inversiune* a permutării σ dacă $i < j$ și $\sigma(i) > \sigma(j)$. Numărul inversiunilor unei permutări σ se notează cu $n(\sigma)$ și numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n(\sigma)}$ se numește *signatura permutării*. Dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$ atunci spunem că σ este o *permutare impară*, iar în caz contrar σ este o *permutare pară*.

Este clar că pentru orice pereche (i, j) fracția $\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ este negativă dacă și numai

dacă perechea (i, j) este o inversiune. Astfel semnul produsului $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ este chiar signatura permutării $(-1)^{n(\sigma)}$. Pe de altă parte datorită bijectivității funcției σ în produsul anterior apar atât în numitor cât și în numărător toate diferențele posibile de forma $\pm(i - j)$, unde $1 \leq i < j \leq n$. Astfel valoarea absolută a produsului este 1, deci am demonstrat următoarea relație:

Teoremă. Dacă $\sigma \in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.

Folosind această teoremă putem calcula signatura unui produs folosind signatura factorilor.

$$\varepsilon(\sigma\varphi) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma\varphi(i) - \sigma\varphi(j)}{i - j} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma\varphi(i) - \sigma\varphi(j)}{\varphi(i) - \varphi(j)} \cdot \frac{\varphi(i) - \varphi(j)}{i - j} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\varphi).$$

Ultima egalitate se obține folosind bijectivitatea funcției φ ; astfel înmulțind separat fracțiile $\frac{\sigma\varphi(i) - \sigma\varphi(j)}{\varphi(i) - \varphi(j)}$ obținem chiar $\varepsilon(\sigma)$.

Teoremă. Dacă σ și φ sunt două permutări din S_n , atunci $\varepsilon(\sigma\varphi) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\varphi)$.

Consecință. Pentru orice permutare $\sigma \in S_n$, avem $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

Într-adevăr $1 = \varepsilon(e_n) = \varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1})$, deci $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

Exerciții și probleme rezolvate

1. a) Să se demonstreze că orice transpoziție este o permutare impară.

b) Să se demonstreze că un r ciclu are signatura $(-1)^{r-1}$.

Rezolvare. a) Considerăm transpoziția (i, j) ($i < j$). Numerele între i și j formează inversiune atât cu i cât și cu j (deci aici avem un număr par de inversiuni) și în plus apare inversiunea formată de perechea (i, j) .

b) Folosind reprezentarea $\sigma = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_r) = (i_1 \ i_r)(i_1 \ i_{r-1}) \dots (i_1 \ i_2)$, punctul a) și teorema precedentă rezultă $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{r-1}$.

Observație. Din teorema precedentă rezultă că observația privind paritatea numărului de transpoziții din descompunerea unei permutări este valabilă și în general, deoarece o permutare pară se poate descompune într-un număr par de transpoziții și o permutare impară într-un număr impar de transpoziții.

2. Să se determine signatura permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 4 & 9 & 6 & 10 & 2 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

Soluție. 1) Calculăm numărul de inversiuni. Este suficient să căutăm pentru fiecare $1 \leq i \leq 10$ perechile (i, j) care formează inversiune și $j > i$, cu alte cuvinte trebuie să determinăm pentru fiecare $\sigma(i)$ numărul numerelor mai mici decât $\sigma(i)$ și care sunt după $\sigma(i)$ în a doua linie. Astfel pentru $\sigma(1) = 1$ nu avem nici un număr mai mic

decât 1 după 1, în a doua linie. Pentru $\sigma(2) = 3$ singurul număr mai mic decât 3 care este după 3 este $2 = \sigma(7)$, deci perechea $(2, 7)$ formează o inversiune. În același mod pentru $\sigma(3) = 4$ obținem inversiune $(\sigma(7) = 2)$, iar pentru $\sigma(4) = 9$ obținem numerele 6, 2, 7, 8, 5 mai mici decât 9 și care sunt după 9 în al doilea rând. Astfel avem 5 inversiuni. Similar obținem pe rând 2, 4, 0, 1, 1 inversiuni pentru numerele 6, 10, 2, 7 respectiv 8. În total avem deci $0 + 1 + 1 + 5 + 2 + 4 + 0 + 1 + 1 = 15$ inversiuni, deci $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{15} = -1$.

2) Descompunem permutarea în produs de cicluri disjuncte:

$$\sigma = (2\ 3\ 4\ 9\ 8\ 7)(5\ 6\ 10).$$

Astfel $\varepsilon(\sigma) = (-1)^5(-1)^2 = -1$.



Aplicație. (Jocul 15) Considerăm un pătrat 4×4 în care apar numerele de la 1 la 15 un pătrățel rămânând liber. Printr-un pas înțelegem mutarea unui număr pe pătrățelul liber, dacă pătrățelul în care se afla numărul este vecin cu cel liber (au o latură comună). Bineînțeles că astfel pătrățelul liber va avea altă poziție. Să se demonstreze că din prima configurație nu putem obține a doua configurație:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Rezolvare. Presupunem că putem obține a doua configurație din prima. Atașăm unei configurații o permutare din S_{16} numerotând pătrățele ca în prima figură și în plus numerotăm cu 16 pătrățelul liber din această configurație.

Pentru a înțelege mai bine această construcție o ilustrăm printr-un exemplu. Configurației

12	2	15	8
1	3	14	4
10		9	13
7	11	5	6

îi atașăm permutarea

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 12 & 2 & 15 & 8 & 1 & 3 & 14 & 4 & 10 & 16 & 9 & 13 & 7 & 11 & 5 & 6 \end{array} \right).$$

Al doilea rând se obține atașând numărului fiecărui pătrățel numărul din pătrățelul respectiv sau 16 dacă pătrățelul este liber. Astfel un pas reprezintă înmulțirea cu o transpoziție de forma $(i, 16)$. Deoarece pătrățelul liber se află în același loc în ambele configurații numărul pașilor prin care se poate obține a doua configurație din prima, este par deci și numărul transpozițiilor cu care înmulțim permutările corespunzătoare. Astfel permutările atașate celor două configurații sunt de aceeași paritate. Pe de altă parte cele două permutări sunt

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \right) \text{ și}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 15 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

deci au parități diferite.

3. Să se demonstreze că ecuația $\sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ nu are soluții în S_6 .

Soluție. Folosind teorema precedentă avem $\varepsilon(\sigma^4) = (\varepsilon(\sigma))^4 = 1$, deci dacă ecuația

dacă ar avea soluție, atunci permutarea $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ ar fi o permutare

pară. Pe de altă parte $\varepsilon(\varphi) = (-1)^7 = -1$, deci ecuația nu poate avea nici o soluție.

4. Să se determine cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\sigma^n = e_{16}$, unde

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 7 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

Soluție. Descompunem permutarea în cicluri disjuncte.

$$\sigma = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)(7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13) = c_1 c_2.$$

Datorită comutativității înmulțirii ciclurilor disjuncte obținem

$$\sigma^n = c_1^n c_2^n.$$

Pe de altă parte dacă c_1 și c_2 sunt cicluri disjuncte, atunci c_1^n și c_2^n sunt permutări disjuncte, deci egalitatea precedentă este adevărată dacă și numai dacă

$$c_1^n = e_{16} \text{ și } c_2^n = e_{16}.$$

Dar dacă c este un r ciclu, atunci c^m este permutare identică dacă și numai dacă m se divide cu r , deci n trebuie să fie un număr divizibil cu 6 și cu 7. Astfel cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea cerută este 42.

Exerciții și probleme propuse

1. Calculați $\sigma\tau$ și $\tau\sigma$ dacă

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 8 & 5 & 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 8 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

2.* Descompuneți în cicluri disjuncte următoarele permutări și calculați σ^{2006} :

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; **b)** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;



$$\text{c) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}; \text{d) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 6 & 3 & 7 & 4 & 2 & 9 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Determinați cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\sigma^n = e_{10}$, dacă

$$\text{a) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 6 & 3 & 7 & 4 & 2 & 9 & 10 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 7 & 10 & 4 & 8 & 6 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Calculați inversele permutărilor din exercițiile precedente.

5. Demonstrați că pentru orice $\sigma \in S_n$ există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^p = e_n$.

6. Demonstrați că dacă $\sigma x = x \sigma$, pentru orice $x \in S_n$, atunci σ este permutarea identică din S_n .

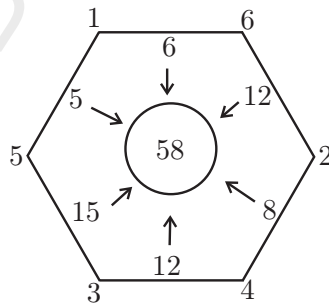
7. Rezolvați în S_7 ecuația $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Arătați că ecuația $x^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ nu are nici o soluție în S_5 .

9. Considerăm numerele $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Determinați permutarea $\sigma \in S_n$ pentru care suma $\sum_{k=1}^n a_k a_{\sigma(k)}$ este minimă (respectiv maximă).

10. În vârfurile unui poligon regulat cu n laturi scriem numerele $1, 2, \dots, n$. Pe fiecare latură scriem produsul numerelor din cele două capete. Determinați aranjarea numerelor din vârfuri astfel ca suma numerelor de pe laturi să fie minimă (în figura de mai jos am ilustrat aranjarea optimală pentru $n = 6$)

(András Szilárd, Concursul Vojtěch Jarník, 2002, Ostrava)



II. MATRICE

Unele mărimi întâlnite în viața de zi cu zi nu pot fi exprimate cu un singur număr. Câteodată este necesar un șir sau un tabel de numere. Asemenea tabele am întocmit și în anii precedenți de studii. De exemplu pentru a reprezenta cheltuielile familiale este mult mai ușor să scriem valorile într-un tabel :

Luna	Cheltuieli comune	Alimente	Îmbrăcăminte	Altele
Noiembrie	250	500	500	750
Decembrie	400	1000	1200	1000

În capitolul acesta vom introduce noțiunea de matrice. Deja în secolul al IV-lea î.Hr. au fost folosite pentru rezolvarea sistemelor liniare, dar noțiunea de matrice a fost introdusă abia în 1850 de James Joseph Sylvester (1814-1897). Mulți alți matematicieni au contribuit la crearea teoriei matricelor dintre care cel mai important de menționat Arthur Cayley (1821-1895). Matricele se folosesc în nenumărate domenii ale științei (modele economice, criptografie, teoria grafurilor, echilibrul corpurilor rigide, genetică etc.).

Exemple. 1. Tabelul din introducere, se mai poate scrie și în forma

$\begin{pmatrix} 250 & 500 & 500 & 750 \\ 400 & 1000 & 1200 & 1000 \end{pmatrix}$, dacă cunoaștem conținutul primei linii și al primei coloane.

2. Dacă vrem să reprezentăm distanțele între orașele A , B , C și D două câte două pe cale ferată respectiv pe șosea, cea mai comodă formă de reprezentare este (distanțele pe cale ferată sub diagonală, cele pe șosea deasupra diagonalei):

	A	B	C	D
A	0	120 km	200 km	155 km
B	100 km	0	80 km	110 km
C	190 km	90 km	0	160 km
D	150 km	100 km	150 km	0

sau

$$\begin{pmatrix} 0 & 120 & 200 & 155 \\ 100 & 0 & 80 & 110 \\ 190 & 90 & 0 & 160 \\ 150 & 100 & 150 & 0 \end{pmatrix}$$

Definiție. Fie $(m, n \in \mathbb{N}^*)$. Numim *matrice de tip $m \times n$* peste \mathbb{R} (sau \mathbb{C}) o funcție:

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ (sau } \mathbb{C} \text{)} .$$



Observații

1. Dacă notăm $A(i, j) = a_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, matricei A i se poate asocia un tablou dreptunghiular cu m linii și n coloane de numere reale (respectiv complexe), pe care îl vom nota tot cu A . Vom spune că matricea A are m linii și n coloane. În general o matrice A se reprezintă sub forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

2. Se mai folosesc notațiile: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ sau $A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\|$.

3. Notăm cu $M_{m,n}(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor cu m linii și n coloane și cu elemente reale. Deci $M_{m,n}(\mathbb{R})$ este mulțimea matricelor reale de tip $m \times n$. În mod analog cu $M_{m,n}(X)$ notăm mulțimea matricelor de tip $m \times n$ cu elemente din mulțimea X .

4. Matricele pentru care $m = n$ se numesc **matrice pătratice**, iar mulțimea matricelor pătratice de tip $n \times n$ cu elemente din mulțimea X se notează cu $M_n(X)$.

5. Matricele de tip $1 \times n$, adică cu o singură linie se numesc **matrice linie**, iar cele de tip $m \times 1$, adică cu o singură coloană se numesc **matrice coloană**.

6. Matricele linie și coloană se pot identifica cu un element din \mathbb{C}^n (sau \mathbb{R}^n etc.) și se mai numesc **vectori**.

OPERAȚII CU MATRICE**1. Înmulțirea unei matrice cu un scalar**

Pentru prepararea a două torturi avem nevoie de următoarele materii prime (celelalte ingrediente le-am procurat deja): pentru primul tort 150 g zahăr, 50 g făină, 8 ouă, 300 g de căpșuni, iar pentru al doilea tort 120 g zahăr, 80 g făină, 6 ouă, 200 g de ciocolată.

Datele acestea le putem reprezenta în următorul tabel, respectiv matricea:

	Zahăr	Făină	Ouă	Căpșuni	Ciocolată
T_1	150 g	50 g	8	300 g	0
T_2	120 g	80 g	6	0	200 g

$$X = \begin{pmatrix} 150 & 50 & 8 & 300 & 0 \\ 120 & 80 & 6 & 0 & 200 \end{pmatrix}$$

Dacă vrem să preparăm numai jumătate de porție, trebuie să înmulțim fiecare element

al matricei cu 0,5 astfel obținem matricea $Y = \begin{pmatrix} 75 & 25 & 4 & 150 & 0 \\ 60 & 40 & 3 & 0 & 100 \end{pmatrix}$.

De fapt am introdus în cele de mai sus înmulțirea unei matrice cu un număr real (complex, etc.)

Definiție. Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ și $\lambda \in \mathbb{C}$, atunci $\lambda \cdot A = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, unde $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, $\forall i = \overline{1,m}$, $\forall j = \overline{1,n}$, adică $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$.

Exemple. $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -i & i & -2 \\ 0 & 1 & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 3i & -2i \\ 1 & -1-2i & -2 \\ 0 & i & 1+i \end{pmatrix}$.

2. Adunarea matricelor

Dacă vrem să calculăm în exemplul precedent cantitatea ingredientelor pentru o porție și jumătate, putem să înmulțim matricea X cu 1,5 sau să adunăm elementele corespunzătoare ale matricei X cu cele ale lui Y :

$$\begin{aligned} X + Y &= \begin{pmatrix} 150 + 75 & 50 + 25 & 8 + 4 & 300 + 150 & 0 + 0 \\ 120 + 60 & 80 + 40 & 6 + 3 & 0 + 0 & 200 + 100 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 225 & 75 & 12 & 450 & 0 \\ 180 & 120 & 9 & 0 & 300 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definiție. Dacă $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ și $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, atunci

$$A + B = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}, \text{ unde } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ adică } A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

De fapt a aduna două matrice de același tip (doar acestea se pot aduna) înseamnă să adunăm elementele corespunzătoare, adică de pe aceeași linie și aceeași coloană.

Exemple. 1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1+i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1+i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 1 & 32 & -54 \\ 2 & 0 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 32 & -54 \\ 2 & 0 & 21 \end{pmatrix}$;

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$5. \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$7. 2 \cdot \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3+3i & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6+6i & -12 & 0 \\ 0 & -12 & 18 & -6 \end{pmatrix};$$

$$8. 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6+6i & -12 & 0 \\ 0 & -12 & 18 & -6 \end{pmatrix};$$

$$9. (-3+i) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+i & 3-i \\ 0 & -1-3i \end{pmatrix};$$

$$10. (-3) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & -i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+i & 3-i \\ 0 & -1-3i \end{pmatrix};$$

$$11. 2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & i \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -i \\ 3+i & -1 \end{pmatrix} \right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2i & 2 \end{pmatrix};$$

$$12. 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -i \\ 3+i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -2i \\ 6+2i & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2i & 2 \end{pmatrix}$$

Pe baza exemplurilor de mai sus intuim că proprietățile adunării numerelor complexe (comutativitate, asociativitate, existența elementului neutru respectiv a opusului) sunt adevărate și la adunarea matricelor. Să verificăm aceste proprietăți în cazul general.

Fie $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, $C = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$. Atunci folosind proprietățile adunării numerelor complexe avem:

$$1. A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = (b_{ij} + a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = B + A,$$

$$2. (A + B) + C = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} + (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = \\ = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} + (b_{ij} + c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = A + (B + C);$$

$$3. \text{Notând } O_{m,n} = (o_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \text{ cu } o_{ij} = 0 \quad \forall i = \overline{1,m}, \forall j = \overline{1,n}, \text{ avem}$$

$$A + O_{m,n} = (a_{ij} + 0)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = A = O_{m,n} + A.$$

4. Pentru matricea $A' = (-a_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}}$, avem $A + A' = (a_{ij} - a_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} = O_{m,n} = A' + A$;

notăm $A' = -A$ și numim opusul matricei A . Mai mult $-A = (-1) \cdot A$.

5. Evident pentru $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \cdot O_{m,n} = O_{m,n}$, iar $0 \cdot A = O_{m,n}$.

Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, avem

6. $\alpha(\beta A) = \alpha \cdot (\beta a_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} = [\alpha(\beta a_{ij})]_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} = [(\alpha\beta) a_{ij}]_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} = (\alpha\beta)(a_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} = (\alpha\beta)A$;

7. $(\alpha + \beta)A = [(\alpha + \beta)a_{ij}]_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} = (\alpha a_{ij} + \beta a_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} + (\beta a_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} = \alpha A + \beta A$;

8. $\alpha(A + B) = [\alpha(a_{ij} + b_{ij})]_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} + (\alpha b_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} = \alpha A + \alpha B$.

3. Înmulțirea matricelor

Să considerăm exemplul de la început și următoarele date:

prețurile în două unități comerciale diferite sunt: în unitatea A 1 kg de zahăr costă 3 lei, 1 kg de făină 2,5 lei, un ou 0,3 lei, 1 kg de căpșuni 7 lei, 1 kg de ciocolată 20 lei; în unitatea B prețurile sunt: 1 kg de zahăr 2,8 lei, 1 kg de făină 3 lei, un ou 0,4 lei, 1 kg de căpșuni 6 lei, 1 kg de ciocolată 22 lei.

Reprezentăm aceste date în următorul tabel:

	Zahăr	Făină	Ouă	Căpșuni	Ciocolată
Preț A (lei/kg sau buc.)	3	2,5	0,3	7	20
Preț B (lei/kg sau buc.)	2,8	3	0,4	6	22

Vrem să calculăm în care dintre cele două unități merită mai mult să facem cumpărăturile. Prețul ingredientelor pentru primul tort în prima unitate este

$$p_{11} = 0,15 \cdot 3 + 0,05 \cdot 2,5 + 8 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 7 + 0 \cdot 20 = 5,075.$$

În a doua unitate prețul este

$$p_{12} = 0,15 \cdot 2,8 + 0,05 \cdot 3 + 8 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 6 + 0 \cdot 22 = 5,57.$$

Prețul ingredientelor tortului al doilea în prima unitate:

$$p_{21} = 0,12 \cdot 3 + 0,08 \cdot 2,5 + 6 \cdot 0,3 + 0 \cdot 7 + 0,2 \cdot 20 = 6,36,$$

iar în a doua unitate

$$p_{22} = 0,12 \cdot 2,8 + 0,08 \cdot 3 + 6 \cdot 0,4 + 0 \cdot 6 + 0,2 \cdot 22 = 7,376.$$

Este clar că merită să facem cumpărăturile în prima unitate. Dar procedeul e important din alt punct de vedere.

Fie $X = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,05 & 8 & 0,3 & 0 \\ 0,12 & 0,08 & 6 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$ matricea cantităților și $Y = \begin{pmatrix} 3 & 2,8 \\ 2,5 & 3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 7 & 6 \\ 20 & 22 \end{pmatrix}$ cea a

prețurilor în cele două unități reprezentate pe coloane. Observăm că p_{11} a fost obținut



prin înmulțirea elementelor din prima linie a matricei X cu elementele corespunzătoare din prima coloană a matricei Y și însumate. Analog p_{12} din prima linie a matricei X și a doua coloană a matricei Y șamd. Evident pentru a putea efectua aceste operații este necesar ca numărul coloanelor matricei X să fie același cu numărul liniilor matricei Y .

Matricea astfel obținută $\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ este produsul matricelor X și Y .

Definiție. Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\overline{m} \\ j=1,\overline{n}}} \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\overline{n} \\ j=1,\overline{p}}} \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci

produsul acestor matrice este matricea $A \cdot B = (c_{ij})_{\substack{i=1,\overline{m} \\ j=1,\overline{p}}} \in M_{m,p}(\mathbb{C})$ cu $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$.

Exemple

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-7) \\ (-3) \cdot 1 + 4 \cdot (-2) & (-3) \cdot (-3) + 4 \cdot (-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -17 \\ -11 & -19 \end{pmatrix};$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) + (-2) \cdot 0 \\ 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + (-4) \cdot 0 \\ 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -17 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4. \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}; \quad 6. \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix};$$

$$7. \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad 8. \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$9. \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad 10. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$11. 2 \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix};$$

$$12. 2 \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix};$$

$$13. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix};$$

$$14. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$15. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$16. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$17. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$18. \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad 19. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$20. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 21. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ca și la adunare intuim câteva proprietăți (asociativitate, distributivitate, existența elementului neutru pentru matrice pătratice). Să le verificăm în caz general.

1. Din exemplele 3. și 4. observăm că înmulțirea matricelor nu este comutativă; mai mult, dacă există produsele AB și BA nu sunt matrice de același tip, doar în cazul matricelor pătratice, dar nici în acest caz nu avem neapărat comutativitate (exemplele 5., 6., 7. și 8.).

2. Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ avem:

$$(\alpha A)B = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} (b_{jk})_{\substack{j=1,n \\ k=1,p}} = (c_{ik})_{\substack{i=1,m \\ k=1,p}}, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n (\alpha a_{ij}) b_{jk} = \sum_{j=1}^n \alpha a_{ij} b_{jk};$$

$$\alpha(AB) = (\alpha d_{ik})_{\substack{i=1,m \\ k=1,p}}, \quad d_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \Rightarrow \alpha d_{ik} = \sum_{j=1}^n \alpha a_{ij} b_{jk};$$

$$A(\alpha B) = (a_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} (\alpha b_{jk})_{\substack{j=1,n \\ k=1,p}} = (e_{ik})_{\substack{i=1,m \\ k=1,p}}, \quad e_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (\alpha b_{jk}) = \sum_{j=1}^n \alpha a_{ij} b_{jk}.$$

Deci $(\alpha A) \cdot B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$.

3. Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $B, C \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, avem

$$A(B+C) = \left(a_{ij} \right)_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} \left(b_{jk} + c_{jk} \right)_{\substack{j=1,n \\ k=1,p}} = \left(d_{ik} \right)_{\substack{i=1,m \\ k=1,p}}, \quad d_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^n (a_{ij} b_{jk} + a_{ij} c_{jk}),$$

$$AB + AC = \left[e_{ik} + f_{ik} \right]_{\substack{i=1,m \\ k=1,p}}, \quad e_{ik} + f_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} b_{jk} + a_{ij} c_{jk}).$$

Deci $A \cdot (B+C) = AB + AC$.

Analog se poate arăta că pentru $A \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, $B, C \in M_{m,n}(\mathbb{C})$

$$(B+C) \cdot A = BA + CA.$$

4. Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, $C \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ avem:

$$A \cdot B = D \in M_{m,p}(\mathbb{C}), \quad d_{ik} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk},$$

$$(AB)C = D \cdot C = E \in M_{m,p}(\mathbb{C}),$$

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^p d_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} c_{kj},$$

$$B \cdot C = F \in M_{n,q}(\mathbb{C}), \quad f_{lj} = \sum_{k=1}^p b_{lk} c_{kj},$$

$$A \cdot (BC) = AF = G \in M_{m,q}(\mathbb{C}), \quad g_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} f_{lj} = \sum_{l=1}^n a_{il} \sum_{k=1}^p b_{lk} c_{kj} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p a_{il} b_{lk} c_{kj}.$$

Din aceste exprimări deducem că proprietatea de asociativitate se reduce la proprietatea de invarianță față de ordinea sumării a sumelor duble $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$. Așadar

dacă arătăm că $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij}$, atunci rezultă că $e_{ij} = g_{ij}$, deci are loc și relația $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Lemă. Dacă $x_{ij} \in \mathbb{C}$ pentru $i = \overline{1, m}$ și $j = \overline{1, n}$, atunci

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij}. \quad (*)$$

Demonstrație. Considerăm matricea $X = \left(x_{ij} \right)_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}}$. $\sum_{j=1}^n x_{ij}$ este suma elementelor

de pe linia i , deci suma $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$ este suma sumelor de pe liniile matricei X . Pe de

altă parte $\sum_{i=1}^m x_{ij}$ este suma elementelor de pe coloana j , deci $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij}$ reprezintă

suma sumelor elementelor de pe toate coloanele. În ambele cazuri am calculat suma tuturor elementelor matricei X și, datorită comutativității, aceste două moduri de calcul a sumei conduc la același rezultat.

5. Fie $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{C})$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pentru } i = j \\ 0, & \text{pentru } i \neq j \end{cases}$ (δ_{ij} este

simbolul lui *Kronecker*). Pentru $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{C})$ avem $A \cdot I_n = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$,

unde $b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{kj} = a_{i1} \cdot 0 + \dots + a_{i(j-1)} \cdot 0 + a_{ij} \cdot 1 + a_{i(j+1)} \cdot 0 + \dots + a_{in} \cdot 0 = a_{ij}$.

Deci $A \cdot I_n = A$. Analog $I_n \cdot A = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ cu

$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} a_{kj} = 0 \cdot a_{1j} + \dots + 0 \cdot a_{(i-1)j} + 1 \cdot a_{ij} + 0 \cdot a_{(i+1)j} + \dots + 0 \cdot a_{nj} = a_{ij}$, deci $I_n \cdot A = A$.

Definiție

Matricea $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{C})$ se numește *matricea unitate*.

6. În exemplele 20. și 21. observăm că există matrice prin ale căror înmulțire în orice ordine rezultă matricea unitate. Aceste matrice sunt matrice inverse.

Definiție. Matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$ este inversabilă, dacă există matricea $A' \in M_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea $AA' = A'A = I_n$. Matricea A' se numește *inversa matricei A* și se notează cu A^{-1} .

Observație. Dacă există matricea inversă, atunci ea este unică. Într-adevăr dacă pentru $A'' \in M_n(\mathbb{C})$, $AA'' = A''A = I_n$, atunci avem

$$A'' = A'' \cdot I_n = A''(AA') = (A''A)A' = I_n A' = A'.$$

Definiție. Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$, atunci putem defini *puterile matricei* în modul următor:

$$A^0 = I_n, A^1 = A, A^2 = A \cdot A,$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A^2 = A \cdot A \cdot A,$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A^3 = A^2 \cdot A^2 = A \cdot A \cdot A \cdot A$$

și în general $A^{n+1} = A^n \cdot A$.

Asociativitatea garantează valabilitatea următoarelor proprietăți:

1. $A^m \cdot A^p = A^{m+p}$, $\forall m, p \in \mathbb{N}$, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$;

2. $(A^m)^p = A^{m \cdot p}$, $\forall m, p \in \mathbb{N}$, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$;

3. $(\lambda \cdot A)^m = \lambda^m \cdot A^m$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Pe baza proprietăților demonstrate putem afirma următoarea teoremă:



Teoremă

1. $A + B = B + A, \quad \forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C});$
2. $(A + B) + C = A + (B + C), \quad \forall A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{C});$
3. $A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A, \quad \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C});$
4. $A + (-A) = (-A) + A = O_{m,n} \quad \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C});$
5. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta)A, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C});$
6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C});$
7. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C});$
8. $1 \cdot A = A, \quad \forall A \in M_{n,p}(\mathbb{C});$
9. $(-1) \cdot A = -A, \quad \forall A \in M_{n,p}(\mathbb{C});$
10. $0 \cdot A = O_{m,n}, \quad \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C});$
11. $\alpha \cdot O_{m,n} = O_{m,n}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C};$
12. $A \cdot O_{n,p} = O_{m,p}, \quad O_{p,m} \cdot A = O_{p,n} \quad \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C});$
13. $(\alpha A) \cdot B = \alpha(AB) = A(\alpha B), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), \forall B \in M_{n,p}(\mathbb{C});$
14. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, \quad \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), \forall B \in M_{n,p}(\mathbb{C}), \forall C \in M_{p,q}(\mathbb{C});$
15. $A \cdot (B + C) = AB + AC, \quad \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), \forall B, C \in M_{n,p}(\mathbb{C});$
16. $(B + C) \cdot A = BA + CA, \quad \forall A \in M_{n,p}(\mathbb{C}), \forall B, C \in M_{m,n}(\mathbb{C});$
17. $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A, \quad \forall A \in M_n(\mathbb{C});$
18. $A^m \cdot A^p = A^{m+p}, \quad \forall m, p \in \mathbb{N}, \forall A \in M_n(\mathbb{C});$
19. $(A^m)^p = A^{m \cdot p}, \quad \forall m, p \in \mathbb{N}, \forall A \in M_n(\mathbb{C});$
20. $(\lambda \cdot A)^m = \lambda^m \cdot A^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, \forall A \in M_n(\mathbb{C}), \forall \lambda \in \mathbb{C}.$



Probleme rezolvate

1. Să se arate că matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ verifică ecuația

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2.$$

Demonstrație

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{deci } A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a + d)a & (a + d)b \\ (a + d)c & (a + d)d \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2. \end{aligned}$$

Observație. Dacă $A = (a_{ij})_{i, j=1, \overline{n}}$, atunci elementele a_{ii} , $i = \overline{1, n}$ formează *diagonala principală* a matricei, iar elementele $a_{i(n-i+1)}$ formează *diagonala secundară*. În general dacă A este o matrice pătratică, atunci suma elementelor de pe diagonala principală se numește *urma matricei* și se notează cu $\text{Tr}A$. Deci pentru $A = (a_{ij})_{i, j=1, \overline{n}}$, avem $\text{Tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Numărul $ad - bc$ atașat matricei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ este determinantul matricei și se notează cu $\det A$. Astfel egalitatea din enunț are forma

$$A^2 - (\text{Tr} A)A + (\det A)I_2 = 0_2.$$

Această relație este un caz particular al teoremei *Cayley-Hamilton*.

2. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 3 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 12 & -2 \\ -13 & 11 \end{pmatrix} \end{cases}$$

unde $X, Y \in M_{3,2}(\mathbb{R})$.

Rezolvare. Înmulțim prima ecuație cu 2, a doua cu 3 și adunăm relațiile obținute.

$$4X - 6Y = \begin{pmatrix} 16 & -10 \\ -10 & 6 \\ 0 & -20 \end{pmatrix} \quad \text{Astfel } X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$9X + 6Y = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 36 & -6 \\ -39 & 33 \end{pmatrix} + \quad \text{În mod analog avem}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\hspace{10em}} +$$

$$13X = \begin{pmatrix} 13 & -13 \\ 26 & 0 \\ -39 & 13 \end{pmatrix}$$

Observație. În unele cazuri nu este avantajos să lucrăm separat cu elementele matricelor care intervin în problemă. Dacă considerăm $X = (x_{ij})_{\substack{i=1, \overline{3} \\ j=1, \overline{2}}}$ și

$Y = (y_{ij})_{\substack{i=1, \overline{3} \\ j=1, \overline{2}}}$ atunci pentru elementele x_{ij} și y_{ij} ar fi trebuit să rezolvăm 6 sisteme cu câte două ecuații și câte două necunoscute.

3. Să se arate că dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ și $AB = BA$ atunci

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \text{și} \quad A^2 - B^2 = (A + B)(B - A).$$

Demonstrație

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = (A+B) \cdot A + (A+B) \cdot B = A^2 + BA + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

$$(A+B)(A-B) = (A+B) \cdot A - (A+B) \cdot B = A^2 + BA - AB + B^2 = A^2 - B^2.$$

Observație. Deoarece singura diferență dintre proprietățile operațiilor cu matrice și proprietățile operațiilor cu numere reale este lipsa comutativității la produsul a două matrice, formulele prescurtate de calcul devin adevărate pentru orice două matrice care comută. Astfel avem următoarele relații:

Teoremă. Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ și $AB = BA$, atunci

- a) $A^k - B^k = (A-B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \dots + AB^{k-2} + B^{k-1})$;
- b) $A^{2k+1} + B^{2k+1} = (A+B)(A^{2k} - A^{2k-1}B + \dots - AB^{2k-1} + B^{2k})$;
- c) $(A+B)^k = A^k + C_k^1 A^{k-1}B + C_k^2 A^{k-2}B^2 + \dots + C_k^{k-1} AB^{k-1} + B^k$.

4. Fie $A = (a_{ij})_{i, j=1, \dots, n}$, $B = (b_{ij})_{i, j=1, \dots, n}$ și $\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ respectiv $\text{Tr } B = \sum_{i=1}^n b_{ii}$. Să

se demonstreze următoarele egalități:

- a) $\text{Tr}(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \text{Tr } A$, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$
- b) $\text{Tr}(A+B) = \text{Tr } A + \text{Tr } B$, $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$;
- c) $\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$, $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

Demonstrație

$$\text{a) } \text{Tr}(\lambda \cdot A) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda \text{Tr } A.$$

$$\text{b) } \text{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{Tr } A + \text{Tr } B.$$

c) Notăm cu C și D produsul $A \cdot B$ respectiv $B \cdot A$. Din definiția produsului rezultă

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr } C = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji},$$

$$\text{Tr}(BA) = \text{Tr } D = \sum_{j=1}^n d_{jj} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij}.$$

Pe de altă parte suma dublă este independentă de ordinea sumelor, deci $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Exercițiu. Să se arate că pentru $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ nu putem avea $AB - BA = I_n$.

Rezolvare. Dacă $AB - BA = I_n$, atunci $\text{Tr}(I_n) = \text{Tr}(AB - BA)$. Pe de altă parte $\text{Tr } I_n = n$ și $\text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0$, deci $AB - BA \neq I_n$.

5. Considerăm matricea $A_n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{n} & \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}$, unde $n \geq 1$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Rezolvare. Șirul de matrice $(A_n)_{n \geq 1}$, $A_n = (a_{ij}(n))_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}$ este convergent dacă și numai dacă șirurile $(a_{ij}(n))_{n \geq 1}$ sunt convergente pentru orice $i, j = \overline{1, 2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicație practică

1. Trei stații de purificare a apei primesc apă din trei surse. De la izvorul I , din lacul L și din râul R . Dacă notăm cu S_1 , S_2 și S_3 cele trei stații, atunci cantitatea totală furnizată de surse este distribuită după cum urmează:

I : $1/3$ din cantitate la S_1 , $1/3$ la S_2 și $1/3$ la S_3 ;

L : $1/2$ din cantitate la S_1 , $1/4$ la S_2 și $1/4$ la S_3 ;

R : 0 la S_1 , $1/2$ la S_2 și $1/2$ la S_3 .

Notând cantitățile furnizate la cele trei surse (I, L, R) cu x, y respectiv z , să se calculeze cantitățile obținute de cele trei stații.

Rezolvare. Putem reprezenta datele într-o matrice după cum urmează:

în prima coloană trecem procente de la prima sursă (I),

în a doua coloană trecem procente de la sursa a doua (L),

în ultima coloană trecem procente de la a treia sursă

(astfel ca procente dintr-o linie să corespundă unei stații).

Obținem matricea $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Debitul la prima stație este $d_1 = x \cdot \frac{1}{3} + y \cdot \frac{1}{2} + z \cdot 0$, la a doua stație

$d_2 = x \cdot \frac{1}{3} + y \cdot \frac{1}{4} + z \cdot \frac{1}{2}$ iar la a treia $d_3 = x \cdot \frac{1}{3} + y \cdot \frac{1}{4} + z \cdot \frac{1}{2}$. Dacă considerăm

vectorul $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ care reprezintă debitul la surse, și vectorul $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ care reprezintă

debitul la stații, atunci am obținut relația

$$d = T \cdot v.$$

Observație. Matricea T se numește matrice de tranziție atașată problemei. O matrice a cărei elemente sunt nenegative și în care suma elementelor de pe fiecare coloană este 1 se numește *matrice stohastică* (sau stocastică).

Exerciții

1. Calculați matricele $A + B$, $A - B$, $2A + 3B$ dacă

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Rezolvați ecuațiile matriceale

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } 2X + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Efectuați operațiile:

$$\text{a) } 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (-1 - 2) \right); \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix};$$

$$\text{g) } \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \end{pmatrix}, \text{ unde } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ și } \varepsilon_3 \text{ sunt rădăcinile de ordin 3 ale unității}; \quad \text{h) } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a - b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

4. Calculați A^n , dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $n \in \{2, 3, 4\}$.

5. Calculați expresia $A^2 - 5A + 6I_2$, dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

$$\text{a) } \begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 5 \end{pmatrix} \\ X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -14 \\ -3 & 8 & 15 \end{pmatrix} \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} X + Y = I_2 \\ X \cdot Y = 0_2 \end{cases}.$$

7. Calculați A^2 , A^3 și A^4 , dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$ și ε este o rădăcină de ordin trei a unității.

8. Rezolvați următoarele ecuații

a) $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X \in M_2(\mathbb{C})$; b) $X^2 = I_2$, $X \in M_2(\mathbb{R})$;

c) $X^2 = 0_2$, $X \in M_2(\mathbb{R})$; d) $X^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$, $X \in M_2(\mathbb{R})$.

9. Demonstrați că există o infinitate de matrice $A \in M_2(\mathbb{Z})$, pentru care $A^2 = I_2$.

10. Determinați matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$, pentru care $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Calculați $\sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} \\ \frac{1}{\varepsilon^k} & \frac{1}{\varepsilon^{2k}} & \frac{1}{\varepsilon^{3k}} \end{pmatrix}$, dacă ε este o rădăcină de ordin 3 a unității și $\varepsilon \notin \mathbb{R}$.

CALCULUL PUTERILOR UNEI MATRICE

Raționamente euristice

La definirea operațiilor am văzut că, pentru orice matrice $A \in M_m(\mathbb{C})$ putem defini matricea A^n cu $n \in \mathbb{N}^*$ în mod recursiv. Pe de altă parte în unele situații avem nevoie de forma explicită a matricei A^n . În acest paragraf rezolvăm câteva probleme în care forma generală se poate intui calculând câteva cazuri particulare. Vom folosi numai matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ sau $A \in M_3(\mathbb{C})$.

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze A^n , dacă $n \in \mathbb{N}^*$ și $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluție. Calculăm A^n pentru câteva valori n și încercăm să observăm comportamentul general.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$A^4 = A^3 \cdot A = 0_3$, $A^5 = A^4 \cdot A = 0_3$ și astfel $A^n = 0_3$ pentru orice $n \geq 3$. Astfel avem următorul rezultat:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3, \text{ dacă } n \geq 3.$$

2. Să se calculeze A^n , dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,



$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observăm că nici diagonala și nici elementul de sub diagonală nu se schimbă, iar elementul din colțul superior din dreapta coincide cu exponentul din A^n . Astfel pare o ipoteză plauzibilă relația

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall k \geq 1.$$

Demonstrăm această egalitate prin metoda inducției matematice. Dacă $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, atunci

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci pe baza principiului inducției matematice deducem $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru orice $n \geq 1$.

3. Să se calculeze A^n pentru matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) și $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab + b^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab + b^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ 0 & (a+b)^3 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ 0 & (a+b)^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ 0 & (a+b)^4 \end{pmatrix}.$$

Pe baza acestor egalități putem formula ipoteza

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}, \quad n \geq 1. \quad (*)$$

Demonstrăm această afirmație prin metoda inducției matematice. Dacă $A^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}$ este

adevărată pentru un n fixat, atunci avem

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n b + (a+b)^{n+1} - a^{n+1} - a^n b \\ 0 & (a+b)^{n+1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (a+b)^{n+1} - a^{n+1} \\ 0 & (a+b)^{n+1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

deci A^{n+1} are aceeași formă și astfel pe baza principiului inducției matematice, relația (*) este adevărată pentru orice $n \geq 1$.

Exerciții

Calculați A^n pentru următoarele matrice ($n \in \mathbb{N}^*$):

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **b)** $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$; **c)** $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$; **d)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$; **e)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; **g)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; **h)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; **i)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; **j)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Metoda șirurilor recurente

În paragraful precedent am văzut că după formularea unei ipoteze corecte demonstrația inductivă este de obicei foarte simplă și necesită doar efectuarea unor operații. Pe de altă parte se poate întâmpla că nu putem scrie forma explicită a lui A^n , dar observăm anumite relații între puterile consecutive. În aceste cazuri introducem șiruri și încercăm să concretizăm observațiile noastre în relații de recurențe. Astfel calculul matricei A^n se va reduce la calculul termenului general al unui șir recurent.

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze A^n , dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție. Prima dată calculăm câteva puteri:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pe baza acestor calcule formula generală ar fi ceva de genul:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & ? \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bineînțeles cazul fericit ar fi acela în care observăm că șirul elementelor din colțul superior drept, adică șirul 1, 3, 6, 10, ... are proprietatea că șirul diferențelor termenilor consecutivi (2, 3, 4, ...) coincide cu șirul exponenților. Astfel elementul din colțul superior drept ar fi $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Dacă am

reușit să formulăm această ipoteză, atunci demonstrația necesită numai efectuarea unui produs. Pe de altă parte se poate întâmpla să nu observăm această formulă. În acest caz să notăm cu a_n elementul din colțul superior drept al matricei A^n .

Astfel $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & a_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pentru orice $n \geq 1$, unde $(a_n)_{n \geq 1}$ este un șir necunoscut. Efectuând produsul

$A^n \cdot A$ putem determina o recurență pentru șirul $(a_n)_{n \geq 1}$:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n & a_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & a_n + n + 1 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deci pe de o parte am demonstrat (inductiv) că egalitatea $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & a_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este valabilă pentru orice

$n \geq 1$, iar pe de altă parte am obținut o relație de recurență pentru șirul $(a_n)_{n \geq 1}$: $a_{n+1} = a_n + (n+1)$.

