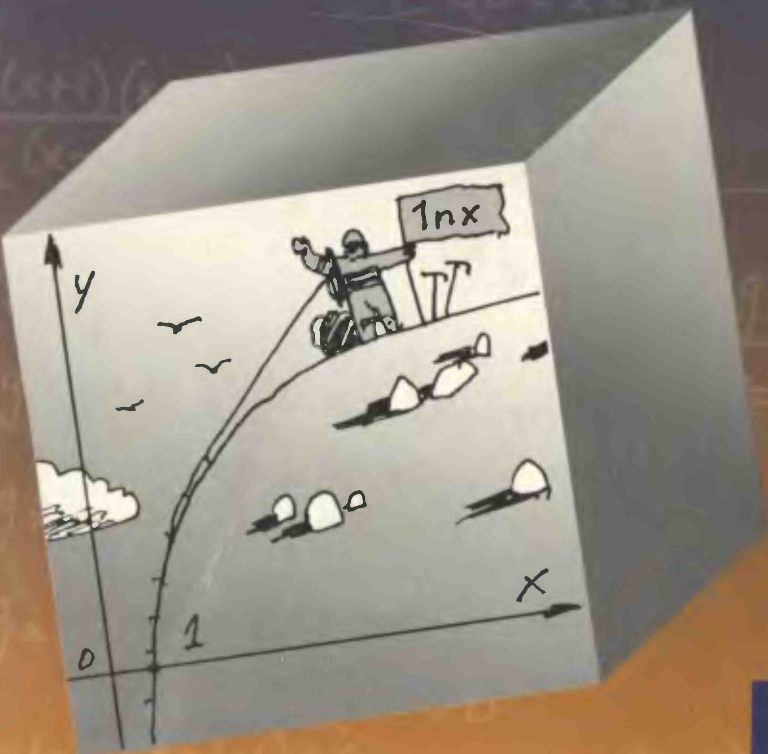
А. Х. Шахмейстер

ЛОГАРИФМЫ

математика



Для тех, кто хочет учиться

А. Х. Шахмейстер

Логарифмы

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И УЧИТЕЛЕЙ

Под редакцией Б. Г. Зива

Издательство Московского университета
ЧеРо на Неве
МЦНМО

С.-Петербург
Москва
2005

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Рецензенты:

Доктор физ.-мат. наук профессор МГУ **Г. Ю. Ризниченко**
Заслуженный Учитель Российской Федерации,
Соросовский Учитель **Т. И. Курсиш**
Заслуженный Учитель Росийской Федерации,
Соросовский Учитель **А. Р. Майзелис**
Заслуженный Соросовский Учитель **И. Я. Веребейчик**

Книга издана при участии
книготорговой корпорации «Абрис-Д»

Шахмейстер А. Х.
Ш 32 Логарифмы. —
2-е изд., исправленное и дополненное —
СПб. : «ЧеРо-на-Неве», 2005. — 208 с.: ил. —
ISBN 5-88711-209-3

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала.
Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических ВУЗов, учителей.

ISBN 5-88711-209-3

Предисловие редактора

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики. По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасный самоучитель, который позволит ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к выпускным экзаменам в школе и вступительным экзаменам в ВУЗ.

Книги серии содержат задачи разной степени сложности, которые могут быть использованы учителем для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Автор не претендует на то, что каждое из представленных решений является наиболее рациональным, — он дает универсальные алгоритмы для решения целых классов задач, что, на мой взгляд, гораздо важнее.

Предложенные задачи могут быть использованы учителями и учениками в процессе усвоения той или иной темы или для параллельного повторения.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив

Предисловие автора

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических ВУЗов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

1

Определение логарифма и его свойства

Напомним, что в выражении $a^b = c$
a — основание степени;
b — показатель степени;
a^b — степень числа a;
c — значение степени числа a.

Определение логарифма

Логарифмом числа $\boldsymbol{c}$ по основанию $\boldsymbol{a}$ (при $a > 0$, $a \neq 1$) называется **показатель** степени $\boldsymbol{b}$, в которую надо возвести основание $\boldsymbol{a}$, чтобы получить число $\boldsymbol{c}$, т.е. если $a^b = c$, то можно записать $\boldsymbol{\log_a c = b}$.
Таким образом, показатель степени — это и есть логарифм (при определенных условиях).
Если $a > 0$, то и $a^b > 0$, поэтому $c > 0$. Следовательно,

$$\log_a c = b, \text{ если } a^b = c \text{ при } \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ c > 0. \end{cases}$$

Практикум 1

Запишите в виде логарифмического равенства (1–5):

1. $3^4 = 81 \Rightarrow \log_3 81 = 4$ (по определению).

2. $2^{-5} = \dfrac{1}{32} \Rightarrow \log_2 \dfrac{1}{32} = -5$ (по определению).

3. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = 3$ (по определению).

4. $\sqrt[3]{125} = 5 \Rightarrow \log_{125} 5 = \frac{1}{3}$ (по определению).

5. $\sqrt[4]{16^3} = 8 \Rightarrow \log_{16} 8 = \frac{3}{4}$ (по определению).

Вычислите логарифм (6–10):

6. Вычислите $\log_2 0{,}25$.

Пусть $\log_2 0{,}25 = x \Rightarrow 2^x = 0{,}25$; $2^x = 2^{-2}$; $x = \boxed{-2}$.

7. Вычислите $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}$.

Пусть $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3\sqrt{3}$; $3^{-x} = 3^{1+\frac{1}{2}}$;

$x = \boxed{-1{,}5}$.

8. Вычислите $\log_{\sqrt[4]{2}} 8$.

Пусть $\log_{\sqrt[4]{2}} 8 = x \Rightarrow \left(\sqrt[4]{2}\right)^x = 8$; $2^{\frac{1}{4}x} = 2^3$; $x = \boxed{12}$.

9. Вычислите $\log_{6\sqrt[6]{6}} \sqrt[4]{6}$.

Пусть $\log_{6\sqrt[6]{6}} \sqrt[4]{6} = x \Rightarrow \left(6\sqrt[6]{6}\right)^x = \sqrt[4]{6}$;

$\left(6^{1+\frac{1}{6}}\right)^x = 6^{\frac{1}{4}}$; $\frac{7}{6}x = \frac{1}{4}$; $x = \boxed{\frac{3}{14}}$.

10. Вычислите $\log_3^2 9$.

Пусть $\log_3 9 = x \Rightarrow 3^x = 9$; $x = 2$, т. е. $\log_3 9 = 2$,

значит, $\log_3^2 9 = 2^2 = \boxed{4}$.

Основные теоремы о логарифмах

Теорема 1.

$$\boxed{\log_a (c_1 \cdot c_2) = \log_a c_1 + \log_a c_2} \quad \text{при} \quad \begin{cases} c_1 > 0 \\ c_2 > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Доказательство:

Пусть $\left.\begin{matrix} \log_a c_1 = t_1;\ a^{t_1} = c_1 \\ \log_a c_2 = t_2;\ a^{t_2} = c_2 \end{matrix}\right| \Rightarrow c_1 \cdot c_2 = a^{t_1} \cdot a^{t_2} = a^{t_1+t_2} \Rightarrow$

$$\overset{\text{по определению}}{\Longrightarrow} \quad \log_a (c_1 \cdot c_2) = t_1 + t_2 = \log_a c_1 + \log_a c_2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.

$$\boxed{\log_a \frac{c_1}{c_2} = \log_a c_1 - \log_a c_2} \quad \text{при} \quad \begin{cases} c_1 > 0 \\ c_2 > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Доказательство:

Пусть $\left.\begin{matrix} \log_a c_1 = t_1;\ a^{t_1} = c_1 \\ \log_a c_2 = t_2;\ a^{t_2} = c_2 \end{matrix}\right| \Rightarrow \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{a^{t_1}}{a^{t_2}} = a^{t_1-t_2} \Rightarrow$

$$\overset{\text{по определению}}{\Longrightarrow} \quad \log_a \frac{c_1}{c_2} = t_1 - t_2 = \log_a c_1 - \log_a c_2.$$

Теорема 3. $\boxed{\log_{a^k} b^m = \dfrac{m}{k} \log_a b}$ при $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0. \end{cases}$

Доказательство:

Пусть $\log_a b = t$, т. е. $a^t = b$.

Возведем обе части в степень m: $a^{tm} = b^m$;

но $a^{tm} = \left(a^k\right)^{\frac{m}{k}t} = b^m \Rightarrow \log_{a^k} b^m = \dfrac{m}{k} t$,

тогда $\log_{a^k} b^m = \dfrac{m}{k} \log_a b$.

Примеры использования основных теорем о логарифмах

Вычислите (1–5):

1. $\log_2 27 - 2\log_2 3 + \log_2 \frac{2}{3} = \log_2 27 - \log_2 3^2 + \log_2 \frac{2}{3} =$

$= \log_2 \frac{27 \cdot \frac{2}{3}}{3^2} = \log_2 2 = \boxed{1}.$

2. $\log_{\frac{1}{3}} 2 + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 8 - \log_{\frac{1}{3}} 4\sqrt{18} =$

$= \log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{3}} 8^{\frac{1}{2}} - \log_{\frac{1}{3}} 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3 =$

$= \log_{\frac{1}{3}} \frac{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2}{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = \boxed{1}.$

3. $\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}\log_2 2 = \boxed{1{,}5}.$

4. $\log_{\sqrt[3]{5}} \sqrt{5} + \log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\log_5 5 + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}}\log_3 3 =$

$= \frac{3}{2} + \frac{4}{9} = \frac{35}{18} = \boxed{1\frac{17}{18}}.$

5. $\log_9 \left(\log_4 \sqrt[3]{4}\right) = \log_9 \left(\frac{1}{3}\log_4 4\right) = \log_{3^2}\left(3^{-1}\right) =$

$= -\frac{1}{2}\log_3 3 = \boxed{-\frac{1}{2}}.$

Тренировочная работа 1

Вычислите (1–8):

1. $\log_{13} \sqrt[5]{169}$.

2. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{243}$.

3. $\log_3 (\log_2 8)$.

4. $\log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt[3]{9}$.

5. $\log_4 \sqrt{2} - \log_4 (\log_{16} 256)$.

6. $\log^2_{125} \sqrt[4]{5}$.

7. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 25\sqrt[3]{5}$.

8. $\log_{4\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{32}$.

Решите уравнения (9–11), используя определение логарифма:

9. $\log_x 25 = \dfrac{1}{2}$. **10.** $\log_{2x} \sqrt[3]{4} = \dfrac{2}{3}$. **11.** $\log_x 2\sqrt[4]{2} = -\dfrac{3}{4}$.

Решите уравнения (12–14), используя свойства логарифмов:

12. $\lg x = 2 + \lg 3 - \lg 5$. **13.** $\lg x = \dfrac{1}{3} \lg 54 + \lg 5 - \dfrac{1}{3} \lg 16$.

14. $\lg x = \dfrac{2}{3} \lg 24 - 2 + 1\dfrac{1}{3} \lg 3$.

15. Найдите x, прологарифмировав обе части уравнения по основанию 10:

$$x = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{ba^3}}, \quad \text{где} \quad \lg a = 2,\ \lg b = 3.$$

16. Решите уравнение, используя разложение на множители:

$$\lg^2 5 - \lg^2 3 = (1 - \lg x) \lg \frac{5}{3}.$$

Примечания.

а) Если основание логарифма равно 10, то его можно не указывать. Записывают так: $\mathbf{\log_{10} c = \lg c}$.

б) Если основание логарифма равно e, то записывают так: $\mathbf{\log_e c = \ln c}$.

Решение тренировочной работы 1

1. $\log_{13}\sqrt[5]{169}$.

Пусть $\log_{13}\sqrt[5]{169}=x\Rightarrow 13^x=\sqrt[5]{169}$; $13^x=13^{\frac{2}{5}}$; $x=\boxed{\frac{2}{5}}$.

2. $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[4]{243}$.

$\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[4]{243}=x\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^x=\sqrt[4]{243}$; $3^{-x}=3^{\frac{5}{4}}$; $x=\boxed{-1{,}25}$.

3. $\log_3(\log_2 8)$.

Пусть $\log_2 8=x\Rightarrow 2^x=8$; $2^x=2^3$; $x=3$,

тогда $\log_3(\log_2 8)=\log_3 3=\boxed{1}$.

4. $\log_{\sqrt[4]{3}}\sqrt[3]{9}=x\Rightarrow\left(\sqrt[4]{3}\right)^x=\sqrt[3]{9}$; $3^{\frac{1}{4}x}=3^{\frac{2}{3}}$; $x=\boxed{2\frac{2}{3}}$.

5. $\log_4\sqrt{2}-\log_4(\log_{16}256)$.

Пусть $\log_4\sqrt{2}=x\Rightarrow 4^x=\sqrt{2}$; $2^{2x}=2^{\frac{1}{2}}$; $x=\frac{1}{4}$.

Пусть $\log_{16}256=t\Rightarrow 16^t=256$; $16^t=16^2$; $t=2$.

Пусть $\log_4 2=p\Rightarrow 4^p=2$; $2^{2p}=2$; $2p=1$; $p=\frac{1}{2}$.

Итак, $\log_4\sqrt{2}-\log_4(\log_{16}256)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}=\boxed{-0{,}25}$.

6. $\log^2_{125}\sqrt[4]{5}$.

Положим $\log_{125}\sqrt[4]{5}=x\Rightarrow 125^x=\sqrt[4]{5}$; $5^{3x}=5^{\frac{1}{4}}$; $3x=\frac{1}{4}$;

$x=\frac{1}{12}$. Тогда $\log^2_{125}\sqrt[4]{5}=\left(\frac{1}{12}\right)^2=\boxed{\frac{1}{144}}$.

7. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}25\sqrt[3]{5}$.

Пусть $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}25\sqrt[3]{5}=x\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^x=25\sqrt[3]{5}$; $5^{-\frac{1}{2}x}=5^{2+\frac{1}{3}}$;

$-\frac{1}{2}x=\frac{7}{3}$; $x=-\frac{14}{3}$; $x=\boxed{-4\frac{2}{3}}$.

8. $\log_{4\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{32}$.

Положим $\log_{4\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{32} = x \Rightarrow \left(4\sqrt[3]{2}\right)^x = \sqrt[3]{32}$; $\left(2^{2+\frac{1}{3}}\right)^x = 2^{\frac{5}{3}}$;

$\frac{7}{3}x = \frac{5}{3}$; $x = \boxed{\frac{5}{7}}$.

9. $\log_x 25 = \frac{1}{2}$; $x^{\frac{1}{2}} = 25$; $x = 25^2$.

Ответ: $x = 625$.

10. $\log_{2x} \sqrt[3]{4} = \frac{2}{3}$; $(2x)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$. Возведем обе части уравнения в степень, обратную показателю степени $2/3$:

$2x = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$; $2x = 2$; $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

11. $\log_x 2\sqrt[4]{2} = -\frac{3}{4}$; $x^{-\frac{3}{4}} = 2\sqrt[4]{2}$. Возведем обе части уравнения в степень, обратную показателю степени $-3/4$:

$\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(2^{1+\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{4}{3}}$; $x = 2^{\frac{5}{4}\left(-\frac{4}{3}\right)}$.

Ответ: $x = 2^{-\frac{5}{3}}$.

12. $\lg x = 2 + \lg 3 - \lg 5$; $\lg x = \lg 10^2 + \lg\frac{3}{5}$; $\lg x = \lg\left(10^2 \cdot \frac{3}{5}\right)$.

Ответ: $x = 60$.

13. $\lg x = \frac{1}{3}\lg 54 + \lg 5 - \frac{1}{3}\lg 16$; $\lg x = \lg 54^{\frac{1}{3}} + \lg 5 - \lg 16^{\frac{1}{3}}$;

$\lg x = \lg\frac{54^{\frac{1}{3}} \cdot 5}{16^{\frac{1}{3}}}$; $x = \frac{27^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 5}{8^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}}$; $x = \frac{3}{2} \cdot 5$.

Ответ: $x = 7{,}5$.

14. $\lg x = \frac{2}{3}\lg 24 - 2 + 1\frac{1}{3}\lg 3$; $\lg x = \lg 24^{\frac{2}{3}} - \lg 10^2 + \lg 3^{\frac{4}{3}}$;

$\lg x = \lg\frac{24^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}}}{10^2}$; $x = \frac{8^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}}}{10^2}$; $x = \frac{2^2 \cdot 3^2}{100}$.

Ответ: $x = \frac{9}{25}$.

15. Найти $x = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{ba^3}}$, где $\lg a = 2$, $\lg b = 3$.

Прологарифмируем по основанию 10:

$\lg x = \lg\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{ba^3}}$;

$\lg x = \lg\sqrt[3]{ab^2} - \lg\sqrt{ba^3}$; $\lg x = \frac{1}{3}\lg ab^2 - \frac{1}{2}\lg ba^3$;

$\lg x = \frac{1}{3}\left(\lg a + \lg b^2\right) - \frac{1}{2}\left(\lg b + \lg a^3\right)$;

$\lg x = \frac{1}{3}(\lg a + 2\lg b) - \frac{1}{2}(\lg b + 3\lg a)$.

Так как $\lg a = 2$, $\lg b = 3$, получаем

$\lg x = \frac{1}{3}(2 + 2\cdot 3) - \frac{1}{2}(3 + 3\cdot 2)$;

$\lg x = \frac{8}{3} - \frac{9}{2}$; $\lg x = \frac{16-27}{6}$; $\lg x = -\frac{11}{6}$.

Ответ: $x = 10^{-\frac{11}{6}}$.

16. $\lg^2 5 - \lg^2 3 = (1 - \lg x)\lg\frac{5}{3}$;

$(\lg 5 + \lg 3)(\lg 5 - \lg 3) = (1 - \lg x)\lg\frac{5}{3}$;

$\lg(5\cdot 3)\cdot\lg\frac{5}{3} - (1 - \lg x)\lg\frac{5}{3} = 0$; $\lg\frac{5}{3}(\lg 15 - 1 + \lg x) = 0$;

$\lg x = 1 - \lg 15$; $\lg x = \lg 10 - \lg 15$; $\lg x = \lg\frac{10}{15}$.

Ответ: $x = \frac{2}{3}$.

Тренировочная работа 2

Вычислите (1–10):

1. $\log_4 91 - \log_4 13 + \log_4 \dfrac{2}{7}$.

2. $\sqrt{\log_3 81}$.

3. $\log_{\sqrt{2}} \left(\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{9} \right)$.

4. $\log_{\frac{1}{3}}{}^2 27$.

5. $\log_{\sqrt{3}} 2^{\frac{1}{3}} + \log_{\sqrt[3]{3}} 4^{\frac{1}{3}} - \log_3 \sqrt[3]{256}$.

6. $\log_3 4 - 4\log_3 2 + \log_3 \dfrac{4}{9}$.

7. $\dfrac{\log_4 8}{\log_8 16}$.

8. $\dfrac{\log_{\sqrt{7}} 14 - \frac{1}{3}\log_{\sqrt{7}} 56}{\log_{\sqrt{6}} 30 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 150}$.

9. $\dfrac{2\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 400 + 3\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} \sqrt[3]{45}}{4\log_{\sqrt{\frac{1}{2}}} 3 - \frac{2}{3}\log_{\sqrt{\frac{1}{2}}} 27 - 2\log_{\sqrt{\frac{1}{2}}} 6}$.

10. $\dfrac{\log_2^2 20 + \log_2 20 \cdot \log_2 5 - 2\log_2^2 5}{\log_2 20 + 2\log_2 5}$.

Решение тренировочной работы 2

1. $\log_4 91 - \log_4 13 + \log_4 \frac{2}{7} = \log_4 \frac{91 \cdot \frac{2}{7}}{13} = \log_4 2 = \log_4 4^{\frac{1}{2}} =$

$= \frac{1}{2}\log_4 4 = \boxed{\frac{1}{2}}$.

2. $\sqrt{\log_3 81} = \sqrt{\log_3 3^4} = \sqrt{4\log_3 3} = \sqrt{4} = \boxed{2}$.

3. $\log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}\right) = \log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$

$= \log_{\sqrt{2}}\left(2\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}\right) = \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^2 = \boxed{2}$.

4. $\log_{\frac{1}{3}}{}^2 27 = \left(\log_{\frac{1}{3}} 3^3\right)^2 =$

$= \left(\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right)^2 = \left(-3\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}\right)^2 = (-3)^2 = \boxed{9}$.

5. $\log_{\sqrt{3}} 2^{\frac{1}{3}} + \log_{\sqrt[3]{3}} 4^{\frac{1}{3}} - \log_3 \sqrt[3]{256} =$

$= \log_{3^{\frac{1}{2}}} 2^{\frac{1}{3}} + \log_{3^{\frac{1}{3}}} 2^{\frac{2}{3}} - \log_3 2^{\frac{8}{3}} =$

$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \log_3 2 + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} \log_3 2 - \frac{8}{3}\log_3 2 =$

$= \left(\frac{2}{3} + 2 - \frac{8}{3}\right)\log_3 2 = 0 \cdot \log_3 2 = \boxed{0}$.

6. $\log_3 4 - 4\log_3 2 + \log_3 \frac{4}{9} = \log_3 4 - \log_3 2^4 + \log_3 \frac{4}{9} = \log_3 \frac{4 \cdot \frac{4}{9}}{2^4} =$

$= \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2\log_3 3 = \boxed{-2}$.

7. $\frac{\log_4 8}{\log_8 16} = \frac{\log_{2^2} 2^3}{\log_{2^3} 2^4} = \frac{\frac{3}{2}\log_2 2}{\frac{4}{3}\log_2 2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8} = \boxed{1{,}125}$.

8. $$\frac{\log_{\sqrt7}14-\frac13\log_{\sqrt7}56}{\log_{\sqrt6}30-\frac12\log_{\sqrt6}150}=\frac{\log_{\sqrt7}\frac{14}{56^{1/3}}}{\log_{\sqrt6}\frac{30}{150^{1/2}}}=\frac{\log_{\sqrt7}\left(14\cdot14^{-\frac13}\cdot4^{-\frac13}\right)}{\log_{\sqrt6}\left(30\cdot30^{-\frac12}\cdot5^{-\frac12}\right)}=$$

$$=\frac{\log_{\sqrt7}\left(14^{\frac23}\cdot4^{-\frac13}\right)}{\log_{\sqrt6}\left(30^{\frac12}\cdot5^{-\frac12}\right)}=\frac{\log_{\sqrt7}\left(2^{\frac23}\cdot7^{\frac23}\cdot2^{-\frac23}\right)}{\log_{\sqrt6}\left(5^{\frac12}\cdot6^{\frac12}\cdot5^{-\frac12}\right)}=$$

$$=\frac{\log_{\sqrt7}7^{\frac23}}{\log_{\sqrt6}6^{\frac12}}=\frac{\log_{7^{\frac12}}(7)^{\frac23}}{\log_{6^{\frac12}}6^{\frac12}}=\frac{\frac{2/3}{1/2}\log_7 7}{\frac{1/2}{1/2}\log_6 6}=\frac43\cdot\frac22=\boxed{\frac43}.$$

9. $$\frac{2\log_{\sqrt{\frac13}}6-\frac12\log_{\sqrt{\frac13}}400+3\log_{\sqrt{\frac13}}\sqrt[3]{45}}{4\log_{\sqrt{\frac12}}3-\frac23\log_{\sqrt{\frac12}}27-2\log_{\sqrt{\frac12}}6}=$$

$$=\frac{\log_{\sqrt{\frac13}}6^2-\log_{\sqrt{\frac13}}400^{\frac12}+\log_{\sqrt{\frac13}}\left(\sqrt[3]{45}\right)^3}{\log_{\sqrt{\frac12}}3^4-\log_{\sqrt{\frac12}}27^{\frac23}-\log_{\sqrt{\frac12}}6^2}=$$

$$=\frac{\log_{\sqrt{\frac13}}\left(\frac{6^2\cdot45}{20}\right)}{\log_{\sqrt{\frac12}}\left(3^4\cdot6^{-2}\cdot27^{-\frac23}\right)}=\frac{\log_{\sqrt{\frac13}}(9\cdot9)}{\log_{\sqrt{\frac12}}\left(3^4\cdot3^{-2}\cdot2^{-2}\cdot(3^3)^{-\frac23}\right)}=$$

$$=\frac{\log_{\sqrt{\frac13}}3^4}{\log_{\sqrt{\frac12}}(3^0\cdot2^{-2})}=\frac{\log_{3^{-\frac12}}3^4}{\log_{2^{-\frac12}}2^{-2}}=\frac{\frac{4}{-\frac12}\log_3 3}{\frac{-2}{-\frac12}\log_2 2}=\boxed{-2}.$$

10. $$\frac{\log_2^2 20+\log_2 20\cdot\log_2 5-2\log_2^2 5}{\log_2 20+2\log_2 5}=$$

$$=\frac{\left(\log_2^2 20-\log_2^2 5\right)+\left(\log_2 20\cdot\log_2 5-\log_2^2 5\right)}{\log_2 20+2\log_2 5}=$$

$$=\frac{(\log_2 20-\log_2 5)(\log_2 20+\log_2 5)+\log_2 5(\log_2 20-\log_2 5)}{\log_2 20+2\log_2 5}=$$

$$=\frac{(\log_2 20-\log_2 5)(\log_2 20+2\log_2 5)}{\log_2 20+2\log_2 5}=$$

$$\log_2 20-\log_2 5=\log_2\frac{20}{5}=\log_2 4=2\log_2 2=\boxed{2}.$$

Теоремы о логарифмах. Основное логарифмическое тождество

Рассмотрим еще некоторые теоремы о логарифмах и основное логарифмическое тождество.

Основное логарифмическое тождество

По определению $a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b$ при $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ c > 0. \end{cases}$.

Отсюда следует, что по определению $\boxed{a^{\log_a c} = c}$ при $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ c > 0. \end{cases}$.

Это тождество иногда называют основным логарифмическим тождеством.

Практикум 2

1. $2^{\log_2 3+1} = 2^{\log_2 3} \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6.$

2. $9^{\log_3 5} = 3^{2\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^2 = 5^2 = 25.$

3. $8^{\log_4 3-\log_{16} 729} = 8^{\log_4 3} \cdot 8^{-\log_{16} 729} = 2^{3\log_{2^2} 3} \cdot 2^{-3\log_{2^4} 3^6} =$
$= 2^{\frac{3}{2}\log_2 3} \cdot 2^{\frac{-3\cdot 6}{4}\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(2^{\log_2 3}\right)^{-\frac{9}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{-\frac{9}{2}} =$
$= 3^{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}} = 3^{-3} = \dfrac{1}{27}.$

4. $25^{\log_{\sqrt{5}} 3-\log_{125} 9^3} = 5^{2\log_{5^{\frac{1}{2}}} 3} \cdot 5^{-2\cdot\log_{5^3}\left(3^6\right)} =$
$= 5^{\frac{2}{\frac{1}{2}}\log_5 3} \cdot 5^{\frac{-2\cdot 6}{3}\log_5 3} = \left(5^{\log_5 3}\right)^4 \cdot \left(5^{\log_5 3}\right)^{-4} = 3^4 \cdot 3^{-4} = 1.$

5. $\sqrt[4]{4^{6\log_8 5-\log_{\sqrt{2}} 125}} = \sqrt[4]{4^{6\log_8 5} \cdot 4^{-\log_{\sqrt{2}}(125)}} =$
$= \sqrt[4]{2^{2\cdot 6\cdot\log_{2^3} 5} \cdot 2^{-2\cdot\log_{2^{\frac{1}{2}}} 5^3}} = \sqrt[4]{2^{\frac{2\cdot 6}{3}\log_2 5} \cdot 2^{\frac{-2\cdot 3}{\frac{1}{2}}\log_2 5}} =$
$= \sqrt[4]{\left(2^{\log_2 5}\right)^4 \cdot \left(2^{\log_2 5}\right)^{-12}} = \sqrt[4]{5^4 \cdot 5^{-12}} = \sqrt[4]{5^{-8}} = 5^{-2} = 0{,}04.$

Теорема 4.

Переход от одного основания логарифма к другому основанию осуществляется следующим образом:

$$\boxed{\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}} \quad \text{при} \quad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \\ c > 0. \end{cases}$$

Доказательство:

$a^{\log_a c} = c$. Прологарифмируем это равенство по основанию b:
$\log_b a^{\log_a c} = \log_b c \Rightarrow \log_a c \cdot \log_b a = \log_b c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a} \quad \text{при} \quad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \\ c > 0. \end{cases}$$

Следствие 1. Если $b = c$, то $\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$ при $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \\ b \neq 1. \end{cases}$

Следствие 2. По следствию 1 имеем

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c} \quad \text{при} \quad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \\ c > 0. \end{cases}$$

Примеры на использование теорем при решении уравнений

1. Решите уравнение $\log_{\sqrt{2}} x + \log_2 x = 1{,}5$.

Приведем логарифмы к одному основанию (теорема 4):

$$\log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 x}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}\log_2 2} = 2\log_2 x.$$

Итак, $2\log_2 x + \log_2 x = 1{,}5$; $\quad \log_2 x = \dfrac{1}{2}$; $\quad x = 2^{\frac{1}{2}}$.

Ответ: $x = \sqrt{2}$.

2. Решите уравнение $\log_7 x = 2\log_7 3 + 4\log_{49} 2$.

Вследствие теоремы 3 ($\log_{a^k} b = \dfrac{1}{k}\log_a b$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$) имеем $\log_{49} 2 = \log_{7^2} 2 = \dfrac{1}{2}\log_7 2$, поэтому

$\log_7 x = 2\log_7 3 + 4 \cdot \dfrac{1}{2}\log_7 2$; $\quad \log_7 x = 2\log_7 3 + 2\log_7 2$;

$\log_7 x = 2(\log_7 3 + \log_7 2)$; $\quad \log_7 x = 2\log_7 6$;

$\log_7 x = \log_7 36$.

Ответ: $x = 36$.

3. Решите уравнение $\log_4 x + \log_{16} x + \log_{64} x = \dfrac{11}{12}$ при $x > 0$.

$\log_4 x + \log_{16} x + \log_{64} x = \dfrac{11}{12}$; $\quad \log_4 x + \log_{4^2} x + \log_{4^3} x = \dfrac{11}{12}$.

Вследствие теоремы 3 имеем

$$\log_4 x + \frac{1}{2}\log_4 x + \frac{1}{3}\log_4 x = \frac{11}{12};$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\log_4 x = \frac{11}{12};$$

$\dfrac{11}{6}\log_4 x = \dfrac{11}{12}$; $\quad \log_4 x = \dfrac{1}{2}$; $\quad x = 4^{\frac{1}{2}}$.

Ответ: $x = 2$.

4. Решите уравнение $\log_{25} x^2 + \log_{\sqrt{5}} x = 3$.

$\log_{25} x^2 + \log_{\sqrt{5}} x = 3$; $\quad \log_5 |x| + \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \log_5 x = 3$.

$\log_{a^k} b^k = \log_{|a|} |b|$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Для $\log_{\sqrt{x}} x$ по определению $x > 0$, откуда $|x| = x$.

$\log_5 |x| + 2\log_5 x = 3$; $\quad \log_5 x + 2\log_5 x = 3$;

$\log_5 x = 1$; $\quad x = 5$.

Ответ: $x = 5$.

5. Решите уравнение $\log_5 x \cdot \log_7 x = 4\log_5 7$.

Приведем логарифмы к одному основанию:

$\log_5 x \cdot \dfrac{\log_5 x}{\log_5 7} = 4\log_5 7$;

$$\log_5^2 x = 4\log_5^2 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2\log_5 7 \\ \log_5 x = -2\log_5 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = \log_5 7^2 \\ \log_5 x = \log_5 7^{-2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7^2 \\ x = 7^{-2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{49; \dfrac{1}{49}\right\}$.

Тренировочная работа 3

Вычислите (1–8):

1. $2^{\frac{3}{\log_{\sqrt[3]{6}} 2}}$.

2. $\log_{\frac{1}{4}} (\log_2 3 \cdot \log_3 16)$.

3. $32^{\log_4 3 - 0{,}5 \log_2 3}$.

4. $(\log_3 64) \cdot \log_2 \dfrac{1}{27}$.

5. $\dfrac{3\log_3^2 45 - 2\log_3 45 \cdot \log_3 5 - \log_3^2 5}{3\log_3 45 + \log_3 5}$.

6. $4^{\log_2 3} \cdot 3^{\log_3^2 2} - 9 \cdot 2^{\log_3 2} + 2^{\log_4 9}$.

7. $\left(3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}} - 9 \cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}} + 4^{1+\log_4 25}\right)^{\frac{1}{2}}$.

8. $(\log_2 7 + \log_7 16 + 4)(\log_2 7 - 2\log_{28} 7)\log_7 2 - \log_2 7$.

Решите уравнения (9–10):

9. $\log_6 x \cdot \log_8 x = 9\log_6 8$.

10. $\log_5 x + \log_{\sqrt{5}} x + \log_{\frac{1}{5}} x = 6$.

Решение тренировочной работы 3

1. $2^{\frac{3}{\log_{\sqrt[3]{6}} 2}} = 2^{3\log_2 \sqrt[3]{6}} =$
$= \left(2^{\log_2 \sqrt[3]{6}}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{6}\right)^3 = \boxed{6}.$

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

2. $\log_{\frac{1}{4}} (\log_2 3 \cdot \log_3 16) =$

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_b c = \log_a b^{\log_b c}}$$

$= \log_{\frac{1}{4}} \left(\log_2 3^{\log_3 16}\right) = \log_{\frac{1}{4}} \log_2 16 = \log_{\frac{1}{4}} \log_2 2^4 =$
$= \log_{\frac{1}{4}} 4\log_2 2 = \log_{\frac{1}{4}} 4 = \boxed{-1}.$

Проще воспользоваться соотношением $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.

3. $32^{\log_4 3 - 0,5\log_2 3} = 2^{5\log_{2^2} 3} \cdot 2^{5(-0,5)\log_2 3} =$
$= 2^{\frac{5}{2}\log_2 3} \cdot 2^{-\frac{5}{2}\log_2 3} = 2^{\frac{5}{2}\log_2 3 - \frac{5}{2}\log_2 3} = 2^0 = \boxed{1}.$

4. $\log_3 64 \cdot \log_2 \dfrac{1}{27} = \log_3 64^{\log_2 \frac{1}{27}} = \log_3 2^{6\log_2 3^{-3}} =$
$= \log_3 \left(2^{\log_2 3^{-3}}\right)^6 = \log_3 3^{-18} = \boxed{-18}.$

5. $$\frac{3\log_3^2 45 - 2\log_3 45 \cdot \log_3 5 - \log_3^2 5}{3\log_3 45 + \log_3 5} =$$
$$= \frac{\left(\log_3^2 45 - \log_3^2 5\right) + 2\log_3^2 45 - 2\log_3 45 \cdot \log_3 5}{3\log_3 45 + \log_3 5} =$$
$$= \frac{(\log_3 45 + \log_3 5)(\log_3 45 - \log_3 5) + 2\log_3 45(\log_3 45 - \log_3 5)}{3\log_3 45 + \log_3 5} =$$
$$= \frac{(\log_3 45 - \log_3 5)(\log_3 45 + \log_3 5 + 2\log_3 45)}{3\log_3 45 + \log_3 5} =$$
$$= \frac{(\log_3 45 - \log_3 5)(3\log_3 45 + \log_3 5)}{3\log_3 45 + \log_3 5} =$$
$$= \log_3 45 - \log_3 5 = \log_3 \frac{45}{5} = \log_3 9 = \boxed{2}.$$

6. $4^{\log_2 3} \cdot 3^{\log_3^2 2} - 9 \cdot 2^{\log_3 2} + 2^{\log_4 9} =$

$\boxed{\log_{a^2} b^2 = \log_{|a|} |b| \text{ при } a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq \pm 1}$

$$= 2^{2\log_2 3} \cdot \left(3^{\log_3 2}\right)^{\log_3 2} - 9 \cdot 2^{\log_3 2} + 2^{\log_2 3} =$$

$$= 3^2 \cdot 2^{\log_3 2} - 9 \cdot 2^{\log_3 2} + 3 = \boxed{3}.$$

7. $\left(3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}} - 9 \cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}} + 4^{1+\log_4 25}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$$= \left(3^2 \cdot 3^{\log_3 4 \cdot \log_3 4} - 9 \cdot 4^{\log_3 4} + 4 \cdot 4^{\log_4 25}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(3^2 \cdot 4^{\log_3 4} - 9 \cdot 4^{\log_3 4} + 4 \cdot 25\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 100^{\frac{1}{2}} = \boxed{10}.$$

8. $(\log_2 7 + \log_7 16 + 4)(\log_2 7 - 2\log_{28} 7)\log_7 2 - \log_2 7 =$

$$= (\log_2 7 + 4\log_7 2 + 4)\left(\log_2 7 - \frac{2}{\log_7 28}\right)\log_7 2 - \log_2 7 =$$

$$= \left(\log_2 7 + \frac{4}{\log_2 7} + 4\right)\left(\log_2 7 - \frac{2}{\log_7 7 + \log_7 4}\right)\log_7 2 - \log_2 7 =$$

$$= \frac{(\log_2^2 7 + 4\log_2 7 + 4)}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 7\,(1 + \log_7 4) - 2}{1 + \log_7 2^2} \cdot \log_7 2 - \log_2 7 =$$

$$= \frac{(\log_2 7 + 2)^2}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 7 + \log_2 7 \cdot \log_7 4 - 2}{1 + \frac{2}{\log_2 7}} \cdot \log_7 2 - \log_2 7 =$$

$$= \frac{(\log_2 7 + 2)^2}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 7 + \log_2 4 - 2}{\frac{\log_2 7 + 2}{\log_2 7}} \cdot \log_7 2 - \log_2 7 =$$

$$= (\log_2 7 + 2) \cdot (\log_2 7) \cdot (\log_7 2) - \log_2 7 =$$

$$= \log_2 7 + 2 - \log_2 7 = \boxed{2}.$$

$\boxed{\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c}$

9. $\log_6 x \cdot \log_8 x = 9\log_6 8;$

$$\log_6 x \cdot \frac{\log_6 x}{\log_6 8} = 9\log_6 8; \quad \log_6 x \cdot \log_6 x = 9 \cdot \log_6^2 8;$$

$$\log_6^2 x = (3\log_6 8)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_6 x = 3\log_6 8 \\ \log_6 x = -3\log_6 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_6 x = \log_6 8^3 \\ \log_6 x = \log_6 8^{-3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8^3 \\ x = 8^{-3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 512 \\ x = \dfrac{1}{512}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{512}; 512\right\}$.

10. $\log_5 x + \log_{\sqrt{5}} x + \log_{\frac{1}{5}} x = 6;$

$$\log_5 x + \log_{5^{\frac{1}{2}}} x + \log_{5^{-1}} x = 6;$$

$$\log_5 x + \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_5 x - \log_5 x = 6;$$

$$\log_5 x + 2\log_5 x - \log_5 x = 6;$$

$$2\log_5 x = 6; \quad \log_5 x = 3; \quad x = 5^3; \quad x = 125.$$

Ответ: $x = 125$.

Примеры решения показательных уравнений

1. $25^x = \dfrac{1}{125}$.

а) $5^{2x} = 5^{-3}$. Так как степени равны, основания степеней равны, то и показатели степеней равны, значит $2x = -3$; $x = -1{,}5$.

б) Можно решить данной уравнение несколько иначе. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 5.

Получим: $\log_5 5^{2x} = \log_5 5^{-3}$.

Учитывая свойства логарифмов,

$2x \log_5 5 = -3 \log_5 5$; $\quad 2x = -3$; $\quad \boxed{x = -1{,}5}$.

2. Рассмотрим показательное уравнение

вида $a^{f_1(x)} = b^{f_2(x)}$; $\quad \begin{cases} a > 0;\ a \neq 1 \\ b > 0;\ b \neq 1 \end{cases}$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию c $(c > 0;\quad c \neq 1)$: $f_1(x) \log_c a = f_2(x) \log_c b$.

Пример 1. Решим уравнение $6^x = 7^{x+1}$.

$\log_7 6^x = \log_7 7^{x+1}$; $\quad x \log_7 6 = x + 1$; $\quad x(\log_7 6 - 1) = 1$;

$x = \dfrac{1}{\log_7 6 - 1}$; $\quad x = \dfrac{1}{\log_7 6 - \log_7 7}$; $\quad x = \dfrac{1}{\log_7 \frac{6}{7}}$;

$\boxed{x = \log_{\frac{6}{7}} 7}$ $\quad \left(\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}\right)$.

3. Рассмотрим уравнение вида $(\varphi(x))^{f_1(x)} = (\varphi(x))^{f_2(x)}$.

а) Рассмотрим уравнение $\varphi(x) = -1$. Пусть x_i — корни этого уравнения. Эти корни являются корнями исходного уравнения, если $f_1(x_i)$ и $f_2(x_i)$ — целые числа одинаковой четности или рациональные дробные несократимые числа с нечетными знаменателями, но с числителями одинаковой четности.

б) Рассмотрим уравнение $\varphi(x) = 1$. Пусть x_i — корни этого уравнения. Эти корни являются корнями исходного уравнения, если $x_i \in D(f_1(x)) \cap D(f_2(x))$, т. е. если x_i принадлежит области определения и $f_1(x)$, и $f_2(x)$.

в) Рассмотрим уравнение $\varphi(x) = 0$. Пусть x_i — корни этого уравнения. Они являются также корнями исходного уравнения, если $f_1(x_i) > 0$ и $f_2(x_i) > 0$.

г) Рассмотрим уравнение $f_1(x) = f_2(x)$. Пусть x_i — корни этого уравнения. Они являются также корнями исходного уравнения, если они принадлежат области определения исходного уравнения.

Пример 2. Решим уравнение $(x+1)^{x+2} = (x+1)^{x^2+2x}$.

а) $x + 1 = 0$; $x = -1$. Проверим, что $0^{-1} = 0^{-1}$. Это выражение смысла не имеет, поэтому $x = -1$ — посторонний корень.

б) $x+1 = -1$; $x = -2$. Проверим, что $(-1)^0 = (-1)^0$ — истина, значит $x = -2$ — корень исходного уравнения.

в) $x + 1 = 1$; $x = 0$. Проверим: $1^2 = 1^0$ — истина.

г) $x + 2 = x^2 + 2x$; $x^2 + x - 2 = 0$;

$$\left[\begin{array}{ll} x = -2 & \text{— уже проверяли;} \\ x = 1 & 2^3 = 2^3 \text{ — истина.} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-2; 0; 1\}$.

4. $8^x + 15^x = 17^x$.

Разделим обе части уравнения на 17^x:

$$\left(\frac{8}{17}\right)^x + \left(\frac{15}{17}\right)^x = 1.$$

Учитывая, что $0 < \frac{8}{17} < 1$, $0 < \frac{15}{17} < 1$,

$\left(\frac{8}{17}\right)^2 + \left(\frac{15}{17}\right)^2 = \frac{64+225}{289} = 1$, можно обозначить

$\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$; $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$, и требуется решить уравнение $(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x = 1$.

Очевидно, что уравнение имеет решение при $x=2$ (известное тригонометрическое тождество). Выясним, имеются ли другие решения.

а) Пусть $x > 2$, тогда, учитывая, что

$$0 < \sin\alpha < 1, \quad 0 < \cos\alpha < 1, \quad \begin{matrix}(\sin\alpha)^x < \sin^2\alpha \\ (\cos\alpha)^x < \cos^2\alpha\end{matrix},$$

$(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x < \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

т. е. $(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x < 1$, а это противоречит $(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x = 1$.

б) Пусть $x < 2$, тогда аналогично: $\begin{matrix}(\sin\alpha)^x > \sin^2\alpha \\ (\cos\alpha)^x > \cos^2\alpha\end{matrix}$;

$(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x > \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

т. е. $(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x > 1$, что противоречит $(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x = 1$.

Ответ: $x = 2$.

Практикум 3

Решите уравнения:

1) $3^{2x} = \left(\sqrt{3}\right)^{x^2}$.

$3^{2x} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{x^2}$; $\quad 2x = \dfrac{1}{2}x^2$; $\quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{0; 4\}$.

2) $(0{,}5)^{5x} = 8^{-3}$.

$\left(2^{-1}\right)^{5x} = \left(2^3\right)^{-3}$; $\quad 2^{-5x} = 2^{-9}$; $\quad -5x = -9$; $\quad \boxed{x = 1{,}8}$.

3) $7^{x-7} = 49\sqrt{7}$.

$7^{x-7} = 7^2 \cdot 7^{\frac{1}{2}}$; $\quad 7^{x-7} = 7^{2{,}5}$; $\quad x - 7 = 2{,}5$; $\quad \boxed{x = 9{,}5}$.

4) $\sqrt[7]{36^{x-5}} = \dfrac{6}{\sqrt[5]{6}}$.

$\left(6^{2(x-5)}\right)^{\frac{1}{7}} = 6 \cdot 6^{-\frac{1}{5}}$; $\quad 6^{\frac{2(x-5)}{7}} = 6^{1-\frac{1}{5}}$;

$\dfrac{2(x-5)}{7} = \dfrac{4}{5}$; $\quad 10(x-5) = 28$; $\quad 10x = 78$; $\quad \boxed{x = 7{,}8}$.

5) $4^{x-1} + 11 \cdot 4^{x-2} = 15 \cdot 2^{-4}$.

Домножим на 2^4: $\quad 16 \cdot 4^{x-1} + 11 \cdot 16 \cdot 4^{x-2} = 15 \cdot 2^{-4} \cdot 2^4$;

$4 \cdot 4^x + 11 \cdot 4^x = 15$; $\quad 15 \cdot 4^x = 15$; $\quad 4^x = 1$; $\quad \boxed{x = 0}$.

6) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1} - 5^{1-2x} = 0$.

$2^{-2x+1} = 5^{-2x+1}$; $\quad \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2x+1} = 1$; $\quad \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2x+1} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^0$;

$-2x + 1 = 0$; $\quad \boxed{x = 0{,}5}$.

7) $2{,}5 \cdot 4^x = 8 \cdot 5^{x-1}$.

