

Lee 24900

Acest manual de ANALIZĂ MATEMATICĂ  
corespunde noulor programe de  
învățământ și ține cont de tradiția  
instalată la noi în predarea matematicii  
în cele două lumi adiacente  
matematicii - calculatorul și aplicațiile  
ingineresti.

Autorii sunt profesori asociați la  
Universitatea POLITEHNICĂ din Cluj, la  
facultățile de Automatică, Control  
și Electronica. Teodor Ciobașă are  
experiența a peste 20 de ani ca  
specialist în analiza funcțiilor.

ISBN 973-95933-2-1

Paul Flondor

Octavian Stănășilă

# LECȚII DE ANALIZĂ MATEMATICĂ



și exerciții  
rezolvate

© 1992, 1996 - Editura ALL

LECTII DE MATEMATICĂ ȘI EXERCITII REZOLVATE  
Paul Flondor, Octavian Stănășilă

ISBN 973-95933-2-1

Toate drepturile rezervate Editurii ALL.

Nici o parte din acest volum nu poate fi copiată  
fără permisiunea scrisă a Editurii ALL.

Drepturile de distribuție în străinătate  
aparțin în exclusivitate editurii.

Copyright © 1992, 1996 by B.I.C. ALL srl.  
All rights reserved.

The distribution of this book outside Romania, without  
the written permission of ALL srl, is strictly prohibited.

Editura ALL

Departamentul Distribuție

București  
Carol Knappe 20  
☎ 312.79.90, 223.43.35 Fax: 312.77.95  
Str. Hagii Ghiță, nr. 57, Sect. 1  
78208 - București  
☎ 665.37.45, 666.38.00, 223.32.44



Coperta:

Tehnoredactare computerizată:

Stelian Stanciu  
Mircea Moldovan  
Mariana Ghineraru

PRINTED IN ROMÂNIA

PAUL FLONDOR

OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ

## LECTII DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

ȘI EXERCITII REZOLVATE

EDIȚIA A II-A

**ALL**

Colecția *Matematică – Fizică – Automatică*  
a editurii **ALL** cuprinde:

1. **Analiză matematică** – culegere de probleme vol. I și II  
*N. Donciu, D. Flondor,*
2. **Probleme recapitulative de fizică**  
*Mihail Penescu,*
3. **Stabilizarea sistemelor liniare**  
*V. Drăgan, A. Halanay,*
4. **Algebră liniară. Geometrie analitică, diferențială. Ecuații diferențiale**  
*Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache*
5. **Matematici speciale. Teorie, exemple, aplicații**  
*V. Brînzănescu, O. Stănășilă,*
6. **Teoria sistemelor. Sinteza robustă. Metode numerice de calcul**  
*Vlad Ionescu, A. Varga,*
7. **Fizică** – vol. I și II  
*Cornelia Moțoc,*
8. **Algebră liniară. Geometrie analitică și diferențială**  
*C. Radu,*
9. **Simularea Monte Carlo a transportului radiațiilor**  
*O. Sima,*
10. **Fizică nucleară. Culegere de probleme**  
*Editori: Reveica Ion-Mihai, O. G. Dulu, M. Penescu,*

## CUVÎNT ÎNAINTE

Analiza matematică este o "simfonie a infinitului", așa cum spunea marele matematician DAVID HILBERT; ea înseamnă **analiza** procesului de trecere la limită, folosit în definirea și studiul derivatelor, integralelor și multor altor concepte fundamentale, care permit descrierea matematică a mișcării, creșterii, măsurii, înseamnă o victorie a spiritului asupra materiei.

Ca disciplină de învățămînt și ca obiect inepuizabil de cercetare, Analiza matematică este un sumum de rezultate de mare profunzime, obținute prin căutările științifice ale multor generații, începînd cu geniul lui Arhimede, căruia i se datorează multe raționamente specifice analizei într-o formă primitivă (în lipsa definirii noțiunilor de număr real și funcție reală). Un moment decisiv este cel marcat de G. W. LEIBNIZ, filosof și analist riguros și I. NEWTON, interesat în probleme de fizică, două temperamente științifice distincte și deopotrivă de necesare, reprezentînd forța supremă a raționamentului și intuiției. Din acel moment, Fizica a devenit știință. Istoria și logica Analizei matematice sunt legate de numele altor mari spirite, precum EULER, GAUSS, CAUCHY, RIEMANN, POINCARÉ, LEBESGUE, HILBERT, GROTHENDIECK, GRAUERT.

Înțelegerea Analizei matematice, la unul din nivelele posibile de rațiune suficientă, este și un **fapt de cultură și educație**, pentru că disciplinează gîndirea, cenzurează intuiția prin raționament, stimulează descoperirea și contribuie la modelarea multor fenomene fizice, chimice, biologice și tehnico-economice. În ultimele decenii, Analiza matematică este pe de o parte continuată în domenii noi, de sine stătătoare, ca Analiza funcțională, Geometria diferențială, Fizica matematică și pe de altă parte, este dizolvată în metode numerice prin "traducerea" teoremelor în programe de calcul.

În țara noastră, învățămîntul și cercetarea științifică în domeniul Analizei s-au realizat la un nivel înalt, grație unei pleiade de profesori care au depus și un efort propriu de cercetare și amintim numele lui D. EMMANUEL, D. POMPEIU, S. STOILOW, M. NICOLESCU.

Această carte cuprinde patrusprezece lecții asupra subiectelor standard ale cursului adresat studenților din anul I al facultăților tehnice și economice. Pe baza experienței autorilor la facultățile de Automatică-calculatoare și Electronică, am căutat să netezim dificultățile trecerii de la liceu la facultate, utilizând un limbaj nuanțat. Spațiul tipografic mai restrâns, dar și unele licențe didactice, ne-au oprit să dăm demonstrații complete chiar tuturor rezultatelor evocate, dezamăgind poate pe cei care trebuie să apeleze la manuale mai ample. Studiul individual și învățarea activă la matematică, în propriul interes și dincolo de grija examenelor, trebuie însoțite de rezolvarea de exerciții; de aceea am adăugat un număr de cîte zece exerciții la fiecare lecție, cu indicații de rezolvare, și în acest mod, cartea este implicit și o **culegere de probleme**. În plus, nu lipsesc comentarii și date istorice privind evoluția unor noțiuni și idei, iar la sfîrșit am adăugat un index alfabetic, simplificînd găsirea locului în carte al unor concepte sau rezultate care vă pot interesa cu precădere.

Autorii țin să mulțumească redactorului cărții pentru munca sa migăloasă și tinerei conduceri a Editurii ALL, care s-a încumetat la un act curajos și înalt educativ, tipărind o lucrare de matematică într-o perioadă dominată, atît de științele și practicile "îmbogățirii spontanee", cît mai ales de griji, sărăcie și profit nesigur.

Autorii,

București, dec. '92

### NOTĂ asupra ediției a II-a

Manualul de față corespunde programelor analitice actuale pentru un curs de două semestre de Analiză Matematică; în raport cu prima ediție s-au adus unele corecții și s-a eliminat prezentarea prea frugală a fractalilor.

Autorii

iulie '95

## CUPRINS

|                      |   |
|----------------------|---|
| Cuvînt înainte ..... | 5 |
| Cuprins .....        | 7 |

## PARTEA I. CALCUL DIFERENȚIAL

### I. NUMERE, ȘIRURI DE NUMERE

|                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Numere reale .....                                              | 13 |
| 2. Numere complexe .....                                           | 16 |
| 3. Șiruri de numere reale .....                                    | 18 |
| 4. Limite inferioare și superioare de șiruri în $\mathbb{R}$ ..... | 24 |
| 5. Șiruri de numere complexe .....                                 | 26 |
| 6. Funcții reale și funcții complexe .....                         | 28 |
| 7. 10 exerciții .....                                              | 29 |
| Anexă : Numerele reale și măsurarea mărimilor .....                | 33 |

### II. SERII NUMERICE

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| 1. Convergență, sumă .....                           | 35 |
| 2. Serii de numere reale și pozitive .....           | 41 |
| 3. Criteriul raportului și criteriul rădăcinii ..... | 44 |
| 4. Proprietăți speciale ale seriilor numerice .....  | 47 |
| 5. Calculul aproximativ al sumelor de serii .....    | 52 |
| 6. 10 exerciții .....                                | 54 |
| Anexă : Semnale discrete .....                       | 57 |

### III. SPAȚII METRICE, APLICAȚII CONTINUE

|                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Distanță, convergență. Principiul contracției .....             | 60 |
| 2. Topologia unui spațiu metric .....                              | 67 |
| 3. Aplicații continue .....                                        | 71 |
| 4. Funcții continue pe mulțimi compacte și pe mulțimi conexe ..... | 75 |
| 5. 10 exerciții .....                                              | 79 |

## IV. SPAȚII VECTORIALE NORMATE, SERII DE FUNCȚII

|                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Normă, spațiu Banach                                                       | 83  |
| 2. Șiruri și serii de funcții                                                 | 87  |
| 3. Aplicații liniare și continue între spații vectoriale normate              | 93  |
| 4. Derivarea funcțiilor cu valori vectoriale. Formula lui Taylor și aplicații | 97  |
| 5. Drumuri parametrizate                                                      | 105 |
| 6. 10 exerciții                                                               | 109 |

## V. SERII DE PUTERI, FUNCȚII ELEMENTARE

|                                                     |     |
|-----------------------------------------------------|-----|
| 1. Proprietățile de bază ale seriilor de puteri     | 113 |
| 2. Seria Taylor a unei funcții indefinit derivabile | 122 |
| 3. Funcții elementare                               | 125 |
| 4. Aproximarea și interpolarea funcțiilor           | 131 |
| 5. 10 exerciții                                     | 136 |

## VI. DERIVATE PARȚIALE, EXTREME LIBERE

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Derivata după o direcție, derivate parțiale, matrice jacobiană | 139 |
| 2. Funcții diferențiabile, derivate de ordin I                    | 143 |
| 3. Derivate parțiale de ordin superior                            | 151 |
| 4. Extreme libere                                                 | 158 |
| 5. Aplicații                                                      | 162 |
| 6. 10 exerciții                                                   | 165 |

## VII. FUNCȚII IMPLICITE, VARIETĂȚI DIFERENȚIABILE

|                                             |     |
|---------------------------------------------|-----|
| 1. Funcții implicite                        | 169 |
| 2. Teorema rangului. Dependență funcțională | 175 |
| 3. Varietăți diferențiabile                 | 180 |
| 4. Spațiu tangent, câmp de vectori          | 181 |
| 5. Extreme cu legături                      | 185 |
| 6. 10 exerciții                             | 187 |

## PARTEA A II-A. CALCUL INTEGRAL

## VIII. INTEGRALA RIEMANN

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| 1. Definiția și proprietățile integralei Riemann | 191 |
| 2. Calculul integralelor Riemann                 | 200 |
| 3. Integrale improprii                           | 201 |
| 4. Integrala Riemann - Stieltjes                 | 208 |
| 5. 10 exerciții                                  | 209 |

## IX. INTEGRALE CU PARAMETRU (FUNCȚII DEFINITE PRIN INTEGRALE)

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| 1. Integrale Riemann cu parametru   | 214 |
| 2. Integrale improprii cu parametru | 218 |
| 3. Funcțiile $B, \Gamma$            | 223 |
| 4. 10 exerciții                     | 225 |

## X. MĂSURĂ ȘI INTEGRALĂ

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 1. Măsurabilitatea | 229 |
| 2. Măsura          | 235 |
| 3. Integrala       | 237 |
| 4. 10 exerciții    | 244 |

XI. MĂSURA LEBESGUE ÎN  $\mathbb{R}^k$ , SPAȚII  $L^p$ 

|                                                |     |
|------------------------------------------------|-----|
| 1. Măsura Lebesgue în $\mathbb{R}^k$           | 247 |
| 2. Teorema lui Fubini, schimbarea de variabilă | 256 |
| 3. Spații $L^p$                                | 259 |
| 4. 10 exerciții                                | 263 |

## XII. INTEGRALE CURBILINII, INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ

|                                         |     |
|-----------------------------------------|-----|
| 1. Integrarea 1 - formelor diferențiale | 269 |
| 2. Integrarea 2 - formelor diferențiale | 278 |
| 3. 10 exerciții                         | 285 |

## XIII. FORMULE INTEGRALE, ELEMENTE DE TEORIA CÎMPULUI

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| 1. Formula Green - Riemann      | 289 |
| 2. Formula Gauss - Ostrogradski | 302 |
| 3. Formula lui Stokes           | 305 |
| 4. Elemente de teoria cîmpului  | 308 |
| 5. 10 exerciții                 | 312 |

## XIV. SPAȚII HILBERT, SERII FOURIER

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| 1. Spații Hilbert               | 315 |
| 2. Convergența seriilor Fourier | 322 |
| 3. 10 exerciții                 | 328 |

Subiecte date la proba scrisă a examenului de "Analiză matematică" .. 331

Bibliografie .. 333

Index alfabetic .. 334

**Partea I**

**CALCUL DIFERENȚIAL**

## LECȚIA I

# NUMERE, ȘIRURI DE NUMERE

### INTRODUCERE

În această lecție vom prezenta câteva noțiuni fundamentale pentru matematică și pentru diversele descrieri matematice ale realității fizice, tehnice, economice, legate de numerele reale și complexe ca și de șirurile numerice. Nu vom defini noțiuni primare ca: element, mulțime, colecție, egalitate, proprietate etc. și vom folosi un limbaj mai direct, apropiat de expunerea orală. Presupunem cunoscută semnificația simbolurilor  $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subset$ ,  $\varsubsetneq$ ,  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\forall$ ,  $\exists$ ,  $\mathbb{C}$ .

Înțelegerea corectă a noțiunii de număr real este importantă nu numai pentru matematician, iar denumirea atât de fericită primită dovedește rolul lui în determinările cantitative efectuate în cursul cercetării realității.

Prin mulțime de numere se subînțelege o mulțime ale cărei elemente se pot afla în anumite "relații" ( de exemplu, relația de inegalitate sau cea de divizibilitate); în plus, cu acele elemente se pot face anumite "operații" ( de exemplu, adunări, scăderi, înmulțiri etc.). Lărgirea noțiunii de număr, prin incluziunile  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , reflectă în fond progresul cunoașterii științifice.

### 1. Numere reale

În elaborarea conceptului de număr real, intuiția algebrico-geometrică și motivația fizică s-au împletit permanent într-un efort de înțelegere și formalizare desăvârșit de matematicienii germani G. CANTOR (1845-1918) și R. DEDEKIND (1831-1916).

Sunt necesare unele pregătiri, legate de conceptul matematic de ordine. Există mai multe proprietăți relativ la perechi de elemente. De exemplu, faptul că 12 este divizibil cu 4 nu este o proprietate a lui 12 sau a lui 4 separat, ci a perechii (12,4); la fel și faptul că  $4 < 12$ . Dacă  $M$  este o mulțime, se numește

**relație binară pe  $M$**  orice colecție  $\mathcal{R}$  de perechi de elemente ale lui  $M$ , adică  $\mathcal{R} \subset M \times M$ . Pentru  $x, y \in M$ , în loc de  $(x, y) \in \mathcal{R}$  se scrie  $x \mathcal{R} y$  și se spune că " $x$  este în relația  $\mathcal{R}$  cu  $y$ ". O relație binară  $\mathcal{R}$  pe mulțimea  $M$  se zice **relație de ordine parțială** dacă este **reflexivă** ( $\forall x \in M, x \mathcal{R} x$ ), **tranzitivă** ( $x \mathcal{R} y, y \mathcal{R} z$  implică  $x \mathcal{R} z$ ) și **antisimetrică** ( $x \mathcal{R} y$  și  $y \mathcal{R} x$  implică  $x = y$ ); dacă în plus pentru orice  $x, y \in M$  avem fie  $x \mathcal{R} y$  fie  $y \mathcal{R} x$ , se spune că avem o relație de **ordine totală**.

O mulțime  $M$  pe care este fixată o relație de ordine parțială, notată  $\leq$ , se numește **mulțime ordonată**. Dacă  $P \subset M$  este o submulțime nevidă, atunci prin **majorant** al lui  $P$  se înțelege un element  $x \in M$  astfel încît  $\forall a \in P$ , avem  $a \leq x$ . Dacă  $P$  admite cel puțin un majorant, ea se zice **majorată**; dacă în plus,  $P$  admite un majorant care aparține lui  $P$ , acesta se numește **cel mai mare element** al lui  $P$ , notat  $\max P$  (el este unic, conform proprietății de antisimetrie). În mod similar se definesc, dacă există, **minoranții** și **cel mai mic element**  $\min P$ .

Dacă  $(M, \leq)$  este o mulțime ordonată și  $P \subset M$  este o mulțime nevidă, se spune că  $P$  **admite margine superioară** dacă  $P$  are majoranți și mulțimea acestora are un cel mai mic element, notat cu  $\sup P$ . În mod similar,  $P$  **admite margine inferioară** dacă are minoranți și mulțimea lor are un cel mai mare element, notat  $\inf P$ .

**Definiția I. 1.** Se numește **mulțime de numere reale** o mulțime  $R$  care satisface următoarele proprietăți:

I.  $R$  este un corp comutativ;

II. Pe  $R$  există o relație de ordine totală  $\leq$ , compatibilă cu operațiile algebrice;

III. Orice submulțime nevidă și majorată a lui  $R$  are o margine superioară (adică un cel mai mic majorant).

**Comentariu.** Proprietatea I. sintetizează disponibilitățile de calcul în  $R$ . Astfel,  $(R, +, 0)$  și  $(R \setminus \{0\}, \cdot, 1)$  sunt grupuri abeliene (N. ABEL, 1802-1829) și în plus,

$x(y+z) = xy + xz$ , pentru orice  $z, y, x \in R$ . Se definesc  $x - y = x + (-y)$  și dacă  $y \neq 0$ ,  $x/y = xy^{-1}$ . Așadar, în  $R$  se pot efectua adunări, scăderi, înmulțiri și împărțiri cu elemente nenule, cu regulile uzuale de calcul învățate în gimnaziu și liceu. Proprietatea II sintetizează faptul că relația  $\leq$  este reflexivă, tranzitivă și antisimetrică; apoi, pentru orice  $x, y \in R$  avem fie  $x \leq y$ , fie  $y \leq x$ . În plus, dacă  $x \leq y$ , atunci  $\forall z \in R$ ,  $x + z \leq y + z$ , iar dacă  $0 \leq x, 0 \leq y$ , atunci  $0 \leq xy$ . Din proprietățile I, II rezultă binecunoscutele reguli de calcul cu inegalități. În fine, proprietatea III, numită și "**axioma marginii superioare**", constituie punctul de plecare în stabilirea rezultatelor de bază ale Analizei matematice, care totodată o separă de Algebră. Dacă  $P \subset R$  are marginea superioară  $s$ , nu rezultă neapărat că  $s \in P$ ; elementul  $s$  este caracterizat prin aceea că  $\forall x \in P$ ,  $x \leq s$  ( $s$  fiind un majorant al lui  $P$ ) și  $\forall \varepsilon > 0$ , există  $y \in P$  astfel încît  $y > s - \varepsilon$  (căci  $s$  este cel mai mic majorant și ca atare,  $s - \varepsilon$  nu este un majorant al lui  $P$ ).

Există mulțimi satisfăcând proprietățile I, II, III; de exemplu, mulțimea fracțiilor zecimale finite și infinite sau mulțimea punctelor oricărei axe. Se poate demonstra că orice două astfel de mulțimi reprezintă structuri izomorfe, într-un sens ușor de explicat.

În cele ce urmează, vom fixa o mulțime cu proprietățile I, II, III, notată cu  $\mathbb{R}$ , ale cărei elemente se vor numi **numere reale**.

O submulțime  $I \subset \mathbb{R}$  se numește **inductivă** dacă  $0 \in I$  și în plus,  $\forall x \in I \Rightarrow x + 1 \in I$ . De exemplu, intervalul  $[0, \infty)$  este o mulțime inductivă. Cea mai mică submulțime inductivă (relativ la relația de incluziune) este  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 = 1 + 1, \dots, n, n + 1, \dots\}$ , adică **mulțimea numerelor naturale**. Principiul **inducției matematice** se poate enunța astfel: dacă  $S \subset \mathbb{N}$  este o mulțime inductivă, atunci  $S = \mathbb{N}$ .

**Mulțimea numerelor întregi** este  $\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N} \text{ sau } -x \in \mathbb{N}\}$ . Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  există și este unic  $n \in \mathbb{Z}$  astfel încît  $n \leq x < n + 1$ ; se notează  $n = [x]$ , **partea întreagă a lui  $x$** , de exemplu,  $[3,14] = 3$  și  $[-3,14] = -4$ .

**Mulțimea numerelor raționale** este  $\mathbb{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ ; ea satisface proprietățile I, II anterioare; dar nu și III, deoarece mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$  nu are margine superioară în  $\mathbb{Q}$ . În plus,  $\mathbb{Q}$  este **densă** în  $\mathbb{R}$  (în sensul că pentru orice numere reale  $a < b$ , există numere raționale cuprinse între  $a$  și  $b$ ; anume, alegem  $n \in \mathbb{N}$  astfel încît

$$n > \frac{1}{b-a} \text{ deci } \frac{1}{n} < b-a$$

și fie  $m = [na]$  deci  $m \leq na < m + 1$ ; atunci

$$b > a + \frac{1}{n} \geq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$$

deci  $a < \frac{m+1}{n} < b$ , iar  $\frac{m+1}{n}$  este rațional).

**Comentariu.** Denumirea de număr rațional provine de la latinescul "ratio" (raport de numere întregi; astfel,

$$\frac{2}{3}, -\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Numerele iraționale sunt tocmai elementele mulțimii  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  și nu sunt deloc în afara rațiunii.

Reamintim că pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  se definește **modulul lui  $x$** ,  $|x| = \max(x, -x)$  deci

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ , numărul  $d(x, y) = |x - y|$  reprezintă **distanța** între  $x, y$ . Sunt astfel definite două funcții remarcabile, anume:

$$\text{ABS} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x| \text{ și } d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$$

Au loc proprietățile următoare binecunoscute:

$$1^0 \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0 \text{ și } |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$2^0 \forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y| \text{ și } |xy| = |x| \cdot |y|;$$

$$3^0 \text{ Fie } \varepsilon > 0; \text{ avem } |x| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ și } |x| > \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty);$$

$$4^0 \forall x, y \in \mathbb{R}, d(x, y) \geq 0 \text{ și } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$5^0 \forall x, y \in \mathbb{R}, d(x, y) = d(y, x);$$

$$6^0 \forall x, y, z \in \mathbb{R}, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

## 2. Numere complexe

În multe considerații se utilizează numerele complexe, apărute inițial în legătură cu rezolvarea ecuațiilor algebrice. Marele matematician german C. F. GAUSS (1777-1855) a dat prima demonstrație riguroasă a teoremei fundamentale a algebrei și a studiat structura mulțimii  $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  a întregilor care îi poartă numele. De obicei datele unei probleme tehnice sau economice sunt exprimate prin numere reale, dar în cursul rezolvării pot fi utilizate ca intermediare numerele complexe; mai mult, la studiul Bazelor electrotehnicii, Mecanicii fluidelor sau în Teoria stabilității sistemelor și în Fizica interacțiilor se utilizează rezultate profunde de Analiză complexă.

**Definiția I. 2.** Se numește **număr complex** orice pereche ordonată de numere reale. Mulțimea numerelor complexe este  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Dacă  $z = (a, b)$ ,  $z' = (a', b')$  sunt două numere complexe, atunci prin definiție,  $z = z' \Leftrightarrow a = a' \text{ și } b = b'$ . Deci o egalitate de numere complexe echivalează cu două egalități în  $\mathbb{R}$ . Se știe că relativ la adunarea și înmulțirea uzuale:

$$z + z' = (a + a', b + b'), zz' = (aa' - bb', ab' + a'b); 0_{\mathbb{C}} = (0, 0), 1_{\mathbb{C}} = (1, 0),$$

mulțimea  $\mathbb{C}$  este un corp comutativ.

Notînd  $i = (0, 1)$  și făcînd identificarea între numărul complex  $(a, 0)$  și numărul real  $a$ , rezultă:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi,$$

obținînd astfel forma algebrică uzuală. Se observă că

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

deci  $i$  este rădăcină a polinomului  $x^2 + 1$ .

**Comentariu.** Numerele complexe de forma  $(0, b) = bi$  cu  $b \neq 0$  au fost numite în mod nefericit imaginare, dar nu au în ele nimic imaginar, misterios; confuzia a plecat de la definirea lui  $i$  ca  $\sqrt{-1}$ , după ce se spusese că numerele negative nu au radical. Definind  $i = (0, 1)$  ca un număr complex ca oricare altul, dispăre orice confuzie și numerele complexe sunt obiecte matematice cu reguli precise de operare. În unele situații se utilizează și **numerele duale**  $a+b\varepsilon$  unde  $a, b \in \mathbb{R}$  și  $\varepsilon^2 = 0$ ; de fapt acestea sunt deasemenea perechi de numere reale  $(a, b)$ , cu operațiile  $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$  și  $(a, b) \cdot (a', b') = (aa', ab' + a'b)$ , iar  $\varepsilon = (0, 1)$ .

Dacă  $z = (a, b) = a + bi \in \mathbb{C}$ , cu  $a, b \in \mathbb{R}$ , se notează

$$\text{Re } z = a \text{ (partea reală), } \text{Im } z = b \text{ (partea imaginară),}$$

$$\bar{z} = a - bi \text{ (conjugatul lui } z) \text{ și } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (modulul lui } z).$$

Se cunosc sau se verifică ușor următoarele proprietăți:

$$1^0 \forall z \in \mathbb{C}, \text{Re } z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \text{Im } z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z});$$

$$2^0 \forall z, z' \in \mathbb{C}, \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}, \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}, \overline{1/z} = 1/\bar{z} \text{ (} z \neq 0);$$

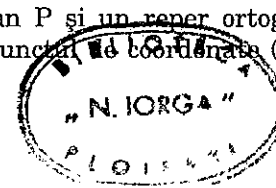
$$3^0 \forall z \in \mathbb{C}, |\text{Re } z| \leq |z|, |\text{Im } z| \leq |z|, |z| \leq |\text{Re } z| + |\text{Im } z|;$$

$$4^0 \forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|, |zz'| = |z| \cdot |z'|, ||z| - |z'|| \leq |z - z'| \text{ și}$$

$$\text{dacă } z' \neq 0, |z/z'| = |z|/|z'|.$$

Să considerăm un plan  $P$  și un reper ortogonal  $xOy$ ; identificăm numărul complex  $z = a + bi$  cu punctul de coordonate  $(a, b)$  relativ la acest reper. Dacă

623725



$z \neq 0$ , fie  $r = |z|$  și  $\varphi \in [0, 2\pi)$  unghiul făcut de semidreptele  $Ox$ ,  $Oz$  în sens trigonometric; se mai notează  $\varphi = \arg z$ , **argumentul** lui  $z$ . Atunci  $a = r \cos \varphi$ ,  $b = r \sin \varphi$  și  $z = a + bi = r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , obținându-se **forma trigonometrică** a lui  $z$ .

## EXEMPLU

$$1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad -3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi) \text{ și } -5i = 5 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right).$$

Pe mulțimea  $\mathbb{C}$  nu se poate defini o relație de ordine compatibilă cu operațiile algebrice (deoarece în caz contrar ar rezulta că  $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 \geq 0$ ; în particular, pentru  $z = 1$  și  $z = i$ , ar rezulta simultan că  $1 \geq 0$  și  $-1 \geq 0$  ceea ce este absurd). De aceea nu se consideră inegalități între numere complexe și în particular, nu se definesc șiruri monotone de numere complexe. Pentru orice

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2; \quad z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2),$$

distanța euclidiană dintre ele este

$$d(z_1, z_2) = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}.$$

Deoarece  $z_2 - z_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ , rezultă că  $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$ , deci distanța euclidiană dintre două numere complexe este tocmai modulul diferenței lor. Se verifică imediat următoarele proprietăți:

$D_1$  Pentru orice  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $d(z_1, z_2) \geq 0$ , și  $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ ;

$D_2 \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ ;

$D_3 \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$ .

Pe scurt aceste proprietăți sunt numite pozitivitate, simetrie și inegalitatea triunghiului.

Dacă  $z_0 \in \mathbb{C}$  și  $r > 0$ , mulțimea  $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$  se numește **discul deschis** centrat în  $z_0$ , de rază  $r$ ; mulțimea  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$  este **discul închis**, iar  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$  este **circumferința** de centru  $z_0$  și rază  $r$ .

## 3. Șiruri de numere reale

Fie  $E$  o mulțime oarecare. Dacă  $I$  este o mulțime, ale cărei elemente se numesc **indici**, prin **familie** de elemente din  $E$  indexată după  $I$  se înțelege o funcție

$f: I \rightarrow E, i \mapsto x_i = f(i)$ ; această familie se mai notează  $(x_i)_{i \in I}$ . În cazul particular când  $I = \mathbb{N}$ , familiile se numesc **șiruri** și vom nota  $(a_n)_{n \geq 0}$ ; dacă  $E = \mathbb{R}$  (respectiv  $\mathbb{C}$ ) se obține conceptul de **șir de numere reale** (respectiv **complexe**). Trebuie făcută distincția dintre șirul  $(a_n)_{n \geq 0}$  și mulțimea  $\{a_n \mid n \geq 0\}$  a termenilor șirului; șiruri distincte pot avea aceeași mulțime a termenilor.

**Comentariu.** Intuitiv, un volum variabil  $V$  în spațiu tinde către 0 dacă **pentru orice** cub de latură  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $V$  "devine" mai mic decât volumul cubului, începând de la un anumit "moment". Aceasta sugerează următoarea definiție esențială, în care "momentul" este reprezentat prin rangul  $N(\varepsilon)$ .

Din liceu știm că un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  de numere reale este **convergent** dacă există un număr real  $a \in \mathbb{R}$  astfel încît  $d(a_n, a) = |a_n - a|$  "tinde către zero" când  $n$  crește indefinit, adică  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$  natural astfel încît  $\forall n \geq N(\varepsilon), |a_n - a| < \varepsilon$ .

Se mai scrie în acest caz că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  sau  $a_n \rightarrow a$ .

Natura unui șir și limita lui în caz de convergență nu sunt modificate prin modificarea unui număr finit de termeni ai șirului.

## EXEMPLUL 1.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-n} = 0$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e$ , numărul lui L. EULER (1707 - 1783); se știe că  $e \approx 2,71828\dots$  și  $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

EXEMPLUL 2.  $a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n| \rightarrow 0$ ;  $a_n \rightarrow a \Rightarrow |a_n| \rightarrow |a|$ , dar nu și reciproc.

EXEMPLUL 3. Orice subșir al unui șir  $s = (a_n)_{n \geq 0}$  convergent către  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  este convergent către  $a$  [reamintim că dacă se consideră un șir strict crescător de numere naturale  $k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ , atunci șirul  $(a_{k_n})_{n \geq 0}$  se numește **subșir** al lui  $s$ ; pentru orice  $n$  avem evident  $n \leq k_n$ . De exemplu,  $(a_{2n})_{n \geq 0}$  și  $(a_{2n+1})_{n \geq 0}$  sunt subșiruri ale lui  $s$ , zise subșirurile termenilor de rang par și respectiv impar].

Reamintim câteva proprietăți cunoscute din liceu:

Dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $a_n \rightarrow b$ , atunci  $a = b$  (unicitatea limitei unui șir convergent).

Dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $b_n \rightarrow b$ , atunci  $a_n + b_n \rightarrow a + b$ ,  $-a_n \rightarrow -a$ ,  $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$  și dacă  $b \neq 0$ , atunci  $a_n/b_n \rightarrow a/b$ .

Dacă  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  și  $a_n \leq b_n$  pentru orice  $n \geq N$ , cu  $N$  natural fixat, atunci  $a \leq b$  (păstrarea inegalităților prin trecere la limită).

Dacă  $a_n \leq x_n \leq b_n$  pentru orice  $n \geq N$  și  $a_n \rightarrow a$  și  $b_n \rightarrow a$ , atunci  $x_n \rightarrow a$  ("lema cleștelui").

Reamintim că un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  de numere reale se numește **mărginit** dacă mulțimea termenilor  $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$  este mărginită în  $\mathbb{R}$ , adică este conținută într-un interval compact, sau echivalent  $\exists M > 0$  astfel încît  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M$ .

Se arată ușor că orice șir convergent este mărginit. De asemenea, **orice șir**  $(a_n)_{n \geq 0}$  **mărginit și monoton crescător** (respectiv descrescător) în  $\mathbb{R}$  este **convergent către**  $\sup a_n$  (respectiv către  $\inf a_n$ ).

Se spune că un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  de numere reale are limita  $+\infty$  (respectiv  $-\infty$ ) dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$  natural astfel încît  $\forall n \geq N(\varepsilon), a_n > \varepsilon$  (respectiv  $a_n < -\varepsilon$ ). Dacă  $a_n \leq b_n$  pentru orice  $n \geq N$  ( $N$  natural fixat) și dacă  $a_n \rightarrow \infty$ , atunci  $b_n \rightarrow \infty$ , iar dacă  $b_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $a_n \rightarrow -\infty$ .

**TEOREMA I. 1.** ("lema intervalelor închise incluse"). Fie  $I_n = [a_n, b_n]$ ,  $n \geq 0$  un șir descendent de intervale închise,  $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ . Atunci mulțimea  $I = \bigcap_{n \geq 0} I_n$  este nevidă. Dacă în plus  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , atunci mulțimea  $I$  este formată dintr-un singur punct.

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $A = \{a_n | n \geq 0\}$  și  $B = \{b_n | n \geq 0\}$ . Atunci mulțimea  $A$  este majorată (de  $b_0$ ); fie  $\xi = \sup A$ . În mod similar, mulțimea  $B$  este minorată; fie  $\eta = \inf B$  (se arată ușor că orice mulțime nevidă mărginită inferior are margine inferioară). Deoarece  $a_n \leq b_m$  pentru orice  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\xi \leq \eta$ ; totodată avem  $a_n \leq \xi \leq \eta \leq b_n$  pentru orice  $n \geq 0$  deci  $[\xi, \eta] \subset \bigcap_{n \geq 0} I_n$ .

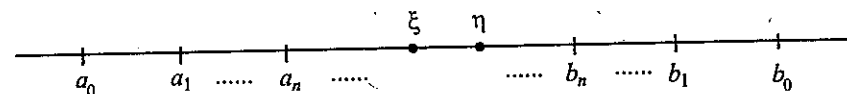


Fig. I. 1.

Dacă în plus  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , din inegalitățile  $0 \leq \eta - \xi \leq b_n - a_n$ , rezultă  $\xi = \eta$  și ca atare,  $\bigcap_{n \geq 0} I_n = \{\xi\}$ .

**OBSERVAȚIE.** Condiția de închidere a intervalelor este esențială; de exemplu, pentru  $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ ,  $n \geq 1$ , intersecția  $\bigcap_{n \geq 1} I_n$  este vidă.

**COROLAR** (lema lui E. CESARÓ, 1859–1906). Orice șir mărginit în  $\mathbb{R}$  are un subșir convergent.

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir mărginit în  $\mathbb{R}$  și  $a < b$  astfel încît  $a \leq x_n \leq b$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  și  $c$  mijlocul intervalului  $[a, b]$ . Dintre intervalele  $[a, c]$  și  $[c, b]$  alegem unul cu proprietatea de a conține o infinitate de termeni ai șirului și îl notăm  $I_1 = [a_1, b_1]$ .

Deci: mulțimea  $\{n \in \mathbb{N} | x_n \in [a_1, b_1]\}$  este infinită;  $b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2}$ .

Fie  $c_1$  mijlocul intervalului  $[a_1, b_1]$ . Dintre intervalele  $[a_1, c_1]$  și  $[c_1, b_1]$  alegem  $I_2 = [a_2, b_2]$  care conține o infinitate de termeni ai șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ . Deci:

mulțimea  $\{n \in \mathbb{N} | x_n \in [a_2, b_2]\}$  este infinită;  $b_2 - a_2 = \frac{b - a}{2^2}$ .

Se construiește prin inducție un șir de intervale închise

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_k \supset \dots; I_k = [a_k, b_k]$$

astfel încît mulțimea  $\{n \in \mathbb{N} | x_n \in [a_k, b_k]\}$  este infinită;  $b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$ ,

$\forall k \in \mathbb{N}$ . Conform teoremei I. 1 rezultă  $\bigcap_{k \geq 0} I_k = \{\xi\}$  unde  $I_0 = [a, b]$ .

Din modul în care au fost construite intervalele  $I_k$  putem găsi un șir de numere naturale

$$n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots \text{ și } x_{n_k} \in I_k \text{ } (\forall k \in \mathbb{N}).$$

Deducem din  $x_{n_k}, \xi \in I_k$  ( $\forall k \in \mathbb{N}$ )

$$|x_{n_k} - \xi| \leq \frac{b - a}{2^k} \text{ } (\forall k \in \mathbb{N}) \text{ deci } x_{n_k} \rightarrow \xi.$$

**Definiția I. 3.** O mulțime  $E$  se numește **numărabilă** dacă există o aplicație bijectivă  $f: \mathbb{N} \rightarrow E$ . În acest caz, rezultă că  $E = \{f(n) | n \geq 0\}$  este mulțimea termenilor unui șir.

EXAMPLE.

1) Orice submulțime  $A \subset \mathbb{N}$  este finită sau numărabilă; într-adevăr, dacă  $A$  nu este finită, atunci se poate considera următoarea funcție bijectivă:

$f: \mathbb{N} \rightarrow A$ , unde  $f(0) = \min A$ ,  $f(1) = \min(A \setminus \{f(0)\})$ ,  $f(2) = \min(A \setminus \{f(0), f(1)\})$  etc.

2) Mulțimea  $\mathbb{Z}$  este numărabilă, deoarece aplicația

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n, & n \text{ par} \\ -\frac{1}{2}(n+1), & n \text{ impar} \end{cases}$$

este bijectivă.

3) Reuniunea  $E \cup F$  a două mulțimi numărabile  $E, F$  este numărabilă, deoarece elementele ei sunt termenii unui șir, obținut alternând elementele lui  $E$  și  $F$  dispuse în șir.

4) Fie  $f: X \rightarrow Y$  o aplicație. Dacă  $f$  este injectivă și  $Y$  numărabilă, atunci  $X$  este finită sau numărabilă, iar dacă  $f$  este surjectivă și  $X$  este numărabilă, atunci  $Y$  este finită sau numărabilă (prima afirmație este imediată iar în cazul secund, se construiește aplicația injectivă  $Y \rightarrow X$  care asociază oricărui  $y \in Y$  un element ales și fixat în  $f^{-1}(y)$ ).

Aplicând acest fapt pentru aplicația injectivă  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(m, n) = 2^m \cdot 3^n$ , rezultă că mulțimea  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  este numărabilă. Atunci produsul cartezian a oricăror două mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă și folosind aplicația surjectivă  $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $f(p, q) = p/q$ , rezultă că mulțimea  $\mathbb{Q}$  este numărabilă.

**TEOREMA I. 2.** Mulțimea  $\mathbb{R}$  nu este numărabilă.

DEMONSTRAȚIE. Este suficient să arătăm că intervalul  $[0, 1]$  nu este o mulțime numărabilă. Pentru a demonstra aceasta, procedăm prin reducere la absurd și presupunem că ar exista o aplicație bijectivă  $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ ,  $n \mapsto x_n$ . Împărțim intervalul  $I_0 = [0, 1]$  în trei părți egale. Cel puțin unul din cele trei intervale

nu va conține  $x_0$  și fie  $I_1 = [a_1, b_1]$  un astfel de interval ( $b_1 - a_1 = \frac{1}{3}$ ). Împărțim

$I_1$  în trei părți egale și notăm cu  $I_2 = [a_2, b_2]$  unul din cele care nu conține  $x_1$  etc. Se va obține astfel un șir descendent  $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$  de intervale închise incluse, astfel încît  $x_{n-1} \notin [a_n, b_n] = I_n$  pentru orice  $n \geq 1$  și

$$b_n - a_n = \frac{1}{3^n}.$$

Conform teoremei I.1, rezultă că  $\bigcap_{n \geq 0} I_n = \{\xi\}$ .

Deoarece  $\xi \in [0, 1]$  și  $f$  este surjectivă, există  $n \in \mathbb{N}$  astfel încît  $x_n = \xi$ . Dar  $\xi \in I_{n+1}$  iar  $x_n \notin I_{n+1}$  și se ajunge la o contradicție. Orice interval  $(a, b)$  sau  $[a, b]$  cu  $a < b$  este nenumărabil.

**COROLAR 1.** Mulțimea  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  nu este numărabilă.

DEMONSTRAȚIE. În caz contrar,  $\mathbb{R}$  ar fi reuniunea a două mulțimi numărabile, deci numărabilă.

**COROLAR 2.** Orice număr real  $\alpha$  este limita unui șir de numere raționale și limita unui șir de numere iraționale.

DEMONSTRAȚIE. În orice interval  $(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n})$  cu  $n \geq 1$  natural, alegem  $x_n \in \mathbb{Q}$  și  $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Atunci  $x_n \rightarrow \alpha$  și  $y_n \rightarrow \alpha$ , conform lemei cleștelui.

**Definiția I. 4.** Un șir de numere reale  $(a_n)_{n \geq 0}$  se numește **fundamental** sau echivalent, **șir Cauchy** (după numele matematicianului francez A. CAUCHY, 1789–1857) dacă  $d(a_m, a_n) \rightarrow 0$  pentru  $m, n \rightarrow \infty$ , adică  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$  natural astfel încît  $\forall m, n \geq N(\varepsilon), |a_m - a_n| < \varepsilon$ .

**Comentariu.** Dacă  $m = n$ , această condiție este evident satisfăcută; dacă de exemplu  $m > n$ , atunci notînd  $p = m - n$ , rezultă  $p \geq 1$  și  $m = n + p$ , iar condiția anterioară se rescrie astfel:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \text{ natural astfel încît } \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ și } \forall p \geq 1, |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Condiția ca un șir să fie fundamental este intrinsecă, nedepinzînd de un element exterior cum este limita șirului. Totuși are loc următorul rezultat intuit cu peste 2000 de ani în urmă de PLATON (428–347 î. C.).

**TEOREMA I. 3. (criteriul general al lui Cauchy pentru șiruri în  $\mathbb{R}$ ).** Un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  de numere reale este convergent dacă și numai dacă el este fundamental.

DEMONSTRAȚIE. Dacă  $a_n \rightarrow a$ , atunci  $0 \leq |a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a|$  deci

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} |a_m - a_n| = 0 \text{ și șirul rezultă fundamental. Reciproc, dacă } (a_n)_{n \geq 0} \text{ este}$$

fundamental, atunci el este mărginit; într-adevăr, pentru  $\varepsilon = 1$  există  $N$  natural astfel încît  $\forall n \geq N, |a_n - a_N| < 1$ ; ca atare,  $a_n \in (a_N - 1, a_N + 1)$  pentru orice  $n \geq N$  și toți termenii șirului  $(a_n)_{n \geq 0}$  vor fi cuprinși într-un același interval

mărginit care include intervalul  $(a_N - 1, a_N + 1)$ . Conform lemei lui Cesaró, șirul  $(a_n)_{n \geq 0}$  va avea un subșir convergent  $a_{k_n} \rightarrow a$ . Teorema se încheie dacă vom demonstra că  $a_n \rightarrow a$ . Pentru aceasta, fie  $\forall \varepsilon > 0$  fixat. Alegem  $N_1$  astfel încît  $\forall m, n \geq N_1, |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$  și  $N_2$  astfel încît  $\forall n \geq N_2, |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Atunci luînd  $N = \max(N_1, N_2)$  și  $n \geq N$ , rezultă  $k_n \geq n \geq N$  și ca atare,  $|a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |a_n - a_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$  deci  $|a_n - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$  adică  $a_n \rightarrow a$ .

EXEMPLU. Șirul

$$a_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2}, n \geq 1$$

este un șir fundamental deoarece

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2} + \dots + \frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+p)} < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

pentru orice  $p \geq 1$ . Conform teoremei I. 3, rezultă că șirul este convergent; nu este simplu de calculat limita lui.

#### 4. Limite inferioare și superioare de șiruri în $\mathbb{R}$

Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir oarecare în  $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

Definim  $\alpha_0 = \inf\{x_0, x_1, x_2, \dots\}; \alpha_1 = \inf\{x_1, x_2, \dots\}, \dots, \alpha_k = \inf_{n \geq k} x_n;$

$$\beta_0 = \sup\{x_0, x_1, x_2, \dots\}, \beta_1 = \sup\{x_1, x_2, \dots\}, \dots, \beta_k = \sup_{n \geq k} x_n.$$

Atunci evident

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k \leq \dots \leq \beta_p \leq \dots \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \beta_0.$$

**Definiția I. 5.** Se numește **limita inferioară** a șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$  elementul

#### 4. Limite inferioare și superioare de șiruri în $\mathbb{R}$

$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \in \mathbb{R}$ , notat  $\alpha = \underline{\lim} x_n$ ; **limita superioară** a șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$  este

$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \in \mathbb{R}$ , notat  $\beta = \overline{\lim} x_n$  (în  $\mathbb{R}$  orice șir monoton are limită!).

Evident,  $\alpha = \sup_k \alpha_k, \beta = \inf_k \beta_k$ , deoarece șirul  $(\alpha_k)_{k \geq 0}$  este monoton crescător

iar  $(\beta_k)_{k \geq 0}$  monoton descrescător. În plus,  $\alpha \leq \beta$  deci  $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$ . Dacă  $(x_n)_{n \geq 0}$  este un șir mărginit în  $\mathbb{R}$ , atunci  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Reținem că limita inferioară (superioară) există **pentru orice** șir în  $\mathbb{R}$  sau  $\mathbb{R}$ .

EXEMPLU. Fie  $x_n = (-1)^n, n \geq 0$ . Atunci  $\alpha_k = -1$  și  $\beta_k = 1$  pentru orice  $k$ , deci  $\underline{\lim} x_n = -1$  și  $\overline{\lim} x_n = 1$ .

**TEOREMA I. 4.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir în  $\mathbb{R}$  și  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- i)  $a = \underline{\lim} x_n$  dacă și numai dacă  $\forall u < a$  mulțimea  $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n < u\}$  este finită și  $\forall v > a$ , mulțimea  $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n < v\}$  este infinită.
- ii)  $b = \overline{\lim} x_n$  dacă și numai dacă  $\forall u < b, \{n \in \mathbb{N} \mid x_n > u\}$  este infinită și  $\forall v > b, \{n \in \mathbb{N} \mid x_n > v\}$  este finită.

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $a = \underline{\lim} x_n$  deci  $a = \alpha = \sup_k \alpha_k$ . Dacă  $a = -\infty$  atunci

$\forall k, \alpha_k = -\infty$  și pentru orice  $v > a$ , mulțimea  $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n < v\}$  rezultă infinită.

Presupunem  $a$  finit. Atunci  $\forall u < a$ , există  $k_0$  astfel încît  $u < \alpha_{k_0} < a$  deci pentru  $n \geq k_0, x_n \geq \alpha_{k_0} > u$  adică  $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n < u\}$  este finită. Iar dacă  $v > a$ , atunci evident  $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n < v\}$  este infinită.

Presupunem că invers,  $a$  satisface condițiile din enunț și fie  $\alpha = \underline{\lim} x_n$ . Arătăm mai întâi că  $a \leq \alpha$ . Cazul  $a = -\infty$  este evident. Dacă  $-\infty < a$  și  $u < a$ ,

atunci conform ipotezei există  $k_0$  astfel încît  $x_n \geq u$  pentru  $n \geq k_0$  deci  $\alpha_{k_0} \geq u$  și cum șirul  $(\alpha_k)$  este crescător, rezultă  $u \leq \alpha$ . Deci pentru orice  $u < \alpha$ , avem  $u \leq \alpha$  și ca atare,  $\alpha \leq \alpha$ . Folosind cea de-a doua condiție rezultă  $\alpha \leq a$  deci  $\alpha = a$ .

În mod similar se tratează cazul limitei superioare.

Înainte de a deduce o consecință importantă, introducem o noțiune folosită doar în acest paragraf: un element  $\xi \in \mathbb{R}$  se numește **punct limită** pentru șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  din  $\mathbb{R}$  dacă există un subșir  $x_{k_n} \rightarrow \xi$  (în  $\mathbb{R}$ ).

**COROLAR.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir în  $\mathbb{R}$ .

i)  $\lim x_n$  și  $\limsup x_n$  sunt puncte limită pentru șirul  $(x_n)$  și în plus, pentru orice alt punct limită  $\xi$  avem  $\lim x_n \leq \xi \leq \limsup x_n$ ;

ii) Șirul  $(x_n)$  are limita  $x$  în  $\mathbb{R}$  dacă și numai dacă  $\lim x_n = \limsup x_n = x$ .

**DEMONSTRAȚIE.**

i) Presupunem că  $a = \lim x_n$  este finit. În intervalul  $(a-1, a+1)$  alegem un termen  $x_{k_1}$ ; în  $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ , alegem  $x_{k_2}$  cu  $k_2 > k_1$ , etc  $x_{k_n} \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$ ;

atunci  $x_{k_n} \rightarrow a$ . Similar se tratează celelalte cazuri.

ii) Dacă  $x_n \rightarrow x$ , atunci orice subșir tinde către  $x$  deci toate punctele limită coincid cu  $x$  în particular,  $\lim x_n = \limsup x_n = x$ ; etc.

## 5. Șiruri de numere complexe

**Definiția I. 6.** Un șir  $(z_n)_{n \geq 0}$  de numere complexe se numește **convergent** în  $\mathbb{C}$  dacă există  $z \in \mathbb{C}$  astfel încît  $d(z_n, z) \rightarrow 0$ , adică  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$  natural astfel încît  $\forall n \geq N(\varepsilon)$ ,  $|z_n - z| < \varepsilon$ .

Se scrie atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  sau  $z_n \rightarrow z$ .

Dacă există, limita unui șir convergent este unică. Este evident că orice șir convergent în  $\mathbb{C}$  are toți termenii conținuți într-un disc; se mai spune că șirul este mărginit.

**TEOREMA I. 5.** Fie  $z_n = a_n + ib_n$ ,  $n \geq 0$  un șir de numere complexe și  $z = a + ib$ . Avem  $z_n \rightarrow z$  în  $\mathbb{C}$  dacă și numai dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $b_n \rightarrow b$  (în  $\mathbb{R}$ ).

**DEMONSTRAȚIE.** Au loc inegalitățile

$$0 \leq |a_n - a| \leq |z_n - z|, \quad 0 \leq |b_n - b| \leq |z_n - z|;$$

dacă  $z_n \rightarrow z$ , atunci aplicînd lema cleștelui rezultă  $a_n \rightarrow a$  și  $b_n \rightarrow b$ .

Reciproca rezultă folosind inegalitatea

$$|z_n - z| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Reținem deci că  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + ib_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

Dacă  $z_n \rightarrow z$ ,  $w_n \rightarrow w$  (în  $\mathbb{C}$ ), atunci  $z_n + w_n \rightarrow z + w$ ,  $z_n w_n \rightarrow zw$  și pentru  $w \neq 0$ ,  $z_n/w_n \rightarrow z/w$ ; pentru demonstrație se poate proceda ca în cazul șirurilor de numere reale, sau se aplică teorema I.5.

**COROLAR (criteriul general Cauchy în  $\mathbb{C}$ ).** Un șir  $(z_n)_{n \geq 0}$  este convergent în  $\mathbb{C}$  dacă și numai dacă este fundamental (adică  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$  natural astfel încît  $\forall m, n \geq N(\varepsilon)$ ,  $|z_m - z_n| < \varepsilon$ ).

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $z_n = a_n + ib_n$ . Șirul  $(z_n)$  este convergent în  $\mathbb{C} \Leftrightarrow$  șirurile  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  sunt convergente în  $\mathbb{R} \Leftrightarrow (a_n)$ ,  $(b_n)$  sunt fundamentale în  $\mathbb{R} \Leftrightarrow (z_n)$  este fundamental în  $\mathbb{C}$ ; ultima echivalență rezultă din inegalitățile evidente:

$$|a_m - a_n| \leq |z_m - z_n|, \quad |b_m - b_n| \leq |z_m - z_n|, \quad |z_m - z_n| \leq |a_m - a_n| + |b_m - b_n|.$$

Am văzut că mulțimea  $\mathbb{R}$  poate fi inclusă în mulțimi "mai mari". Incluziunea  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  se realizează prin conservarea structurii de corp comutativ (cu extinderea operațiilor algebrice), dar cu pierderea structurii de ordine. Incluziunea  $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{R}}$  se realizează prin păstrarea ordinii, dar se pierde structura algebrică (adunarea și înmulțirea nu mai sunt peste tot definite în  $\bar{\mathbb{R}}$ ; de exemplu, nu se definesc  $\infty + (-\infty)$ ,  $\infty \cdot 0$ ,  $\infty/\infty$  etc.). Remarcăm că în  $\bar{\mathbb{R}}$  orice șir este mărginit, orice șir monoton are limită și orice submulțime nevidă  $A \subset \bar{\mathbb{R}}$  are margine superioară și margine inferioară.

**Comentariu.** În matematică și în filozofie conceptul de infinit apare în două ipostaze - infinitul actual și infinitul potențial. În matematică infinitul actual revine la a considera elementele  $+\infty$ ,  $-\infty$  ca elemente neprivilegiate în mulțimea  $\bar{\mathbb{R}}$ . Infinitul potențial este definit numai cu ajutorul numerelor reale finite:  $+\infty$  apare ca asociat oricărui șir  $(x_n)$  din  $\mathbb{R}$  cu proprietatea că  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$  astfel încît  $\forall n \geq N(\varepsilon)$ ,  $x_n > \varepsilon$ , iar  $-\infty$  este asociat oricărui șir  $(y_n)$  din  $\mathbb{R}$  pentru care  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$

$\forall n \geq N(\varepsilon), y_n < -\varepsilon$ . Formula  $\infty + \infty = \infty$  reflectă faptul că dacă  $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow \infty$ , atunci  $x_n + y_n \rightarrow \infty$ ; similar  $-\infty + a = -\infty, a \in \mathbb{R}$  înseamnă că dacă  $x_n \rightarrow -\infty, y_n \rightarrow a$ , atunci  $x_n + y_n \rightarrow -\infty$ . Faptul că  $0 \cdot \infty$  nu capătă sens precis rezultă din aceea că dacă  $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow 0$ , atunci nu se poate afirma nimic despre produsul  $x_n y_n$  etc.

În mulțimea  $\mathbb{C}$  nu există "la stînga" și "la dreapta" ca în cazul lui  $\mathbb{R}$  (unde de exemplu  $-3$  este la stînga lui  $2$ ). De aceea se adugă la  $\mathbb{C}$  un singur punct la infinit, notat  $\infty$  și se consideră  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Se spune că un șir  $(z_n)$  de numere

complexe **tinde către**  $\infty$  dacă  $|z_n| \rightarrow +\infty$  în  $\bar{\mathbb{R}}$ ; prin convenție,  $\forall z \in \mathbb{C}, \infty + z = \infty$  (în sensul că dacă  $z_n \rightarrow \infty$ , atunci  $z_n + z \rightarrow \infty$ ); apoi  $\infty z = z \cdot \infty = \infty$  pentru orice  $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ . De asemenea  $\infty/\infty = \infty, \infty/0 = \infty$  și  $z/0 = \infty$  pentru  $z \neq 0, z/\infty = 0$  pentru orice  $z \in \mathbb{C}$ . Nu se definesc  $\infty + \infty, \infty - \infty, \infty \cdot 0, \infty/\infty$  în  $\bar{\mathbb{C}}$ .

$$\text{EXEMPLUL 1. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ni + 7}{2ni - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( i + \frac{7}{n} \right)}{n \left( 2i - \frac{3}{n} \right)} = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}.$$

EXEMPLUL 2. Șirul  $(-2)^n$  nu are limită în  $\bar{\mathbb{R}}$  dar tinde către  $\infty$  în  $\bar{\mathbb{C}}$ .

EXEMPLUL 3. Fie  $z_n = a^n$  cu  $a \in \mathbb{C}$  fixat. Dacă  $|a| > 1$ , atunci  $|z_n| = |a|^n \rightarrow \infty$  deci  $z_n \rightarrow \infty$ ; dacă  $|a| < 1$ , atunci  $z_n \rightarrow 0$  iar dacă  $|a| = 1, a \neq 1$ , atunci șirul  $(z_n)$  nu are limită; în fine pentru  $a = 1, z_n \rightarrow 1$ .

## 6. Funcții reale și funcții complexe

Se numește **funcție reală** orice funcție  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , cu valori reale. Imaginea ei  $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$  se mai numește **domeniul strict** de valori al lui  $f$ . Marginea superioară și respectiv inferioară ale lui  $f$  sunt:

$$\sup f = \sup f(X), \text{ și } \inf f = \inf f(X),$$

calculate în  $\bar{\mathbb{R}}$ ; acestea se mai numesc **extremele globale** ale lui  $f$  pe mulțimea  $X$ .

Cele mai simple funcții reale sunt funcțiile **polinomiale**  $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}; a_0 \neq 0).$$

Calculul valorii  $P(x)$  pentru orice  $x$  fixat revine la efectuarea unui număr finit de adunări și înmulțiri. Mulțimea  $Z(P)$  a zerourilor (sau rădăcinilor) lui  $P$  este finită, avînd cel mult  $n$  elemente în  $\mathbb{R}$  sau  $\mathbb{C}$ . Pentru  $n = 1, 2$  există formule

explicite de determinare a mulțimii  $Z(P)$ . Pentru  $n = 3$  și  $n = 4$  există de asemenea formule ceva mai complicate și fără utilitate, datorate matematicienilor italieni CARDANO și FERRARI, iar pentru  $n \geq 5$ , matematicianul norvegian ABEL a demonstrat că nu există în general formule de exprimare a rădăcinilor cu ajutorul coeficienților.

**Funcția rațională**  $P/Q$  (cu  $P, Q$  polinoame) este o funcție reală definită pe  $\mathbb{R} \setminus Z(Q)$ .

Pentru  $\alpha \in \mathbb{R}$  se definește **funcția putere de exponent**  $\alpha, f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha$ ; în cazul  $\alpha \in \mathbb{N}$ , domeniul de definiție devine întreg  $\mathbb{R}$ . Pentru  $\alpha \neq 0$  restricția  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), x \mapsto x^\alpha$  este bijectivă și  $f^{-1}(x) = x^{1/\alpha}$ .

Dacă  $a > 0, a \neq 1$ , se definește **funcția exponențială în baza  $a$** , anume  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = a^x$ , cu proprietățile binecunoscute; în acest caz,  $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  este bijectivă și  $g^{-1}(x) = \log_a x$ . Un caz important este

$$a = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Relația  $\ln x = \log_e x = m$  înseamnă  $x > 0$  și  $e^m = x$ . O formulă importantă este următoarea:

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \text{ pentru orice } x > 0 \text{ și orice } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Este interesant că EULER a ajuns la definirea numărului  $e$ , care îi poartă numele, pornind de la problema determinării funcțiilor reale derivabile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$  și  $f(0) = k$  ( $k \in \mathbb{R}$  fixat). Acum știm că există o singură funcție cu această proprietate, anume  $f(x) = ke^x$ .

Funcțiile considerate anterior sunt cazuri particulare de funcții reale elementare asupra cărora vom reveni cu o discuție mai amplă după studiul seriilor de puteri. O extindere importantă o reprezintă funcțiile complexe elementare - polinoame cu coeficienți complecși, funcții raționale,  $e^z$ ,  $\sin z$  etc.

O funcție  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  ( $A \subset \mathbb{C}$ ) se numește **funcție complexă de variabilă complexă**. Graficul unei astfel de funcții  $G_f = \{(z, f(z)) \mid z \in A\}$  este o submulțime a lui  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^4$  (în timp ce graficul unei funcții reale de variabilă reală este o submulțime a lui  $\mathbb{R}^2$ ). Funcțiile complexe vor fi studiate ulterior; menționăm doar că nedefinindu-se inegalități între numere complexe, nu se definesc nici extreme nici monotonie în cazul funcțiilor complexe. Pentru  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ , nu se definesc  $\sup f(x), \inf f(x)$ ; au însă sens  $\sup_{x \in X} |f(x)|, \inf_{x \in X} |f(x)|$ .

## 7. 10 exerciții

1. Fie  $f: X \rightarrow Y$  o aplicație.

a) Dacă  $A, B \subset X$ , să se arate că  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ;

b) Dacă  $P, Q \subset Y, f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q), f^{-1}(P \cup Q) = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$  și  $f^{-1}(\mathbb{C}P) = \mathbb{C}f^{-1}(P)$  ( $f^{-1}(P) = \{x \in X; f(x) \in P\}$ ).

2. Fie  $M$  o mulțime și  $f: M \rightarrow M$  o aplicație. Să se arate că dacă  $f \circ f = 1_M$ , atunci  $f$  este bijectivă.

3. Să se arate că aplicația  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$f(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$$

este bijectivă.

4. Fie  $M$  o mulțime și  $(P_n)_{n \geq 0}$  un șir de submulțimi ale lui  $M$ .

Se notează  $\lim P_n = \bigcup_{m \geq 0} \bigcap_{n \geq m} P_n$ ,  $\overline{\lim} P_n = \bigcap_{m \geq 0} \bigcup_{n \geq m} P_n$ .

a) Să se arate că

$$\lim P_n = \{x \in E \mid x \text{ aparține la toți } P_n \text{ începînd de la un rang}\}$$

și că

$$\overline{\lim} P_n = \{x \in E \mid x \text{ aparține la o infinitate de mulțimi } P_n\}.$$

b) Șirul  $(P_n)_{n \geq 0}$  se zice **convergent** dacă  $\lim P_n = \overline{\lim} P_n$ . Să se arate că dacă  $(P_n)$  este un șir ascendent (adică  $\forall n \geq 0, P_n \subset P_{n+1}$ ) sau descendent ( $\forall n \geq 0, P_n \supset P_{n+1}$ ), atunci el este convergent.

5. Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale. Dacă subșirurile  $(x_{2n})$ ,  $(x_{2n+1})$  au aceeași limită  $l \in \mathbb{R}$ , să se arate că  $x_n \rightarrow l$ .

6. Să se arate că șirurile  $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n \geq 1}$ ,  $\left(n \sin \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$  sunt convergente, dar  $(\sin n)_{n \geq 1}$  nu are limită.

7. Pentru orice două șiruri în  $\mathbb{R}$ ,  $x = (x_n)_{n \geq 0}$ ,  $y = (y_n)_{n \geq 0}$  se definește **convoluția** lor  $z = x * y$ , ca fiind șirul  $z = (z_n)_{n \geq 0}$  unde  $z_n = \sum_{p=0}^n x_p y_{n-p}$ . Pentru orice  $k \in \mathbb{N}$  se notează

cu  $\delta_k$  șirul cu toți termenii nuli, exceptînd termenul de rang  $k$ , egal cu 1.

a) Să se arate că pentru orice șir  $x$ ,  $x * \delta_0 = \delta_0 * x = x$ ; calculați  $x * \delta_k$ .

b) Să se dea exemplu de șiruri mărginite  $x, y$  astfel încît  $x * y$  să nu fie mărginit.

8. Să se calculeze  $\lim x_n$ ,  $\overline{\lim} x_n$  pentru

a)  $x_n = \frac{(-1)^n \cdot 2n}{n+1}$ ;

b)  $x_n = (-2)^n$ ;

c)  $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$ ,  $n \geq 1$ .

9. Să se calculeze:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + in^2}{n + 4n^2}$ ;

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n}$ ;

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+i)^n}{n}$ ;

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a + a^2 + \dots + a^n)$ ,  $a \in \mathbb{C}$ .

10. a) Să se determine extremele globale ale funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2x$ ;

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \arctg x$ .

b) Să se calculeze  $m = \inf_{|z| \leq 1} |z^2 + 1|$  și  $M = \sup_{|z| \leq 1} |z^2 + 1|$ .

## INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Se probează prin dublă incluziune.

2. Dacă  $f(x) = f(y)$  și aplicăm  $f$ , rezultă  $f(f(x)) = f(f(y))$  adică  $(f \circ f)(x) = (f \circ f)(y)$  deci  $1_M(x) = 1_M(y)$ , adică  $x = y$ . Așadar  $f$  este injectivă etc.

3. Avem  $f(0,0) = 0$ ;  $f(0,1) = 1$ ;  $f(1,0) = 2$ ; etc. Deci lui  $(0,0)$ ,  $f$  îi asociază numărul de ordine 0, punctelor cu coordonate naturale de pe dreapta  $x + y = 1$  le asociază 1, 2 etc. Pe fiecare dreaptă  $x + y = a$  cu  $a \in \mathbb{N}$  se află  $a + 1$  puncte cu ambele coordonate numere naturale, anume  $(a,0)$ ,  $(a-1,1)$ , ...,  $(0,a)$ . Aplicația  $f$  asociază fiecărui astfel de punct un număr natural reprezentînd un anumit număr de ordine. Punctul  $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  se află pe dreapta  $x + y = m + n$ ; punctele numerotate anterior sunt situate pe dreptele  $x + y = 0$ ,  $x + y = 1$ , ...,  $x + y = m + n - 1$  și vor fi în număr de

$$1 + 2 + \dots + (m+n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}.$$

Pe dreapta  $x + y = m + n$  anterior numerotate se află punctele cu abscisele 0, 1, ...,  $m - 1$  (în număr de  $m$ ). Deci punctul  $(m,n)$  va avea numărul de ordine

$$\frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m = f(m,n).$$

Faptul că aplicația  $f$  este bijectivă devine acum evident.

4. a) Se probează prin dublă incluziune.

b) Dacă  $(P_n)$  este ascendent, atunci  $\lim P_n = \overline{\lim} P_n = \bigcup_{n \geq 0} P_n$

și în cazul descendent,  $\bigcap_{n \geq 0} P_n$ .

5. Se aplică definiția limitei.

6. Avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n = 0$  căci  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , iar șirul  $(\sin n)$  este mărginit;

apoi  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{n} \right) / \left( \frac{1}{n} \right) = 1$ . Dacă  $\sin n \rightarrow l$  atunci  $\sin(n+2) - \sin n \rightarrow 0$  deci  $2 \sin l \cos(n+1) \rightarrow 0$  deci  $\cos n \rightarrow 0$ . Rezultă  $\sin 2n \rightarrow 0$  deci  $l = 0$ . În fond  $\lim \sin n = \lim \cos n = 0$  contradicție cu  $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ .

7. a)  $x * \delta_k$  este șirul  $(z_n)_{n \geq 0}$ , unde  $z_n = \sum_{p=0}^n x_p (\delta_k)_{n-p}$ . Dar  $(\delta_k)_{n-p} = 0$  pentru  $k \neq n-p$

și ca atare

$$z_n = \begin{cases} x_{n-k} & \text{dacă } n \geq k \\ 0 & \text{dacă } n < k \end{cases}$$

b) Fie  $x$  șirul constant  $x = (x_n)_{n \geq 0}$  unde  $x_n = 1$ ;

în acest caz,  $x * x = (z_n)_n$  unde  $z_n = \sum_{p=0}^n x_p x_{n-p} = n+1$ .

8. a)  $-2, 2$

b)  $-\infty, \infty$

c)  $0, 1$

9. a)  $\frac{i}{4}$ ;

b) În general, dacă  $x_n \rightarrow 0$  și  $(y_n)_{n \geq 0}$  este un șir mărginit în  $\mathbb{R}$  sau  $\mathbb{C}$ , atunci  $x_n y_n \rightarrow 0$ .

Luind  $x_n = \frac{1}{n}$  și  $y_n = i^n$ , se vede că  $x_n \rightarrow 0$  și  $|y_n| = 1$ .

c)  $\left| \frac{(1+i)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} 2^{n/2} \rightarrow \infty$  deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+i)^n}{n} = \infty$ .

d) Avem  $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$  pentru  $a \neq 1$ . Dacă  $|a| < 1$ , limita este  $\frac{1}{1-a}$ ,

iar dacă  $|a| > 1$ , limita este  $\infty$ . Dacă  $|a| = 1$ ,  $a \neq 1$  limita nu există și în fine, pentru  $a = 1$ , limita va fi  $\infty$ .

10. a)  $\inf f(x) = f(1) = -1$ ;  $\sup f(x) = +\infty$ . Apoi  $g'(x) = \frac{4x - x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$  se anulează în  $2 \pm \sqrt{3}$ ;

$\sup g(x) = \max(g(2 + \sqrt{3}), 2 + \frac{\pi}{2})$  etc.

b) Avem  $|z^2 + 1| \geq 0$  ( $\forall z$ ) ( $|z| \leq 1$ ) și  $|z^2 + 1| = 0$  pentru  $z = i$ , deci  $m = 0$ . Analog  $|z^2 + 1| \leq |z|^2 + 1 \leq 2$  pentru  $|z| \leq 1$  și  $|z^2 + 1| = 2$  pentru  $z = 1$  deci  $M = 2$ .

## ANEXĂ LA LECȚIA I

## Numerele reale și măsurarea mărimilor

Un grup abelian  $(G, +, 0)$  se numește **arhimedian** (ARHIMEDE, 287 - 212 î.Cr.) dacă pe mulțimea  $G$  este definită o relație de ordine totală  $\leq$  astfel încît

$$\{\alpha \leq \beta \Rightarrow \forall \gamma \in G, \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma\} \text{ și}$$

$$\{\forall \alpha, \beta \in G, \alpha > 0, \text{ există } n \geq 1 \text{ natural astfel încît } n\alpha \geq \beta\}.$$

Elementele lui  $G$  se numesc mărimi abstracte.

Evident,  $\mathbb{R}$  este un grup arhimedian. Mulțimea temperaturilor formează de asemenea un grup arhimedian (pentru că știm să definim  $0$ ,  $T_1 + T_2$ ,  $T_1 \leq T_2$  și dacă  $U > 0$  este o temperatură fixată, atunci pentru orice temperatură  $T$  există  $n \geq 1$  întreg astfel încît  $nU \geq T$ ). În mod similar, mulțimile presiunilor, lungimilor, maselor, volumelor, vitezelor (imaginînd presiuni, lungimi etc. negative), se pot organiza ca grupuri arhimediene. Mărimile fizice, chimice, indicatorii economici etc. pot fi astfel modelate matematic prin grupuri arhimediene, deci prin mulțimi de elemente care pot fi adunate, se pot compara și se pot măsura (relativ la o unitate de măsură fixată), cu respectarea intuiției și a logicii. Teorema următoare sintetizează experiența noastră în asocierea de numere reale celor mai variate tipuri de mărimi și poate fi atribuită lui EUCLID (sec. III î. Cr.), care a intuit-o pentru mărimile geometrice.

**TEOREMĂ.** Fie  $G$  un grup arhimedian și un element fixat  $U \in G$ ,  $U > 0$  ("unitatea de măsură"). Atunci există și este unică o aplicație injectivă  $m_U: G \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încît:

$$1^0 m_U(0) = 0 \text{ și } m_U(U) = 1;$$

$$2^0 \forall \alpha, \beta \in G, m_U(\alpha + \beta) = m_U(\alpha) + m_U(\beta) \text{ și } \forall n \in \mathbb{Z}, m_U(n\alpha) = nm_U(\alpha);$$

$$3^0 m_U \text{ este strict crescătoare } (\alpha < \beta \Rightarrow m_U(\alpha) < m_U(\beta)).$$

Numărul  $m_U(\alpha)$  se mai numește măsura mărimii  $\alpha$ , relativ la unitatea de măsură  $U$ . Dacă  $V \in G$ ,  $V > 0$  este o altă unitate de măsură, atunci din teorema anterioară

rezultă că raportul  $\frac{m_U(\alpha)}{m_V(\alpha)}$  este independent de  $\alpha$ , anume egal cu  $m_U(V)$ .

Se poate dezvolta un "dicționar fizico-matematic", indicînd resursa de bază a modelării matematice a diverselor porțiuni ale realității.

Acest dicționar poate fi precizat, extins și recomandăm cititorului să urmărească acest lucru în legătură cu diversele noțiuni pe care le va întîlni în continuare.

| Model fizic       | Model matematic                           |
|-------------------|-------------------------------------------|
| mărimie           | număr real                                |
| pereche de mărimi | pereche de numere reale sau număr complex |

| Model fizic                                                                 | Model matematic                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| mărime variabilă depinzând de altă mărime, $y = f(x)$                       | funcție reală de o variabilă reală $f: A \rightarrow B$ , precizând și domeniile de variație pentru valorile mărimilor $x$ și $y$ |
| mărime variabilă depinzând de $n$ mărimi, $y = f(x_1, \dots, x_n)$          | funcție reală de $n$ variabile reale, $f: A \rightarrow B; A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}$                          |
| mărime care variază continuu, fără salturi                                  | funcție reală continuă                                                                                                            |
| viteza de variație a unei mărimi $y = f(x)$ , începînd de la valoarea $x_0$ | derivata $f'(x_0)$ , în ipoteza că aceasta există                                                                                 |
| lege fizică                                                                 | ecuație etc.                                                                                                                      |

## LECȚIA A II-A

## SERII NUMERICE

## INTRODUCERE

Există cazuri cînd unui șir infinit  $(a_n)_{n \geq 0}$  de numere reale sau complexe i se poate atribui o sumă bine determinată, extinzînd astfel noțiunea de sumă finită. Seriile au ridicat probleme serioase fondatorilor Analizei matematice – G. W. LEIBNIZ (1646 - 1716), I. NEWTON (1643 - 1727) (și altor matematicieni) și numai după ce s-au definit riguros numerele reale și complexe, ca și noțiunea de convergență a șirurilor, s-a putut dezvolta o teorie coerentă a seriilor. În lipsa rigorii, sumele infinite de tipul  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  au dat mari bătăi de cap; punînd paranteze așa:  $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots$  suntem tentați să atribuim suma 0, dar scriînd  $1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$  apare tentația să atribuim suma 1; apoi ținînd cont că

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x} \text{ pentru } x \in (-1, 1),$$

pentru  $x \rightarrow 1$ , apare o a treia ispită, anume suma  $\frac{1}{2}$ . În orice caz, "jocul cu infinitul" este plin de capcane, în lipsa conceptelor solide. În această lecție, vom vedea că seria anterioară este divergentă și că grupările de termeni nu sunt totdeauna posibile și vom demonstra cîteva rezultate fundamentale pentru cultura și practica matematică.

## 1. Convergență, sumă

Vom considera serii de numere complexe; cazul seriilor de numere reale va fi un caz particular.

**Definiția II. 1.** Fie  $(u_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere complexe și  $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  ( $n \geq 0$ ), numit **șirul sumelor parțiale** asociat. Se numește **serie de termen general**  $u_n$ , perechea de șiruri  $(u_n)$ ,  $(s_n)$  reprezentată de simbolul  $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \dots$ ; seria se mai notează  $\sum_{n \geq 0} u_n$ .

Seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$ , se numește **convergentă** (pe scurt C) dacă șirul  $(s_n)_{n \geq 0}$  al sumelor parțiale este convergent (în C); în acest caz, numărul complex

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{ se numește } \textbf{suma seriei} \text{ și este notat } s = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Seriile care nu sunt convergente se numesc **divergente** (pe scurt D). Prin natura unei serii se înțelege proprietatea ei de a fi C sau D.

**Comentariu.** În studiul seriilor, rolul principal îl au sumele parțiale și de aceea se poate afirma că teoria seriilor este o "combinație" între studiul sumelor finite și al limitelor de șiruri. Este eronată definirea seriilor ca "sume infinite", deoarece în C sau în R au sens doar sume finite de numere. Seriile au proprietăți diferite de cele ale sumelor finite; de exemplu, nu totdeauna avem comutativitate, asociativitate etc. Trebuie de asemenea să distingem între o serie convergentă  $\sum_{n \geq 0} u_n$  (care este un

concept matematic nou, definit ca o pereche de șiruri cu anumite proprietăți) și suma acelei serii, care este un număr.

Dacă se modifică un număr **finit** de termeni ai unei serii, atunci seria nou obținută va avea aceeași natură ca seria inițială; însă în caz de convergență, această operație poate modifica suma seriei.

În studiul unei serii numerice (adică de numere reale sau complexe), problema principală o constituie determinarea naturii ei și în caz de convergență, se cere evaluarea exactă sau aproximativă a sumei seriei respective.

**EXEMPLUL 1.** Seria  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ , cu termenul general  $u_n = (-1)^n$ ,  $n \geq 0$  este D, deoarece șirul sumelor parțiale este  $1, 0, 1, 0, \dots$  și acesta este divergent. De asemenea seria  $1 + 1 + 1 + \dots$  este D, deoarece  $s_n = n + 1 \rightarrow \infty$ .

**EXEMPLUL 2.** Seria geometrică de rație  $q$  ( $q \in \mathbb{C}$ ) este seria

### 1. Convergență, sumă

$$\sum_{n \geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots;$$

în acest caz,

$$s_n = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\text{pentru } q \neq 1).$$

Seria este C  $\Leftrightarrow |q| < 1$  și în acest caz, are suma  $\frac{1}{1 - q}$ .

În mod similar, seria  $\sum_{n \geq 0} \kappa q^n$  ( $\kappa \neq 0$  constant) este C  $\Leftrightarrow |q| < 1$ .

**EXEMPLUL 3.** Dacă seriile

$$\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$$

sunt C cu sumele  $s, t$ , atunci seriile

$$\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n), \sum_{n \geq 0} (u_n - v_n), \sum_{n \geq 0} \lambda u_n \quad (\lambda \in \mathbb{C} \text{ constant})$$

sunt evidente C, cu sumele  $s + t, s - t, \lambda s$  respectiv.

**EXEMPLUL 4.** Direct din definiție și aplicând teorema I. 5, rezultă că o serie

$$\sum_{n \geq 0} z_n, z_n = x_n + iy_n$$

de numere complexe este C  $\Leftrightarrow$  seriile de numere reale

$$\sum_{n \geq 0} x_n, \sum_{n \geq 0} y_n$$

sunt C și în plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

**EXEMPLUL 5.** Fie  $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$  un șir strict crescător de numere naturale; dacă seria  $\sum_{n \geq 1} z_n$  este C cu suma  $s$ , atunci notînd

$$w_1 = z_1 + \dots + z_{k_1}, w_2 = z_{k_1+1} + \dots + z_{k_2}, \dots, w_n = z_{k_{n-1}+1} + \dots + z_{k_n} \text{ etc.,}$$

seria  $\sum_{n \geq 1} w_n$  este de asemenea C cu suma  $s$ , deoarece sumele parțiale

$$\sum_{k=1}^n w_k = z_1 + z_2 + \dots + z_{k_1} + z_{k_1+1} + \dots + z_{k_2} + \dots + z_{k_n}$$

converg către  $s$ . Pentru serii D acest fapt nu are loc; astfel, seria

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

diferă de seriile

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots \text{ sau } 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots,$$

ceea ce arată că proprietățile sumelor finite nu se extind fără precauții la serii.

**TEOREMA II. 1. (criteriul necesar de convergență).** Fie seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$ .

a) Dacă seria este C, atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ;

b) Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  nu există, sau există dar este nenulă, atunci seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$  este

D.

**DEMONSTRAȚIE.** a) Fie

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = s_{n-1} + u_n$$

deci

$$u_n = s_n - s_{n-1}, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Conform ipotezei, există

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{ (suma seriei)}$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

b) Rezultă din a) prin reducere la absurd.

**Comentariu.** Așadar, pentru o serie C este necesar ca termenul ei general să tindă către zero. Reciprocă este falsă, așa cum arată exemplul seriei

$$\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

în acest caz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0,$$

dar seria este D, deoarece

$$s_n = \sqrt{n+1} \rightarrow \infty.$$

În unele formule se utilizează și produse infinite

$$\prod_{n \geq 1} z_n;$$

un astfel de produs se zice convergent, dacă șirul

$$\left( \prod_{k=1}^n z_k \right)_{n \geq 1}$$

are o limită finită; uneori prin logaritmare se trece la serii.

**TEOREMA II. 2 (criteriul general al lui Cauchy pentru serii).** O serie numerică  $\sum_{n \geq 0} u_n$  este C  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$  natural astfel încît

$$\forall n \geq N(\varepsilon) \text{ și } \forall p \geq 1, |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  deci

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p} \quad (n \geq 0, p \geq 1).$$

Concluzia rezultă din următorul șir de echivalențe logice: seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$  este C

$\Leftrightarrow$  șirul  $(s_n)$  este convergent  $\Leftrightarrow$  șirul  $(s_n)$  este fundamental  $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$  natural astfel încît  $\forall n \geq N(\varepsilon), p \geq 1, |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ .

**COROLAR.** Seria armonică

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \text{ este D.}$$

**DEMONSTRAȚIE.** În caz contrar, seria ar rezulta C și pentru  $\varepsilon = \frac{1}{3}$  alegem  $N$  ca

în teorema II.2. Luînd  $n = N$  și  $p = N$ , rezultă

$$u_{N+1} + \dots + u_{2N} < \frac{1}{3}$$

deci

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{2N} > \frac{1}{2N} + \dots + \frac{1}{2N} = \frac{1}{2};$$

$N$  termeni

absurd.

**TEOREMA II. 3. (criteriul lui Abel).** Fie  $\sum_{n \geq 0} u_n$  o serie numerică avînd şirul sumelor parţiale mărginit. Atunci pentru orice şir  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  de numere reale, pozitive, monoton descrescător cu limita zero (se mai scrie  $\alpha_n \downarrow 0$ ), seria  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n u_n$  este C.

**DEMONSTRAŢIE.** Fie  $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ; conform ipotezei,  $\exists M > 0$ ,  $|s_n| \leq M$ , pentru orice  $n \geq 0$ . Avem

$$\begin{aligned} & |\alpha_{n+1}u_{n+1} + \alpha_{n+2}u_{n+2} + \dots + \alpha_{n+p-1}u_{n+p-1} + \alpha_{n+p}u_{n+p}| = \\ & = |\alpha_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + \alpha_{n+2}(s_{n+2} - s_{n+1}) + \dots + \\ & + \alpha_{n+p-1}(s_{n+p-1} - s_{n+p-2}) + \alpha_{n+p}(s_{n+p} - s_{n+p-1})| = \\ & = |-\alpha_{n+1}s_n + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})s_{n+1} + \dots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})s_{n+p-1} + \alpha_{n+p}s_{n+p}| \leq \\ & \leq M(|-\alpha_{n+1}| + |\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}| + \dots + |\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}| + |\alpha_{n+p}|). \end{aligned}$$

Dar  $\forall k$ ,  $\alpha_k - \alpha_{k+1} \geq 0$ , deoarece şirul  $(\alpha_n)$  este monoton descrescător. Va rezulta că

$$\begin{aligned} & |\alpha_{n+1}u_{n+1} + \dots + \alpha_{n+p}u_{n+p}| \leq \\ & \leq M(\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p} + \alpha_{n+p}) = 2M\alpha_{n+1}. \end{aligned}$$

Vom aplica acum teorema II. 2. Fie  $\forall \varepsilon > 0$  fixat. Deoarece  $\alpha_{n+1} \rightarrow 0$ , există un rang  $N(\varepsilon)$  astfel încît  $\forall n \geq N(\varepsilon)$ ,

$$\alpha_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ deci } \forall p \geq 1, \text{ deci } |\alpha_{n+1}u_{n+1} + \dots + \alpha_{n+p}u_{n+p}| \leq 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Conform teoremei II. 2, rezultă că seria  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n u_n$  este C.

**COROLAR 1. (criteriul lui Leibniz).** Fie  $\alpha_n \downarrow 0$  un şir monoton descrescător de numere reale pozitive, cu limita zero. Atunci seria alternată

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha_n = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots \text{ este C.}$$

**DEMONSTRAŢIE.** În criteriul lui Abel II. 3. luăm  $u_n = (-1)^n$ ; şirul sumelor

parţiale 1, 0, 1, 0, ... este mărginit.

**COROLAR 2.** Seria armonică alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \text{ este C;}$$

de asemenea seria  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$  este C.

**DEMONSTRAŢIE.** Se aplică direct criteriul lui Leibniz.

**Definiţia II. 2.** O serie numerică  $\sum_{n \geq 0} u_n$  se numeşte **absolut convergentă**

(AC) dacă seria de numere reale şi pozitive  $\sum_{n \geq 0} |u_n|$  este C.

Orice serie AC este C, aşa cum rezultă din inegalitatea

$$|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + \dots + |u_{n+p}|,$$

aplicînd teorema II.2 de două ori. Reciproca este falsă, aşa cum arată exemplul seriei armonice alternate, care este C dar nu AC.

## 2. Serii de numere reale şi pozitive

Următoarele criterii de convergenţă sunt cele mai utilizate.

**LEMĂ.** O serie de numere reale şi pozitive este C  $\Leftrightarrow$  şirul sumelor ei parţiale este mărginit.

**DEMONSTRAŢIE.** Este suficient să observăm că şirul sumelor parţiale este în acest caz monoton crescător; pentru şiruri monotone, convergenţa este echivalentă cu mărginirea.

**TEOREMA II. 4 (criteriul de comparaţie cu inegalităţi).** Fie  $\sum_{n \geq 0} u_n$ ,  $\sum_{n \geq 0} v_n$  două serii de numere reale şi pozitive astfel încît  $\exists N$  natural

şi  $\forall n \geq N$ ,  $u_n \leq v_n$ . Dacă seria  $\sum_{n \geq 0} v_n$  este C, atunci şi seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$  este C (deci

dacă seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$  este D, atunci  $\sum_{n \geq 0} v_n$  este D).

DEMONSTRAȚIE. Modificând eventual primii  $N$  termeni ai ambelor serii (ceea ce nu modifică natura lor) putem presupune că  $u_n \leq v_n$  pentru orice  $n \geq 0$ . Fie

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n, \quad t_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

deci  $0 \leq s_n \leq t_n$  pentru orice  $n \geq 0$ . Dacă seria  $\sum_{n \geq 0} v_n$  este C, atunci șirul  $(t_n)$  este convergent deci mărginit, deci șirul  $(s_n)$  este mărginit și conform lemei anterioare, seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$  este C.

EXEMPLU. Deoarece

$$\frac{1}{2^n + 5^n} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ pentru orice } n \geq 0 \text{ și seria}$$

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

este C, conform teoremei II. 4 va rezulta că și seria

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n + 5^n} \text{ este C.}$$

**TEOREMA II. 5. (criteriul de comparație la limită).** Fie  $\sum_{n \geq 0} u_n$ ,  $\sum_{n \geq 0} v_n$  două serii de numere reale și pozitive, astfel încât să existe limita

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} \text{ în } \mathbb{R}.$$

a) Dacă  $\sum_{n \geq 0} v_n$  este C, atunci și  $\sum_{n \geq 0} u_n$  este C.

b) Dacă  $l \neq 0$ , atunci cele două serii au aceeași natură.

DEMONSTRAȚIE. a) Conform definiției limitei, există  $N$  natural astfel încât  $0 \leq \frac{u_n}{v_n} < l + 1$  pentru orice  $n \geq N$  deci  $u_n < (l + 1)v_n$ . Putem aplica teorema II. 4.

b) Dacă  $l \neq 0$ , se poate aplica raționamentul de la a) pentru șirul  $\frac{v_n}{u_n} \rightarrow \frac{1}{l}$  și

rezultă că dacă seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$  este C, atunci seria  $\sum_{n \geq 0} v_n$  este C. Astfel, cele două serii sunt simultan C (și ca atare, simultan D).

EXEMPLU. Seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{5n^2 + 1}{n^3 + 9n}$  este D, deoarece are aceeași natură cu seria

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}; \text{ într-adevăr, notînd } u_n = \frac{5n^2 + 1}{n^3 + 9n} \text{ și } v_n = \frac{1}{n}, \text{ rezultă}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 5$$

și aplicăm teorema II. 5.

Un criteriu suficient de convergență, de asemenea util, îl constituie:

**TEOREMA II. 6. (criteriul integral al lui Cauchy).** Fie  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  o funcție monoton descrescătoare, cu valori pozitive. Seria

$$\sum_{n \geq 1} f(n) \text{ este C} \Leftrightarrow \text{șirul } v_n = \int_1^n f(x) dx \text{ este convergent.}$$

DEMONSTRAȚIE. Notăm  $s_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ . Deoarece pentru orice  $x \in [k-1, k]$ ,  $k \geq 2$  avem  $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$ , rezultă prin integrare că:

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1).$$

Însumînd aceste inegalități pentru  $k = 2, \dots, n$ , va rezulta inegalitatea dublă

$$f(2) + \dots + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + \dots + f(n-1), \text{ deci } s_n - f(1) \leq v_n \leq s_{n-1}.$$

Dacă seria

$$\sum_{n \geq 1} f(n)$$

este C, rezultă că șirul  $(s_n)$  este convergent deci este mărginit; deci  $(v_n)$  este mărginit și fiind monoton crescător,  $(v_n)$  este convergent. Reciproc, dacă șirul

$(v_n)$  este convergent, el este mărginit și cum  $0 \leq s_n \leq v_n + f(1)$ , rezultă că șirul  $(s_n)$  va fi mărginit și aplicînd lema de la începutul acestui paragraf, seria

$$\sum_{n \geq 1} f(n) \text{ rezultă C.}$$

**COROLAR.** Fie  $\alpha > 0$ . Seria armonică generalizată

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

(numită și seria marelui matematician german B. RIEMANN, 1826-1866) este C dacă și numai dacă  $\alpha > 1$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Se consideră funcția  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  care îndeplinește condițiile teoremei II. 6. În acest caz,

$$v_n = \int_1^n f(x) dx = \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \text{ pentru } \alpha \neq 1$$

și  $v_n = \ln n$  pentru  $\alpha = 1$  deci șirul  $(v_n)$  este convergent dacă și numai dacă  $\alpha > 1$ .

### 3. Criteriul raportului și criteriul rădăcinii

**TEOREMA II.7** (criteriul raportului; J. D'ALEMBERT, 1717-1783). Fie  $\sum_{n \geq 0} u_n$  o serie de numere reale sau complexe nenule și

$$a = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|, \quad b = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|.$$

Dacă  $a > 1$ , atunci seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$  este D, iar dacă  $b < 1$ , seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$  este AC.

**DEMONSTRAȚIE.** Dacă  $a > 1$ , atunci conform teoremei I.4 rezultă că de la un rang încolo avem  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$ , adică  $|u_{n+1}| > |u_n|$ . Deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| > 0 \text{ și ca atare, } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0.$$

### 3. Criteriul raportului și criteriul rădăcinii

Conform teoremei II.1, seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$  este D.

Presupunem acum că  $b < 1$  și alegem  $v$  astfel încît  $b < v < 1$ . Conform teoremei I.4, rezultă că există un rang  $N$  natural astfel încît  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq v$

pentru orice  $n \geq N$ . Atunci

$$|u_{N+1}| \leq v|u_N|, \quad |u_{N+2}| \leq v|u_{N+1}| \leq v^2|u_N| \text{ și } |u_{N+k}| \leq v^k|u_N|$$

pentru orice  $k \geq 0$ . Seria

$$\sum_{k \geq 0} v^k |u_N| \text{ fiind C,}$$

aplicînd criteriul de comparație II. 4, va rezulta că seria  $\sum_{k \geq 0} |u_{N+k}|$  deci și

seria  $\sum_{n \geq 0} |u_n|$  este C, adică seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$  este AC.

În practică se aplică în mod curent următorul

**COROLAR.** Presupunem că pentru seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$  de numere reale sau complexe există limita

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|.$$

Dacă  $l < 1$  atunci seria este C, iar dacă  $l > 1$ , seria este D.

**EXEMPLUL 1.** Seria  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$  este C, deoarece punînd

$$u_n = \frac{1}{n!} \text{ avem } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Suma acestei serii este egală cu  $e$ , așa cum se știe din liceu.

**EXEMPLUL 2.** Fie seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{4n^2 - 1}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ . Notînd  $u_n = \frac{a^n}{4n^2 - 1}$ , avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |a|.$$

Dacă  $|a| < 1$  seria este C, iar dacă  $|a| > 1$ , seria este D. Criteriul d'Alembert

nu are forța de a decide natura seriei în cazul cînd  $|a| = 1$ . De exemplu, dacă  $a = 1$ , atunci se poate explicita (caz fericit!) șirul numerelor parțiale sau se observă că seria are aceeași natură cu seria Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  deci C. În cazul  $a = -1$  seria rezultă de asemenea C, aplicînd criteriul lui Leibniz.

**TEOREMA II. 8** (criteriul rădăcinii; CAUCHY). Fie  $\sum_{n \geq 0} u_n$  o serie numerică

(în  $\mathbb{R}$  sau  $\mathbb{C}$ ) și  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|}$ . Dacă  $l < 1$  atunci seria este AC, iar dacă  $l > 1$ , seria este D.

**DEMONSTRAȚIE.** Dacă  $l < 1$ , atunci putem alege  $q$  astfel încît  $l < q < 1$ . Conform teoremei I. 4, mulțimea

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt[n]{|u_n|} > q\} \text{ este finită,}$$

deci începînd de la un anumit rang, rezultă că  $\sqrt[n]{|u_n|} \leq q$  adică  $|u_n| \leq q^n$ . Cum

$0 < q < 1$  și seria  $\sum_{n \geq 0} q^n$  este C, rezultă că seria  $\sum_{n \geq 0} |u_n|$  este C.

Dacă  $l > 1$ , atunci din nou aplicînd teorema I.4, rezultă că mulțimea

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt[n]{|u_n|} > 1\} \text{ este infinită,}$$

adică  $|u_n| > 1$  pentru o infinitate de indici  $n$ ; dar atunci șirul  $(u_n)$  nu poate

converge către zero și ca atare, seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$  este D.

**EXEMPLU.** Studiem natura seriei  $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{an+1}{n+2}\right)^n$ ,  $a > 0$ .

Notînd cu  $u_n$  termenul general, rezultă

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{an+1}{n+2} \rightarrow a.$$

Dacă  $a > 1$ , seria este D și dacă  $a < 1$ , este C. Pentru  $a = 1$ , termenul general

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \text{ converge către } \frac{1}{e} \neq 0, \text{ deci seria este D.}$$

**Comentariu.** Dacă  $l = 1$  în corolarul teoremei II. 7 sau în teorema II. 8, atunci nu se

poate trage nici o concluzie. De exemplu, pentru ambele serii  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  se obține  $l = 1$ , una fiind C și alta D. În cazul  $l = 1$  se poate folosi următorul criteriu datorat lui RAABE: fie o serie  $\sum_{n \geq 0} u_n$  de numere reale pozitive astfel încît să existe

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right);$$

dacă  $L > 1$  seria este C și dacă  $L < 1$ , seria este D.

## 4. Proprietăți speciale ale seriilor numerice

**TEOREMA II. 9** (DIRICHLET, 1805-1859). Fie o serie numerică  $\sum_{n \geq 0} u_n$ ,

presupusă AC cu suma  $s$ . Atunci pentru orice permutare a termenilor, seria nou obținută va fi convergentă, cu aceeași sumă  $s$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Notăm cu  $\sum_{n \geq 1} u'_n$  seria obținută prin permutarea termenilor

(de fapt  $u'_n = u_{\sigma(n)}$  unde  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  este o aplicație bijectivă). Fie  $(s_n)$ , respectiv  $(s'_n)$  șirurile de sume parțiale în cele două serii considerate și  $\varepsilon > 0$  arbitrar fixat. Atunci există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încît  $\forall m \geq n \geq N$ ,

$$\sum_{i=n}^m |u_i| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ și } |s - s_N| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alegem  $M$  natural astfel încît pentru  $m \geq M$ ,  $s'_m$  să conțină termenii  $u_1, u_2, \dots, u_N$  și fie  $u_{N+k_1}, \dots, u_{N+k_m}$  ceilalți termeni din suma  $s'_m$ . Rezultă

$$|u_{N+k_1} + \dots + u_{N+k_m}| \leq |u_{N+k_1}| + \dots + |u_{N+k_m}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

deci  $|s'_m - s_N| < \frac{\varepsilon}{2}$  pentru orice  $m \geq M$ . Ca atare,

$$|s - s'_m| \leq |s - s_N| + |s'_m - s_N| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ pentru orice } m \geq M \text{ deci}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s'_m = s.$$

**Comentariu.** Teorema II. 9 arată că seriile AC au proprietăți similare sumelor finite.

Un rezultat, oarecum neașteptat, care deosebește în mod vădit seriile și sumele finite îl constituie

**TEOREMA II. 10 (RIEMANN).** Fie o serie  $\sum_{n \geq 0} a_n$  de numere reale, C dar nu

AC. Atunci pentru orice  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  cu  $\alpha \leq \beta$  există o permutare a termenilor astfel încît pentru seria nou obținută

$$\sum_{n \geq 0} a'_n, \text{ să avem } \lim s'_n = \alpha \text{ și } \lim s'_n = \beta.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Notăm  $p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}$ ,  $q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$ ,  $n \geq 0$ .

Rezultă că seriile  $\sum_{n \geq 1} p_n$ ,  $\sum_{n \geq 1} q_n$  sunt D (deoarece seria  $\sum_{n \geq 0} |a_n|$  este D și

$\sum_{n \geq 0} a_n$  este C).