Pe baza acestei recurențe avem:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + n \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + (n-1) \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + (n-2) \\ &\dots \\ a_3 &= a_2 + 3 \\ a_2 &= a_1 + 2 \end{aligned}$$

$$a_n = a_1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Astfel pentru orice $n \geq 1$ avem

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & \frac{n}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observație. Dacă formula pentru elementul din colțul superior drept a provenit dintr-o observație, atunci demonstrația inductivă este necesară, dar dacă am folosit șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, atunci acest pas este de prisos, deoarece obținerea recurenței este practic echivalentă cu pasul inductiv.

2. Să se calculeze A^n , dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $A^6 = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$.

Pe baza calculului precedente nu putem formula o ipoteză privind termenul general, dar putem observa mai multe proprietăți simple:

- elementele de pe diagonala secundară sunt egale;
- elementul din colțul superior stâng este egal cu suma elementelor de pe ultima coloană ($1 = 1 + 0$, $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $5 = 3 + 2$, $8 = 5 + 3$, $13 = 8 + 5$)
- unele elemente din A^n se găsesc și în A^{n+1} , mai precis elementul din colțul superior stânga în A^n este identic cu elementele de pe diagonala secundară din A^{n+1} , etc.

Pe baza acestor observații A^n are următoarea formă:

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n + b_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Astfel avem

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_n + b_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + 2b_n & a_n + b_n \\ a_n + b_n & b_n \end{pmatrix},$$

deci într-adevăr $a_{n+1} = b_n$ și $b_{n+1} = a_n + b_n$. Din aceste relații deducem $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, pentru $n \geq 1$. Termenul general al acestui șir se poate căuta sub forma $a_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n$, unde $r_{1,2}$ sunt rădăcinile ecuației $r^2 - r - 1 = 0$. Din condițiile $a_1 = 0$ și $a_2 = 1$ determinăm constantele c_1 și c_2 și ajungem la formula

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right],$$

deci

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Observație. Cu notația $F_n = a_{n+1}$ apare șirul lui Fibonacci, deci

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Această reprezentare poate fi utilă chiar și în demonstrarea unor proprietăți referitoare la șirul lui Fibonacci.

În paragraful următor vom vedea că de obicei elementele matricei A^n satisfac aceeași recurență.

Exerciții

Calculați A^n , dacă $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $A = \begin{pmatrix} -a & a & a \\ a & -a & a \\ a & a & -a \end{pmatrix}$; **b)** $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$; **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{e) } A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{f) } A = \begin{pmatrix} a & 2b & a \\ b & 2a & b \\ a & 2b & a \end{pmatrix}.$$

Metoda ecuației caracteristice

Pe baza teoremei Cayley-Hamilton ($n = 2$) matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, verifică egalitatea

$$A^2 = (a + d)A - (ad - bc)I_2.$$

Astfel pentru orice $n \geq 1$ obținem

$$A^{n+2} = (a + d)A^{n+1} - (ad - bc)A^n.$$

Deci dacă $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, pentru orice $n \geq 1$, atunci

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} & b_{n+2} \\ c_{n+2} & d_{n+2} \end{pmatrix} = (a + d) \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} - (ad - bc) \cdot \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

de unde rezultă că șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$, $(c_n)_{n \geq 1}$ și $(d_n)_{n \geq 1}$ satisfac recurența $x_{n+2} = (a + d)x_{n+1} - (ad - bc)x_n$, numai valorile inițiale sunt diferite. Această recurență este o recurență liniară de ordinul doi și avem următoarea teoremă de reprezentare pentru termenul general

$$a_n = \begin{cases} c_1 r_1^n + c_2 r_2^n, & \text{dacă } \Delta > 0 \\ (c_1 n + c_2) r^n, & \text{dacă } \Delta = 0 \\ r^n (c_1 \cos n\varphi + c_2 \sin n\varphi), & \text{dacă } \Delta < 0 \end{cases},$$

unde Δ este discriminantul ecuației $r^2 - (a + d)r + (ad - bc) = 0$; r_1 și r_2 sunt rădăcinile acestei ecuații în cazul $\Delta > 0$, r este rădăcina în cazul $\Delta = 0$ iar $r \cdot (\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$ sunt rădăcinile în cazul $\Delta < 0$. Această teoremă de reprezentare se poate demonstra prin inducție.

Folosind această metodă putem calcula A^n pentru orice matrice A de ordinul 2.

Observație. După demonstrarea teoremei Cayley-Hamilton pentru matrice de ordinul n putem extinde această metodă la matrice arbitrare.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze A^n , dacă $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$.

Rezolvare. $\text{Tr } A = 7 + 11 = 18$, $\det A = 77 - 12 = 65$, deci ecuația caracteristică este $r^2 - 18r + 65 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = 5$ și $r_2 = 13$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 & 54 \\ 72 & 133 \end{pmatrix}$, deci dacă $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, atunci

$$a_n = k_1 \cdot 5^n + k_2 \cdot 13^n$$

$$b_n = k_3 \cdot 5^n + k_4 \cdot 13^n$$

$$c_n = k_5 \cdot 5^n + k_6 \cdot 13^n$$

$$d_n = k_7 \cdot 5^n + k_8 \cdot 13^n,$$

unde constantele k_1, k_2, \dots, k_8 se pot determina din condițiile inițiale (pentru aceste condiții am calculat A^2).

$$\text{Din } a_1 = 7 \text{ și } a_2 = 61 \text{ obținem sistemul } \begin{cases} 5k_1 + 13k_2 = 7 \\ 25k_2 + 169k_2 = 61 \end{cases}$$

deci $k_1 = \frac{3}{4}$ și $k_2 = \frac{1}{4}$. În mod analog deducem $k_3 = -\frac{1}{8}$, $k_4 = \frac{3}{8}$, $k_5 = -\frac{1}{2}$, $k_6 = \frac{1}{2}$, $k_7 = \frac{1}{4}$ și $k_8 = \frac{3}{4}$, deci pentru orice $n \geq 1$ avem

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot 5^n + 13^n}{4} & \frac{3 \cdot (13^n - 5^n)}{8} \\ \frac{13^n - 5^n}{2} & \frac{5^n + 3 \cdot 13^n}{4} \end{pmatrix}.$$

2. Să se calculeze A^n , dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Rezolvare. $\text{Tr } A = 4$, $\det A = 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) = 4$, deci ecuația caracteristică este $r^2 - 4r + 4 = 0$ și rădăcinile sunt $r_{1,2} = 2$. Dacă $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, pentru $n \geq 1$ atunci șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$, $(c_n)_{n \geq 1}$ și $(d_n)_{n \geq 1}$ satisfac recurența $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$ și astfel termenul general al acestor șiruri are forma

$(k_1 n + k_2) \cdot 2^n$. Dar $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, deci $a_1 = 1$ și $a_2 = 0$, adică $\begin{cases} k_1 + k_2 = \frac{1}{2} \\ 2k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$. Rezolvând sistemul

deducem $k_1 = -\frac{1}{2}$ și $k_2 = 1$, deci $a_n = 2^{n-1} \cdot (2 - n)$ pentru orice $n \geq 1$. În mod similar obținem $b_n = -n \cdot 2^{n-1}$, $c_n = n \cdot 2^{n-1}$ și $d_n = 2^{n+1} \cdot (2 + n)$, deci pentru orice $n \geq 1$ avem

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(2-n) & -n \cdot 2^{n-1} \\ n \cdot 2^{n-1} & 2^{n+1}(2+n) \end{pmatrix}.$$

3. Să se calculeze A^n , dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Rezolvare. $\text{Tr } A = 2$, $\det A = 4$, deci ecuația caracteristică este $r^2 - 2r + 4 = 0$ cu rădăcinile $r_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3} = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.

Cu notația $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ avem $a_n = 2^n \cdot \left(k_1 \cdot \cos \frac{n\pi}{3} + k_2 \cdot \sin \frac{n\pi}{3} \right)$. $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$, deci obținem

sistemul $\begin{cases} k_1 + k_2 \sqrt{3} = 0 \\ -k_1 + k_2 \sqrt{3} = -2 \end{cases}$. Soluțiile sistemului sunt $k_1 = 1$ și $k_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, deci

$$a_n = 2^n \cdot \left(\cos \frac{n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sin \frac{n\pi}{3} \right).$$

În mod analog obținem

$$b_n = -\frac{2^n \sqrt{3}}{3} \sin \frac{n\pi}{3}, \quad c_n = 2^{n+2} \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{n\pi}{3}, \quad d_n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{n\pi}{3} \right),$$

deci

$$A^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{n\pi}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{n\pi}{3} \\ \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin \frac{n\pi}{3} & \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{n\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

Observație. Calculând A^6 , observăm că $A^6 = 2^6 I_2$ și astfel putem calcula A^n și fără ecuația caracteristică.

Această metodă se poate aplica la calculul matricei A^n pentru orice matrice A . În unele cazuri totuși există și metode mai simple. În următoarele două paragrafe prezentăm două astfel de situații.

Exerciții

Calculați A^n pentru următoarele matrice, dacă $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculul puterilor unei matrice de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Matricea $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ se poate scrie și astfel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

unde $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$.

Pe de altă parte, folosind formulele trigonometrice cunoscute avem

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ -(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) & \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix}, \text{ deci } \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Deci $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^n = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$, unde $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$.

Exerciții

Calculați A^n în cazul matricelor: **a)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

Metoda descompunerii

La studiul proprietăților operațiilor cu matrice am văzut că dacă $AB = BA$, ($A, B \in M_n(\mathbb{C})$), atunci

$$(A + B)^k = A^k + C_k^1 A^{k-1} B + C_k^2 A^{k-2} B^2 + \dots + C_k^{k-1} A B^{k-1} + B^k.$$

Astfel dacă matricea X se poate reprezenta ca sumă a două matrice care comută, atunci calculul puterilor lui X se reduce la calculul puterilor matricelor din descompunere și la calculul unor sume. Cel mai simplu caz este când un termen al sumei este de forma $\alpha \cdot I_n$, deoarece în acest caz $\alpha I_n \cdot B = B \cdot \alpha I_n$.


Problemă

Folosind această metodă să se calculeze puterile matricelor $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Soluție. $X = a \cdot I_2 + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$, deci avem de calculat puterile matricii $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$. $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & b^2 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$,
 $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & b^3 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$ și astfel putem formula ipoteza

$$B^n = \begin{pmatrix} 0 & b^n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Demonstrația inductivă a acestei proprietăți se rezumă la $\begin{pmatrix} 0 & b^n \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b^{n+1} \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$. Pe de altă parte

$(a \cdot I_2)^n = a^n \cdot I_2$, deci avem

$$X^n = a^n I_2 + C_n^1 a^{n-1} B + C_n^2 a^{n-2} B^2 + C_n^3 a^{n-3} B^3 + \dots + C_n^n a^0 B^n =$$

$$\begin{pmatrix} a^n & C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b \\ 0 & a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n \end{pmatrix}.$$

Folosind teorema de dezvoltare a binomului

$$a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n = (a+b)^n,$$

obținem

$$X^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}.$$

$Y = a \cdot I_3 + \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, deci avem de calculat puterile matricii $C = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Acestea se pot calcula

foarte simplu $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, deci

$$Y^n = a^n I_3 + C_n^1 a^{n-1} C + C_n^2 a^{n-2} C^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C_n^1 a^{n-1} b & C_n^1 a^{n-1} c \\ 0 & 0 & C_n^1 a^{n-1} b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_n^2 a^{n-2} b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^n & n \cdot a^{n-1} b & n \cdot a^{n-1} c + \frac{n(n-1)}{2} \cdot a^{n-2} b^2 \\ 0 & a^n & n \cdot a^{n-1} b \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Exerciții

Calculați puterile următoarelor matrice:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicații practice**1. Modelul forței de muncă**

Într-o societate un individ apt de muncă se poate afla, la un moment dat t , în una din următoarele trei stări:

s_1 -individul lucrează în specialitatea sa;

s_2 -individul lucrează în altă specialitate;

s_3 -individul nu lucrează.

Notăm cu p_{ij} procentul acelor din starea s_i , care în intervalul de timp $[t, t + \Delta t)$ trec la starea s_j și cu

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ numărul indivizilor în cele trei stări la momentul $t + n\Delta t$.

a) Să se deducă o reprezentare pentru x_n, y_n, z_n în funcție de x_0, y_0, z_0 și matricea $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$.

b) Dacă $P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$, atunci să se obțină datele unui stadiu de echilibru (echilibrul înseamnă

că numărul indivizilor în cele trei stări este constant).

c) Demonstrați că dacă \bar{x}, \bar{y} și \bar{z} reprezintă numărul de indivizi în starea echilibru, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{y}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \bar{z}$.

Rezolvare. La momentul $t + (n+1)\Delta t$ cei care sunt în starea s_i provin din stările s_1, s_2 și s_3 și anume $p_{1i}x_n$ din starea s_1 , $p_{2i}y_n$ din starea s_2 și $p_{3i}z_n$ din starea s_3 . Deci obținem următoarele

$$\begin{cases} x_{n+1} = p_{11}x_n + p_{21}y_n + p_{31}z_n \\ y_{n+1} = p_{12}x_n + p_{22}y_n + p_{32}z_n \\ z_{n+1} = p_{13}x_n + p_{23}y_n + p_{33}z_n \end{cases}$$

recurențe:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix},$$

Sub formă matriceală avem

unde $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$. Din această egalitate deducem

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = (P^t)^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 1,$$

deci evoluția structurii sociale se poate modela calculând puterile unei matrice.

b) Dacă $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$ este o stare de echilibru atunci $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = P^t \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$, deci obținem sistemul:

$$\begin{cases} 0,7\bar{x} + 0,1\bar{y} + 0,1\bar{z} = \bar{x} \\ 0,2\bar{x} + 0,6\bar{y} + 0,1\bar{z} = \bar{y} \\ 0,1\bar{x} + 0,1\bar{y} + 0,8\bar{z} = \bar{z} \end{cases}$$

Rezolvând sistemul rezultă $\bar{x} = 0,25N$, $\bar{y} = 0,25N$ și $\bar{z} = 0,25N$, unde N este numărul total de indivizi din populație.

c) Prin ridicări succesive la pătrat putem demonstra că

$$(P^t)^{32} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

și astfel pe baza punctului b) rezultă că șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$, $(y_n)_{n \geq 1}$ și $(z_n)_{n \geq 1}$ sunt constante de la un rang încolo.

Observații. 1. O matrice A se numește dublu stohastică dacă matricele A și tA sunt stohastice.

2. Proprietatea de mai înainte este valabilă și în general. Dacă A este o matrice dublu stohastică, atunci există o matrice B astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = B$ (adică $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{ij}^{(n)} = b_{ij}$, unde $A^n = (a_{ij}^{(n)})_{1 \leq i, j \leq m}$).

2. Un model din biomatematică

Să considerăm două specii de animale care se vânează reciproc (de exemplu hienele și leii în savana africană). Dacă notăm cu x_n și y_n numărul indivizilor după n ani din cele două specii, atunci modelăm următoarele două fenomene:

a) nașterea unor indivizi noi și dispariția altora conduce la modificarea numărului total al speciei respective cu un procent p ; p poate fi negativ dacă mortalitatea este mai mare decât natalitatea; Fie procentul 10% pentru hiene și -10% pentru lei

b) cealaltă specie ucide un număr de indivizi direct proporțional cu numărul prădătorilor. Fie acest raport 15% în cazul hienelor uciși de lei, iar 20% în cazul leilor uciși de hiene.

Astfel obținem următoarele recurențe:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1,1 \cdot x_n - 0,15 \cdot y_n \\ y_{n+1} = 0,9 \cdot y_n - 0,2 \cdot x_n \end{cases}$$

Sub formă matriceală avem

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,15 \\ -0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ de unde } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

deci evoluția numărului de indivizi din cele două specii depinde de comportarea funcției $f(n) = A^n$,

$$\text{unde } A = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,15 \\ -0,2 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Fie $x_0 = 100$ numărul inițial al hienelor și $y_0 = 200$ numărul inițial al leilor. Pentru a vedea cum se

comportă numărul indivizilor din cele două specii, trebuie să calculăm matricea A^n . $\text{Tr } A = 2$, $\det A = 0,96$, deci ecuația caracteristică este $r^2 - 2r + 0,96 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = 0,8$ și $r_2 = 1,3$,

deci dacă $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, atunci

$$\begin{aligned} a_n &= k_1 \cdot (0,8)^n + k_2 \cdot (1,2)^n \\ b_n &= k_3 \cdot (0,8)^n + k_4 \cdot (1,2)^n \\ c_n &= k_5 \cdot (0,8)^n + k_6 \cdot (1,2)^n \\ d_n &= k_7 \cdot (0,8)^n + k_8 \cdot (1,2)^n, \end{aligned}$$

de unde determinând constantele k_1, k_2, \dots, k_8 din condițiile inițiale, obținem

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(0,8)^n + 3 \cdot (1,2)^n}{4} & \frac{3 \cdot ((0,8)^n - (1,2)^n)}{8} \\ \frac{(0,8)^n - (1,2)^n}{2} & \frac{3 \cdot (0,8)^n + (1,2)^n}{4} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Deci } x_n = \frac{(0,8)^n + 3 \cdot (1,2)^n}{4} x_0 + \frac{3 \cdot ((0,8)^n - (1,2)^n)}{8} y_0 =$$

$$= \frac{1}{8} (0,8)^n (2x_0 + 3y_0) + \frac{1}{8} (1,2)^n (2x_0 - y_0) = 100 \cdot (0,8)^n \text{ și}$$

$$y_n = \frac{(0,8)^n - (1,2)^n}{2} x_0 + \frac{3 \cdot (0,8)^n + (1,2)^n}{4} y_0 =$$

$$= \frac{1}{4} (0,8)^n (2x_0 + 3y_0) - \frac{1}{4} (1,2)^n (2x_0 - y_0) = 200 \cdot (0,8)^n.$$

Observăm că ambele specii sunt pe cale de dispariție, descrescând în progresie geometrică.

Exerciții

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $AC = CB$.

b) Calculați B^n , dacă $n \in \mathbb{N}^*$.

(Admitere, 1998.)

2. Calculați A^n pentru matricea $A = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{pmatrix}$ și demonstrați că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Rezolvați următoarele ecuații matriciale, dacă $X \in M_2(\mathbb{R})$:

a) $X^n = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$;

b) $X^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{6x+3}{-2x+1}$. Calculați iteratele acestei funcții (iterata de ordin n este funcția $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$).

5. Pentru o matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ notăm cu a_n, b_n, c_n și d_n elementele matricei A^n . Stabiliți o condiție necesară și suficientă pentru convergența șirurilor $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$, $(c_n)_{n \geq 1}$ și $(d_n)_{n \geq 1}$.



Probleme

1. Determinați matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$, dacă $A \cdot X = X \cdot A$, pentru orice $X \in M_n(\mathbb{R})$.
2. Arătați că dacă $A^k = O_2$ ($A \in M_2(\mathbb{R})$), și $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, atunci $A^2 = O_2$.
3. Demonstrați că dacă $A \in M_2(\mathbb{R})$, atunci pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ astfel ca $A^k = \alpha_k A + \beta_k I_2$.
4. Arătați că dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $BA^2 = B^2$ și $4AB + I_n = 3BA$, atunci $AB = BA$.
5. Fie $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. Demonstrați că dacă a_1, a_2, a_3, a_4 este o progresie aritmetică, atunci și $b_2 - b_1, b_3 - b_2$ și $b_4 - b_3$ sunt în progresie aritmetică.
6. Arătați că dacă $A \in M_2(\mathbb{R})$, atunci există o infinitate de matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $X^2 - (\text{Tr } A)X + (\det A)I_2 = O_2$.
7. Demonstrați că dacă $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, $\text{Tr } A \cdot \text{Tr } B \neq 0$ și $A^2 + B^2 = A^2 B^2$, atunci $AB = BA$.
8. Demonstrați că dacă $A^2 = A$ ($A \in M_2(\mathbb{C})$), atunci matricea $B = 2A - I_2$ satisface relația $B^2 = I_n$.
9. Demonstrați că dacă suma elementelor de pe fiecare linie a matricelor $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ este egală cu 1, atunci produsul $A \cdot B$ are aceeași proprietate.
10. Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, atunci notăm cu ${}^t A$ matricea $(b_{ji})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ i=\overline{1,m}}}$, unde $b_{ji} = a_{ij}$
 $\forall i = \overline{1, m}$ și $\forall j = \overline{1, n}$ și o numim *matricea transpusă* (matricea transpusă se obține din A schimbând liniile cu coloanele). Arătați că
 - a) ${}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B, \forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$;
 - b) ${}^t(A \cdot B) = {}^t B \cdot {}^t A, \forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$;
 - c) Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ este inversabilă, atunci ${}^t A$ este inversabilă și $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
11. Matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$ se numește ortogonală dacă $A \cdot {}^t A = I_n$. Determinați matricele ortogonale din $M_2(\mathbb{R})$.
12. Demonstrați că produsul a două matrice ortogonale este tot o matrice ortogonală.
13. Demonstrați că $X \in M_n(\mathbb{C})$ este o matrice diagonală dacă și numai dacă $X \cdot A = A \cdot X$ pentru orice matrice diagonală $A \in M_n(\mathbb{C})$.
14. Câte matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ au toate elementele în mulțimea $\{-1, 0, 1\}$?
15. Câte matrice de tip $m \times n$ au toate elementele în mulțimea $\{-1, 1\}$ astfel ca produsul pe fiecare linie și coloană să fie -1 ?

III. REZOLVAREA SISTEMELOR LINIARE

Multe probleme practice conduc la rezolvarea unor sisteme liniare. În clasele precedente s-au rezolvat numeroase probleme prin reducerea la un sistem liniar. Cu toate acestea metodele de rezolvare nu au fost sistematizate și generalizate pentru cazul sistemelor cu mai multe variabile și nici pentru cazul sistemelor cu două sau trei necunoscute nu s-a făcut o discuție exhaustivă a cazurilor posibile. În acest capitol, în primul rând descriem mai multe metode de rezolvare care se pot aplica sistemelor liniare indiferent de numărul necunoscutelor, iar pe de altă parte demonstrăm câteva teoreme care permit discuția acestor sisteme. Pentru atingerea acestor obiective vom avea nevoie de câteva noțiuni (instrumente) foarte importante cum ar fi determinantul unei matrice, rangul unei matrice, inversa matricei, etc.

Sisteme cu 2 sau 3 necunoscute

Definiție. Numim *sistem liniar* un sistem de ecuații, care conține ecuații de forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, unde $x_i, i = \overline{1, n}$ sunt necunoscutele iar $a_i \in \mathbb{C}$ și $b \in \mathbb{C}$ sunt numere fixate.

Pentru fixarea ideilor de bază să studiem câteva sisteme liniare prin metodele deja cunoscute.

Problema 1. Să se discute în funcție de parametrii a și b sistemul

$$\begin{cases} x + 2y = b \\ ax - y = 1 \end{cases}$$

Soluție. Din ecuația a doua exprimăm necunoscuta y și o înlocuim în prima ecuație (sau înmulțim a doua ecuație cu 2 și adunăm cele două ecuații). Astfel ajungem la ecuația $(2a + 1)x = b + 2$. Dacă $2a + 1 \neq 0$, atunci $x = \frac{b + 2}{2a + 1}$ și de aici rezultă că

$$y = ax - 1 = \frac{ab - 1}{2a + 1}.$$

Dacă $2a + 1 = 0$, atunci în cazul $b + 2 \neq 0$ obținem o contradicție, iar pentru

$a = -\frac{1}{2}$ și $b = -2$ sistemul este $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ -\frac{1}{2}x - y = 1 \end{cases}$, care este format din două ecuații

echivalente, deci forma tuturor soluțiilor în acest caz este

$$\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Problema 2. Să se rezolve și să se discute sistemul $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$.

Soluție. Dacă numerele $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sunt toate nule, atunci pentru $b_1 = b_2 = 0$ mulțimea soluțiilor este \mathbb{R}^2 , iar pentru $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$ mulțimea soluțiilor este

mulțimea vidă. Dacă printre aceste numere există cel puțin unul nenul, atunci putem presupune $a_{11} \neq 0$ (în caz contrar schimbăm ecuațiile sau necunoscutele).

Astfel din prima ecuație obținem $x = \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}}$, iar ecuația a doua devine:

$$\frac{(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12})y}{a_{11}} = \frac{a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1}{a_{11}},$$

deci avem următoarele cazuri de discutat:

- Dacă $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, atunci pentru orice $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ soluția este unică și are forma

$$x = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} \text{ și } y = \frac{a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}.$$

- Dacă $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$, atunci pentru $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = 0$ există o infinitate de soluții și forma parametrică a acestor soluții este

$$\begin{cases} x = \frac{b_1 - a_{12}\alpha}{a_{11}} \\ y = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

În cazul $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$ și $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \neq 0$ sistemul nu are nici o soluție. În acest caz spunem că sistemul este incompatibil.

Din raționamentul precedent rezultă că expresiile $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, $a_{11}b_2 - a_{21}b_1$ și $b_1a_{22} - b_2a_{12}$ joacă un rol cheie în discuția și rezolvarea sistemului. Sistemul inițial se mai poate scrie și sub formă matriceală:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Pentru simplificarea exprimării introducem următoarele noțiuni:

Definiție. a) Matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ este *matricea sistemului* (1)

b) Numărul $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ este *determinantul matricei* A și se notează cu $\det A$. În cele ce urmează vom folosi scrierea $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ și vom spune că $\det A$ este determinantul sistemului (1).

Observație. Determinantul matricei pătratică de ordin 2 se mai numește *determinant de ordin 2*.

Folosind aceste noțiuni rezultatele obținute pe parcursul rezolvării problemei 2 se pot rezuma în următoarea teoremă:

Teoremă 1. Dacă determinantul sistemului (1) este diferit de 0, atunci sistemul are soluție unică pentru orice $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ și soluția se obține din formulele

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

(determinanții din numărător se obțin înlocuind pe rând coeficienții necunoscutelor x și y cu coloana care conține termenii liberi).

În acest caz spunem că sistemul este *compatibil determinat*.

2. Dacă $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, atunci avem două cazuri:

a) pentru $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ sau $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ sistemul nu are nici o soluție și spunem că sistemul este *incompatibil*;

b) pentru $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = 0$, sistemul admite o infinitate de soluții și spunem că sistemul este *compatibil nedeterminat*.

Principalul obiectiv al acestui capitol este de a arăta că situația nu este cu mult mai complicată nici în cazul general, doar că expresiile care guvernează aceste cazuri se pot calcula ceva mai complicat.

Observație. Soluția sistemului $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ obținută pe parcursul rezolvării



problemei 2 poate fi scrisă sub forma $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\det A} & -\frac{a_{12}}{\det A} \\ -\frac{a_{21}}{\det A} & \frac{a_{11}}{\det A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Exercițiu. Calculați produsele $A \cdot B$ și $B \cdot A$ dacă

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ și } B = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$



Rezolvare

$$A \cdot B = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & -a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11} \\ a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21} & -a_{21}a_{21} + a_{22}a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & a_{22}a_{12} - a_{12}a_{22} \\ -a_{21}a_{11} + a_{11}a_{21} & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aceste rezultate arată că în cazul $\det A \neq 0$, B este inversa matricei A .

Pe baza celor de mai înainte putem afirma că dacă $\det A \neq 0$, atunci inversa matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ este matricea } \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\det A} & \frac{-a_{12}}{\det A} \\ \frac{-a_{21}}{\det A} & \frac{a_{11}}{\det A} \end{pmatrix}.$$

Folosind proprietățile matricelor rezolvarea sistemului poate fi efectuată și în modul următor (dacă se cunoaște inversa matricei A):

$$\begin{aligned}
 A^{-1} \cdot | \quad A \cdot v &= b \\
 A^{-1} \cdot (A \cdot v) &= A^{-1} \cdot b \\
 (A^{-1} \cdot A)v &= A^{-1} \cdot b, \text{ unde } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \\
 I_2 \cdot v &= A^{-1} \cdot b \\
 v &= A^{-1} \cdot b
 \end{aligned}$$

Coloanele matricei inverse sunt de fapt soluțiile sistemelor

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 1 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 1 \end{cases}$$

Dacă $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sunt soluțiile celor două sisteme de mai înainte, atunci soluția

sistemului $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ se poate obține sub forma

$$b_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Să studiem aceleași probleme în cazul sistemelor formate din trei ecuații și care conțin trei necunoscute

Problemă. Să se rezolve sistemul liniar:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 11 \\ 2x + 3y - z = -5 \\ 3x - 2y - 3z = -2 \end{cases}$$

Soluție. Exprimăm x din prima ecuație și înlocuim în celelalte două. Astfel

obținem sistemul. $\begin{cases} x + y + 2z = 11 \\ y - 5z = -27 \\ -5y - 9z = -35 \end{cases}$ Ultimele două ecuații formează un sistem cu

două necunoscute în y și z . Dacă exprimăm y din ecuația a doua ($y = 5z - 27$) și

înlocuim în ultima ecuație, obținem $\begin{cases} x + y + 2z = 11 \\ y - 5z = -27 \\ -34z = -170 \end{cases}$. De aici rezultă $z = 5$, deci

pe baza ecuației a doua $y = -2$ și în final din prima ecuație rezultă $x = 3$.

Bineînțeles eliminarea necunoscutelor poate fi făcută în orice ordine. De exemplu dacă în primul pas exprimăm necunoscuta z din prima ecuație, atunci ajungem la sistemul

$$\begin{cases} z - 2x - 3y = 5 \\ 5x + 7y = 1 \\ -3x - 11y = 13 \end{cases}$$

Din ecuația a doua rezultă $x = \frac{1-7y}{5}$, deci obținem sistemul echivalent

$$\begin{cases} z - 2x - 3y = 5 \\ 5x + 7y = 1 \\ -34y = 68 \end{cases}$$

Această metodă de rezolvare a sistemelor se numește *metoda de eliminare a lui Gauss*. Pentru alegerea primului pas avem cel mult 9 posibilități (alegem necunoscuta pe care o eliminăm și ecuația pe care o folosim pentru eliminare) iar pentru alegerea pasului următor cel mult 4 posibilități. Astfel putem ajunge la același rezultat în cel mult $9 \cdot 4 = 36$ variante. Analizând cele două variante de mai înainte observăm că în ultima ecuație coeficientul necunoscutei este același în ambele cazuri. Să fie oare o coincidență?

Pentru clarificarea situației să rezolvăm următoarea problemă generală:

Problemă. Să se rezolve și să se discute sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

unde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1, 3}$.

Soluție. Dacă $a_{ij} = 0$, $\forall i, j = \overline{1, 3}$, atunci pentru $(b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0)$ mulțimea soluțiilor este \mathbb{R}^3 , iar în caz contrar sistemul este incompatibil. Dacă există a_{ij} diferit de 0 cu $i, j \in \{1, 2, 3\}$, atunci schimbând eventual ordinea ecuațiilor (și reindexând coeficienții) sau schimbând numai necunoscutele între ele, putem presupune că în prima ecuație coeficientul lui x este diferit de 0. Astfel putem exprima x din prima ecuație:

$$x = \frac{b_1 - a_{12}y - a_{13}z}{a_{11}}$$

și astfel ajungem la sistemul

$$\begin{cases} x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y + \frac{a_{13}}{a_{11}}z = \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}}y + \frac{a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{13}}{a_{11}}z = \frac{b_2 \cdot a_{11} - a_{21} \cdot b_1}{a_{11}} \\ \frac{a_{11} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{31}}{a_{11}}y + \frac{a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31}}{a_{11}}z = \frac{a_{11} \cdot b_3 - a_{31} \cdot b_1}{a_{11}} \end{cases}$$

sau înmulțind fiecare ecuație cu a_{11} :

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = b_1 \\ (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})y + (a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{13})z = a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1 \\ (a_{11} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{31})y + (a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31})z = a_{11} \cdot b_3 - a_{31} \cdot b_1 \end{cases}$$

Dacă eliminăm necunoscuta y , atunci coeficientul lui z este

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13})(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) =$$



$$= a_{11} \cdot (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}).$$

Observație. Se poate verifica printr-un calcul simplu că expresia obținută în paranteză este independentă de alegerea pașilor, deci la ultima ecuație obținem mereu același coeficient.

Notăm cu Δ expresia din paranteza anterioară:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

După efectuarea calculelor și simplificarea cu a_{11} obținem ecuația

$$\Delta \cdot x = \Delta_1 \quad (2)$$

unde

$$\Delta_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3.$$

Expresia Δ_1 are aceeași structură ca și Δ numai că în loc de a_{11}, a_{21} și a_{31} apar termenii liberi ai sistemului. Pentru a simplifica exprimarea introducem următoarea noțiune:

Definiție. Expresia

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

se numește *determinantul* matricei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ și se notează cu $\det A$.

În continuare vom folosi notația

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

și în cazul în care A este matricea sistemului vom spune că $\det A$ este determinantul sistemului.

Observații. 1. Determinantul matricei pătratică de ordin 3 se mai numește *determinant de ordin 3*.

2. Putem observa că produsele care apar în dezvoltarea determinantilor de ordin 2 și 3 au factorii din coloane și rânduri diferite, deci fiecare termen are forma $a_{i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$, cu $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 3\}$ pentru determinantul de ordin 3, respectiv $a_{i_1}a_{2i_2}$, $\{i_1, i_2\} = \{1, 2\}$ pentru determinantul de ordin 2. Astfel considerând permutarea

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$ respectiv $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix}$ identificăm permutările care intervin în dezvoltarea determinantului

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

deci putem alcătui următorul tabel:

Termenul dezvoltării	Permutarea corespunzătoare	Signatura permutării
$a_{11}a_{22}a_{33}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	1
$a_{12}a_{23}a_{31}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	1
$a_{13}a_{21}a_{32}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	1
$-a_{13}a_{22}a_{31}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	-1
$-a_{12}a_{21}a_{33}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	-1
$-a_{11}a_{23}a_{32}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	-1

Observăm că apar toate permutările de ordin 3 (deci toate elementele mulțimii S_3). Astfel dezvoltarea determinantului poate fi scrisă sub forma

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}.$$

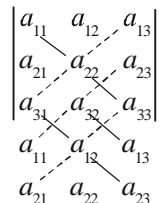
Pentru determinantul de ordin 2 avem aceeași dezvoltare

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)}.$$

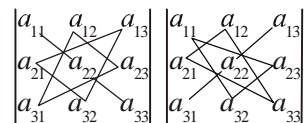
Pentru a ușura calcularea determinantului de ordin trei menționăm următoarele reguli:

1. Regula lui Sarrus. Scriem primele două linii sub determinant (vezi figura alăturată) și calculăm produsul elementelor pe fiecare diagonală. Un astfel de produs va avea semnul plus dacă provine dintr-o diagonală paralelă cu diagonala principală și are semnul minus dacă provine dintr-o diagonală paralelă cu diagonala secundară:

$$+a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$



2. Regula triunghiului. Pe figurile alăturate se pot vedea triunghiurile care determină produsele cu semn pozitiv și cele care determină produsele cu semn negativ.



În relația (2) avem $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, deci în cazul $\Delta \neq 0$, obținem $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$.

În mod analog putem deduce $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ și $z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, unde

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \text{ și } \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Astfel putem formula următoarea teoremă:

Teoremă. Dacă determinantul sistemului $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$ este diferit de 0,

atunci sistemul are soluție unică, adică este compatibil determinat, și această soluție se obține prin formulele:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \text{ și } z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

unde $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ este determinantul sistemului iar Δ_1 , Δ_2 și Δ_3 se obțin din

Δ înlocuind pe rând coeficienții necunoscutelor x , y respectiv z cu termenii liberi. Această metodă de calcul a soluțiilor poartă numele de *regula lui Cramer* iar sistemele pentru care se poate aplica se numesc de tip Cramer.

Observație. Din relațiile $\Delta \cdot x = \Delta_1$, $\Delta \cdot y = \Delta_2$ și $\Delta \cdot z = \Delta_3$ rezultă că dacă $\Delta = 0$ și unul din determinanții Δ_1 , Δ_2 și Δ_3 este diferit de 0, atunci sistemul este incompatibil. Cazul $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ îl vom trata mai târziu.

Aplicație practică

O întreprindere minieră extrage un zăcământ care conține cupru, fier, sulf și alte componente. În urma analizelor s-a stabilit că raportând la o cantitate m de zăcământ, cantitățile de cupru, fier și sulf sunt de 21, 16 respectiv 31 moli. Pe de altă parte aceste elemente provin din trei minerale: calcopirită (CuFeS_2), troilită (FeS) și bornită (Cu_5FeS_4). Calculați numărul de moli ai acestor minerale conținute în cantitatea analizată m .

Rezolvare. Dacă notăm cu x, y respectiv z numărul de moli de calcopirită, troilită și bornită conținut în cantitatea analizată m , atunci obținem sistemul liniar:

$$\begin{cases} x + 5z = 21 & (\text{Cu}) \\ x + y + z = 16 & (\text{Fe}) \\ 2x + y + 4z = 31 & (\text{S}) \end{cases}$$

Sistemul este sistem Cramer, deci compatibil determinat și soluția este $x = 6$, $y = 7$, $z = 3$, deci cantitatea analizată conține 6 moli calcopirită, 7 moli troilită și 3 moli bornită.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze determinanții:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{e) } \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{f) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 \cdot 3 = -6;$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 3 = -12; \quad \text{d) } \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-2)(-1) \cdot 3;$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) \cdot 1 = 3; \quad \text{f) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) \cdot 5.$$

Observație. În fiecare din cele șase exemple determinantul este produsul sau opusul produsului elementelor de pe diagonală, deoarece acesta este singurul produs, care nu conține un element nul.

Definiție. Dacă toate elementele unei matrice în afara celor de pe una dintre diagonale sunt nule, această matrice se numește *matrice diagonală*.

Dacă toate elementele deasupra sau sub una dintre diagonale sunt nule, atunci matricea se numește *matrice triunghiulară*.



Determinantul matricei triunghiulare este egal cu produsul sau opusul produsului

$$\text{elementelor de pe diagonală: } \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31},$$

deoarece permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ este pară și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ este impară, iar

numai produsele corespunzătoare acestor permutări sunt nenule.

Analog determinantul matricei triunghiulare este egal cu produsul sau opusul produsului elementelor de pe diagonală:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \text{ și } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$2. \text{ Să se rezolve sistemul: } \begin{cases} 2x - 3y + z = 7 \\ x + y - 2z = -4 \\ x - y + 3z = 8 \end{cases}$$

Rezolvare. Determinantul sistemului este

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 \neq 0, \text{ deci putem aplica regula lui Cramer.}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -15, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 30.$$

$$\text{Deci } x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1 \text{ și } z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

$$3. \text{ Să se rezolve sistemul: } \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + y - z = -1 \\ -x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

Rezolvare. Determinantul sistemului este

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \text{ deci sistemul este incompatibil.}$$

Proprietățile determinantilor de ordin 2 și 3

Înainte de a trece la rezolvarea sistemelor în cazul general să studiem proprietățile determinantilor de ordin 2 și 3 pentru a defini determinantii de ordin superior.

Problemă. Cum se schimbă determinantul matricei $A \in M_3(\mathbb{C})$ dacă

- schimbăm liniile cu coloanele (sau invers);
- schimbăm două linii (coloane) între ele;
- înmulțim elementele unei linii (coloane) cu un număr fixat;
- înlocuim fiecare element cu conjugatul său.

Soluție. a) Triunghiurile care determină produsele la regula triunghiului sunt simetrice față de diagonala principală, deci nu se schimbă rezultatul dacă schimbăm liniile cu coloanele, deci avem $\det A = \det {}^t A$, adică

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Altfel $\det {}^t A = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3}$, în același timp σ fiind o funcție bijectivă,

avem $a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} = a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} a_{3\sigma^{-1}(3)}$, iar când σ parcurge mulțimea S_3 , atunci σ^{-1} parcurge mulțimea S_3 . Deci

$$\det {}^t A = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} a_{3\sigma^{-1}(3)} = \sum_{\tau \in S_3} \varepsilon(\tau^{-1}) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} a_{3\tau(3)} = \det A, \text{ unde am}$$

folosit faptul că $\varepsilon(\tau^{-1}) = \varepsilon(\tau)$.

Evident a doua demonstrație pentru cazul determinantilor de ordin trei este mult mai complicată decât prima, dar vom vedea folosul permutărilor la determinantii de ordin mai mare.

b) Din proprietatea de la punctul **a)** rezultă că este suficient să verificăm comportarea determinantilor la schimbarea coloanelor.

Mai întâi să verificăm câteva exemple.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5. \text{ Observăm că cele două diagonale s-au schimbat, deci și}$$

semnul produselor s-a schimbat, în consecință determinantul obținut prin schimbarea coloanelor sau a liniilor este opusul determinantului inițial.

În general, dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}$ și $A_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$, atunci

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \det A_1 = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -\det A \quad \text{și} \\ \det A_2 = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -\det A.$$

În cazul matricelor de ordin 3, să considerăm determinantul: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$;

schimbând prima și a doua coloană, obținem $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$. Dacă în

determinantul Δ_1 punem prima coloană în locul celei de a treia, a doua în locul primei

coloane, a treia în locul celei de a doua, obținem $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$. De fapt

determinantul Δ_3 l-am obținut din Δ_1 prin două schimbări de coloane (prima cu a doua, apoi a doua cu a treia). Deci dacă în general o schimbare de coloană conduce la schimbarea semnului determinantului, atunci prin schimbări succesive de coloane într-un determinant obținem determinantul inițial sau opusul lui.

Să verificăm în caz general ce înseamnă o schimbare de coloane.

Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ și $A_1 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$; atunci

$$\det A_1 = a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} = -\det A$$

Analog, proprietatea se poate demonstra pentru schimbarea oricăror două coloane.

De fapt schimbarea ordinii coloanelor este o permutare a lor (adică dacă matricea inițială este $(C_1 \ C_2 \ C_3)$, unde C_i semnifică coloana i , aplicându-i permutarea σ , obținem matricea $(C_{\sigma(1)} \ C_{\sigma(2)} \ C_{\sigma(3)})$. Schimbarea succesivă a câte două coloane corespunde unui produs de transpoziții. Transpozițiile fiind permutări impare, și de aici presupunem că rezultă schimbarea semnului determinantului la o schimbare de coloane. Să verificăm schimbarea determinantului în cazul permutării σ a coloanelor.