$\dfrac{5}{2} \cdot 4^x = 8 \cdot 5^{x-1}$; $\quad \dfrac{1}{16} \cdot 4^x = \dfrac{1}{5} \cdot 5^{x-1}$;

$4^{x-2} = 5^{x-2}$; $\quad \left(\dfrac{4}{5}\right)^{x-2} = 0$; $\quad \boxed{x = 2}$.

8) $\sqrt[3]{2^{2x+8}} = 152 \cdot 19^{2x-2}$.

$2^{\frac{2x+8}{3}} = 8 \cdot 19 \cdot 19^{2x-2}$; $\quad \frac{1}{2^3} \cdot 2^{\frac{2x+8}{3}} = 19^{2x-1}$;

$2^{\frac{2x+8}{3}-3} = 19^{2x-1}$; $\quad 2^{\frac{2x-1}{3}} = 19^{2x-1}$; $\quad \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{2x-1} = 19^{2x-1}$;

$\left(\frac{2^{\frac{1}{3}}}{19}\right)^{2x-1} = 1$; $\quad 2x - 1 = 0$; $\quad \boxed{x = 0{,}5}$.

9) $25^x + 175 \cdot 5^{x-2} - 60 = 0$.

$5^{2x} + 7 \cdot 25 \cdot 5^{x-2} - 60 = 0$; $\quad 5^{2x} + 7 \cdot 5^x - 60 = 0$;

Обозначим $t = 5^x$ $(t > 0)$. Тогда

$t^2 + 7t - 60 = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = -12 \notin (0; \infty) \end{array}\right.$; $\quad 5^x = 5$; $\quad \boxed{x = 1}$.

10) $2^{2x+8} + 5^{2x+7} + 2^{2x+10} - 5^{2x+8} = 0$.

Сгруппируем по одинаковым основаниям:

$\left(2^{2x+8} + 2^{2x+10}\right) + \left(5^{2x+7} - 5^{2x+8}\right) = 0$.

Вынесем в каждой скобке степень с наименьшим показателем:

$2^{2x+8}\left(1 + 2^2\right) + 5^{2x+7}(1 - 5) = 0$; $\quad 5 \cdot 2^{2x+8} = 4 \cdot 5^{2x+7}$;

$\frac{1}{4} \cdot 2^{2x+8} = \frac{1}{5} \cdot 5^{2x+7}$; $\quad 2^{2x+6} = 5^{2x+6}$; $\quad \left(\frac{2}{5}\right)^{2x+6} = 1$;

$2x + 6 = 0$; $\quad \boxed{x = -3}$.

11) $3^{x+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} - \sqrt{9^{x-2}} - \frac{1}{\sqrt{9^{3-x}}} = 258$.

$3 \cdot 3^x + 3^{x-1} - 3^{\frac{2(x-2)}{2}} - 3^{-\frac{2(3-x)}{2}} = 258$;

$3 \cdot 3^x + 3^{-1} \cdot 3^x - 3^{x-2} - 3^{x-3} = 258$;

$3^x\left(3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27}\right) = 258$; $\quad 3^x \cdot \frac{81 + 9 - 3 - 1}{27} = 258$;

$\frac{86}{27} \cdot 3^x = 258$; $\quad 3^x = 3 \cdot 27$; $\quad 3^x = 3^4$; $\quad \boxed{x = 4}$.

12) $6\cdot 5^{2x+3}-5\cdot 5^{\frac{x+3}{2}}=5^{-x}$.

Домножим на 5^x: $6\cdot 5^x\cdot 5^{2x+3}-5\cdot 5^x\cdot 5^{\frac{x+3}{2}}=5^x\cdot 5^{-x}$;

$6\cdot 5^{3x+3}-5\cdot 5^{\frac{3x+3}{2}}=1$. Обозначим $t=5^{\frac{3x+3}{2}}$ $(t>0)$.

Тогда $6t^2-5t-1=0$; $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{1}{6}\notin(0;\infty) \end{array}\right.$;

$5^{\frac{3x+3}{2}}=1$; $5^{\frac{3x+3}{2}}=5^0$; $\dfrac{3x+3}{2}=0$; $\boxed{x=-1}$.

13) $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$.

Разделим обе части уравнения на 16^x:

$3+2\cdot\left(\dfrac{81}{16}\right)^x=5\cdot\left(\dfrac{36}{16}\right)^x$; $3+2\cdot\left(\dfrac{9}{4}\right)^{2x}=5\cdot\left(\dfrac{9}{4}\right)^x$.

Обозначим $t=\left(\dfrac{9}{4}\right)^x>0$. Тогда $3+2t^2=5t$; $2t^2-5x+3=0$;

$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{9}{4}\right)^x=1 \\ \left(\dfrac{9}{4}\right)^x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=0{,}5 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{0;0{,}5\}$.

14) $(x^2-4x+4)^{x^2-3x}=(x^2-4x+4)^{2x+6}$.

а) $x^2-4x+4=0$; $(x-2)^2=0$; $x=2$.

Проверим $0^{-2}=0^{10}$ — выражение не определено.

б) $x^2-4x+4=1$;

$\left[\begin{array}{ll} x=3. & \text{Проверим } 1^0=1^{12} \text{ — истина.} \\ x=1. & \text{Проверим } 1^{-2}=1^8 \text{ — истина.} \end{array}\right.$

в) $x^2-4x+4=-1$ $\emptyset$.

г) $x^2-3x=2x+6$; $x^2-5x-6=0$;

$\left[\begin{array}{ll} x=6. & \text{Проверим } 16^{18}=16^{18} \text{ — истина.} \\ x=-1. & \text{Проверим } 9^4=9^4 \text{ — истина.} \end{array}\right.$

Ответ: $\{-1;1;3;6\}$.

Практикум 4

1. $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$.

Для того, чтобы решить этот пример, необходимо знать еще одно свойство:

$$\boxed{p^{\log_a c} = c^{\log_a p}} \quad \text{при} \quad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ p > 0 \\ c > 0. \end{cases}$$

Для доказательства этого равенства рассмотрим логарифмы по основанию a правой и левой части:

$$\mathrm{L} = p^{\log_a c}; \Pi = c^{\log_a p}. \quad \left.\begin{matrix} \log_a \mathrm{L} = \log_a p^{\log_a c} = \log_a p \log_a c \\ \log_a \Pi = \log_a c^{\log_a p} = \log_a p \log_a c \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a \mathrm{L} = \log_a \Pi \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi,$$

что и требовалось доказать.

По доказанному $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2} = 2^{\log_3 5} - 2^{\log_3 5} = \boxed{0}$.

2. $4^{\log_{0,25} 0,1} + \log_3 \dfrac{81}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \log_{\frac{1}{9}} \dfrac{1}{12+2\sqrt{35}} =$

$$= 2^{2\log_{2^{-2}} 10^{-1}} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \log_{3^{-2}} \frac{1}{5+2\sqrt{5}\sqrt{7}+7} =$$

$$= 2^{\frac{2(-1)}{-2}\log_2 10} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \log_{3^{-2}} \frac{1}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^2} =$$

$$= 2^{\log_2 10} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{-2}\log_3 \left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^{-2} =$$

$$= 10 + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \log_3 \left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right) =$$

$$= 10 + \log_3 \frac{81\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} = 10 + \log_3 81 = 10 + \log_3 3^4 =$$

$$= 10 + 4 = \boxed{14}.$$

√ **3.** $$\frac{\left(\left(\log_7^4 2+\log_2^4 7+2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\log_2 7-\log_7 2}=$$

$$=\frac{\left(\left(\left(\log_7^2 2\right)^2+2\log_7^2 2\cdot\log_2^2 7+\left(\log_2^2 7\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\log_2 7-\log_7 2}=$$

$$=\frac{\left(\left(\left(\log_2^2 7+\log_7^2 2\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\log_2 7-\log_7 2}=$$

$$=\frac{\left(\log_7^2 2+\log_2^2 7-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\log_2 7-\log_7 2}=$$

$$=\frac{\left(\log_7^2 2-2\log_7 2\cdot\log_2 7+\log_2^2 7\right)^{\frac{1}{2}}}{\log_2 7-\log_7 2}=$$

$$=\frac{\left(\left(\log_7 2-\log_2 7\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\log_2 7-\log_7 2}=\frac{|\log_7 2-\log_2 7|}{\log_2 7-\log_7 2}=$$

$$=\frac{\log_2 7-\log_7 2}{\log_2 7-\log_7 2}=\boxed{1}\quad (\text{поскольку } \log_2 7>\log_7 2).$$

√ **4.** $$\left(5^{\frac{2\log_4 5+1}{2\log_4 5}}+8^{\frac{1}{3}\log_2 25}+1\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(5^{1+\frac{1}{2\log_4 5}}+2^{3\cdot\frac{1}{3}\log_2 25}+1\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(5\cdot 5^{\frac{1}{2}\log_5 4}+2^{\log_2 25}+1\right)^{\frac{1}{2}}=\left(5\cdot 5^{\log_5 2}+26\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=(5\cdot 2+26)^{\frac{1}{2}}=36^{\frac{1}{2}}=\boxed{6}.$$

√ **5.** $$10^{\log_2 3\cdot\log_5 3(\log_2 3+\log_5 3)^{-1}}=10^{\log_2 3\cdot\log_5 3\frac{1}{\log_2 3+\log_5 3}}=$$

$$=10^{\log_2 3\cdot\log_5 3\frac{1}{\frac{1}{\log_3 2}+\frac{1}{\log_3 5}}}=10^{\log_2 3\cdot\log_5 3\frac{\log_3 2\cdot\log_3 5}{\log_3 5+\log_3 2}}=$$

$$=10^{\frac{1}{\log_3 10}}=10^{\lg 3}=\boxed{3}.$$

$$\boxed{\log_a b\cdot\log_b a=1}$$

6. $$\frac{\log_7 5\cdot\log_3 7\cdot\log_5 4+2\log_4 2}{2\left(2\log_3 2+3\log_{343}7\right)}= \boxed{\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c}$$

$$=\frac{\log_3 7^{\log_7 5}\cdot\log_5 4+\log_4 2^2}{2\left(\log_3 4+3\log_{7^3}7\right)}=\frac{\log_3 5\cdot\log_5 4+1}{2\left(\log_3 4+\frac{3}{3}\log_7 7\right)}=$$

$$=\frac{\log_3 4+1}{2\left(\log_3 4+1\right)}=\boxed{\frac{1}{2}}.$$

7. $$\sqrt{1+6^{1+0{,}5\log_4^{-1}6}+2^{2\log_{36}^{-1}4}}=\sqrt{1+6\cdot 6^{\frac{0{,}5}{\log_4 6}}+2^{2\log_{36}^{-1}4}}=$$

$$=\sqrt{1+6\cdot 6^{0{,}5\log_6 4}+2^{2\log_4 36}}=\sqrt{1+6\cdot 6^{\log_6 2}+2^{2\log_2 6}}=$$

$$=\sqrt{1+6\cdot 2+\left(2^{\log_2 6}\right)^2}=\sqrt{1+6\cdot 2+6^2}=\sqrt{49}=\boxed{7}.$$

8. $$(\log_5 4+\log_4 5+2)\left(\log_5 4-\log_{20}4\right)\log_4 5-\log_5 4=$$

$$=\left(\log_5 4+\frac{1}{\log_5 4}+2\right)\left(\log_5 4-\frac{1}{\log_4 20}\right)\log_4 5-\log_5 4=$$

$$=\frac{\left(\log_5^2 4+2\log_5 4+1\right)}{\log_5 4}\left(\log_5 4-\frac{1}{\log_4 5+\log_4 4}\right)\log_4 5-\log_5 4=$$

$$=\frac{(\log_5 4+1)^2}{\log_5 4}\cdot\frac{\log_5 4\left(\log_4 5+1\right)-1}{\log_4 5+1}\log_4 5-\log_5 4=$$

$$=\frac{(\log_5 4+1)^2}{\log_5 4}\cdot\frac{\log_5 4\log_4 5+\log_5 4-1}{\frac{1}{\log_5 4}+1}\cdot\log_4 5-\log_5 4=$$

$$=\frac{(\log_5 4+1)^2}{\log_5 4}\cdot\frac{1+\log_5 4-1}{\frac{1+\log_5 4}{\log_5 4}}\cdot\log_4 5-\log_5 4=$$

$$=(\log_5 4+1)\cdot\log_5 4\cdot\log_4 5-\log_5 4= \boxed{\log_a b\cdot\log_b a=1}$$

$$=\log_5 4+1-\log_5 4=\boxed{1}.$$

9. Так как

а) $\log_3 12=\log_3 3+\log_3 4=1+\log_3 4;$

б) $4\log_3 12+2\log_3^2 12-3\log_3 4\cdot\log_3 12=$

$=\log_3 12\left(4+2\log_3 12-3\log_3 4\right)=$

$=(1+\log_3 4)(4+2+2\log_3 4-3\log_3 4)=$

$=(1+\log_3 4)(6-\log_3 4),$ то

$$\frac{4\log_3 12+\log_3^2 4+2\log_3^2 12-3\log_3 4\log_3 12-2\log_3 4}{\log_3 4-2\log_3 12}=$$

$$=\frac{(1+\log_3 4)(6-\log_3 4)+\log_3^2 4-2\log_3 4}{\log_3 4-2-2\log_3 4}=$$

$$=\frac{5\log_3 4+6-2\log_3 4}{-(\log_3 4+2)}=\frac{6+3\log_3 4}{-(2+\log_3 4)}=$$

$$=\frac{3(2+\log_3 4)}{-(2+\log_3 4)}=\boxed{-3}.$$

10. $$\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\sqrt{ab}-\frac{1}{\log_{\sqrt{b^3}}\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)}+3\log_b\sqrt{a}=$$

$$=\frac{1}{2}\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}(ab)-\frac{1}{\frac{2}{3}\log_b\frac{\sqrt{a}}{b}}+3\cdot\frac{1}{2}\log_b a=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}a+\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}b\right)-\frac{3}{2(\log_b\sqrt{a}-\log_b b)}+\frac{3}{2}\log_b a=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_a\frac{\sqrt{a}}{b}}+\frac{1}{\log_b\frac{\sqrt{a}}{b}}\right)-\frac{3}{\log_b a-2}+\frac{3}{2}\log_b a=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_a\sqrt{a}-\log_a b}+\frac{1}{\log_b\sqrt{a}-\log_b b}\right)-\frac{3}{\frac{1}{\log_a b}-2}+\frac{3}{2\log_a b}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\log_a a-\log_a b}+\frac{1}{\frac{1}{2\log_a b}-1}\right)-\frac{3\log_a b}{1-2\log_a b}+\frac{3}{2\log_a b}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}-\log_a b}+\frac{2\log_a b}{1-2\log_a b}\right)-\frac{3\log_a b}{1-2\log_a b}+\frac{3}{2\log_a b}=$$

При условии $\log_a b=3$ получаем

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1-2\cdot 3}+\frac{2\cdot 3}{1-2\cdot 3}\right)-\frac{3\cdot 3}{1-2\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 3}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2+6}{-5}-\frac{9}{-5}+\frac{1}{2}=-\frac{4}{5}+\frac{9}{5}+\frac{1}{2}=\frac{5}{5}+\frac{1}{2}=1+0{,}5=\boxed{1{,}5}.$$

Тренировочные карточки 1 (на свойства логарифмов)

Карточка 1

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9}$.
2. $\log_{\sqrt[3]{b}} \sqrt[4]{b}$.
3. $4^{\log_2 5}$.
4. $\left(\sqrt{5}\right)^{2+\log_5 9}$.
5. $\log_{\frac{1}{2}} (\log_4 (\log_3 9))$.
6. $6^{\ln e^2}$.
7. $(\lg 50 + \lg 2)^5$.
8. $\dfrac{1}{\log_{12} 2} + \log_{\frac{1}{2}} 3$.
9. $\dfrac{\ln 8}{\ln 16} + \log_{\sqrt{5}} 1$.
10. $\dfrac{\log_{25} 16}{\log_{\frac{1}{5}} 4}$.
11. $\lg 9 \cdot \log_9 100$.
12. $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 - 3\log_3 \sqrt[3]{45}$.
13. $\log_2 17 + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{17}{32}\right)^2$.
14. $\log_{13} \operatorname{tg} x + \log_{13} \operatorname{ctg} x$.
15. $\log_{\sqrt[3]{\cos x}} \left(1 - \sin^2 x\right)$.

Карточка 2

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[5]{2}$.
2. $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{a}$.
3. $9^{\log_3 \sqrt{2}}$.
4. $\left(\sqrt{7}\right)^{4+\log_7 4}$.
5. $\log_7 \left(\log_{\frac{1}{2}} (\log_{25} 5)\right)$.
6. $(\ln 5)^{3\log_8 1}$.
7. $\left(\log_{15} 3 + \dfrac{1}{\log_5 15}\right)^{-7}$.
8. $\dfrac{1}{\log_{21} 3} - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{7}$.
9. $\dfrac{\lg 27}{\lg 9}$.
10. $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} 8}{\log_9 16}$.
11. $\ln 15 \cdot \log_{225} e$.
12. $4\log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 + 2\log_2 6$.
13. $\log_5 75 + 3\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{3}$.
14. $\log_{\sin 2x} (2\cos x) + \log_{\sin 2x} \sin x$.
15. $\log_{\operatorname{tg} x} \cos x - \dfrac{1}{\log_{\sin x} \operatorname{tg} x}$.

Карточка 3

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[4]{125}$.
2. $\log_{\sqrt[4]{a}} \sqrt[3]{a}$.
3. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 2}$.
4. $\left(\sqrt{2}\right)^{4+\log_2 25}$.
5. $3{,}4 \cdot 7^{4\ln 1}$.
6. $(\lg 4 + \lg 25)^{-4}$.
7. $\log_4\left(\log_{25}(\log_2 32)\right)$.
8. $\dfrac{\lg 16}{\lg\sqrt{8}}$.
9. $\dfrac{\log_{16} 25}{\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{5}}$.
10. $\lg 4 \cdot \log_2 100$.
11. $\log_{\cos\frac{\pi}{4}} 8$.
12. $\log_7\left(\cos^2 7x + \sin^2 7x\right)$.
13. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2}$.
14. $-\log_2\left(\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}\right)$.
15. $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$.

Карточка 4

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{16}$.
2. $\log_{\sqrt{b}} \sqrt[7]{b}$.
3. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 3}$.
4. $\left(\sqrt{3}\right)^{2+\log_3 49}$.
5. $e^{3\ln 2}$.
6. $\log_8\left(\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(\log_{32} 2)\right)$.
7. $(\lg 8 + \lg 125)^{-3}$.
8. $\dfrac{\ln 27}{\ln 9}$.
9. $\ln 12 \cdot \log_{144} e^3$.
10. $\dfrac{\log_9\sqrt{5}}{\log_{\frac{1}{27}} 125}$.
11. $\log_{\frac{3}{4}} \cos\frac{\pi}{6}$.
12. $\lg\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,22^\circ 30'}{1-\mathrm{tg}^2\,22^\circ 30'}$.
13. $-\log_3\left(\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}\right)$.
14. $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.
15. $\log_2\left(\log_a\sqrt[3]{a^2} + \log_a\sqrt[3]{a}\right)$.

Карточка 5

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[5]{2}$.
2. $\log_{\sqrt[4]{a}} \sqrt{a^3}$.
3. $9^{\log_3 0{,}5}$.
4. $\left(\sqrt{3}\right)^{2+\log_3 16}$.
5. $(\lg 0{,}2 + \lg 0{,}5)^{20}$.
6. $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} 49}{\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{7}}$.
7. $2^{\frac{1}{3}\ln e^3}$.
8. $2\log_{\frac{1}{5}} 5 + \log_{0,2} 3 - \dfrac{1}{2}\log_5 \dfrac{1}{225}$.
9. $\log_{\frac{1}{5}} \dfrac{1}{15} + \log_{25} 4 - \dfrac{1}{\log_{\sqrt{6}} \sqrt{5}}$.
10. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{32} \cdot \log_4 9$.
11. $\dfrac{\log_3 \sqrt{5}}{\log_9 5}$.
12. $\log_8 12 + 0{,}5\log_{\frac{1}{8}} 9$.
13. $\log_{\sin 2x} \left[(\sin x + \cos x)^2 - 1\right]^2$.
14. $\log_3 (3\,\mathrm{tg}\, x) + \log_9 (\mathrm{ctg}\, x)^2$.
15. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

Карточка 6

Вычислите (1–15):

1. $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$.
2. $\log_{\frac{1}{49}} \sqrt[3]{7}$.
3. $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[5]{a^2}$.
4. $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{4+\log_3 625}$.
5. $(\ln \sqrt[5]{e} + 4\ln \sqrt[5]{e})^{25}$.
6. $\dfrac{\log_{49} \sqrt[3]{3}}{\log_{\frac{1}{7}} 27}$.
7. $(0{,}2)^{\frac{1}{3}\lg 0{,}001}$.
8. $\log_3 21 - \dfrac{1}{\log_{49} 9}$.
9. $\log_{\sqrt{2}} \cos^3 \dfrac{\pi}{3}$.
10. $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left(\cos 47^\circ \cdot \cos 17^\circ + \sin 47^\circ \cdot \sin 17^\circ\right)$.
11. $\log_{\sqrt[3]{5}} 27 \cdot \log_{\sqrt{3}} 25$.
12. $100^{\lg 2}$.
13. $\log_3 5 \cdot \dfrac{\log_{25} 9}{\log_{5,1} 5{,}1}$.
14. $\dfrac{\ln 7}{\ln \sqrt[3]{49}}$.
15. $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3}}$.

Карточка 7

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[4]{3}$.
2. $\log_{\sqrt{x}} \sqrt[5]{x}$.
3. $49^{\log_7 \sqrt[4]{3}}$.
4. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3+\log_5 27}$.
5. $7^{0,2\lg 10^5}$.
6. $\dfrac{\log_{\frac{1}{5}} 36}{\log_{25} \frac{1}{\sqrt{6}}}$.
7. $\dfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 8+2\log_{\frac{1}{3}} 6-\log_3 \dfrac{1}{24}$.
8. $\lg 9 \cdot \log_3 0,1$.
9. $\log_4 0,01 - \log_{\sqrt{0,5}} \sqrt{5}$.
10. $\ln\left[(\sin x+\cos x)^2-\sin 2x\right]$.
11. $\log_8 \sin^2 \dfrac{\pi}{6}$.
12. $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27$.
13. $\dfrac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \dfrac{\log_2 9}{\log_{72} 2}$.
14. $\log_{16}\left(\log_{\frac{1}{9}}(\log_{27} 3)\right)$.
15. $\log_{16}(3-\sqrt{5}) + \dfrac{1}{2}\log_2\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

Карточка 8

Вычислите (1–15):

1. $\log_{25} \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
2. $\log_{\sqrt[4]{x}} \sqrt{x^3}$.
3. $16^{\log_2 3}$.
4. $\left(\sqrt{2}\right)^{4+\log_2 25}$.
5. $\dfrac{\log_{16} 0,2}{\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{5}}$.
6. $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(\sin 71^\circ\cdot\cos 11^\circ-\sin 11^\circ\cdot\cos 71^\circ\right)$.
7. $\log_{\sqrt[7]{2}} \sin^4 \dfrac{\pi}{4}$.
8. $\lg 5 \cdot \log_{25} 0,1$.
9. $6^{\frac{\log_3 5}{1+\log_3 2}}$.
10. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{2}\cdot\log_4 27$.
11. $(\lg 200+\lg 0,5)^{-2}$.
12. $\dfrac{\ln\sqrt[3]{3}}{\ln\sqrt[4]{27}}$.
13. $\log_{27}\left(\log_{\frac{1}{8}}(\log_4 2)\right)$.
14. $\dfrac{81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409}\cdot\left(\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{2}{\log_{25} 7}}-125^{\log_{25} 6}\right)$.
15. $\log_3(2+\sqrt{3}) + \dfrac{1}{\log_{(2-\sqrt{3})} 3}$.

Зачетные карточки 1 (на свойства логарифмов)

Карточка 1

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[4]{27}$.

2. $\log_{\sqrt[4]{x}} \sqrt[3]{x^2}$.

3. $36^{\log_6 0,5}$.

4. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3+\log_5 27}$.

5. $(\lg 25 - \lg 0,25)^{-3}$.

6. $\dfrac{\log_7 8}{\log_{\frac{1}{49}} \sqrt{2}}$.

7. $3^{\frac{1}{4}\log_{\sqrt{3}} 81}$.

8. $\log_{\frac{1}{4}} \sin^4 \dfrac{\pi}{4}$.

9. $\log_8 (8 \sin 15^\circ \cos 15^\circ)$.

10. $\log_3 4 \cdot \log_2 9$.

11. $\log_5 \left(\sqrt{26} + 1\right) + \log_{\sqrt{5}} \sqrt{\sqrt{26} - 1}$.

12. $\log_{36} 84 - \log_6 \sqrt{14}$.

13. $\dfrac{\lg 27 + \lg 12}{\lg 2 + 2 \lg 3}$.

14. $\log_{25} (\log_{32} (\log_6 36))$.

15. $\dfrac{1}{2} \log_{30} 36 + 2 \log_{\frac{1}{30}} \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Карточка 2

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt[3]{49}$.

2. $\log_{\sqrt[5]{a}} \sqrt[3]{a^5}$.

3. $25^{\log_{\sqrt{5}} 2}$.

4. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{3+\log_{\frac{1}{2}} 3}$.

5. $\left(\ln \sqrt[5]{e^6} - \ln \dfrac{1}{\sqrt[5]{e^4}}\right)^{-3}$.

6. $\dfrac{\log_{\sqrt{5}} 4}{\log_{\frac{1}{25}} \sqrt[3]{2}}$.

7. $\log_8 (\sin 79^\circ \cdot \cos 49^\circ - \sin 49^\circ \cdot \cos 79^\circ)$.

8. $\log_3 8 \cdot \log_4 \sqrt{3}$.

9. $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left(\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ\right)$.

10. $\log_{49} 84 - \log_7 \sqrt{12}$.

11. $\dfrac{\lg 81 + \lg 64}{2 \lg 3 + 3 \lg 2}$.

12. $\log_{\sqrt{3}} (\log_{27} (\log_2 8))$.

13. $\dfrac{1}{4} \log_6 16 - 3 \log_{\frac{1}{6}} \sqrt[3]{3}$.

14. $5^{\log_3 7} - 7^{\log_3 5}$.

15. $\dfrac{\ln \sqrt[3]{7}}{\ln 49} + \lg \sqrt[6]{10^{-1}}$.

Карточка 3

Вычислите (1–15):

1. $\log_4 \dfrac{1}{32}$.
2. $\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[5]{a^3}$.
3. $25^{\log_{0,2} 4}$.
4. $\left(\sqrt[4]{2}\right)^{8+\log_2 81}$.
5. $\dfrac{\log_4 7}{\log_{0,5} \sqrt[3]{49}}$.
6. $(\lg 300 - \lg 15 - \lg 2)^{-26}$.
7. $\log_3 49 \cdot \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{3}$.
8. $\log_3\left(\sqrt{13}-2\right) + \dfrac{1}{\log_{(2+\sqrt{13})} 3}$.
9. $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}} (\sin 60^\circ)^2$.
10. $\log_{\sqrt{5}} (5 \operatorname{tg} \alpha) + \log_5 (\operatorname{ctg} \alpha)^2$.
11. $2\lg 5 + \dfrac{1}{2}\lg 16$.
12. $\dfrac{\log_5 21}{2\log_5 3 + \frac{1}{2}\log_5 49 - \frac{1}{3}\log_{\sqrt{5}} \sqrt{27}}$.
13. $\log_{27}(\log_8(\log_3 9))$.
14. $\dfrac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$.
15. $\log_5 6 \cdot \log_9 1 \cdot \log_2 7$.

Карточка 4

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{27}} \sqrt[4]{3}$.
2. $\log_{\sqrt{x}} \sqrt[4]{x^5}$.
3. $9^{\log_3 2}$.
4. $\left(\sqrt{3}\right)^{6-\log_3 25}$.
5. $\dfrac{\log_3 25}{\log_9 \sqrt{5}}$.
6. $3\lg 5 + \dfrac{1}{2}\lg 64$.
7. $\dfrac{\log_7 30}{2\log_7 5 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{7}} 36 - \frac{1}{3}\log_{\sqrt{7}} \sqrt{125}}$.
8. $\log_6 3 \cdot \log_{\sqrt{3}} 36$.
9. $\left(\dfrac{\lg 125 - 2\lg 2}{\lg \sqrt[3]{4} + \lg 0{,}2}\right)^3$.
10. $2\log_{\sin 2x} \sin x + \log_{\sin 2x}\left(4\cos^2 x\right)$.
11. $\log_5(\sin 106^\circ \cdot \cos 16^\circ - \cos 106^\circ \cdot \sin 16^\circ)$.
12. $\log_8(\log_{16}(\log_5 25))$.
13. $\dfrac{1}{2}\log_{12} 36 - 3\log_{\frac{1}{12}} \sqrt[3]{2}$.
14. $8^{\log_7 5 \cdot \log_6 1}$.
15. $\log_7\left(3-\sqrt{2}\right) - 2\log_{\frac{1}{7}} \sqrt{3+\sqrt{2}}$.

Карточка 5

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{49}$.
2. $\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[4]{a^3}$.
3. $25^{\log_5 7}$.
4. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{6-\log_2 27}$.
5. $\dfrac{\log_8 7}{\log_{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{49}\right)}$.
6. $\ln 8 \cdot \log_4 e$.
7. $\log_{\sqrt{2}} 12 - \log_2 9$.
8. $7^{\log_{11} 2} - 2^{\log_{11} 7}$.
9. $\log_{16} \cos 16\pi$.
10. $\log_{\operatorname{tg} x} \cos x - \log_{\operatorname{tg} x} \sin x$.
11. $\log_{27} (\log_8 (\log_3 9))$.
12. $\frac{1}{2} \log_{14} 49 - 4 \log_{\frac{1}{14}} \sqrt[4]{2}$.
13. $\left(\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} 8}{\log_9 4}\right)^{-3}$
14. $\dfrac{\log_4 27}{\log_8 9} + \dfrac{\log_5 0{,}5}{\log_{0{,}008} 2}$.
15. $6^{\ln 3 \cdot \ln 1 \cdot \ln 5}$.

Карточка 6

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{25}$.
2. $\log_{\sqrt[4]{x}} \sqrt[3]{x^4}$.
3. $6^{\log_{\sqrt{6}} 5}$.
4. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{10-\log_3 32}$.
5. $\dfrac{\log_3 5}{\log_9 \frac{1}{\sqrt{5}}}$.
6. $\lg 7 \cdot \log_{49} 10$.
7. $\log_{\sqrt{3}} 18 - \log_3 4$.
8. $\log_{15} \sin \dfrac{17\pi}{2}$.
9. $\log_{\sqrt[3]{\cos x}} \left(1 - \sin^2 x\right)$.
10. $4^{\log_3 5} - 5^{\log_3 4}$.
11. $\log_9 (\log_{27} (\log_2 8))$.
12. $\frac{1}{3} \log_{15} 27 - 2 \log_{\frac{1}{15}} \sqrt{5}$.
13. $\dfrac{\log_{25} \frac{1}{3}}{\log_{\frac{1}{25}} 27} - \dfrac{\log_6 8}{\log_6 0{,}25}$.
14. $\log_{\sqrt{3}} \left(\sqrt{11} + \sqrt{2}\right) + \dfrac{1}{\log_{\left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)} \sqrt{3}}$.
15. $\ln 7 \cdot \log_{49} e$.

Карточка 7

Вычислите (1–15):

1. $\log_{0,5} \sqrt[3]{4}$.
2. $\log_{\sqrt[5]{a}} \sqrt[3]{a^5}$.
3. $8^{\log_2 3}$.
4. $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{8-\log_3 16}$.
5. $\dfrac{\log_8 \sqrt[3]{5}}{\log_{\frac{1}{2}} 25}$.
6. $\ln 9 \cdot \log_{\sqrt{3}} e$.
7. $\log_{\sqrt{2}} 54 - \log_4 9^6$.
8. $2^{\log_3 11} - 11^{\log_3 2}$.
9. $\left(\dfrac{\log_6 27 + 2\log_6 2}{\log_6 \sqrt[3]{0,25} + \log_6 \frac{1}{3}}\right)^3$.
10. $\log_{\cos\frac{\pi}{4}} 8$.
11. $\log_{\frac{9}{4}} (\log_8 (\log_2 16))$.
12. $\dfrac{1}{3}\lg 8 - 2\lg\sqrt{0,2}$.
13. $3\log_{\operatorname{tg} x} \sin x - \log_{\operatorname{tg} x} \cos^3 x$.
14. $\log_4 19 - \dfrac{1}{2}\log_4 \left(\dfrac{19}{64}\right)^2$.
15. $5^{\lg 7 \cdot \log_6 1}$.

Карточка 8

Вычислите (1–15):

1. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9}$.
2. $\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[4]{a^5}$.
3. $27^{\log_3 2}$.
4. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{6-\log_2 27}$.
5. $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{2}}{\log_9 8}$.
6. $\lg 27 \cdot \log_9 10$.
7. $\log_{\sqrt{3}} 24 - \log_9 4^6$.
8. $\log_{\cos 2\alpha} \left(1-2\sin^2\alpha\right)$.
9. $5^{\log_7 3} - 3^{\log_7 5}$.
10. $\log_7 \sin\dfrac{13\pi}{2}$.
11. $\log_9 \left(\log_{\frac{1}{8}} (\log_{49} 7)\right)$.
12. $2\log_{18} 3 - \dfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{18}} 8$.
13. $\ln 8 \cdot \log_{\sqrt{2}} e$.
14. $\log_8 15 - \dfrac{1}{3}\log_8 \left(\dfrac{15}{32}\right)^3$.
15. $8^{\log_5 7 \log_3 1}$.

2

Логарифмические и показательные уравнения и неравенства

Практикум 5

1. Решите уравнение $\log_4 2x = \frac{1}{2}$.

$D(\text{У})$ — область определения уравнения.

$D(\text{У}):\ 2x > 0,\ x > 0.$

По определению $4^{\frac{1}{2}} = 2x;\quad x = 1 \in D(\text{У}).$

Ответ: $x = 1.$

2. Решите уравнение $\log_{\sqrt{3}}(x+1) = 2.$

$D(\text{У}):\ (x+1>0),\ x > -1.$

$\sqrt{3}^2 = x + 1;\quad x = 2 \in D(\text{У}).$

Ответ: $x = 2.$

3. Решите уравнение $\log_{\frac{2}{5}} \frac{1}{2x+3} = 1.$

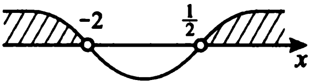
$D(\text{У}):\ (2x+3>0),\ x > -1{,}5.$

$\left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{1}{2x+3};\quad 4x + 6 = 5;\quad x = -\frac{1}{4} \in D(\text{У}).$

Ответ: $x = -\frac{1}{4}.$

4. Решите уравнение $\log_{\frac{3}{4}} \dfrac{2x-1}{x+2} = 1.$

$D(\text{У})$: $\dfrac{2x-1}{x+2} > 0.$



$\dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{3}{4};$

$8x - 4 = 3x + 6; \quad 5x = 10; \quad x = 2 \in D(\text{У}).$

Ответ: $x = 2.$

5. Решите уравнение $\log_{8-x} 11 = \dfrac{1}{2}.$

$D(\text{У})$: $\begin{cases} 8 - x > 0 \\ 8 - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 8 \\ x \neq 7; \end{cases}$

$(8-x)^{\frac{1}{2}} = 11; \quad 8 - x = 121; \quad x = -113 \in D(\text{У}).$

Ответ: $x = -113.$

6. Решите уравнение $\log_{x^2+4x+4} 3 = \dfrac{1}{2}.$

$D(\text{У})$: $\begin{cases} x^2 + 4x + 4 > 0 \\ x^2 + 4x + 4 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -1 \\ x \neq -3; \end{cases}$

$\left(x^2 + 4x + 4\right)^{\frac{1}{2}} = 3; \quad x^2 + 4x + 4 = 9;$

$x^2 + 4x - 5 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = 1 \end{array}\right. \in D(\text{У}).$

Ответ: $x = \{-5;1\}.$

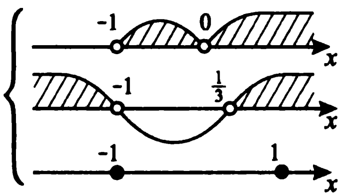
7. Решите уравнение $\log_{x+1}\left(3x^2 + 2x - 1\right) = 2.$

Решим это уравнение на уровне равносильных преобразований.

$\log_{x+1}\left(3x^2 + 2x - 1\right) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \\ 3x^2 + 2x - 1 > 0 \\ (x+1)^2 = 3x^2 + 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ (3x-1)(x+1) > 0 \\ 2x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1; \\ x \neq 0 \\ (3x-1)(x+1) > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases}$$



$\Leftrightarrow x = 1.$

Можно не писать, что $3x^2 + 2x - 1 > 0$,

так как из уравнения следует $(x+1)^2 = 3x^2 + 2x - 1$,

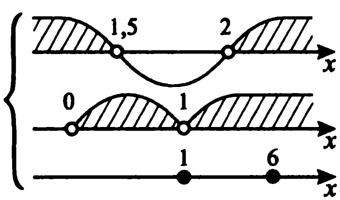
значит, $3x^2 + 2x - 1 > 0$ (учитывая, что $x \neq -1$).

Ответ: $x = 1$.

8. Решите уравнение $\log_x \left(2x^2 - 7x + 6\right) = 2$.

$$2x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x + 6 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 = 2x^2 - 7x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-2)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 - 7x + 6 = 0 \end{cases}$$



$\Leftrightarrow x = 6$

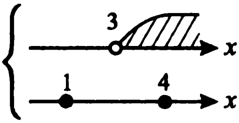
Ответ: $x = 6$.

9. Решите уравнение $\lg(x-2) + \lg(x-3) = 1 - \lg 5$.

$\lg(x-2) + \lg(x-3) = 1 - \lg 5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 3 > 0 \\ \lg((x-2)(x-3)) = \lg \dfrac{10}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 5x + 6 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 5x + 4 = 0. \end{cases}$$



$\Leftrightarrow x = 4.$

Ответ: $x = 4$.

10. Решите уравнение $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$.

Примем во внимание, что

$$\log_{a^{2k}} b^{2m} = \frac{m}{k}\log_{|a|}|b|, \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \text{и} \quad 64 = 2^6.$$

$$D(\text{У}): \begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 \neq 1 \\ 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}, \text{ значит, } |x| = x \quad (x > 0).$$

$$\log_{|x|} 4 + \frac{1}{\log_{64} 2x} = 3; \qquad \log_x 4 + \frac{1}{\frac{1}{6}\log_2 2x} = 3;$$

$$\log_x 4 + \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 x} = 3; \qquad \frac{2}{\log_2 x} + \frac{6}{1 + \log_2 x} = 3.$$

Пусть $\log_2 x = t$. Тогда $\dfrac{2}{t} + \dfrac{6}{1+t} = 3;$

$$2(1+t) + 6t = 3\left(t^2 + t\right); \qquad 3t^2 - 5t - 2 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6};$$

$$\left[\begin{aligned} t &= 2 \\ t &= -\frac{1}{3} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \log_2 x &= 2 \\ \log_2 x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= 4 \\ x &= 2^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}\right. \in D(\text{У}).$$

Ответ: $\left\{2^{-\frac{1}{3}}; 4\right\}$.

Решение простейших показательных и логарифмических неравенств

Свойства логарифмических неравенств

1. $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

2. $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Свойства показательных неравенств

1. $a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f_1(x) > f_2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f_1(x) < f_2(x) \end{cases} \end{array}\right.$

2. $a^{f_1(x)} < a^{f_2(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f_1(x) < f_2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f_1(x) > f_2(x). \end{cases} \end{array}\right.$

Примеры решения простейших показательных неравенств

Решите неравенство:

1. $2^{-\frac{x}{2}} < 8.$

$2^{-\frac{x}{2}} < 2^3$ ($y = 2^x$ — возрастающая);

$-\dfrac{x}{2} < 3; \quad x > -6.$

Ответ: $(-6; \infty)$.

2. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2x}{15}} < \sqrt[6]{6}.$

$6^{-\frac{2x}{15}} < 6^{\frac{1}{6}}$ $(y = 6^x \uparrow)$; $\quad -\frac{2x}{15} < \frac{1}{6}$; $\quad -2x < \frac{15}{6}$; $\quad x > -\frac{5}{4}$.

Ответ: $(-1{,}25; \infty)$.

3. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x}{5}} > \frac{1}{3}.$

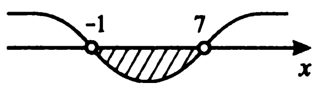
$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2x}{5}} > \frac{1}{3}$ $\left(y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \downarrow\right)$; $\quad \frac{2x}{5} < 1$; $\quad x < 2{,}5$.

Ответ: $(-\infty; 2{,}5)$.

4. $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}.$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \left(\frac{3}{4}\right)^3$ $\left(y = \left(\frac{3}{4}\right)^x \downarrow\right)$; $\quad 6x + 10 - x^2 > 3$;

$x^2 - 6x - 7 < 0$;



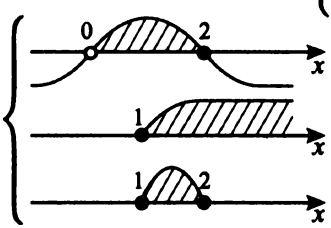
$-1 < x < 7$.

Ответ: $(-1; 7)$.

5. $\frac{2^{\sqrt{x-1}}}{4x} \geqslant 2^{\sqrt{x-1}-3}$;

$\frac{2^{\sqrt{x-1}} - 4x \cdot 2^{\sqrt{x-1}-3}}{4x} \geqslant 0$; $\quad \frac{2^{\sqrt{x-1}-3}(8-4x)}{4x} \geqslant 0$;

$\frac{2^{\sqrt{x-1}-1}(2-x)}{4x} \geqslant 0$; $\quad \begin{cases} \frac{2-x}{4x} \geqslant 0 \\ x - 1 \geqslant 0 \end{cases}$;



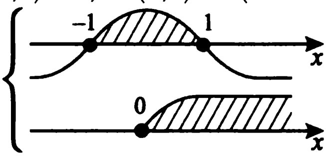
$1 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $[1; 2]$.

6. $(0{,}125)^{\sqrt{x}} \geqslant \dfrac{x^2}{2^{3\sqrt{x}}}$.

$(0{,}5)^{3\sqrt{x}} \geqslant x^2 \cdot (0{,}5)^{3\sqrt{x}}$; $\quad (0{,}5)^{3\sqrt{x}}(1 - x^2) \geqslant 0$;

$\begin{cases} 1 - x^2 \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$



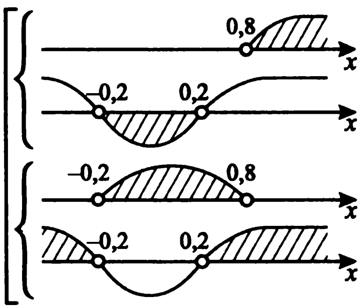
$0 \leqslant x \leqslant 1$.

Ответ: $[0; 1]$.

7. $(x + 0{,}2)^{x^2 - 0{,}04} < 1$.

$(x + 0{,}2)^{x^2 - 0{,}04} < (x + 0{,}2)^0$;

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 0{,}2 > 1 \\ x^2 - 0{,}04 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 0{,}2 < 1 \\ x + 0{,}2 > 0 \\ x^2 - 0{,}04 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$;



$0{,}2 < x < 0{,}8$.

Ответ: $(0{,}2; 0{,}8)$.

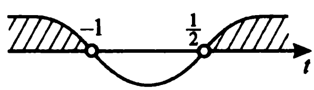
8. $4^x - 2 \cdot 5^{2x} < 10^x$.

Разделим обе части неравенства на 4^x $(4^x > 0)$:

$1 - 2 \cdot \dfrac{5^{2x}}{4^x} < \dfrac{10^x}{4^x}$; $\quad 1 - 2 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^{2x} < \left(\dfrac{5}{2}\right)^x$.

Обозначим $t = \left(\dfrac{5}{2}\right)^x > 0$. Тогда

$1 - 2t^2 < t$; $\quad 2t^2 + t - 1 > 0$;



$\left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{5}{2}\right)^x > \dfrac{1}{2} \\ \left(\dfrac{5}{2}\right)^x < -1 \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{5}{2}} \left(\dfrac{5}{2}\right)^x > \log_{\frac{5}{2}} \left(\dfrac{1}{2}\right) \\ \emptyset \end{array}\right.$ $\left(y = \log_{\frac{5}{2}} x \uparrow\right)$;

$x > \log_{2{,}5} 0{,}5$.

Ответ: $\left(\log_{2{,}5} 0{,}5; \infty\right)$.

Практикум 6

Решите неравенства:

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{2}} > \sqrt{3}$;

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2x}{3}} > \frac{1}{2}$;

3. $9^{-\frac{2x}{7}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$;

4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$;

5. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x-1}{x}} < \sqrt{125}$;

6. $(0,1)^{2x+1} + 1 - 11 \cdot (0,1)^{x+1} < 0$;

7. $\frac{3^{\sqrt{x-3}}}{3x+3} > 3^{\sqrt{x-3}-3}$;

8. $(x-4)^{x^2-9} < 1$;

9. $x^2 \cdot 9^{\sqrt{x}} < 3^{2(\sqrt{x}+2)}$;

10. $2^{2\sqrt{x+0,5}} + 2^{3-2\sqrt{x+0,5}} < 6$.

Решение практикума 6

Решите неравенства:

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{2}} > \sqrt{3}.$

$3^{-\left(-\frac{x}{2}\right)} > 3^{\frac{1}{2}};\quad 3^{\frac{x}{2}} > 3^{\frac{1}{2}};\quad \frac{x}{2} > \frac{1}{2};\quad x > 1.$

Ответ: $(1; \infty)$.

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2x}{3}} > \frac{1}{2}.$

$-\frac{2x}{3} > 1;\quad -2x > 3;\quad x < -1{,}5.$

Ответ: $(-\infty; -1{,}5)$.