Fie  $P_1, P_2, \dots$  termenii strict pozitivi din seria  $\sum_{n \geq 0} a_n$ , în ordinea în care apar

și  $Q_1, Q_2, \dots$  modulele termenilor strict negativi, tot în ordinea în care apar.

Seriile  $\sum_{n \geq 0} p_n$  și  $\sum_{n \geq 0} q_n$  se deosebesc de  $\sum_{n \geq 0} p_n$ ,  $\sum_{n \geq 0} q_n$  doar prin termenii

nuli, deci ambele sunt D. Alegem  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  și  $\beta_n \rightarrow \beta$  cu  $\alpha_n < \beta_n$  pentru orice  $n \geq 1$  și șirurile de numere naturale  $(m_n)_{n \geq 0}$ ,  $(k_n)_{n \geq 0}$  astfel încît:

$$P_1 + \dots + P_{m_0} > \beta_0$$

$$P_1 + \dots + P_{m_0} - Q_1 - \dots - Q_{k_0} < \alpha_1$$

.....

$$P_1 + \dots + P_{m_0} - Q_1 - \dots - Q_{k_0} + \dots + P_{m_{n-1}} + \dots + P_{m_n} > \beta_n$$

$$P_1 + \dots + P_{m_0} - Q_1 - \dots - Q_{k_0} + \dots + P_{m_{n-1}+1} + \dots + P_{m_n} - Q_{k_{n-1}} - \dots - Q_{k_n} < \alpha_n,$$

etc.

Considerăm acum seria

$$P_1 + \dots + P_{m_0} - Q_1 - \dots - Q_{k_0} + \dots + P_{m_{n-1}+1} + \dots + P_{m_n} - Q_{k_{n-1}+1} + \dots + Q_{k_n} + \dots$$

Dacă  $x_n$  este suma ei parțială care se termină cu  $P_{m_n}$  și  $y_n$  este suma

parțială care se termină cu  $-Q_{k_n}$ , atunci  $|x_n - \beta_n| \leq P_{m_n}$  și  $|y_n - \alpha_n| \leq Q_{k_n}$  pentru orice  $n \geq 1$  natural deci  $x_n \rightarrow \beta$ ,  $y_n \rightarrow \alpha$ . Alte puncte limită nu sunt și teorema rezultă.

**COROLAR.** Din orice serie de numere reale C, dar nu AC și pentru orice  $t \in \mathbb{R}$  se poate obține prin permutarea termenilor o serie avînd ca sumă  $t$ .

**TEOREMA II. 11 (MERTENS).** Fie două serii  $\sum_{n \geq 0} u_n$ ,  $\sum_{n \geq 0} v_n$  de numere reale

sau complexe, presupuse AC (deci și C) cu sumele  $s$ ,  $t$  respectiv. Se notează:

$$w_k = u_0 v_k + u_1 v_{k-1} + \dots + u_k v_0 = \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j=k}} u_i v_j, \text{ pentru orice } k \geq 0.$$

Atunci seria  $\sum_{k \geq 0} w_k = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \dots$  este AC și are suma  $st$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Să observăm mai întîi că pentru orice sumă finită  $\sigma$  de termeni de forma  $u_i v_j$  există  $N$  natural astfel încît prin înmulțirea sumelor  $s_N = u_0 + u_1 + \dots + u_N$ ,  $t_N = v_0 + v_1 + \dots + v_N$ , să se obțină toți termenii considerați în  $\sigma$ . Atunci

$$|\sigma| \leq \sum |u_i v_j| \leq \sum_{0 \leq i, j \leq N} |u_i v_j| = \sum_{0 \leq i, j \leq N} |u_i| |v_j| =$$

$$= \left( \sum_{i=0}^N |u_i| \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^N |v_j| \right) \leq \left( \sum_{i=0}^{\infty} |u_i| \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^{\infty} |v_j| \right).$$

De aici rezultă că toate sumele parțiale ale seriei  $\sum_{k \geq 0} |w_k|$  sunt mărginite

deci seria  $\sum_{k \geq 0} |w_k|$  este C, iar seria  $\sum_{k \geq 0} w_k$  rezultă AC. Aplicînd teorema II. 9,

suma seriei  $\sum_{k \geq 0} w_k$  este bine determinată, indiferent de ordinea în care sunt

considerați termenii ei; în particular, aceasta se poate obține ca  $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N t_N = st$ .

**EXEMPLU.** Seria  $\sum_{n \geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$  este AC pentru  $|q| < 1$ , cu

suma  $\frac{1}{1-q}$ . Atunci

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} q^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} q^n \right) = 1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} + \dots, \text{ pentru } |q| < 1.$$

**TEOREMA II. 12 (CANTOR).** Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere întregi  $\geq 2$ . Atunci orice număr real  $\alpha$  se poate reprezenta, în mod unic, sub forma:

$$\alpha = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{a_1 a_2 \dots a_i},$$

unde  $c_i \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq c_i \leq a_i - 1$  pentru orice  $i \geq 1$  și  $c_i < a_i - 1$  pentru o infinitate de indici  $i$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Începem cu următoarea

**LEMĂ.** Avem  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{n+i} - 1}{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+i}} = 1$  pentru orice  $n \geq 1$ .

$$\text{Avem } \frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+2} - 1}{a_{n+1} a_{n+2}} + \dots + \frac{a_{n+k} - 1}{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k}} \text{ și}$$

$$\text{lema rezultă, observînd că } a_j \geq 2 \text{ pentru orice } j \text{ deci } 0 < \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k}} \leq \frac{1}{2^k},$$

$$\text{și ca atare, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k}} = 0.$$

Trecem la demonstrația teoremei. Fie  $c_0 = [\alpha]$  deci unicul întreg astfel încît  $c_0 \leq \alpha < c_0 + 1$ . Definim  $\alpha_1 = \alpha - c_0$ ,  $c_1 = [a_1 \alpha_1]$ ,  $\alpha_2 = a_1 \alpha_1 - c_1$  și prin inducție,

$$c_i = [a_i \alpha_i], \quad \alpha_{i+1} = a_i \alpha_i - c_i \text{ pentru } i \geq 1. \quad (1)$$

De aici rezultă că

$$0 \leq \alpha_i < 1 \text{ pentru } i \geq 1, \quad (2)$$

de unde  $0 \leq a_i \alpha_i < a_i$ , iar din definiția numerelor  $c_i$ ,  $0 \leq c_i \leq a_i - 1$ .

Pe de altă parte

$$\alpha = c_0 + \alpha_1 = c_0 + \frac{c_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_1} = c_0 + \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_1 a_2} + \frac{\alpha_3}{a_1 a_2} = \dots =$$

$$= c_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{a_1 a_2 \dots a_i} + \frac{\alpha_{n+1}}{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Notînd  $x_n = c_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{a_1 a_2 \dots a_i}$ , rezultă  $0 \leq \alpha - x_n = \frac{\alpha_{n+1}}{a_1 a_2 \dots a_n} < \frac{1}{2^n}$ , deci  $x_n \rightarrow \alpha$ .

și astfel se obține scrierea din enunț.

Arătăm acum că pentru o infinitate de indici  $i$  avem  $c_i < a_i - 1$ . Dacă prin absurd există  $N$  astfel încît  $c_i = a_i - 1$  pentru orice  $i > N$ , atunci

$$\begin{aligned} \alpha &= c_0 + \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{a_1 \dots a_i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{a_i - 1}{a_1 a_2 \dots a_i} = \\ &= c_0 + \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{a_1 \dots a_i} + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_N} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{N+i} - 1}{a_{N+1} \dots a_{N+i}} = \\ &= c_0 + \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{a_1 \dots a_i} + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_N}, \end{aligned}$$

conform lemei. Ca atare, rezultă că  $\alpha_{N+1} = 1$ , ceea ce contrazice (2).

Stabilim în fine unicitatea scrierii din enunț. Dacă

$$\alpha = b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{a_1 a_2 \dots a_i}$$

cu  $b_i$  avînd proprietățile cerute, avem de arătat că  $b_i = c_i$  pentru orice  $i \in \mathbb{N}$ . Cum  $b_i < a_i - 1$  pentru o infinitate de indici, rezultă că

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{a_1 a_2 \dots a_i} < 1,$$

conform lemei deci  $b_0 = [\alpha] = c_0$ . Dacă există  $n \geq 1$  astfel încît  $b_n \neq c_n$ , să

notăm cu  $N$  cel mai mic întreg cu această proprietate. Dacă am avea de exemplu  $c_N > b_N$  (cazul  $c_N < b_N$  se tratează similar), atunci  $c_N - b_N \geq 1$  și ar

rezultă  $\sum_{i=N}^{\infty} \frac{c_i}{a_1 \dots a_i} = \sum_{i=N}^{\infty} \frac{b_i}{a_1 \dots a_i}$  și cum seriile sunt AC, rezultă

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{b_i - c_i}{a_1 a_2 \dots a_i} = \frac{c_N - b_N}{a_1 a_2 \dots a_N} \geq \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_N}.$$

Dar pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{b_i - c_i}{a_1 a_2 \dots a_i} &< \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{a_i - 1}{a_1 a_2 \dots a_i} = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_N} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{N+i} - 1}{a_{N+1} \dots a_{N+i}} = \\ &= \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_N} \text{ (conform lemei);} \end{aligned}$$

am folosit faptul că pentru o infinitate de indici  $i$  avem  $b_i < a_i - 1$ ; contradicție.

**COROLAR.** Luăm  $a_n = q \geq 2$  întreg, pentru orice  $n \geq 1$ . Atunci orice număr real  $\alpha$  se scrie unic sub forma

$$\alpha = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i q^{-i}, \quad (3)$$

unde  $c_i \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq c_i \leq q - 1$  pentru orice  $i \geq 1$  și  $c_i < q - 1$  pentru o infinitate de indici  $i$ .

Se obține astfel **reprezentarea oricărui număr real în baza  $q$** . Demonstrația teoremei II.12 conține și algoritmul de determinare a cifrelor  $c_i$ .

**EXEMPLU.** Pentru  $q = 10$  se obține scrierea pozițională zecimală, uzuală, a numerelor reale. De exemplu, numărul  $\alpha = 38,487...$  este suma seriei  $38 + 4 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} + \dots$ . Pentru  $q = 2$  se obține scrierea binară. De exemplu,  $\pi = 3,14159...$  se scrie binar astfel:

$$\pi = 3 + 0.2^{-1} + 0.2^{-2} + 1.2^{-3} + 0.2^{-4} + 0.2^{-5} + 1.2^{-6} + \dots = 11,001001...$$

**Comentariu.** Fie  $q \geq 2$  întreg fixat și  $\alpha > 0$  un număr real, cu scrierea (3). În cazul **reprezentării cu virgulă fixă**, se fixează  $u$  locații pentru partea întreagă (presupuse suficiente) și  $v$  locații pentru partea zecimală. Atunci  $\alpha$  este înlocuit printr-o aproximare  $\tilde{\alpha}$ ,  $\alpha \approx \tilde{\alpha}$ ; eroarea absolută este

$$|\alpha - \tilde{\alpha}| = c_{v+1} \cdot \frac{1}{q^{v+1}} + c_{v+2} \cdot \frac{1}{q^{v+2}} + \dots \leq (q-1) \cdot \left( \frac{1}{q^{v+1}} + \frac{1}{q^{v+2}} + \dots \right) = \frac{1}{q^v}.$$

În cazul **reprezentării cu virgulă mobilă**, numărul  $\alpha$  se scrie sub forma  $\alpha = aq^b$  cu condiția de normare  $\frac{1}{q} \leq a < 1$  (pentru ca mantisa  $a$  și exponentul întreg  $b$  să fie unic determinați) și se fixează  $u'$  locații pentru mantisă și  $v'$  locații pentru exponent (pentru fiecare calculator,  $u, v, u', v'$  reprezintă o caracteristică a sa). Reprezentarea în virgulă mobilă permite o lărgire a diapazonului de numere care pot fi supuse procesului de calcul. De exemplu, fie  $q = 10$ ,  $u = 3$ ,  $v = 2$ ,  $u' = 7$ ,  $v' = 2$ . Dacă  $\alpha = 23,7564389$ , atunci reprezentarea cu virgulă fixă corespunzătoare este  $\tilde{\alpha} = 23,75$  iar reprezentarea cu virgulă mobilă este  $\tilde{\alpha} = 0,23756 \cdot 10^2$ . Dar pentru  $\alpha = 300.000$ , reprezentarea cu virgulă fixă nu este posibilă; scriind  $\alpha = 0,3 \cdot 10^6$  este suficient un registru cu  $u' = 2$ ,  $v' = 2$ ; la fel pentru constanta lui PLANCK  $h = 0,6 \cdot 10^{-33}$  Js.

## 5. Calculul aproximativ al sumelor de serii

Fie o serie convergentă de numere reale  $\sum_{n \geq 0} a_n$  avînd suma  $s$  necunoscută.

Pentru calculul lui  $s$ , se recomandă desigur formula aproximativă  $s \approx s_n$ , unde  $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ , fiind utilă și necesară o evaluare a erorii absolute  $|s - s_n|$ . Indicăm două cazuri elementare unde aceasta se poate realiza.

a) Presupunem că există  $N \geq 1$  întreg și  $k \in (0,1)$  astfel încît  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq k$

$\forall n \geq N$ . Atunci  $\forall n \geq N$ ,  $|a_{n+1}| \leq k|a_n|$ ,  $|a_{n+2}| \leq k|a_{n+1}| \leq k^2|a_n|$ , ... și notînd cu  $r_n$  suma seriei  $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$  (numită și **restul** de ordin  $n$  al seriei inițiale), avem  $s = s_n + r_n$  deci

$$|s - s_n| = |r_n| \leq |a_n| (k + k^2 + k^3 + \dots) = |a_n| \frac{k}{1-k}.$$

Dacă se cere să calculăm  $s$  cu aproximație  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$  dat), atunci se determină  $M$  natural minim astfel încît  $M \geq N$  și  $|a_n| \frac{k}{1-k} \leq \varepsilon$  pentru  $n \geq M$ , aplicînd

formula aproximativă  $s \approx a_0 + a_1 + \dots + a_M$ .

**EXEMPLU.** Calculăm suma seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{2n+1}{n^3 n!}$  cu aproximație  $10^{-3}$ . În acest caz,

$$a_n = \frac{2n+1}{n^3 n!}, \text{ deci } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+3)n^3}{(n+1)^4(2n+1)}; \text{ se observă că } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{n+2}.$$

Deci pentru  $n \geq 4$  avem  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \frac{1}{6}$  și putem lua  $N = 4$ ,  $k = \frac{1}{6}$ . Pe de altă

parte, inegalitatea  $|a_n| \frac{k}{1-k} \leq 10^{-3}$  revine la  $\frac{2n+1}{n^3 n!} \frac{1}{5} < \frac{1}{1000}$  și are loc

pentru  $n \geq 5$  și ca atare putem lua  $M = 5$ . Deci suma căutată este

$$s \approx s_5 = \frac{3}{1^3 1!} + \frac{5}{2^3 2!} + \frac{7}{3^3 3!} + \frac{9}{4^3 4!} + \frac{11}{5^3 5!} \approx 3,362.$$

b) Presupunem că  $(a_n)_{n \geq 0}$  este un șir astfel încît  $a_n \downarrow 0$ . Conform

criteriului lui LEIBNIZ, seria alternantă  $\sum_{k \geq 0} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$  este

C; fie  $s$  suma ei și  $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k = s - s_n$ . Vom arăta că  $|r_n| \leq a_{n+1}$  pentru orice  $n \geq 0$  [într-adevăr, se observă că  $\forall k \geq 1, n \geq 0$ ,  $a_{n+1} - a_{n+2} \leq a_{n+1} - a_{n+2} + \dots + (-1)^{k+1} a_{n+k} + (-1)^k a_{n+k+1} \leq a_{n+1}$  și făcând  $k \rightarrow \infty$ ,  $a_{n+1} - a_{n+2} \leq (-1)^{n+1} r_n \leq a_{n+1}$  deci  $|r_n| \leq a_{n+1}$  pentru orice  $n \geq 0$ ]. Așadar, aproximînd  $s$  cu suma parțială  $s_n$ , eroarea absolută este egală cu cel mult modulul primului termen omis.

EXEMPLU. Calculăm suma  $s$  a seriei alternate  $1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \dots$  cu eroare

$10^{-4}$ . Aici  $a_n = \frac{1}{(2n+1)^4}$  și alegem  $n \geq 1$  minim astfel încît  $a_{n+1} \leq \frac{1}{10^4}$  adică

$(2n+3)^4 \geq 10^4$ ; se găsește  $n = 4$ . Atunci  $s \approx s_4 = 1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} \approx 0,98883$ .

## 6. 10 exerciții

1. Să se arate, explicitînd  $s_n$ , că seriile următoare sunt D:

$$a) \sum_{n \geq 0} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}); \quad b) \sum_{n \geq 1} \ln \frac{n+2}{n}.$$

2. Să se calculeze sumele următoare:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+5}{n!}.$$

$$3. \text{ Fie } a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 2.$$

Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ , dar seriile  $\sum_{n \geq 2} a_n$ ,  $\sum_{n \geq 2} b_n$  nu au aceeași natură; se contravine astfel teoremei II. 5?

$$4. \text{ Fie } a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}, \quad n \geq 2. \text{ Să se arate că } a_n \rightarrow 0, \text{ totuși seria alternată}$$

$a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots$  este D. Se contravine criteriului lui LEIBNIZ?

5. 1°. Folosind criteriul lui D'ALEMBERT, să se studieze natura seriilor:

$$a) \sum_{n \geq 1} 2^{-\sqrt{n^2+3}}; \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}; \quad c) \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^n}{n} \quad (\alpha \in \mathbb{R}); \quad d) \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} \quad (\alpha \in \mathbb{C}).$$

2°. Aplicînd criteriul rădăcinii, să se studieze natura seriilor:

$$a) \sum_{n \geq 1} \left( \frac{2n+1}{2n+3} \right)^{n^2}; \quad b) \sum_{n \geq 1} (3 + (-1)^n)^n \alpha^n \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

6. Să se arate că pentru orice șir  $a_n > 0$ , avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

7. Să se arate că seriile  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^2}$  și  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n(n+1)}{n^3}$  sunt AC.

8. Să se dea exemplu de o serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  D astfel încît  $\sum_{n \geq 1} a_n^2$  să fie C și de o serie

$\sum_{n \geq 1} b_n$  C astfel încît  $\sum_{n \geq 1} b_n^2$  să fie D.

9. Să se scrie în baza 2 numerele 100;  $e$ ;  $\alpha = 25,43$  indicînd primele 4 cifre binare de după virgulă.

10. Fie  $a_{mn} = \frac{1}{m+1} \left( \frac{m}{m+1} \right)^n - \frac{1}{m+2} \left( \frac{m+1}{m+2} \right)^n$  pentru  $m \geq 1, n \geq 1$  întregi.

Să se arate că

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \right).$$

## INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI.

1. a)  $s_n = \sqrt[3]{n+1} \rightarrow \infty$ ; b)  $s_n = \ln(n+2) \rightarrow \infty$ .

Deci șirul  $(s_n)$  nu este convergent (deși are limită).

2. Descompunem termenul general în "fracții simple"

$$a) \quad a_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \quad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \rightarrow \frac{3}{4};$$

$$b) \quad a_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right), \quad s_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

c) Se știe că

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Atunci

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n + 5}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1) + 3n + 5}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} + 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e + 3e + 5(e-1) = 9e - 5. \end{aligned}$$

3. Seria  $\sum_{n \geq 2} b_n$  este C, conform criteriului lui LEIBNIZ; apoi seria  $\sum_{n \geq 2} (b_n - a_n)$  este D deci seria  $\sum_{n \geq 2} a_n$  este D. Nu se contravine teoremei II. 5 pentru că  $a_n$  și  $b_n$  nu sunt numere pozitive. Deci condiția de pozitivitate în enunțul teoremei II. 5 este esențială.

4. Șirul  $a_n$  nu este monoton descrescător.

5. 1<sup>o</sup>. a) C;

b)  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$  deci seria este C;

c)  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow |\alpha|$ . Deci dacă  $|\alpha| < 1$ , atunci seria este C; dacă  $|\alpha| > 1$  seria este D; dacă  $\alpha = 1$  seria este D și dacă  $\alpha = -1$  seria este C, fiind seria armonică alternată;

d)  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|\alpha|}{n+1} \rightarrow 0$  deci seria este AC pentru orice  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

2<sup>o</sup>. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2n+3} \right)^n = \frac{1}{e} < 1$  și seria este C;

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (3 + (-1)^n) |\alpha| = 3|\alpha|$ . Dacă  $|\alpha| < \frac{1}{3}$  seria este C și dacă  $|\alpha| > \frac{1}{3}$ , seria este D. Dacă  $\alpha = \pm \frac{1}{3}$ , seria este D deoarece termenul general nu tinde către zero.

6. Să demonstrăm inegalitatea  $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Fie  $a = \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ; dacă  $a = +\infty$

atunci evident  $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq a$ . Dacă  $a < +\infty$ , fie  $b > a$ ; avem  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq b$  pentru  $n \geq N$ ;

deducem  $a_{N+p} \leq b^p a_N \forall p > 0$ , de unde  $a_n \leq a_N b^{-N} b^n$ ,  $n \geq N$  și deci  $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_N b^{-N} b^n} = b$ ,

de unde  $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq b$ ,  $\forall b > a$  deci  $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq a$  etc.

7. Avem  $\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$  și  $\left| \frac{(-1)^n(n+1)}{n^3} \right| \leq \frac{2}{n^2}$  și se aplică teorema II.4.

8. Putem lua  $a_n = \frac{1}{n}$ ;  $b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

9.  $100 = 2^6 + 2^5 + 2^2 = 1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 = 1100100$ ;  
 $e \approx 2,7182818 \approx 1.2^1 + 0.2^0 + 1.2^{-1} + 0.2^{-2} + 1.2^{-3} + 1.2^{-4} + \dots \approx 10,1011$ ;  
 $\alpha = 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 + 0.2^{-1} + 1.2^{-2} + 1.2^{-3} + 0.2^{-4} + \dots \approx 11001,0110$ .

10. Pentru orice  $m \geq 1$  fixat, avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \frac{1}{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{m}{m+1} \right)^n = \frac{1}{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{m+1}{m+2} \right)^n = \frac{m}{m+1} - \frac{m+1}{m+2} \text{ deci}$$

$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{m}{m+1} - \frac{m+1}{m+2} \right) = -\frac{1}{2}$ ; pe de altă parte,  $\forall n \geq 1$ , fixat, notînd

$b_n = \frac{1}{m+1} \left( \frac{m}{m+1} \right)^n$ , avem  $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} (b_m - b_{m+1}) = b_1 = \frac{1}{2^{n+1}}$  și ca atare,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

În general, pentru un șir dublu **finit** de numere reale sau complexe ( $a_{mn}$ ) avem  $\sum_m \sum_n a_{mn} = \sum_n \sum_m a_{mn}$ , dar pentru serii acest rezultat nu are loc, așa cum ne arată exercițiul. Se poate arăta că are totuși loc pentru serii dublu absolut convergente, în analogie cu teorema II. 9.

## ANEXĂ LA LECȚIA A II-A

### Semnale discrete

Se numește **mulțime-timp** orice mulțime  $\mathcal{S}$  pe care este definită o relație de ordine totală " $\leq$ "; elementele lui  $\mathcal{S}$  se numesc **momente**.

EXEMPLE. În cazul  $\mathcal{S} = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  sau  $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}$ , se spune că timpul este **discret**. Dacă  $\mathcal{S}$  este un interval, se spune că timpul este **continuu** (sau mai corect, **continual**). Dacă  $\mathcal{S} = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\}$  este o mulțime finită de momente, se spune că avem un timp **finit**.

Dacă  $\mathcal{S}$  este o mulțime-timp, orice funcție  $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$  se numește **semnal**; pentru orice  $t \in \mathcal{S}$ , numărul  $f(t)$  se numește eșantionul lui  $f$  la momentul  $t$ . Se pot considera **semnale discrete, continue sau finite**, după tipul mulțimii de momente. Definiția

anterioară este totuși restrictivă, deoarece nu cuprinde cazul impulsurilor, al semnalelor aleatoare sau al semnalelor multidimensionale (imagini).

### EXEMPLUL 1. Treapta unitate

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } t < 0 \\ 1 & \text{dacă } t \geq 0 \end{cases}$$

(notată cu  $h$  după numele inginerului englez O. HEAVISIDE, 1850 - 1925) și funcția de eșantionare

$$sa: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad sa(t) = \begin{cases} (\sin t)/t & \text{dacă } t \neq 0 \\ 1 & \text{dacă } t = 0 \end{cases}$$

sunt exemple de semnale continue.

EXEMPLUL 2. Orice semnal discret  $s: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  se identifică prin șirul  $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  al

eșantioanelor sale. Treapta unitate discretă  $u$  este definită prin  $u(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$ .

Pentru orice  $k \in \mathbb{Z}$ , impulsul discret unitar la momentul  $k$  este semnalul discret  $\delta_k$  definit prin

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k \end{cases}; \text{ se notează } \delta = \delta_0.$$

Vom nota cu  $S_d$  mulțimea semnalelor discrete  $s = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  cu  $x_n \in \mathbb{C}$ . Dacă  $t = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in S_d$ , definim  $s = t \Leftrightarrow x_n = y_n, \forall n \in \mathbb{Z}$ ;  $s + t = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  și  $\lambda s = (\lambda x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  pentru orice  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Semnalul nul are toate eșantioanele nule. Se consideră următoarele clase particulare de semnale discrete:

$$S_+ = \{s = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid x_n = 0 \text{ pentru orice } n < 0\} \text{ (semnale cu suport pozitiv);}$$

$$l_1 = \left\{s \in S_+ \mid \text{seria } \sum_{n \geq 0} |x_n| \text{ este } C\right\}; \quad l_2 = \left\{s \in S_+ \mid \text{seria } \sum_{n \geq 0} |x_n|^2 \text{ este } C\right\}.$$

**TEOREMĂ.** Mulțimile  $S_d, S_+, l_1$  și  $l_2$  sunt spații vectoriale peste  $\mathbb{C}$ , relativ la operațiile  $s + t, \lambda s$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ). Totodată au loc incluziunile  $l_1 \subset l_2 \subset S_+ \subset S_d$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Faptul că  $S_d$  este  $\mathbb{C}$ -spațiu vectorial rezultă direct din definiția noțiunii de spațiu vectorial. Apoi aplicăm criteriul subspațiului. Dacă  $s, t \in S_+$ , evident  $s + t$  și  $\lambda s$  aparțin la  $S_+$ , deci  $S_+$  este un subspațiu al lui  $S_d$ . Apoi dacă  $s = (x_n)_{n \geq 0}$  și  $t = (y_n)_{n \geq 0}$  aparțin la  $l_1$ , atunci aplicând inegalitățile  $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$  și criteriul comparației, rezultă că seria  $\sum_{n \geq 0} |x_n + y_n|$  este  $C$  deci  $s + t \in l_1$ ; evident,  $\lambda s \in l_1$

pentru orice  $\lambda \in \mathbb{C}$  deci  $l_1$  este subspațiu al lui  $S_d$ .

Să presupunem acum că  $s, t \in l_2$ . Din inegalitatea  $(|x_n| - |y_n|)^2 \geq 0$ , rezultă

$$|x_n y_n| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2) \text{ deci seria } \sum_{n \geq 0} |x_n y_n| \text{ este } C \text{ și cum}$$

$$|x_n + y_n|^2 = (x_n + y_n)^2 \leq |x_n|^2 + 2|x_n y_n| + |y_n|^2, \text{ rezultă că seria } \sum_{n \geq 0} |x_n + y_n|^2 \text{ este } C,$$

adică  $s + t \in l_2$ . Dacă  $s \in l_2$  și  $\lambda \in \mathbb{C}$ , atunci evident  $\lambda s \in l_2$ . A rămas de dovedit incluziunea  $l_1 \subset l_2$ ; într-adevăr, dacă  $s \in l_1$ ,  $s = (x_n)$ , atunci  $x_n \rightarrow 0$  deci șirul este mărginit deci  $\exists M > 0, |x_n| \leq M$  pentru orice  $n \geq 0$ . Atunci  $|x_n|^2 \leq M |x_n|$  deci seria  $\sum_{n \geq 0} |x_n|^2$  este  $C$  și ca atare  $s \in l_2$ .

**Comentariu.** Spațiul  $l_2$  este generalizarea directă infinit dimensională a spațiului  $\mathbb{R}^n$ ; punctul  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  se identifică prin semnalul  $s = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0)$  care aparține lui  $l_2$ . Semnalele  $s = (x_n)_{n \geq 0}$  din  $l_2$  se mai numesc semnale de energie finită;

numărul real și pozitiv  $\|s\| = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}$  se numește **energia** lui  $s$ . Dacă  $s, t \in l_2$ ,  $s = (x_n), t = (y_n)$ , atunci se definește **produsul scalar**:

$$\langle s, t \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Inegalitatea  $|\langle s, t \rangle| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$  arată că seria din membrul drept este AC deci  $C$ .

O operație importantă o constituie cea de convoluție.

**Definiție.** Dacă  $s = (x_n)_{n \geq 0}$  și  $t = (y_n)_{n \geq 0}$  sunt semnale din  $S_+$ , atunci se notează

$$z_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \dots + x_n y_0, \text{ pentru orice } n \geq 0; \text{ semnalul } s * t = (z_n)_{n \geq 0} \text{ se}$$

numește **convoluția** semnalelor  $s$  și  $t$ . Convoluția se poate defini și dacă  $x, y \in S_d$ , în ipoteza că seriile  $z_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{n-k}$  sunt  $C, \forall n \in \mathbb{Z}$ .

Proprietățile principale ale convoluției sunt următoarele:

a) Dacă se consideră seriile formale

$$\sum_{n \geq 0} x_n u^n = x_0 + x_1 u + x_2 u^2 + \dots, \quad \sum_{n \geq 0} y_n u^n = y_0 + y_1 u + y_2 u^2 + \dots \text{ asociate lui } s \text{ și } t$$

respectiv, atunci produsul acestor serii va fi

$$\left( \sum_{n \geq 0} x_n u^n \right) \left( \sum_{n \geq 0} y_n u^n \right) = x_0 y_0 + (x_0 y_1 + x_1 y_0) u + (x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0) u^2 + \dots =$$

$$= z_0 + z_1 u + z_2 u^2 + \dots \text{ și aceasta este tocmai seria formală asociată convoluției } s * t.$$

b) Pentru orice  $s \in S_+$  avem  $\delta * s = s$  și  $s * \delta = s$ .

c) Mulțimea  $S_+$  este un inel comutativ relativ la operațiile  $s + t, s * t$  cu elementele neutre  $0$  și respectiv  $\delta$ .

d) Pentru orice semnal  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  și pentru orice  $k \in \mathbb{Z}$ , semnalul  $x * \delta_k$  are eșantioanele  $(x_{n-k})_{n \in \mathbb{Z}}$  și se numește **întîrziatul** lui  $x$  cu  $k$  pași.

## LECȚIA A III-A

# SPAȚII METRICE, APLICAȚII CONTINUE

### INTRODUCERE

Scopul acestui capitol este acela de a studia conceptul de continuitate într-un cadru natural și suficient de general. Reamintim că o funcție reală  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  ( $A \subset \mathbb{R}$ ) este continuă într-un punct  $a \in A$  dacă pentru orice șir  $x_n \rightarrow a$  ( $x_n \in A$ ), rezultă  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ . Pentru extinderea la funcții mai generale, este necesară extinderea ideii de "apropiere", de convergență și un pas important îl constituie introducerea noțiunii de distanță și implicit de spațiu metric. Cele mai întâlnite mulțimi care apar în Analiza matematică sunt submulțimi ale unor spații metrice; astfel, vom vedea că dreapta reală  $\mathbb{R}$ , planul complex  $\mathbb{C}$ , spațiul  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ), mulțimea funcțiilor mărginite  $A \rightarrow \mathbb{R}$  sunt în mod natural spații metrice. În loc de a face o teorie separată pentru fiecare caz în parte, vom stabili o serie de proprietăți generale, valabile în orice spațiu metric și apoi vom adăuga proprietăți suplimentare, specifice unor situații particulare.

Noțiunea de spațiu metric este datorată matematicianului francez M. FRÉCHET (1878 – 1973) și astăzi putem vorbi de distanță nu numai între puncte sau numere, dar și între funcții, între matrice etc. și s-a putut degaja o teorie sistematică a convergenței șirurilor și a aproximațiilor succesive.

### 1. Distanță, convergență. Principiul contracției.

**Definiția III. 1.** Fie  $X$  o mulțime nevidă. Se numește **distanță pe  $X$**  orice funcție  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât:

$D_1 \forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$  și  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;

$D_2 \forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$ ;

$D_3$  Pentru orice  $x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ;

adică au loc proprietățile de pozitivitate, simetrie și inegalitatea triunghiului. Perechea  $(X, d)$  se numește **spațiu metric** și elementele lui  $X$  se numesc **puncte**.

**Comentariu.** Așadar, oricărei perechi  $x, y$  de puncte din  $X$  i se asociază un număr real pozitiv sau nul bine determinat,  $d(x, y)$ , numit distanța între  $x$  și  $y$ . Dacă  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ , atunci prin inducție după  $n$  rezultă că:

### 1. Distanță, convergență. Principiul contracției

61

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n).$$

Pe o aceeași mulțime  $X$  pot fi definite în general mai multe distanțe, deci mai multe structuri de spațiu metric. Atunci când nu este pericol de confuzie (adică distanța este subînțeleasă), spațiul metric  $(X, d)$  va fi notat pur și simplu cu  $X$ .

**EXEMPLUL 1.**  $X = \mathbb{R}$  cu distanța euclidiană uzuală  $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$  este un spațiu metric. Doar în cazuri speciale, precizate în mod expres, se vor utiliza și alte distanțe (de exemplu,  $d(x, y) = 2|x - y|$ ) pe  $\mathbb{R}$ .

**EXEMPLUL 2.**  $X = \mathbb{C}$  este un spațiu metric relativ la distanța euclidiană

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

**EXEMPLUL 3.** Fie  $X = \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$  fixat); pentru orice  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$

se definește **distanța euclidiană**  $d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$ . Verificarea proprietăților  $D_1, D_2$  este imediată, iar pentru  $D_3$  se aplică inegalitatea

$$\left( \sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{1/2}; u_i, v_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$$

care la rândul ei rezultă imediat din inegalitatea lui Cauchy

$$\left( \sum_{i=1}^n u_i v_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n u_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n v_i^2 \right).$$

În lipsa unor precizări speciale, vom subînțelege că pe  $\mathbb{R}^n$  este considerată distanța euclidiană. Remarcăm că spațiile metrice  $\mathbb{R}^2$  și  $\mathbb{C}$  sunt identice. O matrice din  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  se poate identifica natural cu un punct din  $\mathbb{R}^{mn}$  astfel că mulțimea matricilor  $m \times n$  este un spațiu metric.

**EXEMPLUL 4.** Orice mulțime nevidă  $X$  are o structură de spațiu metric. Anume, definim  $\forall x, y \in X$ , distanța

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \neq y \\ 0 & \text{dacă } x = y \end{cases}$$

Se verifică ușor  $D_1, D_2, D_3$ ; un astfel de spațiu metric se numește **discret**.

**EXEMPLUL 5.** Fie  $(Y, d)$  un spațiu metric și  $X \subset Y$  o submulțime nevidă. Atunci distanța  $d$  restrânsă la  $X$  (de fapt la  $X \times X$ ) se numește **distanță indusă** pe  $X$ . Astfel, orice submulțime nevidă a lui  $\mathbb{R}^n$  este un spațiu metric. De exemplu, gândind că  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  (prin identificarea punctului  $(x_1, \dots, x_n)$  cu  $(x_1, \dots, x_n, 0)$ ), distanța euclidiană pe  $\mathbb{R}^{n+1}$  induce distanța euclidiană pe  $\mathbb{R}^n$ .

EXEMPLUL 6. Fie  $A$  o submulțime nevidă și  $X = \mathcal{M}(A)$  mulțimea funcțiilor mărginite  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  (adică mulțimea  $f(A)$  este mărginită sau echivalent,  $\exists M > 0$  astfel încât  $\forall x \in A, |f(x)| \leq M$ ). Pentru orice  $f, g \in X$  definim  $d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$ . Proprietățile  $D_1, D_2$  sunt evidente; apoi, dacă  $f, g, h \in X$ , atunci

$$\forall x \in A, |f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq d(f, h) + d(g, h).$$

Rezultă că  $d(f, g) \leq d(f, h) + d(g, h)$  deci  $D_3$ . Distanța "sup" astfel definită este numită **distanța convergenței uniforme** (justificarea terminologiei va fi dată ulterior). Distanța  $d(f, g)$  reprezintă lungimea cea mai mare a "segmentelor" care unesc punctele  $(x, f(x))$  și  $(x, g(x))$ ,  $x \in A$ .

EXEMPLUL 7. Un exemplu insolit îl constituie hipercubul. Fie  $B = \{0, 1\}$  codul binar. Pentru  $u, v \in B$ , notăm  $\delta(u, v) = 1$  dacă  $u \neq v$  și  $\delta(u, v) = 0$  dacă  $u = v$ . Evident  $B^2$  are patru elemente, care pot fi asimilate cu vîrfurile unui pătrat, iar  $B^3$  are 8 elemente - vîrfuri ale unui cub. Mulțimea  $X = B^n$  are  $2^n$  elemente și se numește **hipercub** de dimensiune  $n$ . Pentru orice  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,

$y = (y_1, \dots, y_n)$  din  $B^n$ , se definește  $d(x, y) = \sum_{i=1}^n \delta(x_i, y_i)$ , numărul acelor  $i$

$1 \leq i \leq n$  astfel încît  $x_i \neq y_i$  (numit și numărul de necoincidențe în șirurile  $x$  și  $y$ ). Proprietățile  $D_1$  și  $D_2$  sunt evidente; apoi,  $\forall x, y, z \in B^n$  avem

$\delta(x_i, z_i) \leq \delta(x_i, y_i) + \delta(y_i, z_i)$  pentru  $i = \overline{1, n}$  și însumînd, rezultă  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  deci  $D_3$ . Distanța  $d$  se numește **distanța Hamming** pe hipercub. Fiecare vîrf  $v$  al hipercubului este unit cu vîrfurile aflate la distanță Hamming 1, deci care diferă de  $v$  prin cel mult un bit. Hipercubul  $B^n$  este în corespondență bijectivă cu mulțimea de numere naturale  $A_n = \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ . Orice număr  $x \in A_n$  are o reprezentare unică în baza 2, de formă

$$x = \sum_{p=1}^n a_p \cdot 2^{p-1} \text{ cu } a_p \in B \text{ și poate fi identificat cu punctul } (a_1, a_2, \dots, a_n) \in B^n.$$

**Comentariu.** Am spus că elementele unui spațiu metric se mai numesc puncte și de fapt în anumite situații, funcțiile, matricele, șirurile de biți etc. pot fi considerate ca puncte. Cea mai importantă disponibilitate a spațiilor metrice o constituie posibilitatea de a defini convergența șirurilor de puncte.

**Definiția III. 2.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric. Un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  de puncte din  $X$  are **limita**  $x$  (sau este **convergent către**  $x \in X$ ) dacă  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ , adică  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$  natural astfel încît  $n \geq N(\varepsilon)$  să implice  $d(x_n, x) < \varepsilon$ ; se mai scrie  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  sau  $x_n \rightarrow x$ . Șirul  $(x_n)$  se numește **șir Cauchy** dacă  $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N(\varepsilon)$  astfel încît  $\forall m, n \geq N(\varepsilon), d(x_m, x_n) < \varepsilon$ .

Orice șir convergent are limită **unică**. Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x$  și  $x_n \rightarrow x'$  în  $X$ , atunci pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un rang de la care începînd avem simultan  $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, d(x_n, x') < \frac{\varepsilon}{2}$  deci  $d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ , adică  $0 \leq d(x, x') < \varepsilon$ ; ca atare,  $d(x, x') = 0$  și  $x = x'$ .

EXEMPLUL 1. Șirul  $x_n = \left( \frac{2n+1}{n}, \frac{1}{n}, 3^{-n} \right), n \geq 1$ , converge în  $\mathbb{R}^3$  către

$$x = (2, 0, 0), \text{ deoarece } d(x_n, x) = \left[ \left( \frac{2n+1}{n} - 2 \right)^2 + \frac{1}{n^2} + 3^{-2n} \right]^{1/2} \rightarrow 0.$$

EXEMPLUL 2. Pentru șirul de funcții  $f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x+n}{n+1}$  și pentru funcția constantă  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1$  avem

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{x+n}{n+1} - 1 \right| = \sup_{x \in [-1, 1]} \frac{|x-1|}{n+1} = \frac{2}{n+1};$$

ășadar  $f_n \rightarrow f$  în spațiul metric  $\mathcal{M}([-1, 1])$  al funcțiilor reale mărginite pe intervalul  $[-1, 1]$ .

EXEMPLUL 3. Într-un spațiu discret, un șir este convergent dacă și numai dacă el este constant de la un anumit rang (într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x$ , atunci există  $N$  natural astfel încît  $\forall n \geq N, d(x_n, x) < 1/2$ , deci  $d(x_n, x) = 0$  adică  $x_n = x$  pentru orice  $n \geq N$ ).

EXEMPLUL 4. Un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  de puncte în  $\mathbb{R}^p, p \geq 1, x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^p)$  este convergent către un punct  $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$  dacă și numai dacă cele  $p$  șiruri componente sunt convergente, anume  $x_n^1 \rightarrow a_1, x_n^2 \rightarrow a_2, \dots, x_n^p \rightarrow a_p$  (în  $\mathbb{R}$ ). Este

suficient de observat că  $|x_n^k - a_k| \leq d(x_n, a)$  pentru orice  $1 \leq k \leq p$ , că

$$d(x_n, a) \leq \sum_{k=1}^p |x_n^k - a_k| \text{ și de aplicat lema cleștelui. Așadar,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^1, \dots, x_n^p) = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^1, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^p)$$

adică limita șirurilor în  $\mathbb{R}^p$  se face pe componente.

Revenim la cazul general și fie  $(X, d)$  un spațiu metric. Se demonstrează imediat că orice șir convergent  $x_n \rightarrow x$  este un șir Cauchy, deoarece  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ,  $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n)$  și se aplică definițiile.

**Definiția III. 3.** Spațiul metric  $X$  se numește **complet** dacă orice șir Cauchy este convergent (în  $X$ ).

**EXEMPLUL 1.**  $\mathbb{R}$  și  $\mathbb{C}$  sunt spații metrice complete, conform criteriului general al lui Cauchy (teorema I.3.). De asemenea, pentru orice numere reale  $a < b$ , intervalele  $(-\infty, a]$ ,  $[a, b]$ ,  $[a, \infty)$  sunt spații metrice complete.

**EXEMPLUL 2.** Orice spațiu metric discret este complet (căci orice șir Cauchy este constant de la un rang încolo, deci convergent).

**EXEMPLUL 3.** Dar  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  nu este un spațiu metric complet, cu distanța indusă. Pentru a dovedi acest lucru, este suficient un contraexemplu; să considerăm un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  în  $\mathbb{Q}$  convergent în  $\mathbb{R}$  către  $\sqrt{2}$ .  $(x_n)$  este un șir Cauchy în  $\mathbb{R}$  deci este un șir Cauchy în  $\mathbb{Q}$ . Dacă  $\mathbb{Q}$  ar fi complet, ar rezulta că  $x_n \rightarrow \alpha$ , cu  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . Din unicitatea limitei ar rezulta că  $\alpha = \sqrt{2}$  deci  $\sqrt{2}$  ar fi rațional; contradicție. Așadar, în  $\mathbb{Q}$  șirurile Cauchy nu rezultă convergente în general.

**Comentariu.** Se poate arăta că orice spațiu metric  $X$  se poate "completa", în sensul că există un spațiu metric complet minimal într-un anumit sens  $\tilde{X}$  și o aplicație injectivă  $f: X \rightarrow \tilde{X}$ , astfel încât pentru orice șir Cauchy  $(x_n)$  în  $X$ , șirul  $(f(x_n))$  este convergent în  $\tilde{X}$ . De exemplu, pentru  $X = \mathbb{Q}$  se poate lua  $\tilde{X} = \mathbb{R}$ .

Teorema următoare furnizează exemple importante de spații metrice complete.

### TEOREMA III. 1.

- a) Spațiul  $\mathbb{R}^p$  ( $p \geq 1$  fixat) este complet, relativ la distanța euclidiană;  
b) Pentru orice mulțime  $A$ , mulțimea  $\mathcal{M}(A)$  a funcțiilor mărginite  $A \rightarrow \mathbb{R}$  este un spațiu metric complet, relativ la distanța "sup".

**DEMONSTRAȚIE.** a) Am văzut că un șir  $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^p)$  de puncte în  $\mathbb{R}^p$  este convergent dacă și numai dacă cele  $p$  șiruri componente sunt convergente în  $\mathbb{R}$ . Din inegalitățile evidente

$$|x_m^k - x_n^k| \leq d(x_m, x_n), k = \overline{1, p} \text{ și } d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=1}^p |x_m^k - x_n^k|$$

valabile pentru orice  $m, n \in \mathbb{N}$ , rezultă că șirul  $(x_n)$  este Cauchy în  $\mathbb{R}^p$  dacă și numai dacă cele  $p$  șiruri componente sunt Cauchy în  $\mathbb{R}$ . De aici și folosind teorema I. 3., rezultă că orice șir Cauchy în  $\mathbb{R}^p$  este convergent.

b) Fie  $(f_n)_{n \geq 0}$  un șir Cauchy în  $\mathcal{M}(A)$ . Deoarece  $\forall x \in A$ ,  $|f_m(x) - f_n(x)| \leq d(f_m, f_n)$ , rezultă că șirul de numere reale  $(f_n(x))$  este Cauchy; ca atare, acest șir va converge către un număr real, depinzând de  $x$ , pe care îl notăm cu  $g(x)$ . Astfel este bine definită o funcție  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Vom arăta că  $g$  este mărginită și că  $f_n \rightarrow g$  în  $\mathcal{M}(A)$ . Deoarece  $(f_n)_{n \geq 0}$  este șir Cauchy rezultă

că  $\exists N(\varepsilon) = N$  natural astfel încât  $\forall n \geq N$ ,  $\forall p \geq 1$ ,  $d(f_{n+p}, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ ; luând

$n = N$ , avem  $d(f_{N+p}, f_N) < \frac{\varepsilon}{2}$  deci  $\forall x \in A$ ,  $\forall p \geq 1$ ,  $|f_{N+p}(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Făcând

$p \rightarrow \infty$  și ținând cont că  $f_{N+p}(x) \rightarrow g(x)$ , rezultă că  $\forall x \in A$ ,  $|g(x) - f_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

deci  $|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |f_N(x)|$ . Deoarece  $f_N$  este o funcție mărginită, rezultă că  $g$

este mărginită, adică  $g \in \mathcal{M}(A)$ . Din relația  $d(f_{n+p}, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$  pentru  $n \geq N$ ,

rezultă că  $\forall x \in A$ ,  $\forall n \geq N$ ,  $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  și făcând  $p \rightarrow \infty$ , rezultă

$|g(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , deci  $d(f_n, g) < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq N$ , adică  $f_n \rightarrow g$  în  $\mathcal{M}(A)$ .

Un rezultat interesant și important este cuprins în următoarea teoremă, numită și **principiul contracției**, datorat matematicianului polonez ST. BANACH (1892 - 1945).

**TEOREMA III. 2.** (Banach). Fie  $(X, d)$  un spațiu metric complet și  $\varphi: X \rightarrow X$  o aplicație cu proprietatea că există o constantă  $k \in [0, 1)$  astfel încât  $\forall x, y \in X$ ,  $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq kd(x, y)$ . Atunci există și este unic un punct  $\xi \in X$  astfel încât  $\varphi(\xi) = \xi$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Fixăm un punct  $x_0 \in X$  și definim

$$x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \dots$$

Se obține astfel un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  în  $X$  și vom arăta că este un șir Cauchy. Mai întâi se observă că

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(\varphi(x_{n-1}), \varphi(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \leq k^n d(x_0, x_1)$$

pentru orice  $n \geq 0$ ; atunci  $\forall p \geq 1$ , punând  $\delta = d(x_0, x_1)$ , rezultă că

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq$$

$$\leq k^n \delta + k^{n+1} \delta + \dots + k^{n+p-1} \delta = k^n \delta \frac{1-k^p}{1-k} \leq k^n \frac{\delta}{1-k}.$$

Deoarece  $0 \leq k < 1$ , rezultă  $k^n \rightarrow 0$  deci șirul  $(x_n)$  este Cauchy. Cum  $X$  este presupus complet, rezultă că  $\exists \xi \in X$  astfel încît  $x_n \rightarrow \xi$ . Deoarece  $0 \leq d(\varphi(x_n), \varphi(\xi)) \leq kd(x_n, \xi)$ , aplicînd lema cleștelui va rezulta că  $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(\xi)$ , adică  $x_{n+1} \rightarrow \varphi(\xi)$ . Deoarece  $x_{n+1} \rightarrow \xi$ , din unicitatea limitei unui șir convergent rezultă  $\varphi(\xi) = \xi$ . Unicitatea unui astfel de punct se demonstrează astfel: dacă  $\xi' \in X$  și  $\varphi(\xi') = \xi'$ , atunci  $d(\xi, \xi') = d(\varphi(\xi), \varphi(\xi')) \leq kd(\xi, \xi')$  și cum  $k < 1$ , rezultă  $d(\xi, \xi') = 0$  și ca atare  $\xi = \xi'$ .

**Comentariu.** O aplicație  $\varphi: X \rightarrow X$  ca în enunț se mai numește **contracție** a spațiului  $X$ , de coeficient  $k$ ; un punct  $\xi \in X$  astfel încît  $\varphi(\xi) = \xi$  se numește un **punct fix** al lui  $\varphi$ . Atunci principiul contracției se mai enunță pe scurt astfel: **orice contracție a unui spațiu metric complet are un punct fix și acesta este unic**. Termenul de contracție este legat de micșorarea distanțelor, anume distanța dintre imaginile  $\varphi(x), \varphi(y)$  este mai mică decît distanța între  $x$  și  $y$ , oricare ar fi punctele  $x, y$  din  $X$ . Teorema III. 2 se mai numește "o teoremă de punct fix". Metoda de demonstrație folosită pentru a determina punctul fix  $\xi$  al lui  $\varphi$ , soluție a ecuației  $\varphi(x) = x$ , poartă numele de **metoda aproximațiilor succesive** (ale lui  $\xi$ ); prima aproximație,  $x_0$ , este aleasă arbitrar, apoi  $x_1 = \varphi(x_0)$ ,  $x_2 = \varphi(x_1)$  etc. și acest șir de aproximații converge către  $\xi$ . În aplicarea practică a teoremei III. 2 este necesar de evidențiat o pereche  $(X, \varphi)$  asociată în mod corespunzător ecuației de plecare.

**COROLAR.** În condițiile teoremei III. 2, pentru orice  $n > 0$  are loc inegalitatea

$$d(x_n, \xi) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

**DEMONSTRAȚIE.** În cursul demonstrației teoremei am văzut că pentru orice

$$n \geq 0, p \geq 1, \text{ avem } d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{k^n \delta}{1-k} \text{ și facem } p \rightarrow \infty.$$

Așadar, pentru aproximarea  $\xi = x_N$ , inegalitatea anterioară permite o estimare a erorii absolute  $d(\xi, x_N)$ . De exemplu, dacă se dorește calculul lui  $\xi$  cu o aproximație mai mică decît  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$  prescris), este suficient să alegem

$$N \text{ minim astfel încît } \frac{k^N}{1-k} \delta < \varepsilon \text{ și } \xi \text{ se aproximează cu } x_N, \text{ calculul lui } x_N \text{ fiind}$$

făcut într-un număr finit de pași.

**EXEMPLUL 1.** Fie  $X$  unul din intervalele  $(-\infty, a]$ ,  $[a, b]$ ,  $[a, \infty)$  sau  $\mathbb{R}$ , care sunt spații metrice complete; presupunem că o ecuație  $f(x) = 0$  se scrie echivalent sub forma  $x = \varphi(x)$ , unde  $\varphi: X \rightarrow X$  este o funcție derivabilă astfel încît

$k = \sup_{x \in X} |\varphi'(x)| < 1$ . Atunci  $\varphi$  este o contracție de coeficient  $k$ , deoarece  $\forall x, y \in X$  există  $v$  între  $x$  și  $y$  astfel încît

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)| = |(x-y) \cdot \varphi'(v)| \leq k \cdot |x-y| = kd(x, y).$$

Soluția  $\xi$  a ecuației  $x = \varphi(x)$  se determină prin metoda aproximațiilor succesive. Pentru a da un exemplu concret, ne propunem să rezolvăm cu aproximația  $\leq 10^{-2}$  ecuația  $10x - 1 = \sin x$ . O analiză simplă arată că ecuația

are o singură soluție  $\xi \in [0, 1]$ ; ecuația se scrie echivalent  $x = \frac{1}{10}(1 + \sin x)$  și notînd  $X = [0, 1]$  și  $\varphi(x) = \frac{1}{10}(1 + \sin x)$ , avem o contracție de coeficient

$$k = \sup_{x \in [0, 1]} |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{10}. \text{ Alegem } x_0 = 0 \text{ deci } x_1 = \varphi(x_0) = \frac{1}{10} \text{ și punem condiția } \frac{(1/10)^N}{1 - (1/10)} \delta < 10^{-2}, \text{ unde } \delta = d(x_0, x_1) = |x_0 - x_1| = \frac{1}{10}; \text{ valoarea minimă a lui } N \text{ este } 2 \text{ deci } \xi = x_2 = \varphi(x_1) = \frac{1}{10} \left( 1 + \sin \frac{1}{10} \right) \approx 0,1099.$$

**EXEMPLUL 2.** Fie  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  o matrice pătratică de ordin 2 ( $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ) cu

$$\sum_{i,j} a_{ij}^2 < 1. \text{ Pentru orice matrice coloană } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \text{ fie aplicația}$$

$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(x) = AX + B$ , unde un punct din  $\mathbb{R}^2$  este identificat cu matricea coloană a coordonatelor lui; explicit

$$\varphi(x_1, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2).$$

Atunci  $\varphi$  este o contracție, de coeficient  $k = \left( \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$ , așa cum se verifică

imediat. Ecuația matriceală  $X = AX + B$  are soluție unică  $\xi$  ce se poate determina prin metoda aproximațiilor succesive:  $X_0 = 0, X_1 = \varphi(X_0) = B, X_2 = \varphi(X_1) = AX + B, X_3 = \varphi(X_2) = AX_2 + B = A^2B + AB + B$  etc.

Metoda aproximațiilor succesive se programează fără dificultate.

## 2. Topologia unui spațiu metric

În acest paragraf vom pune în evidență anumite tipuri remarcabile de submulțimi ale unui spațiu metric fixat  $(X, d)$ , permițînd studiul aprofundat al funcțiilor - proprietăți locale, globale și analiza trecerii la limită.

**Definiția III. 4.** Fie  $a \in X$  un punct fixat. Pentru orice număr real strict pozitiv  $r > 0$ , se definesc:

$B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$  (bila deschisă de centru  $a$  și rază  $r$ )

$B'(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$  (bila închisă de centru  $a$  și rază  $r$ )

$S(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) = r\}$  (sfera de centru  $a$  și rază  $r$ ).

O mulțime  $V \subset X$  se numește **vecinătate a punctului  $a$**  dacă există  $r > 0$  astfel încât  $B(a, r) \subset V$ , deci  $V$  conține o bilă deschisă centrată în  $a$ . Vom nota cu  $V_a$  mulțimea vecinătăților lui  $a$ .

Majoritatea noțiunilor importante ale analizei sunt definite local în termeni de bile, vecinătăți, limită etc. și termenul de topologie corespunde etimologiei ("topos" = loc).

**EXEMPLUL 1.** Fie  $X = \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  și  $r > 0$ . În acest caz,  $B(a, r)$  = intervalul deschis  $(a - r, a + r)$ ,  $B'(a, r) = [a - r, a + r]$  și  $S(a, r) = \{a - r, a + r\}$ .

**EXEMPLUL 2.** Fie  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in X$ ,  $r > 0$ . În acest caz, bila

$$B(a, r) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 < r^2\}.$$

În cazul  $n = 2$  bilele sunt discurile pline, iar pentru  $n = 3$ , sferele pline.

**EXEMPLUL 3.** Fie  $X$  spațiul metric al funcțiilor mărginite  $A \rightarrow \mathbb{R}$ , cu distanța "sup". Dacă  $f \in X$  și  $r > 0$ , bila  $B(f, r)$  este mulțimea funcțiilor  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $\sup |f(x) - g(x)| < r$ ; dacă  $g \in B(f, r)$ , atunci  $\forall x \in A$ ,  $f(x) - r < g(x) < f(x) + r$ .

**TEOREMA III. 3. (proprietățile vecinătăților unui punct).** Fie  $X$  un spațiu metric.

- 1) Pentru orice  $V \in V_a$ , avem  $a \in V$ ;
- 2) Dacă  $U \in V_a$  și  $V \supset U$ , atunci  $V \in V_a$ ;
- 3) Dacă  $V_1, V_2 \in V_a$ , atunci  $V_1 \cap V_2 \in V_a$ ;
- 4) Dacă  $a, b \in X$ ,  $a \neq b$ , atunci există  $V \in V_a$  și  $W \in V_b$  astfel încât  $V \cap W = \emptyset$ .

**DEMONSTRAȚIE.** 1), 2), 3) rezultă direct din definiție. Proprietatea 3 se extinde la orice număr finit de vecinătăți ale unui punct fixat. Demonstrăm 4) și fie

$r = \frac{1}{3}d(a, b)$ , deci  $r > 0$ . Luăm  $V = B(a, r)$  și  $W = B(b, r)$ . Rezultă că  $V$  și  $W$  sunt

disjuncte, deoarece altminteri  $\exists x \in V \cap W$  deci  $d(x, a) < r$ ,  $d(x, b) < r$  și ca atare  $d(a, b) \leq d(x, a) + d(x, b) < 2r$ , adică  $3r < 2r$ , absurd.

## 2. Topologia unui spațiu metric

**Definiția III. 5.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric.

O submulțime  $D \subset X$  se numește **deschisă** (sau **un deschis** al lui  $X$ ) dacă  $\forall a \in D, \exists r > 0$  astfel încât  $B(a, r) \subset D$ , adică  $D \in V_a$ .

O submulțime  $F \subset X$  se zice **închisă** (închis al lui  $X$ ) dacă  $X \setminus F = CF$  este deschisă.

**EXEMPLUL 1.**  $\emptyset$  și  $X$  sunt simultan închise și deschise. Pentru  $\emptyset$  condiția din definiția anterioară rezultă prin reducere la absurd.

**EXEMPLUL 2.** Pentru  $X = \mathbb{R}$  și  $a < b$ , intervalele  $(a, b)$ ,  $(a, \infty)$  sunt mulțimi deschise, iar  $[a, b]$ ,  $[a, \infty)$  sunt închise; dar  $[a, b)$  nu este nici închis nici deschis. Mulțimea  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  este închisă, iar  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  nu este nici deschisă nici închisă. Se poate arăta că o submulțime  $D \subset \mathbb{R}$  este deschisă dacă și numai dacă este reuniune finită sau numărabilă de intervale deschise.

**EXEMPLUL 3.** În spațiul  $X = \mathbb{R}^2$  discurul  $\{x^2 + y^2 < r^2\}$  și exteriorul său  $\{x^2 + y^2 > r^2\}$  sunt deschise; pentru  $0 < r < R$ , coroana circulară  $\{r^2 < x^2 + y^2 < R^2\}$  este deschisă. Mulțimea redusă la un punct din  $\mathbb{R}^2$  este închisă, ca și orice dreptunghi  $[a, b] \times [c, d]$ .

**EXEMPLUL 4.** Fie  $X$  un spațiu metric oarecare; pentru orice  $a \in X$ , mulțimea  $\{a\}$  este închisă (căci  $\forall b \in X \setminus \{a\}$  alegem o bilă  $B(b, r)$  care nu conține  $a$  deci  $B(b, r) \subset X \setminus \{a\}$  și ca atare,  $X \setminus \{a\}$  este deschisă). Orice bilă  $B(a, r)$ ,  $r > 0$  este o mulțime deschisă (căci  $\forall x \in B(a, r)$ , avem  $B(x, \rho) \subset B(a, r)$ , unde  $\rho = r - d(a, x)$ ).

**EXEMPLUL 5.** Fie  $Y$  un spațiu metric și  $X \subset Y$  cu distanța indusă. O submulțime  $A \subset X$  este deschisă în  $X \Leftrightarrow$  există un deschis  $D \subset Y$  astfel încât  $A = D \cap X$ . Pentru a demonstra acest fapt este suficient de observat că  $\forall a \in X$  și  $r > 0$ ,  $B_X(a, r) = B_Y(a, r) \cap X$ .

**TEOREMA III. 4. (proprietățile mulțimilor deschise și închise).** Fie  $X$  un spațiu metric.

- 1)  $\emptyset$  și  $X$  sunt mulțimi deschise;
- 2) Orice reuniune de mulțimi deschise este deschisă;
- 3) Orice intersecție finită de mulțimi deschise este deschisă.
- 1')  $\emptyset$  și  $X$  sunt închise;
- 2') Orice intersecție de mulțimi închise este închisă;
- 3') Orice reuniune finită de mulțimi închise este închisă.

Demonstrația este imediată. Afirmațiile 2', 3' rezultă din 2 și respectiv 3 aplicând formulele lui de Morgan.

**Comentariu.** Dacă  $X$  este o mulțime nevidă și dacă se consideră o colecție  $T$  de submulțimi ale lui  $X$  astfel încât:

- 1°  $\emptyset, X$  aparțin lui  $T$ ;  
 2° Orice reuniune de mulțimi din  $T$  aparține colecției  $T$ ;  
 3° Orice intersecție finită de mulțimi din  $T$  aparține lui  $T$ , atunci se spune că pe  $X$  este definită o topologie  $T$ , iar perechea  $(X, T)$  se numește **spațiu topologic**. Conform 1), 2), 3) din teorema III. 4, rezultă că mulțimile deschise dintr-un spațiu metric formează o topologie, deci orice spațiu metric este în mod natural un spațiu topologic.

Din nou fixăm un spațiu metric  $(X, d)$ , considerat ca un fel de "spațiu ambiant". Pentru orice submulțime  $A \subset X$  vom asocia interiorul, aderența și frontiera lui  $A$ .

**Definiția III. 6.** Un punct  $a \in A$  se zice **interior** lui  $A$  dacă există  $r > 0$  astfel încât  $B(a, r) \subset A$ , adică  $A \in V_a$ . Mulțimea punctelor interioare lui  $A$  se numește **interiorul** lui  $A$ , notat  $\mathring{A}$ .

Un punct  $a \in X$  se zice **aderent** lui  $A$  dacă  $\forall V \in V_a, V \cap A \neq \emptyset$ ; mulțimea acestora se numește **aderența** lui  $A$ , notată  $\bar{A}$ . Dacă  $\bar{A} = X$ , se spune că  $A$  este **densă** în  $X$ .

Mulțimea  $\text{Fr } A = \bar{A} \cap \bar{C}A$  se numește **frontiera** lui  $A$ .

Este evident că  $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$ , pentru orice  $A \subset X$ , iar  $\text{Fr } A$  este mulțimea punctelor  $x \in X$  cu proprietatea că orice bilă centrată în  $x$  intersectează atât  $A$  cât și  $\bar{C}A$ .

**EXEMPLUL 1.** Fie  $X = \mathbb{R}$  și  $A = [0, 1]$ . În acest caz,  $\mathring{A} = (0, 1)$ ,  $\bar{A} = [0, 1]$  și  $\text{Fr } A = \{0, 1\}$ . Apoi  $\mathring{Q} = \emptyset$ ,  $\bar{Q} = \mathbb{R}$  (deci  $Q$  este densă în  $\mathbb{R}$ ) și  $\text{Fr } Q = \mathbb{R}$ . Remarcăm că dacă  $A \subset \mathbb{R}$  este o mulțime mărginită, atunci  $\sup A$  și  $\inf A$  aparțin aderenței  $\bar{A}$ .

**EXEMPLUL 2.** Fie  $X = \mathbb{R}^2$  și  $A = \{x^2 + y^2 < 1\}$ . Atunci  $\mathring{A} = A$ ,  $\bar{A} = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$  și  $\text{Fr } A = \{x^2 + y^2 = 1\}$ .

**EXEMPLUL 3.** Dacă  $A \subset B \subset X$ , atunci  $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ ,  $\bar{A} \subset \bar{B}$ , dar se poate întâmpla ca  $\text{Fr } A \not\subset \text{Fr } B$  (de exemplu, luăm  $X = \mathbb{R}$ ,  $A = Q$  și  $B = Q \cup [0, 1]$ ; aici  $\text{Fr } A = \mathbb{R}$  și  $\text{Fr } B = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ ).

Dăm o listă de proprietăți ale interiorului și închiderii:  
 Dacă  $A$  este o submulțime a unui spațiu metric  $X$ , atunci:

- $\mathring{A} = \bigcup_{D \subset A} D$  ( $D$  deschis) deci  $\mathring{A}$  este deschisă;
- $A$  este deschisă dacă și numai dacă  $A = \mathring{A}$ ;
- $\bar{A} = \bigcap_{I \supset A} I$  ( $I$  închis) deci  $\bar{A}$  este închisă;
- $A$  este închisă dacă și numai dacă  $A = \bar{A}$ ;
- Dacă  $a \in X$ , atunci  $a \in \bar{A} \Leftrightarrow$  există un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  de puncte din  $A$  astfel încât  $a_n \rightarrow a$ .

$$d) X \setminus \bar{A} = X \setminus \bar{A} \text{ și } X \setminus \bar{A} = X \setminus \bar{A}.$$

DEMONSTRAȚIA rezultă din definiții.

Remarcăm că o submulțime  $A \subset X$  este închisă dacă și numai dacă pentru orice șir convergent de puncte din  $A$ , limita șirului aparține de asemenea lui  $A$ ; aceasta justifică termenul de "închisă". De asemenea  $A \subset X$  este densă dacă și numai dacă orice punct din  $X$  este limita unui șir convergent de puncte din  $A$ .

### 3. Aplicații continue

Fie  $(X, d)$  și  $(Y, d')$  două spații metrice și  $f: X \rightarrow Y$  o aplicație. Cazul tratat în liceu  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $Y = \mathbb{R}$  și cel al funcțiilor complexe  $X \subset \mathbb{C}$ ,  $Y = \mathbb{C}$  sunt ambele niște particularizări.

**TEOREMA III. 5.** Fie  $a \in X$  un punct fixat. Sunt echivalente următoarele condiții:

- $\forall V \in V_{f(a)} \exists U \in V_a$  astfel încât  $f(U) \subset V$ ;
- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $d(x, a) < \delta_\varepsilon$  să implice  $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$ ;
- pentru orice șir  $x_n \rightarrow a$ , rezultă că  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

**DEMONSTRAȚIE.** a)  $\Rightarrow$  b). Presupunem că a) este îndeplinită și  $\varepsilon > 0$  este dat. Luăm  $V = B(f(a), \varepsilon)$  și conform ipotezei există  $U \in V_a$  astfel încât  $f(U) \subset V$ ; apoi alegem  $\delta > 0$  astfel încât  $B(a, \delta) \subset U$  și se verifică imediat b).

b)  $\Rightarrow$  c). Presupunem condiția b) îndeplinită și fie  $x_n \rightarrow a$ . Dacă  $\varepsilon > 0$  este dat, alegem  $\delta > 0$  conform b). De la un rang  $N$  încolo avem  $d(x_n, a) < \delta$  deci  $d'(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$  adică  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

c)  $\Rightarrow$  a). Presupunem c) și că afirmația a) nu ar fi adevărată deci ar exista o vecinătate  $V$  a lui  $f(a)$  astfel încât pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $a$  să avem  $f(U) \not\subset V$ . Pentru orice întreg  $n \geq 1$  luăm  $U = B(a, \frac{1}{n})$  și alegem  $x_n \in U$  astfel încât  $f(x_n) \notin V$ . Ar rezulta că  $x_n \rightarrow a$  și  $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ .

**Definiția III. 7.** Dacă o aplicație  $f$  satisface una din condițiile echivalente din teorema III. 5., se spune că  $f$  este **continuă în punctul**  $a \in X$ . Aplicația  $f$  se zice **continuă pe**  $A \subset X$  dacă este continuă în orice punct  $a \in A$ ; dacă este continuă pe întreg  $X$  se spune simplu că  $f$  este **continuă**.

Condițiile a), b), c) sunt numite, respectiv, definiția continuității cu vecinătăți, definiția continuității cu  $\varepsilon$ - $\delta$  și cu șiruri.

**COROLAR 1.** Fie  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă în punctul  $a \in X$  și  $f(a) > 0$  (respectiv  $f(a) < 0$ ). Atunci  $f$  este pozitivă (respectiv negativă) pe o vecinătate a lui  $a$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $f(a) > 0$  și  $\varepsilon > 0$  ales astfel încît  $\varepsilon < f(a)$ . Alegem  $V = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ . Conform teoremei III. 5. a), există  $U \in \mathcal{V}_a$  astfel încît  $f(U) \subset V$ ;  $\forall x \in U$  avem  $f(x) \in V$  deci  $f(x) > f(a) - \varepsilon > 0$ . Cazul cînd  $f(a) < 0$  se tratează analog.

**COROLAR 2.** Fie  $X, Y, Z$  spații metrice și  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  două aplicații. Dacă  $a \in X$ ,  $f$  este continuă în  $a$  și  $g$  este continuă în  $f(a)$ , atunci  $g \circ f$  este continuă în  $a$ . Dacă  $f$  și  $g$  sunt continue, atunci  $g \circ f$  este continuă pe  $X$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Dacă  $x_n \rightarrow a$ , atunci  $f(x_n) \rightarrow f(a)$  și  $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a))$  deci  $(g \circ f)(x_n) \rightarrow (g \circ f)(a)$  etc.

**TEOREMA III. 6.** Fie  $f: X \rightarrow Y$  o aplicație între două spații metrice. Sunt echivalente următoarele afirmații:

- $f$  este continuă;
- pentru orice  $A \subset X$ ,  $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ ;
- pentru orice mulțime  $F$  închisă în  $Y$ ,  $f^{-1}(F)$  este închisă în  $X$ ;
- $\forall D \subset Y$  deschis,  $f^{-1}(D)$  este deschis în  $X$ .

**DEMONSTRAȚIE.** a)  $\Rightarrow$  b). Fie  $\forall a \in \bar{A}$  și  $b = f(a)$ . Avem de arătat că orice  $V \in \mathcal{V}_b$  intersecțiază  $f(A)$ . Dar  $f$  este continuă în  $a$  și atunci există  $U \in \mathcal{V}_a$  astfel încît  $f(U) \subset V$ . Deoarece  $a \in \bar{A}$ , rezultă că  $U$  intersecțiază  $A$  deci  $f(U)$  intersecțiază  $f(A)$  deci  $V \cap f(A) \neq \emptyset$ .

b)  $\Rightarrow$  c). Avem  $F = \bar{F}$  și aplicînd b) pentru  $f^{-1}(F)$ , rezultă

$$f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \bar{F} = F \text{ deci } \overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F);$$

incluziunea inversă fiind evidentă, rezultă că  $f^{-1}(F)$  este închisă.

c)  $\Rightarrow$  d). Luăm  $F = Y \setminus D$  deci  $F$  este închisă și conform c)  $f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus D) = X \setminus f^{-1}(D)$  va fi închisă deci  $f^{-1}(D)$  este deschisă.

d)  $\Rightarrow$  a). Fie  $\forall a \in X$  și  $b = f(a)$ . Fie  $V \in \mathcal{V}_b$  deci există  $r > 0$  astfel încît  $D = B(b, r) \subset V$ . Deoarece  $U = f^{-1}(D)$  este deschis și conține  $a$ , rezultă că  $U \in \mathcal{V}_a$  și evident  $f(U) \subset D \subset V$  deci  $f$  satisface condiția a din teorema III. 5 și  $f$  rezultă continuă în punctul  $a$ . Acesta din urmă fiind arbitrar,  $f$  este continuă.

**EXEMPLUL 1.** Fie  $X$  un spațiu metric și  $c \in X$  un punct fixat. Aplicația constantă  $f: X \rightarrow X$ ,  $x \mapsto c$  este continuă (dacă  $a \in X$  este fixat arbitrar și  $x_n \rightarrow a$ , atunci evident  $f(x_n) = c \rightarrow f(a) = c$ ). De asemenea aplicația identității

$1_X: X \rightarrow X$  este continuă.

**EXEMPLUL 2.** Aplicațiile  $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s(x, y) = x + y$  și  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p(x, y) = xy$  sunt continue (folosind de exemplu definiția cu șiruri).

**EXEMPLUL 3.** Orice funcție polinomială  $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  este continuă (deoarece  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$  și  $z_n \rightarrow \alpha$ , rezultă  $P(z_n) \rightarrow P(\alpha)$ ).

**EXEMPLUL 4.** Proiecțiile canonice  $p_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sunt continue. Dacă  $X$  este un spațiu metric și o aplicație  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  este continuă, atunci și componentele ei  $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$  sunt continue (deoarece  $f_i = p_i \circ f$  și aplicăm corolarul 2 al teoremei III. 5); reciproc, dacă  $f_1, \dots, f_n$  sunt continue, atunci  $f$  este continuă (deoarece  $\forall x \in X$ ,  $x_n \rightarrow x$ , atunci  $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq n$  și ca atare,  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ ).

**EXEMPLUL 5.** Dacă  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  sunt funcții continue și  $\lambda \in \mathbb{R}$  o constantă, atunci

$$f + g, f - g, \lambda f, fg, |f|, \max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

sunt de asemenea continue.

**EXEMPLUL 6.** Fie  $X$  un spațiu metric și  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ ; se pot asocia trei funcții cu valori reale, anume:

$$\begin{aligned} P: X &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{Re} f(x) && \text{(partea reală a lui } f); \\ Q: X &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{Im} f(x) && \text{(partea imaginară a lui } f); \\ |f|: X &\rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto |f(x)| && \text{(modulul lui } f). \end{aligned}$$

Evident,  $f = P + iQ$ ,  $P = \frac{f + \bar{f}}{2}$ ,  $Q = \frac{f - \bar{f}}{2i}$ . Dacă  $f$  este continuă, atunci  $P$  și  $Q$  sunt continue și reciproc. De asemenea, dacă  $f$  este continuă, atunci  $|f| = \sqrt{P^2 + Q^2}$  rezultă continuă. De exemplu, pentru  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^2$  avem  $P + iQ = (x + iy)^2$  deci  $P(x, y) = x^2 - y^2$  și  $Q(x, y) = 2xy$ .

Fixăm două spații metrice  $X$  și  $Y$  și o aplicație  $f: A \rightarrow Y$  definită pe o submulțime  $A \subset X$ .

**Definiția III. 8.** Un punct  $a \in X$  se numește **punct de acumulare** pentru  $A$  dacă  $\forall V \in \mathcal{V}_a$ ,  $V \cap A$  conține cel puțin un punct distinct de  $a$ . Se spune că  $f$  **admite limita**  $l$  ( $l \in Y$ ) în punctul de acumulare  $a$  și se scrie  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  dacă

$\forall \varepsilon > 0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $l$  în  $Y$  astfel încît  $\forall x \in A$ ,  $x \neq a$ ,  $f(x) \in V$ .  
 Proprietatea de a admite limita este o proprietate locală a funcției  $f$  în punctul  $a$ .  
 Dacă  $f$  admite limita  $l$  în punctul  $a$ , atunci  $f$  este continuă în  $a$ .

funcția  $g : A \rightarrow Y$ ,  $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in A \setminus \{a\} \\ l & \text{dacă } x = a \end{cases}$  este continuă în punctul  $a$ .

Aceasta este echivalent cu faptul că pentru orice șir  $x_n \rightarrow a$ ,  $x_n \neq a$ , rezultă  $f(x_n) \rightarrow l$ . Evident, dacă  $f : A \rightarrow Y$  ( $A \subset X$ ) și  $a \in A$  este un punct de acumulare pentru  $A$ , atunci  $f$  este continuă în  $a$  dacă și numai dacă limita  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  există și este egală cu  $f(a)$ . Pentru a demonstra că  $f : A \rightarrow Y$  nu are limită în punctul de acumulare  $a$  al lui  $A$  este suficient să evidențiem două șiruri

$$x'_n \rightarrow a, x''_n \rightarrow a \quad (x'_n, x''_n \in A \setminus \{a\})$$

astfel încât fie că unul din șirurile  $f(x'_n), f(x''_n)$  nu este convergent, fie că aceste șiruri sunt convergente dar nu au aceeași limită.

EXEMPLUL 1. Fie  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $Y = \mathbb{R}$ ,  $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  și  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ . Limita  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  nu există deoarece luând șirul  $(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}) \rightarrow (0,0)$ , cu  $\lambda$  parametru real, avem  $f(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}) = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n})$  depinde de  $\lambda$ .

EXEMPLUL 2. Fie  $Y = \mathbb{R}$  și  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  ( $A \subset X$ ) două funcții numerice astfel încât  $\forall x \in A$ ,  $|f(x)| \leq g(x)$ . Dacă  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ . De exemplu,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0$ , deoarece  $|\frac{x^3}{x^2 + y^2}| \leq |x|$  pentru orice  $(x,y) \neq (0,0)$ .

EXEMPLUL 3. În cazul  $Y = \mathbb{R}^p$ , limita se face pe componente. Anume, dacă  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ , atunci  $f$  are limită în  $a \Leftrightarrow f_1, \dots, f_p$  au limită în  $a$  și în plus  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = (\lim_{x \rightarrow a} f_1(x), \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_p(x))$ .

EXEMPLUL 4. Fie  $X = \mathbb{R}^p$ ,  $A \subset X$ ,  $a$  un punct de acumulare a lui  $A$  și  $f : A \rightarrow Y$ . Pentru orice vector nenul  $v$  din  $\mathbb{R}^p$  se poate defini **limita lui  $f$  în punctul  $a$  după direcția lui  $v$**  ca fiind  $\lim_{t \rightarrow 0} f(a + tv)$ ; evident, punctele  $x = a + tv$  au proprietatea că vectorul  $x - a$  este coliniar cu  $v$ , ceea ce justifică terminologia

Dacă  $l = \lim_{f(x) \rightarrow a} f(x)$  există, atunci există și limita lui  $f$  în  $a$  după orice direcție

(reciproc, nu). Fie  $f(x,y) = x + y \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$  și  $f(x,y) = 0$  dacă  $x = 0$ . Atunci

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0; \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right) = 0 \text{ dar } \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right) \text{ nu există.}$$

#### 4. Funcții continue pe mulțimi compacte și pe mulțimi conexe

Fie  $X$  un spațiu metric.

**Definiția III. 9.** O submulțime  $K \subset X$  se numește **compactă** (sau un **compact**) dacă din orice acoperire a lui  $K$  formată din mulțimi deschise, se poate extrage o subacoperire finită, adică ori de câte ori  $K \subset \bigcup_{i \in I} D_i$  cu  $D_i$  deschise în  $X$ , există o submulțime finită  $J \subset I$  astfel încât  $K \subset \bigcup_{i \in J} D_i$ .

O submulțime  $M \subset X$  se zice **mărginită** dacă ea este conținută într-o bilă deschisă.

Se poate demonstra că faptul că o submulțime  $K \subset X$  este compactă este echivalent cu aceea că orice șir de puncte din  $K$  are un subșir convergent către un punct din  $K$ ; în cazul  $X = \mathbb{R}^n$ , se demonstrează că o submulțime este compactă dacă și numai dacă este închisă și mărginită.

Spațiul  $X$  însuși se zice **compact** dacă mulțimea  $X$  este compactă, adică orice șir de puncte din  $X$  are un subșir convergent. Dacă spațiul  $X$  este compact, atunci el este complet.

EXEMPLUL 1. Orice interval  $[a,b]$  este un spațiu metric compact. De asemenea orice paralelipiped  $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  din  $\mathbb{R}^n$  este o mulțime compactă (fiind închisă și mărginită).

EXEMPLUL 2. Sfera  $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  și elipsoidul plin  $\{x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 1\}$  sunt mulțimi compacte.

EXEMPLUL 3. Fie  $X$  un spațiu metric discret infinit. El este o mulțime închisă și mărginită, dar nu este compactă (căci  $X = \bigcup_{a \in X} \{a\}$ , mulțimile  $\{a\}$  sunt deschise și nu există o subacoperire finită pentru că ar rezulta că mulțimea

$X$  este finită).

**TEOREMA III. 7.** Fie  $f: X \rightarrow Y$  o aplicație continuă între două spații metrice și  $K \subset X$  o submulțime compactă. Atunci  $f(K)$  este compactă.

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $f(K) \subset \bigcup_{i \in I} D_i$  cu  $D_i$  deschiși în  $Y$ . Atunci  $K \subset f^{-1}(\bigcup_{i \in I} D_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(D_i)$  și  $f^{-1}(D_i)$  sunt deschiși în  $X$ , conform teoremei III. 6. Deoarece  $K$  este compactă, există  $J \subset I$  finită astfel încât  $K \subset \bigcup_{i \in J} f^{-1}(D_i)$  deci  $f(K) \subset f(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(D_i)) = \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(D_i)) \subset \bigcup_{i \in J} D_i$ . Așadar, din orice acoperire deschisă a lui  $f(K)$  se poate extrage una finită și ca atare mulțimea  $f(K)$  este compactă.

Reamintim că o funcție  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  este mărginită dacă mulțimea  $f(X)$  este mărginită; în acest caz, se notează  $\sup f = \sup f(X)$  și  $\inf f = \inf f(X)$  și se spune că  $f$  **își atinge marginile** dacă există puncte  $a, b$  în  $X$  astfel încât  $\sup f = f(a)$  și  $\inf f = f(b)$ . Cu aceste pregătiri, rezultă:

**COROLAR.** Fie  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă cu valori reale. Dacă  $X$  este un spațiu metric compact, atunci  $f$  este mărginită și își atinge marginile.

**DEMONSTRAȚIE.** Conform teoremei III. 7, mulțimea  $f(X)$  rezultă compactă deci este închisă și mărginită. Așadar,  $f$  este funcție mărginită. În plus, numerele reale  $\sup f$ ,  $\inf f$  care aparțin lui  $f(X)$ , vor aparține de fapt lui  $f(X)$ , deoarece  $f(X) = f(X)$ .

**EXEMPLUL 1.** Funcția  $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1/x$  este continuă, dar nu este mărginită; marginile ei sunt  $\inf f = 1$  și  $\sup f = +\infty$  și nu sunt atinse. Așadar, ipoteza de compacitate din corolarul precedent este esențială.

**EXEMPLUL 2.** Fie  $A, B, C$  trei puncte distincte și necoliniare în plan și  $X$  triunghiul  $ABC$  (interiorul reunit cu frontiera sa, obținută reunind cele trei laturi). Atunci suma  $MA + MB + MC$ , unde  $M$  este un punct oarecare din planul triunghiului, are minimum și maximum atinse în  $X$ . Într-adevăr,  $X$  este mulțime compactă, iar suma respectivă "variază continuu cu punctul  $M$ " și se aplică precedentul corolar (fixând un reper în planul triunghiului, suma devine o funcție continuă de coordonatele lui  $M$ ).

**Definiția III. 10.** O aplicație  $f: X \rightarrow Y$  între două spații metrice se numește **uniform continuă** dacă  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât  $\forall x, y \in X$  și  $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$ , să avem  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ . (Am notat cu aceeași literă  $d$  distanțele în  $X$  și  $Y$ ).

Evident, orice aplicație uniform continuă este continuă.

**TEOREMA III. 8.** Dacă  $f: X \rightarrow Y$  este continuă și  $X$  este compact, atunci  $f$  este uniform continuă pe  $X$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Fixăm  $\forall \varepsilon > 0$ . Cum  $f$  este continuă în orice punct  $a \in X$ , există  $\delta(a) > 0$  astfel încât  $d(x, a) < \delta$  implică  $d(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Evident,

$X = \bigcup_{a \in X} B(a, \frac{\delta(a)}{2})$  și cum  $X$  este compact, există un număr finit de puncte

$a_1, \dots, a_p \in X$  astfel încât

$$X = B(a_1, \frac{\delta(a_1)}{2}) \cup \dots \cup B(a_p, \frac{\delta(a_p)}{2}) \text{ și fie } \delta = \frac{1}{2} \min(\delta(a_1), \dots, \delta(a_p))$$

deci  $\delta > 0$  (strict!). Fie acum  $\forall x, y \in X$  cu  $d(x, y) < \delta$ . Atunci există  $i$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,

astfel încât  $x \in B(a_i, \frac{\delta(a_i)}{2})$  și ca atare,  $d(f(x), f(a_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$  deci

$$d(y, a_i) \leq d(y, x) + d(x, a_i) < \delta + \frac{\delta(a_i)}{2} \leq \delta(a_i) \text{ deci } d(f(y), f(a_i)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

În concluzie,  $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(a_i)) + d(f(y), f(a_i)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Așadar,  $f$  este uniform continuă pe  $X$ .

**EXEMPLU.** Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  nu este uniform continuă. (În caz contrar, să luăm  $\varepsilon = 1$ ; atunci există  $\delta > 1$  astfel încât,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  cu  $|x - y| < \delta$  să rezulte  $|x^2 - y^2| < 1$ . Fie  $x = n$ ,  $y = n + \delta/2$  cu  $n \geq 1$  natural. Atunci  $\forall n \geq 1$ ,  $n\delta + \delta^2/4 < 1$ , ceea ce este absurd).

O funcție  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **etajată** (sau în **scară**) dacă există o diviziune  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  a intervalului  $[a, b]$  astfel încât  $f$  să fie constantă pe fiecare din intervalele  $[a, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ , ...,  $[x_{n-1}, b]$ . Se verifică imediat că suma, diferența, produsul a două funcții etajate pe  $[a, b]$  au aceeași proprietate.

**COROLAR.** Pentru orice funcție continuă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  există un sir  $\phi_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de funcții etajate astfel încât  $\phi_n \rightarrow f$  în  $\mathcal{M}_{[a, b]}$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Fixăm  $\forall \varepsilon > 0$ . Deoarece  $f$  este uniform continuă există  $\delta > 0$  astfel încât  $\forall x, y \in [a, b]$ ,  $|x - y| < \delta$ ,  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Alegem puncte

echidistante  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$  astfel încît  $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} < \delta$  pentru

$1 \leq i \leq n$  și definim funcția etajată  $\varphi_\varepsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  punînd  $\varphi_\varepsilon(x) = f(a)$  dacă  $x \in [a, x_1]$ ;  $\varphi_\varepsilon(x) = f(x_1)$  dacă  $x \in [x_1, x_2]$  ...,  $\varphi_\varepsilon(x) = f(x_{n-1})$  dacă  $x \in [x_{n-1}, b]$ .

Evident  $\|\varphi_\varepsilon - f\| = \sup_{x \in [a, b]} |\varphi_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ ; ultima inegalitate este o consecință

a faptului că  $\forall x \in [a, b]$  aparține exact unui interval  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $1 \leq i \leq n$  al diviziunii și cum  $x_i - x_{i-1} < \delta$ , rezultă  $|\varphi_\varepsilon(x) - f(x)| = |f(x_{i-1}) - f(x)| < \varepsilon$ ; această relație are loc și pentru  $x = b$ . Luăm  $\varepsilon = 1/n$ ,  $n \geq 1$  și găsim  $\varphi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  etajate astfel încît  $\|\varphi_n - f\| \leq 1/n$  deci  $\varphi_n \rightarrow f$ .

**Definiția III. 11.** Un spațiu metric  $X$  se numește **conex** dacă nu există submulțimi deschise și nevide  $A, B$  astfel încît  $A \cup B = X$  și  $A \cap B = \emptyset$ .

Echivalent,  $X$  este conex  $\Leftrightarrow$  orice submulțime nevidă simultan închisă și deschisă în  $X$  coincide cu  $X$ .

O submulțime  $C \subset X$  a unui spațiu metric se numește **conexă** dacă este conexă ca spațiu metric cu distanța indusă; aceasta revine la faptul că nu există mulțimi deschise nevide  $D_1, D_2$  în  $X$  astfel încît  $D_1 \cap D_2 \cap C = \emptyset$ ,  $D_1 \cap C \neq \emptyset$ ,  $D_2 \cap C \neq \emptyset$  și  $C \subset D_1 \cup D_2$ .

Se poate arăta că o submulțime  $I$  a lui  $\mathbb{R}$  este conexă dacă și numai dacă este un interval (adică  $\forall a, b \in I, a < b$ , avem  $[a, b] \subset I$ ). Dacă  $u, v \in \mathbb{R}^n$  se definește segmentul  $[u, v] = \{(1-t)u + tv \mid t \in [0, 1]\}$  de capete  $u, v$ . O mulțime deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$  este conexă  $\Leftrightarrow$  pentru orice  $a, b \in D$  există o linie poligonală  $L$  care unește  $a, b$  și este conținută în  $D$  (așadar,  $\exists x_1, x_2, \dots, x_p \in D$  astfel încît  $L = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{p-1}, x_p] \subset D$ ). Intuitiv, mulțimile conexes sunt mulțimi "dintr-o bucată". De altfel, se poate arăta că dacă  $(A_i)_{i \in I}$  sunt submulțimi conexes ale unui spațiu metric  $X$  și dacă  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ , atunci  $\bigcup_{i \in I} A_i$

este conexă.

**TEOREMA III. 9.** Fie  $f : X \rightarrow Y$  o aplicație continuă și surjectivă între două spații metrice. Dacă  $X$  este conex, atunci  $Y$  este conex.

**DEMONSTRAȚIE.** Dacă  $Y$  ar fi neconex, atunci ar exista două mulțimi deschise nevide  $A, B \subset Y$  astfel încît  $A \cup B = Y$ ,  $A \cap B = \emptyset$ . Atunci  $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$  ar fi de asemenea deschise (căci  $f$  este continuă), nevide (căci  $f$  este surjectivă) și în plus  $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ ,  $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ . Deci  $X$  ar rezulta neconex, absurd.

**COROLAR.** (G. DARBOUX, 1842 - 1917) Fie  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  o aplicație continuă pe un spațiu metric conex. Dacă există puncte  $a, b$  în  $X$  astfel încît  $f(a) < 0$  și

$f(b) > 0$ , atunci există  $\xi \in X$  astfel încît  $f(\xi) = 0$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Mulțimea  $f(X) \subset \mathbb{R}$  rezultă conexă conform teoremei III. 9. deci va fi un interval. Atunci  $[f(a), f(b)] \subset f(X)$ . Dar 0 aparține intervalului  $[f(a), f(b)]$  deci  $0 \in f(X)$ .

**EXEMPLU.** Asimilăm suprafața Pământului cu o suprafață sferică  $X$ , conexă, din  $\mathbb{R}^3$ . În ipoteza că temperatura unui punct variază continuu cu punctul, arătăm că există două puncte diametral opuse  $\xi, \xi'$  pe  $X$  avînd aceeași temperatură; pentru aceasta,  $\forall x \in X$  notăm cu  $x'$  diametralul său opus și cu  $t(x)$  temperatura în punctul  $x$ . Se consideră funcția continuă  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = t(x) - t(x')$ . Se observă că  $f(x) \cdot f(x') \leq 0$  deci conform corolarului precedent  $\exists \xi \in X$  astfel încît  $f(\xi) = 0$  adică  $t(\xi) = t(\xi')$ .

O aplicație  $f : X \rightarrow Y$  între două spații metrice se numește **omeomorfism** dacă  $f$  este bijectivă, continuă și  $f^{-1}$  este continuă. Două spații metrice se zic **omeomorfe** dacă există un omeomorfism între ele.

Multe din noțiunile definite anterior - închise, compacți, mulțimi conexes, continuitate, se extind fără dificultăți principale la cazul mai general al spațiilor topologice. Proprietățile topologice (ce pot fi formulate în termeni de mulțimi deschise) sunt invariante la omeomorfisme; de exemplu dacă  $f : X \rightarrow Y$  este un omeomorfism, atunci o submulțime  $A$  a lui  $X$  este compactă (respectiv densă, conexă) dacă și numai dacă  $f(A)$  are această proprietate.

## 5. 10 exerciții

1. a) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{2n+1}, \frac{2^n-1}{2^n+1}, \frac{1}{n}, \sqrt[n]{2} \right)$  în  $\mathbb{R}^4$ .

b) Fie  $A_n = \left( \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n, \sqrt[n]{n} \right)$ ,  $n \geq 1$ . Să se determine parametrul real  $\lambda$  dacă punctul

$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  este la distanța minimă de  $(1, e^{-\lambda})$  în  $\mathbb{R}^2$ .

2. Fie  $f : X \rightarrow Y$  o bijecție și  $\delta$  o distanță pe  $Y$ . Să se arate că punînd  $d(x, y) = \delta(f(x), f(y))$ ,  $\forall x, y \in X$ , se obține o distanță pe  $X$ . Folosind acest rezultat, să se arate că punînd  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$  se obține o distanță pe  $\mathbb{R}$  și că în acest spațiu metric, șirul  $x_n = n$  este Cauchy, dar nu convergent.

Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , notăm  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|} & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{dacă } x = \infty \\ -1 & \text{dacă } x = -\infty \end{cases}$

Să se arate că mulțimea  $\bar{\mathbb{R}}$  este un spațiu metric compact relativ la distanța  $d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ . Explicitați bila  $B(\infty, r)$ ,  $r > 0$ .

4. Folosind principiul contracției, să se rezolve (în  $\mathbb{R}$ ), cu aproximație  $10^{-3}$ , ecuațiile:

- a)  $x^3 + 12x - 1 = 0$ ;  
b)  $3x + e^{-x} = 1$ ;  
c)  $x^5 + x^3 - 2,1 = 0$ .

5. a) Să se arate că dacă  $a, b \in \mathbb{C}$  și  $|a| < 1$ , atunci aplicația  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(z) = az + b$  este o contracție.

b) Fie  $D$  o dreaptă fixată dintr-un plan  $P$  și  $\psi : P \rightarrow P$  aplicația care asociază oricărui punct  $a \in P$ , proiecția ortogonală a lui  $a$  pe  $D$ . Este  $\psi$  o contracție? Care sunt punctele fixe ale lui  $\psi$ ?

6. a) Dacă  $f, g : X \rightarrow Y$  sunt aplicații continue,  $A \subset X$  este densă și  $\forall x \in A$ ,  $f(x) = g(x)$ , să se arate că  $f = g$ .

b) Fie  $X$  un spațiu metric și  $x_n \rightarrow a$ . Să se arate că mulțimea  $\{a, x_1, x_2, \dots\}$  este compactă.

c) Fie  $(X, d)$  și  $(X', d')$  spații metrice. Să se arate că  $X \times X'$  este spațiu metric relativ la distanța  $\delta$  definită prin  $\delta((x, x'), (y, y')) = d(x, y) + d'(x', y')$  și că dacă  $X, X'$  sunt compacte, la fel este  $X \times X'$ .

7. Care din mulțimile următoare:

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\},$$

$$A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\},$$

$$A_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \leq 2\},$$

$$A_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -1 \leq z \leq 1\}.$$

sunt: a) deschise; b) închise; c) compacte; d) conexe?

8. Să se studieze continuitatea următoarelor funcții:

$$a) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$b) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} x & \text{dacă } xy \geq 0 \\ y & \text{dacă } xy < 0 \end{cases}$$

$$c) f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & \text{dacă } z \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } z = 0 \end{cases}$$

9. Fie  $f : X \rightarrow Y$  o aplicație continuă și bijectivă între spații metrice. Să se arate că dacă  $X$  este compact, atunci  $f$  este un omeomorfism.

10. Fie  $X$  un spațiu metric și  $\delta : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  o aplicație continuă astfel încât:  
 $1^0 \forall x \in X, \delta(x, 0) = x$ ;

$2^0 \forall x \in X, t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \delta(\delta(x, t_1), t_2) = \delta(x, t_1 + t_2)$ . Să se arate că  $\forall t \in \mathbb{R}$ , aplicația  $\tau_t : X \rightarrow X, x \mapsto \delta(x, t)$  este un omeomorfism.

## INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. a) Limita se face pe componente și este  $(1/2, 1, 0, 1)$ .

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = (e^\lambda, 1)$ ; distanța este  $(e^\lambda - 1)^2 + (e^{-\lambda} - 1)^2$  și problema revine la a determina

minimul funcției de o variabilă  $f(\lambda) = e^{2\lambda} - 2e^\lambda + e^{-2\lambda} - 2e^{-\lambda}$ .