Dacă $A_2 = \begin{pmatrix} a_{1\sigma(1)} & a_{1\sigma(2)} & a_{1\sigma(3)} \\ a_{2\sigma(1)} & a_{2\sigma(2)} & a_{2\sigma(3)} \\ a_{3\sigma(1)} & a_{3\sigma(2)} & a_{3\sigma(3)} \end{pmatrix}$, avem

$$\det A_2 = \sum_{\tau \in S_3} \varepsilon(\tau) a_{1\tau(\sigma(1))} a_{2\tau(\sigma(2))} a_{3\tau(\sigma(3))}.$$

Dacă τ parcurge mulțimea S_3 , atunci și $\tau\sigma$ parcurge mulțimea S_3 . Știm că

$$\varepsilon(\tau\sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma), \text{ deci } \varepsilon(\tau) = \frac{\varepsilon(\tau\sigma)}{\varepsilon(\sigma)} = \varepsilon(\tau\sigma)\varepsilon(\sigma).$$

obținem $\det A_2 = \sum_{\delta \in S_3} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\delta) a_{1\delta(1)} a_{2\delta(2)} a_{3\delta(3)} = \varepsilon(\sigma) \det A$.

Deci dacă σ este o transpoziție, atunci într-adevăr determinantul își schimbă semnul.

Consecință. Dacă două linii sau coloane ale unui determinant coincid, atunci determinantul este egal cu 0.

Demonstrație. Schimbând două linii sau coloane se schimbă semnul determinantului. Pe de altă parte schimbând două linii sau coloane identice determinantul nu se schimbă. Cele două proprietăți se pot realiza numai în cazul în care determinantul este egal cu 0.

c) Fiecare produs din dezvoltarea determinantului conține exact un element din fiecare linie și din fiecare coloană. Astfel înmulțind elementele unei linii sau coloane cu un număr fixat α înmulțim și determinantul cu α . Scriind acesta cu exactitate, înmulțind de exemplu prima coloană cu α , avem

$$\det A_1 = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) (\alpha a_{1\sigma(1)}) a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} = \det A_1 = \alpha \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} = \alpha \det A.$$

Consecință. Dacă un determinant are două linii (sau coloane) proporționale, atunci determinantul este egal cu 0.

Demonstrație. Notăm cu A matricea cu două linii (coloane) proporționale.

Datorită egalităților $a_{i,j} = \alpha \cdot a_{i,j}$, $j = \overline{1,3}$ obținem $\alpha \cdot \det A = \det A_1 = 0$, deoarece A_1 se obține din A prin înmulțirea liniei i_1 cu α și astfel A_1 are două linii identice.

d) Deoarece pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ avem $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ și $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, iar în calculul determinantului folosim doar înmulțiri și adunări ale elementelor, obținem $\det \overline{A} = \overline{\det A}$ adică

$$\begin{vmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \overline{a_{13}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \overline{a_{23}} \\ \overline{a_{31}} & \overline{a_{32}} & \overline{a_{33}} \end{vmatrix} = \overline{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

Problemă. Să se exprime determinatul de ordin 3 cu determinanți de ordin 2.

Soluție. Grupăm termenii dezvoltării după elementele primei coloane:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} = \\ &= a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21} \cdot (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31} \cdot (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) = \\ &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Această exprimare poartă numele de dezvoltarea determinantului după prima linie. Exprimări similare se pot obține grupând termenii după elementele altei coloane sau linii. Astfel putem obține dezvoltarea după o linie sau coloană oarecare. Analizând mai multe grupări posibile se poate observa că în general elementul a_{ij} este înmulțit cu determinatul care se obține din A prin suprimarea liniei și a coloanei care conține acest element și cu $(-1)^{i+j}$.

Definiție. Determinantul care se obține prin suprimarea liniei i și coloanei j se numește *minorul* elementului a_{ij} și se notează cu d_{ij} , iar numărul $(-1)^{i+j} d_{ij}$ este *complementul algebric* al elementului a_{ij} în matricea A . Complementul algebric al elementului a_{ij} se notează cu D_{ij} .

Cu aceste notații rezultatul din problema precedentă se poate formula în modul următor:



Teoremă. Dacă $A \in M_3(\mathbb{C})$, atunci

$$\det A = \sum_{i=1}^3 a_{ij} \cdot D_{ij} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \cdot D_{ij}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Observație. Această scriere există și în cazul determinanților de ordin 2.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$, unde a_{22} și a_{21} pot fi considerați ca determinanți de ordin 1.

Consecințe

1. Dacă doi determinanți de ordin 3 diferă numai printr-o linie (coloană), atunci suma lor este determinantul matricei ce se obține adunând aceste două coloane (linii) și păstrând celelalte linii (coloane).

Exemplu

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} \\ y_1 & a_{22} & a_{23} \\ z_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & a_{12} & a_{13} \\ y_2 & a_{22} & a_{23} \\ z_2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 & a_{12} & a_{13} \\ y_1 + y_2 & a_{22} & a_{23} \\ z_1 + z_2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Demonstrație. Dezvoltând determinanții după prima coloană obținem

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} \\ y_1 & a_{22} & a_{23} \\ z_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & a_{12} & a_{13} \\ y_2 & a_{22} & a_{23} \\ z_2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= x_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - y_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + z_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + \\ &+ x_2 \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - y_2 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + z_2 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \\ &= (x_1 + x_2) \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - (y_1 + y_2) \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (z_1 + z_2) \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 & a_{12} & a_{13} \\ y_1 + y_2 & a_{22} & a_{23} \\ z_1 + z_2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

2. Dacă într-un determinant adunăm la o linie (coloană) elementele corespunzătoare unei alte linii (coloane) înmulțite cu un număr fixat, atunci valoarea determinantului nu se schimbă.

Demonstrație. Presupunem că lucrăm cu primele două coloane (dacă nu, atunci prin schimbări de coloane putem ajunge la această situație).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha \cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha \cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha \cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \alpha \cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \alpha \cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \alpha \cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

pe baza proprietății anterioare. Însă al doilea determinant este 0 (având două coloane proporționale), deci demonstrația este completă.

Deci pentru simplificarea calculului putem reduce determinantul la determinant cu cât mai multe zerouri pe-o linie sau pe-o coloană.

Observație. Spunem că numărul $a \in \mathbb{R}$ este *combinație liniară* a numerelor reale a_1, a_2, \dots, a_n , dacă există numerele reale $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ astfel încât $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$. Analog se poate defini combinația liniară $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ a vectorilor (matrice linie sau coloană) v_1, v_2, \dots, v_n (de exemplu pentru $v_1 = (1 \ 2)$, $v_2 = (-2 \ 1)$ și $v_3 = (0 \ 3)$ și numerele $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 3$, obținem o combinație liniară $v = 2v_1 - v_2 + 3v_3 = 2 \cdot (1 \ 2) - (-2 \ 1) + 3 \cdot (0 \ 3) = (4 \ 12)$).

Astfel pe baza problemei precedente adunând la o coloană (linie) combinația liniară a celorlalte coloane (linii), valoarea determinantului nu se schimbă.

3. Determinantul produsului a două matrice este egal cu produsul determinantilor.

Demonstrație

$$\text{Fie } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \text{ deci } AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Observăm că fiecare coloană este combinația liniară a coloanelor matricei A .

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \\ &= b_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + b_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \\ &= b_{11}b_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{21}b_{22} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) = \det A \cdot \det B \end{aligned}$$

Bineînțeles era mai simplu de demonstrat prin calcul direct, dar acest procedeu ne va folosi la demonstrarea proprietății pentru determinanți de ordin mai mare.

$$\text{Fie } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \text{ atunci}$$

$$\det AB = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^3 b_{k1} \begin{vmatrix} a_{1k} & c_{12} & c_{13} \\ a_{2k} & c_{22} & c_{23} \\ a_{3k} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

Continuând procedeu obținem și determinanți cu coloane identice, deci

$$\sum_{k=1}^3 b_{k1} \begin{vmatrix} a_{1k} & c_{12} & c_{13} \\ a_{2k} & c_{22} & c_{23} \\ a_{3k} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^3 b_{k1} b_{j2} \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{1j} & c_{13} \\ a_{2k} & a_{2j} & c_{23} \\ a_{3k} & a_{3j} & c_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{k,j,i=1 \\ k \neq j \neq i \neq k}}^3 b_{k1} b_{j2} b_{i3} \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{1j} & a_{1i} \\ a_{2k} & a_{2j} & a_{2i} \\ a_{3k} & a_{3j} & a_{3i} \end{vmatrix}$$

În această ultimă sumă fiecărui triplet (k, j, i) îi corespunde o permutare din S_3 și

reciproc. Deci putem scrie:

$$\sum_{\sigma \in S_3} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} b_{\sigma(3)3} \begin{vmatrix} a_{1\sigma(1)} & a_{1\sigma(2)} & a_{1\sigma(3)} \\ a_{2\sigma(1)} & a_{2\sigma(2)} & a_{2\sigma(3)} \\ a_{3\sigma(1)} & a_{3\sigma(2)} & a_{3\sigma(3)} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_3} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} b_{\sigma(3)3} \varepsilon(\sigma) \det A = \\ = \det A \det {}^t B = \det A \det B$$



Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze următorii determinanți:

a) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix};$

b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sqrt{5} + \sqrt{7} & \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \sqrt{3} + \sqrt{2} & \sqrt{5} - \sqrt{7} \end{vmatrix};$

c) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix};$

d) $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 3 \\ -3 & 2 & -4 \\ -8 & 3 & 2 \end{vmatrix};$

e) $\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix};$

f) $\Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$

Rezolvare

a) $\Delta_1 = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot (-\sin \alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$

b) $\Delta_2 = (\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{7}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (5 - 7) - (3 - 2) = -3.$

c) $\Delta_3 \stackrel{-3L_1+L_3 \rightarrow L_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 11 \end{vmatrix} = 29.$

d) $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 3 \\ -3 & 2 & -4 \\ -8 & 3 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{2C_1 \rightarrow C_1}{=} \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 10 & 7 & 3 \\ -6 & 2 & -4 \\ -16 & 3 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{2C_2+C_3 \rightarrow C_3}{=} \begin{vmatrix} 10 & 7 & 17 \\ -6 & 2 & 0 \\ -16 & 3 & 8 \end{vmatrix} =$

$$\stackrel{3C_2+C_1 \rightarrow C_1}{=} \begin{vmatrix} 31 & 7 & 17 \\ 0 & 2 & 0 \\ -7 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 31 & 17 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = 248 + 119 = 367.$$

e) $\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{L_1+L_2 \rightarrow L_1}{=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -18;$

$$\mathbf{f)} \Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{L_3 - L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ deoarece } L_3 = -2L_2.$$

2. Să se calculeze determinanții următori și să se scrie rezultatul sub forma unui produs:

$$\mathbf{a)} \Delta_1 = \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{b)} \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{c)} \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare. a) Scădem prima coloană din celelalte două și scoatem factorul comun $(b-a)$ din ultimele două coloane astfel obținute:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a^2 & a \cdot (b-a) & (b-a)(b+a) \\ b^2 & (a-b)(a+b) & b \cdot (a-b) \\ ab & b \cdot (b-a) & a \cdot (a-b) \end{vmatrix} = (b-a)^2 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a & b+a \\ b^2 & -(a+b) & -b \\ ab & b & -a \end{vmatrix}$$

Adunăm ultimele două linii la prima linie:

$$\Delta_1 = (b-a)^2 \cdot \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + ab & 0 & 0 \\ b^2 & -(a+b) & -b \\ ab & b & -a \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)^2 \cdot (a^2 + b^2 + ab) \cdot \begin{vmatrix} -(a+b) & -b \\ b & -a \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)^2 \cdot (a^2 + b^2 + ab) \cdot [a^2 + ab + b^2] = [(b-a) \cdot (b^2 + ab + a^2)]^2 = (b^3 - a^3)^2.$$

Soluția 2. Adunăm ultimele două coloane la prima și scoatem factorul comun:

$$\Delta_1 = (a^2 + ab + b^2) \begin{vmatrix} 1 & ab & b^2 \\ 1 & a^2 & ab \\ 1 & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = (a^2 + ab + b^2) \begin{vmatrix} 1 & ab & b^2 \\ 0 & a(a-b) & b(a-b) \\ 0 & b(b-a) & (a-b)(a+b) \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2 + ab + b^2)(a-b)^2 \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a+b \end{vmatrix} = (a^2 + ab + b^2)(a-b)^2(a^2 + ab + b^2) = (a^3 - b^3)^2.$$

b) Scădem prima coloană din celelalte două, apoi adunăm a doua linie la prima și reducem la un determinant de ordinul 2:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b-a & c-a \\ b+c & a-b & a-c \\ b^2+c^2 & a^2-b^2 & a^2-c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b+c & -1 & -1 \\ b^2+c^2 & -(a+b) & -(a+c) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (b-a)(c-a) \cdot \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ b+c & -1 & -1 \\ b^2+c^2 & -(a+b) & -(a+c) \end{vmatrix} = \\
 &= (b-a)(c-a)(a+b+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & a+c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)
 \end{aligned}$$

c) Putem dezvolta determinantul folosind regula lui Sarrus, sau regula triunghiului, dar este mai greu să observăm factorizarea dorită din această descompunere. Din acest motiv este mai util să încercăm scoaterea unor factori pe parcursul dezvoltării folosind proprietățile determinanților.

$$\begin{aligned}
 &\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 - C_2 \\ C_3 - C_1 - C_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = \\
 &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} \begin{matrix} C_3 - C_2 - C_3 \\ (b-a)(c-a) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & c-b \end{vmatrix} = \\
 &= (b-a)(c-a)(c-b).
 \end{aligned}$$

Deci $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$. Acest determinant se numește *determinant Vandermonde*.

Vandermonde.

3. Să se calculeze determinanții următoarelor matrice:

$$\text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; \quad \text{b) } A_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

Rezolvare

a) $\det A_1 = a^2 + b^2$.

b) $\det A_2 = acb + bac + cba - c^3 - a^3 - b^3 = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$.

4. Fără a calcula determinanții, să se demonstreze următoarele egalități:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{admitere 1985});$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ac & bc \\ ac & bc & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}.$$

Demonstrație

a) Folosind proprietățile determinantilor putem scrie:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 + a_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 + a_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1 + a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2 + a_2 \\ b_3 & c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

deoarece ceilalți determinanți sunt nuli și $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, primul deter-

minant obținându-se din al doilea prin două schimbări succesive de coloane.

b) Înmulțim prima linie cu a , a doua cu b și ultima linie cu c (dacă $abc \neq 0$):

$$\begin{vmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ac & bc \\ ac & bc & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & a^2b & ca^2 \\ ab^2 & abc & b^2c \\ ac^2 & bc^2 & abc \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Scoatem factorul comun a din prima coloană, b din coloana a doua și c din ultima coloană:

$$\begin{vmatrix} abc & a^2b & ca^2 \\ ab^2 & abc & b^2c \\ ac^2 & bc^2 & abc \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă egalitatea cerută. Dacă $abc = 0$, atunci avem două posibilități. Dacă cel puțin două din numerele a, b și c sunt egale cu 0, atunci ambii determinanți sunt egali cu 0, iar în caz contrar putem scoate factorul comun în fiecare linie și adunăm două coloane la cea de a treia. De exemplu pentru $a = 0$ și $bc \neq 0$ putem scrie:

$$\begin{vmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & bc \\ 0 & bc & 0 \end{vmatrix} = (bc)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (bc)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & b^2 \\ c^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Calculați determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, dacă x_1, x_2 și x_3 sunt soluțiile ecuației

$$x^3 - x^2 + 5x + 2 = 0.$$

(Admitere 1987).

Rezolvare. Dezvoltăm determinantul folosind regula lui Sarrus:

$$\Delta = x_1^2 x_3 x_2 + x_2^2 x_1 x_3 + x_3^2 x_2 x_1 - x_3^4 - x_2^4 - x_1^4 = x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) - (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4).$$

Din enunț rezultă că $x^3 - x^2 + 5x + 2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, deci

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1 x_2 x_3 = -2$ și $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 5$. Astfel avem

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) = 1^2 - 2 \cdot 5 = -9,$$

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2(x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2) =$$

$$= (-9)^2 - 2((x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)^2 - 2x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)) =$$

$$= 81 - 2 \cdot (25 - 2 \cdot (-2) \cdot 1) = 81 - 58 = 23.$$

Deci $\Delta = (-2) \cdot 1 - 23 = -25$.



Exerciții și probleme

1. Calculați determinanții:

$$\mathbf{a)} \begin{vmatrix} 3 & x \\ 2 & x+1 \end{vmatrix}; \mathbf{b)} \begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}, a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}; \mathbf{c)} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -9 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}; \mathbf{d)} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix};$$

2. Calculați determinanții

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -i & 1+i & i \\ i & 1 & 2i \\ 2i & 1 & i \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 1+\varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon & 1+\varepsilon \end{vmatrix},$$

dacă ε este o rădăcină de ordin 3 a unității.

3. Arătați că

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{C}.$$

4. Calculați determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$$

(Admitere, 1999.)

5. Calculați determinanții, dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ z & z+y & y \\ x+z & z & x \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2xy & x^2+y^2 & x+y \\ x^2+y^2 & 2xy & x+y \\ x+y & x+y & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}; \quad \text{d) } \begin{vmatrix} x^2 & (y-z)^2 & yz \\ y^2 & (z-x)^2 & zx \\ z^2 & (x-y)^2 & xy \end{vmatrix};$$

6. Rezolvați ecuația

$$\begin{vmatrix} a^2-x & ab & ac \\ ba & b^2-x & bc \\ ca & cb & c^2-x \end{vmatrix} = 0, \text{ dacă } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

7. Calculați următorii determinanți:

$$\text{a) } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos 2a & \cos 2b & \cos 2c \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \Delta_2 = \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & \sin 2x \\ \cos^2 x & \sin^2 x & \sin 2x \\ 1 + \sin 2x & -1 & 1 \end{vmatrix};$$

(Admitere, 1998.)

8. Rezolvați ecuația $\Delta(x) = 0$, dacă

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1-x & x^2 & x \\ x & x & -x \\ 1+x^2 & x^2 & -x^2 \end{vmatrix} \quad (\text{Variantă Bacalaureat, 1999.})$$

9. Calculați determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$. (Admitere, 1999.)

10. Calculați determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3^2 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2^2 \end{vmatrix}$$

în funcție de a, b, c , dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

(Admitere, 1995.)

11. Calculați determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$.

12. Demonstrați că dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$), atunci $|\Delta| \leq 1$, dacă

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

13. Determinați valorile $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația

$$\begin{vmatrix} 2x & -2x & 1 \\ 1 - x^2 & x^2 & -1 \\ -2x - m & x + m & x - 2 \end{vmatrix} = 0$$

admite o rădăcină dublă.

(Admitere, 1998.)



INVERSA UNEI MATRICE

Dacă în matricea A înlocuim coloana k cu coloana j atunci determinantul devine 0.

Dacă însă dezvoltăm acest determinant după coloana j , atunci obținem

$\sum_{i=1}^3 a_{ij} \cdot D_{ik} = 0$. Ca exemplu concret putem considera cazul $k = 1$ și $j = 2$:

$a_{12}D_{11} + a_{22}D_{21} + a_{32}D_{31} = \det A_{21} = 0$, unde

$$A_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Egalitățile de mai înainte ne conduc la relațiile

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} \cdot D_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } j \neq k \\ \det A, & \text{dacă } j = k \end{cases}.$$

Aceste egalități se pot cuprinde într-o singură relație folosind produsul a două matrice. Va trebui doar să construim o matrice care conține elementele D_{ij} în ordinea corespunzătoare. Construim matricea A^* după următoarele reguli:

- scriem transpusa matricei A
- schimbăm fiecare element în această matrice cu complementul algebric

Matricea A^* este *adjuncta matricei* A .

Consecință. Dacă $A \in M_3(\mathbb{C})$ și $A^* = (D'_{ij})_{i,j=1,3}$, unde $D'_{ij} = D_{ji}$, atunci

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = (\det A) I_3.$$

Demonstrație. Dacă $A^* = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix}$, atunci

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11}D_{11} + a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21}D_{21} + a_{22}D_{22} + a_{23}D_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{31}D_{31} + a_{32}D_{32} + a_{33}D_{33} \end{pmatrix} = (\det A) \cdot I_3.$$

În mod similar se arată că $A^* \cdot A = (\det A) I_3$. Folosind aceste egalități în cazul $\det A \neq 0$ putem construi inversa matricei A prin relația $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3.$$

Ca și în cazul matricelor de ordinul 2 am obținut și în acest caz o metodă de calcul pentru inversa unei matrice de ordinul 3:

Teoremă. Matricea $A \in M_3(\mathbb{C})$ admite inversă dacă și numai dacă $\det A \neq 0$ și în acest caz $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$, unde A^* este matricea adjunctă (obținută din transpusa matricei A prin înlocuirea fiecărui element cu complementul său algebric).



Observație. Ca și în cazul sistemelor cu două necunoscute, putem rezolva un sistem de trei ecuații și trei necunoscute cu determinantul nenul cu ajutorul matricei inverse.

Fie sistemul $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$ cu determinantul nenul.

Notând $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, sistemul se poate scrie astfel

$Av = b$ înmulțind la stânga cu A^{-1} , obținem $v = A^{-1}b$.



Exemple. 1. Să calculăm inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$\det A = -9 \neq 0$, deci există A^{-1} . Pentru a calcula matricea adjunctă, scriem

transpusa matricei: ${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculăm complemenții algebrici ale

elementelor:

$$D'_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, D'_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3, D'_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$D'_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6, D'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, D'_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$D'_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8, D'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3, D'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Deci matricea adjunctă este $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -6 & 0 & -3 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ și inversa matricei A ,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

2. Să rezolvăm sistemul $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ -2x + 3y + 2z = -3 \end{cases}$.

Rezolvare. Observăm că matricea sistemului este matricea din primul exemplu,

deci este inversabilă cu $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$. Astfel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} - 1 \\ -\frac{8}{9} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Deci soluția sistemului este $x = \frac{10}{9}$, $y = -\frac{1}{3}$ și $z = \frac{1}{9}$.

Rangul unei matrice

Am lăsat deschis cazul $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ la discuția rezolvabilității sistemelor liniare. Să rezolvăm câteva sisteme cu această proprietate:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \\ x - 4y + 2z = 2 \end{cases} \quad (1)$$

Determinantul sistemului este 0, iar determinanții Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 sunt tot nuli. Observăm că scăzând a doua ecuație din prima, obținem a treia ecuație. Deci dacă necunoscutele satisfac primele două ecuații, atunci o satisfac și pe a treia, în consecință este suficient să lucrăm cu primele două. Considerăm una dintre necunoscute ca parametru, de exemplu $x = \alpha$, și sistemul format din primele două ecuații devine
$$\begin{cases} -3y + z = 1 - 2\alpha \\ y - z = -1 - \alpha \end{cases} \quad (2),$$
 care are soluțiile $y = \frac{3\alpha}{2}$ și $z = 1 + \frac{5\alpha}{2}$.

Deci sistemul are o infinitate de soluții, mulțimea soluțiilor fiind
$$S = \left\{ \left(\alpha, \frac{3\alpha}{2}, 1 + \frac{5\alpha}{2} \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dacă alegem ca parametru $z = \beta$, obținem sistemul
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 - \beta \\ x + y = -1 + \beta \end{cases} \quad (3),$$
 cu

soluțiile $x = \frac{2\beta - 2}{5}$, $y = \frac{3\beta - 3}{5}$. Efectuând substituția $\beta = 1 + \frac{5\alpha}{2}$, obținem același rezultat ca și în cazul când parametrul a fost x . Deci rezultatul nu depinde de parametrul ales.

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 1 \\ -x - y + 4z = 2 \end{cases} \quad (4)$$

Determinantul sistemului este 0, iar determinanții Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 sunt toate nule. Scăzând din prima ecuație de trei ori a doua, obținem a treia ecuație. Deci este suficient



să lucrăm cu primele două ecuații. Dacă $z = \beta$, obținem sistemul
$$\begin{cases} 2x + 2y = 5 - \beta \\ x + y = 1 + \beta \end{cases}$$

(5), acest sistem având soluții numai în cazul $\beta = 1$, adică $z = 1$ și cele două ecuații sunt echivalente; soluțiile sunt $x = \alpha$, $y = 2 - \alpha$, $z = 1$, adică și avem o infinitate de soluții. Dacă alegem din start ca parametru $x = \alpha$, obținem sistemul
$$\begin{cases} 2y + z = 5 - 2\alpha \\ y - z = 1 - \alpha \end{cases} \quad (6)$$
 cu soluțiile $y = 2 - \alpha$ și $z = 1$.

$$c) \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -2x + 2y - 4z = 3 \quad (7) \\ -x + y - 2z = 5 \end{cases}$$

Și în acest caz avem $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, ultima ecuație fiind suma primelor două. Alegând parametru $z = \alpha$, obținem
$$\begin{cases} x - y = 2 - 2\alpha \\ -2x + 2y = 3 + 4\alpha \end{cases} \quad (8)$$
, care are soluții pentru $-2(2 - 2\alpha) = 3 + 4\alpha$, ceea ce conduce la o contradicție, deci sistemul este incompatibil.

$$d) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -3x + 3y - 6z = -3 \quad (9) \\ -x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

Și în acest caz avem $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Observăm că cele trei ecuații sunt echivalente, adică a doua și a treia se obțin din prima înmulțită cu -3 , respectiv -1 . În cazul acesta este suficient să lucrăm cu prima ecuație. Aceasta având trei necunoscute, alegem parametrii $x = \alpha$ și $y = \beta$ și astfel $z = \frac{1 - \alpha + \beta}{2}$, deci sistemul are o infinitate de soluții.

Observații. 1. La același rezultat am fi ajuns și în cazul în care eliminăm altă ecuație în fiecare dintre exemple.

2. În fiecare din primele trei exemple am redus sistemele de ecuații la sisteme de două ecuații. Sistemele (2), (3) și (7) sunt sisteme Cramer, adică cu determinantul nenul, deci au o soluție unică depinzând de parametru.

3. Sistemele (5) și (8) au determinantul nul, deci condiția de compatibilitate este ca determinantii obținuți prin înlocuirea pe rând a coloanelor cu coloana termenilor liberi să fie nuli, deci în cazul sistemului (5) aceste condiții devin:

$$\Delta'_1 = \begin{vmatrix} 5 - \beta & 2 \\ 1 + \beta & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{și} \quad \Delta'_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 - \beta \\ 1 & 1 + \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ceea ce este echivalentă cu $\beta = 1$, iar în cazul sistemului (8) condițiile sunt

$$\Delta'_1 = \begin{vmatrix} 2-2\alpha & -1 \\ 3+4\alpha & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ și } \Delta'_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2-2\alpha \\ -2 & 3+4\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Coeficientul lui β , respectiv α , în fiecare caz este un minor de ordin 2 al matricei

sistemului. Determinanții $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ și $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ sunt minori de ordin 2,

care conțin termenii liberi, ai matricelor $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ respectiv $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & -6 & -3 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$,

făcând abstracție de o schimbare de coloană, ceea ce nu modifică faptul că determinantul este sau nu nul. Ultimele două matrice au fost obținute din matricea sistemului prin adăugarea coloanei termenilor liberi.

Definiție. Matricea obținută din matricea unui sistem linear prin adăugarea coloanei termenilor liberi se numește *matricea extinsă* a sistemului.

Astfel în cazul sistemului $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ matricea extinsă este $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$,

iar matricea extinsă a sistemului $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$ este $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$.

4. În cazul exemplului 4. toți minorii de ordin doi ai matricei sistemului, respectiv ai matricei extinse sunt nuli.

Deci putem afirma următoarea teoremă:

Teoremă.

În cazul sistemului $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$, dacă $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ avem

următoarele cazuri:

a) dacă matricea sistemului are un minor de ordin 2 nenul, atunci sistemul este compatibil nedeterminat;

b) dacă toți minorii de ordin 2 ai matricei sistemului sunt nuli și matricea extinsă are minor nenul, atunci sistemul este incompatibil;

c) dacă toți minorii de ordin 2 ai matricei sistemului și ai matricei extinse sunt nuli, atunci sistemul este compatibil nedeterminat (dacă cel puțin unul dintre coeficienții a_{ij} este nenul).

Lemă. Dacă determinantul unei matrice este nul, atunci cel puțin una dintre linii (coloane) este combinația liniară a celorlalte.

Dacă matricea este matricea nulă, atunci afirmația este evidentă.

Pentru matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, avem $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$

Presupunem $a_{11} \neq 0$, atunci $a_{22} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{12}$ și $a_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{11}$, deci $L_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot L_1$.

Pentru matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ distingem două cazuri:

I. Dacă toți minorii de ordin doi sunt nuli, atunci presupunând $a_{11} \neq 0$ avem

$$L_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot L_1 \text{ și } L_3 = \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot L_1.$$

II. Dacă avem minor de ordin 2 nenul, putem presupune că acesta este $d_{11} \neq 0$ (în caz contrar procedeul este similar). Avem $\det A = a_{11}d_{11} - a_{21}d_{21} + a_{31}d_{31} = 0$, deci

$$a_{11} = \frac{d_{21}}{d_{11}} a_{21} - \frac{d_{31}}{d_{11}} a_{31}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d_{21}}{d_{11}} a_{22} - \frac{d_{31}}{d_{11}} a_{32} &= \frac{(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})a_{22}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} - \frac{(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{32}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} = \\ &= \frac{a_{12}a_{33}a_{22} - a_{13}a_{32}a_{22} - a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{32}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} = \frac{a_{12}(a_{33}a_{22} - a_{23}a_{32})}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} = a_{12} \end{aligned}$$

Analog se obține $\frac{d_{21}}{d_{11}} a_{23} - \frac{d_{31}}{d_{11}} a_{33} = a_{13}$. Deci $L_1 = \frac{d_{21}}{d_{11}} L_2 - \frac{d_{31}}{d_{11}} L_3$.

Demonstrația teoremei. a) Conform lemei una dintre liniile matricei sistemului este combinație liniară a celorlalte două, iar înlocuind una dintre coloane cu coloana termenilor liberi obținem aceeași combinație liniară, deci putem spune că una dintre liniile matricei extinse este combinație liniară a celorlalte două, de unde rezultă că una dintre ecuații se poate obține din celelalte două. Deci eliminând această ecuație, obținem două ecuații. Am văzut în demonstrația lemei că minorul de ordin doi nenul este conținut în liniile a căror combinație liniară este cea de a treia linie, deci dacă alegem adecvat parametrul obținem un sistem Cramer.

b) În acest caz doi din membrii stângi ai ecuațiilor reprezintă multipli ai celui de-al treilea și nu sunt adevărate aceleași relații de multiplicitate și pentru termenii liberi, ceea ce conduce la contradicție. (de exemplu în cazul sistemului (7) $-2x + 2y - 4z = -2(x - y + 2z)$, iar $3 \neq -2 \cdot 2$).

c) În acest caz două dintre ecuații se pot obține din a treia ecuație prin înmulțire cu un număr real (complex), deci sistemul se reduce la o singură ecuație, unde dacă coeficientul unuia dintre necunoscute este nenul, acesta se poate exprima în funcție de celelalte două.

Pentru simplificarea proprietăților de mai sus introducem o nouă noțiune:

Definiție. Numim *rangul matricei* nenule $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ și îl notăm cu $\text{rang } A$, cel mai mare număr $r \in \mathbb{N}^*$ pentru care există un minor de ordin r nenul, iar toți minorii de ordin mai mare decât r sunt nuli. Rangul matricei nule prin definiție este 0.

Dacă folosim această definiție pentru a calcula de exemplu rangul unei matrice pătratice de ordinul trei și având rangul 1 trebuie să calculăm 9 determinanți de ordinul doi. Pentru a simplifica aceste calcule enunțăm următoarea teoremă:

Teoremă. Rangul matricei $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ este r dacă și numai dacă există un minor de ordin r nenul, iar toți minorii de ordin $r + 1$ care conțin acest minor sunt nuli.

Demonstrație. Implicația directă rezultă imediat din definiție. Să demonstrăm cealaltă implicație. Fie o matrice $A \in M_3(\mathbb{C})$ (analog se demonstrează și în celelalte cazuri) Pentru $r = 1$, presupunem $a_{11} \neq 0$. Minorii de ordin doi, care îl conține pe a_{11}

sunt: $d_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $d_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $d_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, $d_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ aceștia fiind

nuli cu $a_{11} \neq 0$ avem $L_2^{33} = \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1^{33}$, $L_2^{32} = \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1^{32}$, $L_2^{23} = \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1^{23}$, $L_2^{22} = \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1^{22}$, unde

cu L_k^{ij} am notat linia k a minorului d_{ij} . Astfel avem în matricea A : $L_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1$ și

$L_3 = \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1$, deci minorii de ordin doi care conțin prima linie sunt nuli, iar

determinantul matricei este evident nul (avem două linii proporționale). Dacă $a_{21} \neq 0$

sau $a_{31} \neq 0$, atunci $L_3 = \frac{a_{31}}{a_{21}} L_2$ sau $L_2 = \frac{a_{21}}{a_{31}} L_3$, deci minorii de ordin doi alcătuiți din

a doua și a treia linie sunt nuli. Dacă $a_{21} = a_{31} = 0$, atunci a doua și a treia linie sunt identic nule, deci și minorii de ordin doi alcătuiți din a doua și a treia linie sunt nuli.

Pentru cazul $r = 2$, fie $d_{11} \neq 0$. Determinantul matricei este nul, deci rangul este 2 (dacă numărul liniilor sau coloanelor ar fi mai mare decât 3, analog ca în cazul precedent am obține că toate liniile, respectiv coloanele sunt combinații liniare a primelor două linii, respectiv coloane).

Cunoscând noțiunea de rang, teorema rezolvabilității unui sistem se poate afirma și astfel:

Teorema Kronecker-Capelli

Sistemul
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$
 este compatibil dacă și numai dacă $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A}$.

Observații. 1. Dacă $\text{rang } A = 3$, atunci sistemul este compatibil determinat, iar dacă $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} < 3$ este compatibil nedeterminat.

2. Dacă $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = r < 3$, alegem un minor nenul de ordin r al matricii A , pe care îl numim *minor principal*. Necunoscutele care au drept coeficienți elementele acestui minor le vom numi *necunoscute principale*, celelalte necunoscute fiind *necunoscute secundare*, acestea din urmă fiind considerate parametri. Astfel obținem un sistem Cramer cu r ecuații și r necunoscute.

3. Dacă alegem în matricea sistemului un minor principal, atunci pentru ca sistemul să fie compatibil, toți minorii de ordin $r + 1$ ai matricii extinse care conțin acest minor trebuie să fie nuli. Numim acești minori *determinanți caracteristici*. Deci putem afirma următoarea teoremă:

Teorema Rouché

Sistemul
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$
 este compatibil dacă și numai dacă determinanții caracteristici sunt nuli.

Consecință. Dacă $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, atunci în cazul $\Delta \neq 0$ sistemul admite numai soluția $(0, 0, 0)$, iar în cazul $\Delta = 0$ există o infinitate de soluții.

Demonstrație. Deoarece coloana termenilor liberi este identic nulă, rezultă că determinanții caracteristici sunt nuli, deci sistemul este compatibil. Dacă $\det A \neq 0$, atunci sistemul are soluție unică, deci numai soluția $(0, 0, 0)$. Dacă $\det A = 0$, atunci $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} < 3$, deci sistemul este compatibil nedeterminat, adică în afara soluției $(0, 0, 0)$, are o infinitate de soluții.

Observație. Sistemele de acest tip sunt *sisteme liniare omogene* și admit întotdeauna soluția banală sau trivială $(0, 0, 0)$.

Exerciții rezolvate

1. Să se rezolve sistemul
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ x - 6y + 3z = 0 \end{cases}.$$

Rezolvare.

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$, cu $\det A = 0$; $d_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$,

deci este minor principal. Singurul determinant caracteristic este

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0$, deci sistemul este compatibil nedeterminat. Astfel x și y sunt

necunoscute principale și $z = \alpha$ necunoscută secundară, iar sistemul se reduce la

sistemul Cramer: $\begin{cases} 3x - 2y = 2 - \alpha \\ x + 2y = 1 + \alpha \end{cases}$ cu soluțiile $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{4\alpha + 1}{8}$. Deci mulțimea

soluțiilor este $S = \left\{ \left(\frac{3}{4}, \frac{4\alpha + 1}{8}, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

2. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ 3x + 3y - 7z = 0 \end{cases}$.

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, cu $\det A = 0$; $d_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$,

deci acesta este un minor principal. Singurul determinant caracteristic este

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$, deci sistemul este incompatibil.

Calculul rangului unei matrice

Să calculăm rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & \boxed{2} \\ \boxed{2} & -2 & \boxed{3} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Elementul $a_{11} = 1 \neq 0$, deci rangul este cel puțin 1. Considerăm minorii de ordin 2 care conțin acest element (spunem că aceștia au fost obținuți prin **bordarea** minorului de ordinul 1 cu celelalte coloane și linii), calculând minorii de ordin doi până când găsim unul nenul. Dacă nu găsim un asemenea minor, atunci rangul matricei este 1.

Prin bordarea cu a doua linie și a doua coloană, obținem minorul $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$,

deci trebuie să continuăm procedeul. Bordând cu a doua linie și a treia coloană,

obținem $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Deci trebuie să bordăm acest minor, obținând

determinantul matricei: $\det A = 0$. Deci $\text{rang } A = 2$.



Transformări elementare

Am văzut la proprietățile determinanților că adunând la o coloană sau linie o altă coloană respectiv o altă linie înmulțită cu un număr nenul, valoarea determinantului nu se schimbă; dacă schimbăm două linii sau coloane între ele se schimbă numai semnul determinantului, iar dacă înmulțim o linie sau o coloană cu un număr, atunci și determinantul se înmulțește cu acel număr; dacă acest număr este nenul, atunci rezultatul va fi un număr nul sau nenul în funcție de valoarea inițială a determinantului (nulă respectiv nenulă). Astfel, aplicând asemenea transformări unei matrice, nu se schimbă rangul.

Definiție. O transformare elementară de linii (coloane) înseamnă fie că:

- înmulțim sau împărțim elementele unei linii (coloane) cu un număr nenul;
 - schimbăm între ele două linii (coloane);
 - adunăm elementelor unei linii (coloană) elementele unei alte linii înmulțite cu un număr fixat și nenul τ .
- Vom spune că matricele A și B sunt echivalente, dacă din A putem obține matricea B prin transformări elementare. Folosim notația $A \sim B$.

Observații. 1. Dacă B poate fi obținută din A prin transformări elementare de linii, atunci înseamnă că sistemele liniare asociate matricelor A și B ca matrice extinse sunt echivalente, adică unul poate fi obținut din celălalt prin înmulțirea unor ecuații cu un număr nenul, schimbarea ecuațiilor, adunarea unor ecuații înmulțite cu un număr fixat la alte ecuații.

2. Dacă B poate fi obținută din A prin transformări elementare, atunci și A poate fi obținută din B prin transformări elementare, deci aceste transformări sunt inversabile.

Exemple

- Să calculăm rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ cu ajutorul transformărilor elementare.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 + L_1 \rightarrow L_3}]{L_2 \sim L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \sim (-L_2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 - 2L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 - L_2 \rightarrow L_3}]{L_1 \sim L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Această ultimă matrice are rangul 2. În fiecare caz prin asemenea transformări, ajungem la o matrice I_r în colțul stâng superior al matricei, iar în restul liniilor (sau a coloanelor) numai cu zerouri, unde $r = \text{rang } A$.

- Considerăm sistemul
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ x - 6y + 3z = 0 \end{cases}$$
. Să verificăm ce înseamnă din punct de vedere al sistemului

transformările elementare de linii aplicate matricei extinse? În continuare tratăm paralel aceste schimbări:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ x - 6y + 3z = 0 \end{array} \right. \quad | : 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{2}{3} \\ x + 2y - z = 1 \\ x - 6y + 3z = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{3} \quad -2 \quad 1 \quad | \quad 2 \\ 1 \quad 2 \quad -1 \quad | \quad 1 \\ 1 \quad -6 \quad 3 \quad | \quad 0 \end{array} \right. \xrightarrow{L_1 \sim L_1 : 3} \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad -\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad | \quad \frac{2}{3} \\ 1 \quad 2 \quad -1 \quad | \quad 1 \\ 1 \quad -6 \quad 3 \quad | \quad 0 \end{array} \right. \xrightarrow[\substack{L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - L_1 \rightarrow L_3}]{L_2 \sim L_2} \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad -\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad | \quad \frac{2}{3} \\ 0 \quad \frac{8}{3} \quad -\frac{4}{3} \quad | \quad \frac{1}{3} \\ 0 \quad -\frac{7}{3} \quad \frac{8}{3} \quad | \quad -\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Scădem prima ecuație din celelalte două.

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3}y - \frac{4}{3}z = \frac{1}{3} \\ -\frac{16}{3}y + \frac{8}{3}z = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \left| : \frac{8}{3} \right.$$

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{2}{3} \\ y - \frac{1}{2}z = \frac{1}{8} \\ -\frac{16}{3}y + \frac{8}{3}z = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{16}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2: \frac{8}{3}L_2 \rightarrow L_2 \\ \sim \end{array} \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{16}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 + \frac{2}{3}L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 + \frac{16}{3}L_2 \rightarrow L_3 \\ \sim \end{array} \end{aligned}$$

Înmulțim a doua ecuație cu $\frac{2}{3}$, apoi cu $\frac{16}{3}$ și o adunăm la prima, respectiv la a treia ecuație.

$$\begin{cases} x & & = \frac{3}{4} \\ y - \frac{1}{2}z & = \frac{1}{8} \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nu mai putem efectua alte transformări. Observăm că ultima linie este nulă, deci $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 2$.

Alegem parametrul $z = \alpha$ și astfel obținem soluțiile $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\alpha$ și $z = \alpha$. Deci cu ajutorul transformărilor elementare putem rezolva și sisteme de ecuații fără a verifica dinainte compatibilitatea. Elementele cu care am împărțit la fiecare pas (elementele încercuite) se numesc elemente *pivot*.

3. Să rezolvăm sistemul
$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ 3x + 3y - 7z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3 \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & 4 \\ 0 & 6 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2: 3 \\ L_3 - 2L_2 \rightarrow L_3 \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

Observăm că nu mai e nevoie de alte calcule, deoarece ultimei linii îi corespunde ecuația $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -14$, deci sistemul este incompatibil. În general, dacă obținem numai zerouri pe o linie a matricei și un număr nenul în coloana termenilor liberi pe aceeași linie, atunci sistemul este incompatibil.

