

А.П. Ершова, Е.П. Нелин

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**Самостоятельные
и контрольные работы
по алгебре и началам
математического
анализа**

11
класс



ИЛЕКСА

А.П. Ершова, Е.П. Нелин

**САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ
И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ
ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ДЛЯ 11 КЛАССА**

**Москва
ИЛЕКСА
2012**

УДК 372.8:[512+517]

ББК 74.262.21

Е80

*Перепечатка отдельных разделов и всего издания — запрещена.
Любое коммерческое использование данного издания
возможно только с разрешения издателя*

Ершова А.П., Нелин Е.П.

Е80 Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам математического анализа для 11 класса. — М.: ИЛЕКСА, — 2012, — 144 с.

ISBN 978-5-89237-358-6

Пособие содержит самостоятельные и контрольные работы к двухуровневому учебнику «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: базовый и профильный уровни» Е.П. Нелина, В.А. Лазарева. Пособие также можно использовать при работе по любому учебнику и для самообразования, например, при подготовке к решению заданий ЕГЭ.

Предлагаемые работы состоят из 6 вариантов трех уровней сложности и предназначены для организации дифференцированной самостоятельной работы учащихся.

УДК 372.8:[512+517]

ББК 74.262.21

© Ершова А.П.,
Нелин Е.П., 2012

© ООО «Илекса», 2012

ISBN 978-5-89237-358-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое пособие в первую очередь предназначено для учителей и учащихся, работающих по двухуровневому учебнику «Нелин Е.П., Лазарев В.А. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: базовый и профильный уровни» (издательство «Илекса»), но может использоваться и при работе по другим учебникам алгебры и начал математического анализа, особенно при подготовке учащихся к решению заданий ЕГЭ и ГИА.

Основные особенности предлагаемого сборника самостоятельных и контрольных работ:

1. Сборник содержит *полный набор самостоятельных и контрольных работ по всему курсу алгебры и начал математического анализа 11 класса*, как базового, так и профильного уровней.

Контрольные работы рассчитаны на один урок, самостоятельные работы — на 25—40 минут, в зависимости от темы и уровня подготовки учащихся.

2. Сборник позволяет осуществить дифференцированный контроль знаний, так как задания распределены по трем уровням сложности А, Б и В. Задания уровня А предназначены для учащихся, которые обучаются по программе базового уровня, а задания уровней Б и В — для учащихся, которые обучаются по программе профильного уровня. Задания уровня В предназначены для учащихся, проявляющих повышенный интерес к математике, а также для использования в классах, школах, гимназиях и лицеях с углубленным изучением математики. Для каждого уровня приведено два расположенных рядом равноценных варианта (как они обычно записываются на доске), поэтому на уроке достаточно одной книги на парте.

3. В книгу включены также домашние самостоятельные и практические работы, содержащие творческие, нестандартные задачи по каждой изучаемой теме, а также задачи повышенной сложности. Эти задания могут в полном объеме или частично предлагаться учащимся в качестве зачетных, а также использоваться как дополнительные задания для проведения контрольных работ. По усмотрению учителя выполнение нескольких или даже одного такого задания может оцениваться отличной оценкой.

Ответы к контрольным и домашним самостоятельным работам приводятся в конце книги.

При использовании сборника следует также учесть следующее. Во-первых, провести все самостоятельные работы с выставлением оценки со всем классом скорее всего не удастся, да это и не требуется. Некоторые из них можно использовать как домашние задания на оценку или как дополнительные задания на оценку заинтересованным учащимся (на уроке или дома). Самостоятельные работы отнесены к соответствующим темам, но могут использоваться и при изучении других тем (например, для организации повторения изученного через некоторый промежуток времени).

Во-вторых, многие самостоятельные работы и все контрольные работы избыточны по объему; предполагается, что учитель самостоятельно отберет из них часть заданий с учетом уровня подготовки учащихся по предмету и времени, отводимого на выполнение работы.

Для удобства пользования книгой в приложении приводится ориентировочное тематическое планирование по учебнику «Нелин Е.П., Лазарев В.А. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: базовый и профильный уровни», включающее возможное распределение предлагаемых самостоятельных и контрольных работ.

Наш адрес в Интернете: www.ilexa.ru.

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

С-1. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ

Вариант А1

1

Выясните, к какому числу
стремится функция $f(x)$,
если:

$$f(x) = x^2 + 3x - 8 \text{ при } x \rightarrow -1.$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 \text{ при } x \rightarrow 2.$$

2

Найдите предел функции
в точке:

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x}{x - 5}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 4}{x - 4}.$$

3

Является ли функция
непрерывной в каждой точке
данного промежутка:

$$y = x^5 - 2x^3 - 12, (-\infty; +\infty)?$$

$$y = 15 - x^2 + 2x^4, (-\infty; +\infty)?$$

4

Решите неравенство методом
интервалов:

$$(2x - x^2) \log_{\frac{1}{2}} x \geq 0.$$

$$(9 - x^2) \log_3 x \leq 0.$$

Вариант Б 1**1**

Выясните, к какому числу
стремится функция $f(x)$,
если:

$$f(x) = \frac{2x + 26}{x - x^3} \text{ при } x \rightarrow 2.$$

$$f(x) = \frac{29 - x}{x^2 - 2x} \text{ при } x \rightarrow -1.$$

2

Найдите предел функции
в точке:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2}{x^2 - 4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 25}{5 - x}.$$

3

Является ли функция
непрерывной в каждой точке
данного промежутка:

$$y = \frac{7 - x}{x - 5}, (6; +\infty)?$$

$$y = \frac{x + 4}{x - 3}, (-\infty; -4]??$$

4

Решите неравенство методом
интервалов:

$$\frac{\log_3(x - 1)}{x^2 - 8x + 15} \geq 0.$$

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{\log_4(x + 2)} \leq 0.$$

Вариант В 1**1**

Докажите, что данное число
является иррациональным:

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}.$$

$$\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}.$$

2

Найдите предел функции
в точке:

$$\lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{2x - 1}{4x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0,125} \frac{64x^2 - 1}{1 - 8x}$$

3

Является ли функция
непрерывной в каждой точке
данного промежутка:

$$y = \frac{x - 2}{2x - 7}, [3; +\infty)?$$

$$y = \frac{x + 1}{4x + 9}, (-\infty; -2)?$$

4

Найдите область определения
функции:

$$y = \sqrt{\frac{\log_{0,5}(x + 1)}{x^4 - 13x^2 + 36}}$$

$$y = \left(\frac{x^3 + 3x^2 - 4x}{\log_2(x + 3)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

С-2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Вариант Б 1Вариант Б 2**1**

Найдите предел числовой
последовательности:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 4}$;

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3 - 2}$;

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n + 2}{n^2 + 1}.$$

$$6) \lim_{n \rightarrow -2} \frac{n^2 + n - 2}{4n^2 + 1}.$$

2

Вычислите предел:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 + x};$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 4}{x^2 - 2};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - x^2}{4 - x};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x}{3 \sin x};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{2x^3 + x}.$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^3}{3x^2 + 5x}.$$

3

Пользуясь определением непрерывности функции в точке, докажите, что

функция $f(x) = x + \frac{1}{x}$ непрерывна в точке $x_0 = -1$, но не является непрерывной в точке $x_1 = 0$.

функция $g(x) = \frac{x}{x - 2}$ непрерывна в точке $x_0 = 3$, но не является непрерывной в точке $x_1 = 2$.

Вариант В 1

1

Найдите предел числовой последовательности:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2 + 2};$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^3 - 1};$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - 3n}{n + 4};$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3}{5 - 4n};$$

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$.

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 2n})$.

2

Вычислите предел:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{x^2+2}}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 5x + 2}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{\sin x}$.

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{\sin 2x}$.

3Определите, является ли
непрерывной функция:

а) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ в точке $x_0 = 1$;

а) $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$ в точке $x_0 = -2$;

б) $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{при } x \leq -1, \\ 3x+4, & \text{при } x \geq -1 \end{cases}$
в точке $x_0 = -1$.

б) $g(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{при } x < 1, \\ x^2-2, & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$
в точке $x_0 = 1$.

С-3. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ**Вариант А1****Вариант А2****1**

Найдите асимптоты графика функции (если они существуют):

$$y = -3x + \frac{5}{x}$$

$$y = 2x - \frac{3}{x}$$

2

Среди данных функций выберите те, графики которых имеют:

- вертикальные асимптоты,
- горизонтальные асимптоты,
- наклонные асимптоты

(и объясните полученный ответ):

а) $y = -\frac{4}{x}$;

а) $y = \frac{7}{x}$;

б) $y = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$;

б) $y = \frac{3 - 5x^2}{x^2}$;

в) $y = \frac{x^2}{x+1}$.

в) $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Вариант Б 1**1**

Найдите асимптоты графика функции (если они существуют):

а) $y = \frac{x+3}{x-2}$;

а) $y = \frac{7-x}{x+3}$;

б) $y = \frac{4-x-x^2}{x}$.

б) $y = \frac{x^2+x-2}{x}$.

2

Среди данных функций выберите те, графики которых имеют:

- вертикальные асимптоты,
- горизонтальные асимптоты,
- наклонные асимптоты:

а) $y = x^3 + 5x^2 - 7x + 2$;

а) $y = \frac{x^2 - 7x + 1}{x^2 + 1}$;

б) $y = \frac{x^2 - 2x}{x}$;

б) $y = \frac{4}{5-x}$;

в) $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4}$;

в) $y = \frac{x^2 + 3x}{2x}$;

г) $y = \frac{6}{x-3}$.

г) $y = \sqrt{8x-2}$.

Вариант В 1**Вариант В 2****1**

Найдите асимптоты графика функции
(если они существуют):

а) $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$;

а) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x}$;

б) $y = \frac{6 - x - x^2}{x}$.

б) $y = \frac{3 - x^2}{x^2 - 9}$.

2

Среди данных функций выберите те,
графики которых имеют:

- вертикальные асимптоты,
- горизонтальные асимптоты,
- наклонные асимптоты:

а) $y = \frac{2 + x^2 - x^3}{x^2}$;

а) $y = \frac{7x}{\sqrt{x^2 + 7}}$;

б) $y = \frac{\sqrt{4x^4 - 1}}{x^2 + 3}$;

б) $y = \frac{8x}{3 - 2x - x^2}$;

в) $y = \frac{6 - x}{x^2 - 5x + 4}$;

в) $y = \frac{x^5 + x^2 - 8}{x^4 - 16}$;

г) $y = \sqrt{x^2 + x}$.

г) $y = \sqrt{4x^2 + 3x + 5}$.

С-4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ПРОСТЕЙШИЕ ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Вариант А 1

1

Найдите приращение функции:

$$f(x) = 2x - 3,$$

$$\text{если } x_0 = 1, \Delta x = 0, 2.$$

2

Найдите производную функции:

$$\text{а) } f(x) = 2x^5 - \frac{4}{x^2};$$

$$\text{б) } f(x) = (2\sqrt{x} + 1) \cdot x^3.$$

3

Решите уравнение $f'(x) = 0$,

если:

$$\text{а) } f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2};$$

$$\text{б) } f(x) = 4x + \frac{1}{x} - \sqrt{5}.$$

4

Решите неравенство

$$f'(x) > 0, \text{ если:}$$

$$f(x) = 8x - x^2 - \frac{x^3}{3}.$$

Вариант А 2

$$f(x) = 3x + 1,$$

$$\text{если } x_0 = -2, \Delta x = 0, 1.$$

$$\text{а) } f(x) = 3x^4 + \frac{2}{x^3};$$

$$\text{б) } f(x) = (3\sqrt{x} - 2) \cdot x^2.$$

$$\text{а) } f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 2};$$

$$\text{б) } f(x) = -\frac{1}{x} - 9x + \sqrt{2}.$$

$$f'(x) < 0, \text{ если:}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + x^2 - 6x.$$

5

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 , если:

$$f(x) = x^3, x_0 = 1.$$

$$f(x) = x^4, x_0 = 2.$$

Вариант Б 1**1**

Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x)$ в точке x_0 :

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - x, x_0 = 2.$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x, x_0 = -1.$$

2

Найдите производную функции:

а) $f(x) = x\sqrt{x} - 8x^3;$

а) $f(x) = 3x^5 + x^2\sqrt{x};$

б) $f(x) = \left(3 - \frac{4}{x^4}\right)(x^2 + 1).$

б) $f(x) = \left(2 + \frac{3}{x^3}\right)(x - 1).$

3

Составьте и решите уравнение:

а) $f'(x) = f'(-2),$

а) $f'(x) = f'(6),$

если $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 4};$

если $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 4};$

б) $f'(x) = f(x) - 2x,$

б) $xf'(x) = f(x) + 4,$

если $f(x) = 2x + \frac{1}{x}.$

если $f(x) = x - \frac{1}{x}.$

4

Составьте и решите неравенство

$f(x) \cdot f'(x) \geq 0$, если:

$f(x) = x^2 - 2x - 3$.

$f(x) \cdot f'(x) \leq 0$, если:

$f(x) = x^2 - 4x + 3$.

5Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 , если:

$f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$, $x_0 = 2$.

$f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$.

Вариант В1**1**Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x)$ в каждой точке $D(f)$:

$f(x) = \sqrt{x-2}$.

$f(x) = \sqrt{x+1}$.

2

Найдите производную функции:

а) $f(x) = 4x^5 - \frac{2}{x\sqrt{x}}$;

а) $f(x) = \frac{4}{x^2\sqrt{x}} + 3x^6$;

б) $f(x) = \left(x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)(2 + 5x - 3x^2)$.

б) $f(x) = (15 - 2x - x^2)\left(2x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

3

Составьте и решите уравнение:

а) $|f(x)| = f'(x)$,

а) $|f(x)| = -f'(x)$,

если $f(x) = x^2 + x + 1$;

если $f(x) = -x^2 - 4x - 1$;

б) $f'(x) = f'(5) - f'(1),$

если $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}.$

б) $f'(x) = f'(-1) + f'(-5),$

если $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3}.$

4

Составьте и решите неравенство

$$\frac{f(x)}{f'(x)} \geq 0, \text{ если:}$$

$$f(x) = x^4 - 4x^2.$$

$$\frac{f(x)}{f'(x)} \leq 0, \text{ если:}$$

$$f(x) = 9x - x^3.$$

5Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 , если:

$$f(x) = \sqrt{4x - x^2}, \quad x_0 = 2.$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}, \quad x_0 = 1.$$

С-5. ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ И СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Вариант А 1

1

Найдите производную функции:

а) $f(x) = 2 - 2\cos x;$

б) $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x;$

в) $f(x) = 4^{x+4x^3};$

г) $f(x) = 2e^x - e^{-2x};$

Вариант А 2

а) $f(x) = 4\sin x - x;$

б) $f(x) = \frac{1}{4} \cos 4x;$

в) $f(x) = 3x^2 - 2^x;$

г) $f(x) = e^{2x} - 2e^x;$

д) $f(x) = 2 \ln(x + 1)$;

д) $f(x) = 3 \ln(x - 2)$;

е) $f(x) = \lg x + 1$

е) $f(x) = 2 - \lg x$.

2Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = (x^2 - 6x + 5)^2$;

а) $f(x) = (x^2 - 2x - 3)^2$;

б) $f(x) = \cos^2 \frac{x}{4} - \sin^2 \frac{x}{4}$.

б) $f(x) = 4 \sin \frac{x}{8} \cos \frac{x}{8}$.

3Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 , если:

$f(x) = e^{x^2}, x_0 = 0$.

$f(x) = e^{-4x}, x_0 = 0$.

4Определите, при каких значениях x верно равенство:

$$\left(\ln(x^2 - x - 2)\right)' = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2}.$$

$$\left(\ln(3 - 2x - x^2)\right)' = \frac{2x + 1}{3 - 2x - x^2}.$$

Вариант Б 1**1**

Найдите производную функции:

а) $f(x) = \sin 3x - \operatorname{tg} x$;

а) $f(x) = \cos 4x + \operatorname{ctg} x$;

б) $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $f(x) = x \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$;

в) $f(x) = 3e^x - 3^x$;

в) $f(x) = 2^x + 2e^x$;

г) $f(x) = e^{2\sqrt{x}} + 0,5^{-x}$;

г) $f(x) = e^{x^2} - x - 0,2^{-x}$;

д) $f(x) = -3 \ln \frac{x+1}{3}$;

д) $f(x) = 4 \ln \frac{x+3}{2}$;

е) $f(x) = \log_2 \cos x$.

е) $f(x) = \log_3 \sin x$.

2Решите уравнение $f'(x) = 0$, если

а) $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$;

а) $f(x) = \sqrt{x^3 + \frac{243}{x}}$;

б) $f(x) = \cos 5x \cos 3x +$
 $+ \sin 5x \sin 3x - x$.

б) $f(x) = \sin 4x \cos x -$
 $- \cos 4x \sin x + 1,5x$.

3Составьте уравнение касательной
к графику функции $f(x)$ в точке x_0 , если:

$f(x) = e^{\cos x}$, $x_0 = 0$.

$f(x) = e^{\sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

4Определите, совпадает ли
область определения функции $g(x)$
с областью определения ее
производной, если:

$g(x) = \ln(9x^2 + 6x + 1)$.

$g(x) = \ln(8 - x) + 4\sqrt{4 - 0,5x}$.

Вариант В 1**Вариант В 2****1**

Найдите производную функции:

а) $f(x) = \frac{1}{\cos^3 \frac{x}{3}}$;

а) $f(x) = \frac{1}{\sin^4 \frac{x}{2}}$;

б) $f(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$;

б) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;

в) $f(x) = \sin e^{\sqrt{x}} - 2^{2x-x^2}$;

г) $f(x) = e^{\operatorname{tg} x} \sin^2 x$;

д) $f(x) = \lg \frac{x}{x+2}$;

е) $f(x) = x^{\ln x}$.

в) $f(x) = \cos e^{x^2-x} + 3^{\sqrt{2x+1}}$;

г) $f(x) = e^{\operatorname{ctg} x} \cos^2 x$;

д) $f(x) = \ln \frac{3x^2+2}{x^2+1}$;

е) $f(x) = \log_x e^x$.

2

Решите уравнения

$$(f(g(x)))' = 0 \text{ и } (g(f(x)))' = 0, \text{ если:}$$

$$f(x) = x^2 - x \text{ и } g(x) = \frac{1}{x}.$$

$$f(x) = x^2 - 4x \text{ и } g(x) = \sqrt{x}.$$

3Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке, в которой угловой коэффициент равен k , если:

$$f(x) = e^{3x-2}, k = 3.$$

$$f(x) = e^{5-2x}, k = -2.$$

4Найдите все значения a , при которых область определения функции $g(x)$ совпадает с областью определения ее производной, если:

$$g(x) = \ln(ax^2 - (a+1)x + 2a - 1). \quad g(x) = \ln(ax^2 + 4x + a + 3).$$

С-6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Вариант А 1

Вариант А 2

1Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 :

$$\text{а) } f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \\ x_0 = -1;$$

$$\text{а) } f(x) = 2x^2 + 8x - 3, \\ x_0 = -3;$$

$$\text{б) } f(x) = 4 \cos x + x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{б) } f(x) = 2x - 3 \sin x, \quad x_0 = \pi.$$

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке M :

$$\text{а) } f(x) = 2x^2 + \frac{1}{3}x^3, \quad M(-3; 9);$$

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x, \quad M(3; 3);$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad M(2; 3).$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad M(-2; 3).$$

3

Тело движется по закону

$$x(t) = t^4 + 0,5t^2 - 3t$$

$$x(t) = t^3 - 2t^2 + 5$$

(x — в метрах, t — в секундах).

Найдите скорость и ускорение тела через 2 с после начала движения.

4

На графике функции $f(x)$ найдите точку, в которой касательная к $f(x)$ наклонена к оси абсцисс под углом α , если:

$$f(x) = \sqrt{2x-1}, \quad \alpha = 45^\circ.$$

$$f(x) = \sqrt{4x+8}, \quad \alpha = 45^\circ.$$

В а р и а н т Б 1**1**

Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 , если:

В а р и а н т Б 2

$$\text{а) } f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + x), \\ x_0 = -1;$$

$$\text{а) } f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - x), \\ x_0 = 1;$$

$$\text{б) } f(x) = \sin^2 x, x_0 = \frac{\pi}{12}.$$

$$\text{б) } f(x) = \cos^2 x, x_0 = -\frac{\pi}{12}.$$

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 :

$$\text{а) } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}, x_0 = 2;$$

$$\text{а) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}, x_0 = -2;$$

$$\text{б) } f(x) = \cos(1 + 4x), x_0 = -0,25.$$

$$\text{б) } f(x) = \sin(1 - 2x), x_0 = 0,5.$$

3

Тело массой m кг движется по закону $x(t)$ (x — в метрах, t — в секундах). Найдите силу, действующую на тело в момент времени t_0 , если:

$$m = 3, t_0 = 2,$$

$$x(t) = 0,25t^4 + \frac{1}{3}t^3 - 7t + 2.$$

$$m = 2, t_0 = 3,$$

$$x(t) = 2t^3 - 6t^2 + t + 3.$$

4

На графике функции

$$g(x) = \sqrt{8x - x^2}$$

$$g(x) = \sqrt{-x^2 - 10x}$$

найдите точку, в которой касательная к графику параллельна оси абсцисс.

В а р и а н т В 1

1

Найдите угол между осью абсцисс и касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 , если:

В а р и а н т В 2

а) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6}$, $x_0 = \sqrt{3}$;

а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6}$, $x_0 = 3$;

б) $f(x) = -x \cos 2x$, $x_0 = 0$.

б) $f(x) = -x \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 , если:

а) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$, x_0 — точка

а) $f(x) = \frac{3x^2+2}{x-1}$, x_0 — точка

пересечения графика с осью абсцисс;

пересечения графика с осью ординат;

б) $f(x) = (7-3x)^3$, x_0 — точка пересечения графика с прямой $y = 1$.

б) $f(x) = (4x+3)^5$, x_0 — точка пересечения графика с прямой $y = -1$.

3

Из точки A вдоль координатных осей Ox и Oy движутся два тела по законам:

$$x(t) = \sqrt{t^4 + 3},$$

$$x(t) = \sqrt{3t^4 + 4t^2},$$

$$y(t) = \sqrt{4t^2 + 1}, \quad A(\sqrt{3}; 1)$$

$$y(t) = \sqrt{t^4 + 1}, \quad A(0; 1)$$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

Определите, с какой скоростью они удаляются друг от друга.