2. Se verifică imediat  $D_1, D_2, D_3$ . Funcția  $\arctg : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  este bijectivă. Avem

$$d(x_{n+p}, x_n) = |\arctg(n+p) - \arctg n| = \left| \arctg \frac{p}{1+n(n+p)} \right| \leq \frac{p}{1+n(n+p)} \leq \frac{1}{n}$$

deci șirul  $x_n = n$  este Cauchy. Dacă ar exista  $l \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x_n \rightarrow l$ , ar rezulta că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\arctg n - \arctg l| = 0, \text{ adică } \frac{\pi}{2} - \arctg l = 0; \text{ absurd.}$$

3. Aplicația  $\varphi : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$  este bijectivă și se aplică exercițiul 2, luând  $\delta =$  distanța euclidiană pe intervalul  $[-1, 1]$ . Se observă că  $\varphi$  și  $\varphi^{-1}$  sunt continue deci  $\varphi$  este un omeomorfism. Deoarece intervalul  $[-1, 1]$  este compact, rezultă că  $\bar{\mathbb{R}}$  este compact.

Dacă  $0 < r < 1$ , atunci bila  $B(\infty, r)$  este tocmai intervalul  $\left(\frac{1-r}{r}, \infty\right)$  etc.

4. a)  $x = \frac{1}{x^2 + 12}$ ; luăm  $X = [0, 1]$  și  $\varphi(x) = \frac{1}{x^2 + 12}$ . Se observă că  $\varphi$  este o contracție

de coeficient  $k = \frac{2}{169}$ ; se obține  $\xi \approx 0,0833$ .

$$b) x = \frac{1}{3}(1 - e^{-x});$$

c) Ecuația se scrie  $x = \frac{2,1}{x^4 + x^2}$  etc.

5. a)  $d(\varphi(z), \varphi(z')) = |\varphi(z) - \varphi(z')| = |a(z - z')| = |a| d(z, z')$  și  $k = |a|$ ;

b)  $\psi$  nu este o contracție (se obține  $k \leq 1$  și nu  $k < 1$ ); punctele fixe sunt punctele de pe dreapta  $D$ .

6. a) Fie  $x \in X$ . Deoarece  $A$  este densă, există un șir  $a_n \rightarrow x$  cu  $a_n \in A$ . Atunci  $f(x) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = g(x)$  deci  $f = g$ .

- b) Fie  $K = \{a, x_0, x_1, x_2, \dots\}$  și  $K \subset \bigcup_{i \in I} D_i$  o acoperire deschisă. Deoarece  $a \in K$ ,  $\exists i_0$  astfel încât  $a \in D_{i_0}$  și toți termenii șirului începând de la un rang încolo aparțin la deschisul  $D_{i_0}$ . Așadar, mulțimea  $K$  poate fi inclusă în reuniunea unui număr finit de deschise  $D_i$  deci este compactă.
- c) Un șir  $(x_n, x_n')$  este convergent în  $X \times X' \Leftrightarrow (x_n)$  este convergent în  $X$  și  $(x_n')$  în  $X'$ .

7.  $A_1$  este închisă și conexă;  $A_2$  este deschisă și conexă;  $A_3$  este închisă, compactă și conexă;  $A_4$  este închisă, compactă și conexă.

8. a)  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ; apoi  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$  deci  $f$  este continuă

și în origine;

b)  $f$  este continuă în cele patru cadrane deschise și în origine;

c)  $f$  este continuă în  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

9. Arătăm că aplicația  $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$  este continuă, adică întoarce închise în închise; dar dacă  $F \subset X$  este un închis, atunci  $X$  fiind compact, rezultă că  $F$  este compact și  $g^{-1}(F) = f(F)$  rezultă compact deci închis în  $Y$ . Rezultă că  $g$  este continuă.

10. Aplicația  $\tau_t$  este continuă (căci  $x_n \rightarrow x$  implică  $\delta(x_n, t) \rightarrow \delta(x, t)$  deci  $\tau_t(x_n) \rightarrow \tau_t(x)$ ); apoi  $\tau_t$  este bijectivă, avînd ca inversă  $\tau_{-t}$ , iar această inversă este de asemenea continuă.

Acest exercițiu este începutul teoriei sistemelor dinamice. Tripletul  $(X, \mathbb{R}, \delta)$  este numit un **sistem dinamic** în  $X$ ; elementele lui  $X$  se numesc **stări**; dacă  $x \in X$ , atunci  $\delta(x, t)$  es numește starea sistemului la momentul  $t$  dacă starea lui la momentul 0 era  $x$ . Funcția  $\delta$  se numește tranziția de stări, iar  $\tau_t$  tranziția la momentul  $t$ . Pentru  $x \in X$  fixată, aplicația  $\mathbb{R} \rightarrow X, t \mapsto \delta(x, t)$  se numește **mișcarea** sistemului prin  $x$ , iar mulțimea  $\{\delta(x, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$  este **orbita** lui  $x$ .

## LECȚIA A IV-A

# SPAȚII VECTORIALE NORMATE, SERII DE FUNCȚII

## INTRODUCERE

Spațiile vectoriale normate (SVN) constituie cadrul natural pentru teoria seriilor, deoarece în orice SVN se pot face sume finite și treceri la limită. Totodată se dezvoltă concepte importante de analiză liniară și de teoria operatorilor, care îl interesează nu numai pe matematician, dar și pe inginer. Noțiunea de spațiu vectorial normat a fost introdusă de matematicianul american N. WIENER (1894 - 1970) și se dovedește în continuare un concept ineuizabil. Bineînțeles, noi ne restrîngem la prezentarea citorva elemente de bază, care permit familiarizarea cu noul domeniu desprins din Analiza matematică și anume Analiza funcțională.

Șirurile și seriile de funcții constituie un instrument esențial în "jocul cu infinitul", în formule aproximative dar cu evaluarea erorii. Seriile de puteri și seriile trigonometrice reprezintă cazuri particulare și merită un studiu separat.

## 1. Normă, spațiu Banach

În cele ce urmează, prin  $\mathcal{H}$  vom desemna fie corpul  $\mathbb{R}$ , fie corpul  $\mathbb{C}$ .

**Definiția IV. 1.** Fie  $E$  un  $\mathcal{H}$ -spațiu vectorial. O aplicație  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$  se numește **normă** pe  $E$  dacă:

$$N_1. \forall x \in E, \|x\| \geq 0 \text{ și } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (pozitivitate);}$$

$$N_2. \forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (inegalitatea triunghiului);}$$

$$N_3. \forall \alpha \in \mathcal{H}, x \in E, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \text{ (omogenitate).}$$

Un spațiu vectorial pe care este fixată o normă se numește **spațiu vectorial normat** (SVN).

Ca o consecință, pentru orice  $x_1, \dots, x_n \in E$  avem

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| \text{ și } \forall x, y \in E, \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

În primul caz se raționează prin inducție. Apoi

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \text{ deci } \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

schimbând  $x$  cu  $y$  avem  $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$ .

EXEMPLUL 1. Fie  $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ ,  $E = \mathbb{R}^n$ . Pentru orice  $x \in E$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , se definesc

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Se verifică în fiecare caz în parte proprietățile  $N_1, N_2, N_3$  și se obțin trei norme pe spațiul  $\mathbb{R}^n$  și trei exemple de  $\mathbb{R}$ -spațiu vectorial normat.

EXEMPLUL 2. Fie  $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ ,  $E = \mathbb{C}^n$ . Pentru orice  $z = (z_1, \dots, z_n) \in E$  se definesc

$$\|z\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|z\|_1 = \sum_{i=1}^n |z_i|, \quad \|z\|_\infty = \max_i |z_i|,$$

definind norme pe spațiul  $\mathbb{C}^n$ .

EXEMPLUL 3. Fie  $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ . Definim

$$a) \quad l_1 = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 0} \mid x_n \in \mathbb{R}, \forall n \text{ și seria } \sum_{n \geq 0} |x_n| \text{ este } C \right\};$$

$l_1$  este un SVN, relativ la norma definită prin

$$\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|.$$

$$b) \quad l_2 = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 0} \mid x_n \in \mathbb{R}, \forall n \text{ și seria } \sum_{n \geq 0} x_n^2 \text{ este } C \right\};$$

$l_2$  este un SVN relativ la norma

$$\|x\| = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$c) \quad l_\infty = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 0} \mid x_n \in \mathbb{R}, \forall n \text{ și } x \text{ este un șir mărginit} \right\};$$

Spațiul  $l_\infty$  este un SVN real relativ la norma  $\|x\| = \sup_n |x_n|$ . (Operațiile în  $l_\infty$  sunt cele naturale).

b, c, sunt cele naturale).

Exemple analoage se construiesc peste corpul  $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ .

EXEMPLUL 4. Fie  $A$  o mulțime nevidă și  $E = \mathcal{M}(A)$  mulțimea funcțiilor mărginite  $A \rightarrow \mathbb{R}$ . Pentru orice  $f \in E$ , **norma-sup** este definită prin

$$\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Se verifică  $N_1, N_2, N_3$  și  $\mathcal{M}(A)$  este un SVN real relativ la norma-sup.

EXEMPLUL 5. Dacă  $X$  este un spațiu metric compact, notăm cu  $C(X)$  mulțimea funcțiilor continue  $X \rightarrow \mathbb{R}$ ; orice astfel de funcție este mărginită deci  $C(X)$  este un subspațiu al lui  $\mathcal{M}(X)$  și în plus,  $C(X)$  este un SVN real relativ la norma-sup. În cazul când  $X = [a, b]$ , notăm  $C[a, b]$  în loc de  $C([a, b])$ , mulțimea funcțiilor continue  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ; pentru orice  $f \in C[a, b]$ , definim

$$\|f\| = \int_a^b |f(t)| dt$$

și se obține astfel o altă normă pe spațiul  $C[a, b]$ , în afara normei-sup.

Revenim la ca cazul general și fie  $(E, \|\cdot\|)$  un spațiu vectorial normat peste

$\mathcal{H}$ . Pentru orice  $x, y \in E$  punem  $d(x, y) = \|x - y\|$  și în acest mod se definește o distanță pe  $E$ . Așadar, **orice SVN este în mod natural un spațiu metric** (reciproc, nu; de exemplu  $\mathbb{Q}$  nu este nici măcar  $\mathbb{R}$ -spațiu vectorial, deși este spațiu metric relativ la distanța euclidiană  $d(x, y) = |x - y|$ ). Elementele unui SVN se numesc vectori, sau după caz, puncte.

În orice SVN există un punct remarcabil, originea  $0$  și norma oricărui vector  $x$  este tocmai distanța de la origine la  $x$ , anume  $\|x\| = \|x - 0\| = d(x, 0) = d(0, x)$ .

Fie  $E$  un  $\mathcal{H}$ -spațiu vectorial normat; pentru un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  de puncte din  $E$  avem  $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ .

**Definiția IV. 2.** Un  $\mathcal{H}$ -spațiu vectorial normat se numește **spațiu Banach** dacă el este complet (adică orice șir Cauchy este convergent).

EXEMPLUL 1.  $\mathbb{R}^n$  este spațiu Banach (relativ la norma  $\|\cdot\|_2$ ); similar pentru  $\mathbb{C}^n$ . Argumentul îl constituie teorema III. 1. a).

EXEMPLUL 2. Se poate demonstra că  $l_1, l_2, l_\infty$  sunt spații Banach.

EXEMPLUL 3. Pentru orice spațiu metric  $X$ , spațiul  $\mathcal{M}(X)$  este Banach relativ la norma-sup (conform teoremei III. 1. b)).

**TEOREMA IV. 1.** Fie  $E$  un  $\mathcal{H}$ -spațiu vectorial normat.

- a) Dacă  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$  (în  $E$ ) și  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  (în  $\mathbb{R}$ ), atunci  $x_n + y_n \rightarrow x + y$  și  $\alpha_n x_n \rightarrow \alpha x$  în  $E$ .  
 b) Aplicația  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|$  este uniform continuă.  
 c) Pentru orice  $x \in E$  și  $r > 0$ , avem  $\overline{B(x, r)} = B'(x, r)$ .  
 d) O submulțime  $A \subset E$  este mărginită  $\Leftrightarrow$  mulțimea  $\{\|x\|; x \in A\}$  este mărginită în  $\mathbb{R}$ .

DEMONSTRAȚIE. a) Este suficient de observat că

$$\|x_n + y_n - x - y\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \text{ și că}$$

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n(x_n - x) + (\alpha_n - \alpha)x\| \leq |\alpha_n| \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\|$$

și să aplicăm lema cleștelui.

- b)  $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$  etc.

- c) Fie  $y \in B'(x, r)$  cu  $\|y - x\| \leq r$  și  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $0 < \alpha_n < 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , cu  $\alpha_n \rightarrow 1$ . Atunci  $y_n = x + \alpha_n(y - x) \in B(x, r)$  și  $y_n \rightarrow y$  deci  $y \in \overline{B(x, r)}$  etc.

Fie  $E$  un SVN și  $(a_n)_{n \geq 0}$  un șir de elemente din  $E$ . Se definește șirul  $(s_n)_{n \geq 0}$  al sumelor parțiale,  $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ . Seria  $\sum_{n \geq 0} a_n$  se zice **convergentă, cu suma  $s$**  ( $s \in E$ ) dacă  $s_n \rightarrow s$ , adică  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_0 + a_1 + \dots + a_n - s\| = 0$ . În acest caz,  $a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow 0$ . Seria  $\sum_{n \geq 0} a_n$  se zice **absolut convergentă (AC)** dacă seria de numere reale și pozitive  $\sum_{n \geq 0} \|a_n\|$  este C.

**TEOREMA IV. 2.** Într-un spațiu Banach  $E$ , orice serie AC este C.

DEMONSTRAȚIE. Fie  $\sum_{n \geq 0} a_n$  presupusă AC și  $\varepsilon > 0$  arbitrar fixat. Deoarece seria  $\sum_{n \geq 0} \|a_n\|$  este C, rezultă că există  $N(\varepsilon)$  astfel încît  $\forall n \geq N(\varepsilon)$ ,  $(\forall) p \geq 1$ ,  $\|a_{n+1}\| + \dots + \|a_{n+p}\| < \varepsilon$ . Dar atunci  $\|a_{n+1}\| + \dots + \|a_{n+p}\| < \varepsilon$  adică  $\|s_{n+p} - s_n\| < \varepsilon$ . Deci șirul  $(s_n)_{n \geq 0}$  este Cauchy și cum  $E$  este complet, șirul  $(s_n)_{n \geq 0}$  rezultă convergent, adică seria  $\sum_{n \geq 0} a_n$  este C.

## 2. Șiruri și serii de funcții

Fie  $A$  o mulțime nevidă,  $(f_n)_{n \geq 0}$  un șir de funcții  $A \rightarrow \mathbb{R}$  și  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  o altă funcție. Rezultatele rămîn valabile și în cazul funcțiilor cu valori complexe.

**Definiția IV. 3.** Se spune că șirul  $(f_n)_{n \geq 0}$  este **punctual** (sau **simplu**)

**convergent pe  $A$  către  $f$**  și se scrie  $f_n \xrightarrow{PC} f$  dacă  $\forall x_0 \in A$ ,  $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$ .

Șirul  $(f_n)_{n \geq 0}$  se zice **uniform convergent pe  $A$  către  $f$**  și se scrie  $f_n \xrightarrow{UC} f$  dacă

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$  natural astfel încît  $\forall n \geq N(\varepsilon)$ ,  $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ , pentru orice  $x \in A$ .

**TEOREMA IV. 3.** Fie  $(f_n)_{n \geq 0}$  un șir în  $\mathcal{M}(A)$  și  $f \in \mathcal{M}(A)$ .

- a) Avem  $f_n \xrightarrow{UC} f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$  (pentru norma-sup), adică  $f_n \rightarrow f$  în  $\mathcal{M}(A)$ .  
 b) Dacă șirul  $f_n$  este UC pe  $A$ , atunci  $f_n$  este PC pe  $A$ .

DEMONSTRAȚIE. a) Faptul că  $f_n \xrightarrow{UC} f$  este echivalent cu aceea că  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$

natural astfel încît  $\forall n \geq N(\varepsilon)$ ,  $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ , adică  $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$  deci este echivalent cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ .

- b) Dacă  $f_n \xrightarrow{UC} f$ , atunci  $\forall x_0 \in A$  este îndeplinită, conform definiției IV. 3, următoarea condiție:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$  natural astfel încît  $\forall n \geq N(\varepsilon)$ ,  $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon$  deci  $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$ . Așadar,  $f_n \xrightarrow{PC} f$ .

**Comentariu.** Studiul PC și UC se realizează după următoarea schemă:

Etapa I. Fiind dat șirul de funcții  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ , se calculează  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  și se determină mulțimea  $B \subset A$  a acelor  $x$  pentru care această limită există și este finită.

Etapa a II-a. Rezultă că  $f_n \xrightarrow{PC} f$  pe  $B$ . Se calculează  $\varepsilon_n = \|f_n - f\| = \sup_{x \in B} |f_n(x) - f(x)|$ , folosind eventual tabloul de variație al funcției  $f_n(x) - f(x)$  pe mulțimea  $B$ .  
 $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$  este o serie de numere reale și pozitive. Dacă  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , atunci  $f_n \xrightarrow{UC} f$  pe  $B$ .  
 Dacă  $\varepsilon_n \not\rightarrow 0$ , atunci  $f_n$  nu este UC pe  $B$ .

Etapa a III-a. Dacă  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  atunci  $f_n \xrightarrow{UC} f$  pe  $B$ . Dacă  $\varepsilon_n \not\rightarrow 0$ , convergența nu este uniformă.

În cazul cînd  $A = [a, b]$ , se poate da o interpretare geometrică sugestivă: faptul că  $f_n \xrightarrow{UC} f$  pe  $[a, b]$  revine la aceea că  $\forall \varepsilon > 0$ , în "tubul" delimitat de graficele funcțiilor  $f - \varepsilon, f + \varepsilon$ , începînd de la un anumit rang sunt situate toate graficele funcțiilor  $f_n$ .

EXEMPLUL 1. Fie  $A = [0, 1]$  și  $f_n(x) = x^n, n \geq 1$ . Evident  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  pentru orice

$x \in A$  deci  $f_n \xrightarrow{PC} f$  pe  $A$ . Apoi  $\|f_n - 0\| = \sup |x^n| = 1 \not\rightarrow 0$ . Deci  $f_n$  nu este UC pe

$A$ . Dar  $f_n \xrightarrow{UC} f$  pe orice interval  $B = [0, r]$  cu  $0 < r < 1$ , deoarece în acest caz,

$$\|f_n - 0\| = \sup |x^n| = r^n \rightarrow 0.$$

EXEMPLUL 2. Fie  $A = [-2, 2]$  și  $f_n(x) = \frac{x+n}{n+1}$ . Avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1, \forall x \in A$  și

$$\|f_n - 1\| = \sup_{x \in A} \left| \frac{x+n}{n+1} - 1 \right| = \sup_{x \in A} \frac{|x-1|}{n+1} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0 \text{ deci } f_n \xrightarrow{UC} 1 \text{ pe } A.$$

O problemă importantă o constituie transferul de proprietăți de la un șir de funcții la funcția limită. În acest sens, are loc

**TEOREMA IV. 4.** Fie  $X$  un spațiu metric și  $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $\forall n \geq 0, f_n$  sunt continue și dacă  $f_n \xrightarrow{UC} f$  pe  $X$ , atunci  $f$  este continuă.

DEMONSTRAȚIE. Avem de arătat că  $f$  este continuă în orice punct  $a \in X$ . Fie  $x_n \rightarrow a$  deci trebuie arătat că  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ . Fixăm  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Deoarece

$f_n \xrightarrow{UC} f$  pe  $X$  pentru  $p \rightarrow \infty$ , există un rang  $N = N(\varepsilon)$  astfel încît  $\forall p \geq N$ ,

$$|f_p(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in X; \text{ în particular, } |f_N(x_n) - f(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ și } |f_N(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

În fine, deoarece funcția  $f_N$  este continuă în  $a$ , rezultă că  $f_N(x_n) \rightarrow f_N(a)$  deci pentru orice  $n$  suficient de mare,  $|f_N(x_n) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Atunci pentru orice  $n$  de

la un rang încolo, scriind că

$$f(x_n) - f(a) = [f(x_n) - f_N(x_n)] + [f_N(x_n) - f_N(a)] + [f_N(a) - f(a)],$$

rezultă  $|f(x_n) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ . Ca atare,  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

**TEOREMA IV. 5.** Dacă  $X$  este un spațiu metric compact, atunci spațiul  $C(X)$  al funcțiilor continue  $X \rightarrow \mathbb{R}$  este un spațiu Banach, relativ la norma-sup.

DEMONSTRAȚIE. Evident  $C(X) \subset \mathcal{M}(X)$ , deoarece  $X$  este compact. Dacă  $(f_n)_{n \geq 0}$  este un șir Cauchy în  $C(X)$ , atunci el este șir Cauchy în  $\mathcal{M}(X)$ , care este spațiu metric complet (relativ la "sup"). Rezultă că există  $f \in \mathcal{M}(X)$  astfel încît  $f_n \rightarrow f$  relativ la norma-sup. Conform teoremei IV.3 a), aceasta înseamnă că  $f_n \xrightarrow{UC} f$  pe  $X$ . Funcțiile  $f_n$  fiind continue pe  $X$ , rezultă că  $f$  este continuă și ca atare  $f_n \rightarrow f$  în  $C(X)$ . Deci spațiul  $C(X)$  este complet.

**TEOREMA IV. 6.** a) Dacă  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este un șir de funcții continue și dacă  $f_n \xrightarrow{UC} f$  pe  $[a, b]$ , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx, \text{ adică } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n).$$

b) Fie  $(f_n)_{n \geq 0}$  un șir de funcții  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile, cu derivată continuă. Fie  $f, g$  funcții mărginite  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f_n \xrightarrow{PC} f$  și  $f'_n \xrightarrow{UC} g$  pe intervalul  $[a, b]$ , atunci  $f$  este derivabilă pe  $[a, b]$  și  $f' = g$ , adică  $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$ .

DEMONSTRAȚIE. a) Mai întîi să observăm că

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \\ &\leq \int_a^b \|f_n - f\| dx = \|f_n - f\| (b - a). \end{aligned}$$

Deoarece  $f_n \xrightarrow{UC} f$ , rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$  deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$ .

(Vom arăta că această parte a teoremei are loc în condiții mai generale, anume este suficient să presupunem că funcțiile  $f_n$  sunt integrabile Riemann).

b) Fie  $x$  un punct fixat arbitrar din intervalul  $[a, b]$ . Conform formulei Leibniz-Newton, avem  $\forall n \geq 0$ ,

Orice serie UC este PC (nu și reciproc). O problemă principală este aceea

$$\int_a^b f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(a)$$

și făcînd  $n \rightarrow \infty$ , deoarece  $f_n \xrightarrow{PC} f$ , rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = f(x) - f(a).$$

Dar  $f'_n \xrightarrow{UC} g$  și aplicînd a), rezultă că  $\forall x \in [a, b]$ ,

$$\int_a^x g(t) dt = f(x) - f(a).$$

Deoarece  $f'_n$  sunt continue pe  $[a, b]$ , atunci aplicînd teorema IV. 5, rezultă că  $g$  este continuă. Atunci funcția  $f$  rezultă derivabilă și în plus,  $f'(x) = g(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

(Am folosit următoarea teoremă din liceu: Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție

continuă și definim  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  prin  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , atunci  $F$  este derivabilă

pe intervalul  $[a, b]$  și în plus,  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Această teoremă este atribuită lui I. BARROW, 1630 - 1677, profesorul marelui I. NEWTON, 1643 - 1727).

Trecem acum la considerarea seriilor de funcții.

**Definiția IV. 4.** Fie  $A$  o mulțime nevidă și  $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$  un șir de funcții,  $s_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ ,  $n \geq 0$ .

Seria de funcții  $\sum_{n \geq 0} f_n$  se zice **punctual convergentă (PC)** pe  $A$  dacă șirul  $(s_n)_{n \geq 0}$  este PC; în acest caz, **suma** seriei este  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  și se scrie

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \forall x \in A.$$

Seria de funcții  $\sum_{n \geq 0} f_n$  se zice **uniform convergentă (UC)** pe  $A$  dacă este PC pe  $A$  cu suma  $s$  și șirul  $s_n \xrightarrow{UC} s$  pe  $A$ .

Orice serie UC este PC (nu și reciproc). O problemă principală este aceea

de a indica ce proprietăți comune funcțiilor  $f_n$ , termeni ai seriei, se transferă sumei seriei.

**TEOREMA IV. 7.** Fie  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  un șir de funcții.

a) Dacă  $f_n$  sunt continue și seria  $\sum_{n \geq 0} f_n$  este UC pe  $A$  cu suma  $s$ , atunci  $s$  este

continuă pe  $[a, b]$ ; în plus,

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx, \text{ adică } \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

(Deci seriile UC de funcții continue pot fi integrate termen cu termen).

b) Dacă seria  $\sum_{n \geq 0} f_n$  este PC,  $f_n$  sunt derivabile pe  $[a, b]$  cu derivata continuă

și  $\sum_{n \geq 0} f'_n$  este UC, atunci suma  $s$  este derivabilă pe  $[a, b]$  și în plus,  $s' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ ,

adică  $(\sum_{n=0}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$  (se mai spune că seria  $\sum_{n \geq 0} f_n$  poate fi derivată termen

cu termen).

**Demonstrație.** a) Conform ipotezei, punînd  $s_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ ,  $n \geq 0$ , avem

$s_n \xrightarrow{UC} s$  pe  $[a, b]$  și aplicînd teorema IV. 5, rezultă că  $s$  este continuă. În plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n = \int_a^b s, \text{ adică } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_a^b f_0 + \int_a^b f_1 + \dots + \int_a^b f_n \right] = \int_a^b s,$$

deci seria  $\sum_{n \geq 0} \int_a^b f_n$  este C, cu suma  $\int_a^b s$ .

b) Funcțiile  $s_n$  sunt derivabile cu derivată continuă și în plus,  $s_n \xrightarrow{PC} s$  pe  $[a, b]$ .

Pentru seria  $\sum_{n \geq 0} f'_n$  șirul sumelor parțiale este tocmai  $s'_n$  și acest șir este UC

către o funcție  $g$ . Aplicînd teorema IV. 6, rezultă că  $s$  este derivabilă și  $s' = g$ ,

adică  $s' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ .

**EXEMPLU.** Considerăm șirul de funcții  $f_n: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ , cu graficul din figură:

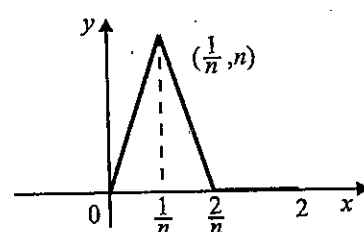


Fig. IV. 1

Evident,  $\int_0^2 f_n = \int_0^2 f_n(x) dx = 1$  pentru orice  $n \geq 1$  deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 f_n = 1$ . Pe de altă parte,  $f_n \xrightarrow{PC} 0$  (deoarece  $\forall x \in [0, 2], f_n(x) \rightarrow 0$ ). Așadar  $\int_0^2 (\lim f_n) = 0$  și relația din

teorema IV. 6 a) nu are loc. Motivul este că șirul  $(f_n)$  nu este UC către 0 pe  $[0, 2]$ . Totodată, rezultă că seria  $\sum_{n \geq 2} [f_n(x) - f_{n-1}(x)]$  nu poate fi integrată termen cu termen pe intervalul  $[0, 2]$ .

Din cele de mai sus, rezultă utilitatea unor criterii de UC pentru serii de funcții și în acest sens, are loc

**TEOREMA IV. 8. (criteriul lui K. WEIERSTRASS, 1815 - 1897, de convergență uniformă).** Fie o serie  $\sum_{n \geq 0} f_n$  de funcții mărginite  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$  și  $\sum_{n \geq 0} a_n$  o serie C de numere reale pozitive. Dacă  $\forall x \in A, |f_n(x)| \leq a_n$  (începînd de la un rang  $N$ ; deci  $\forall n \geq N$ ), atunci seria  $\sum_{n \geq 0} f_n$  este UC pe  $A$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Avem  $\|f_n\| \leq a_n$  pentru norma-sup deci conform teoremei II. 4 seria  $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|$  rezultă C, adică seria  $\sum_{n \geq 0} f_n$  este AC în spațiul Banach  $\mathcal{M}(A)$ .

Conform teoremei IV. 2, seria  $\sum_{n \geq 0} f_n$  este C în  $\mathcal{M}(A)$ . Dar convergența unei serii în  $\mathcal{M}(A)$  revine la convergența ei uniformă pe  $A$  (conform teoremei IV. 3 a) aplicată pentru șirul sumelor parțiale).

**EXEMPLU.** Seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n^2}$  este UC pe  $\mathbb{R}$ , deoarece  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1$

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \text{ și seria } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ este C.}$$

### 3. Aplicații liniare și continue între spații vectoriale normate

Fie  $E, F$  două SVN peste același corp  $\mathcal{H}$  ( $\mathcal{H} = \mathbb{R}$  sau  $\mathbb{C}$ ) și  $T : E \rightarrow F$  o aplicație  $\mathcal{H}$ -liniară; așadar,  $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathcal{H}, T(x + y) = T(x) + T(y), T(\lambda x) = \lambda T(x)$  și în particular,  $T(0) = 0$ . Vom nota uneori  $Tx$  în loc de  $T(x)$ , iar normele în cele două spații sunt notate la fel.

**TEOREMA IV. 9.** Sunt echivalente următoarele afirmații:

- $T$  este continuă pe  $E$ ;
- $T$  este continuă în  $x = 0$  (originea lui  $E$ );
- există  $M > 0$  astfel încît  $\forall x \in E, \|T(x)\| \leq M\|x\|$ .

**DEMONSTRAȚIE.** a)  $\Rightarrow$  b) este evident;

b)  $\Rightarrow$  c). Fie  $\varepsilon = 1$ . Atunci există  $\delta > 0$  astfel încît  $\forall y \in E, \|y\| < \delta, \|T(y)\| \leq 1$ . Luăm  $\delta'$  astfel încît  $0 < \delta' < \delta$ . Fixăm  $x \in E$  arbitrar, cu  $x \neq 0$  și fie  $y = \frac{\delta'}{\|x\|}x$ . Atunci  $\|y\| = \delta' \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \delta' < \delta$  deci  $\|T(y)\| \leq 1$  adică  $\frac{\delta'}{\|x\|} \|T(x)\| \leq 1$

și putem lua  $M = \frac{1}{\delta'}$ . Rezultă că  $\forall x \in E, x \neq 0$  avem  $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ . Pentru  $x = 0$  această inegalitate este evidentă.

c)  $\Rightarrow$  a). Fie  $\forall x \in E$  fixat și  $x_n \rightarrow x$ . Atunci

$$0 \leq \|T(x_n) - T(x)\| = \|T(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\|$$

și lema cleștelui arată că  $T(x_n) \rightarrow T(x)$ .

**COROLAR.** Orice aplicație liniară continuă  $T : E \rightarrow F$  este mărginită pe bila  $B'(0, 1)$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Dacă  $\|x\| \leq 1$ , rezultă  $\|T(x)\| \leq M$  conform implicației a)  $\Rightarrow$  c).

**Comentariu.** Dacă aplicația  $T: E \rightarrow F$  este interpretată ca un "sistem intrare-ieșire" care fiecărei intrări  $x$  îi face să corespundă ieșirea  $y = T(x)$ , proprietatea de liniaritate a lui  $T$  exprimă "principiul suprapunerii efectelor" (conform căruia dacă  $x_i \mapsto y_i$  și

$\lambda_i \in \mathcal{H}$  pentru  $1 \leq i \leq p$ , atunci intrării  $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$  îi corespunde ieșirea  $\sum_{i=1}^p \lambda_i y_i$ , unde  $y_i = T(x_i)$ .

Dacă în plus,  $T$  este continuă, atunci  $\exists M > 0$  astfel încît  $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq M$  pentru orice

$x \in E, x \neq 0$ . Deci  $M$  apare ca un majorant al rapoartelor între normele ieșirii și intrării sistemului  $T$ . Numărul real  $\|T\| = \inf \{ M > 0 \mid \forall x \in E, \|T(x)\| \leq M\|x\| \}$  este numit **norma** lui  $T$  și se interpretează ca un "grosiment" al sistemului, indicînd capacitatea sistemului de a amplifica intrările. Evident,  $\forall x \in E, \|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$ .

Fie  $p$  spațiul vectorial real al șirurilor nule da la un rang încolo; pentru orice  $x = (x_n)_{n \geq 0} \in p$ , punem  $\|x\| = \max_{n \geq 0} |x_n|$ . Aplicația  $T: p \rightarrow \mathbb{R}, T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$  este  $\mathbb{R}$ -liniară,

dar nu este continuă (într-adevăr, altminteri  $\exists M > 0$  astfel încît  $\|x\| \leq 1$  implică  $|T(x)| \leq M$ . Alegem  $n$  natural astfel încît  $n > M$  și șirul  $x = (1, 1, \dots, 1, 0, \dots)$  deci

$\|x\| = 1$  și  $T(x) = n$ ; contradicție).

Acest fenomen al existenței de aplicații liniare necontinue este întâlnit numai în cazul spațiilor infinit dimensionale.

Fie  $\mathcal{H} = \mathbb{R}$  și  $E$  un spațiu vectorial normat finit dimensional. Dacă  $\dim_{\mathbb{R}} E = n$  și  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  este o bază a lui  $E$ , atunci  $\forall x \in E$  există scalari unici  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  astfel încît  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ . Vom considera aplicația  $T: E \rightarrow \mathbb{R}^n, T(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ;  $T$  este un izomorfism de spații vectoriale.

**TEOREMA IV. 10.** Fie  $T$  ca mai sus și pe  $\mathbb{R}$  să considerăm norma  $\|\cdot\|_2$ . Atunci  $T$  și  $T^{-1}$  sînt continue ( $T$  este un omeomorfism).

**DEMONSTRAȚIE.**  $T^{-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$  și folosind teorema IV. 1. rezultă continuitatea aplicației  $T^{-1}$ .

Fie  $S = \{\lambda \in \mathbb{R}^n; \|\lambda\|_2 = 1\}$  și  $f: S \rightarrow \mathbb{R}, f(\lambda) = \|T^{-1}(\lambda)\|$  ( $\|\cdot\|$  este norma în  $E$ ). Aplicația  $f$  este evident continuă (componere de aplicații continue) și  $f(\lambda) \neq 0 \forall \lambda \in S$ . Mulțimea  $S$  fiind compactă deducem că  $\inf_S f = \mu > 0$  (egalitatea este o notație). Dacă  $x \in E, x \neq 0$  deducem  $T(x) \neq 0$  și deci  $\frac{T(x)}{\|Tx\|_2} \in S$  deci

$f\left(\frac{T(x)}{\|Tx\|_2}\right) \geq \mu$  de unde  $\|Tx\|_2 \leq \frac{1}{\mu} \|x\|$ . Cum inegalitatea este evidentă pentru

$x = 0$  rezultă  $T$  continuă (teorema IV.9.)

Dacă  $E$  este un spațiu vectorial real, două norme  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  se zic **echivalente** dacă există constante  $\alpha > 0, \beta > 0$  astfel încît  $\forall x \in E, \|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2$  și  $\|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$ . În acest caz mulțimile deschise în spațiile metrice asociate sunt aceleași (deci topologiile coincid). Din teorema de mai sus rezultă cu ușurință:

a) Orice două norme pe un spațiu vectorial **finit dimensional**  $E$  sunt echivalente.

b) Fie  $E$  un spațiu SVN real. Orice subspațiu vectorial  $F \subset E$  de dimensiune finită este închis în  $E$ .

**DEMONSTRAȚIE.** b) Cu norma indusă,  $F$  rezultă un subspațiu Banach (izo cu  $\mathbb{R}^n$ , unde  $n = \dim_{\mathbb{R}} F$ ); dacă  $x_n \rightarrow x$  cu  $x_n \in F$ , atunci  $x_n$  este un șir Cauchy și cum  $F$  complet, rezultă  $x \in F$  deci  $F$  este închis.

**TEOREMA IV. 11.** Fixăm un interval  $[a, b], a < b$ .

a) Luarea integralei  $I: C^0[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, I(f) = \int_a^b f(x) dx$  este o aplicație liniară continuă.

b) Luarea derivatei  $D: C^1[a, b] \rightarrow C^0[a, b], D(f) = f'$  este o aplicație liniară discontinuă (pentru notații vezi pag. 99). (Pe spațiile vectoriale reale  $C^0[a, b], C^1[a, b]$  se consideră norma-sup).

**DEMONSTRAȚIE.** a) Pentru orice funcție continuă  $f \in C^0[a, b]$ , avem

$$|I(f)| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b \|f\| dx = (b-a)\|f\| \text{ și se verifică deci condiția c) din teorema$$

IV. 9 cu  $M = b - a$ .

b) Este suficient să arătăm că  $D$  este discontinuă în origine. Fie  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin n(x-a), n \geq 1$ . Evident  $\|f_n\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$  deci  $f_n \rightarrow 0$  dar  $\|f'_n\| = \sqrt{n} \rightarrow \infty$  deci  $Df_n \not\rightarrow 0$ .

**Comentariu.** Teorema IV. 11 explică de ce integrala este mai bine adaptată decît derivata, în aplicarea metodelor aproximative numerice. Anume, la variații mici ale lui  $f$  corespund variații mici pentru  $I(f)$ , în timp ce două funcții derivabile pot fi "foarte

apropiate" relativ la distanța-sup, dar derivatele lor să nu aibă aceeași proprietate (deci dacă  $f \sim g$ , nu rezultă că  $f' \sim g'$ ).

Reluăm cazul general și fie  $E, F$  două spații vectoriale normate peste  $\mathcal{H}$ . Vom nota cu  $\mathcal{Q}(E, F)$   $\mathcal{H}$ -spațiul vectorial al aplicațiilor liniare și continue de la  $E$  și  $F$ . Pentru orice  $T \in \mathcal{Q}(E, F)$ , se definește norma  $\|T\| =$  cel mai mic  $M \geq 0$  astfel încît  $\forall x \in E, \|T(x)\| \leq M\|x\|$ . Se poate arăta ușor că

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| = 1} \|T(x)\|.$$

**TEOREMA IV. 12.** Dacă  $E, F$  sunt SVN și  $F$  este spațiu Banach, atunci  $\mathcal{Q}(E, F)$  este spațiu Banach.

**DEMONSTRAȚIE.** Se verifică imediat că asocierea  $T \mapsto \|T\|$  este o normă pe  $\mathcal{Q}(E, F)$  deci  $\mathcal{Q}(E, F)$  este un SVN. Rămîne să arătăm că  $\mathcal{Q}(E, F)$  este spațiu Banach. Fie  $(T_n)_{n \geq 0}$  un șir Cauchy în  $\mathcal{Q}(E, F)$ . Deoarece  $\forall x \in E, \forall m, n \in \mathbb{N}, \|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \|T_m - T_n\| \|x\|$ , rezultă că  $\forall x \in E$  șirul  $(T_n(x))_{n \geq 0}$  este Cauchy în  $F$ . Dar  $F$  este spațiu complet deci șirul  $(T_n(x))_{n \geq 0}$  este convergent în  $F$  și definim  $T: E \rightarrow F$  prin  $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ . Aplicația  $T$  este evident liniară și

rămîne să arătăm că este continuă și că  $T_n \rightarrow T$  în  $\mathcal{Q}(E, F)$ . Fie  $\forall \varepsilon > 0$ . Știm că există  $N(\varepsilon)$  natural astfel încît  $\forall m, n \geq N(\varepsilon), \|T_m - T_n\| < \varepsilon$  deci

$\|T_m(x) - T_n(x)\| < \varepsilon \|x\|$  și făcînd  $m \rightarrow \infty, \|T(x) - T_n(x)\| \leq \varepsilon \|x\|, \forall x \in E, \forall n \geq N(\varepsilon)$ . Rezultă că  $T_n - T \in \mathcal{Q}(E, F)$  deci  $T \in \mathcal{Q}(E, F)$  și în plus,  $\|T_n - T\| \leq \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon)$ , adică  $T_n \rightarrow T$  în  $\mathcal{Q}(E, F)$ .

**COROLAR.** Luînd  $F = \mathcal{H}$ , rezultă că pentru orice SVN  $E$ , spațiul  $\mathcal{Q}(E, \mathcal{H})$  al funcționalelor liniare și continue este Banach.

**OBSERVAȚIE.** Un rezultat important, cunoscut ca **teorema Hahn-Banach** arată că spațiul  $\mathcal{Q}(E, \mathcal{H})$  este "suficient de bogat". Anume, pentru  $\mathcal{H} = \mathbb{R}$  și  $M \subset E$  un subspațiu vectorial al SVN real  $E$  și  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcțională liniară continuă ( $M$  avînd norma indusă), atunci există o funcțională liniară și continuă  $\tilde{f}: E \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încît  $\tilde{f}|_M = f$  și  $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ . Această teoremă se extinde și la cazul  $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ . Nu dăm demonstrația. Din această teoremă se pot deduce două consecințe utile:

1) Fie  $E$  un SVN peste  $\mathcal{H}$  și  $x_0 \in E, x_0 \neq 0$ . Atunci există o funcțională liniară

și continuă  $T: E \rightarrow \mathcal{H}$  de normă 1 astfel încît  $T(x_0) = \|x_0\|$ .

(Se ia  $M = \mathcal{H}x_0$  și  $f: M \rightarrow \mathbb{R}, f(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$ ).

2)  $E$  este un SVN peste  $\mathcal{H}$  și  $x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2$ , atunci există  $T \in \mathcal{Q}(E, \mathcal{H})$  astfel încît  $T(x_1) \neq T(x_2)$  (se consideră  $x_0 = x_2 - x_1$  și se aplică proprietatea anterioară); se mai spune că  $T$  este o funcțională liniară continuă care **separă**  $x_1, x_2$ .

Dacă  $E$  este un SVN peste  $\mathcal{H}$ , se scrie  $\mathcal{Q}(E)$  în loc de  $\mathcal{Q}(E, E)$ , iar elementele lui  $\mathcal{Q}(E)$  se numesc **operatori liniari și continui** ai spațiului  $E$  în el însuși. Pentru orice  $f, g \in \mathcal{Q}(E)$  are sens compunerea  $g \circ f \in \mathcal{Q}(E)$  și  $\mathcal{Q}(E)$  este  $\mathcal{H}$ -algebră asociativă; în plus,  $\|g \circ f\| \leq \|f\| \|g\|$ .

#### 4. Derivarea funcțiilor cu valori vectoriale. Formula lui Taylor și aplicații

Presupunem  $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ , fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval deschis,  $t_0 \in I$ . Fixăm de asemenea un SVN real  $E$  și o aplicație  $f: I \rightarrow E$ .

**Definiția IV. 5.** Se spune că  $f$  este **derivabilă** în  $t_0$  dacă există în  $E$  limita

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \text{ notată } f'(t_0) \text{ și denumită } \textbf{derivata lui } f \textbf{ în } t_0.$$

Aceasta revine la faptul că  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încît dacă  $t \in I$  și  $0 < |t - t_0| < \delta(\varepsilon)$ , atunci  $\left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - f'(t_0) \right\| < \varepsilon$ .

Dacă  $f$  este derivabilă în orice punct din  $I$ , se spune că  $f$  este **derivabilă pe  $I$**  și aplicația  $f': I \rightarrow E, t \mapsto f'(t)$  se numește **derivata funcției  $f$** .

**OBSERVAȚII.** 1) Notăția  $t$  pentru variabila reală amintind de "timp" are justificare în originea cinematică a derivatei; de exemplu pentru  $E = \mathbb{R}^3$ , o funcție  $f: I \rightarrow E$  este o "mișcare" în spațiu, iar  $f'(t)$  este viteza la momentul  $t$ .

2) Dacă  $E = V_3$ , mulțimea vectorilor liberi din spațiu, o aplicație  $f: I \rightarrow V_3$  este numită un cîmp de vectori definit pe  $I$ . Dacă se alege un reper ortogonal Oxyz în spațiu, de versori  $i, j, k$ , atunci  $\forall t \in I, f(t) = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$ , cu componentele scalare  $f_i: I \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 3$ .

3) Se definesc fără dificultate derivatele laterale și se pot considera funcții

date pe intervale nu neapărat deschise. Se extind de asemenea proprietățile binecunoscute din liceu (unde  $E = \mathbb{R}$ ); de exemplu:

- dacă  $f$  este derivabilă în  $t_0$ , atunci  $f$  este continuă în  $t_0$ ;
- dacă  $f, g : I \rightarrow E$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  și există  $f'(t_0), g'(t_0)$  pentru  $t_0 \in I$ , atunci există  $(\alpha f + \beta g)'(t_0)$  și este egal cu  $\alpha f'(t_0) + \beta g'(t_0)$ ;
- fie  $f : I \rightarrow E$  și  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile în  $t_0 \in \mathbb{R}$ ; atunci produsul  $\alpha f$  este funcție derivabilă în  $t_0$  și  $(\alpha f)'(t_0) = \alpha'(t_0)f(t_0) + \alpha(t_0)f'(t_0)$ .
- dacă  $\alpha : I \rightarrow J$  este derivabilă în  $t_0 \in I$ , cu valori în intervalul  $J$  și  $g : J \rightarrow E$  este derivabilă în  $\alpha(t_0)$ , atunci  $g \circ \alpha$  este derivabilă în  $t_0$  și  $(g \circ \alpha)'(t_0) = g'(\alpha(t_0))\alpha'(t_0)$ .

În cazul  $E = \mathbb{R}^n$  are loc:

**TEOREMA IV. 13.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$ ; aplicația  $f$  este derivabilă într-un punct  $t_0 \in I$  dacă și numai dacă  $f_1, \dots, f_n$  sunt derivabile în  $t_0$  și în plus,  $f'(t_0) = (f_1'(t_0), \dots, f_n'(t_0))$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Pentru orice  $t \in I$ ,  $t \neq t_0$  avem

$$\frac{1}{t - t_0}(f(t) - f(t_0)) = \left( \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \dots, \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0} \right) \in \mathbb{R}^n$$

și trecerea la limită ( $t \rightarrow t_0$ ) se face pe componente.

**EXEMPLUL 1.** Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $f(t) = (t^2, \ln t, 2t + 1, -3)$ . Pentru orice  $t \in (0, \infty)$  avem  $f'(t) = (2t, 1/t, 2, 0)$ .

**EXEMPLUL 2.** Fie  $I = [0, 2\pi]$ ,  $E = \mathbb{R}^2$  și  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = (\cos t, \sin t)$ ;  $f$  este derivabilă pe  $I$  și  $\forall t \in I$ ,  $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$ . Se observă că deși  $f(0) = f(2\pi)$ , derivata nu se anulează în nici un punct. Deci teorema lui Lagrange a creșterilor finite nu se extinde la funcții cu valori vectoriale, sub forma cunoscută din liceu. Vom folosi următoarea generalizare:

**TEOREMA IV. 14.** (J. DIEUDONNÉ, 1906-1993). Fie  $I = [a, b]$ ,  $f : I \rightarrow E$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue și derivabile la dreapta în orice punct  $t \in I$ . Dacă  $\forall t \in I$ ,  $\|f'_d(t)\| \leq g'_d(t)$ , atunci  $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Vom arăta că  $\forall \varepsilon > 0$  și  $\forall t \in [a, b]$ ,

$$(*) \quad \|f(t) - f(a)\| \leq \varepsilon(t - a) + g(t) - g(a).$$

Făcînd apoi  $t = b$  și ținînd cont că  $\varepsilon$  este arbitrar, rezultă teorema. Să considerăm mulțimea  $I_\varepsilon = \{u \in [a, b] \mid \forall t \in [a, u] \text{ are loc inegalitatea } (*)\}$ . Evident,  $I_\varepsilon$  este nevidă (conține  $a$ ) și în plus,  $I_\varepsilon$  este un interval de extremitate  $a$ . Mai mult, din continuitatea funcțiilor  $f, g$ , rezultă  $I_\varepsilon = [a, c]$  cu  $c \leq b$  și rămîne de arătat că  $c = b$ . Dacă prin absurd  $c < b$ , atunci  $\exists h > 0$  astfel încît pentru  $c < t \leq c + h$  să avem

$$\left\| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} - f'_d(c) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \frac{g(t) - g(c)}{t - c} - g'_d(c) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

deducem

$$\left\| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \right\| \leq \|f'_d(c)\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq g'_d(c) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{g(t) - g(c)}{t - c} + \varepsilon,$$

de unde  $\|f(t) - f(c)\| \leq \varepsilon(t - c) + g(t) - g(c)$ , pentru  $c < t \leq c + h$ .

Cum  $c \in I_\varepsilon$ ,  $\|f(c) - f(a)\| \leq \varepsilon(c - a) + g(c) - g(a)$  și deci

$$\|f(t) - f(a)\| \leq \varepsilon(t - a) + g(t) - g(a) \text{ pentru } t \in [c, c + h],$$

rezultă că  $c + h \in I_\varepsilon$ , ceea ce contrazice faptul că  $I_\varepsilon = [a, c]$ . Așadar,  $c = b$  și teorema este demonstrată.

**OBSERVAȚIE.** Este suficient ca ipotezele asupra  $f'_d, g'_d$  să fie realizate pe intervalul deschis  $(a, b)$ ; în acest caz, se consideră  $\alpha > a$ , intervalul  $[\alpha, b]$  și apoi punem  $\alpha \rightarrow a$  etc. Corolarul de mai jos arată legătura cu teorema clasică a creșterilor finite.

**COROLAR.** Fie  $f : [a, b] \rightarrow E$  o funcție continuă derivabilă la dreapta, astfel încît să existe  $M > 0$  pentru care  $\|f'_d(t)\| \leq M$ ,  $\forall t \in (a, b)$ . Atunci  $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Se ia  $g(t) = Mt$  și se aplică teorema IV. 14.

Dacă  $f : I \rightarrow E$  este o aplicație, se definesc prin inducție derivatele de ordin superior ale lui  $f$ . Vom spune că  $f$  este de clasă  $C^p$  pe intervalul  $I$  și scriem  $f \in C^p(I)$ ,  $p \in \mathbb{N}$  dacă pentru  $p = 0$ ,  $f$  este continuă pe  $I$  și pentru  $p \geq 1$ ,  $f^{(p-1)}$  este derivabilă, cu derivata  $f^{(p)} : I \rightarrow E$  continuă pe  $I$ ; funcția  $f$  se zice **indefinit derivabilă** și se scrie  $f \in C^\infty(I)$  dacă  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^p(I)$ . Dacă  $I$  nu este neapărat deschis, la extremități se consideră derivatele laterale.

**Definiția IV. 6.** Fie  $f : I \rightarrow E$  și  $t_0 \in I$  astfel încît să existe  $f^{(n)}(t_0)$ ,  $n \geq 1$  (așadar  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  sunt derivabile în vecinătatea lui  $t_0$  și  $f^{(n-1)}$  este derivabilă în  $t_0$ ). În acest caz, se poate defini **polinomul lui B. TAYLOR (1685 - 1731) pentru  $f$  de grad  $n$**  (cu coeficienți în  $E$ ):

$$P_n(t_0, t, f) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{(t - t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0).$$

De remarcat că  $P_n : I \rightarrow E$ ,  $t \mapsto P_n(t_0, t, f)$  are aceleași derivate cu  $f$  în punctul  $t_0$ , pînă la ordinul  $n$  inclusiv; anume

$$P_n(t_0, t_0, f) = f(t_0), P'_n(t_0, t_0, f) = f'(t_0), \dots, P_n^{(n)}(t_0, t_0, f) = f^{(n)}(t_0).$$

Diferența  $R_n(t_0, t, f) = f(t) - P_n(t_0, t, f)$  se numește **restul de ordin  $n$  al lui  $f$  în  $t_0$** . **Formula Taylor** se scrie pentru  $n \geq 1$  fixat astfel

$$f(t) = P_n(t_0, t, f) + R_n(t_0, t, f)$$

și în practică avem o aproximare  $f(t) \approx P_n(t_0, t, f)$ ,  $\forall t \in I$ , pentru care este necesară estimarea erorii absolute, adică  $\|R_n(t_0, t, f)\|$ . În acest sens are loc:

**TEOREMA IV. 15.** Fixăm  $n \geq 1$  și presupunem că  $f \in C^n[a, b]$ , iar pe  $(a, b)$  există  $f^{(n+1)}$ . Dacă există  $\lambda > 0$  astfel încît  $\forall t \in (a, b)$ ,  $\|f^{(n+1)}(t)\| \leq \lambda$ , are loc următoarea estimare

$$\|R_n(a, b, f)\| \leq \lambda \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Să considerăm funcția  $\varphi : [a, b] \rightarrow E$ ,

$$\varphi(t) = f(b) - f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t).$$

Evident,  $f$  este continuă pe  $[a, b]$ ,  $\varphi(b) = 0$  și  $\varphi(a) = R_n(a, b, f)$ . În plus, se vede imediat că  $\forall t \in (a, b)$ ,  $\varphi'(t) = -\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$ . Fie apoi  $g(t) = -\lambda \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ .

Funcțiile  $\varphi$  și  $g$  satisfac condițiile teoremei IV. 14 și rezultă

$$\|R_n(a, b, f)\| = \|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq g(b) - g(a) = \lambda \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Există mai multe forme de exprimare mai sintetică a restului în formule de tip Taylor, care permit aproximarea funcțiilor prin polinoame, dar cu estimările erorii absolute:

I. Dacă pentru o funcție  $f : I \rightarrow E$ , cu  $I$  interval deschis există  $f^{(n)}(t_0)$ ,  $t_0 \in I$ ,  $n \geq 1$ , atunci se demonstrează (de exemplu, prin inducție după  $n$  și folosind teorema IV. 14; pentru  $n = 1$  este chiar definiția derivatei) că

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0) - \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0)}{(t-t_0)^n} = 0$$

și notînd raportul cu  $\frac{1}{n!} \rho(t)$ , rezultă **formula Taylor-Young**:

$$f(t) = f(t_0) + \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^n}{n!} \rho(t), \text{ unde } \lim_{t \rightarrow t_0} \rho(t) = 0.$$

II. Să considerăm cazul  $E = \mathbb{R}$ . Cu notațiile din demonstrația teoremei IV. 15,

fie  $\psi(t) = \varphi(t) - A \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$  unde constanta  $A \in \mathbb{R}$  poate fi determinată prin condiția  $\psi(a) = \psi(b)$ . Deoarece  $\psi(b) = 0$ , rezultă  $\psi(a) = 0$  deci  $A = \frac{\varphi(a)(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}$ .

Funcției  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i se poate aplica teorema clasică a lui Rolle, deci există

$c \in (a, b)$  astfel încît  $\psi'(c) = 0$ . Dar  $\psi'(t) = \varphi'(t) + \frac{A(b-t)^n}{n!} = \frac{(b-t)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(t))$

deci  $A = f^{(n+1)}(c)$ . În concluzie,

$$R_n(a, b, f) = \varphi(a) = A \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Se obține astfel **formula Taylor cu restul Lagrange**:

$$f(b) = P_n(a, b, f) + R_n(a, b, f) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), \quad c \in (a, b).$$

Cu notații schimbate ( $b \rightarrow x$ ), să presupunem că  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție de clasă  $C^{n+1}$ ,  $n \geq 0$  pe intervalul deschis  $I$  și fie  $a \in I$ . Atunci pentru orice  $x \in I$ , există un punct  $c$  între  $a$  și  $x$  astfel încît

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

În aceleași condiții, are loc formula următoare:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(u)}{n!} (x-u)^n du$$

(numită **formula lui Taylor cu restul integral de ordin  $n$** ,  $n \geq 0$ ).

Demonstrația se face prin inducție după  $n$ . Pentru  $n = 0$  avem de arătat că

$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(u) du$ , ceea ce rezultă direct din formula Leibniz - Newton.

Presupunem  $n \geq 1$  și formula adevărată pentru  $n-1$ , și o probăm pentru  $n$ ; totul se reduce la a arăta că

$$\int_a^x \frac{f^{(n)}(u)}{(n-1)!} (x-u)^{n-1} du - \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(u)}{n!} (x-u)^n du = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Dar primul membru este egal cu

$$\int_a^x \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} [nf^{(n)}(u) - (x-u)f^{(n+1)}(u)] du =$$

$$= -\frac{1}{n!} \int_a^x \frac{d}{du} [(x-u)^n f^{(n)}(u)] du = -\frac{1}{n!} [(x-u)^n f^{(n)}(u)] \Big|_{u=a}^{u=x} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

## CAZURI PARTICULARE.

a) Dacă  $P$  este o funcție polinomială cu coeficienți reali de grad  $n$ , atunci pentru orice  $a, x \in \mathbb{R}$ , avem  $P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ , deoarece  $P^{(n+1)}(u) = 0$  pentru orice  $u \in \mathbb{R}$ .

b) Presupunem că  $f: [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$  este o funcție de clasă  $C^{n+1}$ . Atunci pentru orice  $x \in (-\alpha, \alpha)$  există un punct  $c$  între  $0$  și  $x$  astfel încît

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Aceasta se numește **formula lui K. MAC LAURIN** (1698 - 1746).

c) Dacă lui  $x$  i se dă o "creștere"  $\Delta x$ , diferența  $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$  se numește "creșterea" corespunzătoare a lui  $f$ . Dacă  $f$  este de clasă  $C^{n+1}$ , atunci în punctul curent  $x$  avem:

$$\Delta f = \frac{f'(x)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1},$$

cu  $c$  cuprins între  $x$  și  $x + \Delta x$ . În această formulare este folosită formula Taylor în unele considerații fizice.

## APLICAȚII.

1) Calculăm  $\sin 33^\circ$  cu aproximație  $\leq 10^{-6}$ . Conform formulei Taylor cu restul Lagrange ( $n = 3$ ) avem:

$$\sin(x+h) = \sin x + \frac{h}{1!}\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x + \frac{h^4}{4!}\sin c$$

cu  $c$  cuprins între  $x$  și  $x+h$ . Luăm  $x = 30^\circ = \pi/6$ ,  $h = 3^\circ = \pi/60$ . Deoarece

$$\left| \frac{h^4}{4!}\sin c \right| \leq \frac{h^4}{4!} = \frac{\pi^4}{60^4 4!} \leq 10^{-6}, \text{ rezultă că}$$

$$\sin 33^\circ \approx \frac{1}{2} + \frac{\pi}{60} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi^2}{2 \cdot 60^2} \frac{1}{2} - \frac{\pi^3}{6 \cdot 60^3} \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,54464$$

Alcătuirea tabelor uzuale trigonometrice și de logaritmi s-a realizat esențialmente prin utilizarea formulei Taylor și interpolărilor.

2) Formula Taylor permite unele precizări în studiul funcțiilor reale inițiat în liceu. O funcție  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^2$  se numește **convexă** pe intervalul  $[a, b]$  ("ține apă") dacă  $\forall x, x_0 \in [a, b]$ ,  $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , adică graficul lui  $f$  este situat deasupra tangentei în oricare punct  $(x_0, f(x_0))$  al graficului.

Ținând cont de formula Taylor ( $n = 1$ ):  $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$  cu  $c$  situat între  $x$  și  $x_0$ , rezultă că **dacă  $f'' \geq 0$  pe  $[a, b]$ , atunci  $f$  este convexă și reciproc**. Similar,  $f$  este concavă pe  $[a, b] \Leftrightarrow -f$  convexă pe  $[a, b] \Leftrightarrow f'' \leq 0$  pe  $[a, b]$ .

3) Fie  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  două funcții de clasă  $C^{n+1}$  și  $x_0 \in (a, b)$ . Se spune că  $f$  și  $g$  **au contact de ordin cel puțin  $n$  în  $x_0$**  dacă

$$f(x_0) = g(x_0), f'(x_0) = g'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0),$$

adică au același polinom Taylor de grad  $n$  în  $x_0$ . Astfel,  $f, g$  au contact de ordin cel puțin 1 în  $x_0 \Leftrightarrow$  graficele lor trec prin același punct de abscisă  $x_0$  și au aceeași tangentă acolo. Dacă  $f$  și  $g$  au contact de ordin cel puțin 2 în  $x_0$ , se spune că graficele lor au aceeași **curbură** în  $x_0$ . Fiind dată o funcție  $f$  de clasă  $C^2$  în vecinătatea unui punct  $x_0$  unde  $f''(x_0) \neq 0$ , atunci există și este unic un cerc remarcabil trecînd prin  $(x_0, f(x_0))$  și avînd contact de ordin cel puțin 2 cu  $f$  în  $x_0$ , numit **cercul osculator** al lui  $f$  în  $x_0$ ; se arată ușor că raza lui este

$$R = \frac{(1 + f'(x_0)^2)^{3/2}}{|f''(x_0)|}, \text{ numită } \textbf{raza de curbură} \text{ a lui } f \text{ în } x_0.$$

Dacă  $f$  este de clasă  $C^2$  în vecinătatea lui  $x_0$ , avem aproximarea liniară

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) = P_1(x_0, x, f) \text{ și aproximarea pătratică}$$

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) = P_2(x_0, x, f)$$

care revine la a determina dreapta (tangenta) și respectiv parabola avînd în  $(x_0, f(x_0))$  un contact de ordin cel puțin 1 (respectiv 2) cu graficul lui  $f$ .

4) Precizarea punctelor de extrem, ale funcțiilor reale se poate face tot prin utilizarea formulei lui Taylor. Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^n$ ,  $n \geq 2$  și

$x_0 \in (a, b)$  un punct astfel încît  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ .

Atunci  $f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$ , unde  $c$  este situat între  $x_0$  și  $x$ . Dacă  $n$  este par, atunci diferența  $f(x) - f(x_0)$  are semn variabil în orice vecinătate a lui

$x_0$ , deci  $x_0$  nu este punct extrem local pentru  $f$  (este punct de inflexiune). Dacă  $n$  este par și  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , atunci  $f^{(n)}$  fiind continuă păstrează semnul "−" pe o vecinătate a lui  $x_0$  unde  $f(x) - f(x_0) \leq 0$  și  $x_0$  este un punct de maxim local. Dacă  $n$  este par și  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , atunci  $x_0$  este punct de minim local.

EXEMPLU. Fie  $f(x) = (2x - \pi)^3 \cos x$  și  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ . Avem  $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$  și

$f^{(4)}(x_0) = -192$  deci  $n = 4$  și  $x_0$  este un punct de maxim local. Pentru  $f(x) = x^3 e^x$  și  $x_0 = 0$  avem  $f'(0) = f''(0) = 0$  și  $f'''(0) = 6 \neq 0$  deci  $n = 3$  și originea este punct de inflexiune.

5) Fie  $I = [a, b]$  și  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^2[a, b]$  cu  $\varphi'(x) \neq 0, \forall x \in I$ . Șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  de puncte presupuse din  $I$ , definit prin  $x_0$  și  $x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)}$ ,

$n \geq 0$  se numește **procedura Newton**, asociată lui  $\varphi$  și lui  $x_0$ .

**TEOREMA IV. 16.** Dacă  $\xi \in (a, b)$  este o soluție a ecuației  $\varphi(x) = 0$  și  $\varphi'(\xi) \neq 0$ , atunci există o vecinătate  $V$  a lui  $\xi$ , astfel încât  $\forall x_0 \in V$ , procedura Newton asociată lui  $\varphi$  și lui  $x_0$ , converge către  $\xi$ .

DEMONSTRAȚIE. Deoarece  $\varphi'$  și  $\varphi''$  sunt continue pe  $I$ , ele își ating marginile, deci există  $m > 0, M > 0$  astfel încât  $\forall x \in I, |\varphi'(x)| \geq m, |\varphi''(x)| \leq M$ . Conform formulei Taylor cu rest integral, avem:

$$\varphi(x) = \varphi(x_n) + (x - x_n)\varphi'(x_n) + \int_{x_n}^x (x - u)\varphi''(u)du, \forall x \in I, \forall n \geq 0.$$

$$\text{Pentru } x = \xi \text{ se obține } 0 = \varphi(x_n) + (\xi - x_n)\varphi'(x_n) + \int_{x_n}^{\xi} (\xi - u)\varphi''(u)du.$$

Pe de altă parte, din definiția șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ , rezultă

$$\varphi(x_n) + (\xi - x_n)\varphi'(x_n) = (\xi - x_{n+1})\varphi'(x_n)$$

și din ultimele două relații, deducem că

$$\forall n \geq 0, \xi - x_{n+1} = -\frac{1}{\varphi'(x_n)} \int_{x_n}^{\xi} (\xi - u)\varphi''(u)du \text{ deci}$$

$$|\xi - x_{n+1}| = \frac{1}{|\varphi'(x_n)|} \left| \int_{x_n}^{\xi} (\xi - u)\varphi''(u)du \right| \leq \frac{M}{2m} (\xi - x_n)^2, \text{ ținând cont că}$$

$$\left| \int_{x_n}^{\xi} |\xi - t| dt \right| \leq \frac{1}{2} (\xi - x_n)^2.$$

$$\text{Notînd } \delta = \frac{2m}{M}, \text{ rezultă } |\xi - x_{n+1}| \leq \frac{1}{\delta} (\xi - x_n)^2, \forall n \geq 0. \text{ Luînd}$$

$$V = \left(\xi - \frac{\delta}{2}, \xi + \frac{\delta}{2}\right) \text{ și } x_0 \in V, \text{ avem succesiv } |\xi - x_1| \leq \frac{1}{\delta} |\xi - x_0|^2 < \frac{\delta}{4},$$

$$|\xi - x_2| \leq \frac{1}{\delta} |\xi - x_1|^2 < \frac{\delta}{16}, \dots, |\xi - x_n| < \frac{\delta}{4^n} \text{ deci } x_n \rightarrow \xi.$$

EXEMPLU. Calculăm  $\xi = \sqrt[3]{2}$  prin procedura Newton. Luăm  $\varphi(x) = x^3 - 2$ ,  $I = [1, 2]$  și  $x_0 = 2$ . Atunci  $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2}$  adică  $x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 2}{3x_n^2}, n \geq 0$ . Se obțin aproximațiile succesive  $x_1 = 1,5; x_2 = 1,296; x_3 = 1,2609; x_4 = 1,25994; x_5 = 1,259921$  etc. și  $\sqrt[3]{2} \approx 1,25992$ .

Procedura Newton poate fi ușor programată, cu intrările  $\varphi, \varphi', x_0$ , luînd ca un criteriu de oprire a algoritmului stabilitatea primelor cifre zecimale. Algoritmul este rapid convergent, dacă  $x_0$  este ales în vecinătatea soluției

căutate  $\xi$ . Relația  $x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)}$  se obține astfel: se consideră punctul

$(x_n, \varphi(x_n))$  pe graficul lui  $\varphi$ ; ecuația tangentei la grafic în acest punct este  $y - \varphi(x_n) = \varphi'(x_n)(x - x_n)$  și aceasta intersectează axa  $Ox$  în punctul de abscisă  $x_{n+1}$ . De aceea procedura Newton se mai numește "metoda tangentei".

## 5. Drumuri parametrizate

**Definiția IV. 7.** Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval și  $E$  un SVN real. Se numește **drum parametrizat** definit pe  $I$  cu valori în  $E$  orice aplicație continuă  $f : I \rightarrow E$ .

EXEMPLUL 1. Se consideră un plan  $P$  și un reper ortogonal  $xOy$  de versori  $i, j$ , în  $P$ . Mulțimea  $E = V_2$  a vectorilor plani cu suportul în  $P$  este un spațiu vectorial real izomorf cu  $\mathbb{R}^2$ , asociind oricărui punct  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  vectorul  $\alpha i + \beta j$ .

Un **drum parametrizat** în  $P$  este o aplicație continuă  $f : I \rightarrow V_2 \approx \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto v(t) = f_1(t)i + f_2(t)j = (f_1(t), f_2(t))$ , cu  $f_1, f_2$  aplicații continue  $I \rightarrow \mathbb{R}$ . Relațiile  $x = f_1(t), y = f_2(t), t \in I$  se numesc **ecuațiile parametrice** ale drumului parametrizat  $f$ . **Traectoria (imagea)** drumului este  $\text{Im} f = \{f(t) \mid t \in I\} \subset P$ .

Dacă  $I = [a, b]$ , atunci punctele  $f(a), f(b)$  se numesc **capetele** drumului  $f$ , iar dacă  $f(a) = f(b)$ , drumul se numește **închis**.

În mod similar se definesc drumuri parametrizate în spațiu ca fiind

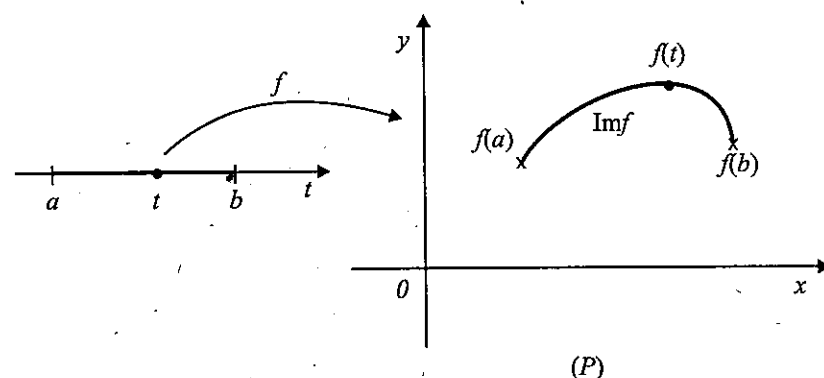


Fig. IV. 2.

aplicații continue de forma  $f: I \rightarrow V_3 \simeq \mathbb{R}^3$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3)$ ; ecuațiile parametrice ale drumului sunt  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$ ,  $z = f_3(t)$ ,  $t \in I$ , iar traiectoria este  $\text{Im}f$ .

În notație vectorială, dacă se alege un reper Oxyz de versori  $i, j, k$  și  $\mathbb{R}^3 \simeq V_3$  (identificând orice punct  $M = (x, y, z)$  din  $\mathbb{R}^3$  cu vectorul lui de poziție  $\mathbf{OM}$ ) și dacă  $\mathbf{v}, \mathbf{w}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  sunt funcții derivabile, atunci produsul scalar  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{w}(t)$  și produsul vectorial  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}: I \rightarrow V_3$ ,  $t \mapsto \mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t)$  sunt derivabile și în plus,  $\forall t \in I$ ,  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})'(t) = \mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{w}(t) + \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{w}'(t)$  și  $(\mathbf{v} \times \mathbf{w})'(t) = \mathbf{v}'(t) \times \mathbf{w}(t) + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}'(t)$ .

**EXEMPLUL 2.** Drumurile parametrizate  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = (\cos t, \sin t)$  și  $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g(x) = (-x, \sqrt{1-x^2})$  sunt distincte, dar au aceeași imagine, anume semicercul  $\{x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ . Pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ , drumul  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = (\cos nt, \sin nt)$  este închis, avînd ca imagine cercul  $\{x^2 + y^2 = 1\}$  (circumferința unitate parcursă de  $n$  ori în sens pozitiv).

**EXEMPLUL 3.** Drumul  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto (R \cos t, R \sin t, c)$  cu  $R > 0$  și  $c$  constante are ca imagine cercul  $\{x^2 + y^2 = R^2, z = c\}$ , iar  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto (R \cos t, R \sin t, ht)$  este elicea cilindrică de pas  $h$  ( $h > 0$ ), situată pe cilindrul  $x^2 + y^2 = R^2$ .

Dacă  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  este un drum parametrizat, atunci drumul  $\bar{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \mapsto \gamma(a + b - t)$  se numește **opusul** lui  $\gamma$ ; avem  $\bar{\gamma}(a) = \gamma(b)$  și  $\bar{\gamma}(b) = \gamma(a)$  și  $\gamma, \bar{\gamma}$  au aceeași imagine. Dacă  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma_1: [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sunt două drumuri parametrizate în  $E = \mathbb{R}^n$  astfel încît  $\gamma(b) = \gamma_1(b)$ , atunci se poate defini **concatenatul**  $\gamma \cup \gamma_1$  ca drum  $[a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$  care coincide cu  $\gamma$  pe  $[a, b]$  și cu  $\gamma_1$  pe  $[b, c]$ . Imaginea lui  $\gamma \cup \gamma_1$  este reuniunea imaginilor lui  $\gamma$  și  $\gamma_1$ .

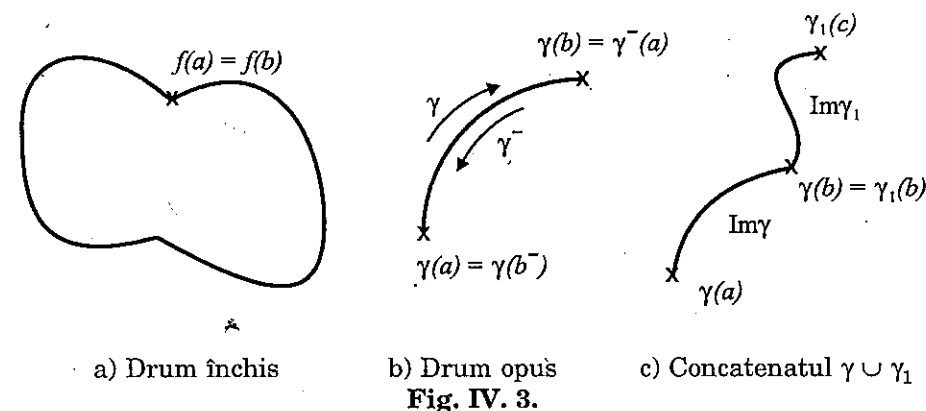


Fig. IV. 3.

Pentru aplicații, ipoteza de continuitate din definiția IV. 7 este insuficientă. Ne situăm în cazul  $E = \mathbb{R}^2$  și presupunem că funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$  este derivabilă, deci conform teoremei IV. 13, funcțiile  $f_1, f_2: I \rightarrow \mathbb{R}$  sunt derivabile.

Fixăm  $t_0 \in I$  astfel încît  $f'(t_0) \neq 0$  și fie  $t \in I$ ,  $t \neq t_0$ . Notăm  $M_0 = f(t_0)$ ,  $M = f(t)$  punctele corespunzătoare pe  $\text{Im}f$ . Atunci vectorul

$$\mathbf{M}_0\mathbf{M} = \mathbf{OM} - \mathbf{OM}_0 = f(t) - f(t_0)$$

deci  $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$  este coliniar cu  $\mathbf{M}_0\mathbf{M}$ . Făcînd  $t \rightarrow t_0$ , rezultă că  $f'(t_0)$  este coliniar cu tangenta în  $M_0$  la traiectoria  $\text{Im}f$ . Ecuația tangentei în  $M_0$  la

traiectoria  $\text{Im}f$  va fi  $\frac{x - f_1(t_0)}{f'_1(t_0)} = \frac{y - f_2(t_0)}{f'_2(t_0)}$ . Aceste considerații se extind la cazul  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ .

**Definiția IV. 8.** Un drum parametrizat  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  se zice **neted** dacă este de clasă  $C^1(I)$  și  $\forall t \in I$ ,  $\gamma'(t) \neq 0$ . Un drum **neted pe porțiuni**  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  este obținut prin concatenarea unui număr finit de drumuri netede.

De exemplu, dacă  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  este o funcție reală de clasă  $C^1(I)$ , atunci  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (t, f(t))$  este un drum neted în  $\mathbb{R}^2$ , a cărui imagine este tocmai graficul lui  $f$ .

Două drumuri netede  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma_1: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  definite pe intervalele  $I, J$  se zic **echivalente cu aceeași orientare** (se scrie  $\gamma \sim \gamma_1$ ) dacă există o funcție  $\phi: I \rightarrow J$  (numită și schimbare de parametru  $u = \phi(t)$ ) bijectivă de clasă  $C^1(I)$ , strict crescătoare, astfel încît  $\phi^{-1}$  are aceleași proprietăți și  $\gamma_1 \circ \phi = \gamma$  (adică  $\gamma(t) = \gamma_1(u)$ ,  $\forall t \in I$ ). Dacă  $\gamma \sim \gamma_1$ , atunci evident ele au aceeași imagine,  $\text{Im}\gamma = \text{Im}\gamma_1$  și "sunt parcurse în același sens".

De exemplu, pentru drumurile  $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$  și  $\gamma_1: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $u \mapsto (-u, \sqrt{1-u^2})$  avem  $\gamma \sim \gamma_1$ , deoarece definim  $\phi: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $t \mapsto u = -\cos t$ . Dar circumferința unitate parcursă pozitiv o dată sau de două

ori nu sunt drumuri echivalente, chiar dacă au aceeași imagine.

**Comentariu.** Presupunem că  $n = 3$ ,  $I$  este un interval de timp și că punctul  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  reprezintă poziția unei particule la momentul  $t$ . Atunci  $Im\gamma$  este traiectoria particulei, iar drumul  $\gamma$  reprezintă legea de parcurgere a traiectoriei. Dacă  $\gamma$  este neted de clasă  $C^2$ , atunci  $\gamma'(t)$  reprezintă **vectorul-viteză** a particulei la momentul  $t$ , iar  $\gamma''(t)$  **vectorul-accelerație**. Faptul că  $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in I$  înseamnă că particula nu are puncte de repaos.

Dacă  $I = [a, b]$ , numărul real și pozitiv  $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$  reprezintă **lungimea** traiectoriei  $Im\gamma$  ("spațiul = viteză  $\times$  timpul"); așadar,

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Rămânem în cazul  $n = 3$ . A da o curbă parametrizată în spațiu înseamnă a considera un drum parametrizat  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3, t \rightarrow (x(t), y(t), z(t))$ , presupus de clasă  $C^3(I)$ ; dacă  $\gamma \sim \gamma_1$ , atunci  $\gamma$  și  $\gamma_1$  se consideră identice. Vom presupune că  $\forall t \in I, \gamma'(t) \neq 0$  și că  $\gamma'(t) \times \gamma''(t) \neq 0$ . Fixînd  $t_0 \in I$ , atunci pentru orice  $t > t_0$  se definește lungimea arcului de curbă  $Im\gamma$  între  $t_0$  și  $t$  ca fiind

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt, \text{ deci } s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

**Versorul tangentei** în punctul curent  $t$  la curba  $\gamma$  este

$$\tau(t) = \frac{x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k}{s'(t)}; \text{ versorul lui } \tau'(t) \text{ se numește } \mathbf{versorul normalei}$$

**principale** la  $\gamma$  și este notat  $\nu(t) = \frac{\tau'(t)}{\|\tau'(t)\|}$ ; în fine,  $\beta(t) = \tau(t) \times \nu(t)$  se numește

**versorul binormalei**. Triedrul  $\{\tau, \nu, \beta\}$  depinzînd de  $t$  se numește **triedrul lui FRENET** (1801 - 1865) al curbei  $\gamma$ . Se pot stabili formule indicînd viteza de variație a versorilor triedrului Frenet în raport cu arcu; anume, există funcții continue  $R(s)$  și respectiv  $T(s)$ , numite **raza de curbură** (respectiv **raza de**

**torsiune**) ale lui  $\gamma$  în punctul  $t$  astfel încît  $s = s(t)$  și  $\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}\nu$ ,

$$\frac{d\nu}{ds} = -\frac{1}{R}\tau + \frac{1}{T}\beta, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{1}{T}\nu.$$

Într-un anumit sens,  $R$  măsoară "abaterea" curbei  $\gamma$  de la o linie dreaptă (cînd  $R = \infty$ ) iar  $T$  "abaterea" lui  $\gamma$  de la a fi o curbă cu imaginea situată într-un plan (cînd  $T = \infty$ ).

**EXEMPLU.** Fie elicea cilindrică  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (rcost, rsint, ht)$ , unde  $r > 0, h > 0$  sunt constante. Ecuațiile ei parametriche sunt  $x = rcost, y = rsint, z = ht, t \in [0, 2\pi]$ ; fixînd  $t_0 = 0$ , rezultă  $s'(t)^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = r^2 + h^2$  și lungimea

arcului de elice între punctele care corespund valorilor 0 și  $t > 0$ , va fi

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 + h^2} dt = t\sqrt{r^2 + h^2}. \text{ Atunci versorii triedrului lui Frenet vor fi}$$

$$\tau = \frac{\gamma'(t)}{s'(t)} = \frac{-rsint i + rcost j + hk}{\sqrt{r^2 + h^2}}; \nu = \text{versorul lui } \tau'(t) = -cost i - sint j \text{ și}$$

$$\beta = \tau \times \nu = \frac{hsint i - hcost j + rk}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \forall t \in [0, 2\pi]. \text{ În cazul elicei cilindrice razele}$$

$R$  și  $T$  sunt constante.

## 6. 10 exerciții

1. Să se determine  $x, y \in \mathbb{R}^2$  dacă pentru norma euclidiană avem  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ .

2. Să se studieze PC și UC pentru șirurile de funcții:

a)  $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$  pe  $A = (0, \infty)$  și pe  $B = [1, 2]$ .

b)  $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^{nx}+1}$  pe  $A = [-1, 1]$ .

3. Se consideră seria  $\sin^2 x (1 + \cos x + \cos^2 x + \dots)$ . Să se arate că este PC pe  $\mathbb{R}$  și să se determine suma ei  $S(x)$ . Studiați UC pe intervalul  $[a, 2\pi - a]$  unde  $a \in (0, \pi)$ . Să se compare  $S(0)$  și  $\lim_{x \rightarrow 0} S(x)$ .

4. Fie  $E = C[0, 2]$  cu normele "sup" și  $\|\cdot\|_1$  (unde  $\|f\|_1 = \int_0^2 |f(t)| dt, \forall f \in E$ ). Să se arate

că:

a) aceste norme nu sunt echivalente;

b)  $(E, \|\cdot\|_1)$  nu este spațiu Banach.

5. Fie  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  o matrice din  $M_{m,n}(\mathbb{R})$ . Definim  $\|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  și

$$\|A\|_2 = \left( \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \text{ Să se arate că se obțin norme echivalente în spațiul } E = M_{m,n}(\mathbb{R}).$$

6. a) Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  o funcție de clasă  $C^1$ . Să se arate că există  $M > 0$  astfel încît  $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$ .

b) Să se justifice de ce pentru funcții cu valori vectoriale nu se extind teoremele clasice ale lui Fermat și Rolle.

7. Să se determine aproximările liniare și pătratice pentru:

a)  $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$  în  $x_0 = 0$ .

b)  $f(x) = x^3 + x \ln(x-1)$  în  $x_0 = 2$ .

8. a) Să se afle  $R > 0$  astfel încât curbele  $y = \ln(x^2 + 1)$  și  $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$  să aibă un contact de ordin cel puțin 2 în  $x_0 = 0$ .

b) Să se arate că funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definite prin

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

au un contact de ordin infinit în origine,  $f$  are un minim dar  $g$  nu are extrem în origine.

9. a) Să se calculeze  $\cos 55^\circ$  și  $\ln 1,1$  cu aproximație  $10^{-3}$ .

b) Să se calculeze  $\sqrt[7]{70}$  folosind procedura Newton.

c) Să se rezolve cu aproximație ecuațiile  $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$  și  $x + 2 \ln x = 2$ .

10. a) Se consideră curba parametrizată  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (\cos t, 2 \sin t)$ . Să se arate că este închisă și să se calculeze versorii tangentei și normalei la  $\text{Im} \gamma$ , în punctul  $t = \frac{\pi}{4}$ .

b) Să se arate că imaginea drumului parametrizat  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (t+1, t^2+2, 3t^2+1)$  este situată într-un plan și să se calculeze lungimea lui  $\gamma$ .

## INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Fie  $x = (x_1, y_1)$ ,  $y = (x_2, y_2)$ . Atunci  $\|x+y\| = ((x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\|x\| = (x_1^2 + y_1^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\|y\| = (x_2^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}}$ . Relația din enunț devine, după calcule,  $x_1 y_2 = x_2 y_1$ , ceea ce exprimă faptul că vectorii  $x, y$  sunt coliniari (au componentele proporționale). De altfel, paralelogramul cu virfurile  $O, x, y, x+y$  rezultă degenerat.

2. a) Avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$  dacă  $x \neq 0$  și  $f_n(0) = 0$ . Deci  $f_n \xrightarrow{\text{PC}} 1$  pe  $A$  și pe  $B$ . Apoi

$$\|f_n - 1\|_A = \sup_{x \in A} |f_n(x) - 1| = \sup_{x > 0} \frac{1}{nx+1} = 1 \text{ deci } f_n \text{ nu este UC pe } A. \text{ Dar}$$

$$\|f_n - 1\|_B = \sup_{x \in [1, 2]} \frac{1}{nx+1} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \text{ deci } f_n \xrightarrow{\text{UC}} 1 \text{ pe } B.$$

$$b) f_n \text{ sunt continue dar } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \end{cases} \text{ nu este continuă în } x = 0 \text{ deci}$$

convergența nu poate fi uniformă.

3. Avem  $S_n(x) = \sin^2 x (1 + \cos x + \dots + \cos^n x)$ . Pentru  $\cos x = \pm 1$ , atunci  $\sin^2 x = 0$  și  $S_n(x) = 0$

iar pentru  $\cos x \neq \pm 1$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ . Deci

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 1 + \cos x, & \cos x \neq \pm 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Seria este PC pe  $\mathbb{R}$ . Cum  $S$  nu este continuă, convergența nu este uniformă. Apoi  $S(0) = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 2$ .

4. a) Dacă ar fi echivalente, ar exista o constantă  $\alpha > 0$  astfel încât  $\|f\| \leq \alpha \|f\|_1$  pentru

orice  $f \in E$ . Să luăm  $f(x) = e^{nx}$ . Atunci  $\|f\| = e^{2n}$  și  $\|f\|_1 = \int_0^2 e^{nt} dt = \frac{e^{2n} - 1}{n}$  și ar rezulta

$$e^{2n} \leq \alpha \cdot \frac{e^{2n} - 1}{n}, \text{ adică } n \leq \alpha \cdot \frac{e^{2n} - 1}{e^{2n}} < \alpha, \text{ absurd.}$$

b) Să considerăm șirul  $f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{dacă } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{dacă } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$  din  $E$ . Acest șir este Cauchy și

converge la funcția  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{dacă } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$  care nu aparține la  $E$ .

5. Orice două norme pe un spațiu vectorial real finit dimensional sunt echivalente.

6. a) Se poate aplica corolarul teoremei IV. 14 sau se raționează pe componente, aplicând teorema Lagrange.

b) Pentru funcții cu valori în  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  nu se poate defini o noțiune convenabilă de extrem, deoarece  $\mathbb{R}^n$  nu are o structură convenabilă de ordine. Apoi funcția  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = (\cos t, \sin t)$  avem  $f(0) = f(2\pi)$  dar nu există  $c \in (0, 2\pi)$  astfel încât  $f'(c) = 0$  deci teorema Rolle nu are loc pentru  $f$ .

$$7. a) P_2(0, x, f) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 2x; P_1(0, x, f) = 2x \text{ etc.}$$

8. a) Pentru  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ ,  $g(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}$  se pun condițiile  $f(0) = g(0)$ ,  $f'(0) = g'(0)$ ,  $f''(0) = g''(0)$  și se află  $R$ .

b) Avem  $\forall n \geq 0, f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$ . Apoi  $f(x) \geq f(0), \forall x \in \mathbb{R}$  deci  $x = 0$  este punct de minim dar diferența  $g(x) - g(0)$  nu are semn constant în nici o vecinătate a lui  $x = 0$ .

9. a) Se aplică formula lui Taylor.

b) Se rezolvă ecuația  $x^7 = 70$ ; luăm  $\varphi(x) = x^7 - 70, x_0 = 2$  și

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^7 - 70}{7x_n^6}, \quad n \geq 0 \text{ etc.}$$

c) Se aplică procedura Newton după ce se localizează soluția dorită  $\xi$  pentru a alege convenabil  $x_0$ .

10. a)  $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ . Apoi punînd  $x(t) = \cos t, y(t) = 2\sin t$ , versorul tangentei este

$$\tau(t) = \frac{x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}; \text{ un vector perpendicular pe vectorul de componente } (\alpha, \beta) \text{ este}$$

$(-\beta, \alpha)$ .

b) Punînd  $x = t + 1, y = t^2 + 2, z = 3t^2 + 1$ , se observă că există un plan  $Ax + By + Cz + D = 0$  care conține orice punct din  $\text{Im} f$ , anume  $3y - z - 5 = 0$ ; apoi

$$l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 36t^2} dt \text{ etc.}$$

## LECȚIA A V-A

# SERII DE PUTERI, FUNCȚII ELEMENTARE

## INTRODUCERE

În această lecție se prezintă proprietățile teoretice și de calcul ale seriilor de puteri  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  cu coeficienții  $a_n, n \geq 0$  reali sau complecși. Caracteristica

principală a acestor serii este aceea că sumele parțiale sunt funcții polinomiale deci practic cele mai simple funcții (pentru calculul lor se fac doar adunări și înmulțiri). Totodată seriile de puteri permit definirea riguroasă a funcțiilor elementare, incluzînd funcția exponențială (introdusă forțat în liceu și cu demonstrații incomplete) și funcțiile trigonometrice, introduse în liceu prin inerente compromisuri geometrice (de exemplu definirea lui  $\pi$ ).

Seriile de puteri reprezintă un mijloc natural și maneabil de definire și studiu al principalelor funcții reale și complexe; natural dacă ne gîndim la dezvoltările de tip Taylor și maneabil pentru că, dincolo de convergență, "lucrul" cu seriile de puteri este asemănător celui cu polinoame. Am ales prezentarea seriilor de puteri cu coeficienți în  $\mathbb{C}$  atît cît permite dezvoltarea anterioară a acestor lecții, deoarece numai în cadrul complex se evidențiază legătura profundă între exponențială și funcțiile trigonometrice (descoperită de Euler) și numai apelînd la variabila complexă se înțelege de ce dezvoltarea

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$$

are loc doar dacă  $|x| < 1$ . Această lecție este și o introducere la studiul funcțiilor analitice reale și analitice complexe.

## 1. Proprietățile de bază ale seriilor de puteri

**Definiția V. 1.** Fie  $(a_n)_{n \geq 0}$  un șir în  $\mathbb{C}$  și  $a \in \mathbb{C}$ . O serie de puteri centrată în  $a$ , cu coeficienți  $a_n$  este o serie de funcții de forma

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n = a_0 + a_1(z - a) + \dots + a_n(z - a)^n + \dots \quad (1)$$

O astfel de serie se mai numește **serie întreagă** în variabila  $z$ , în jurul punctului  $z = a$ .

Vom presupune pentru simplitate că  $a = 0$ ; trecerea la cazul când  $a$  este arbitrar se realizează imediat prin translația  $z - a = w$ . Considerăm deci o serie de puteri de forma  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ . Pentru orice  $z \in \mathbb{C}$  fixat, se obține o serie numerică; pentru  $z = 0$  aceasta este evident C.

EXEMPLUL 1. Seriile  $\sum_{n \geq 0} z^n$ ,  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ ,  $\sum_{n \geq 1} n^n \cdot (z-1)^n$  sunt serii de puteri; dar seria de funcții  $\sum_{n \geq 1} (n \cdot 2^n + 1)^n$  nu este o serie de puteri.

EXEMPLUL 2. Seria  $\sum_{n \geq 0} n \left( \frac{1-x}{3+x} \right)^n$  poate fi considerată serie de puteri punând

$$\frac{1-x}{3+x} = y.$$

TEOREMA V. 1. Pentru seria de puteri  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ , notăm  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  și  $R = 1/\alpha$  (cu convenția că dacă  $\alpha = 0$ , atunci  $R = \infty$  și dacă  $\alpha = \infty$ , atunci  $R = 0$ ).

a) Dacă  $|z| < R$ , atunci  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  este AC;

b) Dacă  $|z| > R$ , atunci  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  este D.

DEMONSTRAȚIE. Pentru orice  $z \in \mathbb{C}$  fixat, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha |z|$$

și aplicăm criteriul rădăcinii al lui Cauchy (teorema II. 8).

OBSERVAȚIE. Dacă  $\forall n \geq N$  ( $N$  natural fixat),  $a_n \neq 0$  și există  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

în  $\bar{\mathbb{R}}$ , atunci  $R = l$  (vezi exercițiul 6 lecția a II-a).

**Definiția V. 2.** Numărul real  $R \geq 0$  (eventual și  $+\infty$ ) definit în teorema V. 1 se numește **raza de convergență** a seriei  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ . Pentru  $R > 0$ , discul  $D_R = B(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$  se numește **discul de convergență** al seriei respective; în cazul  $R = \infty$ ,  $D_R = \mathbb{C}$ .

În cazul când toți coeficienții  $a_n$  sunt reali,  $R > 0$  și  $x \in \mathbb{R}$ , seria de puteri reale  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  are **intervalul de convergență**  $(-R, R)$ .

TEOREMA V. 2. Fie  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $z_0 \neq 0$  astfel încît șirul  $(a_n z_0^n)_{n \geq 0}$  să fie mărginit. Atunci:

a)  $\forall z \in \mathbb{C}$  cu  $|z| < |z_0|$ , seria  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  este AC;

b) Pentru orice  $0 < r < |z_0|$ , seria de funcții  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  este UC pe discul compact  $B'(0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ .

DEMONSTRAȚIE. Alegem  $M > 0$  astfel încît  $\forall n \geq 0$ ,  $|a_n z_0^n| \leq M$  deci

$$|a_n| \leq \frac{M}{|z_0|^n}.$$

a) Dacă  $|z| < |z_0|$ , atunci

$$\forall n \geq 0 \quad |a_n z^n| = |a_n| \cdot \left| \frac{z^n}{z_0^n} \cdot z_0^n \right| = |a_n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \cdot |z_0|^n \leq M \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n.$$

Deoarece  $\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$ , seria  $\sum_{n \geq 0} M \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$  este C și teorema II. 4 (criteriul comparației) arată că seria  $\sum_{n \geq 0} |a_n z^n|$  este C.

b) Pentru  $0 < r < |z_0|$  și  $|z| \leq r$ , avem

$$\forall n \geq 0, \quad |a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq M \cdot \left( \frac{r}{|z_0|} \right)^n.$$

Aplicînd criteriul lui Weierstrass de convergență uniformă (teorema IV. 8), rezultă că seria de funcții  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  este UC pe discul închis  $|z| \leq r$ .

**COROLAR 1.** Dacă seria  $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$  este C,  $z_0 \neq 0$ , atunci seria  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  este AC pentru  $|z| < |z_0|$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Așadar  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_0^n = 0$  deci șirul  $(a_n z_0^n)_{n \geq 0}$  este mărginit.

Combinînd teoremele V. 1, V. 2, se obține următorul

**COROLAR 2.** Pentru orice serie de puteri  $\sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$  există și este unic

$R \in [0, \infty]$  astfel încît:

- a) dacă  $R = 0$ , singurul punct de convergență al seriei este  $z = a$ ;
- b) dacă  $0 < R < \infty$ , atunci seria este AC în discul  $|z - a| < R$  și D pentru  $|z - a| > R$ ; în plus seria este UC pe orice compact  $K \subset B(a, R)$ ;
- c) dacă  $R = \infty$ , seria este AC pentru orice  $z \in \mathbb{C}$  și UC pe orice compact  $K \subset \mathbb{C}$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Pentru orice compact  $K \subset B(a, R)$  există  $0 < r < R$  astfel încît  $K$  să fie conținut în discul închis  $|z - a| \leq r$  (de exemplu  $r = \sup_{z \in K} |z - a|$ ). Apoi orice compact din  $\mathbb{C}$  este mulțime mărginită deci conținută într-un disc.

**EXEMPLUL 1.** Pentru seria  $\sum_{n \geq 0} n! z^n$  avem  $R = 0$ .

**EXEMPLUL 2.** Seriile  $\sum_{n \geq 0} z^n$ ,  $\sum_{n \geq 0} \frac{(z+i)^n}{n}$  au raza de convergență  $R = 1$ .

**EXEMPLUL 3.** Pentru seria  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$  avem  $a_n = \frac{1}{n!}$  și  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \infty$ .

**EXEMPLUL 4.** Dacă  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ,  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  sunt serii de puteri cu razele de convergență respectiv  $R_1, R_2$  și dacă  $|a_n| < |b_n|$  pentru orice  $n \geq N$ , atunci  $R_1 \geq R_2$ .

Dacă  $0 < R < \infty$ , studiul de mai sus nu permite informații despre convergența seriei (1) în punctele  $z$  cu  $|z - a| = R$ , adică pe frontiera discului de convergență. În acest sens, demonstrăm următorul rezultat nebanal,

atribuit matematicianului austriac A. TAUBER (1866 – anul morții necunoscut):

**TEOREMA V. 3.** Fie  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  o serie de puteri reale cu coeficienți reali, cu raza de convergență  $R = 1$ . Presupunem că seria  $\sum_{n \geq 0} a_n$  este C cu suma  $s$ . În aceste condiții, seria  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  este UC pe  $[0, 1]$  și  $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Mai întâi demonstrăm următoarea

**LEMĂ.** Dacă  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$  și  $A \leq a_1 + \dots + a_k \leq B$  pentru orice  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , atunci  $Ab_1 \leq a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq Bb_1$ .

**DEMONSTRAȚIA LEMEI.** Fie  $s_k = a_1 + \dots + a_k$ , deci

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + \dots + a_n b_n &= b_1 s_1 + b_2 (s_2 - s_1) + \dots + b_n (s_n - s_{n-1}) = \\ &= s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \dots + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \leq \\ &\leq B(b_1 - b_2) + B(b_2 - b_3) + \dots + B(b_{n-1} - b_n) \leq Bb_1, \end{aligned}$$

parantezele fiind pozitive. Se procedează analog pentru cealaltă inegalitate.