4. Să rezolvăm sistemul
$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - 2z = 4 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3 \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2: 2 \\ L_3 - L_2 \rightarrow L_3 \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3: 4 \\ L_1 + L_2 \rightarrow L_1 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 + \frac{1}{2}L_3 \rightarrow L_2 \\ L_1 + \frac{3}{2}L_3 \rightarrow L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array} \right). \text{Deci } x = \frac{7}{2}, y = 1, z = \frac{1}{4}.$$

Să verificăm ce se întâmplă, dacă termenii liberi sunt arbitrari, adică sistemul este

$$\begin{cases} x - y - z = b_1 \\ x + y - 2z = b_2 \\ 2x + z = b_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 1 & 1 & -2 & b_2 \\ 2 & 0 & 1 & b_3 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & 2 & -1 & -b_1 + b_2 \\ 0 & 2 & 3 & b_3 - 2b_1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 : 2 \\ L_3 - L_2 \rightarrow L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{-b_1 + b_2}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -b_1 - b_2 + b_3 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{array}{l} L_3 : 4 \\ L_4 + L_2 \rightarrow L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{b_1 + b_2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{-b_1 + b_2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b_1 - b_2 + b_3}{4} \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 + \frac{1}{2}L_3 \rightarrow L_2 \\ L_1 + \frac{3}{2}L_3 \rightarrow L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8}b_1 + \frac{1}{8}b_2 + \frac{3}{8}b_3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{8}b_1 + \frac{3}{8}b_2 + \frac{1}{8}b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4}b_1 - \frac{1}{4}b_2 + \frac{1}{4}b_3 \end{array} \right).$$

$$\text{Deci } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \text{ Rezultă că } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

De fapt a aplica transformările termenilor liberi, este același lucru cu a aplica transformările matricei I_3 ,

$$\text{deoarece sistemul inițial se poate scrie și astfel: } A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = I_3 \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad I_3 \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Deci cu transformările elementare de linii din care obținem dintr-o matrice A matricea I_3 , din matricea I_3 obținem matricea A^{-1} . Dacă la un pas schimbăm două coloane în prima matrice, atunci schimbăm coloanele corespunzătoare în a doua matrice. Pentru efectuarea acestor transformări putem construi un algoritm foarte simplu:

1. Scriem coloanele matricei I_3 după coloanele matricei A , obținând astfel o matrice 3×6 :

$$M = (A \mid I_3)$$

2. Efectuăm transformări elementare cu linii în matricea M astfel ca în primele 3 coloane să apară matricea I_3 . Dacă avem nevoie de schimbarea coloanelor i și j , atunci schimbăm și coloana $3 + i$ cu coloana $3 + j$.

3. Ultimele 3 coloane formează matricea A^{-1} (dacă matricea A nu este inversabilă, atunci la un moment nu mai putem continua, având o linie sau o coloană identic nulă).



Exemplu. Să calculăm inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție

$$\begin{aligned}
 (A \mid I_n) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -3L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ -L_1 + L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-6} & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\
 \begin{array}{l} -\frac{1}{6}L_2 \rightarrow L_2 \\ L_2 + L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2L_2 + L_1 \rightarrow L_1 \\ L_2 + L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \sim \\
 \begin{array}{l} \frac{6}{7}L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{array} \right) \begin{array}{l} \frac{5}{6}L_3 + L_2 \rightarrow L_2 \\ -\frac{2}{3}L_3 + L_1 \rightarrow L_1 \end{array} \sim \\
 \text{Deci } A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{array} \right) \begin{array}{l} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Exercițiu rezolvat

Să efectuăm următoarele înmulțiri de matrice:

a) $\begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau & 2\tau \\ -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -\tau & 2\tau & \tau \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\tau \\ -2 & \tau \\ 3 & \tau \end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \tau & 2 \\ -1 & 2\tau & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; **f)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; **h)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;



$$\text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tau \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3\tau & 1+0 \cdot \tau & 2+3\tau \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{j)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \tau-2 & 2\tau+1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{k)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tau \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2\tau+2 \\ -1 & 2 & -\tau+1 \\ 3 & 0 & 3\tau+3 \end{pmatrix}; \text{l)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\tau & 2 \\ -2+\tau & 1 \\ 3+\tau & 1 \end{pmatrix}.$$

Observații. 1. Din exemplele de mai sus observăm că fiecărei transformări elementare îi putem asocia o matrice, după cum urmează:

a) Dacă în matricea I_3 înmulțim coloana i cu un τ (obținând matricele $\begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}$), înmulțirea la stânga a unei matrice de tip $3 \times k$ cu această matrice, înmulțește linia i cu τ

și rămân neschimbate celelalte linii, același lucru întâmplându-se cu coloanele dacă înmulțim la dreapta o matrice de tip $k \times 3$ (exemplele a), b), c), d)).

b) Dacă în matricea I_3 schimbăm coloanele i și j ($i \neq j$) (obținând matricele $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$) înmulțirea la stânga schimbă liniile i și j , iar la dreapta coloanele (ex. e), f), g), h)).

c) Dacă în matricea I_3 lăsăm diagonala neschimbată și pe poziția (i, j) ($i \neq j$), schimbăm zeroul cu un τ , înmulțind la stânga cu o matrice, este echivalent cu înmulțirea liniei i cu τ și adunarea la linia j . Același lucru se întâmplă cu coloanele la înmulțirea la dreapta. (ex. i), j), k), l)).

2. Pe baza proprietăților precedente transformările folosite la calculul determinanților pot fi considerate și ca înmulțiri cu matrice de formă specială. Pentru fixarea noțiunilor vom numi aceste matrice transformări elementare.

3. Determinanții transformărilor elementare în cazul a) sunt egali cu τ , în cazul b) cu -1 , iar în cazul c) cu 1 .

4. Dacă $\det(A) \neq 0$, notăm cu E_1, E_2, \dots, E_q matricele asociate transformărilor elementare cu ajutorul cărora obținem matricea identitate. $E_q \cdot E_{q-1} \cdot \dots \cdot E_1 \cdot A = I_3$. Deoarece $\det A \neq 0$, există A^{-1} și astfel obținem (înmulțim la dreapta cu A^{-1}): $E_q \cdot E_{q-1} \cdot \dots \cdot E_1 \cdot I_3 = A^{-1}$. Deci într-adevăr dacă prin transformările $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \dots \rightarrow E_q$ din A obținem I_3 , atunci cu aceleași transformări din I_3 obținem A^{-1} .

5. Orice matrice inversabilă se poate scrie ca produsul unor transformări elementare, $A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \dots E_q^{-1}$. Dacă la pasul i elementul pivot este p_i , adică am împărțit cu i o linie sau o coloană, atunci $\det E_i = \frac{1}{p_i}$, astfel $\det E_i^{-1} = p_i$. Deci determinantul matricei este produsul elementelor pivot respectiv $(-1)^k$, unde k este numărul schimbărilor de linie sau coloană.

Exerciții rezolvate

1. Să se rezolve următoarele sisteme liniare

- a) folosind regula lui Cramer;
- b) folosind metoda eliminării;
- c) calculând inversa matricei sistemului;
- d*) cu ajutorul transformărilor elementare.

I. $\begin{cases} 6x + 5y = 17 \\ 13x + 7y = 10 \end{cases}$; II. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = -1 \\ x + y - z = 0 \\ -x - 2y + 4z = 4 \end{cases}$.

Rezolvare

a) I. $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 13 & 7 \end{vmatrix} = 42 - 65 = -23$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 17 & 5 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = 119 - 50 = 69$ și

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -11 & 17 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -110 - 51 = -161$. Deci

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{69}{-23} = -3$ și $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-161}{-23} = 7$.

II.

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$;

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$;

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5$;



$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3.$$

Astfel $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -2$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 5$ și $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3$.

b) I. Înmulțim a doua ecuație cu 6, prima cu 13 și le scădem. Obținem $-23y = -161$, deci $y = 7$. De aici rezultă $x = \frac{17-5y}{6} = -3$.

II. Schimbăm primele două ecuații și efectuăm pe rând următoarele transformări:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = -1 \\ -x - 2y + 4z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 2z = -1 \\ -y + 3z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 2z = -1 \\ z = 3 \end{cases}.$$

Astfel $y = 2z - 1 = 5$ și $x = -y + z = -5 + 3 = -2$.

I. Forma matriceală este

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 13 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Transpusa matricei $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}$ este ${}^tA = \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ și adjuncta $A^* = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -13 & 6 \end{pmatrix}$.

Dar $\det A = 6 \cdot 7 - 5 \cdot 13 = -23$, deci $A^{-1} = -\frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -13 & 6 \end{pmatrix}$ și astfel obținem

soluția

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -13 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 69 \\ -161 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

II. Scriem sistemul sub forma:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Transpusa și adjuncta matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ sunt

$${}^t A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ și } A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Cum } \det A = -1 \text{ obținem } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

În consecință soluția sistemului este

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{d) I. } \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{6} & 5 & 17 & \\ 13 & 7 & 10 & \end{array} \right) \underset{\sim}{L_1:6} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{6} & \frac{17}{6} & \\ 13 & 7 & 10 & \end{array} \right) \underset{\sim}{L_2-13L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{6} & \frac{17}{6} & \\ 0 & \boxed{\frac{-23}{6}} & \frac{-161}{6} & \end{array} \right) \underset{\sim}{L_2 \cdot \left\{ \frac{-6}{-23} \right\}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{6} & \frac{17}{6} & \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & \end{array} \right) \underset{\sim}{L_1 - \frac{5}{6}L_2 \rightarrow L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & \\ 0 & 1 & 7 & \end{array} \right), \text{ deci } x = -3 \text{ și } y = 7.$$

$$\text{II. } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 4 \end{array} \right) \underset{\sim}{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & -1 \\ -1 & -2 & 4 & 4 \end{array} \right) \underset{\sim}{L_2-2L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \end{array} \right) \underset{\sim}{L_3+L_1 \rightarrow L_3}$$

$$\underset{\sim}{L_1-L_2 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \underset{\sim}{L_1-L_3 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right), \text{ deci } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Să se studieze compatibilitatea următoarelor sisteme liniare, iar în caz de compatibilitate să se rezolve în \mathbb{R} :

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ 4x - 5y + z = 6 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 9 \\ x - 2y - 3z = 2 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 3x - 4y - 5z = 6 \end{cases}.$$

Rezolvare. a) Soluția 1. Determinantul sistemului este $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$, deci

nu este sistem Cramer. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, deci poate fi ales ca minor principal.

Singurul determinant caracteristic este $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0$, deci sistemul este compatibil

nedeterminat.

Observăm că x și y sunt necunoscute principale, iar $z = \alpha$ necunoscuta secundară.

Astfel trebuie să rezolvăm sistemul $\begin{cases} x - 3y = 3 - \alpha \\ 2x + y = \alpha \end{cases}$, care are soluțiile $x = \frac{3 + 2\alpha}{7}$

și $y = \frac{3\alpha - 6}{7}$. Deci soluțiile sistemului sunt $S = \left\{ \left(\frac{3 + 2\alpha}{7}, \frac{3\alpha - 6}{7}, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

Soluția 2.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 4L_1 \rightarrow L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{7} & -3 & -6 \\ 0 & 7 & -3 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \cdot 7 \\ L_3 - L_2 \rightarrow L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 + 3L_2 \rightarrow L_1} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \text{ deci soluțiile sunt } z = \alpha, x = \frac{3}{7} + \frac{2}{7}\alpha \text{ și } y = -\frac{6}{7} + \frac{3}{7}\alpha. \end{aligned}$$

b) Soluția 1. Determinantul sistemului este $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, deci

putem aplica regula lui Cramer:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -10, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -15, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 10.$$

Deci soluțiile sunt $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 2$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 3$ și $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -2$.

Soluția 2.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - L_1 \rightarrow L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \cdot (-1) \\ L_3 + 3L_2 \rightarrow L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1 - L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 + 3L_2 \rightarrow L_3}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & -10 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \cdot 5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1 + 2L_3 \rightarrow L_1 \\ L_2 - 3L_3 \rightarrow L_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right), \text{ deci } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Să se determine valorile reale a, b pentru care sistemul următor

a) este incompatibil; **b)** este compatibil nedeterminat și să se rezolve în acest caz:

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ (2a - 1)x + 2y + z = b \end{cases}$$

Rezolvare. Soluția 1. a) Dacă sistemul este incompatibil, atunci determinatul sistemului este 0 (matricea sistemului fiind o matrice pătratică). Ecuația

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ se poate scrie sub forma:}$$

$$a + 3(2a - 1) - 8 + 2(2a - 1) - 6a - 2 = 0 \text{ adică } 5a - 15 = 0.$$

Deci $\Delta = 0$ numai pentru $a = 3$. În acest caz obținem sistemul:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 5x + 2y + z = b \end{cases}$$

De aici putem observa că $5x + 2y + z = (3x + y - 2z) + (2x + y + 3z)$, deci pentru $b = 3$ sistemul ar fi compatibil. Astfel condiția de incompatibilitate este $a = 3$ și $b \neq 3$.

Observație. Putem obține același rezultat și din condiția ca rangul matricei extinse să fie diferit de rangul matricei sistemului. Dacă folosim acest raționament, atunci

putem lua ca minor principal $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ și b trebuie să fie diferită de soluția

$$\text{ecuației } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & b \end{vmatrix} = 0.$$

b) Din a) rezultă că sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a = 3$ și $b = 3$.

În acest caz avem sistemul $\begin{cases} 3x + y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 5x + 2y + z = 3 \end{cases}$ cu minorul principal $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Alegem $z = \alpha$, astfel $\begin{cases} 3x + y = 2 + 2\alpha \\ 2x + y = 1 - 3\alpha \end{cases}$, deci $x = 1 + 5\alpha$ și $y = -1 - 13\alpha$.

Soluția 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2a-1 & 2 & 1 & b \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & -2 & 2 \\ 2a-1 & 2 & 1 & b \end{array} \right) \xrightarrow{L_1:2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ a & 1 & -2 & 2 \\ 2a-1 & 2 & 1 & b \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 - aL_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - (2a-1)L_1 \rightarrow L_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2-a}{2} & \frac{-4-3a}{2} & \frac{4-a}{2} \\ 0 & \frac{5-2a}{2} & \frac{5-6a}{2} & \frac{2b-2a+1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 - 2L_2 \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2-a}{2} & \frac{-4-3a}{2} & \frac{4-a}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{13}{2} & \frac{2b-7}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_3: \frac{1}{2} \\ L_3 \leftrightarrow L_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 13 & 2b-7 \\ 0 & \frac{2-a}{2} & \frac{-4-3a}{2} & \frac{4-a}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 - \frac{L_2}{2} \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 4-b \\ 0 & 1 & 13 & 2b-7 \\ 0 & 0 & 5(a-3) & ab-4a-2b+9 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 - \frac{2-a}{2}L_2 \rightarrow L_3}$$

Sistemul este incompatibil dacă și numai dacă $a-3=0$ și $ab-4a-2b+9 \neq 0$, adică $a=3$ și $b \neq 3$.

Sistemul este compatibil nedeterminat dacă și numai dacă $a-3=0$ și $ab-4a-2b+9=0$, adică $a=3$ și $b=3$.

În acest caz avem ultima linie nulă, $z = \alpha$, $x = 4 - b + 5\alpha = 1 + 5\alpha$ și $y = 2b - 7 - 13\alpha = -1 - 13\alpha$.

4. Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2mx + m^2y + 3z = 3 \end{cases}$$

admite soluție unică.

(Admitere 1997)

Soluție. Sistemul admite soluție unică dacă și numai dacă $\Delta \neq 0$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2m & m^2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltând determinantul după regula lui Sarrus obținem $\Delta = -m^2 + 10m - 9$. Rădăcinile ecuației $m^2 - 10m + 9 = 0$ sunt $m_1 = 1$ și $m_2 = 9$, deci sistemul admite soluție unică pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 9\}$.

5. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x - ay + a^2z = a^4 \\ x - by + b^2z = b^4 \\ x - cy + c^2z = c^4 \end{cases}$$

dacă $a \neq b \neq c \neq a$.

Soluția 1. Determinantul matricei sistemului este

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 1 & -b & b^2 \\ 1 & -c & c^2 \end{vmatrix} = -(b-a)(c-a)(c-b) \neq 0 \text{ (Vandermonde).}$$

Astfel putem aplica regula lui Cramer. Calculăm determinații:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a^4 & a & a^2 \\ b^4 & b & b^2 \\ c^4 & c & c^2 \end{vmatrix} = -abc \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a^4 & a^2 \\ 1 & b^4 & b^2 \\ 1 & c^4 & c^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^4 \end{vmatrix} \text{ și}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_1 = -abc \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = -abc(b-a)(c-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -abc(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c),$$

$$\Delta_2 = -(b^2-a^2)(c^2-a^2)(c^2-b^2) = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b)(b+c)(c+a),$$

$$\Delta_3 = - \begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 0 & b-a & b^4-a^4 \\ 0 & c-a & c^4-a^4 \end{vmatrix} = -(b-a)(c-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & b^3+b^2a+ba^2+a^3 \\ 1 & c^3+c^2a+ca^2+a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(b-a)(c-a) \cdot [c^3-b^3+a(c^2-b^2)+a^2(c-b)] =$$

$$= -(b-a)(c-a)(c-b) \cdot [c^2+cb+b^2+ac+ab+a^2].$$

Din relațiile obținute rezultă $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = abc(a+b+c)$,

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = (a+b)(a+c)(c+b) \text{ și } z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc.$$

Soluția 2. Considerăm funcția polinomială $P(t) = t^4 - t^2z + ty - x$. Ecuțiile date exprimă faptul că numerele a , b și c sunt zerourile lui P , deci

$$P(t) = (t-a)(t-b)(t-c) \cdot Q(t) \text{ (*).}$$

Pe de altă parte $grP = 4$, deci Q este o funcție polinomială de gradul întâi și coeficientul termenului dominant este 1, adică $Q(t) = t + s$. Coeficientul termenului t^3 în produsul $(t-a)(t-b)(t-c)(t+s)$ este $s-a-b-c$, deci egalitatea (*)

implică $s = a + b + c$. După efectuarea operațiilor și identificarea coeficienților obținem:

$$z = (a + b + c)^2 - ab - ac - bc = a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc,$$

$$y = (a + b + c)(ab + ac + bc) + abc = (a + b)(a + c)(b + c) \text{ și}$$

$$x = abc(a + b + c).$$



Exerciții și probleme

1. Calculați rangul următoarelor matrice:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \text{ b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \text{ c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculați inversele următoarelor matrice:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{e) } \begin{pmatrix} -10 & -9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

3. Calculați inversele următoarelor matrice:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 7 & -2 & 8 \\ 5 & -8 & 6 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -9 & 10 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 7 & 5 & -7 \\ 10 & -2 & 3 \\ 8 & 7 & -10 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 10 & -6 & -3 \\ -5 & 7 & -1 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -10 & 9 & -9 \end{pmatrix}; \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 6 & -7 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

4. Determinați valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel ca matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$$

să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(Admitere, 1998.)

5. Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Rezolvați ecuația $XA = B$.

(Admitere, 1999.)

6. Rezolvați următoarele ecuații:

$$\text{a) } X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Rezolvați sistemele de ecuații:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = -6 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ x - y + z = 5 \end{cases}; \quad \text{d) } \begin{cases} x - y = 5 \\ -2x + 2y = 6 \end{cases};$$

$$\text{e) } \begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ -2x + y + z = -3 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases}; \quad \text{f) } \begin{cases} x + z = 3 \\ 2x + y + z = 3 \\ -x + y - 2z = -6 \end{cases}; \quad \text{g) } \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3y - z = 2 \end{cases}.$$

8. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = b \\ x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z = c \end{cases}$$

dacă $a, b, c \in \mathbb{C}$ și ε este o rădăcină de ordinul trei a unității.

(Admitere, 1998.)

9. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ bcx + acy + abz = 0, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

dacă $a \neq b \neq c \neq a$.

10. Determinați valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel ca sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + mz = 2 \\ x + 4y + mz^2 = 4 \end{cases}$$

să admită o soluție unică și rezolvați sistemul în acest caz.

(Admitere, 1999.)

11. Discutați sistemul liniar

$$\begin{cases} (1 + \lambda)x + y + z = 0 \\ x + (1 + \lambda)y + z = \lambda \\ x + y + (1 + \lambda)z = \lambda^2 \end{cases}$$

în funcție de parametrul real $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Admitere, 1999.)

$$\text{12. Rezolvați sistemul } \begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0 \\ x + by + b^2z + b^3 = 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0 \end{cases} \text{ dacă } a \neq b \neq c \neq a.$$

13. Determinați soluțiile sistemului

$$\begin{cases} \frac{x}{(a+\alpha)^2} + \frac{y}{a+\alpha} + \frac{z}{b+\alpha} = 1 \\ \frac{x}{(a+\beta)^2} + \frac{y}{a+\beta} + \frac{z}{b+\beta} = 1 \\ \frac{x}{(a+\gamma)^2} + \frac{y}{a+\gamma} + \frac{z}{b+\gamma} = 1 \end{cases}$$

dacă α, β, γ sunt numere distincte două câte două și fracțiile au sens.

14. Discutați și rezolvați următoarele sisteme liniare:

a)
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b, \quad a, b \in \mathbb{C}; \\ x + y + az = b^2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} ax + 4y + 7z = 0 \\ 2x + ay + 7z = 0, \quad a \in \mathbb{R}; \\ x - 2y + az = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} (m+1)x + y + z = 0 \\ x + 2(m-1)y - z = 0, \quad a \in \mathbb{R}; \\ x - 2y + az = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + 2z = 1 \\ \alpha x + (2\beta - 1)y + 3z = 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \\ \alpha x + \beta y + (\beta + 3)z = 2\beta - 1 \end{cases}$$

15. Demonstrați că pentru $a, b, c \in \mathbb{Z}$ sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = ax + by + cz \\ \frac{1}{2}y = cx + ay + bz \\ \frac{1}{2}z = bx + cy + az \end{cases}$$

admite numai soluția $x = y = z = 0$.

(Admitere, 1987.)

16. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} -bx + az = cxz \\ bx - cy = ayx \\ cy - az = bzy \end{cases}$$

dacă $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

SISTEME LINIARE CU n NECUNOSCUTE ȘI DETERMINANȚI DE ORDIN n .

În acest paragraf definim determinanții de ordin n și extindem toate teoremele din acest capitol la cazul sistemelor cu n necunoscute (matricelor de ordin n).

Definiție. Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{C})$, atunci numim determinantul matricei A numărul $\sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot D_{1j}$ unde D_{1j} este complementul algebric al elementului a_{1j} , deci $D_{1j} = (-1)^{1+j} \cdot d_{1j}$, unde d_{1j} este minorul corespunzător elementului a_{1j} (adică un determinant de ordinul $n - 1$). Astfel

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot D_{1j}.$$

Observație. d_{1j} fiind un determinant de ordin $n - 1$ și determinantul de ordin 2 fiind definit, pe baza principiului inducției matematice rezultă că definiția este corectă. Am văzut că determinanții de ordinul 2 și 3 se pot defini și cu ajutorul permutărilor, ceea ce în cazurile respective nu era indicat. În cazul determinanților de ordin n , de foarte multe ori calculul este ușurat de folosirea permutărilor. Deci determinantul de ordin n se poate defini și în modul următor:

Definiție. Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{C})$, atunci

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Pentru a demonstra echivalența celor două definiții este suficient să arătăm că folosind această definiție putem obține aceeași recurență pentru dezvoltarea determinantului. Folosim un argument inductiv, după ordinul determinantului. Pentru $n = 2$ și $n = 3$ am văzut că cele două definiții sunt echivalente. Presupunem că dezvoltările sunt echivalente pentru $k \leq n - 1$ și demonstrăm că sunt echivalente și pentru n . Fie

$$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \text{ o matrice. Demonstrăm că suma } \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

este chiar dezvoltarea după prima linie (de fapt suma fiind simetrică, este dezvoltarea după o linie/coloană arbitrară). Grupăm termenii sumei care conțin a_{1j} și astfel

coeficientul lui a_{1j} este chiar $\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=j}} \varepsilon(\sigma) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$

Pe de altă parte dacă din permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \\ j & \sigma(2) & \cdots & n & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ construim

permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n-1 \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(k) & \cdots & \tau(n-1) \end{pmatrix}$ după regulile

$$\tau(k) = \begin{cases} \sigma(k+1), & \text{pentru } \sigma(k+1) < j \\ \sigma(k+1) - 1, & \text{pentru } \sigma(k+1) > j \end{cases}, \text{ unde } 1 \leq k \leq n-1.$$

Să vedem un exemplu concret: pentru $n = 6$, $j = 3$, cu transformarea de mai sus din

permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ obținem

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ (4-1) & 1 & (5-1) & (6-1) & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

De fapt de ce această permutare? Permutării σ îi corespunde în determinantul matricii de tip 6×6 produsul $\varepsilon(\sigma) a_{13} a_{24} a_{31} a_{45} a_{56} a_{62}$. Suprimând prima linie și a treia coloană în această matrice, în minorul lui a_{13} fiecare linie „urcă” o poziție, coloanele dinaintea coloanei a treia din matrice își păstrează poziția, iar coloanele de după coloana a treia „se mută” cu o coloană la stânga. Astfel elementele din produsul anterior vor fi pe pozițiile: $a_{24} \rightarrow (1, 3)$, $a_{31} \rightarrow (2, 1)$, $a_{45} \rightarrow (3, 4)$, $a_{56} \rightarrow (4, 5)$ și $a_{62} \rightarrow (5, 2)$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}$$

Inversiunile din permutarea σ sunt $(1, 3)$, $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(2, 6)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$. Primele două inversiuni dispar în permutarea τ , iar celorlalte le corespund $(1, 2)$, $(1, 5)$, $(3, 5)$ respectiv $(4, 5)$. Acest fapt este ilustrat bine în următoarea figură:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Deci de fapt au dispărut inversiunile $(1, k)$ cu $\sigma(k) < 3$.

În consecință în cazul general avem $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{j-1} \varepsilon(\tau)$, deoarece dispar inversiunile

$(1, k)$, $\sigma(k) \in \{1, 2, \dots, j-1\}$ și suma $\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=j}} \varepsilon(\sigma) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ devine

$$(-1)^{j+1} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \varepsilon(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n-1\tau(n-1)},$$

deoarece din τ putem reconstrui în mod unic permutarea σ și se obțin toate permutările posibile τ . Astfel folosind ipoteza de inducție rezultă

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_{1j} d_{1j}$$

unde d_{1j} este determinantul matricii ce se obține suprimând prima linie și coloana j .

În consecință cele două definiții sunt echivalente.

Deși în prima definiție folosim numai dezvoltarea după prima linie, putem arăta că obținem același rezultat dezvoltând determinantul după orice altă linie sau coloană. Această proprietate o formulăm în următoarea teoremă.

Teoremă. Determinantul se poate dezvolta după orice coloană sau linie, adică

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot D_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot D_{kj}, \quad \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Demonstrație. Pentru $n = 2$ și $n = 3$ am demonstrat această proprietate, deci pe baza principiului inducției matematice este suficient să demonstrăm că dacă proprietatea este adevărată pentru orice determinant de ordin $(n - 1)$, atunci ea este valabilă și pentru orice determinant de ordin n .

Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice de ordinul n .

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^n a_{1j} D_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} d_{1j} = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} \left(\sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} (-1)^{(i-1)+k} d_{ikj} + \sum_{k=j+1}^n a_{ik} (-1)^{(i-1)+(k-1)} d_{ikj} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{j-1} a_{1j} a_{ik} (-1)^{i+k+j} d_{ikj} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=j+1}^n a_{1j} a_{ik} (-1)^{i+k+j-1} d_{ikj} = \\ &= \sum_{\substack{k,j=1 \\ k < j}}^n a_{ik} (-1)^{i+k} a_{1j} (-1)^j d_{ikj} + \sum_{\substack{k,j=1 \\ k > j}}^n a_{ik} (-1)^{i+k} a_{1j} (-1)^{j-1} d_{ikj} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=k+1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} a_{1j} (-1)^j d_{ikj} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} a_{ik} (-1)^{i+k} a_{1j} (-1)^{j+1} d_{ikj} = \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_{1j} (-1)^{j+1} d_{ikj} + \sum_{j=k+1}^n a_{1j} (-1)^j d_{ikj} \right) \end{aligned}$$

unde $d_{1j} = \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} (-1)^{(i-1)+k} d_{ikj} + \sum_{k=j+1}^n a_{ik} (-1)^{(i-1)+(k-1)} d_{ikj}$ reprezintă dezvoltarea minorului d_{1j} după linia $i - 1$; de fapt se obține din determinantul inițial prin suprimarea liniilor 1 și i respectiv a coloanelor k și j . Deci în același timp este și minorul elementului a_{1j} în determinantul obținut prin suprimarea liniei i și a coloanei k în determinantul inițial.

Astfel
$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{k-1} a_{1j} (-1)^{1+j} d_{ikj} + \sum_{j=k+1}^n a_{1j} (-1)^{1+(j-1)} d_{ikj},$$

unde d_{ik} este minorul corespunzător elementului a_{ik} în determinantul inițial de ordin n .

Astfel
$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} d_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik},$$

deci $\det A$ poate fi dezvoltat și după linia i .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(k-1)} & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(k-1)} & a_{2k} & a_{2(k+1)} & \dots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)k} & a_{(i-1)(k+1)} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i(k-1)} & a_{ik} & a_{i(k+1)} & \dots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \dots & a_{in} \\ \hline a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \dots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)k} & a_{(i+1)(k+1)} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(k-1)} & a_{nk} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ca și în demonstrația de mai înainte putem obține dezvoltarea $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} D_{ij}$ pornind de la

dezvoltarea $\det A = \sum_{i=1}^n a_{i1} D_{i1}$, deci este suficient să demonstrăm această egalitate.

Și în acest caz folosim principiul inducției matematice. Presupunem că orice determinant de ordin $(n-1)$ poate fi dezvoltat după prima coloană. Conform definiției avem

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^n a_{1j} D_{1j} = a_{11} D_{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j} (-1)^{1+j} \left(\sum_{k=2}^n a_{k1} (-1)^{(k-1)+1} d_{k1}^j \right) = \\ &= a_{11} D_{11} + \sum_{k=2}^n a_{k1} (-1)^{1+k} \left(\sum_{j=2}^n a_{1j} (-1)^{(j-1)+1} d_{k1}^j \right) = a_{11} D_{11} + \sum_{k=2}^n a_{k1} (-1)^{1+k} \bar{d}_{k1} = \\ &= a_{11} D_{11} + \sum_{k=2}^n a_{k1} D_{k1} = \sum_{k=1}^n a_{k1} D_{k1}, \end{aligned}$$

unde \bar{d}_{k1}^j este minorul lui a_{k1} în d_{1j} , și este în același timp minorul lui a_{1j} în d_{k1} ; de fapt este determinantul matricei obținută prin suprimarea primei coloane și a coloanei j respectiv a primei linii și a liniei k .

Consecință. Toate proprietățile determinantilor de ordin 3 se extind în mod automat la determinantii de ordin superior, deoarece de fiecare dată dezvoltând determinantul după o linie (coloană), proprietatea se reduce la proprietatea corespunzătoare a unor determinanți de ordin inferior.

În următoarea teoremă am formulat cele mai importante proprietăți:

Teoremă. Dacă $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$, atunci următoarele afirmații sunt adevărate:

- a)** $\det A = \det {}^t A$, unde ${}^t A$ este transpusa matricei A
- b)** Dacă schimbăm între ele două linii sau coloane ale matricei A , atunci se schimbă semnul determinantului.
- c)** Dacă înmulțim elementele unei linii (coloane) cu un număr fixat α , atunci și determinantul se înmulțește cu α .
- d)** Dacă A are două linii (coloane) identice sau proporționale, atunci determinantul lui A este 0.
- e)** Dacă A și B diferă într-o singură linie (coloană), atunci

$$\det A + \det B = \det C,$$

unde matricea C se obține adunând liniile (coloanele) neidentice și păstrând toate celelalte coloane.

f) Dacă înmulțim elementele unei linii (coloane) cu un număr fixat α și le adunăm la elementele corespunzătoare ale unei alte linii (coloane) atunci determinantul nu se schimbă.

g) Dacă o linie (coloană) este combinația liniară a altor linii (coloane), atunci determinantul este 0.

h) $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} D_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} D_{ij}, \quad \forall i, j = \overline{1, n}.$

i) $\sum_{i=1}^n a_{ij} D_{ik} = 0$, dacă $k \neq j$.

j) $A \cdot A^* = A^* \cdot A = (\det A) I_n$, unde A^* este adjuncta matricei A și se obține din transpusa lui A prin înlocuirea fiecărui element cu complementul său algebric.

k) $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Să demonstrăm câteva proprietăți folosind definiția cu permutări.

a) $\det {}^t A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$; în același timp σ fiind o funcție

bijectivă, avem $a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$, iar când σ parcurge mulțimea S_3 , atunci σ^{-1} parcurge mulțimea S_n . Deci

$$\det {}^t A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} = \det A,$$

unde am folosit faptul că $\varepsilon(\tau^{-1}) = \varepsilon(\tau)$.

b) Ca și în cazul determinanților de ordin 3, putem demonstra că schimbând coloanele (sau liniile) matricei corespunzător unei permutări $\sigma \in S_n$, adică din

$A = (a_{ij})_{i,j=1,\overline{n}}$ obținând $A' = (a_{i\sigma(j)})_{i,j=1,\overline{n}}$, semnul determinantului se înmulțește cu

signatura permutării σ . Într-adevăr $\det A' = \sum_{\tau \in S_3} \varepsilon(\tau) a_{1\tau(\sigma(1))} a_{2\tau(\sigma(2))} \cdots a_{n\tau(\sigma(n))}$

Dacă τ parcurge mulțimea S_n , atunci și $\tau\sigma$ parcurge mulțimea S_3 , iar $\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau\sigma)\varepsilon(\sigma)$. Astfel cu substituția $\delta = \tau\sigma$ obținem

$$\det A' = \sum_{\delta \in S_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\delta) a_{1\delta(1)} a_{2\delta(2)} \cdots a_{n\delta(n)} = \varepsilon(\sigma) \det A.$$

Dacă schimbăm două linii sau coloane, atunci σ este o transpoziție, deci determinantul își schimbă semnul.

k) Folosind proprietățile c) și e) obținem

$$\det AB = \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} \varepsilon(\sigma) \det A = \det A \det {}^t B = \det A \det B.$$

Celelalte proprietăți nu le demonstrăm cu ajutorul permutărilor, deoarece nu se schimbă linii sau coloane, unde permutările ar avea rol important.

Am văzut că, demonstrarea faptului că dezvoltarea unui determinant nu depinde de linia sau coloana după care dezvoltăm, necesită multă atenție la folosirea indicilor și sunt mari șanse de greșeală. Proprietatea de mai sus poate fi demonstrată cu ușurință cu ajutorul permutărilor.

Admitem că determinantul se poate dezvolta după prima linie, și vrem să demonstrăm că $\sum_{j=1}^n a_{1j} D_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{ij} D_{ij}$.

Schimbând liniile matricei astfel ca linia i să fie prima și ordinea restului să nu se schimbe, acestei schimbări îi corespunde ciclul $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ i)$, care are signatura $(-1)^{i-1}$. Pe de altă parte minorii elementului a_{ij} în noua matrice sunt aceiași ca și în matricea inițială, deoarece ordinea liniilor nu se schimbă în afara liniei i , care se suprimă în ambele cazuri. Deci

$$\det A = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{1+j} d_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} d_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} D_{ij}.$$



Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze următorii determinanți:

$$\mathbf{a)} \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}; \mathbf{b)} \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 0 \end{vmatrix}; \mathbf{c)} \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare

$$\mathbf{a)} \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow[-C_1+C_3 \rightarrow C_3]{-C_1+C_2 \rightarrow C_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 12 \\ 13 & 1 & 2 & 16 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{deoarece coloanele din mijloc sunt proporționale})$$

$$\mathbf{b)} \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[-2L_2+L_3 \rightarrow L_3]{-3L_2+L_4 \rightarrow L_4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & -18 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -8 & -4 \\ -5 & -18 & -15 \end{vmatrix} = (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -5 & -18 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow[-2C_1+C_2 \rightarrow C_2]{-4C_5+C_3 \rightarrow C_3} (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & -8 & -15 \end{vmatrix} = (-4) \cdot (-8) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-32) \cdot (-2) = 64.$$

$$\mathbf{c)} \Delta_3 \xrightarrow[-4C_5+C_3 \rightarrow C_3]{-3C_1+C_2 \rightarrow C_2} \begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -15 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & -6 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -23 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+5} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 & -1 \\ 1 & 4 & -15 & 2 \\ 3 & -2 & -6 & -2 \\ 1 & 5 & -23 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{l} 2L_1+L_2 \rightarrow L_2 \\ 3L_1+L_4 \rightarrow L_4 \\ -2L_1+L_3 \rightarrow L_3 \end{array} (-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 & -1 \\ -5 & 8 & -25 & 0 \\ 9 & -8 & 4 & 0 \\ -8 & 11 & -38 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 8 & -25 \\ 9 & -8 & 4 \\ -8 & 11 & -38 \end{vmatrix} = \\
 & \begin{array}{l} C_2+C_1 \rightarrow C_1 \\ 8C_1+C_2 \rightarrow C_2 \\ -4C_1+C_3 \rightarrow C_3 \end{array} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 8 & -25 \\ 1 & -8 & 4 \\ 3 & 11 & -38 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 32 & -37 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 35 & -50 \end{vmatrix} = \\
 & = (-1) \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 32 & -37 \\ 35 & -50 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 32 & -37 \\ 7 & -10 \end{vmatrix} = \\
 & \begin{array}{l} C_2+C_1 \rightarrow C_1 \\ 3C_1+C_2 \rightarrow C_2 \end{array} 5 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -37 \\ -3 & -10 \end{vmatrix} = 5 \cdot (5 - 66) = 5 \cdot (-61) = -305.
 \end{aligned}$$

2. Să se calculeze următorii determinanți:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

Rezolvare

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-1) = 6.$$

Altfel dacă dezvoltăm determinantul cu ajutorul permutărilor, singura permutare careia îi corespunde un produs nenul este permutarea identică.

Observație. În general se poate demonstra prin metoda inducției matematice, că determinantul matricei diagonale cu elemente nenule (eventual și nule) doar pe diagonala principală este produsul elementelor de pe diagonală, adică

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$



$$b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

Altfel dacă dezvoltăm determinantul cu ajutorul permutărilor, singura permutare căreia îi corespunde un produs nenul este permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ cu signatura $(-1)^{4+3+2+1} = 1$. Deci determinantul este produsul elementelor de pe diagonala secundară.

În general signatura permutării $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ este

$$(-1)^{1+2+\dots+n-1} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}. \text{ Deci } \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & a_{2(n-1)} & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \dots a_{n1}$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -32.$$

Rezultatul este iarăși produsul elementelor de pe diagonala principală, iar explicația este aceeași ca și la matricile diagonale.

În general în cazul matricelor triunghiulare avem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \text{ și}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & a_{2(n-1)} & 0 \\ a_{(n-1)1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \dots a_{n1}.$$

Exerciții și probleme

1. Calculați determinanții:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Calculați determinanții

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -i & 1+i & i \\ i & 1 & 2i \\ 2i & 1 & i \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 1+\varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon & 1+\varepsilon \end{vmatrix},$$

dacă ε este o rădăcină de ordin 3 a unității.

$$\text{3. Arătați că } \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ d & 0 & 0 & c \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & c & d & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c & d & 0 \\ b & a & b & a \\ c & d & c & d \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix} = (ad - bc)^2, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

4. Calculați determinanții:

$$\text{a) } \Delta_1 = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & x & x & x \\ x & b & x & x \\ x & x & c & x \\ x & x & x & d \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Calculați determinanții ($x, y, z \in \mathbb{R}, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$)

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x^2 & xy & xy & y^2 \\ y^2 & x^2 & xy & xy \\ xy & y^2 & x^2 & xy \\ xy & xy & y^2 & x^2 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cos x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cos x \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}.$$

6. Calculați determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

în funcție de r , dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice cu rația r .

(Admitere, 1995.)

7. Determinați ordinul de multiplicitate a rădăcinii $x = 1$ a funcției polinomiale

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$$

(Admitere, 1998.)

8. Calculați determinantul de ordin n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & a & \cdots & a \\ a & -1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

(Admitere, 1995.)

9. Calculați următorii determinanți:

$$\text{a) } \Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{b) } \Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix};$$

$$\text{c) } \Delta_n = \begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & \cdots & n! \\ 2! & 2! & 3! & \cdots & n! \\ 3! & 3! & 3! & \cdots & n! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n! & n! & n! & \cdots & n! \end{vmatrix};$$

$$\text{d) } \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^{k-1} \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & \cdots & C_{n+1}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_{n+k-1}^1 & C_{n+k-1}^2 & \cdots & C_{n+k-1}^{k-1} \end{vmatrix}.$$

10. Calculați determinantul

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1 + a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1 + a_n \end{vmatrix}$$

INVERSA UNEI MATRICE

Pe baza proprietății **h)** din teorema precedentă putem construi inversa matricii A dacă $\det A \neq 0$ și putem demonstra regula lui Cramer pentru sisteme de orice ordin. Un sistem liniar cu n necunoscute și n ecuații are forma $A \cdot x = b$, unde $A \in M_n(\mathbb{C})$, $x, b \in \mathbb{R}^n$.

Deoarece $A \cdot A^* = A^* \cdot A = \det A \cdot I_n$, dacă $\det A \neq 0$, atunci matricea

$$B = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

este inversa matricei A ($B \cdot A = A \cdot B = I_n$), deci înmulțind la stânga relația $A \cdot x = b$ cu A^{-1} , obținem $x = A^{-1} \cdot b$. Dar

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{D_{11}}{\Delta} & \frac{D_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{D_{n1}}{\Delta} \\ \frac{D_{12}}{\Delta} & \frac{D_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{D_{n2}}{\Delta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{D_{1n}}{\Delta} & \frac{D_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{D_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}, \text{ unde } \Delta = \det A,$$

și astfel

$$x_j = \sum_{i=1}^n \frac{D_{ij}}{\Delta} \cdot b_i = \frac{\sum_{i=1}^n b_i D_{ij}}{\Delta} \quad j = \overline{1, n}.$$

Expresia care apare la numărător este de fapt dezvoltarea determinantului Δ_j care se obține din Δ înlocuind coloana coeficienților lui x_j cu termenii liberi.