4

На графике функции

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

найдите точки, в которых касательная параллельна прямой

$$y = x - 3.$$

$$y = 2x + 3.$$

С-7*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ АСИМПТОТ ГРАФИКА ФУНКЦИИ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

1

Изобразите схематически фрагмент графика функции $f(x)$ в окрестности точки разрыва x_0 (для каждого случая приведите пример такой функции), если:

а) $x_0 = 2,$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = 4;$$

б) $x_0 = 1, \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2;$$

в) $x_0 = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0;$$

г) $x_0 = -1, \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = +\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\infty.$$

Вариант 2

а) $x_0 = 3,$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = 6;$$

б) $x_0 = 2, \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = -1;$$

в) $x_0 = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty;$$

г) $x_0 = -2, \lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = -\infty;$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = +\infty.$$

2

Среди данных функций выберите те, которые имеют вертикальные асимптоты (ответ подтвердите доказательством) :

1) $y = \frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1};$

1) $y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4};$

$$2) y = \begin{cases} \sqrt{-x+1}, & \text{если } x \leq 1, \\ \frac{1}{1+x}, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

$$3) y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1};$$

$$4) y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x < 0, \\ 3x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} 2x^2 - 7, & \text{если } x \leq 2, \\ \frac{1}{x-2}, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

$$3) y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3};$$

$$4) y = \begin{cases} 2x + 2, & \text{если } x \leq -1, \\ \frac{1}{x+2}, & \text{если } x > -1. \end{cases}$$

3

Исследуйте функцию на наличие асимптот:

$$а) f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1};$$

$$а) f(x) = \frac{4x^3}{2x^2 + 1};$$

$$б) f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}};$$

$$б) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 4}};$$

$$в) f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2};$$

$$в) f(x) = \frac{2x}{x^2 + x - 6};$$

$$г) f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{1-x}};$$

$$г) f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x-1}};$$

$$д) f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}.$$

$$д) f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

К-1(КП-1). ПРОИЗВОДНАЯ

Вариант А1

Вариант А2

1

Найдите производную функции:

$$а) y = 2x^3 - \frac{x^2}{2} + 4;$$

$$а) y = 4x^5 + \frac{x^3}{3} - 2;$$

б) $y = 2 \cos x - 3 \operatorname{tg} x;$

б) $y = 4 \sin x - 5 \operatorname{ctg} x;$

в) $y = \frac{x-3}{x+2}.$

в) $y = \frac{x-2}{x+3}.$

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 , если:

$$f(x) = \frac{2}{x^2} - x, x_0 = -1.$$

$$f(x) = \frac{3}{x^3} + 2x, x_0 = 1.$$

3

Составьте и решите уравнение:

$$f'(x) = g'(x), \text{ если}$$

$$f(x) = (2x-1)^5, g(x) = 10x+7.$$

$$f'(x) = -g'(x), \text{ если}$$

$$f(x) = (3x-5)^4, g(x) = 96x-17.$$

4

Материальная точка движется по закону

$$x(t) = t^3 + 1$$

$$x(t) = t^4 + 3t$$

(x — в метрах, t — в секундах).

Определите

скорость точки в момент, когда ее координата равна 9 м.

координату точки в момент, когда ее скорость равна 7 м/с.

5

Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции

$g(x) = \frac{1}{2-3x}$ в точке с ординатой -1 .

$g(x) = \frac{2}{1-x}$ в точке с ординатой 1 .

Вариант Б1**1**

Найдите производную функции:

а) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{x^4} + 8\sqrt{x}$;

б) $y = (x^2 + 1) \cos x$;

в) $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$.

2Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 , если:

$f(x) = \frac{1}{(2x - 1)^2}, x_0 = 1.$

$f(x) = \frac{1}{(3x - 8)^2}, x_0 = 3.$

3

Составьте и решите уравнение:

$$f'(x) = -g'(x), \text{ если}$$

$$f(x) = \sin^2 x,$$

$$g(x) = \cos x + \cos \frac{\pi}{12}.$$

$$f'(x) = g'(x), \text{ если}$$

$$f(x) = \cos^2 x,$$

$$g(x) = \sin x - \sin \frac{\pi}{10}.$$

4

Материальная точка движется по закону

$x(t) = 5t + 6t^2 - t^3$

$x(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 2t - 4$

 $(x$ — в метрах, t — в секундах).

Определите

скорость точки в момент, когда ее ускорение равно нулю.

ускорение точки в момент, когда ее скорость равна 1 м/с.

5

Найдите острый угол, который образует с осью ординат касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_0 , если

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2}, x_0 = 1.$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6}, x_0 = 3.$$

Вариант В 1**Вариант В 2****1**

Найдите производную функции:

а) $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)$;

а) $f(x) = (x - 1)^2(x + 1)$;

б) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x - \cos 2x$;

б) $f(x) = \sin \frac{x}{3} - \operatorname{tg}^2 x$;

в) $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

в) $f(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8}}$.

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$, если ее угловой коэффициент равен k :

$$f(x) = \sqrt{2x + 1}, k = \frac{1}{3}.$$

$$f(x) = \sqrt{1 - 4x}, k = -\frac{2}{3}.$$

3

Составьте и решите неравенство:

$$f'(x) \geq g'(x), \text{ если}$$

$$f(x) = 16(3 - 2x)^4,$$

$$g(x) = \sqrt{3 - 2x}.$$

$$f'(x) \leq g'(x), \text{ если}$$

$$f(x) = 16(2x - 1)^3,$$

$$g(x) = 3\sqrt{2x - 1}.$$

4

Материальная точка движется по закону

$$x(t) = t^4 - 4t^3 + 12t^2 - 3$$

$$x(t) = 1 + 6t + 3t^2 - t^3$$

(x — в метрах, t — в секундах).

Определите

скорость точки в момент, когда ее ускорение минимально.

ускорение точки в момент, когда ее скорость максимальна.

5

Прямая проходит через точки

$A(-4; -2)$ и $B(0; 1)$.

$A(4; 6)$ и $B(0; 1)$.

Определите, в какой точке она касается графика функции

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}.$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x}.$$

С-8. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ НА МОНОТОННОСТЬ И ЭКСТРЕМУМЫ

В а р и а н т А 1

В а р и а н т А 2

1

Найдите критические точки функции:

а) $f(x) = x^3 + 6x^2$;

а) $f(x) = 12x - x^3$;

б) $f(x) = 2 \sin x - x$.

б) $f(x) = x + \sqrt{2} \cos x$.

2

Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1.$$

$$f(x) = 3 + 24x - 3x^2 - x^3.$$

3

Найдите точки экстремума функции:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}.$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}.$$

4

Докажите, что функция $g(x)$ на множестве R является

возрастающей, если

$$g(x) = 2x^5 + 4x^3 + 3x - 7.$$

убывающей, если

$$g(x) = 5 - 2x - x^3 - 4x^7.$$

Вариант Б 1

1

Найдите критические точки функции:

а) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 7;$

б) $f(x) = \cos 2x - \sqrt{3}x + \frac{\pi}{4}.$

Вариант Б 2

а) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1;$

б) $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \frac{x}{2\sqrt{2}} - \pi.$

2

Найдите промежутки монотонности функции:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 4}.$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 4}.$$

3

Найдите точки экстремума функции:

$$f(x) = (x + 1)^2(x + 5)^2.$$

$$f(x) = (x + 3)^2(x - 5)^2.$$

4

Докажите, что функция $g(x)$ на множестве R является возрастающей (убывающей), и определите, какой именно:

$$g(x) = 4x + \sin^2 x.$$

$$g(x) = \cos^2 x - 3x.$$

Вариант В 1

1

Найдите критические точки функции:

Вариант В 2

а) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$;

а) $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$;

б) $f(x) = x^2 - 4|x|$.

б) $f(x) = |2x + x^2|$.

2

Найдите промежутки монотонности функции:

$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$.

$f(x) = \sqrt{4x - x^2}$.

3

Найдите точки экстремума функции:

$f(x) = x^5 - 15x^3 + 8$.

$f(x) = 35x^7 - x^5 + 1$.

4

Определите, при каких значениях a функция $g(x)$ на каждом из промежутков $D(g)$ является

строго убывающей, если

$g(x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + ax$.

строго возрастающей, если

$g(x) = \operatorname{tg} 3x - ax$.

С-9. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ, ЛОГАРИФИЧЕСКИХ И СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА МОНОТОННОСТЬ И ЭКСТРЕМУМЫ

Вариант А 1

1

Найдите критические точки функции:

$f(x) = x^2 e^x$.

$f(x) = \frac{x^2}{e^x}$.

Вариант А 2

2

Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

$$f(x) = \ln(x^2 + 4).$$

$$f(x) = \ln(1 + x^4).$$

3

Постройте схематически график функции на промежутке $(0; \infty)$:

$$а) y = x^{\sqrt{5}-2};$$

$$а) y = x^{1-\sqrt{2}};$$

$$б) y = x^{\frac{e}{2}}.$$

$$б) y = x^{\frac{\pi}{3}}.$$

В а р и а н т Б 1

1

Найдите промежутки монотонности функции:

$$f(x) = xe^{1-2x^2}.$$

$$f(x) = x^2e^{2x-1}.$$

2

Найдите точки экстремума функции:

$$f(x) = \ln x^3 + \frac{6}{x}.$$

$$f(x) = \ln \frac{1}{x} - \frac{3}{x}.$$

3

Постройте схематически график функции:

$$а) y = x^{2\sin\frac{\pi}{4}};$$

$$а) y = x^{\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}};$$

$$б) y = x^{\ln 0.5}.$$

$$б) y = x^{\ln 2}.$$

В а р и а н т В 1

1

Найдите точки экстремума и экстремумы функции:

В а р и а н т В 2

$$f(x) = \frac{1}{x^2 e^x}.$$

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2}.$$

②

Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы:

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln x}.$$

$$f(x) = \frac{x}{\ln^2 x}.$$

③

Постройте схематически график функции:

а) $y = x^{\frac{1}{\ln 3}}$; б) $y = \left(\frac{x}{3}\right)^{2 \sin \frac{\pi}{5}}$.

а) $y = x^{\frac{1}{\lg 5}}$; б) $y = (4x)^{\cos \frac{3\pi}{5}}$.

С-10*. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ (домашняя практическая работа)

Исследуйте функцию и постройте ее график:

Уровень А

1) $y = x^3 - 3x$;

5) $y = \frac{2x+1}{x-1}$;

9) $y = \frac{1}{x^2+1}$;

2) $y = x^3 - 4x^2 + 3$;

6) $y = \frac{2x-3}{x+1}$;

10) $y = x + \frac{4}{x}$;

3) $y = (x-2)^4$;

7) $y = \frac{1}{x^2-3x}$;

11) $y = \frac{x+3}{x^2-9}$;

4) $y = 4x^2 - x^4$;

8) $y = \frac{1}{4-x^2}$;

12) $y = \frac{x^2-25}{x+5}$.

Уровень Б

1) $y = 0,5x^2 - 0,2x^5$;

5) $y = \frac{x}{(x-1)^2}$;

9) $y = \frac{x}{4-x^2}$;

2) $y = x(x-1)^2$;

6) $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$;

10) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$;

3) $y = x^2(x-2)^2$;

7) $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$;

11) $y = x\sqrt{2-x}$;

4) $y = -x^2(x+4)^2$;

8) $y = \frac{x+2}{x^2-9}$;

12) $y = (x-1)\sqrt{x}$.

Уровень В

1) $y = 3x^4 - 4x^3 + 2$;

5) $y = \frac{7x}{2x^2 - 3x - 2}$;

9) $y = \frac{2x+1}{\sqrt{x-1}}$;

2) $y = (x^2 - 1)^3$;

6) $y = \frac{16}{x^3 - 4x}$;

10) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$;

3) $y = x^2 - \frac{2}{x}$;

7) $y = \frac{1-x}{(x-2)^3}$;

11) $y = 2\sin x - \cos 2x$;

4) $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$;

8) $y = x^2\sqrt{x+1}$;

12) $y = \sin x - \cos x + x$.

С-11. НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ**Вариант А 1****Вариант А 2****1**

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

а) $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3$, $[-2; 0]$;

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$, $[0; 3]$;

б) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $[0; 2]$.

б) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$, $[1; 3]$.

в) $f(x) = x^{-3}$, $[1; 3]$.

в) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $[1; 8]$.

2

Тело, брошенное вертикально вверх, движется по закону

$$h(t) = 8t - t^2$$

$$h(t) = 12t - 0,5t^2$$

(h — в метрах, t — в секундах).

Определите, в какой момент времени тело достигнет наибольшей высоты и каково будет ее значение в этот момент.

3

Представьте число 12 в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы

их произведение было наибольшим.

сумма их квадратов была наименьшей.

Вариант Б 1**Вариант Б 2****1**

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

а) $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)$, $[-2; 0]$;

а) $f(x) = (1 - x^2)(x - 1)$, $[0; 2]$;

б) $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x + 1}$, $[0; 3]$.

б) $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$, $[-3; 0]$.

в) $f(x) = 2x - 3x^{\frac{2}{3}}$, $[0; 8]$.

в) $f(x) = 4x^{\frac{3}{4}} - 3x$, $[0; 16]$.

2

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = 18t^2 - t^3$$

$$x(t) = t^3 - 12t^2 + 60t$$

(x — в метрах, t — в секундах).

Определите, в какой момент времени из промежутка $[4; 8]$ из промежутка $[1; 5]$ скорость точки будет наибольшей, и найдите значение скорости в этот момент.

③

Из всех прямоугольников с диагональю 18 см найдите прямоугольник наибольшей площади.

③

Из всех прямоугольников с площадью 16 см² найдите прямоугольник с наименьшим периметром.

Вариант В 1

①

Найдите множество, на которое функция $f(x)$ отображает данный промежуток:

а) $f(x) = |x^2 - 2x - 8|, [0; 5];$

а) $f(x) = x^2 - 4|x| - 5, [-1; 3];$

б) $f(x) = x + \cos^2 x, \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right].$

б) $f(x) = x - \sin^2 x, [0; \pi].$

в) $f(x) = \ln x - \sqrt[3]{x}, [1; 64].$

в) $f(x) = \sqrt[4]{x} - \frac{1}{2} \ln x, [1; 81].$

②

Найдите кратчайшее расстояние от точки A до графика функции $f(x)$, если:

$A(1; 0), f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}.$

$A(-3; 0), f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 6}.$

③

Среди всех равнобедренных треугольников

с боковой стороной a найдите треугольник наибольшей площади.

с данным периметром $2P$ найдите треугольник наибольшей площади.

С-12*. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

1

Исследуйте функцию и постройте
ее график:

а) $f(x) = \sqrt[3]{4 - x^2}$;

б) $f(x) = xe^{-x^2}$;

в) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;

г) $f(x) = \ln \sin x$;

д) $f(x) = x^2 \ln^2 x$;

е) $f(x) = \log_2(4x - x^2)$.

Вариант 2

а) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$;

б) $f(x) = x^2 e^{-x}$;

в) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;

г) $f(x) = \ln \cos x$;

д) $f(x) = x \ln x$;

е) $f(x) = \log_2(4 - x^2)$.

2

Составьте уравнение касательной к
графику функции $f(x)$, проходящей
через точку M , не принадлежащую
данному графику, если

$f(x) = -x^2 - 5x - 6$, $M(-1; -1)$.

$f(x) = x^2 - 4$, $M(2; -1)$.

3

Найдите уравнение общей касательной
к графикам функций:

$f(x) = x^2 - 2x + 5$,

$g(x) = x^2 + 2x - 11$.

$f(x) = x^2 + 4x + 8$,

$g(x) = x^2 + 8x + 4$.

4

Составьте уравнение касательной
к графику функции $f(x)$, перпенди-
кулярной к прямой $g(x)$, если:

$$f(x) = x^2 + 2x, \quad g(x) = x - 7.$$

$$f(x) = -x^2 - 3, \quad g(x) = x + 3.$$

5

К графику функции $f(x)$ проведены две касательные в точках x_1 и x_2 .

Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными и

осью абсцисс, если

$$f(x) = 4x - x^2, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4.$$

осью ординат, если

$$f(x) = -8x - x^2, \quad x_1 = -6, \quad x_2 = 1.$$

6

Найдите угол при вершине равнобедренного треугольника с заданной площадью, в который можно вписать окружность наибольшего радиуса.

6

В равнобедренный треугольник вписана окружность радиуса r . Каким должен быть угол при основании, чтобы площадь треугольника была наименьшей?

7

Определите количество корней уравнения:

$$3x - x^3 - 1 = 0.$$

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$$

К-2 (КП-2). ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Вариант А 1

1

Найдите критические точки функции:

а) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3;$

а) $f(x) = 2 + 18x^2 - x^4;$

б) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 4}.$

б) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 4}.$

2

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

$$f(x) = e^{x^2-2x}, [0; 2].$$

$$f(x) = e^{4x-x^2}, [0; 4].$$

3

Исследуйте функцию и постройте ее график:

$$y = x^3 - 3x^2.$$

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x.$$

4

Найдите число,

которое в сумме со своим квадратом давало бы наименьшую величину.

разность которого со своим квадратом была бы наибольшей.

Вариант Б 1

1

Найдите промежутки монотонности функции:

$$а) f(x) = \frac{(x-2)^2}{x+1};$$

$$б) f(x) = \sqrt{x} - x.$$

Вариант Б 2

$$а) f(x) = \frac{(x+2)^2}{x-1};$$

$$б) f(x) = x - 4\sqrt{x}.$$

2

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

$$f(x) = x^2 e^{2x}, [-2; 1].$$

$$f(x) = \frac{x^2}{e^{2x}}, [-1; 2].$$

3

Исследуйте функцию и постройте ее график:

$$y = \frac{4x}{1+x^2}.$$

$$y = \frac{4}{x^2+1}.$$

4

Представьте

число 12 в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение куба одного из них на удвоенное второе было наибольшим.

число 20 в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение одного из них на куб другого было наибольшим.

Вариант В 1

1

Найдите точки экстремума функции:

а) $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$;

а) $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$;

б) $f(x) = \sin^2 x - \cos x$.

б) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$.

2

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

$$f(x) = \ln \frac{2-4x}{2+x^2}, \quad [-4; 0].$$

$$f(x) = \ln \frac{2x-1}{x^2+2}, \quad [1; 5].$$

3

Исследуйте функцию и постройте ее график:

$$y = \frac{4x^2+1}{x}.$$

$$y = -\frac{9x^2+1}{x}.$$

4

Известно, что

наименьшее значение функции $g(x) = 3x^2 - x^3$ на промежутке $[-1; a]$ равно нулю.

При каком максимальном значении a выполняется это условие?

наибольшее значение функции $g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ на промежутке $[a; 0]$ равно 1.

При каком минимальном значении a выполняется это условие?

С-13. ПРОИЗВОДНЫЕ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Вариант Б 1

1

Найдите производную данной функции:

а) $f(x) = \arcsin 2x + \operatorname{arctg} x$;

б) $f(x) = \arccos^3 x^2$.

Вариант Б 2

а) $f(x) = \arccos x - \operatorname{arctg} 3x$;

б) $f(x) = \operatorname{arcctg}^2 x^3$.

2

Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 , если:

$f(x) = \arccos x, x_0 = 0.$

$f(x) = \arcsin 2x, x_0 = 0.$

3

Докажите тождество, используя производную:

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \pi, x < 0.$$

$$\operatorname{arcctg} x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, x < 0.$$

Вариант В 1**1**

Найдите производную данной функции:

а) $f(x) = x^3 \operatorname{arctg} 4x$;

б) $f(x) = \arccos(\sqrt{\sin x})$.

Вариант В 2

а) $f(x) = x^7 \operatorname{arctg} 7x$;

б) $f(x) = \arcsin(\sqrt{\cos x})$.

2

Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 , если:

$f(x) = \arcsin \frac{x}{2}, x_0 = 1.$

$f(x) = \arccos 3x, x_0 = \frac{1}{6}.$

3

Докажите тождество, используя производную:

$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \geq 0.$

$\operatorname{arctg} x = -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$

$x \leq 0.$

С-14. ВЫПУКЛОСТЬ И ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ФУНКЦИИ. РАСШИРЕННАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

Вариант Б 1**1**

Исследуйте функцию на выпуклость и точки перегиба:

а) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 10x + 11$;

б) $f(x) = \sin x - x, x \in [0; 4\pi]$;

Вариант Б 2

а) $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 3x - 24$;

б) $f(x) = x - \cos x, x \in [0; 3\pi]$;

в) $f(x) = e^x (x^2 + 1)$.

в) $f(x) = e^x (x^2 + x + 2)$.

2

Исследуйте функцию по расширенной схеме и постройте ее график:

$$y = \frac{x^2}{x+1}.$$

$$y = \frac{x^2}{x-1}.$$

Вариант В 1**Вариант В 2****1**

Исследуйте функцию на выпуклость и точки перегиба:

а) $f(x) = \frac{x^3 + 4x - 1}{x}$;

а) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x}$;

б) $f(x) = \sin 2x - x^2$;

б) $f(x) = \cos 2x + x^2$;

в) $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}$.

в) $f(x) = x^2 \ln x^2$.

2

Исследуйте функцию по расширенной схеме и постройте ее график:

$$y = \frac{x^2 + 3x}{x-1}.$$

$$y = \frac{3x - x^2}{x+1}.$$

С-15. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ И К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ НЕРАВЕНСТВ

Вариант А 1**Вариант А 2****1**

Решите уравнение:

$$3x - \sin 2x = 6\pi.$$

$$\cos 3x + 4x = 2\pi.$$

2

Решите неравенство:

$$2x^5 - 3x^3 \geq 3 - 4x.$$

$$x^5 + 4x < 2x^3 - 3.$$

3

Докажите неравенство:

$$\sin x > x \text{ при } x < 0.$$

$$\operatorname{arctg} x \leq x \text{ при } x \geq 0.$$

Вариант Б 1**1**

Решите уравнение:

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = x^2 - 8x + 18.$$

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{7-x} = x^2 - 8x + 14.$$

2

Решите неравенство:

$$x^7 \geq 2x^4 - 9x - 12.$$

$$2x^7 + 5x \leq 8 - x^4.$$

3

Докажите неравенство:

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \text{ при } x > 0.$$

$$\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1} \text{ при } x > 1.$$

Вариант В 1**1**

Решите уравнение:

$$2^x + 2^{4-x} = 8 \cos \pi x.$$

$$5^x + 5^{2-x} = 7 \cos 2\pi x + 3.$$

2

Решите неравенство:

$$\log_3(5-2x) \leq 3x-2.$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(6-x) \geq 2-2x.$$

3

Докажите неравенство:

$$\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3} \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{arctg} x > x - \frac{x^3}{3} \text{ при } x > 0.$$

(КП-3). ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Вариант Б1

1

Решите уравнение, подобрав один или два корня, и доказав, что других корней нет:

а) $x^7 - x^4 + x + 3 = 0$;

б) $x^6 - 63x + 62 = 0$.