3. $9^{-\frac{2x}{7}} > \frac{1}{\sqrt{3}}.$

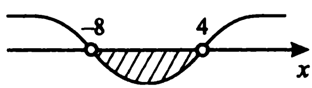
$3^{-\frac{4x}{7}} > 3^{-\frac{1}{2}};\quad -\frac{4x}{7} > -\frac{1}{2};\quad -4x > -\frac{7}{2};\quad x < \frac{7}{8}.$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{7}{8}\right)$.

4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}.$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2(16-x)};\quad x^2 + 2x < 2(16 - x);$

$x^2 + 4x - 32 < 0;$

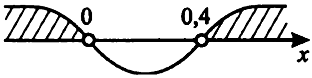


$-8 < x < 4.$

Ответ: $(-8; 4)$.

5. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x-1}{x}} < \sqrt{125}.$

$5^{-\frac{x-1}{x}} < 5^{\frac{3}{2}};\quad -\frac{x-1}{x} < \frac{3}{2};\quad \frac{2x-2+3x}{x} > 0;\quad \frac{5x-2}{x} > 0;$



$x < 0; \quad x > 0{,}4.$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0{,}4; \infty)$.

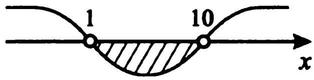
6. $(0{,}1)^{2x+1} + 1 - 11 \cdot (0{,}1)^{x+1} < 0.$

$0{,}1^1 \cdot (0{,}1)^{2x} + 1 - 11 \cdot 0{,}1^1 \cdot (0{,}1)^x < 0;$

$(0{,}1)^{2x} - 11 \cdot (0{,}1)^x + 10 < 0.$

Обозначим $t = (0{,}1)^x > 0$. Тогда

$t^2 - 11t + 10 < 0;$



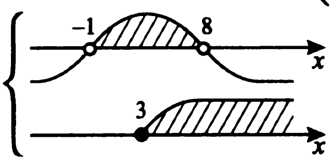
$\begin{cases} (0{,}1)^x < 10 \\ (0{,}1)^x > 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} (0{,}1)^x < 0{,}1^{-1} \\ (0{,}1)^x > 0{,}1^0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > -1 \\ x < 0 \end{cases}; \quad -1 < x < 0.$

Ответ: $(-1; 0)$.

7. $\dfrac{3^{\sqrt{x-3}}}{3x+3} > 3^{\sqrt{x-3}-3}.$

$\dfrac{3^{\sqrt{x-3}} - 3(x+1)3^{\sqrt{x-3}-3}}{3(x+1)} > 0; \qquad \dfrac{3^{\sqrt{x-3}-2}\big(9 - (x+1)\big)}{3(x+1)} > 0;$

$\dfrac{3^{\sqrt{x-3}-2}(8-x)}{3(x+1)} > 0; \qquad \begin{cases} \dfrac{8-x}{x+1} > 0 \\ x \geqslant -3 \end{cases};$



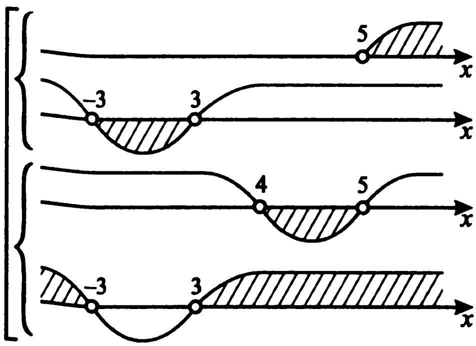
$3 \leqslant x < 8.$

Ответ: $[3; 8)$.

8. $(x-4)^{x^2-9} < 1;$

$(x-4)^{x^2-9} < (x-4)^0;$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 4 > 1 \\ x^2 - 9 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 4 < 1 \\ x - 4 > 0 \\ x^2 - 9 > 0 \end{cases} \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 5 \\ (x+3)(x-3) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 5 \\ x > 4 \\ (x-3)(x+3) > 0 \end{cases} \end{array}\right.;$$



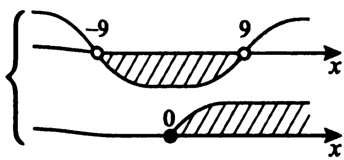
$\varnothing$

$4 < x < 5$

Ответ: $(4; 5)$.

9. $x^2 \cdot 9^{\sqrt{x}} < 3^{2(\sqrt{x}+2)}$.

$x^2 \cdot 9^{\sqrt{x}} - 9^{\sqrt{x}+2} < 0$; $\quad 9^{\sqrt{x}}\left(x^2 - 9^2\right) < 0$; $\quad \begin{cases} x^2 - 9^2 < 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$;

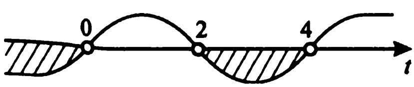


$0 \leqslant x < 9$.

Ответ: $[0; 9)$.

10. $2^{2\sqrt{x+0,5}} + 2^{3-2\sqrt{x+0,5}} < 6$.

Обозначим $t = 2^{2\sqrt{x+0,5}} > 0$. Тогда $t + \frac{8}{t} < 6$; $\frac{t^2 - 6t + 8}{t} < 0$



Так как $t > 0$, то

$\begin{cases} 2^{2\sqrt{x+0,5}} < 4 \\ 2^{2\sqrt{x+0,5}} > 2 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} 2^{2\sqrt{x+0,5}} < 2^2 \\ 2^{2\sqrt{x+0,5}} > 2 \end{cases}$;

$\begin{cases} \sqrt{x+0,5} < 1 \\ \sqrt{x+0,5} > \frac{1}{2} \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x + 0,5 < 1 \\ x + 0,5 > \frac{1}{4} \end{cases}$;

$\begin{cases} x < 0,5 \\ x > -0,25 \end{cases}$; $\quad -0,25 < x < 0,5$.

Ответ: $(-0,25; 0,5)$.

Практикум 7

1. Решите неравенство $\log_3(1-2x) < 2$.

$$\log_3(1-2x) < \log_3 3^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x < 9 \\ 1-2x > 0 \\ 3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > -8 \\ 2x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-4; \dfrac{1}{2}\right)$.

2. Решите неравенство $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$.

$$\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x) \Leftrightarrow$$

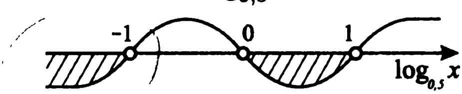
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 > 6-5x \\ 6-5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x > 8 \\ 6 > 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 1{,}2. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 1{,}2)$.

3. Решите неравенство $\dfrac{1+\log_{0,5}^2 x}{1+\log_{0,5} x} < 1$.

$$\frac{1+\log_{0,5}^2 x}{1+\log_{0,5} x} < 1 \Leftrightarrow \frac{1+\log_{0,5}^2 x - 1 - \log_{0,5} x}{1+\log_{0,5} x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{0,5} x\,(\log_{0,5} x - 1)}{1+\log_{0,5} x} < 0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_{0,5} x < 1 \\ \log_{0,5} x > 0 \end{cases} \\ \log_{0,5} x < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_{0,5} x < \log_{0,5} 0{,}5 \\ \log_{0,5} x > \log_{0,5} 1 \end{cases} \\ \log_{0,5} x < \log_{0,5} 0{,}5^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x > 0{,}5 \\ x < 1 \end{cases} & (0{,}5;1) \\ \begin{cases} x > 2 \\ x > 0 \end{cases} & (2;\infty) \end{array}\right.$$

Ответ: $(0{,}5; 1) \cup (2; \infty)$.

4. Решите неравенство $\log_{2x-3} x > 1$.

$\log_{2x-3} x > 1 \Leftrightarrow \log_{2x-3} x > \log_{2x-3}(2x-3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-3>1 \\ x>2x-3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-3<1 \\ 2x-3>0 \\ x<2x-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2 \\ x<3 \end{cases} \quad 3>x>2 \\ \begin{cases} x<2 \\ x>1{,}5 \\ x>3 \end{cases} \quad \varnothing \end{array}\right.$$

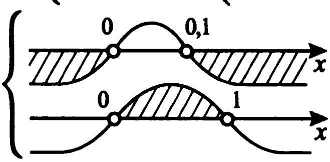
Ответ: $(2;3)$.

5. Решите неравенство $0{,}5^{\log_{\sqrt{3}}\left(\lg\frac{1}{x}\right)} > 1$.

$0{,}5^{\log_{\sqrt{3}}\left(\lg\frac{1}{x}\right)} > 1 \Leftrightarrow 0{,}5^{\log_{\sqrt{3}}\left(\lg\frac{1}{x}\right)} > 0{,}5^0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}\left(\lg\dfrac{1}{x}\right) < 0 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}\left(\lg\dfrac{1}{x}\right) < \log_{\sqrt{3}} 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg\dfrac{1}{x} < 1 \\ \lg\dfrac{1}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg\dfrac{1}{x} < \lg 10 \\ \lg\dfrac{1}{x} > \lg 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} < 10 \\ \dfrac{1}{x} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-10x}{x} < 0 \\ \dfrac{1-x}{x} > 0. \end{cases}$$



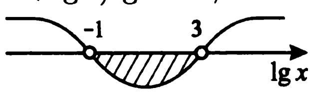
Ответ: $(0{,}1;1)$.

6. Решите неравенство $x^{-2+\lg x} < 1000$.

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 10. Поскольку $y=\lg x$ монотонно возрастает, смысл неравенства при логарифмировании не меняется.

$\lg x^{-2+\lg x} < \lg 1000; \quad (-2+\lg x)\lg x < 3;$

$\lg^2 x - 2\lg x - 3 < 0;$



$$\begin{cases} \lg x < 3 \\ \lg x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x < \lg 1000 \\ \lg x > \lg 10^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1000 \\ x > 10^{-1}. \end{cases}$$

Ответ: $(0{,}1;1000)$.

7. Решите неравенство

$\log_{2x+1}\left(5+8x-4x^2\right)+\log_{5-2x}\left(1+4x+4x^2\right)\leqslant 4.$

$-4x^2+8x+5=-(2x+1)(2x-5),$

так как $4x^2-8x-5=0;$

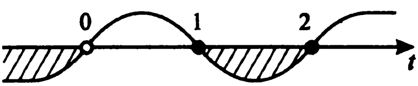
$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{4}=\frac{4\pm6}{4};\qquad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2}\\ x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\log_{2x+1}\big((5-2x)(2x+1)\big)+\log_{5-2x}(2x+1)^2\leqslant 4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5-2x>0\\ 2x+1>0\\ 2x+1\neq 1\\ 5-2x\neq 1\\ \log_{2x+1}(2x+1)+\log_{2x+1}(5-2x)+2\log_{5-2x}(2x+1)\leqslant 4.\end{cases}$$

Пусть $\log_{2x+1}(5-2x)=t$. Тогда $1+t+\dfrac{2}{t}\leqslant 4;$

$$\frac{t^2-3t+2}{t}\leqslant 0;\qquad \frac{(t-1)(t-2)}{t}\leqslant 0;$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_{2x+1}(5-2x)\leqslant 2\\ \log_{2x+1}(5-2x)\geqslant 1\end{cases}\\ \log_{2x+1}(5-2x)<0\end{array}\right.$$

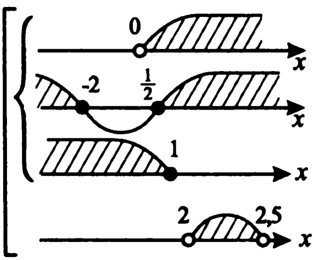
$$\text{а)}\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+1>1\\ \log_{2x+1}(5-2x)\leqslant\log_{2x+1}(2x+1)^2\\ \log_{2x+1}(5-2x)\geqslant\log_{2x+1}(2x+1)\end{cases}\\ \begin{cases}\log_{2x+1}(5-2x)<\log_{2x+1}1\\ 2x+1>1\\ 5-2x>0\end{cases}\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ 5-2x\leqslant (2x+1)^2 \\ 5-2x\geqslant 2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x>0 \\ 5-2x<1 \\ 5-2x>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ 4x^2+4x+1\geqslant 5-2x \\ 4x\leqslant 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x>0 \\ 2x>4 \\ 5>2x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ 4x^2+6x-4\geqslant 0 \\ x\leqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x>2 \\ x<2{,}5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x^2+3x-2=0 \\ x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\dfrac{-3\pm 5}{4} \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{array}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ 2(x+2)(2x-1)\geqslant 0 \\ x\leqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x>2 \\ x<2{,}5 \end{cases} \end{array}\right.$$



$$\left[\frac{1}{2};1\right]\cup(2;2{,}5)$$

б) $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<2x+1<1 \\ 5-2x\geqslant (2x+1)^2 \\ 5-2x\leqslant 2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<2x+1<1 \\ 5-2x>1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x>-0{,}5 \\ 4x^2+6x-4\leqslant 0 \\ x\geqslant 1 \end{cases} \quad \emptyset \\ \begin{cases} x<0 \\ x>-0{,}5 \\ x<2 \end{cases} \quad (-0{,}5;0) \end{array}\right.$$

Ответ: $(-0{,}5;0)\cup[0{,}5;1]\cup(2;2{,}5)$.

8. Решите неравенство

$$\frac{1}{4}\log_5^2(2x+3)^2+8\log_5^2\sqrt{x}\leqslant\log_5(2x+3)^3\cdot\log_5 x.$$

$$\frac{1}{4}\left(2\log_5(2x+3)\right)^2+8\left(\frac{1}{2}\log_5 x\right)^2\leqslant 3\log_5(2x+3)\cdot\log_5 x;$$

$$\log_5^2(2x+3)+2\log_5^2 x\leqslant 3\log_5(2x+3)\log_5 x.$$

Пусть $\log_5(2x+3)=a,\quad \log_5 x=b.$

Тогда $a^2+2b^2\leqslant 3ab;\quad a^2-3ab+2b^2\leqslant 0;\quad (a-2b)(a-b)\leqslant 0;$

$$a_{1,2}=\frac{3b\pm\sqrt{9b^2-8b^2}}{2}=\frac{3b\pm b}{2};\qquad \left[\begin{array}{l}a=2b\\ a=b.\end{array}\right.$$

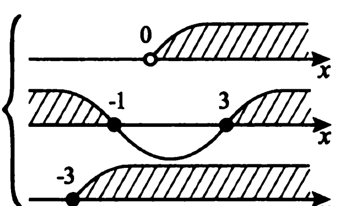
Поскольку $m\cdot n\leqslant 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\geqslant 0\\ n\leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}m\leqslant 0\\ n\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.,$

имеем

$$(\log_5(2x+3)-2\log_5 x)(\log_5(2x+3)-\log_5 x)\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_5(2x+3)\geqslant 2\log_5 x\\ \log_5(2x+3)\leqslant\log_5 x\end{cases}\\ \begin{cases}\log_5(2x+3)\leqslant 2\log_5 x\\ \log_5(2x+3)\geqslant\log_5 x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ 2x+3\geqslant x^2\\ 2x+3\leqslant x\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\ 2x+3\leqslant x^2\\ 2x+3\geqslant x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ x^2-2x-3\leqslant 0\\ x\leqslant -3\end{cases}\quad\emptyset\\ \begin{cases}x>0\\ x^2-2x-3\geqslant 0\\ x\geqslant -3\end{cases}\end{array}\right.$$



$\Leftrightarrow x\geqslant 3.$

Ответ: $[3;\infty)$.

9. Решите неравенство $x^{\frac{3}{2}-\log_{\frac{1}{3}} x^2} \geqslant x^{\log^2_{\frac{1}{3}} x-\frac{3}{2}}$.

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию $\frac{1}{3}$. Поскольку $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ монотонно убывающая, смысл неравенства меняется на противоположный.

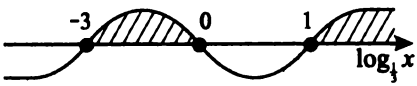
$$\log_{\frac{1}{3}} x^{\frac{3}{2}-\log_{\frac{1}{3}} x^2} \leqslant \log_{\frac{1}{3}} x^{\log^2_{\frac{1}{3}} x-\frac{3}{2}};$$

$$\left(\frac{3}{2} - 2\log_{\frac{1}{3}} x\right)\log_{\frac{1}{3}} x \leqslant \left(\log^2_{\frac{1}{3}} x - \frac{3}{2}\right)\log_{\frac{1}{3}} x;$$

$$\left(\log^2_{\frac{1}{3}} x - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 2\log_{\frac{1}{3}} x\right)\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 0;$$

$$\left(\log^2_{\frac{1}{3}} x + 2\log_{\frac{1}{3}} x - 3\right)\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 0;$$

$$\left(\log_{\frac{1}{3}} x + 3\right)\left(\log_{\frac{1}{3}} x - 1\right)\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 0;$$



$$\left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 1 \\ \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x \leqslant 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} x \geqslant -3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{3}} x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \\ \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 1 \\ \log_{\frac{1}{3}} x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant \frac{1}{3} \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \leqslant 27. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup [1;27]$.

10. Решите неравенство $\dfrac{\log^2_{2,5-x}(2,5+x)}{(x+3,5)(x-1)} \geqslant 0.$

Поскольку

$$\frac{a^2}{b\cdot c} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2 \geqslant 0 \\ b\cdot c > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 \leqslant 0 \\ b\cdot c < 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{т. е.} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2 \geqslant 0 \\ b\cdot c > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

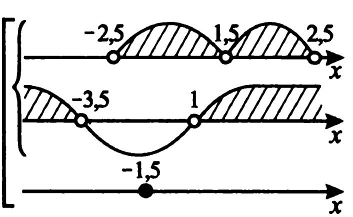
Если числитель равен нулю, то не важно, какой знак имеет знаменатель.

имеем

$$\frac{\log^2_{2,5-x}(2,5+x)}{(x+3,5)(x-1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log^2_{2,5-x}(2,5+x) \geqslant 0 \\ (x+3,5)(x-1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log^2_{2,5-x}(2,5+x) \leqslant 0 \\ (x+3,5)(x-1) \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2,5+x > 0 \\ 2,5-x > 0 \\ 2,5-x \neq 1 \\ (x+3,5)(x-1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log^2_{2,5-x}(2,5+x) = 0 \\ x+3,5 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2,5+x > 0 \\ 2,5-x > 0 \\ 2,5-x \neq 1 \\ (x+3,5)(x-1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1,5 \\ x \neq -3,5 \\ x \neq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $(1; 1,5) \cup (1,5; 2,5) \cup \{-1,5\}$.

Тренировочная работа 4

Решите уравнения (1–10):

1. $\log_{x-1}(3x-1)=3;$

2. $\lg 5x+\lg(x-1)=1;$

3. $\log_2 x+\log_8 x=8;$

4. $\sqrt{2^{x^2-2x-3}}=\sqrt{33+\sqrt{128}}-1;$

5. $\log_5 x\cdot\log_3 x=9\log_5 3;$

6. $3\log_5 2+2-x=\log_5\left(3^x-5^{2-x}\right);$

7. $\lg(x+3)+\lg(2x+1)=\lg(3-2x);$

8. $\log_x\sqrt{3x+4}=1;$

9. $(8x)^{\log_2 x-3}=32\sqrt{x};$

10. $\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}=-\log_x 5;$

11. $5^x+12^x=13^x;$

12. $2^{3x}-\dfrac{8}{2^{3x}}-6\left(2^x-\dfrac{1}{2^{x-1}}\right)=1;$

13. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10;$

14. $|x-1|^{x^2-9}=1.$

Решение тренировочной работы 4

1. $\log_{x-1}(3x-1) = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 = 3x-1 \\ 3x-1>0 \\ x-1>0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x^2+3x-1 = 3x-1 \\ x > \dfrac{1}{3} \\ x>1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x-3) = 0 \\ x>1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right. \\ x>1 \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Ответ: $x = 3$.

2. $\lg 5x + \lg(x-1) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x>0 \\ x-1>0 \\ \lg 5x(x-1) = \lg 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 5x^2-5x-10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $x = 2$.

3. $\log_2 x + \log_8 x = 8;$

$\log_2 x + \dfrac{1}{3}\log_2 x = 8;$

$\dfrac{4}{3}\log_2 x = 8;$

$\log_2 x = 6; \quad x = 2^6; \quad x = 64.$

Ответ: $x = 64$.

4. $\sqrt{2^{x^2-2x-3}} = \sqrt{33+\sqrt{128}} - 1;$

$2^{\frac{x^2-2x-3}{2}} = \sqrt{32+2\sqrt{32}+1}-1;\quad 2^{\frac{x^2-2x-3}{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{32}+1\right)^2}-1;$

$2^{\frac{x^2-2x-3}{2}} = \sqrt{32}+1-1;\quad 2^{\frac{x^2-2x-3}{2}} = 2^{\frac{5}{2}};$

$x^2-2x-3=5;\quad x^2-2x-8=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2. \end{array}\right.$

Ответ: $\{4;-2\}$.

5. $\log_5 x \cdot \log_3 x = 9\log_5 3;$

$\log_5 x \cdot \dfrac{\log_5 x}{\log_5 3} = 9\log_5 3;\quad \log_5^2 x = 9\log_5^2 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = 3\log_5 3 \\ \log_5 x = -3\log_5 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = \log_5 3^3 \\ \log_5 x = \log_5 3^{-3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=27 \\ x=\dfrac{1}{27}. \end{array}\right.$

Ответ: $\left\{27; \dfrac{1}{27}\right\}$.

6. $3\log_5 2 + 2 - x = \log_5\left(3^x - 5^{2-x}\right);$

$\log_5 2^3 + \log_5 5^{2-x} = \log_5\left(3^x - 5^{2-x}\right);$

$\log_5\left(2^3\cdot 5^{2-x}\right) = \log_5\left(3^x-5^{2-x}\right);\quad 8\cdot 5^{2-x} = 3^x - 5^{2-x};$

$9\cdot 5^{2-x} = 3^x;\quad 5^{2-x} = 3^{x-2};\quad 15^{x-2}=1;\quad x=2.$

Ответ: $x=2$.

7. $\lg(x+3)+\lg(2x+1) = \lg(3-2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3>0 \\ 2x+1>0 \\ 3-2x>0 \\ \lg((x+3)(2x+1)) = \lg(3-2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2} \\ x<1\dfrac{1}{2} \\ 2x^2+7x+3=3-2x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2} \\ x<1\dfrac{1}{2} \\ 2x^2+9x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}<x<1\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4{,}5. \end{array}\right. \end{cases}$

Ответ: $x=0$.

8. $\log_x \sqrt{3x+4} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4>0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \\ \log_x \sqrt{3x+4} = \log_x x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ \sqrt{3x+4} = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ 3x+4 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $x = 4$.

9. $(8x)^{\log_2 x - 3} = 32\sqrt{x}$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2:

$\log_2 (8x)^{\log_2 x-3} = \log_2 (32\sqrt{x})$;

$(\log_2 x - 3)(\log_2 8 + \log_2 x) = \log_2 32 + \log_2 \sqrt{x}$;

$(\log_2 x - 3)(3 + \log_2 x) = 5 + \dfrac{1}{2}\log_2 x$;

$\log_2^2 x - 9 - 5 - \dfrac{1}{2}\log_2 x = 0; \quad 2\log_2^2 x - \log_2 x - 28 = 0;$

$(\log_2 x)_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+224}}{4} = \dfrac{1\pm 15}{4}$;

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 4 \\ \log_2 x = -3{,}5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2^4 \\ x = 2^{-3{,}5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 16 \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{16}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{16; \dfrac{\sqrt{2}}{16}\right\}$.

10. $\sqrt{\dfrac{1}{2}\log_x 5x} = -\log_x 5 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{1}{2}(\log_x 5 + 1)} = -\log_x 5$.

Пусть $\log_x 5 = t$. Поскольку $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0 \\ a = b^2 \end{cases}$, имеем

$$\sqrt{\frac{1}{2}(t+1)} = -t \Leftrightarrow \begin{cases} -t \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}(t+1) = t^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leqslant 0 \\ 2t^2 - t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2};$$

$$\log_x 5 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^{-\frac{1}{2}} = 5; \quad x = 5^{-2}; \; x = 0{,}04.$$

Ответ: $x = 0{,}04$.

11. $5^x + 12^x = 13^x$.

Разделим обе части на 13^x: $\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1$.

Так как

$$\begin{cases} 0 < \frac{5}{13} < 1 \\ 0 < \frac{12}{13} < 1 \end{cases} \text{ и } \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25+144}{169} = \frac{169}{169} = 1,$$

то положим $\frac{5}{13} = \sin\alpha$, $\frac{12}{13} = \cos\alpha$. Тогда уравнение перепишется так: $(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x = 1$.

Очевидно, что при $x = 2$ оно превращается в очевидное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

а) При $x > 2$ $\begin{cases} (\sin\alpha)^x < \sin^2\alpha \\ (\cos\alpha)^x < \cos^2\alpha \end{cases}$, значит

$(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x < \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, что противоречит условию.

б) При $x < 2$ $\begin{cases} (\sin\alpha)^x > \sin^2\alpha \\ (\cos\alpha)^x > \cos^2\alpha \end{cases}$, значит

$(\sin\alpha)^x + (\cos\alpha)^x > \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, что также не подходит.

Ответ: $x = 2$.

12. $2^{3x} - \dfrac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \dfrac{1}{2^{x-1}}\right) = 1.$

Обозначим $t = 2^x - \dfrac{1}{2^{x-1}} = 2^x - \dfrac{2}{2^x}.$

Позведем в куб:

$$t^3 = 2^{3x} - 3\cdot(2^x)^2\cdot\frac{2}{2^x} + 3\cdot 2^x\cdot\left(\frac{2}{2^x}\right)^2 + \left(\frac{2}{2^x}\right)^3 =$$

$$= 2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 3\cdot 2\cdot 2^x\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right).$$

Тогда уравнение примет вид

$\left(2^x - \dfrac{2}{2^x}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow 2^x - \dfrac{2}{2^x} = 1.$ Получим

$$2^{2x} - 2^x - 2 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} 2^x = 2;\quad x = 1 \\ 2^x = -1 \notin (0;\infty) \end{array}\right..$$

Ответ: $x = 1$.

13. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10.$

Так как

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{5^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{25-24} = 1,$$

то $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}.$

Обозначим $t = \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x > 0$, тогда $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = \dfrac{1}{t}$, и уравнение примет вид

$$t + \frac{1}{t} = 10; \quad t^2 - 10t + 1 = 0; \quad t_{1,2} = 5 \pm \sqrt{24} = 5 \pm 2\sqrt{6}.$$

Значит, $\left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = 5+2\sqrt{6} \\ \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 5-2\sqrt{6} \end{array}\right.;$

$$\left[\begin{array}{l} \left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}} = 5+2\sqrt{6} \\ \left(\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}\right)^{\frac{x}{2}} = 5+2\sqrt{6} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = 1 \\ -\dfrac{x}{2} = 1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-2; 2\}$.

14. $|x-1|^{x^2-9}=1.$

а) $|x-1|=1;$

$\left[\begin{array}{l} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} 1^{-5}=1 \text{ — истина;} \\ 1^{-9}=1 \text{ — истина.} \end{array}\right.$

б) $|x-1|=0;\quad x=1;\quad 0^{-9}=1$ — ложь.

в) $x^2-9=0;$

$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.;\quad \begin{array}{l} |3-1|>0 \\ |-3-1|>0 \end{array}\quad \begin{array}{l} |2|^0=1 \text{ — истина;} \\ |-4|^0=1 \text{ — истина.} \end{array}$

Ответ: $\{-3;0;2;3\}$.

Тренировочная работа 5

Решите неравенства (1–10):

1. $\log_{0,4}\left(x^2 - 7x\right) \geqslant \log_{0,4}(3x+11)$;

2. $x^{\lg x} \leqslant 100x$;

3. $\lg(x-2) + \lg(27-x) < 2$;

4. $\log_{x^2}(3x+4) \geqslant 1$;

5. $\log_{x-3}(2x-5) > \log_{x-3}(30-6x)$;

6. $\log_{\frac{1}{9}}(x-8)^2 + \log_{\frac{1}{3}}(2-x) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 27$;

7. $5^{2\log_5^2 x} - 4x^{\log_5 x} \leqslant 5$;

8. $\dfrac{1+\log_{x+1}(x-3)}{\log_{x+1}3} \geqslant \log_3(2x-3)$;

9. $\dfrac{4}{3}\log_3^2(5x-6)^3 - \log_3(5x-6)^3\log_3 x^6 \leqslant -6\log_3^2\dfrac{1}{x}$;

10. $\log_{4x+1}7 + \log_{9x}7 \geqslant 0$;

11. $\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{\sqrt{x}} \geqslant \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{5\sqrt[4]{x}-6}$;

12. $x^{-3x-8} > x^7$;

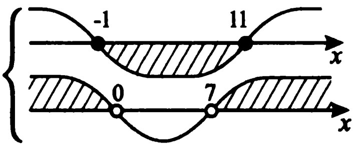
13. $4^x + (x-13)2^x < 2x - 22$;

14. $\left(9^x - 10\cdot 3^{x-1} + 1\right)\log_5^2(4x-1) < 0$.

Решение тренировочной работы 5

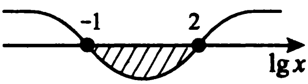
1. $\log_{0,4}\left(x^2-7x\right) \geqslant \log_{0,4}(3x+11) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x \leqslant 3x+11 \\ x^2-7x>0 \\ 0,4<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-10x-11 \leqslant 0 \\ x(x-7)>0. \end{cases}$$



Ответ: $[-1;0)\cup(7;11]$.

2. $x^{\lg x} \leqslant 100x$. Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 10: $\lg x^{\lg x} \leqslant \lg(100x)$; $\lg^2 x \leqslant \lg 100+\lg x$; $\lg^2 x-\lg x-2 \leqslant 0$. Решая неравенство, имеем



$$\begin{cases} \lg x \leqslant 2 \\ \lg x \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x \leqslant \lg 10^2 \\ \lg x \geqslant \lg 10^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 10^2 \\ x \geqslant 10^{-1}. \end{cases}$$

Ответ: $[0,1;100]$.

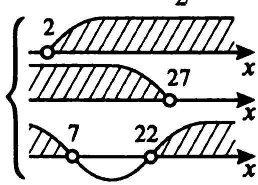
3. $\lg(x-2)+\lg(27-x)<2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ 27-x>0 \\ \lg((x-2)(27-x))<\lg 10^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<27 \\ -x^2+29x-54<100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<27 \\ x^2-29x+154>0 \end{cases}$$

$$x^2-29x+154=0; \quad x_{1,2}=\frac{29\pm\sqrt{841-616}}{2}=\frac{29\pm 15}{2};$$

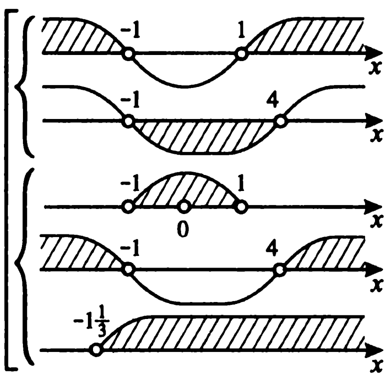
$$\left[\begin{array}{l} x=22 \\ x=7 \end{array}\right. \quad \begin{cases} x>2 \\ x<27 \\ (x-22)(x-7)>0. \end{cases}$$



Ответ: $(2;7)\cup(22;27)$.

4. $\log_{x^2}(3x+4) \geqslant 1 \Leftrightarrow \log_{x^2}(3x+4) \geqslant \log_{x^2} x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 > 1 \\ 3x+4 > x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ 3x+4 < x^2 \\ 3x+4 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-1)(x+1) > 0 \\ (x-4)(x+1) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-1)(x+1) < 0 \\ x \neq 0 \\ (x-4)(x+1) > 0 \\ x > -1\dfrac{1}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$



$(1;4)$

$\emptyset$

Ответ: $(1;4)$.

5. $\log_{x-3}(2x-5) > \log_{x-3}(30-6x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3 > 1 \\ 2x-5 > 30-6x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x-3 < 1 \\ 0 < 2x-5 < 30-6x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 4 \\ x > 4\dfrac{3}{8} \\ x < 5 \end{cases} \quad \left(4\dfrac{3}{8};5\right) \\ \begin{cases} 3 < x < 4 \\ x > 2{,}5 \\ x < 4\dfrac{3}{8}. \end{cases} \quad (3;4) \end{array}\right.$$

Ответ: $(3;4) \cup (4\frac{3}{8};5)$.

6. $\log_{\frac{1}{9}}(x-8)^2+\log_{\frac{1}{3}}(2-x)\geqslant\log_{\frac{1}{3}}27\Leftrightarrow$ $\boxed{\log_{a^2}b^2=\log_{|a|}|b|}$

$\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{3}}|x-8|+\log_{\frac{1}{3}}(2-x)\geqslant\log_{\frac{1}{3}}27\Leftrightarrow$

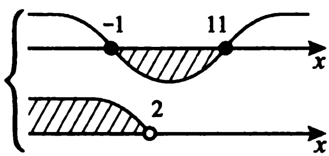
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}|x-8|(2-x)\geqslant\log_{\frac{1}{3}}27\\2-x>0\\(x-8)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\quad\boxed{\begin{matrix}\text{при } x<2\\|x-8|=8-x\end{matrix}}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}((8-x)(2-x))\geqslant\log_{\frac{1}{3}}27\\x<2\\x\neq 8.\end{cases}$$

Смысл неравенства меняется на противоположный, так как основание логарифма $\dfrac{1}{3}$ меньше 1, т. е. функция убывающая:

$$\begin{cases}(8-x)(2-x)\leqslant 27\\x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-10x+16-27\leqslant 0\\x<2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-10x-11\leqslant 0\\x<2.\end{cases}$$

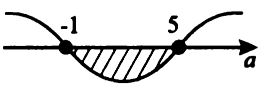


Ответ: $[-1;2)$.

7. $5^{2\log_5^2 x}-4x^{\log_5 x}\leqslant 5.$

$\left(5^{\log_5 x}\right)^{2\log_5 x}-4\cdot x^{\log_5 x}-5\leqslant 0;\qquad x^{2\log_5 x}-4\cdot x^{\log_5 x}-5\leqslant 0;$

Пусть $x^{\log_5 x}=a$ $(a>0$, так как $x>0)$. Тогда



$a^2-4a-5\leqslant 0\Leftrightarrow(a-5)(a+1)\leqslant 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^{\log_5 x}\leqslant 5\\x^{\log_5 x}\geqslant -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_5 x^{\log_5 x}\leqslant\log_5 5\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\log_5^2 x\leqslant 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_5 x\leqslant 1\\\log_5 x\geqslant -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_5 x\leqslant\log_5 5\\\log_5 x\geqslant\log_5 5^{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant 5\\x\geqslant 5^{-1}.\end{cases}$$

Ответ: $[0{,}2;5]$.

8. $\dfrac{1+\log_{x+1}(x-3)}{\log_{(x+1)}3} \geqslant \log_3(2x-3)$.

1) $\log_{x+1}(x-3) = \dfrac{\log_3(x-3)}{\log_3(x+1)}$ при $\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1, \\ x-3>0 \end{cases}$

то есть при $x>3$.

2) $\log_{x+1}3 = \dfrac{1}{\log_3(x+1)}$ при $\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1. \end{cases}$

3) $\dfrac{1+\log_{x+1}(x-3)}{\log_{(x+1)}3} = \dfrac{1+\frac{\log_3(x-3)}{\log_3(x+1)}}{\frac{1}{\log_3(x+1)}} =$

$= \log_3(x+1)+\log_3(x-3) = \log_3\big((x+1)(x-3)\big)$

при $x>3$, поэтому

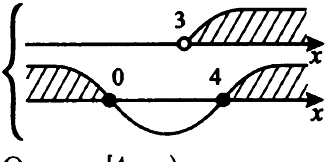
$$\frac{1+\log_{(x+1)}(x-3)}{\log_{(x+1)}3} \geqslant \log_3(2x-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3((x+1)(x-3)) \geqslant \log_3(2x-3) \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-3) \geqslant (2x-3) \\ 2x-3>0 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x^2-2x-3 \geqslant 2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x(x-4) \geqslant 0. \end{cases}$$



Ответ: $[4;\infty)$.

9. $\frac{4}{3}\log_3^2(5x-6)^3-\log_3(5x-6)^3\log_3 x^6\leqslant -6\log_3^2\frac{1}{x}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{3}\left(3\log_3(5x-6)\right)^2-3\log_3(5x-6)6\cdot\log_3 x\leqslant -6\left(\log_3 x\right)^2\\ 5x-6>0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}12\log_3^2(5x-6)-18\log_3(5x-6)\log_3 x+6\log_3^2 x\leqslant 0\\ x>1{,}2.\end{cases}$$

Положим $\log_3 x=a;\quad \log_3(5x-6)=b$. Тогда

$$\begin{cases}2b^2-3ab+a^2\leqslant 0\\ x>1{,}2\end{cases};\quad b_{1,2}=\frac{3a\pm\sqrt{9a^2-8a^2}}{4};\quad \left[\begin{aligned}&b=a\\ &b=\frac{1}{2}a\end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases}(b-a)(2b-a)\leqslant 0\\ x>1{,}2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x>1{,}2\\ (\log_3(5x-6)-\log_3 x)(2\log_3(5x-6)-\log_3 x)\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x>1{,}2\\ \log_3(5x-6)\geqslant\log_3 x\\ 2\log_3(5x-6)\leqslant\log_3 x\end{cases}\\ &\begin{cases}x>1{,}2\\ \log_3(5x-6)\leqslant\log_3 x\\ 2\log_3(5x-6)\geqslant\log_3 x\end{cases}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x>1{,}2\\ 5x-6\geqslant x\\ (5x-6)^2\leqslant x\end{cases}\\ &\begin{cases}x>1{,}2\\ 5x-6\leqslant x\\ (5x-6)^2\geqslant x\end{cases}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x\geqslant\frac{3}{2}\\ 25x^2-61x+36\leqslant 0\\ x>1{,}2\end{cases}\\ &\begin{cases}x\leqslant\frac{3}{2}\\ 25x^2-61x+36\geqslant 0\\ x>1{,}2.\end{cases}\end{aligned}\right.$$

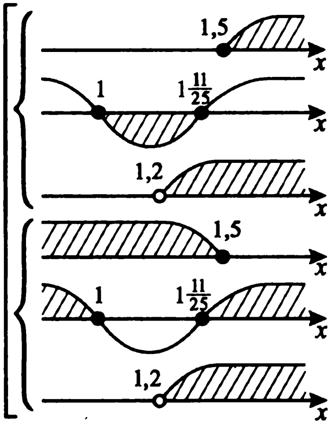
$25x^2 - 61x + 36 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{61 \pm \sqrt{61^2 - 100 \cdot 36}}{50} =$

$= \dfrac{61 \pm \sqrt{3721 - 3600}}{50} =$

$= \dfrac{61 \pm 11}{50} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{36}{25}. \end{array}\right.$

Ответ: $[1\frac{11}{25}; 1{,}5]$.

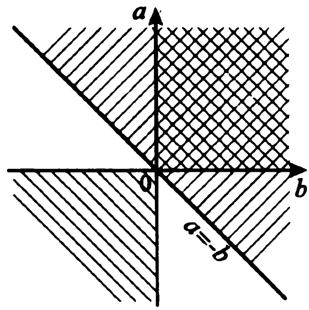


10. $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_7 (4x+1)} + \dfrac{1}{\log_7 9x} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

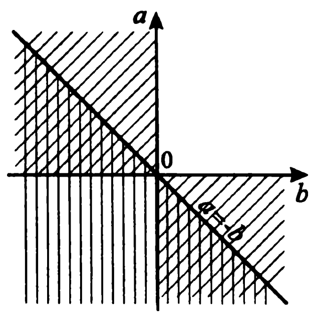
$\Leftrightarrow \dfrac{\log_7 9x + \log_7 (4x+1)}{\log_7 (4x+1) \log_7 9x} \geqslant 0.$

Пусть $\log_7 9x = a$; $\log_7 (4x+1) = b$; $\dfrac{a+b}{a \cdot b} \geqslant 0.$



а) $\begin{cases} a+b \geqslant 0 \\ ab > 0 \end{cases}$, т. е. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} a+b \leqslant 0 \\ ab < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \leqslant -b \\ a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant -b \\ a < 0 \\ b > 0. \end{cases} \end{array}\right.$



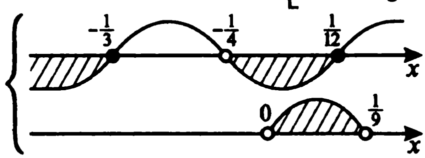
$$\text{Итак,}\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_7 9x > 0 \\ \log_7 (4x+1) > 0 \\ \log_7 9x \leqslant \log_7 \dfrac{1}{4x+1} \end{cases} \\ \begin{cases} \log_7 9x > 0 \\ \log_7 (4x+1) < 0 \\ \log_7 9x \leqslant \log_7 \dfrac{1}{4x+1} \end{cases} \\ \begin{cases} \log_7 9x < 0 \\ \log_7 (4x+1) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

а) $\begin{cases} 9x > 1 \\ 4x+1 > 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x > \dfrac{1}{9} \\ x > 0 \end{cases}$; $x > \dfrac{1}{9}$.

б) $\begin{cases} \dfrac{36x^2+9x-1}{4x+1} \leqslant 0 \\ 9x > 1 \\ 4x+1 < 1 \end{cases}$ $\emptyset$

$36x^2+9x-1=0$; $x_{1,2} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81+144}}{72}$; $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{12} \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

в) $\begin{cases} \dfrac{36x^2+9x-1}{4x+1} \leqslant 0 \\ 9x < 1 \\ 4x+1 > 1. \end{cases}$



Ответ: $\left(\dfrac{1}{9}; \infty\right) \cup \left(0; \dfrac{1}{12}\right]$.

11. $\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{\sqrt{x}} \geqslant \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{5\sqrt[4]{x}-6}$. Так как $\dfrac{3}{\pi} < 1$, то $\sqrt{x} \leqslant 5\sqrt[4]{x}-6$.

Полагая $t = \sqrt[4]{x} \geqslant 0$, получим уравнение $t^2 - 5t + 6 \leqslant 0$;

$\begin{cases} \sqrt[4]{x} \leqslant 3 \\ \sqrt[4]{x} \geqslant 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \leqslant 81 \\ x \geqslant 16 \end{cases}$.

Ответ: $[16; 81]$.

12. $x^{-3x-8} > x^7$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 1 \\ -3x - 8 > 7 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ -3x - 8 < 7 \end{cases}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 1 \\ x < -5 \end{cases} \quad \emptyset \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > -5 \end{cases} \quad 0 < x < 1\end{array}\right..$$

Ответ: $(0; 1)$.

13. $4^x + (x - 13)2^x < 2x - 22$.

$4^x + (x - 13)2^x - 2x + 22 < 0$. Обозначим $t = 2^x > 0$.

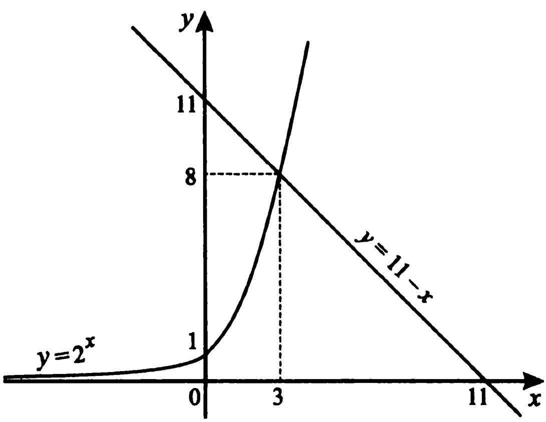
Тогда $t^2 + (x - 13)t - 2(x - 11) < 0$.

Рассмотрим уравнение $t^2 + (x - 13)t - 2(x - 11) = 0$.

$$t_{1,2} = \frac{13 - x \pm \sqrt{(13 - x)^2 + 8(x - 11)}}{2} =$$

$$= \frac{13 - x \pm \sqrt{x^2 - 18x + 81}}{2} = \frac{13 - x \pm (x - 9)}{2}.$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 11 - x \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 2^x = 2 \\ 2^x = 11 - x \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right..$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 2^x - 2 > 0 \\ 2^x - 11 + x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x - 2 < 0 \\ 2^x - 11 + x < 0 \end{cases}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 2^x > 2 \\ 2^x > 11 - x \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x < 2 \\ 2^x < 11 - x \end{cases}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 1 \\ x > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x < 3 \end{cases}\end{array}\right..$$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (3; \infty)$.

14. $\left(9^x - 10\cdot 3^{x-1} + 1\right)\log_5^2(4x-1) < 0.$

$(3\cdot 9^x - 10\cdot 3^x + 3)\log_5^2(4x-1) < 0;$

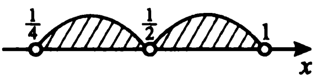
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3\cdot 9^x - 10\cdot 3^x + 3 > 0\\ \log_5^2(4x-1) < 0\end{cases} \quad \emptyset\\ \begin{cases}3\cdot 9^x - 10\cdot 3^x + 3 < 0\\ \log_5^2(4x-1) > 0\end{cases}\end{array}\right.;$$

Рассмотрим $3(3^x-3)\left(3^x-\dfrac{1}{3}\right)=0.$

$$\left[\begin{array}{l}3^x = 3\\ 3^x = \dfrac{1}{3}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = -1\end{array}\right..$$

Вернемся к системе: $\begin{cases}3(3^x-3)\left(3^x-\dfrac{1}{3}\right) < 0\\ \log_5^2(4x-1) \neq 0\end{cases};$

$$\begin{cases}-1 < x < 1\\ 4x-1 > 0\\ 4x-1 \neq 1\end{cases}; \quad \begin{cases}-1 < x < 1\\ x > \dfrac{1}{4}\\ x \neq \dfrac{1}{2}\end{cases}$$



Ответ: $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};1\right).$

Практикум 8

1. $\log_7(6+7^{-x}) = 1+x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7^{1+x} = 6+7^{-x}$ по определению логарифма, то есть $7\cdot 7^x - 6 - 7^{-x} = 0$. Пусть $7^x = t$ $(t>0)$.

Тогда $7t - 6 - \dfrac{1}{t} = 0$; $\quad 7t^2 - 6t - 1 = 0$;

$t_{1,2} = \dfrac{3\pm\sqrt{9+7}}{7}$; $\quad t_1 = 1$; $\quad t_2 = -\dfrac{1}{7} \notin (0;\infty)$;

$7^x = 1$; $\quad x = 0$.