Dacă înmulțim relația $A \cdot x = b$ numai cu A^* , atunci obținem $\Delta \cdot x_j = \Delta_j$, deci și discuția cazului $\Delta = 0$ este similară cu cea din cazul $n \in \{2, 3\}$.

Formulăm aceste proprietăți și sub forma unei teoreme:

Teoremă

a) Dacă $\det A \neq 0$, atunci $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$.

b) Dacă $\det A \neq 0$, atunci sistemul $A \cdot x = b$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ are soluție unică pentru orice $b \in \mathbb{R}^n$ și această soluție se obține din formulele

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n},$$

unde $\Delta = \det A$ și Δ_j se obține în Δ prin înlocuirea coloanei j cu coloana termenilor liberi (adică b) (*regula lui Cramer*).

c) Dacă $\det A = 0$ și există $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ pentru care $\Delta_j \neq 0$, atunci sistemul este incompatibil.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze inversa matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Rezolvare.

$$\det A \stackrel{L_i + L_1 \rightarrow L_i}{i=2,3,4} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -16 \neq 0,$$

deci A este inversabilă.

$${}^t A = A$$

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = D_{44} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$D_{12} = D_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad D_{13} = D_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$D_{14} = D_{41} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4; \quad D_{23} = D_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$D_{24} = D_{42} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4; \quad D_{34} = D_{43} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

$$\text{Deci } A^* = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & -4 \end{vmatrix}; \text{ astfel } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

2. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x - y - z - t = 1 \\ -x + y - z - t = 1 \\ -x - y + z - t = 1 \\ -x - y - z + t = 1 \end{cases}$$

Rezolvare. Soluția 1. Observăm că matricea sistemului este matricea din exercițiul precedent, deci

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Soluția 2. Sistemul este sistem Cramer ($\Delta = \det A = -16 \neq 0$), deci putem aplica regula lui Cramer.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_i - L_1 \rightarrow L_i \\ i=2,3,4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 \leftrightarrow C_2 \\ L_1 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \Delta_x = 8;$$

analog cu o schimbare de linii și una de coloane obținem $\Delta_z = \Delta_t = 8$.

$$\text{Deci } x = y = z = t = -\frac{1}{2}$$

Soluția 3. Observăm că însumând membru cu membru ecuațiile sistemului, obținem:

$-2(x + y + z + t) = 4$, deci $x + y + z + t = -2$. Astfel din prima ecuație a sistemului avem $2x = 1 + x + y + z + t = -1$, deci $x = -\frac{1}{2}$. Analog obținem celelalte necunoscute.

RANGUL UNEI MATRICE DE TIP $m \times n$

Ca și în cazul sistemelor de trei ecuații și trei necunoscute, în cazul $\Delta = 0$ și $\Delta_i = 0$, $i = \overline{1, n}$ avem nevoie de o discuție mai sofisticată. Pentru aceasta introducem și aici noțiunea de rang al matricei.

Definiție. Numim *rangul matricei* nenule $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ și îl notăm cu $\text{rang } A$, cel mai mare număr $r \in \mathbb{N}^*$ pentru care există un minor de ordin r nenul, iar toți minorii de ordin mai mare decât r sunt nuli. Rangul matricei nule prin definiție este 0.

DEF

Se poate demonstra și în cazul acesta următoarea teoremă:



Teoremă. Rangul matricei $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ este r dacă și numai dacă există un minor de ordin r nenul, iar toți minorii de ordin $r+1$ care conțin acest minor sunt nuli.



Observație. Este evident că pentru $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, avem $\text{rang } A \leq \min\{m, n\}$.



Exemplu

Să calculăm rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Bordăm minorii matricei ca și în cazul $\min\{m, n\} \leq 3$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{-1} & 1 & \boxed{3} \\ \boxed{2} & 4 & \boxed{1} & 5 & \boxed{1} \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{2} & 2 & \boxed{1} \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1^1 = 1 \neq 0;$$

$$\Delta_1^2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0;$$

$$\Delta_1^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_2^3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3^3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 13 \neq 0;$$

$$\Delta_1^4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (a doua coloană este dublul primei)}$$

$$\Delta_1^4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1+L_4 \rightarrow L_1 \\ L_2+2L_4 \rightarrow L_2}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Deci $\text{rang } A = 3$.

Și în cazul acesta prin transformări elementare nu se schimbă rangul matricei, deci încercăm să construim matricea I_r .

Matricea din exemplul precedent se transformă astfel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_4 + L_1 \rightarrow L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 \leftrightarrow C_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_4 \\ \sim \end{matrix}$$

Acest pas de schimbare a liniilor nu este strict necesar, dar îl executăm ca să evităm folosirea fracțiilor.

$$\begin{matrix} \sim \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \cdot (-1) \\ L_1 + L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 + 2L_2 \rightarrow L_3 \\ L_4 + 3L_2 \rightarrow L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 \leftrightarrow C_5 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 : 13 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \sim \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - 9L_3 \rightarrow L_1 \\ L_2 + 6L_3 \rightarrow L_2 \\ L_4 - 7L_3 \rightarrow L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ . Deci } \text{rang } A = 3 .$$

Observație. Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $\text{rang } A = r$, atunci prin transformări elementare de linie și schimbări de coloane putem ajunge la o matrice de forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & & & & X \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & & & & \\ - & - & - & - & - & + & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right), \text{ unde } X \in M_{r,n-r}(\mathbb{C}).$$

Vom nota această matrice cu $P = \begin{pmatrix} I_r & X \\ O_{m-r,r} & \end{pmatrix}$.

Dacă efectuăm adecvat transformări elementare de coloane și schimbări de linie ajungem la o matrice de

forma $Q = \begin{pmatrix} I_r \\ O_{m,n-r} \\ X \end{pmatrix}$, unde $X \in M_{m-r,r}(\mathbb{C})$.

De fapt I_r poate fi construit oriunde astfel ca în restul liniilor sau a coloanelor să fie numai zerouri.

Teoremă

a) Dacă înmulțim la dreapta matricea $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ cu matricea $B = (b_{ij})_{i,j=1,n}$, $b_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \tau, & i = j = k \\ 1, & i = j \neq k \end{cases}$ atunci rezultatul se poate obține din A și prin înmulțirea elementelor din coloana k cu τ .



Exemplu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\tau & 0 & 1 \\ -1 & 3\tau & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Dacă înmulțim de la stânga cu $D = (d_{ij})_{i,j=1,\overline{m}}$ definit prin

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \tau, & i = j = k, \\ 1, & i = j \neq k \end{cases}$$

atunci această operație este echivalentă cu înmulțire liniei k cu τ .**Exemplu**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4\tau & 0 & \tau \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

În cazul general avem următoarea teoremă:

c) Dacă înmulțim matricea $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ la dreapta cu $B = (b_{kl})_{k,l=1,\overline{n}}$, definită prin
$$b_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \notin \{i, j\}, (k, l) = (i, j) \text{ sau } (k, l) = (j, i) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$
, atunci coloanele i și j își schimbă poziția și

restul coloanelor rămâne neschimbat.

Exemplu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Dacă înmulțim de la stânga cu $D = [d_{kl}]_{k,l=1,\overline{m}}$, definită prin

$$d_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \notin \{i, j\}, (k, l) = (i, j) \text{ sau } (k, l) = (j, i) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases},$$

atunci schimbăm de fapt linia i cu linia j .**Exemplu**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

e) Dacă înmulțim matricea $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ cu $B = (b_{kl})_{k,l=1,\overline{n}}$, definită prin

$$b_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ \tau, & (k, l) = (i, j), \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

atunci obținem o matrice care poate fi obținută și prin adunarea la coloana j a coloanei i înmulțită cu τ .

Exemplu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \tau \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & \tau - 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2\tau - 1 \\ -3 & 1 & 1 & -3\tau + 3 \end{pmatrix}$$

f) Dacă înmulțim matricea $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ cu $D = (d_{kl})_{k,l=1,\dots,m}$, definită prin

$$d_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ \tau, & (k, l) = (i, j), \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

atunci obținem o matrice care poate fi obținută și prin adunarea la linia j a liniei i înmulțită cu τ .

Exemplu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ \tau - 1 & -\tau + 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Observații. 1. Determinanții transformărilor elementare în cazurile a) și b) sunt egali cu τ , în cazurile c) și d) cu -1 , iar în cazurile e) și f) cu 1 . Deci dacă $\tau \neq 0$, atunci transformările elementare sunt inversabile și inversele sunt tot transformări elementare.

2. Dacă pentru $A \in M_n(\mathbb{C})$ avem $\det A \neq 0$, atunci deoarece $\text{rang } A = n$ prin transformări elementare obținem I_n . Deci există transformările elementare $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow \dots \rightarrow E_q$ astfel încât $E_q \cdot E_{q-1} \cdot \dots \cdot E_1 \cdot A = I_n$, de unde $E_q \cdot E_{q-1} \cdot \dots \cdot E_1 \cdot I_n = A^{-1}$, deci dacă efectuăm aceleași transformări pe care le-am efectuat asupra lui A , pornind de la matricea I_n , atunci rezultatul va fi inversa matricei A . Pentru efectuarea acestor transformări putem construi algoritmul cunoscut de la matricele de ordin 3:

I. Scriem coloanele matricei I_n după coloanele matricei A , obținând astfel o matrice $n \times 2n$:

$$M = \left[A \mid I_n \right]$$

II. Efectuăm transformări elementare cu linii în matricea M astfel ca în primele n coloane să apară matricea I_n . Dacă avem nevoie de schimbarea coloanelor i și j , atunci schimbăm și coloana $n+i$ cu coloana $n+j$.

III. Ultimele n coloane formează matricea A^{-1} , dacă există.

Elementele cu care am împărțit în fiecare pas (elementele încercuite) se numesc elemente *pivot*.

3. Din **2.** rezultă că dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\det A \neq 0$, atunci A se poate scrie ca produs de transformări elementare, și anume $A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \dots \cdot E_q^{-1}$. Deci și aici determinantul matricei este produsul elementelor pivot respectiv $(-1)^k$, unde k este numărul schimbărilor de linie sau coloană.

4. Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci $\text{rang } AB \leq \min \{ \text{rang } A, \text{rang } B \}$.

Demonstrație. Dacă matricea A prin intermediul transformărilor E_1, E_2, \dots, E_q poate fi adusă la

forma $D_1 = \begin{pmatrix} I_r & X \\ O_{m-r,n} & \end{pmatrix}$, atunci cu aceleași transformări din $A \cdot B$ obținem $D_1 \cdot B$. Astfel

$$E_q E_{q-1} \dots E_1 \cdot AB = D_1 B.$$

Dar $D_1 \cdot B$ are cel puțin atâtea linii identic nule, câte sunt în D_1 și astfel $\text{rang}(AB) \leq \text{rang } A$ (1).

Dacă matricea B poate fi adusă la forma $D_2 = \begin{pmatrix} I_r & \\ X & O_{m,n-r} \end{pmatrix}$ prin transformări elementare atunci

$B \cdot F_1 F_2 \dots F_p = D_2$, deci $AB \cdot F_1 F_2 \dots F_p = AD_2$. Cum în AD_2 sunt cel puțin atâtea coloane identice nule ca și în D_2 , rezultă $\text{rang}(AB) \leq \text{rang } B$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $\text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang } A, \text{rang } B)$.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze rangul următoarelor matrice:

$$\mathbf{a)} \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b)} \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{c)} \ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare

Soluția 1. a) $\Delta_1^1 = 1 \neq 0$; $\Delta_1^2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$;

$$\Delta_1^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_2^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ deci } \text{rang } A = 2.$$

b) $\Delta_1^1 = 1 \neq 0$; $\Delta_1^2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$; $\Delta_1^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0$;

$$\Delta_1^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 21 \neq 0, \text{ deci } \text{rang } B = 3.$$

c) $\Delta_1^1 = 2 \neq 0$; $\Delta_1^2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$; $\Delta_1^3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$;

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_1+2C_2 \rightarrow C_1 \\ C_4-2C_2 \rightarrow C_4}]{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -137 \neq 0$$

deci $\text{rang } C = 4$

Soluția 2. a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2+2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3-3L_1 \rightarrow L_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & \boxed{5} & 5 & -10 \\ 0 & -6 & -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2:5 \\ L_1-2L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3+6L_2 \rightarrow L_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{. Deci rang } A = 2.$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2-2C_1 \\ C_3:5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \boxed{5} & -5 \\ 3 & -7 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1+2C_2 \rightarrow C_1 \\ C_3+5C_2 \rightarrow C_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & -7 & 7 \\ 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftrightarrow L_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & 0 \\ \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & 4 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & 4 \\ \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3:4 \\ C_3-6C_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{. De fapt după acest pas ne dăm seama că rang } B = 3, \text{ deoarece}$$

după următorul pas obținem I_3 , iar rangul nu poate fi mai mare de 3.

c)
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1:(-1) \\ L_2+3L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3+2L_1 \rightarrow L_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3+L_2 \rightarrow L_3 \\ L_4-2L_2 \rightarrow L_4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 9 \\ 0 & 0 & -15 & -17 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3:16 \\ L_1+3L_3 \rightarrow L_1 \\ L_2-10L_3 \rightarrow L_2 \\ L_4+15L_3 \rightarrow L_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{16} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{137}{16}} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_4:\left(-\frac{137}{16}\right) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1+\frac{5}{16}L_4 \rightarrow L_1 \\ L_2-\frac{3}{4}L_4 \rightarrow L_2 \\ L_3-\frac{9}{16}L_4 \rightarrow L_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{. Deci rang } C = 4 \text{ și } \det C = (-1)(-1)16\left(-\frac{137}{16}\right) = -137.$$

2. Să se calculeze inversele următoarelor matrice:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Rezolvare

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_i+L_1 \rightarrow L_i \\ i=2,3,4}]{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2: (-2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_1+L_2 \rightarrow L_1 \\ L_4+2L_2 \rightarrow L_4}]{L_3: (-2)} \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_3: (-2) \\ L_4 - L_3 \rightarrow L_4}]{L_1 - L_2 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1+L_3 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_4: 4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \sim \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_i - L_3 \rightarrow L_i \\ i=2,3,4}]{L_2: 4} \text{Deci } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ și} \end{aligned}$$

$$\det A = (-1)(-2)(-2) \cdot 4 = -16.$$

b) Soluția 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_i - iL_1 \\ i=2,3,4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & -8 & -10 \\ -7 & -10 & -13 \end{pmatrix} = 160 \neq 0, \text{ deci } \exists B^{-1}.$$

$${}^t B = B, D_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -36, D_{12} = D_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4,$$

$$D_{13} = D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4, D_{14} = D_{41} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 44, D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4,$$

$$D_{23} = D_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 44, D_{24} = D_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -36, D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -36,$$

$$D_{34} = D_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4, D_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

$$\text{Deci } B^* = \begin{pmatrix} -36 & 4 & 4 & 44 \\ 4 & 4 & 44 & -36 \\ 4 & 44 & -36 & 4 \\ 44 & -36 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \text{ astfel } B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{11}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}$$

Soluția 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_i - iL_1 \\ i=2,3,4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_2(-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_1 - 2L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 + 2L_2 \rightarrow L_3 \\ L_4 + 7L_2 \rightarrow L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_3(-1) \end{matrix} \sim$$

$$\begin{array}{l} L_3: (-4) \\ L_4 + L_3 \rightarrow L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -10 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 11 & -9 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 + L_3 \rightarrow L_1 \\ L_2 - 2L_3 \rightarrow L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -11 & -\frac{13}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & \frac{5}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{40} & 11 & -9 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_4: 40 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -11 & -\frac{13}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & \frac{5}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{array}{l} L_1 + 11L_4 \rightarrow L_1 \\ L_2 - 9L_4 \rightarrow L_2 \\ L_3 + L_4 \rightarrow L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -11 & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{11}{40} \\ 0 & 1 & 0 & 9 & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{40} & \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \end{array} \right)$$

$$\text{Deci } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{11}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix} \text{ și } \det B = (-1)(-4) \cdot 40 = 160$$

REZOLVABILITATEA SISTEMELOR ÎN CAZ GENERAL

Am văzut în cazul sistemelor de trei ecuații și trei necunoscute, că efectuând transformări elementare matricei extinse pentru a obține matricea identitate, de fapt eliminăm necunoscutele sistemului. Acest lucru rămâne valabil și în cazul general.

$$\text{Fie sistemul } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistemul se poate scrie și în forma $A \cdot x = b$, unde $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} \in M_n(\mathbb{C})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Dacă

rang $A = r$, aducem prin transformările E_1, \dots, E_q la matricea $D = \begin{pmatrix} I_r & X \\ O_{m-r,n} \end{pmatrix}$, adică

$E_q E_{q-1} \dots E_1 A = D$; astfel sistemul devine $Dx = E_q E_{q-1} \dots E_1 b$, ceea ce înseamnă că prin aceste transformări pentru ca sistemul să fie compatibil, pe ultimele $m - r$ poziții ale termenilor liberi trebuie să apară zerouri, adică și rangul matricei extinse trebuie să fie r .

Astfel teoremele Kronecker-Capelli și Rouché sunt adevărate și în cazul general:

Teorema Kronecker-Capelli

Sistemul
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
 este compatibil dacă și numai dacă

$\text{rang } A = \text{rang } \bar{A}$.

Observații. 1. Dacă $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = n$, atunci sistemul este compatibil determinat, iar dacă $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} < n$, este compatibil nedeterminat.

2. Dacă $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = r < n$, alegem un minor de ordin r al matricei A , pe care îl numim *minor principal*. Necunoscutele care au drept coeficienți elementele acestui minor le numim *necunoscute principale*, celelalte necunoscute fiind *necunoscute secundare*, acestea din urmă fiind considerate parametri. Astfel obținem un sistem Cramer cu r ecuații și r necunoscute. Deci soluțiile se pot exprima în funcție de $n - r$ parametri.

3. Dacă alegem în matricea sistemului un minor principal, atunci pentru ca sistemul să fie compatibil toți minorii de ordin $r + 1$ ai matricei extinse, care conțin acest minor trebuie să fie nuli. Numim acești minori determinanți caracteristici. Deci putem afirma următoarea teoremă:

Teorema Rouché

Sistemul
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
 este compatibil dacă și numai dacă

determinanții caracteristici sunt nuli.

Consecință. Dacă $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, atunci în cazul $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = n$ sistemul admite numai soluția $(0, 0, \dots, 0)$, iar în cazul $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} < n$ există o infinitate de soluții.

Demonstrație. Deoarece coloana termenilor liberi este identic nulă, rezultă că determinanții caracteristici sunt nuli, deci sistemul este compatibil. Dacă $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = n$, atunci sistemul are soluție unică, deci numai soluția $(0, 0, \dots, 0)$. Dacă $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} < n$, sistemul este compatibil nedeterminat, adică în afara soluției $(0, 0, \dots, 0)$, are o infinitate de soluții.



Observație. Sistemele de acest tip sunt *sisteme liniare omogene* și admit întotdeauna soluția banală sau trivială $(0, 0, \dots, 0)$.



Exerciții rezolvate

1. Să se rezolve următorul sistem liniar

a) folosind regula lui Cramer;

b) folosind metoda eliminării;

c) calculând inversa matricei sistemului; d*) cu ajutorul transformărilor elementare.

$$\begin{cases} x + y + z + t = -2 \\ 2x - 3y + 3z + 2t = -6 \\ 3x + 2y + 5z + 3t = -1 \\ 5x - 2y + 7z + 2t = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 5 & -2 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -7 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3) \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-9) = 27;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -12 & -3 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -12 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ -3 & -9 & 4 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 & 9 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-6) = -54;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & 11 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 11 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 27;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ 5 & -7 & 11 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ -7 & 11 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 27;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ 5 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & -7 & 2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \\ -7 & 2 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & -9 & -27 \\ -1 & 0 & 0 \\ -7 & -12 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 27 \\ 12 & 24 \end{vmatrix} = 12 \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot 27.$$

Pe baza regulii lui Cramer obținem $x = -2$, $y = 1$, $z = 3$ și $t = -4$.

b) Din prima ecuație exprimăm necunoscuta x și înlocuim în celelalte ecuații, apoi exprimăm y din ecuația a doua și înlocuim în ultimele două, etc. Obținem pe rând următoarele sisteme echivalente:

$$\begin{cases} x + y + z + t = -2 \\ -5y + z = -2 \\ y + 2z = 5 \\ -7y + 2z - 3t = 11 \end{cases} \begin{cases} x + y + z + t = -2 \\ -5y + z = -2 \\ -9z = -27 \\ 3z - 15t = 69 \end{cases}$$

Din ecuația a treia rezultă $z = 3$, deci $t = -4$ din ultima ecuație și $y = \frac{-3-2}{-5} = 1$ din a doua. Astfel $x = -2 - y - z - t = -2 - 1 - 3 + 4 = -2$.

c) Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 5 & -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Astfel ${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $A^* = \begin{pmatrix} 51 & -3 & -21 & 9 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -39 & -3 & 15 & 0 \\ 12 & 12 & 3 & -9 \end{pmatrix}.$

$$\det A = 27, \text{ deci } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} 51 & -3 & -21 & 9 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -39 & -3 & 15 & 0 \\ 12 & 12 & 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -54 \\ 27 \\ 81 \\ -108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

d)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 7 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3 \\ L_4 - 5L_1 \rightarrow L_4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 11 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 \cdot (-1) \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & -12 & -3 & -24 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 - L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3 + 5L_2 \rightarrow L_3 \\ L_4 + 7L_2 \rightarrow L_4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -3 & -24 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 \cdot (-9) \\ L_1 - 3L_3 \rightarrow L_1 \\ L_2 + 2L_3 \rightarrow L_2 \\ L_4 + 12L_3 \rightarrow L_4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 12 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_4 \cdot (-3) \\ L_1 - L_4 \rightarrow L_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \cdot \text{Deci } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. Să se studieze compatibilitatea următoarelor sisteme liniare, iar în caz de compatibilitate să se și rezolve:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ 4x - 5y + z = 6; \\ x + y - 2z = 2 \\ -x + 2y - z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - 3y + z - t + 2u = 3 \\ 2x + y - z + t - u = 0 \\ 4x - 5y + z + t = 6 \end{cases}.$$

Rezolvare

a) Soluția 1

Să calculăm rangul matricei sistemului.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & & \\ -1 & 2 & -1 & & \end{array} \right) = 7 \neq 0, \text{ deci calculăm minorii de ordin } 3, \text{ care conțin}$$

$$\text{acest minor. } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0, \text{ deci } \text{rang } A = 3.$$

Să calculăm determinanții caracteristici.

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 & \\ 2 & 1 & -1 & 0 & \\ 4 & -5 & -2 & 6 & \\ 1 & 1 & -1 & 2 & \end{array} \right) \xrightarrow{L_2-L_4 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 & \\ 1 & 0 & 0 & -2 & \\ 4 & -5 & -2 & 6 & \\ 1 & 1 & -1 & 2 & \end{array} \right) \xrightarrow{C_4+2C_1 \rightarrow C_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 5 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 4 & -5 & -2 & 14 & \\ 1 & 1 & -1 & 4 & \end{array} \right) = \\
 = - \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 5 & \\ -5 & -2 & 14 & \\ 1 & -1 & 4 & \end{array} \right) = -51 \neq 0, \text{ deci sistemul este incompatibil.}
 \end{array}$$

Soluția 2.

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 & \\ 2 & 1 & -1 & 0 & \\ 4 & -5 & 1 & 6 & \\ 1 & 1 & -2 & 2 & \\ -1 & 2 & -1 & 1 & \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2-2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3-4L_1 \rightarrow L_3 \\ L_4-L_1 \rightarrow L_4 \\ L_5+L_1 \rightarrow L_5}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 6 & \\ 0 & 7 & -3 & -6 & \\ 0 & 7 & -3 & -6 & \\ 0 & 4 & -4 & 5 & \\ 0 & 5 & 0 & 7 & \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_3:7 \\ L_3-2L_2 \rightarrow L_3 \\ L_4 \rightarrow L_3 \\ L_5 \rightarrow L_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 6 & \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{12}{7} & \\ 0 & 4 & -4 & 5 & \\ 0 & 5 & 0 & 7 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1+3L_2 \rightarrow L_1 \\ L_3-4L_2 \rightarrow L_3 \\ L_4-5L_2 \rightarrow L_4}} \\
 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{12}{7} & \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{16}{7}} & \frac{83}{7} & \\ 0 & 0 & \frac{15}{7} & \frac{109}{7} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right) \xrightarrow{L_3: \left(-\frac{16}{7}\right)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{12}{7} & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{16}{7} & \\ 0 & 0 & \frac{15}{7} & \frac{109}{7} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right) \xrightarrow{L_4-\frac{15}{7}L_3 \rightarrow L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{12}{7} & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{16}{7} & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{449}{7} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right).
 \end{array}$$

Pe linia a patra avem coeficienții necunoscutelor zeroi și termenul liber diferit de zero, deci sistemul este incompatibil.

b) Soluția 1.

Să calculăm rangul matricei sistemului.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \text{ deci calculăm minorii de ordin } 3,$$

$$\text{care conțin acest minor. } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0, \text{ deci } \text{rang } A = 3,$$

astfel și $\overline{\text{rang } A} = 3$, deci sistemul este compatibil nedeterminat (numărul necunoscutelor este mai mare decât 3). Necunoscutele principale sunt x , y și t , iar cele secundare $z = \alpha$ și $u = \beta$. Sistemul Cramer pe care trebuie să îl rezolvăm este:

$$\begin{cases} x - 3y - t = 3 - \alpha - 2\beta \\ 2x + y + t = \alpha + \beta \\ 4x - 5y + t = 6 - \alpha \end{cases}.$$

$$\Delta = 14,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 - \alpha - 2\beta & -3 & -1 \\ \alpha + \beta & 1 & 1 \\ 6 - \alpha & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 - \beta & -2 & 0 \\ \alpha + \beta & 1 & 1 \\ 9 - 2\alpha - 2\beta & -8 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 - \beta & -2 \\ 9 - 2\alpha - 2\beta & -8 \end{vmatrix} = 4\alpha - 4\beta + 6,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 - \alpha - 2\beta & -1 \\ 2 & \alpha + \beta & 1 \\ 4 & 6 - \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 - \alpha - 2\beta & -1 \\ 3 & 3 - \beta & 0 \\ 5 & 9 - 2\alpha - 2\beta & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 3 - \beta \\ 5 & 9 - 2\alpha - 2\beta \end{vmatrix} = 6\alpha + \beta - 12,$$

$$\Delta_t = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 - \alpha - 2\beta \\ 2 & 1 & \alpha + \beta \\ 4 & -5 & 6 - \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 - \alpha - 2\beta \\ 0 & 7 & 3\alpha + 5\beta - 6 \\ 0 & 7 & 3\alpha + 8\beta - 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 - \alpha - 2\beta \\ 0 & 7 & 3\alpha + 5\beta - 6 \\ 0 & 0 & 3\beta \end{vmatrix} = 21\beta.$$

$$\text{Deci } x = \frac{2\alpha - 2\beta + 3}{7}, y = \frac{6\alpha + \beta - 12}{14}, z = \alpha, t = \frac{3\beta}{2}, u = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Soluția 2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 4L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & 3 & -5 & -6 \\ 0 & 7 & -3 & 5 & -8 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 - L_2 \rightarrow L_3 \\ L_2 : 7 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 + 3L_2 \rightarrow L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & u \\ 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} C_3 \leftrightarrow C_4 \\ L_3 : 2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & t & z & u \\ 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 - \frac{2}{7}L_3 \rightarrow L_1 \\ L_2 - \frac{3}{7}L_3 \rightarrow L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} x & y & t & z & u \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{14} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Deci } x = \frac{3 + 2\alpha - 2\beta}{7}, y = \frac{-12 + 6\alpha + \beta}{14}, z = \alpha, t = -\frac{3\beta}{2}, \text{ și } u = \beta.$$

3. Să se calculeze inversa matricei $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$ definită prin

Soluția 2. Matricea A se poate scrie sub forma $A = E - 2I_n$, unde toate elementele lui E sunt egale cu 1. Pe de altă parte, dacă calculăm A^2 obținem $A^2 - 4I_n = (n-4)E$, deci $A^2 - (n-4)A = 2(n-2)I_n$. Din această relație rezultă că $A^{-1} = \frac{1}{2(n-2)}(A - (n-4)I_n)$.

4. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz + dt = 0 \\ bx - ay + dz - ct = 0 \\ cx - dy - az + bt = 0 \\ dx + cy - bz - at = 0 \end{cases},$$

dacă a, b, c, d nu sunt toate nule.

Soluție. Înmulțim prima ecuație cu a , a doua cu b , a treia cu c și ultima cu d și adunăm membru cu membru egalitățile obținute. Rezultă $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)x = 0$, deci $x = 0$. În mod analog deducem $y = z = t = 0$ (factorii cu care înmulțim în celelalte cazuri sunt pe rând $(b, -a, -d, c)$, $(c, d, -a, -b)$ și $(d, -c, b, -a)$).

Exerciții și probleme

1. Calculați rangul următoarelor matrice

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$; **e)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Calculați inversele următoarelor matrice:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix} 6 & 10 & -7 & 10 \\ -8 & 4 & 0 & -7 \\ 3 & 7 & -7 & -1 \\ -6 & 8 & -4 & -9 \end{pmatrix}$;

$$\text{e)} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & -8 \\ 4 & -8 & -10 & 3 \\ -1 & -3 & -3 & -3 \\ -7 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}; \text{ f)} \begin{pmatrix} -9 & 0 & -4 & 8 \\ 8 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 \\ -2 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}; \text{ g)} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -9 & 5 \\ -2 & 4 & -4 & 3 \\ -7 & 9 & -1 & -4 \\ -5 & -5 & 2 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\text{h)} \begin{pmatrix} -4 & 5 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -9 & -10 \\ 1 & -3 & -4 & 9 & 1 \\ 6 & -4 & -8 & -3 & -6 \\ 3 & -1 & 10 & -5 & 4 \end{pmatrix}; \text{ i)} \begin{pmatrix} 9 & 9 & -3 & -9 & 1 \\ -1 & 8 & 0 & -4 & -6 \\ 9 & 10 & 2 & -10 & 3 \\ 4 & -1 & -8 & 10 & 7 \\ 8 & -5 & -4 & -9 & 3 \end{pmatrix};$$

3. Calculați inversele următoarelor matrice:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \text{ b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \text{ c)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Rezolvați ecuația:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Rezolvați următoarele sisteme în \mathbb{R} :

$$\text{a)} \begin{cases} x + y + 8z = 11 \\ 3x - y + 4z = 9 \\ 2x + 2y + z = -7 \\ x + y + z = 4 \end{cases}; \text{ b)} \begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ x + y + z - t = 0 \\ x + y - z + t = 4 \end{cases}; \text{ c)} \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - y + z = 1 \\ x - 12y + 11z = -1 \\ 4x - 15y + 9z = 0 \end{cases};$$

6. Discutați și rezolvați următoarele sisteme liniare:

$$\text{a)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ 7x_1 - 4x_2 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \alpha \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = \alpha - 5 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}; \text{ b)} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = b \\ -x + ay + 2z = 3 \\ 3x + 4z = c \end{cases}, a, b, c \in \mathbb{R};$$

$$\text{c) } \begin{cases} 4x_1 + x_2 + (2\alpha + 1)x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + \beta x_4 = \gamma \end{cases} \quad . \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

7. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} [x] + [y] + [z] = 2 \\ 2[x] - [y] - 2[z] = -2 \\ [x] + 4[y] + 5[z] = 8 \\ 2[x] + 5[y] + 6[z] = 10 \end{cases} \quad ,$$

unde am notat cu $[n]$ partea întregă a numărului n .

(Admitere, 1998.)

8. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases} \quad .$$

Discuție.

(Admitere, 1999.)

9. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ ax + by + cz + dt = m \\ a^2x + b^2y + c^2z + d^2t = m^2 \\ a^3x + b^3y + c^3z + d^3t = m^3 \end{cases} \quad .$$

unde a, b, c, d sunt numere reale distincte două câte două.



Probleme rezolvate

1. Să se demonstreze că $\det A^n = (\det A)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație. Pentru $n = 1$ afirmația este trivială. Dacă $\det A^n = (\det A)^n$, atunci $\det A^{n+1} = \det(A^n \cdot A) = \det A^n \cdot \det A = (\det A)^n \cdot \det A = (\det A)^{n+1}$, deci pe baza principiului inducției matematice relația este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Să se exprime $\det A^{-1}$ și $\det A^*$ în funcție de $\det A$.

Soluție. Pe baza egalității $A \cdot A^{-1} = I_n$ avem $\det A \cdot \det A^{-1} = \det I_n = 1$, deci $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$, bineînțeles dacă $\det(A) \neq 0$.

Observație. Astfel $\det A^k = (\det A)^k$, $\forall k \in \mathbb{Z}^*$, dacă $\det A \neq 0$.

Din egalitatea $A \cdot A^* = \det A \cdot I_n$ deducem $\det A \cdot \det A^* = (\det A)^n$, deci $\det A^* = (\det A)^{n-1}$, dacă $\det(A) \neq 0$. Pe de altă parte dacă $\det(A) = 0$, atunci din egalitatea $A \cdot A^* = \det(A)I_n$ rezultă $A \cdot A^* = 0_n$. Dacă $\det(A^*) \neq 0$, atunci ar exista

$(A^*)^{-1}$ și înmulțind relația $A \cdot A^* = 0_n$ cu $(A^*)^{-1}$ la dreapta am obține $A = 0_n$. Însă în acest caz și $A^* = 0_n$, deci am obține o contradicție. În consecință dacă $\det(A) = 0$, atunci și $\det(A^*) = 0$, deci relația $\det A^* = (\det A)^{n-1}$ este valabilă și în acest caz.

4. Să se demonstreze dacă numerele naturale a și b se pot reprezenta sub forma $x^2 + 2y^2$ cu $x, y \in \mathbb{N}$, atunci și numărul ab se poate reprezenta sub aceeași formă.

Demonstrație. Considerăm mulțimea de matrice $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -2y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -2y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - 2y_1y_2 & x_1y_2 + y_1x_2 \\ -2(y_1x_2 + x_1y_2) & -2y_1y_2 + x_1x_2 \end{pmatrix}$$

deci dacă $M_1, M_2 \in M$, atunci $M_1M_2 \in M$. Din $\det(M_1M_2) = \det M_1 \cdot \det M_2$, obținem $(x_1^2 + 2y_1^2)(x_2^2 + 2y_2^2) = (x_1x_2 - 2y_1y_2)^2 + 2(x_1y_2 + y_1x_2)^2$, de unde rezultă proprietatea cerută.

Observație. Identitatea se poate demonstra și prin calcul direct.

5. Să se demonstreze că dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ și $AB = BA$, atunci $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Demonstrație. Din relația $AB = BA$, deducem $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$, deci $\det(A^2 + B^2) = \det(A + iB) \cdot \det(A - iB)$. Pe de altă parte dacă $\det(A + iB) = z$, atunci $\det(A - iB) = \bar{z}$, și astfel

$$\det(A^2 + B^2) = z \cdot \bar{z} = |z|^2 \geq 0.$$

6. Să se demonstreze că dacă $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ și $\Delta = p^2 - 4q < 0$, atunci

$$A^2 - pA + qI_{2n+1} \neq O_{2n+1}.$$

Demonstrație

$$\begin{aligned} A^2 - pA + qI_{2n+1} &= A^2 - 2 \cdot \frac{p}{2} A + \frac{p^2}{4} \cdot I_{2n+1} + \left(q - \frac{p^2}{4} \right) I_{2n+1} = \\ &= \left(A - \frac{p}{2} I_{2n+1} \right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} I_{2n+1}. \end{aligned}$$

Astfel dacă $A^2 - pA + qI_{2n+1} = O_{2n+1}$, atunci

$$\left(A - \frac{p}{2} I_{2n+1} \right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{4} I_{2n+1}.$$

Din această relație obținem

$$0 \leq \det^2 \left(A - \frac{p}{2} I_{2n+1} \right) = \det \left(A - \frac{p}{2} I_{2n+1} \right)^2 = \left(\frac{p^2 - 4q}{4} \right)^{2n+1} \cdot \det I_{2n+1} = \left(\frac{p^2 - 4q}{4} \right)^{2n+1} < 0.$$

Din contradicția obținută rezultă că $A^2 - pA + qI_{2n+1}$ nu este egală cu O_{2n+1} .

7. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$. Demonstrați că dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea $A^k = O_2$, atunci $A^2 = O_2$.

Demonstrație. Din relația $A^k = O_2$ rezultă $(\det A)^k = 0$, deci $\det A = 0$. Conform teoremei Cayley-Hamilton (pentru $n = 2$) obținem $A^2 = (a + d) \cdot A$ și astfel $A^k = (a + d)^{k-1} \cdot A$, $\forall k \geq 2$. Dacă $(a + d)^{k-1} = 0$, atunci $a + d = 0$, deci $A^2 = O_2$. În cazul $(a + d)^{k-1} \neq 0$ rezultă $A = O_2$, deci și în acest caz avem $A^2 = O_2$.

8. Să se discute sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + my + z = 2 \\ x - 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

dacă $m \in \mathbb{R}$ este un parametru real

(Bacalaureat 1990.)

Soluția 1. Determinantul sistemului este $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = m - 9$, deci pentru

$m \neq 9$ sistemul este compatibil determinat. Calculăm soluțiile cu regula lui Cramer:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -m - 5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{și} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 2m - 8.$$

Deci pentru $m \neq 9$ obținem $x = \frac{m+5}{m-9}$, $y = \frac{2}{m-9}$ și $z = \frac{2(m-4)}{m-9}$.

În cazul $m = 9$ studiem compatibilitatea sistemului. Matricea sistemului este

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ iar matricea extinsă $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 9 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. Cum $\det A = 0$, rezultă

că $\text{rang } A \leq 2$. Dar $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, deci $\text{rang } A = 2$.

În același timp $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$, deci $\text{rang } \bar{A} = 3$. Din relația $\text{rang } A \neq \text{rang } \bar{A}$

rezultă că sistemul este incompatibil.

Soluția 2. Rangul celor două matrice se poate determina și prin transformări elementare după cum

$$\text{urmează: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} -2L_1+L_2 \rightarrow L_2 \\ -L_1+L_3 \rightarrow L_3 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & m-4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} L_2 \rightarrow L_3 \\ L_3 \rightarrow L_1 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & m-4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & m-4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-(m-4)L_2+L_3 \rightarrow L_3]{-2L_2+L_1 \rightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{m-9}{5} & \frac{2(m-4)}{5} \end{pmatrix}.$$

De aici putem observa că în cazul $m \neq 9$ avem $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = 3$, iar în cazul $m = 9$ obținem

$\text{rang} A = 2$ și $\text{rang} \bar{A} = 3$ (deoarece schimbând ultimele două coloane putem obține și coloana $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Din aceste transformări putem citi și soluția:

$$z = \frac{2(m-4)}{5} \cdot \frac{5}{m-9} = \frac{2(m-4)}{m-9}$$

$$y = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}z = -\frac{2}{5} + \frac{2(m-4)}{5(m-9)} = \frac{-2(m-9) + 2(m-4)}{5(m-9)} = \frac{2}{m-9}$$

$$\text{și } x = \frac{9}{5} - \frac{7}{5}z = \frac{9(m-9) - 14(m-4)}{5(m-9)} = -\frac{m+5}{m-9}.$$

Observație. Dacă efectuăm încă un pas cu pivotul $\frac{m-9}{5} \neq 0$, atunci în ultima coloană apar chiar aceste rezultate.

9. Să se rezolve sistemul liniar

$$\begin{cases} x + y + z - 2t = 5 \\ 2x + y - 2z + t = m \\ 2x - 3y + mz + 2mt = 3 \end{cases},$$

dacă $x, y, z, t, m \in \mathbb{R}$. Discuție.

Soluția 1.

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & m & 2m \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ și bordăm acest

determinant cu ultima linie și coloanele a treia și a patra: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & m \end{vmatrix} = -m - 18$.

Dacă $m \neq -18$, atunci $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = 3$, $t = \alpha$ este necunoscută secundară și obținem sistemul Cramer:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 + 2\alpha \\ 2x + y - 2z = m - \alpha \\ 2x - 3y + mz = 3 - 2m\alpha \end{cases};$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5+2\alpha & 1 & 1 \\ m-\alpha & 1 & -2 \\ 3-2m\alpha & -3 & m \end{vmatrix} = -m^2 + 2m - 39 + 9\alpha(m-1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5+2\alpha & 1 \\ 2 & m-\alpha & -2 \\ 2 & 3-2m\alpha & m \end{vmatrix} = m^2 - 12m - 8 - \alpha(13m+6),$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5+2\alpha \\ 2 & 1 & m-\alpha \\ 2 & -3 & 3-2m\alpha \end{vmatrix} = 5m - 43 + \alpha(2m-21).$$

Deci soluțiile sunt

$$x = \frac{m^2 - 2m + 39}{m + 18} - 9\alpha \cdot \frac{m-1}{m+18}, \quad y = \frac{-m^2 + 12m + 8}{m + 18} + \alpha \cdot \frac{13m + 6}{m + 18},$$

$$z = \frac{43 - 5m}{m + 18} - \alpha \cdot \frac{2m - 21}{m + 18}, \quad t = \alpha, \text{ unde } \alpha \in \mathbb{R} \text{ este un parametru real.}$$

Pentru $m = -18$, bordând cu a patra coloană, obținem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -36 \end{vmatrix} = 57 \neq 0, \text{ deci}$$

cu necunoscuta secundară $z = \alpha$, avem sistemul Cramer

$$\begin{cases} x + y - 2t = 5 - \alpha \\ 2x + y + t = -18 + 2\alpha \\ 2x - 3y - 36t = 3 + 18\alpha \end{cases};$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5-\alpha & 1 & -2 \\ -18+2\alpha & 1 & 1 \\ 3+18\alpha & -3 & -36 \end{vmatrix} = 171\alpha - 912, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5-\alpha & -2 \\ 2 & -18+2\alpha & 1 \\ 2 & 3+18\alpha & -36 \end{vmatrix} = 931 - 228\alpha,$$

$$\Delta_t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5-\alpha \\ 2 & 1 & -18+2\alpha \\ 2 & -3 & 3+18\alpha \end{vmatrix} = -133, \text{ deci } x = -16 + 3\alpha, \quad y = \frac{49}{3} - 4\alpha, \quad z = \alpha, \text{ și}$$

$$t = -\frac{7}{3}, \text{ unde } \alpha \in \mathbb{R} \text{ este un parametru real.}$$

Soluția 2. Determinăm rangul matricii $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & m \\ 2 & -3 & m & 2m & 3 \end{pmatrix}$ folosind transformări elementare:

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & -4 & 5 & m-10 \\ 0 & -5 & m-2 & 2m+4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 10-m \\ 0 & -5 & m-2 & 2m+4 & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{matrix} -L_2+L_1 \rightarrow L_1 \\ 5L_2+L_3 \rightarrow L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & -5+m \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 10-m \\ 0 & 0 & m+18 & 2m-21 & 43-5m \end{pmatrix}$$

Dacă $m = -18$, atunci nu putem alege $m+18$ ca pivot, dar în acest caz $2m-21 = -57 \neq 0$, deci schimbând coloana a treia cu a patra (se schimbă și z cu t) putem scrie

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 & -23 \\ 0 & 1 & -5 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & -57 & 0 & 133 \end{pmatrix} \text{ pentru } m = -18 \text{ și } \bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & -5+m \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 10-m \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2m-21}{m+18} & \frac{43-5m}{m+18} \end{pmatrix} \text{ dacă } m \neq -18.$$

În primul caz ($m = -18$) $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 3$ și

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 & -23 \\ 0 & 1 & -5 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & \frac{49}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix},$$

deci soluțiile sunt $t = -\frac{7}{3}$ (deoarece în urma schimbării celor două coloane în coloana a treia apar

coeficienții lui t) $z = \alpha$, $y = \frac{49}{3} - 4\alpha$ și $x = -16 + 3\alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este un parametru real.