Вариант Б2

2

Решите неравенство (предварительно исследовав функцию, стоящую в левой части, на монотонность):

$$3^{x+1} - 3\sqrt{-x} + 2 > 0.$$

$$0, 3^x - \sqrt{x} - 1 > 0.$$

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - \sin x = 5y - \sin y, \\ 2x + 3 = y^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \cos x = 2y + \cos y, \\ x^2 = y + 2. \end{cases}$$

4*

Найдите все значения a , при которых данное уравнение имеет хотя бы один корень:

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = a.$$

$$2x^3 - x^4 - x^2 = a.$$

Вариант В 1**1**

Решите уравнение:

а) $x^9 - 2x^5 + 5x + 4 = 0$;

б) $2^{x+2} - 4x = 4$.

2

Решите неравенство:

$3^{\sqrt{x}} + x^2 - 25 \leq 0$.

$\ln x + x^4 - 1 \leq 0$.

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 3x - 3y, \\ x^2 - x = y^2 - 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x - \cos y = 7y - 7x, \\ x^2 - 2 = y^2 + y. \end{cases}$$

4*

Найдите все значения a , при которых данное уравнение имеет хотя бы один корень:

$\sin^3 x - 3\cos^2 x = a - 3$.

$2\cos^3 x + 6\sin^2 x = a + 6$.

ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

С-16. ПЕРВООБРАЗНАЯ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНЫХ

Вариант А1

❶

Докажите, что функция F является первообразной для функции f на \mathbb{R} , если:

$$F(x) = x^2 - \sin 2x - 1, \\ f(x) = 2x - 2 \cos 2x.$$

$$F(x) = -\cos \frac{x}{2} - x^3 + 4, \\ f(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} - 3x^2.$$

❷

Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x) = x^2 - \sin x$;

а) $f(x) = 4x^3 + \cos x$;

б) $f(x) = 4 - \frac{2}{x^3}$.

б) $f(x) = \frac{4}{x^5} - 3$.

❸

Для функции f найдите первообразную F , принимающую заданное значение в указанной точке, если:

а) $f(x) = (x - 8)^3$, $F(8) = 1$;

а) $f(x) = (x + 4)^2$, $F(-4) = 3$;

$$б) f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}, F(9) = 9.$$

$$б) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, F(4) = 4.$$

Вариант Б 1

1

Определите, является ли функция F первообразной для функции f на R , если:

$$F(x) = 2x^4 + \cos^2 x - 3,$$

$$f(x) = 8x^3 + \sin 2x - 3x.$$

$$F(x) = 3x^5 - \sin^2 x + 2,$$

$$f(x) = 15x^4 - \sin 2x.$$

2

Найдите общий вид первообразных для функций:

$$а) f(x) = \frac{4}{x^5} - (1 - 2x)^3;$$

$$а) f(x) = (3x + 2)^4 - \frac{1}{x^6};$$

$$б) f(x) = x + \frac{2}{\cos^2 x} - 1.$$

$$б) f(x) = 2x - \frac{3}{\sin^2 x} + 6.$$

3

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку A , если:

$$а) f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2}} + 3x^2,$$

$$A(-1; 0);$$

$$а) f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}},$$

$$A(2; 0);$$

$$б) f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - 2 \cos \frac{x}{2},$$

$$A(2\pi; 2\pi).$$

$$б) f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + \frac{1}{3} \sin 3x, A\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right).$$

Вариант В 1**1**

Найдите функцию f ,
для которой функция F является
одной из первообразных на R ,
если:

$$F(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) - \\ - \operatorname{arctg} x + 2x.$$

Вариант В 2

$$F(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) + \\ + \operatorname{arctg} x - 3x^2.$$

2

Найдите неопределенный
интеграл:

$$\text{а) } \int \left(\frac{8}{\sin^2 x} + 6 \cos^2 \frac{x}{6} \right) dx;$$

$$\text{а) } \int \left(\frac{8}{\cos^2 x} - 8 \sin^2 2x \right) dx;$$

$$\text{б) } \int \left(3 - \frac{2}{(2x+5)^2} \right) dx.$$

$$\text{б) } \int \left(\frac{6}{(3x-1)^3} - 5 \right) dx.$$

3

Для функции $f(x)$ найдите
первообразную, график которой
проходит через точку A , если:

$$\text{а) } f(x) = \frac{2}{\sqrt{5-2x}} + 4x, \\ A(2;6)$$

$$\text{а) } f(x) = 6x^2 - \frac{1}{6\sqrt{2-\frac{x}{3}}}, \\ A(3;55)$$

$$\text{б) } f(x) = \sin x \sin 5x, \\ A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{24}\right).$$

$$\text{б) } f(x) = \cos x \cos 5x, \\ A\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{1}{24}\right).$$

С-17. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

Вариант А1

Вариант А2

1

Вычислите интеграл:

а) $\int_0^3 (x^2 + 4x - 1) dx;$

а) $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 4) dx;$

б) $\int_{\frac{1}{3}}^1 \left(3 - \frac{1}{x^2} \right) dx;$

б) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{2}{x^3} + 8 \right) dx;$

в) $\int_0^3 \left(\frac{2}{\sqrt{x+1}} + 3x^2 \right) dx;$

в) $\int_3^6 \left(4x - \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \right) dx;$

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} dx.$

г) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 3 \sin 3x dx.$

2

Найдите площадь фигуры,
ограниченной линиями:

$y = x^2 - 1, y = 3.$

$y = 5 - x^2, y = 1.$

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Вычислите интеграл:

а) $\int_1^2 \left(4x + 3 - \frac{4}{x^2} \right) dx;$

а) $\int_1^2 \left(\frac{6}{x^3} + 9x^2 - 5 \right) dx;$

б) $\int_1^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + 8(2x - 5)^3 \right) dx;$

б) $\int_4^{16} \left(\frac{(\sqrt{x})^3}{x^2} + \left(\frac{x}{4} - 3 \right)^3 \right) dx;$

$$в) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x - 1};$$

$$в) \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{dx}{1 - \sin^2 x};$$

$$г) \int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{x}{8} - \sin \frac{x}{8} \right)^2 dx.$$

$$г) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \cos 2x)^2 dx.$$

2

Найдите площадь фигуры,
ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 4x + 4,$$

$$y = x^2 + 4x + 4,$$

$$y = 4 - x.$$

$$y = x + 4.$$

Вариант В 1**Вариант В 2****1**

Вычислите интеграл:

$$а) \int_1^3 \frac{3x^4 - 2x^2 + 6}{x^2} dx;$$

$$а) \int_1^2 \frac{2x^5 - x^3 - 8}{x^3} dx;$$

$$б) \int_1^5 \left(\frac{1}{\sqrt{11 - 2x}} + 1 \right) dx;$$

$$б) \int_1^6 \left(\frac{3}{2\sqrt{3x - 2}} - 2 \right) dx;$$

$$в) \int_0^{2\pi} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{8} \right) dx;$$

$$в) \int_0^{2\pi} \sin^2 \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{4} \right) dx;$$

$$г) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

$$г) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx.$$

2

Найдите площадь фигуры,
ограниченной линиями:

$$y = 4x - x^2, y = x, y = 0.$$

$$y = x^2 + 4x, y = x, y = 0.$$

С-18. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ И ИНТЕГРАЛА

Вариант А1

1

Точка движется прямолинейно
со скоростью

$$v(t) = 6t^2 - 4t - 1.$$

Найдите закон движения точки, если

в момент времени $t = 1$ с координата точки была равна 4 м.

2

Найдите объем тела, полученного
при вращении вокруг оси абсцисс
криволинейной трапеции,
ограниченной линиями:

$$y = 2\sqrt{x}, \quad x = 4, \quad y = 0.$$

3

Найдите работу, которую
необходимо затратить

на растяжение пружины на 2 см, если сила в 2 Н растягивает ее на 4 см.

4

Докажите с помощью определенного
интеграла

формулу объема цилиндра $V = \pi R^2 H$, где R – радиус цилиндра, H – его высота.

Вариант А2

$$v(t) = 4t^3 + 2t - 3.$$

в момент времени $t = 2$ с координата точки была равна 10 м.

$$y = \sqrt{x}, \quad x = 9, \quad y = 0.$$

на растяжение пружины на 5 см, если сила в 4 Н растягивает ее на 10 см.

формулу объема равностороннего цилиндра $V = 2\pi R^3$, где R – радиус цилиндра.

Вариант Б1Вариант Б2**1**

Точка движется прямолинейно
с ускорением

$$a(t) = \cos \frac{t}{2}.$$

$$a(t) = -\sin \frac{t}{3}.$$

Найдите закон движения точки, если

в момент времени $t = \frac{2\pi}{3}$ с ее

скорость равна $\sqrt{3}$ м/с, а координата равна 2 м.

в момент времени $t = \frac{\pi}{2}$ с ее

скорость равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ м/с, а координата равна 1,5 м.

2

Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sqrt{x}, y = 0, 5x.$$

$$y = \sqrt{-x}, y = x^2.$$

3

Линейная плотность неоднородного стержня изменяется по закону

$$\rho(l) = 8l + 1$$

$$\rho(l) = 32l + 2$$

(плотность измеряется в кг/м).

Найдите массу стержня, если его длина

равна 50 см.

равна 25 см.

4

Выведите с помощью определенного интеграла

формулу объема конуса с радиусом R и высотой H .

формулу объема усеченного конуса с радиусами R и r и высотой H .

Вариант В1

1

Тело массой m движется прямолинейно под действием силы $F(t)$ (F — в ньютонах). Найдите закон его движения, если

$m = 2$ кг, $F(t) = 12t - 8$, и в момент времени $t = 3$ с скорость тела равна 10 м/с, а координата 21 м.

$m = 3$ кг, $F(t) = 36 - 18t$, и в момент времени $t = 2$ с скорость тела равна 14 м/с, а координата 20 м.

2

Найдите объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2 + y^2 = 3z^2 + 1, z = 1, z = -1.$$

$$x^2 + y^2 = 1 + 6z^2, z = 0, z = 1.$$

3

Найдите работу, которую необходимо затратить на выкачивание воды из резервуара, если

резервуар имеет форму цилиндра радиуса 1 м и глубину 4 м.

резервуар имеет глубину 2 м, а его поперечное сечение — квадрат со стороной 1 м.

4

Выведите с помощью определенного интеграла

формулу объема пирамиды.

формулу объема усеченной пирамиды.

**С-19*. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ
ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**
(домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1**Вариант 2****1**

Вычислите интеграл:

а) $\int_0^1 3^x dx;$

а) $\int_1^2 2^x dx;$

б) $\int_2^4 0,5e^{\frac{x}{2}} dx;$

б) $\int_3^6 \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}} dx;$

в) $\int_0^1 (e^{-x} + 1)^2 dx;$

в) $\int_0^1 (e^{-x} - 1)^2 dx;$

г) $\int_{-2}^{-1} 10^x 2^{-x} dx;$

г) $\int_{-3}^{-1} 3^{-x} 6^x dx;$

д) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-3x} dx;$

д) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx;$

е) $\int_0^1 \frac{2^x + 3^x}{6^{x+1}} dx;$

е) $\int_0^1 \frac{2^{x-1} + 5^{x-1}}{10^x} dx;$

ж) $\int_e^{e^2} \frac{2}{x} dx;$

ж) $\int_1^{e^3} \left(-\frac{3}{x}\right) dx;$

з) $\int_0^6 \frac{dx}{0,5x + 1};$

з) $\int_1^3 \frac{3}{3x - 2} dx;$

и) $\int_2^4 \frac{dx}{3 - 2x};$

и) $\int_2^8 \frac{dx}{0,5x - 5};$

к) $\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2x dx}{x^2 + 1};$

к) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{e+2}} \frac{2x dx}{x^2 - 2};$

$$\text{л) } \int_1^8 \frac{2dx}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{л) } \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$$

$$\text{м) } \int_4^9 \sqrt{x} dx$$

$$\text{м) } \int_8^{27} \sqrt[3]{x} dx$$

$$\text{н) } \int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{н) } \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$$

$$\text{о) } \int_1^5 \sqrt{3x+1} dx$$

$$\text{о) } \int_0^1 \sqrt[3]{7x+1} dx$$

$$\text{п) } \int_1^{81} \frac{x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{п) } \int_1^{64} \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{р) } \int_{-1}^{15} \frac{dx}{\sqrt{x+10} - \sqrt{x+1}}$$

$$\text{р) } \int_3^{19} \frac{dx}{\sqrt{x+6} + \sqrt{x-3}}$$

2

**Найдите неопределенный интеграл, используя в решении указанный способ:
— преобразование подинтегрального выражения:**

$$\text{а) } \int \frac{x^5 + x^3 - 2}{x^2 + 1} dx;$$

$$\text{а) } \int \frac{x^2 - 1}{1 + x^2} dx;$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{1 - \cos x};$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{1 + \cos x};$$

$$\text{в) } \int \sin^4 \frac{x}{8} dx;$$

$$\text{в) } \int \cos^4 2x dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}};$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{-\sqrt{-2x - x^2}};$$

$$\text{д) } \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10};$$

$$\text{д) } \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5};$$

— замена переменной:

е) $\int (x^3 - 1)^4 x^2 dx;$

е) $\int \frac{xdx}{(x^2 + 1)^3};$

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}};$

ж) $\int \frac{dx}{4x^2 + 25};$

з) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} dx;$

з) $\int \frac{c \operatorname{tg} x}{\sin^2 x} dx;$

и) $\int \cos^3 x dx;$

и) $\int \sin^3 x dx;$

к) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$

к) $\int x\sqrt{x-4} dx.$

л) $\int xe^{x^2} dx;$

л) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx;$

м) $\int \frac{dx}{x \ln x};$

м) $\int \frac{\ln^2 x dx}{x};$

н) $\int \operatorname{ctg} x dx;$

н) $\int \operatorname{tg} x dx;$

о) $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1};$

о) $\int \frac{2x dx}{x^2 + 3};$

п) $\int \frac{\sin 2x dx}{1 + \cos^2 x};$

п) $\int \frac{\sin 2x dx}{1 + \sin^2 x};$

р) $\int (x+1)\sqrt{x^2 + 2x} dx.$

р) $\int (x^2 - 1)\sqrt{x^3 - 3x + 2} dx.$

3

Используя геометрические или
аналитические рассуждения,
вычислите интеграл:

а) $\int_{-3}^0 \sqrt{9 - x^2} dx;$

а) $\int_{-6}^6 -\sqrt{36 - x^2} dx;$

б) $\int_{-2}^1 (|x+1| + |x|) dx;$

б) $\int_{-1}^2 (|x| + |x-1|) dx;$

$$в) \int_{-2}^2 x^4 \sin^5 x dx.$$

$$в) \int_{-1}^1 x \sqrt{4 - x^4} dx.$$

4

Найдите площадь фигуры,
ограниченной линиями:

$$а) y = 4 - x^2, y = 3x, \\ y = -3x (y > 0);$$

$$а) y = 2x - x^2, y = -x, \\ y = x - 2 (y > 0);$$

$$б) y = \sin x, y = \cos x, \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$$

$$б) y = \sin x, y = -\sin x, \\ 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2};$$

$$в) y = |x^2 - 2x|, y = 11 - |x - 1|;$$

$$в) y = \frac{1}{4}|x^2 - 4|, y = 7 - |x|;$$

$$г) y = \frac{8}{x^2}, y = x, \\ y = 4, x = 0.$$

$$г) y = -\frac{4}{x^2}, y = -4, \\ y = -\frac{1}{2}x, x = 0.$$

5

Найдите все значения a , при которых
выполняется условие:

$$а) \int_0^a (2x - 5) dx \leq 6;$$

$$а) \int_0^a (4 - 2x) dx \geq 3;$$

$$б) \int_a^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^4 x) dx = \frac{1}{3};$$

$$б) \int_a^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x) dx = \frac{1}{3};$$

$$в) \text{ функция } f(a) = \int_a^{2a} (2x + 1) dx$$

$$в) \text{ функция } f(a) = \int_{\frac{a}{2}}^a (1 - 4x) dx$$

принимает наименьшее
значение.

принимает наибольшее
значение.

К-3 (КП-4). ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Вариант А 1

①

Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x) = x^3 - \frac{2}{\sqrt{x}}$;

б) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 3 \sin x$.

②

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через данную точку:

а) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$, $A(-1; 0)$;

б) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$, $A\left(\frac{\pi}{3}; 1\right)$;

в) $f(x) = \frac{3}{x+2}$, $A(-3; 1)$.

③

Вычислите интеграл:

а) $\int_1^2 \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) dx$;

б) $\int_{-2}^0 (0,5x + 1)^5 dx$.

④

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 + 2$, $y = 4 - x$.

Вариант А 2

а) $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} - x^2$;

б) $f(x) = 2 \cos x - \frac{1}{\sin^2 x}$.

а) $f(x) = 4 + 2x - 6x^2$, $A(-2; 0)$;

б) $f(x) = \sin 3x$, $A\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{3}\right)$;

в) $f(x) = \frac{2}{x-3}$, $A(2; 3)$.

а) $\int_1^2 \left(3x^2 - \frac{2}{x^3}\right) dx$;

б) $\int_{-1}^0 (2x + 1)^4 dx$.

$y = x^2 + 2$, $y = 4 + x$.

5

Известно, что $\int_a^b f(x)dx = 2$. Найдите:

$$2 \int_a^a f(x)dx + \int_a^a f(x)dx.$$

$$\int_b^b f(x)dx - 3 \int_b^a f(x)dx.$$

В а р и а н т Б 1**В а р и а н т Б 2****1**

Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x) = \frac{1}{3 \sin^2 x} + \frac{1}{x^3}$;

а) $f(x) = -\frac{1}{x^4} + \frac{1}{5 \cos^2 x}$;

б) $f(x) = 1 + \cos \frac{x}{4}$.

б) $f(x) = \sin 5x - x$.

2

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через данную точку:

а) $f(x) = 2x + \frac{2}{\sqrt{1-x}}$,

а) $f(x) = 3 + \frac{1}{\sqrt{5-x}}$, $A(-4; 0)$;

$A(-3; 1)$;

б) $f(x) = 6 \sin 3x$, $A\left(\frac{\pi}{9}; 0\right)$;

б) $f(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{4}$, $A\left(\frac{2\pi}{3}; 1\right)$;

в) $f(x) = 2x - \frac{2}{4x-5}$, $A(1; 0)$.

в) $f(x) = 3x^2 + \frac{6}{3x-1}$, $A(0; 3)$.

3

Вычислите интеграл:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$;

а) $\int_0^2 \frac{dx}{(2-0,5x)^2}$;

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{8}} (1 - 2 \sin^2 2x) dx.$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin 3x \cos 3x dx.$$

4

Найдите площадь фигуры,
ограниченной линиями:

$$y = -x^2 - 4x, \quad y = x + 4.$$

$$y = 4x - x^2, \quad y = 4 - x.$$

5

Точка движется вдоль прямой
со скоростью

$$v(t) = 2 + \frac{1}{\sqrt{t+2}}$$

$$v(t) = 4 - \frac{2}{\sqrt{t-1}}$$

(v — в метрах за секунду, t —
в секундах).

Найдите путь, пройденный точкой

за промежутков времени $[2; 7]$.

за промежутков времени $[2; 5]$.

Вариант В 1

1

Найдите интеграл:

$$\text{а) } \int (x-1)(x+1)(x+2) dx;$$

$$\text{а) } \int (x+1)(x+2)(x-2) dx;$$

$$\text{б) } \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx.$$

2

Для функции $f(x)$ найдите первообразную,
обладающую указанными свойствами:

а) график первообразной имеет только
одну общую точку с прямой y , если:

$$f(x) = 4x + 8, \quad y = 3;$$

$$f(x) = 3 - x, \quad y = 7;$$

б) график первообразной проходит через точки A и B , если:

$$f'(x) = \frac{16}{x^3}, \quad A(1; 10), \quad B(4; -2).$$

$$f'(x) = \frac{54}{x^4}, \quad A(-1; 4), \quad B(3; 4).$$

в) график первообразной проходит через точку M (M — точка пересечения прямых в графическом решении уравнения $g(x, y) = 0$), если:

$$f(x) = \frac{6}{7 - 3x},$$

$$f(x) = \frac{2}{0,5x - 1},$$

$$g(x, y) = xy - 3x - 2y + 6.$$

$$g(x, y) = xy + 2x - 4y - 8.$$

3

Вычислите интеграл:

$$a) \int_0^1 \frac{9 - 4x^2 + \sqrt{3 - 2x}}{3 - 2x} dx;$$

$$a) \int_0^1 \frac{9x^2 - 1 - \sqrt{3x + 1}}{3x + 1} dx;$$

$$б) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3} \cos \frac{x}{3} - 2 \sin 2x \right) dx.$$

$$б) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - 3 \sin 3x \right) dx.$$

4

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{4}{x^2}, \quad y = -3x + 7.$$

$$y = \frac{9}{x^2}, \quad y = -4x + 13.$$

5

Подберите функцию $f(x)$, которая при любом значении a удовлетворяла бы равенству:

$$\int_0^a f(x) dx = 2a^2 - 3a.$$

$$\int_0^a f(x) dx = 4a - a^2.$$

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ

С-20. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ. ПРОСТЕЙШИЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

Вариант А1

1

Вычислите:

а) $\frac{P_4}{P_8} \cdot A_8^4$;

б) $C_8^6 \cdot P_2$.

2

Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 6 различных уроков?

3

Сколькими способами из 7 членов президиума собрания можно выбрать председателя, его заместителя и секретаря?

4

Сколькими способами из 10 игроков волейбольной команды можно выбрать стартовую шестерку?

Вариант А2

1

а) $\frac{P_5}{P_9} \cdot A_9^5$;

б) $C_{10}^7 \cdot P_3$.

2

Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (цифры в одном числе не должны повторяться)?

3

Сколькими способами из 9 учебных предметов можно составить расписание учебного дня из 6 различных уроков?

4

Сколькими способами из 25 учеников класса можно выбрать четырех для участия в праздничном концерте?

5

Решите уравнение:

$$A_{x+1}^2 = 20.$$

$$C_x^{x-1} \cdot (x-1) = 30.$$

Вариант Б 1**1**

Вычислите:

$$\text{а) } \frac{P_{20}}{A_{20}^{15}} - \frac{A_{20}^5}{C_{20}^5};$$

$$\text{б) } C_5^3 C_4^2 + C_4^2 C_3^1.$$

2

Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 6, 7, 8, 9, 0 (цифры в одном числе не должны повторяться) ?

3

Сколько различных правильных дробей можно составить, используя в числителе и знаменателе числа 2, 3, 5, 7, 11, если в записи каждой дроби использовать 2 числа?

4

Сколько диагоналей имеет выпуклый семиугольник?