Ответ: $x=0$.

2. $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}} = -\log_x 3$.

$\sqrt{\dfrac{1}{2}\log_x 3x} = -\log_x 3$; $\quad \sqrt{\dfrac{1}{2}(\log_x x + \log_x 3)} = -\log_x 3$;

$\sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\log_x 3)} = -\log_x 3$.

Пусть $\log_x 3 = t$, тогда $\sqrt{\dfrac{1}{2}(1+t)} = -t$.

Поскольку $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b\geqslant 0\\ a = b^2,\end{cases}$ имеем

$$\sqrt{\frac{1}{2}(1+t)} = -t \Leftrightarrow \begin{cases} -t\geqslant 0\\ \dfrac{1}{2}(1+t) = t^2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\leqslant 0\\ 2t^2 - t - 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\leqslant 0\\ \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=-\dfrac{1}{2};\end{array}\right.\end{cases}$$

$t = -\dfrac{1}{2}$, т.е. $\log_x 3 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow 3 = x^{-\frac{1}{2}}$; $\quad x = 3^{-2}$; $\quad x = \dfrac{1}{9}$.

Ответ: $x = \dfrac{1}{9}$.

3. $4^{\log_{16} x} - 3^{\log_{16} x - 0,5} = 3^{\log_{16} x + 0,5} - 2^{2\log_{16} x - 1}$.

$4^{\log_{16} x} + 4^{\log_{16} x - \frac{1}{2}} = 3^{\log_{16} x + 0,5} + 3^{\log_{16} x - 0,5}$;

$4^{\log_{16} x} + 4^{-\frac{1}{2}} \cdot 4^{\log_{16} x} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\log_{16} x} + 3^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{\log_{16} x}$;

$4^{\log_{16} x}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^{\log_{16} x}\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{16} x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}$.

Поскольку $\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, имеем $\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{16} x} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$;

$\log_{16} x = \frac{3}{2}$; $\quad x = 16^{\frac{3}{2}}$; $\quad x = 64$.

Ответ: $x = 64$.

4. $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$.

$$D(\text{У}): \begin{cases} x > 0; \\ x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{4} \\ x \neq \frac{1}{16}. \end{cases}$$

Поскольку $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, имеем

$$\frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{\log_4 4x} + \frac{3}{\log_4 16x} = 0;$$

$$\frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{\log_4 4 + \log_4 x} + \frac{3}{\log_4 16 + \log_4 x} = 0.$$

Пусть $\log_4 x = t$. Тогда $\frac{3}{t} + \frac{2}{1+t} + \frac{3}{2+t} = 0$;

$3(1+t)(2+t) + 2t(2+t) + 3t(1+t) = 0$;

$8t^2 + 16t + 6 = 0$; $\quad 4t^2 + 8t + 3 = 0$;

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{4} = \frac{-4 \pm 2}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{3}{2} \\ t=-0{,}5 \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} \log_4 x=-\dfrac{3}{2} \\ \log_4 x=-0{,}5 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x=4^{-\frac{3}{2}} \\ x=4^{-0{,}5} \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{8} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \in D(\text{У}).$$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{8}; \dfrac{1}{2}\right\}$.

5. $2^{\log_2^2 x}+x^{\log_2 x}=4$.

$2^{\log_2^2 x}=\left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_2 x}=x^{\log_2 x}$, поэтому $x^{\log_2 x}+x^{\log_2 x}=4$, т. е. $x^{\log_2 x}=2$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2:

$$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 2; \quad \log_2^2 x=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x=-1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{2; \dfrac{1}{2}\right\}$.

6. $\log_{0,4}\left(x^3-7x^2+13x-2\right)=(x-2)^{\log_{(x-2)}3}\log_{0,4}(x-2)$.

$(x-2)^{\log_{x-2}3}=3$ при $\begin{cases} x-2>0 \\ x-2\neq 1 \end{cases}$, поэтому

$\log_{0,4}\left(x^3-7x^2+13x-2\right)=\log_{0,4}(x-2)^3$.

Тогда $x^3-7x^2+13x-2=x^3-3\cdot 2\cdot x^2+3\cdot 4\cdot x-8$.

Поскольку $x^3-7x^2+13x-2=(x-2)^3>0$, посторонних корней нет.

$$x^2-x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2. \end{array}\right.$$

С другой стороны, $x>2$ и $x\neq 3$, поэтому $x\in\emptyset$.

Ответ: корней нет.

7. $\log_{x+1}\left(x^3+8-9x\right)\log_{x-1}(x+1)=3.$

$\log_{x-1}(x+1)=\dfrac{1}{\log_{x+1}(x-1)}$, поэтому

$$\log_{x+1}\left(x^3+8-9x\right)\cdot\frac{1}{\log_{x+1}(x-1)}=3,$$

т. е. $\log_{x+1}\left(x^3-9x+8\right)=\log_{x+1}(x-1)^3$.

Тогда $x^3-9x+8=x^3-3x^2+3x-1$;

$3x^2-12x+9=0$;

$x^2-4x+3=0$; $\quad\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3.\end{array}\right.$

Проверка показывает, что $x=3$ — корень уравнения.

Ответ: $x=3$.

8. $\sqrt[3]{\log_5 x}+\sqrt[4]{\log_5 x}=2.$

Пусть $\sqrt[12]{\log_5 x}=t\ \ (t\geqslant 0)$.

Тогда $\sqrt[4]{\log_5 x}=t^3$; $\quad\sqrt[3]{\log_5 x}=t^4$, и уравнение примет вид: $t^4+t^3-2=0$.

Очевидно, что если $A(t)=t^4+t^3-2$, то $A(1)=0$, следовательно, (t^4+t^3-2) делится без остатка на $(t-1)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{rrrr|l}
-\,t^4+t^3 & & & -2 & t-1\\
\underline{t^4-t^3} & & & & \overline{t^3+2t^2+2t+2}\\
 & -\,2t^3 & & -2 & \\
 & \underline{2t^3-2t^2} & & & \\
 & & -\,2t^2 & -2 & \\
 & & \underline{2t^2-2t} & & \\
 & & & -\,2t-2 & \\
 & & & \underline{2t-2} & \\
\end{array}$$

$t\geqslant 0$, поэтому $t^3+2t^2+2t+2>0$, т. е. новых корней нет.

Итак, $t=1$; $\quad\sqrt[12]{\log_5 x}=1$; $\quad\log_5 x=1$; $\quad x=5$.

Ответ: $x=5$.

9. $3\log_{27}^2 x - 13\log_{27} x + 16 = 39\log_x 3 - 27\log_x^2 3.$

Поскольку $\log_{27} x = \dfrac{1}{3}\log_3 x$, имеем

$$\frac{1}{3}\log_3^2 x - \frac{13}{3}\log_3 x + 16 = 39\log_x 3 - 27\log_x^2 3.$$

Сгруппируем:

$$\frac{1}{3}\left(\log_3^2 x + 81\log_x^2 3\right) - \frac{13}{3}\left(\log_3 x + 9\log_x 3\right) + 16 = 0.$$

Пусть $\log_3 x + 9\log_x 3 = t$,

тогда $t^2 = \log_3^2 x + 2\cdot 9\log_3 x\cdot\log_x 3 + 81\log_x^2 3.$

Принимая во внимание, что $\log_a b\cdot\log_b a = 1$, получаем отсюда $t^2 = \log_3^2 x + 81\log_x^2 3 + 18$, или

$\log_3^2 x + 81\log_x^2 3 = t^2 - 18$ (поскольку $\log_x 3\cdot\log_3 x = 1$).

Тогда из исходного уравнения получаем:

$$\frac{1}{3}\left(t^2 - 18\right) - \frac{13}{3}t + 16 = 0; \quad t^2 - 13t + 30 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = 3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \log_3 x + 9\log_x 3 = 10 \\ \log_3 x + 9\log_x 3 = 3. \end{array}\right.$$

Пусть $\log_3 x = a$.

Поскольку $\log_x 3 = \dfrac{1}{\log_3 x}$, имеем:

$$\left[\begin{array}{l} a + \dfrac{9}{a} = 10 \\ a + \dfrac{9}{a} = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 10a + 9 = 0 \\ a^2 - 3a + 9 = 0 \quad (\mathcal{D} < 0). \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = 9 \\ a = 1, \end{array}\right. \text{т. е.} \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 9 \\ \log_3 x = 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 3^9 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

$$D(\text{У}): \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Ответ: $\{3; 3^9\}$.

10. $x\log_3\left(1+5a^2\right)=\log_3\left(\left(2a\sqrt{5}\right)^x+\left(1-5a^2\right)^x\right).$

$a^{\frac{p}{q}}$ определена только если $a>0$, поэтому

$\begin{cases}2a\sqrt{5}>0\\ 1-5a^2>0,\end{cases}$ т. е. $a\in\left(0;\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right).$

$\log_3\left((1+5a^2)^x\right)=\log_3\left[\left(2a\sqrt{5}\right)^x+\left(1-5a^2\right)^x\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(1+5a^2\right)^x=\left(2a\sqrt{5}\right)^x+\left(1-5a^2\right)^x.$

Разделив обе части уравнения на $\left(1+5a^2\right)^x$, получаем:

$$1=\left(\frac{2a\sqrt{5}}{1+5a^2}\right)^x+\left(\frac{1-5a^2}{1+5a^2}\right)^x$$

Последнее соотношение похоже на тригонометрическое тождество.

Проверим: пусть $a\sqrt{5}=\operatorname{tg}\beta$, тогда

$$\frac{2a\sqrt{5}}{1+5a^2}=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta};\qquad \frac{1-5a^2}{1+5a^2}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}.$$

Это формулы, выражающие $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через тангенс половинного угла, т. е.

$$\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}=\sin 2\beta;\qquad \frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}=\cos 2\beta.$$

Следовательно, уравнение имеет следующий вид:

$1=(\cos 2\beta)^x+(\sin 2\beta)^x$,

но это возможно для любых β, только если $x=2$ (тогда это тригонометрическое тождество).

Ответ: $x=2$.

Тренировочная работа 6

1. $\log_{\frac{3}{\pi}}(x+1)+\log_{\frac{3}{\pi}}(x-1)>\log_{\frac{3}{\pi}}3.$

2. $\sqrt{16^x-4^{x+1}}\geqslant 4-4^{\frac{x}{2}}.$

3. $\log_x\left(x^3+1\right)\log_{x+1}x>2.$

4. $x^{\log_{0,5}x+4}<0{,}5^4x.$

5. $\log_{x^2}\dfrac{2x}{|x-3|}\leqslant 0{,}5.$

6. $2\log_3\log_3 x+\log_{\frac{1}{3}}\log_3\left(9\sqrt[3]{x}\right)\geqslant 1.$

7. $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}}\geqslant\left(x^2+x+1\right)^3.$

8. $\sqrt{\log_{0,5}\left(x^2-4x+\dfrac{19}{4}\right)}<1.$

9. $\log_3\left[\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x\right]\geqslant\log_3\left(\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+1\right)+1.$

10. $\sqrt[5]{|\lg x|}+\sqrt[6]{\lg|x|}\leqslant 2.$

Решение тренировочной работы 6

1. $\log_{\frac{3}{\pi}}(x+1)+\log_{\frac{3}{\pi}}(x-1)>\log_{\frac{3}{\pi}}3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x-1>0 \\ \log_{\frac{3}{\pi}}((x+1)(x-1))>\log_{\frac{3}{\pi}}3 \end{cases} \Leftrightarrow \qquad \boxed{\frac{3}{\pi}<1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>1 \\ (x+1)(x-1)<3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-1<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2<4 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2.$$

Ответ: $(1;2)$.

2. $\sqrt{16^x-4^{x+1}} \geqslant 4-4^x$.

$\sqrt{4^{2x}-4\cdot 4^x} \geqslant 4-4^x$.

Пусть $4^x=t$ $(t>0)$, тогда $\sqrt{t^2-4t} \geqslant 4-t$.

$$\text{Поскольку } \sqrt{a} \geqslant b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b\geqslant 0 \\ a \geqslant b^2 \end{cases} \\ \begin{cases} b<0 \\ a\geqslant 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

исходное неравенство равносильно

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-t\geqslant 0 \\ t^2-4t \geqslant 16-8t+t^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 4-t<0 \\ t^2-4t\geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t\leqslant 4 \\ t\geqslant 4 \end{cases} \\ \begin{cases} t>4 \\ t(t-4)\geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} t=4 \\ \\ t>4 \end{array}$$

$4^x \geqslant 4;\quad x\geqslant 1.$

Ответ: $[1;+\infty)$.

3. $\log_x\left(x^3+1\right)\log_{x+1} x > 2.$

$\log_a b\cdot\log_c a=\log_c a^{\log_a b}$, поэтому

$\log_{(x+1)} x^{\log_x\left(x^3+1\right)} > 2 \Leftrightarrow$ $\qquad\boxed{a^{\log_a b}=b}$

$$\begin{cases} x>0\\ x\neq 1\\ \log_{x+1}\left(x^3+1\right)>2\end{cases}\Leftrightarrow$$

(можно сразу по свойству $\log_a b\cdot\log_c a=\log_c b$)

$\boxed{x>0\Rightarrow x+1>1}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x>0\\ x\neq 1\\ \log_{x+1}\left(x^3+1\right)>\log_{x+1}(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x>0\\ x\neq 1\\ x^3+1>(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0\\ x\neq 1\\ x^3+1>x^2+2x+1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x>0\\ x\neq 1\\ x\left(x^2-x-2\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0\\ x\neq 1\\ x(x-2)(x+1)>0\end{cases}\qquad x>2.$$

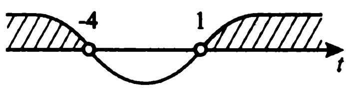
Ответ: $(2;\infty)$.

4. $x^{\log_{0,5}x+4}<0{,}5^4x.$

Прологарифмируем обе части по основанию 0,5. Тогда неравенство примет вид $\log_{0,5}x^{\left(\log_{0,5}x+4\right)}>\log_{0,5}0{,}5^4x$; $\left(\log_{0,5}x+4\right)\log_{0,5}x>\log_{0,5}0{,}5^4+\log_{0,5}x$.

Пусть $\log_{0,5}=t$, тогда $(t+4)t>4+t$;

$t^2+3t-4>0.$



$$\left[\begin{array}{l}\log_{0,5}x>1\\ \log_{0,5}x<-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ x<0{,}5\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\ x>0{,}5^{-4}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ x<0{,}5\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\ x>16\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(0;0{,}5)\cup(16;\infty)$.

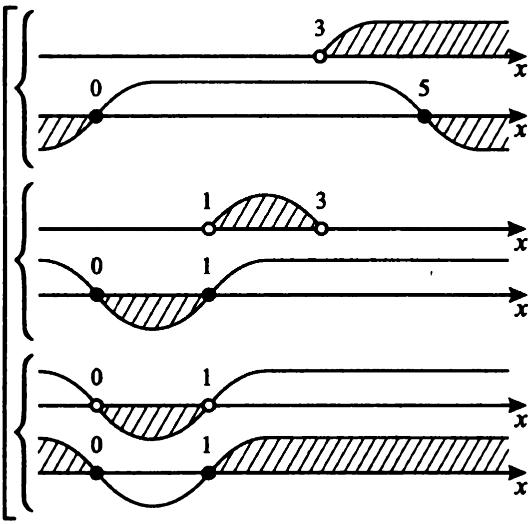
5. $\log_{x^2} \dfrac{2x}{|x-3|} \leqslant 0{,}5.$

$$\log_{x^2} \frac{2x}{|x-3|} \leqslant \log_{x^2} \left(x^2\right)^{0,5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 > 1 \\ \dfrac{2x}{|x-3|} > 0 \\ \dfrac{2x}{|x-3|} \leqslant |x| \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ \dfrac{2x}{|x-3|} > 0 \\ \dfrac{2x}{|x-3|} \geqslant |x| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 3 \\ \dfrac{2x}{|x-3|} \leqslant x \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ x > 0 \\ x \neq 3 \\ \dfrac{2x}{|x-3|} \geqslant x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 3 \\ x\left(\dfrac{2-|x-3|}{|x-3|}\right) \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \dfrac{x\,(2-|x-3|)}{|x-3|} \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 3 \\ x\,(2-|x-3|) \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x\,(2-|x-3|) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 3 \\ x\,(5-x) \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x\,(x-1) \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x\,(x-1) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $x \geqslant 5$.

6. $2\log_3 \log_3 x + \log_{\frac{1}{3}} \log_3 (9\sqrt[3]{x}) \geqslant 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 0 \\ \log_3 9\sqrt[3]{x} > 0 \\ \log_3 (\log_3 x)^2 - \log_3 \log_3 9\sqrt[3]{x} \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 0 \\ \log_3 9\sqrt[3]{x} > 0 \\ \log_3 \dfrac{\log_3^2 x}{\log_3 9\sqrt[3]{x}} \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 0 \\ 2 + \dfrac{1}{3}\log_3 x > 0 \\ \dfrac{\log_3^2 x}{2 + \frac{1}{3}\log_3 x} \geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 0 \\ \log_3 x > -6 \\ \log_3^2 x \geqslant 3\left(2 + \dfrac{1}{3}\log_3 x\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 0 \\ \log_3^2 x - \log_3 x - 6 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_3 x \geqslant 3 \Leftrightarrow x \geqslant 27.$$

Ответ: $[27; \infty)$.

7. $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant \left(x^2+x+1\right)^3.$

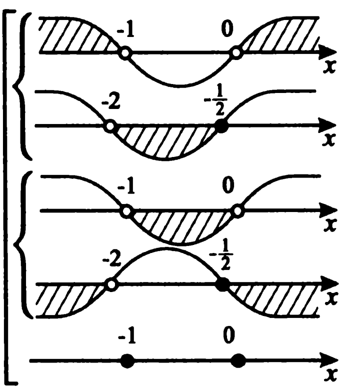
Поскольку $a^{f_1(x)} \geqslant a^{f_2(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a>1 \\ f_1(x) \geqslant f_2(x)\end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ f_1(x) \leqslant f_2(x)\end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ \forall x \in D(f_1) \cap D(f_2),\end{cases}\end{array}\right.$

имеем

$$\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant \left(x^2+x+1\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2+x+1>1 \\ \dfrac{x+5}{x+2} \geqslant 3\end{cases} \\ \begin{cases} 0<x^2+x+1<1 \\ \dfrac{x+5}{x+2} \leqslant 3\end{cases} \\ \begin{cases} x^2+x+1=1 \\ x \neq -2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \qquad \boxed{x^2+x+1>0 \ \ \forall x}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x(x+1)>0 \\ \dfrac{-2x-1}{x+2} \geqslant 0\end{cases} \\ \begin{cases} x(x+1)<0 \\ \dfrac{-2x-1}{x+2} \leqslant 0\end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0\end{array}\right. \\ x \neq -2\end{cases}\end{array}\right.$$



Ответ: $(-2;-1] \cup \left[-\dfrac{1}{2};0\right]$.

8. $\sqrt{\log_{0,5}\left(x^2-4x+\dfrac{19}{4}\right)}<1.$

Поскольку $\sqrt{a}<b \Leftrightarrow \begin{cases} b>0 \\ a\geqslant 0 \\ a<b^2, \end{cases}$ имеем

$$\begin{cases} \log_{0,5}\left(x^2-4x+\dfrac{19}{4}\right)\geqslant 0 \\ \log_{0,5}\left(x^2-4x+\dfrac{19}{4}\right)<1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+\dfrac{19}{4}\leqslant 1 \\ x^2-4x+\dfrac{19}{4}>0 \\ x^2-4x+\dfrac{19}{4}>0,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-16x+15\leqslant 0 \\ 4x^2-16x+19>0 \\ 4x^2-16x+17>0. \end{cases}$$

$4x^2-16x+15=0;$

$x_{1,2}=\dfrac{8\pm\sqrt{64-60}}{4}=\dfrac{8\pm 2}{4};\quad \left[\begin{array}{l} x=2,5 \\ x=1,5; \end{array}\right.$

$4x^2-16x+19>0\quad \forall x,$ так как $4>0$ и $D<0;$

$4x^2-16x+17>0\quad \forall x,$ так как $a=4>0$ и $D=-16<0.$

Следовательно, система равносильна неравенству

$4(x-1,5)(x-2,5)\leqslant 0.$

Ответ: $[1,5;2,5]$.

9. $\log_3\left(\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x\right)\geqslant\log_3\left(\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+1\right)+1.$

$\log_3\left(\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x\right)\geqslant\log_3\left(3\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+3\right);$

$\left(\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x\geqslant 3\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+3.$

Пусть $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t \ (t > 0)$; $2-\sqrt{3} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, тогда $t^2 + \dfrac{1}{t} = 3t + 3$; $t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0$. Разделим последнее выражение на $t+1$:

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} t^3 - 3t^2 - 3t + 1 \\ \underline{t^3 + t^2 \qquad\qquad} \end{array} & \begin{array}{l} t+1 \\ \hline t^2 - 4t + 1 \end{array} \\
-\begin{array}{r} -4t^2 - 3t + 1 \\ \underline{-4t^2 - 4t \quad\ } \end{array} & \\
-\begin{array}{r} t+1 \\ \underline{t+1} \end{array} &
\end{array}$$

$t = -1$ — корень. Но $t = -1 \notin (0;\infty)$. Остается

$t^2 - 4t + 1 = 0$;

$t_1 = 2 + \sqrt{3}$,

$t_2 = 2 - \sqrt{3} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$,

следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} t \geqslant 2+\sqrt{3} \\ t \leqslant 2-\sqrt{3} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x \geqslant 2+\sqrt{3} \\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x \leqslant 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ x \leqslant -2 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

10. $\sqrt[5]{|\lg x|} + \sqrt[6]{\lg |x|} \leqslant 2$.

Найдем область определения неравенства $D(\text{Н})$:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \lg|x| \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \lg x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 1 \qquad D(\text{Н}):\ x \geqslant 1$$

Следовательно, неравенство имеет вид $\sqrt[5]{\lg x} + \sqrt[6]{\lg x} \leqslant 2$. Пусть $\sqrt[30]{\lg x} = t \ (t \geqslant 0)$, тогда $\sqrt[5]{\lg x} = t^6$, $\sqrt[6]{\lg x} = t^5$, т. е. $t^6 + t^5 \leqslant 2$. Очевидно, $t = 1$ — корень уравнения $t^6 + t^5 - 2 = 0$.

Выполним деление:

$$
\begin{array}{r|l}
t^6 + t^5 \qquad\qquad\qquad\qquad -2 & t-1 \\
\cline{2-2}
-\underline{t^6 - t^5} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad & t^5 + 2t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 2 \\
2t^5 \qquad\qquad\qquad -2 & \\
-\underline{2t^5 - 2t^4} \qquad\qquad\qquad & \\
2t^4 \qquad\quad\; -2 & \\
-\underline{2t^4 - 2t^3} \qquad\qquad & \\
2t^3 \qquad -2 & \\
-\underline{2t^3 - 2t^2} \qquad & \\
2t^2 \; -2 & \\
-\underline{2t^2 - 2t} \quad & \\
2t - 2 & \\
-\underline{2t - 2} &
\end{array}
$$

Поскольку $t \geqslant 0$, $t^5 + 2t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 2 > 0$, поэтому неравенство имеет вид $0 \leqslant t \leqslant 1$, т.е. $0 \leqslant \sqrt[30]{\log_5 x} \leqslant 1$; $0 \leqslant \log_5 x \leqslant 1$; $1 \leqslant x \leqslant 5$.

Ответ: $[1; 5]$.

Тренировочная работа 7

Рассмотрим решение примеров с несколько иными идеями.

1. Решите уравнение $2\cdot 4^x - 3\cdot 10^x - 5\cdot 25^x = 0$.
2. Решите уравнение $2\cdot 2^{2x}+18\cdot 2^{-2x}-11\cdot 2^x-33\cdot 2^{-x}+26=0$.
3. Решите неравенство $(0{,}4)^x - (2{,}5)^{x+1} > 1{,}5$.
4. Решите уравнение
$$\log_2\log_3(2x+3)+\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)=1.$$
5. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\log_8\dfrac{x^2-2x}{x-3}<0$.
6. Решите неравенство $\log_{x^2-3}(4x+7)>0$.
7. Сравните числа $\log_2 3$ и $\log_5 6$.
8. $\log_{12} 2 = a$; $\log_6 32 =?$
9. Решите неравенство $9\cdot x^{\lg x}+91\cdot x^{-\lg x}\leqslant 60$.
10. Сравните числа $\log_{70} 71$ и $\log_{71} 72$.
11. Сравните числа $\log_4 6$ и $\log_6 8$.
12. Сравните числа $\log_5 7$ и $\log_{13} 17$.
13. Решите уравнение $\dfrac{x}{18}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_x 12}$.
14. Решите неравенство
$$\frac{\log_5\left(x^2-4x+11\right)^2-\log_{11}\left(x^2-4x-11\right)^3}{\sqrt{2-5x-3x^2}}\geqslant 0.$$
15. Решите неравенство $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-4x+5\right)}{x^3-5x^2+4x}\leqslant 0$.

Решение тренировочной работы 7

1. Решите уравнение $2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x - 5 \cdot 25^x = 0$.

Разделим обе части уравнения на 25^x:

$$2\left(\frac{4}{25}\right)^x - 3\cdot\left(\frac{10}{25}\right)^x - 5 = 0; \quad 2\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x - 5 = 0;$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = t \quad (t > 0)\,; \quad 2t^2 - 3t - 5 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{5}{2} \\ t = -1 \notin (0;\infty)\,. \end{array}\right.$$

Итак, $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{5}{2}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$; $x = -1$.

Можно поступить иначе. Поскольку нам задано однородное уравнение, т. е. уравнение, каждое слагаемое которого содержит неизвестное одной и той же степени, то обозначим $2^x = a$, $5^x = b$.

Тогда $2 \cdot a^2 - 3 \cdot ab - 5b^2 = 0$;

$$a_{1,2} = \frac{3b \pm \sqrt{9b^2 + 40b^2}}{4} = \frac{3b \pm 7b}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{5}{2}b \\ a = -b, \end{array}\right. \text{ т. е. } \left[\begin{array}{l} 2^x = \dfrac{5}{2} \cdot 5^x \\ 2^x = -5^x; \quad x \in \emptyset; \end{array}\right. \quad \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{5}{2}; \; x = -1.$$

Ответ: $x = -1$.

2. Решите уравнение $2\cdot 2^{2x} + 18\cdot 2^{-2x} - 11\cdot 2^x - 33\cdot 2^{-x} + 26 = 0$.

Положим $2^x + 3 \cdot 2^{-x} = t \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2 = \left(2^x + 3 \cdot 2^{-x}\right)^2 = 2^{2x} + 2 \cdot 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + 9 \cdot 2^{-2x} =$

$= 2^{2x} + 9 \cdot 2^{-2x} + 6$ (так как $2^x \cdot 2^{-x} = 1$),

тогда $2^{2x} + 9 \cdot 2^{-2x} = t^2 - 6$.

Уравнение приведем группировкой к виду

$2\left(2^{2x} + 9 \cdot 2^{-2x}\right) - 11\left(2^x + 3 \cdot 2^{-x}\right) + 26 = 0$,

т. е. $2\left(t^2 - 6\right) - 11t + 26 = 0$; $2t^2 - 11t + 14 = 0$;

$$t_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 112}}{4} = \frac{11 \pm 3}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} t = 3{,}5 \\ t = 2; \end{array}\right.$$

а) $2^x + 3 \cdot 2^{-x} = 2$; $\ 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 3 = 0 \quad (\mathcal{D} < 0)$;

б) $2^x + 3 \cdot 2^{-x} = 3{,}5$; $\ 2 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x + 6 = 0$;

$$(2^x)_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{7 \pm 1}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} 2^x = 2 \\ 2^x = \dfrac{3}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \log_2 1{,}5. \end{array}\right.$$

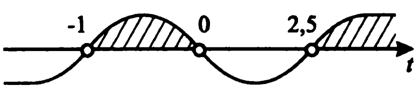
Ответ: $\{1; \log_2 1{,}5\}$.

3. Решите неравенство $(0{,}4)^x - (2{,}5)^{x+1} > 1{,}5$.

$(0{,}4)^x - 2{,}5 \cdot 2{,}5^x > 1{,}5$. Пусть $(0{,}4)^x = t \quad (t > 0)$.

Поскольку $2{,}5 = \dfrac{1}{0,4}$, $\quad t - \dfrac{5}{2t} - 1{,}5 > 0$; $\quad \dfrac{2t^2 - 3t - 5}{2t} > 0$;

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{5}{2} \end{array}\right. ; \quad \frac{2\left(t - \frac{5}{2}\right)(t + 1)}{t} > 0.$$



$t > 0 \Rightarrow t > 2{,}5$;

$0{,}4^x > 2{,}5$; $\ 0{,}4^x > 0{,}4^{-1} \ \Rightarrow x < -1$.

Ответ: $(-\infty; -1)$.

4. Решите уравнение

$$\log_2 \log_3 (2x + 3) + \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{x + 1}{2x + 3}\right) = 1.$$

$$\log_2 \log_3 (2x + 3) - \log_2 \log_3 \frac{2x + 3}{x + 1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 (2x + 3) > 0 \\ \log_3 \dfrac{2x + 3}{x + 1} > 0 \\ \log_2 \dfrac{\log_3 (2x + 3)}{\log_3 \frac{2x+3}{x+1}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 > 1 \\ \dfrac{2x + 3}{x + 1} > 1 \\ \log_3 (2x+3) = 2 \log_3 \dfrac{2x+3}{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \dfrac{x+2}{x+1} > 0 \\ \log_3(2x+3) = 2\log_3(2x+3) - 2\log_3(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \dfrac{x+2}{x+1} > 0 \\ 2\log_3(x+1) = \log_3(2x+3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ (x+1)^2 = 2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $x = \sqrt{2}$.

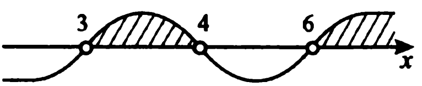
5. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \dfrac{x^2-2x}{x-3} < 0$.

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} < \log_{\frac{1}{2}} 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_8 \dfrac{x^2-2x}{x-3} > 1 \\ \log_8 \dfrac{x^2-2x}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} > 1 \Leftrightarrow \log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} > \log_8 8;$$

$$\frac{x^2-2x}{x-3} > 8; \quad \frac{x^2-2x-8x+24}{x-3} > 0; \quad \frac{x^2-10x+24}{x-3} > 0;$$

$$\frac{(x-4)(x-6)}{x-3} > 0.$$



Ответ: $(3;4) \cup (6;\infty)$.

6. Решите неравенство $\log_{x^2-3}(4x+7) > 0$.

Полезно иметь в виду свойство

$$\log_a b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1) > 0 \\ a > 0 \\ b > 0. \end{cases}$$

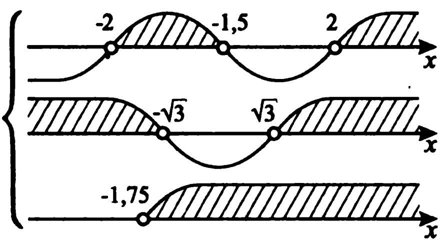
$$\log_a b > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a-1) > 0 \\ (b-1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (a-1) < 0 \\ (b-1) < 0 \\ a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1) > 0 \\ a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \left(x^2-3-1\right)(4x+7-1)>0 \\ x^2 - 3 > 0 \\ 4x + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2)\,2\,(2x+3)>0 \\ x^2 > 3 \\ 4x > -7. \end{cases}$$



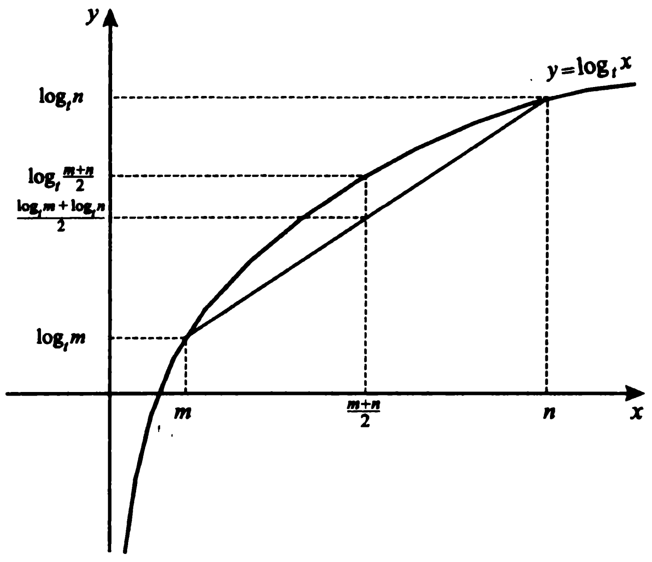
Ответ: $\left(-1{,}75; -\sqrt{3}\right) \cup (2;\infty)$.

7. Сравните числа $\log_2 3$ и $\log_5 6$.

Известно, что $y = \log_a x$ — выпуклая вверх при $a > 1$, т. е.

$$\log_t \frac{m+n}{2} > \frac{\log_t m + \log_t n}{2} \quad \text{или} \quad \boxed{f\left(\frac{m+n}{2}\right) > \frac{f(m)+f(n)}{2}}$$

(определение выпуклости).



Тогда $\log_2 3 = \log_2 \frac{6}{2} = \log_2 \frac{4+2}{2} > \frac{1}{2}(\log_2 4 + \log_2 2)$, т. е.

$\log_2 3 > \frac{1}{2}(2+1) = 1{,}5$, значит,

$$\log_2 3 - \log_5 6 > 1{,}5 - \log_5 6 = \log_5 5^{\frac{3}{2}} - \log_5 6 = \log_5 \frac{5^{\frac{3}{2}}}{6} =$$

$$= \log_5 \frac{5\sqrt{5}}{6} > 0 \text{ (так как } \frac{5\sqrt{5}}{6} > 1\text{)}.$$

Итак, $\log_2 3 > \log_5 6$.

8. $\log_{12} 2 = a$; $\log_6 32 = ?$

$\log_6 32 = 5\log_6 2$;

$$\log_{12} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 12} = \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 6} = a;$$

$$\frac{1}{a} = 1 + \log_2 6; \quad \log_2 6 = \frac{1-a}{a}; \quad \log_6 2 = \frac{a}{1-a};$$

$$\log_6 32 = 5\log_6 2 = \frac{5a}{1-a}.$$

9. Решите неравенство $9 \cdot x^{\lg x} + 91 \cdot x^{-\lg x} \leqslant 60$.

Пусть $x^{\lg x} = t \quad (t > 0)$;

$9t + 91 \cdot t^{-1} \leqslant 60; \qquad \dfrac{9t^2 - 60t + 91}{t} \leqslant 0;$

$$t_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 819}}{9} = \frac{30 \pm 9}{9}; \qquad \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{13}{3} \\ t = \dfrac{7}{3}; \end{array}\right.$$

$\dfrac{7}{3} < x^{\lg x} < \dfrac{13}{3}; \qquad \lg\dfrac{7}{3} < \lg x^{\lg x} < \lg\dfrac{13}{3};$

$\lg\dfrac{7}{3} < \lg^2 x < \lg\dfrac{13}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\lg\dfrac{7}{3}} < \lg x < \sqrt{\lg\dfrac{13}{3}} \\ -\sqrt{\lg\dfrac{13}{3}} < \lg x < -\sqrt{\lg\dfrac{7}{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10^{\sqrt{\lg 2\frac{1}{3}}} < x < 10^{\sqrt{\lg 4\frac{1}{3}}} \\ 10^{-\sqrt{\lg 4\frac{1}{3}}} < x < 10^{-\sqrt{\lg 2\frac{1}{3}}}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(10^{\sqrt{\lg 2\frac{1}{3}}}; 10^{\sqrt{\lg 4\frac{1}{3}}}\right) \cup \left(10^{-\sqrt{\lg 4\frac{1}{3}}}; 10^{-\sqrt{\lg 2\frac{1}{3}}}\right)$.

10. Сравните числа $\log_{70} 71$ и $\log_{71} 72$.

Рассмотрим $y = \log_{x-1} x$ и попытаемся доказать, что функция убывает при $x > 2$, где $x \in \mathbb{N}$, т. е.

$\log_{x-1} x > \log_x (x+1)$.

Итак, $\dfrac{1}{\log_x (x-1)} > \log_x (x+1) \Leftrightarrow$

(так как $x > 2 \Rightarrow \log_x (x-1) > 0$)

$\Leftrightarrow \log_x (x-1) \cdot \log_x (x+1) < 1$.

Это нужно доказать. Поскольку

$\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ при $\begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \geqslant 0, \end{cases}$ имеем

$$\frac{\log_x (x+1) + \log_x (x-1)}{2} \geqslant \sqrt{\log_x (x-1) \cdot \log_x (x+1)},$$

т. е. $\sqrt{\log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1)} \leqslant \dfrac{\log_x(x+1)+\log_x(x-1)}{2} =$

$= \dfrac{\log_x\left(x^2-1\right)}{2} < \dfrac{\log_x x^2}{2} = 1 \quad (x>2).$

Следовательно, $\sqrt{\log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1)} < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1) < 1 \Leftrightarrow \dfrac{\log_x(x+1)}{\log_{x-1} x} < 1 \Leftrightarrow$

(так как $\log_{x-1} x > 0$ при $x>2$)

$\Leftrightarrow \boxed{\log_x(x+1) < \log_{x-1} x,}$

что и требовалось доказать.

Тогда, помня о том, что $x=71$, имеем $\log_{71} 72 < \log_{70} 71$.

11. Сравните числа $\log_4 6$ и $\log_6 8$.

По аналогии докажем, что $y=\log_{x-2} x$ убывает при $x>3$.

$\sqrt{\log_x(x-2)\log_x(x+2)} \leqslant \dfrac{\log_x(x-2)+\log_x(x+2)}{2} =$

$= \dfrac{\log_x\left(x^2-4\right)}{2} < \dfrac{\log_x x^2}{2} = 1,$

поэтому $\log_x(x-2)\cdot\log_x(x+2) < 1$ ($\log_{x-2} x > 0$ при $x>3$), значит, $\dfrac{\log_x(x+2)}{\log_{x-2} x} < 1$, откуда

$\log_x(x+2) < \log_{x-2} x$, т. е. $y=\log_{x-2} x$ — убывающая.

Тогда $\log_4 6 > \log_6 8$, что и требовалось выяснить.

12. Сравните числа $\log_5 7$ и $\log_{13} 17$.

Очевидно, что $1<\log_5 7<2$, $1<\log_{13} 17<2$. Разделим интервал пополам и выясним, где находится данное число: $\dfrac{1+2}{2}=1{,}5$, т. е. $(1;1{,}5)\,(1{,}5;2)$. Определим, что больше: $\log_5 7$ или $1{,}5$; $\log_{13} 17$ или $1{,}5$:

а) $1{,}5=\log_5 5^{\frac{3}{2}}=\log_5 5\sqrt{5}>\log_5 7$, так как $5\sqrt{5}>7$.

$1{,}5=\log_{13} 13^{\frac{3}{2}}=\log_{13} 13\sqrt{13}>\log_{13} 17$, так как $13\sqrt{13}>17$ ($\sqrt{13}\approx 3{,}6$). Значит, $1<\log_5 7<1{,}5$; $1<\log_{13} 17<1{,}5$.

Опять попытаемся выяснить, что больше: $\log_5 7$ или $\frac{5}{4}$; $\log_{13} 17$ или $\frac{5}{4}$ $\left(\frac{1+1{,}5}{2}=\frac{5}{4}\right)$:

б) $\frac{5}{4}=\log_5 5^{\frac{5}{4}}=\log_5 5\sqrt[4]{5}>\log_5 7$, так как $5\sqrt[4]{5}>7$

$(25\sqrt{5}>49$, поскольку $\sqrt{5}>2$, значит $5\sqrt[4]{5}>7)$.

$\frac{5}{4}=\log_{13} 13^{\frac{5}{4}}=\log_{13} 13\sqrt[4]{13}>\log_{13} 17$, так как $13\sqrt[4]{13}>17$

$(169\sqrt{13}>289;\ \sqrt{13}\approx 3{,}6;\ 169\cdot 3=507>289)$.

Итак, $1<\log_5 7<\frac{5}{4}$, $1<\log_{13} 17<\frac{5}{4}$.

Опять попытаемся выяснить, что больше: $\log_5 7$ или $\frac{9}{8}$; $\log_{13} 17$ или $\frac{9}{8}$ $\left(\frac{1+\frac{5}{4}}{2}=\frac{9}{8}\right)$:

в) $\frac{9}{8}=\log_5 5^{\frac{9}{8}}=\log_5 5\sqrt[8]{5}<\log_5 7$, так как $5\sqrt[8]{5}<7$

$(25\sqrt[4]{5}<49$, поскольку $625\sqrt{5}<2{,}3\cdot 625<2401)$.

$\frac{9}{8}=\log_{13} 13^{\frac{9}{8}}=\log_{13} 13\sqrt[8]{13}>\log_{13} 17$, так как $13\sqrt[8]{13}>17$

$(169\sqrt[4]{13}>289$, поскольку $28561\sqrt{13}>83521$: $\sqrt{13}\approx 3{,}6$; $28561\cdot 3=85683>83521)$.

Итак, $\log_5 7>\frac{9}{8}$; $\log_{13} 17<\frac{9}{8}$, следовательно,

$\log_5 7>\log_{13} 17$, что и требовалось выяснить.

13. Решите уравнение $\frac{x}{18}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12}$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2:

$\log_2\frac{x}{18}=\log_2\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12}$;

$\log_2 x-\log_2 18=\log_x 12\,(\log_2 2-\log_2 3)$;

$$\log_2 x - \log_2 2 - \log_2 9 = \frac{(1 - \log_2 3)\log_2 12}{\log_2 x};$$

$$\log_2 x - 1 - 2\log_2 3 = \frac{(1 - \log_2 3)(\log_2 4 + \log_2 3)}{\log_2 x}.$$

Пусть $\log_2 x = a$; $\log_2 3 = b$;

$(a - 2b - 1)\,a = (1 - b)(2 + b)$; $a^2 - 2ab - a = 2 - b - b^2$;

$a^2 - 2ab + b^2 - (a - b) - 2 = 0$; $(a - b)^2 - (a - b) - 2 = 0$.

Решая квадратное уравнение относительно $a - b$, имеем:

$$\left[\begin{array}{l} a - b = 2 \\ a - b = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b + 2 \\ a = b - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = \log_2 3 + 2 \\ \log_2 x = \log_2 3 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

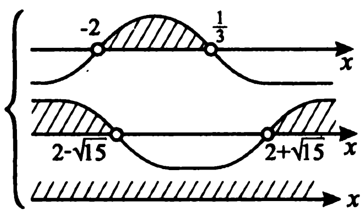
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = \log_2 12 \\ \log_2 x = \log_2 1{,}5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = 1{,}5. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1{,}5; 12\}$.

14. Решите неравенство

$$\frac{\log_5 \left(x^2 - 4x + 11\right)^2 - \log_{11} \left(x^2 - 4x - 11\right)^3}{\sqrt{2 - 5x - 3x^2}} \geqslant 0.$$

$$\begin{cases} 2 - 5x - 3x^2 > 0 \\ x^2 - 4x - 11 > 0 \\ x^2 - 4x + 11 \neq 0 \end{cases}$$



$D(\text{Н})$: $\left(-2; 2 - \sqrt{15}\right)$.

Выясним, будет ли на $D(\text{Н})$ $\log_{11} \left(x^2 - 4x - 11\right) < 0$.

Это так, если $x^2 - 4x - 12 < 0$, т. е. $(x - 6)(x + 2) < 0$.

$D(\text{Н}) = \left(-2;2 - \sqrt{15}\right) \subset (-2;6)$,

т. е. $\log_{11} \left(x^2 - 4x - 11\right) < 0$ $\forall x \in D(\text{Н})$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{11} \left(x^2 - 4x - 11\right)^3 < 0$.

Аналогично выясним, верно ли, что $\log_5 \left(x^2 - 4x + 11\right) > 0$ на $D(\text{Н})$.

$$\log_5\left(x^2-4x+11\right)>\log_5 1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-4x+10>0\quad \forall x\ \begin{cases} a=1>0\\ \mathcal{D}<0,\end{cases}$$

т. е. $\log_5\left(x^2-4x+11\right)^2>0\quad \forall x\in D(\text{Н})$.

Итак,

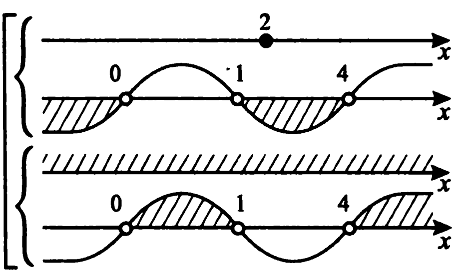
$\log_5\left(x^2-4x+11\right)^2-\log_{11}\left(x^2-4x-11\right)^3>0\ \ \forall x\in D(\text{Н})$.

Это значит, что решением является $\left(-2;\ 2-\sqrt{15}\right)$.

15. Решите неравенство $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-4x+5\right)}{x^3-5x^2+4x}\leqslant 0$.

$$\frac{\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-4x+5\right)}{x^3-5x^2+4x}\leqslant 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-4x+5\right)\geqslant 0\\ x\left(x^2-5x+4\right)<0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-4x+5\right)\leqslant 0\\ x\left(x^2-5x+4\right)>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4x+5\leqslant 1\\ x^2-4x+5>0\\ x\left(x-4\right)\left(x-1\right)<0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-4x+5\geqslant 1\\ x\left(x-4\right)\left(x-1\right)>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left(x-2\right)^2\leqslant 0\\ x\left(x-4\right)\left(x-1\right)<0\end{cases}\\ \begin{cases}\left(x-2\right)^2\geqslant 0\\ x\left(x-4\right)\left(x-1\right)>0\end{cases}\end{array}\right.$$



Ответ: $(0;1)\cup(4;\infty)\cup\{2\}$.

Тренировочные карточки 2 (на уравнения и неравенства)

Карточка 1

1. Решите уравнение $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$.