În al doilea caz prin transformările $3L_3 + L_1 \rightarrow L_1$ și $-4L_3 + L_2 \rightarrow L_2$ obținem

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{9m-9}{m+18} & \frac{m^2-2m+39}{m+18} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13m+6}{m+18} & \frac{-m^2+12m+8}{m+18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2m-21}{m+18} & \frac{43-5m}{m+18} \end{pmatrix},$$

deci $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 3$ și soluțiile sunt $x = \frac{m^2-2m+39}{m+18} - 9\alpha \cdot \frac{m-1}{m+18}$,

$y = \frac{-m^2+12m+8}{m+18} + \alpha \cdot \frac{13m+6}{m+18}$, $z = \frac{43-5m}{m+18} - \alpha \cdot \frac{2m-21}{m+18}$ și $t = \alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este un parametru real.

10. Să se demonstreze că dacă $A_0, A_1, A_2, \dots, A_p \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ și

$$A_0 + xA_1 + x^2A_2 + \dots + x^pA_p = O_{m,n}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

atunci $A_0 = A_1 = A_2 = \dots = A_p = O_{m,n}$.

Demonstrație. Notăm elementele lui A_k cu $a_{ij}^{(k)}$ pentru $k = \overline{0, p}$, $i = \overline{1, m}$ și $j = \overline{1, n}$. În membrul stâng obținem o matrice A în care elementul a_{ij} este $\sum_{k=0}^p x^k \cdot a_{ij}^{(k)}$. Astfel fiecare element în matricea A este un polinom de grad cel mult p . Valoarea polinomului fiind 0 pentru orice $x \in \mathbb{R}$, polinomul este identic nul, deci toți coeficienții sunt egali cu 0. Astfel obținem $a_{ij}^{(k)} = 0$, $k = \overline{0, p}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, nm}$, deci $A_k = O_{m,n}$, $k = \overline{0, p}$.

Consecință. Dacă $\sum_{k=0}^p A_k \cdot x^k = \sum_{j=0}^q B_j x^j$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $A_k, B_j \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $k = \overline{0, p}$, $j = \overline{0, q}$, atunci $p = q$ și $A_k = B_k$, $\forall k = \overline{0, p}$.

11. Să se arate că matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix},$$

unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ și $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ este inversabilă și să se afle inversa ei.

Rezolvare. Calculăm produsul $A^t \cdot A$ și obținem:

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix},$$

unde $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Datorită egalităților

$$\det A = \det A^t \text{ și } \det(AB) = \det A \cdot \det B$$

obținem

$$(\det A)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4 \neq 0,$$

deci A este inversabilă. Înmulțind egalitatea $A^t \cdot A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4$ cu A^{-1}

la dreapta deducem $A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} A^t$.



Exerciții și probleme

1. Demonstrați că nu există $A \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea

$$A^5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{Olimpiadă, faza locală, 1998})$$

2. Determinați matricea $X \in M_n(\mathbb{R})$ pentru care

$$\det(A \cdot X + I_n) \geq 0, \quad \forall A \in M_n(\mathbb{R})$$

(Olimpiadă, faza locală, 1992)

3. Demonstrați că pentru $m \neq n$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ cel puțin una din matricele AB și BA este singulară. Calculați $\det(BA)$, dacă $AB = I_4$ și $A \in M_{4,3}(\mathbb{R})$, $B \in M_{3,4}(\mathbb{R})$!

4. Demonstrați că dacă $A \cdot B = I_n$, $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, atunci $B \cdot A = I_n$.

5. Demonstrați că dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $AB = BA$ și $\det(A^2 + B^2) = 0$, atunci $\det(A + B) = \det(A - B) \neq 0$.

6. Demonstrați că dacă $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, $AB = BA$, $AC = CA$ și $BC = CB$, atunci $\det(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC) \geq 0$. (Olimpiadă, faza locală 1987)

7. Demonstrați că dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ și $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\sum_{k=0}^{n-1} \det(A + \omega^k B) = n \cdot (\det A + \det B).$$

(Olimpiadă, faza județeană, 1997)

8. Demonstrați că dacă în matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ avem $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$, $\forall i = \overline{1,n}$,

atunci $\det A \neq 0$.

9. Pentru matricele $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ există $k, m \in \mathbb{N}^*$, astfel ca $A^k = B^m = O_n$ și $AB = BA$. Demonstrați că $I_n - AB$ și $I_n - A - B$ sunt inversabile

(Concursul Traian Lalescu, 2001)

10. Pentru matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$ există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^k = O_n$. Demonstrați că $I_n - A$ este inversabilă.

11. Matricele $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ satisfac relația $A^2 B = A^2 - B$. Demonstrați că

$$AB = BA.$$

12. Matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$ verifică relația $A \cdot {}^t A = -I_n$. Arătați că

$$\det(A + {}^t A) = \det(I_n + A)^2. \quad (\text{Concursul Gh. Vrânceanu, 1990.})$$

13. Demonstrați că funcția $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ este o funcție polinomială de gradul n în care

a) coeficientul termenului dominant este $(-1)^n$;

b) termenul liber este $\det A$;

c) coeficientul termenului λ^{n-1} este $(-1)^{n-1} \text{Tr} A$.

14. Demonstrați că pentru rădăcinile $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ale ecuației $\det(A - \lambda I_n) = 0$ avem următoarele relații

a) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{Tr} A$;

$$\text{b)} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det A.$$

Observație. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt *valorile proprii* ale matricei A .

15. (Teorema Cayley-Hamilton) Demonstrați că dacă funcția polinomială

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

este de forma

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^n c_k \cdot \lambda^k,$$

atunci

$$c_0 I_n + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_n A^n = O_n.$$

16. Demonstrați că dacă matricea $A \in M_m(\mathbb{R})$ satisface ecuația

$$A^n + c_1 A^{n-1} + \dots + c_n I_m = O_m,$$

atunci toate valorile proprii satisfac ecuația $x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n = 0$.

17. Demonstrați că dacă există o funcție polinomială P pentru care $P(0) \neq 0$ și $P(A) = O_n$, atunci A este inversabilă. (Concursul Gh. Vrânceanu, 1992.)

18. Demonstrați că dacă $A^2 = A + I_n$, ($A \in M_n(\mathbb{R})$), atunci

$$\text{a)} n \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq \text{Tr } A \leq n \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad \text{b)} \det A \leq \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

19. Pentru matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$ există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $A^k = O_n$. Demonstrați că $A^n = O_n$.

20. Demonstrați că dacă $A^2 = 4A - 3I_n$, ($A \in M_n(\mathbb{R})$), atunci există $p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ astfel ca $\det A = 3^p$.

21. Demonstrați că dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, atunci funcția $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = \det(A + xB)$ este o funcție polinomială de grad n în care coeficientul termenului dominant este $\det B$ și termenul liber este $\det A$.

22. Arătați că dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ satisface relația $A^3 = A + I$, atunci $\det A > 0$.

(C. Cocea, 1986.)

23. Demonstrați că dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ și $\det(A^2 + B^2) = 0$, atunci $\det A = \det B$.

24. Demonstrați că dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ și $\det(AB + BA) \leq 0$, atunci $\det(A^2 + B^2) \geq 0$. (Olimpiadă, faza națională, 1996.)

25. Matricele $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ comută între ele două câte două ($AB = BA$, $AC = CA$ și $BC = CB$) și $\det C = 0$. Demonstrați că $\det(A^2 + B^2 + C^2) \geq 0$.

26. Matricea $A \in M_2(\mathbb{Q})$ satisface relația $\det(A^2 - 2I_2) = 0$. Demonstrați că $A^2 = 2I_2$ și $\det A = -2$. (Olimpiadă, faza județeană, 1996.)

27. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$. Dacă matricea $A + k \cdot B$ este inversabilă pentru $k = \overline{0, 2n}$ și inversa este în $M_n(\mathbb{Z})$, atunci și $A + (2n + 1)B$ este inversabilă și $[A + (2n + 1)B]^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$.

IV. APLICAȚII GEOMETRICE

ECUAȚIA DREPTEI. RECAPITULARE

Fie xOy un reper cartezian în plan. Pe parcursul anilor precedenți am studiat problema coliniarității a trei puncte și diferitele ecuații ale dreptei. Să reluăm pe scurt câteva din aceste proprietăți. Fie $M(x, y)$, $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$ trei puncte în plan astfel încât $x_1 \neq x_2 \neq x \neq x_1$. Dacă ducem paralelele d_1 și d_2 la Ox prin A și B și considerăm $P_1 \in d_1$, $P_2 \in d_2$ (conform figurii 1) atunci condiția necesară și suficientă pentru coliniaritatea punctelor este $\widehat{MBP_2} \equiv \widehat{BAP_1}$.

Dar $\text{tg } \widehat{MBP_2} = \frac{y - y_2}{x - x_2}$ și $\text{tg } \widehat{BAP_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, deci condiția de coliniaritate este

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

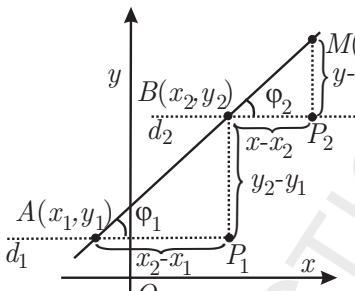


Figura 1

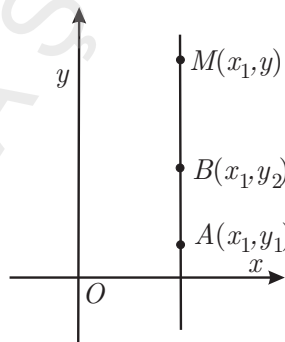


Figura 2

Această relație reprezintă în același timp și ecuația dreptei care trece prin punctele $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$. De aici deducem

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) + x_2,$$

deci

$$y = mx + n,$$

unde $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ este panta dreptei (sau coeficientul unghiular) și

$n = x_2 - x_2 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ este ordonata punctului de intersecție a dreptei cu axa Oy

(ordonata la origine).

Dacă $x_1 = x_2$, atunci dreapta determinată de punctele A și B este paralelă cu axa Oy (fig. 2), deci ecuația dreptei ce trece prin A și B este

$$x = x_1.$$

Pentru a trata simultan ambele cazuri avem nevoie de ecuația generală a dreptei:

$$ax + by + c = 0,$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a^2 + b^2 \neq 0$. Putem verifica foarte ușor că în cazul $b \neq 0$, obținem $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, deci cu notația $-\frac{a}{b} = m$ și $-\frac{c}{b} = n$ ecuația (1). Dacă

$b = 0$, atunci $a \neq 0$ și deducem $x = -\frac{c}{a} = \text{constant}$. Folosind ecuația generală a

dreptei putem reformula condiția de coliniaritate a trei puncte și putem demonstra un criteriu simplu pentru concurența a trei drepte. Punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ și $M_3(x_3, y_3)$ sunt coliniare dacă există $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$ astfel încât dreapta de ecuație $d: ax + by + c = 0$ să conțină toate cele trei puncte. Dar $M_i \in d_i$ dacă și numai dacă $ax_i + by_i + c = 0$, deci obținem sistemul:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele a, b și c . Din condiția $a^2 + b^2 \neq 0$ deducem că acest sistem trebuie să aibă o soluție netrivială. Astfel condiția de coliniaritate este

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Această condiție cuprinde atât cazul $x_1 = x_2$, cât și cazul $x_1 \neq x_2$, deci nu mai este nevoie de discuție în funcție de abscisele punctelor.

Teoremă

Condiția de coliniaritate a punctelor $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ și $M_3(x_3, y_3)$ este

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemplu. Să se studieze coliniaritatea punctelor $A(1,1)$, $B(2,4)$ și $C(-3,-11)$.

Rezolvare. Calculăm determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & -11 & 1 \end{vmatrix}.$$

Efectuând transformările $(-2)L_1 + L_2 \rightarrow L_2$ și $3L_1 + L_3 \rightarrow L_3$ obținem

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \end{vmatrix},$$

deci $\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$. De aici rezultă că punctele A , B și C sunt coliniare.

Intersecția a două drepte în plan

Considerăm dreptele d_1 și d_2 date prin ecuațiile lor generale:

$$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Dacă punctul $M(x_0, y_0)$ aparține atât dreptei d_1 cât și dreptei d_2 , atunci (x_0, y_0) este o

soluție a sistemului
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}.$$

Datorită proprietăților referitoare la sistemele liniare avem următoarele cazuri:

1. Dacă $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, atunci sistemul este compatibil determinat, deci admite o unică soluție. În acest caz cele două drepte sunt secante, iar unica soluție a sistemului reprezintă coordonatele punctului de intersecție.

2. Dacă $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, atunci avem două posibilități:

a) sistemul este incompatibil, adică $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ sau $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. În acest caz dreptele sunt paralele (nu au nici un punct comun).

b) sistemul este compatibil nedeterminat, adică $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ și $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.

În acest caz cele două drepte au o infinitate de puncte comune, deci sunt confundate.

Exemplu. Considerăm dreptele $d_1 : 2x - 3y + 1 = 0$

$$d_2 : ax + y + b = 0,$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$. Să se discute poziția relativă a celor două drepte.

Rezolvare.

1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3a$ și $2 + 3a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$, deci pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ dreptele



sunt secante (au un singur punct comun).

2. Dacă $a = -\frac{2}{3}$, atunci calculăm $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{2}{3} & b \end{vmatrix} = 2b + \frac{2}{3}$ și $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = -3b - 1$.

$\Delta_1 = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{3}$ și $\Delta_2 = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{3}$, deci pentru $b = -\frac{1}{3}$ cele două drepte sunt confundate și pentru $b \neq -\frac{1}{3}$ sunt paralele. Pentru sistematizarea rezultatelor rezumăm cazurile discutate în următorul tabel:

a	b	Poziția relativă
$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	drepte confundate
$-\frac{2}{3}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$	drepte paralele
$\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$	\mathbb{R}	drepte secante



Concurența a trei drepte

Considerăm dreptele

$$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \text{și} \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0.$$

Aceste drepte sunt concurente în punctul $M(x_0, y_0)$ dacă și numai dacă (x_0, y_0) este soluție a sistemului

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases}$$

Dar (x_0, y_0) este soluție a sistemului dacă și numai dacă $(x_0, y_0, 1)$ este soluția nebanală a sistemului

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

Condiția necesară și suficientă ca sistemul anterior să admită o soluție nebanală este ca

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Am ajuns la următoarea:

Teoremă. Dreptele neparalele și neconfundate două câte două $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ și $d_3 : a_3x + b_3y + c_3 = 0$ sunt concurente dacă și numai dacă

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemplu. Să se arate că dreptele $3x - 4y + 6 = 0$, $y = 2x - 1$ și $5x - 2y = 4$ sunt concurente și să se calculeze coordonatele punctului de intersecție.

Rezolvare. Identificăm coeficienții (conform ecuațiilor generale) și avem de calculat determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -4 \end{vmatrix}.$$

După efectuarea transformărilor $2C_2 + C_1 \rightarrow C_1$ și $-C_2 + C_3 \rightarrow C_3$ obținem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 10 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -5 & 10 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

deci dreptele sunt concurente (deoarece nici o pereche nu este confundată). Coordonatele punctului de intersecție se pot obține rezolvând sistemul

$$\begin{cases} 3x - 4y + 6 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \\ 5x - 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

sau oricare din sistemele:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x - y = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}.$$

Coordonatele punctului de intersecție sunt $(2, 3)$.

Probleme rezolvate

1. Să se demonstreze că înălțimile unui triunghi sunt concurente.

Rezolvare. Considerăm punctele $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ și $A_3(x_3, y_3)$. Panta dreptei

A_2A_3 este $m_1 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$, deci panta dreptelor perpendiculare pe A_2A_3 este

$m'_1 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2}$. Ecuația dreptei ce trece prin A_1 și este perpendiculară pe

$$A_2A_3 \text{ este } \frac{y - y_1}{x - x_1} = m'_1 = -\frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2}, \text{ adică}$$

$$y(y_3 - y_2) + x(x_3 - x_2) - [y_1(y_3 - y_2) + x_1(x_3 - x_2)] = 0.$$

Observăm că această ecuație este corectă chiar și în cazul $x_2 = x_3$ sau $y_2 = y_3$. Ecuațiile celorlalte înălțimi se obțin prin permutarea ciclică a indicilor, deci pentru a demonstra concurența înălțimilor avem de arătat că

$$\begin{vmatrix} y_3 - y_2 & x_3 - x_2 & y_1(y_3 - y_2) + x_1(x_3 - x_2) \\ y_1 - y_3 & x_1 - x_3 & y_2(y_1 - y_3) + x_2(x_1 - x_3) \\ y_2 - y_1 & x_2 - x_1 & y_3(y_2 - y_1) + x_3(x_2 - x_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Pe de altă parte suma elementelor pe fiecare coloană este 0, deci determinantul este 0 și astfel demonstrația este completă.

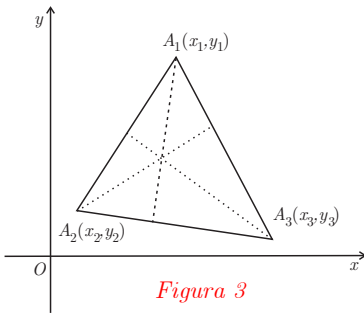


Figura 3

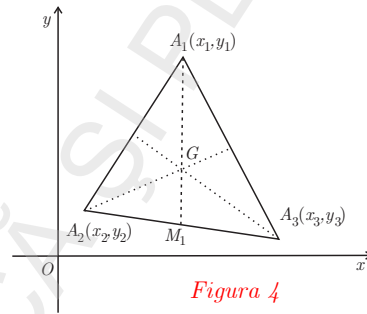


Figura 4

2. Să se demonstreze că medianele unui triunghi sunt concurente și să se calculeze coordonatele punctului de intersecție (adică coordonatele centrului de greutate).

Rezolvare. Folosim notațiile din problema precedentă. Mijlocul M_1 al laturii A_2A_3 are coordonatele $M_1\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$, deci mediana A_1M_1 are ecuația

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - \frac{y_2 + y_3}{2}}{\frac{x_2 + x_3}{2} - x_1}.$$

Această ecuație poate fi scrisă sub forma

$$y(2x_1 - x_2 - x_3) - x(2y_1 - y_2 - y_3) - y_1(2x_1 - x_2 - x_3) + x_1(2y_1 - y_2 - y_3) = 0.$$

Observăm că și această ecuație este valabilă și în cazul $x_1 = \frac{x_2 + x_3}{2}$. Ecuațiile celorlalte mediane se obțin și în acest caz printr-o permutare ciclică a indicilor ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$), deci pentru completitudinea demonstrației este suficient să verificăm egalitatea

$$\begin{vmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 & 2y_1 - y_2 - y_3 & -y_1(2x_1 - x_2 - x_3) + x_1(2y_1 - y_2 - y_3) \\ 2x_2 - x_3 - x_1 & 2y_2 - y_3 - y_1 & -y_2(2x_2 - x_3 - x_1) + x_2(2y_2 - y_3 - y_1) \\ 2x_3 - x_1 - x_2 & 2y_3 - y_1 - y_2 & -y_3(2x_3 - x_1 - x_2) + x_3(2y_3 - y_1 - y_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Și în acest caz suma elementelor de pe fiecare coloană este 0, deci determinantul este 0.

Aria unui triunghi



Considerăm punctele $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ și $A_3(x_3, y_3)$ astfel încât originea să fie în interiorul triunghiului (fig. 5). Astfel

$$A[A_1A_2A_3] = A[A_1OA_2] + A[A_2OA_3] + A[A_3OA_1],$$

deci este suficient să exprimăm aria $A[A_1OA_3]$ (datorită notațiilor simetrice celelalte exprimări se pot obține prin permutarea indicilor). Folosind notațiile din figura 6 alăturată avem următoarea relație:

$$A[A_1OA_3] + A[A_1A_3M] + A[OA_3P_1] + A[OA_1Q_1] = A[OP_1MQ_1].$$

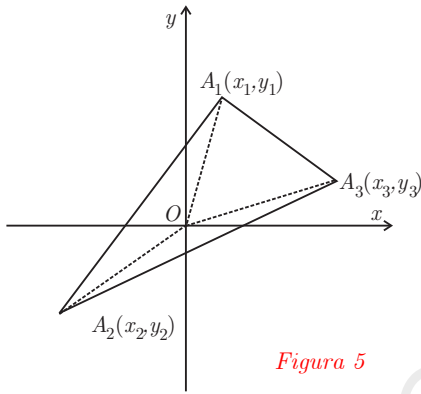


Figura 5

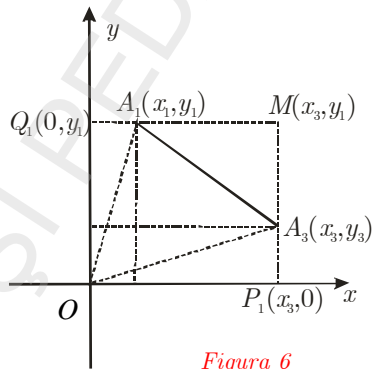


Figura 6

Pe de altă parte

$$A[A_1A_3M] = \frac{1}{2}(y_1 - y_3)(x_3 - x_1)$$

$$A[A_3OP_1] = \frac{1}{2}x_3y_3$$

$$A[OA_1Q_1] = \frac{1}{2}x_1y_1$$

$$A[OP_1MQ_1] = y_1x_3,$$

deci

$$\begin{aligned} A[A_1OA_3] &= y_1x_3 - \frac{1}{2}x_1y_1 - \frac{1}{2}x_3y_3 - \frac{1}{2}y_1x_3 - \frac{1}{2}y_3x_1 + \frac{1}{2}y_3x_3 + \frac{1}{2}x_1y_1 = \\ &= \frac{1}{2}(y_1x_3 - y_3x_1) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_3 & x_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Modulul rezultatului obținut este independent de poziția relativă a punctelor A_1 și A_3 față de axele de coordonate deși ariile folosite pe parcurs pot avea alte exprimări. Astfel obținem:

$$A[A_1A_2A_3] = \pm \frac{1}{2} \left[\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right] = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

unde semnul trebuie ales astfel ca membrul drept să fie pozitiv.

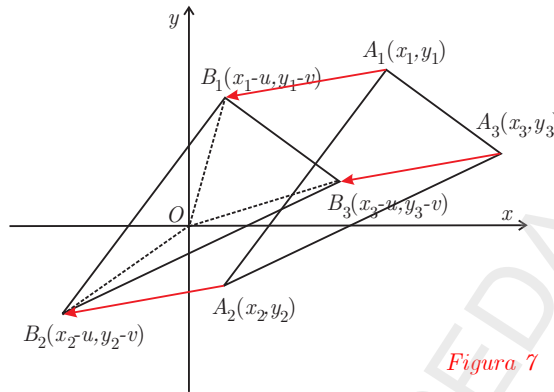


Figura 7

Dacă inițial O nu este în interiorul triunghiului, atunci translatăm triunghiul $A_1A_2A_3$ astfel ca O să fie în interiorul triunghiului translatat (fig. 7). Dacă $B_1B_2B_3$ este triunghiul translatat, atunci există $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ (componentele vectorului de translație) astfel ca punctele B_1 , B_2 și B_3 să aibă coordonatele:

$$B_1(x_1 - u, y_1 - v), B_2(x_2 - u, y_2 - v), B_3(x_3 - u, y_3 - v).$$

$$\text{Astfel } A[A_1A_2A_3] = A[B_1B_2B_3] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - u & y_1 - v & 1 \\ x_2 - u & y_2 - v & 1 \\ x_3 - u & y_3 - v & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ultima egalitate se obține prin transformările $u \cdot C_3 + C_1 \rightarrow C_1$ și $v \cdot C_3 + C_2 \rightarrow C_2$.

Am demonstrat deci următoarea teoremă:

Teoremă. Aria triunghiului determinat de punctele $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ și $A_3(x_3, y_3)$ este

$$A[A_1A_2A_3] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Observație. Folosind formula pentru distanța unui punct de la o dreaptă putem demonstra aceeași formulă într-o manieră mai simplă. Reamintim următoarea teoremă:

Distanța de la punctul $M(x_0, y_0)$ la dreapta $d: ax + by + c = 0$ este $\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Aria triunghiului $A_1A_2A_3$ se poate exprima prin $\frac{1}{2} A_2A_3 \cdot h$, unde h este distanța de la punctul $A_1(x_1, y_1)$ de la dreapta A_2A_3 . Ecuația dreptei A_2A_3 este

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

care poate fi scrisă sub forma

$$y(x_3 - x_2) - x(y_3 - y_2) - y_2(x_3 - x_2) + x_2(y_3 - y_2) = 0,$$

deci

$$h = \frac{|(x_3 - x_2)y_1 - x_1(y_3 - y_2) - y_2x_3 + x_2y_3|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}.$$

Pe de altă parte $A_2A_3 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$, deci

$$\begin{aligned} A[A_1A_2A_3] &= \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot h = \frac{1}{2} |x_3y_1 - x_2y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 - y_2x_3 + x_2y_3| = \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplu. Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele $A(1,2)$, $B(4,-2)$ și $C(3,1)$.



Rezolvare. Folosind teorema anterioară avem de calculat determinantul:

$$A[A_1A_2A_3] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{5}{2}.$$

Observație. Punctele A , B și C sunt coliniare dacă și numai dacă $\sigma[ABC] = 0$, deci din teorema precedentă rezultă și criteriul de coliniaritate.



Probleme rezolvate



1. Să se stabilească o condiție necesară și suficientă pentru concurența dreptelor d_1 , d_2 și d_3 determinate de perechile de puncte $A(x_1, y_1)$, $A'(x'_1, y'_1)$, $B(x_2, y_2)$, $B'(x'_2, y'_2)$ și $C(x_3, y_3)$, $C'(x'_3, y'_3)$.

Rezolvare. Ecuația dreptei AA' este

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y'_1 - y_1}{x'_1 - x_1},$$

adică

$$y(x'_1 - x_1) - x(y'_1 - y_1) - y_1x'_1 + x_1y'_1 = 0.$$

Celelalte ecuații se obțin prin schimbarea indicilor, deci aplicând condiția de concurență pentru trei drepte date prin ecuațiile lor generale, obținem condiția:

$$\begin{vmatrix} x'_1 - x_1 & y'_1 - y_1 & x_1 y'_1 - x'_1 y_1 \\ x'_2 - x_2 & y'_2 - y_2 & x_2 y'_2 - x'_2 y_2 \\ x'_3 - x_3 & y'_3 - y_3 & x_3 y'_3 - x'_3 y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Considerăm punctele $A(\lambda, 1)$, $B(\lambda + 3, 1)$, $C(1, \lambda - 1)$ și $D(1, \lambda + 2)$. Să se determine locul geometric al intersecției dreptelor AD și BC când λ parcurge mulțimea numerelor reale.

Rezolvare. Scriem ecuațiile dreptelor AD și BC :

$$AD : \frac{y-1}{x-\lambda} = \frac{\lambda+2-1}{1-\lambda}, \text{ adică } y(1-\lambda) - x(1+\lambda) = -\lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$BC : \frac{y-1}{x-\lambda-3} = \frac{\lambda-2}{1-\lambda-3}, \text{ adică } y(\lambda+2) + x(\lambda-2) = \lambda^2 + 2\lambda - 4$$

Determinantul sistemului format din cele două ecuații este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -(1+\lambda) \\ \lambda+2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 2\lambda.$$

Pentru $\lambda = 0$ cele două drepte nu se intersectează, iar pentru $\lambda \neq 0$ unicul punct de intersecție $M(x_\lambda, y_\lambda)$ are coordonatele:

$$x_\lambda = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ \lambda+2 & \lambda^2 + 2\lambda - 4 \end{vmatrix}}{2\lambda} = \frac{3\lambda^2 + 9\lambda - 6}{2\lambda} \text{ și}$$

$$y_\lambda = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda^2 - 2\lambda + 1 & -(1+\lambda) \\ \lambda^2 + 2\lambda - 4 & \lambda - 2 \end{vmatrix}}{2\lambda} = \frac{3\lambda^2 + 3\lambda - 6}{2\lambda}.$$

Ecuația locului geometric se obține eliminând parametrul λ din aceste două ecuații și studiind valorile posibile ale lui x_λ respectiv y_λ . Dacă scădem cele două egalități anterioare, atunci obținem relația

$$y_\lambda - x_\lambda = -1,$$

deci locul geometric este o submulțime a dreptei de ecuație $y - x + 1 = 0$. De fapt această relație se poate obține și prin adunarea celor două ecuații (deci fără a scrie forma soluțiilor). Pentru a identifica submulțimea dreptei care corespunde locului geometric determinăm imaginea funcției $\lambda \rightarrow x_\lambda$ sau a funcției $\lambda \rightarrow y_\lambda$ ($\lambda \neq 0$). Din formula obținută pentru x_λ rezultă:

$$3\lambda^2 + (9 - 2x_\lambda)\lambda - 6 = 0.$$

Dar $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, deci discriminantul acestei ecuații de gradul doi nu poate fi negativ.

Astfel obținem condiția

$$(9 - 2x_\lambda)^2 + 12 \cdot 6 \geq 0.$$

$\lambda = 0$ nu este rădăcină a ecuației pentru nici o valoare x_λ , deci altă condiție nu mai avem. Pe de altă parte inegalitatea precedentă este verificată pentru orice $x_\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Să se stabilească o condiție necesară și suficientă pentru ca punctele $M_i(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq 4$ să fie situate pe același cerc.

Soluție. Ecuația cercului cu centrul în $O(x_0, y_0)$ și rază R se obține din relația $MO^2 = R^2$, deci ecuația este

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Această ecuație este de forma

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0.$$

Dacă punctele M_1, M_2, M_3 și M_4 sunt situate pe acest cerc, atunci obținem sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + ax_2 + by_2 + c = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + ax_3 + by_3 + c = 0 \\ x_4^2 + y_4^2 + ax_4 + by_4 + c = 0 \end{cases}$$

unde $a = -2x_0$, $b = -2y_0$ și $c = x_0^2 + y_0^2 - R^2$. Relațiile de mai înainte implică faptul că $(1, a, b, c)$ este o soluție nebanală a sistemului liniar și omogen (cu necunoscutele d, a, b și c):

$$\begin{cases} d(x_1^2 + y_1^2) + ax_1 + by_1 + c = 0 \\ d(x_2^2 + y_2^2) + ax_2 + by_2 + c = 0 \\ d(x_3^2 + y_3^2) + ax_3 + by_3 + c = 0 \\ d(x_4^2 + y_4^2) + ax_4 + by_4 + c = 0 \end{cases}$$

Pe de altă parte dacă acest sistem admite soluții nebanale și punctele M_1, M_2, M_3 respectiv M_4 nu sunt situate pe o dreaptă, atunci are și o soluție de forma $(1, a, b, c)$ (împărțim cu $d \neq 0$). Astfel condiția de conciclicitate este

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

unde rangul matricei $M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix}$ este 3 (această condiție garantează că

punctele nu sunt coliniare).

4. (Bacalaureat 2004) În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră mulțimea $L = \{(k, p) \mid k, p \in \mathbb{Z}\}$. Dacă XYZ este un triunghi, notăm cu S_{XYZ} aria sa.

a) Dacă $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ și $C(x_3, y_3)$ sunt puncte necoliniare din plan, să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea

$$S_{ABC} = \left| a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \right|.$$

b) Să se arate că dacă avem un triunghi cu vârfurile în puncte din mulțimea L , atunci aria sa este un număr rațional.

c) Care este aria unui triunghi echilateral de latură l ?

d) Să se arate că pătratul lungimii oricărui segment cu capetele în punctele din mulțimea L este un număr întreg.

e) Să se arate că nu există nici un triunghi echilateral cu toate vârfurile în puncte din mulțimea L .

f) Să se arate că nu există nici un poligon regulat cu 2004 laturi, având toate vârfurile în puncte din mulțimea L .

Rezolvare. a) Folosind teorema referitoare la aria unui triunghi în funcție de coordonatele vârfurilor, obținem $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}$.

b) Dacă $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{Z}$, atunci din dezvoltarea determinantului rezultă că

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \in \mathbb{Z} \text{ (efectuăm numai înmulțiri, adunări și scăderi), deci } S_{ABC} \in \mathbb{Q}.$$

c) Dacă M este mijlocul lui BC , atunci $MC = \frac{l}{2}$. Dar $\triangle AMC \equiv \triangle AMB$ (cazul LUL : $AB = AC$, $BM = MC$, $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$), deci $\widehat{AMB} \equiv \widehat{AMC}$ și astfel AM este și înălțime, deci din teorema lui Pitagora $AM = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = l \frac{\sqrt{3}}{2}$. În final

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AM = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}.$$

d) Dacă $M(x_1, y_1) \in L$ și $N(x_2, y_2) \in L$, atunci $MN^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \in \mathbb{N}$.

e) Dacă toate vârfurile unui triunghi echilateral ABC ar fi în L , atunci conform punctului d) am avea $l^2 \in \mathbb{N}$. Din b) rezultă $S_{ABC} \in \mathbb{Q}$, deci ar rezulta $\sqrt{3} = \frac{4S_{ABC}}{l^2} \in \mathbb{Q}$, ceea ce este absurd, deci vârfurile nu pot fi toate în L . Pentru completitudinea demonstrației arătăm că $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Dacă $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, atunci există $m, n \in \mathbb{N}^*$, cu $(m, n) = 1$ (cel mai mare divizor comun al numerelor m și n este 1, adică fracția $\frac{m}{n}$ este ireductibilă) astfel ca $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$. Din această relație rezultă $m^2 = 3n^2$, adică $m^2 : 3$, deci și $m : 3$ (dacă m nu este divizibil cu 3, atunci m are forma $3k \pm 1$, deci m^2 este de forma $3M + 1$ și astfel m^2 nu ar fi divizibil cu 3). Astfel există $m_1 \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea $m = 3m_1$. De aici rezultă $n^2 = 3m_1^2$, deci $n^2 : 3$, adică $n : 3$. Pe de altă parte în acest caz $(m, n) \geq 3$ (pentru că 3 este un divizor comun), deci obținem o contradicție. În consecință $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

f) Să presupunem că există un poligon regulat cu 2004 laturi, având toate vârfurile în L . Poligonul se poate descompune în 2002 triunghiuri, fiecare cu vârfurile în L (prin trasarea diagonalelor dintr-un vârf fixat). Cum suma a 2002 numere raționale este un număr rațional, rezultă că aria poligonului este un număr rațional. Pe de altă parte notând cu l latura poligonului, apotema h (vezi figura) se poate exprima sub forma

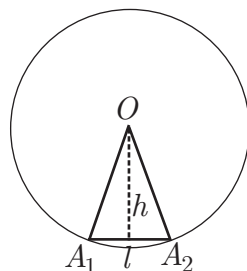
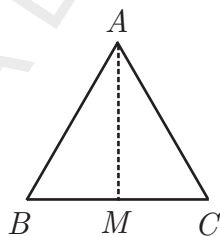
$$h = \frac{l}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2004}} \text{ și astfel aria poligonului este } S = \frac{l^2}{4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2004}}.$$

Rămâne de arătat că $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2004} \notin \mathbb{Q}$. Pe baza formulei $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$ rezultă că dacă $\operatorname{tg} x \in \mathbb{Q}$,

atunci $\operatorname{tg} nx \in \mathbb{Q}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Astfel din $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2004} \in \mathbb{Q}$ ar rezulta

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} \left(668 \cdot \frac{\pi}{2004} \right) \in \mathbb{Q} \text{ și aceasta este o contradicție. Astfel și ipoteza este}$$

falsă, deci nu există nici un poligon regulat cu 2004 laturi care să aibă toate vârfurile în L .





Exerciții și probleme propuse

1. Un triunghi echilateral ABC are vârful A fixat, iar vârful B este variabil pe o dreaptă d . Să se determine locul geometric al vârfului C .
2. Aflați locul geometric al centrelor dreptunghiurilor înscrise într-un triunghi dat și care au una din laturi situate pe baza triunghiului.
3. Calculați lungimile medianelor triunghiului determinat de punctele $A(-1, 2)$, $B(1, 6)$ și $C(-4, 4)$.
4. Calculați lungimile înălțimilor triunghiului determinat de punctele $A(1, 2)$, $B(-1, 6)$ și $C(4, 4)$.
5. Vârfurile unui triunghi au coordonatele $(2, 1)$, $(1, -1)$ și $(-5, 3)$. Scrieți
 - a) ecuațiile dreptelor suport a laturilor;
 - b) ecuațiile paralelelor la laturi prin vârfurile opuse;
 - c) ecuațiile medianelor;
 - d) ecuațiile înălțimilor;
 - e) ecuațiile bisectoarelor;
 - f) ecuațiile mediatoarelor.

Determinați coordonatele

- g) centrului de greutate;
 - h) ortocentrului;
 - i) centrului cercului înscris;
 - j) centrului cercului circumscris.
6. Scrieți ecuațiile dreptelor care trec prin perechile de puncte
 - a) $A(1, 2)$, $B(0, 3)$;
 - b) $A(-2, 4)$, $B(5, 7)$;
 - c) $A(1, 1)$, $B(-2, -8)$.
 7. Fie d_1 și d_2 două drepte oarecare și $A_1, A_2, A_3 \in d_1$ respectiv $B_1, B_2, B_3 \in d_2$. Construim intersecțiile $A_1B_2 \cap A_2B_1 = \{M_1\}$, $A_1B_3 \cap A_3B_1 = \{M_2\}$ și $A_3B_2 \cap A_2B_3 = \{M_3\}$. Arătați că punctele M_1 , M_2 și M_3 sunt coliniare.
 8. (*Teorema lui Newton-Gauss*) Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater oarecare, $\{E\} = A_1A_2 \cap A_3A_4$ și $\{F\} = A_1A_4 \cap A_2A_3$. Demonstrați că mijloacele segmentelor A_1A_3 , A_2A_4 și EF sunt coliniare.
 9. (*Teorema lui Menelaus*) Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi și $B_1 \in A_2A_3$, $B_2 \in A_3A_1$ respectiv $B_3 \in A_1A_2$ astfel încât $\frac{A_2B_1}{B_1A_3} = \lambda_1$, $\frac{A_3B_2}{B_2A_1} = \lambda_2$ și $\frac{A_1B_3}{B_3A_2} = \lambda_3$. Demonstrați că punctele B_1 , B_2 și B_3 sunt coliniare dacă și numai dacă $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$.
 10. (*Teorema lui Ceva*) Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi și $B_1 \in A_2A_3$, $B_2 \in A_3A_1$ respectiv $B_3 \in A_1A_2$ astfel încât $\frac{A_2B_1}{B_1A_3} = \lambda_1$, $\frac{A_3B_2}{B_2A_1} = \lambda_2$ și $\frac{A_1B_3}{B_3A_2} = \lambda_3$. Demonstrați că dreptele A_1B_1 , A_2B_2 și A_3B_3 sunt concurente dacă și numai dacă $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.

6. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați:

a) $A \cdot B^t$; **b)** $B \cdot A^t$; **c)** $A \cdot (AB)^t$; **d)** $A^t \cdot (AB)$.

7. Rezolvați următoarele sisteme matriceale:

a)
$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

8. Rezolvați următoarele sisteme matriceale:

a)
$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}; \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}; \\ -4X + 3Y = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

9. Determinați numerele reale x, y, z și t astfel încât să fie adevărată egalitatea:

$$3 \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 2 & 4 & y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & z & t \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 13 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Rezolvați următoarele ecuații matriceale:

a) $2X + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Rezolvați următoarele ecuații matriceale:

a) $3X + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 2X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

12. Determinați matricea X , dacă

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 17 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; **b)** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Rezolvați următoarele ecuații:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Ce observați?}$$

14. Arătați că pentru orice $A \in M_n(\mathbb{R})$ există $B, C \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât

$$\begin{cases} A = B + C \\ B = B^t \\ C = -C^t \end{cases} . \quad (1)$$

Demonstrați că pentru A fixat, matricele B și C sunt determinate în mod unic de relațiile (1).

15. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2 ;

b) Arătați că $(A - I_2)(A + I_2) = O_2$ fără ca vreunul din factorii produsului

$(A - I_2)(A + I_2)$ să fie egal cu O_2 .

16. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^3 ;

b) Demonstrați că $A^3 - I_3 = (A - I_3)(A^2 + A + I_3) = O_3$;

c) Rezultă de aici că $A^2 + A + I_3 = O_3$?

17. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculați A^{201} .



18. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$. Calculați A^2 , A^3 , A^{n-1} și A^n .

19. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$. Calculați A^2 , A^3 și A^n .

20. Determinați matricele $A \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $A^2 = I_2$.

21. Determinați matricele $A \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $A^2 = O_2$.

22. (Cayley-Hamilton) Arătați că matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ satisface ecuația

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2.$$

23. Arătați că matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$ verifică ecuația

$$A^3 - \text{Tr } A \cdot A^2 + \text{Tr } A^* \cdot A + \det A \cdot I_3 = O_3,$$

unde A^* este matricea adjunctă a lui A .