Fixăm acum  $\varepsilon > 0$  arbitrar; conform criteriului general Cauchy (teorema II. 2), există  $N(\varepsilon)$  natural astfel încît  $\forall n \geq N, \forall p \geq 1$ ,  $|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$ . Pentru orice  $x \in [0, 1]$  avem  $x^n \geq x^{n+1} \geq \dots \geq x^{n+p}$  și cum  $-\varepsilon \leq a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p} < \varepsilon$ , lema arată că  $-\varepsilon x^n \leq a_n x^n + \dots + a_{n+p} x^{n+p} \leq \varepsilon x^n$  deci  $|a_n x^n + \dots + a_{n+p} x^{n+p}| \leq \varepsilon x^n \leq \varepsilon$ .

Notînd cu  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  rezultă că  $|s_{n+p}(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon$  pentru orice

$x \in [0, 1]$ ,  $n \geq N(\varepsilon)$ ,  $p \geq 1$ . Deci  $d(s_n, s_{n+p}) \leq \varepsilon$ ,  $\forall n \geq N(\varepsilon)$ ,  $p \geq 1$  adică șirul de funcții  $(s_n)_{n \geq 0}$  este Cauchy în spațiul  $\mathcal{M}[0, 1]$ ; acesta fiind spațiu metric complet, rezultă că  $s_n$  este un șir convergent,  $s_n \rightarrow s$  în  $\mathcal{M}[0, 1]$ , adică  $s_n \xrightarrow{UC} s$

pe  $[0, 1]$ . Deoarece  $s_n$  sunt funcții continue,  $s$  rezultă continuă pe  $[0, 1]$  și în particular în punctul  $x = 1$  avem  $\lim_{x \rightarrow 1} s(x) = s(1)$ , adică  $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$ .



OBSERVAȚIE. Reciproca este falsă: dacă  $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$  nu rezultă că

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ , așa cum arată exemplul seriei  $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ . Cazul  $x = -1$  este similar, iar cazul când raza de convergență a seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  este  $R$  se reduce la cazul  $R = 1$  punând  $x = Ry$ .

Revenim la cazul general. Pentru o serie de puteri (complexe)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  cu raza de convergență  $R > 0$ , se poate considera funcția - sumă  $f: B(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Aceasta rezultă continuă în orice punct  $z_0 \in B(0, R)$ ; într-adevăr, alegem  $r$  astfel încît  $|z_0| < r < R$  și știm că seria de funcții continue  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  este UC pe  $|z| \leq r$ ; atunci suma ei, adică  $f(z)$  va fi

continuă în  $B'(0, R)$  deci și în  $z_0$ . Pentru a obține proprietăți mai puternice ale sumelor de serii de puteri, introducem conceptul de  $\mathbb{C}$ -derivabilitate (sau olomorfie).

**Definiția V. 3.** Fie  $\Omega \subset \mathbb{C}$  o mulțime deschisă,  $a \in \Omega$  și  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  o funcție complexă; se spune că  $f$  este  $\mathbb{C}$ -derivabilă în punctul  $a$  dacă există în  $\mathbb{C}$

limita  $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$ , notată  $f'(a)$  și numită derivata lui  $f$  în  $a$ . Dacă  $f$  este

$\mathbb{C}$ -derivabilă în orice punct din  $\Omega$ , se spune că  $f$  este  $\mathbb{C}$ -derivabilă pe  $\Omega$  (sau echivalent, olomorfă), iar funcția  $f': \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto f'(z)$  se numește derivata lui  $f$  pe  $\Omega$ .

**Comentariu.** Deși definiția de mai sus este o extindere "cuvînt cu cuvînt" a definiției din cazul real, conceptul de  $\mathbb{C}$ -derivabilitate este mai profund, cu proprietăți mai speciale, decît cel de  $\mathbb{R}$ -derivabilitate; astfel, se va vedea că o funcție  $\mathbb{C}$ -derivabilă pe  $\Omega$  rezultă derivabilă de oricîte ori, ceea ce nu se întîmplă în cazul real (de exemplu,

funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  este o dată derivabilă pe  $\mathbb{R}$ , dar nu de două ori). Rațiunea stă în faptul că în planul complex, o limită de forma  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  trebuie să

fie independentă de infinitatea de direcții după care  $z$  tinde către  $a$ , în timp ce pe dreapta reală, avem doar tinderea dinspre stînga sau dinspre dreapta. Deci este "mai dificil" pentru o funcție complexă să fie derivabilă și aceasta explică proprietățile mai speciale ale  $\mathbb{C}$ -derivabilității. Pe de altă parte, asemănarea formală evidentă cu cazul real face ca regulile uzuale de derivare (relativ la sumă, produs, cît, compunere

etc.) să rămînă nemodificate. De exemplu, funcția  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^n$ ,  $n \geq 1$  întreg este  $\mathbb{C}$ -derivabilă în orice punct  $a \in \mathbb{C}$  și  $f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z^n - a^n}{z - a} = n a^{n-1}$ . Dacă  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  sunt  $\mathbb{C}$ -derivabile în  $a \in \Omega$ , atunci  $fg$  este derivabil în  $a$  și  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ .

**TEOREMA V. 4.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  o serie de puteri cu raza de convergență  $R > 0$ .

Atunci funcția sumă  $f: B(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  este olomorfă în  $B(0, R)$ , cu

derivata  $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ . (Cu alte cuvinte, seriile de puteri se pot deriva termen cu termen în discul de convergență).

**DEMONSTRAȚIE.** Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ , din teorema V. 1 rezultă că seriile

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  au aceeași rază de convergență. Pentru orice  $n \geq 0$

și  $\forall z \in B(0, R)$  avem  $f(z) = s_n(z) + r_n(z)$ , unde  $s_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ,

$r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$ . Notăm  $g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  și fie  $\forall a \in B(0, R)$

fixat. Alegem de asemenea  $\rho$  cu  $|a| < \rho < R$ . Atunci  $\forall z \neq a$ ,  $|z| < \rho$ , avem

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} - g(a) = \frac{s_n(z) - s_n(a)}{z - a} - s'_n(a) + s'_n(a) - g(a) + \frac{r_n(z) - r_n(a)}{z - a}.$$

Dar  $\frac{r_n(z) - r_n(a)}{z - a} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z^{k-1} + z^{k-2}a + \dots + a^{k-1})$  deci

$$\left| \frac{r_n(z) - r_n(a)}{z - a} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k |a_k| \rho^{k-1},$$

iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} k |a_k| \rho^{k-1} = 0$  (deoarece seria  $\sum_{k=0}^{\infty} k |a_k| \rho^{k-1}$  este C, dat fiind că

seria  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  are raza de convergență  $R$ , iar  $0 < \rho < R$ ). Există atunci

$N_1(\varepsilon)$  natural astfel încît  $\forall n \geq N_1(\varepsilon)$ ,  $\left| \frac{r_n(z) - r_n(a)}{z - a} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ , pentru  $|z| < \rho$ ,

$z \neq a$ . Pe de altă parte, există  $N_2(\varepsilon)$  natural astfel încît  $\forall n \geq N_2(\varepsilon)$ ,  $|s'_n(a) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$  și în fine pentru orice întreg  $n \geq 0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încît pentru  $0 < |z - a| < \delta$ ,  $|\frac{s_n(z) - s_n(a)}{z - a} - s'_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . În definitiv, va rezulta că

$$|\frac{f(z) - f(a)}{z - a} - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \text{ pentru } 0 < |z - a| < \delta$$

adică  $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = g(a)$ , deci  $f'(a) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n a^{n-1}$ .

**COROLAR 1.** Pentru orice serie de puteri  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  cu raza de convergență  $R > 0$ , funcția sumă  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  este  $\mathbb{C}$ -derivabilă de oricîte ori în  $B(0, R)$  și derivatele succesive se obțin prin derivarea termen cu termen.

În particular, pentru o serie de puteri reale (cu coeficienți reali)  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  cu raza de convergență  $R > 0$ , suma  $f: (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  este o funcție de clasă  $C^\infty$  pe intervalul de convergență, iar derivatele ei se obțin prin derivarea termen cu termen. Avem  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  și mai general,

$\forall k \geq 0$  întreg  $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}$ ; pentru  $x = 0$ , rezultă  $f^{(k)}(0) = k! a_k$ . Același calcul are loc și în cazul complex. Am demonstrat astfel:

**COROLAR 2.** Dacă  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  este o serie de puteri în jurul lui  $z = 0$ , cu raza de convergență  $R > 0$  și cu suma  $f(z)$ , atunci pentru orice întreg  $k \geq 0$ ,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Evident, rezultatele de mai sus au loc pentru serii întregi în jurul oricărui

punct  $a \in \mathbb{C}$ .

**TEOREMA V. 5. (unicitatea dezvoltării în serie de puteri).** Fie  $a \in \mathbb{C}$  și

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n \text{ pentru orice } z \text{ dintr-o vecinătate } V \text{ a punctului}$$

$a$ . Atunci  $\forall n \geq 0$ ,  $a_n = b_n$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Notînd  $c_n = a_n - b_n$ , rezultă că  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n = 0$ , pentru orice  $z \in V$ . Conform corolarului anterior, notînd cu  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto 0$  (funcția nulă), rezultă  $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0$ , pentru orice  $n \geq 0$ , adică  $a_n = b_n$ .

În cazul real demonstrăm de asemenea următorul rezultat relativ la integrarea seriilor de puteri.

**TEOREMA V. 6.** Fie  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  o serie de puteri reale cu raza de convergență  $R > 0$  și cu suma  $f(x)$ . Atunci pentru orice interval compact  $[a, b]$  conținut în  $(-R, R)$ , avem

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

(Cu alte cuvinte, seriile de puteri se pot integra termen cu termen în intervalul de convergență).

**DEMONSTRAȚIE.** Seria de funcții continue  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  este UC pe  $[a, b]$ , conform corolarului 2 al teoremei V. 2. Ea se poate integra termen cu termen conform teoremei IV. 7.

**EXEMPLU.** Avem  $1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}$  pentru orice  $x \in (-1, 1)$ . Prin integrare rezultă  $C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \ln(1+x)$ , cu  $C$  constantă. Pentru  $x = 0$  rezultă  $C = 0$ . Ca atare, are loc formula

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}, \forall x \in (-1, 1).$$

Aplicând teorema V. 3, rezultă  $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ , un fapt remarcabil.

## 2. Seria Taylor a unei funcții indefinit derivabile

**Definiția V. 4.** Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^\infty$  pe intervalul  $[a, b]$ ,  $a < b$  și fie  $x_0 \in (a, b)$  un punct fixat. Acestei perechi  $(f, x_0)$  i se poate asocia o serie de puteri centrată în punctul  $x_0$ , anume  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ , numită **seria Taylor a lui  $f$  în jurul punctului  $x_0$** .

**Comentariu.** Dar, în general, raza de convergență a seriei Taylor nu este strict pozitivă; mai mult, chiar dacă seria Taylor a lui  $f$  în jurul lui  $x_0$  este convergentă, se poate întâmpla ca suma ei să nu fie egală cu  $f(x)$ , adică funcția care a generat-o. De

exemplu, să considerăm funcția  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{dacă } x \in [-1, 0] \end{cases}$  și  $x_0 = 0$ .

În acest caz  $\forall n \geq 0$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$  deci seria Taylor respectivă are toți termenii nuli; ca atare este punctual convergentă pe  $[-1, 1]$ , cu suma funcția nulă (care nu coincide cu  $f$ ).

Are loc totuși următoarea

**TEOREMA V. 7. (teorema de reprezentare a funcțiilor de clasă  $C^\infty$  prin serii Taylor).** Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a < b$  o funcție indefinit derivabilă astfel încât să existe  $M > 0$  cu proprietatea că  $\forall n \geq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ ,  $|f^{(n)}(x)| \leq M$ . Atunci pentru un punct fixat  $x_0 \in (a, b)$ , seria Taylor a lui  $f$  în jurul lui  $x_0$  este uniform convergentă pe  $[a, b]$ , avînd ca sumă  $f$ , adică

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \forall x \in [a, b].$$

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $(s_n(x))_{n \geq 0}$  șirul sumelor parțiale ale seriei Taylor respective deci  $s_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ . Atunci conform formulei lui Taylor cu restul Lagrange (teorema IV. 14), rezultă  $\forall n \geq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$

$$f(x) - s_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

cu  $\xi$  între  $x_0$  și  $x$ . Deci  $\forall x \in [a, b]$ ,  $\forall n \geq 0$ ,

$$|f(x) - s_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!} (b - a)^{n+1}.$$

Rezultă pentru norma - sup,  $0 \leq \|f - s_n\| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ , pentru orice  $n \geq 0$ .

Observînd că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$  (deoarece aplicînd criteriul raportului, se vede

că seria  $\sum_{n \geq 0} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$  este C, deci termenul ei general tinde către zero). În

concluzie,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\| = 0$ , adică  $s_n \xrightarrow{UC} f$ .

**Definiția V. 5.** Fie  $\alpha \in \mathbb{R}$  fixat; pentru orice întreg  $n \geq 0$  punem

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} & \text{dacă } n \geq 1 \\ 1 & \text{dacă } n = 0 \end{cases}$$

Dacă  $\alpha$  este un număr natural, atunci  $\binom{\alpha}{n} = 0$  pentru orice  $n > \alpha$  și  $\binom{\alpha}{n} = C_\alpha^n$

dacă  $\alpha \geq n$ . Seria de puteri reale  $\sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$  se numește **seria binomială de exponent  $\alpha$** .

**TEOREMA V. 8.** Seria binomială  $\sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$  de exponent  $\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ) are raza de convergență  $R = 1$  și suma ei este egală cu  $(1+x)^\alpha$  deci  $\forall x \in (-1, 1)$ ,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

**DEMONSTRAȚIE.** Raza de convergență este

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \binom{\alpha}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \right| = 1.$$

Notînd cu  $f(x)$  suma seriei binomiale pe intervalul  $(-1,1)$ , rezultă că

$$\forall x \in (-1,1), (1+x)f'(x) = (1+x) \left[ \alpha + \alpha(\alpha-1)x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2 + \dots \right] = \alpha f(x),$$

după calcule imediate. Atunci  $\left[ \frac{f(x)}{(1+x)^\alpha} \right]' = 0$  adică  $\frac{f(x)}{(1+x)^\alpha} = C$ , constant, pe

intervalul  $(-1,1)$ . Dar pentru  $x=0$  avem  $f(0)=1$  deci  $C=1$  și ca atare,  $\forall x \in (-1,1), f(x) = (1+x)^\alpha$ .

EXEMPLUL 1. Pentru orice  $x \in (-1,1)$  au loc următoarele remarcabile dezvoltări în serie în jurul originii:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots$$

EXEMPLUL 2. Deși funcția reală  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1/(1+x^2)$  este definită pe întreg  $\mathbb{R}$ , dezvoltarea  $f(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots$  este valabilă doar pentru  $x \in (-1,1)$ . Rațiunea acestui fenomen se explică doar prin trecerea la variabilă complexă:

avem  $\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots$  pentru  $|z| < 1$ , iar funcția  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  nu este definită în punctele  $\pm i$ .

EXEMPLUL 3. Pentru o particulă cu masă  $m$ , masa de repaus  $m_0$  și viteză  $v$ , are loc relația  $m = m_0 / \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ , unde  $c$  este viteza luminii. Energia cinetică a particulei este

$$\begin{aligned} E &= mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2((1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1) = m_0c^2 \left[ \frac{1}{2}(v/c)^2 + \frac{3}{8}(v/c)^4 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^4} + \dots \end{aligned}$$

Aceste calcule sunt corecte dacă  $0 \leq v < c$ ; dacă  $v \ll c$  se pot neglija toți termenii dezvoltării cu excepția primului și se obține  $E \approx \frac{1}{2}m_0v^2$ , adică formula din mecanica newtoniană.

**Definiția V. 6.** O funcție  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  ( $A \subset \mathbb{R}$  deschis) se numește  **$\mathbb{R}$ -analitică într-un punct  $a \in A$**  dacă există  $r > 0$  astfel încît în intervalul  $(a-r, a+r)$

are loc o dezvoltare în serie de forma  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ . Funcția  $f$  se zice  **$\mathbb{R}$ -analitică pe  $A$**  dacă este astfel în orice punct din  $A$ .

Dacă  $f$  este  $\mathbb{R}$ -analitică în vecinătatea lui  $a$ , atunci ea rezultă indefinit derivabilă și în plus  $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$  pentru orice  $n \geq 0$ . Reciproca nu este

adevărată, așa cum arată exemplul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-1/x^2}$  dacă  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ ; în acest caz,  $\forall n \geq 0, f^{(n)}(0) = 0$  și dacă  $f$  ar fi analitică în punctul  $a = 0$ , ar rezulta că  $f$  este nulă pe o vecinătate a originii.

În cazul complex,  $\mathbb{C}$ -analiticitatea se dovedește a fi echivalentă cu olomorfia, dar  $\mathbb{R}$ -analiticitatea nu este echivalentă cu derivabilitatea.

### 3. Funcții elementare

**Definiția V. 7.** Seria de puteri complexe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  are raza de convergență  $R = \infty$  deci este convergentă pentru orice  $z \in \mathbb{C}$ ; suma ei se numește **exponențiala complexă** a lui  $z$  și se notează

$$\exp(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (1)$$

Dăm în continuare proprietățile principale ale exponențialei complexe  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

1)  $\exp$  este olomorfă (deci și continuă) în  $\mathbb{C}$  și  $\exp' = \exp$ . Demonstrația rezultă din teorema V. 4.

2)  $\exp(0) = 1$  și  $\exp(1) = e$ . Evident, direct din (1).

3)  $\forall a, b \in \mathbb{C}, \exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$ . Demonstrația rezultă din teorema II. 11 relativ la produsul seriilor AC.

$$4) \text{ Avem } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(z) - 1 - \frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \dots - \frac{z^n}{n!}}{z^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}. \text{ Aceasta rezultă din}$$

formula (1) de definiție.

5)  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $\exp(z) \neq 0$ , deoarece  $\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1$ . Apoi

$$\exp(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\exp(z)}.$$

6) Considerând grupurile comutative  $(\mathbb{C}, +, 0)$ ,  $(\mathbb{C}^*, \cdot, 1)$ , aplicația  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  este un morfism de grupuri.

Vom scrie în continuare  $e^x$  în loc de  $\exp(x)$ . Trebuie observat că dacă  $x \in \mathbb{R}$ , atunci  $e^x \in \mathbb{R}$  și aplicația  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $x \mapsto e^x$  este un morfism de la grupul aditiv al lui  $\mathbb{R}$  la grupul multiplicativ al lui  $\mathbb{R}^*$ .

7) Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , atunci evident  $(e^x)' = e^x$  și în plus  $e^x > 0$  (dacă  $x > 0$ , aceasta rezultă din definiția V. 6 și dacă  $x < 0$ , atunci  $-x > 0$  și folosim faptul că  $e^x \cdot e^{-x} = 1$ ). Rezultă că funcția  $\mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto e^x$  este strict crescătoare.

8) Dacă  $x \geq 0$ , atunci  $e^x \geq 1$  și dacă  $x < 0$ , atunci  $0 < e^x < 1$ .

9) Avem  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$  (deoarece pentru  $x > 0$  avem  $e^x > 1 + x$ ) și  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

Atunci aplicația  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  este bijectivă, continuă. Inversa ei se notează  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  și se numește **luarea logaritmului natural**. Dacă  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,

se definește  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$  și  $a^x = e^{x \ln a}$ ; se deduc imediat proprietățile uzuale

ale logaritmilor și ale funcției exponențiale în diverse baze. Scopul nostru nu este să ne întoarcem la materia învățată în liceu ci să subliniem unele elementele de logică internă a dezvoltării noțiunilor de Analiză matematică.

10) Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|e^{ix}| = 1$ . Într-adevăr, conform 5)  $e^{ix}$  și  $e^{-ix}$  sunt conjugate deci  $|e^{ix}| = |e^{-ix}|$  și cum  $e^{ix} \cdot e^{-ix} = 1$ , rezultă  $|e^{ix}| \cdot |e^{-ix}| = 1$  deci  $|e^{ix}| = 1$ . Desigur, conform formulei (1)

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \dots + \frac{(ix)^n}{n!} + \dots$$

Definim  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (2)$$

$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3)$$

Evident,  $\sin 0 = 0$ ,  $\cos 0 = 1$ . De asemenea,  $\cos 2 \approx 1 - 2^2/2!$  cu eroarea absolută  $\leq 2^4/4!$ , deci  $\cos 2 < 0$ . Totodată rezultă celebra **formulă a lui EULER**

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Deoarece  $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ , rezultă că  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad |\cos x| \leq 1, \quad |\sin x| \leq 1.$$

11) Avem  $(\cos x)' = -\sin x$ ,  $(\sin x)' = \cos x$ , derivând termen cu termen în formulele (2) și (3). Seriile respective au raza de convergență  $R = \infty$  deci  $\sin$ ,  $\cos$  sunt funcții  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de clasă  $C^\infty$ .

12) Se demonstrează cu ușurință formulele de trigonometrie clasică de tipul  $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ ,  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  etc.

13) Mulțimea  $M = \{x > 0 \mid \cos x = 0\}$  este nevidă, deoarece  $\cos 0 = 1 > 0$  și  $\cos 2 < 0$ , iar funcția  $\cos$  este continuă. Mulțimea  $M$  fiind minorată, există  $m = \inf M$  și cum  $M$  este închisă, rezultă că  $m \in M$  deci  $m$  este cea mai mică soluție strict pozitivă a ecuației  $\cos x = 0$ . Acum este un moment solemn, pentru că vi se dă prima definiție riguroasă a numărului  $\pi$ , eliberată de compromisuri geometrice. Anume

$$\pi = 2m,$$

deci  $\cos(\pi/2) = 0$  și  $\forall x \in [0, \pi/2)$ ,  $\cos x > 0$ . Deoarece  $\cos 0 > 0$  și  $\cos 2 < 0$ , rezultă  $0 < \pi/2 < 2$  deci  $0 < \pi < 4$ . Totodată funcția  $\sin$  este crescătoare pe  $[0, \pi/2]$ . Deoarece  $\sin 0 = 0$ , rezultă că  $\sin(\pi/2) > 0$  și din relația

$$\sin^2(\pi/2) + \cos^2(\pi/2) = 1,$$

rezultă  $\sin(\pi/2) = 1$ . Formula lui Euler arată că

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

de unde deducem că  $e^{i\pi} = -1$  și  $e^{2\pi i} = 1$ . Din proprietatea 3) rezultă că

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z,$$

adică exponențiala complexă este funcție periodică de perioadă  $2\pi i$ . De asemenea se arată ușor că  $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; deci  $e^u = e^v \Leftrightarrow u - v = 2k\pi i$  cu  $k \in \mathbb{Z}$ .

14) Fie  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ , circumferința unitate. Aplicația  $\varphi : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $\varphi(x) = e^{ix}$  este bijectivă și continuă. Demonstrația este imediată.

15) Există o singură funcție reală  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , astfel încât  $f' = f$ ,  $f > 0$  și  $f(0) = 1$ . Într-adevăr, dacă ar exista două astfel de funcții  $f, g$  atunci

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2} = 0 \text{ deci } \frac{g}{f} = C, \text{ constant; pentru } x = 0, \text{ se obține}$$

$$C = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1 \text{ și în concluzie } g = f. \text{ Aceasta arată că funcția } f(x) = e^x$$

studiată în liceu coincide cu cea introdusă aici, prin formula (1). De asemenea

există o singură funcție reală  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă, astfel încît  $f'(x) = \frac{1}{x}$

pentru orice  $x > 0$  și  $f(1) = 0$ , anume  $f = \ln$ , logaritmul natural. Aceasta este inversa aplicației bijective  $\mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto e^x$ . În fine, funcțiile  $\cos$ ,  $\sin$  definite prin relațiile (2) și (3) coincid cu cele din liceu (pentru că aplicînd teorema V. 7 pentru funcțiile din liceu  $\cos$ ,  $\sin$ , în jurul lui  $x_0 = 0$ , se obțin tocmai dezvoltările (2) și (3)).

**Comentariu.** Un număr  $\alpha \in \mathbb{C}$  se zice **algebraic** dacă există un polinom  $P(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n$  cu coeficienți din  $\mathbb{Z}$  și  $c_0 \neq 0$  astfel încît  $P(\alpha) = 0$ . Numerele reale sau complexe care nu sunt algebraice se numesc **transcendente**. Se poate arăta că numerele algebraice formează un subcorp  $\mathcal{A}$  al lui  $\mathbb{C}$ ; evident  $\mathbb{Q} \subset \mathcal{A}$  (deoarece  $\alpha = m/n$ ,  $n \neq 0$  verifică ecuația  $nx - m = 0$ ). În 1873, HERMITE a demonstrat că numărul  $e$  este transcendent, iar în 1882, LINDEMANN a arătat că  $\pi$  este transcendent (în particular, rezultă că  $e$  și  $\pi$  sînt iraționale). Cu aceasta, Lindemann a dat răspunsul definitiv negativ problemei cuadraturii cercului. Fiind dat un cerc, a construi un pătrat cu aceeași arie, numai cu rigla și compasul, revine la a construi  $\sqrt{\pi}$  pornind de la un segment de lungime 1; dar lungimile construibile sunt în mod necesar algebraice, iar  $\sqrt{\pi}$  nu este algebraic. Avem

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ și } \pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

(aceasta rezultă din dezvoltarea  $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$  pentru  $x \rightarrow 1$  și aplicînd teorema V. 3).

Trecem la studiul funcțiilor trigonometrice complexe.

**Definiția V. 8.** Pentru orice  $z \in \mathbb{C}$  se definesc

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Din dezvoltarea (1) rezultă dezvoltările în serie

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

valabile în tot planul complex, iar funcțiile  $\cos$ ,  $\sin$ , ca și funcțiile cosinus hiperbolic, sinus hiperbolic sunt olomorfe în  $\mathbb{C}$ .

Direct din definiții, rezultă  $\forall z \in \mathbb{C}$ , formulele următoare:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z,$$

$$(\cos z)' = -\sin z, (\sin z)' = \cos z, (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z, (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z,$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1, \cos z = \operatorname{ch}(iz), \sin z = -i \operatorname{sh}(iz).$$

Este clar cum se poate continua cu studiul funcțiilor

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \text{ etc.}$$

(definite în punctele unde numitorii nu se anulează). Ecuația  $\sin z = 0$  are soluțiile  $z = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; iar dacă  $\cos z = 0$ , atunci  $z = \pi/2 + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ne ocupăm în continuare de noțiunea de argument al unui număr complex nenul. Fie  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ ; ecuația  $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$  are soluții  $\theta \in \mathbb{R}$  și dacă  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$  este o soluție, atunci mulțimea tuturor soluțiilor va fi  $\{\theta_k = \theta_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Definiția V. 9.** Pentru orice  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ , se numește **argumentul lui  $z$**  mulțimea  $\operatorname{Arg} z$  a tuturor acelor  $\theta$  astfel încît  $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$ . ( $\operatorname{Arg} z$  este nevidă conform proprietății 14)).

Orice element al acestei mulțimi se numește **determinare** a argumentului lui  $z$ .  $\theta_0$  se numește **determinarea principală**. Așadar,  $\operatorname{Arg} z = \{\theta_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**EXEMPLU.**  $\operatorname{Arg}(1+i) = \{\pi/4 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ;  $\operatorname{Arg}(-5) = \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

Dacă  $n \geq 2$  este întreg, atunci **radicalul complex de ordin  $n$**  este  $\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$ . Dacă  $z \neq 0$ , atunci

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \exp\left(i \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right); k = 0, 1, \dots, n-1$$

**Definiția V. 10.** Dacă  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ , **logaritmul complex al lui  $z$**  este mulțimea  $\operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$ . Scriind  $w = u + iv$ , ecuația  $e^w = z$  devine  $e^u (\cos v + i \sin v) = |z| (\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$ , de unde  $e^u = |z|$  și  $v - \theta_0 = 2k\pi$ , deci  $u = \ln |z|$ ,  $v = \theta_0 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Rezultă următoarea formulă

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Există o infinitate de determinări ale logaritmului complex, anume  $(\operatorname{Ln} z)_k = \ln |z| + i(\theta_0 + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; pentru  $k = 0$  se obține determinarea principală  $f(z) = \ln |z| + i\theta_0$ .

Pentru orice  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$  și pentru orice  $\alpha \in \mathbb{C}$  se definește puterea

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}.$$

EXEMPLE. 1)  $\operatorname{Ln}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

2)  $i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = \exp(i(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))) = \exp(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

În Analiza complexă este important de introdus un concept de funcție logaritmică, cu valori bine determinate. Fie  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un deschis și  $0 \notin \Omega$ ; se numește **determinare** (sau **ramură**) **continuă a argumentului** în  $\Omega$  orice

funcție continuă  $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $\forall z \in \Omega$ ,  $e^{i\alpha(z)} = \frac{z}{|z|}$ . Prin **determinare**

(sau **ramură**) continuă a **logaritmului complex** în  $\Omega$  se înțelege orice funcție  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  astfel încât  $\forall z \in \Omega$ ,  $e^{\varphi(z)} = z$ ; de exemplu  $\varphi(z) = \ln|z| + i\alpha(z)$  este o astfel de determinare. O astfel de funcție este olomorfă în orice punct  $z_0 \in \Omega$  și în plus

$$\varphi'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{e^{\varphi(z)} - e^{\varphi(z_0)}} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{e^{\varphi(z_0)} [e^{\varphi(z) - \varphi(z_0)} - 1]}$$

și ținând cont că  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$  (conform 4)), rezultă  $\varphi'(z_0) = \frac{1}{z_0}$ . Se poate

arăta că în  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  nu există nici o determinare continuă a logaritmului dar dacă  $d$  este o semidreaptă prin origine, atunci în  $\Omega = \mathbb{C} \setminus d$  există o astfel de determinare.

În încheierea acestui paragraf, prezentăm dezvoltările limitate ale unor funcții elementare. Dacă  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$  sunt funcții definite pe o vecinătate  $V$  a unui punct  $t_0 \in \mathbb{R}$ , se scrie

$$f \in o(\varphi) \text{ în } t_0 \text{ dacă } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = 0$$

(se citește " $f$  este un  $o$  mic de  $\varphi$ "). Cazul cel mai întâlnit este  $\varphi(t) = (t - t_0)^n$ ,

$n \geq 0$ . Dacă  $f(t) = P_n(t) + o(t - t_0)^n$  în  $t_0$ , adică  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - P_n(t)}{(t - t_0)^n} = 0$  și dacă  $P_n$

este o funcție polinomială de grad  $\leq n$ , atunci se spune că  $P_n$  este o **dezvoltare limitată a lui  $f$  de ordin  $n$** , în jurul lui  $t_0$ . Indicăm câteva dezvoltări limitate importante, care rezultă din formula Taylor:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$$

Pentru orice  $x \in (-1, 1)$  avem:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

Dezvoltarea limitată a unei funcții  $f$ , de ordin  $n$ , în jurul lui  $t_0$ , este unică, dacă există. Într-adevăr, dacă  $f(t) = P_n(t) + o(t - t_0)^n$  și  $f(t) = Q_n(t) + o(t - t_0)^n$ , cu  $P, Q$  polinoame de grad cel mult  $n$ , atunci punând

$$P_n(t) - Q_n(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + \dots + a_n(t - t_0)^n \text{ rezultă } a_p = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P_n(t) - Q_n(t)}{(t - t_0)^p} = 0$$

pentru orice  $p = 0, 1, \dots, n$  deci  $P_n = Q_n$ . Dezvoltări limitate au loc și în cazul complex.

#### 4. Aproximarea și interpolarea funcțiilor

Fiind dată o funcție  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definită pe un interval  $I$ , problema aproximării este de a determina o funcție mai simplă  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  (de exemplu polinomială) astfel încât  $\forall x \in I$ ,  $f(x) \approx g(x)$ . Orice astfel de formulă trebuie însoțită de o evaluare a erorii absolute

$$\varepsilon_x = |f(x) - g(x)|, \text{ pentru } x \in I.$$

Astfel, formula lui Taylor permite aproximarea **locală** a unei funcții  $f$  de clasă  $C^{n+1}(I)$  printr-un polinom de grad  $\leq n$ ; adjectivul "locală" se referă la faptul

că  $\forall a \in I$ , aproximarea  $f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$  are loc într-o vecinătate a

punctului  $a$ . Utilizarea restului Lagrange (sau a restului integral) permite evaluarea erorii absolute în această formulă.

Există și un alt tip de aproximări, anume cele **uniforme** (sau **globale**). Dacă  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  și  $\varepsilon > 0$ ,  $g$  este o  $\varepsilon$ -aproximație globală a lui  $f$  dacă  $d(f, g) \leq \varepsilon$ , adică  $\forall x \in I$ ,  $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ . De exemplu, dacă  $f$  este o funcție continuă pe un interval compact  $[a, b]$ , atunci  $\forall \varepsilon > 0$ , este  $\varepsilon$ -aproximată global cu o funcție etajată (conform corolarului teoremei III. 8). De asemenea există o teoremă datorată lui Weierstrass care arată că pentru orice funcție

continuă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  și pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un polinom  $P$  astfel încât  $d(f, P) \leq \varepsilon$ , adică în "tubul de funcții" limitat de  $f - \varepsilon, f + \varepsilon$  este situat graficul unui polinom.

În cele ce urmează, ne vom ocupa de un alt tip de aproximare, numită **prin interpolare**. Aceasta se referă la utilizarea tabelor de valori discrete asociate unor funcții, care apar curent în diverse tipuri de măsurători și prelucrări de date. Fie  $x_0, x_1, \dots, x_p$  puncte distincte din  $I$  (numite **noduri de interpolare**) și  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție teoretic definită pe  $I$ , ale cărei valori  $y_i$  sunt cunoscute doar în nodurile  $x_i$ , deci

$$f(x_i) = y_i, \text{ pentru } i = 0, 1, \dots, p.$$

Orice funcție  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $g(x_i) = y_i$ ,  $0 \leq i \leq p$ , se numește o **aproximare a lui  $f$  prin interpolare**. Graficele lui  $f$  și  $g$  trec ambele prin cele  $p + 1$  puncte  $M_i(x_i, y_i)$ . Una din funcțiile  $g$  remarcabile o constituie **polinomul Lagrange  $P$  de interpolare** de grad  $\leq p$ , asociat lui  $f$  și punctelor  $M_0, M_1, \dots, M_p$ , pentru care  $P(x_i) = f(x_i)$ ,  $0 \leq i \leq p$ .

**TEOREMA V. 9.** Polinomul Lagrange de interpolare  $P$  asociat tabelului

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & \dots & x_p \\ y_0 & y_1 & \dots & y_p \end{array}$$

există și este unic; în plus, dacă  $f$  este de clasă  $C^{p+1}(I)$  și

$$M = \sup_{x \in I} |f^{(p+1)}(x)|, \text{ atunci } \|f - P\| \leq \frac{M}{(p+1)!} \sup_{x \in I} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_p)|.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Pentru orice  $i$ ,  $0 \leq i \leq p$ , considerăm polinomul de grad  $p$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_p)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_p)}$$

și se observă că  $L_i(x_j) = \delta_{ij}$  pentru  $0 \leq i, j \leq p$ . Luând  $P(x) = \sum_{i=0}^p y_i L_i(x)$ , se

observă că  $\text{gr} P \leq p$  și  $P(x_j) = \sum_{i=0}^p y_i L_i(x_j) = \sum_{i=0}^p y_i \delta_{ij} = y_j$ , pentru orice  $j = 0, 1, \dots, p$ .

Unicitatea lui  $P$  se demonstrează astfel: dacă  $P_1, P_2$  sunt două polinoame de grad  $\leq p$  astfel încât  $P_1(x_i) = y_i$ ,  $P_2(x_i) = y_i$  pentru orice  $0 \leq i \leq p$ , atunci polinomul  $P_1 - P_2$  are gradul  $\leq p$  și are  $p + 1$  rădăcini, anume nodurile  $x_0, x_1, \dots, x_p$ . Deci  $P_1 - P_2$  este polinomul nul, adică  $P_1 = P_2$ .

De remarcat că polinoamele  $L_i$  depind numai de alegerea nodurilor de interpolare. Stabilim acum eroarea absolută pentru formula aproximativă  $f(x) \approx P(x)$ ,  $x \in I$ . Pentru  $x \neq x_i$ ,  $0 \leq i \leq p$ , notăm

$$R(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_p)} \text{ și}$$

$$\varphi(u) = f(u) - P(u) - R(x) \cdot (u - x_0)(u - x_1) \dots (u - x_p).$$

Funcția  $\varphi$  se anulează în  $p + 2$  puncte distincte, anume  $x_0, x_1, \dots, x_p, x$  deci conform teoremei lui Rolle aplicată succesiv, derivata  $\varphi^{(p+1)}$  se va anula într-un punct  $\xi \in I$ , de unde va rezulta că  $0 = f^{(p+1)}(\xi) - R(x) \cdot (p + 1)!$ , adică

$$R(x) = \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_p), \text{ de unde evaluarea din enunț.}$$

**EXEMPLU.** Determinăm polinomul Lagrange de interpolare asociat tabelului

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}$$

În acest caz, avem  $p = 3$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = -3$ ,

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 4)}{(-1)(-2)(-4)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{x(x - 2)(x - 4)}{3}$$

$$L_2(x) = -\frac{x(x - 1)(x - 4)}{4}, L_3(x) = \frac{x(x - 1)(x - 2)}{24}$$

și ca atare,  $P(x) = \sum_{i=0}^3 y_i L_i(x) = L_0(x) - 3L_3(x) = -\frac{1}{4}(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$ , după calcule ușoare.

În loc de polinoame se pot folosi funcții polinomiale pe porțiuni, numite și funcții "spline". Dacă  $I = [a, b]$  și  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$  este o diviziune cu  $n$  noduri interioare, o funcție  $s: I \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **spline de grad  $k$**  ( $k \geq 1$ ) relativ la  $\Delta$  dacă  $s$  este de clasă  $C^{k-1}(I)$  și pe orice interval  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,  $s$  coincide cu o funcție polinomială cu coeficienți reali de grad  $\leq k$ . Orice polinom este o funcție spline, nu și reciproc; de exemplu

$$(x - \alpha)_+^k = \begin{cases} (x - \alpha)^k & \text{dacă } x > \alpha \\ 0 & \text{dacă } x \leq \alpha \end{cases}$$

este spline de grad  $k$  și nu este polinom (pentru că are o infinitate de zerouri, fără a fi funcția nulă). Se demonstrează că mulțimea  $S_{n,k}(\Delta)$  a funcțiilor spline de grad  $k$  relativ la o diviziune  $\Delta$  fixată cu  $n$  noduri interioare  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  este un spațiu vectorial real, având ca bază funcțiile

$$1, x, x^2, \dots, x^k, (x - x_1)_+^k, (x - x_2)_+^k, \dots, (x - x_n)_+^k$$

deci  $\dim S_{n,k}(\Delta) = n + k + 1$ . Pentru determinarea unei funcții  $S \in S_{n,k}(\Delta)$  sunt necesare (și suficiente)  $n + k + 1$  condiții.

EXEMPLU. Fie  $f(x) = \sin x$  și nodurile  $x_1 = \pi/4$ ,  $x_2 = \pi/2$  pe  $I = [0, \pi]$ . Vrem să aproximăm  $f$  printr-o funcție spline  $s$  de grad 1. În acest caz,  $\dim S_{2,1}(\Delta) = 4$  și o bază este  $1, x, (x - \pi/4)_+, (x - \pi/2)_+$ . Așadar,

$$s = c_1 + c_2 x + c_3(x - \frac{\pi}{4})_+ + c_4(x - \frac{\pi}{2})_+$$

și coeficienții  $c_1, c_2, c_3, c_4$  se determină punând patru condiții simple asupra lui  $s$ ; de exemplu

$$s(0) = f(0) = 0, s(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, s(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 1, s(\pi) = f(\pi) = 0.$$

Pentru funcțiile spline de grad superior se pun condiții și asupra derivatelor.

În încheiere, prezentăm câteva considerații privind derivarea și integrarea numerică (aproximativă).

a) Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de două ori derivabilă și  $u \in (a, b)$ ; alegând  $h$  suficient de mic astfel încât  $u - h, u + h$  să aparțină intervalului  $[a, b]$ , atunci în aplicații practice se pot folosi următoarele formule aproximative:

$$f'(u) \approx \frac{f(u+h) - f(u)}{h}, f''(u) \approx \frac{f(u+h) + f(u-h) - 2f(u)}{h^2}.$$

Dacă  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$  sunt puncte echidistante situate în  $[a, b]$ , cu  $h = x_k - x_{k-1}$ , pentru  $1 \leq k \leq n+1$ , atunci notînd  $y_k = f(x_k)$ , rezultă

$$f'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \text{ pentru } 0 \leq k \leq n \text{ și } f''(x_k) \approx \frac{y_{k+1} + y_{k-1} - 2y_k}{h^2} \text{ pentru } 1 \leq k \leq n.$$

b) Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă și  $J = \int_a^b f(x) dx$ . Făcînd schimbarea de variabilă  $x = a + \frac{b-a}{p}t$  ( $p > 0$  constant), rezultă  $J = \int_0^p g(t) dt$  unde

$$g(t) = \frac{b-a}{p} f(a + \frac{b-a}{p}t). \text{ Să notăm } y_i = g(i) \text{ pentru } i = 0, 1, \dots, p \text{ și fie}$$

$P(t) = \sum_{i=0}^p y_i L_i(t)$  polinomul Lagrange asociat lui  $g$  și nodurile  $0, 1, \dots, p$ . Avem

$g(t) \approx P(t)$  pentru  $t \in [0, p]$  deci

$$J = \int_0^p g(t) dt \approx \int_0^p P(t) dt = \sum_{i=0}^p y_i \int_0^p L_i(t) dt$$

Numerele  $c_i^{(p)} = \int_0^p L_i(t) dt$  ( $i = 0, 1, \dots, p$ ) pot fi tabelate și sunt independente de

funcția  $f$ . În concluzie, rezultă formula aproximativă

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^p y_i c_i^{(p)},$$

numită **formula lui R. CÔTES** (1682 - 1716). Folosind teorema V. 9. se poate da și o estimare a erorii absolute în această formulă:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^p y_i c_i^{(p)} \right| = \left| \int_0^p g(t) dt - \int_0^p P(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \int_0^p |g(t) - P(t)| dt \leq \frac{M}{(p+1)!} \int_0^p |t(t-1)\dots(t-p)| dt.$$

Pentru  $p = 1$  se obține **formula trapezelor**, iar pentru  $p = 2$ , **formula lui T. SIMPSON** (1710 - 1761). Fără a da detalii de demonstrație, explicităm formula lui Simpson. Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^4$ ,  $h = (b-a)/n$  cu  $n$  par,  $n = 2m$ ; fie  $x_k = a + kh$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Atunci

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + f(x_{2m}) + 4A_1 + 2A_2],$$

unde

$$A_1 = f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2m-1}) \text{ și } A_2 = f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2m-2}).$$

Eroarea absolută este  $\leq \frac{(b-a)^5}{180 n^4} \cdot \|f^{(4)}\|$ .

EXEMPLU. Fie  $J = \int_0^1 e^{x^2} dx$ . Nu se poate aplica formula Leibnitz - Newton (deoarece integrantul nu are primitive exprimabile prin funcții elementare). Se

poate aplica o dezvoltare limitată de tipul  $e^{x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}$  dar este dificilă

estimarea erorii. Dacă dorim valoarea lui  $J$  cu eroare  $\leq 10^{-2}$ , un calcul simplu arată că este suficient de luat  $n = 4$  în formula lui Simpson. Deci  $h = 1/4$ ,  $x_k = k/4$  pentru  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ,  $A_1 = f(x_1) + f(x_3)$ ,  $A_2 = f(x_2)$  și rezultă

$$J \approx \frac{1}{12} [1 + e + 4(e^{1/16} + e^{9/16}) + 2e^{1/4}] \approx 1,46.$$

## 5. 10 exerciții

1. Să se determine raza de convergență pentru următoarele serii de puteri:

$$a) \sum_{n \geq 0} n z^n; b) \sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n} z^n; c) \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} z^n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

2. Să se determine mulțimile de convergență pentru seriile următoare:

$$a) \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} x^n; b) \sum_{n \geq 0} n \left( \frac{x+1}{x+2} \right)^n; c) \sum_{n \geq 0} e^{nx} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Să se determine suma următoarelor serii:

$$a) \sum_{n \geq 1} n x^n; b) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}; c) \sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n}}{n!}; d) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

4. Să se arate că funcția  $J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k+n}$  verifică relația

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ și orice } n \in \mathbb{N}.$$

5. Să se arate că:

$$a) \sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4); b) e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$c) \arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

6. Să se arate că dacă  $f$  are o dezvoltare limitată de ordinul 1 în jurul lui  $t_0$ , atunci există  $f'(t_0)$ . Dar dacă  $f$  are o dezvoltare limitată de ordin 2 în jurul lui  $t_0$ , nu există neapărat  $f''(t_0)$ ; analizați exemplul lui  $f(t) = \cos t + t^3 \sin \frac{1}{t}$  dacă  $t \neq 0$ ;  $f(0) = 1$  și  $t_0 = 0$ .

7. Un număr real  $a \geq 0$  se zice **constructivist** dacă există funcții calculabile  $f, g, h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g(n) \neq 0$  pentru orice  $n \geq 1$ ,  $h(n) \rightarrow 0$ , astfel încât  $\forall n \geq 1$ ,  $|a - \frac{f(n)}{g(n)}| \leq h(n)$ . Să se arate că orice număr rațional  $a \geq 0$  este constructivist și că

$\pi$  și  $e$  sunt constructiviste. (O funcție  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  se zice **calculabilă** dacă valorile ei pot fi calculate cu ajutorul computerului; această definiție este desigur discutabilă).

8. Să se determine mulțimile  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \sin z = 2\}$ ,  $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |\sin z| = 1\}$ .

9. Să se determine polinomul Lagrange pentru:

a)  $f(x) = \sin x$  și nodurile  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \pi/2$ ,  $x_2 = \pi$ ;

b) tabela  $\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}$ .

10. a) Să se calculeze cu eroare  $\leq 10^{-3}$  integrala  $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 1}$ .

b) Să se calculeze  $\pi$  cu aproximație  $\leq 10^{-3}$ , folosind una din următoarele formule:

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}; \quad \pi = 16 \arctg \frac{1}{5} - 4 \arctg \frac{1}{239}.$$

## INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. a)  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$ ; b)  $R = 1/2$ ; c)  $R = 1/e$ .

2. a)  $(-1, 1)$ ; b) Fie  $\frac{x+1}{x+2} = y$ ; necesar  $|y| < 1$  deci  $x \in (-3/2, \infty)$ .

c)  $e^x = y$ ;  $y \in (-1, 1)$  deci  $x \in (-\infty, 0)$ .

3. a) Fie  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ ,  $x \in (-1, 1)$  deci

$$S(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = x(1 + 2x + 3x^2 + \dots) = x(x + x^2 + x^3 + \dots) = x \left( \frac{x}{1-x} \right);$$

b)  $S(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$ ;  $S'(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ ,  $\forall x \in (-1, 1)$ . Deci

$S(x) = -\ln(1-x) + C$ . Facem  $x = 0$  și rezultă  $C = 0$ .

c)  $S(x) = e^{x^2} - 1$ ;

d) Calculăm  $(x \cdot S(x))'$  etc.

4. În acest caz, raza de convergență este  $\infty$  deci putem deriva termen cu termen de două ori.

5. a) Avem  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$  și calculăm  $\sin^2(x)$ ;

b) Avem  $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$  și punem  $u = \sin x$  etc.

c) Se integrează dezvoltarea  $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$  sau se aplică formula lui Taylor.

6. Fie  $f(t) = a + bt + o(t - t_0)$ . Făcând  $t \rightarrow t_0$  rezultă  $f(t_0) = a + bt_0$ . În plus,

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{a + bt + o(t - t_0) - a - bt_0}{t - t_0} = b.$$

În exemplul dat, rezultă  $f(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$  și  $f''(0)$  nu există.

7. Dacă  $a = p/q$  cu  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $q \neq 0$  luăm  $f(n) = p$ ,  $g(n) = q$  și  $h(n) = 0$ . Avem

$$\pi = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots \right). \text{ Notînd } s_n = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right), \text{ rezultă}$$

$$|\pi - s_n| < \frac{4}{2n+3}. \text{ Similar, } e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots, \text{ avem}$$

$$|e - s_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots = \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+3)(n+2)} + \dots \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right] = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} \text{ etc.}$$

$$8. \sin z = 2 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2; \text{ notînd } e^{iz} = w, \text{ rezultă } w - 1/w = 4i, w^2 - 4iw - 1 = 0 \text{ deci}$$

$$w = 2i \pm i\sqrt{3}. \text{ Atunci}$$

$$iz = \text{Ln}(2i \pm i\sqrt{3}) = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$k \in \mathbb{Z}$ . Apoi

$$\sin z = \sin(x + iy) = \frac{1}{2i} [e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}] =$$

$$= \frac{1}{2i} [e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)] = \sin x \cdot \text{chy} + i \cos x \cdot \text{shy}$$

și rezultă  $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \text{sh}^2 y}$  deci  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{shy} = \pm \cos x\}$ .

$$9. a) P(x) = -\frac{4}{\pi^2}(x^2 - \pi x); b) P(x) = -\frac{1}{6}(x^3 - 12x^2 + 23x - 12).$$

10. Se poate aplica formula lui Simpson ( $n = 6$ ) dar se recomandă utilizarea dezvoltării lui arctgx.

## LECȚIA A VI-A

### DERIVATE PARȚIALE, EXTREME LIBERE

#### INTRODUCERE

În această lecție dăm primele rezultate de calcul diferențial pentru funcții de mai multe variabile reale. Cazul funcțiilor de o variabilă este un caz particular și în același timp el permite și o testare a înțelegerii cazului general. Vom defini și studia derivatele parțiale, diferențiala, extinderea formulei lui Taylor și determinarea extremelor libere ale funcțiilor de mai multe variabile reale. În încheierea acestei lecții se dau câteva aplicații utile.

#### 1. Derivata după o direcție, derivate parțiale, matrice jacobiană

Fie  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \neq b$ . Definim:

**dreapta** ce "trece" prin  $a$  și  $b$  ca mulțimea

$$\{x \in \mathbb{R}^n; x = a + t(b - a), t \in \mathbb{R}\}$$

**semidreapta** din  $a$  trecînd prin  $b$

$$\{x \in \mathbb{R}^n; x = a + t(b - a), t \geq 0\}$$

**segmentul** ce "unește"  $a$  cu  $b$

$$\{x \in \mathbb{R}^n; x = a + t(b - a), 0 \leq t \leq 1\} = [a, b]$$

(ultima egalitate este o **notație**).

Vom numi **direcție** în  $\mathbb{R}^n$  o **semidreaptă** din  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Este clar că fiecare punct  $b \neq 0$  în  $\mathbb{R}^n$  determină o direcție dar puncte diferite pot determina aceeași direcție. Însă, orice direcție conține un **unic** punct de normă 1 numit **versorul** direcției respective. Putem deci **defini** o direcție și ca un **punct (vector) de normă 1 (versor)**. Vom folosi mai des această definiție pentru direcție.

**Comentariu.** Orice semidreaptă determină o direcție (unică) (semidreptei  $\{x \in \mathbb{R}^n; x = a + t(b - a), t \geq 0\}$  îi corespunde direcția  $s = \frac{b - a}{\|b - a\|}$ ). O dreaptă determină două

direcții opuse (dreptei  $\{x \in \mathbb{R}^n; x = a + t(b - a), t \in \mathbb{R}\}$  îi corespund direcțiile  $\pm \frac{b - a}{\|b - a\|}$ ).

Să fixăm o funcție  $f(x_1, \dots, x_n), f: A \rightarrow \mathbb{R}$  definită într-un deschis  $A \subset \mathbb{R}^n$ , fie  $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$  un punct fixat și  $x = (x_1, \dots, x_n)$  "punctul curent" din  $\mathbb{R}^n$ . Fie  $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$  un versor  $n$ -dimensional ( $\|s\| = 1$  adică  $s_1^2 + \dots + s_n^2 = 1$ ). Tripletului  $(f, a, s)$  i se poate asocia funcția de o variabilă reală  $g(t) = f(a + ts) = f(a_1 + ts_1, \dots, a_n + ts_n)$ , definită în vecinătatea originii, mai precis, cum  $A$  este deschis și  $a \in A$  există  $r > 0$  astfel încât  $B(a, r) \subset A$ ; deci  $\forall t \in (-r, r)$ ,  $d(a + ts, a) = \|a + ts - a\| = \|ts\| = |t| < r$  deci  $a + ts \in B(a, r)$  și astfel este bine definită funcția  $g: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(a + ts)$ .

**Definiția VI. 1.** Fie  $(f, a, s)$  ca mai sus. Se spune că  $f$  este derivabilă în punctul  $a$  după direcția  $s$  dacă funcția  $g$  este derivabilă în  $t = 0$ ; în plus, numărul real

$$\frac{df}{ds}(a) = g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t}$$

se numește **derivata lui  $f$  după  $s$  în  $a$** .

Așadar, notînd  $x = a + ts$ , vectorul  $x - a$  este coliniar cu  $s$  și

$$\frac{df}{ds}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + ts) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{t} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{t}$$

aceasta modelează "viteza de variație a lui  $f$  pe direcția  $s$ , începînd din  $a$ ".

Vom nota în continuare cu

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

vectorii bazei canonice din  $\mathbb{R}^n$ ; evident, fiecare  $e_k, 1 \leq k \leq n$  este un versor.

**Definiția VI. 2.** Fie  $f(x_1, \dots, x_n), f: A \rightarrow \mathbb{R}, a \in A$  ca mai sus. Se spune că  $f$  are **derivată parțială în punctul  $a$** , în raport cu variabila  $x_k$  (variabila de indice

$k$ ) dacă există  $\frac{df}{de_k}(a)$ ; acest număr real se mai notează  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$  sau  $D_k f(a)$ .

Așadar,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \frac{df}{de_k}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{t}$$

Funcția  $f$  se zice **derivabilă parțial pe  $A$**  dacă  $\forall a \in A$ , există  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$  pentru

orice  $k = 1, \dots, n$ . În acest caz se definesc  $n$  funcții  $\frac{\partial f}{\partial x_k}: A \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ ,

$1 \leq k \leq n$ , numite **derivatele parțiale ale lui  $f$  pe  $A$** . Funcția  $f$  se zice de **clasă  $C^1$  pe  $A$**  și se scrie  $f \in C^1(A)$  dacă  $f$  este continuă, derivabilă parțial pe

$A$  și cu toate derivatele parțiale  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  continue pe  $A$ .

În cazul  $n = 2$  vom scrie  $(x, y)$  în loc de  $(x_1, x_2)$ , iar în cazul  $n = 3$ , punctul curent  $(x_1, x_2, x_3)$  se notează cu  $(x, y, z)$ . O funcție  $f(x, y), f: A \rightarrow \mathbb{R}$  ( $A$  deschis în  $\mathbb{R}^2$ ) este derivabilă în raport cu  $x$  și respectiv cu  $y$  în punctul  $a = (a_1, a_2)$  dacă există

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t} \text{ și respectiv}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t},$$

acestea reprezentînd "vitezele de variație a lui  $f$  pe direcțiile axelor  $Ox, Oy$ ". Dacă aceasta are loc pentru orice punct  $a \in A$ , atunci derivatele parțiale ale lui  $f$  în punctul curent din  $A$  vor fi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, y + t) - f(x, y)}{t} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Notățiile  $\Delta x, \Delta y$ , în loc de  $t$ , sunt folosite în practică. Totodată, reținem că  $\frac{\partial f}{\partial x}$

se calculează derivînd  $f$  în mod uzual în raport cu  $x$  (considerînd  $y$  constant);

similar,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  se calculează derivînd  $f$  în raport cu  $y$  și considerînd  $x$  constant.

Pentru o funcție  $f(x, y, z)$  avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x};$$

derivînd în raport cu  $x$  și considerînd  $y, z$  constante.

**EXEMPLUL 1.** Fie  $f(x, y) = x^2 + xy, A = \mathbb{R}^2$  și  $a = (5, -3)$ . Atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(5 + t, -3) - f(5, -3)}{t} = 7 \text{ și } \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(5, -3 + t) - f(5, -3)}{t} = 5.$$

În punctul curent,  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$  și  $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ ; înlocuind aici  $x = 5, y = -3$ , regăsim

valorile anterioare.

**EXEMPLUL 2.** Pentru  $f(x, y, z) = (x + y)\sin yz$  avem, în punctul curent:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \cdot \sin yz + (x+y) \cdot \cos yz \cdot z \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = (x+y) \cdot \cos yz \cdot y.$$

EXEMPLUL 3. Fie  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  definită pe deschisul

$$A = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \text{ Avem } \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{x_k}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}} \text{ pentru orice } k = 1, 2, \dots, n.$$

EXEMPLUL 4. Orice funcție "elementară" este de clasă  $C^1$  pe orice deschis conținut în domeniul ei de definiție; deci polinoamele, funcțiile raționale, exponențialele etc. ca și compuneri ale acestora sunt funcții de clasă  $C^1$ .

**Definiția VI. 3.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  un deschis,  $a \in A$  și  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  o aplicație cu valori vectoriale. Dacă  $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , sunt componentele lui  $F$  deci

$$\forall x \in A, F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \text{ și există toate derivatele parțiale } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

$1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ , se definește **matricea jacobiană** (a aplicației  $F$  în punctul  $a$ ) prin

$$J_F(a) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

(după numele matematicianului german C. G. JACOBI, 1804 - 1851).

Dacă  $m = n$  matricea  $J_F(a)$  este pătratică și determinantul ei se numește **jacobianul** (sau **determinantul funcțional**) al funcțiilor  $f_1, \dots, f_n$  în raport cu variabilele  $x_1, \dots, x_n$ , în punctul  $a$  și se notează astfel:

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) = \det J_F(a)$$

Vom spune că  $F$  este de clasă  $C^1$  pe  $A$  ( $F \in C^1(A)$ ) dacă  $f_1, \dots, f_m$  sunt de clasă  $C^1$  pe  $A$ .

EXEMPLUL 1. Fie aplicația  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ , definită pe un deschis  $A \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}$ . În punctul curent avem

$$J_F(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} \text{ și jacobianul este } \rho.$$

EXEMPLUL 2. Fie  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x) = (x_1^2 + 7x_2 + \ln x_3, x_1/x_4) = (f_1(x), f_2(x))$ , unde  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ , definită în deschisul  $A = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 > 0, x_4 \neq 0\}$ . În acest

$f$  dacă există o bilă  $B(a, r) \subset A$  pe care diferența  $f(x) - f(a)$  are un semn constant; mai precis, punctul  $a$  este un punct de **minim** (respectiv **maxim**) **local** pentru  $f$  dacă  $\forall x \in B(a, r)$ ,  $f(x) \geq f(a)$  (respectiv  $f(x) \leq f(a)$ ).

Un punct  $a \in A$  se numește **critic** pentru  $f$  dacă  $f$  este diferențiabilă în  $a$  și  $df(a) = 0$ , deci  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$  pentru orice  $k = 1, \dots, n$ .

**TEOREMA VI. 11 (teorema lui P. FERMAT, 1601 - 1665).** Dacă o funcție  $f$  ca mai sus este diferențiabilă într-un punct  $a \in A$ , care este un punct de extrem local pentru  $f$ , atunci  $a$  este punct critic pentru  $f$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Fixăm un versor  $s \in \mathbb{R}^n$  ales arbitrar. Alegem  $r > 0$  astfel încât diferența  $f(x) - f(a)$  să aibă semn constant pe o bilă  $B(a, r) \subset A$ . Atunci funcția  $g: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(t) = f(a + ts)$  este derivabilă în  $t = 0$  și diferența  $g(t) - g(0)$  are semn constant pentru orice  $t \in (-r, r)$ . Aceasta înseamnă că  $t = 0$  este punct de extrem local al lui  $g$  și conform teoremei lui Fermat din liceu, rezultă

$$g'(0) = 0, \text{ adică } \frac{df}{ds}(a) = 0. \text{ În particular, } \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0 \text{ pentru } 1 \leq k \leq n \text{ și}$$

$df(a) = 0$ , conform teoremei VI. 5.

**COROLAR.** Dacă  $f(x_1, \dots, x_n)$  este o funcție de clasă  $C^1$  pe un deschis  $A \subset \mathbb{R}^n$ , atunci punctele de extrem local ale lui  $f$  sunt printre soluțiile, situate în  $A$ , ale sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

EXEMPLU. Extremele locale ale funcției  $f(x, y) = x^3 + 6y^3 - 9xy$  se află printre soluțiile sistemului  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ , adică  $3x^2 - 9y = 0$ ,  $18y^2 - 9x = 0$ .

**OBSERVAȚII.** Reciproca teoremei VI. 11 este falsă, așa cum arată exemplul funcției  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = xy$ ; punctul  $a = (0, 0)$  este evident critic, dar nu este punct de extrem local pentru  $f$ , deoarece diferența  $f(x, y) - f(0, 0) = xy$  nu are semn constant pe vreo bilă centrată în origine.

Corolarul teoremei VI. 11 arată că anularea derivatelor de ordin I reprezintă doar o condiție **necesară** de extrem. În cele ce urmează vom da condiții **suficiente** de extrem, deci criterii de a decide care din punctele critice ale unei funcții sunt și puncte de extrem ale ei. Este necesară în prealabil următoarea:

**LEMĂ.** Fie  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  o matrice simetrică din  $M_n(\mathbb{R})$  și  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , forma pătratică asociată. Dacă  $\varphi$  este pozitiv definită (adică  $\varphi(x) > 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ), atunci există  $\lambda > 0$  astfel încît  $\forall y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi(y) \geq \lambda \|y\|^2$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$  sfera unitate din  $\mathbb{R}^n$ . Fiind închisă și mărginită în  $\mathbb{R}^n$ , mulțimea  $S$  este compactă. Funcția polinomială  $\varphi$  fiind continuă, ea este mărginită pe  $S$ . Fie  $\lambda = \inf_{x \in S} \varphi(x)$  deci există  $\xi \in S$  astfel încît  $\lambda = \varphi(\xi)$ . Dar  $\xi \neq 0$  (căci  $0 \notin S$ ) și ca atare  $\varphi(\xi) > 0$  deci  $\lambda > 0$ , adică  $\forall x \in S$ ,  $\varphi(x) \geq \lambda$ . Dacă  $y = 0$ , atunci inegalitatea din enunț este evidentă; fie atunci  $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  deci  $\frac{y}{\|y\|} \in S$  și ca atare,  $\varphi(\frac{y}{\|y\|}) \geq \lambda$ . În concluzie,  $\frac{1}{\|y\|^2} \varphi(y) \geq \lambda$  și lema este demonstrată.

**TEOREMA VI. 12.** Fie  $f(x_1, \dots, x_n), f: A \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^2$  pe un deschis  $A \subset \mathbb{R}^n$  și  $a$  un punct critic pentru  $f$ . Dacă forma pătratică  $q = d^2f(a)$  este pozitiv definită (respectiv negativ definită), atunci  $a$  este punct de minim local (respectiv maxim local).

**DEMONSTRAȚIE.** Presupunem  $q$  pozitiv definită deci conform lemei există  $\lambda > 0$  astfel încît  $q(x - a) \geq \lambda \|x - a\|^2$ . Scriind formula lui Taylor în jurul lui  $a$ , rezultă

$$f(x) = f(a) + T_a(x) + \frac{1}{2} R_1, \text{ unde}$$

$$T_a(x) = (x_1 - a_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \dots + (x_n - a_n) \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \text{ și}$$

$$R_1 = (x_1 - a_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\xi) + 2(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi) + \dots + (x_n - a_n)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\xi),$$

unde  $\xi \in [a, x]$ . Deoarece  $a$  este critic, rezultă că  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$  deci

$T_a(x) = 0$  și ca atare  $f(x) - f(a) = 1/2 R_1$  în vecinătatea lui  $a$ . Deoarece  $f \in C^2(A)$ ,

funcțiile  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$  sunt continue pe  $A$  deci

$$R_1 = (x_1 - a_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) + 2(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) + \dots$$

$$\dots + (x_n - a_n)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) + o(\|x - a\|^2) = q(x - a) + o(\|x - a\|^2).$$

Atunci  $f(x) - f(a) = \frac{1}{2} R_1 \geq \frac{1}{2} \cdot q(x - a) + \alpha(x) \cdot \|x - a\|^2$ , unde  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ .

Rezultă  $f(x) - f(a) \geq \left(\frac{\lambda}{2} + \alpha(x)\right) \cdot \|x - a\|^2$ . Deoarece  $\lambda > 0$ , se poate găsi  $r > 0$

astfel încît  $\lambda/2 + \alpha(x) > 0$  pentru orice  $x \in B(a, r)$ . Ca atare,  $f(x) - f(a) \geq 0$  pe bila  $B(a, r)$  și  $a$  rezultă punct de minim local pentru  $f$ .

Cazul punctului de maxim se tratează similar sau se consideră  $-f$ .

În algebra liniară se demonstrează că o formă pătratică reală este pozitiv definită (respectiv negativ definită)  $\Leftrightarrow$  toate valorile proprii ale matricii asociate sunt strict pozitive (respectiv toate valorile proprii strict negative). Am văzut că pentru forma pătratică  $d^2f(a)$ , matricea asociată este hessiana

$$H = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Fiind simetrică, valorile proprii ale lui  $H$  vor fi reale. Rezultă următorul procedeu de determinare a punctelor de extrem:

**Pasul I.** Fiind dată o funcție reală  $f(x_1, \dots, x_n)$  de clasă  $C^2$ , se determină punctele critice ale lui  $f$ .

**Pasul II.** Fie  $a$  un punct critic. Se calculează hessiana  $H$  corespunzătoare și se determină valorile proprii ale lui  $H$ .

**Pasul III** (decizia). Dacă toate valorile proprii ale lui  $H$  sunt strict pozitive, atunci  $a$  este un punct de minim local. Dacă toate valorile proprii ale lui  $H$  sunt strict negative, atunci  $a$  este un maxim local. Dacă unele valori proprii sunt strict pozitive și celelalte strict negative, atunci  $a$  nu este punct de extrem local. În fine, dacă  $0$  este o valoare proprie pentru  $H$ , atunci nu se poate decide și pentru a evalua semnul diferenței  $f(x) - f(a)$ , se aplică o dezvoltare Taylor de ordin superior în jurul punctului  $a$ . Se trece apoi la alte puncte critice.

**EXEMPLUL 1.** Determinăm extremele locale ale funcției

$$f(x, y) = x + y + 4 \sin x \sin y$$

în deschisul  $A = \left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \times \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$  din  $\mathbb{R}^2$ . În acest caz,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 4 \cos x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 4 \sin x \cos y.$$

Punctele critice verifică relațiile  $\sin y \cos x = -1/4$ ,  $\sin x \cos y = -1/4$  deci  $\sin(x+y) = -1/2$  și  $\sin(x-y) = 0$ . Se găsește un singur punct critic, anume

$a = \left(\frac{7\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right)$ . Calculăm acum hessiana  $H$  în punctul  $a$ . Avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = -4 \sin^2 \frac{7\pi}{12} = -2 - \sqrt{3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = 4 \cos^2 \frac{7\pi}{12} = 2 + \sqrt{3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = -4 \sin^2 \frac{7\pi}{12} = -2 - \sqrt{3}.$$

Atunci

$$H = \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} & 2 + \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & -2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

și valorile proprii ale lui  $H$  sunt ambele strict negative. Deci  $a$  este un punct de maxim local pentru  $f$ .

EXEMPLUL 2. Determinăm extremele locale ale funcției

$$f(x, y, z) = x^2 y + yz + 32x - z^2.$$

Există un singur punct critic, anume  $a = (2, -8, -4)$ . Hessiana este

$$H = \begin{pmatrix} -16 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

și are valori proprii atât strict pozitive cât și strict negative, deci  $a$  nu este punct de extrem local pentru  $f$ .

OBSERVAȚIE. Fie  $K \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime compactă și  $f$  o funcție de clasă  $C^1$  pe un deschis care conține  $K$ . Extremele globale ale lui  $f$  pe  $K$  sunt atinse în puncte din  $K$ . Dacă acestea aparțin lui  $\overset{\circ}{K}$ , atunci ele sunt puncte critice și pot fi determinate ca mai sus. Dacă ele nu aparțin lui  $\overset{\circ}{K}$ , ele aparțin mulțimii  $\text{Fr } K = K \setminus \overset{\circ}{K}$  și sunt necesare alte metode pentru determinarea lor.

## 5. Aplicații

În acest paragraf dăm câteva metode aproximative, care pot fi cu ușurință "dizolvate" în programe de calcul.

### I. Metoda celor mai mică pătrate.

Presupunem că în măsurătorile unei mărimi  $f(x)$  se obține o tabelă de valori de forma

$$\frac{x_0 \ x_1 \ \dots \ x_p}{y_1 \ y_2 \ \dots \ y_p}, \text{ cu } y_i = f(x_i), \ 0 \leq i \leq p.$$

Am văzut în lecția a V-a, §4 că rostul interpolării este acela de a estima valoarea lui  $f$  în puncte situate între nodurile  $x_i$ ,  $0 \leq i \leq p$ . Există însă situații în care este util de știut cât de mult se abate graficul funcției  $f$  de la o dreaptă. Dacă dreapta  $y = ax + b$  ar trece prin punctele  $(x_i, y_i)$ ,  $0 \leq i \leq p$ , atunci am avea  $y_i - ax_i - b = 0$  pentru orice  $i = 0, 1, \dots, p$ . În general acest fapt nu se poate realiza și se pune condiția ca expresiile  $y_i - ax_i - b$  să fie "simultan mici", în sensul că expresia

$$E(a, b) = \sum_{i=0}^p (y_i - ax_i - b)^2$$

să fie minimă. Metoda celor mai mici pătrate constă în determinarea constantelor  $a, b$  cu această proprietate. Conform teoremei VI. 11, condițiile necesare de extrem sunt

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0, \text{ adică } \sum_{i=0}^p (y_i - ax_i - b) \cdot x_i = 0, \quad \sum_{i=0}^p (y_i - ax_i - b) = 0.$$

Dacă  $(a_0, b_0)$  este soluția acestui sistem (în ipoteza că există), se verifică ușor că ea reprezintă un punct de minim pentru  $E$ . Dreapta  $y = a_0 x + b_0$  se mai numește **dreapta de regresie** asociată tabelui inițial considerat; ea "mediază" printre punctele  $M_i(x_i, y_i)$ ,  $0 \leq i \leq p$ .

Metoda celor mai mici pătrate se generalizează astfel: pentru aceeași tabelă de date căutăm parametrii  $c_1, c_2, \dots, c_k$  și o curbă de ecuație  $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_k)$  care să medieze printre punctele  $M_i$ ,  $0 \leq i \leq p$ . Se formează expresia

$$E(c_1, c_2, \dots, c_k) = \sum_{i=0}^p [y_i - \varphi(x_i, c_1, c_2, \dots, c_k)]^2$$

și se pun condițiile necesare de minim  $\frac{\partial E}{\partial c_i} = 0$ ,  $1 \leq i \leq k$ , determinând valorile lui  $c_1, c_2, \dots, c_k$ .

O altă generalizare a metodei celor mai mici pătrate este următoarea: fie  $(X, \|\cdot\|)$  un spațiu vectorial normat real și  $Y \subset X$  un subspațiu vectorial. Se fixează  $a \in X$  și se determină  $y_0 \in Y$  astfel încât  $d(a, y_0) = \|a - y_0\|$  să fie minimă.

### II. Metoda lui W. RITZ (1878 - 1909).

Fie  $X$  un SVN real și  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  o aplicație fixată, cu valori reale (numită și **funcțională**). Pentru a determina extremele lui  $f$  pe un subspațiu finit dimensional  $X'$  al lui  $X$ , se poate proceda astfel: se alege o bază  $(e_1, \dots, e_k)$  a lui

$X'$ . Orice vector  $x \in X'$  se scrie unic sub forma  $x = \sum_{i=1}^k c_i e_i$  și se calculează  $f(x) = F(c_1, \dots, c_k)$ . În acest mod, se evidențiază o funcție reală de  $k$  variabile (presupusă de clasă  $C^1$ ) și se pun condițiile necesare de extrem  $\frac{\partial F}{\partial c_i} = 0$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Se determină de aici  $c_1, \dots, c_k$  și cu aceasta un vector  $x$  candidat la soluția problemei.

### III. Metoda gradientului.

Indicăm o metodă mai specială pentru determinarea extremelor unor funcții reale. Fie  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^1$  pe un deschis  $A \subset \mathbb{R}^n$  și  $a \in A$  un punct fixat. Presupunem că  $a$  nu este critic. Reamintim că pentru orice versor  $s \in \mathbb{R}^n$ ,  $\frac{df}{ds}(a) = \langle s, \nabla_a f \rangle$ ; notînd cu  $n = \text{vers} \nabla_a f = \nabla_a f / \|\nabla_a f\|$ , versorul gradientului  $\nabla_a f = \text{grad}_a f$ , se observă că

$$\max_s \frac{df}{ds}(a) = \frac{df}{dn}(a) = \langle n, \nabla_a f \rangle = \|\nabla_a f\| \text{ și } \min_s \frac{df}{ds}(a) = -\frac{df}{dn}(a)$$

(de exemplu, pentru  $n = 2$  sau  $3$  avem  $\frac{df}{ds}(a) = \|s\| \cdot \|\nabla_a f\| \cdot \cos \theta$ , cu  $\theta = (s, \nabla_a f)$

și  $\cos \theta$  este maxim pentru  $\theta = 0$  adică  $s = n$  și minim pentru  $\theta = \pi$ , deci  $s = -n$ ). Rezultă că pentru  $f, a$  fixate, variațiile extreme ale lui  $f$  în  $a$  se produc pe direcția lui  $\nabla_a f$  și tocmai acest fapt stă la baza metodei gradientului pentru determinarea punctelor critice ale lui  $f$ , fără a rezolva sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Fie deci  $f \in C^1(A)$ ,  $a \in A$  și  $n_a = \nabla_a f \neq 0$ . Vom numi **traietorie de gradient pornind din  $a$**  orice drum parametrizat  $g: I \rightarrow A$  de clasă  $C^1$ , definit pe un interval centrat în origine, astfel încît

$$g(0) = a \text{ și } \forall t \in I, g'(t) = \nabla_{g(t)} f \text{ deci } g'(0) = n_a.$$

Așadar, imaginea drumului  $g$  trece prin  $a$  și este tangentă în  $a$  la vectorul  $n_a$ . Notăm  $h(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t))$ , deci

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)) \cdot g_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t)) \cdot g_n'(t)$$

Dar  $g_1'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)), \dots, g_n'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t))$  deci

$$h'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t))^2 = \|\nabla_{g(t)} f\|^2 \geq 0.$$

Așadar, funcția  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  este monoton crescătoare, adică valorile lui  $f$  cresc în lungul oricărei traietorii de gradient (și descresc în cazul cînd  $g'(0) = -n_a$ ).

**TEOREMA VI. 13.** Presupunem că  $I = (t_0, \infty)$  și că există  $\xi = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$  în  $A$ . Atunci  $\xi$  este un punct critic al lui  $f$ .

**DEMONSTRAȚIE.** În caz contrar,  $n_\xi \neq 0$ . Definim  $\forall t \in I$ ,  $h(t) = f(g(t))$  ca mai sus. Deoarece  $g(t) \rightarrow \xi$ , rezultă că  $h(t) \rightarrow f(\xi)$ . Deoarece  $\nabla f$  este continuu și  $n_\xi = \nabla_\xi f \neq 0$ , există  $m > 0$  și o vecinătate  $V$  a lui  $\xi$  astfel încît  $\forall x \in V$ ,  $\|\nabla_x f\| > m$ . Alegem  $t_1 \in I$  astfel încît  $g(t) \in V$  pentru  $t \geq t_1$ . Avem  $\forall t > t_1$ ,

$$\int_{t_1}^t h'(t) dt = h(t) - h(t_1) \text{ și cum } h'(t) = \|\nabla_{g(t)} f\|^2, \text{ rezultă}$$

$$\int_{t_1}^t h'(t) dt \geq \int_{t_1}^t m^2 dt = m^2(t - t_1).$$

Așadar,  $h(t) \geq h(t_1) + m^2(t - t_1)$  pentru orice  $t > t_1$ . Făcînd  $t \rightarrow \infty$ , ar rezulta că  $f(\xi) \geq \infty$ , absurd.

În practică, pentru a determina un punct de maxim local al funcției  $f$  se poate proceda astfel: se fixează un punct  $x_0 \in A$  suficient de aproape de  $\xi$ ; se determină  $s_0 = \nabla_{x_0} f$ . Se determină  $\lambda > 0$  astfel încît  $x_0 + \lambda s_0 \in A$  și  $f(x_0 + \lambda s_0)$  să fie maxim și fie  $\lambda_0$  valoarea găsită. Se notează  $x_1 = x_0 + \lambda_0 s_0$ ; se determină  $s_1 = \nabla_{x_1} f$ ,  $\lambda_1$  corespunde maximului lui  $f(x_1 + \lambda s_1)$ ,  $x_2 = x_1 + \lambda_1 s_1$ , ...,  $\xi = x_N$  etc. Metoda se adaptează pentru cazul minimelor.

**EXEMPLU.** Căutăm minimul funcției  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y$ , cu restricțiile  $\{x^2 - y^2 \leq 16, y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ . Evident,  $\nabla f = (2x - 4, 2y - 2)$ . Fixăm  $x_0 = (0, 0)$  deci  $s_0 = -\nabla_{x_0} f = (4, 2)$ ;  $f(x_0 + \lambda s_0) = f(4\lambda, 2\lambda) = 20\lambda^2 - 20\lambda$  și minimul este atins pentru  $\lambda = 1/2$ . Luăm  $x_1 = x_0 + \frac{1}{2}s_0 = (2, 1)$  etc. De fapt  $\xi = x_1$  este punctul căutat.

## 6. 10 exerciții

1. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul I și II ale funcției  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 y + xy^2$ .

2. Să se calculeze derivata funcției  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 - y^2$  în punctul  $(1, 1)$  după direcția  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

3. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{x^2 + y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Să se arate că:

- i)  $f$  este diferențiabilă pe  $\mathbb{R}^2$   
 ii)  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  sunt discontinue în  $(0,0)$ .

4. Fie  $P(x,y,z)$  un polinom omogen de grad  $m > 0$ . Să se arate că orice punct critic al funcției  $P$  este un zero pentru  $P$  (adică  $(x_0, y_0, z_0)$  critic implică  $P(x_0, y_0, z_0) = 0$ ).

5. Să se determine extremele funcțiilor:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, g(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

6. Dintre toate paralelipipedele dreptunghice cu volum constant 1, determinați pe cel cu aria totală a fețelor minimă.

7. Fie  $A = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3, 0 < r < +\infty, 0 < \theta < 2\pi, z \in \mathbb{R}\}$  și  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3, F = (f_1, f_2, f_3)$ ,  $f_1(r, \theta, z) = r \cos \theta, f_2(r, \theta, z) = r \sin \theta, f_3(r, \theta, z) = z$ . Să se determine  $F(A)$  arătând că  $F$  este o bijecție de clasă  $C^1$  a lui  $A$  pe  $F(A)$ .  
 Să se calculeze jacobianul lui  $F$ .

8. Fie  $M(n)$  mulțimea matricilor  $n \times n$  peste  $\mathbb{R}$ . Prin identificări naturale  $M(n) \approx \mathbb{R}^{n^2}$ . Considerăm funcția  $F: M(n) \rightarrow M(n), F(A) = AA^t$  ( $A^t$  transpusa lui  $A$ ). Arătați că  $F$  este diferențiabilă și calculați  $dF(I)$  unde  $I$  este matricea unitate.

9. a) Să se calculeze  $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  dacă  $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$  cu  $\varphi, \psi$  de clasă  $C^2$  pe  $\mathbb{R}$ .

b) Să se determine o funcție  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^2$  care să satisfacă ecuația

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x + y \text{ pe } \mathbb{R}^2$$

și  $f(x,0) = x, f(0,y) = y^2, \forall x,y \in \mathbb{R}$ .

10. Să se determine dreapta de regresie care mediază printre punctele  $M_1(1,2), M_2(2,0), M_3(3,1)$ .

#### INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Avem  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2, \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 2y, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$ .

2. Notăm  $s = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ;  $\frac{df}{ds}(1,1) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(-2) = 1 - \sqrt{3}$ .

3. i) Avem pentru  $x \neq 0, \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{x^2 \cos \frac{1}{x^2}}{x} = x \cos \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  deci  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ .

Analog  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ . Avem în continuare

$$\frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \text{ deci } df(0,0) = 0.$$

Diferențiabilitatea în celelalte puncte rezultă imediat.

$$\text{ii) } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ etc.}$$

4. Avem  $x \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + y \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) + z \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = mP(x,y,z)$  deci  $(x_0, y_0, z_0)$  critic implică

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial P}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ deci } P(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

5. De exemplu pentru funcția  $g$  obținem punctele critice rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} 3x^2 + 12y = 0 \\ 2y + 12x = 0 \\ 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

cu soluțiile  $(0,0,-1)$   $(24,-144,-1)$ . Hessiana este

$$\begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pentru  $(0,0,-1)$  se obțin valorile proprii  $2, \frac{2 \pm \sqrt{145}}{2}$  deci nu avem extrem (studiați

comportarea funcției  $g$  în jurul punctului  $(0,0,-1)$ ). Pentru  $(24,-144,-1)$  valorile proprii sunt pozitive deci punctul este de minim.

6. Sunt de determinat valorile funcției  $f(x,y,z) = xy + xz + yz, x,y,z > 0$  cu condiția  $xyz = 1$ . Scoatem  $z = \frac{1}{xy}$  și reducem problema la extremele funcției  $g(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, x,y > 0$ . Găsim punctul critic  $x = 1, y = 1$  ( $z = 1$ ). Se arată imediat că este un minim

**local.** Pentru a arăta că minimul este **global** avem  $g(1,1) = 3$  deci vom arăta că  $g(x,y) \geq 3$  pentru  $x,y > 0$ ;  $xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 3, \forall x,y > 0$ . Notînd  $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$  totul revine la a arăta că  $uv(u+v-3) + 1 \geq 0, u,v > 0$ . Pentru  $u+v > 3$  totul este clar. Rămîne de dovedit că  $uv(u+v-3) + 1 \geq 0$  pe **compactul**

$$K \subset \mathbb{R}^2, K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; u+v \leq 3, u,v \geq 0\}$$

(am pus  $u,v \geq 0$  căci pentru  $u=0$  sau  $v=0$  condiția este îndeplinită). Funcția  $h(u,v) = uv(u+v-3) + 1$  este continuă pe compactul  $K$  deci își atinge minimul pe  $K$ . Un calcul simplu arată că acest număr este  $u=1, v=1, h(1,1) = 0$  deci concluzia. În definitiv soluția problemei este **cubul**  $x=y=z=1$ .

7. Jacobianul este  $r$  etc.

8. Diferențiabilitatea funcției  $F$  rezultă imediat ( $F$  este polinomială). Putem calcula mai general

$$\begin{aligned} dF(A)(B) &= \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s \in \mathbb{R}}} \frac{F(A+sB) - F(A)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(A+sB)(A+sB)^t - AA^t}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{AA^t + sBA^t + sAB^t + s^2BB^t - AA^t}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} (BA^t + AB^t + sBB^t) = BA^t + AB^t \end{aligned}$$

Pentru  $A = I$  avem  $dF(I)(B) = B + B^t, \forall B \in M(n)$ .

9. a) 0.

b) Din  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = x+y$  deducem  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + xy + b(y)$  cu  $b$  de clasă  $C^1$ . În definitiv

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \alpha(x) + \beta(y) \text{ cu } \alpha, \beta \in C^1(\mathbb{R})$$

$$f(x,0) = \alpha(x) + \beta(0) = x, f(0,y) = \beta(y) + \alpha(0) = y^2.$$

Putem lua  $\alpha(x) = x, \beta(y) = y^2$  și obținem funcția  $f(x,y) = \frac{xy}{2}(x+y) + x + y^2$ .

10.  $y = ax + b$ . Expresia  $E(a,b) = (a+b-2)^2 + (2a+b)^2 + (3a+b-1)^2$  este minimă.

Se obține  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  (recomandăm desenul!).

## LECȚIA A VII-A

# FUNCȚII IMPLICITE, VARIETĂȚI DIFERENȚIABILE

## INTRODUCERE

În această lecție se prezintă problema funcțiilor implicite și câteva aplicații geometrice ale diferențialei funcțiilor de mai multe variabile. Ideea centrală în studiul funcțiilor implicite este deducerea proprietăților **locale** (deci în vecinătatea unui punct) ale funcțiilor diferențiabile, folosind proprietăți corespunzătoare ale diferențialei. Faptul că acest lucru este posibil justifică noțiunea de diferențiabilitate și corespunde ideii că funcțiile diferențiabile se pot "aproxima local" cu funcții liniare. În același context apare ideea de "formă canonică" pentru anumite tipuri de aplicații diferențiabile. Pe scurt, în anumite coordonate alese convenabil, unele funcții se reprezintă foarte simplu, permițînd o rapidă înțelegere a proprietăților acestor funcții.

Cadrul **varietăților diferențiabile** scufundate în spații de tip  $\mathbb{R}^n$  oferă un interesant câmp de aplicații geometrice ale ideilor enunțate mai sus, cu o tendință crescîndă de utilizare în ingineria modernă, de exemplu în studiul sistemelor dinamice neliniare.

Din punct de vedere "practic", aproximarea funcțiilor diferențiabile prin funcții liniare permite o utilizare sistematică a algebrei liniare. Este necesară familiarizarea cu noțiunile de aplicație liniară, formă pătratică, rang etc., fără de care motivarea studiului apare ca insuficientă, dacă nu inexistentă.

## 1. Funcții implicite

Reamintim că norma unei aplicații liniare  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este  $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$

și că  $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**TEOREMA VII. 1.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  un deschis și  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  o funcție diferențiabilă pe  $A$  astfel încît

$$\exists k > 0, \forall x \in A, \|df(x)\| \leq k.$$

Atunci pentru orice  $a, b \in A$  astfel încît  $[a, b] \subset A$ , avem

$$\|f(b) - f(a)\| \leq k\|b - a\|.$$

DEMONSTRAȚIE. Reamintim că  $[a, b] = \{x; x = a + t(b - a), 0 \leq t \leq 1\}$ . Definim funcția  $\Phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Phi(t) = f(a + t(b - a))$ . Aplicînd teorema de diferențiere a funcțiilor compuse, rezultă

$$\Phi'(t) = df(a + t(b - a))(b - a), 0 \leq t \leq 1$$

și folosind ipoteza se deduce că  $\|\Phi'(t)\| \leq k\|b - a\|$ , pentru orice  $0 \leq t \leq 1$ . Folosind corolarul teoremei IV. 14, rezultă

$$\|\Phi(1) - \Phi(0)\| \leq k\|b - a\|.$$

Teorema rezultă observînd că  $\Phi(1) = f(b)$  și  $\Phi(0) = f(a)$ .

**COROLAR.** Fie  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  o funcție diferențiabilă, unde  $A \subset \mathbb{R}^n$  este un deschis nevid conex. Atunci sunt echivalente următoarele afirmații:

- i)  $f$  este constantă pe  $A$ ;
- ii)  $df(x) = 0, \forall x \in A$ .

DEMONSTRAȚIE. Implicația i)  $\Rightarrow$  ii) este evidentă.

" $\Leftarrow$ " Fie  $a \in A$ . Mulțimea  $M = \{x \in A; f(x) = f(a)\}$  este nevidă și închisă în  $A$ . ( $f$  fiind diferențiabilă, este continuă). Pe de altă parte, fie  $b \in M$  și  $r > 0$  cu  $B(b, r) \subset A$ . Pentru orice  $y \in B(b, r)$ ,  $[b, y] \subset A$  și folosind teorema anterioară, deducem  $f(y) = f(b) = f(a)$ . Deci  $B(b, r) \subset M$ ,  $b$  fiind arbitrar în  $M$ . Rezultă că mulțimea  $M$  este deschisă (în  $A$ ). Deci  $M$  este nevidă, închisă și deschisă în deschisul conex  $A$ , deci  $M = A$  și  $f$  rezultă constantă.

**Comentariu.** Este remarcabil modul în care conexiunea este folosită pentru "globalizare", deci pentru "a lipi" rezultatele locale.

**Definiția VII. 1.** Fie  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  deschiși (nevizi). O aplicație  $f: A \rightarrow B$  se zice  $C^1$  - **difeomorfism** dacă este bijectivă, de clasă  $C^1$  și cu inversa de clasă  $C^1$ .

**TEOREMA VII. 2.** Dacă  $f: A \rightarrow B$  este un  $C^1$  - **difeomorfism** și  $a \in A$ , atunci  $df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  este un **izomorfism liniar**.

DEMONSTRAȚIE. Avem  $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$ ,  $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$  și aplicînd teorema de diferențiere a funcțiilor compuse rezultă (cu  $b = f(a)$ )

$$df(a) \circ df^{-1}(b) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}, df^{-1}(b) \circ df(a) = \text{id}_{\mathbb{R}^n},$$

deci  $df(a)$  este un izomorfism.

**OBSERVAȚIE.** Din cele de mai sus rezultă următorul fapt interesant: dacă  $A \subset \mathbb{R}^n$  și  $B \subset \mathbb{R}^m$  sunt deschiși și  $m \neq n$ , nu există nici un  $C^1$  - difeomorfism  $f: A \rightarrow B$  ("dimensiunea" este un **invariant** pentru difeomorfisme). În adevăr,

două spații vectoriale izomorfe au aceeași dimensiune. Un rezultat analog are loc și pentru cazul  $C^0$  (omeomorfisme), dar este mult mai dificil de demonstrat.

Teorema care urmează are o deosebită importanță în Analiza matematică și afirmă că într-un **anumit sens** teorema VII. 2 admite o reciprocă; anume

**TEOREMA VII. 3. (teorema funcției inverse).** Fie  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clasă  $C^1$  într-o vecinătate a punctului  $a \in \mathbb{R}^n$ . Dacă aplicația  $df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  este un **izomorfism liniar**, atunci există vecinătăți deschise  $V, W$  ale lui  $a$  respectiv a lui  $b = f(a)$ , astfel încît  $f(V) \subset W$  și  $f|_V: V \rightarrow W$  să fie un  $C^1$  - difeomorfism.

Înainte de a demonstra această teoremă, considerăm necesar să o comentăm puțin. Sunt de reținut următoarele:

i) Teorema are un caracter **local**. Așa se explică faptul că deși am considerat (pentru comoditatea scrisului)  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , contează comportarea funcției într-o vecinătate a punctului  $a \in \mathbb{R}^n$ .

ii) Chiar dacă  $df(x)$  este izomorfism pentru orice punct  $x$  din  $\mathbb{R}^n$ , **nu** rezultă în general că  $f$  este bijectivă (pe **imagine**). În adevăr, este suficient să considerăm exemplul:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

(deci forma **reală** a funcției  $e^z$ ).

iii) Chiar local, problema bijectivității unei funcții de clasă  $C^1$  poate fi de o considerabilă dificultate. Importanța deosebită a teoremei VII. 3 constă în aceea că reduce această problemă la problema mai simplă a bijectivității unei **aplicații liniare**. Știm că bijectivitatea unei aplicații liniare se reduce la rîndul ei la a arăta că **un număr**, anume determinantul acelei aplicații, este **nenul**.

DEMONSTRAȚIE. Vom face această demonstrație în cîteva etape.

1) Putem presupune că  $df(a) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ . În adevăr notînd  $df(a) = T$ , este clar că pentru  $g = T^{-1} \circ f$  avem  $dg(a) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$  și demonstrînd teorema pentru  $g$  o vom avea și pentru  $f$  căci  $T$  este un izomorfism liniar (și deci un  $C^1$  - difeomorfism!). Vom presupune că  $df(a) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ .

2) Există  $\delta > 0$  astfel încît  $f$  este  $C^1$  pe  $B(a, \delta)$ ,  $df(x)$  izomorfism și

$$(*) \quad \frac{1}{2} \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{3}{2} \|x - y\|, \forall x, y \in B(a, \delta).$$

În adevăr considerăm aplicația  $h = f - \text{id}_{\mathbb{R}^n}$  care este de clasă  $C^1$  într-o vecinătate a lui  $a$  și  $dh(a) = 0$ . Există deci  $\delta > 0$  astfel încît  $h$  este  $C^1$  pe

$B(a, \delta)$  și  $\|dh(x)\| \leq 1/2$  pentru orice  $x \in B(a, \delta)$ . Aplicăm teorema VII. 1 funcției  $h$  și deducem

$$\|f(x) - f(y) - (x - y)\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|, \forall x, y \in B(a, \delta),$$

din care rezultă imediat (\*).

3) Din prima inegalitate (\*) rezultă că  $f$  este **injectivă** pe  $B(a, \delta)$ . În adevăr din  $f(x) = f(y)$  rezultă imediat  $x = y$ . Mai mult, pentru orice  $0 < r < \delta$

$$f(B(a, r)) \subset B(b, \frac{3}{2}r) \quad (\|x - a\| < r \Rightarrow \|f(x) - b\| \leq \frac{3}{2} \|x - a\| < \frac{3}{2}r).$$

4) Punctul decisiv și cel mai dificil al demonstrației constă în a arăta că

$$\forall 0 < r < \delta, f(B(a, r)) \supset B(b, r/2)$$

Deci trebuie să arătăm că ecuația  $f(x) = z$  are soluție (unică)  $x \in B(a, r)$  pentru orice  $z \in B(b, r/2)$ .

Vom aplica principiul contracției (teorema III. 2). Fie  $0 < r < \delta$  și să notăm  $X = B(a, r)$ .  $X$  este un spațiu metric **complet**. Să considerăm pentru  $z \in B(b, r/2)$

$$F: X \rightarrow X, F(x) = -f(x) + x + z.$$

Este clar că  $F(x) = x \Leftrightarrow f(x) = z$  (pentru a arăta că  $F(X) \subset X$  avem

$$\|F(x) - a\| = \|-f(x) + b + x - a + z - b\| \leq \frac{1}{2} \|x - a\| + \|z - b\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r).$$

Pentru a arăta că  $F$  este contracție observăm că

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\| \quad \text{din (*)}$$

deci  $F$  are un **punct fix unic**  $x \in B(a, r)$  (căci  $\|F(x) - a\| < r$  așa cum am arătat mai sus) deci ecuația  $f(x) = z$  are soluție **unică** în  $B(a, r)$  pentru  $z \in B(b, r/2)$ .

5) Vom lua  $W = B(b, \delta/3)$ ,  $V = f^{-1}(W) \cap B(a, \delta)$  și  $f|_V$  va fi bijectivă de la  $V$  pe  $W$ .

6) Rămâne de arătat că inversa lui  $f|_V$  este de clasă  $C^1$  pe  $W$ . Să notăm această inversă cu  $\phi$ . Este clar că prima inegalitate (\*) arată **continuitatea** lui  $\phi$ . Pentru a arăta că  $\phi$  este  $C^1$  pe  $W$  se verifică folosind continuitatea că  $\forall x \in V$   $df^{-1}(x)$  satisface condiția din definiția diferențiabilității pentru  $\phi$  în punctul  $f(x)$ . Nu mai intrăm în amănunte. Continuitatea derivatelor parțiale ale lui  $\phi$  rezultă apoi imediat din teorema diferențialei funcțiilor compuse. Teorema VII. 3 este complet demonstrată.

În cele ce urmează, vom aplica teorema VII.3.a funcției inverse la studiul problemei funcțiilor implicite. Fie  $A \subset \mathbb{R}^2$  un deschis (nevid) și  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  o funcție de clasă  $C^1$ . Mulțimea  $Z_f = \{(x, y) \in A; f(x, y) = 0\}$  este **curba plană**

definită de  $f$ . Studiul curbelor plane prezintă un deosebit interes (este suficient să amintim cazul conicelor, grafica pe calculator etc.). Apare astfel ca foarte importantă înțelegerea "structurii" mulțimii  $Z_f$ , atât analitic cât și geometric.

EXEMPLU.

$$a) f(x, y) = x^4 + y^4 + 1$$

$$Z_f = \emptyset$$

$$b) f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$Z_f = \{(0, 0)\}$$

$$c) f(x, y) = y - x^2$$

$$Z_f = \{(x, y); y = x^2\}$$

deci  $Z_f$  este graficul funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2$  (parabola).

Observăm din aceste simple exemple că structura mulțimilor  $Z_f$  poate fi destul de diferită (în cazul general, mult mai complicată). Un alt mod de a pune problema este acela de a considera ecuația  $f(x, y) = 0$  și a încerca să "o rezolvăm" în sensul de a obține de exemplu  $y$  ca funcție de  $x$ ; din dependența implicită a variabilelor  $x$  și  $y$  să putem (cel puțin teoretic) "explicita"  $y$  ca funcție de  $x$  (deci de a reprezenta mulțimea soluțiilor ecuației  $f(x, y) = 0$  ca un grafic).