2. Решите неравенство $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x \leqslant 5 \cdot 36^x$.

3. Решите уравнение $\sqrt[x]{64} - \sqrt[x]{2^{3x+3}} + 12 = 0$.

4. Решите уравнение $\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 x = 4$.

5. Решите неравенство

$$2\log_{25}\left((1+x)(3-x)\right) - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}(1+x) > \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{2}\right).$$

6. Решите неравенство $\log_{x-1} \dfrac{2(x-1)(x-4)}{x+5} \geqslant 1$.

7. Сравните числа $\log_5 7$ и $\log_3 6$.

8. $\left\| \begin{matrix} \log_6 15 = a \\ \log_{12} 18 = b \end{matrix} \right| \log_{25} 24 = ?$

Карточка 2

1. Решите уравнение $3\log_5 2 + 2 - x = \log_5\left(3^x - 5^{2-x}\right)$.

2. Решите уравнение $3 \cdot 4^{-x} + \dfrac{1}{3} \cdot 9^{2-x} = 6 \cdot 4^{1-x} - \dfrac{1}{2} \cdot 9^{1-x}$.

3. Решите уравнение $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x + \left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = 84$.

4. Решите уравнение $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$.

5. Решите уравнение $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$.

6. Решите неравенство $\left(x^2 - 4x + 4\right)^{x^2-x-6} \geqslant 1$.

7. Сравните числа $\log_2 3$ и $\log_5 11$.

8. $\left\| \begin{matrix} \log_3 20 = a \\ \lg 3 = b \end{matrix} \right| \log_5 30 = ?$

Карточка 3

1. Решите уравнение $9^{x-1} - 3^{x+1} + 3^{x-3} = 1$.
2. Решите уравнение $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}$.
3. Решите неравенство $\dfrac{8 \cdot 3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.
4. Решите уравнение $\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right) \lg 3 + \lg 2 = \lg\left(27 - \sqrt[x]{3}\right)$.
5. Решите неравенство $\dfrac{x-1}{\log_3(9 - 3^x) - 3} \leqslant 1$.
6. Решите неравенство $\log_{\frac{3x}{x^2+1}}\left(x^2 - 2{,}5x + 1\right) \geqslant 0$.
7. Сравните числа $(3\log_{16} 1862 + \log_{16} 1866)$ и $\log_2 1863$.
8. $\left\| \begin{matrix} \log_5 15 = a \\ \log_{12} 24 = b \end{matrix} \right| \log_{125} 48 = ?$

Карточка 4

1. Решите уравнение $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$.
2. Решите неравенство $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \leqslant 0$.
3. Решите неравенство $\sqrt{9^x + 3^x - 2} \geqslant 9 - 3x$.
4. Решите уравнение $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} = 1250$.
5. Решите уравнение $\lg^2 100x - \lg^2 10x + \lg^2 x = 6$.
6. Решите неравенство $\log_{\frac{x+6}{3}}\left(\log_2 \dfrac{x-1}{x+2}\right) > 0$.
7. Вычислите $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$.
8. Вычислите $\dfrac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \dfrac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$.

Карточка 5

1. Решите уравнение $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{4} \cdot 9^{x+1}$.
2. Решите уравнение $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = 10$.
3. Решите уравнение $x^x + 139 \cdot x^{-x} - 108 \cdot x^{-2x} = 32$.
4. Решите уравнение $\log_{2x} \frac{2}{x} \cdot \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1$.
5. Решите неравенство $5^{\log_5^2 x} < 10 - x^{\log_5 x}$.
6. Решите неравенство $\log_x \sqrt{3x+4} > 1$.
7. $\left\| \begin{matrix} \lg 5 = a \\ \lg 3 = b \end{matrix} \right| \log_{30} 8 = ?$
8. Вычислите, что больше: $\log_{189} 1323$ или $\log_{63} 147$.

Карточка 6

1. Решите уравнение $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$.
2. Решите уравнение $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.
3. Решите неравенство $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1$.
4. Решите уравнение $\log_{3x} \frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$.
5. Решите уравнение
$\log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_5 x = \log_2 x \cdot \log_3 x + \log_2 x \log_5 x + \log_3 x \log_5 x$.
6. Решите неравенство $x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} > \frac{1}{x}$.
7. $\left\| \begin{matrix} \log_7 12 = a \\ \log_{12} 24 = b \end{matrix} \right| \log_{54} 168 = ?$
8. Решите систему $\begin{cases} xy = 40 \\ x^{\lg y} = 40. \end{cases}$

Карточка 7

1. Решите уравнение $1+3^{\frac{x}{2}}=2^x$.
2. Решите уравнение $2^{2x}\cdot 9^x-2\cdot 6^{3x-1}+4^{2x-1}\cdot 3^{4x-2}=0$.
3. Решите уравнение $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$.
4. Решите уравнение $\sqrt{2\lg(-x)}=\lg\sqrt{x^2}$.
5. Решите уравнение $1+\dfrac{\log_7(9-x)}{\log_7(4+x)}=\dfrac{2-\log_5 4}{\log_5(x+4)}$.
6. Решите неравенство $\dfrac{\log_2((x+1)(x-3))}{\log_2(x-3)}<1$.
7. $\lg 64=a$; $\qquad \log_{20}\sqrt[5]{125}=?$
8. Решите систему $\begin{cases}\lg y^x=2x\lg(2x-y)\\ \sqrt{x}-x=\sqrt{y}-y.\end{cases}$

Карточка 8

1. Решите уравнение $27\cdot 2^{-3x}+9\cdot 2^x-2^{3x}-27\cdot 2^{-x}=8$.
2. Решите уравнение $2^{x^2+x-2}-2^{x^2-4}=992$; $\quad x\in\mathbb{Z}$.
3. Решите неравенство $\left(x^2-8x+16\right)^{x-6}<1$.
4. Решите уравнение $\dfrac{\log_3 x-1}{\log_3\frac{x}{3}}-\log_3 x+\log_3^2 x=3$.
5. Решите неравенство $\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right)<1$.
6. Решите уравнение
$(x+4)\cdot 3^{1-|x-1|}-x=(x+1)\left|3^x-1\right|+3^{x+1}+1$.
7. $\left\|\begin{matrix}\log_{14}7=a\\ \log_{14}5=b\end{matrix}\right|\ \log_{35}28=?$
8. Решите неравенство
$\log_{\frac{1}{3}}\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<\log_3\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Зачетные карточки 2 (на уравнения и неравенства)

Карточка 1

1. Решите уравнение $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$.

2. Решите неравенство $\log_{9x^2}\left(6+2x-x^2\right) \leqslant \frac{1}{2}$.

3. Решите уравнение $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = 8$.

4. Решите уравнение $x^{\lg 81} - 9^{\lg x} = 6$.

5. Решите неравенство $\log_{0,5}\log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4} < 0$.

6. Решите неравенство $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant \left(x^2+x+1\right)^3$.

7. Решите уравнение $3^{2x+4} + 45\cdot 6^x - 9\cdot 2^{2x+2} = 0$.

8. $\log_{36} 8 = a$. $\quad \log_{36} 9 =?$

Карточка 2

1. Решите неравенство $\log_x\left(\log_2\left(4^x-6\right)\right) \leqslant 1$.

2. Решите уравнение $x^2 \log_x 27 \cdot \log_9 x = x+4$.

3. Решите неравенство $x^{\log_2 x} + 16\cdot x^{-\log_2 x} < 17$.

4. Решите уравнение
$3\cdot 7^{\log_x 2-1} + 3^{\log_x 2} = 3^{\log_x 2+1} + 3^{\log_x 2-1}$.

5. Решите неравенство $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x} > 1$.

6. $\log_{14} 2 = a$. $\quad \log_{49} 16 =?$

7. $\left(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

8. Решите уравнение
$16^x + 625^x - 3\cdot 100^x - 2\cdot 4^x\left(4^x-5^{2x}\right) + 2\cdot 40^x = 0$.

Карточка 3

1. Вычислите $\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)$.

2. Решите неравенство $(2^x - 2 \cdot 2^{-x})^{\log_9(2x+3) - \log_3 x} \geqslant 1$.

3. Решите уравнение $\log_{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{\log_{\sqrt{3}} - \log_x 9} + 4 = 0$.

4. Сравните числа: $\log_2 3$ и $\log_3 5$.

5. Решите неравенство $|x-2|^{x^2-2x-3} < 1$.

6. Решите уравнение $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} = \frac{10}{3}$.

7. Решите уравнение $2^{3x} - 8 \cdot 2^{-3x} - 6 \cdot 2^x + 12 \cdot 2^{-x} = 1$.

8. $\left.\begin{array}{l}\log_5 4 = a\\ \log_5 3 = b\end{array}\right|$ $\log_{25} 12 = ?$

Карточка 4

1. $\left.\begin{array}{l}\lg 3 = a\\ \lg 2 = b\end{array}\right|$ $\log_5 6 = ?$

2. Решите неравенство $2x^{\log_{\frac{1}{2}} x} - x^{-\log_{\frac{1}{2}} x} < -1$.

3. Решите уравнение $4^{-x} - 3^{-x-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}-x} - 2^{-2x-1}$.

4. Решите уравнение $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = \left(2\sqrt{2}\right)^x$.

5. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_3(x^2-7x+12)} < \dfrac{1}{\log_3 20}$.

6. Решите неравенство $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 2) > -2$.

7. Решите уравнение $\lg(6 \cdot 5^x + 25 \cdot 20^x) = x + \lg 25$.

8. Решите систему $\begin{cases}(\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sqrt[9]{x^{15}}\\ (\sqrt[5]{x})^{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt[6]{x^{-2}}.\end{cases}$

Карточка 5

1. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1$.
2. Решите неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \left(\frac{24 - 2x - x^2}{14}\right) > 1$.
3. Решите уравнение $81^x - 16^x - 2 \cdot 9^x (9^x - 4^x) + 36^x = 0$.
4. Решите систему $\begin{cases} \log_3 (x + 2y) + \log_{\frac{1}{3}} (x - 2y) = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 + \frac{1}{2}y \end{cases}$
5. Решите неравенство $\left(5 - x^2\right)^{4x+7} \leqslant 1$.
6. Решите неравенство $\log_2 \log_3 \frac{x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1}$.
7. Решите уравнение $\sqrt[x]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} - \sqrt[x]{\left(\frac{3}{2}\right)^3} - \sqrt[x]{\frac{2}{3}} + \sqrt[x]{\frac{3}{2}} = 3$.
8. Сравните числа: $\log_3 5$ и $\log_{11} 15$.

Карточка 6

1. Решите неравенство $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x \leqslant 2$.
2. Решите уравнение $4^{\lg x+1} - 6^{\lg x} - 3 \cdot 3^{\lg x^2} = 0$.
3. Решите неравенство $\log_{(x-1)} (x + 1) > 2$.
4. Решите неравенство
$$x^2 \cdot 2^{2x} + 9(x + 2) \cdot 2^x + 8x^2 \leqslant (x + 2) \cdot 2^{2x} + 9x^2 \cdot 2^x + 8x + 16.$$
5. Решите неравенство $|x - 4|^{(2x-9)(2x-7)} \leqslant 1$.
6. Решите уравнение $\left(\sqrt{\sqrt{x^2 - 8x + 7} + \sqrt{x^2 - 8x - 9}}\right)^x +$
$$+ \left(\sqrt{\sqrt{x^2 - 8x + 7} - \sqrt{x^2 - 8x - 9}}\right)^x = 2^{x+1}.$$
7. Решите систему $\begin{cases} 3\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y} + 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} - 6 = 0 \\ \lg(3x - y) + \lg(y + x) - 4\lg 2 = 0. \end{cases}$
8. Решите неравенство
$$\sqrt{x^2 - 7x + 10} + 9\log_4 \frac{x}{8} \geqslant 2x + \sqrt{14x - 20 - 2x^2} - 13.$$

Карточка 7

1. Решите неравенство $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right) \geqslant 1$.

2. Сравните числа: $\log_{20} 80$ и $\log_{80} 640$.

3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{7}} \log_7\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < \log_7 \log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).$$

4. Решите систему $\begin{cases} 64^{2x}+64^{2y}=12 \\ 64^{x+y}=4\sqrt{2}. \end{cases}$

5. Вычислите $\dfrac{\log_5 30}{\log_{30} 5}-\dfrac{\log_5 150}{\log_6 5}$.

6. Решите уравнение

$$\log_{1-2x}\left(6x^2-5x+1\right)=\log_{1-3x}\left(4x^2-4x+1\right)+2.$$

7. Решите неравенство

$$\log_{2-5x} 3+\frac{1}{\log_2(2-5x)} \leqslant \frac{1}{\log_6\left(6x^2-6x+1\right)}.$$

8. Решите уравнение $\left(\sqrt[3]{x^2-4}\right)^{\log_{x^2-4}\left(\log_3^3(5x-9)\right)}=2$.

3

Решения

Решение тренировочных карточек 1 (на свойства логарифмов)

Решение тренировочной карточки 1

1. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9} = -\frac{1}{3}\log_3 9 = \boxed{-\frac{2}{3}}$.

2. $\log_{\sqrt[3]{b}} \sqrt[4]{b} = 3\log_b \sqrt[4]{b} = \frac{3}{4}\log_b b = \boxed{\frac{3}{4}}$.

3. $4^{\log_2 5} = 2^{\log_2 5} \cdot 2^{\log_2 5} = 5 \cdot 5 = \boxed{25}$.

4. $\left(\sqrt{5}\right)^{2+\log_5 9} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_5 9} = 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}\log_5 9} =$

$= 5 \cdot 5^{\log_5 3} = \boxed{15}$.

5. $\log_{\frac{1}{2}} (\log_4 (\log_3 9)) = \log_{\frac{1}{2}} (\log_4 2) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \boxed{1}$.

6. $6^{\ln e^2} = 6^2 = \boxed{36}$.

7. $(\lg 50 + \lg 2)^5 = (\lg (50 \cdot 2))^5 = (\lg 100)^5 = 2^5 = \boxed{32}$.

8. $\dfrac{1}{\log_{12} 2}+\log_{\frac{1}{2}} 3=\dfrac{1}{\frac{\log_2 2}{\log_2 12}}+\log_{\frac{1}{2}} 3=\log_2 12-\log_2 3=\log_2 \dfrac{12}{3}=$

$=\log_2 4=\boxed{2}$.

9. $\dfrac{\ln 8}{\ln 16}+\log_{\sqrt{5}} 1=$ $\quad\boxed{\log_{\sqrt{5}} 1=0}$

$=\dfrac{\ln 8}{\ln 16}=\dfrac{\ln 2^3}{\ln 2^4}=\dfrac{3\ln 2}{4\ln 2}=\boxed{\dfrac{3}{4}}$.

10. $\dfrac{\log_{25} 16}{\log_{\frac{1}{5}} 4}=\dfrac{\frac{2}{2}\log_5 4}{-\log_5 4}=\boxed{-1}$.

11. $\lg 9\log_9 100=\lg 9\cdot\dfrac{\log_{10} 100}{\log_{10} 9}=\dfrac{\lg 9}{\lg 9}\lg 100=\boxed{2}$.

12. $2\log_{\frac{1}{3}} 6-\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400-3\log_3 \sqrt[3]{45}=$

$=\log_{\frac{1}{3}} 6^2-\log_{\frac{1}{3}} 400^{\frac{1}{2}}-\log_3\left(\sqrt[3]{45}\right)^3=$

$=\log_{\frac{1}{3}} 36-\log_{\frac{1}{3}} 20-\log_3 45=\log_{\frac{1}{3}} 36-\log_{\frac{1}{3}} 20+\log_{\frac{1}{3}} 45=$

$=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{36\cdot 45}{20}=\log_{\frac{1}{3}} 81=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}=\boxed{-4}$.

13. $\log_2 17+\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{17}{32}\right)^2=\log_2 17+\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{17}{32}=$

$=\log_2 17-\log_2\dfrac{17}{32}=\log_2\dfrac{17\cdot 32}{17}=\log_2 32=\boxed{5}$.

14. $\log_{13}\operatorname{tg} x+\log_{13}\operatorname{ctg} x=$ $\quad\boxed{\operatorname{tg} x>0}$

$=\log_{13}(\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x)=\log_{13} 1=\boxed{0}$.

15. $\log_{\sqrt[3]{\cos x}}\left(1-\sin^2 x\right)=\log_{\sqrt[3]{\cos x}}\cos^2 x=\dfrac{2}{\frac{1}{3}}\log_{\cos x}\cos x=\boxed{6}$.

Решение тренировочной карточки 2

1. $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[5]{2} = \dfrac{\frac{1}{5}}{-2} \log_2 2 = \boxed{-0{,}1}$.

2. $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{a} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \log_a a = \boxed{\dfrac{2}{3}}$.

3. $9^{\log_3 \sqrt{2}} = 3^{2\log_3 \sqrt{2}} = 3^{\log_3 2} = \boxed{2}$.

4. $\left(\sqrt{7}\right)^{4+\log_7 4} = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{4+\log_7 2^2} = 7^2 \cdot 7^{\log_7 2} = 49 \cdot 2 = \boxed{98}$.

5. $\log_7 \left(\log_{\frac{1}{2}} (\log_{25} 5)\right) = \log_7 \left(\log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2} \log_5 5\right)\right) =$

$= \log_7 \left(\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{2}\right) = \log_7 1 = \boxed{0}$.

6. $(\ln 5)^{3\log_8 1} = (\ln 5)^{3\cdot 0} = (\ln 5)^0 = \boxed{1}$.

7. $\left(\log_{15} 3 + \dfrac{1}{\log_5 15}\right)^{-7} = (\log_{15} 3 + \log_{15} 5)^{-7} = (\log_{15} 15)^{-7} =$
$= 1^{-7} = \boxed{1}$.

8. $\dfrac{1}{\log_{21} 3} - \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{7} = \log_3 21 - \dfrac{-1}{-1} \log_3 7 = \log_3 \dfrac{21}{7} = \log_3 3 = \boxed{1}$.

9. $\dfrac{\lg 27}{\lg 9} = \dfrac{3\lg 3}{2\lg 3} = \dfrac{3}{2} = \boxed{1{,}5}$.

10. $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} 8}{\log_9 16} = \dfrac{\frac{3}{-1} \log_3 2}{\log_3 4} = -3 \cdot \dfrac{\log_3 2}{2\log_3 2} = -\dfrac{3}{2} = \boxed{-1{,}5}$.

11. $\ln 15 \cdot \log_{225} e = \dfrac{\ln 15}{\ln 225} = \dfrac{\ln 15}{\ln 15^2} = \dfrac{\ln 15}{2\ln 15} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

12. $4\log_{\frac{1}{2}} 3-\frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27+2\log_2 6=-\log_2 3^4+\frac{2}{3}\log_2 3^3+\log_2 6^2=$
$$=\log_2\frac{\left(3^{2/3}\right)^3\cdot 6^2}{3^4}=\log_2\frac{3^2\cdot 3^2\cdot 2^2}{3^4}=\log_2 2^2=\boxed{2}.$$

13. $\log_5 75+3\log_{\frac{1}{5}}\sqrt[3]{3}=\log_5 75-\log_5 3=\log_5\frac{75}{3}=\log_5 25=\boxed{2}.$

14. $\log_{\sin 2x}(2\cos x)+\log_{\sin 2x}\sin x=\log_{\sin 2x}(2\cos x\cdot\sin x)=$
$$=\log_{\sin 2x}\sin 2x=\boxed{1}.$$

15. $\log_{\operatorname{tg} x}\cos x-\frac{1}{\log_{\sin x}\operatorname{tg} x}=$
$$=\log_{\operatorname{tg} x}\cos x-\log_{\operatorname{tg} x}\sin x=\log_{\operatorname{tg} x}\operatorname{ctg} x=\boxed{-1}.$$

Решение тренировочной карточки 3

$$\log_{p^n} k^m = \frac{m}{n}\log_p k \text{ при } \begin{cases} p > 0 \\ p \neq 1 \\ k > 0 \end{cases}$$

1. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[4]{125} = \dfrac{\frac{3}{4}\log_5 5}{-1} = \boxed{-\dfrac{3}{4}}.$

2. $\log_{\sqrt[4]{a}} \sqrt[3]{a} = \log_{a^{\frac{1}{4}}} a^{\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}\log_a a = \boxed{\dfrac{4}{3}}.$

3. $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_3 2} = \left(3^{-2}\right)^{\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^{-2} = 2^{-2} = \boxed{\dfrac{1}{4}}.$

4. $\left(\sqrt{2}\right)^{4+\log_2 25} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{4+2\log_2 5} = 2^2 \cdot 2^{\log_2 5} = 4 \cdot 5 = \boxed{20}.$

5. $3{,}4 \cdot 7^{4\ln 1} = 3{,}4 \cdot 7^0 = \boxed{3{,}4}.$

6. $(\lg 4 + \lg 25)^{-4} = (\lg(4 \cdot 25))^{-4} = 2^{-4} = \boxed{\dfrac{1}{16}}.$

7. $\log_4(\log_{25}(\log_2 32)) = \log_4(\log_{25} 5) = \log_4 \dfrac{1}{2} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}.$

8. $\dfrac{\lg 16}{\lg\sqrt{8}} = \dfrac{\lg 2^4}{\lg 2^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{4}{\frac{3}{2}}\dfrac{\lg 2}{\lg 2} = \dfrac{8}{3} = \boxed{2\dfrac{2}{3}}.$

9. $\dfrac{\log_{16} 25}{\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{2}{2}\log_4 5}{\frac{\frac{1}{2}}{-1}\log_2 5} = -2\dfrac{\log_4 5}{\log_2 5} = -2\dfrac{\frac{1}{2}\log_2 5}{\log_2 5} = \boxed{-1}.$

10. $\lg 4 \cdot \log_2 100 = \lg 4\dfrac{\lg 10^2}{\lg 2} = 2 \cdot \lg 2 \cdot \dfrac{2\lg 10}{\lg 2} = \boxed{4}.$

11. $\log_{\cos\frac{\pi}{4}} 8 = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8 = \log_{2^{-\frac{1}{2}}} 2^3 = \dfrac{3}{-\frac{1}{2}}\log_2 2 = \boxed{-6}.$

12. $\log_7\left(\cos^2 7x + \sin^2 7x\right) = \log_7 1 = \boxed{0}.$

13. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} = 6^{2\log_6 5} + 10^1 10^{-\lg 2} =$

$= \left(6^{\log_6 5}\right)^2 + 10\left(10^{\lg 2}\right)^{-1} = 25 + \dfrac{10}{2} = \boxed{30}.$

14. $-\log_2\left(\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}\right) = -\log_2\left(\log_2 2^{\frac{1}{8}}\right) = -\log_2\dfrac{1}{8} = \boxed{3}.$

15. $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2} =$

$= \left(\left(3^4\right)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_3 2} + 5^{2\log_5 2}\right)\cdot 7^{2\log_7 2} =$

$= \left(3^{1-2\log_3 2} + 5^{2\log_5 2}\right)\left(7^{\log_7 2}\right)^2 =$

$= \left(3\cdot\left(3^{\log_3 2}\right)^{-2} + \left(5^{\log_5 2}\right)^2\right)\cdot 2^2 = \left(\dfrac{3}{4}+4\right)\cdot 4 = 3+16 = \boxed{19}.$

Решение тренировочной карточки 4

1. $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{16} = \log_{2^{-1}} 2^{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{-1}\log_2 2 = \boxed{-\frac{4}{3}}$.

2. $\log_{\sqrt{b}} \sqrt[7]{b} = \log_{b^{\frac{1}{2}}} b^{\frac{1}{7}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}}\log_b b = \boxed{\frac{2}{7}}$.

3. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 3} = \left(2^{-2}\right)^{\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{-2} = 3^{-2} = \boxed{\frac{1}{9}}$.

4. $\left(\sqrt{3}\right)^{2+\log_3 49} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{2+2\log_3 7} = 3^1 \cdot 3^{\log_3 7} = 3 \cdot 7 = \boxed{21}$.

5. $e^{3\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^3 = 2^3 = \boxed{8}$.

6. $\log_8\left(\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(\log_{32} 2)\right) = \log_{2^3}\left(\log_{5^{-\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{5}\log_2 2\right)\right) =$

$= \frac{1}{3}\log_2\left(-\frac{1}{0{,}5}\log_5\frac{1}{5}\right) =$ $\boxed{-\frac{1}{0{,}5}\log_5\frac{1}{5} = \frac{1}{0{,}5}\log_5 5 = 2}$

$= \frac{1}{3}\log_2 2 = \boxed{\frac{1}{3}}$.

7. $(\lg 8 + \lg 125)^{-3} = (\lg(8 \cdot 125))^{-3} = \left(\lg 10^3\right)^{-3} = 3^{-3} = \boxed{\frac{1}{27}}$.

8. $\frac{\ln 27}{\ln 9} = \frac{\ln 3^3}{\ln 3^2} = \frac{3\ln 3}{2\ln 3} = \boxed{\frac{3}{2}}$.

9. $\ln 12 \cdot \log_{144} e^3 = \ln 12\frac{\ln e^3}{\ln 144} = \ln 12 \cdot \frac{3\ln e}{2\ln 12} = \boxed{\frac{3}{2}}$.

10. $\frac{\log_9 \sqrt{5}}{\log_{\frac{1}{27}} 125} = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{2}\log_3 5}{\frac{3}{-3}\log_3 5} = \boxed{-\frac{1}{4}}$.

11. $\log_{\frac{3}{4}} \cos\frac{\pi}{6} = \log_{\frac{3}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \log_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

12. $\lg \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,22^\circ30'}{1-\mathrm{tg}^2\,22^\circ30'} = \lg \mathrm{tg}\,45^\circ = \lg 1 = \boxed{0}$

(так как $\mathrm{tg}\,2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$).

13. $-\log_3\left(\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}\right) = -\log_3\left(\log_3 \sqrt[9]{3}\right) = -\log_3 \dfrac{1}{9} = \boxed{2}$.

14. $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}} = 81^{\log_3 5} + 27^{\log_3 6} + 3^{4\log_9 7} =$

$= \left(3^4\right)^{\log_3 5} + 3^{3\log_3 6} + 3^{\frac{4}{2}\log_3 7} = 5^4 + 6^3 + 7^2 =$

$= 625 + 216 + 49 = \boxed{890}$.

15. $\log_2\left(\log_a \sqrt[3]{a^2} + \log_a \sqrt[3]{a}\right) = \log_2\left(\log_a a^{\frac{2}{3}} + \log_a a^{\frac{1}{3}}\right) =$

$= \log_2\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\right) = \log_2 1 = \boxed{0}$.

Решение тренировочной карточки 5

1. $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[5]{2} = \log_{2^{-3}} 2^{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{-3} \log_2 2 = \boxed{-\frac{1}{15}}$.

2. $\log_{\sqrt[4]{a}} \sqrt{a^3} = \log_{a^{\frac{1}{4}}} a^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}} \log_a a = \boxed{6}$.

3. $9^{\log_3 0{,}5} = 3^{2\log_3 \frac{1}{2}} = \left(3^{\log_3 \frac{1}{2}}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{4}}$.

4. $(\sqrt{3})^{2+\log_3 16} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{2+2\log_3 4} =$

$= 3^{1+\log_3 4} = 3^1 \cdot 3^{\log_3 4} = \boxed{3 \cdot 4 = 12}$.

5. $(\lg 0{,}2 + \lg 0{,}5)^{20} = (\lg (0{,}2 \cdot 0{,}5))^{20} = (\lg 0{,}1)^{20} = (-1)^{20} = \boxed{1}$.

6. $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} 49}{\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{7}} = \dfrac{\frac{2}{-1} \log_3 7}{\frac{-1}{\frac{1}{2}} \log_3 7} = \boxed{1}$.

7. $2^{\frac{1}{3}\ln e^3} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{3\ln e} = (2^1)^1 = \boxed{2}$.

8. $2\log_{\frac{1}{5}} 5 + \log_{0,2} 3 - \frac{1}{2}\log_5 \frac{1}{225} = -2\log_5 5 - \log_5 3 - \log_5 \frac{1}{15} =$

$= -2 - \log_5 3 + \log_5 15 = -2 + \log_5 \frac{15}{3} = -2 + \log_5 5 =$

$= -2 + 1 = \boxed{-1}$.

9. $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{15} + \log_{25} 4 - \dfrac{1}{\log_{\sqrt{6}} \sqrt{5}} = \log_5 15 + \log_5 2 - \log_{\sqrt{5}} \sqrt{6} =$

$= \log_5 15 + \log_5 2 - \log_5 6 = \log_5 \frac{15 \cdot 2}{6} = \log_5 5 = \boxed{1}$.

10. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{32} \cdot \log_4 9 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \log_3 32 \cdot \log_2 3 = \dfrac{5\log_3 2}{\log_3 2} = \boxed{5}$.

11. $\dfrac{\log_3\sqrt{5}}{\log_9 5} = \dfrac{\frac{1}{2}\log_3 5}{\frac{1}{2}\log_3 5} = \boxed{1}.$

12. $\log_8 12 + 0{,}5\log_{\frac{1}{8}} 9 = \dfrac{1}{3}\log_2 12 + 0{,}5\cdot\dfrac{2}{-3}\log_2 3 =$

$= \dfrac{1}{3}(\log_2 12 - \log_2 3) = \boxed{\dfrac{2}{3}}.$

13. $\log_{\sin 2x}\left[(\sin x + \cos x)^2 - 1\right]^2 = \log_{\sin 2x}(\sin 2x)^2 =$

$= 2\log_{\sin 2x}\sin 2x = \boxed{2}.$

14. $\log_3(3\operatorname{tg} x) + \log_9(\operatorname{ctg} x)^2 =$

$= \log_3(3\operatorname{tg} x) + \log_3\operatorname{ctg} x = \log_3(3\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x) = \log_3 3 = \boxed{1}.$

15. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}} = \sqrt{25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8}} =$

$= \sqrt{5^{2\log_5 6} + 7^{2\log_7 8}} = \sqrt{\left(5^{\log_5 6}\right)^2 + \left(7^{\log_7 8}\right)^2} =$

$= \sqrt{6^2 + 8^2} = \boxed{10}.$

Решение тренировочной карточки 6

1. $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8.$

$\log_6 7 \cdot \log_7 8 = \log_6 7^{\log_7 8} = \log_6 8;$

$\log_5 6 \cdot \log_6 8 = \log_5 6^{\log_6 8} = \log_5 8;$

$\log_4 5 \cdot \log_5 8 = \log_4 5^{\log_5 8} = \log_4 8 = \frac{3}{2}\log_2 2 = \boxed{\frac{3}{2}}.$

Найти решение проще, если знать, что

$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c p \cdot \log_p k = \log_a k.$

2. $\log_{\frac{1}{49}} \sqrt[3]{7} = \frac{\frac{1}{3}}{-2}\log_7 7 = \boxed{-\frac{1}{6}}.$

3. $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[5]{a^2} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}\log_a a = \boxed{\frac{4}{5}}.$

4. $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{4+\log_3 625} = \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{4+4\log_3 5} =$

$= 3^{1+\log_3 5} = 3^1 \cdot 3^{\log_3 5} = 3 \cdot 5 = \boxed{15}.$

5. $(\ln \sqrt[5]{e} + 4\ln \sqrt[5]{e})^{25} = \left(\frac{1}{5}\ln e + \frac{4}{5}\ln e\right)^{25} = \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right)^{25} =$

$= 1^{25} = \boxed{1}.$

6. $\dfrac{\log_{49} \sqrt[3]{3}}{\log_{\frac{1}{7}} 27} = \dfrac{\frac{\frac{1}{3}}{2}\log_7 3}{\frac{3}{-1}\log_7 3} = \boxed{-\frac{1}{18}}.$

7. $(0{,}2)^{\frac{1}{3}\lg 0{,}001} = \left(5^{-1}\right)^{\frac{-3}{3}\lg 10} = \left(5^{-1}\right)^{-1} = \boxed{5}.$

8. $\log_3 21 - \dfrac{1}{\log_{49} 9} = \log_3 21 - \log_3 7 = \log_3 \dfrac{21}{7} = \log_3 3 = \boxed{1}.$

9. $\log_{\sqrt{2}} \cos^3 \frac{\pi}{3} = \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{-3}{\frac{1}{2}}\log_2 2 = \boxed{-6}.$

10. $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}(\cos 47^\circ \cdot \cos 17^\circ + \sin 47^\circ \cdot \sin 17^\circ) =$

$$=\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}(\cos(47^\circ - 17^\circ)) = \log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}\cos 30^\circ = \log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{-1}.$$

11. $\log_{\sqrt[3]{5}} 27 \cdot \log_{\sqrt{3}} 25 = \frac{3}{\frac{1}{3}}\log_5 3 \cdot \frac{2}{\frac{1}{2}}\log_3 5 = 36\frac{\log_5 3}{\log_5 3} = \boxed{36}.$

12. $100^{\lg 2} = \left(10^2\right)^{\lg 2} = \left(10^{\lg 2}\right)^2 = \boxed{4}.$

13. $\log_3 5 \cdot \dfrac{\log_{25} 9}{\log_{5,1} 5{,}1} = \log_3 5 \cdot \dfrac{\log_5 3}{1} = \dfrac{\log_3 5}{\log_3 5} = \boxed{1}.$

14. $\dfrac{\ln 7}{\ln \sqrt[3]{49}} = \dfrac{\ln 7}{\frac{2}{3}\ln 7} = \boxed{\dfrac{3}{2}}.$

15. $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3}}.$

$$27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49} = \left(3^3\right)^{\log_3 2} + 5^{\log_5 7} = 2^3 + 7 = 15;$$

$$81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9} = 9^{2\log_9 4} - 2^{3\log_2 3} = 16 - 27 = -11;$$

$$3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3} = 3 + 5^{\log_5 4} \cdot 3 = 3 + 4 \cdot 3 = 15;$$

$$\frac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{15} = \frac{15 \cdot (-11)}{15} = \boxed{-11}.$$

Решение тренировочной карточки 7

1. $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[4]{3} = \frac{\frac{1}{4}}{-2} \log_3 3 = \boxed{-\frac{1}{8}}.$

2. $\log_{\sqrt{x}} \sqrt[5]{x} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} \log_x x = \boxed{\frac{2}{5}}.$

3. $49^{\log_7 \sqrt[4]{3}} = \left(7^2\right)^{\frac{1}{4}\log_7 3} = \left(7^{\log_7 3}\right)^{\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{3}}.$

4. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3+\log_5 27} = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{3+3\log_5 3} = 5^{1+\log_5 3} = 5 \cdot 5^{\log_5 3} =$

$= 5 \cdot 3 = \boxed{15}.$

5. $7^{0,2\lg 10^5} = 7^{0,2\cdot 5\cdot \lg 10} = \left(7^1\right)^1 = \boxed{7}.$

6. $\dfrac{\log_{\frac{1}{5}} 36}{\log_{25} \frac{1}{\sqrt{6}}} = \dfrac{\frac{2}{-1}\log_5 6}{\frac{-\frac{1}{2}}{2}\log_5 6} = \boxed{8}.$

7. $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 8 + 2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \log_3 \frac{1}{24} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{-1}\log_3 2 - 2\log_3 6 + \log_3 24 =$

$= -\log_3 2 - \log_3 6^2 + \log_3 24 = \log_3 \frac{24}{2\cdot 36} = \log_3 \frac{1}{3} = \boxed{-1}.$

8. $\lg 9 \cdot \log_3 0{,}1 = 2\lg 3\left(-\log_3 10\right) = -2 \cdot \frac{\lg 3}{\lg 3} = \boxed{-2}.$

9. $\log_4 0{,}01 - \log_{\sqrt{0{,}5}} \sqrt{5} = \log_4 0{,}01 - \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\log_2 5 =$

$= \frac{-2}{2}\log_2 10 + \log_2 5 = \log_2 \frac{5}{10} = \boxed{-1}.$

10. $\ln\left[(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x\right] =$

$= \ln\left(\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin 2x\right) =$

$= \ln\left(sin^2 x + \cos^2 x\right) = \boxed{0}.$

11. $\log_8 \sin^2 \frac{\pi}{6} = \log_8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-2}{3}\log_2 2 = \boxed{-\frac{2}{3}}.$

12. $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27 =$

$$= 2\log_3 7 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_7 5 \cdot \frac{3}{2}\log_5 3 = 6\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 3 =$$

$$= 6\log_3 7^{\log_7 5} \cdot \log_5 3 = 6\log_3 5 \cdot \log_5 3 = 6 \cdot \log_3 5^{\log_5 3} = \boxed{6}.$$

13. $\dfrac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \dfrac{\log_2 9}{\log_{72} 2} = \dfrac{\log_2 2 + \log_2 9}{\frac{1}{\log_2 4 + \log_2 9}} - \dfrac{2\log_2 3}{\frac{1}{\log_2 8 + \log_2 9}} =$

$$\frac{1 + 2\log_2 3}{\frac{1}{2 + 2\log_2 3}} - \frac{2\log_2 3}{\frac{1}{3 + 2\log_2 3}} = \qquad \boxed{\log_2 3 = t}$$

$$= (1 + 2t)\,2\,(1 + t) - 2t\,(3 + 2t) = 2 + 4t^2 + 6t - 6t - 4t^2 = \boxed{2}.$$

14. $\log_{16}\left(\log_{\frac{1}{9}}(\log_{27} 3)\right) = \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{-2}\log_3\left(\frac{1}{3}\log_3 3\right)\right) =$

$$= \frac{1}{4}\log_2 \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{4}}.$$

15. $\log_{16}(3 - \sqrt{5}) + \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{3 + \sqrt{5}} =$

$$= \frac{1}{4}\log_2(3 - \sqrt{5}) + \frac{1}{4}\log_2(3 + \sqrt{5}) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\log_2(3 - \sqrt{5}) + \log_2(3 + \sqrt{5})\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\log_2\left((3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})\right) = \frac{1}{4}\log_2(9 - 5) = \frac{1}{4}\log_2 4 = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Решение тренировочной карточки 8

1. $\log_{25}\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{2}\log_5 5=\boxed{-\dfrac{1}{4}}$.

2. $\log_{\sqrt[4]{x}}\sqrt{x^3}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}}\log_x x=\boxed{6}$.

3. $16^{\log_2 3}=2^{4\log_2 3}=\left(2^{\log_2 3}\right)^4=3^4=\boxed{81}$.

4. $\left(\sqrt{2}\right)^{4+\log_2 25}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{4+2\log_2 5}=2^{2+\log_2 5}=4\cdot 5=\boxed{20}$.

5. $\dfrac{\log_{16}0{,}2}{\log_{\sqrt{2}}\sqrt[3]{5}}=\dfrac{\frac{-1}{4}\log_2 5}{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}\log_2 5}=\boxed{-\dfrac{3}{8}}$.

6. $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}(\sin 71^\circ\cdot\cos 11^\circ-\sin 11^\circ\cdot\cos 71^\circ)=\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}\sin 60^\circ=$
$=\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{-1}$.

7. $\log_{\sqrt[7]{2}}\sin^4\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\frac{1}{7}}\log_2\sin^4\dfrac{\pi}{4}=7\log_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4=$
$=7\log_2\dfrac{1}{4}=\boxed{-14}$.

8. $\lg 5\cdot\log_{25}0{,}1=\lg 5\cdot\dfrac{-1}{2}\log_5 10=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\lg 5}{\lg 5}=\boxed{-\dfrac{1}{2}}$.

9. $6^{\frac{\log_3 5}{1+\log_3 2}}=6^{\frac{\log_3 5}{\log_3 6}}=6^{\log_3 5\cdot\log_6 3}=\left(6^{\log_6 3}\right)^{\log_3 5}=3^{\log_3 5}=\boxed{5}$.

10. $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[3]{2}\cdot\log_4 27=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}(\log_3 2)\,\dfrac{3}{2}\log_2 3=\dfrac{\log_3 2}{\log_3 2}=\boxed{1}$.

11. $(\lg 200+\lg 0{,}5)^{-2}=(\lg(200\cdot 0{,}5))^{-2}=$
$=\left(\lg 10^2\right)^{-2}=2^{-2}=\boxed{\dfrac{1}{4}}$.

12. $\dfrac{\ln\sqrt[3]{3}}{\ln\sqrt[4]{27}} = \dfrac{\frac{1}{3}\ln 3}{\frac{3}{4}\ln 3} = \boxed{\dfrac{4}{9}}.$

13. $\log_{27}\left(\log_{\frac{1}{8}}(\log_4 2)\right) = \log_{27}\left(\dfrac{1}{-3}\log_2\left(\dfrac{1}{2}\log_2 2\right)\right) =$

$= \dfrac{1}{3}\log_3\dfrac{1}{3} = \boxed{-\dfrac{1}{3}}.$

14. $\dfrac{81^{\frac{1}{\log_5 9}} + 3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409}\cdot\left(\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{2}{\log_{25} 7}} - 125^{\log_{25} 6}\right) =$

$= \dfrac{\left(9^2\right)^{\log_9 5} + 3^{3\log_3\sqrt{6}}}{409}\cdot\left(\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{2\log_7 25} - 5^{3\cdot\frac{1}{2}\log_5 6}\right) =$

$= \dfrac{5^2 + \left(\sqrt{6}\right)^3}{409}\cdot\left(25 - \left(\sqrt{6}\right)^3\right) = \dfrac{5^4 - 6^3}{409} = \dfrac{625 - 216}{409} = \boxed{1}.$

15. $\log_3\left(2+\sqrt{3}\right) + \dfrac{1}{\log_{(2-\sqrt{3})} 3} =$

$= \log_3\left(2+\sqrt{3}\right) + \log_3\left(2-\sqrt{3}\right) = \log_3\left(\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right) =$

$= \log_3(4-3) = \log_3 1 = \boxed{0}.$

Решение тренировочных карточек 2 (на уравнения и неравенства)

Решение тренировочной карточки 1

1. $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0.$

$3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0.$ Пусть $3^x = t$ $(t > 0)$.

Тогда $3t^2 - 10t + 3 = 0;$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{3} = \frac{5 \pm 4}{3};$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{1}{3}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3^x = 3 \\ 3^x = \dfrac{1}{3}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 1;$ $x = -1.$

2. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x \leqslant 5 \cdot 36^x.$

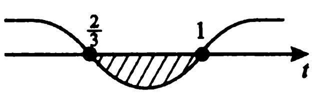
Поделим обе части неравенства на 36^x:

$$3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x \leqslant 5.$$

Пусть $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x = t$ $(t > 0)$.

Тогда $3t^2 - 5t + 2 \leqslant 0;$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}; \qquad \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$



$$\begin{cases} \left(\dfrac{4}{9}\right)^x \leqslant 1 \\ \left(\dfrac{4}{9}\right)^x \geqslant \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

3. $\sqrt[x]{64} - \sqrt[x]{2^{3x+3}} + 12 = 0.$

$2^{\frac{6}{x}} - 2^{3+\frac{3}{x}} + 12 = 0.$ Пусть $2^{\frac{3}{x}} = t \ (t > 0)$.

Тогда $t^2 - 8t + 12 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 6 \\ t = 2; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2^{\frac{3}{x}} = 2 \\ 2^{\frac{3}{x}} = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ \dfrac{3}{x} = \log_2 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \log_6 8. \end{array}\right.$

Ответ: $x = 3$; $x = \log_6 8$.

4. $\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 x = 4.$

Воспользуемся тем, что $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Имеем: $\dfrac{\log_3 9 + \log_3 x^2}{\log_3 x} \cdot \log_3^2 x = 4$; $\quad D(У)$: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

Следовательно, $2(1 + \log_3 x)\log_3 x = 4$. Пусть $\log_3 x = t$, тогда $\begin{cases} t^2 + t - 2 = 0 \\ t \neq 0; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \log_3 x = -2 \\ \log_3 x = 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{9} \\ x = 3 \end{array}\right. \in D(У).$

Ответ: $x = \dfrac{1}{9}$; $x = 3$.

5. $2\log_{25}((1+x)(3-x)) - \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}(1+x) > \log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{1}{2}\right).$

$\dfrac{2}{2}\log_5((1+x)(3-x)) - \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\log_5(1+x) > \log_5 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5(1+x) + \log_5(3-x) - \log_5(1+x) > \log_5 2 \\ (1+x)(3-x) > 0 \\ 1 + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

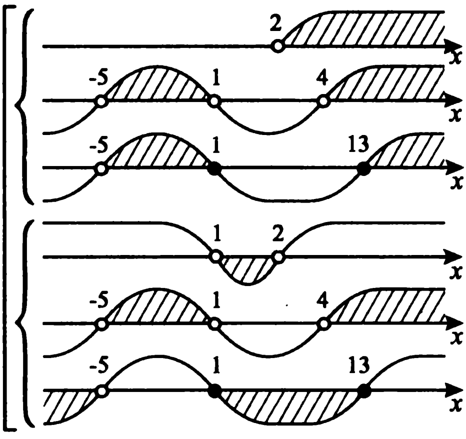
$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5(3-x) > \log_5 2 \\ 3 - x > 0 \\ 1 + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x > 2 \\ 3 - x > 0 \\ 1 + x > 0. \end{cases}$

Ответ: $(-1; 1)$.

6. $\log_{x-1} \dfrac{2(x-1)(x-4)}{x+5} \geqslant 1.$

$$\log_{(x-1)} \frac{2(x-1)(x-4)}{x+5} \geqslant \log_{(x-1)} (x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1>1 \\ \dfrac{2(x-1)(x-4)}{x+5} > 0 \\ \dfrac{2(x-1)(x-4)}{x+5} \geqslant x-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1<1 \\ x-1>0 \\ \dfrac{2(x-1)(x-4)}{x+5} > 0 \\ \dfrac{2(x-1)(x-4)}{x+5} \leqslant x-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2 \\ \dfrac{(x-1)(x-4)}{x+5} > 0 \\ \dfrac{(x-1)(x-13)}{x+5} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<2 \\ x>1 \\ \dfrac{(x-1)(x-4)}{x+5} > 0 \\ \dfrac{(x-1)(x-13)}{x+5} \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $[13; \infty)$.

7. Сравнить числа $\log_5 7$ и $\log_3 6$.

