

Alef.



Analiză

**Calcul integral,
aplicații**



ALEF./ANALIZĂ

ALEPH₀/ANALYSE

Terminale CDE

II. Calcul intégral/aplications

C. GAUTIER

G. GIRARD

D. GERLL

C. THIERCÉ

A. WARUSFEL

L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers a été étendu à des „nombres” cardinaux transfinis, traditionnellement désignés par la lettre hébraïque aleph diversement indexée.

Aleph-zéro représente ainsi le cardinal de $\mathbb{N}$ lui-même. Aleph-un est le plus petit cardinal supérieur à Aleph-zéro et ainsi de suite.

CLASSIQUES HACHETTE, 79 BOULEVARD
SAINT-GERMAIN, PARIS

TRADUCERE DIN LIMBA FRANCEZĂ:

Prof. VERGINIA NEDELCU

NATALIA PETRIN

Confruntarea traducerii:

Conf. univ. dr. I. Săcuiu

Redactor: Avram Pop

Tehnoredactor: A. Daniel

ALEF. | ANALIZĂ

II. Calcul integral/aplicații

C. GAUTIER
G. GIRARD
D. GERLL
C. THIERCÉ
A. WARUSFEL



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ,
BUCUREȘTI, 1975

7 INTEGRALE PRIMITIVE

7.1 Integrala unei funcții pe un interval închis mărginit

7.2 Proprietățile integralei

7.3 Funcții primitive

7.4 Evaluarea ariei unei anumite părți din plan

7.5 Integrale generalizate

7.6 Diferite aplicații ale noțiunii de integrală

7.1 INTEGRALA UNEI FUNCȚII PE UN INTERVAL MĂRGINIT

7.1.1 Diviziuni ale unui interval închis și mărginit a lui R

DEFINIȚIE. Fie $[a, b]$ un interval închis mărginit. O diviziune a lui $[a, b]$
1 este un șir σ , finit, strict monoton de elemente ale acestui interval, primul termen al acestui șir fiind a și ultimul termen b .

Dacă se notează $\sigma(i) = x_i$, avem:

$$\sigma = (a = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n = b).$$

DEFINIȚIE. Norma unei diviziuni σ a intervalului închis și mărginit $[a, b]$
2 este cel mai mare dintre numerele $|x_i - x_{i-1}|$.

Se notează: $|\sigma| = \max_i |x_i - x_{i-1}|$.

Acest număr corespunde „amplitudinii” „celui mai mare” interval $[x_{i-1}, x_i]$ determinat de σ .

DEFINIȚIE. Fie σ și σ' două diviziuni ale intervalului închis și mărginit $[a, b]$.
3 Se spune că σ' este mai fină decât σ dacă și numai dacă:

$$\forall_{[a,b]x} [\exists_{Nk} x = \sigma(k) \Rightarrow \exists_{Nk'} x = \sigma'(k')].$$

Altfel spus, diviziunea σ' , mai fină decât diviziunea σ , utilizează cel puțin toate punctele diviziunii σ .

Se notează: $\sigma' < \sigma$

Această relație este o relație de ordine parțială pe mulțimea Σ de diviziuni ale lui $[a, b]$ (exercițiul 7.1).

Fie σ o diviziune a lui $[a, b]$ și fie x un element a lui $[a, b]$.

Diviziunea $\bar{\sigma}$, care conține toate punctele lui σ și x , se spune că este obținută plecând de la σ prin adăugarea lui x . Avem: $\bar{\sigma} < \sigma$.

Fie σ și σ' două diviziuni ale lui $[a, b]$.

Se notează $\sigma \oplus \sigma'$ diviziunea lui $[a, b]$, care utilizează toate punctele lui σ și σ' , excluzând oricare alt punct a lui $[a, b]$.

Avem simultan: $\sigma \oplus \sigma' < \sigma$ și $\sigma \oplus \sigma' < \sigma'$.

Există o diviziune σ_0 mai puțin fină decât toate celelalte:

$$\sigma_0 = (a, b);$$

dar nici una din diviziunile lui $[a, b]$ nu este mai fină decât toate celelalte (exercițiul 7.1).