5

Решите уравнение:

$$A_x^5 = 336C_{x-2}^{x-5}.$$

Вариант Б 2

$$\text{а) } \frac{P_{14}}{A_{14}^{10}} - \frac{A_{14}^4}{C_{14}^4};$$

$$\text{б) } C_6^4 C_5^3 - C_5^3 C_4^2.$$

2

Сколькими способами можно расставить на книжной полке тома 4-томника Эдгара По так, чтобы четвертый том не стоял крайним слева?

3

Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если цифры в одном числе не повторяются?

4

Сколько существует различных треугольников с вершинами в 7 данных точках, если известно, что 3 из них лежат на одной прямой?

$$12C_{x+3}^{x-1} = 55A_{x+1}^2.$$

Вариант В 1**1**

Вычислите:

а) $\frac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{C_{11}^3}$;

б) $\frac{(k+1)C_{n+1}^{k+1}}{(n+1)C_n^k}$.

2

Сколькими способами можно рассадить за круглым столом 6 человек, если не существенно, кто на каком стуле сидит, а существенно, кто является соседом одного человека справа и слева?

3

Сколько различных неправильных дробей, не равных единице, можно составить, используя в числителе и знаменателе числа 2, 3, 5, 7, 11, 13?

4

Сколько различных натуральных делителей имеет число 210?

5

Найдите все значения x , удовлетворяющие неравенству:

$$C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 \leq 9x^2 - 14x.$$

Вариант В 2**1**

а) $\frac{A_{15}^5 - A_{14}^5}{C_{14}^4}$;

б) $\frac{C_n^k + C_n^{k+1}}{C_{n+1}^{k+1}}$.

2

Сколько различных «слов» (буквенных наборов) из 7 букв можно составить путем перестановки букв в слове «барабан»?

3

Из 11 учебных предметов составляют расписание дня из 5 уроков. Сколькими способами это можно сделать при условии, чтобы в расписании была физкультура, но не на первых трех уроках?

4

Сколько различных произведений, кратных 10, можно составить из множителей 2, 3, 5, 7, 11, 13, используя каждый множитель по одному разу?

$$C_{x+1}^{x-1} + C_{x+1}^x + C_x^{x-2} \leq C_{x+3}^{x+1}.$$

С-21. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ. ПРАВИЛО СУММЫ И ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Вариант А1

①

В вазе стоят 10 белых и 5 красных роз. Определите, сколькими способами из вазы можно выбрать букет, состоящий из

двух белых роз и одной красной розы.

②

Даны цифры 1, 2, 5, 8, 9. Определите, сколько четырехзначных чисел можно составить из них (цифры в одном числе не должны повторяться) при условии, что все составленные числа должны быть

меньше 6000.

③

Три стрелка должны поразить 6 мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут разделить мишени между собой?

Вариант Б1

①

В вазе стоят 10 белых и 5 красных роз. Определите, сколькими способами из вазы можно выбрать букет из трех цветов, в котором будет

не менее двух белых роз.

Вариант А2

двух красных и одной белой розы.

больше 4000.

③

Три автора должны составить справочник из 9 глав (каждый составляет по 3 главы). Сколькими способами они могут разделить работу?

Вариант Б2

не менее двух красных роз.

2**12 человек разделены на группы**

по 4 человека в каждой.

по 3 человека в каждой.

Сколькими способами это можно сделать?**3**

Шестерых новых учеников нужно распределить в три параллельных класса. Сколькими способами это можно сделать?

3

Семь книг необходимо разместить на четырех книжных полках. Сколькими способами это можно сделать?

Вариант В 1

1

В вазе стоят 10 белых и 5 красных роз. Определите, сколькими способами из вазы можно выбрать букет из трех цветов, в котором была бы

хотя бы одна белая роза.

2

Из 8 юношей и 6 девушек выбирают три пары для участия в танцевальном конкурсе. Сколькими способами можно сделать такой выбор?

3

На четырех полках необходимо расставить пять книг. Сколькими способами это можно сделать, если на первой полке должна стоять только одна любая книга?

Вариант В 2

хотя бы одна красная роза.

2

Из 6 различных букв и 10 различных цифр составляют 4 кода «буква-цифра». Сколькими способами это можно сделать?

3

За пять дней садовник должен высадить шесть различных деревьев. Сколькими способами он может распределить работу, если в первый день он должен высадить только одно любое дерево?

С-22. БИНОМ НЬЮТОНА. СВОЙСТВА БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Вариант А 1

1

По формуле бинома Ньютона раскройте скобки и упростите выражение:

а) $(x - 2)^4$;

б) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5$.

2

Найдите член, не содержащий x , в разложении бинома:

$\left(x + \frac{2}{x}\right)^6$.

$\left(3x + \frac{1}{x}\right)^4$.

3

Дан бином:

$(3a - b)^n$.

$(2a^3 + b)^n$.

Найдите n , если сумма всех биномиальных коэффициентов равна 128.

равна 256.

4

С помощью формулы бинома Ньютона вычислите:

99^3 .

101^3 .

Вариант Б 1

1

Раскройте скобки и упростите выражение:

а) $(x + \sqrt{2})^6$;

а) $(x - \sqrt{3})^5$;

Вариант А 2

Вариант Б 2

б) $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{y}\right)^5$.

б) $\left(3x + \frac{1}{2y}\right)^6$.

2

Найдите показатель степени бинома
($n \in N$)

$\left(\sqrt[7]{x} + \frac{1}{x}\right)^n$, если второй член
разложения не зависит от x .

$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + x\right)^n$, если третий член
разложения не зависит от x .

3

Найдите член разложения бинома

$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$, содержащий x

в первой степени, если сумма
всех биномиальных коэф-
фициентов равна 512.

$\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, содержащий x

в первой степени, если сум-
ма всех биномиальных коэф-
фициентов равна 256.

4

Докажите тождество ($k, n \in N, 1 \leq k \leq n$):

$$n(C_{2n}^n - C_{2n}^{n+1}) = C_{2n}^{n+1}.$$

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

В а р и а н т В 1**В а р и а н т В 2****1**

Раскройте скобки и упростите
выражение:

а) $\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$;

а) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)^5$;

б) $(2\sqrt{3} + \sqrt{6})^5$.

б) $(\sqrt{6} - 3\sqrt{2})^4$.

2

В разложении бинома

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n \text{ коэффициенты}$$

третьего и пятого членов относятся как 2 : 7.

$(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^n$ третий биномиальный коэффициент в 4 раза больше второго.

Найдите член разложения, содержащий

$$x^1.$$

$$x^4.$$

3

Найдите показатель бинома $(a + b)^n$,

если

сумма всех его биномиальных коэффициентов на 256 больше суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах.

утроенная сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, на 512 больше суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

4

Найдите количество рациональных членов в разложении бинома:

$$(\sqrt[4]{2} + \sqrt[8]{3})^{80}.$$

$$(\sqrt[5]{3} - \sqrt[10]{5})^{100}.$$

С-23*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО КОМБИНАТОРИКЕ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

1

Докажите тождество:

$$a) C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2};$$

$$a) C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3};$$

Вариант 2

$$\text{б) } C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = \\ = n \cdot 2^{n-1}.$$

$$\text{б) } C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + \\ + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0.$$

2

Подставляя в разложение $(x + a)^n$ подходящие значения a и x , найдите сумму:

$$1 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n.$$

$$1 + 10C_n^1 + 100C_n^2 + \dots + 10^n C_n^n.$$

3

Найдите коэффициент

при x^8 в разложении выражения $(1 + 2x^2 - 3x^4)^{10}$.

при x^4 в разложении выражения $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$.

4

Найдите рациональные члены в разложении бинома:

$$(\sqrt[4]{4} + \sqrt[7]{7})^{15}.$$

$$(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^{24}.$$

5

Сколькими способами можно рассадить за круглым столом 8 мужчин и 8 женщин так, чтобы лица одного пола не сидели рядом?

5

Сколькими способами можно построить в одну шеренгу игроков двух футбольных команд, чтобы игроки одной команды не стояли рядом?

6

Какое минимальное количество жителей должно быть в населенном пункте, чтобы наверняка утверждать, что по крайней мере двое из них имеют одинаковые инициалы

фамилии и имени?

фамилии, имени и отчества?

С-24. КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТИ

Вариант А1

1

Из 30-томного собрания сочинений Льва Толстого ученик наугад выбирает один том. Какова вероятность того, что

а) в этом томе окажется роман «Анна Каренина», изданный в одном томе?

б) этот том будет иметь четный номер?

2

Бросают две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что

выпадут «орел» и «решка»?

3

Из букв слова «провал» наугад выбирают 5 букв. Найдите вероятность того, что из выбранных букв можно будет составить

слово «право».

4

Из 28 костей домино наугад выбирают одну. Что вероятнее:

что сумма очков на ней будет равна 6 или 8?

Вариант А2

а) в этом томе окажется роман «Война и мир», изданный в двух томах?

б) этот том будет иметь нечетный номер?

выпадут два «орла»?

слово «повар».

что сумма очков на ней будет равна 3 или 4?

Вариант Б1**1**

Известно, что человек родился не в високосный год. Какова вероятность того, что он:

- а) родился в апреле?
б) родился 30-го числа?

Вариант Б2

- а) родился в январе?
б) родился 31-го числа?

2

Бросают два одинаковых игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел будет

равна 3?

равна 11?

3

Из букв слова «апельсин» последовательно выбирают 4 буквы.

Найдите вероятность того, что выбранные буквы в порядке их выбора образуют

слово «лиса».

слово «плен».

4

Что вероятнее при бросании двух одинаковых игральных кубиков:

что выпавшая сумма будет равна 6 или что она будет больше 10?

что выпавшая сумма будет равна 10 или что она будет меньше 4?

Вариант В1**1**

Из 28 костей домино выбирают одну. Какова вероятность того, что:

Вариант В2

а) сумма очков на ней меньше 3?

б) оба значения числа очков на ней — четные?

а) сумма очков на ней больше 9?

б) оба значения числа очков на ней — нечетные?

2

В ящике лежит 15 шаров, из которых 5 — черные. Какова вероятность того, что при выборе из ящика трех шаров

точно один окажется черным?

точно два окажутся черными?

3

Из букв слова «комбинаторика» наугад выбираются 4 буквы.

Найдите вероятность того, что

из выбранных букв можно составить слово «корт».

выбранные буквы в порядке их выбора образуют слово «атом».

4

В колоде 32 карты. Что вероятнее:

найти среди четырех выбранных карт ровно два туза или все четыре карты черные?

найти среди трех выбранных карт ровно одну даму или ровно две красные карты?

С-25. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вариант А 1

1

Из 30 учеников спорткласса 11 занимается футболом, 6 — волейболом, 8 — бегом, а остальные 5 — прыжками в длину. Какова вероятность того, что один произвольно выбранный ученик класса:

Вариант А 2

- а) не занимается прыжками?
б) занимается игровым видом спорта?

- а) не занимается футболом?
б) занимается легкой атлетикой?

2

Нина и Лора пишут диктант.

Вероятность того, что Нина допустит в нем ошибку, составляет 60%, вероятность ошибки Лоры — 40%.

Найдите вероятность того, что:

- а) обе девочки напишут диктант без ошибок;
б) Нина напишет без ошибок, а Лора ошибется.

- а) обе девочки в диктанте ошибутся;
б) Лора напишет без ошибок, а Нина ошибется.

3

Монету бросают 6 раз подряд.

Найдите вероятность того, что

- хотя бы один раз выпадет «решка».**

- хотя бы один раз не выпадет «решка».**

Вариант Б1

Вариант Б2

1

В беспроигрышной лотерее выпущено 10000 билетов, среди которых 100 выигрышей по 1000 рублей, 200 выигрышей по 500 рублей, 500 выигрышей по 200 рублей и 1000 выигрышей по 100 рублей, а остальные билеты выигрывают по 1 рублю. Какова вероятность того, что при покупке одного билета выигрыш составит:

- а) не более 200 рублей?
б) более 200 рублей?

- а) не менее 500 рублей?
б) менее 500 рублей?

2

Каждый из трех стрелков стреляет в мишень по одному разу, причем вероятность попадания первого стрелка составляет 90%, второго — 80%, третьего — 70%. Найдите вероятность того, что:

а) все три стрелка поразят мишень;

б) ровно двое из трех стрелков промахнутся.

а) все три стрелка промахнутся;

б) ровно двое из трех стрелков поразят мишень.

3

Монету бросают 5 раз подряд.

Найдите вероятность того, что

«решка» выпадет не более 2 раз.

«орел» выпадет не менее 4 раз.

Вариант В1

1

В ящике лежат 6 белых, 4 черных, 5 красных и 3 синих шарика. Из ящика наугад выбираются 2 шарика.

Какова вероятность того, что:

а) шарики будут оба белыми или оба черными?

б) один из шариков будет синим, а второй — красным?

Вариант В2

а) шарики будут оба красными или оба синими?

б) один из шариков будет белым, а второй — черным?

2

Три референта стенографируют выступление министра. Известно, что вероятность составления дословной стенограммы у первого референта составляет 75%, у второго — 80%,

у третьего — 90%. Кроме того, вероятность грамматической ошибки у каждого из референтов составляет 10%. Найдите вероятность того, что:

а) ни один из референтов не составит дословной стенограммы;

б) ровно один из референтов сможет дословно записать выступление, но допустит грамматические ошибки.

а) все три референта составят дословную стенограмму;

б) ровно два референта смогут дословно записать выступление, но допустят грамматические ошибки.

3

Монету бросают 6 раз подряд.

Найдите вероятность того, что

«решка» будет выпадать чаще, чем «орел».

«орел» будет выпадать не реже, чем «решка».

С-26. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Вариант А 1

1

В таблице представлены результаты двух стрелков, показанные ими на тренировке. Тренер решил направить на соревнования того стрелка, у которого относительная частота попаданий выше. Кого из стрелков выберет тренер?

Вариант А 2

№	1	2
Фамилия спортсмена	Иванов	Петров
Количество выстрелов	20	24
Количество попаданий	16	20

②

В среднем из 1000 аккумуляторов, поступивших в продажу, 6 неисправны. Найдите вероятность того, что случайно выбранный в магазине аккумулятор окажется неисправным.

Вариант Б 1

①

Из 500 телевизоров 490 проработало без поломок 10000 часов и более. Какова вероятность, что произведенный по данной технологии телевизор проработает менее 10 000 часов до первой поломки.

②

В круг радиуса 4 помещен маленький круг радиуса 2. Известно, что вероят-

№	1	2
Фамилия спортсмена	Сидоров	Федоров
Количество выстрелов	30	50
Количество попаданий	27	40

Для определения доли бракованных изделий были взяты случайным образом 200 изделий. При проверке оказалось, что среди них 5 бракованных. Какова вероятность, что произведенная деталь является бракованной?

Вариант Б 2

Обследование показало, что из 1000 зашедших в магазин потенциальных покупателей, 810 не приобрело товар. Какова вероятность того, что зашедший в магазин человек приобретет товар.

ность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения в круге. Найдите вероятность того, что точка, наудачу поставленная в большой круг,

попадет в малый круг.

не попадет в малый круг.

Вариант В 1

1

Вероятность того, что новый компьютер в течение года потребует гарантийного ремонта, равна 0,05. В некотором городе из 500 проданных компьютеров в течение года в гарантийную мастерскую поступило 28 штук. На сколько в этом городе отличается относительная частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности?

2

В окружность радиуса 6 вписан квадрат. В круг, ограниченный заданной окружностью, наугад поставили точку. Считая, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения в круге, найдите вероятность того, что эта точка будет находиться

внутри квадрата.

вне квадрата.

Вариант В 2

Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько в этом городе отличается относительная частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности?

С-27. ВЕРОЯТНОСТЬ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ХОТЯ БЫ ОДНОГО ИЗ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ. СХЕМА БЕРНУЛЛИ

Вариант А1

1

Стрелок стреляет по мишени 4 раза
подряд. Известно, что

вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы один раз.

2

В классе 15 мальчиков и 10 девочек.
Известно, что на каждом из 6 различ-
ных уроков к доске вызывают одного
человека. Найдите вероятность того, что:

- а) на всех уроках вызовут девочек;
б) в течение дня вызовут 4 мальчиков и двух девочек.

3

Что вероятнее при бросании монеты:

выпадение «решки» точно четыре раза из пяти или шесть раз из девяти?

Вариант А2

вероятность промаха при каждом выстреле равна 0,1. Найдите вероятность того, что стрелок хотя бы один раз промахнется.

- а) на всех уроках вызовут мальчиков;
б) в течение дня вызовут 5 девочек и одного мальчика.

выпадение «орла» точно четыре раза из семи или два раза из трех?

Вариант Б1

1

Три лучших спортсмена школы
принимают участие в общегородском
забеге. Известно, что

Вариант Б2

вероятность стать призером для каждого из учеников составляет $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ соответственно. Какова вероятность того, что хотя бы один ученик станет призером?

2

Найдите вероятность того, что при 6 бросаниях игрального кубика:

- а) пятерка выпадет точно 5 раз;
 б) цифра меньше трех выпадет точно 3 раза.

вероятность не занять призовое место для каждого из учеников составляет $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$ соответственно. Какова вероятность того, что хотя бы один ученик не станет призером?

- а) тройка выпадет точно 3 раза;
 б) цифра больше четырех выпадет точно 4 раза.

3

Что вероятнее при игре с равным по силе соперником (без ничьих) :

выиграть три партии из четырех или шесть партий из восьми?

выиграть две партии из трех или четыре партии из шести?

В а р и а н т В 1

1

Найдите вероятность того, что наугад взятое двузначное число

будет кратно 2 или 5 или 10.

В а р и а н т В 2

будет кратно 3 или 10 или 30.

2

Завод производит изделия, каждое из которых с вероятностью p — бракованное. При осмотре брак обнаруживают с вероятностью q . Для контроля продукции выбирают n изделий. Найдите вероятность того, что при осмотре:

- а) брак обнаружат ни в одном изделии;
 б) брак обнаружат не менее, чем в $(n - 1)$ изделиях.

- а) брак обнаружат во всех изделиях;
 б) брак обнаружат не более, чем в одном изделии.

3

Что вероятнее при случайном выборе костей домино:

что шестерка будет хотя бы раз встречаться на двух костях из четырех или на трех из шести?

что единица будет хотя бы раз встречаться на двух костях из трех или на четырех из шести?

С-28. ПОНЯТИЕ О СТАТИСТИКЕ. ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ И ВЫБОРКА. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЯДОВ ДАННЫХ

Вариант А 1

Вариант А 2

1

Перед выборами мэра города провели выборочный опрос лиц, достигших избирательного возраста, для того, чтобы определить, сколько человек придёт на избирательные участки в день выборов. Результаты опроса приведены в таблице:

Опрошено	1500 человек
Собираются прийти	750 человек

Опрошено	2000 человек
Собираются прийти	850 человек

Сколько избирателей следует ожидать на участках, если в городе около

350 тыс. жителей, достигших избирательного возраста?

2

На итоговой контрольной работе по алгебре и началам математического анализа в одном из 11-х классов были получены такие оценки:

одна «2», восемь «3», семь «4»;
пять «5».

одна «2», семь «3», де-
вятнадцать «4»; четыре «5».

Найдите среднее арифметическое, моду и медиану полученного ряда оценок.

Вариант Б 1

Вариант Б 2

1

Молокозавод выпускает молоко разной жирности. В продуктовых магазинах города, в которые завод поставляет молоко, был проведен опрос 40-ка наугад выбранных покупателей о том, какой жирности молоко они потребляют. Результаты опроса представлены в таблице:

Жирность молока (в %)	0	1	2,5
Частота	12	17	11

Жирность молока (в %)	0	1	2,5
Частота	16	14	10

Считая рассмотренную выборку репрезентативной, дайте рекомендации молокозаводу по объему выпуска молока каждого вида, если молокозавод должен выпускать 1000 л молока ежедневно.

②

При каких значениях a в выборке 2,
2, 3, 4, a

а) медиана будет равняться 3?

б) среднее арифметическое будет равняться 5?

в) среднее арифметическое будет совпадать с медианой?

а) медиана будет равняться 2?

б) среднее арифметическое будет равняться 7?

в) среднее арифметическое будет совпадать с медианой?

Вариант В 1

①

В школе всего два одиннадцатых класса. В приведенной ниже таблице указан средний балл, полученный в каждом классе на ЕГЭ по математике. Найдите средний балл на ЕГЭ по математике по всей школе.

Класс	11 а	11 б
Количество учащихся	26	24
Средний балл	65	61

Класс	11 а	11 б
Количество учащихся	23	27
Средний балл	63	64

②

Найдите размах, моду, медиану и среднее значение выборки, заданной таблицей распределения значений величины X по частотам M . Постройте полигон частот значений величины X .

X	3	5	7	9	11
M	2	3	1	2	1

X	4	8	12	16	20
M	1	4	2	1	2

**К-4 (КП-5). КОМБИНАТОРИКА,
ВЕРОЯТНОСТЬ, СТАТИСТИКА****Вариант А1****1**

Найдите:

а) $A_8^2 - P_4$;

б) третий член разложения
бинома $(x + 2)^4$.**2**На плоскости даны 8 точек, причем
никакие три из них не лежат на одной
прямой.Сколько существует отрезков
с концами в этих точках?**3**В разложении бинома $\left(x - \frac{1}{x}\right)^n$ второй и третий биномиаль-
ные коэффициенты равны.Найдите n ($n \in N$) и запишите
формулу этого разложения.**4**В игральной колоде 36 карт. Какова
вероятность того, что взятая наугад
карта окажется:

- а) валетом;
-
- б) бубновой?

Вариант А2

а) $A_7^2 + P_5$;

б) четвертый член разложе-
ния бинома $(2x + 1)^5$.Сколько существует треу-
гольников с вершинами в
этих точках?второй и четвертый биноми-
альные коэффициенты равны.

- а) тузом;
-
- б) пиковой?

5

Стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,05, в девятку — 0,1, в восьмерку — 0,2, в семерку — 0,4.

Найдите вероятность выбить с одного выстрела:

- а) больше семи очков;
б) не больше восьми очков.

- а) больше восьми очков;
б) не больше семи очков.

Вариант Б 1**1**

Найдите:

а) $\frac{A_9^3}{P_4} - C_{21}^1$;

б) средний член разложения бинома $(2x - 1)^6$.

а) $\frac{A_8^4}{P_5} - C_{14}^{13}$;

б) средний член разложения бинома $(3x + 1)^4$.

2

На окружности выбрано 8 различных точек.

Сколько существует вписанных выпуклых четырехугольников с вершинами в данных точках?

Сколько существует вписанных треугольников с вершинами в данных точках?

3

Найдите сумму биномиальных коэффициентов бинома

$(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^n$, если четвертый коэффициент разложения в 5 раз больше второго.

$\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, если второй коэффициент разложения в 7 раз меньше четвертого.

Сколько существует секущих данных прямых, проходящих через любые две данные точки?