$\log_3 6 - \log_5 7 = \log_3 2 + 1 - \log_5 7.$

Поскольку $\log_t \dfrac{m+n}{2} > \dfrac{1}{2}(\log_t m + \log_t n)$,

имеем $\log_3 2 = \log_3 \dfrac{3+1}{2} > \dfrac{1}{2}(\log_3 3 + \log_3 1)$, и $\log_3 2 + 1 - \log_5 7 > \frac{1}{2}(\log_3 3 + \log_3 1) + 1 - \log_5 7 =$

$= 1{,}5 - \log_5 7 = \log_5 5^{\frac{3}{2}} - \log_5 7 = \log_5 \frac{\sqrt{125}}{7} > \log_5 \frac{11}{7} > 0,$

т.е. $\log_3 6 > \log_5 7$, что и требовалось доказать.

8. $\left\| \begin{array}{l} \log_6 15 = a \\ \log_{12} 18 = b \end{array} \right| \log_{25} 24 = ?$

$a = \log_6 15 = \frac{\log_2 15}{\log_2 6} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} = a;$

таким образом, $\log_2 5 = a + (a-1)\cdot\log_2 3$.

С другой стороны, $b = \log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3} = b,$

откуда $\log_2 3 = \frac{2b-1}{2-b}$.

Следовательно,

$$\log_{25} 24 = \frac{1}{2}\frac{(\log_2 3 + 3)}{\log_2 5} = \frac{\frac{2b-1}{2-b} + 3}{2\left(a + (a-1)\frac{2b-1}{2-b}\right)} =$$

$$= \frac{2b - 1 + 6 - 3b}{2(2a - ab + 2ab - 2b - a + 1)} = \frac{5-b}{2(a - 2b + ab + 1)}.$$

Итак, $\log_{25} 24 = \frac{5-b}{2(a - 2b + 1 + ab)}$,

где $a = \log_6 15$, $b = \log_{12} 18$.

Решение тренировочной карточки 2

1. $3\log_5 2 + 2 - x = \log_5\left(3^x - 5^{2-x}\right).$

$\log_5 2^3 + \log_5 5^{2-x} = \log_5\left(3^x - 5^{2-x}\right);$

$\log_5 8 \cdot 5^{2-x} = \log_5\left(3^x - 5^{2-x}\right);$

$8 \cdot 5^{2-x} = 3^x - 5^{2-x};$

$9 \cdot 5^{2-x} = 3^x; \quad \dfrac{9 \cdot 5^{2-x}}{3^x} = 1;$

$9 \cdot 5^{2-x} \cdot 3^{-x} = 1; \quad 5^{2-x} \cdot 3^{-x+2} = 1;$

$15^{2-x} = 1; \quad x = 2.$

Ответ: 2.

2. $3 \cdot 4^{-x} + \dfrac{1}{3} \cdot 9^{2-x} = 6 \cdot 4^{1-x} - \dfrac{1}{2} \cdot 9^{1-x}.$

$3\dfrac{1}{2} \cdot 9^{1-x} = 21 \cdot 4^{-x};$

$\dfrac{3}{2} = \left(\dfrac{4}{9}\right)^{-x}; \quad x = \dfrac{1}{2}.$

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

3. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x + \left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = 84.$

$3^{\frac{x}{5}} + \dfrac{1}{3} \cdot 3^{\frac{x}{10}} = 84.$

Пусть $3^{\frac{x}{10}} = t \ (t > 0)$, тогда $t^2 + \dfrac{1}{3}t \doteq 84;$

$3t^2 + t - 252 = 0;$

$t_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 3024}}{6} = \dfrac{-1 \pm 55}{6};$

$\left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = -\dfrac{28}{3} \notin (0;\infty); \end{array}\right. \quad 3^{\frac{x}{10}} = 9; \quad x = 20.$

Ответ: 20.

4. $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3.$

$$D(\text{У}):\ \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\frac{4}{2\log_2 x} + \frac{6}{1+\log_2 x} = 3.$$ Пусть $\log_2 x = t$.

Тогда $\dfrac{2}{t} + \dfrac{6}{1+t} = 3;\quad 3t^2 - 5t - 2 = 0;$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6};$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\dfrac{1}{3}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\dfrac{1}{3}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2^{-\frac{1}{3}} \end{array}\right. \in D(\text{У}).$$

Ответ: $x = 4;\ x = 2^{-\frac{1}{3}}.$

5. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162.$

$$3^{\log_3^2 x} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = x^{\log_3 x};$$

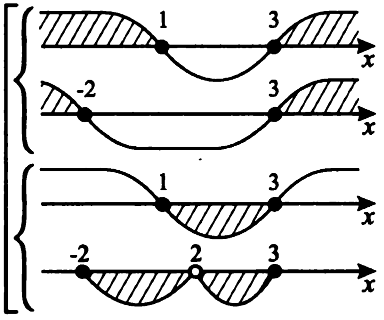
$$x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162; \quad x^{\log_3 x} = 81; \quad \log_3^2 x = 4;$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = \dfrac{1}{9}; \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 9;\ x = \dfrac{1}{9}.$

6. $\left(x^2 - 4x + 4\right)^{x^2 - x - 6} \geqslant 1.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-2)^2 \geqslant 1 \\ x^2 - x - 6 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-2)^2 \leqslant 1 \\ (x-2)^2 > 0 \\ x^2 - x - 6 \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-3)(x-1) \geqslant 0 \\ (x-3)(x+2) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-3)(x-1) \leqslant 0 \\ x \neq 2 \\ (x-3)(x+2) \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty; -2] \cup [1; 2) \cup (2; \infty)$.

7. Сравните числа $\log_2 3$ и $\log_5 11$.

При $t > 1$ $\quad \log_t \dfrac{a+b}{2} > \dfrac{1}{2}(\log_t a + \log_t b)$.

Поскольку $\log_2 3 = \log_2 \dfrac{6}{2} = \log_2\left(\dfrac{4+2}{2}\right) > \dfrac{1}{2}(\log_2 4 + \log_2 2)$,

имеем $\log_2 3 - \log_5 11 > \dfrac{1}{2}(\log_2 4 + \log_2 2) - \log_5 11 =$

$= 1{,}5 - \log_5 11 = \log_5 5^{\frac{3}{2}} - \log_5 11 = \log_5 \sqrt{125} - \log_5 11 > 0.$

Так как $\sqrt{125} > 11$, значит, $\log_2 3 > \log_5 11$, что и требовалось выяснить.

8. $\log_5 30 = \dfrac{\lg 30}{\lg 5} = \dfrac{1 + \lg 3}{1 - \lg 2}$.

$a \cdot b = \log_3 20 \cdot \lg 3 = \lg 3^{\log_3 20} = \lg 20 = 1 + \lg 2; \qquad \lg 2 = ab - 1;$

$\log_5 30 = \dfrac{1+\lg 3}{1-\lg 2} = \dfrac{1+b}{1-(ab-1)} = \dfrac{1+b}{2-ab}$.

Итак, $\log_5 30 = \dfrac{1+b}{2-ab}$, где $a = \log_3 20$, $b = \lg 3$.

Решение тренировочной карточки 3

1. $9^{x-1}-3^{x+1}+3^{x-3}=1.$

$9^{x-1}-9\cdot 3^{x-1}+\dfrac{1}{9}\cdot 3^{x-1}=1.$ Пусть $3^{x-1}=t\ \ (t>0).$

Тогда $t^2-9t+\dfrac{t}{9}=1;\quad 9t^2-80t-9=0;$

$t_{1,2}=\dfrac{40\pm\sqrt{1600+81}}{9}=\dfrac{40\pm 41}{9};\qquad \left[\begin{array}{l} t=9 \\ t=-\dfrac{1}{9}\notin(0;\infty)\,; \end{array}\right.$

$3^{x-1}=9;\quad x-1=2;\quad x=3.$

Ответ: 3.

2. $4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=9^{-\frac{1}{x}}.$

Разделим обе части уравнения на $9^{-\frac{1}{x}}$:

$\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{x}}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}=1.$

Пусть $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}=t\ \ (t>0).$ Тогда $t^2+t-1=0;$

$t_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\quad \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\notin E(t)$, где $E(t)$ — область изменения функции $t(x)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}.$

$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}};\quad \dfrac{1}{x}=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\quad x=\log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\dfrac{3}{2}.$

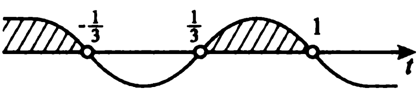
Ответ: $\log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\dfrac{3}{2}.$

3. $\dfrac{8\cdot 3^{x-2}}{3^x-2^x}>1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x.$

$\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{3^x}{3^x\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}>1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x.$ Пусть $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=t\ \ (t>0).$

Тогда $\dfrac{8}{9(1-t)} > 1+t$; $\quad \dfrac{8-9+9t^2}{9(1-t)} > 0$;

$\dfrac{(3t-1)(3t+1)}{9(1-t)} > 0$; $\quad \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \not\subset E(t)$.



$$\begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x < 1 \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^x > \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_{\frac{2}{3}} 1 \\ x < \log_{\frac{2}{3}} \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0; \log_{\frac{2}{3}} \dfrac{1}{3}\right)$.

4. $D(\text{У})$: $27 - \sqrt[x]{3} > 0$, то есть $3^{\frac{1}{x}} < 27$.

$\lg\left(3^{1+\frac{1}{2x}} \cdot 2\right) = \lg\left(27 - \sqrt[x]{3}\right)$; $\quad 6 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} = 27 - 3^{\frac{1}{x}}$.

Пусть $3^{\frac{1}{2x}} = t$ $(t > 0)$. Тогда

$t^2 + 6t - 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -9 \notin E(t) \\ t = 3; \end{array}\right.$ $\quad 3^{\frac{1}{2x}} = 3$; $\quad x = \dfrac{1}{2}$.

Проверим, принадлежит ли корень $D(\text{У})$.

При $x = \dfrac{1}{2}$ имеем $3^2 < 27$, т. е. $\dfrac{1}{2} \in D(\text{У})$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

5. $\dfrac{x-1}{\log_3(9-3^x) - 3} \leqslant 1$.

$\dfrac{(x-1) - \log_3(9-3^x) + 3}{\log_3(9-3^x) - 3} \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 2 \leqslant \log_3(9-3^x) \\ \log_3(9-3^x) > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2 \geqslant \log_3(9-3^x) \\ \log_3(9-3^x) < 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^{x+2} \leqslant 9 - 3^x \\ 9 - 3^x > 27 \end{cases} \\ \begin{cases} 3^{x+2} \geqslant 9 - 3^x \\ 9 - 3^x < 27 \\ 9 - 3^x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9\cdot 3^x + 3^x - 9 \leqslant 0 \\ 3^x < -18 \end{cases} \quad \emptyset \\ \begin{cases} 9\cdot 3^x + 3^x - 9 \geqslant 0 \\ 3^x > -18 \quad\quad \forall x \\ 3^x < 3^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geqslant \dfrac{9}{10} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \log_3 \dfrac{9}{10} \\ x < 2. \end{cases}$$

Ответ: $\left[\log_3 \dfrac{9}{10}; 2\right)$.

6. $\log_{\frac{3x}{x^2+1}} \left(x^2 - 2{,}5x + 1\right) \geqslant 0.$

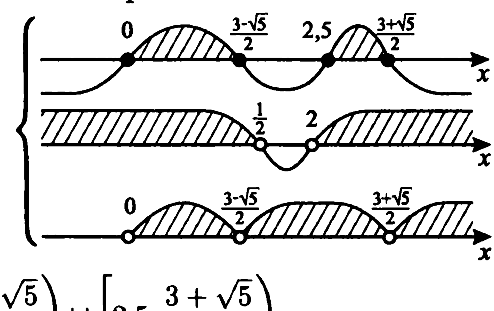
Поскольку $\log_a b \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1) \geqslant 0 \\ a > 0 \\ b > 0 \\ a \neq 1, \end{cases}$ имеем

$$\begin{cases} \left(x^2 - 2{,}5x + 1 - 1\right)\left(\frac{3x}{x^2+1} - 1\right) \geqslant 0 \\ x^2 - 2{,}5x + 1 > 0 \\ \dfrac{3x}{x^2+1} > 0 \\ \dfrac{3x}{x^2+1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 2{,}5)\left(-x^2 + 3x - 1\right) \geqslant 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 - 3x + 1 \neq 0; \end{cases}$$

$x^2 - 3x + 1 = 0; \quad x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0;$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \dfrac{5 \pm 3}{4};$

$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$



Ответ: $\left(0; \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left[2{,}5; \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

7. Сравните числа $(3\log_{16}1862+\log_{16}1866)$ и $\log_2 1863$.

Очевидно, что $\log_2 1863=\log_{16}1863^4$.

С другой стороны,

$3\log_{16}1862+\log_{16}1866=\log_{16}(1862^3\cdot 1866)$;

$\underline{1862^3\cdot 1866=1862^4+4\cdot 1862^3}$ (так как $1866=1862+4$).

$\underline{\underline{1863^4=(1862+1)^4}}=1862^4+4\cdot 1862^3+6\cdot 1862^2+4\cdot 1862+1$

(так как $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$).

Значит, $1863^4>1862^4+4\cdot 1862^3=1862^3\cdot 1866$, т.е. $\log_2 1863>\log_{16}\left(1862^3\cdot 1866\right)=3\log_{16}1862+\log_{16}1866$.

Итак, $\log_2 1863>3\log_{16}1862+\log_{16}1866$.

8. $\left\|\begin{matrix}\log_5 15=a\\ \log_{12}24=b\end{matrix}\right|\ \log_{125}48=?$

$a=\log_5 15=1+\log_5 3;\quad \log_5 3=a-1;$

$$b=\log_{12}24=\frac{\log_5 24}{\log_5 12}=\frac{\log_5 3+3\log_5 2}{\log_5 3+2\log_5 2}=\frac{a-1+3\log_5 2}{a-1+2\log_5 2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_5 2=\frac{ab-a+1-b}{3-2b};$$

$$\log_{125}48=\frac{1}{3}(\log_5 3+4\log_5 2)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(a-1+\frac{4(ab-a+1-b)}{3-2b}\right)=$$

$$=\frac{3a-2ba-3+2b+4ab-4a+4-4b}{3(3-2b)}=$$

$$=\frac{2ab-2b-a+1}{3(3-2b)}.$$

Итак, $\log_{125}48=\dfrac{2ab-2b-a+1}{3(3-2b)}$,

где $a=\log_5 15$, $b=\log_{12}24$.

Решение тренировочной карточки 4

1. $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24.$

Пусть $2^x = t \ (t > 0)$.

Тогда $4^x = t^2$; $\quad t^2 - 5t - 24 = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} t = 8 \\ t = -3 \notin E(t); \end{array}\right.$

$2^x = 8; \quad x = 3.$

Ответ: 3.

2. $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \leqslant 0.$

Разделим обе части неравенства на $4^{\frac{1}{x}}$:

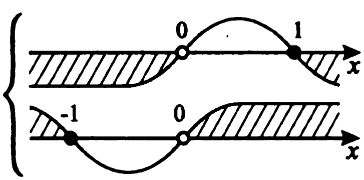
$$6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}} - 13\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + 6 \leqslant 0;$$

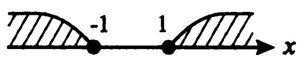
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = t \quad (t > 0) \Rightarrow 6t^2 - 13t + 6 \leqslant 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12};$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2} \\ t = \dfrac{2}{3}; \end{array}\right. \quad \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{3}{2}; \quad x = 1; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{2}{3};$$

$$x = -1; \quad \frac{2}{3} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-x}{x} \leqslant 0 \\ \dfrac{1+x}{x} \geqslant 0 \end{cases}$$





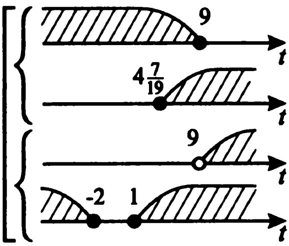
Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$.

3. $\sqrt{9^x + 3^x - 2} \geqslant 9 - 3^x$.

Пусть $3^x = t$ $(t > 0)$. Тогда $\sqrt{t^2 + t - 2} \geqslant 9 - t \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9 - t \geqslant 0 \\ t^2 + t - 2 \geqslant (9-t)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 9 - t < 0 \\ t^2 + t - 2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \leqslant 9 \\ t \geqslant \dfrac{83}{19} \end{cases} \\ \begin{cases} t > 9 \\ (t+2)(t-1) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ t \in \left[4\frac{7}{19}; \infty\right); \quad 3^x \geqslant 4\frac{7}{19}; \quad ; \ x \geqslant \log_3 4\frac{7}{19}.$$



Ответ: $\left[\log_3 4\dfrac{7}{19}; \infty\right)$.

4. $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} = 1250$.

$5^{\log_5^2 x} = \left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x} = x^{\log_5 x}$, поэтому исходное уравнение преобразуется к виду $x^{\log_5 x} + x^{\log_5 x} = 1250$;

$2 \cdot x^{\log_5 x} = 1250$; $\quad x^{\log_5 x} = 625$; $\quad \log_5^2 x = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2 \\ \log_5 x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 25 \\ x = \dfrac{1}{25}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 25$; $x = \dfrac{1}{25}$.

5. $\lg^2 100x - \lg^2 10x + \lg^2 x = 6$.

$(2 + \lg x)^2 - (1 + \lg x)^2 + \lg^2 x = 6$. Пусть $\lg x = t$. Тогда

$4 + 4t + t^2 - 1 - 2t - t^2 + t^2 = 6$; $\quad t^2 + 2t - 3 = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 1; \end{array}\right.$

$\lg x = -3$; $\quad \lg x = 1$.

Ответ: $\{0{,}001; 10\}$.

6. $\log_{\frac{x+6}{3}}\left(\log_2\dfrac{x-1}{x+2}\right)>0.$

Поскольку $\log_a b>0 \Leftrightarrow \begin{cases}(a-1)(b-1)>0\\ a>0\\ b>0,\end{cases}$

имеем

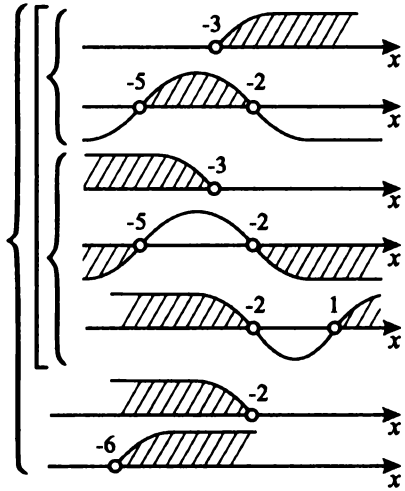
$$\begin{cases}\left(\log_2\dfrac{x-1}{x+2}-1\right)\left(\dfrac{x+6}{3}-1\right)>0\\ \log_2\dfrac{x-1}{x+2}>0\\ \dfrac{x+6}{3}>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

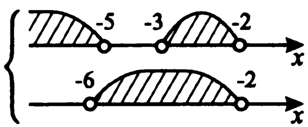
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\log_2\dfrac{x-1}{2(x+2)}\right)\cdot\dfrac{x+3}{3}>0\\ \dfrac{x-1}{x+2}>1\\ x>-6\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+3)\log_2\dfrac{x-1}{2(x+2)}>0\\ \dfrac{-3}{x+2}>0\\ x>-6\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-3\\ \log_2\dfrac{x-1}{2(x+2)}>0\end{cases}\\ \begin{cases}x<-3\\ \log_2\dfrac{x-1}{2(x+2)}<0\end{cases}\end{array}\right.\\ x<-2\\ x>-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-3\\ \dfrac{x-1}{2(x+2)}>1\end{cases}\\ \begin{cases}x<-3\\ \dfrac{x-1}{2(x+2)}<1\\ \dfrac{x-1}{2(x+2)}>0\end{cases}\end{array}\right.\\ x<-2\\ x>-6\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-3 \\ -\dfrac{x+5}{2(x+2)}>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-3 \\ -\dfrac{x+5}{2(x+2)}<0 \\ \dfrac{x-1}{2(x+2)}>0 \end{cases} \end{array}\right. \\ x<-2 \\ x>-6 \end{cases}$$





Ответ: $(-6;-5)\cup(-3;-2)$.

7. $2^{\sqrt{\log_2 3}}-3^{\sqrt{\log_3 2}}$.

$$\sqrt{\log_2 3}=\sqrt{\frac{\log_2^2 3}{\log_2 3}}=\sqrt{\left(\log_2^2 3\right)\log_3 2}=\left(\log_2 3\right)\sqrt{\log_3 2},$$

следовательно, $2^{\sqrt{\log_2 3}}=2^{(\log_2 3)\sqrt{\log_3 2}}=3^{\sqrt{\log_3 2}}$.

Тогда $2^{\sqrt{\log_2 3}}-3^{\sqrt{\log_3 2}}=3^{\sqrt{\log_3 2}}-3^{\sqrt{\log_3 2}}=0$.

Ответ: 0.

8. $$\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3}-\frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}=\frac{\log_3 27+\log_3 5}{\frac{1}{\log_3 3+\log_3 5}}-\frac{\log_3 5}{\frac{1}{\log_3 81+\log_3 5}}=$$

$$=\left(3+\log_3 5\right)\left(1+\log_3 5\right)-\log_3 5\left(4+\log_3 5\right)=$$

$$=\underline{\log_3^2 5}+\underline{\underline{4\log_3 5}}+3-\underline{\log_3^2 5}-\underline{\underline{4\log_3 5}}=3.$$

Ответ: 3.

Решение тренировочной карточки 5

1. $\underline{3\cdot 4^x}+\dfrac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=\underline{6\cdot 4^{x+1}}-\dfrac{1}{4}\cdot 9^{x+1}.$

$21\cdot 4^x=\dfrac{13}{4}\cdot 9^{x+1};\quad \left(\dfrac{4}{9}\right)^{x+1}=\dfrac{13}{21};\quad x+1=\log_{\frac{4}{9}}\dfrac{13}{21};$

$x=\log_{\frac{4}{9}}\dfrac{13}{21}-1;\quad x=\log_{\frac{4}{9}}\dfrac{39}{28}.$

Ответ: $\log_{\frac{4}{9}}\dfrac{39}{28}.$

2. $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=10.\qquad 5+\sqrt{24}=\dfrac{1}{5-\sqrt{24}},$

поэтому, обозначив $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x=t\quad (t>0)$, имеем

$t+\dfrac{1}{t}=10;\quad t^2-10t+1=0;\quad t_{1,2}=5\pm\sqrt{24}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x=5+\sqrt{24}\\ \left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x=5-\sqrt{24}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}=1\\ \dfrac{x}{2}=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-2\end{array}\right.$$

Ответ: $x=2;\ x=-2.$

3. $x^x+139\cdot x^{-x}-108\cdot x^{-2x}=32.$

Пусть $x^x=t\ (t>0)$, тогда $t+\dfrac{139}{t}-\dfrac{108}{t^2}=32;$

$t^3-32t^2+139t-108=0;\quad f(1)=0$, значит, $f(t)$ без остатка делится на $t-1$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l}
t^3-32t^2+139t-108 & t-1\\ \cline{2-2}
-\ \underline{t^3-\ \ t^2}\qquad\qquad\quad & t^2-31t+108\\
-31t^2+139t\qquad &\\
-\ \underline{-31t^2+\ 31t}\qquad &\\
108t-108 &\\
-\ \underline{108t-108} &
\end{array}$$

Таким образом, $t_1 = 1$. Найдем остальные корни:

$t^2 - 31t + 108 = 0; \quad t_2 = 27; \quad t_3 = 4;$

$$\left[\begin{array}{l} x^x = 1 \\ x^x = 27 \\ x^x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1; 3; 2\}$.

4. $\log_{2x} \dfrac{2}{x} \cdot \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1.$

$\dfrac{\log_2 2 - \log_2 x}{\log_2 2 + \log_2 x} \cdot \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1$. Пусть $\log_2 x = t$, тогда

$\dfrac{1-t}{1+t} \cdot t^2 + t^4 = 1; \quad t \neq -1.$

а) $t = 1; \quad \log_2 x = 1; \quad x = 2;$

$(1-t)\,t^2 - (1-t)\,(1+t)^2\left(t^2+1\right) = 0;$

$(1-t)\left(t^2 - (1+t)^2\left(t^2+1\right)\right) = 0;$

$t^2 - (1+t)^2\left(t^2+1\right) = 0;$

$\underline{t^2} - t^4 - 2t^3 - \underline{t^2} - t^2 - 2t - 1 = 0.$

б) $t^4 + 2t^3 + t^2 + 2t + 1 = 0.$

Разделим обе части уравнения на t^2 (при $t > 0$ решений нет). Здесь мы имеем возвратное уравнение, т. е. коэффициенты при степени, равноудаленные от начала и конца, равны.

$\left(t^2 + \dfrac{1}{t^2}\right) + 2\left(t + \dfrac{1}{t}\right) + 1 = 0; \quad t + \dfrac{1}{t} = a; \quad a^2 = t^2 + 2 + \dfrac{1}{t^2};$

$t^2 + \dfrac{1}{t^2} = a^2 - 2; \quad \left(a^2 - 2\right) + 2a + 1 = 0; \quad a^2 + 2a - 1 = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} a = -1 + \sqrt{2} \\ a = -1 - \sqrt{2}; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} t + \dfrac{1}{t} = -1 + \sqrt{2} \\ t + \dfrac{1}{t} = -1 - \sqrt{2}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} t^2 - \left(\sqrt{2} - 1\right)t + 1 = 0;\ \mathcal{D} < 0 \\ t^2 + \left(\sqrt{2} + 1\right)t + 1 = 0;\ t_{1,2} < 0 \end{array}\right.$$

$$t_{1,2}=\frac{-(\sqrt{2}+1)\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2};\quad \log_2 x=\frac{-(\sqrt{2}+1)\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=2^{-\frac{(\sqrt{2}+1)\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}} \\ x=2. \end{array}\right.$

5. $5^{\log_5^2 x}<10-x^{\log_5 x}$.

$\left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x}+x^{\log_5 x}<10;\quad x^{\log_5 x}<5;\quad \log_5 x^{\log_5 x}<\log_5 5$ (так как $y=\log_5 x$ — функция возрастающая); $\log_5^2 x<1$;

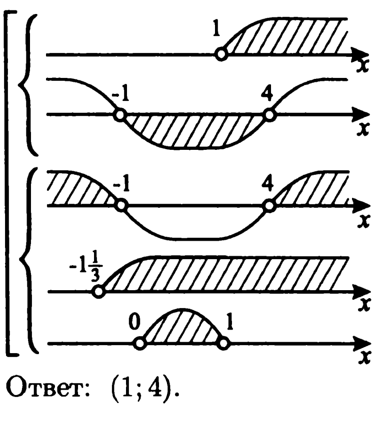
$$\begin{cases} \log_5 x<1 \\ \log_5 x>-1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{5};5\right)$.

6. $\log_x\sqrt{3x+4}>1\Leftrightarrow\log_x(3x+4)>2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_x(3x+4)>\log_x x^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ 3x+4>x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x+4<x^2 \\ 3x+4>0 \\ 0<x<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ x^2-3x-4<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-3x-4>0 \\ x>-1\frac{1}{3} \\ 0<x<1. \end{cases} \end{array}\right.$$



$\emptyset$

Ответ: $(1;4)$.

7. $\left\|\begin{matrix}\lg 5 = a\\ \lg 3 = b\end{matrix}\right| \log_{30} 8 = ?$

$$1-a=1-\lg 5=\lg 2; \quad a+b=\lg 15; \quad \frac{\lg 15}{\lg 2}=\log_2 15=\frac{a+b}{1-a};$$

$$\log_{30} 8=\frac{\log_2 8}{\log_2 30}=\frac{3}{\log_2 2+\log_2 15}=\frac{3}{1+\log_2 15}=\frac{3}{1+\frac{a+b}{1-a}}=$$

$$=\frac{3\,(1-a)}{1+b}.$$

Итак, $\log_{30} 8=\dfrac{3\,(1-a)}{1+b}$.

8. Вычислить, что больше: $\log_{189} 1323$ или $\log_{63} 147$.

$$\log_{189} 1323 = 1+\log_{189} 7 \quad (1323 = 189\cdot 7);$$

$$\log_{189} 7=\frac{\log_{63} 7}{\log_{63} 189}=\frac{\log_{63} 7}{1+\log_{63} 3} \quad (189 = 3\cdot 63);$$

$$\log_{63} 147 = 1+\log_{63}\frac{7}{3};$$

$$\log_{63}\frac{7}{3}=\log_{63} 7-\log_{63} 3;$$

$$\log_{63} 7=\log_{63}\left(\frac{63}{9}\right)^1=1-2\log_{63} 3; \quad \log_{63}\frac{7}{3}=1-3\log_{63} 3;$$

$$\log_{189} 1323-\log_{63} 147=\log_{189} 7-\log_{63}\frac{7}{3}=$$

$$=\frac{\log_{63} 7}{1+\log_{63} 3}-(1-3\log_{63} 3)=\frac{1-2\log_{63} 3}{1+\log_{63} 3}-(1-3\log_{63} 3)=$$

$$=\frac{1-2\log_{63} 3-1-\log_{63} 3+3\log_{63} 3+3\log^2_{63} 3}{1+\log_{63} 3}=$$

$$=\frac{3\log^2_{63} 3}{1+\log_{63} 3}>0, \text{ так как } \log_{63} 3>0.$$

Итак, $\log_{189} 1323 > \log_{63} 147$.

Решение тренировочной карточки 6

1. $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$.

Разделим обе части уравнения на 27^x:

$$\left(\frac{8}{27}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0.$$

Введем обозначение $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t \ (t > 0)$. Тогда $t^3 + t - 2 = 0$;

$f(t) = t^3 + t - 2$; $\quad f(t) = 0$; $\quad f(1) = 0$.

Разделим $t^3 + t - 2$ на $t - 1$:

$$\begin{array}{r|l}
-\ t^3 \qquad + \ t - 2 & t - 1 \\
\underline{t^3 - t^2 \qquad\qquad} & \overline{t^2 + t + 2} \\
-\ t^2 + \ t - 2 & \\
\underline{t^2 - \ t \quad} & \\
-\ 2t - 2 & \\
\underline{2t - 2} &
\end{array}$$

$t^2 + t + 2 = 0$ $\ (\mathcal{D} < 0;\ t \in \emptyset)$; $\quad t = 1$; $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$; $\quad x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

2. $4^x - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

$2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$;

$2^{2x}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3 + 1)$;

$\frac{3}{2} \cdot 2^{2x} = 4 \cdot 3^{x-\frac{1}{2}}$;

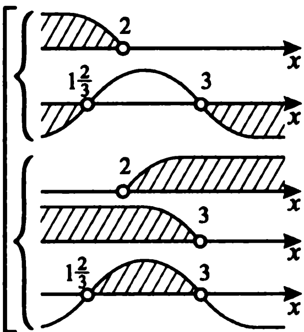
$\frac{4^x}{8} = \frac{3^{x-\frac{1}{2}}}{3}$; $\quad 4^{x-1,5} = 3^{x-1,5}$;

$\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1,5} = 1$; $\quad x - 1,5 = 0$; $\quad x = 1,5$.

Ответ: $x = 1,5$.

3. $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3-x>1 \\ \dfrac{3x-5}{3-x}<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3-x<1 \\ 3-x>0 \\ \dfrac{3x-5}{3-x}>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<2 \\ \dfrac{3x-5}{3-x}<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>2 \\ x<3 \\ \dfrac{3x-5}{3-x}>0 \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $\left(-\infty; 1\dfrac{2}{3}\right) \cup (2;3)$.

4. $\log_{3x}\dfrac{3}{x} + \log_3^2 x = 1.$

$\dfrac{\log_3 \frac{3}{x}}{\log_3 3x} + \log_3^2 x = 1;\quad \dfrac{\log_3 3 - \log_3 x}{\log_3 3 + \log_3 x} + \log_3^2 x = 1.$

Пусть $\log_3 x = t$. Тогда $\dfrac{1-t}{1+t} + t^2 = 1;$

$\dfrac{1-t}{1+t}\left(1-(1+t)^2\right) = 0;\quad \dfrac{-(1-t)(2+t)t}{1+t} = 0;$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \\ t=-2 \end{array}\right. \\ t \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 0 \\ \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = -2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{1; 3; \dfrac{1}{9}\right\}$.

5. $\log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_5 x = \log_2 x \cdot \log_3 x + \log_2 x \log_5 x + \log_3 x \log_5 x$.

Пусть $x = 1$. Тогда $0 = 0$, т. е. $x = 1$ — решение.

Пусть $x \neq 1$, тогда $\log_2 x \neq 0$.

Разделим обе части уравнения на $\log_2 x$:

$$\log_3 x \cdot \log_5 x = \log_3 x + \log_5 x + \frac{\log_3 x \cdot \log_5 x}{\log_2 x} \quad (\log_2 x \neq 0).$$

а) $\dfrac{\log_3 x}{\log_2 x} = \dfrac{\frac{\log_2 x}{\log_2 3}}{\log_2 x} = \dfrac{1}{\log_2 3}$ $(\log_2 x \neq 0)$,

поэтому $\log_3 x \cdot \log_5 x = \log_3 x + \log_5 x + \dfrac{\log_5 x}{\log_2 3}$.

Разделим обе части уравнения на $\log_5 x \neq 0$.

б) $\log_3 x = \dfrac{\log_3 x}{\log_5 x} + 1 + \dfrac{1}{\log_2 3}$.

Поскольку $\dfrac{\log_3 x}{\log_5 x} = \dfrac{\log_3 x}{\frac{\log_3 x}{\log_3 5}} = \log_3 5$, имеем

$\log_3 x = \log_3 5 + 1 + \log_3 2$; $\log_3 x = \log_3 (5 \cdot 3 \cdot 2)$; $x = 30$.

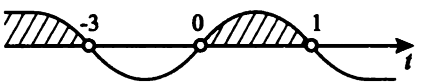
Ответ: $\{1; 30\}$.

6. Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 2. Поскольку $y = \log_2 x$ — возрастающая функция, имеем

$$\left(2 - \log_2^2 x - 2\log_2 x\right) \log_2 x > \log_2 \frac{1}{x}.$$

Пусть $\log_2 x = t$, тогда $\left(2 - t^2 - 2t\right) t + t > 0$;

$-t\left(t^2 + 2t - 3\right) > 0$; $\quad -t(t+3)(t-1) > 0$.



$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x < -3 \\ \begin{cases} \log_2 x < 1 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \frac{1}{8} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x > 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{8}\right) \cup (1; 2)$.

7. $\left\|\begin{array}{l}\log_7 12 = a\\ \log_{12} 24 = b\end{array}\right| \log_{54} 168 = ?$

$a \cdot b = \log_7 12 \cdot \log_{12} 24 = \log_7 24$, так как $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.

$$\log_{54} 168 = \frac{\log_7 168}{\log_7 54} = \frac{1 + \log_7 24}{\log_7 54} = \frac{1+ab}{\log_7 54};$$

$$\underline{\log_7 54} = \frac{\log_3 54}{\log_3 7} = \frac{3 + \log_3 2}{\log_3 7};$$

$$\log_{12} 24 = 1 + \log_{12} 2 = 1 + \frac{1}{2 + \log_2 3} = b;$$

$$\log_2 3 = \frac{1}{b-1} - 2 = \frac{3-2b}{b-1}; \qquad \underline{\log_3 2} = \frac{b-1}{3-2b};$$

$$a = \log_7 12 = \frac{\log_3 12}{\log_3 7} = \frac{1 + 2\log_3 2}{\log_3 7};$$

$$\log_3 7 = \frac{1 + 2\log_3 2}{a} = \frac{1 + \frac{2(b-1)}{3-2b}}{a} = \frac{1}{a(3-2b)};$$

$$\log_7 54 = \frac{3 + \log_3 2}{\log_3 7} = \frac{3 + \frac{b-1}{3-2b}}{\frac{1}{a(3-2b)}} = a(8-5b).$$

Итак, $\log_{54} 168 = \dfrac{1+ab}{\log_7 54} = \dfrac{1+ab}{a(8-5b)}$.

Ответ: $\log_{54} 168 = \dfrac{1+ab}{a(8-5b)}$.

8. $\begin{cases} xy = 40 \\ x^{\lg y} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{40}{y} \\ \left(\dfrac{40}{y}\right)^{\lg y} = 40 \end{cases}$

$$\lg y \cdot \lg\left(\frac{40}{y}\right) = \lg 40; \qquad \lg y\,(\lg 40 - \lg y) = \lg 40;$$

$$\lg^2 y - \lg 40 \cdot \lg y + \lg 40 = 0;$$

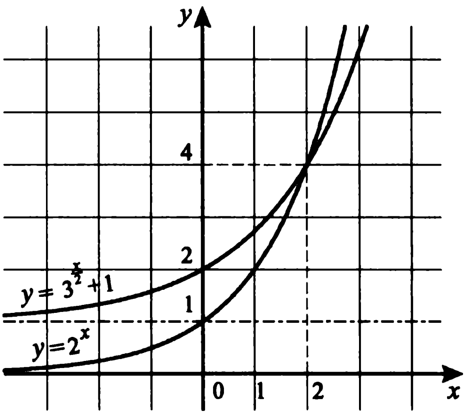
$$\mathcal{D} = \lg^2 40 - 4\lg 40 = \lg 40\,(\lg 40 - 4) < 0,$$

так как $\lg 40 < 4$. Следовательно, $(x, y) \in \emptyset$, т.е. система не имеет решения.

Решение тренировочной карточки 7

1. $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$.

Решим уравнение графически:



$2^x = 4^{\frac{x}{2}}$, поэтому $4^{\frac{x}{2}} > 3^{\frac{x}{2}}$ на $(2;\infty)$. Это значит, что других точек пересечения нет.

Ответ: $x = 2$.

2. $2^{2x} \cdot 9^x - 2 \cdot 6^{3x-1} + 4^{2x-1} \cdot 3^{4x-2} = 0$.

$2^{2x} \cdot 3^{2x} - \dfrac{1}{3} \cdot 2^{3x} \cdot 3^{3x} + \dfrac{1}{4} \cdot 2^{4x} \cdot \dfrac{1}{9} \cdot 3^{4x} = 0$.

Разделим обе части уравнения на $2^{2x} \cdot 3^{2x}$:

$1 - \dfrac{1}{3} \cdot 2^x \cdot 3^x + \dfrac{1}{36} \cdot 2^{2x} \cdot 3^{2x} = 0$.

Пусть $6^x = t$ $(t > 0)$, тогда $t^2 - 12t + 36 = 0$; $(t-6)^2 = 0$; $t = 6$; $6^x = 6$.

Ответ: $x = 1$.

3. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

$\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} = 1$, поэтому $2 - \sqrt{3} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Обозначим $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t$ $(t > 0)$.

Тогда $t + \dfrac{1}{t} = 4; \quad t^2 - 4t + 1 = 0; \quad t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \in E(t);$

$$\left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3} \\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$

4. $\sqrt{2\lg(-x)} = \lg\sqrt{x^2}$.

$\sqrt{2\lg(-x)} = \lg|x|; \qquad \sqrt{2\lg(-x)} = \lg(-x);$

$-x > 0 \Rightarrow |x| = -x$. Пусть $\lg(-x) = t$, тогда $\sqrt{2t} = t$;

$$\begin{cases} t^2 = 2t \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right. \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg(-x) = 0 \\ \lg(-x) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -100. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -100. \end{array}\right.$

5. $1 + \dfrac{\log_7(9-x)}{\log_7(4+x)} = \dfrac{2 - \log_5 4}{\log_5(x+4)}$.

Область определения уравнения $D(У)$:

$$\begin{cases} 9 - x > 0 \\ x + 4 > 0 \\ x + 4 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 9 \\ x > -4 \\ x \neq -3; \end{cases}$$

$$\frac{\log_7((4+x)(9-x))}{\log_7(x+4)} = \frac{\log_5 \frac{25}{4}}{\log_5(x+4)}.$$

Поскольку $\dfrac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$, имеем

$$\log_{x+4}((x+4)(9-x)) = \log_{x+4}\frac{25}{4};$$

$$(x+4)(9-x) = \frac{25}{4}; \qquad -x^2 + 5x + 36 = 6\frac{1}{4};$$

$$x^2 - 5x - 29\frac{3}{4} = 0; \qquad 4x^2 - 20x - 119 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100+476}}{4} = \frac{10 \pm 24}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 8{,}5 \\ x = -3{,}5 \end{array}\right. \in D(\text{У}).$$

Ответ: $\{8{,}5; -3{,}5\}$.

6. $\dfrac{\log_2((x+1)(x-3))}{\log_2(x-3)} < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{x-3}((x+1)(x-3)) < 1 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

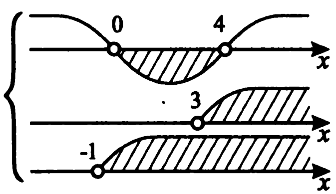
$\Leftrightarrow \log_{x-3}((x+1)(x-3)) < \log_{(x-3)}(x-3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{x-3}(x+1) < 0.$

Поскольку $\log_a b < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1) < 0 \\ a > 0 \\ b > 0, \end{cases}$

последнее соотношение равносильно

$$\begin{cases} (x+1-1)(x-3-1) < 0 \\ x+1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4) < 0 \\ x > -1 \\ x > 3. \end{cases}$$



Ответ: $(3; 4)$.

7. $\lg 64 = a; \quad \log_{20}\sqrt[5]{125} = ?$

а) $\log_{20}\sqrt[5]{125} = \dfrac{3}{5}\log_{20} 5 = \dfrac{3}{5\log_5 20} = \dfrac{3}{5(\log_5 5 + \log_5 4)} =$

$$= \frac{3}{5(1+2\log_5 2)}.$$

б) $\lg 64 = 6\lg 2 = \dfrac{6}{\log_2 10} = \dfrac{6}{1+\log_2 5} = a;$

$\log_2 5 = \dfrac{6}{a} - 1 = \dfrac{6-a}{a}; \qquad \log_5 2 = \dfrac{a}{6-a}.$

в) $\log_{20} \sqrt[5]{125} = \dfrac{3}{5\,(1+2\log_5 2)} = \dfrac{3}{5\left(1+\frac{2a}{6-a}\right)} =$

$= \dfrac{3\,(6-a)}{5\,(6-a+2a)} = \dfrac{3\,(6-a)}{5\,(6+a)}.$

Ответ: $\log_{20} \sqrt[5]{125} = \dfrac{3\,(6-a)}{5\,(6+a)}.$

8. $\begin{cases} \lg y^x = 2x\lg(2x-y) \\ \sqrt{x} - x = \sqrt{y} - y. \end{cases}$

Область определения системы $D(\mathrm{C})$:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 2x - y > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y > 0 \\ y < 2x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg y^x = 2x\lg(2x-y) \\ \sqrt{x} - x = \sqrt{y} - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\lg y = 2x\lg(2x-y) \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = x - y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg y = \lg(2x-y)^2 \\ \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{x}-\sqrt{y}\right) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{y} = y \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = (2x-y)^2 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = \sqrt{y} \\ 1 = \sqrt{x} + \sqrt{y} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \quad \notin D(\mathrm{C}) \\ y = 1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ y = (2x-y)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = (2x-y)^2 \\ \sqrt{x} = 1 - \sqrt{y} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y\\ y=y^2\end{cases}\\ \begin{cases}y=\left(2\left(1-\sqrt{y}\right)^2-y\right)^2\\ \sqrt{x}=1-\sqrt{y}\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y\\ \left[\begin{array}{l}y=0\\ y=1\end{array}\right.\end{cases} \quad \begin{array}{l}(1;1)\in D(\mathrm{C})\\ (0;0)\notin D(\mathrm{C})\end{array}\\ \begin{cases}y=\left(2\left(1-2\sqrt{y}+y\right)-y\right)^2\\ \sqrt{x}=1-\sqrt{y}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=\left(y-4\sqrt{y}+2\right)^2\\ \sqrt{x}=1-\sqrt{y}.\end{cases}\end{array}\right.$$

$y=y^2+16y+4+4y-8y\sqrt{y}-16\sqrt{y};$

$y^2-8y\sqrt{y}+19y-16\sqrt{y}+4=0.$

Пусть $\sqrt{y}=t$ $(t>0)$, тогда

$t^4-8t^3+19t^2-16t+4=0.$

Пусть $f(t)=t^4-8t^3+19t^2-16t+4$. $f(1)=0$, значит, $\sqrt{y}=1$ и $\sqrt{x}=0$, но найденная пара чисел не принадлежит $D(\mathrm{C})$.

$f(t)$ делится без остатка на $(t-1)$:

$$\begin{array}{r|l}
t^4-8t^3+19t^2-16t+4 & t-1 \\ \cline{2-2}
\underline{t^4-\ \ t^3}\qquad\qquad\qquad\quad & t^3-7t^2+12t-4 \\
-7t^3+19t^2\qquad\qquad & \\
\underline{-7t^3+\ \ 7t^2}\qquad\qquad & \\
12t^2-16t\qquad & \\
\underline{12t^2-12t}\qquad & \\
-\ \ 4t+4 & \\
\underline{-\ \ 4t+4} &
\end{array}$$

$t^4-8t^3+19t^2-16t+4=(t-1)\left(t^3-7t^2+12t-4\right).$

Пусть $g(t)=t^3-7t^2+12t-4$. Тогда $g(2)=0$, следовательно, $g(t)$ делится на $(t-2)$:

$$\begin{array}{r|l} -\,t^3 - 7t^2 + 12t - 4 & t-2 \\ \underline{t^3 - 2t^2} \qquad\qquad & \overline{t^2 - 5t + 2} \\ -\,-5t^2 + 12t \quad\; & \\ \underline{-5t^2 + 10t} \quad\; & \\ -\,2t - 4 & \\ \underline{2t - 4} & \end{array}$$

$$t^3 - 7t^2 + 12t - 4 = (t-2)\left(t^2 - 5t + 2\right).$$

Если $t = 2$, то $\sqrt{x} = -1$ и $x \in \emptyset$. Найдем остальные корни:

$$t^2 - 5t + 2 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \in E(t).$$

а) $\sqrt{y} = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = 1 - \dfrac{5+\sqrt{17}}{2} = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} < 0;$
$x \in \emptyset$.