24. Determinați toate matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X = X \cdot A$, unde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

25. Determinați toate matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X = X \cdot A$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

26. Arătați că pentru orice $A \in M_2(\mathbb{R})$ există o infinitate de matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X = X \cdot A$.

27. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $A^n = 3^{n-1}(nA - 3(n-1)I_2)$,

$$\forall n \geq 1.$$

28. Demonstrați că pentru orice $A \in M_2(\mathbb{R})$ și $n \in \mathbb{N}^*$ există $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^n = a_n \cdot A + b_n \cdot I_2$.

29. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Verificați egalitatea $A^3 + A^2 + A = O_3$;
- b) Arătați că $I_3 \neq a \cdot A + b \cdot A^2 + c \cdot A^3, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

(Variantă bacalaureat, 2005)

30. Spunem că matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ este nilpotentă dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n = O_2$.

- a) Arătați că dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ este nilpotentă, atunci $a + d = 0$ și $ad - bc = 0$.
- b) Arătați că matricea I_2 nu poate fi scrisă ca o sumă finită de matrice nilpotente.

(Bacalaureat, 2005)

31. Arătați că ecuația $AB - BA = I_n$ nu are soluție în $M_n(\mathbb{R})$.

32. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Determinați toate matricele $X \in M_2(\mathbb{C})$ pentru care $AX = XA$.
- b) Rezolvați în $M_2(\mathbb{C})$ ecuația $X^n = A$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

33. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$. Arătați că dacă

- a) $A^t \cdot A = O_n$, atunci $A = O_n$;
- b) $A^t \cdot A = 2A - I_n$, atunci $A = I_n$.

34. Fie E o matrice pătratică ale cărei elemente sunt toate egale cu 1 ($E \in M_n(\mathbb{R})$). Arătați că

- a) $E^2 = nE$;
- b) $(I_n - E) \left(I_n - \frac{1}{n-1} E \right) = I_n$.

35. Demonstrați că dacă $AX = XA$ pentru orice $X \in M_2(\mathbb{R})$, atunci există $c \in \mathbb{R}$ astfel ca $A = c \cdot I_2$.

36. Considerăm funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ unde D este determinat astfel ca funcția $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ ori}}$ să fie definită pe D . Demonstrați că

$$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ ori}}(x) = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n} \text{ unde } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

37. Să se arate că dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ și $AB = BA$, atunci

- a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;
- b) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$;
- c) $(A + B)^n = A^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k A^{n-k} B^k + B^n, \forall n \geq 1$.

38. Să se arate că dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ și $AB = BA$, atunci

a) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$; **b)** $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$;

c) $A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})$.

39. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$. Demonstrați următoarele echivalențe:

a) $A^2 = A \Leftrightarrow (2A - I_n)^2 = I_n$ **b)** $A^2 = I_n \Leftrightarrow (A + I_n)^2 = 2(A + I_n)$.

40. Arătați că $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{102} = 2^{102} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

41. Rezolvați în $M_2(\mathbb{Z})$ ecuația $X^{n+2} - X^{n+1} + X^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(Etapa locală, jud. Timiș, 2004)

42. a) Aflați matricele $A \in M_2(\mathbb{Z})$ care satisfac ecuația $A^3 - 5A = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

b) Calculați A^n , $n \in \mathbb{N}^*$ pentru soluția ecuației de la punctul a).

(Etapa locală, Iași, Mihai Crăciun)

43. Calculați inversele următoarelor matrice:

a) $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -10 & -3 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

44. Calculați inversele următoarelor matrice:

a) $\begin{pmatrix} 8 & -10 & -1 \\ 10 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & -4 & 3 \\ 7 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 10 & 9 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \\ 10 & -3 & -7 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ -10 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -10 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -2 & 7 & -9 \\ -10 & -10 & 4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

45. Calculați inversele următoarelor matrice:

a) $\begin{pmatrix} -9 & -7 & -1 & 4 \\ 9 & 4 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & -1 & 7 \\ -2 & -8 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} -10 & -5 & 1 & -9 \\ 10 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & -8 & 4 & 3 \\ -8 & 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -5 & 5 & 6 & 0 \\ -6 & 10 & 7 & 5 \\ -10 & 7 & 3 & 6 \\ 8 & -7 & 0 & -9 \end{pmatrix}$;

$$d) \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -4 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & -4 & -10 & 5 \\ 9 & -4 & -10 & 4 \end{pmatrix};$$

$$e) \begin{pmatrix} -5 & -8 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -3 \\ -7 & 2 & 9 & -2 \\ -8 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

46. Calculați inversele următoarelor matrice:

$$a) \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & -6 & -2 \\ 3 & -6 & 5 & -4 & -8 \\ 10 & -10 & 1 & -1 & -7 \\ 6 & 4 & -5 & -10 & 9 \\ 7 & -9 & -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 10 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & -5 & -1 & 4 \\ -2 & 7 & -5 & -10 & 7 \\ 0 & -3 & 3 & -5 & 1 \\ -8 & -5 & -8 & 8 & -10 \end{pmatrix}.$$

DETERMINANȚI ȘI SISTEME

1. Calculați determinanții de ordinul doi:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$b) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix};$$

$$c) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix};$$

$$d) \begin{vmatrix} 1+i & 2+i \\ 2-i & 1-i \end{vmatrix};$$

$$e) \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix};$$

$$f) \begin{vmatrix} 2^{1024} & 1 \\ 6^{1024} & 3^{1024} \end{vmatrix};$$

$$g) \begin{vmatrix} a^2 - b^2 & a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 \\ a - b & a^2 + b^2 \end{vmatrix}.$$

2. Calculați determinanții de ordinul doi:

$$a) \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{6} & \sqrt{12} \end{vmatrix};$$

$$b) \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix};$$

$$c) \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix};$$

$$d) \begin{vmatrix} a+b & a^2 - b^2 \\ 1 & a-b \end{vmatrix};$$

$$e) \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{vmatrix}.$$

3. Considerăm determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. Calculați Δ folosind

a) regula lui Sarrus;

b) regula triunghiului;

c) dezvoltarea după prima linie;

d) dezvoltarea după a doua coloană;

e) proprietățile determinanților.

Aceeași problemă pentru $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Calculați determinantul $\Delta(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ și rezolvați ecuația $\Delta(x) = 0$.

5. Calculați următorii determinanți:

a) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$; b) $\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$;

c) $\Delta = \begin{vmatrix} 2ab & a^2+b^2 & a+b \\ a^2+b^2 & 2ab & a+b \\ a+b & a+b & 2 \end{vmatrix}$.

6. Calculați $\Delta = \begin{vmatrix} a+b^2 & b+c^2 & c+a^2 \\ a^2+b^3 & b^2+c^3 & c^2+a^3 \\ a^3+b^4 & b^3+c^4 & c^3+a^4 \end{vmatrix}$.

7. Scrieți determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$ sub forma unui produs.

8. Calculați determinanții de tip Vandermonde:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

9. Fără a calcula determinanții arătați că

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

10. Fără a calcula determinanții arătați că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

11. Calculați determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, dacă x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$.

12. Calculați determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, dacă x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$.

13. Arătați că dacă matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ comută între ele, atunci funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \det(A + xB)$ poate fi scrisă sub forma:
 $f(x) = \det(B) \cdot x^2 + mx + \det(A)$, unde $m \in \mathbb{R}$.

14. Arătați că ecuația $\begin{vmatrix} x-a & b & c \\ c & x-a & b \\ b & c & x-a \end{vmatrix} = 0$ nu poate avea trei rădăcini reale distincte.

15. Pentru ce valori ale parametrului $m \in \mathbb{R}$, sistemul $\begin{cases} 3x + 2y + mz = 0 \\ mx + 3y + 2z = 0 \\ 2x + my + 3z = 0 \end{cases}$ admite și alte soluții în afară de soluția nulă? (Admitere 1997, București)

16. Calculați valoarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_1^2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2^2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}$ în

funcție de a_1 și r dacă numerele a_1, a_2, \dots, a_n formează o progresie aritmetică cu rația r .

17. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = \begin{vmatrix} a+x & a & \cdots & a \\ a & a+x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x \end{vmatrix}$. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_{n+1}}{x \cdot a_n} \right).$$

18. Pentru ce valoare $a \in \mathbb{R}$ ecuația

$$\begin{vmatrix} 2-a & a-x & x-1 \\ 1-x^2 & x^2 & -1 \\ 2-a-2x & x+a & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

admite o rădăcină dublă întregă?

19. Calculați $E = \frac{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4}{x_1^5 + x_2^5 + x_3^5} (x_1 x_2 x_3)^2 - \begin{vmatrix} x_1 x_2 & x_2 x_3 & x_3 x_1 \\ x_2 x_3 & x_3 x_1 & x_1 x_2 \\ x_3 x_1 & x_1 x_2 & x_2 x_3 \end{vmatrix}$ dacă x_1, x_2, x_3 sunt

rădăcinile ecuației $x^3 - ax + 1 = 0$.

20. Se consideră funcția $f(x) = \begin{vmatrix} \sin^2 x & -\cos^2 x & \sin 2x \\ \cos^2 x & -\sin^2 x & \sin 2x \\ 1 + \sin 2x & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Aduceți f la forma

cea mai simplă.

(Admitere 2005, Timișoara)

21. Determinați valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul următor admite

soluții nenule
$$\begin{cases} \alpha x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

(Admitere, 2005, Oradea)

22. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} mx + y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ (2m-1)x + 2y + z = n \end{cases}$$
, unde m și n sunt parametri

reali. Calculați valoarea lui α dacă

$$A = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{sistemul este compatibil nedeterminat}\}$$
 și

$$\alpha = \sum_{(m,n) \in A} (m^2 + n^2).$$

(Admitere, 2005, ASE București)

23. Fie sistemul
$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 - 3 \end{cases}$$
, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.

b) Rezolvați sistemul pentru $m = -2$.

(Admitere, 2005, Brașov)

24. Fie sistemul
$$\begin{cases} (1+m)x + y + z = 1 \\ x + (1+m)y + z = m, \quad m \in \mathbb{R}. \\ x + y + (1+m)z = m^2 \end{cases}$$

a) Pentru ce valori ale lui m , sistemul este compatibil determinat;

b) Rezolvați sistemul pentru $m = 2$ și pentru $m = 0$.

(Admitere, 2005, Baia Mare)

25. Calculați rangul următoarelor matrice:

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & -6 & 8 & -10 & 12 \\ -1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 & 7 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -8 & 15 \end{pmatrix};$$

d)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

26. Calculați rangul următoarelor matrice:

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 10 & -7 \end{pmatrix};$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix};$$

c)
$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

27. Rezolvați următoarele sisteme:

a)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -5; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -6; \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -5; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 3. \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 6 \end{cases}$$

28. Rezolvați următoarele sisteme cu două necunoscute:

$$\text{a) } \begin{cases} 4x + 5y = 12 \\ -6x - 8y = -18; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -7x + 7y = -28 \\ -4x - 6y = -6; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 3x - 4y = -2 \\ -4x - 6y = -20; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} -x - 2y = 7 \\ -8x + 2y = 2; \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{5}y = 8 \\ \sqrt{5}x - \sqrt{3}y = 0; \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 5 \\ \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = 2\sqrt{6}. \end{cases}$$

29. Rezolvați următoarele sisteme cu trei necunoscute:

$$\text{a) } \begin{cases} y - 6z = -3 \\ 4x + 5y - 7z = -3; \\ -7x - 8y + 4z = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y - z = 0 \\ -2x + 7y + 5z = -44; \\ 2x + 3y - z = -12 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2y + 3z = 8 \\ -6x - 3y + z = -7; \\ 7x + 7y + 6z = 26 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ -x + 3y - 2z = -6; \\ -3x + 6y - 2z = -18 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} -3x - 6y - 7z = -6 \\ 7x + 3y + 5z = 14; \\ 4x + 4y - 3z = 8 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} 6x - 2y + z = 1 \\ x - 2y + 7z = 12. \\ 3x - 7y + z = 19 \end{cases}$$

30. Rezolvați următoarele sisteme cu patru necunoscute:

$$\text{a) } \begin{cases} 7x - 7y - 8z + 4t = 1 \\ -6x + 5y - 7z - 7t = -25 \\ -3x - 6y - 7t = -2; \\ 3x - 4y - z = 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -5x - 2y + 2z + 5t = 6 \\ -y - 6z + 6t = 6 \\ -4x + 4y + 2z + 4t = 4; \\ 3x + 3y - 5z = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 6x + 3y - 4z - 5t = 4 \\ -7x + y + z - 6t = -39 \\ -7x + 2y + z - 6t = -43; \\ -3x - 2y - 7z + 4t = 21 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 7x - 7y - 8z + 4t = 1 \\ -6x + 5y - 7z - 7t = -25 \\ -3x - 6y - 7t = -2; \\ 3x - 4y - z = 7 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 4x + 5y + 5z - 4t = -7 \\ x - 4y + 5z - 7t = 20 \\ -4x + 5y + 7z + 3t = -23; \\ -8x + y - 7z - 5t = 49 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} -x - 4y + 4z + 6t = 36 \\ 6x + 6y - 2z - t = -52 \\ -3x + 6y + 6z - 8t = -22; \\ 7x - z - 4t = -37 \end{cases}$$

31. Rezolvați următoarele sisteme

$$a) \begin{cases} 6x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 8x_5 = -12 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 - x_5 = -7 \\ 5x_1 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = -10; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 6x_4 = -25 \\ -4x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 36 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 6x_5 = -6 \\ -5x_1 - 7x_3 + 4x_5 = 32 \\ 6x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 = -16. \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = -31 \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 38 \end{cases}$$

32. Demonstrați că dacă $A \in M_2(\mathbb{R})$ și $\det(A^4 + I_2) = 0$, atunci $\det(A) = 1$.

(Etapa locală, 2004, Călărași)

33. Rezolvați în \mathbb{R} sistemul:
$$\begin{cases} yz(2x + y + z) = 42 \\ xz(x + 2y + z) = 24. \\ xy(x + y + 2z) = 18 \end{cases}$$
 (Gheorghe Szöllösy)

34. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul
$$\begin{cases} u + v = 1 \\ ux + vy = a \\ ux^2 + vy^2 = a^2, \text{ unde} \\ ux^3 + vy^3 = a^3 \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}$.

35. Demonstrați că dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ și $A^2 = A + I_n$, atunci $|\det(A)| < 2^n$.

36. Demonstrați că dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, atunci $\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA)$.

37. Arătați că dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, atunci are loc echivalența:

$$I_n + AB \text{ inversabilă} \Leftrightarrow I_n + BA \text{ inversabilă.}$$

38. Fie $p, q \in \mathbb{R}$ astfel ca $p^2 - 4q < 0$. Arătați că dacă n este un număr impar și

$$A \in M_n(\mathbb{R}), \text{ atunci } A^2 + pA + qI_n \neq O_n.$$

39. Calculați determinantul $\Delta =$

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

40. Calculați determinantul $\Delta =$

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1 + x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1 + x_n \end{vmatrix}.$$

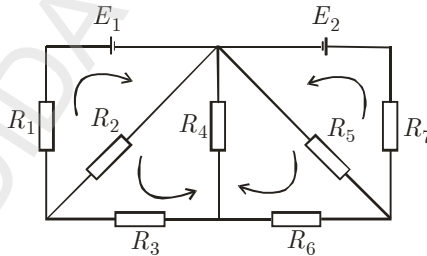
41. Matricea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ se numește stohastică, dacă are numai elemente

nenegative și suma elementelor de pe fiecare linie este 1. Matricea A se numește dublu stohastică dacă atât A cât și A^t sunt matrice stohastice. Demonstrați că:

a) produsul a două matrice stohastice este o matrice stohastică;

b) produsul a două matrice dublu stohastice este o matrice dublu stohastică.

42. Calculați intensitatea curentului în laturile rețelei electrice din figura de mai jos dacă se cunosc valorile $E_1 = 80V$, $E_2 = 40V$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 1\Omega$, $R_4 = 8\Omega$, $R_5 = 4\Omega$, $R_6 = 6\Omega$ și $R_7 = 10\Omega$.



TEST RECAPITULATIV



1. Rezolvați ecuația matriceală $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Calculați determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0.$$

3. Calculați suma numerelor reale pentru care $\begin{vmatrix} x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$.

4. Calculați suma rădăcinilor ecuației precedente.

5. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 3x_1 - 13x_2 + 14x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

6. Pentru ce valori $a, b \in \mathbb{R}$ este compatibil sistemul

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$$

7. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculați A^n pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Calculați rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

9. Calculați aria triunghiului determinat de punctele $A(1,1)$, $B(-3,-2)$ și $C(-2,3)$.

10. Calculați determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$


PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU BACALAUREAT

1. Se consideră matricele, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și funcția

$$f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}), f(X) = AX - XA.$$

- Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- Să se calculeze $f(O_2)$ și $f(I_2)$.
- Să se arate că $f(aX) = af(X)$, $\forall X \in M_2(\mathbb{R})$ și $\forall a \in \mathbb{R}$.
- Să se arate că $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbb{R})$.
- Să se arate că funcția f nu este nici injectivă, nici surjectivă.

(Variantă Bacalaureat, 2005)

2. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Spunem că matricea $M \in M_2(\mathbb{R})$ este *nilpotentă*, dacă există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $M^n = O_2$.

- Să se verifice că matricele O_2 și J sunt nilpotente.
- Să se arate că matricea K nu este nici inversabilă nici nilpotentă.
- Să se arate că, dacă matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ este $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, atunci avem identitatea $X^2 - (p + s)X + (ps - rq)I_2 = O_2$.
- Să se arate că, dacă matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ verifică relația $A^2 = O_2$, atunci $a + d = 0$ și $ad - bc = 0$.
- Să se arate că dacă matricea $B \in M_2(\mathbb{R})$ este nilpotentă, atunci $B^2 = O_2$.
- Să se arate că matricea I_2 nu poate fi scrisă ca o sumă finită de matrice nilpotente.

(Bacalaureat, 2005)

3. Dacă $X \in M_2(\mathbb{C})$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notăm prin \bar{X} , matricea $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$, unde \bar{z}

desemnează conjugatul numărului complex z . Considerăm funcția $f : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$, $f(X) = \bar{X}$. Pentru o matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$, inversabilă, definim funcția $g_A : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$, $g_A(X) = A \cdot X \cdot A^{-1}$, $\forall X \in M_2(\mathbb{C})$.

- a) Să se verifice că $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ și $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$.
- b) Să se arate că $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$ și $f(X \cdot Y) = f(X) \cdot f(Y)$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbb{C})$.
- c) Să se arate că $(f \circ f)(X) = X$, $\forall X \in M_2(\mathbb{C})$.
- d) Să se arate că funcția f este inversabilă și să se calculeze inversa sa.
- e) Să se arate că funcția g_A este bijectivă, $g_A(X+Y) = g_A(X) + g_A(Y)$ și $g_A(X \cdot Y) = g_A(X) \cdot g_A(Y)$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbb{C})$.
- f) Să se arate că funcția f are proprietatea că $f \neq g_A$, pentru orice matrice inversabilă $A \in M_2(\mathbb{C})$.

(Variantă Bacalaureat, 2004)

4. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = I_3 + A$.

- a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- b) Dacă $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, să se calculeze matricea $S = A - X \cdot Y$.
- c) Să se verifice că $A^2 = 10A$.
- d) Să se arate că matricea B este inversabilă și inversa sa este matricea

$$B^{-1} = I_3 - \frac{1}{11}A.$$

e) Să se găsească trei matrice $U, V, W \in M_3(\mathbb{C})$ de rang 1, astfel încât $B = U + V + W$.

f) Să se arate că oricare ar fi două matrice, $C, D \in M_3(\mathbb{C})$ de rang 1, avem $C + D \neq B$.

(Variantă Bacalaureat, 2004)

5. În mulțimea $M_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și

funcția $f: M_3(\mathbb{C}) \rightarrow M_3(\mathbb{C})$, $f(X) = X^3$.

a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .

b) Să se calculeze A^2 și A^3 .

c) Să se arate că dacă $Y \in M_3(\mathbb{C})$ și $YA = AY$, atunci există $a, b, c \in \mathbb{C}$, astfel

$$\text{încât } Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

d) Să se arate că, dacă $Z = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$ unde $a, b, c \in \mathbb{C}$ și $\det(Z) = 0$, atunci

$$Z^3 = O_3.$$

e) Să se găsească două matrice $U \neq V \in M_3(\mathbb{C})$, astfel încât $f(U) = f(V)$.

f) Să se demonstreze că ecuația $f(X) = A$ nu are soluții în mulțimea $M_3(\mathbb{C})$.

(Variantă Bacalaureat, 2004)

6. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .

b) Să se calculeze matricele A^2 și A^3 .

c) Să se verifice că $A^3 + A^2 + A = O_3$.

d) Să se găsească o matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$, $B \neq O_3$, cu proprietatea

$$AB = BA = O_3.$$

- e) Să se arate că $A^{2005} = A$.
- f) Să se arate că $I_3 \neq aA + bA^2 + cA^3$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

(Bacalaureat, 2005)

7. În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ precum și submulțimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in (0, \infty), b \in \mathbb{R} \right\}.$$

- a) Să se verifice că $I_2 \in G$.
- b) Să se calculeze determinantul matricei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$.
- c) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.
- d) Să se verifice că dacă $C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$, atunci matricea $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in G$

și $C \cdot D = D \cdot C = I_2$.

- e) Să se găsească două matrice $U, V \in G$ pentru care $U \cdot V \neq V \cdot U$.
- f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că
- $$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

8. Fie matricea $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Calculați $\det A$;
- b) Calculați A^{-1} ;
- c) Rezolvați ecuația $AX = \sqrt{3}I_2$;
- d) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^n = a_n A + b_n I_2$;
- e) Aflați cel mai mic $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^k = I_2$.

9. Fie submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a^2 - 2b^2 = 1, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ a mulțimii $M_2(\mathbb{Q})$.

- a) Arătați că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
- b) Arătați că dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.

c) Arătați că dacă $X \in G$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, atunci X este inversabilă și calculați inversa sa.

d) Dați exemplu de două matrice $A \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ pentru care $b \neq 0$.

e) Demonstrați că dacă $B \in G$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, $a > 0$ și $b > 0$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem relația $B^n \neq I_2$.

10. Fie submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid a \in (0, +\infty), b \in \mathbb{R} \right\}$ a mulțimii $M_2(\mathbb{R})$.

a) Demonstrați că $I_2 \in G$.

b) Demonstrați că dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.

c) Demonstrați că dacă $C \in G$, atunci există $D \in G$ astfel încât $CD = DC = I_2$.

d) Dați exemplu de două matrice $S, T \in G$ astfel încât $ST \neq TS$.

e) Demonstrați că pentru orice $A \in G$ și $n \in \mathbb{N}^*$ există $X \in G$ astfel încât $X^n = A$.

11. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.

b) Calculați matricele A^2 și A^3 .

c) Arătați că A este inversabilă și determinați inversa sa.

d) Rezolvați ecuația $A \cdot X = B$ în $M_3(\mathbb{R})$, unde $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

e) Calculați matricea $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{2006}$.

12. Fie sistemul

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ mx + my + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

- a) Calculați determinantul sistemului.
b) Dacă pentru $m = 1$ determinantul sistemului este 0, determinați celelalte zerouri ale determinantului.
c) Studiați compatibilitatea sistemului pentru $m = 1$.
d) Rezolvați sistemul în cazul $m = 2$.
e) Calculați inversa matricei sistemului în cazul $m = 0$.
13. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(-n, n^2)$, $n \in \mathbb{N}$.
- a) Scrieți coordonatele punctelor A_0 și A_1 ;
b) Scrieți ecuația dreptei A_0A_1 ;
c) Demonstrați că aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ nu depinde de n .
(Bacalaureat 2002, varianta 2, profil matematică-fizică)
14. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(3,3)$ și $C(-1,2)$.
- a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .
b) Să se calculeze panta dreptei AB .
c) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul C și are aceeași pantă cu dreapta AB .
(Bacalaureat, 2001, varianta 2, profil industrial)
15. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(6,0)$, $B(0,6)$ și $C(12,12)$.
- a) Să se determine aria triunghiului ABC .
b) Să se determine coordonatele punctului $M(u,v)$, astfel încât $MA = MB = MC$.
c) Să se scrie ecuația cercului care trece prin punctele A , B și C .
(Bacalaureat, 2001, varianta 3, profil matematică-fizică)
16. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,0)$, $C(3,-1)$ și dreapta $d: x - y = 0$.
- a) Scrieți ecuația dreptei AB .
b) Arătați că punctele A , B și C sunt coliniare.
c) Calculați distanța de la punctul C la dreapta d .
(Bacalaureat, 2001, varianta 2, profil matematică-fizică)
17. Să se determine punctul de intersecție a mediatoarelor segmentelor AB și AC , unde $A(2,5)$, $B(5,1)$ și $C(-2,2)$.
(Bacalaureat, 1998, varianta 8, profil economic)

Indicații și răspunsuri

Analiză matematică

Capitolul I. Pag. 11. Exerciții 1. a) nu există; **b)** nu există; **c)** \nexists inf, min, max, sup $A = 5$; **d)** \nexists inf, min, sup $A = \max A = 10$; **e)** \nexists min, max, sup, inf $A = 7$; **f)** inf $A = \min A = 2000$, \nexists sup, max; **g)** inf $A = -3$, sup $A = 100$, \nexists min, max; **h)** inf $A = \min A = -8$, sup $A = 13$, \nexists max; **i)**, \nexists min, sup $A = \max A = 11$; **j)** nu există; **k)** \nexists min, , sup $A = \max A = 103$; **l)** inf $A = \min A = 0$, \nexists max, sup $A = 1$; **m)** inf $A = 0$, sup $A = 2$; \nexists min, max; **n)** inf $A = \min A = 1$; sup $A = \max A = 3$; **o)** min $A = \inf A = 3$, \nexists sup, max; **p)** inf $A = -3$, \nexists min, sup, max; **r)** inf $A = 5$, \nexists min, sup, max.

2. a) $3, \frac{2}{5}$; **b)** $-45, 0$; **c)** $0, \frac{n}{n+3}$; **d)** $0, 0$ pt. $n = 0; 1, 0$ pt. $n = 1$ și $2, \frac{n^2 - 4}{n^2 + 2}$ pt. $n \geq 2$;

3. a) $\left(2, \frac{7}{2}\right]$; **b)** $\left[\frac{4}{7}, \frac{3}{4}\right]$; **c)** $\left[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{9}{4}, \frac{7}{3}\right]$; **d)** $\left\{\frac{6k+1}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; **e)** $x = 1$.

Probleme. 1. a) inf $A \leq a, \forall a \in A, \inf B \leq b, \forall b \in B \Rightarrow \inf A + \inf B \leq a + b, \forall (a + b) \in (A + B)$, deci inf $A + \inf B$ este minorant pentru $A + B$. Pentru $\varepsilon > 0, \exists a \in A$ și $\exists b \in B$ a.î. $\inf A + \frac{\varepsilon}{2} > a$ și $\inf B + \frac{\varepsilon}{2} > b$, deci $\exists a + b \in A + B$ cu $\inf A + \inf B + \varepsilon > a + b$, astfel $\inf A + \inf B = \inf (A + B)$.

Analog se demonstrează punctele **b), c)** și **d)** respectiv pentru max, min.

2. a) $M_1 = \max_{t \in [a, b]} f(t) \geq f(x), \forall x \in [a, b] \Rightarrow M_1 + M_2 \geq f(x) + g(x), \forall x \in [a, b] \Rightarrow M_1 + M_2 \geq \max_{x \in [a, b]} (f(x) + g(x))$. Analog pentru punctele **b)** și **c)**. **3.** Toate elementele mulțimii A sunt minoranți pentru B , deci $a \leq \inf B, \forall a \in A$, deci inf B este majorant pentru A , rezultă că $\sup A \leq \inf B$.

4. a) $\left[(2 + \sqrt{3})^{2001}\right] = (2 + \sqrt{3})^{2001} + (2 - \sqrt{3})^{2001} - 1, \left\{(2 + \sqrt{3})^{2001}\right\} = 1 - (2 - \sqrt{3})^{2001}$;

b) $n^2 \leq n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 \Rightarrow \left[\sqrt{n^2 + n + 1}\right] = n, \left\{\sqrt{n^2 + n + 1}\right\} = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$;

c) $n \in \{3k, 3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \left[\frac{n(n+1)}{6}\right] = \frac{n(n+1)}{6}$ și $\left\{\frac{n(n+1)}{6}\right\} = 0. n = 3k + 1 \Rightarrow \left[\frac{n(n+1)}{6}\right] = \frac{n(n+1) - 2}{6}, \left\{\frac{n(n+1)}{6}\right\} = \frac{1}{3}$. **5. a)** $\frac{n(n+1)}{2}$; **b)** $\sum_{k=1}^{2003} \frac{k(k+1)}{6} - 668 \cdot \frac{1}{3} = 446781613$;

c) $\sum_{k=1}^n \left(1 - (3 - 2\sqrt{2})^k\right) = n - \frac{(\sqrt{2} - 1)(1 - (2 - 2\sqrt{2})^n)}{2}$. **6.** $\frac{5}{4}$.

Pag. 29. 1. a) pară; **b)** impară; **c)** nici una; **d)** nici una, domeniul nu este simetric; **2. a)** periodică $T = \frac{1}{3}$; **b)** periodică, orice număr rațional este perioadă, nu are perioadă principală. **3.** Cu substituția

$x \rightarrow x + a$ obținem $f(x + 2a) = f(x)$. **4.** Aplicăm de două ori substituția $x \rightarrow x + 2 \Rightarrow f(x + 6) = f(x)$. **5. a)** \searrow ; **b)** \nearrow pe $(-\infty, -3)$ și $(1, \infty)$, \searrow pe $(-3, -1)$ și $(-1, 1)$; **c)** \nearrow .

6. Rezultă din faptul că x^k este crescătoare pe \mathbb{R}_+ . $f(x) = x^2 - 3x + 2$ nu este monotonă pe \mathbb{R}_+ .

7. $x_{1,2} \in (-1, 1) \Leftrightarrow f(1) > 0, f(-1) > 0, -\frac{b}{2a} \in (-1, 1), -\frac{\Delta}{4a} < 0$. Afirmația este adevărată.

9. $m \in (-\infty, 0), y_v = -x_v^2 - x_v$. **10.** inj.; **11.** Se arată că dacă x este soluția ecuației $x = x^2 - 2$ sau

a ecuației $x = (x^2 - 2)^2 - 2$, atunci și $f(x)$ este soluția acestei ecuații. Astfel $f(-1), f(2) \in \{-1, 2\}$, iar $f\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) \in \left\{-1, 2, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. În fiecare caz în parte ajungem la contradicție, deci nu există astfel de

funcție. **12.** $(a, b) \in \{(0, 0), (4, 4), (6, 5), (5, 6)\}$. **13.** $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$, deci f nu poate fi injectivă.

Capitolul II. Pag. 34. 3. a) $\frac{1}{5^{n-1}}$; **b)** $4 - 2n$; **c)** $3^{n-1} - 2$; **d)** $\frac{n^2 - n + 6}{2}$; **e)** $\frac{(n-1)(n-4)}{2} + 2$;

f) $3 \cdot (-1)^n (2n - 1)!! = 3 \cdot (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$; **g)** $2 + 3^{2^{n-1}}$. **4. a)** $\frac{1}{2n+3}$; **b)** $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$;

c) $n + 3$; **d)** $2^{\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}}$; **e)** $\frac{n+2}{n}$.

Pag. 37. 1. a) $\frac{3^n + 2^n}{5}$; **b)** $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}$; **c)** $2^n(1 + 2n)$; **d)** $\cos \frac{n\pi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{n\pi}{3}$; **e)** $\frac{55 \cdot 3^n}{27 \cdot 2^n - 7 \cdot 3^n}$;

f) $\frac{3}{5 - 2^n}$. **2.** Se folosește metoda inducției matematice. **3.** Din relația de recurență prin ridicare la pătrat

obținem $x_{n+1}^2 + x_n^2 - 4x_n x_{n+1} = 1$, de unde $x_n = 2x_{n+1} \pm \sqrt{3x_{n+1}^2 + 1}$. Dacă în prima relație avem $+$, atunci în aceasta din urmă avem $-$. Alegând $x_0 = 0$ și în recurența inițială numai $+$, obținem $x_1 = 4$ și $x_{n-1} + x_{n+1} = 4x_n$, astfel $x_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$. Dacă alegem peste tot $-$, atunci obținem același șir cu semn contrar. Pornind de la oricare membru al șirului, pentru $+$ obținem membrul următor din șirul inițial, iar pentru $-$ membrul precedent.

Pag 40. 1. a) $\searrow, 0 \leq a_n \leq 1$; **b)** $a_5 < a_6 > a_7$, nu este monoton, $-1 \leq a_n \leq \frac{1}{12}$; **c)** descrescător,

$0 < a_n \leq \frac{2}{11}$; **d)** nu este monoton, $|a_n| \leq 1$; **e)** nu este monoton și nici mărginit; **f)** nu este monoton,

$0 \leq a_n \leq 1$. **2. a)** crescător, $\sqrt{3} \leq a_n < \frac{7}{3}$; **b)** $\nearrow, 1 \leq a_n < 2$; **c)** $\nearrow, 1 \leq a_n < \frac{5}{3}$; **d)** $\searrow,$

$1 \leq a_n < 3$; **e)** \nearrow , nemărginit superior. **3. a), d), f), i)** $0 < a_n < 1$; **b), c), g)** nemărginit; **e)** $|a_n| \leq 2$;

h) $0 < a_n < 2$. **4. a)** crescător; **b), c), d), e), f), h)** \searrow ; **g)** nu este monoton. **5.** Alegem cel mai mic și cel mai mare număr și distingem două cazuri: dacă sunt pe poziții consecutive în șir sau dacă nu sunt.

Pag. 47. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{7}$; **b), e), h), l), n)** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; **c), k)** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$; **d)** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$; **f), g),**

m) divergent; **i)** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{4}$; **j)** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Pag. 50 1. $a_{4n} = 0, a_{4n+1} = 1$; **2.** $a_{2n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0, a_{2n+1} = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. **3.** $a_{2n} \rightarrow l_1,$

$a_{2n-1} \rightarrow l_2, a_{3n} \rightarrow l_3; (a_{6n}) \subset (a_{2n})$ și $(a_{6n}) \subset (a_{3n}) \Rightarrow l_3 = l_1$, analog pentru $(a_{6n-3}) \Rightarrow l_3 = l_2$, deci $l_1 = l_2$.

Pag 54. 1. a) $a_n \rightarrow -\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{1}{3}$; **c)** 0 ; **d)** divergent; **e)** 18 ; **f)** $\frac{2}{3}$. **2. a)** $\frac{1}{3}$; **b)** $\sqrt[3]{2}$; **c)** divergent; **d)** 1 .

3. Falsă, $a_n = n, b_n = -n$. **4. a), b), d), f), g)** F, **e)** A. **5.** $a_n - b_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \geq 0 \Rightarrow$

$a - b \geq 0$. Pentru $a_n > b_n$ nu rezultă $a > b$, doar $a \geq b$, de exemplu $\frac{n}{n+1} > \frac{n-1}{n+1}$, iar $1 \not> 1$.

Pag. 56. 1. a) A, **b), c), d)** F. **2. a), c), e)** ∞ , **b)** $-\infty$, **d)** nici una.

Pag. 62. 1. a) $\frac{n^2}{n^2+n} < a_n < \frac{n^2}{n^2+1}$, $a_n \rightarrow 1$; **b)** $\frac{2n+1}{(n+1)^2} < a_n < \frac{2n+1}{n^2+1}$, $a_n \rightarrow 0$;

c) $\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}} < a_n < \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$, $a_n \rightarrow 1$; **d)** $-\frac{n}{n^2} \leq a_n \leq \frac{n}{n^2}$, $a_n \rightarrow 0$; **e)** $a_n < \frac{5^4}{4!} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}$,

$a_n \rightarrow 0$; **f)** $a_n < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $a_n \rightarrow 0$; **2.** $a_n > \frac{n^5}{n^3+n^2}$, divergent; **3.** $a_n < \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2}$,

$a_n < \sum_{k=1}^n \frac{k\sqrt{n}}{n^2(\sqrt{1+n}+1)}$, $a_n \rightarrow \frac{1}{4}$.

Pag. 65. a) Pt. $a > 1$, $1 \leq a_n \leq a$ și $\searrow \Rightarrow$ convergent. Dacă $a_n \rightarrow l \geq 1$, $a_{2n} \rightarrow l$, $a_{2n} = \sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{l} = l$, $l = 1$. Analog pentru celelalte cazuri. **b)** \searrow și mărginit, $a_n \rightarrow l$, $a_{2n} \rightarrow l$, $a_{2n} = \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{l} = l \geq 1 \Rightarrow l = 1$.

Pag. 67. 1. a) $p_4 \rightarrow p_2$, $p_6 \rightarrow p_4$, $p_1 \rightarrow p_3$, $p_6 \rightarrow p_2$; **b)** $p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_4$, $p_3 \wedge p_4 \rightarrow p_2$, $p_i \wedge p_4 \rightarrow p_2$, $p_5 \wedge p_4 \rightarrow p_6$, $p_i \wedge p_6 \rightarrow p_2$, $p_6 \wedge p_i \rightarrow p_4$, $p_i \wedge p_4 \rightarrow p_3$, $p_5 \wedge p_3 \rightarrow p_6$.

2. a), b), c) $a_n \rightarrow 0$.

3. $a_n = x_{n-1} + \alpha x_{n-2} + \dots + \alpha^{n-3} x_2 + \alpha^{n-2} x_1 + \alpha^{n-1} a_1$. $x_n \rightarrow l$. $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ a.f. $|x_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$
 \Rightarrow

$\left| a_n - \frac{l}{1-\alpha} \right| < \varepsilon \cdot \frac{1-\alpha^{n-n_0}}{1-\alpha} + \alpha^{n-n_0-1} (|x_{n_0} - l| + \alpha |x_{n_0-1} - l| + \dots + \alpha^{n_0-1} |x_1 - l| + \alpha^{n_0} a_1) + |l| \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} \rightarrow 0$.

Deci $a_n \rightarrow \frac{l}{1-\alpha}$. (Este adevărat pentru $\forall \alpha \in (-1, 1)$). **4.** $x_n = a_{n+1} + \frac{1}{2} a_n$ este descrescător și pozitiv, deci convergent. Din problema precedentă rezultă că (a_n) este convergent.

Pag. 69. 1. Folosim inegalitatea $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$. **2.** Se arată că de la un n_0 încolo

$\ln a_n - \ln a_{n+1} > \frac{l}{4n}$, astfel $\ln a_{n_0} - \ln a_n > \frac{l}{4} \left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0+1} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) \rightarrow \infty \Rightarrow \ln a_n \rightarrow -\infty \Rightarrow a_n \rightarrow 0$.

Pag. 71. 1. a) e^6 ; **b)** $\sqrt{e^3}$; **c)** $\frac{1}{e^4}$; **d)** 1, dacă $a < \frac{1}{2}$; e^{-2} , dacă $a = \frac{1}{2}$, 0 dacă $a > \frac{1}{2}$; **e)** $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$;

f) e^x ; **g)** \sqrt{e} ; **h)** e . **2. c)** $\ln(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \rightarrow \ln e = 1$; **a)** $y_n = e^{x_n} - 1 \rightarrow 0$, $\frac{y_n}{\ln(1+y_n)} \rightarrow 1$;

b) $\frac{e^{x_n \ln a} - 1}{x_n \ln a} \cdot \ln a \rightarrow \ln a$; **3.** vezi pag. 101. **4. a)** $\ln a$; **b)** \sqrt{ab} ; **c)** $\sqrt[p]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_p}$.

Pag. 73. 1. a) $\frac{1}{5}$; **b)** $\frac{1}{p+1}$; **c), d)** 1; **e)** 0; **f)** $\frac{1}{2}$. **2. a), b), d)** 1; **c)** $\frac{1}{24}$; **e)** $\frac{1}{e}$; **f)** 0.

Pag. 84. I. 1. a) $-\frac{7}{15}$; **b)** $-\frac{3}{2}$; **c), d)** 0; **e)** $\frac{3}{2}$; **f)** $\frac{1}{2}$; **g)** $\frac{3}{4}$; **h)** 2; **i)** 1; **j)** $\frac{7}{2}$; **k), l)** ∞ .

2. a), k), n), o) ∞ ; **b), e), l), p)** $-\infty$; **d), g), i), m), q)** 0; **c)** 10; **f)** $\frac{1}{2}$; **h)** $-\frac{1}{2}$; **j), r)** 1.

3. a), d), g), i), j) 1; **b)** $\frac{25}{48}$; **c), h)** $\frac{1}{2}$; **e)** $\frac{1}{4}$; **f)** ∞ . **4. a)** $\frac{4}{9}$; **b)** $\frac{1}{6}$; **c)** $\frac{1}{300}$; **d)** 4. **5. a)** $\frac{1}{2}$;

b), d) 1; **c)** -1; **e)** 0; **f)** $\frac{2}{3}$; **g)** 0 pt. $\lambda = 1$, ∞ pt. $\lambda < 1$ și $-\infty$ pt. $\lambda > 1$; **h)** 0 pt. $\lambda = \sqrt[3]{2}$, ∞ pt. $\lambda < \sqrt[3]{2}$ și $-\infty$ pt. $\lambda > \sqrt[3]{2}$; **i)** $|1 - a^2|$; **j)** $\frac{2}{3}$ pt. $\lambda = 1$, ∞ pt. $\lambda < 1$ și $-\infty$ pt. $\lambda > 1$; **k)** ∞ ;
l) 0 pt. $a = b$ sau $k < \frac{3}{4}$, ∞ pt. $k > \frac{3}{4}$ și $a > b$, $-\infty$ pt. $k > \frac{3}{4}$ și $a < b$. **6. a)** $\frac{1}{e}$; **b)** $\frac{1}{e^3}$;
c), e) 0; **d)** ∞ ; **f)** $\ln 12$; **g)** $\ln \frac{2006}{1989}$; **7) a)** $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$; **b)** $a = 0$; **c)** $a = 0$, $b = -\frac{1}{3}$,
 $c = \frac{1}{3}$. **8. a), b), c), d)** convergente; **e)** divergent. **9.** Rezultă din $\|a_n\| - \|a\| \leq \|a_n - a\|$. **10.** Nu. Ex.