3

Найдите наибольший член разложения:

$$(1 + \sqrt{2})^{50}.$$

Сколько существует отрезков с концами в данных точках, не лежащих ни на одной из данных прямых?

$$(1 + \sqrt{3})^{60}.$$

4

Даны числа 1, 2, 3, 4, 6, 8.

Найдите вероятность того, что:

а) произведение любых двух из них будет нечетным;

б) любые три наугад взятых числа могут быть длинами сторон треугольника.

а) сумма любых двух из них будет нечетной;

б) любые четыре наугад взятых числа могут быть членами пропорции.

5

На класс из 30 учеников распределили туристические путевки:

12 — в Крым, 8 — в Санкт-Петербург,

5 — в Венгрию. Какова вероятность того, что:

а) двое друзей поедут в Санкт-Петербург?

б) трое друзей поедут по одному маршруту?

а) трое друзей поедут в Крым?

б) двое друзей поедут по одному маршруту?

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

С-29. ПОНЯТИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Вариант А1

1

Даны комплексные числа:

$$z_1 = 1 - i \text{ и } z_2 = 4i - 2.$$

Найдите:

а) сумму $z = z_1 + z_2$ и укажите

$\operatorname{Re} z$;

$\operatorname{Im} z$;

б) разность $z = z_1 - z_2$ и укажите

комплексное число, которое

сопряжено с z ;

противоположно z ;

в) произведение $z = z_1 \cdot z_2$;

г) частное $z = \frac{z_2}{z_1}$.

2

По формуле разности квадратов
разложите на множители:

$$9x^2 + 25.$$

$$4x^2 + 1.$$

3

Вычислите:

а) $(1 + 3i)(1 - 3i) - 2$;

а) $(5 - 2i)(5 + 2i) + 1$;

б) $(2 - i)^2 + i(3i + 4)$;

б) $(3 + i)^2 - 3i(2 + 3i)$;

в) $i^{16} + \frac{2}{i^6}$.

в) $i^{10} - \frac{3}{i^8}$.

4

Решите уравнение:

а) $2z^2 + 8 = 0$;

а) $3z^2 + 27 = 0$;

б) $3iz = 9 - 6i$.

б) $2iz = -10 + 8i$.

5Найдите действительные x и y

из равенства:

$(-2 - i)x + 4iy = 6 + 7i$.

$3x + (5 - 2i)y = 1 + 2i$.

Вариант Б 1Вариант Б 2**1**

Даны комплексные числа:

$z_1 = 15 - 5i, z_2 = 1 + 2i$.

$z_1 = 5 + 10i, z_2 = 2 - i$.

Найдите:

а) сумму $z = z_1 + z_2$ и укажите ее вещественную и мнимую часть;б) разность $z = z_1 - z_2$ и укажите комплексные числа, сопряженные и противоположные к z ;в) произведение $z = z_1 \cdot z_2$;г) частное $z = \frac{z_2}{z_1}$.**2**Разложите на множители по формуле разности квадратов ($a > 0$):

$a + 16$.

$a + 49$.

3

Вычислите:

а) $(2 - 3i)^2 + (1 + i\sqrt{2})(1 - i\sqrt{2})$;

а) $(3 + 2i)^2 - (1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})$;

б) $\frac{8 + 6i}{(1 - i)^2} - 2i(2 - i);$

б) $\frac{6 - 4i}{(1 + i)^2} + 3i(1 - 2i);$

в) $(2i)^6 + \frac{32}{i^{20}}.$

в) $10i^{18} + \left(\frac{2}{i}\right)^4.$

④

Решите уравнение:

а) $z^2 - 2z + 5 = 0;$

а) $z^2 + 4z + 13 = 0;$

б) $(1 + i)z = 6 - 2i.$

б) $(1 - i)z = 8 + 6i.$

⑤

Найдите действительные x и y
из равенства:

$(5 + 3i)x + (2 - i)y = -1 - 5i.$

$(4 - 3i)x + (1 + 2i)y = 2 - 7i.$

Вариант В 1Вариант В 2

①

Даны комплексные числа $a = z_1 - 2i$ и
 $b = z_2 - 2i$, где z_1 и z_2 — корни уравнения:

$z^2 + 4z + 5 = 0$

$z^2 - 2z + 2 = 0$

$(\operatorname{Im} z_1 < 0, \operatorname{Im} z_2 > 0).$

$(\operatorname{Im} z_1 < 0, \operatorname{Im} z_2 > 0).$

Найдите:

а) число, сопряженное к сумме $a + b;$ б) число, противоположное разности
 $a - b;$ в) произведение данных чисел $ab;$ г) частное $\frac{a}{b}.$

2

Разложите двумя способами
на комплексные множители
по формуле разности квадратов

число 17.

число 10.

3

Вычислите:

а) $(2 + i)^3 - (1 - i)^2$;

а) $(2 - i)^3 + (1 + 2i)^2$;

б) $\frac{1 - i}{2i^{17} + i^{19}} + \frac{2i}{i - 1}$;

б) $\frac{1 + i}{i^{21} - 2i^{25}} + \frac{2i}{1 + i}$;

в) $1 + i^3 + i^6 + \dots + i^{90}$.

в) $1 + i^5 + i^{10} + \dots + i^{100}$.

4

Решите уравнение:

а) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$;

а) $z^4 + 20z^2 + 64 = 0$;

б) $(1 + 2i)(1 - i)z = 20 - 30i$.

б) $(1 - 2i)(1 + i)z = -40 + 50i$.

5

Найдите комплексное число z ,
удовлетворяющее равенству:

$i + \operatorname{Re} z = iz$.

$i \cdot \operatorname{Im} z + 1 = iz$.

С-30. МОДУЛЬ И АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Вариант А 1

Вариант А 2

1

Найдите модуль и аргумент
комплексного числа:

а) $z = 4 + 4i$;

а) $z = 3 - 3i$;

б) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

б) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2

Выполните действия на комплексной плоскости:

а) $(4 + i) + (-1 + 3i)$;

а) $(3 - 2i) + (1 + 3i)$;

б) $(1 - 3i) - (-2 - i)$.

б) $(5 + i) - (3 - 2i)$.

3

Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $\text{Im } z = -2$;

а) $\text{Re } z = 3$;

б) $|z| = 1$.

б) $\text{Arg } z = \frac{\pi}{4}$.

4

Решите уравнение:

$|z| = z - 3i + 1$.

$|z| = z + 5i + 1$.

Вариант Б 1**Вариант Б 2****1**

Найдите модуль и аргумент комплексного числа:

а) $z = (1 - 2i)^2$;

а) $z = (2 + i)^2$;

б) $z = \frac{2}{1 + i}$.

б) $z = \frac{2}{1 - i}$.

2

Выполните действия на комплексной плоскости:

а) $2i + (1 - 4i)$;

а) $(-3 + 2i) + 5$;

б) $2(3 - 2i) - 3(1 + i)$.

б) $4(-1 - i) - 2(-3 - 2i)$.

③

Найдите геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $\operatorname{Re} z < -1$;

а) $\operatorname{Im} z > 2$;

б) $\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{2}$.

б) $1 \leq |z| \leq 3$.

④

Решите уравнение:

$|z|^2 + z^2 = 8 - 4i$.

$|z|^2 - z^2 = 2 - 4i$.

Вариант В 1Вариант В 2

①

Найдите модуль и аргумент комплексного числа:

а) $\frac{2 + 2i}{1 - i}$;

а) $\frac{3 - 3i}{1 + i}$;

б) $(1 - i)(4 + 3i)(2 + i)(3 + i)$.

б) $(1 + i)(4 - 3i)(2 - i)(3 - i)$.

②

Выполните действия на комплексной плоскости:

$z + 2\bar{z}$, где $z = 1 + i$.

$2z - \bar{z}$, где $z = 2 - i$.

③

Найдите геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $\operatorname{Re}(z \cdot \bar{z}) < 4$;

а) $\operatorname{Im} z^2 > 2$;

б) $\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z + 2 - i) \leq \frac{3\pi}{4}$.

б) $1 \leq |z - 3 + 3i| \leq 3$.

4

Решите уравнение:

$$z|iz| - z - 2i = 0.$$

$$z|iz| - z + 6i = 0.$$

С-31. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Вариант А 1

Вариант А 2

1

Представьте данное комплексное число

а) в алгебраической форме:

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

$$z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right);$$

б) в тригонометрической форме:

$$z = 1 + \sqrt{3}i.$$

$$z = 2 + 2i.$$

2

Выполните действия:

$$\text{а) } 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \times \\ \times \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right);$$

$$\text{а) } \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \times \\ \times \sqrt{12} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right);$$

$$\text{б) } \frac{18(\cos 47^\circ + i \sin 47^\circ)}{9(\cos 17^\circ + i \sin 17^\circ)}.$$

$$\text{б) } \frac{20(\cos 72^\circ + i \sin 72^\circ)}{5(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)}.$$

3

Вычислите:

$$\text{а) } (-1 + i)^4;$$

$$\text{а) } (-1 + \sqrt{3}i)^3;$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{8(\cos \pi + i \sin \pi)}.$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{16 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)}.$$

4

Разложите на линейные множители:

$z^4 - 16.$

$81 - z^4.$

5

Найдите все корни уравнения:

$4z^2 + 8i = 0.$

$3z^3 - 24 = 0.$

Вариант Б 1Вариант Б 2**1**

Представьте данные комплексные числа в тригонометрической форме:

а) $z = -2 - 2i;$

а) $z = \sqrt{3} - i;$

б) $z = -\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}.$

б) $z = -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}.$

2

Выполните действия и представьте ответ в тригонометрической форме:

а) $3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \cdot 2i;$

а) $2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \cdot (-3i);$

б) $\frac{\sqrt{20}(\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ)}{\sqrt{5}(\cos 48^\circ + i \sin 48^\circ)}.$

б) $\frac{\sqrt{18}(\cos 4^\circ + i \sin 4^\circ)}{\sqrt{2}(\cos 64^\circ + i \sin 64^\circ)}.$

3

Вычислите и представьте ответ в алгебраической форме:

а) $(1 - \sqrt{3}i)^9;$

а) $(-1 + i)^{10};$

б) $\sqrt[4]{-4}.$

б) $\sqrt[3]{-8}.$

4

Разложите на линейные множители:

$3z^3 - 24.$

$2z^4 + 8.$

5

Решите уравнение:

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

$$z^3 - z^2 + z - 1 = 0.$$

Вариант В 1**Вариант В 2****1**

Представьте данные комплексные числа в тригонометрической форме:

а) $z = \frac{2}{-1 + i};$

а) $z = \frac{2}{1 - i};$

б) $z = \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}.$

б) $z = -2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right).$

2

Выполните действия и представьте ответ в тригонометрической форме:

а) $4 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) \cdot \frac{1}{2} i;$

а) $6 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \times$
 $\times \left(-\frac{1}{3} i \right);$

б) $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2i(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)}.$

б) $\frac{i - 1}{2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)}.$

3

Вычислите и представьте ответ в алгебраической форме:

а) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{i - 1} \right)^{20};$

а) $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i} \right)^{10};$

б) $\sqrt[3]{8i}.$

б) $\sqrt[3]{-8i}.$

4

Разложите на линейные множители:

$$z^4 + 2z^2 + 4.$$

$$z^4 - 4z^2 + 16.$$

5

Решите уравнение:

$$(z + i)^6 = z^2 + 2iz - 1.$$

$$(z - 2i)^5 = z^2 - 4iz - 4.$$

**С-32*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ
С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ
(домашняя самостоятельная работа)**

Вариант 1Вариант 2**1**

Постройте на комплексной плоскости
геометрические образы соотношений:

а) $z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} = 0$;

а) $z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} = 0$;

б) $z^2\bar{z}^2 - 5z\bar{z} + 4 \geq 0$;

б) $z^2\bar{z}^2 - 10z\bar{z} + 9 \leq 0$;

в) $\operatorname{Im} \frac{2}{\bar{z} - 1} \geq 1$;

в) $\operatorname{Re} \frac{-2i}{\bar{z} + 1} \geq 1$;

г) $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 10$.

г) $|z + i|^2 + |z - i|^2 = 16$.

2

Выведите с помощью формулы
возведения в степень комплексного
числа в тригонометрической форме
тригонометрические формулы,
выражающие:

а) $\cos 3\alpha$ через $\cos \alpha$;

а) $\sin 3\alpha$ через $\sin \alpha$;

б) $\sin 4\alpha$ через $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.

б) $\cos 4\alpha$ через $\cos \alpha$.

3

Для любых комплексных чисел z_1 и
 z_2 докажите неравенство:

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1| + |z_2|.$$

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|.$$

4

Найдите комплексное число, задающее четвертую вершину параллелограмма, три последовательных вершины которого находятся в точках:

$$z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = -1 - i,$$

$$z_1 = -1 + 2i, \quad z_2 = -3 - i,$$

$$z_3 = 2 - 2i.$$

$$z_3 = 1 - 2i.$$

5

Решите уравнение:

а) $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0;$

а) $(z^2 + 4z + 8)^2 + 3z(z^2 + 4z + 8) + 2z^2 = 0;$

б) $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = 0;$

б) $z^3 + 8z^2 + 15z + 18 = 0;$

в) $(z^2 + z)^4 = 1.$

в) $(z^2 - z)^4 = 16.$

К-5 (КП-6). КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Вариант А 1

Вариант А 2

1

Выполните действия:

а) $2i(3 + i) - 6i^5;$

а) $3i(i - 4) - 12i^7;$

б) $\frac{-1 - i}{1 - i}.$

б) $\frac{3 - 3i}{1 + i}.$

2

Найдите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z > 1, \\ |z| \leq 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Im} z < 1, \\ |z| \geq 2. \end{cases}$$

3

Вычислите:

а) $(2 + 2i)^4$;

б) $\sqrt{-16}$.

а) $(\sqrt{3} + i)^3$;

б) $\sqrt{-25}$.

4

Решите уравнение:

а) $z + iz = 1 + 7i$;

б) $z^2 + 4z + 13 = 0$.

а) $z - iz = 8 + 2i$;

б) $z^2 - 2z + 10 = 0$.

5Найдите значение a , при котором числа

$a^2 + 1 + 6i$ и $5 - 3ai$

$a^2 - 3 - 4i$ и $-2 + 4ai$

являются сопряженными.

Вариант Б 1**1**

Выполните действия:

а) $\frac{5 - 15i}{1 + 2i} - (1 - 3i)^2$;

б) $\frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)}{i^{23}} \times$

$\times (2 - 2i)$.

Вариант Б 2

а) $\frac{30 + 20i}{3 - i} + (2i - 3)^2$;

б) $\frac{2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)}{i^{17}} \times$

$\times (\sqrt{3} + 3i)$.

2

Найдите геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} |z + 3i| \leq 3, \\ \operatorname{Re} z > -\operatorname{Im} z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z - 3| < 3, \\ \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Im} z. \end{cases}$$

③

Вычислите:

а) $(-1 + i\sqrt{3})^{12}$;

а) $(\sqrt{3} - i)^6$;

б) $\sqrt[3]{27i}$.

б) $\sqrt{-9i}$.

④

Решите уравнение:

а) $|z + 1| + i|z| = 4\sqrt{2} + 5i$;

а) $|z - i| - i|z| = 3\sqrt{2} - 5i$;

б) $z^2 + 2iz - 5 = 0$.

б) $z^2 - 4iz - 20 = 0$.

⑤

Даны комплексные числа

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3} \text{ и } z_2 = -\sqrt{3} + i. \quad z_1 = 1 - i\sqrt{3} \text{ и } z_2 = \sqrt{3} - i.$$

Задайте равенством геометрическое место точек комплексной плоскости, лежащих на прямой, содержащей биссектрису угла $z_1 O z_2$.

Вариант В 1Вариант В 2

①

Выполните действия:

а) $\frac{(2i + 3)^2}{i - 1} - \frac{i^{41}}{i + 1}$;

а) $\frac{(2i - 3)^2}{i + 1} + \frac{i^{43}}{i - 1}$;

б) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6 + \left(\frac{1}{\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}}\right)^6$.

б) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6 + \left(\frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin \frac{5\pi}{4}}\right)^6$.

2

Найдите геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} |z - 1 + i| \geq |z + 1 - i|, \\ \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z - 2) \leq \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z + 1 + i| \geq |z - 1 - i|, \\ \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z + 2) \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3

Вычислите:

а) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{-6}$;

а) $\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{-12}$;

б) $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$.

б) $\sqrt{3 + 4i}$.

4

Решите уравнение:

а) $|z|^2 + \bar{z} - 2iz = 2i$;

а) $|z|^2 - 3z + 3i = i\bar{z}$;

б) $(z + 1)^4 = (z - i)^4$.

б) $(z + i)^4 = (z - i)^4$.

5

Докажите, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2

$$\begin{aligned} & |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = \\ & = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \end{aligned}$$

если $|z_1| = |z_2| = d$, то

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4d^2.$$

Какова геометрическая интерпретация этого равенства?

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ И ОБОБЩЕНИЕ СВЕДЕНИЙ ОБ УРАВНЕНИЯХ, НЕРАВЕНСТВАХ И ИХ СИСТЕМАХ

С-33. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ

Вариант А 1

①

Решите уравнение:

а) $\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{1-3x} = x+5$;

б) $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$;

в) $2\sin^2 x - \sin 2x = 4\cos^2 x$.

②

Решите неравенство:

а) $2^{2x+3} - 9 \cdot 2^x + 1 \leq 0$;

б) $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \leq \sqrt{2}$.

③

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2^x + 2^y = 6. \end{cases}$$

Вариант А 2

а) $\sqrt{2-x} \cdot \sqrt{1-2x} = x+4$;

б) $\log_{0.5}^2 x + \log_{0.5} x - 2 = 0$;

в) $2\cos^2 x + \sin 2x = 4\sin^2 x$.

а) $(0,5)^{2x-3} + 7 \cdot (0,5)^x - 1 \leq 0$;

б) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \geq -\sqrt{2}$.

④

Решите задачу:

Печатая каждый день на 3 листа больше, чем планировалось, машинистка

Садовник должен засеять газон площадью 100 м². Каждый день он засеивал на

закончила работу объемом 60 листов на 1 день раньше срока. Сколько листов она печатала каждый день?

5 м² больше, чем планировал, а поэтому закончил работу на 1 день раньше срока. За сколько дней садовник засеял газон?

Вариант Б 1

1

Решите уравнение:

а) $x^2 + 8x - 2\sqrt{x^2 + 8x} = 3$;

б) $2\log_3 x = 1 + \log_3(x + 6)$;

в) $\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg} 2x$.

Вариант Б 2

2

Решите неравенство:

а) $(0,5)^{1-\frac{3}{x}} \geq 8 \cdot (0,5)^x$;

а) $2^{1+\frac{4}{x}} \geq 0,25 \cdot 2^x$;

б) $\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x < -\frac{1}{2}$.

б) $\cos 2x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \sin 2x > -\frac{1}{2}$.

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x - 3^{2y} = 7, \\ 3^y - 2^{\frac{y}{2}} = -1. \end{cases}$$

4

Решите задачу:

Один рабочий изготавливает 90 деталей на 1 ч быстрее, чем другой рабочий 100 дета-

Один насос перекачивает 96 м³ воды на 2 ч быстрее, чем другой 112 м³ воды.

лей. Сколько деталей изготавливает за 1 ч каждый рабочий, если первый рабочий изготавливает за час на 5 деталей больше, чем второй?

Сколько воды перекачивает каждый насос за 1 ч, если первый перекачивает за час на 2 м^3 воды больше, чем второй.

Вариант В 1

1

Решите уравнение:

$$\text{а) } \sqrt{x + 2\sqrt{x - 3}} - 2 + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 3}} - 2 = x - 3;$$

$$\text{б) } x^{4\log_2^2 x - 5\log_2 x} = 0,5;$$

$$\text{в) } \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} = 1.$$

2

Решите неравенство:

$$\text{а) } |x - 1|^{x^2 - 2x} \geq |x - 1|^3;$$

$$\text{б) } |\cos x| \leq \sin x.$$

$$\text{а) } \sqrt{x + 2\sqrt{x - 2}} - 1 + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 2}} - 1 = x - 2;$$

$$\text{б) } x^{\log_3^2 x + 2\log_3 x} = 27;$$

$$\text{в) } \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 - \sin 2x}} = -1.$$

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ y^{x^2 - 7x + 12} = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 11, \\ x^{x^2 - 5y + 6} = 1. \end{cases}$$

4

Решите задачу:

Один тракторист может вспахать поле на 24 ч быстрее,

Один комбайнер работал на уборке зерна 9 ч, после чего

чем другой. Второй тракторист проработал 8 ч, после чего к нему присоединился первый тракторист. Через 20 ч совместной работы оказалось, что они вспахали $\frac{2}{3}$ поля. За сколько часов может вспахать поле каждый тракторист, работая самостоятельно?

к нему присоединился другой комбайнер. Через 6 часов совместной работы выяснилось, что они убрали $\frac{1}{2}$ поля. За сколько часов уберет такое поле каждый комбайнер, работая самостоятельно, если первому комбайнеру на это понадобится на 9 ч больше, чем второму?

С-34. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Вариант А 1

①

Решите уравнение относительно переменной x :

$$a^2x + 1 = a + x.$$

$$a^2x - 3 = a + 9x.$$

②

Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a :

$$|x^2 - 6x| = a?$$

$$|x^2 + 4x| = a?$$

Вариант Б 1

①

Найдите все значения параметра a , при которых данное уравнение не имеет корней:

$$2\cos 2x - 4a \cos x + a^2 + 2 = 0.$$

$$4^x - 6a2^{x-1} + 2a^2 + 1 = 0.$$

Вариант Б 2

2

Найдите все значения параметра a , при которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 15|$$

больше, чем 1.

$$f(x) = 4ax + |x^2 - 6x + 5|$$

больше, чем -24 .

Вариант В1**1**

Найдите все значения параметра a , при которых данное уравнение имеет ровно 3 корня:

$$|x^2 + 2x - 3| - 2a = |x + a| - 1.$$

$$|x^2 - 2x - 3| - 2a = |x - a| - 1.$$

2

Найдите все значения параметра a , при которых данная система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x^2 - 4y + 40 = 5a - y^2 - 12x; \\ |x + 3| = 1 - |y - 3|. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y + 10 = 2a - y^2 - 6x; \\ |x - 4| = 2 - |y + 4|. \end{cases}$$

К-6 (КП-7). ОБОБЩЕНИЕ СВЕДЕНИЙ О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ

Вариант А1**1**

Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x + 1} = x - 1$;

Вариант А2

а) $\sqrt{x + 3} = x - 3$;

б) $2^{x+2} - 4^x = 4$.

б) $\log_x (2x^2 - 4x + 3) = 2$.