б) $\sqrt{y} = \dfrac{5-\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = 1 - \dfrac{5-\sqrt{17}}{2} = \dfrac{\sqrt{17}-3}{2} > 0.$

Проверим выполнимость условия $y < 2x$, т. е. принадлежность найденной пары чисел D(C). С учетом того, что $x > 0$ и $y > 0$, данное условие переходит в $\sqrt{y} < \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$, т. е. $\dfrac{5-\sqrt{17}}{2} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{17}-3) \Leftrightarrow (5-\sqrt{17})^2 < 2(\sqrt{17}-3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25 + 17 - 10\sqrt{17} < 2(17 + 9 - 6\sqrt{17}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{17} < 10$ — истинно.

Таким образом, условие выполнено.

$$\sqrt{y} = \frac{5-\sqrt{17}}{2}, \text{ т. е. } y = \frac{25+17-10\sqrt{17}}{4} = \frac{21-5\sqrt{17}}{2}.$$

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{17}-3}{2}, \text{ т. е. } x = \frac{17+9-6\sqrt{17}}{4} = \frac{13-3\sqrt{17}}{2}.$$

Ответ: $(1;1)$; $\left(\dfrac{13-3\sqrt{17}}{2}; \dfrac{21-5\sqrt{17}}{2}\right)$.

Решение тренировочной карточки 8

1. $27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^{x} - 2^{3x} - 27 \cdot 2^{-x} = 8.$

Пусть $2^{x} - 3 \cdot 2^{-x} = t.$

Тогда, поскольку $(a-3b)^3 = a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3$, имеем

$t^3 = 2^{3x} - 9 \cdot 2^{x} + 27 \cdot 2^{-x} - 27 \cdot 2^{-3x} =$

$= -\left(27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^{x} - 2^{3x} - 27 \cdot 2^{-x}\right) = -8;$

$t^3 = -8; \quad t = -2;$

$2^{x} - 3 \cdot 2^{-x} = -2; \qquad 2^{2x} + 2 \cdot 2^{x} - 3 = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} 2^{x} = -3 \notin E\,(y = 2^{x}) \\ 2^{x} = 1; \end{array}\right. \qquad x = 0.$$

Ответ: $x = 0.$

2. $2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-4} = 992; \quad x \in \mathbb{Z}.$

$992 = 31 \cdot 32; \quad 2^{x^2-4}\left(2^{x+2} - 1\right) = 992.$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 2^{x^2-4} = 32 \\ 2^{x+2} = 32 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 2^{x^2-4} = 31 \\ 2^{x+2} = 33 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x^2 - 4 = 5 \\ x + 2 = 5 \end{array}\right. \\ \emptyset \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3; \end{array}\right. \\ x = 3. \end{array}\right. \quad x = 3$$

Ответ: $x = 3.$

3. $\left(x^2 - 8x + 16\right)^{x-6} < 1.$

$|x-4|^{2(x-6)} < |x-4|^{0};$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} |x-4| > 1 \\ 2\,(x-6) < 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ x < 3 \end{array}\right. \\ x < 6 \end{array}\right. \quad (-\infty; 3) \cup (5; 6) \\ \left\{\begin{array}{l} |x-4| < 1 \\ |x-4| > 0 \\ 2(x-6) > 0. \end{array}\right. \quad \emptyset \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; 3) \cup (5; 6).$

4. $\dfrac{\log_3 x - 1}{\log_3 \frac{x}{3}} - 2\log_3 \sqrt{x} + \log_3^2 x = 3.$

$$\frac{\log_3 x - 1}{\log_3 \frac{x}{3}} - \log_3 x + \log_3^2 x = 3;$$

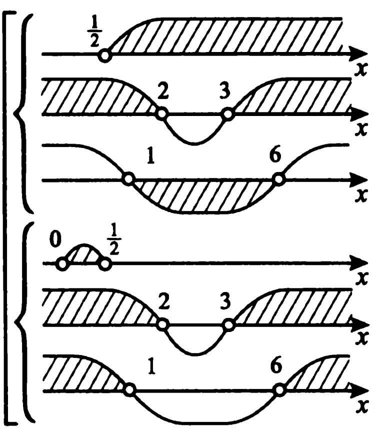
$\log_3 x \neq 1; \quad x \neq 3; \quad \log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{9; \dfrac{1}{3}\right\}$.

5. $\log_{2x}\left(x^2 - 5x + 6\right) < 1 \Leftrightarrow \log_{2x}\left(x^2 - 5x + 6\right) < \log_{2x} 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x > 1 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 2x \end{cases} \\ \begin{cases} 2x < 1 \\ 2x > 0 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 > 2x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ (x-2)(x-3) > 0 \\ (x-6)(x-1) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \\ x > 0 \\ (x-2)(x-3) > 0 \\ (x-6)(x-1) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup (3; 6)$.

6. $(x+4)\cdot 3^{1-|x-1|} - x = (x+1)\left|3^x - 1\right| + 3^{x+1} + 1.$

$$\left|3^x - 1\right| = \begin{cases} 3^x - 1; & x \geqslant 0 \\ 1 - 3^x; & x < 0; \end{cases} \quad |x-1| = \begin{cases} x - 1; & x \geqslant 1 \\ 1 - x; & x < 1. \end{cases}$$

а) $x < 0$:

$(x+4)\cdot 3^{1+x-1} - x = (x+1)\left(1 - 3^x\right) + 3^{x+1} + 1;$

$x \cdot 3^x + 4 \cdot 3^x - x = -x \cdot 3^x - 3^x + x + 1 + 3 \cdot 3^x + 1;$

$$(x+1)\left(3^x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \end{array}\right. \\ x < 0 \end{cases}; \quad x = -1.$$

б) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x < 1 \end{cases}$:

$(x+4)\cdot 3^{1+x-1} - x = (x+1)\left(3^x - 1\right) + 3^{x+1} + 1;$

$0 = 0 \Rightarrow [0; 1)$.

в) $x \geqslant 1$:

$(x+4)\cdot 3^{1-x+1} - x = (x+1)\left(3^x - 1\right) + 3 \cdot 3^x + 1;$

$$(x+4)\left(3^{2-x} - 3^x\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 1 \end{array}\right. \\ x \geqslant 1 \end{cases}; \quad x = 1.$$

Ответ: $[0; 1] \cup \{-1\}$.

7. $\left\| \begin{array}{l} \log_{14} 7 = a \\ \log_{14} 5 = b \end{array} \right| \ \log_{35} 28 = ?$

а) $\log_{35} 28 = \dfrac{\log_7 28}{\log_7 35} = \dfrac{2\log_7 2 + 1}{\log_7 5 + 1}.$

б) $a = \log_{14} 7 = \dfrac{1}{\log_7 14} = \dfrac{1}{1 + \log_7 2}; \quad \log_7 2 = \dfrac{1}{a} - 1.$

в) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\log_{14} 5}{\log_{14} 7} = \log_7 5.$

г) $\log_{35} 28 = \dfrac{2\log_7 2 + 1}{\log_7 5 + 1} = \dfrac{2\left(\frac{1}{a} - 1\right) + 1}{\frac{b}{a} + 1} =$

$= \dfrac{2 - 2a + a}{b + a} = \dfrac{2 - a}{a + b}.$

Итак, $\log_{35} 28 = \dfrac{2 - a}{a + b}.$

8. $\log_{\frac{1}{3}} \log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) < \log_3 \log_{\frac{1}{5}} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right).$

Поскольку $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = \sqrt{x^2+1} + x$, имеем

$$-\log_3 \log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) < \log_3 \log_5 \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > 0 \\ \log_5 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \log_5 \left(\sqrt{x^2+1}+ x\right) > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} + x > 5 \\ \sqrt{x^2+1} + x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > 5 - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5 - x \geqslant 0 \\ x^2 + 1 > (5 - x)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 5 - x < 0 \\ x^2 + 1 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 5 \\ x > 2{,}4 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 5 \\ \forall x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2{,}4; \infty)$.

Решение зачетных карточек 1 (на свойства логарифмов)

Решение зачетной карточки 1

1. $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[4]{27} = \dfrac{\frac{3}{4}}{-2} \log_3 3 = \boxed{-\dfrac{3}{8}}$.

2. $\log_{\sqrt[4]{x}} \sqrt[3]{x^2} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}} \log_x x = \dfrac{8}{3} = \boxed{2\dfrac{2}{3}}$.

3. $36^{\log_6 0{,}5} = 6^{2\log_6 0{,}5} = (0{,}5)^2 = \boxed{\dfrac{1}{4}}$.

4. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3+\log_5 27} = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{3+3\log_5 3} = 5^{1+\log_5 3} = 5^1 \cdot 5^{\log_5 3} =$
$= 5 \cdot 3 = \boxed{15}$.

5. $(\lg 25 - \lg 0{,}25)^{-3} = \left(\lg \dfrac{25}{0{,}25}\right)^{-3} = (\lg 100)^{-3} = 2^{-3} = \boxed{\dfrac{1}{8}}$.

6. $\dfrac{\log_7 8}{\log_{\frac{1}{49}} \sqrt{2}} = \dfrac{3\log_7 2}{\frac{\frac{1}{2}}{-2}\log_7 2} = \boxed{-12}$.

7. $3^{\frac{1}{4}\log_{\sqrt{3}} 81} = 3^{\frac{\frac{1}{4}\cdot 4}{\frac{1}{2}}\log_3 3} = 3^2 = \boxed{9}$.

8. $\log_{\frac{1}{4}} \left(\sin^4 \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{-2} \log_2 \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = -\dfrac{1}{2} \log_2 \dfrac{1}{4} =$
$= -\dfrac{1}{2}(-2)\log_2 2 = \boxed{1}$.

9. $\log_8 (8\sin 15^\circ \cos 15^\circ) = \log_8 (4\sin 30^\circ) = \dfrac{1}{3}\log_2 2 = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.

10. $\log_3 4 \cdot \log_2 9 = \log_3 4 \cdot 2\log_2 3 = 4 \cdot \log_3 2 \cdot \dfrac{1}{\log_3 2} = \boxed{4}$.

11. $\log_5\left(\sqrt{26}+1\right)+\log_{\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{26}-1}=$

$=\log_5\left(\sqrt{26}+1\right)+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\log_5\left(\sqrt{26}-1\right)=$

$=\log_5\left(\sqrt{26}+1\right)+\log_5\left(\sqrt{26}-1\right)=$

$=\log_5\left(\sqrt{26}+1\right)\left(\sqrt{26}-1\right)=\log_5(26-1)=\boxed{2}.$

12. $\log_{36}84-\log_6\sqrt{14}=\log_6\sqrt{84}-\log_6\sqrt{14}=\log_6\sqrt{\frac{84}{14}}=$

$=\log_6\sqrt{6}=\boxed{\frac{1}{2}}.$

13. $\dfrac{\lg 27+\lg 12}{\lg 2+2\lg 3}=\dfrac{\lg(27\cdot 12)}{\lg(2\cdot 3^2)}=\dfrac{\lg(3^4\cdot 2^2)}{\lg(2\cdot 3^2)}=\dfrac{2\lg(3^2\cdot 2)}{\lg(2\cdot 3^2)}=\boxed{2}.$

14. $\log_{25}\log_{32}\log_6 36=\log_{25}\log_{32}2=\log_{25}\frac{1}{5}=\boxed{-\frac{1}{2}}.$

15. $\frac{1}{2}\log_{30}36+2\log_{\frac{1}{30}}\frac{1}{\sqrt{5}}=\log_{30}6-\log_{30}\frac{1}{5}=\log_{30}30=\boxed{1}.$

Решение зачетной карточки 2

1. $\log_{\frac{1}{7}}\sqrt[3]{49}=\dfrac{\frac{2}{3}}{-1}\log_7 7=\boxed{-\dfrac{2}{3}}.$

2. $\log_{\sqrt[5]{a}}\sqrt[3]{a^5}=\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{5}}\log_a a=\dfrac{25}{3}=\boxed{8\dfrac{1}{3}}.$

3. $25^{\log_{\sqrt{5}}2}=\left(5^2\right)^{\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_5 2}=5^{4\log_5 2}=2^4=\boxed{16}.$

4. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{3+\log_{\frac{1}{2}}3}=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{3-\log_2 3}=2^{1-\frac{1}{3}\log_2 3}=2\cdot\left(2^{\log_2 3}\right)^{-\frac{1}{3}}=$
$=2\cdot 3^{-\frac{1}{3}}=\boxed{\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}}.$

5. $\left(\ln\sqrt[5]{e^6}-\ln\dfrac{1}{\sqrt[5]{e^4}}\right)^{-3}=\left(\dfrac{6}{5}+\dfrac{4}{5}\right)^{-3}=2^{-3}=\boxed{\dfrac{1}{8}}.$

6. $\dfrac{\log_{\sqrt{5}}4}{\log_{\frac{1}{25}}\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\frac{2}{\frac{1}{2}}\log_5 2}{\frac{\frac{1}{3}}{-2}\log_5 2}=\boxed{-24}.$

7. $\log_8(\sin 79^\circ\cdot\cos 49^\circ-\sin 49^\circ\cdot\cos 79^\circ)=\log_8\sin 30^\circ=$
$=\dfrac{1}{3}\log_2\dfrac{1}{2}=\boxed{-\dfrac{1}{3}}.$

8. $\log_3 8\cdot\log_4\sqrt{3}=3\log_3 2\cdot\dfrac{\frac{1}{2}}{2}\log_2 3=\boxed{\dfrac{3}{4}}.$

9. $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ\right)=\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}\cos 30^\circ=$
$=\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{-1}.$

10. $\log_{49}84-\log_7\sqrt{12}=\log_7\sqrt{84}-\log_7\sqrt{12}=\log_7\sqrt{\dfrac{84}{12}}=$
$=\log_7\sqrt{7}=\boxed{\dfrac{1}{2}}.$

11. $\dfrac{\lg 81 + \lg 64}{2\lg 3 + 3\lg 2} = \dfrac{\lg(81\cdot 64)}{\lg(3^2\cdot 2^3)} = \dfrac{\lg(3^4\cdot 2^6)}{\lg(3^2\cdot 2^3)} = \dfrac{2\lg(3^2\cdot 2^3)}{\lg(3^2\cdot 2^3)} = \boxed{2}$.

12. $\log_{\sqrt{3}}\log_{27}\log_2 8 = \log_{\sqrt{3}}\log_{27} 3 = \log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{3} = \boxed{-2}$.

13. $\dfrac{1}{4}\log_6 16 - 3\log_{\frac{1}{6}}\sqrt[3]{3} = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = \boxed{1}$.

14. $5^{\log_3 7} - 7^{\log_3 5} = \boxed{0}$, так как $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

15. $\dfrac{\ln\sqrt[3]{7}}{\ln 49} + \lg\sqrt[6]{10^{-1}} = \dfrac{\frac{1}{3}\ln 7}{2\ln 7} + \left(-\dfrac{1}{6}\right)\lg 10 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{6} = \boxed{0}$.

Решение зачетной карточки 3

1. $\log_4 \dfrac{1}{32} = \dfrac{-5}{2}\log_2 2 = \boxed{-2{,}5}$.

2. $\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[5]{a^3} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}}\log_a a = \boxed{\dfrac{9}{5}}$.

3. $25^{\log_{0,2} 4} = 25^{\frac{2}{-1}\log_5 2} = 5^{-4\log_5 2} = 2^{-4} = \boxed{\dfrac{1}{16}}$.

4. $\left(\sqrt[4]{2}\right)^{8+\log_2 81} = \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{8+4\log_2 3} = 2^{2+\log_2 3} = 2^2\cdot 2^{\log_2 3} =$

$= 4\cdot 3 = \boxed{12}$.

5. $\dfrac{\log_4 7}{\log_{0,5}\sqrt[3]{49}} = \dfrac{\frac{1}{2}\log_2 7}{\frac{\frac{2}{3}}{-1}\log_2 7} = \boxed{-\dfrac{3}{4}}$.

6. $(\lg 300 - \lg 15 - \lg 2)^{-26} = \left(\lg\dfrac{300}{15\cdot 2}\right)^{-26} = (\lg 10)^{-26} =$

$= 1^{-26} = \boxed{1}$.

7. $\log_3 49\cdot\log_{\frac{1}{7}}\sqrt{3} = 2\cdot\log_3 7\cdot\dfrac{\frac{1}{2}}{-1}\log_7 3 = -\dfrac{\log_3 7}{\log_3 7} = \boxed{-1}$.

8. $\log_3\left(\sqrt{13}-2\right) + \dfrac{1}{\log_{2+\sqrt{13}} 3} =$

$= \log_3\left(\sqrt{13}-2\right) + \log_3\left(2+\sqrt{13}\right) = \log_3(13-4) = \boxed{2}$.

9. $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}(\sin 60^\circ)^2 = \log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \boxed{-2}$.

10. $\log_{\sqrt{5}} 5\operatorname{tg}\alpha + \log_5(\operatorname{ctg}\alpha)^2 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}}\log_5 5\operatorname{tg}\alpha + 2\log_5\operatorname{ctg}\alpha =$

$= 2\log_5 5\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 2\log_5 5 = \boxed{2}$.

11. $2\lg 5 + \dfrac{1}{2}\lg 16 = \lg 5^2 + \lg 4 = \lg 25\cdot 4 = \lg 100 = \boxed{2}$.

12. $$\frac{\log_5 21}{2\log_5 3+\frac{1}{2}\log_5 49-\frac{1}{3}\log_{\sqrt{5}}\sqrt{27}}=\frac{\log_5 21}{\log_5 9+\log_5 7-\log_5 3}=$$
$$=\frac{\log_5 21}{\log_5 21}=\boxed{1}.$$

13. $\log_{27}(\log_8(\log_3 9))=\log_{27}\dfrac{1}{3}=\boxed{-\dfrac{1}{3}}.$

14. $$\frac{\log_5 36-\log_5 12}{\log_5 9}=\frac{\log_5 \frac{36}{12}}{2\log_5 3}=\frac{\log_5 3}{2\log_5 3}=\boxed{\frac{1}{2}}.$$

15. $\log_5 6\cdot\log_9 1\cdot\log_2 7=0,$ так как $\log_9 1=\boxed{0}.$

Решение зачетной карточки 4

1. $\log_{\frac{1}{27}} \sqrt[4]{3} = \dfrac{\frac{1}{4}}{-3} \log_3 3 = \boxed{-\dfrac{1}{12}}.$

2. $\log_{\sqrt{x}} \sqrt[4]{x^5} = \dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}} \log_x x = \dfrac{5}{2} = \boxed{2{,}5}.$

3. $9^{\log_3 2} = 3^{2\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^2 = 2^2 = \boxed{4}.$

4. $\left(\sqrt{3}\right)^{6-\log_3 25} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{6-2\log_3 5} = 3^{3-\log_3 5} = \boxed{\dfrac{27}{5}}.$

5. $\dfrac{\log_3 25}{\log_9 \sqrt{5}} = \dfrac{2\log_3 5}{\frac{\frac{1}{2}}{2} \log_3 5} = \boxed{8}.$

6. $3\lg 5 + \dfrac{1}{2}\lg 64 = \lg 5^3 + \lg 8 = \lg(125 \cdot 8) = \lg 1000 = \boxed{3}.$

7. $\dfrac{\log_7 30}{2\log_7 5 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{7}} 36 - \frac{1}{3}\log_{\sqrt{7}} \sqrt{125}} =$
$= \dfrac{\log_7 30}{\log_7 25 + \log_7 6 - \log_7 5} = \dfrac{\log_7 30}{\log_7 30} = \boxed{1}.$

8. $\log_6 3 \cdot \log_{\sqrt{3}} 36 = \log_6 3 \cdot \dfrac{2}{\frac{1}{2}} \log_3 6 = 4 \cdot \dfrac{\log_6 3}{\log_6 3} = \boxed{4}.$

9. $\left(\dfrac{\lg 125 - 2\lg 2}{\lg \sqrt[3]{4} + \lg 0{,}2}\right)^3 = \left(\dfrac{\lg \frac{125}{4}}{\lg\left(2^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-1}\right)}\right)^3 = \left(\dfrac{3\lg \frac{5}{2^{\frac{2}{3}}}}{-\lg \frac{5}{2^{\frac{2}{3}}}}\right)^3 =$
$= (-3)^3 = \boxed{-27}.$

10. $2\log_{\sin 2x} \sin x + \log_{\sin 2x}(4\cos^2 x) = \log_{\sin 2x}(\sin^2 x \cdot 4\cos^2 x) =$
$= \log_{\sin 2x} \sin^2 2x = \boxed{2}.$

11. $\log_5 (\sin 106° \cdot \cos 16° - \cos 106° \cdot \sin 16°) =$
$= \log_5 \sin 90° = \log_5 1 = \boxed{0}.$

12. $\log_8(\log_{16}(\log_5 25)) = \log_8(\log_{16} 2) = \log_8 \frac{1}{4} =$

$= \frac{-2}{3}\log_2 2 = \boxed{-\frac{2}{3}}.$

13. $\frac{1}{2}\log_{12} 36 - 3\log_{\frac{1}{12}} \sqrt[3]{2} = \log_{12} 6 + \log_{12} 2 = \log_{12} 12 = \boxed{1}.$

14. $8^{\log_7 5 \cdot \log_6 1} = 8^{\log_7 5 \cdot 0} = 8^0 = \boxed{1}.$

15. $\log_7(3-\sqrt{2}) - 2\log_{\frac{1}{7}} \sqrt{3+\sqrt{2}} =$

$= \log_7(3-\sqrt{2}) + \log_7(3+\sqrt{2}) = \log_7(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2}) =$
$= \log_7(9-2) = \log_7 7 = \boxed{1}.$

Решение зачетной карточки 5

1. $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{49} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} \log_7 7 = \boxed{-4}$.

2. $\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[4]{a^3} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}} \log_a a = \boxed{\frac{9}{4}}$.

3. $25^{\log_5 7} = 5^{2\log_5 7} = 7^2 = \boxed{49}$.

4. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{6-\log_2 27} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{6-3\log_2 3} = 2^{2-\log_2 3} = 2^2 \cdot 3^{-1} = \boxed{\frac{4}{3}}$.

5. $\dfrac{\log_8 7}{\log_{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{49}\right)} = \dfrac{\frac{1}{3}\log_2 7}{\frac{-2}{\frac{1}{3}} \log_2 7} = \boxed{-\frac{1}{18}}$.

6. $\ln 8 \cdot \log_4 e = 3\ln 2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 e = \frac{3\ln 2}{2\ln 2} = \boxed{\frac{3}{2}}$.

7. $\log_{\sqrt{2}} 12 - \log_2 9 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_2 12 - \log_2 9 = \log_2 \frac{12^2}{9} = \log_2 16 = \boxed{4}$.

8. $7^{\log_{11} 2} - 2^{\log_{11} 7} = \boxed{0}$, так как $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

9. $\log_{16} \cos 16\pi = \log_{16} 1 = \boxed{0}$.

10. $\log_{\operatorname{tg} x} cosx - \log_{\operatorname{tg} x} \sin x = \log_{\operatorname{tg} x} \frac{\cos x}{\sin x} = \log_{\operatorname{tg} x} \operatorname{ctg} x = \boxed{-1}$.

11. $\log_{27} (\log_8 (\log_3 9)) = \log_{27} (\log_8 2) = \log_{27} \frac{1}{3} = \boxed{-\frac{1}{3}}$.

12. $\frac{1}{2} \log_{14} 49 - 4\log_{\frac{1}{14}} \sqrt[4]{2} = \log_{14} 7 + 4 \cdot \frac{1}{4} \log_{14} 2 = \log_{14} 7 \cdot 2 = \boxed{1}$.

13. $\left(\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} 8}{\log_9 4}\right)^{-3} = \left(\dfrac{-3\log_3 2}{\log_3 2}\right)^{-3} = \boxed{-\frac{1}{27}}$.

14. $\dfrac{\log_4 27}{\log_8 9} + \dfrac{\log_5 0{,}5}{\log_{0{,}008} 2} = \dfrac{\frac{3}{2}\log_2 3}{\frac{2}{3}\log_2 3} - \dfrac{\log_5 2}{-3\log_5 2} = \frac{9}{4} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{31}{12}}$.

15. $6^{\ln 3 \cdot \ln 1 \cdot \ln 5} = 6^{\ln 3 \cdot 0 \cdot \ln 5} = 6^0 = \boxed{1}$.

Решение зачетной карточки 6

1. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{25} = \dfrac{\frac{2}{3}}{-1} \log_5 5 = \boxed{-\dfrac{2}{3}}$.

2. $\log_{\sqrt[4]{x}} \sqrt[3]{x^4} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{4}} \log_x x = \boxed{\dfrac{16}{3}}$.

3. $6^{\log_{\sqrt{6}} 5} = 6^{\frac{1}{\frac{1}{2}} \log_6 5} = \left(6^{\log_6 5}\right)^2 = 5^2 = \boxed{25}$.

4. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{10-\log_3 32} = \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^{10-5\log_3 2} = 3^{2-\log_3 2} = 9 \cdot 3^{-\log_3 2} =$

$= \dfrac{9}{2} = \boxed{4{,}5}$.

5. $\dfrac{\log_3 5}{\log_9 \frac{1}{\sqrt{5}}} = \dfrac{\log_3 5}{\frac{-\frac{1}{2}}{2} \log_3 5} = \boxed{-4}$.

6. $\lg 7 \cdot \log_{49} 10 = \lg 7 \cdot \dfrac{1}{2} \log_7 10 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\lg 7}{\lg 7} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

7. $\log_{\sqrt{3}} 18 - \log_3 4 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \log_3 18 - \log_3 4 = \log_3 \dfrac{18^2}{4} = \log_3 81 = \boxed{4}$.

8. $\log_{15} \sin \dfrac{17\pi}{2} = \log_{15} 1 = \boxed{0}$.

9. $\log_{\sqrt[3]{\cos x}} \left(1 - \sin^2 x\right) = \log_{\sqrt[3]{\cos x}} \cos^2 x = \dfrac{2}{\frac{1}{3}} \log_{\cos x} \cos x = \boxed{6}$.

10. $4^{\log_3 5} - 5^{\log_3 4} = \boxed{0}$, так как $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

11. $\log_9 (\log_{27} (\log_2 8)) = \log_9 (\log_{27} 3) = \log_9 \dfrac{1}{3} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$.

12. $\dfrac{1}{3} \log_{15} 27 - 2 \cdot \log_{\frac{1}{15}} \sqrt{5} = \log_{15} 3 + \log_{15} 5 = \log_{15} 15 = \boxed{1}$.

13. $\dfrac{\log_{25}\frac{1}{3}}{\log_{\frac{1}{25}}27} - \dfrac{\log_6 8}{\log_6 0{,}25} = \dfrac{-\frac{1}{2}\log_5 3}{\frac{3}{-2}\log_5 3} - \dfrac{3\log_6 2}{-2\log_6 2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{2} = \boxed{\dfrac{11}{6}}.$

14. $\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{11}+\sqrt{2}\right) + \dfrac{1}{\log_{(\sqrt{11}-\sqrt{2})}\sqrt{3}} = \log_{\sqrt{3}}(11-2) =$

$= \log_{\sqrt{3}} 9 = \boxed{4}.$

15. $\ln 7 \cdot \log_{49} e = \ln 7 \cdot \dfrac{1}{2}\log_7 e = \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln 7}{\ln 7} = \boxed{\dfrac{1}{2}}.$

Решение зачетной карточки 7

1. $\log_{0,5}\sqrt[3]{4} = \dfrac{\frac{2}{3}}{-1}\log_2 2 = \boxed{-\dfrac{2}{3}}$.

2. $\log_{\sqrt[5]{a}}\sqrt[3]{a^5} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{5}}\log_a a = \dfrac{25}{3} = \boxed{8\dfrac{1}{3}}$.

3. $8^{\log_2 3} = 2^{3\log_2 3} = 3^3 = \boxed{27}$.

4. $(\sqrt[4]{3})^{8-\log_3 16} = \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{8-4\log_3 2} = 3^{2-\log_3 2} = 9\cdot 2^{-1} = \boxed{4{,}5}$.

5. $\dfrac{\log_8\sqrt[3]{5}}{\log_{\frac{1}{2}} 25} = \dfrac{\frac{\frac{1}{3}}{3}}{\frac{2}{-1}}\log_2 5 : \log_2 5 = \boxed{-\dfrac{1}{18}}$.

6. $\ln 9\cdot\log_{\sqrt{3}} e = 2\ln 3\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\log_3 e = 4\dfrac{\ln 3}{\ln 3} = \boxed{4}$.

7. $\log_{\sqrt{2}} 54 - \log_4 9^6 = \log_{\sqrt{2}} 54 - \log_{\sqrt{2}} 9^{\frac{6}{4}} =$

$= \log_{\sqrt{2}}\dfrac{54}{9^{\frac{3}{2}}} = \log_{\sqrt{2}}\dfrac{54}{27} = \log_{\sqrt{2}} 2 = \boxed{2}$.

8. $2^{\log_3 11} - 11^{\log_3 2} = \boxed{0}$, так как $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

9. $\left(\dfrac{\log_6 27 + 2\log_6 2}{\log_6\sqrt[3]{0{,}25} + \log_6\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(\dfrac{\log_6(27\cdot 4)}{\log_6\dfrac{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}{3}}\right)^3 = \left(\dfrac{\log_6 108}{\log_6\frac{1}{\sqrt[3]{108}}}\right)^3 = \boxed{-27}$.

10. $\log_{\cos\frac{\pi}{4}} 8 = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 8 = \log_{2^{-\frac{1}{2}}} 2^3 = \dfrac{3}{-\frac{1}{2}}\log_2 2 = \boxed{-6}$.

11. $\log_{\frac{9}{4}}\log_8\log_2 16 = \log_{\frac{9}{4}}\log_8 4 = \log_{\frac{9}{4}}\dfrac{2}{3} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$.

12. $\dfrac{1}{3}\lg 8 - 2\lg\sqrt{0{,}2} = \lg 2 - \lg 0{,}2 = \lg\dfrac{2}{0{,}2} = \lg 10 = \boxed{1}$.

13. $3\log_{\operatorname{tg} x}\sin x - \log_{\operatorname{tg} x}\cos^3 x = \log_{\operatorname{tg} x}\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = \log_{\operatorname{tg} x}\operatorname{tg}^3 x = \boxed{3}$.

14. $\log_4 19 - \dfrac{1}{2}\log_4\left(\dfrac{19}{64}\right)^2 = \log_4 19 - \log_4\dfrac{19}{64} = \log_4 64 = \boxed{3}$.

15. $5^{\lg 7\cdot\log_6 1} = 5^{\lg 7\cdot 0} = 5^0 = \boxed{1}$.

Решение зачетной карточки 8

1. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9} = \dfrac{\frac{2}{3}}{-1} \log_3 3 = \boxed{-\dfrac{2}{3}}.$

2. $\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[4]{a^5} = \dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{3}} \log_a a = \boxed{\dfrac{15}{4}}.$

3. $27^{\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^3 = 2^3 = \boxed{8}.$

4. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{6-\log_2 27} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{6-3\log_2 3} = 2^{2-\log_2 3} = 2^2 \cdot \left(2^{\log_2 3}\right)^{-1} = \boxed{\dfrac{4}{3}}.$

5. $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{2}}{\log_9 8} = \dfrac{\frac{\frac{1}{4}}{-1} \log_3 2}{\frac{3}{2} \log_3 2} = \boxed{-\dfrac{1}{6}}.$

6. $\lg 27 \cdot \log_9 10 = 3 \lg 3 \cdot \dfrac{1}{2} \log_3 10 = \dfrac{3 \lg 3}{2 \lg 3} = \boxed{\dfrac{3}{2}}.$

7. $\log_{\sqrt{3}} 24 - \log_9 4^6 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \log_3 24 - \dfrac{4}{2} \log_3 2^3 = 2\left(\log_3 24 - \log_3 8\right) =$

$= 2 \log_3 3 = \boxed{2}.$

8. $\log_{\cos 2\alpha}\left(1 - 2\sin^2\alpha\right) = \log_{\cos 2\alpha} \cos 2\alpha = \boxed{1}.$

9. $5^{\log_7 3} - 3^{\log_7 5} = \boxed{0}$, так как $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

10. $\log_7 \sin \dfrac{13\pi}{2} = \log_7 \sin \dfrac{\pi}{2} = \log_7 1 = \boxed{0}.$

11. $\log_9 \log_{\frac{1}{8}} \log_{49} 7 = \log_9 \left(\log_{\frac{1}{8}} \left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = \log_9 \dfrac{1}{3} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}.$

12. $2 \log_{18} 3 - \dfrac{1}{3} \log_{\frac{1}{18}} 8 = \log_{18} 9 + \log_{18} 2 = \log_{18} 18 = \boxed{1}.$

13. $\ln 8 \cdot \log_{\sqrt{2}} e = 3 \ln 2 \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \log_2 e = 6 \cdot \dfrac{\ln 2}{\ln 2} = \boxed{6}.$

14. $\log_8 15 - \dfrac{1}{3} \log_8 \left(\dfrac{15}{32}\right)^3 = \log_8 15 + \log_8 \dfrac{32}{15} = \dfrac{1}{3} \log_2 2^5 = \boxed{\dfrac{5}{3}}.$

15. $8^{\log_5 7 \log_3 1} = 8^{\log_5 7 \cdot 0} = 8^0 = \boxed{1}.$

Решение зачетных карточек 2 (на уравнения и неравенства)

Решение зачетной карточки 1

1. $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5.$

$\sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\log_x 5)} = -\log_x 5;$ $\quad \begin{cases} \log_x 5 \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}(1+\log_x 5) = \log_x^2 5. \end{cases}$

Пусть $\log_x 5 = t$, тогда $\begin{cases} t \leqslant 0 \\ 2t^2 - t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_x 5 = -\dfrac{1}{2};\quad x^{-\frac{1}{2}} = 5;\quad x = 5^{-2};\quad x = 0{,}04.$

Ответ: $x = 0{,}04.$

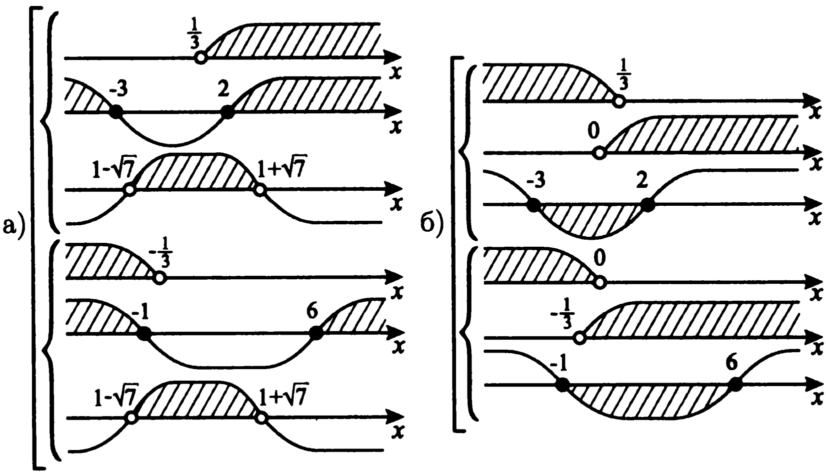
2. $\log_{9x^2}\left(6+2x-x^2\right) \leqslant \dfrac{1}{2}.$

$\dfrac{1}{2}\log_{|3x|}\left(6+2x-x^2\right) \leqslant \dfrac{1}{2};\quad \log_{|3x|}\left(6+2x-x^2\right) \leqslant 1;$

$\log_{|3x|}\left(6+2x-x^2\right) \leqslant \log_{|3x|}|3x| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |3x| > 1 \\ 6+2x-x^2 \leqslant |3x| \\ 6+2x-x^2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} |3x| < 1 \\ |3x| > 0 \\ 6+2x-x^2 \geqslant |3x| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

а) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x > 1 \\ x^2+x-6 \geqslant 0 \\ 6+2x-x^2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x < -1 \\ x^2-5x-6 \geqslant 0 \\ 6+2x-x^2 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\quad$ б) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x < 1 \\ x > 0 \\ x^2+x-6 \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x > -\dfrac{1}{3} \\ x^2-5x-6 \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$



Ответ: $\left(1-\sqrt{7};-1\right] \cup \left(-\dfrac{1}{3};0\right) \cup \left(0;\dfrac{1}{3}\right) \cup \left[2;1+\sqrt{7}\right)$.

3. $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = 8.$

$$\sqrt{4-\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}};\quad \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = t;\quad (t>0);$$

$$t+\frac{1}{t}=8;\quad t^2-8t+1=0;\quad t_{1,2}=4\pm\sqrt{15};$$

$$\left[\begin{array}{l} 4+\sqrt{15}=\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}} \\ 4-\sqrt{15}=\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{2;-2\}$.

4. $x^{\lg 81} - 9^{\lg x} = 6.$

Заметим, что $x^{2\lg 9} = 9^{2\lg x}$. Пусть $9^{\lg x} = t$ $(t>0)$. Тогда $t^2-t-6=0$; $\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-2\notin E(t); \end{array}\right.$ $9^{\lg x}=3$; $2\lg x = 1$; $x=\sqrt{10}$.

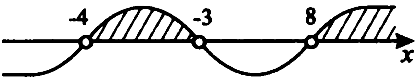
Ответ: $\sqrt{10}$.

5. $\log_{0,5}\left(\log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4}\right) < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4} > 0 \\ \log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x+4} > 0 \\ \dfrac{x^2+x}{x+4} > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x}{x+4} > 6;$$

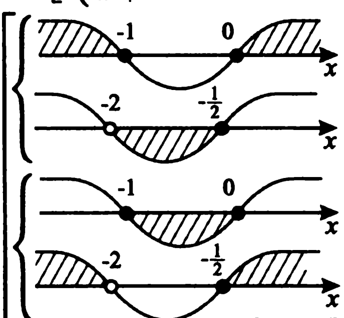
$$\frac{x^2-5x-24}{x+4} > 0; \quad \frac{(x-8)(x+3)}{x+4} > 0.$$



Ответ: $(-4;-3) \cup (8;\infty)$.

6. $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant \left(x^2+x+1\right)^3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x+1 \geqslant 1 \\ \dfrac{x+5}{x+2} \geqslant 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+x+1 \leqslant 1 \\ x^2+x+1 > 0 \\ \dfrac{x+5}{x+2} \leqslant 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x \geqslant 0 \\ \dfrac{2x+1}{x+2} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+x \leqslant 0 \\ \dfrac{2x+1}{x+2} \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $(-2;-1] \cup \left[-\dfrac{1}{2};0\right]$.

7. $3^{2x+4}+45\cdot 6^x-9\cdot 2^{2x+2}=0.$

$81\cdot 3^{2x}+45\cdot 2^x\cdot 3^x-36\cdot 2^{2x}=0.$

Разделим обе части уравнения на 2^{2x}:

$81\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+45\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-36=0.$

Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=t$ $(t>0)$. Тогда

$9t^2+5t-4=0;$

$t_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+144}}{18}=\frac{-5\pm 13}{18};\qquad \left[\begin{array}{l} t=-1\notin E(t) \\ t=\frac{4}{9}; \end{array}\right.$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=\frac{4}{9};\qquad x=-2.$

Ответ: -2.

8. $\log_{36}8=a\qquad \log_{36}9=?$

а) $\log_{36}8=\frac{3}{2}\log_6 2=\frac{3}{2(1+\log_2 3)}=a;$

$\frac{3}{2a}=1+\log_2 3;$

$\log_2 3=\frac{3}{2a}-1=\frac{3-2a}{2a};$

$\log_3 2=\frac{2a}{3-2a}.$

б) $\log_{36}9=\log_6 3=\frac{1}{\log_3 6}=\frac{1}{\log_3 2+1}=\frac{1}{\frac{2a}{3-2a}+1}=\frac{3-2a}{3}.$

Итак, $\log_{36}9=\frac{3-2a}{3}.$

Решение зачетной карточки 2

1. $\log_x(\log_2(4^x-6)) \leqslant 1 \Leftrightarrow \log_x(\log_2(4^x-6)) \leqslant \log_x x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ \log_2(4^x-6) \leqslant x \\ \log_2(4^x-6) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ \log_2(4^x-6) > 0 \\ \log_2(4^x-6) \geqslant x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ 4^x>6 \\ 4^x-2^x-6 \leqslant 0 \\ 4^x-6>1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ 4^x-6>1 \\ 4^x-2^x-6 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ x>\log_4 7 \\ (2^x-3)(2^x+2) \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ x>\log_4 7 \\ (2^x-3)(2^x+2) \geqslant 0 \end{cases} \quad \emptyset \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>\log_4 7 \\ x \leqslant \log_2 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>\log_4 7 \\ x \leqslant \log_4 9. \end{cases}$$

Ответ: $(\log_4 7; \log_4 9]$.

2. $x^2 \log_x 27 \cdot \log_9 x = x+4$.

$D(\text{У})$: $\begin{cases} x>0 \\ x \neq 1 \end{cases}$. Учитывая, что $\log_x 27 = 3\log_x 3$

и $\log_9 x = \dfrac{1}{2}\log_3 x$, получаем $\dfrac{3}{2}x^2 \log_x 3^{\log_3 x} = x+4$;

$\dfrac{3}{2}x^2 = x+4$; $\quad 3x^2-2x-8=0$;

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{3} = \dfrac{1 \pm 5}{3}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{4}{3} \notin D(\text{У}); \end{array}\right. \quad x=2.$

Ответ: 2.

3. $x^{\log_2 x} + 16 \cdot x^{-\log_2 x} < 17.$

Пусть $x^{\log_2 x} = t \ (t > 0)$, тогда $t + \dfrac{16}{t} < 17;$

$\dfrac{t^2 - 17t + 16}{t} < 0; \quad \dfrac{(t-1)(t-16)}{t} < 0; \quad 1 < x^{\log_2 x} < 16$

(так как $y = \log_2 x$ — возрастающая функция);

$\log_2 1 < \log_2 x^{\log_2 x} < \log_2 16; \quad 0 < \log_2^2 x < 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 2 \\ \log_2 x > -2 \\ \log_2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > \dfrac{1}{4} \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 4)$.

4. $3 \cdot 7^{\log_x 2 - 1} + 3^{\log_x 2} = 3^{\log_x 2 + 1} + 3^{\log_x 2 - 1}.$

$\dfrac{3}{7} \cdot 7^{\log_x 2} = 3 \cdot 3^{\log_x 2} - 3^{\log_x 2} + \dfrac{1}{3} 3^{\log_x 2}; \quad \dfrac{3}{7} \cdot 7^{\log_x 2} = \dfrac{7}{3} \cdot 3^{\log_x 2};$

$7^{\log_x 2 - 2} = 3^{\log_x 2 - 2}; \quad \left(\dfrac{7}{3}\right)^{\log_x 2 - 2} = 1;$

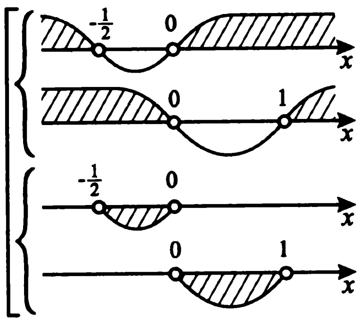
$$\log_x 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}; \quad x = \sqrt{2}.$$

Ответ: $x = \sqrt{2}$.

5. $\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > \left(4x^2 + 2x + 1\right)^0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x^2 + 2x + 1 > 1 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x^2 + 2x + 1 < 1 \\ 4x^2 + 2x + 1 > 0 \\ x^2 - x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x(2x + 1) > 0 \\ x(x - 1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x(2x + 1) < 0 \\ x(x - 1) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1;\infty)$.

6. $\log_{14} 2 = a \quad \log_{49} 16 = ?$

$$\log_{14} 2 = \frac{1}{\log_2 14} = \frac{1}{1+\log_2 7} = a; \quad \log_2 7 = \frac{1}{a} - 1;$$

$$\log_{49} 16 = \log_7 4 = 2\log_7 2 = \frac{2}{\log_2 7} = \frac{2}{\frac{1}{a}-1} = \frac{2a}{1-a}.$$

Итак, $\log_{49} 16 = \dfrac{2a}{1-a}$.

7. $\left(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\right)^x = 4.$

Пусть $\left(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\right)^x = t \ (t>0)$, тогда $7-4\sqrt{3} = \dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}$;

$$t + \frac{1}{t} = 4; \quad t^2 - 4t + 1 = 0;$$

$$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}; \quad 7+4\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^2;$$

$$\left[\begin{array}{l} \left(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3} \\ \left(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3} \\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{2; -2\}$.

8. $16^x + 625^x - 3\cdot 100^x - 2\cdot 4^x\left(4^x - 25^x\right) + 2\cdot 40^x = 0.$

$2^{4x} + 5^{4x} - 3\cdot 2^{2x}\cdot 5^{2x} - 2\cdot 2^{2x}\left(2^{2x} - 5^{2x}\right) + 2\cdot 2^{3x}\cdot 5^x = 0;$

$2^{4x} + 5^{4x} - 3\cdot 2^{2x}\cdot 5^{2x} - 2\cdot 2^{4x} + 2\cdot 2^{2x}\cdot 5^{2x} + 2\cdot 2^{3x}\cdot 5^x = 0;$

$-2^{2x}\cdot 5^{2x} - 2^{4x} + 5^{4x} + 2\cdot 2^{3x}\cdot 5^x = 0;$

$5^{4x} - \left(2^{4x} - 2\cdot 2^{2x}\cdot 2^x\cdot 5^x + 2^{2x}\cdot 5^{2x}\right) = 0;$

$5^{4x} - \left(2^{2x} - 2^x\cdot 5^x\right)^2 = 0;$

$\left(5^{2x} + 2^{2x} - 2^x\cdot 5^x\right)\left(5^{2x} - 2^{2x} + 2^x\cdot 5^x\right) = 0.$

Разделим выражение в каждой скобке на 2^{2x}:

$$\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{5}{2}\right)^{x} + 1\right]\cdot\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{x} - 1\right] = 0$$

$\mathcal{D} < 0$ для $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{5}{2}\right)^{x} + 1 = 0;$

$\left(\frac{5}{2}\right)^{x}_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ для $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{x} - 1 = 0;$

$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \notin E\left(y = \left(\frac{5}{2}\right)^{x}\right);$

$\left(\frac{5}{2}\right)^{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2};$

$x = \log_{\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

Ответ: $x = \log_{\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

Решение зачетной карточки 3

1. $\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right) =$

$= \left[\left(3^3\right)^{\log_3 2} + 5^{\log_5 7}\right] \cdot \left[9^{2\log_9 4} - 2^{3\log_2 3}\right] =$

$= (8+7)(16-27) = 15 \cdot (-11) = -165.$

Ответ: -165.