$a_n = (-1)^n$. **11.** Nu este mărginit, deci nici convergent. **12.** $a_n = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2} \rightarrow \frac{1}{(q-1)^2}$.
13. $a_n \rightarrow \frac{1}{(1+q)^2}$. **14.** $a_n \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **15.** $a_n \rightarrow a$. **16.** $x_n \rightarrow a$. **17.** $\frac{1}{2}$. **18.** $e\sqrt{e}$. **19.** $\frac{1-b}{1-a}$.
20. 2. **21.** 3. **22.** 0. **23.** $a_n < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. **24.** $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ crescător și tinde la e , deci $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$,
 $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{e}{n} < \frac{3}{n}$. **25.** $a_n = 99^{\frac{n-1}{3}}$, $\frac{a_n}{4^n} \rightarrow \infty$.
26. $a_n \cdot \frac{n-1}{n+1} = a_1 + \dots + a_{n-1} \Rightarrow a_n = a_{n+1} \cdot \frac{n}{n+2} - a_n \cdot \frac{n-1}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = 2a_n \cdot \frac{n+2}{n+1} \Rightarrow$
 $a_n = 2^{n-2}(n+1)$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n(n-1)} = \frac{1}{4}$. **27.** Adunăm recurențele de la 1 la n . $x_n - x_{n-1} = n$.
 $x_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$.

Pag. 87. II. 1. $x_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $x_1 \in \mathbb{N}$ arbitrar. **2.** $x_{n+4} = x_n$. **3.** $x_{n+6} = x_n$.
4. $\alpha = \arccos \frac{x_0}{2}$, $x_n = 2 \cos(3^n \alpha)$. **5.** $y_n = \arctg x_n$, $y_{n+1} = \frac{y_n}{2}$, $x_n = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+2}}$. **6.** $x_n = \frac{6n-1}{6n+1}$.
7. $x_{n+1} + x_n = 2x_n + 2x_{n-1}$. **8.** Se demonstrează că $3x_{n+2} - x_n = \sqrt{8(x_{n+2}^2 + x_{n+1}^2)} \Rightarrow$
 $x_{n+3} = 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n$. **9.** $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. **10.** Pt. $x_0 > 1$ este divergent.
Pentru $x_0 \in (-\infty, 1)$, $x_n \rightarrow 0$. Pt. $x_0 = 1$, $x_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. **11.** Pt. $a < -\frac{1}{4}$; $\nexists x_0$. Pt. $a = -\frac{1}{4}$ și
 $x_0 \geq \frac{1}{2}$, șirul este convergent și are limita $\frac{1}{2}$. Pt. $a = 0$ și $x_0 = 0$, avem $x_n = 0 \rightarrow 0$. Pt. $a > 0$ și
 $x_0 > -a$ șirul este convergent cu limita $\frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$. **12. a)** $a_n = \frac{F_n}{F_{n+1}} \rightarrow \frac{2}{1 + \sqrt{5}}$ ((F_n) șirul lui

Fibonacci), **b)** $a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} \rightarrow 2$, $b_n = 2b_{n-1} + (-1)^n$, $b_1 = 1$. **13.** descrescător și $x_n > -2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
14. a) $\frac{e}{2n+2} < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1}$, $n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right] \rightarrow -\frac{e}{2}$; **b)** Se aplică Cesaro-Stolz.
15. $\arctg \frac{1}{k^2 + k + 1} = \arctg(k+1) - \arctg k$, și limita este $\frac{\pi}{4}$. **16. a)** $\frac{1}{2}$; **b), i), j)** 0; **c)** $\frac{2}{3}$.
17. a), d) 1; **b)** $\frac{3}{4}$; **c)** $\frac{5}{32}$; **e), g), l)** ∞ ; **f)** 6; **h)** $\frac{1}{4}$; **k)** p . **18. a), e)** 0; **b)** $\ln^2 a$; **c)** 1; **d)** $-\frac{1}{2}$;

f) $\frac{\pi}{2}$. **19.** Pentru $n_k = \left\lceil \frac{(8k+1)\pi}{4} \right\rceil + 1$, și $m_k = \left\lceil \frac{(8k-3)\pi}{4} \right\rceil + 1$, avem $a_{n_k} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right]$ și $a_{m_k} \in \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ deci aceste subșiruri nu pot avea aceeași limită.

20. $(-1)^n \sin(\pi\sqrt{n(n+1)}) = \sin(\pi\sqrt{n(n+1)} - n\pi) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, deci șirul inițial nu este convergent.

21. $\{(2+\sqrt{3})^n\} = 1 - \{(2-\sqrt{3})^n\} \rightarrow 1$. **22.** Pt. $x_0 \in \left(0, \frac{2}{a}\right)$, șirul are limita $\frac{2}{a}$; pt. $x_0 = \frac{2}{a}$, avem $x_k = 0$, $\forall k \geq 1$ și pentru $x_0 > \frac{2}{a}$, șirul tinde la $-\infty$. **23.** $a_n, b_n \in [a, b]$, $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$ și trecem la

limită în relațiile de recurență. **24.** $\left| \sum a_{n+k} b_{n+k} - ab \right| = \left| \sum (a_{n+k} - a) b_{n+k} + a \left(\sum b_{n+k} - b \right) \right|$.

25. Spargem suma în două și majorăm fiecare parte conform condițiilor. **26. a)** $x_n = \frac{2^n}{n}$; **b)** $2^n \geq n^2$

$\forall n \geq 4$; **c)** $a_n = \sqrt{\frac{(n+1)^n}{n!}} \rightarrow e$. **27.** $x_n = \frac{n^2-1}{2n}$, $a_n \rightarrow \frac{1}{2e}$. **28.** $\left| \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right| \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$.

Reciproc, contraexemplu $x_n = (-1)^n$. **29.** (a_{m_k}) constant, (a_{n_k}) progresie geometrică.

Capitolul III. Pag. 107. 1. 100; **2.** n ; **3.** $\frac{3}{2}$; **4.** $\frac{1}{4}$; **5.** 0; **6.** \neq ; **7.** $-\frac{1}{2}$; **8.** $-\frac{1}{4}$; **9.** $\frac{1}{2}$;

10. $-\frac{1}{2}$; **11.** 0; **12.** $\frac{1}{2}$; **13.** $\frac{1}{3}$; **14.** $\frac{1}{2}$; **15.** 1; **16-18.** e ; **19.** $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$; **20.** e^2 ; **21.** $\frac{1}{e}$; **22-28.** 1;

29. -1; **30.** $\ln a \cdot a^{\sin a} \cos a$; **31.** $\frac{n-1}{2}$; **32.** $\frac{m-n}{2}$.

Pag. 108. 2. Dacă $f(x_0) \neq f(y_0)$, $x_n = f(x_0 + nT) \rightarrow f(x_0)$, $y_n = f(y_0 + nT) \rightarrow f(y_0)$ sunt subșiruri cu limite diferite. **3.** $\frac{1}{3}$; **4. a)** $2a$; **b)** $3a^2$; **c)** 8; **d)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **e)** na^{n-1} ; **f)** $\frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}$; **g)** $\frac{m}{n}(-1)^{m-n}$;

h) 1; **k), o)** \neq ; **l)** $\frac{1}{n}a^{-\frac{n-1}{n}}$; **m), n)** $\frac{1}{2}$; **p)** $\frac{3}{2}$; **q)** $\frac{5}{2}$; **r)** $\frac{n^2-m^2}{2}$. **6.** $\ln a$; **7.** \neq ; **8.** $\frac{1}{2}$; **9.** 5;

10. $\frac{4}{3}$; **11.** $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$; **12.** $\frac{16}{9}$; **13.** $\frac{3}{2}$; **14-15.** 0; **16.** 1; **17.** $\frac{27}{8}$; **18.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$; **19.** -2; **20.** 0.

21. 1 pt $x < 1$, $\frac{1}{2}$ pt. $x = \frac{1}{2}$, 0 pt. $x > 1$. **22.** $\frac{m}{n}$; **23.** $\frac{n(n+1)}{2}$; **24.** $\frac{1}{n!}$; **25.** $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$;

26. $-\frac{1}{4}$; **27.** 0; **28.** 1; **29.** e^3 ; **30.** $\sqrt[3]{abc}$; **31.** $a^y > y \Rightarrow \frac{x^n}{\left(\frac{x}{a^{2n}}\right)^{2n}} < \frac{x^n}{\left(\frac{x}{2n}\right)^{2n}} = \frac{(2n)^{2n}}{x^n} \rightarrow 0$.

32. $y = \log_a x$ și folosim problema precedentă. **33.** Pătratul cu vârfurile $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ și $(1,-1)$. **34.** $\exists k > 0 : |g(x)| \leq k \Rightarrow |f(x)g(x)| \leq k|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$. **35.** $x = 2001$.

36. $x_n = 2\pi n$, $y_n = 2\pi n + \frac{\pi}{4}$, $f(x_n) \rightarrow 0$, $f(y_n) \rightarrow 1$. **37.** a ; **38.** ab ; **39.** $a^a (\ln a - 1)$;

40. $\ln \sqrt{\frac{b}{a}}$; **41.** $\frac{b^2}{2m} - \frac{a^2}{2n}$; **42.** $\frac{n}{m}$; **43.** 1; **44.** 1; **45.** $\frac{a}{b}$; **46.** $\frac{1}{2^{n-1} \cdot n!}$; **47.** $\frac{n!}{2^n}$; **48.**

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$; **49.** 1; **50.** Se folosește definiția limitei cu ε . **51. a)** $\frac{2}{p+1}$; **b)** $\frac{1}{p+1}$;

52. Se demonstrează că $\sum f\left(\frac{1}{k}\right) - \sum \frac{1}{k}$ este convergent și se folosește că $\sum \frac{1}{k} - \ln n$ este

convergent. **53.** $\sum_{k=1}^n \frac{p}{n+k} = p(S_{3n} - \ln 3n - S_n + \ln n + \ln 3)$, unde $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. **54.** Pentru orice nr.

real există șir de numere raționale respectiv șir de numere iraționale cu această limită. **55.** Pentru

$x_n = \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \rightarrow x_0$, avem $f(x_n) = \frac{1}{q_n}$, demonstrăm că (q_n) nu are subșir constant, deci

tinde la ∞ , astfel $f(x_n) \rightarrow 0$. Pentru șiruri care conțin și numere iraționale este evident. **56.** Pentru

$x \in [0,1] \cup \mathbb{N}$ este evident. Dacă $x > 1$, $[x^{2n}] - [x^n]^2 =$

$$= x^{2n} - \{x^{2n}\} - (x^n - \{x^n\})^2 = 2 \cdot x^n \{x^n\} - \{x^{2n}\} - \{x^n\}^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \exists n_0 \text{ a.î. } [x^{2n}] = [x^n]^2 \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$[x^n]_n^1 = [x^{2^k n}]_{2^k n}^1 \rightarrow x \Rightarrow [x^n] = x^n, \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow x \in \mathbb{N}. \quad \mathbf{57.} \quad 0; \quad \mathbf{58.} \quad \frac{\sin x}{x}; \quad \mathbf{59.} \quad (x_{2k}) \text{ și } (x_{2k+1})$$

sunt monotone și mărginite și au aceeași limită: $\frac{3 + \sqrt{15}}{3}$. **60.** $x_n \geq \sqrt{a}$ (din ineg. mediilor), \searrow și cu

limita \sqrt{a} . **61.** $x_n \leq \frac{1}{3}$, crescător și cu limita $\frac{1}{3}$. **62.** $0 \leq \frac{x_n}{n} \leq a_1$, $\frac{x_n}{n} \leq \frac{2(x_1 + \dots + x_{n-1})}{n(n-1)} = y_n$,

(y_n) descrescător și pozitiv, iar $\frac{2n+1}{n} y_{n+1} - \frac{n+1}{n} y_n \leq \frac{x_n}{n} \leq y_n$, pe baza teoremei cleștelui, $\frac{x_n}{n}$ este

convergent și are aceeași limită cu y_n . $x_n \rightarrow 0$.

Pag. 111. 1. $\frac{1}{2}$ ($a = 1$), $-\infty$ ($a > 1$), ∞ ($a \in [0,1)$). **2.** $l_s = 0$, $l_d = \infty$. **3.** 0. **4.** 2, dc. $x_1 = 2$

și 1, dc. $x_1 \in [1,2)$. **5.** -1. **6.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. **7.** (4,0); **8.** $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$; **9.** $\frac{1}{2}$; **10.** (8,-4); **11.** (1,1);

12. $\frac{2\pi}{\pi^2 + 1}$; **13.** $e^{-\frac{1}{6}}$; **14.** 0.

Capitolul IV. Pag. 116. 5. În $\frac{1}{2}$ continuă, în 1 și 2 nu este continuă. **6.** $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;

7. Continuă în 1 și -1, discontinuă în 0. **8.** Este discontinuă în $\forall x \in \mathbb{Z}$. **9., 10., 11.** continuă.

12. Vezi pr. 54. pag. 110. **13.** Se demonstrează prin inducție că $f(r) = f(0)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$ și se folosește faptul că pentru orice număr real există șir de numere raționale cu această limită.

Pag. 119. 1. \mathbb{R} ; **2.** cont.; **3. a)** $\exists x_n \rightarrow x_0$, $f(x_n) \neq 0 \quad \forall n$, $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0) \Rightarrow$

$$\frac{1}{f(x_n)} \rightarrow \frac{1}{f(x_0)}. \quad \mathbf{4. a)-d)}$$
 domeniul de definiție; **5.** $\|f(x) - f(x_0)\| \leq |f(x) - f(x_0)|$;

6. Fals. Contraexemplu: $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$; **7. g)** Este continuă în punctele în care $x^2 = 3x - 2$;

8. $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow \sqrt{x_n} \rightarrow \sqrt{x_0}$. **9.** $D = \mathbb{R} \setminus (-1,1)$. **10. a)** $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = \pm 1, -1, 1; \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ x^2, & |x| > 1 \end{cases}$ continuă pe \mathbb{R} ; **c)** $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$ continuă pe \mathbb{R} ;

d) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus (0,1) \end{cases}$ continuă pe \mathbb{R} . **11., 12.** Continue pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. **13.** $f_1(x) = 0$,

$f_2(x) = 1$, $f_3(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$, f_1 și f_2 sunt continue.

14. $|g(x+T_f) - g(x)| = |g(x+T_f+nT_g) - f(x+T_f+nT_g) + f(x+nT_g) - g(x+nT_g)| \rightarrow 0 \Rightarrow T_f$ perioadă a lui g , analog T_g perioadă a lui f , astfel $f(x) - g(x) = f(x+nT_f) - g(x+nT_f) \rightarrow 0$, dacă $T_f > 0$, deci $f(x) - g(x) = 0$, iar pentru funcții constante este evident. **15.** $f(\sqrt[n]{x}) = f(x) \Rightarrow$

$f(x) = f(1) \quad \forall x$. **16.** $h: (0, \infty) \rightarrow (-1, 1)$, $h(u) = \frac{1-u}{1+u}$ bijectivă, ecuația se poate scrie în forma

$(f \circ h)(u) + (f \circ h)(v) = (f \circ h)(uv)$, $\forall u, v \in (0, \infty)$ și obținem $f(x) = c \cdot \ln \frac{1-x}{1+x}$.

Pag. 130. 1. a), b), continue; **c)** nu este continuă în 0 ; **d)** $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ 1, & x = 0 \\ kx^2, & |x| \in \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \right], k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \mid k \in \mathbb{N}^* \right\}$; **e)** Continuă în punctele $-1, \pm\sqrt{3}$; **f)** $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ |x-1|, & x > 0 \end{cases}$

este continuă pe \mathbb{R} ; **g)** $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5x}, & x \in (-1, 1) \setminus \{0\} \\ \frac{x^2+5}{x}, & |x| > 1 \\ \frac{4}{3}, & x = 1 \end{cases}$ continuă pe $\mathbb{R}^* \setminus \{\pm 1\}$. **2. a)** e^2 ;

b) $\{-2, 0, 1\}$; **c)** $f(x) = \begin{cases} a(x+1)^2, & x < 0 \\ \frac{1+a}{2}, & x = 0 \\ |x-1|, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1$; **d)** $-3e^3$. **3. a)** funcția este continuă; **b)** Pentru

orice vecinătate a lui 0 există n suficient de mare a.î. $\left(-\frac{1}{2n\pi}, \frac{1}{2n\pi}\right) \subset V$. $f\left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = 1$,

$f\left(\frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{2}}\right) = -1$, deci $f(V) = [-1, 1]$. **4. a)** $f([-1, 0]) = \left[\frac{1}{e}, 1\right) \cup \{2\}$; **b)** $f(\mathbb{R}) = \{-1, 0, 1\}$.

5. $f(1) = 1$, $f(\sqrt{5}) = 5$, iar $4 \notin \text{Im } f$. În general pentru orice $x > 0$, dacă $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt[3]{x} \notin \mathbb{Q}$, $x \notin \text{Im } f$. **6.** $f(0) = -1 < 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ și f continuă. **7.** $f(x) = x - \cos x$ continuă,

$f(0) = -1 < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$. **8.** $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 2} - \sqrt[3]{x^5 - 8x + 1}$ continuă, $f(-1) = \sqrt{2} - 2 < 0$, $f(0) = 1 > 0$. **9. a)** $f(x) < 0$ pe $(1,2) \cup (2,3)$, $f(x) > 0$ pe $(3, \infty)$;

c) Folosim $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; **d)** $f(x) = (x-1)^2(x+2)$. **10.** f este continuă, strict crescătoare, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, deci este bijectivă. **11.** Demonstrăm prin inducție că

$f(xf^n(x)) = f(x)$, $\forall n \geq 1$, de unde $f^n(x) \leq \frac{1}{x} \quad \forall n \geq 1$ și $\forall x \in (0,1]$, deci $f(x) < 1$, trecem la

limită după n în prima egalitate. **12.** Folosim metoda reducerii la absurd și definiția limitei cu vecinătăți pentru vecinătăți disjuncte ale limitelor laterale. **13.** Presupunem contrariul și obținem că funcția nu are proprietatea lui Darboux. **14.** Dacă funcția nu este continuă, atunci numai puncte de discontinuitate de speța întâi poate avea, deoarece este monotonă. **16.** $f(x) = c \ln x$. **18.** Dacă ar fi mărginită, atunci orice șir $(f(x_n))$ este mărginit, deci are subșir $(f(x_{n_k}))$ convergent \Rightarrow orice șir (x_n) are subșir convergent.

19. $f_n = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \dots + \frac{1}{n+x} - \ln 2$ strict descrescătoare, $f(0) > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = -\ln 2 < 0$, deci are o singură rădăcină pozitivă. $f_n(n-1) > 0 > f_n(n) \Rightarrow n-1 < x_n < n$.

Capitolul. V. Pag. 137. 1. a) $f'(0) = 0$; **b)** $f'(1) = 1, f'(-1) = -1$; **c)** $f'(-1) = 0$; **d)** derivabilă în 1 și -1; **e)** $f'_s(-1) = 1, f'_d(-1) = 2, f'_s(1) = -2, f'_d(1) = -1$; **f)** $f'\left(\frac{1}{4}\right) = -4$; **g)** $f'(0) = 0$; **h)**

$\cancel{f}'(-1)$; **i)** $\cancel{f}'(0)$. **2. a)** $b = -\frac{c+2}{e}$; $a = \frac{c+3}{e^2}$, $c \in \mathbb{R}$; **b)** $b = 1, a = 0$.

Pag. 140. 3. $(f_1 + \dots + f_n)' = f_1' + \dots + f_n'$;

4.
$$\frac{(f(x) - g(x)) - (f(x_0) - g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Pag. 141. 1. b) $f'(x) = \begin{cases} -3x^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 3x^2, & x > 0 \end{cases}$; **d)** $f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ 2x - 1, & x > 0 \end{cases}$, în 0 nu este derivabilă.

4. $(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \dots \cdot f_n + \dots + f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n'$.

6. b) $x = -1$, $\frac{P'(-1)}{P(-1)} = -\left(\frac{1}{x_1 + 1} + \dots + \frac{1}{x_n + 1}\right)$. **7.** Nu.

Pag. 143. a) 3, \mathbb{R} ; **b)** $-\frac{n}{2^{n+1}}$, \mathbb{R}^* ; **d)** $f'(-1) = \frac{1}{4} = f'(1)$, \mathbb{R} ; **i)** $(0, \infty)$; **j)** $\mathbb{R} \setminus \left\{x \mid \cos x = -\frac{1}{2}\right\}$; **k), l)** \mathbb{R} ; **m)** $(0, \infty) \setminus \{3\}$.

Pag. 145. I. 14. $f(x) = \frac{3}{2}$; $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. **17.** $\frac{3x-4}{x^2-2x}$, $(2, \infty)$. **25.** $\frac{a \cos \sqrt{ax}}{2\sqrt{ax}}$, $(0, \infty)$ pt.

$a > 0$, $(-\infty, 0)$ pt. $a < 0$. **27.** $-\frac{\ln 3}{x^2} \cdot 3^{\frac{1}{x}}$, \mathbb{R}^* . **31.** $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$. **32.** $-\frac{15}{\ln^6 3x}$, $\mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

33. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \sqrt{\frac{\sqrt{(4k+2)\pi+1}-1}{2}} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$. **34.** $\frac{2}{(x+1)^2} e^{\frac{x-1}{x+1}}$, $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

35. $\frac{-3}{2 \ln 2 (x^4 + x^2 + 1) \sqrt{\log_2^3 (x^4 + x^2 + 1)}}$, \mathbb{R}^* .

II. 3. Prin calcul direct. **4. a)** $-\frac{1}{(x-1)^2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$; **d)** $\frac{1}{x \ln x}$;

o) $2 \sqrt{\frac{\ln x}{x^2 - x + 1}} \cdot \frac{x(2x-1) \ln x - x^2 + x - 1}{x \ln^2 x}$.

6. a) $y = 4x - 1$; **b)** $y = 1$; **c)** $3y - x - 3 \ln 3 + 1 = 0$; **d)** $y - x - 1 = 0$. **7.** $y + 5x + 7 = 0$;

8. $y - 2x_0 x + x_0^2 = 0$; **9.** $y = 8x - 8$; **10.** $y = 0$; **11.** $y = 2x - 6$; **12.** $3y - 2x - 5 = 0$,
 $3y + 2x - 5 = 0$;

13. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$; **14.** $M(0,1)$; **15.** $y = 8x + 4$; **16.** $f'(x_1) = f'(x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$;

17. $a = -\frac{6 + (3x_0 - 2)^2}{2}$; **18.** $m = \frac{5}{36}$, $n = -\frac{4}{9}$.

Pag. 148. 1. a) $\frac{17}{24} x^{-\frac{7}{24}}$, \mathbb{R}_+^* ; **b)** $\frac{4x^4 + 56x^2 + 5}{(x^2 + 1)(4x^2 + 1)}$, \mathbb{R} ; **c)** $\frac{3}{\sqrt{3 - 6x - 9x^2}}$, $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$; **d)** $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$,

$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & x \in (-1,1) \\ -\frac{2}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases}$; **f)** Este definită numai în 0; **g)** $\frac{1}{3(x^2 + x + 1)}$, \mathbb{R} ; **i)** discuție după

x . **3.** $(f^{-1})'(f(-3))$; **4.** $(f^{-1})'(f(1))$.

Pag. 150. 2. a) $\frac{2x^3 + 3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$; **b)** $\frac{1}{x}$; **c)** $e^{-x^2}(4x^2 - 2)$; **d)** $2 \arctg x + \frac{2x}{1+x^2}$; **3.** 1, 1, 0.

4. a) $f''(0) = 0$; **b)** $f''(0) = 2$; **c)** $f''(3) = 0$. **5.** $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$, $c = 1$. **6.** $a = 2$. **7.** inducție.

8. $\frac{a_n + b_n \ln x}{x^{n+1}}$, $b_{n+1} = -(n+1)b_n$, $a_{n+1} = b_n - (n+1)a_n$, $a_n = (-1)^{n-1} n! \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$,

$b_n = (-1)^n \cdot n!$. **10. a)** $e^x(x^2 + 2nx + n(n-1))$; **b)** $2^{n-2} e^{2x}(4x^2 + 4nx + n(n-1))$;

c) $f'(x) = 1 + \ln x$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}$, $n \geq 2$; **e)** $(-1)^n n! \left(\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$;

f) $f(x) = x + 3 - \frac{5}{x-1} + \frac{16}{x-2}$. **11. a)** 1; **b)** 2. **12. a)** 0; **b)** $\frac{\pi}{2}$.

13. $P^{(n)}(1) = P^{(n)}(-1) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(x) = (x-1)^n(x+1)^n Q_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(x) = 0$,
 $\forall x \in \mathbb{R}$.

Capitolul VI. Pag. 158. 1. a) $(1, -2)$ punct de minim; **b)** $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ punct de maxim, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ punct de minim; **c)** $(0,1)$ punct staționar (maxim), $(-1,0)$, $(1,0)$ puncte de minim, dar nu sunt puncte staționare. **d)**

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ punct staționar, dar nu este punct de extrem. **2.** Se aplică teorema lui Lagrange.

3. f' are un singur zero în intervalul $[-2,2] \Rightarrow f$ are cel mult două zerouri în $[-2,2]$. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) > 0$, $f(0) < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. **4.** f are patru zerouri $\Rightarrow f'$ are cel puțin trei zerouri, dar este funcție polinomială de grad trei, deci are exact trei zerouri. **5.** f strict crescătoare. **6. a)** 2; **b)** $\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$. **7.** $f \nearrow$ pe $(0, \infty)$, $f(0) < 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$. **8. a), b)** f nu este derivabilă în 0. **c), e)** da; **d)** nu este derivabilă în $\frac{\pi}{4}$. **g)** $f(x) = a_1^x + \dots + a_n^x - n$, $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, f derivabilă $\Rightarrow f'(0) = 0$.

10. Aplicăm t. Lagrange pt. $g(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix}$. **11. a)** Nu este deriv. în 0; **b)** $a < 1$;

c)-e) da. **12.** Nu. **13.** $(1,1)$, $(-1,-1)$; **14. a), b), d)** da; **c)** nu.

Pag. 159. 1) 1; **2.** $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; **3.** T. Cauchy pt. $\frac{f(x)}{x}$ și $\frac{1}{x}$; **4.** T. Rolle; **5.** $f(x) = \sin \frac{x}{2}$; **6.** Afirmația inversă nu este adevărată. $f(x) = x + 1$. **8.** T. Rolle pt. $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{c_k x^{k+1}}{k+1}$; **9.** $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < \frac{|x - x_0|}{4} \Rightarrow f'(x_0) = 0$. **10. a)** Prima linie conține derivatele funcțiilor, constantele nu se schimbă. **b)** T. Rolle pt.

$$h(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) & g(x) \\ 1 & x_1 & f(x_1) & g(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \text{ și } h'(x).$$

Capitolul VII. Pag. 170. 1. a) 2; **b)** $\frac{1}{3}$; **c)** $\frac{\ln a}{6}$; **d)** $\cancel{\neq}$; **e)** $\frac{1}{6}$; **f)-g)** 0; **h)** $-\frac{1}{3}$; **i)** ∞ ; **j)** $\frac{1}{6}$; **k)** 1; **l)** $\frac{1}{4}$; **m)** 1; **n)** 0 pt. $a < 2$; -1 pt. $a = 2$, $-\infty$ pt. $a > 2$; **o)** $-\frac{1}{12}$; **p)** $-\frac{2}{9}$. **2. a), d)** nu; **b), c)** da. **3. a), b), g), j)** 0; **c), f), h), i), l), m)** 1; **d-e)** $\frac{1}{6}$, **k)** $\frac{5}{6}$. **4.** Cu definiția derivatei și a limitei.

5. a) $1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$; **b)** $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $k = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$;

c) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$;

d) $1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n$; **e)** $1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n}$.

Pag. 171. 2. $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$, $g(f(x)) = \begin{cases} e, & x < 0 \\ \sqrt{e}, & x = 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$, nu se poate aplica t. Lagrange. **3.** $S = 1$,

$A = \frac{2}{7}$. **4.** $f'(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}} \cdot \frac{x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1}{(x^2-1)^2}$. **5.** T. Lagrange pe $[x, x+1]$.

Capitolul VII. Pag. 177. 1. a) \nearrow pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$; **b)** \searrow pe $(0, \frac{1}{e})$ și \nearrow pe $(\frac{1}{e}, \infty)$;

c) \nearrow pe $[0, \frac{\pi}{4}]$ și pe $[\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$, \searrow pe $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$; **d)** \searrow pe $(-\infty, -\frac{1}{2})$ și \nearrow pe $(-\frac{1}{2}, +\infty)$. **2.** Nu.

3. $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2})$ punct de minim. **4.** \nearrow pe $(-\infty, 0)$ și \searrow pe $(0, \infty)$. **5.** $G(x) - F(x)$ \nearrow .

6. $f'(x) = g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. **7.** Vezi 9/pag. 159.

8. $1 - \varepsilon M \leq f'_\varepsilon(x) \leq 1 + \varepsilon M$, dacă $\varepsilon < \frac{1}{M} \Rightarrow f'_\varepsilon > 0 \Rightarrow f \nearrow$. **9.** T. Lagrange pe $(x, x+1)$.

10. T. Lagr. pe $(0, x)$. **11. a)** $f(x) = e^x - 1 - x \searrow$ pe $(-\infty, 0)$ și \nearrow pe $(0, \infty) \Rightarrow f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$; **b)** $f_1(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \nearrow$ și $f_2(x) = \ln(1+x) - x \searrow$. **12.** $f(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$,

$f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} \Rightarrow \exists x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$: $f'(x_1) = 0$. $f \nearrow$ pe $(0, x_1)$ și \searrow pe $(x_1, \frac{\pi}{2})$, $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$. **14.** $V(x) = \pi x^2(R-x)$, $V_{\max} = \frac{4\pi R^3}{27}$. **15.** $f(x) = \frac{(x+R)^2}{4R(x-R)}$,

$f_{\min} = f(3R) = 2$. **16.** $V(x) = x(a-2x)(b-2x)$, $x_0 = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$.

17. $V(\alpha) = \frac{\alpha^2 R^3 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{24\pi^2}$.

Pag. 179. 1-2. $f'(0) = 0$. **3.** $f'(0) = 1$, dacă $a = b - 1$. **4.** $f'(0) = 1$.

5. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ 1+x, & x \in (0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}) \\ \frac{1}{x}, & x \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$ nu este continuă în 0. **6.** Pt. $a = \frac{12}{3\pi-4}$ și $b = \frac{2}{3\pi-4}$ derivabilă

și $f'(3) = \frac{2}{3\pi-4}$. **7.** Este derivabilă numai în 0.

Pag. 184. 1. a) convexă pe $(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ și concavă pe $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$;

b) concavă pe $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ și convexă pe $(0, \frac{\pi}{2})$; **c)** convexă pe $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ și $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$, concavă pe

$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$; **d)** convexă pe $(-\infty, 0)$ și concavă pe $(0, \infty)$; **e)** convexă pe $(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{5})$ și $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \infty)$,

concavă pe $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$; **f)** convexă pe $(-\infty, -\sqrt{\frac{9+\sqrt{21}}{15}})$, $(-\sqrt{\frac{9-\sqrt{21}}{15}}, \sqrt{\frac{9-\sqrt{21}}{15}})$ și

$(\sqrt{\frac{9+\sqrt{21}}{15}}, \infty)$, concavă în afara acestor intervale.

2. a) convexă pe $(-\infty, 1)$, concavă pe $(1, \infty)$, punct de inflexiune: $(1, 2)$; **b)** convexă pe $(-\infty, 0)$, concavă pe $(0, \infty)$, punct de inflexiune: $(0, a)$; **c)** concavă pe $(-\infty, 0)$, convexă pe $(0, \infty)$, punct de

inflexiune: $(0,0)$ (nu există $f''(0)$); **d**) convexă pe \mathbb{R} ; **e**) convexă pe $((2k-1)\pi, 2k\pi)$, concavă pe $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, puncte de inflexiune: $(k\pi, k\pi + (-1)^k)$; **f**) concavă pe $(-\infty, 0)$, convexă pe $(0, \infty)$, punct de inflexiune: $(0,0)$; **g**) convexă pe $(-\infty, 0)$, concavă pe $(0, \infty)$, în 0 nu este derivabilă, $f'_s(0) = f'_d(0) = \infty \Rightarrow (0,1)$ punct de inflexiune.; **h**) discuție după paritatea lui n ; **i**) convexă pe \mathbb{R} ; **j**) convexă pe $(0, \infty)$; **k**) concavă pe $(0, \sqrt{e^3})$, convexă pe $(\sqrt{e^3}, \infty)$, punct de inflexiune: $\left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$.

Pag. 188. 1. a), c), i) $y = x$; **b)** $y = 0$; **d)** $y = x + 1$; **e)** $y = -x$; **f), h)** $y = 0$ $(-\infty)$; **g)** $x = -1, x = 1$; **j)** $y = 2x + \frac{1}{2}$; **k), q)** $y = x - \frac{1}{3}$; **l)** nu are; **m)** $x = 1$; **n)** $y = \frac{1}{2}$ $(+\infty)$, $y = -\frac{1}{2}$ $(-\infty)$; **o)** $y = 1; x = 0$; **p)** $y = x - \frac{1}{2}$ $(+\infty)$, $y = -x - \frac{1}{2}$ $(-\infty)$.

Pag. 204. 1. $(-\infty, -1), (-1, 3), (3, \infty)$. **2. c)** nu are soluții; **d)** $(-2, -1), (1, 2)$. **3.** o soluție pt. $m \in (-\infty, -27) \cup (5, \infty)$; două soluții pt. $m \in \{-27, 5\}$ și trei soluții pt. $m \in (-27, 5)$. **4. a)** $(-1, 0), (0, 1)$; **b)** $\left(-\frac{(4k+1)\pi}{2}, -2k\pi\right), \left(-2k\pi, -\frac{(4k-1)\pi}{2}\right), k \in \mathbb{N}^*, \{0\}$; **c)** $\{0\}, (0, 1)$; **d)** $(0, 1)$; **e)** $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{2}, 10\right)$; **f)** $\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$. **5. a)** o soluție pt. $a \in \left(-\infty, \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$, două soluții pt. $a = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$, trei soluții pt. $a \in \left(\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}, \infty\right)$; **b)** o soluție pt. $a \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}, \infty\right)$, două

soluții pt. $a = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}$, trei soluții pt. $a \in \left(0, \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}\right)$, **c)** nu are soluții pt. $a < 1$, o soluție pt. $a = 1$, două soluții pt. $a > 1$; **d)** nu are soluții pt. $a > -1$, o soluție pt. $a = -1$, două soluții pt. $a < -1$; **e)** nu are soluții pt. $|a| > \sqrt{2}$, are o infinitate de soluții pt. $|a| \leq \sqrt{2}$; **f)** nu are soluții pt. $a > \frac{1}{4}$, o soluție pt. $a \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{4}\right)$, două soluții pt. $a \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$; **g)** nu are soluții pt. $a > 1$, două soluții pt. $a \in (-\infty, 0) \cup \{1\}$, trei soluții pt. $a = 0$ și patru soluții pentru $a \in (0, 1)$; **h)** nu are soluții pt. $a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, o soluție pt. $a \in \{0, 1\}$, două soluții pt. $a \in (0, 1)$.

Pag. 209. 29. $1, (-1, 0)$; **30.** $1, (2, 3)$; **31.** $2, (-1, 1]$; **32.** $a - b = 2$; **33.** $b = c = 1$; **34.** $a \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow f_{\min} = 0$; $a > \frac{\pi}{2} \Rightarrow f_{\min} = \frac{\pi}{2} - a$; **35.** $a \in (0, 1)$; **37.** $\frac{2}{3}$; **38. a)** $\operatorname{tg} x_0 = \frac{a}{b} \Rightarrow \sin x_0 = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos x_0 = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; **b)** puncte de extrem: $-2, -1, 1, 2$.

39. a) $f'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}$. Discuție în funcție de paritatea lui n ; **b)** $\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right), (1, 0)$. **40.** Rezultă din convexitatea funcțiilor.

Pag. 215. 1. d) $\left(\frac{2}{3}, 1\right), \frac{\sqrt{58}}{3}$. **4.** $(3, -1), r = 5$; **5.** Se reduce la o ecuație de gradul doi, a cărei discriminant este 0. **6.** $y + 2x - 3 = 0$; **8. b)** $P\left(-a, \frac{2a^2 - ax_M}{y_M}\right), Q\left(-a, \frac{2a^2 + ax_M}{y_M}\right), d_1 d_2 = a^2$;

c) cercul dat. **9.** $C\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Pag. 219. 4. Egalitatea din enunț se poate reduce la forma

$\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2} = a^2 + b^2 + c^2 - (x^2 + y^2 + c^2)$ și folosim faptul că $b^2 + c^2 = a^2$. **5.** Fixăm latura de lungime dată, al treilea vârf descrie o elipsă cu axa mare această latură (mai puțin vârfurile date).

6. $M(x_0, y_0) \in E, P(x, y)$ un punct de pe una dintre bisectoare, avem

$$\frac{|(x_0 + c)y - y_0(x + c)|}{\sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2}} = \frac{|(x_0 - c)y - y_0(x - c)|}{\sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2}}, \text{ de unde prin calcul direct obținem că } P \text{ este pe}$$

normala sau tangenta în M a elipsei.

Pag. 223. 8. $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 12$. **9.** $x = \frac{x_M + x_N}{2}, y = \frac{b}{a} \cdot \frac{x_N - x_M}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Pag. 229. 4. $f(x) = (e^{-x^2})^2 + x \searrow$ pe $-\infty, 0$ și \nearrow pe $(0, \infty)$, $(0, 1)$ este punct de minim.

Algebră

Pag. 251. 1. a) $\sigma \cdot \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \tau \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. **2. a)** $\sigma = (14)(576)$,

$\sigma^{2006} = \sigma^2 = (567)$. **3.** Descompunem în cicluri disjuncte și calculăm c.m.m.m.c. al lungimilor acestor cicluri. **5.** Mulțimea S_n fiind finită șirul $\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^n, \dots$ nu poate avea o infinitate de termeni diferiți, deci există $m_1, m_2 \in \mathbb{N}, m_1 < m_2$ pentru care $\sigma^{m_1} = \sigma^{m_2}$. Înmulțind cu inversa permutării σ^{m_1} și notând $p = m_1 - m_2$ obținem $\sigma^p = e_n$. Folosind descompunerea în cicluri disjuncte, p va fi c.m.m.m.c. al lungimilor acestor cicluri. **6.** Considerăm numai transpoziții $x = (1i)$. **7.** Folosind descompunerea în cicluri disjuncte obținem soluțiile $x = (154)(2763)$ respectiv $x = (154)(2367)$. **8.** Prin ridicarea la puterea 3 a unei permutări nu putem obține o permutare formată dintr-un singur ciclu de lungime 3.

9. Suma minimă se obține pentru permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$, iar cea maximă pentru permutarea identică.

Matrice pag. 266. 8. a) $a = d \in \left\{\frac{1 \pm i}{2}\right\}, b = c = \pm i \cdot a$; **b)** $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ unde $a^2 + bc = 1$, sau

$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, unde $a \in \{\pm 1\}$; **c)** $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ unde $a^2 + bc = 0$, sau $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; **d)** $\pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ și

$\pm \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$. **9.** De exemplu $X = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{Z}$. **10.** Considerăm $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ și

obținem $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. **Pag. 278. 1.** $A = c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $c \in \mathbb{R}$. **2.** Din relația

$A^2 - (\text{Tr}A)A + \det A \cdot I_2 = 0_2$ deducem $(\text{Tr}A)A^{k-1} = \det(A) \cdot A^{k-2} = 0_2$, deoarece $\det A = 0$. Astfel $\text{Tr}A = 0$, sau $A^{k-1} = 0_2$. În primul caz egalitatea dorită se obține din prima relație folosită. În al doilea caz foloim un argument inductiv. **3.** Folosim teorema lui Cayley Hamilton și un raționament inductiv.

Rezolvarea sistemelor liniare

Pag. 298 3. Înmulțim liniile din membrul drept cu a , b respectiv c și scoatem factorul comun abc din prima coloană. **4.** $4(a-b)(b-c)(a-c)$;

5. a) $-4xyz$; **b)** 0 ; **c)** $(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$;

d) $(x^2+y^2+z^2)(y-x)(z-x)(y-z)(x+y+z)$; **6.** $x_{1,2} = 0$, $x_3 = a^2 + b^2 + c^2$;

8. $\Delta(x) = -x^2(x+1)$;

9. $\Delta = 3x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3 - x_3^3 = -(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1) =$

$= -2(4-3 \cdot 2) = 4$. **10.** $\Delta = x_1^2x_2^2x_3^2 + 2x_1x_2x_3 - x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 = c^2 - 2c - a^4 + 4a^2b - 4ac - 2b^2$.

Conform relațiilor lui Viéte. **11.** Considerăm produsul $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{pmatrix}$,

unde $S_j = x_1^j + x_2^j + x_3^j$, pentru $1 \leq j \leq 4$. Din proprietățile determinanților deducem $\det(M) = \Delta^2$.

Pag. 322. 1. a) 2 ; **b)** 1 ; **c)** 3 . **2. a)** $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; **b)** $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -9 & 7 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$; **c)** $-\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

3. a) $-\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -64 & 68 & 52 \\ 2 & -2 & -2 \\ 56 & -60 & -46 \end{pmatrix}$; **b)** $-\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 10 & -4 & 0 \\ 9 & -4 & 0 \\ 53 & -20 & -4 \end{pmatrix}$; **c)** $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 124 & -14 & -91 \\ 86 & -9 & -64 \end{pmatrix}$.

4. $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$ **5.** $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; **6.** $X = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 10 & -26 & 17 \\ 7 & 7 & 14 \\ 19 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; **7. e)** $x = z = 3 + y$;

f) $y = -x$, $z = 3 - x$. **8.** $x = \frac{1}{3}(a+b+c)$, $y = \frac{1}{3}(a+\varepsilon c + \varepsilon^2 b)$ și $z = \frac{1}{3}(a+\varepsilon b + \varepsilon^2 c)$.

9. $x = \frac{a(b+c)}{(a-c)(b-a)}$, $y = \frac{b(a+c)}{(b-c)(a-b)}$ și $z = \frac{c(a+b)}{(c-a)(b-c)}$. **12.** $x = -abc$, $y = ab + bc + ca$ și $z = -(a+b+c)$.

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