Fie  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  identificat natural cu  $\mathbb{R}^{n+m}$ , folosim notația  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  (desigur  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)$ ). Pentru o funcție diferențiabilă  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , notată  $f(x, y)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$ , vom nota pe scurt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x, y) \end{vmatrix}$$

Are loc următoarea importantă teoremă

**TEOREMA VII. 4. (teorema funcțiilor implicite).** Fie  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  o aplicație de clasă  $C^1$  în vecinătatea punctului  $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , astfel încât:

i)  $f(a, b) = 0$ ;

ii)  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ .

Atunci există mulțimi deschise  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $B \subset \mathbb{R}^m$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$  și o unică funcție  $g: A \rightarrow B$  ( $g(a) = b$ ) astfel încât  $g \in C^1(A)$  și pe  $A \times B$ , avem  $f(x, y) = 0$  dacă și numai dacă  $y = g(x)$ ,  $\forall x \in A$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Considerăm funcția  $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,  $F = (F_1, \dots, F_{n+m})$ , definită astfel:

$$F_1(x, y) = x_1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$F_n(x, y) = x_n$$

$$F_{n+1}(x, y) = f_1(x, y)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$F_{n+m}(x, y) = f_m(x, y)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_m), f = (f_1, \dots, f_m).$$

Este clar că  $F$  este de clasă  $C^1$  în vecinătatea punctului  $(a, b)$ ,  $F(a, b) = (a, 0)$ .

Funcția  $F$  verifică ipotezele teoremei funcției inverse în  $(a, b)$ . În adevăr

$$\frac{D(F_1, \dots, F_{n+m})}{D(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)}(a, b) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(a, b) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(a, b) \end{vmatrix}$$

deci este egal cu  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  și nenul, prin ipoteză.

Există deci o vecinătate deschisă a punctului  $(a, b)$  pe care o putem presupune de forma  $A \times B$  (cu  $A$  deschisă în  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in A$ ,  $B$  deschisă în  $\mathbb{R}^m$ ,  $b \in B$ ) astfel încît  $F|_{A \times B} : A \times B \rightarrow W$  este un  $C^1$ -difeomorfism. Avînd în vedere definiția funcției  $F$  rezultă că  $F^{-1}(x, y) = (x, h(x, y))$  cu  $h$  de clasă  $C^1$ . Deducem că  $f(x, h(x, y)) = y$  pentru orice  $(x, y) \in W$  ( $F$  și  $F^{-1}$  sunt inverse una alteia!). În particular,  $f(x, h(x, y)) = y$  pentru orice  $x \in A$  și putem lua  $g(x) = h(x, 0)$ . Verificarea amănunțită a faptului că  $g$  satisface toate concluziile teoremei o lăsăm în seama cititorului.

Vom arăta că derivatele parțiale ale funcției  $g$  mai sus definite pot fi calculate cu ușurință (chiar dacă  $g$  este din punct de vedere **practic** greu de obținut). În adevăr, cu notațiile și ipotezele teoremei VII. 4, avem

$$\begin{aligned} f_1(x, g(x)) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_m(x, g(x)) &= 0 \end{aligned} \quad \forall x \in A$$

Pentru orice  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , obținem derivînd relațiile de mai sus în raport cu  $x_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x, g(x)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(x, g(x)) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \quad \forall x \in A$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x, g(x)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_m}{\partial y_k}(x, g(x)) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x) = 0$$

Pentru  $j$  fixat,  $x = a$ ,  $g(x) = b$ , interpretăm relațiile de mai sus ca un sistem liniar cu necunoscutele  $\frac{\partial g_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial g_m}{\partial x_j}(a)$ . Determinantul acestui sistem este  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$  și sistemul are soluție unică, ce poate fi obținută prin formulele lui Cramer.

EXEMPLU.  $n = m = 1$ ,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^1$   $f(a, b) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$  atunci

$$\text{există } g \text{ ca în teoremă și } g'(a) = - \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right) / \left( \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right).$$

Într-adevăr, derivăm în raport cu  $x$ , identitatea  $f(x, g(x)) = 0$ ; se obține:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot g'(x) = 0 \text{ și înlocuim } x = a, b = g(a).$$

OBSERVAȚIE. Teorema VII. 4 are un caracter local. De exemplu, ecuația

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ în } \mathbb{R}^2 \text{ are în } [-1, 1] \text{ soluțiile } y = \pm \sqrt{1 - x^2}. \text{ Pentru } a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

soluția este unică,  $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , în vecinătatea punctului  $a$ .

Remarcăm că dacă în teoremele VII. 3, VII. 4 funcțiile din ipoteză sunt de clasă  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), atunci în VII. 3 se obține un difeomorfism de clasă  $C^k$ , iar în VII. 4, soluția  $g$  este tot de clasă  $C^k$ .

## 2. Teorema rangului. Dependență funcțională

**Definiția VII. 2.** Dacă aplicația  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este diferențiabilă în punctul  $a \in \mathbb{R}^n$ , se numește **rangul lui  $f$  în  $a$** , rangul aplicației liniare  $df(a)$ .

Are loc următorul rezultat important:

**TEOREMA VII. 5. (teorema rangului).** Fie  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clasă  $C^1$  în vecinătatea unui punct  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $b = f(a)$ . Presupunem că rangul lui  $f$  este constant, egal cu  $k$ , pe o vecinătate a lui  $a$ . Atunci există o vecinătate  $U$  a lui  $a$ , o vecinătate  $V$  a lui  $b$ , cu  $f(U) \subset V$ , precum și vecinătăți  $U_1, V_1$  ale originii din  $\mathbb{R}^n$  și respectiv din  $\mathbb{R}^m$ , astfel încît să avem o diagramă comutativă de

forma dată mai jos unde  $\varphi, \psi$  sunt difeomorfisme,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\psi(b) = 0$  și

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0).$$

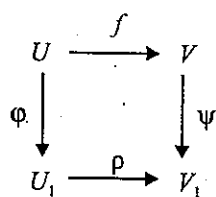


Fig. VII. 1.

**Comentariu.** Intuitiv, teorema se poate formula astfel: dacă aplicația  $f$  are un rang constant  $k$ , atunci pînă la schimbări de coordonate,  $f$  coincide cu aplicația  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Putem presupune fără a scădea generalitatea că  $a = 0$ ,  $b = 0$ . Cum  $f$  are un rang constant  $k$  pe o vecinătate a lui  $a = 0$ , matricea  $J_f(0)$  conține un  $k \times k$  **minor nenul**. Se poate presupune că acest minor este chiar

$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) \right)$ ,  $1 \leq i, j \leq k$ , unde  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . (În adevăr totul revine la o numerotare a coordonatelor ceea ce este o schimbare de coordonate!). Cum  $f \in C^1$  minorul  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)$  e **nenul** pentru  $x$  într-o vecinătate a lui  $0$ .

Să definim în această vecinătate a originii funcția  $\varphi$  prin formula

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x), \dots, f_k(x), x_{k+1}, \dots, x_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n);$$

$\varphi$  are valori în  $\mathbb{R}^n$ . Un calcul **imediat** arată că  $\det J_\varphi = \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq k} \neq 0$  în

vecinătatea respectivă. Conform teoremei funcției inverse  $\varphi$  e un difeomorfism într-o vecinătate a lui  $0$  pe o vecinătate a lui  $\varphi(0) = 0$ . Avem deci o diagramă comutativă cu  $\varphi$  - difeomorfism:

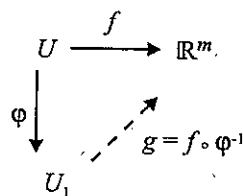


Fig. VII. 2.

Vom presupune  $U$  suficient de mică pentru ca  $f$  să aibă rang constant  $k$  pe  $U$ . Să considerăm aplicația  $g = f \circ \varphi^{-1}$ . Pentru a înțelege mai bine definiția aplicației  $g$ , scriem pe elemente:

$$\begin{array}{ccc} (x_1, \dots, x_n) & \xrightarrow{f} & (f_1(x), \dots, f_m(x)) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow g \\ (f_1(x), \dots, f_k(x), x_{k+1}, \dots, x_n) & & \\ \parallel & & \\ (z_1, \dots, z_n) & & \\ \text{deci } z = (z_1, \dots, z_n) & \xrightarrow{g} & (z_1, \dots, z_k, g_{k+1}(z), \dots, g_m(z)). \end{array}$$

Este clar că matricea jacobiană a lui  $g$  va arăta astfel

$$J_g(z) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & & \\ & & & A(z) \end{pmatrix} \quad \text{unde } A(z) = \left( \frac{\partial g_j}{\partial z_i} \right); \quad k+1 \leq j \leq m, \quad k+1 \leq i \leq n.$$

Punctul decisiv constă în observația că din cauză că pe  $U$  rangul lui  $f$  e constant  $k$  și  $\varphi$  e difeomorfism, rangul lui  $g$  pe  $U_1$  e constant  $k$  și deci  $A(z)$  e nulă pe  $U_1$ , adică

$$(*) \quad \frac{\partial g_j}{\partial z_i} = 0; \quad k+1 \leq j \leq m, \quad k+1 \leq i \leq n.$$

Să definim acum în vecinătatea lui  $0 \in \mathbb{R}^m$  aplicația

$$\psi(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_k, y_{k+1} - g_{k+1}(y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0), \dots, y_m - g_m(y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0))$$

Avem:

$$J_\psi(y) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deci  $\psi$  e un difeomorfism local în jurul lui  $0$  în  $\mathbb{R}^m$ . Să observăm că

$$\psi \circ g(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_k, g_{k+1}(z) - g_{k+1}(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0), \dots, g_m(z) - g_m(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)).$$

Folosind (\*) deducem că într-o vecinătate suficient de mică a lui  $z = 0$ ,

$$g_{k+1}(z) = g_{k+1}(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0) \dots g_m(z) = g_m(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0).$$

Renotînd  $U, U_1, V, V_1$  vecinătățile corespunzătoare (cu restrîngere eventuală), rezultă că  $\psi \circ g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  se comportă astfel:

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0),$$

ceea ce era de dovedit.

Reamintim că dacă  $f: V \rightarrow W$  este o aplicație liniară între două spații vectoriale reale finit dimensionale ( $\dim V = n, \dim W = m$ ), atunci **rangul**  $r$  al lui  $f$  este dimensiunea imaginii lui  $f$  și coincide cu rangul matricii asociate lui  $f$  relativ la o pereche oarecare de baze în spațiile  $V$  și  $W$ . Totodată  $r = \dim(\text{Im} f) = n - \dim(\text{Ker} f)$ ; unde  $\text{Ker} f = f^{-1}(0)$ . Evident,  $f$  este surjectivă  $\Leftrightarrow r = m$  și  $f$  este injectivă  $\Leftrightarrow r = n$ .

În cele ce urmează, dăm cîteva cazuri particulare ale teoremei rangului:

1) Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  un deschis și  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $m \geq n$ ) o aplicație de clasă  $C^1$ . Dacă rangul lui  $f$  este constant, egal cu  $n$  (adică diferențiala  $df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este injectivă), atunci există vecinătăți așa cum se indică în teorema rangului astfel încît  $p(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$  este inecția canonică.

2) Dacă  $m \leq n$  și rangul lui  $f$  este constant egal cu  $m$  (deci  $df(a)$  este surjectivă), atunci  $p(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ .

3) Combinînd cazurile 1), 2) și presupunînd că  $m = n$  și că  $df(a)$  este un izomorfism, rezultă că  $p$  este aplicația identică a lui  $\mathbb{R}^n$ .

Revenim la cazul general și presupunem că  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  este o aplicație de clasă  $C^1$  pe un deschis  $A \subset \mathbb{R}^n$  și fie  $a \in A$ . În cazul cînd aplicația  $df(a)$  este injectivă, se spune că  $f$  este o **imersie** în punctul  $a$ . Dacă  $df(a)$  este surjectivă, se spune că  $f$  este o **submersie** în  $a$ . Aplicația  $f$  este numită imersie (respectiv submersie) pe  $A$  dacă este astfel în orice punct din  $A$ .

**OBSERVAȚIE.** Dacă  $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$  deschis,  $f \in C^1(A)$  și dacă rangul lui  $f$  în  $a \in A$  este  $k$ , atunci există o vecinătate  $V$  a lui  $a$  pe care rangul lui  $f$  este  $\geq k$  (adică în vecinătatea lui  $a$  rangul tinde să crească). În adevăr, în matricea  $J_f(a)$  există un minor de ordin  $k$  nenul. Prin continuitate acest lucru se întîmplă pe o vecinătate a lui  $a$  deci rangul lui  $f$  în fiecare punct din vecinătatea respectivă este cel puțin  $k$ .

**Definiția VII. 3.** Funcțiile  $f_1, \dots, f_m: A \rightarrow \mathbb{R}$  ( $A \subset \mathbb{R}^n, A$  deschis) de clasă  $C^1$  se zic **independente** pe  $A$  dacă rangul aplicației  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m, f = (f_1, \dots, f_m)$  este  $m$  în fiecare punct din  $A$ .

Să remarcăm că independența funcțiilor  $f_1, \dots, f_m$  pe  $A$  revine la liniar independența formelor liniare  $df_1(x), \dots, df_m(x)$  în orice punct  $x \in A$  sau, ceea ce

este echivalent, la faptul că  $f = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbb{R}^m$  este **submersie** în orice punct din  $A$ .

Următoarea teoremă justifică terminologia de mai sus.

**TEOREMA VII. 6. (relativ la dependența funcțională).** Fie  $f_1, \dots, f_m$  de clasă  $C^1$  și independente pe deschisul (nevid)  $A \subset \mathbb{R}^n$  și  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^1$  astfel încît să existe funcții  $\lambda_1, \dots, \lambda_m: A \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că

$$dg(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) df_i(x), \quad \forall x \in A.$$

Atunci pentru orice  $a \in A$  există o vecinătate  $U$  a lui  $a$  în  $A$ , o vecinătate  $V$  a lui  $b = f(a)$  ( $f = (f_1, \dots, f_m)$ ) în  $\mathbb{R}^m$  și o funcție  $\theta: V \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încît

$$g(x) = \theta(f_1(x), \dots, f_m(x)), \quad \forall x \in U$$

(adică  $g = \theta \circ f$  pe  $U$ ).

**DEMONSTRAȚIE.** Dacă  $f_1 = \pi_1, \dots, f_m = \pi_m$  sunt proiecțiile canonice, atunci teorema revine la faptul că dacă  $\frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = 0, k = m+1, \dots, n$  într-o vecinătate

a lui  $a \in \mathbb{R}^n$ , atunci  $g = g(x_1, \dots, x_m)$  într-o vecinătate a lui  $a$  ( $g$  nu depinde de  $x_{m+1}, \dots, x_n$  în vecinătatea lui  $a$ ) ceea ce este aproape evident.

Revenind la cazul general, din condițiile puse, rezultă că  $f = (f_1, \dots, f_m)$  este **submersie** în orice punct din  $A$ . Este ușor de văzut că atât ipotezele teoremei cît și concluzia se conservă prin  $C^1$  - difeomorfisme. Dar forma canonică a submersiilor este exact  $(\pi_1, \dots, \pi_m)$  ca mai sus, ceea ce demonstrează teorema.

**COROLAR.** Fie  $f_k(x_1, \dots, x_n), 1 \leq k \leq m$  funcții de  $n$  variabile ( $n \geq m$ ) de clasă  $C^1$  pe un deschis  $A \subset \mathbb{R}^n$ , cu valori reale. Dacă rangul matricii jacobiene a lui  $f = (f_1, \dots, f_m)$  este constant  $r$ , atunci funcțiile  $f_1, \dots, f_m$  satisfac local  $m - r$  relații funcționale (într-un sens care va fi precizat).

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $\forall a \in A$  fixat și presupunem că

$$\frac{D(f_1, \dots, f_r)}{D(x_1, \dots, x_r)} \neq 0$$

într-o vecinătate a lui  $a$  (ceea ce se obține prin reordonarea eventuală a lui  $f_1, \dots, f_m$  și  $x_1, \dots, x_n$ ). Linile  $r+1, \dots, m$  ale matricii jacobiene a lui  $f$  sunt combinații liniare de primele  $r$  linii și rezultă relații de forma

$$df_i = \sum_{j=1}^r \lambda_{ij} \cdot df_j, \quad r+1 \leq i \leq m.$$

Conform teoremei VII. 6, există funcții  $\theta_{r+1}, \dots, \theta_m$  de  $r$  variabile astfel încît  $f_i = \theta_i(f_1, \dots, f_r)$  pentru  $r+1 \leq i \leq m$ , în vecinătatea lui  $a$ . Se obțin astfel  $m - r$

relații între funcțiile  $f_1, \dots, f_m$ .

**EXEMPLUL 1.** Funcțiile  $f_1(x, y) = \sin xy$ ,  $f_2(x, y) = \cos xy$  sunt dependente funcțional, deoarece rangul matricii lor jacobiene este 1; dealtfel,  $f_1^2 + f_2^2 = 1$  în  $\mathbb{R}^2$ .

**EXEMPLUL 2.**

Fie  $f_1(x, y, z) = x + y + z$ ,  $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  și  $f_3(x, y, z) = xy + yz + zx$ . Matricea jacobiană are rangul 2 deci  $f_1, f_2, f_3$  satisfac în vecinătatea oricărui punct o relație funcțională ( $m = n = 3$ ,  $r = 2$ ); dealtfel  $f_2 = f_1^2 - 2f_3$  deci punând  $\theta(y_1, y_2) = y_1^2 - 2y_2$ , rezultă că  $f_2 = \theta(f_1, f_3)$ .

### 3. Varietăți diferențiabile

**Definiția VII. 4.** Fie  $D \subset \mathbb{R}^n$  un deschis. O aplicație  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  se numește **netedă** dacă toate cele  $m$  componente sunt de clasă  $C^\infty(D)$ . Dacă  $X \subset \mathbb{R}^n$  este o mulțime oarecare, o aplicație  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$  se zice **netedă**, dacă  $\forall x \in X$  există o vecinătate deschisă  $U$  a lui  $x$  în  $\mathbb{R}^n$  și o aplicație  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  netedă, astfel încât  $F|_{U \cap X} = f$ .

Proprietatea unei funcții de a fi netedă este locală (adică este suficient de verificat în vecinătatea oricărui punct fixat). O aplicație  $f: X \rightarrow Y$ , ( $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$ ) se zice **netedă** dacă aplicația  $X \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \mapsto f(x)$  este netedă. Compunerea a două funcții netede este netedă. O aplicație  $f: X \rightarrow Y$  ( $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$ ) se zice un **difeomorfism** dacă este bijectivă și  $f, f^{-1}$  sunt netede.

**Definiția VII. 5.** O submulțime  $X \subset \mathbb{R}^N$  se numește **varietate diferențiabilă netedă de dimensiune  $n$**  dacă  $\forall x \in X$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x$  în  $X$  și un difeomorfism  $\varphi: U \rightarrow V$ , cu  $U$  deschis în  $\mathbb{R}^n$ . Aplicația  $\varphi$  se mai numește **parametrizare** a lui  $V$ ,  $\varphi^{-1}$  se numește **sistem de coordonate** iar perechea  $(U, \varphi^{-1})$  se numește **hartă** a lui  $X$ . Componentele lui  $\varphi^{-1}$  se mai numesc **funcții de coordonate**.

Dacă  $\varphi: U \rightarrow V$  este o parametrizare locală în  $x$ , atunci pentru orice difeomorfism  $f: U' \rightarrow U$ ,  $\varphi \circ f$  este de asemenea o parametrizare locală în  $x$ . Dacă  $\psi_1: V_1 \rightarrow U_1$ ,  $\psi_2: V_2 \rightarrow U_2$  sunt sisteme de coordonate locale în  $x$ , atunci  $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}: \psi_1(V_1 \cap V_2) \rightarrow \psi_2(V_1 \cap V_2)$  este un difeomorfism (numit schimbare locală de coordonate). De aici rezultă că dimensiunea unei varietăți este neambiguă (difeomorfismele între deschiși invariază dimensiunea).

Dăm în continuare exemple de varietăți.

**EXEMPLUL 1.**  $\mathbb{R}^n$  este o varietate netedă  $n$  - dimensională (parametrizată prin

aplicația identică). Similar, orice deschis nevid  $D \subset \mathbb{R}^n$  este o varietate  $n$  - dimensională. Mai general, dacă  $X$  este o varietate netedă  $n$  - dimensională, atunci orice deschis nevid al lui  $X$  este la fel.

**EXEMPLUL 2.** Fie  $V$  un spațiu vectorial  $n$  - dimensional,  $V \subset \mathbb{R}^N$ . Atunci  $V$  este o varietate netedă  $n$  - dimensională difeomorfă cu  $\mathbb{R}^n$ . În adevăr, alegem o bază  $e_1, \dots, e_n$  în  $V$ . Aplicația  $\mathbb{R}^n \rightarrow V$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  este un difeomorfism.

**EXEMPLUL 3.** Orice mulțime dintr-un spațiu  $\mathbb{R}^N$ , difeomorfă cu o varietate netedă  $n$  - dimensională este o varietate netedă  $n$  - dimensională. În adevăr, fie  $f: X \rightarrow Y$  un difeomorfism și  $X$  o varietate. Dacă  $\varphi: U \rightarrow V$  este o parametrizare locală în  $x \in X$ , atunci  $f \circ \varphi$  va fi o parametrizare locală a lui  $Y$  în  $f(x)$ . Ca o aplicație a acestui fapt, rezultă că dacă  $X \subset \mathbb{R}^N$  și  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție netedă, atunci  $X$  și graficul  $G_f$  al lui  $f$  sunt difeomorfe, prin aplicația  $X \rightarrow G_f$ ,  $x \mapsto (x, f(x))$ .

**EXEMPLUL 4.** O mulțime local difeomorfă cu o varietate netedă  $n$  - dimensională este de asemenea o varietate  $n$  - dimensională. De aici rezultă următoarea clasă de exemple: Fie  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  o aplicație netedă astfel încât  $dF(a)$  are rang maxim în orice punct  $a \in \mathbb{R}^n$ . Atunci mulțimea  $X = F^{-1}(0)$ , presupusă nevidă este o varietate  $(n - 1)$  - dimensională. Pentru demonstrație se utilizează teorema funcțiilor implicite. Rezultatul se extinde la aplicații netede  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $n \geq m$ ), de rang maxim.

**CAZURI PARTICULARE.**

- curbele plane netede (pentru  $n = 2$ ,  $m = 1$ )
- suprafețele netede în spațiu (pentru  $n = 3$ ,  $m = 1$ )
- curbele netede în spațiu (pentru  $n = 3$ ,  $m = 2$ )
- sfera unitate  $n$  - dimensională  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

(luând  $F(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1$ ).

**EXEMPLUL 5.** Dacă  $X$  este o varietate netedă de dimensiune  $n$  și  $Y$  o varietate netedă de dimensiune  $m$ , atunci produsul cartezian  $X \times Y$  este o varietate netedă de dimensiune  $m + n$ . Demonstrația este imediată. Dacă  $S^1$  este cercul unitate în plan, atunci cilindrul  $S^1 \times \mathbb{R}$  este o varietate netedă de dimensiune 2. Similar torul  $S^1 \times S^1$  este o varietate 2 - dimensională.

### 4. Spațiu tangent, câmp de vectori

Fie  $X$  o varietate netedă de dimensiune  $n$  în  $\mathbb{R}^N$ ,  $x \in X$  și  $\varphi: U \rightarrow X$  o parametrizare locală în  $x$ . Aplicația  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^N$  este netedă și fie  $a \in X$  astfel încât  $\varphi(a) = x$ . În aceste condiții se poate considera diferențiala  $d\varphi(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ .

**Definiția VII. 6.** Se numește **spațiu tangent la varietatea  $X$  în punctul  $x$** , imaginea aplicației  $d\phi(a)$ ; el este notat  $T_x(X)$ .

Așadar,  $T_x(X) = \text{Im } d\phi(a)$  este subspațiu vectorial real al lui  $\mathbb{R}^N$ .

**TEOREMA VII. 7.** Această definiție este corectă (în sensul că spațiul  $T_x(X)$  nu depinde de parametrizarea locală  $\phi$ ).

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $(U', \phi')$  o altă parametrizare și  $b \in U'$  ales cu  $\phi'(b) = x$ . Restrângînd  $U$  și  $U'$ , putem presupune că  $\phi(U) = \phi'(U')$  și că avem o diagramă comutativă de forma

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^N \\ \theta \downarrow & & \nearrow \\ U' & \xrightarrow{\phi'} & \end{array}$$

unde  $\theta$  este un difeomorfism,  $\theta(a) = b$ . Așadar,  $\phi(a) = \phi'(b) = x$  și  $\phi' \circ \theta = \phi$ . Trecînd la diferențiale și aplicînd teorema VI. 6, rezultă  $d\phi(a) = d\phi'(b) \circ d\theta(a)$ , cu  $d\theta(a)$  izomorfism. De aici rezultă că  $\text{Im } d\phi(a) = \text{Im } d\phi'(b)$ , ceea ce încheie demonstrația.

**OBSERVAȚIE.**  $x + T_x(X) = \{x + v \mid v \in T_x(X)\}$  este numit **spațiul tangent geometric (sau afin)** la varietatea  $X$  în punctul  $x$ .

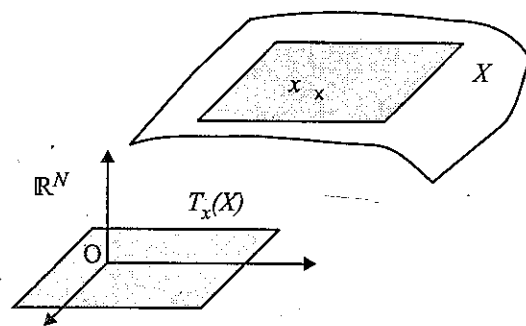


Fig. VII. 3.

Un **vector tangent** la  $X$  în  $x$  este o pereche  $(x, v)$  cu  $v \in T_x(X)$ . În acest mod, spațiile tangente la  $X$  în puncte  $x, y$  distincte ale varietății  $X$ , sunt disjuncte. Deși  $T_x(X)$  și  $T_y(X)$  au intersecție nevidă, nu există vectori tangenți simultan la  $X$  în  $x$  și în  $y$ .

**TEOREMA VII. 8.** Dacă  $X$  este o varietate netedă de dimensiune  $n$ , atunci pentru orice  $x \in X$ , avem  $\dim_{\mathbb{R}} T_x(X) = n$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $\phi : U \rightarrow X$  o parametrizare în  $x$ ,  $\phi(a) = x$ , cu  $a \in U$  și  $W$  un deschis în  $\mathbb{R}^N$  astfel încît pe  $W$  este definită aplicația  $\Phi$  care extinde  $\phi^{-1}$ .

Atunci  $\Phi \circ \phi$  este  $1_U$  ( $\Phi$  are imaginea în  $\mathbb{R}^n$ ), iar compunerea

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{d\phi(a)} T_x(X) \xrightarrow{d\Phi(x)} \mathbb{R}^n$$

este aplicația identică a lui  $\mathbb{R}^n$ . Rezultă că  $d\phi(a)$  este injectivă. Deoarece  $T_x(X) = \text{Im } d\phi(a)$ , rezultă că  $d\phi(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x(X)$  este un izomorfism și că atare,  $\dim_{\mathbb{R}} T_x(X) = n$ .

**OBSERVAȚIE.** Dacă  $\{e_1, \dots, e_n\}$  este baza canonică a lui  $\mathbb{R}^n$ , atunci cu notațiile din definiția VII. 6, vectorii  $\partial_{ix} = d\phi(a)(e_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , formează o bază pentru  $T_x(X)$ , numită **bază mobilă**.

**EXEMPLUL 1.** Fie  $X = \mathbb{R}^n$ . Pentru orice  $x \in X$ , avem  $T_x \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ . Astfel un vector tangent în  $x$  la  $\mathbb{R}^n$  este o pereche  $(x, v)$  cu  $v \in \mathbb{R}^n$ .

**EXEMPLUL 2.** Dacă  $V \subset \mathbb{R}^N$  este un spațiu vectorial real de dimensiune  $n$ , atunci folosind parametrizarea  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ , pentru o bază fixată a lui  $V$ , rezultă că  $T_x(V) = V$ ,  $\forall x \in V$ .

**EXEMPLUL 3.** Ne propunem să determinăm spațiul tangent la

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

într-un punct  $M = (a, b) \in S^1$ . Presupunem  $b > 0$  deci  $b = \sqrt{1 - a^2}$  și folosim

parametrizarea  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\phi(x) = (x, \sqrt{1 - x^2})$ , unde  $U = (-1, 1)$ ;  $\phi(a) = M$ . Diferențiala  $d\phi(a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  este aplicația

$$d\phi(a)(u) = \left( u, -\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} u \right) = \left( u, -\frac{a}{b} u \right)$$

și  $T_{(a,b)} S^1 = \text{Im } d\phi(a) =$  spațiul 1-dimensional al vectorilor  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  cu  $v = -\frac{a}{b} u$ . Recunoaștem aici vectorii perpendiculari pe OM. Dacă  $M = (1, 0)$ ,

considerăm parametrizarea

$$\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^2, \psi(y) = (\sqrt{1 - y^2}, y), \psi(0) = M \text{ și } V = (-1, 1).$$

În acest caz,  $d\psi(0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  este aplicația  $d\psi(0)(u) = (0, u)$ , deci  $\text{Im } d\psi(0)$  este formată din vectori paraleli cu axa Oy etc. Se constată că în toate cazurile,  $T_M S^1$  este subspațiul lui  $\mathbb{R}^2$  format din vectorii perpendiculari pe dreapta OM, adică subspațiul lui  $\mathbb{R}^2$  generat de vectorul  $(-b, a)$ .

**TEOREMA VII. 9.** Fie  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \leq N$  o aplicație netedă de rang maxim  $m$ . Atunci  $X = F^{-1}(0)$  este o varietate netedă de dimensiune  $n = N - m$  și pentru orice  $x \in X$ ,  $T_x(X) = \text{Ker } dF(x)$ .

DEMONSTRAȚIE. Fie  $\varphi : U \rightarrow X$  o parametrizare,  $a \in U$  și  $\varphi(a) = x$ . Avem  $F \circ \varphi = 0$  (aplicația nulă pe  $U$ ) deci  $d(F \circ \varphi)(a) = 0$  și ca atare,  $dF(x) \circ d\varphi(a) = 0$ . Rezultă că  $\text{Im } d\varphi(a) \subset \text{Ker } dF(x)$  adică  $T_x(X) \subset \text{Ker } dF(x) \subset \mathbb{R}^N$ .

Din algebra liniară se cunosc următoarele rezultate:

- dacă  $u : V \rightarrow W$  este o aplicație liniară între două spații vectoriale cu  $\dim V < \infty$ , atunci  $\dim \text{Im } u = \dim V - \dim \text{Ker } u$ .

- dacă  $W_1 \subset W_2 \subset V$  sunt două subspații vectoriale ale unui spațiu vectorial finit dimensional  $V$  și dacă  $\dim W_1 = \dim W_2$  atunci  $W_1 = W_2$ .

Revenind la situația anterioară, rezultă

$$m = \dim \text{Im } dF(x) = N - \dim \text{Ker } dF(x)$$

deci  $\dim \text{Ker } dF(x) = N - m$ . Dar  $\dim T_x(X) = n = N - m$ , conform teoremei VII. 8. În definitiv, rezultă că  $T_x(X) = \text{Ker } dF(x)$ .

EXEMPLU. Fie aplicația  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . În acest caz  $F^{-1}(0) = S^1$  și pentru orice  $(a, b) \in S^1$ ,  $dF(a, b) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(u, v) \mapsto 2au + 2bv$ . Ca atare  $T_{(a,b)}S^1 = \text{Ker } dF(a, b) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 2au + 2bv = 0\} = \text{subspațiul lui } \mathbb{R}^2 \text{ generat de vectorul } (-b, a)$ . Regăsim astfel rezultatul din exemplul 3.

**Definiția VII. 7.** Fie  $X$  o varietate netedă. A da un **cîmp de vectori**  $v$  pe un deschis  $U \subset X$  revine la a asocia oricărui punct  $x \in U$  un vector tangent  $v(x) \in T_x(X) = T_x(U)$ .

Dacă  $v, w$  sunt două cîmpuri de vectori pe  $U$  și dacă  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție netedă, atunci se definesc cîmpurile de vectori  $v + w, fv$ .

Fie  $n = \dim X$ ,  $x \in X$  și  $\partial_{1x}, \dots, \partial_{nx}$  baza mobilă a lui  $T_x(X)$ . Atunci pentru orice cîmp de vectori  $v$  în  $U$  există funcții  $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ , numite

**componentele lui**  $v$ , astfel încît  $\forall x \in U$ ,  $v(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \partial_{ix}$ . Cîmpul  $v$  se zice

**neted** dacă componentele lui sunt funcții netede.

Dacă  $v$  și  $w$  sunt două cîmpuri netede pe un deschis  $U \subset X$ ,

$$v = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i, \quad w = \sum_{i=1}^n g_i \partial_i,$$

atunci **paranteza Poisson** a lor este cîmpul de vectori  $[v, w]$  definit prin

$$[v, w] = \sum_{i=1}^n h_i \partial_i, \quad \text{unde } h_i = \sum_{j=1}^n \left( f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right).$$

Astfel,  $[\partial_i, \partial_j] = 0$  pentru  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $[v, w] = -[w, v]$ ,  $[v, v] = 0$ .

## 5. Extreme cu legături

Ca o aplicație a celor de mai sus, vom demonstra teorema multiplicatorilor lui J. P. LAGRANGE (1736 - 1813).

Fie  $M \subset \mathbb{R}^k$  o submulțime (nevidă),  $a \in M$  și  $f$  o funcție definită într-o vecinătate a lui  $a$  în  $\mathbb{R}^k$ . Spunem că  $a \in M$  este un **punct de extrem pentru  $f$  cu legătura  $M$**  (sau **extrem condiționat**) dacă  $a$  este extrem local pentru  $f|_M$  (restricția lui  $f$  la  $M$ ).

**TEOREMA VII. 10.** Fie  $g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  aplicații de clasă  $C^1$ , independente într-o vecinătate a punctului  $a \in \mathbb{R}^k$  și  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^1$  în vecinătatea lui  $a$ . Să presupunem că  $a$  este un punct de extrem pentru  $f$  cu legătura  $M = \{x \mid g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0\}$  (deci  $a \in M$ ). Atunci există  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  astfel încît

$$df(a) = \sum_{i=1}^m \lambda_i dg_i(a).$$

(numerele  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  se numesc **multiplicatori Lagrange**).

DEMONSTRAȚIE. Din ipoteză rezultă că  $M$  este într-o vecinătate a punctului  $a \in M$  o varietate de clasă  $C^1$  și dimensiunea  $k - m = n$  (notație). În plus,  $T_a M = \text{Ker } dg(a)$ ,  $\dim_x T_a M = n$ . Fie  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $U$  deschis în  $\mathbb{R}^n$  o parametrizare pentru  $M$  în vecinătatea lui  $a$  și  $c \in U$ ,  $h(c) = a$ . Atunci

$$T_a M = \text{Im } dh(c) = \text{Ker } dg(a).$$

Pe de altă parte, din condiții rezultă clar că funcția  $f \circ h = F$  are un extrem (liber) în  $c \in U$ , deci conform teoremei Fermat avem  $dF(c) = 0$  deci  $d(f \circ h)(c) = 0$  sau

$$df(a) \circ dh(c) = 0.$$

Deci  $df(a)$  se anulează (ca aplicație) pe  $\text{Im } dh(c)$ . Deci  $df(a)$  este nulă pe  $\text{Ker } dg(a)$ . Avem următoarea situație: aplicațiile liniare  $dg_1(a), \dots, dg_m(a)$  sunt forme liniare independente și  $df(a)$  este nulă pe

$$\text{Ker } dg(a) = \{dg_1(a) = \dots = dg_m(a) = 0\}.$$

Este un rezultat simplu de algebră liniară că în acest caz există și sunt unici scalari  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  cu

$$df(a) = \sum_{i=1}^m \lambda_i dg_i(a).$$

și teorema este demonstrată.

**COROLAR.** Fie  $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  o funcție de clasă  $C^1$  pe un deschis din

$\mathbb{R}^{n+m}$  și presupunem că există  $m$  legături

$$g_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0.$$

Presupunem că  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$  este un punct de extrem pentru  $f$  cu legăturile  $g_i = 0$ . Dacă  $g_1, \dots, g_m$  sunt funcții de clasă  $C^1$  și

$$\frac{D(g_1, \dots, g_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \neq 0,$$

atunci există  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  astfel încît punînd

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m,$$

să rezulte

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y_k} = 0, \quad g_i = 0 \quad (1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq m).$$

EXEMPLUL 1. Fie  $f(x, y)$  cu legătura  $g(x, y) = 0$ . Considerăm funcția  $F = f + \lambda g$ . Atunci extremele condiționate ale lui  $f$  se determină rezolvînd sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad g = 0.$$

EXEMPLUL 2. Extremele unei funcții  $f(x, y, z)$  cu legăturile  $g_1(x, y, z) = 0$ ,  $g_2(x, y, z) = 0$  se determină astfel: se consideră funcția  $F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$  și se rezolvă sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad g_1 = 0, \quad g_2 = 0.$$

EXEMPLUL 3. Fie  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^1$  pe un deschis  $A \subset \mathbb{R}^n$  și fie  $K \subset A$  un compact a cărui frontieră poate fi definită prin ecuații carteziane. Deoarece  $f$  este continuă, ea este mărginită pe  $K$  și își atinge extremele globale, adică există puncte  $a, b \in K$  astfel încît  $f(a) = \inf_K f$ ,  $f(b) = \sup_K f$ . Dacă

$a \in \overset{\circ}{K}$ , atunci  $a$  este punct de minim local pentru  $f$  deci  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Dacă  $a \notin \overset{\circ}{K}$ , atunci  $a \in K \setminus \overset{\circ}{K} = \text{Fr}K$  și  $a$  va fi punct de minim pentru  $f$  cu legăturile date de faptul că  $a$  verifică ecuațiile carteziane ale frontierei. O discuție similară are loc pentru punctul de maxim  $b$ .

Concret, să determinăm marginile (extremele globale) ale lui  $f(x, y) = x^2 + 2xy$  pe compactul  $K = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Se observă mai întîi că originea este singurul punct critic pentru  $f$ , dar nu este un extrem. Atunci marginile lui  $f$  sunt atinse pe frontieră (căci dacă ar fi atinse în interior, ar rezulta că sunt critice). Avem deci de aflat extremele lui  $f$  cu legătura  $x^2 + y^2 = 1$ . Considerînd  $F(x, y) = x^2 + 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$  și rezolvînd sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad x^2 + y^2 = 1, \text{ rezultă } \inf_K = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ și } \sup_K = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

## 6. 10 exerciții

1. Să se indice doi deschiși  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  și o aplicație  $f: U \rightarrow V$  bijectivă astfel încît  $f$  să fie de clasă  $C^1$  dar nu difeomorfism.

2. Să se arate că un deschiș  $U \subset \mathbb{R}^n$  și un deschiș  $V \subset \mathbb{R}^m$ , pentru  $m \neq n$ , nu pot fi difeomorfi.

3. Fie  $0 < a < 1$  constant. Se consideră funcția  $y = y(x)$  prin relația  $y - a \sin y = x$ . Să se calculeze  $y'(x)$ ,  $y''(x)$ .

4. Fie  $\varphi$  o funcție de clasă  $C^1$ . Relația  $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$  cu  $a, b, c \in \mathbb{R}$  constante, definește implicit  $z$  ca funcție de  $x$  și  $y$ . Să se arate că

$$(cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

5. Să se arate că pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , hiperboloidul  $H = \{x^2 + y^2 - z^2 = a\}$  este o varietate netedă de dimensiune 2.

6. Să se arate că mulțimea  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$  și conul  $\{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$  nu sunt varietăți.

7. Fie  $V$  o varietate de dimensiune  $m$  în  $\mathbb{R}^M$  și  $W$  o varietate de dimensiune  $n$  în  $\mathbb{R}^N$ . Să se arate că  $V \times W$  este o varietate de dimensiune  $m + n$  în  $\mathbb{R}^{M+N}$ .

8. Se cer punctele situate pe curba  $x^2 + y^2 + xy = 1$ , cele mai depărtate de origine.

9. Să se determine extremele lui:

a)  $f(x, y, z) = xyz$  cu legătura  $x + y + z = 1$ .

b)  $f(x, y, z) = x + y + z$  cu legăturile  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $2x + 2y + z = 1$ .

10. Să se determine  $\inf_K f$ ,  $\sup_K f$  în fiecare din cazurile următoare:

a)  $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$ ,  $K = \{x^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ ;

b)  $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - xy + z^4 - 2z^2$ ,  $K = \{x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 8\}$ .

## INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Luăm  $n = 1$ ,  $U = V = \mathbb{R}$  și  $f(x) = x^3$ . Funcția  $f$  este bijectivă și indefinit derivabilă.

Dar  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$  și  $f^{-1}$  nu este derivabilă în origine.

2. Dacă prin absurd ar exista un difeomorfism  $f: U \rightarrow V$ , atunci  $\forall a \in A$ , aplicația liniară  $df(a): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ar fi un izomorfism deci  $m = n$ ; absurd.

3. Pentru a calcula  $y'(x)$  nu derivăm  $y(x)$ , pentru că nu este explicitat, dar derivăm relația inițială care definește  $y(x)$ . Deci  $y' - a \cos y y' = 1$  și  $y' = \frac{1}{1 - a \cos y}$ . Apoi  $y'' + a \sin y y'^2 - a \cos y y'' = 0$  și se determină  $y''$ .

4. Derivăm relația din enunț în raport cu  $x$  și apoi cu  $y$ :

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(u) \cdot \left( a + c \frac{\partial z}{\partial x} \right); \quad 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(u) \cdot \left( b + c \frac{\partial z}{\partial y} \right),$$

unde  $u = ax + by + cz$ . Rezultă

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a\varphi'(u) - 2x}{2z - c\varphi'(u)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b\varphi'(u) - 2y}{2z - c\varphi'(u)} \text{ etc.}$$

5. Se notează  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - a$  deci  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție de clasă  $C^1$ . Atunci  $H = F^{-1}(0)$  și  $dF(u): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  are rang maxim pentru orice  $u \in H$ .

6. Presupunem că  $M = \{xy = 0\}$ , adică reuniunea axelor  $Ox$ ,  $Oy$ , ar fi o varietate, de dimensiune 1. Atunci originea ar avea o vecinătate  $U$  astfel încît  $U \cap M$  să fie difeomorfă și în particular omeomorfă cu un interval deschis  $I$  din  $\mathbb{R}$ . Dar eliminînd cîte un punct din  $U \cap M$  și respectiv  $I$ , se obțin mulțimi cu patru și respectiv două componente conexe și acestea nu pot fi omeomorfe.

7. Se aplică direct definiția.

8. Trebuie deci aflat maximul expresiei  $x^2 + y^2$  cu legătura  $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$ . Fie  $F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 1)$  și se rezolvă sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad x^2 + y^2 + xy - 1 = 0,$$

obținîndu-se punctele critice, din care se selecționează cele de maxim.

9. a)  $F = xyz + \lambda(x + y + z - 1)$ ;  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ ,  $x + y + z - 1 = 0$ .

b)  $F = x + y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda(2x + 2y + z - 1)$  etc.

10. a) Funcția  $f$  are originea ca unic punct critic și nu este punct interior lui  $K$ . Marginile lui  $f$  vor fi atinse pe  $\text{Fr}K$ , alcătuită din  $A = \{(x, 0) \mid x \in [-1, 1]\}$ ,  $B = \{(x, x^2) \mid x \in [-1, 1]\}$ ,  $C = \{(-1, y) \mid y \in [0, 1]\}$  și  $D = \{(1, y) \mid y \in [0, 1]\}$ . Se determină maximele și minimele restricțiilor lui  $f$  la mulțimile  $A, B, C, D$ ;  $\sup_K f$  este cel mai mare dintre ele etc.

## Partea a II-a

# CALCUL INTEGRAL

## LECȚIA A VIII-A

# INTEGRALA RIEMANN

### INTRODUCERE

În redactarea acestei lecții am presupus, ca și pînă acum că, oarecum, cititorul este familiarizat cu principalele proprietăți ale integralei Riemann, cu aplicațiile acestora și cu calculul de primitive (subiecte tratate în liceu). De aici a rezultat o prezentare succintă a noțiunilor fundamentale și lăsarea la o parte a calculului de primitive. Sunt prezentate de asemenea cîteva **generalizări** naturale (**integrale improprii**, **integrala Riemann - Stieltjes**). Anumite procedee de **calcul aproximativ** al integralelor Riemann au fost deja indicate în capitolele anterioare.

### 1. Definiția și proprietățile integralei Riemann

Fie  $[a, b]$ ,  $a < b$ , un interval compact în  $\mathbb{R}$ . O **diviziune** a intervalului  $[a, b]$  este o mulțime (finită)  $v = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  cu  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Dacă  $v, v'$  sunt diviziuni ale intervalului  $[a, b]$  și  $v' \supset v$  spunem că  $v'$  este **mai fină** decît  $v$ .

Dacă  $v, v'$  sunt diviziuni ale intervalului  $[a, b]$  diviziunea  $v \cup v'$  (reuniunea) este mai fină decît  $v$  și  $v'$ .

În cele ce urmează, fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție **mărginită**. Dacă  $v$  este o diviziune  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  notăm

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Definim **sumele Darboux** (pentru  $f$  și  $v$ ) astfel

$$S(v, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad s(v, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

Punem prin definiție:

$$\int_a^b f dx = \inf_v S(v, f), \quad \int_a^b f dx = \sup_v s(v, f)$$

(inf și sup după toate diviziunile intervalului  $[a, b]$ ).

Să observăm că  $\int_a^b f dx$ ,  $\int_a^b f dx$  sunt **numere** reale (nu  $+\infty$  sau  $-\infty$ ) deoarece  $f$  este mărginită.

**Definiția VIII. 1.** Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ca mai sus.

1. Dacă  $\int_a^b f dx = \int_a^b f dx$  spunem că  $f$  este **integrabilă Riemann** pe  $[a, b]$  și scriem  $f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$  (sau  $f \in \mathcal{R}$  când nu este pericol de confuzie).

2. Dacă  $f \in \mathcal{R}$  notăm  $\int_a^b f dx = \int_a^b f dx = \int_a^b f dx$  și numim **numărul**  $\int_a^b f dx$  **integrala** lui  $f$  pe  $[a, b]$ . (Se vor folosi și notațiile  $\int_a^b f(x) dx$  sau  $\int_a^b f$  pentru  $\int_a^b f dx$ ).

**Comentariu.** Definiția de mai sus este bazată pe "intuiția" calculului ariei subgraficului unei funcții continue pozitive ca aproximare cu reuniuni de dreptunghiuri (vezi figura).

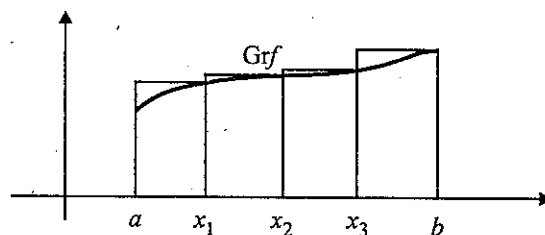


Fig. VIII. 1.

Urmărim stabilirea unor **criterii de integrabilitate** și o **caracterizare** a funcțiilor integrabile Riemann, legată de continuitatea acestora.

**LEMA.** Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mărginită și  $v, v'$  diviziuni,  $v'$  mai fină decât  $v$ . Atunci  $s(v', f) \geq s(v, f)$ ,  $S(v', f) \leq S(v, f)$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Este suficient să considerăm cazul în care  $v'$  are un singur punct în plus față de  $v$ , de exemplu  $x_{i-1} < y < x_i$  ( $i$  fixat). Să notăm pentru moment

$$m_1^* = \inf_{x \in [x_{i-1}, y]} f(x), \quad m_2^* = \inf_{x \in [y, x_i]} f(x).$$

Este clar că  $m_i \leq m_1^*$ ,  $m_i \leq m_2^*$  ( $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ ). Avem de exemplu

$$s(v', f) - s(v, f) = m_1^*(y - x_{i-1}) + m_2^*(x_i - y) - m_i(x_i - x_{i-1}) \geq 0$$

Cealaltă inegalitate se demonstrează analog.

**COROLAR. 1.** Pentru orice două diviziuni  $v_1, v_2$  avem  $s(v_1, f) \leq S(v_2, f)$ ;

$$2. \int_a^b f dx \leq \int_a^b f dx.$$

**DEMONSTRAȚIE. 1.** Punem  $v^* = v_1 \cup v_2$  și folosind lema, avem  $s(v_1, f) \leq s(v^*, f) \leq S(v^*, f) \leq S(v_2, f)$  (inegalitatea din mijloc este evidentă).  
2. Rezultă imediat din 1.

**TEOREMA VIII. 1.** Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mărginită. Atunci  $f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$  dacă și numai dacă  $(\forall) \varepsilon > 0$  există o diviziune  $v$  astfel încât:  $S(v, f) - s(v, f) < \varepsilon$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Să observăm că pentru orice diviziune  $v$  avem

$$0 \leq \int_a^b f dx - \int_a^b f dx \leq S(v, f) - s(v, f),$$

de unde rezultă imediat implicația " $\Leftarrow$ ".

Pentru implicația " $\Rightarrow$ " să fixăm  $\forall \varepsilon > 0$ ; există diviziuni  $v_1, v_2$  astfel încât

$$\int_a^b f dx - s(v_1, f) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad S(v_2, f) - \int_a^b f dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luăm  $v = v_1 \cup v_2$  și folosind lema precedentă, deducem  $S(v, f) - s(v, f) < \varepsilon$ .

**Comentariu.** Pentru o diviziune  $v$  avem

$$S(v, f) - s(v, f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i.$$

În spiritul criteriului de mai sus încercăm să facem această diferență "mică", studiind "contribuția" diferențelor  $M_i - m_i$  și pe de altă parte "contribuția"  $\Delta x_i$ . Primul tip de diferențe ne conduce spre continuitatea funcțiilor și (după cum vom vedea) al doilea tip ne conduce la noțiunea de mulțime de măsură 0. Aceste vagi comentarii intuitive pot ajuta la înțelegerea a ceea ce urmează.

Înainte de a obține un foarte important criteriu de integrabilitate, sunt necesare unele scurte pregătiri. **Lungimea** unui interval  $I \subset \mathbb{R}$ , de extremități  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$ , este  $l(I) = b - a$  (indiferent de tipul intervalului).

**Definiția VIII. 2.** O submulțime  $M \subset \mathbb{R}$  are **măsura 0** (nulă) dacă  $(\forall) \varepsilon > 0$ , există un șir  $(I_n)_n$  de intervale deschise astfel încât

$$M \subset \bigcup_n I_n \text{ și } \sum_n l(I_n) < \varepsilon.$$

EXEMPLUL 1. Dacă  $A \subset B$  și  $B$  are măsura 0, atunci  $A$  are o măsura 0.

EXEMPLUL 2. Dacă  $M \subset \mathbb{R}$  este finită sau numărabilă,  $M$  are măsura 0.

EXEMPLUL 3. Dacă  $(M_k)_k$  este un șir de mulțimi de măsură 0, reuniunea  $M = \bigcup_k M_k$  are măsură 0. În adevăr, dat  $\varepsilon > 0$ ,  $M_k \subset \bigcup_n I_{n,k}$  și

$$\sum_n l(I_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Pentru o "numerotare"  $(I_p)_p$  a familiei numărabile  $(I_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ , rezultă

$$M \subset \bigcup_p I_p \text{ și } \sum_p l(I_p) < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

EXEMPLUL 4. Intervalul  $[a, b]$ ,  $a < b$ , nu are măsura 0.

Pentru a demonstra acest lucru, se arată mai întâi prin inducție că dacă

$$[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k) \text{ rezultă } \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \geq b - a.$$

Apoi intervalul  $[a, b]$  fiind **compact**, din orice acoperire a lui  $[a, b]$  cu intervale deschise se poate extrage o acoperire **finită**. Este suficient să luăm  $\varepsilon < b - a$  și nu vom putea obține acoperirea cerută în definiția mulțimii de măsură 0.

**TEOREMA VIII. 2.** (H. LEBESGUE, 1875 - 1941). Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție **mărginită** și  $M$  mulțimea punctelor sale de discontinuitate. Atunci  $f$  este integrabilă Riemann dacă și numai dacă  $M$  are măsura 0.

**DEMONSTRAȚIE.** Înainte de a începe demonstrația propriu-zisă, vom introduce noțiunea de **oscilație** a unei funcții într-un punct. Dacă  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție **mărginită** definită pe un spațiu metric  $X$ ,  $a \in X$  și  $r > 0$  punem:

$$M(f, a, r) = \sup_{x \in B(a, r)} f(x), \quad m(f, a, r) = \inf_{x \in B(a, r)} f(x).$$

Definim **oscilația** funcției  $f$  în punctul  $a$ :

$$o(f, a) = \lim_{r \rightarrow 0} (M(f, a, r) - m(f, a, r))$$

( $o(f, a)$  există, căci  $M(f, a, r) - m(f, a, r)$  descrește).

Este ușor de demonstrat că

1)  $(\forall) \varepsilon > 0$ , mulțimea  $\{a \in X \mid o(f, a) \geq \varepsilon\}$  este **închisă**.

2)  $f$  este continuă în  $a$  dacă și numai dacă  $o(f, a) = 0$ .

Revenind la demonstrația teoremei, să notăm

$$M = \{x \in [a, b]; f \text{ este discontinuă în } x\}$$

și pentru  $\varepsilon > 0$

$$M_\varepsilon = \{x \in [a, b]; o(f, x) \geq \varepsilon\}.$$

Este clar că  $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{1/k}$ .

" $\Rightarrow$ " Să presupunem că  $f$  este integrabilă Riemann. Vom arăta că  $M_{1/k}$  are măsură 0 pentru orice  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ . Va rezulta (exemplul 3) că  $M$  are măsură 0. Fixăm deci  $k \geq 1$  și fie  $\varepsilon > 0$ . Există o diviziune  $v: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  astfel încît

$$S(v, f) - s(v, f) < \frac{\varepsilon}{2k}$$

(conform teoremei VIII. 1). Vom nota  $A_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$  și fie  $J$  mulțimea acelor indici  $i$  pentru care  $A_i \cap M_{1/k} \neq \emptyset$ . Fie  $M'_{1/k}$  submulțimea acelor  $x \in M_{1/k}$  pentru care există  $i \in J$  cu  $A_i \cap M_{1/k} \neq \emptyset$ . Avem

$$\frac{1}{k} \sum_{i \in J} l(A_i) \leq \sum_{i \in J} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq S(v, f) - s(v, f) < \frac{\varepsilon}{2k}$$

deci  $\sum_{i \in J} l(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$  și  $(A_i)_{i \in J}$  acoperă  $M'_{1/k}$ . Cum  $M_{1/k}$  diferă de  $M'_{1/k}$  printr-o

mulțime finită, este clar că putem obține o acoperire (numărabilă) a lui  $M_{1/k}$  cu intervale deschise cu suma lungimilor  $< \varepsilon$ . În definitiv,  $M_{1/k}$  are măsură 0  $\forall k \geq 1$  și deci  $M$  are măsură 0.

" $\Leftarrow$ " Să presupunem că  $M$  are măsură 0 și fie  $\varepsilon > 0$ .  $M_\varepsilon$  este compactă și de măsură 0 ( $M_\varepsilon \subset M$ ). Există deci o mulțime finită de intervale **închise**

$I_1, \dots, I_k$  a căror interioare acoperă  $M_\varepsilon$  și  $\sum_{j=1}^k l(I_j) < \varepsilon$ . Putem considera o

diviziune  $v$  a intervalului  $[a, b]$  astfel încît intervalele corespunzătoare acestei diviziuni să fie de unul din următoarele tipuri:

(I) intervale  $A$  cu  $A \subset I_j$  pentru un  $j \in \{1, \dots, k\}$ ;

(II) intervale  $B$  cu  $B \cap M_\varepsilon = \emptyset$ .

Fie  $|f(x)| \leq K \forall x \in [a, b]$  ( $f$  este mărginită). Avem

$$S(v, f) - s(v, f) = \sum_I (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_I + \sum_{II} \text{ unde în } \sum_I \text{ sunt intervale de tip I iar}$$

în  $\sum_{II}$  de tip II. Avem  $\sum_I \leq 2K \sum_{j=1}^k l(I_j) < 2K\varepsilon$ . Se poate demonstra cu ușurință

că trecînd eventual la o diviziune **mai fină**, adăugînd puncte numai pentru

intervalele de tip II, suma  $\sum_{II}$  poate fi făcută mai mică decât  $\varepsilon(b-a)$ . În acest mod teorema lui Lebesgue este demonstrată.

**OBSERVAȚIE.** Spunem despre o proprietate adevărată pentru toate punctele, cu excepția unei mulțimi de măsură 0, că are loc **aproape peste tot** (a.p.t.). Teorema de mai sus poate fi enunțată "mai plastic" astfel: O funcție mărginită pe un interval compact este integrabilă Riemann dacă și numai dacă este **continuă aproape peste tot**. În fond integrala Riemann este adaptată funcțiilor "aproape continue", dacă ne putem exprima în acest fel.

**COROLAR.** Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este **continuă**, atunci  $f$  este integrabilă Riemann.

În adevăr, mulțimea vidă are evident măsură 0.

**COROLAR.** Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este **monotonă**, atunci  $f$  este integrabilă Riemann.

În adevăr, mulțimea punctelor de discontinuitate pentru o funcție monotonă este finită sau numărabilă, deci de măsură 0. (Fie  $f$  crescătoare;  $f$  are limite laterale finite în orice punct, suma diferențelor acestora (saltul funcției) nu depășește  $f(b) - f(a)$ . Rezultă că pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$  mulțimea punctelor în care saltul funcției este  $> \frac{1}{n}$  este finită. De aici rezultă imediat că mulțimea

punctelor de discontinuitate pentru  $f$  este finită sau numărabilă).

**EXEMPLU.** Funcția  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 1, & \text{în rest} \end{cases}$  nu este integrabilă

Riemann căci este discontinuă în orice punct, iar măsura intervalului  $[a, b]$  ( $a < b$ ) nu este nulă.

**TEOREMA VIII. 3.** Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilă Riemann,  $f([a, b]) \subset [c, d]$  și  $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă. Atunci  $g \circ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann.

**DEMONSTRAȚIE.** Dacă  $f$  este continuă în  $x_0$ , cum  $g$  este continuă în  $f(x_0)$ , rezultă că  $g \circ f$  continuă în  $x_0$ . Deci mulțimea discontinuităților lui  $g \circ f$  este conținută în cea a lui  $f$  și aplicăm teorema VIII. 2.

**TEOREMA VIII. 4.** Dacă  $f, g \in \mathcal{R}_{[a, b]}$  și  $\alpha \in \mathbb{R}$ , atunci

$$1) f + g \in \mathcal{R}_{[a, b]} \text{ și } \int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

$$2) \alpha f \in \mathcal{R}_{[a, b]} \text{ și } \int_a^b (\alpha f) dx = \alpha \int_a^b f dx$$

$$3) fg \in \mathcal{R}_{[a, b]}.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Afirmațiile "calitative"  $f + g \in \mathcal{R}_{[a, b]}$ ,  $fg \in \mathcal{R}_{[a, b]}$  rezultă imediat din teorema VIII. 2 (dacă  $f$  și  $g$  sunt continue în  $x_0$ ,  $f + g$ ,  $fg$  sunt continue în  $x_0$  și apoi reuniunea a două mulțimi de măsură 0 este de măsură 0 etc.).

Pentru a demonstra de pildă că  $\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$ , observăm că pentru

orice diviziune  $v$  avem

$$s(v, f) + s(v, g) \leq s(v, f + g) \leq S(v, f + g) \leq S(v, f) + S(v, g) \text{ etc.}$$

#### TEOREMA VIII. 5.

$$1) \text{ Dacă } f, g \in \mathcal{R}_{[a, b]} \text{ și } f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b], \text{ atunci } \int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx.$$

$$2) \text{ Dacă } f \in \mathcal{R}_{[a, b]}, \text{ atunci } |f| \in \mathcal{R}_{[a, b]} \text{ și } \left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx.$$

**DEMONSTRAȚIE.**

1) Rezultă imediat din definiții.

2)  $|f| \in \mathcal{R}_{[a, b]}$  de exemplu folosind teorema VIII. 3 ( $g(x) = |x|$ ). Mai departe să alegem  $c = \pm 1$  astfel încît  $c \int_a^b f dx \geq 0$ . Deducem

$$\left| \int_a^b f dx \right| = c \int_a^b f dx = \int_a^b (cf) dx \leq \int_a^b |f| dx$$

căci evident  $cf \leq |f|$  și folosim primul punct.

**COROLAR.** 1) Dacă  $f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$  și  $m \leq f(x) \leq M$ ,  $\forall x \in [a, b]$  ( $m, M \in \mathbb{R}$ ), atunci

$$m(b-a) \leq \int_a^b f dx \leq M(b-a).$$

2) Dacă  $f$  este **continuă** pe  $[a, b]$ , atunci există  $c \in [a, b]$  astfel încît

$$\int_a^b f dx = f(c)(b-a).$$

DEMONSTRAȚIE. 1) rezultă imediat din teorema precedentă iar 2) folosind proprietatea Darboux a funcțiilor continue și observând că

$$m_f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f dx \leq M_f \text{ unde } m_f = \inf_{[a,b]} f(x), \quad M_f = \sup_{[a,b]} f(x).$$

**TEOREMA VIII. 6.** 1) Dacă  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ , atunci  $f \in \mathcal{R}_{[c,d]}$  pentru orice interval  $[c,d] \subset [a,b]$ ;

2) Fie  $a < c < b$  și  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f \in \mathcal{R}_{[a,c]}$  și  $f \in \mathcal{R}_{[c,b]}$ , atunci  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  și

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx \text{ (aditivitatea integralei ca funcție de interval).}$$

DEMONSTRAȚIE. Totul rezultă imediat din teorema VIII. 2, cu excepția

egalității  $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$ . Pentru a demonstra această egalitate, se observă că dacă  $\mathcal{V}'$  este o diviziune a lui  $[a,c]$  și  $\mathcal{V}''$  o diviziune a lui  $[c,b]$ , atunci  $\mathcal{V} = \mathcal{V}' \cup \mathcal{V}''$  (într-un sens clar) este o diviziune a lui  $[a,b]$  și

$$s(\mathcal{V}, f) = s(\mathcal{V}', f) + s(\mathcal{V}'', f), \quad S(\mathcal{V}, f) = S(\mathcal{V}', f) + S(\mathcal{V}'', f) \text{ etc.}$$

OBSERVAȚIE. Se face **convenția** că dacă  $a > b$ , atunci  $\int_a^b f dx = - \int_b^a f dx$  (dacă

aceasta din urmă există). De asemenea se pune  $\int_a^a f dx = 0$ . Cu aceste convenții

formula  $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$  se extinde oricare ar fi poziția punctelor  $a, b, c$  (cu condiția existenței integralelor). Rezultatul următor este o extindere a teoremei IV. 6.

**TEOREMA VIII. 7.** Fie  $(f_n)_n$  un șir de funcții,  $f_n \in \mathcal{R}_{[a,b]} \forall n$ , astfel încât  $f_n \xrightarrow{uc} f$

pe  $[a,b]$ . Atunci  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  și  $\int_a^b f_n dx \rightarrow \int_a^b f dx$  (integrare termen cu termen).

DEMONSTRAȚIE. Dacă  $M_n$  este mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției  $f_n$  atunci rezultă că mulțimea  $M$  a punctelor de discontinuitate ale funcției  $f$  satisface condiția  $M \subset \bigcup_n M_n$  (căci convergența uniformă păstrează continuitatea). Dar  $M_n$  are măsură 0 pentru orice  $n$  deci  $\bigcup_n M_n$  are măsura 0

și deci  $M$ . Cît despre integrarea termen cu termen demonstrația este identică cu cea din cazul funcțiilor continue (teorema IV. 6).

Înainte de a trece la proprietățile de "calcul" ale integralei Riemann, vom considera așa numitele sume Riemann. Dată o diviziune  $\mathcal{V}$  a intervalului  $[a,b]$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , se definește **norma** diviziunii  $\mathcal{V}$  ca  $\mu(\mathcal{V}) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ .

**TEOREMA VIII. 8.** Fie  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ . Atunci pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel încît pentru orice diviziune  $\mathcal{V}$  cu  $\mu(\mathcal{V}) < \delta_\varepsilon$ , să rezulte

$$S(\mathcal{V}, f) - s(\mathcal{V}, f) < \varepsilon.$$

DEMONSTRAȚIE. Să observăm că afirmația teoremei nu este absolut evidentă, căci deși știm că diferența  $S(\mathcal{V}, f) - s(\mathcal{V}, f)$  scade prin trecere la diviziuni mai fine, totuși condiția de normă "mică" nu implică neapărat rafinarea diviziunilor. Vom schița ideile demonstrației. Fie  $K = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ . Dat  $\varepsilon > 0$

există o diviziune  $\mathcal{V}_0$  astfel încît  $S(\mathcal{V}_0, f) - s(\mathcal{V}_0, f) < \varepsilon$ . Se poate arăta că dacă  $N_0$  este numărul de puncte în  $\mathcal{V}_0$  și  $\delta_0$  lungimea celui mai mic interval al diviziunii  $\mathcal{V}_0$ , avem  $S(\mathcal{V}, f) - s(\mathcal{V}, f) < \varepsilon + 4KN_0\delta$  pentru orice  $\delta < \delta_0$  și orice diviziune  $\mathcal{V}$  cu  $\mu(\mathcal{V}) < \delta$ . Cum  $\delta$  poate fi luat oricît de mic, afirmația rezultă. Nu intrăm în detalii.

Dată fiind o funcție  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{V}$  o diviziune a intervalului  $[a,b]$ ,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  și pentru fiecare  $i = 1, \dots, n$ ,  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , se consideră **suma Riemann**

$$S(\mathcal{V}, f, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

( $\xi_i$  numite puncte "intermediare" pentru  $\mathcal{V}$ ).

**TEOREMA VIII. 9.** Fie  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ . Atunci pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel încît pentru orice diviziune  $\mathcal{V}$  cu  $\mu(\mathcal{V}) < \delta_\varepsilon$  să rezulte

$$|S(\mathcal{V}, f, \xi) - \int_a^b f dx| < \varepsilon,$$

pentru orice alegere a punctelor intermediare  $\xi_i$ .

DEMONSTRAȚIE. Este clar că pentru orice diviziune  $\mathcal{V}$  și orice alegere a punctelor intermediare  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  avem  $s(\mathcal{V}, f) \leq S(\mathcal{V}, f, \xi) \leq S(\mathcal{V}, f)$ . Folosind teorema precedentă obținem imediat rezultatul (clar  $s(\mathcal{V}, f) \leq \int_a^b f dx \leq S(\mathcal{V}, f)$  etc.).

Teorema VIII. 9 admite și următoarea reciprocă:

**TEOREMA VIII. 10.** Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mărginită și  $I$  un număr real astfel încât  $\forall \varepsilon > 0$  există  $\delta_\varepsilon > 0$  cu proprietatea că pentru orice diviziune  $v$  cu  $\mu(v) < \delta_\varepsilon$  să avem  $|S(v, f, \xi) - I| < \varepsilon$ , pentru orice alegere a punctelor

intermediare  $\xi_i$ . Atunci  $f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$  și  $I = \int_a^b f dx$ .

Demonstrația este simplă și o lășăm ca exercițiu.

## 2. Calculul integralelor Riemann

**TEOREMA VIII. 11.** (teorema fundamentală). Fie  $f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$  și  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $F(x) = \int_a^x f$ ,  $x \in [a, b]$ . Rezultă:

- 1)  $F$  este continuă pe  $[a, b]$ .
- 2)  $F'(x) = f(x)$  aproape peste tot (mai precis  $F$  este derivabilă a.p.t. și  $F' = f$  a.p.t.).

**DEMONSTRAȚIE.** 1) Dacă  $|f(x)| \leq K$  pe  $[a, b]$  avem pentru orice  $x_1, x_2 \in [a, b]$

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left| \int_{x_2}^{x_1} f(x) dx \right| \leq K |x_1 - x_2|$$

și continuitatea funcției  $F$  rezultă.

2) Vom arăta mai precis că dacă  $x_0 \in [a, b]$  și  $f$  este continuă în  $x_0$ , atunci  $F$  este derivabilă în  $x_0$  și  $F'(x_0) = f(x_0)$ . Avem

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f dx.$$

Fie  $\varepsilon > 0$ . Există  $\delta > 0$  astfel încât  $x \in [a, b]$ ,  $|x - x_0| \leq \delta$  să implice  $-\varepsilon \leq f(x) - f(x_0) \leq \varepsilon$ , de unde

$$(f(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) \leq \int_{x_0}^x f dx \leq (f(x_0) + \varepsilon)(x - x_0) \text{ pentru } |x - x_0| \leq \delta, x > x_0.$$

Deci  $-\varepsilon \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \leq \varepsilon$  pentru  $|x - x_0| \leq \delta$ ,  $x \geq x_0$ .

Cazul  $x < x_0$  se tratează similar. În definitiv,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ,  $x \in [a, b]$  implică

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon,$$

ceea ce arată că  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

**TEOREMA VIII. 12.** Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mărginită și continuă cu excepția eventual a unui număr finit de puncte. Dacă  $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și  $G'(x) = f(x)$  cu excepția eventual a unui număr finit de puncte, atunci

$$\int_a^b f dx = G(b) - G(a) = G|_a^b \text{ (notație).}$$

**DEMONSTRAȚIE.**  $f$  rezultă integrabilă pe  $[a, b]$ . Funcția  $F(x) = \int_a^x f$  este continuă și  $F'(x) = f(x)$  cu excepția unui număr finit de puncte. Deducem că  $F'(x) = G'(x)$  cu excepția unui număr finit de puncte. Obținem (folosind continuitatea funcțiilor  $F$  și  $G$ ) că  $F - G$  este constantă pe  $[a, b]$ . Deci

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f dx.$$

**OBSERVAȚIE.** Teorema VIII. 12 prezintă o situație mai restrictivă decât cea naturală (continuitatea a.p.t.) Rezultate mai generale se pot obține în cadrul integralei Lebesgue.

**TEOREMA VIII. 13.** (integrare prin părți). Fie  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue și derivabile cu derivate  $f', g'$ , mărginite și continue cu excepția eventual a unui număr finit de puncte. Atunci

$$\int_a^b f' g dx + \int_a^b f g' dx = f g|_a^b.$$

**TEOREMA VIII. 14.** (schimbare de variabilă). Fie  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă,  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ . Fie  $f$  continuă pe  $\varphi[\alpha, \beta]$ . Presupunem că  $(f \circ \varphi) \varphi'$  este continuă cu excepția eventual a unui număr finit de puncte.

$$\text{Atunci } \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Demonstrația teoremelor VIII. 13, VIII. 14 este imediată și de altfel cunoscută din liceu.

## 3. Integrale improprii

Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval nevid. O funcție  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  se zice **local integrabilă** dacă restricția sa la orice interval compact conținut în  $I$  este integrabilă Riemann.

**EXEMPLU.** Orice funcție continuă a.p.t este local integrabilă.

Fie  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \bar{\mathbb{R}}$  (deci  $b$  poate fi și  $+\infty$ ) și  $f: [a, b] \subset \mathbb{R}$  local

**integrabilă.** Este deci bine definită funcția  $F : [a, b) \subset \mathbb{R}$ ,

$$F(x) = \int_a^x f dt.$$

**Definiția VIII. 3.** 1) Perechea  $f, F$  mai sus considerată se numește **integrala**

**improprie** a funcției  $f$  pe  $[a, b)$  și se notează  $\int_a^b f$  (sau  $\int_a^b f(t) dt$ ,  $\int_a^b f dt$ ).

2) Dacă  $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$  există și este finită, atunci integrala improprie  $\int_a^b f$  se zice

**convergentă (C)** și se notează de asemenea  $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = \int_a^b f$  (valoarea integralei improprie).

3) O integrală improprie care **nu** este convergentă se zice **divergentă (D)**.

EXEMPLUL 1.  $[a, b) = [0, \infty)$ ,  $f(t) = e^{-t}$ ,  $t \in [0, \infty)$ . Avem

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}, \quad x \in [0, \infty),$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$  deci  $\int_0^\infty e^{-t} dt$  este **convergentă** și  $\int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ .

EXEMPLUL 2.  $[a, b) = [0, \infty)$ ,  $f(t) = \sin t$ ,  $t \in [0, \infty)$ . Avem

$$F(x) = \int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x, \quad x \in [0, \infty).$$

Limita  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$  **nu** există deci  $\int_0^\infty \sin t dt$  este **divergentă**.

EXEMPLUL 3. Fie  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Atunci  $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$  este convergentă dacă și numai dacă  $\alpha > 1$  (după cum rezultă dintr-un calcul evident).

Este clar cum se definește integrala improprie și convergența acesteia pe un interval  $(a, b]$  cu  $a \in \mathbb{R}$  și  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  (pentru  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  local integrabilă se

ia  $F(x) = \int_x^b f(t) dt$  și se consideră  $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$  etc.)

EXEMPLUL 4.  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$  este C dacă și numai dacă  $\alpha < 1$ .

Fie acum  $a, b \in \mathbb{R}$  și  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  local integrabilă. Pentru orice  $x, y \in (a, b)$  este bine definită

$$F(x, y) = \int_x^y f(t) dt.$$

Perechea  $f, F$  este **integrala improprie** a lui  $f$  pe  $(a, b)$  notată

$\int_a^b f$  ( $\int_a^b f(t) dt$ ).  $\int_a^b f$  se zice **convergentă** dacă există și este finită  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} F(x, y)$ .

În acest caz, valoarea acestei limite este valoarea integralei improprie  $\int_a^b f$ .

Integrala improprie se zice **divergentă** dacă **nu** este convergentă.

Se poate arăta ușor că  $\int_a^b f$  este C dacă și numai dacă există  $c \in \mathbb{R}$ ,  $a < c < b$ ,

astfel încît integralele  $\int_a^c f$  și  $\int_c^b f$  să fie C. În acest caz

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

EXEMPLUL 5.  $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ ,  $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ ;  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$  este C și  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$  așa

cum rezultă imediat observînd paritatea funcției  $f$  și faptul că  $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ .

OBSERVAȚIE. Fie  $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  local integrabilă. Spunem că  $\int_{-\infty}^{+\infty} f$  este **convergentă** în sensul **valorii principale** (Cauchy) dacă există și este finită  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^x f(t) dt = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f$  (egalitatea este de fapt o notație).

Este clar că dacă  $\int_{-\infty}^{+\infty} f$  este convergentă atunci este convergentă în sensul

valorii principale și  $\int_{-\infty}^{+\infty} f = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f$ .

Pe de altă parte  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t dt$  este convergentă în sensul valorii principale și  $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin t dt = 0$  dar  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t dt$  nu este convergentă așa cum rezultă dintr-un exemplu anterior.

Se pot considera integrale în sensul valorii principale și în alte situații dar nu vom intra în amănunte.

**Comentariu.** Așa cum se poate remarca, definițiile integralelor improprii și a convergenței sunt asemănătoare cu definiții corespunzătoare din teoria seriilor. O analogie se stabilește imediat pe linia:

$$u_n \leftrightarrow f(t) \quad S_n = u_0 + \dots + u_n \leftrightarrow F(x) = \int_a^x f \text{ etc.}$$

Nu este deci o surpriză că teoria integralelor improprii se dezvoltă pe aceleași linii ca teoria seriilor (criterii de convergență etc.) Este deci util ca această analogie să fie intuită și folosită dar trebuie remarcat că există și "neconcordanțe". Astfel:

**EXEMPLU.** Fie  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $f(n) = n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n + \frac{1}{2n^3}) = f(n - \frac{1}{2n^3}) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  și avînd graficul ca în figură;  $f$  este continuă deci local integrabilă, aria unui triunghi centrat în  $n$  este  $\frac{1}{2n^2}$  și seria  $\sum \frac{1}{2n^2}$  este convergentă deci este imediat de văzut că  $\int_0^\infty f$  este convergentă dar evident  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  nu este 0.

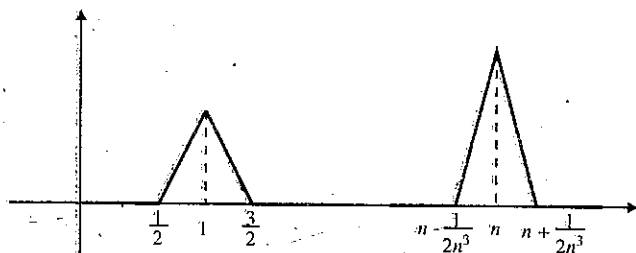


Fig. VIII. 2

În definitiv dacă pentru convergența unei serii numerice  $\sum u_n$  este necesar ca

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , o integrală  $\int_a^\infty f$  poate fi convergentă fără ca  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  să fie 0.

Vom prezenta în continuare câteva criterii de convergență pentru integrale improprii. Ne vom limita la cazul  $[a, b)$ , celelalte cazuri tratîndu-se analog.

**Criteriul integral.** Fie  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  pozitivă și monoton descrescătoare.

Atunci  $\int_1^\infty f$  este convergentă dacă și numai dacă  $\sum_{n \geq 1} f(n)$  este convergentă.

Aceasta este teorema II. 6, dar citită invers.

**Criteriul general de convergență (Cauchy).** Fie  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  local

integrabilă. Atunci  $\int_a^b f$  este convergentă dacă și numai dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in [a, b) \text{ astfel încît } \forall x, y \in [a, b), x, y > b_\varepsilon, \text{ să rezulte } \left| \int_x^y f \right| < \varepsilon.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $F(x) = \int_a^x f$ ; totul revine la a arăta că  $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$  există și este finită dacă și numai dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in [a, b)$  astfel încît  $\forall x, y \in [a, b)$ ,  $x, y > b_\varepsilon$  să rezulte  $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$ .

Avem aici un criteriu Cauchy pentru limite de funcții. Implicația " $\Rightarrow$ " este banală. Demonstrăm implicația " $\Leftarrow$ ".

Fie  $(x_n)_n$  un șir în  $[a, b)$ ,  $x_n \rightarrow b$ . Folosind condiția din enunț rezultă că șirul  $(F(x_n))_n$  este un șir Cauchy în  $\mathbb{R}$ . Deducem că  $(F(x_n))_n$  este convergent. Pentru a termina să arătăm că dacă  $x_n \rightarrow b$ ,  $y_n \rightarrow b$  atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) \text{ (limita nu depinde de șirul } (x_n)_n \text{)}.$$

Dar este suficient să considerăm șirul  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots$  care evident are limita  $b$  iar șirurile  $(F(x_n))_n$ ,  $(F(y_n))_n$  sunt subșiruri ale șirului convergent  $F(x_1), F(y_1), F(x_2), F(y_2), \dots, F(x_n), F(y_n), \dots$

**Definiția VIII. 4.** Dacă  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  este local integrabilă spunem că  $\int_a^b f$  este

**absolut convergentă (AC)** dacă  $\int_a^b |f|$  este convergentă (se mai zice că  $f$  este

**absolut integrabilă** pe  $[a, b)$ ).

Din criteriul general de convergență de mai sus rezultă imediat că dacă  $\int_a^b f$  este absolut convergentă atunci este și convergentă.

**Criteriul de comparație.** Fie  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  local integrabilă,  $g \geq 0$  și  $|f| \leq g$ . Dacă  $\int_a^b g$  este convergentă, atunci  $\int_a^b f$  este absolut convergentă.

**DEMONSTRAȚIE.**  $\forall x, y \in [a, b)$ ,  $x \leq y$ ,  $\int_x^y |f| \leq \int_x^y g$  și aplicăm criteriul general de convergență.

**OBSERVAȚIE.** Fie  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  local integrabilă. Atunci este clar că  $\int_a^b f$  este convergentă dacă și numai dacă există  $c \in [a, b)$  astfel încît  $\int_c^b f$  să fie convergentă. De aceea este suficient în criteriile de convergență ca anumite condiții să aibă loc pentru intervale de tip  $[c, b)$  cu  $c$  suficient de aproape de  $b$ .

**EXEMPLU.**  $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$  este convergentă căci pentru  $t \geq 1$  avem  $e^{-t^2} \leq e^{-t}$  și  $\int_1^\infty e^{-t} dt$  este convergentă (deși simplu, acest exemplu arată utilitatea criteriului comparației căci pentru  $e^{-t^2}$  nu putem "calcula" vreo primitivă).

**Criteriul de convergență la limită.** Fie  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  local integrabile și  $g > 0$  pe  $[a, b)$  astfel încît

$$\lim_{t \rightarrow b} \frac{f(t)}{g(t)} = l \in \mathbb{R}.$$

1) Dacă  $\int_a^b g$  converge atunci  $\int_a^b f$  converge absolut.

2) Dacă  $l \neq 0$   $\int_a^b g$  converge dacă și numai dacă  $\int_a^b f$  converge (cele două integrale au aceeași natură).

**DEMONSTRAȚIE.** 1)  $\lim_{t \rightarrow b} \frac{|f(t)|}{g(t)} = |l|$  și deci există  $c \in [a, b)$  astfel încît pentru

$$t \in [c, b) \quad |f(t)| \leq (1 + |l|)g(t)$$

și aplicăm prima formă a criteriului comparației.

2) Din  $l \neq 0$  deducem că funcția  $f$  are semn constant în vecinătatea lui  $b$  și

$$\lim_{t \rightarrow b} \frac{g(t)}{f(t)} = \frac{1}{l}.$$

Putem presupune  $f > 0$  și aplicăm 1).

**EXEMPLU.** Fie  $f$  local integrabilă pe  $[a, +\infty)$  astfel încît

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha f(t) = l \in \mathbb{R}.$$

1) Dacă  $\alpha > 1$ , atunci  $\int_a^\infty f$  este absolut convergentă.

2) Dacă  $\alpha \leq 1$  și  $l \neq 0$ , atunci  $\int_a^\infty f$  este divergentă. În adevăr, se ia  $g(t) = \frac{1}{t^\alpha}$  în criteriul de mai sus.

Așa cum am precizat, criteriul de convergență se adaptează imediat la cazul intervalului  $(a, b]$ . Fără a mai intra în detalii, dăm următorul exemplu util în aplicații.

**EXEMPLU.**  $f$  local integrabilă pe  $(a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încît

$$\lim_{t \rightarrow a} (t - a)^\alpha f(t) = l \in \mathbb{R}.$$

1) Dacă  $\alpha < 1$ , atunci  $\int_a^b f$  este absolut convergentă.

2) Dacă  $\alpha \geq 1$  și  $l \neq 0$ ,  $\int_a^b f$  este divergentă.

În adevăr se compară cu  $g(t) = \frac{1}{(t - a)^\alpha}$  etc.

**Criteriul lui Abel.** Fie  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^1$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  și  $\int_a^\infty f'$  absolut

convergentă. Fie  $g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continuă astfel încît funcția  $G(x) = \int_a^x g$  să fie

mărginită pe  $[a, \infty)$ . Atunci  $\int_a^\infty fg$  este convergentă.

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $M > 0$  astfel încît  $|G(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in [a, \infty)$ ; avem

$$\int_a^x fg = fG|_a^x - \int_a^x f'G, \quad \forall x \in [a, \infty); \text{ dar } |f'G| \leq M|f'|$$

deci membrul drept are limită finită spre  $\infty$  din ipoteze ( $fG \rightarrow 0$  etc.) Deci  $\int_a^\infty fg$  este convergentă.

EXEMPLU.  $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$  este convergentă. În adevăr este suficient să arătăm că  $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$  este convergentă. Luăm  $f(t) = \frac{1}{t}$  și  $g(t) = \sin t$  și aplicăm criteriul lui Abel.

OBSERVAȚIE.  $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$  nu este absolut convergentă. În adevăr dacă ar fi, am deduce din  $\frac{1 - \cos 2t}{2} = \sin^2 t \leq |\sin t|$ , că  $\int_1^\infty \frac{1 - \cos 2t}{2t} dt$  este C. Dar  $\int_1^\infty \frac{\cos 2t}{t} dt$  este C (Abel) în timp ce  $\int_1^\infty \frac{dt}{t}$  este D și am ajuns la o contradicție. În definitiv  $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$  este C dar nu este AC.

#### 4. Integrala Riemann - Stieltjes

Matematicianul olandez T. STIELTJES (1856-1894) a avut ideea extinderii integralei Riemann.

Fie  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție **monoton crescătoare**. Pentru o diviziune  $v$   $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , vom nota  $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$ ,  $i = 1 \dots n$ .

Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție **mărginită** vom pune

$$S(v, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x);$$

$$s(v, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Generalizînd situația descrisă în paragraful 1 punem

$$\int_a^b f d\alpha = \inf_v S(v, f, \alpha), \quad \int_a^b f d\alpha = \sup_v s(v, f, \alpha)$$

(inf și sup după toate diviziunile  $v$ ).

Se spune că  $f$  este **integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu  $\alpha$  pe  $[a, b]$**  dacă  $\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$ . Scriem  $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$  ( $[a, b]$  este subînțeles).

În acest caz, notăm  $\int_a^b f d\alpha$  valoarea comună.

O serie întreagă de rezultate considerate în paragraful 1 se extind la noua situație (cazul integralei Riemann este  $\alpha(x) = x$ ). Astfel de exemplu:

**TEOREMA VIII. 15.** 1) Dacă  $f$  este continuă pe  $[a, b]$ , atunci  $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$  pentru orice  $\alpha$  crescătoare.

2) Dacă  $f$  este monotonă pe  $[a, b]$  și  $\alpha$  este crescătoare și continuă, atunci  $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ .

3) Dacă  $f \in \mathfrak{R}$  și  $\alpha$  este crescătoare și derivabilă cu  $\alpha' \in \mathfrak{R}$  atunci  $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$  și

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f \alpha' dx$$

(calculul integralei Riemann-Stieltjes cu ajutorul integralei Riemann).

Nu vom intra în detalii privind demonstrația acestei teoreme. Așa cum se observă din enunț, cazul funcțiilor  $\alpha$  crescătoare, dar nu neapărat continue, poate aduce fenomene noi față de situația întâlnită la integrala Riemann. Astfel, este o chestiune de oarecare subtilitate că definiția prezentată mai sus nu este echivalentă cu cea cu sume Riemann-Stieltjes (de tipul  $\sum f(\xi_i) \Delta\alpha_i$ ) în cazul în care  $\alpha$  nu este continuă. Nu vom intra în amănunte.

#### 5. 10 exerciții

1. Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_1^{1+x} e^{\cos t} dt$ .

2. a) Să se arate că  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1) \cdot \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n} \cdot \frac{\pi}{2} & n \text{ par} \\ \frac{2 \cdot 4 \dots (n-1)}{3 \cdot 5 \dots n} & n \text{ impar} \end{cases}$

b) Folosind a) să se stabilească relația  $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[2 \cdot 4 \dots 2n]^2}{[3 \cdot 5 \dots (2n-1)]^2 \cdot n}$  (numită formula lui

J. WALLIS, 1616 - 1703).

3. Fie şirul  $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ ,  $n \geq 1$ .

a) Să se arate că  $(a_n)_n$  este **descrescător** şi notînd  $a = \lim a_n$ , că  $a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n$ ,

$\forall n \geq 1$ . Deci  $\forall n \exists \theta_n \in (0,1)$  astfel ca  $a_n = a e^{\frac{\theta_n}{12n}}$ .

b) Folosind formula lui Wallis, să se arate că  $a = \sqrt{2\pi}$ .

c) Să se deducă formula lui D. STIRLING, (1692 – 1770):

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

4. Fie funcţia  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irațional sau } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{dacă } x = \frac{p}{q} \text{ (fracție ireductibilă } p, q > 0) \end{cases}$$

Să se arate că  $f$  este continuă în orice punct irațional. Să se deducă integrabilitatea lui  $f$  pe  $[0,1]$ .

5. Să se studieze convergența sau divergența următoarelor integrale improprii:

$$a) \int_0^1 \ln t dt; b) \int_0^\infty x e^{-x} dx; c) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}; d) \int_1^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

6. Să se calculeze  $I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx$ ;  $|r| \neq 1$  (numită integrala lui S. D. POISSON, 1781 – 1840).

$$7. \text{ Să se calculeze v.p. } \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+9} \text{ și v.p. } \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt[4]{|x-4|}}.$$

8. a) Fie  $P, Q$  polinoame cu coeficienți reali prime între ele. Să se arate că  $\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

converge dacă și numai dacă  $Q$  nu se anulează pe  $\mathbb{R}$  și  $\text{grad } Q \geq \text{grad } P + 2$ .

b) Fie  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

i) Dacă  $\beta > 1$  sau  $\beta = 1$  și  $\alpha < -1$ , atunci  $\int_2^\infty \frac{\ln^\alpha t}{t^\beta} dt$  converge.

ii) Dacă  $\beta < 1$  sau  $\beta = 1$  și  $\alpha \geq -1$ , atunci  $\int_2^\infty \frac{\ln^\alpha t}{t^\beta} dt$  diverge.

9. a) Să se studieze convergența integralelor:  $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}} dt$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$ .

b) Fie  $f(x) = 3x \cos x^3 - \frac{1}{x^2} \sin x^3$ ,  $x \geq 1$ . Să se arate că  $\int_1^\infty f$  este C dar  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$ .

10. Fie funcția  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1 & x = c \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$ , unde  $c \in (a,b)$ . Să se arate că  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

și  $\int_a^b f = 0$ . Să se deducă de aici că modificarea unei funcții integrabile Riemann într-un

număr finit de puncte nu afectează nici integrabilitatea, nici valoarea integralei.

## INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Fie  $F(x) = \int_1^{1+x} e^{\cos t} dt$ . Avem de calculat:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(0) = e^{\cos 1}$ .

2. a) Fie  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Avem  $I_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $I_1 = 1$ . Pentru  $n \geq 2$  integrînd prin părți rezultă:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x (-\cos x)' dx = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx.$$

Deducem relația de recurență  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ .

Folosind  $I_0, I_1$  se obține rezultatul cerut.

b) Avem  $\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $n \geq 1$  integrînd pe  $[0, \frac{\pi}{2}]$  și folosind formula de la punctul a) se obține cu un raționament simplu de şiruri formula lui Wallis.

3. a) În dezvoltarea  $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x(1 + \frac{1}{3}x^2 + \dots + \frac{1}{2k+1}x^{2k} + \dots)$ ,  $|x| < 1$  facem

$x = \frac{1}{2n+1}$ ,  $n \geq 1$  și obținem  $\ln \frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1} (1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots)$  sau

$$(n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \text{rezultă}$$

$$1 < (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n}) < 1 + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right] \text{ deci}$$

$$1 < (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n}) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)} \text{ obținem}$$

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} \text{ deci } a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}} \text{ și } a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a.$$

b) Pornim de la

$$(*) \quad n! = a \sqrt{n} \left( \frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1$$

și de la formula lui Wallis

$$(**) \quad \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \right]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \right]$$

Înlocuind în (\*\*)  $n!$  și  $(2n)!$  din (\*) se obține cu un scurt raționament  $a = \sqrt{2\pi}$  și apoi formula lui Stirling.

4. Fie  $\xi \in [0, 1]$  un număr irațional. Pentru orice natural  $n \geq 1$  există un natural  $l$  astfel încât  $\frac{l}{n} < \xi < \frac{l+1}{n}$ . Există deci un interval deschis  $I_n \subset [0, 1]$  ce conține  $\xi$  și astfel

încît pentru orice rațional  $x \in I_n$   $f(x) \neq \frac{1}{n}$ . Fie  $\varepsilon > 0$ . Există  $N \in \mathbb{N}$  astfel încît  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ .

Folosind observația de mai sus putem găsi un interval  $I \subset [0, 1]$ ,  $\xi \in I$  și  $f(x) < \frac{1}{N}$  pentru orice  $x \in I$  etc.

5. a) convergentă, b) divergentă, c) convergentă, d) convergentă. De exemplu pentru

$$a) \int_x^1 \ln t dt = -1 - x \ln x + x \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1. \text{ Pentru c), se poate pune } \sqrt{x} = t.$$

6. Considerăm suma Riemann

$$S_n = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n \ln(1 - 2r \cos \frac{k\pi}{n} + r^2) = \frac{\pi}{2} \ln \left[ (1+r)^2 \prod_{k=1}^{n-1} (1 - 2r \cos \frac{k\pi}{n} + r^2) \right].$$

Considerind descompunerea în factori a polinomului  $z^{2n} - 1$  peste  $\mathbb{C}$  rezultă

$$z^{2n} - 1 = (z^2 - 1) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - 2z \cos \frac{k\pi}{n} + z^2) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Înlocuind  $z = r$  deducem,

$$S_n = \frac{\pi}{2} \ln \left( \frac{r+1}{r-1} (r^{2n} - 1) \right).$$

Dacă  $|r| < 1$ ,  $r^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  și deci

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$$

(căci integrala există!). Dacă  $|r| > 1$  avem

$$\ln(1 - 2r \cos x + r^2) = \ln r^2 \left( \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \cos x + 1 \right)$$

și ne reducem la cazul precedent. Se obține

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx = 2\pi \ln |r|, \quad |r| > 1.$$

$$7. \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 9} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{dx}{x^2 + 9} = \frac{\pi}{3}; \text{ v.p. } \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{|x-4|}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_2^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{|x-4|}} + \int_{4+\varepsilon}^5 \frac{dx}{\sqrt{|x-4|}} \right) \text{ etc.}$$

8. Se aplică criteriile de comparație etc.

9. a) convergente;

b) pentru convergența integralei se observă că

$$\left| \frac{\sin x^3}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \text{ și că } \int_1^\infty x \cos x^3 dx$$

este convergentă (se poate face schimbarea de variabilă  $x^3 = t$  și se aplică criteriul lui

Abel). Se poate și observa că  $f(x) = \left( \frac{1}{x} \sin x^3 \right)$ .

10. Fie  $v$  o diviziune  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  astfel încît  $c = x_k$ .

$$S(v, f) - s(v, f) = x_{k+1} - x_{k-1}.$$

Se aplică teorema VIII. 1.  $\int_a^b f = 0$  căci  $s(v, f) = 0 \quad \forall v$ .

# INTEGRALE CU PARAMETRU (FUNCTII DEFINITE PRIN INTEGRALE)

## INTRODUCERE

Problematica acestei lecții este o continuare a celor expuse în lecția a V-a. Integrala este folosită pentru obținerea de "noi funcții" în același mod în care au fost folosite, de exemplu, seriile de puteri. Temele dominante sunt legate de "transferul" de proprietăți de la funcțiile ce definesc la cele nou definite și studiul concret al unor funcții definite prin integrale. Deși cadrul "natural" al studiului funcțiilor definite prin integrale este teoria integralei Lebesgue (care va fi studiată în lecțiile următoare), am considerat utilă prezentarea subiectului în cadrul mai familiar al integralei Riemann. În finalul lecției studiem funcția Gamma, una din cele mai importante ale Analizei matematice, extindere a factorialului de la numere naturale.

## 1. Integrale Riemann cu parametru

Fie  $Y$  o mulțime nevidă și  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un interval compact; fie  $f: [a, b] \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto f(x, y)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $y \in Y$ , o funcție. Să presupunem că pentru orice  $y \in Y$ , funcția  $x \mapsto f(x, y)$  este integrabilă Riemann pe  $[a, b]$ . Se poate deci defini o nouă funcție  $F: Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

Se spune că funcția  $F$  este definită ca o **integrală cu parametru**, sau că  $F$  este o **integrală cu parametru**.

**Definiția IX. 1.** Fie  $Y$  un spațiu metric,  $A \subset Y$ ,  $\beta \in Y$  un punct de acumulare pentru  $A$ ,  $f: [a, b] \times A \rightarrow \mathbb{R}$  și  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Spunem că  $f$  tinde către  $\varphi$  când  $y$  tinde la  $\beta$  **uniform în raport cu**  $x \in [a, b]$  dacă:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încât pentru orice  $y \in A$  cu  $0 < d(y, \beta) < \delta_\varepsilon$  să avem  $|f(x, y) - \varphi(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [a, b]$  (aici  $d$  este distanța în  $Y$ ). În acest caz scriem

$$f \xrightarrow[y \rightarrow \beta]{U} \varphi.$$

**TEOREMA IX. 1.**  $f \xrightarrow[y \rightarrow \beta]{U} \varphi$  dacă și numai dacă pentru orice șir  $(y_n)_n$  în  $A$ ,  $y_n \rightarrow \beta$  ( $y_n \neq \beta$ ), șirul de funcții  $f_n(x) = f(x, y_n)$  converge uniform către  $\varphi$ . Demonstrația acestei teoreme rezultă din definiții.

**TEOREMA IX. 2.** Folosind notațiile din definiția IX. 1, să presupunem că integrala cu parametru  $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  este definită pe  $A$  și că  $f \xrightarrow[y \rightarrow \beta]{U} \varphi$ .