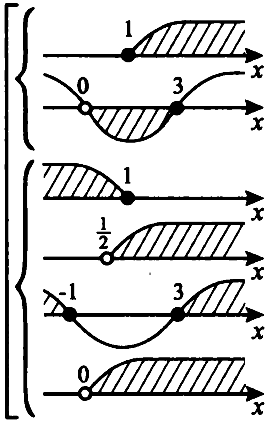
2. $\left(2^x - 2 \cdot 2^{-x}\right)^{\log_9(2x+3) - \log_3 x} \geqslant 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2^x - 2 \cdot 2^{-x}\right)^{\log_9(2x+3) - \log_3 x} \geqslant \left(2^x - 2 \cdot 2^{-x}\right)^0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x - 2 \cdot 2^{-x} \geqslant 1 \\ \log_9(2x+3) - \log_3 x \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x - 2 \cdot 2^{-x} \leqslant 1 \\ 2^x - 2 \cdot 2^{-x} > 0 \\ \log_9(2x+3) - \log_3 x \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x - 2 \cdot 2^{-x} \geqslant 1 \\ 2x + 3 \geqslant x^2 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x - 2 \cdot 2^{-x} \leqslant 1 \\ 2^{2x} - 2 > 0 \\ 2x + 3 \leqslant x^2 \\ x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{2x} - 2^x - 2 \geqslant 0 \\ x^2 - 2x - 3 \leqslant 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^{2x} - 2^x - 2 \leqslant 0 \\ 2^{2x} > 2 \\ x^2 - 2x - 3 \geqslant 0 \\ x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2^x \geqslant 2 \\ 2^x \leqslant -1 \quad \emptyset \end{array}\right. \\ (x-3)(x+1) \leqslant 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x \leqslant 2 \\ 2^x \geqslant -1 \, (\forall x) \\ x > \dfrac{1}{2} \\ x > 0 \\ (x-3)(x+1) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 1 \\ (x-3)(x+1) \leqslant 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 1 \\ x > \dfrac{1}{2} \\ x > 0 \\ (x-3)(x+1) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



$\varnothing$

Ответ: $[1;3]$.

3. $\left(\log_{\sqrt{3}} x\right)\sqrt{\log_{\sqrt{3}} 3 - \log_x 9} + 4 = 0.$

Поскольку $\log_{a^k} x = \dfrac{1}{k}\log_{|a|} x$, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, исходное уравнение преобразуется к виду $2\log_3 x\sqrt{2-2\log_x 3} = -4$.

Заметив, что $\log_3 x = \dfrac{1}{\log_x 3}$, получим

$$\sqrt{2 - 2\log_x 3} = -2\log_x 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2\log_x 3 = 4\log_x^2 3 \\ \log_x 3 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_x^2 3 + \log_x 3 - 1 = 0 \\ \log_x 3 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_x 3 = -1 \\ \log_x 3 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ \log_x 3 \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\log_x 3 = -1; \qquad 3 = \frac{1}{x}; \qquad x = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = \dfrac{1}{3}$.

4. Что больше: $\log_2 3$ или $\log_3 5$?

$\log_a \dfrac{m+n}{2} > \dfrac{1}{2}(\log_a m + \log_a n)$ при $a > 1$, поэтому

$$\log_2 3 = \log_2 \frac{6}{2} = \log_2 \frac{4+2}{2} > \frac{1}{2}(\log_2 4 + \log_2 2) =$$

$$= \frac{1}{2}(2+1) = 1{,}5;$$

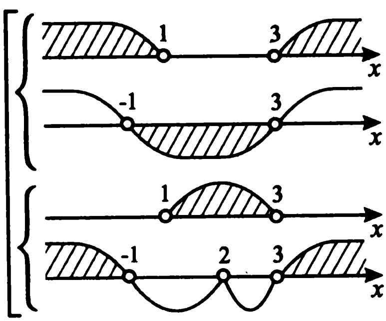
$$\log_2 3 - \log_3 5 > 1{,}5 - \log_3 5 = \log_3 3^{\frac{3}{2}} - \log_3 5 =$$
$$= \log_3 \sqrt{27} - \log_3 5 > 0 \text{ (так как } \sqrt{27} > 5\text{)}.$$

Итак, $\log_2 3 > \log_3 5$.

5. $|x-2|^{x^2-2x-3} < 1 \Leftrightarrow |x-2|^{x^2-2x-3} < |x-2|^0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x-2| > 1 \\ x^2-2x-3 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} |x-2| < 1 \\ x^2-2x-3 > 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-2 > 1 \\ x-2 < -1 \end{array}\right. \\ (x-3)(x+1) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 < 1 \\ x-2 > -1 \\ (x-3)(x+1) > 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 1 \end{array}\right. \\ (x-3)(x+1) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3 \\ x > 1 \\ (x-3)(x+1) > 0 \\ x \neq 2. \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $(-1; 1)$.

6. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} = \dfrac{10}{3}$.

$5 - 2\sqrt{6} = \dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}$. Пусть $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} = t$ $(t > 0)$,

тогда $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{10}{3}$; $\quad 3t^2 - 10t + 3 = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{1}{3}; \end{array}\right.$

$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

а) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} = 3 \Rightarrow \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\sin x} = 3$;

$\sin x = \log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} 3 < 1$, так как $\sqrt{3} + \sqrt{2} > 3$;

$x = (-1)^k \arcsin \log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} 3 + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$.

б) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\sin x}=\dfrac{1}{3}$;

$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}>3;\quad \sin x=\log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\left(\dfrac{1}{3}\right)$;

$x=(-1)^n\arcsin\log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\left(\dfrac{1}{3}\right)+\pi n;\quad n\in\mathbb{Z}$.

Верно ли, что $\log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\dfrac{1}{3}\leqslant-1$?

$\log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\dfrac{1}{3}\leqslant\log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}<\sqrt{3}-\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{9}<3+2-2\sqrt{6}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{6}<4\dfrac{8}{9}=\dfrac{44}{9}\Leftrightarrow\sqrt{6}<\dfrac{22}{9}\Leftrightarrow 6<\dfrac{484}{81}$ — ложь.

Таким образом, $\log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\dfrac{1}{3}>-1$, т.е. решение существует.

Ответ: а) $x=(-1)^k\arcsin\log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}3+\pi k;\quad k\in\mathbb{Z}$;

б) $x=(-1)^n\arcsin\log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\left(\dfrac{1}{3}\right)+\pi n;\quad n\in\mathbb{Z}$.

7. $2^{3x}-8\cdot2^{-3x}-6\cdot2^x+12\cdot2^{-x}=1$.

Пусть $2^x-2\cdot2^{-x}=t$.

Тогда, поскольку $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, имеем

$t^3=2^{3x}-6\cdot2^{2x}\cdot2^{-x}+12\cdot2^x\cdot2^{-2x}-8\cdot2^{-3x}=$

$=\underline{2^{3x}}-6\cdot2^x+12\cdot2^{-x}-\underline{8\cdot2^{-3x}}=$

$=2^{3x}-8\cdot2^{-3x}-6\cdot2^x+12\cdot2^{-x}=(2^x-2\cdot2^{-x})^3$, т.е. уравнение приобретает вид $(2^x-2\cdot2^{-x})^3=1$. Следовательно,

$2^x-2\cdot2^{-x}=1;\ 2^{2x}-2^x-2=0;\ \left[\begin{array}{l}2^x=2\\2^x=-1\notin E(y=2^x);\end{array}\right.\ x=1.$

Ответ: 1.

8. $\left.\begin{array}{l}\log_5 4=a\\\log_5 3=b\end{array}\right|\ \log_{25}12=?$

$\log_{25}12=\dfrac{1}{2}\log_5 12=\dfrac{1}{2}(\log_5 4+\log_5 3)=\dfrac{a+b}{2}$.

Решение зачетной карточки 4

1. $\left.\begin{array}{l}\lg 3 = a\\ \lg 2 = b\end{array}\right|\quad \log_5 6 = ?$

$a + b = \lg 3 + \lg 2 = \lg 6;$

$$\log_6 5 = \log_6 10 - \log_6 2 = \frac{1}{\lg 6} - \frac{1}{\log_2 6} =$$

$$= \frac{1}{a+b} - \frac{1}{1+\log_2 3} = \qquad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \log_2 3}$$

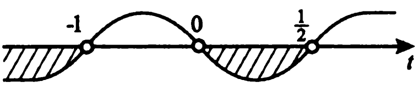
$$= \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a/b+1} = \frac{1}{a+b} - \frac{b}{a+b} = \frac{1-b}{a+b};$$

$$\log_5 6 = \frac{a+b}{1-b}.$$

2. $2x^{\log_{\frac{1}{2}} x} - x^{-\log_{\frac{1}{2}} x} < -1.$

Пусть $x^{\log_{\frac{1}{2}} x} = t\ (t > 0)$.

Тогда $2t - \frac{1}{t} + 1 < 0;\quad \frac{2t^2 + t - 1}{t} < 0;\quad \frac{(2t-1)(t+1)}{t} < 0;$



$(-\infty; -1) \not\subset E(t)$

$$\begin{cases} x^{\log_{\frac{1}{2}} x} < \frac{1}{2} & (\text{так как } y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ — убывающая функция}) \\ x^{\log_{\frac{1}{2}} x} > 0 & (\forall x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x^{\log_{\frac{1}{2}} x} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log^2_{\frac{1}{2}} x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x > 1 \\ \log_{\frac{1}{2}} x < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \\ \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \frac{1}{2} \\ x > 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (2; \infty)$.

3. $4^{-x}-3^{-x-\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}-x}-2^{-2x-1}$. $4^{-x}+4^{-x-\frac{1}{2}}=3^{-x+\frac{1}{2}}+3^{-x-\frac{1}{2}}$;

$4^{-x-\frac{1}{2}}(2+1)=3^{-x-\frac{1}{2}}(3+1)$; $4^{-x-1\frac{1}{2}}-3^{-x-1\frac{1}{2}}=0$;

$\left(\frac{4}{3}\right)^{-x-1\frac{1}{2}}=1$; $x=-1{,}5$.

Ответ: $-1{,}5$.

4. $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=\left(2\sqrt{2}\right)^x$.

Разделим обе части уравнения на $\left(2\sqrt{2}\right)^x$:

$$\left(\sqrt{\frac{4-\sqrt{15}}{8}}\right)^x+\left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{15}}{8}}\right)^x=1.$$

Пусть $a=\sqrt{\frac{4-\sqrt{15}}{8}}\leqslant 1$, $b=\sqrt{\frac{4+\sqrt{15}}{8}}\leqslant 1$.

Но $a^2+b^2=1$, следовательно, можно положить $a=\sin\alpha$ и $b=\cos\alpha$.

Тогда уравнение примет вид $(\sin\alpha)^x+(\cos\alpha)^x=1$. Это возможно, если $x=2$, т. е. в случае тригонометрического тождества.

Ответ: 2.

5. $\frac{1}{\log_3(x^2-7x+12)}<\frac{1}{\log_3 20}$.

$$\frac{\log_3 20-\log_3\left(x^2-7x+12\right)}{\log_3 20\cdot\log_3(x^2-7x+12)}<0.$$

Заметим, что $\log_3 20>0$, поэтому неравенство приобретает вид $\dfrac{\log_3\frac{x^2-7x+12}{20}}{\log_3(x^2-7x+12)}>0$.

Поскольку $\log_a b>0\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)(b-1)>0\\ a>0\\ b>0\end{cases}$, имеем

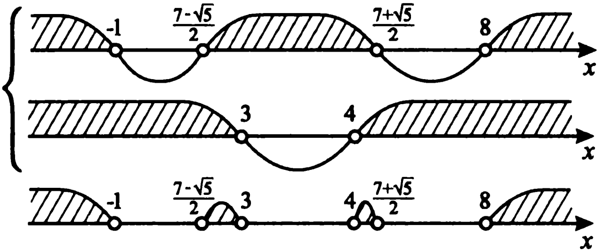
$$\log_{(x^2-7x+12)}\frac{x^2-7x+12}{20}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x^2-7x+12}{20}-1\right)\left(x^2-7x+12-1\right)>0 \\ x^2-7x+12>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2-7x-8\right)\left(x^2-7x+11\right)>0 \\ x^2-7x+12>0; \end{cases}$$

$x^2-7x-8=(x-8)(x+1)$; $\quad x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$;

$x^2-7x+11=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-44}}{2}=\dfrac{7\pm\sqrt{5}}{2}$;



Ответ: $(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{7-\sqrt{5}}{2};3\right)\cup\left(4;\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}\right)\cup(8;\infty)$.

6. $\log_2\left(2^x-1\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1}-2\right)>-2$.

Пусть $\log_2\left(2^x-1\right)=t$.

Тогда $\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1}-2\right)=-1-\log_2\left(2^x-1\right)$; $t(-1-t)>-2$;

$t^2+t-2<0$; $\quad -2<t<1$;

$$\begin{cases} \log_2\left(2^x-1\right)<1 \\ \log_2\left(2^x-1\right)>-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$y=\log_2 x$ — возрастающая функция

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x-1<2 \\ 2^x-1>\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x<3 \\ 2^x>\dfrac{5}{4}; \end{cases}$$

$\log_2\dfrac{5}{4}<x<\log_2 3$ ($y=\log_2 x$ — возрастающая функция).

Ответ: $\left(\log_2\dfrac{5}{4};\log_2 3\right)$.

7. $\lg(6\cdot 5^x + 25\cdot 20^x) = x + \lg 25.$

$\lg(6\cdot 5^x + 25\cdot 20^x) = \lg 10^x + \lg 25;$

$\lg(6\cdot 5^x + 25\cdot 20^x) = \lg 25\cdot 10^x;\quad 6\cdot 5^x + 25\cdot 20^x = 25\cdot 10^x.$

Разделим обе части уравнения на 5^x: $6 + 25\cdot 4^x = 25\cdot 2^x.$

Пусть $2^x = t$ $(t > 0)$. Тогда $25t^2 - 25t + 6 = 0;$

$$t_{1,2} = \frac{25\pm 5}{50};\quad \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{5} \\ t = \dfrac{2}{5}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2^x = \dfrac{3}{5} \\ 2^x = \dfrac{2}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_2 0{,}6 \\ x = \log_2 0{,}4. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{\log_2 0{,}6; \log_2 0{,}4\}$.

8. $$\begin{cases} (\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sqrt[9]{x^{15}} \\ (\sqrt[5]{x})^{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt[6]{x^{-2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{3}} = x^{\frac{15}{9}} \\ x^{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{5}} = x^{-\frac{2}{6}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \neq 1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \\ x = 1 \quad (\forall y \geqslant 0) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x} = \dfrac{5}{3} \\ \sqrt{y} = \dfrac{10}{3} \end{cases} \\ x = 1 \quad (\forall y \geqslant 0); \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{25}{9} \\ y = \dfrac{100}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\dfrac{7}{9} \\ y = 11\dfrac{1}{9}. \end{cases}$$

Пусть $y = t$; пара чисел $(1; t)$ $\forall t \geqslant 0$ является решением.

Ответ: $\left(2\dfrac{7}{9}; 11\dfrac{1}{9}\right) \cup (1; t)$ где $\forall t \geqslant 0$.

Решение зачетной карточки 5

1. $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1.$

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{2}} + \log_3 x > 1; \quad \log_3 x \left(\frac{1}{\log_3 \frac{1}{2}} + 1 \right) > 1;$$

$$\log_3 x \cdot \frac{1 + \log_3 \frac{1}{2}}{\log_3 \frac{1}{2}} > 1, \text{ так как } \log_3 \frac{1}{2} < 0 \text{ и } \log_3 \frac{1}{2} + 1 > 0;$$

$$\log_3 x < \frac{\log_3 \frac{1}{2}}{1 + \log_3 \frac{1}{2}}; \quad \log_3 x < \log_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\log_3 \frac{1}{2} + 1}},$$

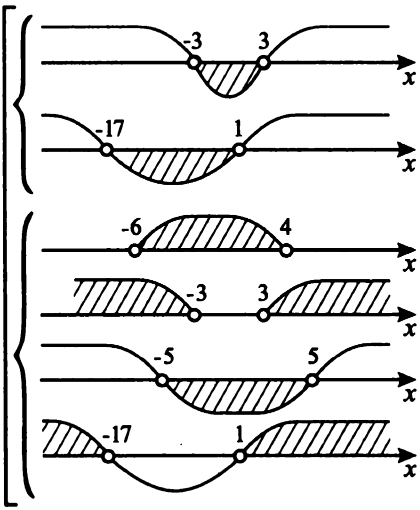
так как $\dfrac{1}{\log_3 \frac{1}{2} + 1} = \dfrac{1}{\log_3 \frac{3}{2}} = \log_{\frac{3}{2}} 3.$

Ответ: $0 < x < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{1,5} 3}.$

2. $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \left(\dfrac{24 - 2x - x^2}{14} \right) > 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{25-x^2}{16}} \left(\frac{24 - 2x - x^2}{14} \right) > \log_{\frac{25-x^2}{16}} \left(\frac{25 - x^2}{16} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{25 - x^2}{16} > 1 \\ \dfrac{24 - 2x - x^2}{14} > \dfrac{25 - x^2}{16} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{24 - 2x - x^2}{14} > 0 \\ 0 < \dfrac{25 - x^2}{16} < 1 \\ \dfrac{24 - 2x - x^2}{14} < \dfrac{25 - x^2}{16} \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^2 < 9 \\ x^2 + 16x - 17 < 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2x - 24 < 0 \\ x^2 > 9 \\ x^2 < 25 \\ x^2 + 16x - 17 > 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$



Ответ: $(-3;1)\cup(3;4)$.

3. $81^x-16^x-2\cdot 9^x\left(9^x-4^x\right)+36^x=0.$

$81^x-16^x-2\cdot 81^x+2\cdot 36^x+36^x=0;$

$3\cdot 36^x-81^x-16^x=0;$

$3\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{4x}-1=0$. Пусть $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}=t\ \ (t>0)$. Тогда

$t^2-3t+1=0;\quad t_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4}}{2};\quad t=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\in(0;\infty)$.

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}\\[2mm] \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\[2mm] 2x=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\[2mm] x=\dfrac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

4. $\begin{cases} \log_3(x+2y) + \log_{\frac{1}{3}}(x-2y) = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 + \frac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 \dfrac{x+2y}{x-2y} = 1 \\ x^2+y^2 = 4 + \dfrac{1}{2}y \\ x+2y > 0 \\ x-2y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 3(x-2y) \\ x^2+y^2 = 4 + \dfrac{1}{2}y \\ x+2y > 0 \\ x-2y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ 16y^2+y^2 = 4 + \dfrac{1}{2}y \\ x+2y > 0 \\ x-2y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ 34y^2 - y - 8 = 0 \\ x+2y > 0 \\ x-2y > 0; \end{cases}$$

$$34y^2 - y - 8 = 0; \quad y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+1088}}{68} = \frac{1 \pm 33}{68};$$

$$\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2}; x = 2 \\ y = -\dfrac{8}{17}; x = -1\dfrac{15}{17}. \end{array}\right.$$

Следовательно, наша система равносильна следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = 2 \\ 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} > 0 \\ 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} > 0 \end{cases} & \text{— истина} \\ \begin{cases} y = -\frac{8}{17} \\ x = -1\frac{15}{17} \\ -1\frac{15}{17} + \frac{-16}{17} > 0 \\ -1\frac{15}{17} + \frac{16}{17} > 0 \end{cases} & \text{— ложь} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$.

5. $\left(5-x^2\right)^{4x+7} \leqslant 1 \Leftrightarrow \left(5-x^2\right)^{4x+7} \leqslant \left(5-x^2\right)^0$.

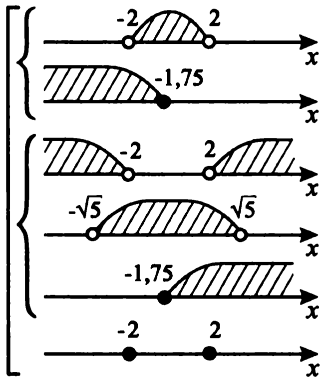
Поскольку

$$a^{f(x)} \leqslant 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a>1 \\ f(x)\leqslant 0\end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)\geqslant 0\end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ \forall x \in D(f),\end{cases}\end{array}\right.$$

имеем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 5-x^2>1 \\ 4x+7\leqslant 0\end{cases} \\ \begin{cases} 5-x^2<1 \\ 5-x^2>0 \\ 4x+7\geqslant 0\end{cases} \\ \begin{cases} 5-x^2=1 \\ \forall x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<2 \\ x>-2 \\ x\leqslant -1{,}75\end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2\end{array}\right. \\ -\sqrt{5}<x<\sqrt{5} \\ x\geqslant -1{,}75\end{cases} \\ x^2=4\end{array}\right.$$

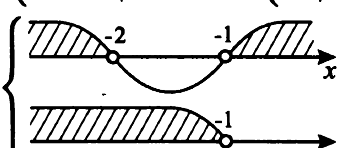


Ответ: $[-2;-1{,}75] \cup \left[2;\sqrt{5}\right)$.

6. $\log_2\left(\log_3\dfrac{x-1}{x+1}\right) < \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

$\log_2\left(\log_3\dfrac{x-1}{x+1}\right)+\log_2\left(\log_3\dfrac{x-1}{x+1}\right)<0;\ 2\log_2\left(\log_3\dfrac{x-1}{x+1}\right)<0;$

$$\begin{cases} \log_3\dfrac{x-1}{x+1}<1 \\ \log_3\dfrac{x-1}{x+1}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1}<3 \\ \dfrac{x-1}{x+1}>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+4}{x+1}>0 \\ \dfrac{2}{x+1}<0.\end{cases}$$



Ответ: $(-\infty;-2)$.

7. $\sqrt[x]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}-\sqrt[x]{\left(\frac{3}{2}\right)^3}-\sqrt[x]{\frac{2}{3}}+\sqrt[x]{\frac{3}{2}}=3.$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\right)^3-\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)^3-\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)=3;$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}-1\right)=3;$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right)=3;$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\left(\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)^2+2\right)=3.$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=t$. Тогда $t\left(t^2+2\right)=3$;

$t^3+2t-3=0$; $\quad f(t)=t^3+2t-3$; $\quad f(1)=0$.

Поделим $f(t)$ на $t-1$:

$$\begin{array}{r|l}
t^3 \qquad +2t-3 & t-1 \\ \cline{2-2}
-\underline{t^3-t^2} \qquad\qquad & t^2+t+3 \quad (\mathcal{D}<0) \\
t^2+2t-3 & \\
-\underline{t^2-\ t} \qquad & \\
3t-3 & \\
-\underline{3t-3} &
\end{array}$$

Итак, $(t-1)\left(t^2+t+3\right)=0$; $\quad t=1$;

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=1.$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=m\ \ (m>0)$,

тогда $m-\frac{1}{m}=1$; $\quad m^2-m-1=0$;

$$m_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\notin(0;\infty) \\ m=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\in(0;\infty); \end{array}\right.$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2};\quad \frac{1}{x}=\log_{\frac{2}{3}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $x=\log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)$.

8. Сравните $\log_3 5$ и $\log_{11} 15$.

$1<\log_3 5<2;\quad 1<\log_{11} 15<2.$

Разделим интервал $(1;2)$ на две части: $(1;1{,}5)$ и $(1{,}5;2)$.

Поскольку $1{,}5=\log_3 3^{\frac{3}{2}}=\log_3 3\sqrt{3}>\log_3 5$, $1<\log_3 5<1{,}5$.

Поскольку $1{,}5=\log_{11} 11^{\frac{3}{2}}=\log_{11} 11\sqrt{11}>\log_{11} 15$,

$1<\log_{11} 15<1{,}5$.

Разделим интервал $(1;1{,}5)$ на две части: $(1;\frac{5}{4})$ и $(\frac{5}{4};1{,}5)$.

Поскольку $\frac{5}{4}=\log_3 3^{\frac{5}{4}}=\log_3 3\sqrt[4]{3}<\log_3 5$ ($9\sqrt{3}<25$, так как $81\cdot 3<625$), $\log_3 5>\frac{5}{4}$.

Поскольку $\frac{5}{4}=\log_{11} 11^{\frac{5}{4}}=\log_{11} 11\sqrt[4]{11}>\log_{11} 15$

$(121\cdot\sqrt{11}>225;\quad \sqrt{11}>3)$,

$\log_{11} 15<\frac{5}{4}$.

Итак, $\log_3 5>\log_{11} 15$, что и требовалось выяснить.

Решение зачетной карточки 6

1. $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x \leqslant 2.$

$$\frac{1}{2}\log_2 \log_2 x + \log_2 \frac{1}{2}\log_2 x \leqslant 2;$$

$$\log_2 \sqrt{\log_2 x} + \log_2 \log_2 x^{\frac{1}{2}} \leqslant 2;$$

$$\log_2 \left(\sqrt{\log_2 x} \cdot \frac{1}{2}\log_2 x\right) \leqslant \log_2 4;$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\log_2 x)^{\frac{3}{2}} \leqslant 4 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_2 x)^{\frac{3}{2}} \leqslant 8 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leqslant 4 \\ \log_2 x > 0 \end{cases}$$

$1 < x \leqslant 2^4.$

Ответ: $(1; 16]$.

2. $4^{\lg x+1} - 6^{\lg x} - 3 \cdot 3^{\lg x^2} = 0.$

$4 \cdot 4^{\lg x} - 6^{\lg x} - 3 \cdot 3^{2\lg x} = 0.$

Разделим обе части уравнения на $3^{2\lg x}$:

$$4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2\lg x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} - 3 = 0.$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} = t$ $(t > 0)$, тогда $4t^2 - t - 3 = 0$;

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{8} = \frac{1 \pm 7}{8};$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{3}{4} \notin E(t); \end{array}\right.$$

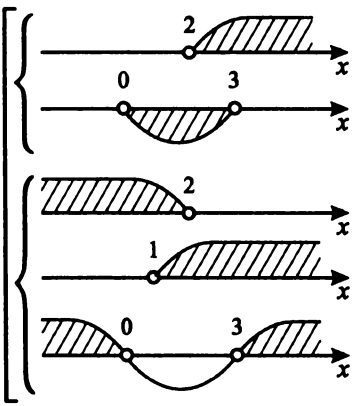
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} = 1; \quad \lg x = 0; \quad x = 1.$$

Ответ: 1.

3. $\log_{(x-1)}(x+1) > 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_{(x-1)}(x+1) > \log_{(x-1)}(x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1>1 \\ x+1>(x-1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1<1 \\ x-1>0 \\ x+1<(x-1)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2 \\ x^2-3x<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<2 \\ x>1 \\ x^2-3x>0. \end{cases} \end{array}\right.$$



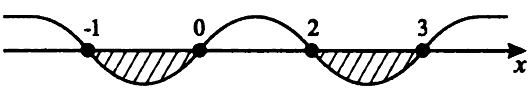
Ответ: $(2;3)$.

4. $x^2\cdot 2^{2x}+9\cdot(x+2)\cdot 2^x+8x^2 \leqslant (x+2)\cdot 2^{2x}+9x^2\cdot 2^x+8x+16.$

$x^2\left(2^{2x}-9\cdot 2^x+8\right)-x\left(2^{2x}-9\cdot 2^x+8\right)-2\left(2^{2x}-9\cdot 2^x+8\right)\leqslant 0;$

$\left(x^2-x-2\right)\left(2^{2x}-9\cdot 2^x+8\right)\leqslant 0;$

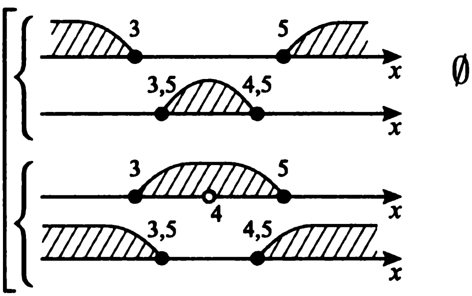
$(x-2)(x+1)(2^x-8)(2^x-1)\leqslant 0.$



Ответ: $[-1;0]\cup[2;3]$.

5. $|x-4|^{(2x-9)(2x-7)} \leqslant 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x-4| \geqslant 1 \\ (2x-9)(2x-7) \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} |x-4| \leqslant 1 \\ (2x-9)(2x-7) \geqslant 0 \\ |x-4| > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 5 \\ x \leqslant 3 \end{array}\right. \\ (x-4{,}5)(x-3{,}5) \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 5 \\ x \geqslant 3 \\ x \neq 4 \\ (x-4{,}5)(x-3{,}5) \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $[3; 3{,}5] \cup [4{,}5; 5]$.

6. $\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x +$

$$+\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x = 2^{x+1};$$

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}}{4}}\right)^x +$$

$$+\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}}{4}}\right)^x = 2;$$

Пусть

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}}{4}}\right)^x = t \ \ (t > 0).$$

Поскольку

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}}{4}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}}{4}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x^2-8x+7-x^2+8x+9}{16}}=1,$$

имеем $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}}{4}}\right)^x=\frac{1}{t};$

$t+\frac{1}{t}=2; \quad (t-1)^2=0.$

Следовательно, $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}}{4}}\right)^x=1;$

$\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}=4;$

$\sqrt{x^2-8x+7}=4-\sqrt{x^2-8x-9};$

$x^2-8x+7=16-8\sqrt{x^2-8x-9}+x^2-8x-9;$

$\sqrt{x^2-8x-9}=0; \quad \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=-1. \end{array}\right.$

Проверкой убеждаемся, что оба корня подходят.

Ответ: $\{-1;9\}$.

7. $\begin{cases} 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y}+7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}-6=0 \\ \lg(3x-y)+\lg(y+x)-4\lg 2=0. \end{cases}$

Область определения системы $D(\text{C})$: $\begin{cases} 3x-y>0 \\ y+x>0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y}+7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}-6=0 \\ \lg((3x-y)(x+y))=\lg 16. \end{cases}$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}=t\ \ (t>0)$. Тогда $3t^2+7t-6=0;$

$t_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+72}}{6}=\frac{-7\pm 11}{6}; \quad \left[\begin{array}{l} t=-3\notin(0;\infty) \\ t=\frac{2}{3}; \end{array}\right.$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}=\frac{2}{3};\quad 2x-y=2;\quad \begin{cases}2x-y=2\\(3x-y)(y+x)=16\end{cases};$$

$$\begin{cases}y=2x-2\\(3x-2x+2)(x+2x-2)=16;\end{cases}\quad \begin{cases}y=2x-2\\3x^2+4x-20=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=2x-2\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-\dfrac{10}{3}\end{array}\right.\end{cases}\quad (2;2)\in D(\text{C}).$$

Ответ: $(2;2)$.

8. $\sqrt{x^2-7x+10}+9\log_4\frac{x}{8}\geqslant 2x+\sqrt{14x-20-2x^2}-13.$

Пример достаточно странный. Выясним на всякий случай область определения неравенства $D(\text{H})$:

$$\begin{cases}x^2-7x+10\geqslant 0\\\dfrac{x}{8}>0\\14x-20-2x^2\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-5)(x-2)\geqslant 0\\x>0\\-2(x-5)(x-2)\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=5\end{array}\right.$$

Вот это да — только два значения! Проверим.

Пусть $x=2$.

$$\sqrt{(2-5)(2-2)}+9\log_4\frac{1}{4}\geqslant 4+\sqrt{-2(2-2)(5-2)}-13;$$

$-9\geqslant -9$, значит, $x=2$ — корень.

Пусть $x=5$.

$$\sqrt{(5-2)(5-5)}+9\log_4\frac{5}{8}\geqslant 10+\sqrt{-2(5-5)(5-2)}-13;$$

$$9\log_4\frac{5}{8}\geqslant -3;\quad 9\cdot\left(\log_4 5-\frac{3}{2}\right)\geqslant -3;\quad \log_4 5-\frac{3}{2}\geqslant -\frac{1}{3};$$

$$\log_4 5\geqslant 1\frac{1}{6};\quad \log_4 5\geqslant \log_4 4^{\frac{7}{6}};\quad 5\geqslant 4\sqrt[6]{4};\quad 125\geqslant 64\sqrt{4};$$

$125\geqslant 128$ — ложь.

Ответ: $x=2$.

Решение зачетной карточки 7

1. $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right) \geqslant 1 \Leftrightarrow$

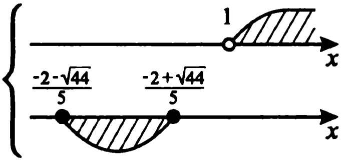
$$\Leftrightarrow \log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right) \geqslant \log_{|x|}|x| \Leftrightarrow$$

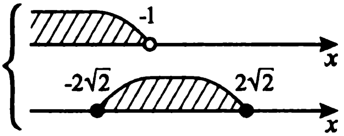
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x|>1 \\ \sqrt{9-x^2}-x-1 \geqslant |x| \end{cases} \\ \begin{cases} 0<|x|<1 \\ \sqrt{9-x^2} > x+1 \\ \sqrt{9-x^2}-x-1 \leqslant |x| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ \sqrt{9-x^2} \geqslant 2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1 \\ \sqrt{9-x^2} \geqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ \sqrt{9-x^2} > x+1 \\ \sqrt{9-x^2} \leqslant 2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} -1<x<0 \\ \sqrt{9-x^2} > x+1 \\ \sqrt{9-x^2} \leqslant 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

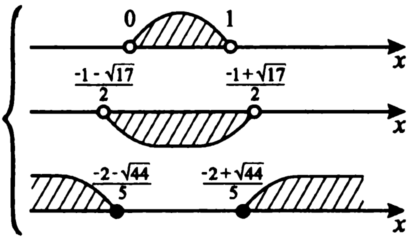
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ 9-x^2 \geqslant 4x^2+4x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1 \\ 9-x^2 \geqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ 9-x^2 > x^2+2x+1 \\ 9-x^2 \leqslant 4x^2+4x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} -1<x<0 \\ 9-x^2 > x^2+2x+1 \\ 9-x^2 \leqslant 1 \\ 9-x^2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x>1 \\ 5x^2+4x-8 \leqslant 0 \end{cases} & \text{а)} \\ \begin{cases} x<-1 \\ x^2 \leqslant 8 \end{cases} & \text{б)} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ x^2+x-4<0 \\ 5x^2+4x-8 \geqslant 0 \end{cases} & \text{в)} \\ \begin{cases} -1<x<0 \\ x^2+x-4<0 \\ x^2 \geqslant 8 \\ x^2 \leqslant 9 \end{cases} & \text{г)} \end{array}\right.$$

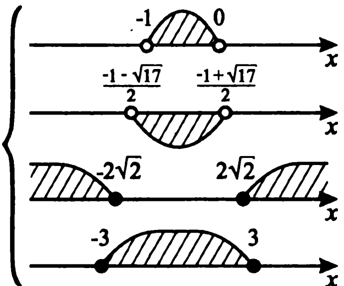
$$5x^2+4x-8=0; \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{44}}{5}.$$

$$x^2+x-4=0; \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

а) 

б) 

в) 

г) 

Ответ: $\left[-2\sqrt{2};-1\right)\cup\left[\dfrac{-2+\sqrt{44}}{5};1\right)$.

2. $\log_{20}80-\log_{80}640=(1+\log_{20}4)-(1+\log_{80}8)=$

$$=\log_{20}4-\log_{80}8=2\log_{20}2-3\log_{80}2=$$

$$=\frac{2}{\log_2 20}-\frac{3}{\log_2 80}=\frac{2}{\log_2 20}-\frac{3}{2+\log_2 20}=$$

$$=\frac{4+2\log_2 20-3\log_2 20}{\log_2 20(2+\log_2 20)}=\frac{4-\log_2 20}{\log_2 20(2+\log_2 20)}=$$

$$=\frac{\log_2 16-\log_2 20}{\log_2 20(2+\log_2 20)}<0,$$

так как $\log_2 16<\log_2 20,\ \log_2 20(2+\log_2 20)>0.$

Итак, $\log_{80}640>\log_{20}80$, что и требовалось выяснить.

3. $\log_{\frac{1}{7}} \log_7 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < \log_7 \log_{\frac{1}{7}} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\log_7 \log_7 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < \log_7 \log_7 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\Leftrightarrow 2\log_7 \log_7 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_7 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > 1 \\ \log_7 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_7 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > \log_7 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x > 7 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > 7-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7-x \geqslant 0 \\ x^2+1 > (7-x)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 7-x < 0 \\ x^2+1 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 7 \\ x^2+1 > 49-14x+x^2 \end{cases} \\ x > 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 7 \\ 14x > 48 \end{cases} \\ x > 7. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\frac{3}{7} < x \leqslant 7 \\ x > 7 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(3\frac{3}{7}; \infty\right)$.

4. $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

Пусть $64^x = t$, $t > 0$; $64^y = z$, $z > 0$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} t^2 + z^2 = 12 \\ t \cdot z = 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+z)^2 - 2t \cdot z = 12 \\ t \cdot z = 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t+z)^2 = 12 + 8\sqrt{2} \\ t \cdot z = 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+z)^2 = \left[2\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^2 \\ t \cdot z = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

а) $\begin{cases} t + z = 2\left(1 + \sqrt{2}\right) \\ t \cdot z = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

По теореме, обратной теореме Виета, t и z являются корнями уравнения $m^2 - 2\left(1 + \sqrt{2}\right)m + 4\sqrt{2} = 0$, т. е. либо $t = 2$, $z = 2\sqrt{2}$, либо $t = 2\sqrt{2}$, $z = 2$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 64^x = 2 \\ 64^y = 2\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 64^x = 2\sqrt{2} \\ 64^y = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{1}{6} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{1}{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

б) $\begin{cases} t + z = -2\left(1 + \sqrt{2}\right) \\ t \cdot z = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

t и z' являются корнями уравнения

$k^2 + 2\left(1 + \sqrt{2}\right)k + 4\sqrt{2} = 0$,

т. е. либо $t = -2$, $z = -2\sqrt{2}$, либо $t = -2\sqrt{2}$, $z = -2$, но $t, z > 0$, поэтому в данном случае решений нет.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{4}\right)$; $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{6}\right)$.

5. $$\frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \frac{\log_5 150}{\log_6 5} = \frac{\log_5 30}{1/\log_5 30} - \frac{\log_5 5 + \log_5 30}{1/\log_5 6} =$$

$$= \log_5^2 30 - (1 + \log_5 30)\log_5 6 =$$

$$= \log_5^2 30 - \log_5 30 \cdot \log_5 6 - \log_5 6 =$$

$$= \log_5 30\left(\log_5 30 - \log_5 6\right) - \log_5 6 =$$

$$= \log_5 30 \log_5 5 - \log_5 6 =$$

$$= \log_5 30 - \log_5 6 = \log_5 5 = 1.$$

6. $\log_{1-2x}\left(6x^2-5x+1\right)=\log_{1-3x}\left(4x^2-4x+1\right)+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{1-2x}(2x-1)(3x-1)=\log_{1-3x}(2x-1)^2+2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1-2x}(1-2x)+\log_{1-2x}(1-3x)=2\log_{1-3x}(1-2x)+2 \\ 1-2x>0; \\ 1-3x>0; \\ 1-2x\neq 1; \\ 1-3x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1-2x}(1-3x)=\dfrac{2}{\log_{1-2x}(1-3x)}+1 \\ x<\dfrac{1}{2}; \\ x<\dfrac{1}{3}; \\ x\neq 0 \end{cases}$$

Пусть $\log_{1-2x}(1-3x)=t$, тогда

$$\begin{cases} t^2-t-2=0 \\ x<\dfrac{1}{3} \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-1 \end{array}\right. \\ x<\dfrac{1}{3} \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_{1-2x}(1-3x)=2 \\ \log_{1-2x}(1-3x)=-1 \end{array}\right. \\ x<\dfrac{1}{3} \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 1-3x=(1-2x)^2 \\ 1-3x=\dfrac{1}{1-2x} \end{array}\right. \\ x<\dfrac{1}{3} \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4x^2-x=0 \\ 6x^2-5x+1=1 \end{array}\right. \\ x<\dfrac{1}{3} \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{1}{4} \\ x=0 \\ x=\frac{5}{6} \end{array}\right. \\ x<\frac{1}{3} \\ x\neq 0 \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

7. $\log_{2-5x} 3 + \dfrac{1}{\log_2(2-5x)} \leqslant \dfrac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{2-5x} 3 + \log_{2-5x} 2 \leqslant \dfrac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{2-5x} 6 \leqslant \dfrac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)} \Leftrightarrow$

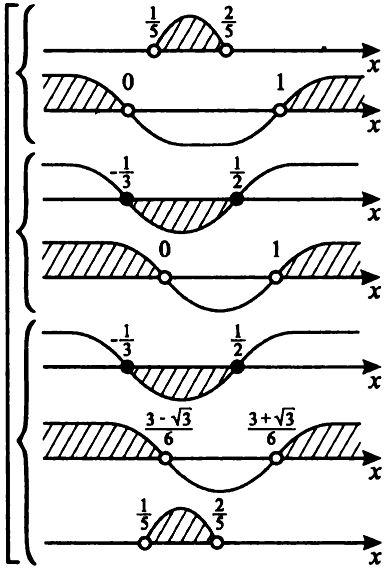
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_6(2-5x)} \leqslant \dfrac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}.$

Пусть $\log_6(2-5x) = a$, $\log_6\left(6x^2-6x+1\right) = b$. Тогда $\dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow \dfrac{b-a}{ab} \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \geqslant a \\ a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \quad \emptyset \\ \begin{cases} b \geqslant a \\ a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b \leqslant a \\ a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b \leqslant a \\ a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b \leqslant a \\ a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b \leqslant a \\ a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_6(2-5x) < 0 \\ \log_6\left(6x^2-6x+1\right) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_6\left(6x^2-6x+1\right) \leqslant \log_6(2-5x) \\ \log_6(2-5x) > 0 \\ \log_6\left(6x^2-6x+1\right) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_6\left(6x^2-6x+1\right) \leqslant \log_6(2-5x) \\ \log_6(2-5x) < 0 \\ \log_6\left(6x^2-6x+1\right) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 2-5x < 1 \\ 6x^2-6x+1 > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 6x^2-6x+1 \leqslant 2-5x \\ 6x^2-6x+1 > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 6x^2-6x+1 \leqslant 2-5x \\ 0 < 6x^2-6x+1 < 1 \\ 0 < 2-5x < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x < \frac{2}{5} \\ 6x(x-1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 6x^2 - x - 1 \leqslant 0 \\ 6x^2 - 6x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 6x^2 - x - 1 \leqslant 0 \\ 6x^2 - 6x + 1 > 0 \\ x > \frac{1}{5} \\ x < \frac{2}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$



$$6x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

$$\frac{1}{5} - \frac{3-\sqrt{3}}{6} = \frac{6 - 15 + 5\sqrt{3}}{30} = \frac{5\sqrt{3} - 9}{30} < 0,$$

так как $25 \cdot 3 - 81 < 0$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{5}; \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.

8. $(x^2-4)^{\frac{1}{3}\log_{x^2-4}\left(\log_3^3(5x-9)\right)} = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 4 \neq 1 \\ \log_3(5x-9) > 0 \\ \left(\log_3^3(5x-9)\right)^{\frac{1}{3}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 4 \neq 1 \\ 5x - 9 > 1 \\ \log_3(5x-9) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 4 \neq 1 \\ x > 2 \\ 5x - 9 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 \neq 5 \\ x > 2 \\ x = 3{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3{,}6.$$

Ответ: 3,6.

Содержание

Учебное издание

СЕРИЯ «ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ УЧИТЬСЯ»

Редактор серии *Заслуженный Учитель Российской Федерации Б. Г. Зив*

Шахмейстер Александр Хаймович

ЛОГАРИФМЫ

Редактор *Е. В. Дольник*
Художник *Ю. Н. Куликов*
Компьютерная верстка *С. С. Афонин*
Корректор *Е. Г. Никитина, И. Б. Смирнов*

ООО «ЧеРо-на-Неве» ЛП № 00096 от 5 марта 1999 г. Подписано к печати 10.03.2005 г. Формат 60х90/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Объем 13 п.л. Тираж 5000. Заказ № 707

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЧЕРО-НА-НЕВЕ»
192239, С.-Петербург, Альпийский пер., 9, корп. 3, кв. 34
Тел./факс: (812) 388-5881. E-mail: info@atlas.spb.su
В Москве: тел.: (095) 939-3493; 939-4190. E-mail: chero@dnttm.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
103009, Москва, улица Б. Никитская, 5/7
Тел./факс: (095) 939-3323; 203-6671. E-mail:kd_mgu@netbox.ru

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ
121002, Москва, Б. Власьевский пер., 11
Тел./факс: (095) 241-0500; 241-7285. E-mail: biblio@mccme.ru

ГП Псковской области «Великолукская городская типография»
Комитета по средствам массовой информации
182100, Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12
Тел./факс: (811-53) 3-62-95 E-mail: VTL@MART.RU

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики.

По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам.

Естественная логика построения материала "от простого к сложному" позволит учителю использовать эти книги для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив.

Серия ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ УЧИТЬСЯ

А. Х. Шахмейстер. **Дроби.**
А. Х. Шахмейстер. **Корни.**
А. Х. Шахмейстер. **Уравнения.**
А. Х. Шахмейстер. **Дробно-рациональные неравенства.**
А. Х. Шахмейстер. **Системы уравнений.**
А. Х. Шахмейстер. **Иррациональные уравнения и неравенства.**
А. Х. Шахмейстер. **Множества. Функции. Последовательности.**
А. Х. Шахмейстер. **Логарифмы.**
А. Х. Шахмейстер. **Тригонометрия.**
А. Х. Шахмейстер. **Построение графиков функций элементарными методами.**
А. Х. Шахмейстер. **Уравнения и неравенства с параметрами.**
А. Х. Шахмейстер. **Задачи с параметрами в ЕГЭ.**
А. Х. Шахмейстер. **Введение в анализ.**
Б. Г. Зив. **Алгебраический тренинг в задачах по мат. анализу.**

ISBN 5-88711-209-
9 785887 112091