2**Решите неравенство:**

а) $\lg x > 2 + 3 \log_{0,1} x$;

а) $\log_2 x + 1 < 2 \log_{\frac{1}{2}} x$;

3**Решите систему уравнений:**

$$\begin{cases} \sqrt[3]{y} - \sqrt{x} = -4, \\ \sqrt{x} + \sqrt[3]{y} = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[5]{x} - \sqrt{y} = -3, \\ \sqrt[5]{x} + \sqrt{y} = -1. \end{cases}$$

4*

Найдите все значения a , при каждом из которых данное уравнение имеет ровно два корня:

$|x^2 - 4x| = a$.

$|x^2 - 6x| = a$.

Вариант Б 1**1****Решите уравнение:**

а) $\log_2 (9 - 2^x) = 3 - x$;

а) $\log_3 (3^x - 6) = 3 - x$;

б) $(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x) \sqrt{8 \cos x} = 0$.

б) $(\sqrt{3} \sin x - 2 \sin^2 x) \times$

$\times \log_6 (-\operatorname{tg} x) = 0$.

2**Решите неравенство:**

а) $\frac{2 \log_4 (x^2 + 3x)}{\log_2 x^2} \leq 1$;

а) $\frac{2 \log_5 (x^2 - 5x)}{\log_5 x^2} \leq 1$;

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{y} - \sqrt{x} = 7, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} = 18. \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt[4]{x} - \sqrt{y} = 1, \\ \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{y} = 2. \end{cases}$$

4Найдите все значения a , при которых данная система уравнений имеет ровно два решения:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ |x + |y|| = a. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ |x| + y = a. \end{cases}$$

Вариант В 1**1**

Решите уравнение:

а) $\sqrt{2 - |3 - x|} = 2x - 7$;

б) $(4 \sin^2 x - 4 \sin x - 3) \times$
 $\times \log_2 \cos x = 0$.

а) $\sqrt{3 - |5 - x|} = 3x - 20$;

б) $(4 \cos^2 x + 12 \cos x + 5) \times$
 $\times \sqrt{5 \sin x} = 0$.

2

Решите неравенство:

а) $\log_{\frac{1}{36}} (22 - 3x) \cdot \log_{8-x} \frac{1}{36} \geq 1$.

а) $\log_{\frac{1}{16}} (53 - 13x) \times$
 $\times \log_{5-x} 0,25 \geq 1$.

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5^{2x} - 3^y = 16, \\ 5^x + 3^{\frac{y}{2}} = 8. \end{cases} \quad \begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7. \end{cases}$$

4

Найдите все значения a , при каждом из которых данная система уравнений имеет ровно три решения:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4, \\ y = |x-a| + 1. \end{cases} \quad \begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = |x-a| + 1. \end{cases}$$

К-7 (КП-8). ИТОВОГОЕ ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА

Вариант А 1

Вариант А 2

1

Найдите значение выражения:

а) $12 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \pi$;

а) $\frac{5 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{6}}$;

б) $\log_7 147 - \log_7 3$.

б) $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$.

2

Решите уравнение:

а) $2 \lg x = \lg(x+2)$;

а) $2 \ln x = \ln(x+6)$;

б) $1 - \cos 4\pi x = \sin 2\pi x$.

б) $1 + \cos 4\pi x = \cos 2\pi x$.

В п. б) в ответ запишите наименьший положительный корень.

3

Решите неравенство:

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x) \geq -1$.

$\log_3(x^2 + 2x) \leq 1$.

В ответ запишите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного из целых решений неравенства.

4

Найдите наибольшее значение для данной функции на данном отрезке:

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x, \quad [-2; 0].$$

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}, \quad [0; 2].$$

5

Найдите все значения параметра a , при которых данное уравнение имеет единственный корень:

$$(\sqrt{x} - a)\left(x - \frac{16}{x}\right) = 0.$$

$$(\sqrt{x} - a)\left(\frac{25}{x} - x\right) = 0.$$

Вариант Б 1

1

Найдите значение выражения:

а) $\frac{12 \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ}{\cos 54^\circ}$;

а) $\frac{5 \sin 66^\circ}{\cos^2 12^\circ - \sin^2 12^\circ}$;

б) $\log_8 \log_{11} \sqrt[16]{121}$.

б) $27^{\log_3 \sqrt[3]{17}}$.

2

Решите уравнение:

а) $2^{\log_2(x^2+5x-6)} = 4x$;

а) $3^{\log_3(x^2-5x-6)} = -4x$;

б) $\sin \pi x + \sin 3\pi x = \sin 4\pi x$.

б) $\cos \pi x - \cos 3\pi x = \sin 4\pi x$.

В п. б) в ответ запишите сумму всех решений уравнения из промежутка $[0,5; 2]$

3

Решите неравенство:

$$(0,4)^{2-x} \leq (2,5)^{1-\frac{2}{x}}.$$

В ответ запишите наименьшее целое положительное решение неравенства.

$$(0,2)^{3-x} \leq 5^{1-\frac{3}{x}}.$$

В ответ запишите наибольшее целое отрицательное решение неравенства.

4

Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений для данной функции на данном отрезке:

$$f(x) = x \ln x, [e^{-2}, 1].$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, [1; e^2].$$

5

Найдите все значения параметра a , при которых данное уравнение имеет два различных корня:

$$(\sqrt{x} - a)(3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27) = 0.$$

$$(2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32)(a - \sqrt{x}) = 0.$$

Вариант В 1**1**

Найдите значение выражения:

$$a) \frac{44 \sin 17^\circ \cdot \cos 17^\circ \cdot \cos 34^\circ}{2 \cos^2 11^\circ - 1};$$

$$b) \frac{\log_9 \sqrt[4]{25}}{\log_{27} \sqrt[8]{125}}.$$

Вариант В 2

$$a) \frac{1 - 2 \sin^2 31^\circ}{20 \sin 7^\circ \cdot \cos 7^\circ \cdot \cos 14^\circ};$$

$$b) \log_4 \sqrt[6]{3} \cdot \log_3 64.$$

2

Решите уравнение:

$$a) 2 \log_2 x^2 - \log_2^2(-x) = 3;$$

$$a) \log_3 x^2 + \log_3^2(-x) = 3.$$

$$\text{б) } \frac{\sin \pi x + \sin 2\pi x + \sin 3\pi x}{1 + \cos \pi x} = 0. \quad \text{б) } \frac{\cos \pi x + \sin 2\pi x - \cos 3\pi x}{1 + \sin \pi x} = 0.$$

В п. б) в ответ запишите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней.

3

Решите неравенство:

$$(\sin 30^\circ)^{\sqrt{x^2-x-2}} < (\log_4 2)^{4+x}. \quad (\operatorname{tg} 60^\circ)^{\sqrt{x^2+x-2}} > (\log_4 64)^{\frac{4-x}{2}}.$$

В ответ запишите целое решение неравенства с наименьшим модулем.

4

Найдите наибольшее значение

функции на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$f(x) = 2 \sin x + \cos 2x.$$

$$f(x) = 2 \cos x + \sin 2x.$$

5

Найдите все значения параметра a , при которых данное уравнение имеет единственный корень:

$$\log_x (ax - 16) = 2.$$

$$\log_{-x} (ax - 9) = 2.$$

ОТВЕТЫ

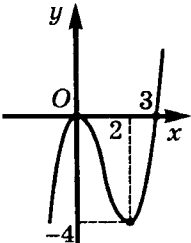
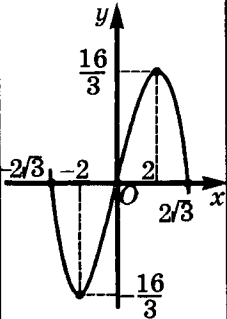
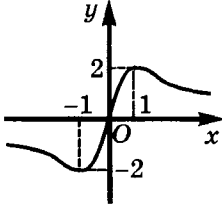
ОТВЕТЫ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ*

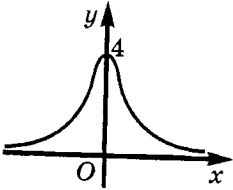
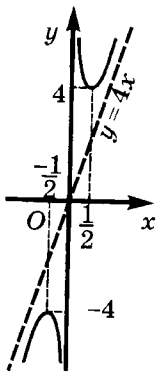
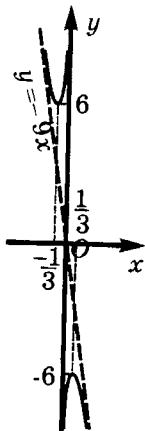
К-1 (КП-1)	А1	А2	Б1
1а)	$6x^2 - x$	$20x^4 + x^2$	$x^3 + \frac{16}{x^5} + \frac{4}{\sqrt{x}}$
1б)	$-2 \sin x - \frac{3}{\cos^2 x}$	$4 \cos x + \frac{5}{\sin^2 x}$	$2x \cos x - (x^2 + 1) \sin x$
1в)	$\frac{5}{(x+2)^2}$	$\frac{5}{(x+3)^2}$	$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$
2	$y = 3x + 6$	$y = -7x + 12$	$y = -4x + 5$
3	0; 1	1	$\pi n ; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$
4	12 м/с	4 м	17 м/с
5	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$

К-1 (КП-1)	Б2	В1	В2
1а)	$-\frac{9}{x^4} + x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}}$	$(x+1)(3x-1)$	$(x-1)(3x+1)$
1б)	$-2x \sin x - (4-x^2) \cos x$	$-\frac{2 \cos x}{\sin^3 x} + 2 \sin 2x$	$\frac{1}{3} \cos \frac{x}{3} - \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$
1в)	$\frac{x^2 + 4x - 12}{(x+2)^2}$	$\frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$	$\frac{4x-8}{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}$

* Здесь и далее $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}$.

2	$y = -6x + 19$	$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$	$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$
3	$\frac{\pi}{2} + \pi n ; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$	[1,375; 1,5)	(0,5; 0,625]
4	0 м/с ²	16 м/с	0 м/с ²
5	$\frac{\pi}{6}$	(2; 2,5)	(-2; -1,5)

К-2 (КП-2)	A1	A2	B1
1а)	- 1; 0; 1	- 3; 0; 3	Возрастает на $(-\infty; -4]$, $[2; +\infty)$; убывает на $[-4; -1)$, $(-1; 2]$
1б)	- 6; - 2	2; 6	Возрастает на $\left[0; \frac{1}{4}\right]$; убывает на $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$
2	$1; \frac{1}{e}$	1; e^4	e^2 ; 0
3	$y = x^3 - 3x^2$ 	$y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$ 	$y = \frac{4x}{1+x^2}$ 
4	- 0,5	0,5	12 = 9 + 3

К-2 (КП-2)	Б2	В1	В2
1а)	Возрастает на $(-\infty; -2]$, $[4; +\infty)$; убывает на $[-2; 1)$, $(1; 4]$	$x_{\min} = 0, x_{\max} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$	$x_{\min} = -1, x_{\max} = 1$
1б)	Возрастает на $[4; +\infty)$; убывает на $[0; 4]$	$x_{\max} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$ $x_{\min} = \pi k$	$x_{\min} = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $x_{\max} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$
2	$e^2; 0$	$\ln 2; 0$	$-\ln 3; -\ln 2$
3	$y = \frac{4}{x^2 + 1}$ 	$y = \frac{4x^2 + 1}{x}$ 	$y = -\frac{9x^2 + 1}{x}$ 
4	$20 = 15 + 5$	3	$-\sqrt{2}$

(КП-3)	Б1	Б2	В1	В2
1а)	-1	2	-1	1
1б)	1; 2	-1; 2	0; 1	1; 2
2	$(-\infty; 0]$	\emptyset	$[0; 4]$	$(0; 1]$

(КП-3)	Б1	Б2	В1	В2
3	$(-1; 1), (3; 3)$	$(-1; 1), (2; 2)$	$(3; 3)$	$(-2; -2)$
4*	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$	$[0; 4]$	$[-8; 0]$

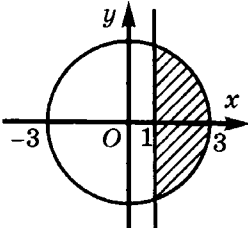
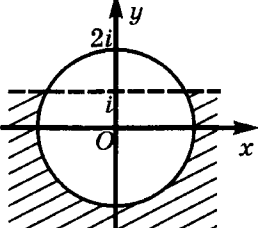
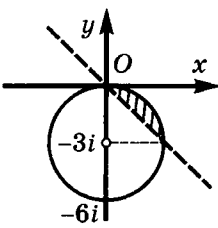
К-3 (КП-4)	А1	А2	Б1
1а)	$\frac{x^4}{4} - 4\sqrt{x} + c$	$\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{x^3}{3} + c$	$-\frac{1}{3} \operatorname{ctg} x - \frac{1}{2x^2} + c$
1б)	$\operatorname{tg} x + 3\cos x + c$	$2 \sin x + \operatorname{ctg} x + c$	$x + 4 \sin \frac{x}{4} + c$
2а)	$x^3 - 2x^2 + 2x + 5$	$4x + x^2 - 2x^3 - 12$	$x^2 - 4\sqrt{1-x}$
2б)	$2 \sin \frac{x}{2}$	$-\frac{1}{3} \cos 3x$	$-2 \cos 3x + 1$
2в)	$3 \ln x + 2 + 1$	$2 \ln x - 3 + 3$	$x^2 - \frac{1}{2} \ln 4x - 5 - 1$
3а)	$2\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$
3б)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
4	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$
5	-2	6	12 М

К-3 (КП-4)	Б2	В1	В2
1а)	$\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5} \operatorname{tg} x + c$	$\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - 2x + c$	$\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 - 4x + c$
1б)	$-\frac{1}{5} \cos 5x - \frac{x^2}{2} + c$	$-\operatorname{ctg} x - 2x + c$	$2x - \operatorname{tg} x + c$

К-3 (КП-4)	Б2	Б1	Б2
2а)	$3x - 2\sqrt{5-x} + 18$	$2x^2 + 8x + 11$	$3x - \frac{x^2}{2} + 2,5$
2б)	$2 \sin \frac{x}{4}$	$\frac{8}{x} - 2x + 4$	$\frac{9}{x^2} + 2x - 3$
2в)	$x^3 + 2 \ln 3x - 1 + 3$	$-2 \ln 7 - 3x + 3$	$4 \ln 0,5x - 1 - 2$
3а)	1	$3 + \sqrt{3}$	$-\frac{1}{6}$
3б)	$\frac{1}{12}$	1	1
4	$4 \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4
5	8 м	$4x - 3$	$4 - 2x$

К-4 (КП-5)	А1	А2	Б1	Б2
1а)	32	162	0	0
1б)	$24x^2$	$40x^2$	$-160x^3$	$54x^2$
2	28	56	70	56
3	$x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$	$x^4 - 4x^2 + 6 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}$	128	256
4а)	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0,2	0,1
4б)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0,1	0,2
5а)	0,35	0,15	0,54	0,36

К-4 (КП-5)	В1	В2
1а)	0	0
1б)	512; 1	256; 1
2	20	20
3	$2^{14}\sqrt{2} \cdot C_{50}^{29}$	$C_{60}^{38} \cdot 3^{19}$
4а)	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$
4б)	0,2	$\frac{1}{3}$
5а)	$\frac{28}{435}$	$\frac{11}{203}$
5б)	$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 + 8 \cdot 7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 \cdot 3}{30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{113}{2030}$	$\frac{12 \cdot 11 + 8 \cdot 7 + 5 \cdot 4}{30 \cdot 29} = \frac{104}{435}$

К-5 (КП-6)	А1	А2	Б1
1а)	-2	-3	$3 + i$
1б)	$-i$	$-3i$	-4
2			
3а)	-64	$8i$	2^{12}
3б)	$\pm 4i$	$\pm 5i$	$\pm \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}; -3i$
4а)	$4 + 3i$	$3 + 5i$	$3 \pm 4i$
4б)	$-2 \pm 3i$	$1 \pm 3i$	$\pm 2 - i$
5	$a = 2$	$a = 1$	$\operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z$

К-5 (КП-6)	Б2	Б1	Б2
1а)	$12 - 3i$	$-9 + 3i$	$-4 - 8i$
1б)	$-4\sqrt{3}$	$2i$	$-2i$
2			
3а)	-64	1	1
3б)	$\pm \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right)$	$\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}; -\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$	$2 + i; -2 - i$
4а)	$\pm 3 + 4i$	$-1; -2i$	$3; i$
4б)	$\pm 4 + 2i$	$0; -1 + i$	$0; \pm 1$
5	$\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$	Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон	Сумма квадратов диагоналей ромба в 4 раза больше квадрата его стороны

К-6 (КП-7)	А1	А2	Б1
1а)	4	1	$0; 3$
1б)	1	3	$2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n$
2	$[\sqrt{10}; +\infty)$	$\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)$	$(-\infty; -3) \cup (0; 1)$
3	$(9; -1)$	$(-32; 1)$	$(4; 729)$
4	$a = 0; a > 4$	$a = 0; a > 9$	$a = 2\sqrt{2}; -2 < a < 2$

К-6 (КП-7)	Б2	В1	В2
1а)	2	4	7
1б)	$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$	$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $2\pi n$	$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; πn
2	$(-1; 0) \cup (5; 6]$	$(-\infty; 7) \cup \left(7; 7\frac{1}{3}\right)$	$(-7; 4) \cup \left(4; 4\frac{1}{13}\right)$
3	(16;1)	(1;2)	(4;1)
4	$a = 3\sqrt{2}$; $-3 < a < 3$	$a = 4 - 2\sqrt{2}$; $a = 2\sqrt{2}$	$a = 6 - 3\sqrt{2}$; $a = 3\sqrt{2}$

К-7 (КП-8)	А1	А2	Б1
1а)	-6	10	6
1б)	2	2	-1
2а)	2	3	2
2б)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	7
3	2	-2	1
4	1	1	$-\frac{1}{e}$
5	$a \leq 0$, $a = 2$	$a \leq 0$, $a = \sqrt{5}$	$a < 0$, $a = 1$, $a = \sqrt{2}$

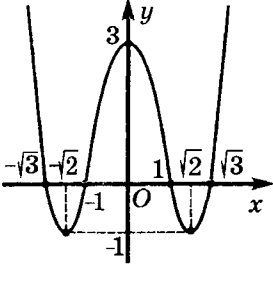
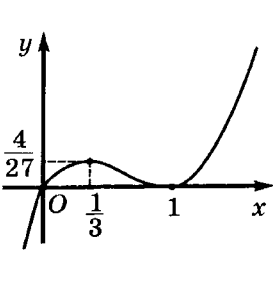
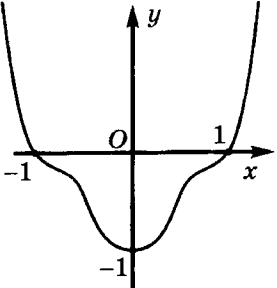
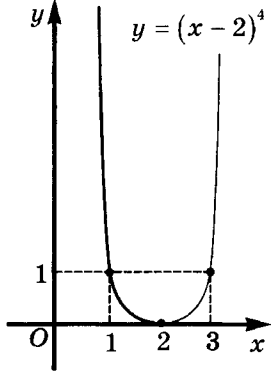
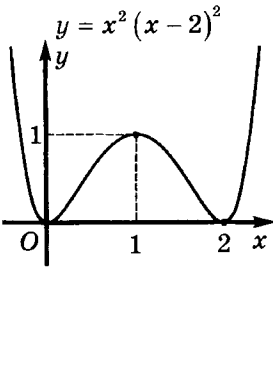
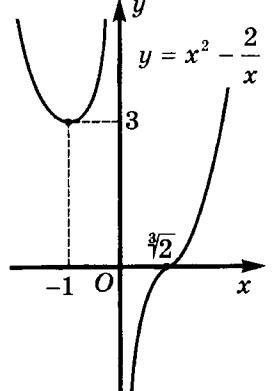
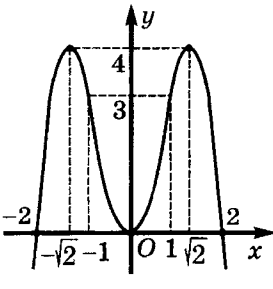
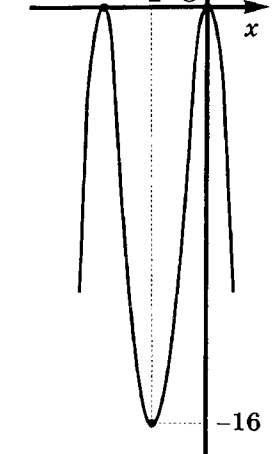
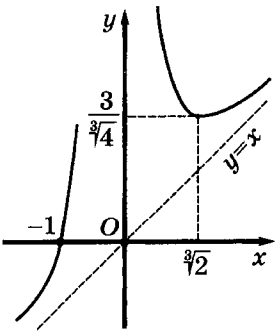
К-7 (КП-8)	Б2	В1	В2
1а)	5	11	0,2
1б)	17	2	0,5
2а)	-2	-8; -2	-3; $-\frac{1}{27}$
2б)	$5\frac{5}{6}$	0	$\frac{1}{3}$

К-7 (КП-8)	Б2	В1	В2
3	-1	-3	3
4	$\frac{1}{e}$	1,5	$\frac{3\sqrt{3}}{3}$
5	$a < 0, a = \sqrt{2}, a = \sqrt{3}$	$a = 8, a = 17$	$a = -10, a = -6$

ОТВЕТЫ К ДОМАШНИМ САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ РАБОТАМ

С-7*	Вариант 1	Вариант 2
2	3), 4)	1), 2)
3а)	$y = x$	$y = 2x$
3б)	$y = 2$	$y = 1$
3в)	$x = -1, x = 2; y = 0$	$x = -3; x = 2; y = 0$
3г)	$x = 1$	$x = 1$
3д)	$x = -3; x = 3; y = x$	$x = -2; x = 2; y = x$

С-10*	А	Б	В
1	$y = x^3 - 3x$	$y = 0,5x^2 - 0,2x^5$	$y = 3x^4 - 4x^3 + 2$

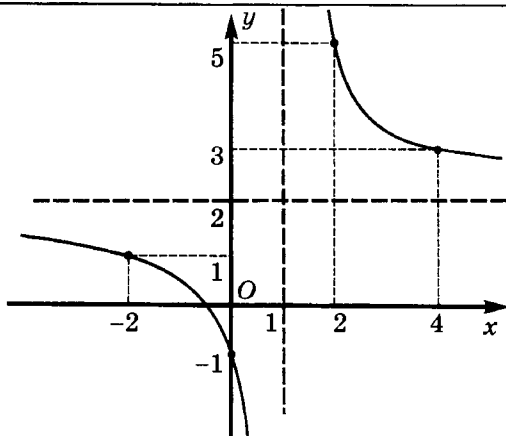
<p>2</p>	<p>$y = x^4 - 4x^2 + 3$</p> 	<p>$y = x(x-1)^2$</p> 	<p>$y = (x^2 - 1)^3$</p> 
<p>3</p>	<p>$y = (x-2)^4$</p> 	<p>$y = x^2(x-2)^2$</p> 	<p>$y = x^2 - \frac{2}{x}$</p> 
<p>4</p>	<p>$y = 4x^2 - x^4$</p> 	<p>$y = -x^2(x+4)^2$</p> 	<p>$y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$</p> 