Atunci  $\varphi \in \mathcal{R}_{[a, b]}$  și în plus,

$$\lim_{y \rightarrow \beta} F(y) = \lim_{y \rightarrow \beta} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b (\lim_{y \rightarrow \beta} f(x, y)) dx.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $(y_n)_n$  un șir în  $A$ ,  $y_n \rightarrow \beta$  ( $y_n \neq \beta$ ). Șirul de funcții  $f_n(x) = f(x, y_n)$  este un șir de funcții integrabile Riemann și  $f_n \xrightarrow{UC} \varphi$ . Rezultă

$\varphi \in \mathcal{R}_{[a, b]}$ . Fie  $\forall \varepsilon > 0$ . Există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $y \in A$ ,  $0 < d(y, \beta) < \delta_\varepsilon$ , să implice  $|f(x, y) - \varphi(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [a, b]$ . Deducem

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f(x, y) - \varphi(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)| dx \leq \varepsilon(b - a).$$

Deci  $|F(y) - \int_a^b \varphi(x) dx| \leq \varepsilon(b - a), 0 < d(y, \beta) < \delta_\varepsilon$ , ceea ce demonstrează teorema.

**TEOREMA IX. 3.** (continuitatea integralei cu parametru). Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  deschisă și  $f: [a, b] \times A \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție **continuă**. Atunci funcția  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \text{ este } \textbf{continuă}.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $\beta \in A$ . Pentru demonstrarea teoremei, este suficient să arătăm că  $f \xrightarrow[y \rightarrow \beta]{U} \varphi$  unde  $\varphi(x) = f(x, \beta), x \in [a, b]$ . Fie  $\forall \varepsilon > 0$ ; pentru fiecare

$\alpha \in [a, b]$ ,  $f$  este continuă în  $(\alpha, \beta)$  deci există o vecinătate  $V_\alpha$  a lui  $\alpha$  deschisă în  $[a, b]$  și o vecinătate (deschisă)  $W_\alpha$  a lui  $\beta$  în  $A$  astfel încît

$$|f(x, y) - f(\alpha, \beta)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, x \in V_\alpha, y \in W_\alpha \text{ deci}$$

$$|f(x, y) - f(x, \beta)| \leq \varepsilon, x \in V_\alpha, y \in W_\alpha.$$

Familia  $(V_\alpha)_{\alpha \in [a, b]}$  este o acoperire deschisă a compactului  $[a, b]$  deci putem extrage o acoperire finită  $\{V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}\}$ . Să notăm  $W = W_{\alpha_1} \cap \dots \cap W_{\alpha_n}$  și fie  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel încît  $B(\beta, \delta_\varepsilon) \subset W$ . Avem

$$|f(x, y) - f(x, \beta)| \leq \varepsilon, \forall x \in [a, b] \text{ și } y \in B(\beta, \delta_\varepsilon),$$

ceea ce demonstrează că  $f \xrightarrow[y \rightarrow \beta]{U} \varphi$ .

**TEOREMA IX. 4.** (a lui Leibniz, de derivare a integralelor cu parametru). Fie  $f: [a, b] \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă ( $(c, d) \subset \mathbb{R}$  un interval deschis nevid).

Presupunem că  $\frac{\partial f}{\partial y}$  există și este continuă pe  $[a, b] \times (c, d)$ . Atunci integrala cu parametru  $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  este o funcție derivabilă pe  $(c, d)$  și  $\forall y \in (c, d)$ ,

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $\forall y_0 \in (c, d)$ . Vom arăta că

$$F'(y_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx.$$

Aceasta revine la

$$\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx.$$

Este suficient să arătăm că  $g(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}$ ,  $y \neq y_0$  tinde la  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)$

uniform în raport cu  $x$  cînd  $y \rightarrow y_0$ . Acest fapt rezultă din teorema creșterilor finite  $\frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi_x)$  cu  $\xi_x$  între  $y$  și  $y_0$ , folosind continuitatea

funcției  $\frac{\partial f}{\partial y}$  și teorema IX. 2. Teorema IX. 4 se mai numește și "teorema de derivare sub integrală".

**EXEMPLU.** Pentru  $n$  natural (fixat), definim

$$F_n(y) = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + y^2)^n}, y \in (0, \infty).$$

Aplicînd teorema IX. 4, obținem

$$F'_n(y) = -2ny \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{n+1}} = -2ny F_{n+1}(y).$$

Pornind de la  $F_1(y) = \frac{1}{y} \arctg \frac{1}{y}$ , se pot obține prin derivări succesive integralele  $F_n$ .

Fie  $f: [a, b] \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  continuă și astfel încît  $\frac{\partial f}{\partial y}$  să fie continuă.

Considerăm funcția

$$\Phi(u, v, y) = \int_u^v f(x, y) dx, u, v \in [a, b], y \in (c, d).$$

Folosind proprietățile integralei Riemann și teorema IX. 4, deducem:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v, y) = -f(u, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v, y) = f(v, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(u, v, y) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

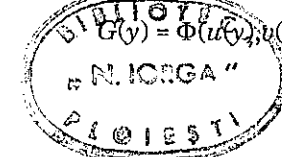
Să presupunem că  $u, v: (c, d) \rightarrow [a, b]$  sunt funcții de clasă  $C^1$ ,  $u = u(y)$ ,  $v = v(y)$  și că  $f: [a, b] \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și cu  $\frac{\partial f}{\partial y}$  continuă. Să considerăm funcția:

$$G(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx.$$

$G$  este derivabilă pe  $(c, d)$  și avem formula:

$$G'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + v'(y)f(v(y), y) - u'(y)f(u(y), y),$$

numită "regula generală de derivare sub integrală". În adevăr,



și se aplică teorema de derivare a funcțiilor compuse.

**TEOREMA IX. 5.** (integrarea integralelor cu parametru). Fie  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Atunci

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Pentru  $x \in [a, b]$ , considerăm

$$F(x) = \int_a^x \left( \int_c^d f(t, y) dy \right) dt \text{ și } G(x) = \int_c^x \left( \int_a^b f(t, y) dt \right) dy.$$

Deducem cu ușurință că  $F$  și  $G$  sunt derivabile pe  $[a, b]$  și

$$F'(x) = \int_c^d f(x, y) dy = G'(x).$$

Dar  $F(a) = G(a) = 0$ , deci  $F = G$  pe  $[a, b]$ ; în particular,  $F(b) = G(b)$ , ceea ce era de demonstrat.

**Comentariu.** Teorema IX. 5 se mai numește "regula de intervertire a ordinii de integrare" și arată că două integrale "iterate" sunt egale. Semnificația acestui fapt va spori atunci când vom arăta, în lecțiile viitoare, că valoarea comună a celor două integrale iterate este tocmai integrala "dublă" a funcției  $f$  pe dreptunghiul  $[a, b] \times [c, d]$ .

## 2. Integrale improprii cu parametru

Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  și  $f: [a, b) \times A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in [a, b)$ ,  $y \in A$ . Vom presupune că pentru orice  $y \in A$ , funcția  $x \mapsto f(x, y)$  este local integrabilă pe  $[a, b)$  și că  $\int_a^b f(x, y) dx$  converge.

Se poate defini funcția  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ . Se spune că funcția  $F$  este definită ca o **integrală improprie cu parametru**, sau că  $F$  este o **integrală improprie cu parametru**.

Pentru  $a \leq t < b$ , să considerăm  $G(y, t) = \int_a^t f(x, y) dx$ ,  $G: A \times [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definiția IX. 2.** Dacă, în ipotezele de mai sus,  $G \xrightarrow{U} F$ , atunci spunem că

integrala  $\int_a^b f(x, y) dx$  **converge uniform** (în raport cu  $y$ ) pe  $A$ .

Să observăm că aceasta revine la:  $\forall \varepsilon > 0 \exists b_\varepsilon < b$  astfel încît  $\left| \int_{b_\varepsilon}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon$ , pentru orice  $b_\varepsilon < t < b$  și orice  $y \in A$ .

**TEOREMA IX. 6.** (continuitatea integralei improprii cu parametru). Să presupunem că funcția  $f: [a, b) \times A \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și că  $\int_a^b f(x, y) dx$  converge uniform pe  $A$ . Atunci funcția  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ , este continuă.

**DEMONSTRAȚIE.** Alegem un șir  $t_n \rightarrow b$ ,  $a \leq t_n < b$ . Folosind teorema IX. 1, rezultă că șirul de funcții  $G_n(y) = G(y, t_n)$  converge uniform la  $F$  ( $G_n \xrightarrow{UC} F$ ).

Teorema IX. 3 asigură continuitatea funcțiilor  $G_n$ , iar convergența uniformă a șirului  $(G_n)_n$  transferă continuitatea la funcția limită  $F$ .

**TEOREMA IX. 7.** (derivarea integralei improprii cu parametru). Să presupunem că  $f: [a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și că există  $\frac{\partial f}{\partial y}$  continuă.

Dacă  $\int_a^b f(x, y) dx$  este convergentă și dacă integrala  $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$  este **uniform convergentă** pe  $A$ , atunci funcția  $F: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ , este

derivabilă pe  $(c, d)$  și  $F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$  (Leibniz).

**DEMONSTRAȚIE.** Alegem un șir  $t_n \rightarrow b$ ,  $a \leq t_n < b$ . Șirul de funcții  $G_n(y) = G(y, t_n)$  converge (punctual) la  $F$  și folosind teorema IX. 4,  $G'_n \xrightarrow{U} H$ , unde

$H(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ . Aplicând teorema de derivare termen cu termen a șirurilor

de funcții,  $F$  este derivabilă și  $F' = H$ . Teorema IX. 7 se numește și teorema de derivare sub integrală.

**TEOREMA IX. 8.** Fie  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă, astfel încît  $\int_a^b f(x, y) dx$  să fie uniform convergentă. Atunci

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $t_n \rightarrow b$ ,  $a \leq t_n < b$ . Folosind notațiile anterioare  $G_n \xrightarrow{U} F$ .

Deci  $\int_c^d G_n(y) dy \rightarrow \int_c^d F(y) dy$  sau  $\int_c^d \left( \int_a^{t_n} f(x, y) dx \right) dy \rightarrow \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ . Aplicînd

teorema IX. 5, rezultă că  $\int_c^d \left( \int_a^{t_n} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{t_n} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ . Deci există

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d \left( \int_a^{t_n} f(x, y) dx \right) dy$  și această limită este egală cu  $\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ . Dar șirul

$(t_n)_n$  era arbitrar așa că rezultă că  $\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$  este convergentă și are

loc egalitatea din enunț.

**OBSERVAȚIE.** Rezultate analoage teoremelor precedente se obțin (cu modificări evidente) în cazul intervalelor  $(a, b]$  sau  $(a, b)$ . Lăsăm în seama cititorului formularea și demonstrarea acestora.

Din cele de mai sus rezultă importanța noțiunii de uniform convergență a integralelor improprii. Este astfel util să avem **criterii** de convergență uniformă a integralelor. Iată câteva:

**Criteriul general (Cauchy).** Fie  $f : [a, b] \times A \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încît pentru orice

$y \in A$ , funcția  $x \mapsto f(x, y)$  este local integrabilă. Atunci  $\int_a^b f(x, y) dx$  este uniform

convergentă dacă și numai dacă  $\forall \varepsilon > 0 \exists b_\varepsilon < b$  astfel încît pentru orice  $u, v$

$b_\varepsilon < u, v < b$ , avem  $\left| \int_u^v f(x, y) dx \right| < \varepsilon$ , pentru orice  $y \in A$ .

Demonstrația repetă ideile din demonstrația criteriului analog pentru integrale improprii.

Se deduce imediat

**Criteriul de comparație.** Fie  $f$  ca mai sus și  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încît

$|f(x, y)| \leq g(x)$  pentru orice  $x \in [a, b]$  și  $y \in A$ . Dacă  $\int_a^b g(x) dx$  este convergentă,

atunci  $\int_a^b f(x, y) dx$  este uniform convergentă.

**EXEMPLU.** Să considerăm  $\int_0^\infty \frac{\sin xy}{1+x^2} dx$ ,  $y \in \mathbb{R}$ . Avem  $\left| \frac{\sin xy}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$ ,

$\forall x \in [0, \infty)$  și  $\forall y \in \mathbb{R}$ . Integrala  $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$  fiind convergentă, rezultă

$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{1+x^2} dx$  uniform convergentă. Observînd că  $f(x, y) = \frac{\sin xy}{1+x^2}$  este continuă

pe  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ , deducem din teorema IX. 6 că funcția  $F(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{1+x^2} dx$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ .

**Criteriul lui Abel.** Fie  $f : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^1$ ,  $I$  un interval în

$\mathbb{R}$ , astfel încît  $\lim_{x \rightarrow b} f(x, y) = 0$  uniform în raport cu  $y$  și  $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx$  să fie

uniform convergentă. Fie  $g : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$  continuă cu proprietatea că există  $M > 0$  astfel încît

$$\left| \int_a^x g(x, y) dy \right| \leq M, \forall x \in [a, b] \text{ și } \forall y \in I.$$

În aceste condiții,  $\int_a^b f(x, y) g(x, y) dx$  converge uniform. Demonstrația reia ideile

din criteriul lui Abel pentru integrale improprii.

EXEMPLU. Fie  $F(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $y \geq 0$ . Din inegalitatea  $|\frac{e^{-xy} \sin x}{x}| \leq e^{-xy}$ , se deduce imediat că  $F$  este bine definită pentru  $y > 0$ . Pentru  $y = 0$ ,  $F(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ , care este convergentă. În definitiv, avem o funcție  $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Vom încerca să calculăm  $F$  determinând astfel și valoarea integralei  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ . Pentru aceasta să observăm pentru început că  $F$  este continuă. În adevăr, este suficient să arătăm că  $G(y) = \int_1^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$  este o funcție continuă cu  $F(y) = \int_0^1 e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx + G(y)$  ( $\int_0^1 e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$  este de fapt o integrală Riemann cu parametru). Pentru a arăta că  $G$  este continuă, este suficient să arătăm că este uniform convergentă integrala  $\int_1^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$ . Pentru aceasta se poate aplica criteriul lui Abel luind  $f(x, y) = \frac{e^{-xy}}{x}$  și  $g(x, y) = \sin x$ . În continuare, avem pentru  $y > 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}(e^{-xy} \frac{\sin x}{x}) = -e^{-xy} \sin x$ ,  $x \in [0, \infty)$ . Fie  $y_0 > 0$ . Pentru  $y \geq y_0$   $|e^{-xy} \sin x| \leq e^{-xy_0}$ . Aplicând criteriul de comparație, deducem că  $\int_1^{\infty} e^{-xy} \sin x dx$  converge uniform pentru  $y \geq y_0$ . Teorema de derivare a integralelor improprii cu parametru se poate deci aplica și obținem  $F'(y) = -\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x dx$ ,  $y > y_0$ . Cum însă  $y_0 > 0$  era arbitrar deducem că  $F'(y) = -\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x dx$ ,  $\forall y > 0$ . Un calcul simplu arată că  $F'(y) = -\frac{1}{1+y^2}$ ,  $y > 0$  și deci

$$F(y) = -\arctg y + C, C \text{ constantă}, \forall y > 0.$$

Dar  $|F(y)| \leq \int_0^{\infty} e^{-xy} dx = \frac{1}{y}$ ,  $y > 0$  și deci  $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = 0$ . Ca atare  $C = \frac{\pi}{2}$  și în definitiv  $F(y) = \frac{\pi}{2} - \arctg y$ ,  $y > 0$ . Dar  $F$  este continuă pe  $[0, \infty)$  și deci  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = F(0) = \lim_{y \rightarrow 0} F(y) = \frac{\pi}{2}$ , rezultat remarcabil. Se deduce imediat că:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \alpha < 0 \end{cases}$$

### 3. Funcțiile $B, \Gamma$

**Definiția IX. 3. Funcția gamma a lui Euler**,  $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , se definește prin

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0.$$

Pentru fiecare  $\alpha \in (0, \infty)$ ,  $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$  converge. În adevăr, este suficient să arătăm convergența integralelor  $\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ ,  $\int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ .

Pentru prima integrală observăm că  $x^{\alpha-1} e^{-x} \leq x^{\alpha-1}$ ,  $x \in (0, 1]$  și cum  $\alpha > 0$ ,  $\int_0^1 x^{\alpha-1} dx$  converge.

Pentru a doua integrală, avem, de exemplu,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} x^{\alpha-1} = 0$  ( $\alpha > 0$ ) și aplicăm criteriul de convergență la limită. Mai mult, notînd

$$F_1(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx, F_2(\alpha) = \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0$$

și observînd că pentru  $\alpha_0 > 0$  avem

$$x^{\alpha-1} e^{-x} \leq x^{\alpha_0-1}, \quad \forall x \in (0, 1] \text{ și } \alpha \geq \alpha_0,$$

$$x^{\alpha-1}e^{-x} \leq x^{\alpha_0-1}e^{-x}, \forall x \in [1, \infty) \text{ și } \alpha \in (0, \alpha_0].$$

Deducem, folosind criteriul de comparație pentru integrale improprii cu parametru, continuitatea funcțiilor  $F_1$  și  $F_2$  pe  $(0, \infty)$  și în definitiv continuitatea funcției  $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , deoarece  $\Gamma = F_1 + F_2$ . Continuând în aceeași manieră și aplicând teorema de derivare a integralelor improprii cu parametru, se poate arăta că  $\Gamma$  este de clasă  $C^\infty$  pe  $(0, \infty)$  și

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} (\ln x)^n e^{-x} dx, n \in \mathbb{N}.$$

În plus, un calcul evident arată că

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

**TEOREMA IX. 9.** Pentru orice  $\alpha > 0$ , avem  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Pentru  $0 < a < b < \infty$  avem

$$\int_a^b x^\alpha e^{-x} dx = -x^\alpha e^{-x} \Big|_a^b + \alpha \int_a^b x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Trecînd la limită pentru  $a \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow \infty$  obținem

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

**COROLAR.** Pentru  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(n+1) = n!$ . Așadar, funcția gamma este o extindere a funcției factorial.

**Definiția IX. 4.** Funcția beta  $B: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  se definește prin

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

Este un exercițiu simplu stabilirea convergenței integralei pentru  $p, q > 0$  (integrala este improprie pe intervalul  $(0, 1)$ ). Astfel se consideră separat

$$\int_0^\varepsilon x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \text{ și } \int_\varepsilon^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, 0 < \varepsilon < 1$$

și se aplică criteriul de comparație cu  $\frac{1}{x^k}$  respectiv cu  $\frac{1}{(1-x)^k}$ .

Este imediat de observat că  $B(p, q) = B(q, p)$ ,  $\forall p, q > 0$ . Vom da fără demonstrație următorul rezultat util.

**TEOREMA IX. 10.**

$$1) \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q > 0;$$

$$2) \quad B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad 0 < p < 1.$$

Utilizînd această teoremă, deducem

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi \text{ și deci } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Dar  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx$  (cu o schimbare evidentă de variabilă).

În definitiv,  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  și deci  $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ , rezultat important (folosit în teoria probabilităților, la studiul repartiției normale).

#### 4. 10 exerciții

1. Să se calculeze  $F(y) = \int_0^\pi \frac{\ln(1+y \cos x)}{\cos x} dx$ ,  $|y| < 1$ , prin derivarea integralei cu parametru.

2. Să se calculeze  $G(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(y^2 - \sin^2 x) dx$ ,  $y > 1$ .

3. Să se arate că  $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx$  converge uniform în raport cu  $\alpha$  pentru  $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ .

4. Să se calculeze integrala  $I = \int_0^1 \frac{\arctg x}{x \sqrt{1-x^2}} dx$ .

5. Să se calculeze  $\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x dx$ ,  $\alpha, \beta > 0$ .

6. Să se calculeze  $I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$  și  $J = \int_0^{\infty} x^p \exp(-x^q) dx$ ,  $p > -1$ ,  $q > 0$ .

7. Să se calculeze  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx$  punând  $\sin^2 x = t$  și folosind funcțiile B,  $\Gamma$ .

8. Să se calculeze  $I(b) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

9. Să se arate că  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$ ,  $a, b > 0$ .

10. Să se calculeze  $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$ ,  $a, b > 0$ .

### INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Se prelungește funcția  $\frac{\ln(1+y \cos x)}{\cos x}$  prin continuitate în punctele  $(\frac{\pi}{2}, y)$  cu valoarea  $y$ . Prin derivare sub integrală avem

$$F'(y) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+y \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}} \quad (\text{cu } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \text{ etc.}).$$

Deci  $F(y) = \pi \arcsin y + C$  dar  $F(0) = 0$  deci  $C = 0$ . În definitiv  $F(y) = \pi \arcsin y$ .

2.  $G'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2y dx}{y^2 - \sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2 - 1}}$  ( $\operatorname{tg} x = t$  etc.) sau  $G(y) = \pi \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) + C$ . Pentru determinarea constantei  $C$  se scrie

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(y^2 - \sin^2 x) dx - \pi \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \pi \ln \frac{y}{y + \sqrt{y^2 - 1}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{1}{y^2} \sin^2 x) dx.$$

Dar  $|\ln(1 - \frac{1}{y^2} \sin^2 x)| \leq |\ln(1 - \frac{1}{y^2})|$  și făcând  $y \rightarrow +\infty$  obținem  $C = -\pi \ln 2$  etc.

3. Integrala  $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  este convergentă deci  $\forall \varepsilon > 0 \exists A_0$  astfel încât  $A > A_0$  să implice

$|\int_A^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt| < \varepsilon$ . Avem  $\int_A^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_{A\alpha}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ . Luând  $A > \frac{A_0}{\alpha_0}$  vom avea  $|\int_A^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx| < \varepsilon$   $\forall \alpha \geq \alpha_0$  deci uniform convergența integralei.

4. Se pleacă de la  $F(y) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x \sqrt{1-x^2}} dx$   $y \geq 0$  care se calculează prin derivare sub

integrală. Se obține  $F(y) = \frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2})$  și deci  $I = F(1) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$ .

5.  $\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x dx = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{x} dx + \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha - \beta)x}{x} dx \right\}$  și folosind

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \alpha < 0 \end{cases}$$

deducem

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x dx = \begin{cases} 0, & \alpha < \beta \\ \frac{\pi}{4}, & \alpha = \beta \\ \frac{\pi}{2}, & \alpha > \beta \end{cases}$$

6. În  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$  se face schimbarea  $x = \frac{t}{1-t}$  și se ajunge la

$$I = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Pentru  $J = \int_0^{\infty} x^p e^{-x^q} dx$  se face  $x^q = t$  și se ajunge la funcția  $\Gamma$ .

7. Cu schimbarea  $\sin^2 x = t$  se ajunge la  $I = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{32}$ .

8. După verificarea condițiilor de derivare sub integrală obținem:

$$I'(b) = - \int_0^{\infty} 2e^{-x^2} x \sin bx \, dx$$

și o integrare prin părți conduce la relația  $I'(b) = -2bI$ .

Se obține  $I(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$  (folosind  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ).

9.  $\int_0^{\infty} e^{-xy} dx$  este uniform convergentă în raport cu  $y$  pentru  $y \geq y_0 > 0$ . Obținem

$$\int_0^{\infty} \left( \int_a^b e^{-xy} dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_0^{\infty} e^{-xy} dx \right) dy,$$

de unde rezultatul.

10. Se procedează analog exercițiului 9 folosind exercițiul 3. Se obține  $I = \frac{\pi}{2}(b-a)$ .

## LECȚIA A X-A

# MĂSURĂ ȘI INTEGRALĂ

## INTRODUCERE

Această lecție este consacrată prezentării primelor noțiuni de teoria măsurii. Este o lecție ceva mai abstractă decât precedentele, din cauza gradului de generalitate al subiectului. Considerăm utilă această generalitate care, odată însușită, deschide largi posibilități de aplicare (în teoria probabilităților, analiza Fourier, în studiul fractalilor etc.). Exemplul fundamental al măsurii Lebesgue în  $\mathbb{R}^n$  va fi analizat în lecția următoare.

## 1. Măsurabilitatea

Pentru o mulțime nevidă fixată  $X$  vom nota cu  $\mathcal{P}(X)$  mulțimea părților sale. Deci sunt echivalente afirmațiile:  $A \in \mathcal{P}(X)$  și  $A \subset X$ .

**Definiția X. 1.** O submulțime  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ , deci o colecție de părți ale lui  $X$ , se numește  $\sigma$ -algebră pe  $X$  dacă:

- i)  $X \in \mathcal{A}$ ;
- ii)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow CA \in \mathcal{A}$ ;
- iii)  $(A_n)_n$  șir în  $\mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ .

Rezultă imediat și următoarele proprietăți:

- iv)  $\mathcal{A} \neq \emptyset, \emptyset \in \mathcal{A}$ ;
- v)  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A - B \in \mathcal{A}$ ;
- vi)  $(A_n)_n$  șir în  $\mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_n A_n \in \mathcal{A}$ .

**EXEMPLUL 1.**  $\mathcal{P}(X)$  este o  $\sigma$ -algebră pe  $X$ .

**EXEMPLUL 2.** Dacă  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  este o familie de  $\sigma$ -algre pe  $X$ , atunci  $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

este o  $\sigma$ -algebră pe  $X$ .

**TEOREMA X. 1.** Fie  $C \subset \mathcal{P}(X)$ . Există și este unică o  $\sigma$ -algebră  $\mathcal{A}$  pe  $X$  astfel încît:

- 1)  $C \subset \mathcal{A}$ ;
  - 2) dacă  $\mathcal{B}$  este o  $\sigma$ -algebră pe  $X$  astfel încît  $C \subset \mathcal{B}$ , atunci  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ .
- $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$  se numește  $\sigma$ -algebra generată de  $C$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  familia tuturor  $\sigma$ -algebrelor pe  $X$  cu proprietatea că  $C \subset \mathcal{A}_i, \forall i \in I$  (asemenea algebre există, de exemplu  $\mathcal{P}(X)$ ). Este suficient să luăm  $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ .

**Definiția X. 2.** Dacă  $\mathcal{A}$  este o  $\sigma$ -algebră pe  $X$ , perechea  $(X, \mathcal{A})$  se numește **spațiu măsurabil**, iar mulțimile din  $\mathcal{A}$  **mulțimi măsurabile** (în  $X$ ).

Dacă nu este pericol de confuzie, spațiul măsurabil  $(X, \mathcal{A})$  va fi notat  $X$ .

**Definiția X. 3.** Fie  $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$  spații măsurabile. O funcție  $f: X \rightarrow Y$  se zice **măsurabilă** dacă pentru orice  $B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ .

**TEOREMA X. 2.** Compunerea a două funcții măsurabile este măsurabilă. Demonstrația este imediată.

**Definiția X. 4.** Fie  $X$  o mulțime. O submulțime  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  se numește **topologie** pe  $X$  dacă:

- i)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ ;
- ii)  $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$ ;
- iii) pentru orice familie  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  de elemente din  $\mathcal{T}, A = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$  este în  $\mathcal{T}$ .

**EXEMPLUL 1.**  $\mathcal{P}(X)$  este o topologie pe  $X$  (numită topologia discretă).

**EXEMPLUL 2.** Dacă  $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  este o familie de topologii pe  $X$ , atunci  $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$  este o topologie pe  $X$ .

**TEOREMA X. 3.** Fie  $C \subset \mathcal{P}(X)$ . Există și este unică o topologie  $\mathcal{T}$  pe  $X$  astfel încît:

- 1)  $C \subset \mathcal{T}$ ;

2) Dacă  $\mathcal{S}$  este o topologie pe  $X$  astfel încît  $C \subset \mathcal{S}$  atunci  $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ . Topologia  $\mathcal{T}$  se numește topologia generată de  $C$ .  
Demonstrația este similară cu cea a teoremei X. 1.

**Definiția X. 5.** Dacă  $\mathcal{T}$  este o topologie pe  $X$  atunci perechea  $(X, \mathcal{T})$  se numește **spațiu topologic**, iar mulțimile din  $\mathcal{T}$  se zic **mulțimi deschise** (în  $X$ ).

Dacă nu este pericol de confuzie, spațiul topologic  $(X, \mathcal{T})$  va fi notat  $X$ . Elementele unui spațiu topologic se zic **puncte**.

**EXEMPLUL 1.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric. Familia  $\mathcal{T}$  a mulțimilor deschise în  $X$  este o topologie pe  $X$  (conform teoremei III. 4). Aceasta este numită topologia canonică a unui spațiu metric.

În cele ce urmează, spațiile metrice vor fi considerate spații topologice cu topologia canonică.

**EXEMPLUL 2.** Fie  $X = \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ . Considerăm pe  $\bar{\mathbb{R}}$  topologia generată de toate intervalele de tipul  $[-\infty, \beta), (a, b), (\alpha, +\infty], \alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$ . Se arată ușor că orice mulțime deschisă a acestei topologii se poate scrie ca reuniune numărabilă de intervale de tipul de mai sus. Pe de altă parte, mulțimile deschise în  $\bar{\mathbb{R}}$  conținute în  $\mathbb{R}$  sunt exact mulțimile topologiei canonice a lui  $\mathbb{R}$  ca spațiu metric cu distanța uzuală.

$\bar{\mathbb{R}}$  va fi considerat spațiu topologic, cu topologia descrisă în acest exemplu.

**Definiția X. 6.** Fie  $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$  spații topologice.

- i) o funcție  $f: X \rightarrow Y$  se zice **continuă în punctul**  $a \in X$  dacă pentru orice  $B \in \mathcal{S}, f(a) \in B$  există  $A \in \mathcal{T}, a \in A, A \subset f^{-1}(B)$ .
- ii)  $f: X \rightarrow Y$  se zice **continuă** dacă pentru orice  $B \in \mathcal{S}, f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ .

**OBSERVAȚIE.** Evident,  $f$  este continuă dacă și numai dacă este continuă în orice punct din  $X$ .

**TEOREMA X. 4.** Compunerea a două funcții continue este continuă.

Demonstrația este imediată.

**Comentariu.** Măsurabilitatea decrie în mod axiomatic cadrul "calitativ" al măsurării mulțimilor (intuitiv - arii ale mulțimilor plane, volume etc.). Topologia descrie cadrul natural al unei "geometрии" foarte generale. Aceste structuri permit studiul funcțiilor măsurabile și respectiv al funcțiilor continue.

**Definiția X. 7.** Fie  $(X, \mathcal{T})$  un spațiu topologic.  $\sigma$  – algebra generată de  $\mathcal{T}$  se numește  $\sigma$  – algebra mulțimilor **boreliene** sau mai pe scurt  $\sigma$  – algebra Borel pe  $X$  (după numele matematicianului francez E. BOREL, 1871 – 1956).

**EXEMPLUL 1.** Într-un spațiu topologic  $(X, \mathcal{T})$ , complementarele mulțimilor deschise se zic mulțimi **închise**. Orice mulțime închisă este boreliană.

**EXEMPLUL 2.** În  $\mathbb{R}$  intervalele  $[a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  sunt mulțimi boreliene.

În cele ce urmează, vom întâlni în general următoarea situație.

**Definiția X. 8.** Fie  $(X, \mathcal{A})$  un spațiu măsurabil și  $(Y, \mathcal{T})$  un spațiu topologic. O funcție  $f: X \rightarrow Y$  se zice **măsurabilă** dacă pentru orice mulțime  $B \in \mathcal{T}$ ,  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ , deci  $f$  întoarce mulțimi deschise în mulțimi măsurabile.

**OBSERVAȚII.** 1) Se poate arăta cu ușurință că în cazul definiției X. 8,  $f$  este măsurabilă dacă și numai dacă  $f$  este măsurabilă în sensul definiției X. 3, dacă pe  $Y$  se consideră  $\sigma$  – algebra mulțimilor **boreliene**.

2) Rezultă imediat că dacă  $f: X \rightarrow Y$  este măsurabilă și  $g: Y \rightarrow Z$  continuă atunci  $g \circ f: X \rightarrow Z$  este măsurabilă.

**EXEMPLU.** Fie  $(X, \mathcal{A})$  un spațiu măsurabil și  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . Se poate arăta că  $f$  este măsurabilă  $\Leftrightarrow f^{-1}(\alpha, +\infty] \in \mathcal{A}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f^{-1}[-\infty, \alpha] = \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

Urmărim stabilirea principalelor proprietăți algebrice ale funcțiilor măsurabile. Vom începe prin următoarea:

**TEOREMA X. 5.** Fie  $(X, \mathcal{A})$  un spațiu măsurabil și  $f = (f_1, f_2): X \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ , o funcție. Atunci  $f$  este măsurabilă dacă și numai dacă  $f_1, f_2: X \rightarrow \mathbb{R}$  sunt măsurabile.

**DEMONSTRAȚIE.** Așa cum am stabilit mai sus,  $\mathbb{R}$  și  $\mathbb{R}^2$  sunt spații topologice în mod natural. Dacă  $f$  este măsurabilă, atunci  $f_1, f_2$  rezultă măsurabile folosind observația 2) de mai sus.

Pentru demonstrarea implicației inverse, să observăm că orice mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^2$  reuniunea numărabilă de dreptunghiuri deschise cu laturile paralele cu axele (produse carteziene  $I_1 \times I_2$  de intervale deschise). Este deci suficient să arătăm că pentru orice astfel de dreptunghi  $I_1 \times I_2$ ,  $f^{-1}(I_1 \times I_2)$  este măsurabilă în  $X$ . Dar

$$f^{-1}(I_1 \times I_2) = f_1^{-1}(I_1) \cap f_2^{-1}(I_2),$$

$f_1^{-1}(I_1), f_2^{-1}(I_2)$  sunt măsurabile prin ipoteză și  $\mathcal{A}$  este  $\sigma$  – algebră.

**TEOREMA X. 6.** 1) Dacă  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  sunt măsurabile atunci  $f + g, fg$  sunt măsurabile.

2) Dacă  $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$  sunt măsurabile atunci  $f + g, fg$  sunt măsurabile.

3)  $A \subset X$  este măsurabilă dacă și numai dacă funcția sa caracteristică

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

este măsurabilă ( $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$  sau  $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}, \{0, 1\}$  cu topologia discretă).

**DEMONSTRAȚIE.** Pentru 1) totul rezultă din teorema precedentă și din observația că funcțiile  $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $s(x, y) = x + y, p(x, y) = xy$ ) sunt continue. De exemplu  $f, g$  măsurabile  $\Rightarrow h = (f, g): X \rightarrow \mathbb{R}^2$  măsurabilă  $\Rightarrow s \circ h = f + g$  măsurabilă.

Pentru 2) se arată întâi că  $f$  este măsurabilă dacă și numai dacă  $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$  sunt măsurabile (în fapt teorema X. 6) și apoi se aplică 1).

3) este o simplă verificare.

Să studiem acum comportarea măsurabilității la trecerile la limită. Pentru aceasta să precizăm următoarele:

Dacă  $(f_n)_n$  este un șir de funcții  $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , definim funcțiile  $\sup_n f_n, \inf_n f_n$ ,

$\limsup f_n, \liminf f_n$ , ca funcții  $X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , prin:

$$(\sup_n f_n)(x) = \sup_n (f_n(x)); \quad (\inf_n f_n)(x) = \inf_n (f_n(x));$$

$$(\limsup f_n)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (f_n(x)); \quad (\liminf f_n)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf (f_n(x)),$$

pentru orice  $x \in X$ . Desigur  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  **punctual** dacă și numai dacă

$$\liminf f_n = \limsup f_n = f.$$

**TEOREMA X. 7.** Fie  $(f_n)_n$  un șir de funcții măsurabile  $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . Atunci funcțiile  $\sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup f_n, \liminf f_n$  sunt măsurabile.

**DEMONSTRAȚIE.** Reamintim că pentru un șir  $(a_n)_n$  în  $\bar{\mathbb{R}}$ ,

$$\limsup a_n = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq k} a_n, \quad \liminf a_n = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq k} a_n,$$

deci este suficient să demonstrăm teorema pentru  $\sup_n f_n, \inf_n f_n$ . Fie  $g = \sup_n f_n$ . Pentru  $\alpha \in \mathbb{R}$  avem

$$g^{-1}(\alpha, +\infty] = \bigcup_n f_n^{-1}(\alpha, +\infty]$$

deci  $g^{-1}(\alpha, +\infty]$  este măsurabilă căci  $f_n^{-1}(\alpha, +\infty]$  sunt mulțimi măsurabile  $\forall n$ , deci și reuniunea lor (familia fiind numărabilă). Conform exemplului de după definiția X. 8,  $g$  rezultă măsurabilă. Pentru  $\inf_n f_n$  se folosește un raționament asemănător.

**COROLAR.** Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  punctual și  $f_n$  sunt măsurabile, atunci  $f$  este măsurabilă.

**Definiția X. 9.** O funcție  $s: X \rightarrow [0, +\infty]$  se numește **simplă** dacă  $s(X)$  este o mulțime finită, adică  $s$  are doar un număr finit de valori, pozitive.

**OBSERVAȚIE.** Dacă  $s$  este o funcție simplă și  $s(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  atunci

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \text{ unde } A_i = \{x \in X \mid s(x) = \alpha_i\}, \chi_{A_i} \text{ fiind funcția caracteristică a}$$

mulțimii  $A_i$ . Este ușor de verificat că  $s$  este măsurabilă dacă și numai dacă  $A_1, \dots, A_n$  sunt măsurabile.

**TEOREMA X. 8.** Fie  $f: X \rightarrow [0, +\infty]$  o funcție măsurabilă. Există un șir  $(s_n)_n$  de funcții **simple măsurabile** astfel încît:

1)  $(s_n)_n$  este crescător ( $s_n \leq s_{n+1}, \forall n$ )

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f$  (punctual).

(Deci  $f$  poate fi "aproximată" cu funcții **simple**).

**DEMONSTRAȚIE.** Pentru  $n = 1, 2, \dots$  și  $1 \leq i \leq n2^n$ , definim

$$E_{n,i} = f^{-1}\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right), \quad F_n = f^{-1}[n, +\infty].$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n \chi_{F_n}.$$

Se arată cu ușurință că  $(s_n)_n$  este un șir crescător de funcții simple măsurabile și că  $s_n \rightarrow f$  punctual. (În adevăr, de exemplu, pentru  $x \in X$ , dacă  $f(x) = +\infty$  atunci  $s_n(x) = n$  pentru fiecare  $n = 1, 2, \dots$ . Dacă  $f(x) < +\infty$  atunci de la

un rang încolo

$$0 \leq f(x) - s_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$$

din modul de construcție al șirului  $(s_n)_n$ . Deci  $s_n(x) \rightarrow f(x), \forall x \in X$ .

**Comentariu.** Pentru orice experiență fixată (de exemplu, prezentarea la examen sau aruncarea cu zarul etc.), evenimentele asociate formează o  $\sigma$ -algebră pe spațiul  $X$  al evenimentelor elementare. În acest caz funcțiile măsurabile  $X \rightarrow \mathbb{R}$  se numesc **variabile aleatoare**. Toate proprietățile anterioare au loc pentru variabile aleatoare. Așadar, o mărime  $\xi$  este o variabilă aleatoare  $\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}, \{\xi < c\} = \{x \in X \mid \xi(x) < c\}$  este un eveniment. \*

## 2. Măsura

**Definiția X. 10.** Fie  $(X, \mathcal{A})$  un spațiu măsurabil. O aplicație  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  se numește **măsură pe  $X$**  dacă

1)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;

2) pentru orice șir  $(A_n)_n$  în  $\mathcal{A}$ , astfel încît  $A_n \cap A_m = \emptyset$  pentru  $n \neq m$ , să rezulte

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n).$$

Ultima proprietate se numește **numărabil - aditivitate**.

**OBSERVAȚIE.** În ceea ce privește notația  $\sum_n \mu(A_n)$ , aceasta se consideră  $+\infty$  dacă cel puțin unul din termeni este  $+\infty$  (sau dacă seria este divergentă) și reprezintă suma seriei respective dacă aceasta este convergentă (această convenție coincide cu o aritmetică "naturală" în  $[0, +\infty]$  și vom reveni).

**TEOREMA X. 9.** Fie  $\mu$  o măsură pe  $(X, \mathcal{A})$ . Atunci:

1) Dacă  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset$  pentru  $i \neq j$  rezultă

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$$

(deci măsura este **finit aditivă**);

2)  $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ .

**DEMONSTRAȚIE.** 1) Se ia șirul  $A_1, \dots, A_n, \emptyset, \emptyset, \dots$  și se aplică definiția măsurii.  
2)  $B = A \cup (B - A)$  și se aplică **finit aditivitatea** demonstrată și **pozitivitatea** măsurii.

**TEOREMA X. 10.** Fie  $\mu$  o măsură pe  $(X, \mathcal{A})$ .

1) Dacă  $(A_n)_{n \geq 1}$  este un șir în  $\mathcal{A}, A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$  atunci

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

2) Dacă  $(A_n)_{n \geq 1}$  este un șir în  $\mathcal{A}$ ,  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$  și  $\mu(A_1) < +\infty$ , atunci

$$\mu(\bigcap_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

3) Pentru orice șir  $(A_n)_n$  în  $\mathcal{A}$ ,

$$\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n) \text{ (subaditivitate).}$$

**DEMONSTRAȚIE.**

1) Definim șirul

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 - A_1, \dots, B_n = A_n - A_{n-1}, \dots$$

$(B_n)_n$  este un șir în  $\mathcal{A}$  și  $B_n \cap B_m = \emptyset$  dacă  $n \neq m$ . În plus

$$\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n \text{ și } A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n.$$

Deci  $\mu(\bigcup_n A_n) = \mu(\bigcup_n B_n) = \sum_n \mu(B_n)$ , iar  $\mu(A_n) = \mu(B_1) + \dots + \mu(B_n)$ . Deci  $(\mu(A_n))_n$

este șirul de sume parțiale ale seriei  $\sum_n \mu(B_n)$  și se obține rezultatul.

2) Se consideră șirul  $C_n = A_1 - A_n$  și se aplică punctul precedent (atenție la condiția  $\mu(A_1) < +\infty$ !).

3) Trimitem la exercițiul 4 al acestei lecții.

**EXEMPLUL 1.** Fie  $X$  o mulțime și  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ . Definim

$$\mu(A) = \begin{cases} +\infty & \text{dacă } A \text{ este infinită} \\ \text{card } A & \text{dacă } A \text{ este finită} \end{cases}$$

(card  $A$  este numărul de elemente ale lui  $A$ ). Se arată simplu că  $\mu$  este o măsură;  $\mu$  se numește **măsura de numărare** pe  $X$ . De o importanță deosebită este **măsura de numărare** pe  $\mathbb{N}$ . Pentru moment să arătăm că folosind măsura de numărare pe  $\mathbb{N}$  putem să dăm un exemplu care să justifice condiția  $\mu(A_1) < +\infty$  în punctul 2) din teorema precedentă. Să luăm  $A_n = \{n, n+1, \dots\}$ . Evident,  $A_n \supset A_{n+1}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  și  $\mu(A_n) = +\infty, \forall n$ .

Dar  $\bigcap_n A_n = \emptyset$  și deci  $0 = \mu(\bigcap_n A_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = +\infty$ .

**EXEMPLUL 2.** Fie  $X$  o mulțime și  $a \in X$ . Luăm  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  și definim

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a \in A \\ 0 & \text{dacă } a \notin A \end{cases}, \quad A \subset X.$$

Se verifică imediat că  $\delta_a$  este o **măsură**, numită **măsura Dirac** concentrată în "punctul"  $a$  (după numele marelui fizician englez P. DIRAC, 1902 – 1986).

**EXEMPLUL 3.** Fie  $X$  o mulțime finită, nevidă și  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ . Definim

$$\mu(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } X}.$$

Se verifică imediat că  $\mu$  este o măsură și  $\mu(X) = 1$ . În fapt avem o variantă "relativă" a măsurii de numărare. Cititorii vor recunoaște cu ușurință în acest exemplu modelul "clasic" al teoriei probabilităților discrete.

**Definiția X. 11.** Dacă  $\mu$  este o măsură pe  $(X, \mathcal{A})$ , atunci tripletul  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  se numește **spațiu cu măsură**. Un spațiu cu măsură  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  cu  $\mu(X) = 1$  se numește **cîmp de probabilitate** și în acest caz măsura  $\mu$  se numește **probabilitate**.

**EXEMPLU.**  $(X, \mathcal{P}(X), \delta_a)$  din exemplul 2. de mai sus este un cîmp de probabilitate și măsura Dirac este o probabilitate.

**Comentariu.** Teoria probabilităților apare ca o parte a teoriei măsurii, o parte cu problematică specifică, dar conceptual conținută în teoria măsurii. Această abordare, datorată lui A. N. KOLMOGOROV (1903 – 1987), așază teoria probabilităților pe un fundament teoretic solid.

### 3. Integrala

În  $[0, +\infty]$  vom extinde adunarea și înmulțirea punînd:

$$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty, \quad \forall a \in [0, \infty] \text{ și}$$

$$a(+\infty) = (+\infty)a = \begin{cases} +\infty & \text{dacă } a > 0 \\ 0 & \text{dacă } a = 0 \end{cases}$$

Să remarcăm că, prin definiție,  $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ , convenție pe care o vom adopta în cele ce urmează. Se verifică ușor că adunarea și înmulțirea astfel extinse păstrează o serie de proprietăți ca asociativitatea, comutativitatea etc. Fie acum  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură.

**Definiția X. 12.** 1) Pentru orice funcție simplă măsurabilă  $s : X \rightarrow [0, \infty)$ ,

$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ , definim **integrala** lui  $s$  pe  $X$  prin:

$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i).$$

( $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sunt valorile distincte ale lui  $s$ ).

2) Pentru orice funcție **măsurabilă**  $f: X \rightarrow [0, \infty)$ , definim **integrala** lui  $f$  pe  $X$  prin:

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu, s \text{ simplă măsurabilă}, s \leq f \right\}.$$

Este de remarcat că **orice** funcție măsurabilă pozitivă are integrală, aceasta putînd fi eventual  $+\infty$ . O observație evidentă arată că pentru funcții simple măsurabile, definițiile 1) și 2) coincid.

Vom stabili proprietățile cele mai importante ale integralei funcțiilor măsurabile pozitive și apoi vom extinde definiția la funcții cu valori complexe.

**TEOREMA X. 11.** 1) Fie  $f, g: X \rightarrow [0, +\infty]$  măsurabile,  $f \leq g$ ; atunci

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

2)  $c \in [0, \infty)$ ,  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  măsurabilă  $\Rightarrow \int_X c f d\mu = c \int_X f d\mu$ .

3)  $f \equiv 0 \Rightarrow \int_X f d\mu = 0$ .

4) Dacă  $\mu(X) = 0 \Rightarrow \int_X f d\mu = 0, \forall f: X \rightarrow [0, \infty]$  măsurabilă.

Demonstrația este imediată.

**Definiția X. 13.** Fie  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  măsurabilă și  $A \subset X$ ,  $A \in \mathcal{A}$  (deci  $A$  măsurabilă). Definim **integrala funcției  $f$  pe mulțimea  $A$**  prin

$$\int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu.$$

( $\chi_A$  este funcția caracteristică a mulțimii  $A$ ).

**TEOREMA X. 12.** Fie  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$  simplă măsurabilă. Să definim

$$\varphi(A) = \int_A s d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Atunci  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  este o **măsură**.

**DEMONSTRAȚIE.**  $\varphi(\emptyset) = \int_{\emptyset} s d\mu = 0$  evident. Fie  $A \in \mathcal{A}$ . Se observă imediat că

$$\int_A s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A \cap A_i).$$

Să luăm un șir  $(E_k)_k$  în  $\mathcal{A}$  cu  $E_k \cap E_p = \emptyset$  pentru  $k \neq p$  și să punem  $E = \bigcup_k E_k$ . Avem

$$\begin{aligned} \varphi(E) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_i \cap E_k) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(E_k), \end{aligned}$$

deci  $\varphi$  este numărabil aditivă.

**COROLAR.** Dacă  $s, t$  sunt funcții simple măsurabile, atunci

$$\int_X (s+t) d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ ,  $t = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}$  și  $E_{ij} = A_i \cap B_j$ . Este clar că  $X = \bigcup_{i,j} E_{ij}$ ,  $\int_{E_{ij}} (s+t) d\mu = (\alpha_i + \beta_j) \mu(E_{ij}) = \int_{E_{ij}} s d\mu + \int_{E_{ij}} t d\mu$  și aplicăm teorema precedentă.

**TEOREMA X. 13. (teorema lui BEPPO LEVI, 1875 – 1961, de convergență monotonă).** Fie  $(f_n)_n$  un șir crescător de funcții măsurabile  $f_n: X \rightarrow [0, +\infty]$ ,  $f_n \leq f_{n+1}$  pentru orice  $n$ . Fie  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  (punctual). Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Să observăm că  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  este măsurabilă (corolar la

teorema X. 7). Pe de altă parte, șirul  $(\int_X f_n d\mu)_n$  este crescător și fie

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu, \alpha \in [0, \infty].$$

Din relațiile  $f_n \leq f, \forall n \in \mathbb{N}$ , rezultă  $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$  de unde inegalitatea  $\alpha \leq \int_X f d\mu$ .

Pentru a dovedi și inegalitatea inversă, să luăm  $0 < c < 1$  și  $s$  simplă măsurabilă  $s \leq f$ . Să notăm

$$E_n = \{x \in X; f_n(x) \geq cs(x)\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Se observă că  $E_n \subset E_{n+1} \quad \forall n = 1, 2, \dots$  și  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ . Avem

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} s d\mu, \quad n = 1, 2, \dots$$

Aplicînd teorema X. 12,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} s d\mu = \int_X s d\mu \text{ și deci } \alpha \geq c \int_X s d\mu, \quad 0 < c < 1. \text{ Deducem } \alpha \geq \int_X s d\mu \quad \forall s \leq f, s$$

simplă măsurabilă și folosind definiția integralei,  $\alpha \geq \int_X f d\mu$ . În definitiv

$$\alpha = \int_X f d\mu \text{ și teorema este demonstrată.}$$

**OBSERVAȚIE.** Forța teoremei constă în faptul că s-a presupus că  $f_n \rightarrow f$  **punctual** (și nu uniform).

**Teorema X. 14.** Fie  $f_n : X \rightarrow [0, \infty], n \in \mathbb{N}$ , un șir de funcții măsurabile.

Definim  $f(x) = \sum_n f_n(x), x \in X, f : X \rightarrow [0, \infty]$ . Atunci

$$\int_X f d\mu = \sum_n \int_X f_n d\mu \text{ sau } \int_X (\sum_n f_n) d\mu = \sum_n \int_X f_n d\mu.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Să arătăm mai întâi că dacă  $f_1, f_2 : X \rightarrow [0, \infty]$  sunt măsurabile, atunci

$$\int_X (f_1 + f_2) d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu.$$

În adevăr, fie (conform teoremei X. 8) șiruri de funcții simple măsurabile  $(s_n)_n, (t_n)_n$  crescătoare astfel încît  $s_n \nearrow f_1, t_n \nearrow f_2$ . Atunci  $s_n + t_n \nearrow f_1 + f_2$  și

$$\int_X (s_n + t_n) d\mu = \int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicînd teorema X. 13, obținem

$$\int_X (f_1 + f_2) d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu.$$

Trecînd la demonstrația propriu-zisă, șirul sumelor parțiale  $s_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$  este crescător către  $f$  și

$$\int_X s_n d\mu = \sum_{k=0}^n \int_X f_k d\mu$$

și se aplică încă o dată teorema X. 13.

**TEOREMA X. 15.** (lema lui L. P. J. FATOU, 1878 - 1929). Fie  $(f_n)_n$  un șir de funcții măsurabile  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ . Atunci

$$\int_X (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Punem  $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$  pentru fiecare  $n$ . Avem  $g_n \leq f_n \quad \forall n$  și

$g_n \nearrow \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$  ( $g_n$  tinde crescător). Folosind teorema de convergență monotonă,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \int_X (\liminf f_n) d\mu \text{ și lema lui Fatou rezultă.}$$

**Definiția X. 14.** Definim

$$L_X^1(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ măsurabilă și } \int_X |f| d\mu < +\infty\}$$

și numim funcțiile din  $L_X^1(\mu)$  **integrabile** (în sensul Lebesgue) pe  $X$ .

**EXEMPLU.** Dacă  $\mu(X) < +\infty$ , orice funcție măsurabilă și mărginită este integrabilă.

Fie  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Definim  $h^+ = \max\{h, 0\}$  și  $h^- = -\min\{h, 0\}$ . Este evident că dacă  $h$  este măsurabilă, atunci  $h^+$  și  $h^-$  sunt măsurabile. Avem  $h = h^+ - h^-$  și  $|h| = h^+ + h^-$  ( $h^+, h^- : X \rightarrow [0, \infty)$ ).

**Definiția X. 15.** Fie  $f \in L_X^1(\mu)$ ,  $f = u + iv$ ,  $u = \operatorname{Re} f$ ,  $v = \operatorname{Im} f$ . Definim integrala

lui  $f$  pe  $X$  prin:  $\int_X f d\mu = \int_X u^+ d\mu - \int_X u^- d\mu + i \int_X v^+ d\mu - i \int_X v^- d\mu$ . Deci  $\int_X f d\mu \in \mathbb{C}$ . Se

verifică ușor că  $\int_X u^+ d\mu$ ,  $\int_X u^- d\mu$ ,  $\int_X v^+ d\mu$ ,  $\int_X v^- d\mu$  sunt **numere** reale (finite), din condiția  $\int_X |f| d\mu < +\infty$ .

**TEOREMA X. 16.** (liniaritatea integralei). Dacă  $f, g \in L_X^1(\mu)$  și  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , atunci  $\alpha f + \beta g \in L_X^1(\mu)$  și  $\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$ , deci  $L_X^1(\mu)$  este un  $\mathbb{C}$ -spațiu vectorial și aplicația  $f \mapsto \int_X f d\mu$  este  $\mathbb{C}$ -liniară.

**DEMONSTRAȚIE.** Vom demonstra doar cazul  $\alpha = \beta = 1$  și  $f, g$  cu valori reale, cazul general deducându-se apoi cu ușurință (vezi și teorema X. 11). Fie  $h = f + g$ . Avem  $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$  sau  $h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$ . Deducem (teorema X. 14)

$$\int_X h^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu + \int_X h^- d\mu$$

și regroupând termenii,

$$\int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu;$$

conform definiției,

$$\int_X h d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

**OBSERVAȚIE.** Se arată ușor că dacă  $f \in L_X^1(\mu)$ , atunci

$$|f| \in L_X^1(\mu) \text{ și } \left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

**TEOREMA X. 17.** (teorema lui Lebesgue de convergență dominată). Fie  $(f_n)_n$  un șir de funcții măsurabile  $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  astfel încât să existe  $g \in L_X^1(\mu)$  cu  $|f_n(x)| \leq g(x)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall x \in X$  și  $f_n \rightarrow f$  punctual. Atunci  $f \in L_X^1(\mu)$  și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Funcția  $f$  este măsurabilă ca limită de funcții măsurabile și cum  $|f| \leq g$ , rezultă că  $f \in L_X^1(\mu)$ . Mai mult, din  $|f_n - f| \leq 2g$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , șirului  $2g - |f_n - f|$  i se poate aplica lema lui Fatou. Obținem

$$\int_X 2g d\mu \leq \liminf \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu = \int_X 2g d\mu - \limsup \int_X |f_n - f| d\mu.$$

Dar  $\int_X 2g d\mu \in \mathbb{R}$  și deci  $\limsup \int_X |f_n - f| d\mu = 0$ , de unde rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0. \text{ Dar}$$

$$\left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu$$

de unde concluzia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu = \int_X (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu.$$

**OBSERVAȚIE.** Forța teoremei constă în faptul că  $f_n \rightarrow f$  punctual (și nu uniform).

Vom da o aplicație a acestei teoreme la continuitatea integralei Lebesgue cu parametru:

**TEOREMA X. 18.** Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval nevid în  $\mathbb{R}$  și  $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât:  
i) funcția  $x \mapsto f(x, t)$  este măsurabilă,  $\forall t \in I$ ;  
ii) există  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \in L_X^1(\mu)$  astfel încât  $|f(x, t)| \leq g(x)$ ,  $\forall t \in I$ ,  $x \in X$ ;  
iii) aplicația  $t \mapsto f(x, t)$  este continuă,  $\forall x \in X$ .  
Atunci funcția  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  definită de

$$F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$$

este continuă pe  $I$  (am scris  $d\mu(x)$  pentru a accentua că măsura este pe  $X$ ).

**DEMONSTRAȚIE.**  $F$  este corect definită (condiția ii). Luăm  $\forall a \in I$  și  $(t_n)_n$  un șir

în  $I, t_n \rightarrow a$ . Atunci  $f(x, t_n) \rightarrow f(x, a)$  pentru orice  $x \in X$  (conform iii). Putem aplica teorema de convergență dominată și rezultă că

$$F(t_n) = \int_X f(x, t_n) d\mu \rightarrow \int_X f(x, a) d\mu = F(a).$$

De aici rezultă continuitatea lui  $F$  în  $a$ .

**Definiția X. 16.** O proprietate  $\mathcal{P}$  despre punctele unui spațiu cu măsură  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  are loc **aproape peste tot** (a.p.t.) dacă există  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(A) = 0$  și  $\mathcal{P}$  este adevărată pe  $X - A$ .

**EXEMPLU.** Dacă  $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$  sunt măsurabile, rezultă că  $f = g$  a.p.t. dacă  $\mu\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} = 0$ . Relația  $f = g$  a.p.t. este o relație de echivalență și dacă  $f, g \in L_X^1(\mu)$  și  $f = g$  a.p.t., atunci  $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$ .

**OBSERVAȚIE.** Fie  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  măsurabilă și  $\int_X f d\mu = 0$ . Atunci  $f = 0$  a.p.t. (În adevăr, dacă  $A_n = \{x \in X \mid f(x) > \frac{1}{n}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , atunci rezultă

$$\frac{1}{n} \mu(A_n) \leq \int_{A_n} f d\mu \leq \int_X f d\mu$$

deci  $\mu(A_n) = 0$ , iar  $\{x \in X; f(x) > 0\} = \bigcup_n A_n$ ).

#### 4. 10 exerciții

1. Fie  $X$  o mulțime și  $A \subset X$ . Să se determine  $\sigma$ -algebra și topologia generate de  $\{A\}$ .
2. Fie  $\mathcal{A}$  o  $\sigma$ -algebră pe  $X$  și  $(A_n)_n$  un șir în  $\mathcal{A}$ . Să se arate că există un șir  $(B_n)_n$  în  $\mathcal{A}$ ,  $B_n \cap B_m = \emptyset$ ,  $n \neq m$  astfel încât  $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n$ .
3. Fie  $(X, \mathcal{T})$  un spațiu topologic. Mulțimile care sunt reuniuni numărabile de închise se zic de tip  $F_\sigma$ , iar mulțimile intersecții numărabile de deschise se zic de tip  $G_\delta$ . Să se arate că mulțimile de tip  $F_\sigma$  sau  $G_\delta$  sunt boreliene și că un interval semideschis  $[a, b) \subset \mathbb{R}$  este atât  $F_\sigma$  cât și  $G_\delta$ .
4. Fie  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură. Să se arate că pentru orice șir  $(A_n)_n$  în  $\mathcal{A}$

#### 4. 10 exerciții

$$\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n).$$

5. Fie  $(X, \mathcal{P}(X), \delta_a)$  cîmpul de probabilitate cu  $a \in X$  și  $\delta_a$  măsura Dirac concentrată în  $a$ . Să se determine mulțimea  $L_X^1(\delta_a)$  și pentru  $f \in L_X^1(\delta_a)$  să se calculeze  $\int_X f d\delta_a$ .

6. Fie  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$  unde  $\mu$  este măsura de numărare. Să se determine  $L_X^1(\mu)$  și pentru  $f \in L_X^1(\mu)$  să se calculeze  $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$ .

7. Fie  $(a_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$  un șir dublu (indexat cu  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ),  $a_{m,n} \geq 0$  pentru orice  $m, n$ . Folosind exercițiul precedent și teorema de convergență monotonă, să se arate că

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}.$$

8. Fie  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură și  $f: X \rightarrow (0, \infty]$  măsurabilă. Să se arate că funcția  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ,  $\varphi(E) = \int_E f d\mu$  este o măsură pe  $\mathcal{A}$  și pentru orice  $g: X \rightarrow [0, \infty]$  măsurabilă  $\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu$ .

9. Să se arate că  $f \in L_X^1(\mu) \Rightarrow |f| \in L_X^1(\mu)$  și  $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$ .

10. Să se dea un exemplu în care în lema lui Fatou să avem inegalitate strictă.

#### INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1.  $\sigma$ -algebra este  $\{\emptyset, A, X - A, X\}$  iar topologia  $\{\emptyset, A, X\}$ .
2. Se pune  $B_0 = A_0$ ,  $B_n = A_n - (A_0 \cup \dots \cup A_{n-1})$ ,  $n > 0$  etc.
3.  $[a, b) = \bigcup_{n \geq 1} [a, b - \frac{1}{n}] = \bigcap_n (a - \frac{1}{n}, b)$ .
4. Folosind exercițiul 2,  $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n$ ,  $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ ,  $\forall n$ , etc.

5. Este imediat de arătat că  $L_X^1(\delta_a) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_X f d\delta_a = f(a)\}$ . Deci integrala în raport cu măsura Dirac concentrată în punctul  $a$  este "evaluarea" în  $a$ .

6.  $L_N^1(\mu) = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_n |f(n)| < \infty\}$  sau în definitiv mulțimea șirurilor  $(a_n)_n$  în  $\mathbb{C}$  astfel

încît  $\sum_n |a_n| < \infty$  (se notează de obicei  $L_N^1(\delta) = l_N^1$ ). Se arată că  $\int_N f d\mu = \sum_n |f(n)|$ .

Pentru demonstrație se consideră cazul funcțiilor pozitive (deci reale și  $\geq 0$ )  $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ . Se consideră un șir de funcții simple de forma

$$s_n(m) = \begin{cases} f(m) & m \leq n \\ 0 & m > n \end{cases}$$

Se arată că  $s_n \nearrow f$  și se folosește teorema de convergență monotonă. Cazul general se reduce imediat la cazul funcțiilor pozitive despărțind în parte reală, parte imaginară și funcțiile cu valori reale  $h$  în  $h^+ - h^-$  etc.

7. Se folosește exercițiul precedent și teorema de convergență monotonă (desigur și demonstrații elementare, fără teoria măsurii, pot fi date).

8. Pentru  $A = \cup A_n$ ,  $A_n \cap A_m = \emptyset$ ,  $n \neq m$ ,  $\chi_A \cdot f = \sum \chi_{A_n} f$  și se integrează termen cu termen etc. Pentru  $\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu$  se pornește cu  $g$  funcție caracteristică, se trece apoi la funcții simple, apoi la funcții măsurabile pozitive cu teorema de convergență monotonă etc.

9.  $f$  măsurabilă  $\Rightarrow |f|$  măsurabilă căci  $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  este o funcție continuă etc.

10. Luăm  $(N, \mathcal{P}(X), \mu)$ ,  $\mu$  măsura de numărare și  $A = \{0\}$ ,  $\mu(A) = 1$ . Punem

$$f_n = \begin{cases} \chi_A & n \text{ par} \\ 1 - \chi_A & n \text{ impar} \end{cases}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = 0, \quad \int_N f_n d\mu = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ \infty & n \text{ impar} \end{cases} \text{ etc.}$$

## LECȚIA A XI-A

# MĂSURA LEBESGUE ÎN $\mathbb{R}^k$ . SPAȚII $L^p$

## INTRODUCERE

Vom prezenta în această lecție construcția măsurii Lebesgue în  $\mathbb{R}^k$ , extinzînd intuițiile noastre relativ la arii plane, volume în spațiu, lungimi, hipervolume, etc. Totodată rezultă, în mod natural, o teorie a integrării anumitor funcții pe anumite mulțimi din  $\mathbb{R}^k$ . Vom încheia cu o descriere succintă a spațiilor  $L^p$ , importante în Analiză, dar și ca prototip al unor spații de funcții interesîndu-l pe inginer (de exemplu  $L^2_{[a,b]}$  este spațiul semnalelor de energie finită restrinse la intervalul de timp  $[a,b]$ ).

## 1. Măsura Lebesgue în $\mathbb{R}^k$

Din mai multe moduri de construcție a măsurii Lebesgue în  $\mathbb{R}^k$ , am ales pe cel ce pare mai intuitiv. Ideea de bază este construcția treptată a măsurii prin "aproximare": se pornește de la mulțimi "simple" și se aproximează mulțimile "complicate" cu mulțimi simple.

Să notăm  $<$  pentru  $\leq$  sau  $<$ . Un **paralelipiped** în  $\mathbb{R}^k$  este o mulțime de forma  $P = \{x = (x_1, \dots, x_k) \mid a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, k, a_i \leq b_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$ . În definitiv un paralelipiped este un produs cartezian de intervale mărginite. Dacă toate inegalitățile sînt **stricte** paralelipipedul se zice **deschis** (el este o mulțime **deschisă** în  $\mathbb{R}^k$ ) iar dacă toate inegalitățile sunt  $\leq$ , paralelipipedul este **închis** (evident este o mulțime **compactă** în  $\mathbb{R}^k$ ). Să observăm că mulțimea vidă este un paralelipiped. Pentru cazurile  $k = 1, 2$  denumirea de paralelipiped pare forțată, dar se urmărește o terminologie unitară.

**Definiția XI. 1.** Dacă  $P$  este un paralelipiped în  $\mathbb{R}^k$ , ca mai sus, se definește măsura sa prin

$$\mu(P) = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i).$$

Să observăm că mulțimea vidă are măsura 0 (zero) și aceeași măsură o au mulțimile reduse la un punct. Pentru  $k = 1$  măsura este **lungimea** intervalului, pentru  $k = 2$  **aria dreptunghiului** iar pentru  $k = 3$  **volumul paralelipipedului** (pentru  $k = 1$  paralelipede sunt intervale, pentru  $k = 2$  dreptunghiuri, etc.).

OBSERVAȚIE. Se arată cu ușurință că dacă  $P = P_1 \cup \dots \cup P_n$  disjuncte două câte două, atunci  $\mu(P) = \sum_{i=1}^n \mu(P_i)$ . În ceea ce urmează, vom întâlni de mai multe ori afirmații ce par evidente intuitiv dar care necesită demonstrație (uneori laborioasă). În general nu vom intra în detalii dar este important și util ca însuși cititorul să încerce să "formalizeze" aceste intuiții "evidente".

**Definiția XI. 2.** Se numește mulțime **elementară** în  $\mathbb{R}^k$  orice mulțime care este reuniune **finită** de paralelipede disjuncte două câte două. Vom nota cu  $\mathcal{E}$  clasa mulțimilor elementare în  $\mathbb{R}^k$ . Deci  $A \in \mathcal{E}$  dacă  $A = P_1 \cup \dots \cup P_n$  cu  $P_i$  paralelipede astfel încât  $i \neq j$  să implice  $P_i \cap P_j = \emptyset$ . Pentru o mulțime elementară  $A$ , definim **măsura** ei ca

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(P_i), \text{ unde } A = P_1 \cup \dots \cup P_n,$$

paralelipede fiind disjuncte două câte două. Pentru ca definiția măsurii mulțimilor elementare să fie **corectă**, se arată fără dificultate că dacă  $A = P_1 \cup \dots \cup P_n = P'_1 \cup \dots \cup P'_m$  (două descompuneri în paralelipede disjuncte două câte două), atunci

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(P_i) = \sum_{j=1}^m \mu(P'_j).$$

OBSERVAȚIE. Orice paraleliped este mulțime elementară și măsura sa ca paraleliped coincide cu măsura sa ca mulțime elementară. În continuare să observăm că dacă  $A, B \in \mathcal{E}$  atunci  $A \cup B, A - B, A \cap B \in \mathcal{E}$  și pentru orice  $A \in \mathcal{E}$  și orice  $\varepsilon > 0$  există  $F, G \in \mathcal{E}$ ,  $F$  închisă și  $G$  deschisă, astfel încât

$$F \subset A \subset G \text{ și } \mu(G) - \varepsilon \leq \mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon$$

(ultima proprietate mai poartă numele de **regularitate**). Desigur orice mulțime elementară este mărginită și în proprietatea de regularitate,  $F$  este chiar compactă. În acest mod s-a efectuat o primă extensie: de la măsurarea paralelipedelor s-a trecut la măsurarea mulțimilor elementare, pe care le putem gândi ca fiind "construite" din paralelipede. Funcția  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty)$  are proprietatea de **finit aditivitate** și de **finit subaditivitate**, adică:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

dacă  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$  sunt disjuncte două câte două și

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^m B_j\right) \leq \sum_{j=1}^m \mu(B_j) \text{ pentru orice } B_1, \dots, B_m \in \mathcal{E}.$$

Următorul pas în construcția măsurii Lebesgue este mai puțin intuitiv și înseamnă construcția unei măsuri exterioare pe  $\mathbb{R}^k$ . În general, se numește **măsură exterioară** pe o mulțime  $X$  orice funcție  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  cu  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$  dacă  $A \subset B$  și  $\mu^*$  **numărabil subaditivă** (adică

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n),$$

pentru orice șir  $(A_n)_n$  de părți ale lui  $X$ ).

**Definiția XI. 3.** Pentru orice  $E \subset \mathbb{R}^k$ , definim  $\mu^*(E) = \inf_n \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{ni})$  unde  $\inf$  se ia după toate șirurile  $(A_n)_n$  de mulțimi elementare deschise astfel încât  $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Intuitiv se "aproximează" dinspre exterior mulțimile cu reuniuni numărabile de mulțimi elementare deschise. Este limpede că în definiție se pot folosi doar paralelipede deschise.

**TEOREMA XI. 1.**  $\mu^*$  este o măsură exterioară pe  $\mathbb{R}^k$  și  $\mu^*|_{\mathcal{E}} = \mu$ .

DEMONSTRAȚIE. Este clar că  $\mu^*(E) \in [0, \infty]$ ,  $\forall E \subset \mathbb{R}^k$  și că  $\mu^*(\emptyset) = 0$ . Se observă că  $E_1 \subset E_2$  implică  $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$ . Pentru a arăta numărabil subaditivitatea, fie  $E = \bigcup_n E_n$ . Dacă există  $n$  cu  $\mu^*(E_n) = \infty$  nu este nimic de demonstrat așa că putem presupune  $\mu^*(E_n) < \infty$ ,  $\forall n$ . Fie  $\varepsilon > 0$ . Pentru fiecare  $n$  există un șir  $(A_{np})_p$  cu  $E_n \subset \bigcup_p A_{np}$ ,  $A_{np}$  elementare deschise și

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mu(A_{np}) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \text{ (proprietatea marginii inferioare).}$$

Atunci  $(A_{np})_{n,p}$  este o familie numărabilă de mulțimi elementare deschise  $E \subset \bigcup_{n,p} A_{np}$  și avem

$$\mu^*(E) \leq \sum_n \sum_p \mu(A_{np}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon;$$

Cum  $\varepsilon > 0$  este arbitrar, deducem

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Pentru a arăta că  $\mu^*|_{\mathcal{E}} = \mu$ , luăm  $A \in \mathcal{E}$ .  $\forall \varepsilon > 0$ , rezultă din proprietatea

de regularitate că există  $G$  deschisă,  $G \in \mathcal{E}$  cu  $\mu(G) \leq \mu(A) + \varepsilon$ ,  $G \supset A$ . Deci este evident că  $\mu^*(A) \leq \mu(G) \leq \mu(A) + \varepsilon$ , de unde cum  $\varepsilon$  era arbitrar,  $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ . Pentru a dovedi inegalitatea contrară se consideră pentru  $\varepsilon > 0$  și  $A \subset \bigcup_n A_n$ ,  $A_n$  deschiși elementari astfel încît  $\sum_1^\infty \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$ . Din regularitate găsim un compact elementar  $F$  cu  $\mu(F) \geq \mu(A) - \varepsilon$ ,  $F \subset A$ . Cum  $F$  este compact;  $F \subset A_1 \cup \dots \cup A_N$  cu  $N$  convenabil și deci

$$\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon \leq \sum_{n=1}^N \mu(A_n) + \varepsilon \leq \mu^*(A) + 2\varepsilon.$$

Deoarece  $\varepsilon > 0$  este arbitrar, rezultă că  $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ .

Al treilea pas în construcție este de a pune în evidență o  $\sigma$ -algebră "cît mai mare" pe care  $\mu^*$  să fie o măsură (deci numărabil aditivă). Acest lucru se poate face prin următorul procedeu de "aproximație":

Pentru  $A, B \subset \mathbb{R}^k$ , notăm  $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ , diferența simetrică a mulțimilor  $A$  și  $B$  și scriem  $A_n \rightarrow A$  dacă  $\mu^*(A_n \Delta A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  pentru  $(A_n)_n$  șir de părți în  $\mathbb{R}^k$ . Se definește

$$\mathcal{M}_f(\mu) = \{A \subset \mathbb{R}^k \mid \exists (A_n)_n, A_n \in \mathcal{E}, \forall n \text{ și } A_n \rightarrow A\}$$

$$\mathcal{M}(\mu) = \{E \subset \mathbb{R}^k \mid E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n, E_n \in \mathcal{M}_f(\mu)\}.$$

Rezultatul fundamental este:

**TEOREMA XI. 2.**  $\mathcal{M}(\mu)$  este o  $\sigma$ -algebră pe  $\mathbb{R}^k$  și  $\mu^*|_{\mathcal{M}(\mu)}$  este o măsură (numită **măsură Lebesgue** pe  $\mathbb{R}^k$ ).

**DEMONSTRAȚIE.** Se arată că dacă  $A_n \rightarrow A$ ,  $B_n \rightarrow B$  atunci  $A_n \cup B_n \rightarrow A \cup B$ ,  $A_n \cap B_n \rightarrow A \cap B$ ,  $A_n - B_n \rightarrow A - B$  (exercițiul 1). Deci  $A, B \in \mathcal{M}_f(\mu)$  implică  $A \cup B, A \cap B, A - B$  în  $\mathcal{M}_f(\mu)$  (căci clasa mulțimilor elementare  $\mathcal{E}$  este închisă la reuniuni finite, intersecții finite și diferențe de mulțimi). Mai mult, dacă  $A \in \mathcal{M}(\mu)$  atunci  $\mu^*(A) < \infty$ . În adevăr,  $|\mu^*(A_n) - \mu^*(A)| \leq \mu^*(A_n \Delta A)$  (exercițiul 2) de unde  $\mu^*(A_n) \rightarrow \mu^*(A)$  și deci  $\mu^*(A) < \infty$  dacă  $\mu^*(A_n \Delta A) \rightarrow 0$ . Să observăm că dacă  $A_n, B_n \in \mathcal{E}$  avem

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B)$$

căci  $\mu$  este finit aditivă pe  $\mathcal{E}$  și  $A_n \cup B_n = A_n \cup (B_n - A_n)$  iar  $B_n = (A_n \cap B_n) \cup (B_n - A_n)$ .

Luînd  $A_n \rightarrow A$  și  $B_n \rightarrow B$ , obținem

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B),$$

pentru orice  $A, B \in \mathcal{M}_f(\mu)$ ; în particular dacă  $A \cap B = \emptyset$ , cum  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,

deducem că  $\mu^*$  este finit aditivă pe  $\mathcal{M}_f(\mu)$ .

Fie  $A \in \mathcal{M}(\mu)$ ,  $A = \bigcup_1^\infty A_n$  cu  $A_n \in \mathcal{M}_f(\mu)$ . Putem presupune  $A_n$  disjuncte două câte două (căci  $\mathcal{M}_f(\mu)$  este "închis" la reuniuni finite și diferențe).

$$A \supset A_1 \cup \dots \cup A_n \Rightarrow \mu^*(A) \geq \mu^*(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu^*(A_1) + \dots + \mu^*(A_n)$$

deci, în definitiv,  $\mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n)$ .

Dar din subaditivitate avem și

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n) \text{ deci } \mu^*(A) = \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n)$$

dacă  $A \in \mathcal{M}(\mu)$  și  $A_n \in \mathcal{M}_f(\mu)$ ,  $\forall n$ , disjuncte două câte două.

Se poate arăta că  $A \in \mathcal{M}_f(\mu)$  dacă și numai dacă  $A \in \mathcal{M}(\mu)$  și  $\mu^*(A) < \infty$  (ceea ce justifică notația  $\mathcal{M}_f(\mu)$ ; cu indicele  $f$  de la **finit**).

În adevăr, o implicație este banală, iar dacă  $A = \bigcup_1^\infty A_n$ ,  $\mu^*(A) < \infty$  ca mai sus, se poate arăta ușor că notînd  $B_n = A_1 \cup \dots \cup A_n$ ,  $B_n \in \mathcal{M}_f(\mu)$  și  $B_n \rightarrow A$ , de unde cum fiecare  $B_n$  este "limita" unui șir de mulțimi elementare, deducem că  $A$  este limita unui șir de mulțimi elementare și deci  $A \in \mathcal{M}_f(\mu)$ .

Fie acum  $A = \bigcup_1^\infty A_n$ ,  $A_n \in \mathcal{M}(\mu)$ , disjuncte două câte două. Sunt două posibilități: sau există  $n \in \mathbb{N}$  cu  $\mu^*(A_n) = +\infty$ , caz în care în mod evident  $\mu^*(A) = \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n)$ , sau pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu^*(A_n) < +\infty$ , caz în care egalitatea  $\mu^*(A) = \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n)$  a fost demonstrată mai sus.

În definitiv,  $\mu^*$  este **numărabil aditivă** pe  $\mathcal{M}(\mu)$ .

Verificarea faptului că  $\mathcal{M}(\mu)$  este o  $\sigma$ -algebră nu prezintă nici o dificultate. În adevăr,  $\emptyset \in \mathcal{M}(\mu)$ , iar  $\mathbb{R}^k$  este reuniune numărabilă de paralelipede deschise. Este clar din definiția lui  $\mathcal{M}(\mu)$  că reuniuni numărabile de mulțimi din  $\mathcal{M}(\mu)$  se află în  $\mathcal{M}(\mu)$ . Dacă  $A \in \mathcal{M}(\mu)$  scriem  $A = \bigcup_1^\infty A_n$  cu  $A_n \in \mathcal{M}_f(\mu)$  și scriem  $\mathbb{R}^k = \bigcup_1^\infty P_n$ , cu  $P_n$  paralelipede,  $\mathbb{R}^k - A = \bigcup_1^\infty (P_n - A)$  și  $P_n - A \in \mathcal{M}_f(\mu)$  etc.

Vom pune în evidență proprietățile fundamentale ale măsurii Lebesgue mai sus construite, proprietăți deseori utilizate în aplicații. Nu vom insista asupra demonstrațiilor amănunțite ale acestor rezultate. Vom nota  $\mu^*|_{\mathcal{M}(\mu)}$  prin  $\mu$ , iar mulțimile din  $\mathcal{M}(\mu)$  vor fi numite mulțimi **măsurabile Lebesgue**.

1. Dacă  $A$  este o mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^k$ , atunci  $A \in \mathcal{M}(\mu)$ . În adevăr, mulțimile deschise sunt reuniuni numărabile de paralelipede deschise. Rezultă că  $\mathcal{M}(\mu)$  fiind o  $\sigma$ -algebră, ea conține toate mulțimile **boreliene** ale lui  $\mathbb{R}^k$  (cea mai mică  $\sigma$ -algebră generată de deschișii lui  $\mathbb{R}^k$ ). În particular, mulțimile închise sunt măsurabile Lebesgue. Mai mult, pentru orice mulțime compactă  $K \subset \mathbb{R}^p$ ,  $\mu(K) < +\infty$ .

2. Dacă  $A \in \mathcal{M}(\mu)$ , atunci  $\forall \varepsilon > 0$  există o mulțime închisă  $F$  și o mulțime deschisă  $G$ ,  $F \subset A \subset G$  astfel încât  $\mu(G - A) < \varepsilon$ ,  $\mu(A - F) < \varepsilon$  (**regularitate**). În adevăr, pentru  $G$  folosim definiția măsurii (exterioare) și pentru  $F$  prin trecere la complementară. Mai mult avem:

3. Pentru orice  $A \in \mathcal{M}(\mu)$ ,  $\mu(A) = \inf_G \{\mu(G) \mid G \supset A, G \text{ deschisă}\}$  și

$$\mu(A) = \sup_K \{\mu(K) \mid K \subset A, K \text{ mulțime compactă}\}.$$

Pentru ultima proprietate observăm că  $\mathbb{R}^k = \bigcup_n K_n$  cu  $K_n$  compacte.

Deci pentru orice mulțime închisă  $F$ , avem  $F = \bigcup_n (K_n \cap F)$  și  $K_n \cap F$  sunt **compacte**. Șirul  $F_n = (K_1 \cup \dots \cup K_n) \cap F$  este un șir crescător de mulțimi compacte și  $F = \bigcup_n F_n$ . Din proprietățile generale ale măsurii (lecția a X - a), deducem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \mu(F)$ . Deci măsura mulțimilor închise se poate aproxima

cu măsura mulțimilor compacte conținute. Folosind proprietatea 2 (aproximarea cu mulțimi incluse), deducem

$$\mu(A) = \sup_K \{\mu(K) \mid K \subset A, K \text{ mulțime compactă}\}.$$

4. Dacă  $E \subset A$ ,  $A \in \mathcal{M}(\mu)$  și  $\mu(A) = 0$  atunci  $E \in \mathcal{M}(\mu)$  și  $\mu(E) = 0$  (se mai spune că măsura Lebesgue este **completă**).

Este suficient să arătăm că dacă  $E \subset \mathbb{R}^k$  și  $\mu^*(E) = 0$  atunci  $E \in \mathcal{M}(\mu)$ . Pentru aceasta, fie  $(A_n)_n$  un șir de mulțimi elementare astfel încât seria  $\sum \mu(A_n)$  să convergă. Avem

$$\mu^*(A_n \Delta E) = \mu^*((A_n - E) \cup (E - A_n)) \leq \mu^*(A_n) + \mu^*(E) = \mu^*(A_n)$$

decă  $\mu^*(A_n \Delta E) \rightarrow 0$ , dacă  $E \in \mathcal{M}(\mu)$ .

5. Pentru  $A \subset \mathbb{R}^k$  și  $x \in \mathbb{R}^k$  definim  $A + x = \{a + x \mid a \in A\}$ . Măsura Lebesgue are proprietatea de a fi **invariantă** la translații, în sensul că dacă  $A \in \mathcal{M}(\mu)$  și  $x \in \mathbb{R}^k$ , atunci  $A + x \in \mathcal{M}(\mu)$  și  $\mu(A) = \mu(A + x)$ .

Demonstrația începe cu  $A$  paraleliped (unde proprietatea este clară) și apoi se extinde la mulțimile generale din  $\mathcal{M}(\mu)$ .

**Comentariu.** Mulțimile utilizate curent din  $\mathbb{R}^k$  sunt măsurabile Lebesgue și este destul de dificil de a da un exemplu de mulțime nemăsurabilă. Pentru aceasta trimitem la exercițiul 3.

Vom numi integrala în raport cu măsura Lebesgue, **integrala Lebesgue**.

Să observăm că pentru orice  $X \subset \mathbb{R}^k$  cu proprietatea  $X \in \mathcal{M}(\mu)$  putem considera  $\sigma$ -algebra pe  $X$  notată  $\mathcal{M}_X(\mu)$ , formată din mulțimile  $A \in \mathcal{M}(\mu)$  cu  $A \subset X$ . În mod evident,  $(X, \mathcal{M}_X(\mu), \mu|_{\mathcal{M}_X(\mu)})$  este un spațiu cu măsură. În particular, pentru orice mulțime compactă  $X \subset \mathbb{R}^k$ ,  $(X, \mathcal{M}_X(\mu), \mu|_{\mathcal{M}_X(\mu)})$  este un spațiu cu măsură **finită**. În particular, orice funcție măsurabilă și mărginită pe un compact  $X \subset \mathbb{R}^k$  este integrabilă (decă în  $L^1$ ) în raport cu măsura Lebesgue. În consecință, orice funcție continuă pe un compact din  $\mathbb{R}^k$  este integrabilă.

În cazul particular  $k = 1$  și  $X = [a, b]$ , avem două "integrale" - integrala Riemann și integrala Lebesgue. Are loc

**TEOREMA XI. 3.** Dacă  $f$  este integrabilă Riemann pe  $[a, b]$ , atunci  $f$  este integrabilă Lebesgue pe  $[a, b]$  și integralele coincid.

Dacă notăm integrala Riemann, pentru moment, cu  $R \int_a^b f dx$  iar integrala

Lebesgue  $\int_{[a,b]} f d\mu$  cu  $\int_a^b f dx$ , avem de arătat că  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  implică  $f \in L^1_{[a,b]}(\mu)$

$$\text{și } R \int_a^b f dx = \int_a^b f dx.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Fie deci  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  și  $(v_k)_k$  un șir de diviziuni astfel încât  $v_{k+1}$  rafinează  $v_k$  pentru orice  $k$ , **normele tinzând la 0**. Dacă  $v_k$  este  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , se definesc funcțiile  $S_k$  și  $s_k$  astfel:

$$S_k(x) = \begin{cases} f(a), & x = a \\ M_i, & x \in (x_{i-1}, x_i] \quad i = 1, \dots, n; \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \end{cases}$$

$$s_k(x) = \begin{cases} f(a), & x = a \\ m_i, & x \in (x_{i-1}, x_i] \quad i = 1, \dots, n; \quad m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x). \end{cases}$$

În mod clar,  $S(v_k, f) = \int_a^b S_k dx$ ,  $s(v_k, f) = \int_a^b s_k dx$  (notațiile de la lecția a VIII-a)

și  $S_1(x) \geq S_2(x) \geq \dots \geq f(x) \geq \dots \geq s_2(x) \geq s_1(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Să notăm  $S(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x)$

și  $s(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x)$  pentru  $x \in [a, b]$ . Din faptul că  $f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$ ,  $S(v_k, f) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} R \int_a^b f dx$ ,

$s(v_k, f) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} R \int_a^b f dx$ . Aplicînd teorema de convergență dominantă (lecția a X-a)

$$\int_a^b S_k dx \rightarrow \int_a^b S dx \text{ și } \int_a^b s_k dx \rightarrow \int_a^b s dx$$

deci în definitiv

$$\int_a^b S dx = \int_a^b s dx = R \int_a^b f dx.$$

Deducem  $S = s$  a.p.t. și cum  $s(x) \leq f(x) \leq S(x)$  pentru orice  $x \in [a, b]$ , rezultă  $s = f = S$  a.p.t. S și  $s$  fiind măsurabile, deducem că  $f$  este măsurabilă și

$$\int_a^b f dx = \int_a^b S dx = \int_a^b s dx = R \int_a^b f dx,$$

ceea ce termină demonstrația.

Pentru a vedea că integrala Lebesgue este efectiv mai generală decît integrala Riemann să considerăm următorul exemplu.

EXEMPLUL 1. Să considerăm pe  $[a, b]$ ,  $a < b$  funcția  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irațional} \\ 1, & x \text{ rațional} \end{cases}$

Este clar că  $f$  este măsurabilă pe  $[a, b]$  (este funcția caracteristică a unei mulțimi numărabile deci măsurabile Lebesgue). Măsura intervalului  $[a, b]$  este finită ( $b - a$ ) și  $f$  măsurabilă și mărginită. Deci  $f \in L^1_{[a, b]}(\mu)$  (este deci integrabilă Lebesgue!). Mai mult, cum măsura unei mulțimi numărabile este

0, deducem  $\int_a^b f dx = 0$  (integrala Lebesgue). Se știe însă că  $f$  nu este integrabilă

Riemann (fiind discontinuă în orice punct).

**Comentariu.** Se poate arăta că dacă o funcție  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este local integrabilă (în sens Riemann) și integrala (Riemann) improprie  $\int_a^b f dx$  este absolut convergentă, atunci

$f \in L^1_{[a, b]}$ , în raport cu măsura Lebesgue. O oarecare neconcordanță în acest tip de rezultate o aduc integralele improprie care nu sunt absolut convergente (exemplu tipic:  $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ ). Din definiția integralei Lebesgue rezultă că integrabilitatea Lebesgue este

o "absolut" integrabilitate și deci funcția  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$  pe  $[0, \infty)$  nu este integrabilă Lebesgue.

Pentru "calculul" integralelor Lebesgue în spiritul formulei Leibniz - Newton există rezultate deosebit de frumoase dar a căror demonstrație depășește cadrul acestei cărți. Ne vom limita la a enunța două rezultate în acest sens

(fără demonstrație). Pentru a preciza notația vom folosi  $\int_a^b f dt$  pentru integrala Lebesgue pe  $[a, b]$  ( $dt$  fiind notația pentru măsura  $dp$ ).

**TEOREMA XI. 4.** Dacă  $f$  este integrabilă Lebesgue pe  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , atunci

funcția  $F(x) = \int_a^x f dt$  este derivabilă aproape peste tot pe  $[a, b]$  și  $F'(x) = f(x)$  aproape peste tot.

O funcție  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se zice **absolut continuă** pe  $[a, b]$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta > 0$  astfel încît pentru orice mulțime de intervale disjuncte două câte două  $(a_k, b_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$  satisfăcînd condiția  $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ , să

rezulte  $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ . Un exemplu important de funcție absolut

continuă îl constituie funcția  $F(x) = \int_a^x f dt$  pentru  $f$  integrabilă Lebesgue pe  $[a, b]$ .

**TEOREMA XI. 5.** Dacă  $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este absolut continuă, atunci  $G$  este derivabilă a.p.t.,  $G' = g$  este integrabilă Lebesgue pe  $[a, b]$  și

$$\int_a^b g dt = G(b) - G(a).$$

OBSERVAȚIE. Deși  $g$  este definită a.p.t., sensul integrabilității sale este următorul: se prelungește  $g$  la  $[a, b]$  cu valoarea 0 în punctele în care nu este definită și funcția astfel obținută este integrabilă Lebesgue etc.

## 2. Teorema lui Fubini. Schimbarea de variabilă

Fie  $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}(\mu), \mu)$ ,  $(\mathbb{R}^p, \mathcal{M}(\lambda), \lambda)$ ,  $(\mathbb{R}^{k+p}, \mathcal{M}(\nu), \nu)$ , spațiile  $\mathbb{R}^k$  (respectiv  $\mathbb{R}^p$ ,  $\mathbb{R}^{k+p}$ ) cu măsurile Lebesgue construite în paragraful precedent și  $\mu^*$ ,  $\lambda^*$ ,  $\nu^*$  măsurile exterioare corespunzătoare. Vom identifica în mod natural  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$  cu  $\mathbb{R}^{k+p}$ .

Să definim  $(\mu^* \times \lambda^*)(E) = \inf \sum_i \mu^*(A_i) \lambda^*(B_i)$  pentru  $E \subset \mathbb{R}^{k+p}$  și inf este luat după toate șirurile  $(A_i)_i$ ,  $(B_i)_i$ ,  $A_i \subset \mathbb{R}^k$ ,  $B_i \subset \mathbb{R}^p \forall i$ , astfel încât  $E \subset \bigcup_i A_i \times B_i$ .

**TEOREMA XI. 6.** 1)  $\mu^* \times \lambda^*$  este o măsură exterioară pe  $\mathbb{R}^{k+p}$  și  $\mu^* \times \lambda^* = \nu^*$  (măsura exterioară pe  $\mathbb{R}^{k+p}$  este "produsul" măsurilor exterioare pe  $\mathbb{R}^k$  și  $\mathbb{R}^p$ ). 2) Dacă  $A \in \mathcal{M}(\mu)$ ,  $B \in \mathcal{M}(\lambda)$  atunci  $A \times B \in \mathcal{M}(\nu)$  și  $\nu(A \times B) = \mu(A) \lambda(B)$ . Mai general teorema funcționează și pentru  $X \subset \mathbb{R}^k$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^p$ ,  $X \times Y \subset \mathbb{R}^{k+p}$ , cu măsurile Lebesgue incluse corespunzătoare. Vom nota pentru  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  și  $x \in X$ ,  $f_x: Y \rightarrow \mathbb{C}$ , dată de  $f_x(y) = f(x, y)$ .

**TEOREMA XI. 7.** (G. FUBINI, 1870-1943). a) Fie  $f: \mathbb{R}^{p+k} \rightarrow [0, \infty)$  măsurabilă. Pentru aproape toate punctele  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $f_x$  este măsurabilă pe  $\mathbb{R}^p$  (măsura Lebesgue). Funcția  $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^p} f_x d\lambda$  este măsurabilă pe  $\mathbb{R}^k$  și  $\int_{\mathbb{R}^k} \varphi d\mu = \int_{\mathbb{R}^{k+p}} f d\nu$ . Desigur avem un rezultat analog schimbând  $\mathbb{R}^k$  cu  $\mathbb{R}^p$ .

b) Fie  $f: \mathbb{R}^{k+p} \rightarrow \mathbb{C}$  măsurabilă și  $\varphi^*(x) = \int_{\mathbb{R}^p} |f_x| d\lambda$ . Dacă  $\int_{\mathbb{R}^k} \varphi^* d\mu < \infty$ , atunci  $f$  este integrabilă Lebesgue pe  $\mathbb{R}^{k+p}$ .

c) Dacă  $f$  este integrabilă Lebesgue pe  $\mathbb{R}^{k+p}$ , atunci  $f_x$  este integrabilă Lebesgue pe  $\mathbb{R}^p$  pentru aproape toate punctele  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^p} f_x d\lambda$  definită aproape peste tot este integrabilă Lebesgue pe  $\mathbb{R}^k$  și avem

## 2. Teorema lui Fubini. Schimbarea de variabilă

$$\int_{\mathbb{R}^k} \varphi d\mu = \int_{\mathbb{R}^{k+p}} f d\nu$$

sau

$$\int_{\mathbb{R}^k} \left[ \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) d\lambda(y) \right] d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^{k+p}} f(x, y) d\nu(x, y).$$

Desigur avem un rezultat analog schimbând  $\mathbb{R}^k$  cu  $\mathbb{R}^p$  ( $x$  cu  $y$ ). Pentru simplitate, vom nota  $d\mu = dx$ ,  $d\lambda = dy$ ,  $d\nu = dx dy$ . Putem rescrie formula de la punctul c) astfel:

$$\int_{\mathbb{R}^k} \left[ \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}^{k+p}} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left[ \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dx \right] dy$$

Prima și a treia integrală se numesc integrale *iterate*.

Nu vom demonstra teorema XI. 7. Să remarcăm că punctul b) servește la a arăta că o funcție **măsurabilă** pe  $\mathbb{R}^{p+k}$  este integrabilă cu ajutorul calculului (mai simplu) al unei integrale iterate. Punctul c) permite calculul integralei unei funcții **integrabile** pe  $\mathbb{R}^{k+p}$  cu ajutorul unei integrale iterate. În acest mod se reduce în principiu, calculul integralelor "multiple" (pe  $\mathbb{R}^n$ ) la calculul integralelor simple (pe  $\mathbb{R}$ ).

Desigur se pot înlocui în teoremă  $\mathbb{R}^k$  ( $\mathbb{R}^p$ ) cu  $X \subset \mathbb{R}^k$  ( $Y \subset \mathbb{R}^p$ ) măsurabile și  $\mathbb{R}^{k+p}$  cu  $X \times Y \subset \mathbb{R}^{k+p}$  și rezultă că integralele multiple revin la succesiuni de integrale simple (pe intervale sau alte submulțimi ale lui  $\mathbb{R}$ ).

Să aplicăm teorema lui Fubini la câteva cazuri simple care intervin des în aplicații.

**EXEMPLUL 2.** Fie  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  intervale compacte în  $\mathbb{R}$  și  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  continuă. Atunci  $f$  este integrabilă Lebesgue și

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

(pentru integrale în  $\mathbb{R}^2$  se folosește notația  $\iint$  și integralele se numesc "duble").

Integrabilitatea lui  $f$  rezultă din faptul că este continuă (deci măsurabilă) și astfel **mărginită** pe **compactul**  $[a, b] \times [c, d]$ . Egalitatea integralelor este o consecință directă a teoremei Fubini. O parte a acestui rezultat a fost demonstrată în lecția a IX-a.

Fie mai general  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$  cu  $\varphi_1, \varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $\varphi_1 \leq \varphi_2$  și  $f: K \rightarrow \mathbb{C}$  continuă. Atunci  $f$  este integrabilă pe  $K$  și

$$\iint_K f(x,y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx.$$

În adevăr  $K$  este o mulțime compactă (Fig. XI. 1).

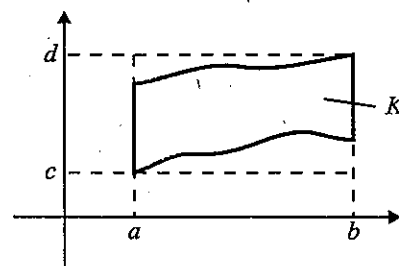


Fig. XI. 1.

Fie  $[a,b] \times [c,d] \supset K$ ; prelungim funcția  $f$  la  $[a,b] \times [c,d]$  cu 0 în afara lui  $K$  și aplicăm teorema Fubini funcției prelunșite. În particular, dacă luăm  $f \equiv 1$  pe  $K$ , obținem că măsura mulțimii  $K$  ("aria" în plan) va fi

$$\text{aria}(K) = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx,$$

formulă cunoscută din liceu.