Pe de altă parte, avem (exercițiul 7.2):

$$\forall \sigma \in \Sigma, \forall \sigma' \in \Sigma \quad \sigma' < \sigma \Rightarrow |\sigma'| \leq |\sigma|.$$

Exemple. I. Fie:

$$[a, b] = [1, 3],$$

$$\sigma = \left(1, 2, \frac{5}{2}, 3\right), \quad |\sigma| = 1,$$

$$x = 1,5.$$

Avem:
$$\bar{\sigma} = \left(1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right), \quad |\bar{\sigma}| = \frac{1}{2},$$

și:
$$\bar{\sigma} < \sigma.$$

II. Fie, în plus:
$$\sigma' = \left(1, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, 3\right), \quad |\sigma'| = \frac{1}{2}.$$

Avem:
$$\bar{\sigma} \oplus \sigma' = \left(1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, 3\right),$$

$$|\bar{\sigma} \oplus \sigma'| = \frac{1}{4},$$

și:
$$\bar{\sigma} \oplus \sigma' < \sigma,$$

$$\bar{\sigma} \oplus \sigma' < \sigma'.$$

7.1.2 Funcții în scară pe un interval închis mărginit

■ Să ne reamintim că o funcție φ definită pe un interval închis și mărginit $[a, b]$ aparținând lui $\mathbb{R}$ este o funcție în scară pe $[a, b]$ dacă și numai dacă există o diviziune $\sigma = (a = x_0, x_1, \dots, x_n = b)$ a lui $[a, b]$ astfel încât restricția lui φ la orice interval de forma $]x_{i-1}, x_i[$ să fie o funcție constantă. O astfel de diviziune $\bar{\sigma}$ este numită *atașată* lui σ .

(Funcția φ este în același timp numită *atașată* lui σ).

În alți termeni, funcția φ este în scară pe $[a, b]$ dacă și numai dacă :

$$\exists \Sigma \sigma, \exists_{\mathbb{R}^n} (C_1, \dots, C_n), \forall_{\sigma^{-1}[(a, b)]} i, \forall_{]x_{i-1}, x_i[} \varphi(x) = C_i.$$

De remarcat că dacă o diviziune σ a lui $[a, b]$ este atașată unei funcții în scară φ , aceasta este valabilă și pentru orice diviziune σ' a lui $[a, b]$, mai fină decât σ . Printre diviziunile atașate unei funcții φ în scară pe $[a, b]$ există una mai puțin fină decât toate celelalte (exercițiul 7.3).

Ea este numită *atașată natural* lui φ .

Să ne reamintim printre altele că mulțimea $\mathcal{S}$ a funcțiilor în scară pe $[a, b]$ este un spațiu vectorial pe $\mathbb{R}$ (Alef₀, Algebră I, Mulțimi, aplicații, numere reale 7.3.5).

■ Fie f și g două funcții numerice definite pe intervalul închis mărginit $[a, b]$. Se spune că f este inferior lui g pe $[a, b]$ dacă și numai dacă :

$$\forall_{[a, b]x} f(x) \leq g(x);$$

se notează :

$$f \dashv g.$$

De asemenea se spune că f este superior lui g pe $[a, b]$ dacă și numai dacă :

$$\forall_{[a, b]x} f(x) \geq g(x),$$

și se notează :

$$f \vdash g.$$

Se verifică cu ușurință că această relație este o relație de ordine parțială în mulțimea $\mathcal{S}([a, b]; \mathbb{R})$ a aplicațiilor lui $[a, b]$ în $\mathbb{R}$ (exercițiul 7.4).

Fiind dată o funcție f definită și mărginită pe un interval închis mărginit $[a, b]$, vom examina ulterior două clase particulare de funcții în scară pe $[a, b]$ legate de f .

Vom nota cu e mulțimea de funcții în scară pe $[a, b]$, inferioare pe $[a, b]$ lui f , și cu E mulțimea de funcții în scară pe $[a, b]$ superioare pe $[a, b]$ lui f .