С-10*

А

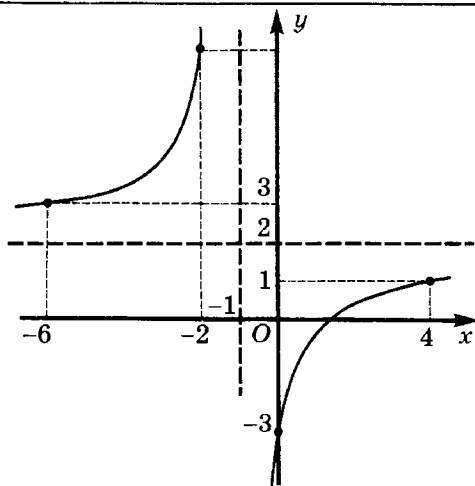
5

$$y = \frac{2x + 1}{x - 1}$$



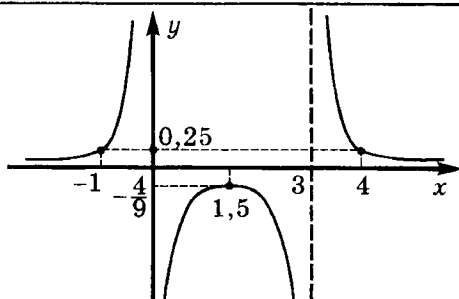
6

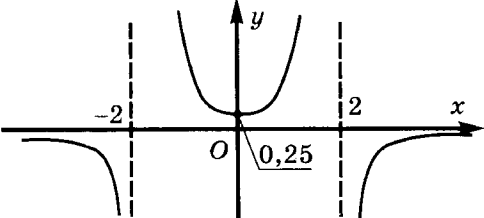
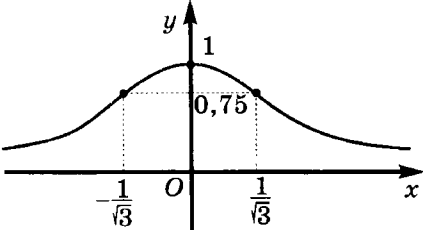
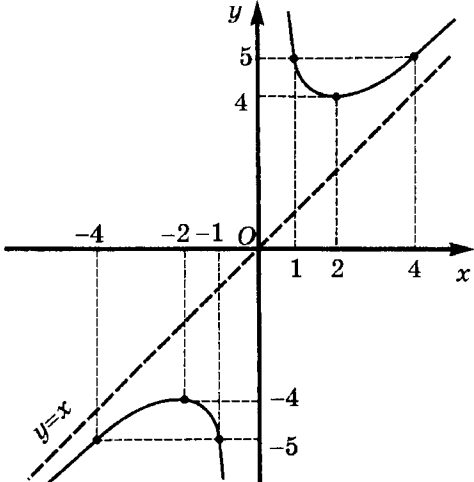
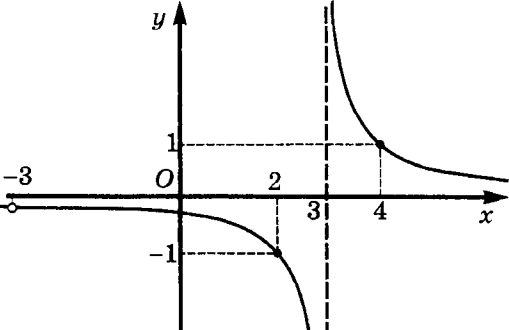
$$y = \frac{2x - 3}{x + 1}$$

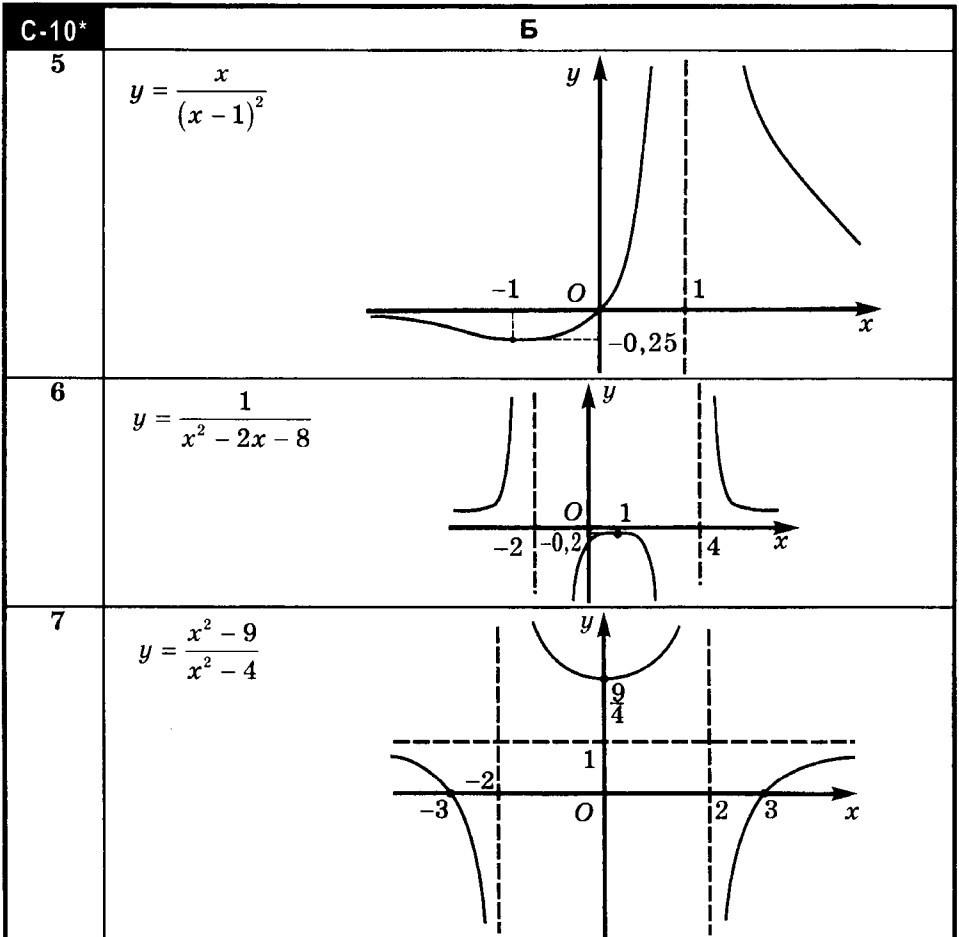
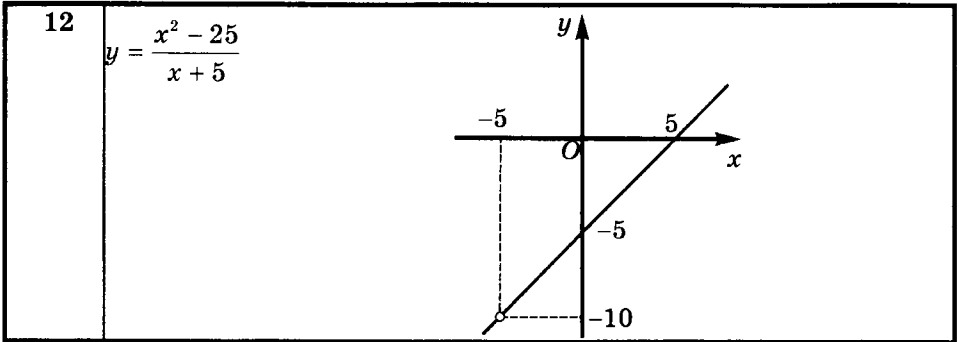


7

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x}$$

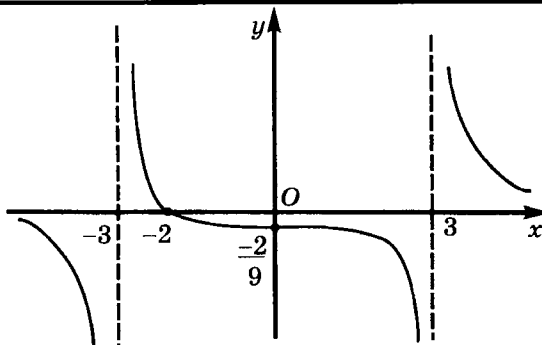


<p>8</p>	$y = \frac{1}{4 - x^2}$	
<p>9</p>	$y = \frac{1}{x^2 + 1}$	
<p>10</p>	$y = x + \frac{4}{x}$	
<p>11</p>	$y = \frac{x + 3}{x^2 - 9}$	



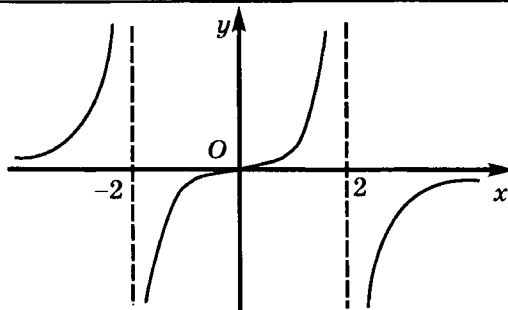
8

$$y = \frac{x+2}{x^2-9}$$



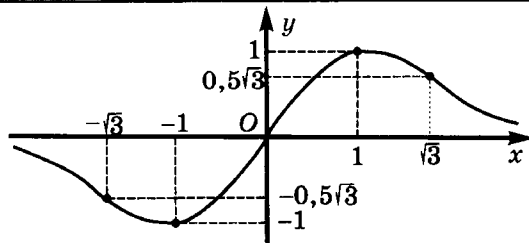
9

$$y = \frac{x}{4-x^2}$$



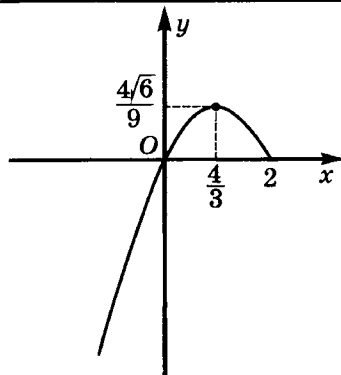
10

$$y = \frac{2x}{x^2+1}$$



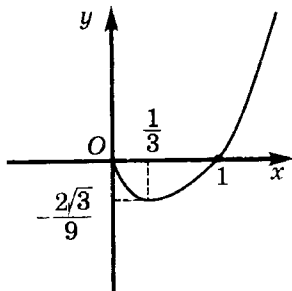
11

$$y = x\sqrt{2-x}$$



12

$$y = (x-1)\sqrt{x}$$

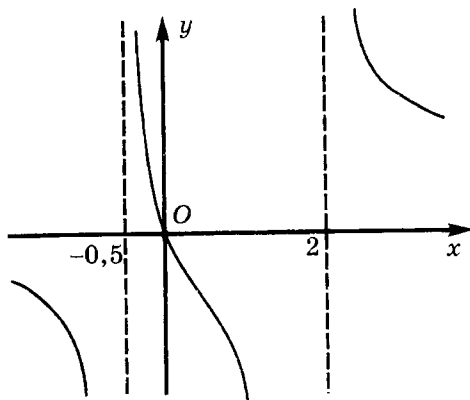


С-10*

B

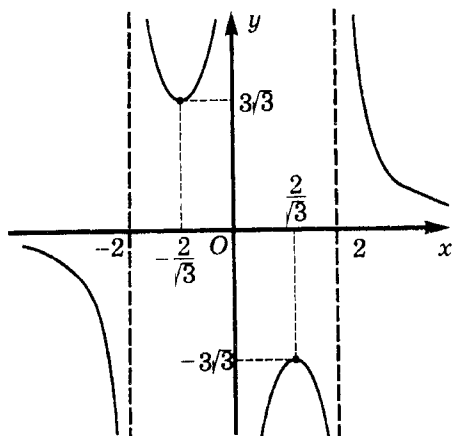
5

$$y = \frac{7x}{2x^2 - 3x - 2}$$



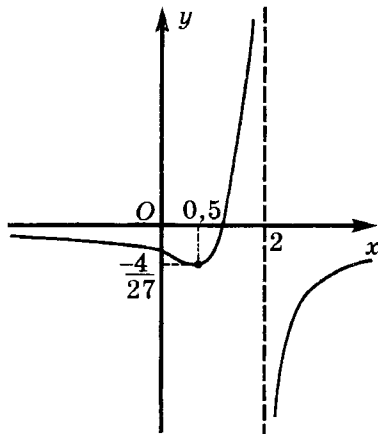
6

$$y = \frac{16}{x^3 - 4x}$$



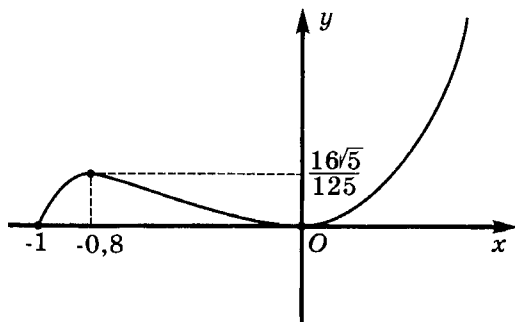
7

$$y = \frac{1-x}{(x-2)^3}$$



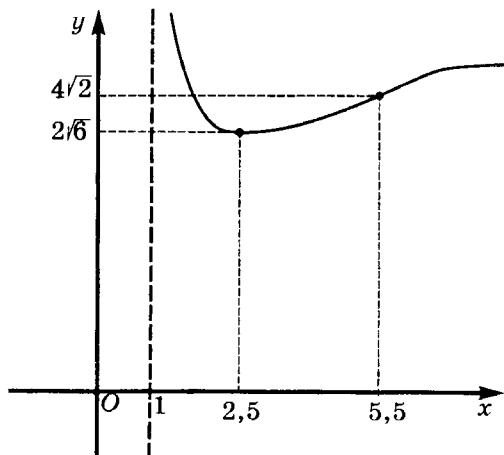
8

$$y = x^2\sqrt{x+1}$$



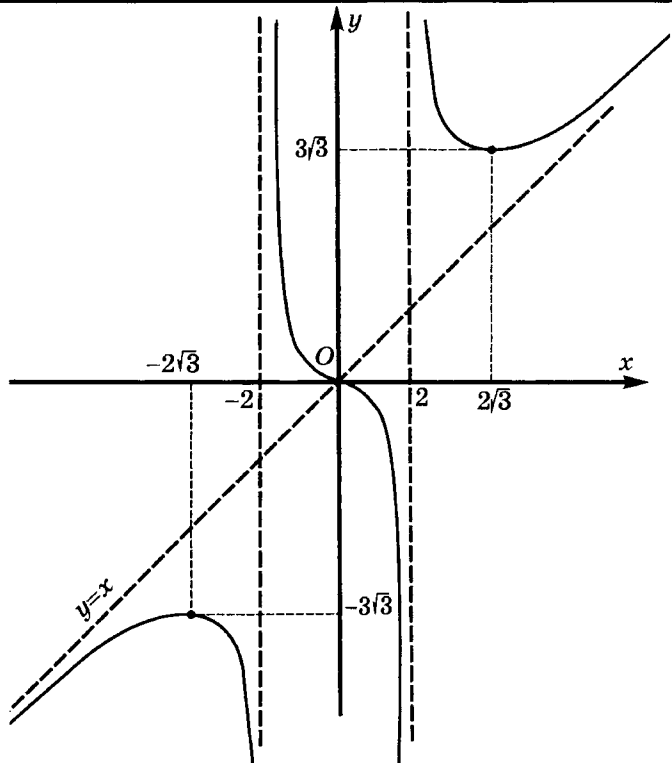
9

$$y = \frac{2x+1}{\sqrt{x-1}}$$



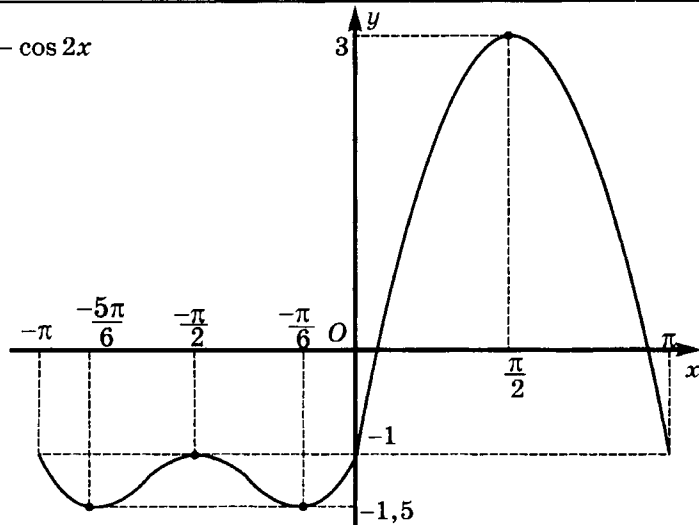
10

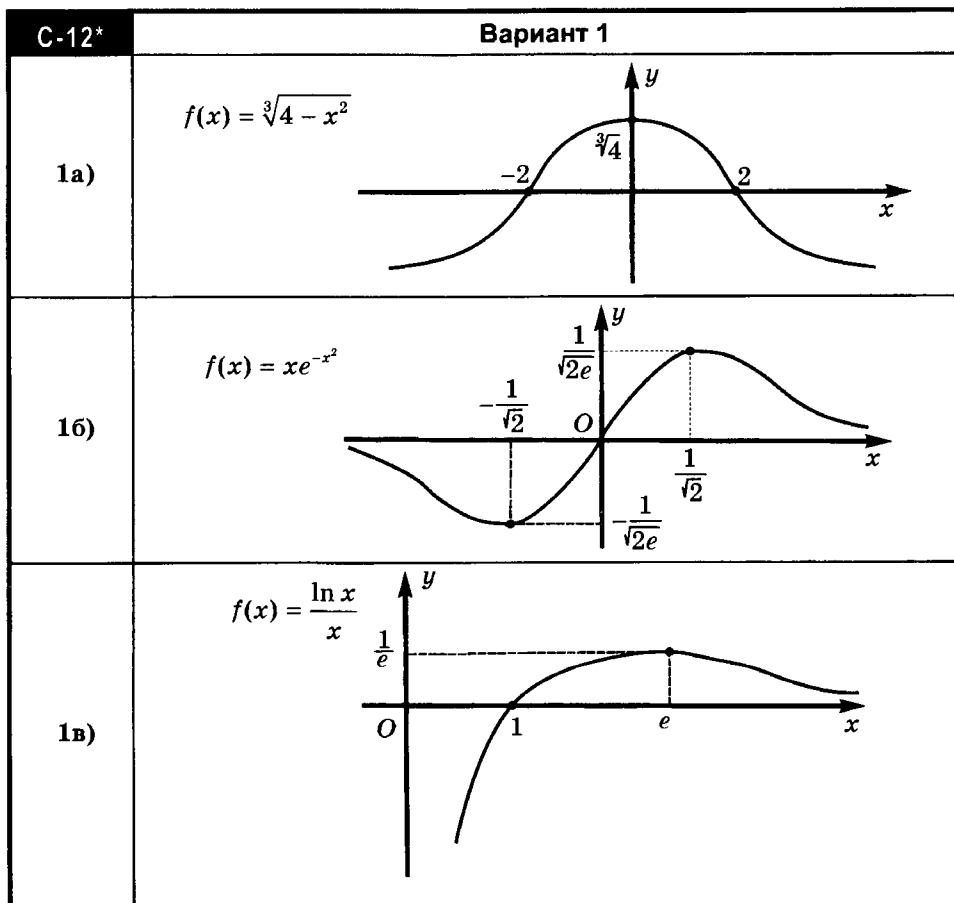
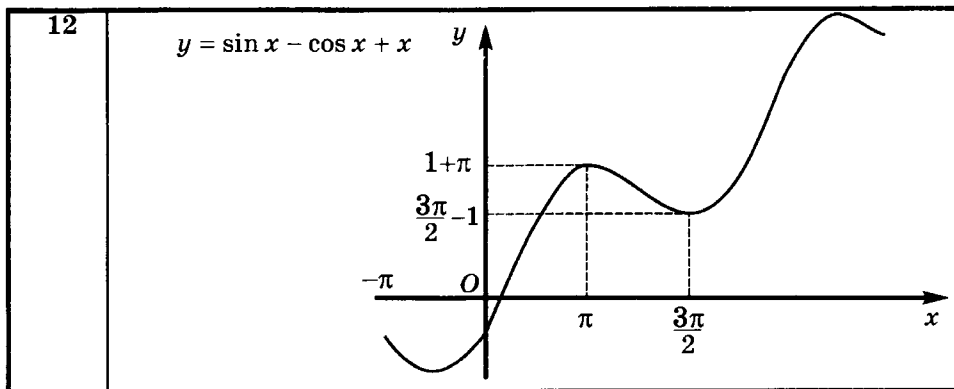
$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

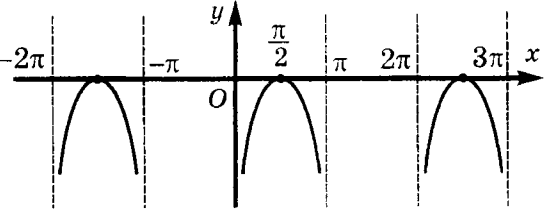
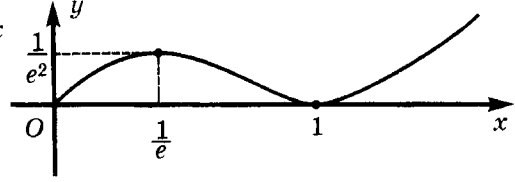
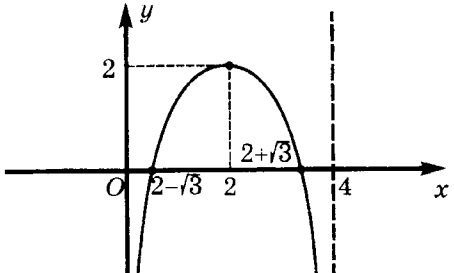


11

$$y = 2 \sin x - \cos 2x$$





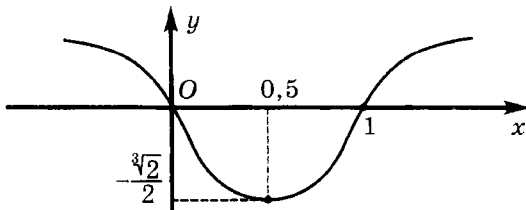
1г)	$f(x) = \ln \sin x$ 
1д)	$f(x) = x^2 \ln^2 x$ 
1е)	$f(x) = \log_2(4x - x^2)$ 
2	$y = -5x - 6; y = -x - 2$
3	$y = 8x - 20$
4	$y = -x - 2,25$
5	13,5
6	$\frac{\pi}{3}$
7	3