EXEMPLUL 3. Fie  $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in A, \varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y)\}$  unde  $A \subset \mathbb{R}^2$  este o mulțime compactă,  $\varphi_1, \varphi_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$  sunt continue și  $\varphi_1 \leq \varphi_2$ . Fie  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  o funcție continuă. Avem:

$$\iiint_K f(x,y,z) dx dy dz = \iint_A \left( \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dx dy$$

(pentru integrala în  $\mathbb{R}^3$  se folosește notația  $\iiint$  și integralele se numesc "triple").

Demonstrația se face luând  $K \subset A \times [a,b]$  și aplicând teorema Fubini.

Ca un caz particular măsura mulțimii  $K$  ("volum" în spațiu) va fi

$$\text{vol}(K) = \iint_A (\varphi_2(x,y) - \varphi_1(x,y)) dx dy.$$

Vom încheia acest paragraf cu teorema de schimbare de variabilă, teoremă foarte utilă atât teoretic cât și în calculul efectiv al integralelor.

**TEOREMA XI. 8.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă (nevidă),  $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clasă  $C^1$ , injectivă și cu jacobianul  $J_\Phi(t) \neq 0$  pentru orice  $t \in A$ . Atunci

### 3. Spații $L^p$

$\Phi(A) = B$  este deschisă în  $\mathbb{R}^n$  și dacă  $f : B \rightarrow \mathbb{C}$  este măsurabilă (măsura Lebesgue), atunci

- i)  $f \circ \Phi : A \rightarrow \mathbb{C}$  este măsurabilă;
- ii)  $f \in L^1_B \Leftrightarrow (f \circ \Phi) |J_\Phi| \in L^1_A$ ;
- iii) Dacă  $f \in L^1_B$ , atunci

$$\int_B f(x) dx = \int_A (f \circ \Phi)(t) |J_\Phi(t)| dt$$

( $dt, dx$  fiind măsura Lebesgue în  $\mathbb{R}^n$ ).

Formula iii) este **formula de schimbare de variabilă**. În mod formal, dacă schimbarea de variabilă  $\Phi$  este scrisă  $x = \Phi(t)$ , în integrală vom înlocui  $f(x)$  cu  $f(\Phi(t))$  și  $dx$  cu  $|J_\Phi(t)| dt$ .

OBSERVAȚIE. Teorema se aplică cu modificări evidente pentru mulțimi măsurabile  $M \subset A$  și  $\Phi(M) \subset B$ .

Demonstrația teoremei este laborioasă și o vom omite.

EXEMPLUL 4. Fie  $A = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$  și  $\Phi(r,\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ ,  $B = \mathbb{R}^2 - \{(x,0); x \leq 0\}$ . Deducem pentru  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  integrabilă pe  $\mathbb{R}^2$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \iint_B f(x,y) dx dy = \iint_A f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

(coordonate polare).

### 3. Spații $L^p$

Două numere reale pozitive  $p, q$  formează o pereche de **exponenți conjugăți** dacă  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (deci  $p, q > 1$ ). Prin convenție se consideră  $1, \infty$  ca pereche de **exponenți conjugăți**.

**Inegalitatea lui Hölder.** Fie  $1 < p < \infty, q$  conjugatul lui  $p$  și  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură. Pentru orice  $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$  măsurabile avem

$$(*) \quad \int_X fg d\mu \leq \left( \int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

În cazul  $p = q = 2$  inegalitatea (\*) se numește **inegalitatea lui Schwartz**. Pentru demonstrație trimitem la exercițiul 5.

**Inegalitatea lui Minkowski.** Fie  $1 \leq p < \infty$  și  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură și  $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$  măsurabile. Atunci

$$(**) \quad \left( \int_X (f+g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_X g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pentru demonstrație trimitem la exercițiul 5.

**Definiția XI. 4.** Fie  $1 \leq p < \infty$  și  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură. Definim mulțimea  $L_X^p(\mu)$  prin

$$L_X^p(\mu) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{măsurabilă, } \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}.$$

Se observă că pentru  $p = 1$  regăsim mulțimea funcțiilor integrabile pe  $X$ .

Pentru  $f \in L_X^p(\mu)$  notăm

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Să remarcăm că  $\|f\|_p = 0$  înseamnă  $f = 0$  a.p.t. Vom considera în  $L_X^p(\mu)$  relația de echivalență  $f \sim g$  dacă  $f = g$  a.p.t. și vom nota tot  $L_X^p(\mu)$  mulțimea claselor de echivalență (în general nu este pericol de confuzie, se lucrează cu reprezentanți dar este ușor de arătat că rezultatele depind doar de clasele de echivalență).

**TEOREMA XI. 9.** Cu operațiile naturale,  $L_X^p(\mu)$  este un spațiu vectorial, iar  $\|\cdot\|_p$  este o normă pe  $L_X^p(\mu)$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Totul rezultă din inegalitatea lui Minkowski. Să remarcăm că trecerea la clase de echivalență a fost necesară pentru a obține  $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ , ceea ce se întâmplă la nivel de clase.

**TEOREMA XI. 10.**  $L_X^p(\mu)$  este un spațiu Banach.

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $(f_n)_n$  un șir Cauchy în  $L_X^p(\mu)$ . Se poate găsi un subșir  $(f_{n_i})_i$  astfel încît

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \frac{1}{2^i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Notăm

$$g_k = \sum_{i=1}^k |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|, \quad g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$$

dar

$$\|g_k\| \leq \sum_{i=1}^k \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\| \leq \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} < 1.$$

Deducem, folosind teorema lui Fatou, că

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k^p d\mu \leq 1.$$

Dar  $g^p = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k^p$  deci  $\int_X g^p d\mu \leq 1$ . Rezultă  $g(x) < +\infty$  aproape pentru toate punctele  $x \in X$  deci seria

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$$

converge absolut a.p.t. Notăm  $f(x)$  suma acestei serii pentru care converge și 0 în rest;  $f$  este măsurabilă. Avem  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n_i}(x)$  a.p.t. Vom arăta că  $f \in L_X^p(\mu)$  și  $f_n \rightarrow f$  în  $L_X^p(\mu)$ .

Fie  $\varepsilon > 0$ . Există  $N_\varepsilon$  astfel încît  $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$  dacă  $n, m > N_\varepsilon$ . Fixînd  $m > N_\varepsilon$ , obținem din lema lui Fatou

$$\int_X |f - f_m|^p d\mu \leq \liminf \int_X |f_{n_i} - f_m|^p d\mu \leq \varepsilon^p$$

deci  $f - f_m \in L_X^p(\mu)$  deci  $f \in L_X^p(\mu)$  și în plus  $\|f - f_m\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ ; teorema este demonstrată.

**OBSERVAȚIE.** Teorema de mai sus este deosebit de importantă arătînd utilitatea integralei Lebesgue. Spațiile de tip  $L^p$  ce pot fi definite cu ajutorul integralei Riemann nu sunt complete. În fapt completatele lor sunt  $L^p$  de tip Lebesgue. Deci integrala Lebesgue furnizează completate concrete pentru spații de tip  $L^p$  de funcții continue de exemplu.

**Spațiul  $L_X^\infty(\mu)$ .** Fie  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  măsurabilă și fie  $S = \{\alpha \in \mathbb{R}; \mu(g^{-1}(\alpha, \infty)) = 0\}$ .

Dacă  $S = \emptyset$  punem  $\text{esssup } g = +\infty$ . Dacă  $S \neq \emptyset$  punem  $\text{esssup } g = \inf S$ .  $\text{esssup } g$  este marginea superioară "esențială" a lui  $g$ . Notăm, pentru  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  măsurabilă,  $\|f\|_\infty = \text{esssup } |f|$  și fie

$$L_X^\infty(\mu) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ măsurabilă, } \|f\|_\infty < +\infty\}.$$

Se introduce pe  $L_X^\infty(\mu)$  relația de echivalență  $f \sim g$  dacă  $f = g$  a.p.t. și se arată imediat că  $L_X^\infty(\mu)$  este un spațiu Banach pentru  $\|\cdot\|_\infty$  (spațiul claselor etc.).

Vom încheia acest paragraf cu următoarea importantă

**TEOREMA IX. 11.** (N. LUZIN, 1883-1950). Fie  $C$  mulțimea funcțiilor continue pe  $\mathbb{R}^k$ . Atunci  $C \cap L_{\mathbb{R}^k}^1(\mu)$  este densă în  $L_{\mathbb{R}^k}^1(\mu)$  ( $\mu$  = măsura Lebesgue), (în sensul că orice  $f$  în  $L_{\mathbb{R}^k}^1(\mu)$  este limita unui șir din  $C \cap L_{\mathbb{R}^k}^1(\mu)$ ).

**DEMONSTRAȚIE.** Să observăm că mulțimea  $S$  a funcțiilor măsurabile (clase de) care iau un număr finit de valori și sunt integrabile este densă în  $L_{\mathbb{R}^k}^1(\mu)$  (dacă  $f \in L_{\mathbb{R}^k}^1(\mu)$ ,  $f \geq 0$  se consideră  $0 \leq s_n \nearrow f$ ,  $s_n$  simple și se aplică teorema de convergență dominantă; cazul  $f$  oarecare se reduce la cazul  $f \geq 0$ ). Este deci suficient să arătăm deci că orice funcție ce ia un număr finit de valori și este în  $L_{\mathbb{R}^k}^1(\mu)$  se poate aproxima (în  $L_{\mathbb{R}^k}^1(\mu)$ ) cu funcții continue (din  $L_{\mathbb{R}^k}^1(\mu)$ ). Cum funcțiile ce iau un număr finit de valori sunt combinații liniare de funcții caracteristice, este suficient să considerăm  $\chi_M$  cu  $M$  măsurabilă și  $\mu(M) < \infty$  (căci  $\chi_M \in L_{\mathbb{R}^k}^1(\mu)$ ). Fie  $\forall \varepsilon > 0$ . Din proprietățile de regularitate a măsurii Lebesgue, găsim o mulțime închisă  $F \subset M$  și o mulțime deschisă  $M \subset G$ , astfel încît  $\mu(G) - \mu(F) < \varepsilon$ . Să definim funcția  $\varphi_\varepsilon: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ , prin

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^k - G)}{d(x, \mathbb{R}^k - G) + d(x, F)}, \quad x \in \mathbb{R}^k,$$

unde pentru orice mulțime  $A \subset \mathbb{R}^k$ ,

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y),$$

$d(x, y)$  fiind distanța euclidiană.  $\varphi_\varepsilon$  este o funcție continuă nulă pentru  $x \in \mathbb{R}^k - G$  și egală cu 1 pe  $F$ . Se observă imediat că  $\varphi_\varepsilon$  este integrabilă Lebesgue pe  $\mathbb{R}^k$ . În plus,  $|\chi_M - \varphi_\varepsilon| \leq 1$  pe  $G - F$  și  $\chi_M = \varphi_\varepsilon$  în rest. Deci în definitiv,

$$\int_{\mathbb{R}^k} |\chi_M - \varphi_\varepsilon| d\mu < \varepsilon$$

deci  $\|\chi_M - \varphi_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$ . Teorema este demonstrată.

**OBSERVAȚIE.** Teorema se extinde cu ușurință la  $L_{\mathbb{R}^k}^p(\mu)$ ,  $1 < p < \infty$ .

#### 4. 10 exerciții

1. Dacă  $(A_n)_n, (B_n)_n$  sunt șiruri de părți în  $\mathbb{R}^k$  atunci din  $A_n \rightarrow A, B_n \rightarrow B$  rezultă  $A_n \cup B_n \rightarrow A \cup B, A_n \cap B_n \rightarrow A \cap B$ .

2. Dacă  $A, B \in \mathbb{R}^k$  și  $\mu^*(B) < \infty$ , atunci  $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B)$ .

3. Pe intervalul  $(0, 1)$  se introduce relația de echivalență  $x \sim y$  dacă  $x - y \in \mathbb{Q}$  și fie  $E \subset (0, 1)$  o mulțime ce conține câte un element din fiecare clasă de echivalență. Să se arate că  $E$  nu este măsurabilă Lebesgue.

4. Să se calculeze  $\iiint_L \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$  unde  $L$  este mărginit de  $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ .

5. Să se demonstreze inegalitățile Hölder și Minkowski.

6. Să se determine aria compactului plan mărginit de curbele  $xy=p, xy=q, y=ax, y=bx; a, b, p, q > 0, a < b, p < q$ .

7. Să se afle volumul compactului  $K \subset \mathbb{R}^3$  mărginit de  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z=0, z=xy$ , cu  $x, y \geq 0$ .

8. Pornind de la integrala  $I = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$  să se calculeze  $J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ .

9. Să se calculeze volumul compactului  $L \subset \mathbb{R}^3$  mărginit de "suprafața"  
 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z, a > 0, x, y \geq 0$ .

10. 1) Să se calculeze volumul mărginit de

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= \pm h_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= \pm h_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= \pm h_3 \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad h_1, h_2, h_3 > 0.$$

2) Să se calculeze  $I = \iiint_K \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz$ , unde  $K$  este compactul mărginit de  $x^2 + y^2 = ax$ ,  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z \geq 0$ ,  $a > 0$ .

### INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Se arată că

$$(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2),$$

$$(A_1 \cap A_2) \Delta (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2),$$

$$(A_1 - A_2) \Delta (B_1 - B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2),$$

pentru orice  $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^k$ . Se deduce că

$$\mu^*[(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2)] \leq \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2),$$

$$\mu^*[(A_1 \cap A_2) \Delta (B_1 \cap B_2)] \leq \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2),$$

$$\mu^*[(A_1 - A_2) \Delta (B_1 - B_2)] \leq \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2).$$

Avem în definitiv

$$\mu^*[(A_n \cup B_n) \Delta (A \cup B)] \leq \mu^*(A_n \Delta A) + \mu^*(B_n \Delta B) \text{ etc.}$$

2. Să presupunem de exemplu că  $0 \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A)$ . Avem

$$\mu^*(A \Delta \emptyset) \leq \mu^*(A \Delta B) + \mu^*(B \Delta \emptyset)$$

de unde

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \Delta B) + \mu^*(B)$$

și deci

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \leq \mu^*(A \Delta B).$$

3. Să presupunem că  $E$  ar fi măsurabilă și  $\mu(E) = \alpha$ . Se verifică ușor că  $(0, 1) \subset \bigcup_r (E + r)$  când  $r \in \mathbb{Q} \cap (-1, 1)$  și dacă  $r \neq s$  atunci  $(E + r) \cap (E + s) = \emptyset$ . Vom avea pentru  $S = \bigcup_r (E + r)$ ,  $\mu(S) = \sum_r \mu(E + r)$  (numărabil aditivitate) și  $\mu(S) < \infty$  căci

### 4. 10 exerciții

$S \subset (-1, 2)$ . Dar  $\mu(E + r) = \alpha$  pentru orice  $r$  (invarianța la translație). Rezultă  $\alpha = 0$  ceea ce este în evidentă contradicție cu  $(0, 1) \subset S$ .

4. Conform teoremei Fubini ( $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2(x, y) = 1 - x - y$  în exemplul 3 pag. 258)

$$I = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \right) dy \right) dx = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

(integralele se calculează de la dreapta spre stânga). Se obține

$$I = \frac{1}{2} \left( \ln 2 - \frac{5}{8} \right).$$

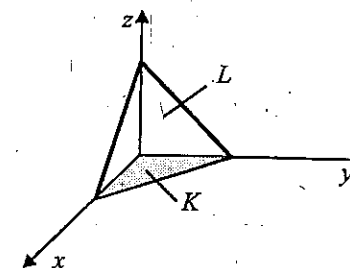


Fig. XI. 2.

5. Să notăm

$$A = \left( \int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad B = \left( \int_X g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Inegalitatea lui Hölder rezultă imediat dacă  $A = 0$  (căci  $f$  rezultă 0 a.p.t.) Analog cazul  $B = 0$ . Cazul  $A > 0$ ,  $B = \infty$  rezultă imediat (și evident analog cazul  $A = \infty$ ,  $B = 0$ ). Rămâne de demonstrat doar cazul  $0 < A < \infty$ ,  $0 < B < \infty$ . Se notează

$$F = \frac{f}{A}, \quad G = \frac{g}{B} \text{ deci } \int_X F^p d\mu = \int_X G^q d\mu = 1.$$

Dacă pentru  $x \in X$  avem  $0 < F(x) < \infty$ ,  $0 < G(x) < \infty$ , există numere reale  $s$  și  $t$  cu  $F(x) = e^{s/p}$ ,  $G(x) = e^{t/q}$ . Din convexitatea funcției exponențiale (graficul funcției între două puncte este "sub" segmentul de dreaptă ce unește punctele) și din  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

deducem

$$e^{s/p + t/q} \leq \frac{1}{p} e^s + \frac{1}{q} e^t;$$

avem deci

$$F(x)G(x) \leq \frac{1}{p} F(x)^p + \frac{1}{q} G(x)^q$$

care integrată pe  $X$  duce rapid la inegalitatea lui Hölder.

Pentru inegalitatea lui Minkowski se scrie

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}.$$

Se aplică inegalitatea lui Hölder produselor din membrul drept și se folosește convexitatea funcției  $t^p$ ,  $t \in (0, \infty)$ .

6. Avem de calculat  $\iint_K dx dy$  unde  $K$  este compactul hașurat. Se poate schimbarea de variabilă  $xy = u$ ,  $y = vx$ ,  $u \in [p, q]$ ,  $v \in [a, b]$ .

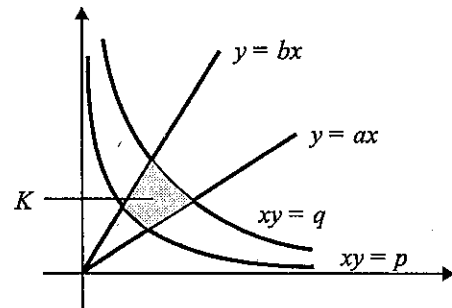


Fig. XI. 3.

Se calculează jacobianul transformării  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  deduse din schimbarea de variabilă și se obține  $J = \frac{1}{2v}$ . Se obține deci

$$\text{aria } K = \iint_K dx dy = \iint_{pa}^{qb} \frac{du dv}{2v} = \frac{1}{2}(q-p) \ln \frac{b}{a}.$$

7. Conform formulei stabilite pentru calculul volumelor (exemplul 3 pag. 258) vom avea

$$\text{vol } K = \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq 1 \\ x, y \geq 0}} xy dx dy.$$

$x = \arccost$ ,  $y = brsint$  și găsim

$$\text{vol } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 a^2 b^2 r^3 \sin t \cos t dt = a^2 b^2 \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \frac{a^2 b^2}{8}.$$

8. Folosind teorema lui Fubini (pe  $[0, \infty) \times [0, \infty)$ ) deducem că  $e^{-(x^2+y^2)}$  este integrabilă Lebesgue pe  $[0, \infty) \times [0, \infty)$ . În adevăr

$$\left( \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dy \right) dx = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2$$

și se știe că  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  este finită. În plus  $I = J^2$ . Pentru calculul integralei  $I$  se trece în coordonate polare  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$  și obținem

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-r^2} r dr dt = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Rezultă } J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

9. Se trece în coordonate sferice  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ . Se obține ecuația "suprafeței" în coordonate sferice  $r = a \sqrt[3]{\cos \theta}$ . Jacobianul schimbării de variabilă este  $J = r^2 \sin \theta$ . Din cauza simetriei suprafeței vom avea

$$\text{vol } L = \iiint_L dx dy dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \sqrt[3]{\cos \theta}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \sqrt[3]{\cos \theta}} r^2 \sin \theta dr = \frac{\pi a^3}{3}$$

(integralele se calculează de la dreapta la stânga).

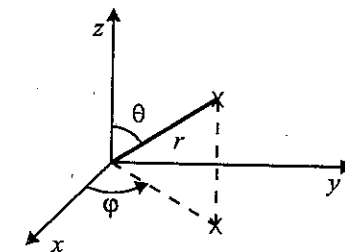


Fig. XI. 4.

10. 1) Se face schimbarea de variabilă

$$u = a_1 x + b_1 y + c_1 z,$$

$$v = a_2 x + b_2 y + c_2 z,$$

$$w = a_3 x + b_3 y + c_3 z \text{ etc.}$$

$$\text{Se obține } \frac{8h_1 h_2 h_3}{|\Delta|}.$$

2) Se trece în coordonate cilindrice  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$ ,  $z = z$ . Jacobianul schimbării de variabilă este  $r$ . Conul  $z^2 = x^2 + y^2$  are în consecință ecuația  $z = r$ . Se obține

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\operatorname{arccost} r} \int_0^r r^2 dt dr dz, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], r \in [0, \operatorname{cost}], z \in [0, r]$$

căci ecuația cilindrului  $x^2 + y^2 = ax$  este  $r^2 = \operatorname{arccost}$ . După calcule simple găsim

$$I = \frac{3\pi a^4}{32}.$$

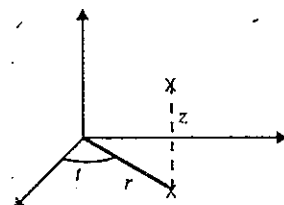


Fig. XI. 5.

## LECȚIA A XII-A

# INTEGRALE CURBILINII, INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ

## INTRODUCERE

Vom studia în această lecție integrarea 1 – formelor diferențiale pe arce orientate (integrala curbilinie) și integrarea 2 – formelor diferențiale pe pînze orientate (integrale de suprafață). Teoria prezentată admite generalizări  $n$  – dimensionale și la varietăți diferențiabile dar, chiar dacă nu apar idei noi, "tehnică" folosită este destul de elaborată și necesită adîncirea algebrei multilineare.

## 1. Integrarea 1 – formelor diferențiale

Dacă  $A \subset \mathbb{R}^n$  și  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ , spunem că  $f$  este de clasă  $C^k$  pe  $A$  dacă:

- pentru  $k = 0$ ,  $f$  este continuă;
- pentru  $k \geq 1$  există o mulțime deschisă  $U \supset A$  și o funcție  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clasă  $C^k$  astfel încît  $F|_A = f$ .

Vom nota  $\mathbb{R}^n = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  spațiul vectorial normat al aplicațiilor liniare (continue) din  $\mathbb{R}^n$  în  $\mathbb{R}$ .  $\mathbb{R}^n$  este un spațiu vectorial real de dimensiune  $n$ . Dacă  $e_1, \dots, e_n$  este baza canonică în  $\mathbb{R}^n$ , atunci  $dx_1, \dots, dx_n$  formează o bază în  $\mathbb{R}^n$ , numită baza duală (reamintim că  $dx_i(e_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ). Elementele din  $\mathbb{R}^n$  se mai numesc forme liniare pe  $\mathbb{R}^n$ .

**Definiția XII.1.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Se numește cîmp de vectori de clasă  $C^k$  pe  $A$  orice aplicație de clasă  $C^k$ ,  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**EXEMPLUL 1.** Fie  $U \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă și  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^1$ . Gradientul lui  $f$  este cîmpul de vectori de clasă  $C^0$   $\nabla f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definit prin

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right), \quad x \in U.$$

**Definiția XII. 2.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Se numește **1 - formă diferențială** de clasă  $C^k$  pe  $A$  orice aplicație de clasă  $C^k$ ,  $\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$ .

**EXEMPLUL 2.** Fie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^1$  pe mulțimea deschisă  $U \subset \mathbb{R}^n$ . **Diferențiala** lui  $f$  este 1 - forma diferențială de clasă  $C^0$   $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$

$$\alpha(x) = df(x).$$

Această 1 - formă se notează  $df$ . Vom folosi termenul **1 - formă** în loc de 1 - formă diferențială. Rezultă că  $dx_1, \dots, dx_n$  pot fi interpretate ca diferențialele proiecțiilor canonice  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Putem scrie

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i \text{ și de asemenea } df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Să notăm  $X_k(A)$  mulțimea câmpurilor de clasă  $C^k$  pe  $A$  și  $\Omega_k^1(A)$  mulțimea 1 - formelor de clasă  $C^k$  pe  $A$ . Se definește în mod natural adunarea pentru câmpuri de vectori și pentru 1 - forme, ca adunare de funcții cu valori în spații vectoriale. Mai nou, câmpurile și 1 - formele se pot înmulți cu funcții, după cum urmează:

Dacă  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  este de clasă  $C^k$  atunci:

$$\text{pentru } F \in X_k(A), (fF)(x) = f(x)F(x), \quad \forall x \in A,$$

$$\text{pentru } \alpha \in \Omega_k^1(A), (f\alpha)(x) = f(x)\alpha(x), \quad \forall x \in A.$$

Este clar că  $fF \in X_k(A)$  și  $f\alpha \in \Omega_k^1(A)$ .

Operațiile mai sus definite au proprietăți naturale  $X_k(A)$  și  $\Omega_k^1(A)$  sunt "module" peste inelul funcțiilor de clasă  $C^k$  pe  $A$  și în particular, spații vectoriale reale).

Între 1 - forme și câmpuri de vectori există o "dualitate". Anume pentru  $\alpha \in \Omega_k^1(A)$  și  $F \in X_k(A)$ , se definește funcția  $\alpha \cdot F : A \rightarrow \mathbb{R}$ , prin

$$(\alpha \cdot F)(x) = \alpha(x)(F(x)), \quad \forall x \in A$$

(reamintim că  $\alpha(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pentru orice  $x \in A$  iar  $F(x) \in \mathbb{R}^n$  etc.). Fiecare 1 - formă  $\alpha \in \Omega_k^1(A)$  se scrie în mod unic ca

$$\alpha = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$$

unde  $a_i : A \rightarrow \mathbb{R}$  sunt funcții de clasă  $C^k$ . Deci în fiecare  $x \in A$  avem

$$\alpha(x) = a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n.$$

**OBSERVAȚIE.** În ultima formulă,  $dx_1, \dots, dx_n$  reprezintă "baza duală" în  $\mathbb{R}^{n'}$ , iar în scrierea  $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ ,  $dx_1, \dots, dx_n$  sunt 1 - formele corespunzătoare proiecțiilor, așa cum am arătat mai sus.

**Definiția XII. 3.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  deschisă,  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clasă  $C^1$  și  $B \supset \varphi(A)$ . Pentru orice 1 - formă  $\alpha$  pe  $B$  definim **imaginea inversă** (prin  $\varphi$ ), notată  $\varphi^* \alpha$  ca 1 - formă pe  $A$ , prin

$$\varphi^* \alpha(x) = \alpha(\varphi(x)) \circ d\varphi(x), \quad \forall x \in A.$$

Pentru o mai bună înțelegere a acestei definiții, să remarcăm că pentru  $x \in A$ ,  $d\varphi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este liniară și de asemenea  $\alpha(\varphi(x)) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  este liniară. Astfel  $\alpha(\varphi(x)) \circ d\varphi(x)$  este o compunere de aplicații liniare deci o aplicație liniară  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . În definitiv  $\varphi^* \alpha : A \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$ .

Se observă imediat că dacă  $\alpha \in \Omega_0^1(B)$  atunci  $\varphi^* \alpha \in \Omega_0^1(A)$ , iar dacă  $\alpha \in \Omega_k^1(B)$ ,  $k \geq 1$ , atunci  $\varphi^* \alpha \in \Omega_{k-1}^1(A)$ .

**TEOREMA XII. 1.** În contextul de mai sus, avem

- 1)  $\varphi^*(\alpha + \beta) = \varphi^* \alpha + \varphi^* \beta$ ;  $\alpha, \beta$  1 - forme pe  $B$ .
- 2)  $\varphi^*(f\alpha) = (f \circ \varphi) \varphi^* \alpha$ ;  $\alpha$  este 1 - formă pe  $B$ ,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  etc.
- 3) Dacă  $B$  este deschisă și  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  este de clasă  $C^1$ , atunci

$$\varphi^*(dg) = d(g \circ \varphi)$$

(deci imaginea inversă a unei diferențiale este tot o diferențială).

**DEMONSTRAȚIE.** Lăsăm 1) și 2) în seama cititorului și demonstrăm 3). Avem

$$\varphi^*(dg)(x) = dg(\varphi(x)) \circ d\varphi(x) = d(g \circ \varphi)(x),$$

după cum rezultă din teorema de diferențiere a funcțiilor compuse.

**TEOREMA XII. 2.** Dacă  $\varphi : A \rightarrow B$ ,  $\Psi : B \rightarrow \mathbb{R}^p$  unde  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $B \subset \mathbb{R}^m$  sunt deschise și  $\alpha$  este o 1 - formă pe  $C \supset \Psi(B)$ , atunci

$$\varphi^*(\Psi^* \alpha) = (\Psi \circ \varphi)^* \alpha.$$

Demonstrația este o simplă verificare.

Să dăm o formulă pentru calculul imaginilor inverse ale 1 - formelor. Să notăm  $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\varphi : A \rightarrow B$  ca mai sus și fie

$$\alpha = \sum_{j=1}^m a_j dy_j, \text{ cu } a_j : B \rightarrow \mathbb{R}.$$

Atunci, conform teoremelor precedente, avem

$$\begin{aligned}\varphi^* \alpha &= \varphi^* \left( \sum_{j=1}^m a_j dy_j \right) = \sum_{j=1}^m \varphi^* (a_j dy_j) = \\ &= \sum_{j=1}^m (a_j \circ \varphi) \varphi^* (dy_j) = \sum_{j=1}^m (a_j \circ \varphi) d\varphi_j, \text{ unde } \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)\end{aligned}$$

deci

$$\varphi^* \alpha = \sum_{j=1}^m (a_j \circ \varphi) d\varphi_j.$$

Dar

$$d\varphi_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i$$

și obținem în definitiv (schimbând ordinea de sumare):

$$(1) \quad \varphi^* \alpha = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_j \circ \varphi \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i$$

sau

$$(2) \quad \varphi^* \alpha(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_j(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) dx_i, \text{ pentru orice } x \in A.$$

Să considerăm cazul particular  $n = 1$  și să luăm  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clasă  $C^1$ . Să notăm variabila în  $[a, b]$  cu  $t$  și să observăm că derivatele lui  $\varphi$  în  $a$  și  $b$  determină derivatele în  $a, b$  ale oricărei extensii de clasă  $C^1$  la un interval deschis. Putem aplica formula (2) și avem

$$(3) \quad \varphi^* \alpha(t) = \sum_{j=1}^m a_j(\varphi(t)) \varphi_j'(t) dt,$$

unde  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  și  $\alpha$  este o 1-formă pe o mulțime ce conține  $\varphi[a, b] \subset \mathbb{R}^m$ .

Fie acum  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  o aplicație de clasă  $C^1$  (în lecția a IV-a am numit  $\varphi$  **drum parametrizat**) și  $\alpha$  o 1-formă continuă pe compactul  $\varphi[a, b]$  (deci pe imaginea drumului).

**Definiția XII. 4.** Integrala curbilinie a 1-formei  $\alpha$  pe drumul parametrizat  $\varphi$  se definește prin

$$\int_{\varphi} \alpha = \int_a^b \left( \sum_{i=1}^n a_i(\varphi(t)) \varphi_i'(t) \right) dt$$

(integrala există chiar în sens Riemann căci funcția  $t \mapsto \sum_{i=1}^n a_i(\varphi(t)) \varphi_i'(t)$  este continuă în ipotezele făcute).

OBSERVAȚIE. 1) În fond  $\int_{\varphi} \alpha = \int_a^b \varphi^* \alpha$ , dacă se identifică  $\varphi^* \alpha$  cu  $\sum_{i=1}^n a_i(\varphi(t)) \varphi_i'(t)$ , cum rezultă ușor din formula (3).

2) În  $\mathbb{R}^2$ , 1-formele se notează tradițional  $Pdx + Qdy$  iar în  $\mathbb{R}^3$ ,  $Pdx + Qdy + Rdz$  conform notării coordonatelor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , respectiv  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

Pentru a extinde definiția de mai sus, vom relua pe scurt câteva noțiuni prezentate în lecția a IV-a relativ la drumuri parametrizate. Fie  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  două drumuri parametrizate de clasă  $C^k$ ;  $\varphi, \Psi$  se zic  **$C^k$ -echivalente** ( $k \geq 1$ ) dacă există un difeomorfism  $C^k$   $\theta : [a, b] \rightarrow [c, d]$ , astfel încât  $\varphi = \Psi \circ \theta$ .  $\theta$  se zice **schimbare de parametru**. Un arc de clasă  $C^1$  este o clasă de echivalență de drumuri parametrizate  $C^k$  echivalente. Mai simplu un arc de clasă  $C^k$  este mulțimea tuturor drumurilor parametrizate (de clasă  $C^k$ ) care se obțin unul din altul prin schimbări de parametru de clasă  $C^k$ . Dacă  $\gamma$  este un arc de clasă  $C^k$  și  $\varphi$  un drum parametrizat de clasă  $C^k$ , este clar ce înseamnă  $\varphi \in \gamma$ , spunem în acest caz că  $\varphi$  este o **parametrizare admisibilă** a lui  $\gamma$ .

O relație de echivalență mai fină duce la noțiunea de **arc orientat**. Anume, o schimbare de parametru se zice că **păstrează orientarea** dacă este strict crescătoare și că **schimbă orientarea** dacă este strict descrescătoare. Două drumuri parametrizate (de clasă  $C^k$ ) se zic **pozitiv  $C^k$ -echivalente** dacă se obțin unul din altul pentru o schimbare de parametru ce păstrează orientarea. O clasă de echivalență de drumuri pozitiv  $C^k$ -echivalente se numește **arc orientat**. Drumurile parametrizate care aparțin unui arc orientat  $\gamma$  se numesc **parametrizări admisibile** ale arcului  $\gamma$ . Să observăm că se obține un arc orientat pornind de la un drum parametrizat și considerând toate drumurile ce se obțin din el prin schimbări de parametru ce păstrează orientarea.

**TEOREMA XII. 3.** Fie  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  două parametrizări admisibile ale unui arc  $\gamma$  de clasă  $C^1$  și  $\alpha$  o 1-formă continuă pe mulțimea  $\varphi[a, b] = \Psi[c, d]$ .

1) Dacă  $\varphi, \Psi$  sunt pozitiv echivalente, atunci

$$\int_{\varphi} \alpha = \int_{\Psi} \alpha.$$

2) Dacă  $\varphi, \Psi$  se obțin unul din altul printr-o schimbare de parametru care schimbă orientarea, atunci

$$\int_{\varphi} \alpha = - \int_{\psi} \alpha.$$

DEMONSTRAȚIE.

1) Din ipoteză rezultă că există o schimbare de parametru  $\theta : [a, b] \rightarrow [c, d]$  strict crescătoare astfel încât  $\varphi = \Psi \circ \theta$ . Să notăm  $t$  variabila în  $[a, b]$  și  $u$  variabila în  $[c, d]$ ; deci  $u = \theta(t)$ . Avem  $\varphi^* \alpha = \theta^*(\Psi^* \alpha)$ , conform teoremei XII. 2. Să notăm pe scurt  $\Psi^* \alpha = Adu$  cu  $A : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  deci  $\Psi^* \alpha(u) = A(u)du$  pe  $[c, d]$  și deci  $\theta^*(\Psi^* \alpha)(t) = A(\theta(t))\theta'(t)dt$  (conform regulilor de calcul ale imaginii inverse). Deci avem

$$\varphi^* \alpha(t) = A(\theta(t))\theta'(t)dt, \Psi^* \alpha(u) = A(u)du.$$

Teorema de schimbare de variabilă (integrala Riemann) dă

$$\int_{\varphi} \alpha = \int_a^b A(\theta(t))\theta'(t)dt = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} A(u)du = \int_c^d A(u)du = \int_{\psi} \alpha.$$

Demonstrația punctului 2) este acum imediată ( $\theta(a) = d$ ,  $\theta(b) = c$  dacă  $\theta$  descrește etc.).

În definitiv, integrala unei 1-forme **nu se schimbă** la o schimbare de parametru ce **păstrează orientarea** și **schimbă doar semnul** la o schimbare de parametru ce **schimbă orientarea**. Putem ajunge astfel la definiția principală.

**Definiția XII. 4.** Fie  $\gamma$  un arc orientat de clasă  $C^1$  în  $\mathbb{R}^n$  și  $\alpha$  o 1-formă continuă pe imaginea lui  $\gamma$ . Definim

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\varphi} \alpha,$$

unde  $\varphi \in \gamma$  ( $\varphi$  este o parametrizare admisibilă).

Din cele de mai sus rezultă că definiția este corectă (nu depinde de parametrizarea admisibilă folosită).

OBSERVAȚIE. Prin imaginea unui arc se înțelege imaginea, comună, a parametrizărilor admisibile.

Fie  $\gamma$  un arc orientat de clasă  $C^1$  în  $\mathbb{R}^n$ . Să reamintim că **lungimea**  $l(\gamma)$  se definește ca  $\int_a^b \|\varphi'(t)\| dt$ , pentru o parametrizare admisibilă  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  (și este independentă de parametrizare). Desigur,  $\|\cdot\|$  este norma euclidiană în  $\mathbb{R}^n$ . Fie  $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$  o 1-formă continuă pe imaginea lui  $\gamma$ . Dacă notăm  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , cu funcțiile  $a_1, \dots, a_n$  continue și fie  $M > 0$  astfel încât  $\|a(x)\| \leq M$  pentru orice  $x$  din imaginea lui  $\gamma$ . Deducem

$$\left| \int_{\gamma} \alpha \right| = \left| \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\varphi(t)) \varphi'_i(t) dt \right| \leq \int_a^b \sum_{i=1}^n |a_i(\varphi(t)) \varphi'_i(t)| dt \leq$$

$$\leq \int_a^b \|a(\varphi(t))\| \|\varphi'(t)\| dt \leq M l(\gamma)$$

(s-a folosit inegalitatea lui Cauchy – Schwartz). În definitiv,

$$\left| \int_{\gamma} \alpha \right| \leq M l(\gamma),$$

inegalitate utilă în aplicații.

Vom face o legătură între 1-forme și câmpuri de vectori, pentru a exprima integrala curbilinie în limbaj vectorial.

Dacă  $\alpha \in \Omega_k^1(A)$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$  atunci  $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$  cu  $a_1, \dots, a_n : A \rightarrow \mathbb{R}$  funcții de clasă  $C^k$ . Putem considera câmpul de vectori  $a = (a_1, \dots, a_n) \in X_k(A)$ . Dacă  $\gamma$  este un arc orientat de clasă  $C^1$  în  $\mathbb{R}^n$  și  $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$  o 1-formă continuă pe imaginea lui  $\gamma$ , integrala  $\int_{\gamma} \alpha$  se mai numește și **circulația** câmpului  $a = (a_1, \dots, a_n)$  de-a lungul arcului  $\gamma$ .

**Comentariu.** Dacă folosim notația vectorială  $a$  pentru câmpuri de vectori,  $r = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $dr = (dx_1, \dots, dx_n)$ , atunci circulația câmpului  $a$  de-a lungul lui  $\gamma$  se scrie formal

$$\int_{\gamma} a \cdot dr$$

"interpretînd"  $\sum_{i=1}^n a_i dx_i$  ca un "produs scalar" între  $a$  și  $dr$ . De exemplu, dacă  $n = 3$  și

$F = (P, Q, R)$  este un câmp de forțe într-un deschis  $A \subset \mathbb{R}^3$  și dacă  $\gamma$  este un arc orientat de clasă  $C^1$  în  $\mathbb{R}^3$ , atunci **lucrul** efectuat de  $F$  în lungul lui  $\gamma$  este tocmai  $\int_{\gamma} F \cdot dr = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$ , deci noțiunea de circulație extinde pe cea de lucru.

Revenind la proprietățile integralelor curbilinii, reținem următoarea teoremă deosebit de importantă:

**TEOREMA XII. 4.** (generalizarea formulei Leibniz – Newton). Fie  $\gamma$  un arc orientat de clasă  $C^1$  în  $\mathbb{R}^n$ , de extremități  $p$  și  $q$  și  $f$  o funcție de clasă  $C^1$  pe un deschis ce conține imaginea lui  $\gamma$ . Atunci

$$\int_{\gamma} df = f(q) - f(p).$$

DEMONSTRAȚIE. Să precizăm că extremitățile unui arc orientat  $\gamma$  se definesc considerînd o parametrizare admisibilă  $\varphi \in \gamma$ ,  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ :  $p = \varphi(a)$ ,  $q = \varphi(b)$ , observînd că  $p, q$  depind doar de  $\gamma$  și nu de parametrizarea admisibilă aleasă. Fie acum  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  o parametrizare admisibilă a lui  $\gamma$ . Avem  $\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi)$  sau  $\varphi^*(df)(t) = (f \circ \varphi)'(t) dt$ . Deducem

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b (f \circ \varphi)'(t) dt = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) = f(q) - f(p).$$

**COROLAR.** În ipotezele teoremei de mai sus, dacă  $\gamma$  este un arc închis (adică dacă  $p = q$ ), atunci  $\int_{\gamma} df = 0$ .

Teorema de mai sus este o teoremă de "independență a integralei de drum", în cazul 1 – formelor de tip  $df$ .

Avînd în vedere importanța teoremei XII. 4, este utilă studiarea 1 – formelor de tip  $df$ . Problema care se pune este: în ce condiții, pentru o 1 – formă  $\alpha$  pe un deschis  $U \subset \mathbb{R}^n$ , există o funcție astfel încît  $\alpha = df$ ? Să presupunem

1 – forma  $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ , unde funcțiile  $a_1, \dots, a_n$  sunt de clasă  $C^1$  pe  $U \subset \mathbb{R}^n$ .

Dacă există o funcție  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încît  $df = \alpha$  atunci  $f$  este de clasă  $C^2$  pe  $U$  și  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_1, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = a_n$  pe  $U$ . Din egalitatea derivatelor parțiale mixte, rezultă condiția necesară:

$$(*) \quad \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Se naște întrebarea dacă această condiție este și suficientă.

**TEOREMA XII. 5.** (H. POINCARÉ, 1854 – 1912). Fie  $\alpha$  o 1 – formă de clasă  $C^1$  pe deschisul  $U \subset \mathbb{R}^n$ , satisfăcînd condiția (\*). Atunci pentru orice punct  $x \in U$  există o vecinătate deschisă  $V$  a lui  $x$  ( $V \subset U$ ) și o funcție  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încît  $df = \alpha$  (pe  $V$ ).

DEMONSTRAȚIE. Fie un punct  $x_0 \in U$ . Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că  $x_0 = 0$  (se face o translație). Fie  $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ . Să alegem  $r > 0$  astfel încît  $B(0, r) \subset U$ . Vom arăta că putem lua  $V = B(0, r)$ . Definim funcția  $f: B(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  prin

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(tx_1, \dots, tx_n) x_i dt, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Să arătăm că  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_1$  pe  $B(0, r)$  (similar se arată că  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i$  pentru  $i = 2, \dots, n$ ). Avem prin derivare sub integrală

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \left[ a_1(tx_1, \dots, tx_n) + t \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial a_i}{\partial x_1}(tx_1, \dots, tx_n) \right] dt$$

sau folosind condiția (\*)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \left[ a_1(tx_1, \dots, tx_n) + t \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial a_1}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) \right] dt.$$

Dacă pentru  $x = (x_1, \dots, x_n)$  fixat, notăm  $\Psi(t) = a_1(tx_1, \dots, tx_n)$ ,  $t \in [0, 1]$ , găsim

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 [\Psi(t) + t\Psi'(t)] dt = t\Psi(t) \Big|_0^1 = \Psi(1) = a_1(x_1, \dots, x_n)$$

și cum  $x = (x_1, \dots, x_n)$  este arbitrar în  $B(0, r)$ , rezultă  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_1$  pe  $B(0, r)$  și demonstrația este încheiată.

OBSERVAȚIE. Se observă că esențială în demonstrația precedentă este condiția: pentru orice  $x \in B(0, r)$ , "segmentul"  $[0, x]$  este conținut în  $B(0, r)$ . O mulțime  $A \subset \mathbb{R}^n$  se zice **stelată** dacă există un punct  $x_0 \in A$  astfel încît pentru orice  $x \in A$  segmentul  $[x_0, x]$  să fie conținut în  $A$ . Rezultă că în teorema precedentă dacă  $U$  este stelată, atunci există  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $df = \alpha$ .

O funcție satisfăcînd  $df = \alpha$  se zice o **primitivă** pentru 1 – forma  $\alpha$ . Putem reformula teorema de mai sus spunînd că orice 1 – formă de clasă  $C^1$  satisfăcînd condiția (\*) admite **local** primitive, iar dacă mulțimea de definiție este stelată, atunci primitive există global (este imediat de observat că pe o mulțime deschisă și conexă două primitive ale aceleiași 1 – forme diferă printr-o constantă).

Putem exprima teorema XII. 5 și în limbaj de teoria cîmpurilor. Astfel, un cîmp vectorial  $F = (a_1, \dots, a_n)$  se zice **cîmp de gradienti** dacă există o funcție  $f$  astfel încît  $\nabla f = F$ . Se observă imediat că (\*) reprezintă o condiție necesară pentru ca un cîmp  $F = (a_1, \dots, a_n)$  de clasă  $C^1$  să fie un cîmp de gradienti. Teorema XII. 5 arată că invers, un cîmp de clasă  $C^1$  ce satisface (\*) este **local** un cîmp de gradienti.

## 2. Integrarea 2 – formelor diferențiale

Dacă  $E$  este un spațiu vectorial real, o aplicație  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **formă biliniară** pe  $E$  dacă este liniară în fiecare variabilă. O formă biliniară  $\varphi$  pe  $E$  se zice **alternată** dacă  $\varphi(v, v) = 0$  pentru orice  $v \in E$ . Se verifică imediat că această condiție este **echivalentă** cu condiția

$$\varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1),$$

pentru orice  $v_1, v_2 \in E$ .

EXEMPLUL 1. Fie  $E = \mathbb{R}^2$ ; punem pentru  $v_1 = (x_1, y_1)$ ,  $v_2 = (x_2, y_2)$ ,

$$\varphi(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Se verifică imediat că  $\varphi$  este biliniară alternată. Semnificația geometrică este că  $\varphi$  reprezintă aria "orientată" a paralelogramului construit pe vectorii  $v_1, v_2$ . Acest exemplu creează o "intuiție" utilă în teoria integrării 2 – formelor diferențiale ce va fi descrisă mai jos.

Se observă imediat că mulțimea formelor biliniare alternate pe  $E$  formează, în raport cu operațiile naturale, un spațiu vectorial real, care va fi notat  $\Lambda^2 E'$ . Dacă  $\varphi$  este o formă biliniară pe  $E$ , atunci forma  $\tilde{\varphi}$  dată de

$$\tilde{\varphi}(v_1, v_2) = \frac{\varphi(v_1, v_2) - \varphi(v_2, v_1)}{2}$$

este clar biliniară alternată; dacă  $\varphi$  e alternată, atunci  $\tilde{\varphi} \equiv \varphi$ . Dualul  $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  va fi notat în cele ce urmează și cu  $\Lambda^1 E'$ . Fiind date  $\alpha, \beta \in \Lambda^1 E'$ , definim  $\alpha \otimes \beta$  ca formă biliniară, prin

$$(\alpha \otimes \beta)(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2).$$

Mai departe definim  $\alpha \wedge \beta$  prin

$$\alpha \wedge \beta = 2 \cdot \alpha \otimes \beta.$$

Evident,  $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^2 E'$  și acest element (care este o formă biliniară pe  $E$ ) se numește **produsul exterior** al formelor liniare  $\alpha$  și  $\beta$ . În definitiv

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1), \quad \forall v_1, v_2 \in E.$$

Se verifică imediat proprietățile

- (1)  $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^1 E'$  (în particular,  $\alpha \wedge \alpha = 0$ ),
- (2)  $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \Lambda^1 E'.$

EXEMPLUL 2. Fie  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $e_1, e_2$  baza canonică și  $dx_1, dx_2$  baza duală. Fie  $\varphi \in \Lambda^2 E'$ . Pentru orice  $v_1 = x_1 e_1 + y_1 e_2$ ,  $v_2 = x_2 e_1 + y_2 e_2$ , avem

$$\varphi(v_1, v_2) = \varphi(x_1 e_1 + y_1 e_2, x_2 e_1 + y_2 e_2) = (x_1 y_2 - x_2 y_1) \varphi(e_1, e_2).$$

## 2. Integrarea 2 – formelor diferențiale

Dar

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = dx_1 \wedge dx_2 (v_1, v_2).$$

În definitiv

$$\varphi = \varphi(e_1, e_2) dx_1 \wedge dx_2.$$

Rezultă  $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^2 \mathbb{R}^2 = 1$  și  $dx_1 \wedge dx_2$  formează o bază. De remarcat că în general se folosește notația  $dx, dy$  în loc de  $dx_1, dx_2$ . Așadar,  $\forall \varphi \in \Lambda^2 \mathbb{R}^2$  se scrie unic sub forma  $\varphi = a dx \wedge dy$  cu  $a \in \mathbb{R}$ .

EXEMPLUL 3. Fie  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $dx, dy, dz$  baza duală bazei canonice. Similar exemplului precedent, deducem că  $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^2 \mathbb{R}^3 = 3$  și că  $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$  formează o bază a acestui spațiu vectorial. Deci orice  $\alpha \in \Lambda^2 \mathbb{R}^3$  se scrie unic sub forma

$$\alpha = a_1 dy \wedge dz + a_2 dz \wedge dx + a_3 dx \wedge dy, \quad \text{cu } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Mai general se poate arăta că  $\Lambda^2 E^{n'}$  are dimensiune finită anume  $C_n^2$ , ca spațiu vectorial real.

**Definiția XII. 5.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$ . O 2 – formă diferențială (sau 2 – formă) de clasă  $C^k$  pe  $A$  este o aplicație  $\alpha : A \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^{n'}$ , de clasă  $C^k$ .

EXEMPLUL 4. Fie  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Pentru o 2 – formă diferențială de clasă  $C^k$ ,  $\alpha : A \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^2$ , vom avea  $\alpha(x, y) = a(x, y) dx \wedge dy$  (vezi exemplul 2 de mai sus), cu  $a : A \rightarrow \mathbb{R}$  funcție de clasă  $C^k$ .

EXEMPLUL 5. Fie  $A \subset \mathbb{R}^3$ . Pentru o 2 – formă diferențială de clasă  $C^k$ ,  $\alpha : A \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^3$ , vom avea

$$\alpha(x, y, z) = P(x, y, z) dy \wedge dz + Q(x, y, z) dz \wedge dx + R(x, y, z) dx \wedge dy$$

cu  $P, Q, R : A \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^k$  (conform exemplului 3 de mai sus).

Este evident cum se pot aduna 2 – formele de clasă  $C^k$  definite pe  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Mai mult, acestea se pot înmulți cu funcții în mod analog cu 1 – formele. Vom nota  $\Omega_k^2(A)$  mulțimea 2 – formelor de clasă  $C^k$  pe  $A$ . Dacă  $\alpha, \beta \in \Omega_k^1(A)$ , putem defini **produsul exterior** al formelor  $\alpha$  și  $\beta$ ,  $\alpha \wedge \beta \in \Omega_k^2(A)$  prin

$$(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x) \quad \text{pentru orice } x \in A.$$

În particular, dacă  $U \subset \mathbb{R}^2$  este o mulțime deschisă și  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  sunt de clasă  $C^1$  pe  $U$  avem

$$df \wedge dg = \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \wedge \left( \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy \right) =$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx \wedge dy = \frac{D(f,g)}{D(x,y)} dx \wedge dy,$$

folosind proprietățile amintite ale operației  $\wedge$ . Se poate face un calcul analog în  $\mathbb{R}^3$  pe care-l lăsăm ca exercițiu.

**Definiția XII. 6.** Fie acum  $U \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă,  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clasă  $C^1$  și  $\alpha$  o 2-formă pe  $B \supset \varphi(U)$ . Se numește **image reciprocă** (sau **inversă**) a 2-formei  $\alpha$  prin  $\varphi$ , 2-forma  $\varphi^* \alpha: U \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^n$ ,

$$\varphi^* \alpha(x)(v_1, v_2) = \alpha(\varphi(x))(d\varphi(x)(v_1), d\varphi(x)(v_2)), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n, x \in U.$$

Se verifică cu ușurință că  $\varphi^* \alpha$  este o 2-formă. Dacă  $\alpha \in \Omega_0^2(B)$ , atunci  $\varphi^* \alpha \in \Omega_0^2(A)$  și dacă  $\alpha \in \Omega_k^2(B)$ ,  $k \geq 1$ , atunci  $\varphi^* \alpha \in \Omega_{k-1}^2(A)$ .

De asemenea nu prezintă nici o dificultate verificarea proprietăților următoare:

$$\begin{aligned} \varphi^*(\alpha + \beta) &= \varphi^* \alpha + \varphi^* \beta, & \text{pentru orice 2-forme } \alpha, \beta \\ \varphi^*(f\alpha) &= (f \circ \varphi) \varphi^* \alpha, & \forall f \text{ funcție de clasă } C^1, \alpha \text{ 2-formă} \\ \varphi^*(\alpha \wedge \beta) &= \varphi^* \alpha \wedge \varphi^* \beta, & \forall \alpha, \beta \text{ 1-forme.} \end{aligned}$$

Într-un context evident avem și

$$\varphi^*(\Psi^* \alpha) = (\Psi \circ \varphi)^* \alpha, \quad \alpha \text{ 2-formă etc.,}$$

relație care va fi folosită în cele ce urmează.

**EXEMPLUL 6.** Fie  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ ,  $m = 3$ ,  $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Să notăm variabilele în  $\Delta$  prin  $(u, v)$  și componentele funcției  $\varphi$  cu  $X, Y, Z$  deci  $\varphi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$  și fie  $\alpha = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$  o 2-formă pe  $\varphi(\Delta)$ . Avem

$$\varphi^*(\alpha) = (P \circ \varphi) \varphi^*(dy \wedge dz) + (Q \circ \varphi) \varphi^*(dz \wedge dx) + (R \circ \varphi) \varphi^*(dx \wedge dy) =$$

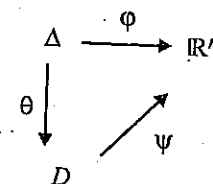
$$= P \circ \varphi dY \wedge dZ + Q \circ \varphi dZ \wedge dX + R \circ \varphi dX \wedge dY =$$

$$\left[ P \circ \varphi \frac{D(Y, Z)}{D(u, v)} + Q \circ \varphi \frac{D(Z, X)}{D(u, v)} + R \circ \varphi \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} \right] du \wedge dv.$$

Înainte de a studia integrarea 2-formelor, facem câteva precizări despre suprafețe.

**Definiția XII. 7.** O **pînză parametrizată de clasă  $C^k$**  în  $\mathbb{R}^n$  este o aplicație de clasă  $C^k$ ,  $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ , unde  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  este o mulțime deschisă și conexă. Vom considera doar cazul  $k \geq 1$ .

Două **pînze parametrizate de clasă  $C^k$**  în  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se zic  **$C^k$ -echivalente** dacă există un **difeomorfism de clasă  $C^k$** , notat  $\theta: \Delta \rightarrow D$ , astfel încît  $\varphi = \Psi \circ \theta$ , deci avem diagrama comutativă



Aplicația  $\theta$  se numește **schimbare de parametri**.

O **pînză de clasă  $C^k$**   $\Sigma$  este o clasă de echivalență de pînze parametrizate  $C^k$ -echivalente. Dacă  $\varphi \in \Sigma$  vom spune că  $\varphi$  este o **parametrizare admisibilă** pentru  $\Sigma$ . Este clar că pentru orice pînză  $\Sigma$  și  $\varphi, \Psi \in \Sigma$ ,  $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  rezultă  $\varphi(\Delta) = \Psi(D)$  deci putem vorbi despre **imagea** unei pînze (numită și porțiune de suprafață) ca o submulțime în  $\mathbb{R}^n$ . Dată fiind o pînză parametrizată  $\varphi$  ea definește o pînză unică, anume mulțimea pînzilor parametrizate echivalente cu  $\varphi$ .

**EXEMPLU.** Fie  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$  și

$$\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

Pînză de clasă  $C^\infty$  definită de  $\varphi$  are drept image emisfera superioară ( $z > 0$ ) a sferei  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Fie  $\theta: \Delta \rightarrow D$  un difeomorfism de clasă  $C^k$ ,  $k \geq 1$  unde  $\Delta, D \subset \mathbb{R}^2$  sunt mulțimi deschise și conexe, iar  $J_\theta$  este jacobianul lui  $\theta$ . Deci  $J_\theta: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  este de clasă  $C^{k-1}$  și nu se anulează pe  $\Delta$ ; cum  $k - 1 \geq 0$  deducem că  $J_\theta$  are semn constant pe  $\Delta$ . Se spune că  $\theta$  **păstrează orientarea** dacă  $J_\theta > 0$  pe  $\Delta$  și **schimbă orientarea** dacă  $J_\theta < 0$  pe  $\Delta$ .

Se numește **pînză orientată, de clasă  $C^k$** , o clasă de echivalență de pînze parametrizate de clasă  $C^k$  față de relația de echivalență " $\sim$ " ( $\varphi \sim \Psi$  dacă  $\varphi = \Psi \circ \theta$  cu  $\theta$  difeomorfism de clasă  $C^k$  ce păstrează orientarea).

Fie acum  $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  o pînză parametrizată de clasă  $C^k$ ,  $k \geq 1$  și  $\alpha$  o 2-formă diferențială continuă pe  $\varphi(\Delta)$ . Fie  $\varphi^* \alpha = a dx \wedge dy$ , cu  $a: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  continuă. Se definește

$$\int \alpha = \iint_{\Delta} a dx dy,$$

în ipoteza că ultima integrală există (deci dacă  $a \in L^1_{\Delta}$ ).

**Definiția XII. 8.** Fie  $\Sigma$  o pînă orientată, de clasă  $C^k$  în  $\mathbb{R}^n$  și  $\alpha$  o 2 - formă diferențială continuă pe imaginea lui  $\Sigma$ . Se definește **integrala formei  $\alpha$  pe  $\Sigma$** , prin

$$\int_{\Sigma} \alpha = \int_{\varphi} \alpha, \text{ pentru } \varphi \in \Sigma,$$

în ipoteza că ultima integrală există.

**TEOREMA XII. 6.** Definiția de mai sus este corectă, în sensul că dacă  $\varphi, \Psi \in \Sigma$  atunci

$$\int_{\varphi} \alpha = \int_{\Psi} \alpha,$$

deci dacă una din integrale există, există și cealaltă și coincid.

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  și  $\varphi = \Psi \circ \theta$ , cu  $\theta$  difeomorfism cu  $J_{\theta} > 0$  pe  $\Delta$ . Avem  $\varphi^* \alpha = \theta^*(\Psi^* \alpha)$  și fie  $(u, v)$  coordonatele în  $D$ . Să punem  $\Psi^* \alpha = a du \wedge dv$ ,  $a: D \rightarrow \mathbb{R}$  și fie

$$\theta^*(\Psi^* \alpha) = a \circ \theta \frac{D(\theta_1, \theta_2)}{D(x, y)} dx \wedge dy = a \circ \theta J_{\theta} dx \wedge dy,$$

unde  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ . Deci

$$\int_{\varphi} \alpha = \int_{\Delta} a(\theta(x, y)) J_{\theta}(x, y) dx dy$$

și în mod similar,

$$\int_{\Psi} \alpha = \int_D a(u, v) du dv.$$

Teorema de schimbare de variabilă pentru integrale duble arată tocmai că dacă una din cele două integrale există, există și cealaltă și sunt egale.

**EXEMPLUL 1.** Fie  $\Sigma$  o pînă orientată, de clasă  $C^k$ ,  $k \geq 1$  în  $\mathbb{R}^3$  și  $\alpha$  o 2 - formă continuă pe imaginea lui  $\Sigma$ . Fie  $\varphi \in \Sigma$ ,  $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\varphi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \text{ și } \alpha = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

$$\varphi^* \alpha = \left[ P \circ \varphi \frac{D(Y, Z)}{D(u, v)} + Q \circ \varphi \frac{D(Z, X)}{D(u, v)} + R \circ \varphi \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} \right] du \wedge dv.$$

Deci

$$\int_{\Sigma} \alpha = \iint_{\Delta} \left[ P \circ \varphi \frac{D(Y, Z)}{D(u, v)} + Q \circ \varphi \frac{D(Z, X)}{D(u, v)} + R \circ \varphi \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} \right] du dv,$$

dacă ultima integrală există.

**EXEMPLUL 2.** Fie  $X, Y: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^1$  și  $\Delta = (a, b) \times \mathbb{R}$ . Să considerăm

pînza parametrizată de clasă  $C^1$   $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi(u, v) = (X(u), Y(u), v)$ . Pînza orientată definit de  $\varphi$  este "cilindrul" cu generatoarea paralelă cu Oz și cu baza imaginea arcului "deschis"  $u \mapsto (X(u), Y(u))$ . Avem

$$\varphi^*(dy \wedge dz) = Y' du \wedge dv, \quad \varphi^*(dz \wedge dx) = -X' du \wedge dv \text{ și } \varphi^*(dx \wedge dy) = 0.$$

Astfel dacă

$$\alpha = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

este o 2 - formă pe imaginea lui  $\Sigma$ , atunci

$$\int_{\Sigma} \alpha = \iint_{\Delta} [P(X(u), Y(u), v) Y'(u) - Q(X(u), Y(u), v) X'(u)] du dv.$$

În particular, dacă  $P = Q = 0$ , atunci  $\int_{\Sigma} \alpha = 0$ .

Fie  $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$  o pînă parametrizată de clasă  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Dacă

$$\varphi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)),$$

se definește **funcția normală** (sau **cîmpul vectorilor - normală**) de-a lungul lui  $\varphi$  prin

$$N_{\varphi}(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v),$$

unde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left( \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Z}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left( \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial Y}{\partial v}, \frac{\partial Z}{\partial v} \right),$$

iar " $\times$ " este **produsul vectorial** în  $\mathbb{R}^3$ . Pînza  $\varphi$  se zice **simplă** dacă  $\varphi$  este injectivă. De asemenea  $\varphi$  se zice **regulată** dacă vectorii  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$  sunt liniar

independenți în fiecare punct din  $\Delta$ . Dacă  $\varphi$  este regulată, atunci  $N_{\varphi} \neq 0$  pe  $\Delta$ . Să vedem cum se modifică  $N_{\varphi}$  la o schimbare de parametri. Fie  $\varphi = \Psi \circ \theta$ ,  $\varphi(u, v) = \Psi(\theta_1(u, v), \theta_2(u, v))$  și  $u_1 = \theta_1(u, v)$ ,  $v_1 = \theta_2(u, v)$ . Atunci

$$\begin{aligned} N_{\varphi}(u, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial \Psi}{\partial v_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial u} \right) \times \left( \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \Psi}{\partial v_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \right) = \\ &= J_{\theta}(u, v) N_{\Psi}(\theta(u, v)). \end{aligned}$$

Mai scurt,  $N_{\varphi} = J_{\theta} N_{\Psi}$ , într-un sens evident.

Deducem că dacă  $J_{\theta} > 0$ , atunci  $N_{\varphi}$  și  $N_{\Psi}$  sunt vectori cu aceeași direcție și același sens, în punctele corespunzătoare. Dacă  $\varphi$  este o pînă **simplă** și **regulată**, atunci versorul  $n_{\varphi}(u, v) = \frac{N_{\varphi}(u, v)}{\|N_{\varphi}(u, v)\|}$  (numit și **normala unitară**

în punctele imagine) este invariant la schimbări de parametri ce păstrează orientarea, deci caracterizează o pînză simplă și regulată.

**Definiția XII. 9.** Fie  $\Sigma$  o pînză de clasă  $C^1$  în  $\mathbb{R}^3$ . Se definește aria pînzei  $\Sigma$  prin

$$a(\Sigma) = \iint_{\Delta} \|N_{\varphi}(u, v)\| du dv,$$

pentru o parametrizare  $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi \in \Sigma$ , dacă integrala există. Se verifică imediat că  $a(\Sigma)$  este bine definită (nu depinde de parametrizarea  $\varphi \in \Sigma$  aleasă). Dacă

$$\varphi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)),$$

atunci se arată ușor că

$$N_{\varphi}(u, v) = \left( \frac{D(Y, Z)}{D(u, v)}(u, v), \frac{D(Z, X)}{D(u, v)}(u, v), \frac{D(X, Y)}{D(u, v)}(u, v) \right)$$

sau, cu notații tradiționale

$$\frac{D(Y, Z)}{D(u, v)} = A, \quad \frac{D(Z, X)}{D(u, v)} = B, \quad \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} = C, \quad N_{\varphi} = (A, B, C).$$

Deducem  $\|N_{\varphi}\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ , deci

$$a(\Sigma) = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv.$$

Vom încheia această lecție cu interpretarea integralei de suprafață, în limbaj de teoria cîmpului. Fie  $\Sigma$  o pînză orientată în  $\mathbb{R}^3$ ,  $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi \in \Sigma$  și  $\alpha$  o 2-formă pe imaginea lui  $\Sigma$ . Avem

$$\alpha = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

și putem asocia cîmpul de vectori  $V = (P, Q, R)$ .

$$\int_{\Sigma} \alpha = \iint_{\Delta} \left[ P \circ \varphi \frac{D(Y, Z)}{D(u, v)} + Q \circ \varphi \frac{D(Z, X)}{D(u, v)} + R \circ \varphi \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} \right] du dv = \iint_{\Delta} (V \circ \varphi) \cdot N_{\varphi} du dv.$$

(Aici  $(V \circ \varphi) \cdot N_{\varphi}$  reprezintă produsul scalar euclidian). Mai departe, dacă  $N_{\varphi} \neq 0$ , atunci avem

$$\int_{\Sigma} \alpha = \iint_{\Delta} V \circ \varphi \frac{N_{\varphi}}{\|N_{\varphi}\|} \|N_{\varphi}\| du dv = \iint_{\Delta} V \circ \varphi n_{\varphi} d\sigma$$

unde  $d\sigma = \|N_{\varphi}\| du dv$  se numește **element de arie** (și reprezintă evident o notație sugestivă).

Sub forma  $\iint_{\Delta} V \cdot n d\sigma$ , integrala de suprafață poartă numele de **fluxul cîmpului  $V$**  prin porțiunea de suprafață  $\Sigma$ . Această noțiune extinde pe cea de debit și pe cea de flux termic.

### 3. 10 exerciții

1. Fie  $\gamma$  arcul orientat definit în  $\mathbb{R}^3$  de drumul parametrizat  $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi(t) = (1 + \cos 2t, \sin 2t, 2\cos t)$ . Să se arate că imaginea arcului  $\gamma$  se află pe o sferă și pe un cilindru și să se calculeze  $I = \int_{\gamma} (x^2 + y^2) dz$ .

2. Să se calculeze  $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$ , unde  $\gamma$  este un arc închis în  $\mathbb{R}^2$ .

3. Se consideră 1-forma  $\alpha = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ , pe  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Calculați  $\int_{\gamma} \alpha$ , unde  $\gamma$  este cercul  $x^2 + y^2 = R^2$  parcurs în sens direct o singură dată. Arătați că deși  $\alpha$  verifică pe  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  condiția din teorema Poincaré, totuși nu este exactă (adică nu este de tip  $df$ ).

4. Determinați primitivele 1-formei  $\alpha = (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$  pe  $\mathbb{R}^2$ .

5. Să se calculeze  $I = \int_{\gamma} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$  unde  $\gamma$  este arcul ce are ca imagine porțiunea de curbă  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ,  $a > 0$ , cuprinsă între punctele  $A = (a, 0)$  și  $B = (0, a)$ , parcursă o singură dată de la  $A$  la  $B$ .

6. Să se afle aria pînzei obținută prin secționarea paraboloidului  $z = xy$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ , cu cilindrul  $x^2 + y^2 = R^2$ .

7. Fie pînza  $\Sigma$  dată de pînza parametrizată

$$x(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi$$

$$y(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi$$

$$z(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi) \cos \theta$$

$0 < \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $r(\theta, \varphi) > 0$ . Să se deducă formula

$$a(\Sigma) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta} r d\theta d\varphi.$$

8. Folosind formula exercițiului 7 să se determine o pînă parametrizată cu imaginea  $S = \{(x, y, z); (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2 xy, x, y > 0\}$  și să se calculeze aria elementului de suprafață respectiv.

9. Să se calculeze  $\int_\Sigma dx \wedge dy$  unde  $\Sigma$  este pînza orientată corespunzător feței exterioare a elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

10. 1) Fie  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  un drum parametrizat de clasă  $C^1$  și  $f$  o funcție reală continuă pe imaginea lui  $\varphi$ . Se definește  $\int_\varphi f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt$ . Calculați  $\int_\varphi f ds$  dacă

$$\varphi(t) = (a \cos t, b \sin t), t \in [0, \frac{\pi}{2}], f(x, y) = xy.$$

2) Dacă  $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$  este o pînă parametrizată de clasă  $C^1$  și  $f$  o funcție reală pe imaginea lui  $\varphi$ , se definește  $\int_\varphi f d\sigma = \iint_\Delta f \circ \varphi \|N_\varphi\| du dv$  (dacă ultima integrală există).

Să se calculeze  $\int_\varphi f d\sigma$ , dacă  $f(x, y, z) = y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2$  și  $\varphi$  are ca imagine partea din conul  $z^2 = x^2 + y^2, z > 0$  situată în interiorul cilindrului  $x^2 + y^2 < 2ax, a > 0$ .

### INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Pe imaginea lui  $\gamma$  (pentru  $x = 1 + \cos 2t, y = \sin 2t, z = 2 \cos t$ ) avem

$$x^2 + y^2 + z^2 = (1 + \cos 2t)^2 + \sin^2 2t + 4 \cos^2 t = 4(1 + \cos 2t) = 4x,$$

$$x^2 + y^2 = (1 + \cos 2t)^2 + \sin^2 2t = 2x.$$

Deci imaginea arcului  $\gamma$  se află pe sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$  și pe cilindrul  $x^2 + y^2 = 2x$ .

Avem  $I = \int_0^{2\pi} 2(1 + \cos 2t)(-2 \sin t) dt$  (formal  $dz = -2 \sin t dt$ ). Deci  $I = -8 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t dt = 0$ .

2. Avem pentru  $P = x^2 + y^2, Q = 2xy, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  pe  $\mathbb{R}^2$ . Cum  $\mathbb{R}^2$  este stelat (de exemplu

### 3. 10 exerciții

în raport cu 0) și  $\gamma$  este închis, vom avea conform teoremei lui Poincaré

$$\int_\gamma (x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0.$$

3. Parametrizăm cercul  $x^2 + y^2 = R^2$  prin  $x = R \cos t, y = R \sin t, t \in [0, 2\pi]$ . Este parametrizarea care definește arcul  $\gamma$  cerut în integrare. Avem

$$\int_\gamma \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{R^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}{R^2} dt = 2\pi.$$

Se verifică ușor că forma  $\alpha = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$  verifică pe  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  condițiile din teorema lui Poincaré. Forma  $\alpha$  nu este exactă căci integrala formei pe arcul închis  $\gamma$  nu este nulă.

4. Pentru  $\alpha = (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$  avem

$$\frac{\partial}{\partial x} (2y \cos x - x^2 \sin y) = -2y \sin x - 2x \sin y = \frac{\partial}{\partial y} (2x \cos y - y^2 \sin x).$$

Deci  $\alpha$  admite primitive pe mulțimea stelată  $\mathbb{R}^2$ . Putem calcula o astfel de primitivă folosind formula:

$$f(x, y) = \int_0^1 [(2tx \cos ty - t^2 y^2 \sin tx)x + (2ty \cos tx - t^2 x^2 \sin ty)y] dt = x^2 \cos y + y^2 \cos x.$$

5. O parametrizare admisibilă pentru  $\gamma$  este  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in [0, \pi/2]$ . După calcule se obține  $I = \frac{3}{16} \pi a^{4/3}$ .

6. Parametrizarea este  $(x, y) \mapsto (x, y, xy)$  pentru  $x, y > 0, x^2 + y^2 < R^2$ . Se arată imediat că în cazul parametrizării de tip  $(x, y, f(x, y)), (x, y) \in D$  aria se obține cu ajutorul formulei

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

În cazul de față

$$S = \iint_{\substack{x, y > 0 \\ x^2 + y^2 < R^2}} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy;$$

se trece la coordonate polare  $x = r \cos t, y = r \sin t$  și se obține

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^R r \sqrt{1 + r^2} dr \right) dt = \frac{\pi}{2} \int_0^R r \sqrt{1 + r^2} dr = \frac{\pi}{6} [(1 + R^2)^{3/2} - 1].$$

8. Să trecem în coordonate sferice  $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$ . Ecuația

mulțimii  $S$  devine  $r^4 = 2a^2 r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  deci  $0 < \theta \leq \pi$ ,  $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  de

unde  $r(\theta, \varphi) = a \sin \theta \sqrt{\sin^2 \varphi}$ . Se utilizează formula din exercițiul 7 și se obține valoarea  $\frac{\pi^2 a^2}{2}$ .

9. Se parametrizează  $\Sigma$   $x = a \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = c \cos \theta$ ,  $0 < \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Se arată cu ușurință că normala "corespunzătoare" acestei parametrizări este normala exterioară

$$\int_{\Sigma} dx \wedge dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{D(X, Y)}{D(\theta, \varphi)} d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} ab \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi = 0.$$

10. 1)  $\varphi'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$ ;  $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$ . Avem

$$\int_{\varphi} f ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \cos t \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \frac{ab}{3} \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$$

(se poate face schimbarea de variabilă  $a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t = u^2$  etc.).

2) O parametrizare admisibilă este  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y)$  în interiorul cercului  $x^2 + y^2 = 2ax$ ,  $\|N\| = \sqrt{2}$  etc.

## LECȚIA A XIII-A

# FORMULE INTEGRALE, ELEMENTE DE TEORIA CÎMPULUI

## INTRODUCERE

În această lecție se prezintă formulele integrale clasice care stabilesc legături între integralele curbilinii, duble, de suprafață sau de volum – formulele Green – Riemann, Gauss – Ostrogradski, Stokes, numite generic **stokiene**. Ne-am limitat la cazurile suprafețelor cu bord și compactilor cu bord în  $\mathbb{R}^3$ , suficiente pentru aplicații. O dată cu deducerea unor consecințe remarcabile, se interpretează rezultatele obținute în limbajul teoriei cîmpului, folosit în mod curent în inginerie.

## 1. Formula Green – Riemann

Un drum  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  se zice  $C^1$  **pe porțiuni** dacă există o diviziune a intervalului  $[a, b]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , astfel încît restricția aplicației  $\varphi$  la fiecare interval  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$  să fie de clasă  $C^1$  și  $\varphi$  este continuă pe întreg  $[a, b]$ . Diviziunea se zice **admisibilă**. Rezultă că în punctele de diviziune **interioare** intervalului  $[a, b]$  există derivatele laterale ale aplicației  $\varphi$ . Punctele în care aceste derivate laterale sunt diferite sunt puncte unghiulare. Dacă  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  este un drum  $C^1$  pe porțiuni și  $\alpha$  este o 1 – formă

(continuă pe imaginea drumului), atunci definim  $\int_{\varphi} \alpha$  luînd o diviziune admisibilă  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  și punînd

$$\int_{\varphi} \alpha = \sum_{i=1}^n \int_{\varphi_i} \alpha,$$

unde  $\varphi_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$  este restricția aplicației  $\varphi$  la intervalul  $[t_{i-1}, t_i]$ . Se arată ușor că această definiție este corectă, în sensul independenței de diviziunea admisibilă folosită. În plus, pentru drumuri de clasă  $C^1$  (care evident pot fi considerate  $C^1$  – pe porțiuni), integrala coincide cu cea definită anterior (în lecția a XII-a).

Se introduc în mod natural noțiunile de arc  $C^1$  – pe porțiuni și arc orientat  $C^1$  pe porțiuni cu ajutorul relațiilor de echivalență definite de difeomorfisme de clasă  $C^1$  (respectiv difeomorfisme de clasă  $C^1$  ce păstrează orientarea), ca în lecția precedentă. Se arată că dacă  $\gamma$  este un arc orientat  $C^1$  pe porțiuni și  $\alpha$  este o 1 – formă continuă pe imaginea arcului atunci este bine definită integrala curbilinie  $\int_{\gamma} \alpha$ .

Fie acum  $M$  o varietate de clasă  $C^1$  și de dimensiune 1 în  $\mathbb{R}^2$  ( $M$  se mai numește **curbă** de clasă  $C^1$ ). Din definiția varietății, deducem că pentru fiecare punct  $(x_0, y_0) \in M$  există un drum de clasă  $C^1$ ,  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  cu  $\varphi'(t) \neq 0$  pe  $[a, b]$ ,  $t_0 \in (a, b)$  cu  $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$  și o vecinătate  $U$  a lui  $(x_0, y_0)$  (în  $\mathbb{R}^2$ ) așa încît  $M \cap U$  să fie imaginea drumului  $\varphi$ . Pe scurt,  $M$  este local imaginea unui drum  $C^1$ .

Din teorema funcțiilor implicite rezultă totodată că în vecinătatea oricărui punct  $(x_0, y_0) \in M$ ,  $M$  poate fi descrisă de o ecuație  $y = \varphi(x)$  sau  $x = \psi(y)$  cu  $\varphi$  (respectiv  $\psi$ ) de clasă  $C^1$ , deci  $M$  este graficul unei funcții. De aici rezultă că în jurul fiecărui punct  $(x_0, y_0) \in M$ ,  $M$  împarte planul în două "părți" anume, de exemplu, în punctele cu  $y < \varphi(x)$  și respectiv în punctele cu  $y \geq \varphi(x)$ . Nu vom demonstra în detaliu acest fapt intuitiv clar (fig. XIII. 1).

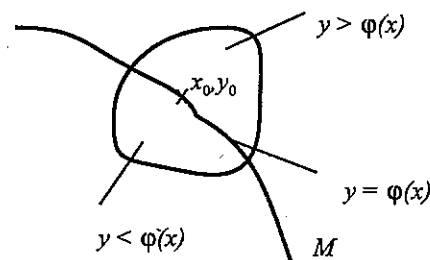


Fig. XIII. 1.

O mulțime compactă  $L \subset \mathbb{R}^2$  se zice **curbă  $C^1$  pe porțiuni** dacă fiecare punct  $(x_0, y_0) \in L$  are o vecinătate  $U \subset \mathbb{R}^2$ , așa încît  $L \cap U$  să fie imaginea (în  $U$ ) a unui drum  $C^1$  – pe porțiuni  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , unde  $\varphi$  este injectivă și derivata nenulă pe orice interval închis pe care  $\varphi$  este  $C^1$ . Punctele unghiulare ale curbei  $L$  se definesc în mod natural, sunt izolate și, cum  $L$  este compactă, în număr finit. Punctele din  $L$  care nu sunt unghiulare se zic **puncte ordinare** pentru  $L$ . Mulțimea punctelor ordinare ale curbei  $L$  formează o curbă de clasă  $C^1$ .

**Definiția XIII. 1.** O mulțime compactă  $K \subset \mathbb{R}^2$  se zice **compact cu bord** dacă:

i) Frontiera  $\partial K$  a lui  $K$  este o curbă  $C^1$  pe porțiuni.

ii) Pentru orice punct ordinar  $(x_0, y_0) \in \partial K$ , există o vecinătate a lui  $(x_0, y_0)$  pe care  $\partial K$  o împarte în două mulțimi conexe, numite componente – una formată din puncte **interioare** lui  $K$  cealaltă din puncte **exterioare**.

Frontiera  $\partial K$  va fi numită și **bord** al compactului cu bord  $K$ . Vom "orienta" în cele ce urmează bordul unui compact cu bord. Dacă  $(x_0, y_0) \in \partial K$  este un punct ordinar al lui  $\partial K$ ,  $\partial K$  este în vecinătatea lui  $(x_0, y_0)$  imaginea unui arc și  $K$  se află de o singură parte a bordului  $\partial K$ . Vom alege orientarea arcului (transformîndu-l în arc orientat) astfel încît  $K$  să rămînă la stînga cînd imaginea arcului este parcursă în "sensul" orientării (fig. XIII. 2); intuitiv, dacă "parcurem"  $\partial K$ , mîna stîngă cade în interiorul lui  $K$ .

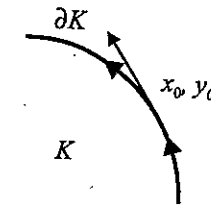


Fig. XIII. 2.

**Comentariu.** Desigur acest mod de exprimare nu este riguros. Îl putem preciza de exemplu punînd condiția ca pentru un drum  $\varphi$  ce reprezintă arcul orientat de imagine  $\partial K$  în vecinătatea lui  $(x_0, y_0)$  cu  $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$ , vectorul  $\varphi'(t_0)$  rotit cu  $\pi/2$  în sens invers acelor ceasornicului devenit astfel normal la curbă, să fie îndreptat spre interiorul lui  $K$ . Evident, nici această a doua formulare nu este în totalitate riguroasă. Pentru a o îmbunătăți, sunt necesare unele amănunte. Anume este necesară noțiunea de **orientare** a unui spațiu vectorial real: dacă  $\{e_1, \dots, e_n\}$  și  $\{f_1, \dots, f_n\}$  sunt două baze ordonate ale unui spațiu vectorial de dimensiune  $n$ , ele se zic echivalente dacă trecerea de la una la alta se face printr-un izomorfism liniar cu determinant strict pozitiv, o orientare a spațiului fiind o clasă de echivalență de baze orientate **echivalente**. Spațiul  $\mathbb{R}^2$  se consideră ordonat de baza ordonată  $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ . Se definește vectorul normală exterioară la  $\partial K$  în orice punct ordinar  $(x_0, y_0)$  și se pune condiția ca vectorii: normală exterioară și tangenta în  $(x_0, y_0)$ , în această ordine, să formeze o bază echivalentă cu  $\mathcal{B}$ .

Vom numi **compact cu bord orientat** un compact cu bord, pentru care bordul are orientarea mai sus descrisă. Triunghiurile, dreptunghiurile (ca "plăci"), discurile închise, interiorul elipselor împreună cu frontiera etc., sunt exemple de compacti cu bord orientat.

Bordul unui compact cu bord orientat este o reuniune finită de imagini de arce orientate  $C^1$  pe porțiuni, avînd eventual doar extremități în comun. Rezultă că este bine definită integrala unei 1 – forme, pe bordul unui compact cu bord orientat.

Fie  $\alpha = Pdx + Qdy$  o 1 – formă de clasă  $C^1$  pe un deschis  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Definim diferențiala ei

$$\begin{aligned} d\alpha &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy = \\ &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Se observă că  $d\alpha$  este o 2 - formă continuă pe  $A$ .

Fie acum  $\theta : A \rightarrow B$  un **difeomorfism** de clasă  $C^2$  între mulțimile deschise  $A, B \subset \mathbb{R}^2$ . Atunci pentru orice 1 - formă  $\alpha$  de clasă  $C^1$  pe  $B$ , avem  $\theta^*(d\alpha) = d(\theta^*\alpha)$ . În adevăr, fie  $(x, y)$  variabilele pe  $A$  și  $(u, v)$  variabilele pe  $B$ , și scriem  $\theta(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ . Fie  $\alpha = Pdx + Qdy$  o 1 - formă de clasă  $C^1$  pe  $B$ . Avem

$$\begin{aligned} \theta^*\alpha &= P \circ \theta \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + Q \circ \theta \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \\ &= \left( P \circ \theta \frac{\partial u}{\partial x} + Q \circ \theta \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left( P \circ \theta \frac{\partial u}{\partial y} + Q \circ \theta \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \text{ și deci} \\ d(\theta^*\alpha) &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( P \circ \theta \frac{\partial u}{\partial y} + Q \circ \theta \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( P \circ \theta \frac{\partial u}{\partial x} + Q \circ \theta \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx \wedge dy = \\ &= \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + P \circ \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial Q}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + Q \circ \theta \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - P \circ \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left( \frac{\partial Q}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} - Q \circ \theta \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] dx \wedge dy = \\ &= \left( \frac{\partial Q}{\partial u} \circ \theta - \frac{\partial P}{\partial v} \circ \theta \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy = \left( \frac{\partial Q}{\partial u} \circ \theta - \frac{\partial P}{\partial v} \circ \theta \right) \frac{D(u, v)}{D(x, y)} dx \wedge dy, \text{ iar} \\ \theta^*(d\alpha) &= \theta^* \left[ \left( \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du \wedge dv \right] = \left( \frac{\partial Q}{\partial u} \circ \theta - \frac{\partial P}{\partial v} \circ \theta \right) \frac{D(u, v)}{D(x, y)} dx \wedge dy \end{aligned}$$

(am folosit o formulă stabilită în lecția precedentă). Deci într-adevăr,

$$d(\theta^*\alpha) = \theta^*(d\alpha).$$

Putem formula acum teorema fundamentală a acestui paragraf.

**TEOREMA XIII. 1.** (G. GREEN, 1793 - 1841, B. RIEMANN, 1826 - 1866). Fie  $K \subset \mathbb{R}^2$  un compact, cu bord orientat și  $\alpha$  o 1 - formă de clasă  $C^1$  în vecinătatea lui  $K$ . Atunci

$$\boxed{\iint_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha} \quad (\text{formula Green - Riemann}).$$

### 1. Formula Green - Riemann

Pentru a lămurii enunțul, să considerăm  $\alpha = Pdx + Qdy$ . Atunci

$$d\alpha = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Conform definițiilor generale,

$$\iint_K d\alpha = \iint_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

(deschișii în plan se "parametrizează prin aplicația identică", iar 2 - forma ca și integrala se restrâng la  $K$ ). Deci în definitiv, putem scrie formula Green - Riemann în forma

$$\boxed{\iint_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial K} P dx + Q dy},$$

pentru orice două funcții  $P, Q$  de clasă  $C^1$  pe un deschis din plan care conține  $K$ .

**Comentariu.** În teoremă apare o "dualitate" compact  $\leftrightarrow$  bord și 1 - formă  $\leftrightarrow$  diferențiala sa, anume

$$\begin{aligned} K &\leftrightarrow \partial K \\ d\alpha &\leftrightarrow \alpha \end{aligned}$$

Această dualitate pe care o vom regăsi și ulterior se caracterizează prin legătura dată de formula Green - Riemann. Acest fenomen a mai fost întâlnit în cazul formulei Leibnitz - Newton: interpretînd un interval  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ca un compact cu bordul  $\{b\} - \{a\}$  (bord orientat) atunci dacă o 0 - formă  $f$  (o funcție) de clasă  $C^1$  avem  $\int_a^b f' dt = f(b) - f(a)$  deci o formulă de tip Green - Riemann, unde integrala pe bord se interpretează ca integrală în raport cu măsura Dirac concentrată în punctele respective și cu semnul dat de orientare.

Vom demonstra teorema în mai multe etape. Ideea principală a demonstrației constă în demonstrarea teoremei pe compacti cu bord suficient de "simplici" și de a reduce cazul general la cazul compactilor simpli prin tehnica numită "partiția unității".

**LEMA 1.** Fie  $K = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \varphi(x)\}$ , unde  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție de clasă  $C^1$ ,  $\varphi > 0$ . Atunci  $K$  este în mod natural un compact cu bord orientat și are loc formula Green - Riemann pe  $K$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Bordul  $\partial K$  este format din arcele orientate  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  (pe care a fost însemnată orientarea). Fie  $\alpha = Pdx + Qdy$  o 1 - formă diferențială de clasă  $C^1$  în vecinătatea lui  $K$ .

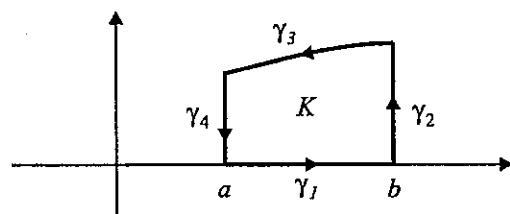


Fig. XIII. 3.

Avem

$$\iint_K \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left( \int_0^{\varphi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) - P(x, 0)] dx = - \int_{\gamma_1} P dx - \int_{\gamma_3} P dx.$$

Deci  $-\iint_K \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial K} P dx$ , căci evident  $\int_{\gamma_2} P dx = \int_{\gamma_4} P dx = 0$ . Vom arăta că

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\partial K} Q dy.$$

Să definim  $U(x, y) = \int_0^y Q(x, \eta) d\eta$ . Avem  $\frac{\partial U}{\partial x} = \int_0^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, \eta) d\eta$  și  $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ .

Deducem  $\int_{\partial K} dU = 0 = \int_{\partial K} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$  deci  $\int_{\partial K} \frac{\partial U}{\partial x} dx = - \int_{\partial K} \frac{\partial U}{\partial y} dy = - \int_{\partial K} Q dy$ . Dar

$$\int_{\partial K} \frac{\partial U}{\partial x} dx = - \iint_K \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx dy, \text{ așa cum am arătat deja. Este clar că}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_0^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, \eta) d\eta \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ și astfel } \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\partial K} Q dy.$$

Lema este demonstrată.

**LEMA 2.** Fie  $\theta : A \rightarrow B$  un difeomorfism de clasă  $C^2$  ce păstrează orientarea între deschișii  $A, B \subset \mathbb{R}^2$  și  $K$  un compact cu bord orientat în  $A$ . Dacă formula Green - Riemann este adevărată pentru  $L = \theta(K)$ , atunci este adevărată și pentru  $K$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $\alpha$  o 1-formă de clasă  $C^1$  în vecinătatea lui  $K$ . Există o 1-formă de clasă  $C^1$   $\beta$  în vecinătatea lui  $L$  astfel încît  $\alpha = \theta^* \beta$  ( $\theta$  este

difeomorfism de clasă  $C^2$ ). Cum bordurile  $\partial K$  și  $\partial L$  se corespund prin  $\theta$ , avem evident  $\int_{\partial K} \theta^* \beta = \int_{\partial L} \beta = \iint_L d\beta = \iint_K d(\theta^* \beta) = \iint_K d(\theta^* \beta)$  deci  $\int_{\partial K} \alpha = \iint_K d\alpha$ , ceea ce era de dovedit. În șirul de egalități de mai sus, relația  $\iint_L d\beta = \iint_K d(\theta^* \beta)$  este tocmai teorema de schimbare de variabilă (sau independența integralei de suprafață de parametrizarea în clasa de orientare), iar  $\iint_K \theta^*(d\beta) = \iint_K d(\theta^* \beta)$  rezultă din relația  $\theta^*(d\beta) = d(\theta^* \beta)$ , stabilită înaintea enunțului teoremei.

**Comentariu.** Cu aceeași demonstrație ca în lema 1, formula Green - Riemann are loc pentru "integrale proiectabile pe Ox", de forma  $K = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ , cu  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funcții de clasă  $C^1$ ,  $\varphi < \psi$ . În cazul special cînd  $K$  este o reuniune finită de  $m$  integrale proiectabile pe Ox, cu porțiuni comune de frontieră parcurse în sensuri opuse (ca în fig. XIII. 4. a), unde  $m = 3$  rezultă  $\int_{\partial K} \alpha = \sum_{i=1}^m \int_{\partial K_i} \alpha = \sum_{i=1}^m \iint_{K_i} d\alpha = \iint_K d\alpha$ . Acest caz este suficient în multe aplicații. În cazul general, ideea demonstrației teoremei XIII. 1 se precizează astfel (fig. XIII. 4. b).

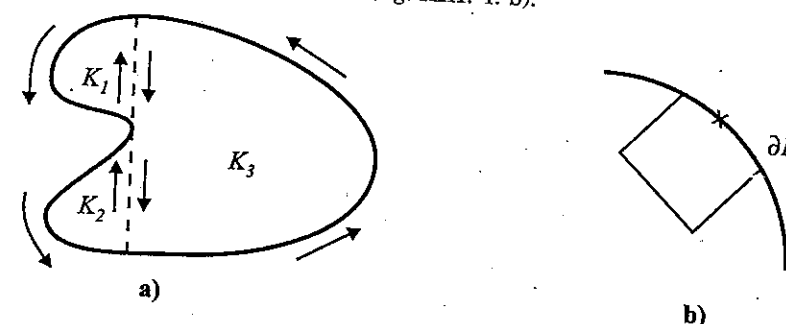


Fig. XIII. 4.

Fie  $K$  un compact cu bord orientat. Plasăm "figuri" ca în lema 1, eventual rotite, în fiecare punct al bordului lui  $K$ ; pentru aceste "figuri" are loc formula Green - Riemann (conform lemelor 1 și 2). Printr-un procedeu de lipire, vom deduce formula pentru  $K$ .

**LEMA 3.** Fie  $r, \varepsilon > 0$ . Există o funcție  $\psi$  de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}$  astfel încît  $\psi(t) = 1$  pentru  $|t| \leq r$  și  $\psi(t) = 0$  pentru  $|t| \geq r + \varepsilon$  și  $0 \leq \psi(t) \leq 1$  pentru orice  $t \in \mathbb{R}$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Funcția  $\rho(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ -\frac{1}{t} & t > 0 \end{cases}$  este de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}$ , după cum se

poate verifica cu ușurință. Funcția  $\rho_\varepsilon(t) = \frac{\rho(t)}{\rho(t) + \rho(\varepsilon - t)}$  este de clasă  $C^\infty$  pe

$\mathbb{R}$ ,  $0 \leq \rho_\varepsilon \leq 1$  și  $\rho_\varepsilon(t) = 0$  pentru  $t \leq 0$  și  $\rho(t) = 1$  pentru  $t \geq \varepsilon$ . Să definim funcția  $\psi(t) = 1 - \rho_\varepsilon(|t| - r)$ . Se verifică ușor că  $\psi$  este de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}$ . În plus,  $\psi(t) = 1$  dacă  $|t| \leq r$ ,  $\psi(t) = 0$  pentru  $|t| \geq r + \varepsilon$  și în mod clar  $0 \leq \psi \leq 1$ . Graficul funcției  $\psi$  este reprezentat în fig. XIII. 5.

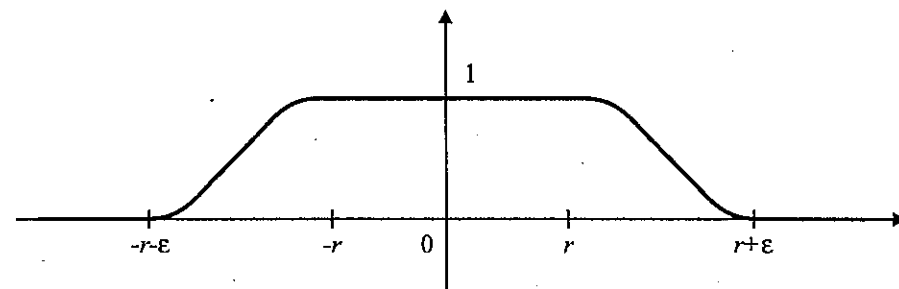


Fig. XIII. 5.

Să observăm că funcția  $\Phi(x, y) = \psi(x)\psi(y)$  este de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^2$ ,  $0 \leq \Phi \leq 1$ ,  $\Phi(x, y) = 1$  pe pătratul  $[-r, r] \times [-r, r]$  și  $\psi(x, y) = 0$  în exteriorul pătratului  $[-r - \varepsilon, r + \varepsilon] \times [-r - \varepsilon, r + \varepsilon]$ .

DEMONSTRAȚIA TEOREMEI XIII. 1. Fie  $K$  un compact cu bord orientat,  $\partial K$  bordul lui  $K$  și  $\alpha$  ca în enunțul teoremei. Pentru fiecare punct  $(x_0, y_0) \in K$  vom considera pătrate centrate în  $(x_0, y_0)$ , după cum urmează: dacă  $(x_0, y_0) \notin \partial K$  (deci  $(x_0, y_0)$  este interior lui  $K$ ) considerăm două pătrate cu laturile paralele cu axele, centrate în  $(x_0, y_0)$ , conținute în  $K$  (fig. XIII. 6), iar dacă  $(x_0, y_0) \in \partial K$  și este un punct ordinar, considerăm pătrate centrate în  $(x_0, y_0)$  cu laturile paralele cu tangenta respectiv normala la  $\partial K$  în  $(x_0, y_0)$  (fig. XIII. 7), așa încît local  $\partial K$  să fie dată de (să zicem)  $y = \varphi(x)$  și graficul lui  $\varphi$  să fie ca în figură; în fine, dacă  $(x_0, y_0)$  este un punct unghiular, se aleg pătrate centrate în  $(x_0, y_0)$  cu laturile paralele cu bisectoarea unghiului făcut de tangentele "laterale" în  $(x_0, y_0)$  și cu perpendiculare în  $(x_0, y_0)$  pe aceste bisectoare și suficient de mici (fig. XIII. 8).

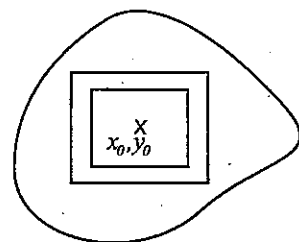


Fig. XIII. 6.

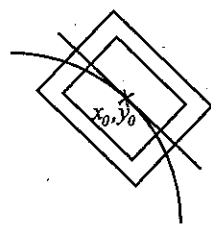


Fig. XIII. 7.