Dacă $\mathcal{S}$ este mulțimea de funcții în scară pe $[a, b]$, avem :

$$e \subset \mathcal{S}, E \subset \mathcal{S},$$

$$\varphi \in e \Leftrightarrow [\varphi \in \mathcal{S} \text{ și } \varphi \dashv f],$$

$$\Phi \in E \Leftrightarrow [\Phi \in \mathcal{S} \text{ și } \Phi \vdash f].$$

Funcția f fiind considerată mărginită pe $[a, b]$, e și E sînt nevide. Într-adevăr, dacă m și M sînt un minorant și respectiv un majorant a lui f pe $[a, b]$, funcțiile constante egale cu m și M pe $[a, b]$ aparțin lui e și respectiv lui E . Să notăm printre altele că :

$$\forall_e \varphi, \forall_E \Phi \quad \lambda \dashv \Phi.$$

■ Să considerăm o diviziune σ a intervalului închis mărginit $[a, b]$ și o funcție f definită și mărginită pe $[a, b]$. Fie e_σ mulțimea funcțiilor în scară a mulțimii e la care diviziunea σ este atașată. La fel se definește și mulțimea E_σ .

Să punem :

$$\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Funcția f fiind mărginită pe $[a, b]$ este de asemenea mărginită pe orice interval de forma $[x_{i-1}, x_i]$. Fie m_i marginea inferioară și M_i marginea superioară a lui f pe intervalul $]x_{i-1}, x_i[$.

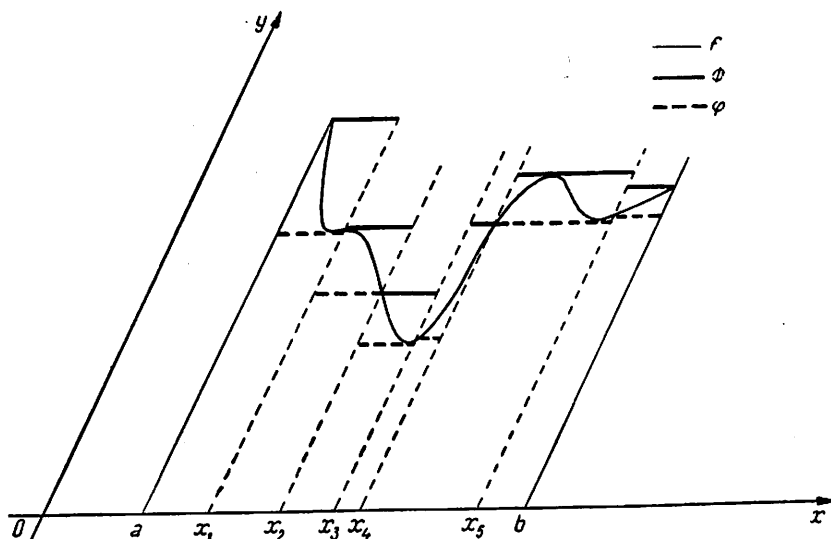


Fig. 1

Fie $\bar{\varphi}$ funcția în scară atașată diviziunii σ , definită prin :

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow \bar{\varphi}(x) = m_i.$$

Fie $\underline{\Phi}$ funcția în scară atașată diviziunii σ , definită prin :

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow \underline{\Phi}(x) = M_i.$$

$\bar{\varphi}$ este element maxim al lui E_σ pentru relația de ordine „ $\vdash$ ”.

$\underline{\Phi}$ este element minim al lui E_σ pentru relația de ordine „ $\vdash$ ”.

Interpretarea geometrică a acestor diferite funcții în scară atașate la f este imediată (fig. 1).

7.1.3 Integrala unei funcții în scară pe un interval închis mărginit

Fie mereu $[a, b]$ un interval închis mărginit ($a < b$), fie Σ mulțimea diviziunilor lui $[a, b]$, fie $\mathcal{S}$ mulțimea funcțiilor în scară pe $[a, b]$ și fie $\mathcal{S}_\sigma$ mulțimea funcțiilor în scară pe $[a, b]$ atașate unei diviziuni date σ .