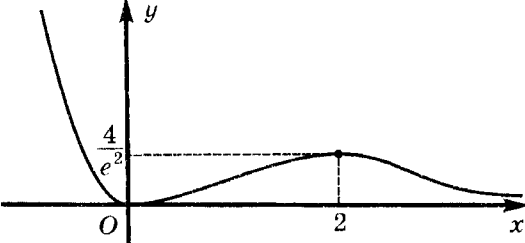
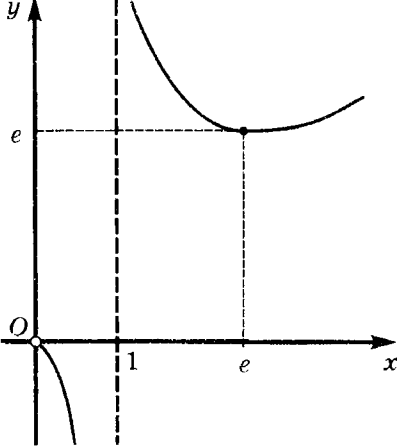
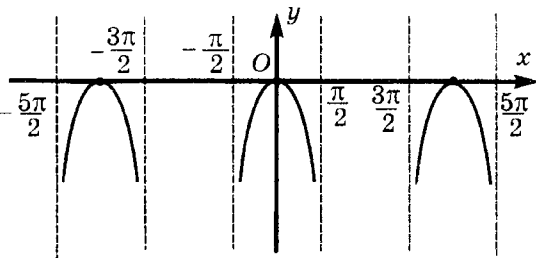
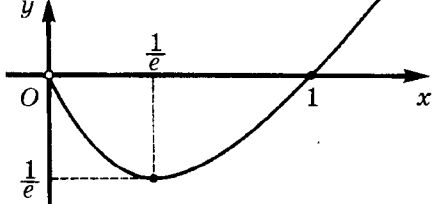
С-12*

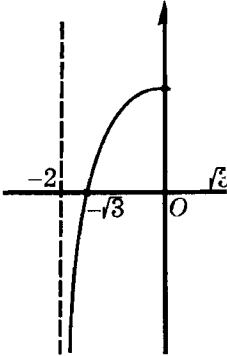
Вариант 2

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$$

1а)



<p>16)</p>	<p>$f(x) = x^2 e^{-x}$</p>  <p>The graph shows the function $f(x) = x^2 e^{-x}$ for $x \geq 0$. The curve starts at the origin O, rises to a local maximum at $x = 2$ with a y-value of $\frac{4}{e^2}$, and then gradually decays towards the x-axis as x increases. Dashed lines indicate the coordinates of the maximum point.</p>
<p>1в)</p>	<p>$f(x) = \frac{x}{\ln x}$</p>  <p>The graph shows the function $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ for $x > 0, x \neq 1$. There is a vertical asymptote at $x = 1$. For $x < 1$, the function is negative and decreasing. For $x > 1$, the function is positive and has a local minimum at $x = e$ with a y-value of e. Dashed lines indicate the coordinates of the minimum point.</p>
<p>1г)</p>	<p>$f(x) = \ln \cos x$</p>  <p>The graph shows the function $f(x) = \ln \cos x$ for $x \in (-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$. The function consists of three identical concave-down curves, each centered at $x = -\frac{3\pi}{2}, 0, \frac{3\pi}{2}$. Vertical dashed lines mark the boundaries of the domain at $x = -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$. The origin O is marked.</p>
<p>1д)</p>	<p>$f(x) = x \ln x$</p>  <p>The graph shows the function $f(x) = x \ln x$ for $x > 0$. The curve starts at the origin O, reaches a local minimum at $x = \frac{1}{e}$ with a y-value of $\frac{1}{e}$, and then increases, passing through the point $(1, 0)$. Dashed lines indicate the coordinates of the minimum point.</p>

1e)	$f(x) = \log_2(4 - x^2)$ 
2	$y = 2x - 5; y = 6x - 13$
3	$y = 8x + 4$
4	$y = -x - 2,75$
5	43,75
6	$\frac{\pi}{3}$
7	3

С-19*	Вариант 1	Вар
1а)	$\frac{2}{\ln 3}$	
1б)	$e^2 - e$	e^2
1в)	$\frac{7}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{2}{e}$	$\frac{2}{e}$
1г)	$\frac{4}{25 \ln 5}$	$\frac{1}{8}$
1д)	$\frac{19}{648}$	
1е)	$\frac{1}{9 \ln 3} + \frac{1}{12 \ln 2}$	$\frac{2}{5 \ln 5}$
1ж)	2	

С-19*	Вариант 1	Вариант 2
1з)	$\ln 16$	$\ln 7$
1и)	$-\frac{1}{2} \ln 5$	$-2 \ln 4$
1к)	1	1
1л)	9	4
1м)	$12 \frac{2}{3}$	$48 \frac{3}{4}$
1н)	3	$\frac{1}{3}$
1о)	$12 \frac{4}{9}$	$1 \frac{17}{28}$
1п)	$158 \frac{14}{15}$	$71 \frac{23}{35}$
1р)	12	$2 \frac{14}{17}$
2а)	$\frac{x^4}{4} - 2 \operatorname{arctg} x + c$	$x - 2 \operatorname{arctg} x + c$
2б)	$- \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + c$	$\operatorname{tg} \frac{x}{2} + c$
2в)	$\frac{3}{8} x - 2 \sin \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \sin \frac{x}{2} + c$	$\frac{3}{8} x + \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x + c$
2г)	$\arcsin(x - 1) + c$	$\arccos(x + 1) + c$
2д)	$\operatorname{arctg}(x + 3) + c$	$\operatorname{arctg}(x - 2) + c$
2е)	$\frac{1}{15} (x^3 - 1)^5 + c$	$-\frac{1}{4(x^2 + 1)^2} + c$
2ж)	$\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + c$	$\frac{1}{10} \operatorname{arctg} \frac{2x}{5} + c$

С-19*	Вариант 1	Вариант 2
2з)	$\frac{1}{\cos x} + c$	$-\frac{1}{2\sin^2 x} + c$
2и)	$\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$	$\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + c$
2к)	$\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1} + c$	$\frac{2}{5}\sqrt{(x-4)^5} + \frac{8}{3}\sqrt{(x-4)^3} + c$
2л)	$\frac{1}{2}e^{x^2} + c$	$-e^{\frac{1}{x}} + c$
2м)	$\ln \ln x + c$	$\frac{1}{3}\ln^3 x + c$
2н)	$\ln \sin x + c$	$-\ln \cos x + c$
2о)	$\frac{1}{3}\ln x^3 + 1 + c$	$\ln(x^2 + 3) + c$
2п)	$-\ln(1 + \cos^2 x) + c$	$\ln(1 + \sin^2 x) + c$
2р)	$\frac{(x^2 + 2x)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$	$\frac{2(x^2 - 3x + 2)^{\frac{3}{2}}}{9} + c$
3а)	$\frac{9}{4}\pi$	-18π
3б)	5	5
3в)	0	0
4а)	$4\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{3}$
4б)	$2(\sqrt{2} - 1)$	6
4в)	$42\frac{1}{3}$	32
4г)	$8\sqrt{2} - 6$	5
5а)	$[-1; 6]$	$[1; 3]$
5б)	$\frac{\pi}{4}$	0

С-19*	Вариант 1	Вариант 2
5в)	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

С-23*	Вариант 1	Вариант 2
2	3^n	11^n
3	-555	8085
4	$112C_{15}^8$	$36 \cdot C_{24}^{10}$
5	$\frac{1}{8}(8!)^2$	$2(11!)^2$
6	$30^2 + 1$	$30^3 + 1$

С-32*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	$x^2 + y^2 + 4x = 0$ Окружность с центром в точке $(-2; 0)$ и $R = 2$	$x^2 + y^2 + 4y = 0$ Окружность с центром в точке $(0; -2)$ и $R = 2$
1б)	$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \geq 0$ Точки вне кольца, образованного окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$	$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 9) \leq 0$ Точки внутри кольца, образованного окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 9$
1в)	Точки вне окружности $x^2 + (y + 1)^2 = 2$ и сама окружность, кроме точки $(1; 0)$	Точки внутри окружности $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ и сама окружность, кроме точки $(-1; 0)$
1г)	$x^2 + y^2 = 4$ Окружность с центром в т. $(0; 0)$ и $R = 2$	$x^2 + y^2 = 9$ Окружность с центром в т. $(0; 0)$ и $R = 3$
4	$z_4 = 4 + i$	$z_4 = 3 + i$
5а)	$-1 \pm i\sqrt{5}; -3 \pm \sqrt{3}$	$-4; -2 \frac{-5 \pm i\sqrt{7}}{2}$
5б)	$5; \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$	$-6; -1 \pm i\sqrt{2}$
5в)	$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4i}}{2}$	$\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}; 2; -1; \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8i}}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8i}}{2}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Нелин Е.П., Лазарев В.А. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни. – М.: Илекса, 2011. – 480 с.
2. Нелин Е.П., Лазарев В.А. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни. – М.: Илекса, 2012. – 432 с.
3. Нелин Е.П. Алгебра 7-11 классы. Определения, свойства, методы решения – в таблицах. Серия «Комплексная подготовка к ЕГЭ и ГИА». – М.: Илекса, 2011. – 128 с.
4. Вавилов В.В. и др. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
5. Вавилов В.В. и др. Задачи по математике. Начала анализа. Справочное пособие. – М.: Наука, 1990. – 608 с.
6. Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике.— М: ИЛЕКСА, 2007. — 252 с.
7. Горнштейн П.И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами.— М: Илекса, 2007.— 336 с.
8. Ершова А.П., Голобородько В.В.: Вся школьная математика в самостоятельных и контрольных работах. Алгебра. 7-11 класс.— М: Илекса, 2010.— 640 с.
9. Куланин Е.Д., Федин С.Н. 5000 конкурсных задач по математике. – М.: АСТ, 1999.– 720 с.
10. Математика. Сборник экзаменационных заданий. Серия: Федеральный банк экзаменационных материалов. – М.: ЭКСМО, 2008. – 240 с.
11. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Алгебраический тренажер: Пособие для школьников и абитуриентов. — М: Илекса, 2007.— 320 с.
12. Субханкулова С.А. Задачи с параметрами. Серия «Математика: элективный курс».— М.: ИЛЕКСА, 2010.— 208 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

**Оrientировочное тематическое планирование
курса алгебры и начал математического анализа в 11 классе
по учебнику Нелина Е.П., Лазарева В.А.
(и распределение самостоятельных и контрольных работ)**

Базовый уровень — 2,5 (3) часа в неделю алгебры и начал
математического анализа, всего 85 (102) ч за год.

Профильный уровень* — 4 (5) часов в неделю алгебры и начал матема-
тического анализа, всего 136 (170) ч за год.

№ п/п	Тема урока	Параграф или пункт	Количество часов в неделю				Самостоятельные (контрольные) работы
			Базовый уровень		Профильный уровень		
			2,5 ч в не- делю	3 ч в неде- лю	4 ч в неде- лю	5 ч в неде- лю	
1. Производная и ее применение			30	36	46	50	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Действительные числа и их свойства	§ 1	1	1	1	1	С-1
2	Понятия предела функции в точке	§ 2	1	1	1	1	
3	Непрерывность функции. Метод интервалов решения не- равенств	§ 2	1	2	2	2	
4	Доказательство основных теорем о пределах. Понятие и свойства бесконечно малых функций. Односторонние пределы	§ 7. 7.1 7.2	—	—	2	2	С-2
5	Свойства непрерывных функций	7.3	—	—	1	1	
6	Предел функции на бесконечности. Бесконечный предел функции	7.4	—	—	1	1	
7	Предел последовательности	7.4	—	—	1	2	
8	Предел отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$	7.5	—	—	1	1	
9	Практическое вычисление пределов	7.6	—	—	1	1	
10	Асимптоты графика функции	§ 8	1	2	2	2	С-3

* Серым цветом залиты номера тем, которые не являются обязательными при обучении на базовом уровне.

1	2	3	4	5	6	7	8
11	Понятие приращения аргумента и приращения функции. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной.	§ 3	1	1	1	1	С-4
12	Производные некоторых элементарных функций	§ 3	1	1	1	1	
13	Геометрический и механический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$	§ 3	1	1	1	1	
14	Правила вычисления производных	§ 4	1	1	1	1	
15	Производная сложной функции	§ 4	1	1	1	1	С-5
16	Производные элементарных функций	§ 5	2	2	2	2	
17	Решение упражнений на нахождение производной заданной функции		1	2	1	2	С-6 С-7*
18	<i>Тематическая контрольная работа</i>		1	1	1	1	К1 (КП1)
19	Монотонность и постоянство функции. Критические точки функции	§ 6 6.1	2	2	2	2	С-8 С-9
20	Экстремумы функции. Необходимое и достаточное условия экстремума	6.1	2	2	2	2	
21	Решение упражнений на нахождение промежутков монотонности и экстремумов функции	6.1	2	2	2	2	
22	Общая схема исследования функции для построения ее графика	6.2	1	1	1	1	С-10*
23	Решение упражнений на исследование функций с помощью производной и построение графиков функций	6.2	3	3	2	3	
24	Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции	6.3	1	2	1	1	С-11
25	Решение задач на применение производной к исследованию функции	§ 6	3	3	2	2	С-12
26	<i>Тематическая контрольная работа</i>		1	1	1	1	К2 (КП2)
27	Производные обратных тригонометрических функций	§ 9	-	-	1	1	

1	2	3	4	5	6	7	8
28	Доказательство тождеств с помощью производной	§ 9	-	-	1	1	C-13
29	Вторая производная и производные высших порядков. Понятие выпуклости функции. Точки перегиба	§ 10	-	-	1	2	C-14
30	Нахождение промежутков выпуклости функции и точек ее перегиба. Расширенная схема исследования функции	§ 10	-	-	2	2	
31	Применение производной к решению уравнений и неравенств	§ 11 11.1	1	1	1	1	C-15
32	Применение производной к доказательству неравенств	11.2	-	1	1	1	
33	Применение производной к решению задач с параметрами	§ 12	1	2	2	2	
34	Дифференциал функции	§ 13	-	-	1	1	
35	<i>Тематическая контрольная работа</i>		-	-	1	1	(КПЗ)
2. Интеграл и его применение			12	14	18	24	
36	Понятие первообразной. Основное свойство первообразных. Неопределенный интеграл	§ 14	1	1	1	1	C-16
37	Правила нахождения первообразных. Таблица первобытных	§ 14	1	2	2	4	
38	Геометрический смысл и определения определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница	§ 15 15.1	2	2	2	2	C-17
39	Свойства определенных интегралов. Определение определенного интеграла через интегральные суммы	15.1	2	2	3	3	
40	Решение упражнений на нахождение определенных интегралов		1	2	2	2	
41	Вычисление площадей плоских фигур	15.2	2	2	3	4	
42	Вычисление объемов тел	15.2	1	1	2	4	C-18, C-19*
43	Простейшие дифференциальные уравнения	§ 16	-	-	1	2	
44	Решение упражнений на нахождение и применение определенных интегралов		1	1	1	1	
44	<i>Тематическая контрольная работа</i>		1	1	1	1	КЗ (КП4)

1	2	3	4	5	6	7	8
3. Элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики			17	20	26	30	
45	Понятие соединения. Правило суммы и произведения. Упорядоченные множества. Размещение	§ 17 17.1.1	1	1	1	1	C-20 C-21
46	Перестановки	17.1.2	1	1	1	1	
47	Комбинации	17.1.3	1	1	1	1	
48	Вычисление числа комбинаций без повторов с помощью треугольника Паскаля	17.1.3	1	1	1	1	
49	Решение комбинаторных задач		1	1	2	2	
50	Бином Ньютона	17.2	1	2	2	2	C-22
51	Соединения с повторениями	§ 19 19.1	-	-	2	3	
52	Решение более сложных комбинаторных задач	19.2	-	-	2	2	C23
53	Понятие случайного события и случайного эксперимента. Классическое определение вероятности	§ 18 18.1	1	2	2	2	C-24 C-25
54	Операции над событиями	18.2	1	1	1	1	
55	Относительная частота случайного события. Статистическое определение вероятности	18.3	1	1	1	1	C-26
56	Геометрическое определение вероятности	18.4	1	1	1	1	
57	Условные вероятности	18.5	1	1	1	1	
58	Независимые события	18.6	1	1	1	1	
59	Схема Бернулли. Закон больших чисел	18.7	-	-	1	1	C27
60	Понятие случайной величины и ее распределения. Математическое ожидание дискретной случайной величины	18.8	1	1	1	1	
61	Понятие о статистике. Генеральная совокупность и выборка	18.9	1	1	1	1	C-28
62	Табличное и графическое представление данных. Числовые характеристики рядов данных	18.10	1	2	2	3	
63	Решение упражнений		1	1	1	1	
64	<i>Тематическая контрольная работа</i>		1	1	1	1	K4 (КП5)

1	2	3	4	5	6	7	8
4. Комплексные числа			8	10	18	20	
65	Множество комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Геометрическое изображение комплексных чисел.	§ 20 20.1	4	4	4	4	C-29 C-30
66	Тригонометрическая форма комплексного числа. Изображение множеств точек комплексной плоскости, удовлетворяющих определенной равенства или неравенства	20.2	2	4	4	5	C-31
67	Действия над комплексными числами в тригонометрической форме	20.2	-	-	3	3	
68	Извлечение корня n -й степени из комплексного числа	20.2	-	-	3	3	
69	Решение упражнений		1	1	3	4	C-32
70	<i>Тематическая контрольная работа</i>		1	1	1	1	К5 (КП6)
5. Систематизация и обобщение сведений об уравнениях, неравенствах и их системах			8	10	16	26	
71	Методы решения уравнений с одной переменной	§ 21	2	2	4	6	C-33
72	Методы решения неравенств с одной переменной	§ 21	2	2	4	6	
73	Методы решения систем уравнений и неравенств с одной переменной	§ 21	1	2	2	5	
74	Задачи с параметрами	§ 21	1	3	5	8	C-34
75	<i>Тематическая контрольная работа</i>		1	1	1	1	К6 (КП7)
Итоговое повторение курса алгебры и начал математического анализа. Решение задач			10	12	12	20	К7 (КП8)

СОДЕРЖАНИЕ

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ	5
С-1. Понятие предела функции в точке. Метод интервалов решения неравенств	5
С-2. Вычисление пределов числовых последовательностей и функций. Непрерывность функции	7
С-3. Асимптоты графика функции	9
С-4. Определение производной. Простейшие правила вычисления производных	12
С-5. Производные элементарных и сложных функций	15
С-6. Геометрический и механический смысл производной	18
С-7*. Дополнительные задачи на нахождение асимптот графика функции (домашняя самостоятельная работа)	22
К-1(КП-1). Производная	23
С-8. Исследование функции на монотонность и экстремумы	27
С-9. Исследование показательных, логарифмических и степенных функций на монотонность и экстремумы	29
С-10*. Построение графиков функций с помощью производной (домашняя практическая работа).....	31
С-11. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции....	32
С-12*. Избранные задачи дифференциального исчисления (домашняя самостоятельная работа).....	35
К-2 (КП-2) Применение производной	36
С-13. Производные обратных тригонометрических функций. Доказательство тождеств с помощью производной.....	39
С-14. Выпуклость и точки перегиба функции. Расширенная схема исследования функции	40
С-15. Применение производной к решению уравнений и неравенств и к доказательству неравенств.....	41
(КП-3). Применение производной к решению уравнений и неравенств ..	43
ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ	45
С-16. Первообразная. Вычисление первообразных	45
С-17. Определенный интеграл. Вычисление площадей плоских фигур...	48
С-18. Применение первообразной и интеграла	50
С-19*. Избранные задачи интегрального исчисления (домашняя самосто- ятельная работа)	53
К-3 (КП-4). Первообразная и интеграл.....	57
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ.....	61
С-20. Основные формулы комбинаторики. Простейшие комбинаторные задачи	61

С-21.	Комбинаторные задачи. Правило суммы и правило произведения	64
С-22.	Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов.....	66
С-23*.	Дополнительные задачи по комбинаторике (домашняя самостоятельная работа)	68
С-24.	Классическая вероятность. Использование формул комбинаторики при вычислении вероятности	70
С-25.	Теоремы сложения и умножения вероятностей	72
С-26.	Статистическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности	75
С-27.	Вероятность осуществления хотя бы одного из независимых событий. Схема Бернулли	78
С-28.	Понятие о статистике. Генеральная совокупность и выборка. Числовые характеристики рядов данных	80
К-4 (КП-5)	Комбинаторика, вероятность, статистика	83

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

С-29.	Понятие комплексного числа. Действия с комплексными числами в алгебраической форме	87
С-30.	Модуль и аргумент комплексного числа. Геометрическое изображение комплексных чисел	90
С-31.	Тригонометрическая форма комплексного числа	93
С-32*.	Дополнительные задачи с комплексными числами (домашняя самостоятельная работа)	96
К-5 (КП-6).	Комплексные числа	97

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ И ОБОБЩЕНИЕ СВЕДЕНИЙ ОБ УРАВНЕНИЯХ, НЕРАВЕНСТВАХ И ИХ СИСТЕМАХ.....

С-33.	Методы решения уравнений, неравенств и их систем	101
С-34.	Задачи с параметрами	104
К-6 (КП-7).	Обобщение сведений о решении уравнений, неравенств и их систем.....	105
К-7 (КП-8).	Итоговое повторение курса алгебры и начал анализа.....	108

ОТВЕТЫ.....

Ответы к контрольным работам	112
Ответы к домашним самостоятельным работам	120

ЛИТЕРАТУРА

ПРИЛОЖЕНИЕ. Ориентировочное тематическое планирование курса алгебры и начал математического анализа в 11 классе по учебнику Нелина Е.П., Лазарева В.А. (и распределение самостоятельных и контрольных работ).....	137
---	-----

Учебное издание

Алла Петровна Ершова
Евгений Петрович Нелин

**Самостоятельные и контрольные
работы по алгебре и началам
математического анализа
для 11 класса**

Подписано в печать 28.05.2012. Формат 60×88/16.
Уч.-изд. л. 8,80. Тираж 3000 экз. Заказ № 515.

ООО «Илекса», г. Москва,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
Сайт: www.chpk.ru. E-mail: marketing@chpk.ru
факс: 8(496) 726-54-10, телефон: 8(495) 988-63-87