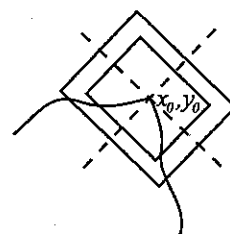


Fig. XIII. 8.

În acest mod, se obține o familie de pătrate concentrice  $(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)})_{(x,y) \in K}$  de felul celei de mai sus  $P_{(x,y)} \subset Q_{(x,y)}$ .  $K$  fiind compactă, există o familie finită de pătrate  $(P_{(x_i,y_i)}, Q_{(x_i,y_i)})_{i=1,\dots,n}$  astfel încît interioarele pătratelor  $P_{x_i,y_i}$  acoperă  $K$ . Asociem fiecărui cuplu de pătrate  $P_{(x_i,y_i)} \subset Q_{(x_i,y_i)}$  câte o funcție  $\Phi_i$  ca în finalul demonstrației lemei 3 deci  $\Phi_i = 1$  pe  $P_{(x_i,y_i)}$  și 0 în afara pătratelor  $Q_{(x_i,y_i)}$ ,  $0 \leq \Phi_i \leq 1$  și  $\Phi_i$  de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^2$  (ceea ce este evident posibil). Funcțiile

$$\lambda_i = \frac{\Phi_i}{\Phi_1 + \dots + \Phi_n}$$

sunt de clasă  $C^\infty$  în vecinătatea lui  $K$ ,  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ ,  $\lambda_i = 0$  în afara pătratului

$Q_{(x_i,y_i)}$ , pentru orice  $i$  și  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  pe  $P_{(x_i,y_i)} \cup \dots \cup P_{(x_i,y_i)}$  (deci și pe  $K$ ). (Se zice

că  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  formează o **partiție a unității**). Pentru fiecare  $i = 1, \dots, n$  punem

$\alpha_i = \lambda_i \alpha$  și  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ . Alegînd pătratele descompunerii suficient de mici,

putem presupune că  $\alpha_i$  sunt 1 - forme de clasă  $C^1$  în vecinătatea lui  $K$ .

Formula Green - Riemann va rezulta din ce vom obține pentru fiecare  $\alpha_i$ . Pentru pătratele ce corespund punctelor interioare în  $K$ , conform lemelor 1 și

2 se poate aplica formula Green - Riemann și avem  $\iint_{Q_{(x_i,y_i)}} d\alpha_i = \int_{\partial Q_{(x_i,y_i)}} \alpha_i = 0$  și

avînd în vedere că  $\alpha$  este nulă în exteriorul și pe frontiera lui  $Q$ . Dacă avem un punct  $(x_i, y_i) \in \partial K$ , din nou cu lemele 1 și 2 avem pentru  $K_i = Q_{(x_i,y_i)} \cap K$ ,

$$\int_{\partial K_i} \alpha_i = \int_{\partial K} \alpha_i = \iint_{K_i} d\alpha_i = \iint_K d\alpha_i,$$

deoarece  $\alpha_i$  este nulă în exteriorul și pe frontiera lui  $Q_{(x_i,y_i)}$ . Deci formula Green - Riemann are loc pentru orice  $\alpha_i$ , deci pentru  $\alpha$ .

EXEMPLU. Fie  $K$  un compact cu bord orientat (în  $\mathbb{R}^2$ ). Aplicînd formula Green - Riemann 1 - formelor  $x dy$  și  $y dx$ , obținem

$$\int_{\partial K} x dy = \iint_K dx dy = \text{aria}(K), \quad \int_{\partial K} y dx = - \iint_K dx dy = -\text{aria}(K),$$

de unde formula pentru calculul ariei lui  $K$ , printr-o integrală curbilinie:

$$\text{aria } K = \frac{1}{2} \int_{\partial K} x dy - y dx.$$

De exemplu, în cazul unui disc  $K = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ , considerăm parametrizarea  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$  cu  $t \in [0, 2\pi]$ , pentru  $\partial K$  și rezultă

$$x dy - y dx = (R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t) dt, \text{ deci } \text{aria } K = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 dt = \pi R^2.$$

Vom aplica în cele ce urmează formula Green - Riemann pentru cazul funcțiilor olomorfe.

Fie  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  o funcție continuă, unde  $A \subset \mathbb{C}$  este o mulțime deschisă nevidă,  $f = u + iv$ , unde  $u = \text{Re } f$ ,  $v = \text{Im } f$  și fie  $z = x + iy$  variabila complexă. Definim 1 - forma  $f(z)dz$  ca fiind  $f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = udx - vdy + i(udy + vdx)$ , deci în fond  $f(z)dz$  se poate identifica cu perechea de 1 - forme reale  $(udx - vdy, udy + vdx)$ . Pentru orice arc orientat  $\gamma$  de clasă  $C^1$  (pe porțiuni), cu imaginea conținută în  $A$ , se definește **integrala curbilinie complexă**

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} u dy + v dx.$$

O funcție  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  se zice **olomorfă** pe  $A$  (vezi lecția a V-a) dacă pentru orice  $z_0 \in A$  există (în  $\mathbb{C}$ ), limita

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

notată  $f'(z_0)$ . Notînd  $z - z_0 = h$ , rezultă

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

Luînd  $h$  real ( $h \rightarrow 0$ ), deducem imediat că

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \text{ unde } z_0 = x_0 + iy_0.$$

Luînd  $h$  de forma  $h = ik$ ,  $k$  real ( $k \rightarrow 0$ ), obținem

$$if'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Rezultă că au loc relațiile

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Am demonstrat astfel

**TEOREMA XIII. 2.** Dacă  $f$  este o funcție olomorfă pe un deschis  $A \subset \mathbb{C}$ ,

$f = u + iv$ , atunci sunt verificate condițiile

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \text{ în fiecare punct din } A.$$

Aceste ecuații se numesc **ecuațiile (condițiile) Cauchy - Riemann**. Demonstrăm acum trei dintre rezultatele principale ale Analizei complexe.

**TEOREMA XIII. 3. (Formula lui Cauchy).** Fie  $K$  un compact cu bord orientat în  $\mathbb{C}$  și  $f$  o funcție olomorfă (de clasă  $C^1$ ) în vecinătatea lui  $K$ . Atunci

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Să observăm că s-a pus condiția  $f$  de clasă  $C^1$  în paranteză pentru că se poate demonstra că dacă  $f$  este olomorfă atunci rezultă de clasă  $C^1$ . Fără a intra în aceste detalii, vom presupune că  $f$  este de clasă  $C^1$  și fie  $f = u + iv$ . Atunci

$$\int_{\partial K} f(z) dz = \int_{\partial K} u dx - v dy + i \int_{\partial K} u dy + v dx.$$

Dar

$$\int_{\partial K} u dx - v dy = \iint_K \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0 \text{ și la fel, } \int_{\partial K} u dy + v dx = 0$$

folosind formula lui Green - Riemann și condițiile Cauchy - Riemann. În definitiv,

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0.$$

**TEOREMA XIII. 4. (formula integrală a lui Cauchy).** Fie  $K$  un compact cu bord orientat în  $\mathbb{C}$  și  $f$  o funcție olomorfă (de clasă  $C^1$ ) în vecinătatea lui  $K$ . Pentru orice  $z_0 \in \mathring{K}$  (interiorul lui  $K$ ) avem

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Alegem  $r > 0$  astfel încît discul închis  $\{z; |z - z_0| \leq r\}$  să fie conținut în  $\mathring{K}$ . Să notăm  $K_r = \{z \in K; |z - z_0| \geq r\}$ .  $K_r$  este un compact cu bord orientat, bordul lui  $K_r$  compunîndu-se din bordul  $\partial K$  al lui  $K$  reunit cu cercul  $|z - z_0| = r$  orientat în sensul acelor ceasornicului (fig. XIII. 9).

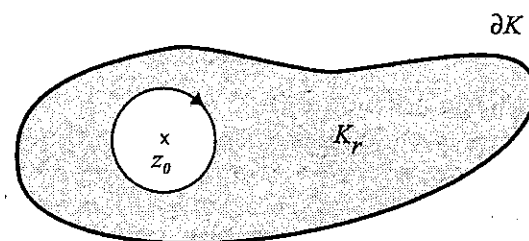


Fig. XIII. 9.

Funcția  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  este olomorfă în vecinătatea compactului  $K_r$  (cît de funcții olomorfe), căci  $z_0 \notin K_r$ . Aplicînd formula lui Cauchy, deducem

$$\int_{\partial K_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0.$$

Deci

$$0 = \int_{\partial K_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

unde  $\gamma_r$  este arcul orientat ce rezultă din parametrizarea  $t \mapsto z_0 + e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  a cercului  $|z - z_0| = r$ . În definitiv

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Pentru calculul  $\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$  observăm că în general dacă  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  este un

drum parametrizat de clasa  $C^1$ , avem

$$\int_{\varphi} g(z) dz = \int_a^b g(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Deci

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Facem acum  $r \rightarrow 0$  și obținem la limită,

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0),$$

deci formula integrală Cauchy.

Ca o aplicație a formulei integrale Cauchy, să arătăm că orice funcție olomorfă (de clasă  $C^1$ ) este local suma unei serii de puteri (deci este analitică) și în particular de clasă  $C^\infty$ . Acest rezultat este în profund contrast cu situația funcțiilor de variabilă reală (unde o funcție derivabilă o dată nu rezultă analitică).

Fie în adevăr  $f$  olomorfă (de clasă  $C^1$ ) într-un deschis  $A \subset \mathbb{C}$  și  $z_0 \in A$  fixat. Făcînd o translație, putem presupune că  $z_0 = 0$  deci  $f$  este olomorfă într-un disc  $|z| < R$ . Alegem  $r$  astfel încît  $0 < r < R$  și aplicăm formula integrală Cauchy pentru discul  $|z| \leq r$  și  $u$  cu  $|u| < r$ . Deci

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - u} dz,$$

unde  $\gamma_r$  este cercul  $|z| = r$  etc. Scriind

$$\frac{1}{z - u} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{u}{z}}$$

și cum pentru  $|z| = r$  avem  $|u/z| < 1$ , rezultă

$$\frac{1}{z - u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{z^{n+1}} \text{ (serie UC).}$$

Se înmulțește cu  $f(z)$  și se integrează termen cu termen pe  $\gamma_r$ . Notînd

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

pentru  $n \geq 0$  și  $0 < r < R$ , rezultă  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , în  $|z| < R$  deci  $f$  este analitică în vecinătatea oricărui punct din  $A$ .

**TEOREMA XIII. 5.** O funcție  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  de clasă  $C^1$  pe un deschis  $A$  este olomorfă dacă și numai dacă este analitică.

**DEMONSTRAȚIE.** Dacă  $f$  este olomorfă, am arătat mai sus că este analitică. Reciproc, dacă  $f$  este analitică în  $A$ , fie  $\forall z_0 \in A$ . Atunci într-o vecinătate a lui  $z_0$  are loc o dezvoltare în serie de forma  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  deci  $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a_1 + a_2(z - z_0) + \dots$  și limita  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a_1 + a_2(z - z_0) + \dots$  există și este egală cu  $a_1$ , deci  $f$  este  $\mathbb{C}$ -derivabilă și  $z_0$ .

## 2. Formula Gauss - Ostrogradski

Pentru a obține în  $\mathbb{R}^3$  o formulă analoagă formulei Green - Riemann, vom urma aceleași idei dezvoltate în paragraful precedent adaptate la noua situație. Pentru a nu mai intra în detalii algebrice, vom trata pe scurt 3 - formele diferențiale în  $\mathbb{R}^3$ . Se știe că

$$(*) \quad dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0,$$

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dx \wedge dz = -dz \wedge dx, \quad dy \wedge dz = -dz \wedge dy.$$

Vom considera și produse  $dx \wedge (dy \wedge dz)$  și celelalte combinații, asociative prin definiție și respectînd regulile de calcul (\*). Vom extinde apoi prin liniaritate aceste produse pentru combinații liniare. Expresia  $dx \wedge (dy \wedge dz)$  va fi notată cu  $dx \wedge dy \wedge dz$  etc. Se observă că printr-o permutare pară valoarea nu se schimbă iar printr-o permutare impară se schimbă semnul ( $dx \wedge dy \wedge dz = -dy \wedge dx \wedge dz$  etc.).

O 3 - formă pe  $M \subset \mathbb{R}^3$  este prin definiție o expresie  $\beta = f dx \wedge dy \wedge dz$  cu  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ; clasa formei este dată de clasa funcției  $f$ . Dacă

$$\alpha = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

este o 2 - formă de clasă  $C^1$  pe deschisul  $A \subset \mathbb{R}^3$  cu  $P, Q, R \in C^1(A)$  definim  $d\alpha$  prin

$$\begin{aligned} d\alpha &= dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy = \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dz \wedge dx + \\ &+ \left( \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

deci  $d\alpha$  este o 3 - formă continuă pe  $A$  cu

$$f = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Dacă  $\theta : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  este o aplicație de clasă  $C^1$ , atunci

$$d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 = \frac{D(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{D(u, v, w)} du \wedge dv \wedge dw = J_\theta du \wedge dv \wedge dw, \text{ cu } (u, v, w) \in A.$$

Pentru orice 3 - formă  $\beta = f dx \wedge dy \wedge dz$ , se pune  $\theta^* \beta = (f \circ \theta) J_\theta du \wedge dv \wedge dw$ . Se verifică ușor că pentru o 2 - formă  $\alpha$  și o aplicație  $\theta$  de clasă  $C^2$ , avem  $d(\theta^* \alpha) = \theta^*(d\alpha)$ . Dacă  $\beta = f dx \wedge dy \wedge dz$  este o 3 - formă pe  $M \subset \mathbb{R}^3$ , definim

$$\int_M \beta = \int_M \int_M \int_M f dx dy dz,$$

în ipoteza că integrala a doua are sens. Din cele de mai sus, rezultă că dacă  $\theta : A \rightarrow B$  este un difeomorfism de clasă  $C^1$  între deschisii  $A, B$  din  $\mathbb{R}^3$  cu  $J_\theta > 0$  și  $\beta = f dx \wedge dy \wedge dz$  este o 3 - formă integrabilă pe  $B$  atunci  $\theta^* \beta$  este

integrabilă pe  $A$  și  $\int_A \theta^* \beta = \int_B \beta$ . În adevăr, conform definițiilor,

$$\theta^* \beta = (f \circ \theta) J_\theta du \wedge dv \wedge dw \text{ și totul revine la}$$

$$\int_A \int_A \int_A (f \circ \theta) J_\theta du \wedge dv \wedge dw = \int_B \int_B \int_B f dx dy dz,$$

care este tocmai teorema de schimbare de variabilă.

Fie acum  $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \text{ și } 0 \leq z \leq \varphi(x, y), \varphi \geq 0\}$ , unde  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  este de clasă  $C^1$ , iar  $D$  este un disc compact în  $\mathbb{R}^2$  (fig. XIII. 10).

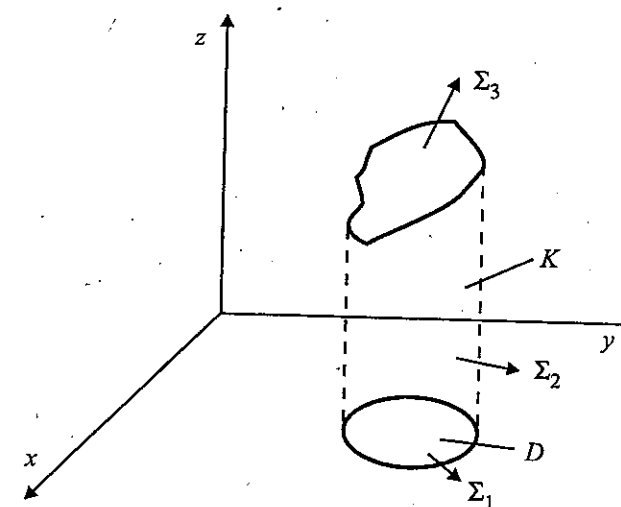


Fig. XIII. 10.

Frontiera lui  $K$  este formată din mulțimile  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  (discul  $D$ , porțiunea laterală de cilindru și "capacul" format din punctele  $(x, y, \varphi(x, y))$ , cu  $(x, y) \in D$ ). Vom arăta că  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  se pot considera ca "suprafețe" orientate. Pentru  $\Sigma_1$  lucrurile sunt clare. Vom "orienta"  $\Sigma_1$  după normala exterioară (sensul descrescător al lui  $z$ ).

Pentru  $\Sigma_3$  vom considera pînza parametrizată  $(x, y) \mapsto (x, y, \varphi(x, y))$  și elementul de suprafață orientat după normala exterioară  $\left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, 1 \right)$  (normala face cu semi-axa pozitivă  $Oz$  un unghi ascuțit).

Cît despre  $\Sigma_2$ , este clar cã, local, pentru orice punct pe  $\Sigma_2$  (ce nu este în  $\Sigma_1$  sau în  $\Sigma_3$ ),  $\Sigma_2$  este imaginea unei pînze parametrizate (cilindru) și vom fixa orientarea normalei exterioare. Sã luãm 2 - formă  $\alpha = Rdx \wedge dy$ , cu  $R$  de clasã

$C^1$  în vecinãtatea lui  $K$ . Punem prin definiție  $\int_K \alpha = \int_{\Sigma_1} \alpha + \int_{\Sigma_2} \alpha + \int_{\Sigma_3} \alpha$ . În mod

clar  $\int_{\Sigma_2} \alpha = 0$  cãci normala la  $\Sigma_2$  este perpendicularã pe  $Oz$ .

$$\int_{\Sigma_1} \alpha = - \iint_D R(x, y, 0) dx \wedge dy, \quad \int_{\Sigma_3} \alpha = \iint_D R(x, y, \varphi(x, y)) dx \wedge dy.$$

Pe de altã parte

$$\int_K d\alpha = \iiint_K \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_D \left( \int_0^{\varphi(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy = \iint_D [R(x, y, \varphi(x, y)) - R(x, y, 0)] dx dy$$

În definitiv,

$$\int_K \alpha = \int_K d\alpha,$$

formulã asemãnãtoare formulei Green - Riemann și numitã **formula Gauss - Ostrogradski** (C. F. GAUSS, 1777 - 1855; M. V. OSTROGRADSKI, 1801 - 1861). Desigur avem aici un caz foarte particular de compact  $K$  cu "bord" orientat în  $\mathbb{R}^3$  și un caz particular de 2 - formã. Se mai spune cã un compact ca mai sus este "simplu" în raport cu  $z$ . Este clar cã se pot obține rezultatele analoage pentru compacti simpli în raport cu  $y$  respectiv  $x$  și 2 - forme corespunzãtoare. Folosind proprietatea de invarianță a integralelor 3 - formelor prin difeomorfisme ce "pãstreazã orientarea" (adicã cu jacobian  $> 0$ ), se obține cã pentru un compact simplu în raport cu una din axe, cu frontiera orientatã dupã normala exterioarã, formula Gauss - Ostrogradski este valabilã pentru orice 2 - formã de clasã  $C^1$ ,

$$\alpha = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

Pentru a generaliza formula Gauss - Ostrogradski, se definesc **compacti cu bord orientat** în  $\mathbb{R}^3$  ca mulțimi compacte  $K \subset \mathbb{R}^3$  astfel încît pentru orice punct  $(x_0, y_0, z_0) \in \partial K$  (frontiera lui  $K$ ) existã o vecinãtate deschisã  $V$  a lui  $(x_0, y_0, z_0)$ , astfel încît  $V \cap K$  sã fie difeomorfã (clasa  $C^2$  cu pãstrarea orientãrii) cu compacti "simpli". Se orienteazã  $\partial K$  dupã normala exterioarã. Folosind o tehnicã de **partiție a unitãții**, similarã celei folosite la stabilirea formulei Green - Riemann, obținem:

**TEOREMA XIII. 6. (formula generalã Gauss - Ostrogradski).** Fie  $K$  un compact cu bord orientat în  $\mathbb{R}^3$  (bordul  $\partial K$  orientat dupã normala exterioarã) și  $\alpha = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$  o 2 - formã de clasã  $C^1$  în vecinãtatea lui  $K$ . Atunci

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K d\alpha,$$

sau mai explicit:

$$\int_{\partial K} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \iiint_K \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

**OBSERVAȚII.** 1) Pentru definirea integralei  $\int_K \alpha$  se poate folosi partiția unității; în aplicații se face o descompunere convenabilă a bordului  $\partial K$  în elemente de suprafață (ca în cazul compactilor simpli). 2) Este clar cã se poate generaliza formula la cazul cînd bordul lui  $K$  are puncte "singulare" deci elementele de suprafață ce definesc frontiera cu funcții de clasã  $C^1$  "pe porțiuni". Nu intrãm în detalii.

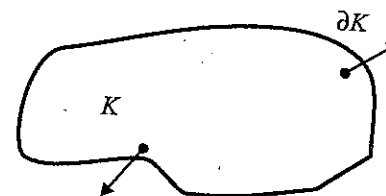


Fig. XIII. 11.

### 3. Formula lui Stokes

Fie  $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$  o pînã parametrizată ( $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  fiind o mulțime deschisă și conexă). Notãm  $(u, v) \in \Delta$  și  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  și  $\varphi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$ . Reamintim cã pînza este **simplă** dacã  $\varphi$  este injectivă. Pînza se zice **regulatã** dacã  $\varphi$  are rang 2 în orice punct.

Un **element de suprafață bordatã** în  $\mathbb{R}^3$  este o submulțime  $S \subset \mathbb{R}^3$  astfel încît existã o pînã **simplă și regulatã** de clasã  $C^2$ ,  $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$  și un **compact cu bord**  $K \subset \Delta$  astfel încît  $S = \varphi(K)$ . Mulțimea  $\varphi(\partial K)$  se numește **bordul lui S** și se noteazã  $\partial S$ . Sã observãm dacã  $\psi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  este o pînã  $C^2$  echivalentã cu  $\varphi$ , atunci existã un unic compact cu un bord  $L \subset D$  așa încît  $\psi(L) = S$  și  $\psi(\partial L) = \partial S$ . În plũs, dacã  $\theta$  este o schimbare de parametru  $\varphi = \psi \circ \theta$ , atunci  $\theta(K) = L$  și  $\theta(\partial K) = \partial L$ . Deci noțiunea de element de suprafață bordatã este obținutã dintr-o pînã (definitã în lecția a XII-a), luînd restricția unei parametrizări admisibile la un compact cu bord. Accentul a fost pus aici pe imaginea pînzei. Aria elementului de suprafață bordatã  $S$  se definește ca aria pînzei  $\varphi|_K$ , deci ca  $\iint_K \|N_\varphi\| du dv$  și este independentã de  $\varphi$  și de  $K$  ( $\varphi(K) = S$ ).

Fie acum  $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$  o 1 - formă de clasă  $C^1$  pe un deschis  $A \subset \mathbb{R}^3$ . Definim

$$\begin{aligned} d\alpha &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz = \left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \\ &+ \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \left( \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz = \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Deci  $d\alpha$  este o 2 - formă continuă pe  $A$ .

Fie  $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi(\Delta) \subset A$  o pînză parametrizată de clasă  $C^2$ . Avem pentru orice 1 - formă  $\alpha$  de clasă  $C^2$  pe  $A$

$$d(\varphi^* \alpha) = \varphi^*(d\alpha).$$

Demonstrația acestui fapt este o simplă verificare cu ajutorul definițiilor.

Fie acum  $S$  un element de suprafață bordată în  $\mathbb{R}^3$ ,  $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$  o pînză parametrizată  $K \subset \Delta$ ,  $\varphi(K) = S$  ca în definiția elementului de suprafață și  $K$  un compact cu bord orientat. Orientăm  $S$  considerînd clasa de orientare (deci elementul de suprafață orientat) definită pe  $\varphi$ . Aceasta revine la a considera normala

$$N_\varphi = \left( \frac{D(Y, Z)}{D(u, v)}, \frac{D(Z, X)}{D(u, v)}, \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} \right)$$

și versorul normală unitară  $\frac{N_\varphi}{\|N_\varphi\|}$  ce caracterizează orientarea. Vom orienta

$\partial S$  considerînd în mod natural orientarea indusă  $\varphi|_{\partial K}$  de pe bordul lui  $K$  ( $\partial K$  este o reuniune de imagini de arce orientate etc.). Astfel orientat,  $S$  devine un **element orientat de suprafață bordată**. Se mai zice că orientarea pe  $S$  este compatibilă cu cea de pe  $\partial S$  ("regula mîinii stîngi": parcurgînd  $\partial S$  în sensul orientării cu capul spre sensul normalei la  $S$ ,  $S$  rămîne la stînga).

Fie  $\beta$  o 2 - formă continuă în vecinătatea lui  $S$  și  $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$  o pînză parametrizată,  $K \subset \Delta$ ,  $\varphi(K) = S$ . Definim  $\int_S \beta = \int_K \varphi^*(\beta)$ . Să observăm că

integrala nu depinde de pînză parametrizată admisibilă în clasa de orientare. Să luăm  $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$  o 1 - formă de clasă  $C^1$  în vecinătatea lui  $S$ .

Avem  $\int_{\partial S} \alpha = \int_{\partial K} \varphi^* \alpha$  din definiție. Mai departe,  $\int_S \alpha = \int_K \varphi^*(d\alpha) = \int_K d(\varphi^* \alpha)$ . Dar pe compactul cu bord orientat se poate aplica formula Green - Riemann, deci

$$\int_{\partial K} \varphi^* \alpha = \int_K d(\varphi^* \alpha).$$

În definitiv,

$$\boxed{\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha}.$$

Aceasta este **formula lui J. G. STOKES**, 1819 - 1903 (profesor al lui J. C. MAXWELL) pentru elemente de suprafață bordată.

Pentru a generaliza formula lui Stokes la suprafețe generale, vom considera reuniuni  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$  de elemente orientate de suprafață bordată astfel încît  $S_i$  și  $S_j$  să aibă eventual doar puncte din  $\partial S_i$  ( $\partial S_j$ ) în comun pentru  $i \neq j$ , intersecția  $\partial S_i \cap \partial S_j$  să fie sau vidă sau imaginea unui arc de clasă  $C^2$ , intersecția a trei elemente diferite să aibă cel mult un punct comun și în fine  $S$  să fie conexă (fig. XIII. 12).

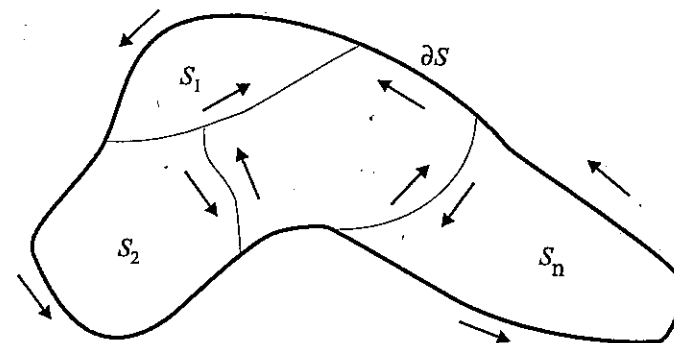


Fig. XIII. 12.

$S$  va fi o **suprafață bordată orientată** dacă pe porțiunile  $\gamma_{ij}$  de arce comune, orientările induse de  $S_i$  respectiv  $S_j$  sunt opuse. Se definește în mod natural  $\partial S$  ca fiind mulțimea punctelor care aparțin exact unui singur bord  $\partial S_i$  sau sunt limite de astfel de puncte.  $S$  are o orientare,  $\partial S$  de asemenea și acestea sunt compatibile. Obținem

**TEOREMA XIII. 7. (formula lui Stokes).** Fie  $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$  o 1 - formă de clasă  $C^1$  în vecinătatea unei suprafețe bordate orientate  $S$ . Atunci

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha.$$

(integralele se definesc ca

$$\int_{\partial S} \alpha = \sum_i \int_{\partial S_i} \alpha, \quad \int_S d\alpha = \sum_i \int_{S_i} d\alpha$$

și se poate arăta că nu depind de descompunerea particulară a lui  $S$  în elemente).

## 4. Elemente de teoria câmpului

Fie  $U \subset \mathbb{R}^3$  un deschis nevid.

**Definiția XIII. 2.** Prin **câmp scalar** în  $U$  se înțelege o funcție  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , de clasă  $C^1$ , cu valori scalare. Un **câmp vectorial** în  $U$  este o aplicație  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clasă  $C^1$ ; componentele  $(P, Q, R)$  ale lui  $v$  sunt câmpuri scalare.

Pentru orice  $c \in \mathbb{R}$ , mulțimile  $\{(x, y, z) \in U \mid \varphi(x, y, z) = c\}$  se numesc **suprafețe de nivel** pentru câmpul scalar  $\varphi$ . Pentru orice punct  $a = (x_0, y_0, z_0) \in U$ , **gradientul câmpului scalar**  $\varphi$  în punctul  $a$  este vectorul

$$\nabla_a \varphi = \text{grad}_a \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a), \frac{\partial \varphi}{\partial z}(a) \right).$$

Câmpul vectorial  $\nabla \varphi = \text{grad} \varphi$  asociază oricărui punct  $a \in U$ , vectorul  $\nabla_a \varphi$  și se numește **câmpul de gradienti** asociat lui  $\varphi$ .

Se cunosc proprietățile de calcul ale gradientului. Adăugăm o proprietate geometrică importantă:

**TEOREMA XIII. 8.** Dacă  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  este un câmp scalar,  $a \in U$  și  $S$  este suprafața de nivel trecînd prin  $a$ , atunci gradientul  $\nabla_a \varphi$ , presupus nenul, este normal la  $S$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Trebuie arătat că  $\nabla_a \varphi$  este ortogonal planului tangent  $T_a S$ . Ecuația suprafeței  $S$  este  $\varphi(x, y, z) = \varphi(a)$ . Fie  $\forall v \in T_a S$  deci există un drum parametrizat de clasă  $C^1$ ,  $\gamma : I \rightarrow S$  situat pe  $S$  și există  $t_0 \in I$  cu  $\gamma(t_0) = a$  și  $\gamma'(t_0) = v$ . Punînd  $\forall t \in I$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , rezultă  $\varphi(x(t), y(t), z(t)) = \varphi(a)$ . Derivînd în raport cu  $t$ , rezultă  $\langle \nabla_{\gamma(t)} \varphi, \gamma'(t) \rangle = 0$  și făcînd  $t = t_0$ ,  $\langle \nabla_a \varphi, v \rangle = 0$  deci  $\nabla_a \varphi$  este ortogonal pe  $v$ .

**EXEMPLUL 1.** Dacă  $\varphi$  este câmpul scalar al temperaturilor (deci  $\forall (x, y, z) \in U$ ,  $\varphi(x, y, z)$  este temperatura în acel punct), atunci suprafețele de nivel ale lui  $\varphi$  se numesc **izoterme**. Un exemplu tipic de câmp vectorial îl constituie câmpul vitezelor particulelor (asimilate cu puncte) ale unui fluid situat într-un recipient.

**EXEMPLUL 2.** Fie  $O$  un punct material fixat; pentru orice  $M \neq O$  se notează  $r = \overrightarrow{OM}$  (vectorul de poziție) și  $r = \|r\|$ . Forța de atracție newtoniană realizată de  $O$  în  $M$  este  $F = -\frac{a \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \frac{r}{r}$  ( $a > 0$  constant,  $m_1, m_2$  masele punctelor  $O$

și  $M$ ); notînd  $k = a m_1 m_2$ , rezultă  $F = -k \cdot \frac{r}{r^3}$ . Introducînd coordonate rezultă

$$r = (x, y, z), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ și } F = -k \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right). \text{ Se obține un câmp vectorial}$$

în  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ , numit **câmpul newtonian** realizat de  $O$ . Direct din definiție rezultă

$$\nabla r = \text{grad} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \frac{r}{r}$$

și mai general  $\nabla f(r) = f'(r) \cdot \frac{r}{r}$ . Așadar,  $\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{r}{r}$  și câmpul newtonian rezultă un câmp de gradienti în deschisul  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ , anume

$$F = -k \frac{r}{r^3} = k \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \nabla \left( \frac{k}{r} \right).$$

**Definiția XIII. 3.** Fie  $v = (P, Q, R)$  un câmp vectorial de clasă  $C^1$  într-un deschis  $U \subset \mathbb{R}^3$ . Pentru orice punct  $a \in U$ , se pot defini **divergența lui  $v$  în  $a$** ,

$$\text{div}_a v = \frac{\partial P}{\partial x}(a) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a) + \frac{\partial R}{\partial z}(a)$$

și **rotorul lui  $v$  în  $a$** ,

$$\text{rot}_a v = \left( \frac{\partial R}{\partial y}(a) - \frac{\partial Q}{\partial z}(a), \frac{\partial P}{\partial z}(a) - \frac{\partial R}{\partial x}(a), \frac{\partial Q}{\partial x}(a) - \frac{\partial P}{\partial y}(a) \right).$$

Sunt definite astfel un câmp scalar,

$$\text{div} v = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

și un câmp vectorial,  $\text{rot} v$ , cu componentele

$$w_1 = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, w_2 = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, w_3 = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Câmpul  $v$  se zice **solenoidal** în  $U$  dacă  $\forall a \in U$ ,  $\text{div}_a v = 0$ . Câmpul  $v$  se zice **irotațional** dacă  $\forall a \in U$ ,  $\text{rot}_a v = 0$ .

Direct din definiție, rezultă următoarele reguli de calcul:

1.  $\text{div} c = 0$ ,  $\text{rot} c = 0$  pentru orice vector constant  $c$ ;
2.  $\text{div}(v + w) = \text{div} v + \text{div} w$ ,  $\text{rot}(v + w) = \text{rot} v + \text{rot} w$  și  $\text{div}(v \times w) = w \cdot \text{rot} v - v \cdot \text{rot} w$ , pentru orice câmpuri vectoriale  $v, w$ ;
3.  $\text{div}(av) = a \text{div} v$ ,  $\text{rot}(av) = a \text{rot} v$ ,  $a \in \mathbb{R}$  constant;
4.  $\text{div}(\varphi v) = \varphi \text{div} v + \langle v, \nabla \varphi \rangle$ ,  $\text{rot}(\varphi v) = \varphi \text{rot} v - v \times \nabla \varphi$ , pentru orice câmp scalar  $\varphi$  și orice câmp vectorial  $v$ .
5.  $\text{div} r = 3$ ,  $\text{rot} r = 0$ ,  $\text{div}(c \times r) = 0$ ,  $\text{rot}(c \times r) = 2c$ , pentru orice vector constant  $c$ ,  $r$  fiind vectorul de poziție.
6. Dacă  $\varphi$  și  $v$  sunt câmpuri de clasă  $C^2(U)$ , atunci

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi\end{aligned}$$

(laplacianul lui  $\varphi$ , după numele lui P. LAPLACE, 1749 – 1827). După calcule imediate rezultă relațiile:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}v) = 0 \text{ și } \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0, v \text{ și } \varphi \text{ de clasă } C^2.$$

7. Oricărui câmp vectorial  $v = (P, Q, R)$  i se pot asocia o 1 – formă  $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$  și o 2 – formă  $\beta = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ , de clasă  $C^1$  pe  $U$ . Atunci

$$d\alpha = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

deci  $d\alpha$  are drept coeficienți componentele lui  $\operatorname{rot}v$ . În mod similar,

$$d\beta = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

deci este o 3 – formă cu coeficientul tocmai tocmai  $\operatorname{div}v$ . Aplicând lema lui Poincaré, rezultă că dacă  $d\alpha = 0$ , atunci există  $\varphi$  astfel încît  $\alpha = d\varphi$ ; aceasta revine în limbaj vectorial: dacă  $\operatorname{rot}v = 0$ , atunci local există  $\varphi$  astfel încît  $v = \nabla\varphi$ . În mod similar, dacă  $d\beta = 0$ , atunci există o 1 – formă  $\gamma$  astfel încît  $\beta = d\gamma$  deci dacă  $\operatorname{div}v = 0$ , atunci local există un câmp un câmp vectorial  $w$  astfel încît  $v = \operatorname{rot}w$ . Cu alte cuvinte, **orice câmp irotational este local un câmp de gradient și orice câmp solenoidal este local un câmp de rotori**.

EXEMPLUL 3. Fie  $E$  câmpul electric,  $B$  câmpul magnetic, variabile în timp și în spațiu, considerate într-un domeniu de studiu asimilat cu deschis  $U \subset \mathbb{R}^4$ . Se notează cu  $\rho(x, y, z, t)$  densitatea de sarcină,  $J$  densitatea de curent și cu  $c$  viteza luminii. Din considerente fizice, J. C. MAXWELL (1831 – 1879) a dedus ecuațiile următoare care îi poartă numele:

$$\operatorname{rot}E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \operatorname{rot}B = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \operatorname{div}E = 4\pi\rho, \operatorname{div}B = 0.$$

Dealtfel operatorii "div" și "rot" au fost introduși de Maxwell tocmai în legătură cu stabilirea și studiul ecuațiilor câmpului electromagnetic. Din ecuația secundă, aplicînd  $\operatorname{div}$  rezultă

$$0 = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div}J + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}E),$$

deci ținînd cont de a treia ecuație, se obține

$$\operatorname{div}J + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

(numită **ecuația de continuitate**). Dacă  $B$  nu depinde de timp, atunci  $\operatorname{rot}E = 0$  deci  $E = \nabla\psi$  și ecuația a treia devine  $\Delta\psi = 4\pi\rho$  (numită ecuație de tip Poisson). În fine, dacă  $J = 0$  și  $\rho = 0$  (se spune atunci că spațiul este liber), atunci notînd  $A = \frac{c}{4\pi}(E \times B)$ , rezultă

$$\begin{aligned}\operatorname{div}A &= \frac{c}{4\pi} \operatorname{div}(E \times B) = \frac{c}{4\pi} (B \operatorname{rot}E - E \operatorname{rot}B) = \\ &= \frac{c}{4\pi} \left( -\frac{1}{c} B \cdot \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{1}{c} E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \right) = -\frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} (B^2 + E^2)\end{aligned}$$

deci punînd  $\varphi = \frac{1}{8\pi} (B^2 + E^2)$ , se obține

$$\operatorname{div}A + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \text{ (ecuația lui Poynting).}$$

În cele ce urmează, ne propunem să retranscriem formulele integrale date în paragrafele anterioare în notație vectorială, așa cum sunt utilizate de obicei. Fie  $v = (P, Q, R)$  un câmp vectorial de clasă  $C^1$  într-un deschis  $U \subset \mathbb{R}^3$  și  $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$  1 – forma asociată. Dacă  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  este un drum de clasă  $C^1$  pe porțiuni, atunci **circulația** lui  $v$  în lungul lui  $\gamma$  este integrala curbilinie

$$\Gamma = \int_{\gamma} \alpha = \int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Dacă  $v$  este un câmp de forțe, atunci  $\alpha = \langle v, dr \rangle = v \cdot dr$  (produs scalar) se numește lucru elementar, iar  $\Gamma$  este numit **lucrul** lui  $v$  în lungul lui  $\gamma$ . Pentru calculul efectiv al lui  $\Gamma$ , se utilizează o reprezentare parametrică a lui  $\gamma$  și calculul se reduce la o integrală uzuală.

Teorema XIII. 6 se rescrie astfel:

$$\int_{\partial K} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \iiint_K (\operatorname{div}v) dx dy dz.$$

Presupunînd că  $\partial K$  este o suprafață cu versorul – normală exterioară  $n = (n_1, n_2, n_3)$ , rezultă  $dy \wedge dz = n_1 d\sigma$ ,  $dz \wedge dx = n_2 d\sigma$  și  $dx \wedge dy = n_3 d\sigma$ , unde  $d\sigma$  este elementul de arie pe suprafața  $\partial K$ . [Luînd o parametrizare locală  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  pentru  $\partial K$ , avem  $dy \wedge dz = Adu \wedge dv$ , unde

$$A = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u}; \text{ apoi } d\sigma = \|r_u \times r_v\| du \wedge dv \text{ și } n = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} \text{ deci}$$

$n_1 d\sigma = (n \cdot i) d\sigma = Adu \wedge dv = dx \wedge dy$ . Formula anterioară se rescrie atunci astfel:

$$\int_{\partial K} (v \cdot n) d\sigma = \iiint_K (\operatorname{div}v) dx dy dz.$$

Membrul întîi se mai numește **fluxul** câmpului vectorial  $v$  prin suprafața  $\partial K$ , după normala exterioară  $n$ . Formula Gauss – Ostrogradski se mai numește "flux – divergență". În particular, **fluxul unui câmp solenoidal printr-o suprafață închisă** (de tip  $\partial K$ ) este nul.

EXEMPLUL 4. Calculăm fluxul lui  $v = (x, y, z)$  prin emisfera  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ , după normala care face un unghi ascuțit cu semiaxa pozitivă Oz. În acest caz,

$$n = \text{versorul lui } \text{grad}(x^2 + y^2 + z^2) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right), \text{ unde } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Atunci fluxul creat este

$$\int_S (v \cdot n) d\sigma = \int_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} d\sigma = \int_S r d\sigma = \int_S R d\sigma = R \text{ aria } S = 2\pi R^3.$$

Formula lui Stokes (teorema XIII. 7) se poate scrie explicit sub forma

$$\int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz = \int_S (\text{rot } v \cdot n) d\sigma$$

și se mai numește formula "circulație - rotor". Așadar, **circulația  $\Gamma$  a lui  $v$  în lungul bordului  $\partial S$  (curbă închisă) este egală cu fluxul rotorului lui  $v$  prin suprafața  $S$ .** În particular, **circulația unui câmp irotațional în lungul oricărei curbe închise (de tip bord) este nulă.**

EXEMPLUL 5. Considerăm octantul de sferă

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

și calculăm circulația câmpului newtonian  $v = \frac{r}{r^3}$  în lungul bordului  $\partial S$  al lui  $S$ .

Aplicăm formula lui Stokes și rezultă

$$\Gamma = \int_{\partial S} v \cdot dr = \int_S (\text{rot } v) \cdot n d\sigma = 0, \text{ deoarece } \text{rot } v = 0.$$

## 5. 10 exerciții

1. Să se calculeze, folosind formula Green - Riemann, integrala curbilinie

$$I = \int_{\gamma} y dx + 2x dy,$$

în lungul frontierei  $\gamma$  orientate pozitiv a semicercului  $K = \{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ .

2. Fie  $P, Q$  funcții de clasă  $C^1$  pe un deschis  $U \subset \mathbb{R}^2$ , astfel încât  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  în  $U$ . Să se

arate că circulația lui  $v = (P, Q)$  în lungul bordului oricărui compact  $K \subset U$ , cu bord orientat, este nulă. Reciproca este falsă.

3. Fie  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  o funcție olomoră de clasă  $C^1$  într-un deschis  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $P = \text{Re } f$ ,  $Q = \text{Im } f$ . Să se arate că  $P$  și  $Q$  sunt armonice în  $A$  (o funcție  $u: A \rightarrow \mathbb{R}$  se zice **armonică** dacă este de clasă  $C^2(A)$  și  $\Delta u = 0$ ).

4. Fie  $c$  un vector constant și  $r$  vectorul de poziție.

## 5. 10 exerciții

a) Să se calculeze  $\text{div } v$ ,  $\text{rot } v$  pentru  $v = (c \cdot r)r$  și pentru  $v = r^2(c \times r)$ .

b) Să se arate că  $\text{rot } \frac{r \times c}{r^2} = \text{grad } \left( \frac{r \cdot c}{r^3} \right)$ .

5. Să se determine un câmp vectorial  $v$  de clasă  $C^1$  în  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  astfel încât  $\text{rot } v = (x, y, -2z)$  și  $v$  este ortogonal pe Oz.

6. a) Să se calculeze, folosind formula Gauss - Ostrogradski, fluxul câmpului  $v = (2xz, 2z, xy)$  prin suprafața închisă  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , după normala exterioară.

b) Aceeași problemă pentru  $v = (2xz, 2yz, -2z^2)$  prin suprafața deschisă  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z > 0$ .

7. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, circulația lui  $v = (y, z, x)$ , în lungul cercului  $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$  parcurs pozitiv o dată în raport cu Oz.

8. Determinați un potențial scalar  $\phi$  pentru câmpul irotațional  $v = (2xy, x^2 + z, y)$ , adică  $v = \nabla \phi$ , și un potențial vector  $w$  pentru câmpul solenoidal  $v = (2xy, -y^2, 1)$ , adică  $v = \text{rot } w$ .

9. Un lichid de densitate constantă  $c$  se află într-un recipient  $K$ , asimilat cu un compact conținut în semispațiul  $z < 0$  (spațiul  $\mathbb{R}^3$  se presupune raportat la un triedru ortogonal Oxyz de versori  $i, j, k$ ). Presupunând că presiunea crește proporțional cu adâncimea și câmpul presiunilor este  $v = czk$ , să se calculeze fluxul lui  $v$  prin  $\partial K$  (numit **forță ascensională** a lichidului) și să se deducă legea lui Arhimede.

10. Fie  $v = (P, Q, R)$  un câmp de clasă  $C^1$  într-un deschis  $U \subset \mathbb{R}^3$ . O curbă  $\gamma: I \rightarrow U$  de clasă  $C^1$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , se zice **linie de câmp** pentru  $v$  dacă  $\forall t \in I$ , vectorul - tangentă  $\gamma'(t)$  este coliniar cu  $v$ , deci  $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ . Să se determine liniile de câmp pentru  $v = (2x, yz, z)$ ,  $v = (xy, y^2, z)$ .

## INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1.  $P = y$ ,  $Q = 2x$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ . Atunci  $I = \text{aria } K = \frac{\pi}{2}$ .

2. Circulația este  $\int_{\partial K} P dx + Q dy$  și este nulă, folosind ipoteza asupra funcțiilor  $P, Q$  și

formula Green - Riemann. Pentru reciprocă, să considerăm  $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ ,  $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$

în  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Se observă că  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  în  $U$  și totuși circulația lui  $v = (P, Q)$  în lungul cercului unitate  $x^2 + y^2 = 1$  este nenulă. Acest cerc nu este frontieră de compact bordat în  $U$ .

3. Scriem ecuațiile Cauchy - Riemann:  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ . Atunci

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = 0,$$

conform teoremei lui Schwartz. La fel,  $\Delta Q = 0$ .

4. a) Fie  $\varphi = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$ . Scriind pe coordonate, avem  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  și  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  deci  $\varphi = c_1 x + c_2 y + c_3 z$ . Atunci

$$\nabla \varphi = (c_1, c_2, c_3) = \mathbf{c}, \text{ div } \mathbf{v} = \text{div}(\varphi \mathbf{r}) = \varphi \text{div } \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \varphi = 3\varphi + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = 4\varphi, \text{ iar}$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \varphi \text{rot } \mathbf{r} - \mathbf{r} \times \nabla \varphi = -\mathbf{r} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}.$$

Pentru  $\mathbf{v} = r^2(\mathbf{c} \times \mathbf{r})$  avem  $\text{div } \mathbf{v} = r^2 \text{div}(\mathbf{c} \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{r} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 0$  etc.

$$\text{b) } \text{rot } \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{c}}{r^2} = \text{rot } \frac{1}{r^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{c}) = \frac{1}{r^2} \cdot 2\mathbf{c} - (\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \times \nabla \left( \frac{1}{r^2} \right) \text{ și } \text{grad } \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{r^3} = \frac{\mathbf{c} \cdot r^3 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}) \cdot 3r^2 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}}{r^6} \text{ etc.}$$

5. Luăm deci  $\mathbf{v} = (P, Q, R)$  și din relația dată rezultă

$$-\frac{\partial Q}{\partial z} = x, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = y \text{ și } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2z.$$

Atunci  $Q = -xz + C_1(x, y)$ ,  $P = yz + C_2(x, y)$  și putem lua  $C_1 = C_2 = 0$ .

6. a)  $\Phi = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} 2z \, dx \, dy \, dz$ . Trecind la coordonate sferice, rezultă

$$\Phi = 2 \iiint r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^1 r^3 \, dr \text{ etc.}$$

b) În acest caz  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ . Fie  $S_1$  emisfera și  $S_2$  porțiunea din planul  $xOy$  cu  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Atunci

$$\Phi = \int_{S_1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma = \int_{S_1} + \int_{S_2} = \int_{S_1} - \int_{S_2} = - \int_{S_2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \, dx \, dy = - \int_{S_2} 2z^2 \, dx \, dy = 0.$$

7. Avem  $\text{rot } \mathbf{v} = (-1, -1, -1)$  și putem lua  $S$  = porțiune din planul  $z = 1$  cu  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Atunci cum  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ , circulația este

$$\Gamma = \int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_S -d\sigma = -\text{aria } S = -\pi.$$

8. Relația  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$  devine  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + z$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = y$ . Apoi luăm  $\mathbf{w} = (P, Q, 0)$ .

9. Forța ascensională va fi

$$\Phi = \int_{\partial K} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_K (\text{div } \mathbf{v}) \, dx \, dy \, dz = \iiint_K c \, dx \, dy \, dz = c \cdot \text{vol } K = \text{masa fluidului}.$$

10. În primul caz,  $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{z}$ . Din ultimele două rapoarte rezultă  $\frac{dy}{y} = dz$  deci

$z = \ln|y| + C_1$ ; apoi  $\frac{dx}{x} = 2 \frac{dz}{z}$  deci  $x = C_2 z^2$ . Liniile de cîmp apar ca intersecția a două suprafețe etc.

## LECȚIA A XIV-A

# SPAȚII HILBERT, SERII FOURIER

## INTRODUCERE

Vom prezenta în această lecție primele noțiuni de spații Hilbert, generalizarea cea mai naturală a spațiilor  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{C}^n$ ). În cadrul spațiilor Hilbert se dezvoltă teoria seriilor Fourier generalizate, teoria operatorilor, precum și teoriile moderne de optimizare (legate de utilizarea tehnicilor geometrice bazate pe produse scalare). Vom da apoi câteva rezultate privind seriile Fourier trigonometrice, utilizate în Fizica modernă și în telecomunicații, prin descompunerea semnalelor periodice în armonicele lor.

## 1. Spații Hilbert

Spațiile vectoriale vor fi peste corpul  $\mathbb{C}$ .

Fie  $H$  un spațiu vectorial (complex). Un **produs scalar** pe  $H$  este o funcție  $\langle, \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ , astfel încît:

- 1)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ,  $\forall x, y, z \in H$ ,
- 2)  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ ,  $\forall x, y \in H$  și  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ,
- 3)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ,  $\forall x, y \in H$ ,
- 4)  $\forall x \in H$ ,  $\langle x, x \rangle \geq 0$  și în plus,  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

(Reamintim că pentru  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\bar{\lambda}$  este conjugatul lui  $\lambda$ ).

Se deduc imediat și proprietățile:

- 5)  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ ,  $\forall x, y, z \in H$
- 6)  $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$ ,  $\forall x, y \in H$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ .

Noțiunea de produs scalar abstract a fost introdusă de marele matematician german DAVID HILBERT (1862 - 1943).

**Definiția XIV. 1.** Un spațiu **prehilbertian** este un spațiu vectorial  $H$ , împreună cu un **produs scalar** pe  $H$ . Un spațiu **unitar** este un spațiu prehilbertian finit dimensional.

**OBSERVAȚIE.** Cu o modificare evidentă în condiția 3, se obține noțiunea de

produs scalar pe un spațiu vectorial **real** și noțiunea corespunzătoare de spațiu prehilbertian. Spațiile prehilbertiene reale finit dimensionale se numesc spații **euclidiene**.

Fie  $H$  un spațiu prehilbertian. Definim  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , pentru orice  $x \in H$ .

**Inegalitatea lui Schwarz** (G.K.A. SCHWARZ, 1843 – 1921):

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in H.$$

**DEMONSTRAȚIE.** Avem  $\langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle \geq 0$ ,  $\forall x, y \in H$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , deci  $\langle x, x \rangle + \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \langle x, y \rangle + |\alpha|^2 \langle y, y \rangle \geq 0$ . Dacă  $y \neq 0$  să luăm  $\alpha = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$  și vom obține inegalitatea dorită. Dacă  $y = 0$ , inegalitatea este banal verificată.

Se arată cu ușurință că:

- a)  $\|x\| \geq 0$  pentru orice  $x \in H$  și  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
- b)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,  $\forall x \in H$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ,
- c)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $\forall x, y \in H$ .

Pentru c) se utilizează inegalitatea lui Schwarz. Așadar, orice spațiu prehilbertian  $H$  este un **spațiu vectorial normat**, în mod canonic (cu norma  $\|\cdot\|$  mai sus definită), deci și un spațiu metric, cu distanța

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}, \quad \forall x, y \in H.$$

**Definiția XIV. 2.** Un spațiu **Hilbert** este un spațiu prehilbertian complet. În particular, orice spațiu unitar este un spațiu Hilbert.

**EXEMPLUL 1.** Spațiul  $H = \mathbb{C}^n$  este Hilbert relativ la produsul scalar,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n).$$

**EXEMPLUL 2.** Fie  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un spațiu cu măsură. Pe spațiul vectorial  $L^2_X(\mu)$

(lecția a X – a) se definește produsul scalar  $\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu$ . Se obține un spațiu Hilbert (norma indusă este  $\|\cdot\|_2$ ).

Un caz particular important este  $X = \mathbb{N}$  și  $\mu$  măsura de numărare. În acest caz notăm  $L^2_{\mathbb{N}}(\mu) = l^2$ . Avem

$$l^2 = \{(x_n)_n \mid x_n \in \mathbb{C}, \sum |x_n|^2 < \infty\},$$

cu produsul scalar  $\langle x, y \rangle = \sum_n x_n \bar{y}_n$ ,  $x = (x_n)_n$ ,  $y = (y_n)_n$ .

Fie  $H$  un spațiu Hilbert. Dacă  $x, y \in H$ , spunem că  $x$  este **ortogonal** pe  $y$  dacă  $\langle x, y \rangle = 0$ . În acest caz scriem  $x \perp y$ .

**TEOREMA XIV. 1.**

- 1)  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ ,  $\forall x, y \in H$ ,
- 2) Dacă  $x \perp y$ , atunci  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .
- 3)  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ .

Demonstrația este o consecință imediată a definițiilor,  $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle$  etc. Identitatea 1) este **regula "paralelogramului"** iar identitatea 2) "generalizează" teorema lui Pitagora.

**OBSERVAȚIE.** Se poate demonstra că regula paralelogramului caracterizează spațiile normate pentru care norma provine dintr-un produs scalar (în modul descris mai sus).

Dacă  $x \in H$  și  $A \subset H$ , spunem că  $x$  este **ortogonal pe  $A$**  dacă  $x \perp y$ , pentru orice  $y \in A$ . Scriem în acest caz:  $x \perp A$ .

Dacă  $A, B \subset H$  scriem  $A \perp B$  dacă  $x \perp y$  pentru orice  $x \in A, y \in B$ .

Pentru  $A \subset H$ ,  $A$  nevidă, definim  $A^\perp = \{x; x \perp A\}$ . Se arată cu ușurință că dacă  $A \subset H$ ,  $A^\perp$  este un **subspațiu vectorial** și un **închis** al lui  $H$  (subspațiu vectorial închis).

**TEOREMA XIV. 2. (teorema proiecției).** Fie  $H_1 \subset H$  un subspațiu vectorial închis și  $a \in H$ . Există un unic  $p \in H_1$  astfel încît

- 1)  $\|a - p\| \leq \|a - x\|$ ,  $\forall x \in H_1$ ;
- 2)  $(a - p) \perp H_1$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Fie  $\alpha = \inf\{\|a - x\|, x \in H_1\}$ . Pentru orice  $n \geq 1$ , natural există  $x_n \in H_1$  încît

$$\alpha \leq \|a - x_n\| < \alpha + \frac{1}{n}.$$

Folosind regula paralelogramului pentru  $x_m - a, x_n - a$ , deducem

$$\|x_n + x_m - 2a\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x_n - a\|^2 + \|x_m - a\|^2).$$

Deci

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x_n - x_m\|^2 &= 2(\|x_n - a\|^2 + \|x_m - a\|^2) - \|x_n + x_m - 2a\|^2 \leq \\ &\leq 2\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(\alpha + \frac{1}{m}\right)^2 - 4\left\|\frac{x_n + x_m}{2} - a\right\|^2 \leq \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} + 4\alpha\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

deoarece



$$\left\| \frac{x_n + x_m}{2} - a \right\|^2 \geq \alpha^2.$$

Șirul  $(x_n)_n$  este deci un șir Cauchy în  $H_1$ .  $H_1$  fiind închis în spațiul Hilbert  $H$ , rezultă complet deci există  $p \in H_1$  astfel ca  $x_n \rightarrow p$ . Deducem  $\|a - p\| = \alpha$  și deci 1).

Dacă  $p' \in H_1$ ,  $\|a - p'\| \leq \|a - x\|$ ,  $\forall x \in H_1$ , urmează că  $\|a - p'\| = \|a - p\| = \alpha$ .

Din regula paralelogramului (pentru  $\frac{a-p}{2}, \frac{a-p'}{2}$ ), avem

$$\left\| a - \frac{p+p'}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{p-p'}{2} \right\|^2 = 2 \left\| \frac{a-p}{2} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{a-p'}{2} \right\|^2 = \alpha^2.$$

Dar  $\alpha^2 \leq \left\| a - \frac{p+p'}{2} \right\|^2$  căci  $\frac{p+p'}{2} \in H_1$ . Deci  $\|p - p'\| = 0$  și  $p = p'$  (deci

unicitate). Să arătăm că  $(a - p) \perp H_1$ . Fie  $x \in H_1$ ,  $x \neq 0$ . Pentru  $\lambda \in \mathbb{C}$  avem

$$\|a - p - \lambda x\|^2 = \langle a - p - \lambda x, a - p - \lambda x \rangle =$$

$$= \|a - p\|^2 - \overline{\lambda} \langle a - p, x \rangle - \lambda \overline{\langle a - p, x \rangle} + |\lambda|^2 \|x\|^2 \geq \alpha^2$$

(căci  $p + \lambda x \in H_1$ ). În fond

$$\overline{\lambda} \langle a - p, x \rangle + \lambda \overline{\langle a - p, x \rangle} - |\lambda|^2 \|x\|^2 \leq 0.$$

Luăm  $\lambda = \frac{\langle a - p, x \rangle}{\|x\|^2}$  și obținem  $\langle a - p, x \rangle = 0$ . Cum pentru  $x = 0$ ,  $(a - p) \perp x$ , rezultă  $(a - p) \perp x$ ,  $\forall x \in H_1$ .

**COROLAR.** În condițiile teoremei de mai sus,  $H = H_1 \oplus H_1^\perp$  (sumă directă, adică orice element  $x \in H$  se scrie unic  $x = z + y$  cu  $z \in H_1$ ,  $y \in H_1^\perp$ ).

**OBSERVAȚIE.** În teorema XIV. 2,  $p$  este numit **elementul de cea mai bună aproximare** a elementului  $a \in H$  cu elemente din  $H_1$ . De asemenea tabloul "geometric" al teoremei XIV. 2 este clar: elementul  $p$  se obține "proiectînd"  $a$  pe  $H_1$ .

**TEOREMA XIV. 3.** (F. RIESZ, 1880 - 1956). Fie  $H$  un spațiu Hilbert și  $T: H \rightarrow \mathbb{C}$  o funcțională liniară și continuă. Există și este unic  $y_T \in H$  astfel încît  $T(x) = \langle x, y_T \rangle$ ,  $\forall x \in H$  și în plus  $\|T\| = \|y_T\|$ .

**DEMONSTRAȚIE.** Unicitatea lui  $y_T$  rezultă imediat căci dacă  $\langle x, y_T \rangle = \langle x, y'_T \rangle$   $\forall x \in H$ , rezultă  $\langle x, y_T - y'_T \rangle = 0$  pentru orice  $x \in H$  și deci  $y_T = y'_T$ . Pentru a arăta existența, să notăm  $H_1 = \text{Ker } T = \{x \in H; T(x) = 0\}$ .  $H_1$  este un spațiu închis în  $H$ . Să presupunem  $H_1 \neq H$  căci cazul  $H_1 = H$  este banal ( $T \equiv 0$ ,  $y_T = 0$ ).

Există  $a \in H - H_1$ ,  $a \perp H_1$  (corolarul teoremei proiecției).

Definim  $y_T = \frac{T(a)}{\|a\|^2} \cdot a$ . Dacă  $x \in H$ ,  $x_1 = x - \frac{T(x)}{T(a)} a$  este un element în  $H_1$  deci

$\langle x_1, y_T \rangle = 0$ . Rezultă

$$\langle x, y_T \rangle = \frac{T(x)}{T(a)} \langle a, \frac{T(a)}{\|a\|^2} a \rangle = T(x).$$

În plus,

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |T(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, y_T \rangle| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| \|y_T\| = \|y_T\|$$

și

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |T(x)| \geq \left| T\left(\frac{y_T}{\|y_T\|}\right) \right| = \|y_T\|,$$

asa că  $\|T\| = \|y_T\|$  și teorema este demonstrată.

O familie  $(e_j)_{j \in J}$  de elemente ale unui spațiu Hilbert  $H$  se zice un **sistem ortogonal** dacă  $e_k \perp e_p$ ,  $\forall k \neq p$ .

Un sistem ortogonal  $(e_j)_{j \in J}$  se zice **ortonormal** dacă în plus  $\|e_j\| = 1$ ,  $\forall j \in J$ . Să observăm că dacă  $(e_j)_{j \in J}$  este un sistem ortogonal și nu conține pe  $0 \in H$ , atunci  $(e_j)_{j \in J}$  este o familie liniar independentă și  $(e_j / \|e_j\|)_{j \in J}$  formează un sistem ortonormal.

**Definiția XIV. 3.** Fie  $(e_j)_{j \in J}$  un sistem ortonormal în  $H$ . Pentru fiecare  $x \in H$ , numerele  $\alpha_j(x) = \langle x, e_j \rangle$ ,  $j \in J$  se numesc **coeficienții Fourier** (J. FOURIER 1768 - 1830) ai elementului  $x$ , în raport cu sistemul  $(e_j)_{j \in J}$ .

Numele lui J. Fourier, mare matematician francez, guvernator al Egiptului pe timpul lui Napoleon, este cel mai întâlnit în întreaga literatură științifică.

Fie  $\{e_1, \dots, e_n\}$  un sistem ortonormal. Avem

$$\left\| x - \sum_1^n \alpha_j(x) e_j \right\| \leq \left\| x - \sum_1^n \alpha_j e_j \right\|, \text{ pentru orice } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}.$$

În adevăr,

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_1^n \alpha_j e_j \right\|^2 &= \left\langle x - \sum_1^n \alpha_j e_j, x - \sum_1^n \alpha_j e_j \right\rangle = \\ &= \|x\|^2 - \sum_1^n \bar{\alpha}_j \alpha_j(x) - \sum_1^n \alpha_j \bar{\alpha}_j(x) + \sum_1^n |\alpha_j|^2 = \end{aligned}$$

$$= \|x\|^2 - \sum_1^n |a_j(x)|^2 + \sum_1^n |a_j(x) - \alpha_j|^2.$$

Deducem cu ușurință

**Inegalitatea lui Bessel** (F. V. BESSEL, 1784 - 1846). Dacă  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un sistem ortonormal, atunci pentru orice  $x \in H$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x)|^2 \leq \|x\|^2.$$

**Definiția XIV. 4.** O bază ortonormală a spațiului Hilbert  $H$  este un sistem ortonormal  $B = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  astfel încât subspațiul vectorial generat de  $B$  să fie dens în  $H$ .

Reamintim că o submulțime  $A \subset H$  este densă dacă orice element din  $H$  este limita unui șir de elemente din  $A$ .

**TEOREMA XIV. 4.** Fie  $B = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  o bază ortonormală în  $H$ . Atunci pentru orice  $x \in H$ , seria  $\sum_n a_n(x) e_n$  converge către  $x$  (în  $H$ ).

**DEMONSTRAȚIE.**  $a_n(x) = \langle x, e_n \rangle$ . Fie  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k(x) e_k$  și  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Din ipoteza de densitate rezultă că există  $n_\varepsilon$  și  $y \in H_{n_\varepsilon}$  (spațiul generat de  $e_0, \dots, e_{n_\varepsilon}$ ) așa încît  $\|x - y\| < \varepsilon$ . Evident pentru  $n \geq n_\varepsilon$ ,  $y \in H_n$  (spațiul generat de  $e_0, \dots, e_n$ ) și  $\|x - S_n\| \leq \|x - y\| < \varepsilon$ ; deci  $S_n \rightarrow x$  în  $H$ .

**COROLAR.** În ipotezele de mai sus,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x)|^2$$

(egalitatea lui M. A. PARSEVAL, 1755 - 1836). Această egalitate este o extindere a teoremei lui Pitagora.

**Definiția XIV. 5.** În condițiile teoremei XIV. 4, formula

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) e_n$$

se numește **dezvoltarea Fourier** a lui  $x$  în baza ortonormală  $(e_n)_n$ , sau **seria Fourier** a lui  $x$ .

Se observă că dacă  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este o bază ortonormală în  $H$ , atunci aplicația  $x \mapsto (a_n(x))_n$  este o **izometrie** a lui  $H$  pe  $l^2$  (izometrie aici înseamnă bijectie care conservă produsul scalar).

Vom încheia acest paragraf cu un exemplu fundamental.

Fie  $L^2 = L^2_{(-\pi, \pi)}(d\mu)$ , unde  $d\mu = \frac{1}{2\pi} dx$  și  $dx$  măsura Lebesgue. Considerăm  $l_n = e^{inx}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Familia  $(l_n)$  este în mod evident numărabilă și o considerăm dispusă în șirul

$$1, e^{ix}, e^{-ix}, e^{2ix}, e^{-2ix}, \dots$$

Este un exercițiu simplu de a arăta că  $(e^{inx})_n$  este un sistem ortonormal în  $L^2$ . Se va arăta în paragraful următor că acest sistem este chiar o **bază ortonormală**. Pentru  $f \in L^2$ , **coeficienții Fourier** (în raport cu această bază) vor fi

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

(produsul scalar în  $L^2$  este  $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g} d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g} dx$ ).

Seria Fourier pentru  $f$  va fi

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx},$$

iar sumele parțiale sunt **polinoamele trigonometrice**

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}.$$

Din cele arătate mai sus,  $s_n \rightarrow f$  în  $L^2$  și

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \quad (\text{conform egalității lui Parseval}).$$

Mai mult, dacă  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  este în  $l^2$  (adică  $\sum_n |c_n|^2 < +\infty$ ), șirul de polinoame

trigonometrice  $P_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$  converge în  $L^2$  către o funcție care are  $(c_n)_n$  drept coeficienți Fourier.

Considerăm acum pe  $(-\pi, \pi)$  măsura  $d\mu = \frac{1}{\pi} dx$  și spațiul  $L^2$  corespunzător

acestei măsuri, cu produsul scalar  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g} dx$ . Fie sistemul ortonormal

(chiar bază ortonormală):

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots, n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Avem pentru  $f \in L^2$  coeficienții Fourier (clasici)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n \geq 1$$

și seria Fourier corespunzătoare

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

dezvoltarea fiind valabilă în  $L^2$ .  
Folosind formulele lui Euler,

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

se stabilește imediat legătura între coeficienții Fourier  $c_n(f)$ ,  $a_n(f)$ ,  $b_n(f)$ ; anume,

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

## 2. Convergența seriilor Fourier

Dacă  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  este o funcție periodică de perioadă  $2\pi$  pe  $\mathbb{R}$  și astfel încât  $f \in L^1_{[-\pi, \pi]}$  în raport cu măsura Lebesgue, se pot defini **coeficienții Fourier**

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

și seriile Fourier corespunzătoare

$$f \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \quad f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

unde  $\sim$  se citește "seria asociată funcției  $f$ ".

Problema care se pune este studiul convergenței seriilor Fourier. Am văzut în paragraful precedent cum se prezintă situația în  $L^2$ , anume convergența în norma  $\|\cdot\|_2$ , numită "în medie pătratică". Sunt însă de mare interes și alte tipuri de convergență (punctuală, uniformă etc.) În vederea acestui studiu a fost considerată și ipoteza periodicității funcției  $f$ , având în vedere periodicitatea funcțiilor  $e^{inx}$ ,  $\cos nx$ ,  $\sin nx$ . Vom nota

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \quad (\text{nucleul DIRICHLET, 1805 - 1859}) \text{ și}$$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n D_m(x) \quad (\text{nucleul FEJER, 1880 - 1956}).$$

**TEOREMA XIV. 5.** Avem

$$1) \quad D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$2) \quad K_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{1 - \cos(n+1)x}{1 - \cos x}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) \, dx = 2\pi, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$4) \quad K_n(x) \geq 0 \text{ și } K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1 + \cos \delta)}, \text{ pentru } 0 < \delta \leq |x| \leq \pi.$$

**DEMONSTRAȚIE.**  $(e^{ix} - 1)D_n(x) = e^{i(n+1)x} - e^{-inx}$ . Se multiplică identitatea cu  $e^{-ix/2}$  și se obține 1).

Din  $(n+1)K_n(x) = \sum_{m=0}^n D_m(x)$  se obține imediat formula

$$(n+1)K_n(x)(e^{ix} - 1)(e^{-ix} - 1) = 2 - e^{i(n+1)x} - e^{-i(n+1)x},$$

de unde 2).

3) rezultă dintr-un calcul imediat, iar 4) se obține ușor din 2).

Fie acum

$$s_n(x) = s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}.$$

Avem

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{-n}^n e^{ik(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt$$

și

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \dots + s_n(x)}{n+1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt.$$

**TEOREMA XIV. 6.** (Fejer). Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuă și de perioadă  $2\pi$ . Atunci  $\sigma_n \xrightarrow{UC} f$  pe  $\mathbb{R}$ .

**DEMONSTRAȚIE.**  $\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] K_n(t) dt$ . Fie  $M > 0$  astfel încît  $|f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$ . Dacă  $\varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  astfel încît  $|x-y| < \delta_\varepsilon$  să implice  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$  ( $f$  fiind uniform continuă!). Alegem  $N$  astfel încît pentru  $n \geq N, \delta \leq |t| \leq \pi$  să avem  $K_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{4M}$ . Vom obține

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = \pi \varepsilon, \text{ iar}$$

$$\int_{-\pi}^{-\delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{4M} \int_{-\pi}^{\pi} 2M dt = \pi \varepsilon, n \geq N.$$

În definitiv,

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

dacă  $n \geq N$  și  $\forall x \in \mathbb{R}$  și teorema este demonstrată.

**COROLAR.** Dacă  $f, g$  sunt funcții continue, de perioadă  $2\pi$  pe  $\mathbb{R}$  și au aceiași coeficienți Fourier, atunci  $f = g$ .

Să observăm că teorema XIV. 6 poate fi interpretată și în felul următor: Dacă  $f$  este continuă în  $[-\pi, \pi]$ ,  $f(-\pi) = f(\pi)$ , atunci pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un polinom trigonometric  $T(x) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$  astfel încît  $|f(x) - T(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [-\pi, \pi]$ . În definitiv  $f$  se poate aproxima uniform cu polinoame trigonometrice.

Însă dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (sau  $\mathbb{C}$ ) este o funcție continuă, atunci  $g(x) = f(a + \frac{x}{\pi}(b-a))$  este continuă pe  $[0, \pi]$ . Extinzînd pe  $g$  la  $[-\pi, \pi]$  prin paritate, rezultă că  $g$  se poate aproxima uniform cu polinoame trigonometrice pe  $[-\pi, \pi]$ . Dar polinoamele trigonometrice se pot aproxima uniform cu polinoame obișnuite pe  $[-\pi, \pi]$  căci funcțiile  $\sin, \cos$  sunt sume de serii de puteri convergente pe toată dreapta reală. În definitiv  $g$  se poate aproxima uniform cu polinoame pe  $[0, \pi]$ , deci  $f$  se poate aproxima uniform cu polinoame pe  $[a, b]$ . S-a obținut astfel

**TEOREMA XIV. 7.** (WEIERSTRASS). Orice funcție continuă pe un interval compact se poate aproxima uniform cu polinoame.

Ca un corolar al acestei teoreme, deducem că șirul de funcții  $(e^{inx})_{n \in \mathbb{N}}$  este o bază ortonormală în  $L^2$  (cu notația din paragraful precedent). În adevăr, funcțiile continue sunt dense în  $L^2$  (teorema IX.11.) și polinoamele trigonometrice sunt dense în mulțimea funcțiilor continue (în convergența uniformă care implică desigur convergența în  $L^2$ ).

Să ne întoarcem la problema convergenței seriei Fourier pentru  $f \in L^1_{[-\pi, \pi]}$ .

Avem

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt.$$

Folosind paritatea funcției  $D_n$ , putem scrie

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt, \text{ deci}$$

$$(*) \quad s_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} dt.$$

**LEMA** (lui Riemann). Dacă  $g \in L^1_{[a, b]}$ , atunci

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin kx dx = 0 \text{ și } \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \cos kx dx = 0.$$

DEMONSTRAȚIE. Dacă  $g$  este de clasă  $C^1$  pe  $[a, b]$ , lema rezultă integrând prin părți. În cazul general, se utilizează densitatea funcțiilor de clasă  $C^1$  în spațiul  $L^1_{[a, b]}$ .

**TEOREMA XIV. 8.** (U. DINI, 1845 – 1918). Fie  $f$  o funcție de perioadă  $2\pi$ ,  $f \in L^1_{[-\pi, \pi]}$  astfel încât pentru  $x$  fixat să existe  $\delta > 0$ , cu proprietatea ca integrala

$$(**) \quad \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt$$

să existe. Atunci  $s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ .

DEMONSTRAȚIE. Din relația (\*) rezultă:

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t dt.$$

Din condiția (\*\*) și lema precedentă, deducem

$$s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x).$$

Teorema este demonstrată. Dacă de exemplu  $f$  este continuă în  $x$  și are derivate laterale finite în  $x$ , atunci condiția (\*\*) este îndeplinită.

OBSERVAȚIE. Dacă în teorema precedentă punem condiția să existe  $f(x-0)$ ,  $f(x+0)$  (limitele laterale) și integralele

$$\int_{-\delta}^0 \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} dt, \quad \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} dt,$$

atunci va rezulta că

$$s_n(x) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Deci am demonstrat.

**TEOREMA XIV. 9.** (DIRICHLET). Dacă  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție mărginită măsurabilă de perioadă  $2\pi$ , avînd pe  $[-\pi, \pi]$  un număr finit de discontinuități de prima speță și derivate laterale finite în fiecare punct, atunci seria Fourier

a funcției  $f$  converge punctual către  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ , în orice punct  $x \in \mathbb{R}$ .

Presupunînd că  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este periodică de perioadă  $T = 2l$  ( $l > 0$ ), în loc de  $2\pi$ , atunci toate rezultatele anterioare rămîn valabile; în acest caz coeficienții Fourier sunt

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \geq 0;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \geq 1 \text{ și}$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{l}} dx.$$

Teorema XIV. 9 se scrie astfel:

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}}.$$

**Comentariu.** 1) Dacă  $f(t), t \in \mathbb{R}$  este un semnal continuu, periodic (de perioadă  $2\pi$ ), verificînd condițiile teoremei XIV. 9 a lui Dirichlet, atunci coeficientul  $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$  reprezintă "media" lui  $f$  pe intervalul  $[-\pi, \pi]$ , iar termenul  $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ ,  $n \geq 1$  cu perioada principală  $\frac{2\pi}{n}$ , se numește armonică de ordin  $n$  a semnalului  $f$ . Formula

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

se interpretează ca descompunerea semnalului  $f$  în armonicile sale. În modificarea semnalelor unele armonice trebuie atenuate și altele amplificate. O problemă complexă, de mare însemnătate practică, este cea a separării semnalelor utile de zgomote (numită problema filtrării).

2) Șirul  $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$  se mai numește **spectrul** semnalului  $f$ . Spectrul este bine determinat de  $f$  și invers,  $f$  este recuperat a.p.t. prin cunoașterea coeficienților  $c_n$ . Este astfel evidențiat un fenomen matematic remarcabil: entități continue sunt exprimate prin entități discrete, fenomen numit "dualitatea analogic – digital".

**EXEMPLU.** Fie funcția  $f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$  și  $\tilde{f}$  funcția obținută a.p.t. prelungind  $f$  prin periodicitate la întreg  $\mathbb{R}$ . Aceasta va fi o funcție impară și satisface condițiile teoremei lui Dirichlet. Coeficienții Fourier vor fi

$$a_n = 0, \quad n \geq 0 \text{ și } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Rezultă că  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\tilde{f}(x+0) + \tilde{f}(x-0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

și pentru  $x \in (-\pi, \pi)$ , se obține

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

În particular, pentru  $x = \frac{\pi}{2}$  va rezulta că  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$ .

## 3. 10 exerciții

1. Fie  $H = \mathbb{R}^n$ , cu produsul scalar euclidian și  $L: H \rightarrow \mathbb{R}$  o aplicație liniară continuă. Să se arate că există și este unic  $c \in H$  astfel încât  $L(x) = \langle c, x \rangle$ ,  $\forall x \in H$ .

2. Fie  $H = M_{m,n}(\mathbb{R})$  mulțimea matricilor  $m \times n$  cu coeficienți reali. Pentru orice  $A, B \in H$ , se notează  $\langle A, B \rangle = \text{urma matricii pătrate } A^T B$ . Să se arate că se obține un produs scalar pe  $H$  (urma unei matrici pătrate este suma elementelor de pe diagonala principală).

3. Într-un spațiu prehilbertian real  $H$ , se spune că un șir  $(x_n)$  converge slab către  $a \in H$  dacă  $\forall y \in H$ ,  $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle a, y \rangle$ . Să se arate că dacă  $x_n \rightarrow a$  în  $H$ , atunci  $(x_n)$  converge slab către  $a$ . Reciproca are loc în  $\mathbb{R}^n$ , dar nu în general.

4. a) Să se arate că în orice spațiu euclidian există o bază ortonormală.  
b) Indicați o bază ortonormală în spațiul  $l^2$ .

5. Să se arate că aplicația  $f: l^2 \rightarrow l^2$ ,  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\} \mapsto \{x_1, x_2, \dots\}$  este  $\mathbb{R}$ -liniară, continuă, surjectivă dar nu injectivă.

6. a) Să se arate că spațiul Banach  $\mathcal{M}_{[0, \pi/2]}$  cu norma "sup" nu poate avea o structură de spațiu Hilbert.

b) Să se arate că spațiul prehilbertian  $C_{[0, 2\pi]}^1$  cu produsul scalar  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$  nu este un spațiu Hilbert.

7. Să se determine coeficienții Fourier  $a_n, b_n, c_n$  pentru funcția

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi] \\ -1, & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

prelungită prin periodicitate la întreg  $\mathbb{R}$ .

8. Să se aplice teorema lui Dirichlet pentru funcțiile următoare extinse prin periodicitate la  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = |x|, & x \in (-\pi, \pi]; \\ \text{b) } f(x) = x^2, & x \in (-\pi, \pi]; \\ \text{c) } f(x) = x + 1, & x \in (-\pi, \pi]. \end{array}$$

9. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție periodică de perioadă  $2\pi$ , satisfăcând condițiile teoremei Dirichlet.

a) Dacă  $f$  este pară, să se arate că  $b_n = 0$ ,  $n \geq 1$  și  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx$ ,  $n \geq 0$ .

b) Dacă  $f$  este impară, să se arate că  $a_n = 0$ ,  $n \geq 0$  și  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx$ ,  $n \geq 1$ .

10. Dacă  $f$  satisface condițiile teoremei lui Dirichlet, să se arate că  $a_n(f)$ ,  $b_n(f)$ ,  $c_n(f)$  și  $c_{-n}(f)$  tind către 0 pentru  $n \rightarrow \infty$ .

## INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Fie  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  baza canonică în  $\mathbb{R}^n$ . Pentru orice  $x \in H$ ,  $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i = (a_1, \dots, a_n)$  cu

$$a_i \in \mathbb{R} \text{ și } L(x) = \sum_{i=1}^n a_i L(e_i). \text{ Notăm } L(e_i) = c_i, 1 \leq i \leq n, \text{ deci } L(x) = \sum_{i=1}^n c_i a_i = \langle c, x \rangle, \text{ unde}$$

$$c = (c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n c_i e_i. \text{ Unicitatea lui } c \text{ se demonstrează astfel: fie } d \in \mathbb{R}^n \text{ astfel încât}$$

$\langle c, x \rangle = \langle d, x \rangle$  deci  $\langle c - d, x \rangle = 0$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}^n$ . Luând  $x = c - d$ , rezultă  $\|c - d\| = 0$  deci  $c = d$ . Se poate aplica și teorema XIV.3.

2. Dacă  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ ;  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ , atunci  $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$ . Se verifică ușor proprietățile produsului scalar.

3.  $\langle x_n, y \rangle - \langle a, y \rangle = \langle x_n - a, y \rangle$  și conform inegalității lui Schwarz,  $0 \leq |\langle x_n - a, y \rangle| \leq \|x_n - a\| \|y\|$ . Conform lemei cleștelui, rezultă  $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle a, y \rangle$ . Dacă  $x_n \rightarrow a$  slab, atunci  $\langle x_n, e_k \rangle \rightarrow \langle a, e_k \rangle$ , pentru  $1 \leq k \leq n$  deci coordonatele lui  $x_n$  tind către coordonatele lui  $a$  și ca atare,  $x_n \rightarrow a$  în norma lui  $\mathbb{R}^n$ . Fie  $H = L_{[0, \pi/2]}^2$ . Pentru orice

$$f \in H, \text{ avem } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin nx dx \text{ deci } \langle f, \sin nx \rangle \rightarrow 0 \text{ pentru } n \rightarrow \infty. \text{ Așadar } \{\sin nx\} \rightarrow 0$$

slab în  $H$ . Dar  $\|\sin nx\| = \frac{\pi}{4}$  nu tinde către zero.

4. a) Se consideră un sistem liniar independent care se ortogonalizează prin procedeul Gram-Schmidt. Apoi se normalizează vectorii (a norma un vector  $v \neq 0$  înseamnă a considera vectorul  $\frac{v}{\|v\|}$ ).

b) Fie  $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ ;  $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$ ;  $e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$ . Acești vectori din  $l^2$  sunt liniar independenți și ortogonali doi câte doi; apoi  $\|e_k\| = 1$ ,  $\forall k \geq 1$ . Orice  $x \in l^2$ ,  $x = (x_n)_{n \geq 1}$  se scrie  $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$  și ca atare,  $x$  este limita unui șir de combinații liniare de vectori  $e_k$ .

5. Pentru orice  $x = (x_n)_{n \geq 0}$  din  $l^2$  avem  $\|f(x)\|^2 = \sum_{n=1}^\infty x_n^2 \leq \sum_{n=0}^\infty x_n^2 = \|x\|^2$  deci  $\|f(x)\| \leq \|x\|$ .

Rezultă că  $f$  este continuă. Restul este imediat. Aplicația  $f$  se mai numește "funcție de siftare".

6. a) Luăm  $f = \sin$ ,  $g = \cos$ . Atunci  $\|f\| = 1$ ,  $\|g\| = 1$ ,  $\|f + g\| = \sqrt{2}$ ,  $\|f - g\| = 1$  și nu se verifică regula paralelogramului.

b) Trebuie produs un șir Cauchy în  $H$  care nu este convergent. Să considerăm  $\forall n \geq 1$ , funcția continuă  $f_n: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  și  $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  date prin

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ 1 & \text{dacă } x \in \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}\right] \\ n\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \text{dacă } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) \\ -n\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) & \text{dacă } x \in \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Pentru orice  $m, n \geq 1$  avem

$$\|f_m - f_n\|^2 = \int_0^{2\pi} (f_m(x) - f_n(x))^2 dx \leq \frac{2}{n} \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (f_n(x) - g(x))^2 dx = 0.$$

Așadar, șirul  $(f_n)$  este Cauchy în  $H$ , dar nu converge către o funcție continuă.

$$7. \text{ Avem } a_n = 0, n \geq 0 \text{ și } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n \text{ par} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}. \text{ Apoi}$$

$c_0 = 0$ ,  $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$  și  $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$  pentru  $n \geq 1$ . Se observă că  $a_n, b_n, c_n$  converg către zero.

$$8. a) b_n = 0, n \geq 1; a_0 = \pi, a_{2k} = 0, a_{2k+1} = -\frac{4}{\pi(2k+1)^2}.$$

$$b) a_0 = \frac{2\pi^3}{3}, a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}, b_n = 0, \forall n \geq 1 \text{ etc.}$$

9. Dacă  $f$  pară, atunci  $f(x) \cos nx$  este pară, iar  $f(x) \sin nx$  este impară. Dacă  $f$  este impară, atunci  $f(x) \cos nx$  este impară și  $f(x) \sin nx$  pară. Reamintim apoi că dacă

$g: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă și impară, atunci  $\int_{-a}^a g(x) dx = 0$  iar dacă este pară, atunci  $\int_{-a}^a g(x) dx = 2 \int_0^a g(x) dx$ .

10. Dacă  $f$  satisface condițiile teoremei lui Dirichlet, atunci  $f \in L^1_{[-\pi, \pi]}$  și aplicăm lema lui Riemann. Rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(f) = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0$$

și similar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(f) = 0.$$

Apoi  $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ ,  $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$  deci  $c_n \rightarrow 0$  și  $c_{-n} \rightarrow 0$ .

## SUBIECTE DATE LA PROBA SCRISĂ A EXAMENULUI DE "ANALIZĂ MATEMATICĂ"

Prezentăm două subiecte complete date la examenul din anul I – facultăți electrice, sesiunile din iarnă și vară, la Universitatea POLITEHNICA din București. Timpul de lucru : 2 ore.

### A. Sesiunea – iarnă

1. Criteriile lui Abel și Lebniz; enunț și demonstrație.

2. Să se răspundă la următoarele două întrebări:

a) care este deosebirea între PC și UC pentru șirurile de funcții ?

b) se știe că  $\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ ; ce se obține pentru  $x = 5$  ?

3. Dacă  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și  $a \in \mathbb{R}$ , să se arate că mulțimea  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) < a\}$  este deschisă. Dați exemplul de  $f$  și  $a$  pentru care  $M$  este conexă, dar nu convexă.

4. Să se determine extremele funcției  $f(x, y, z) = 2x + y + z$ , cu legăturile  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $x^2 + z^2 = 3$ ,  $y > 0$ . Interpretare geometrică.

### B. Sesiunea – vară

1. Funcțiile Gamma și Beta; definiție, proprietăți.

2. a) Justificați importanța formulei Gauss – Ostrogradski.

b) Dați exemplul de o proprietate care are loc a.p.t. dar nu peste tot.

3. Să se arate că  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sin(x^2+y^2) dx dy \leq \frac{\pi}{2}$ .

4. Dacă  $x \in (0, 2\pi)$  să se arate că  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$ .

### INDICAȚII

A. 2. a)  $UC \Rightarrow PC$ ; invers nu.

b) Eroarea absolută în formulă este  $\leq \frac{x^6}{6!} = \frac{5^6}{6!} < 22$ , ceea ce arată că este o formulă grosieră. Ea devine utilă doar în vecinătatea lui  $x = 0$  deci pentru  $|x|$  suficient de mic (de exemplu pentru  $|x| \leq 1$ , eroarea este  $\leq \frac{1}{6!}$ ).

3.  $M = f^{-1}((-\infty, a))$  și  $(-\infty, a)$  este deschisă. De exemplu,  $f(x, y) = -x^2 - y^2$  și  $a = 0$ . Atunci  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

4. Se poate aplica metoda multiplicatorilor Lagrange; se poate de asemenea pune  $x = \sqrt{3} \cos t$ ,  $y = 1$ ,  $z = \sqrt{3} \sin t$  etc.

B. 2. a) Legătură între integrale de suprafață și volum, ca și între date la frontieră, accesibile și date eventual inaccesibile.

b) Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $f(x) = 0$  pentru  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$  și  $f(x) = 1$  pentru  $x \in \mathbb{N}$ ; avem  $f = 0$  a.p.t. dar nu pe tot  $\mathbb{R}$ .

3. Se trece la coordonate polare.

4. Se dezvoltă în serie Fourier  $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ , prelungită prin periodicitate la  $\mathbb{R}$ .

### BIBLIOGRAFIE

1. I. CHÎTESCU, R. CRISTESCU, GH. GRIGORE, GH. GUSSI, A. HALANAY, M. JURCHESCU, S. MARCUS  
- *Dicționar de analiză matematică*, Ed. Șt. și Encicl., București, 1989.
2. J. DIEUDONNÉ  
- *Foundations of modern analysis I*, Academic Press, New York, 1960.
3. P. FLONDOR, O. STĂNĂȘILĂ  
- *Varietăți diferențiabile și sisteme dinamice*, Lit. IPB, București, 1988.
4. M. JURCHESCU  
- *Introducere în analiza pe varietăți*, Lit. Univ. București, 1980.
5. W. RUDIN  
- *Principles of mathematical analysis*, Mc Graw Hill, New York, 1964.
6. M. SPIVAK  
- *Calculus on manifolds*, Benjamin, New York, 1965.
7. O. STĂNĂȘILĂ  
- *Analiză matematică*, Ed. Did. și Ped., București, 1981.
8. V. A. ZORICI  
- *Matematicheski analiz*, Nauka, Moscova, vol. I 1981; vol. II 1984.

### CULEGERI DE PROBLEME RECOMANDATE

1. D. P. DEMIDOVICI  
- *Sbornik zadaci*, GIFML, Moscova, 1962.
2. N. DONCIU, D. FLONDOR  
- *Algebră și analiză matematică*, Ed. ALL, București, 1993.
4. C. POPA, V. HIRIȘ, M. MEGAN  
- *Introducere în analiza matematică prin exerciții și probleme*, Ed. Facla, Timișoara, 1976.



## INDEX ALFABETIC

Aderența unei mulțimi 70  
 algebră de mulțimi ( $\sigma$ -algebră) 229  
 aplicație continuă 71  
 " de clasă  $C^p$ ,  $C^\infty$  99, 151  
 " netedă 180  
 aproximare liniară 156  
 aria unui compact cu bord 298  
 aria unei suprafețe 284  
 arc de curbă, arc orientat 273

Bază ortonormală 321  
 bilă deschisă, închisă 68  
 bord 291, 307

Circulația unui câmp vectorial 275  
 câmp de gradienti 277  
 " irotational 309  
 " scalar, vectorial 308  
 " solenoidal 309  
 coeficienți Fourier 319  
 compact cu bord 290  
 criterii de convergență pentru:  
 - integrale improprii 206, 207  
 - integrale improprii cu parametru 220, 221  
 - serii numerice 38-46  
 - șiruri în  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  23, 27  
 criteriul de diferențiabilitate 145  
 criteriul general Cauchy pentru:  
 - serii 39  
 - șiruri 23  
 criteriul lui Weierstrass de convergență uniformă 92  
 curbă 108, 290

Derivata după o direcție 140  
 derivate parțiale 140  
 determinant funcțional (jacobian) 142

dezvoltare în serie Taylor, Fourier 123, 320  
 difeomorfism 170  
 diferențiala unei aplicații (funcții) 144  
 disc de convergență 115  
 distanță 60  
 distanța convergenței uniforme 62  
 " euclidiană în  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  16, 18  
 " Hamming pe hipercub 62  
 " Hausdorff 312  
 divergența unui câmp vectorial 309  
 dreapta de regresie 163  
 drum neted 107  
 " parametrizat 105  
 drumuri echivalente 107

Ecuații (condiții) Cauchy-Riemann 299  
 extreme globale 28  
 " locale 158  
 " cu legături 185

Familie de elemente 18  
 fluxul unui câmp vectorial 285  
 formă diferențială 270, 279  
 formula Cauchy 299  
 " Côtes 135  
 " Euler pentru funcții omogene 151  
 " Gauss-Ostrogradski 304  
 " Green-Riemann 292  
 " integrală a lui Cauchy 299  
 " Mac Laurin 102  
 " schimbării de variabilă 259  
 " Simpson 135  
 " Stokes 307  
 " Taylor 100, 157  
 " trapezelor 135  
 frontiera unei mulțimi 70  
 funcția beta 224  
 " exponențială 125

funcția gamma 223  
 funcție analitică 125, 301  
 " armonică 312  
 " continuă 71  
 " convexă 103  
 " de clasă  $C^p$ ,  $C^\infty$  99, 151  
 " derivabilă parțial 140  
 " diferențiabilă 143  
 " etajată (în scară) 77  
 " integrabilă Riemann 192  
 " integrabilă Lebesgue 241, 253  
 " măsurabilă  $\mu$  232  
 " olomorfă 118, 298  
 " spline 133  
 " uniform continuă 76  
 funcții independente funcțional 178

Gradientul unei funcții 147, 269

Imagine inversă (reciprocă) a unei forme diferențiale 271, 280  
 imersie 178  
 inegalitatea Bessel 321  
 " Hölder 259  
 " Minkowski 259  
 " Schwarz 316

integrală convergentă, divergentă, absolut convergentă 203, 205  
 " curbilinie 272  
 " improprie 202  
 " Lebesgue 241  
 " cu parametri 214  
 " Riemann 192  
 " Riemann-Stieltjes 209  
 " de suprafață 282  
 interiorul unei mulțimi 70

Laplacian 310  
 lema intervalelor închise incluse 20  
 lema lui Cesaró 21  
 " Fatoú 241  
 " Riemann 325  
 limita după o direcție 74  
 " inferioară, superioară 24  
 " unei funcții într-un punct 73  
 lungimea unui drum 108, 274

Margine inferioară, superioară 14  
 matrice jacobiană 142  
 măsură exterioară 241

măsura unei mulțimi măsurabile 235  
 " unui paralelipiped 247  
 " Lebesgue în  $\mathbb{R}^k$  250  
 metoda celor mai mici pătrate 163  
 " gradientului 164  
 " multiplicatorilor lui Lagrange 185  
 " lui Ritz 163  
 mulțime boreliană 232  
 " compactă 75  
 " conexă 78  
 " de măsură nulă 193  
 " densă 70  
 " deschisă, închisă 69  
 " mărginită 75  
 " măsurabilă 230  
 " numărabilă 21  
 " ordonată 14  
 mulțimea numerelor complexe 17  
 " reale 14

Normă 83  
 număr complex 17, 18  
 " real 15

Omeomorfism între spații metrice 79

Paralelipiped în  $\mathbb{R}^k$  247  
 paranteza Poisson 184  
 partiția unității 297  
 pînză parametrizată de suprafață 280, 281  
 polinom Lagrange de interpolare 132  
 principiul contracției 65  
 procedura Newton 104  
 produs scalar 316  
 proprietate adevărată aproape peste tot (a.p.t.) 196, 244  
 punct aderent 70  
 " critic 159  
 " de extrem 159  
 " fix 66  
 " interior 70

Ramură a argumentului 129, 130  
 ramură a logaritmului complex 130  
 rază de convergență 115  
 " curbura 103, 108  
 " torsiune 108  
 regula paralelogramului 317

|                                 |            |                                   |          |
|---------------------------------|------------|-----------------------------------|----------|
| relație de ordine               | 14         | șir punctual (simplu) convergent  | 87       |
| rotorul unui câmp vectorial     | 309        | " uniform convergent              | 87       |
| Serie absolut convergentă       | 41         | Teorema de calcul al derivatei    |          |
| serie binomială                 | 123        | după o direcție                   | 149      |
| " convergentă, divergentă       | 36         | teorema de derivare sub           |          |
| " Fourier                       | 320        | integrală                         | 216, 217 |
| " de puteri (întreagă)          | 113        | teorema funcțiilor implicite      | 173      |
| " punctual (simplu) convergentă | 90         | teorema lui Banach de punct fix   | 65       |
| " uniform convergentă           | 90         | " Cantor                          | 50       |
| " Taylor                        | 122        | " Dieudonné                       | 98       |
| spațiu Banach                   | 85         | " Dirichlet                       | 326      |
| " cu măsură                     | 237        | " Fermat                          | 159      |
| " euclidian                     | 316        | " Fubini                          | 257      |
| " Hilbert                       | 316        | " Lagrange                        | 185      |
| spațiu metric                   | 60         | " Lebesgue asupra                 |          |
| " compact                       | 75         | integrabilității Riemann          | 194      |
| " complet                       | 64         | teorema lui Lebesgue de           |          |
| " conex                         | 78         | convergență dominantă             | 243      |
| spațiu prehilbertian            | 315        | teorema lui B. Levi de            |          |
| " tangent                       | 182        | convergență monotonă              | 239      |
| " topologic                     | 70, 231    | teorema lui Mertens               | 49       |
| " unitar                        | 316        | " Poincaré                        | 276      |
| " vectorial normat (SVN)        | 83         | " Riesz                           | 318      |
| spații metrice omeomorfe        | 79         | " Schwarz                         | 153      |
| submersie                       | 178        | " Weierstrass                     | 325      |
| subșir                          | 19         | teorema proiecției                | 317      |
| suma unei serii convergente     | 36         | " rangului                        | 175      |
| sume Darboux                    | 191        | topologie                         | 230      |
|                                 |            | triedrul lui Frenet               | 108      |
| Șir de numere reale             | 19         | Valoare principală Cauchy         | 203      |
| șir Cauchy                      | 23         | varietate diferențiabilă (netedă) | 180      |
| " convergent                    | 19, 26, 63 | vecinătate a unui punct           | 68       |
| " monoton în $\mathbb{R}$       | 20         | vector tangent                    | 182      |