Remarcăm (exercițiul 7.5) că :

$$\mathcal{S}_{\sigma \oplus \sigma'} \supset (\mathcal{S}_\sigma \cup \mathcal{S}_{\sigma'}),$$

și că :

$$\sigma' \prec \sigma \Rightarrow \mathcal{S}_{\sigma'} \supset \mathcal{S}_\sigma.$$

DEFINIȚIE. Fie φ o funcție în scară pe $[a, b]$ atașată unei diviziuni $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ a lui $[a, b]$. Se numește integrală a lui φ pe $[a, b]$ și se notează $I_a^b(\varphi)$, numărul:

$$I_a^b(\varphi) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \varphi(\xi_i),$$

cu :

$$\xi_i \in]x_{i-1}, x_i[.$$

φ fiind o funcție în scară atașată diviziunii σ avem :

$$\forall]x_{i-1}, x_i[\xi_i, \forall]x_{i-1}, x_i[\xi'_i \quad \varphi(\xi_i) = \varphi(\xi'_i)$$

Numărul $I_a^b(\varphi)$ nu depinde de alegerea lui ξ_i în intervalele $]x_{i-1}, x_i[$. El nu depinde nici de subdiviziunea σ atașată funcției φ utilizată (exercițiul 7.6). Fie φ un element a lui $\mathcal{S}_\sigma$, și φ' un element a lui $\mathcal{S}_{\sigma'}$. După remarcă de la început, avem :

$$(\mathcal{S}_\sigma \cup \mathcal{S}_{\sigma'}) \subset \mathcal{S}_{\sigma \oplus \sigma'},$$

deci :

$$\varphi \in \mathcal{S}_{\sigma \oplus \sigma'} \text{ și } \varphi' \in \mathcal{S}_{\sigma \oplus \sigma'}.$$

Fie :

$$\sigma \oplus \sigma' = (y_0, y_1, \dots, y_k);$$

avem :

$$I_a^b(\varphi) = \sum_1^k (y_i - y_{i-1}) \varphi(\zeta_i) \quad \zeta_i \in]y_{i-1}, y_i[;$$

$$I_a^b(\varphi') = \sum_1^k (y_i - y_{i-1}) \varphi'(\zeta'_i) \quad \zeta'_i \in]y_{i-1}, y_i[.$$

Funcția φ' fiind o funcție în scară atașată lui $\sigma \oplus \sigma'$, φ' este constantă pe intervalul $]y_{i-1}, y_i[$;

deci :

$$\varphi'(\zeta'_i) = \varphi'(\zeta_i).$$

Presupunem : $\varphi \leq \varphi'$.

Avem atunci, pentru orice x din $[a, b]$:

$$\varphi(x) \leq \varphi'(x).$$

Prin urmare, pentru orice i :

$$\varphi(\zeta_i) \leq \varphi'(\zeta_i),$$

și în consecință :

$$I_a^b(\varphi) \leq I_a^b(\varphi').$$

Putem deci enunța :

TEOREMA. Fie φ și φ' două funcții în scară pe intervalul închis și mărginit
1 $[a, b]$. Dacă φ este inferior lui φ' în $\mathcal{S}$ (relație de ordine „ $\leq$ ”),
atunci :

$$I_a^b(\varphi) \leq I_a^b(\varphi').$$

Adică, sub formă cuantificată :

$$\forall_{\mathcal{S}} \varphi, \quad \forall_{\mathcal{S}} \varphi' \quad [\varphi \vdash \varphi' \Rightarrow I_a^b(\varphi) \leq I_a^b(\varphi')].$$

■ Fie λ și μ două numere reale oarecare. Considerăm funcția $\varphi'' = \lambda\varphi + \mu\varphi'$; φ'' este o funcție în scară atașată diviziunii $\sigma \oplus \sigma'$. Avem deci :

$$\begin{aligned} I_a(\lambda\varphi + \mu\varphi') &= \sum_1^k (y_i - y_{i-1}) [\lambda\varphi(\zeta_i) + \mu\varphi'(\zeta_i)] \quad \zeta_i \in]y_{i-1}, y_i[\\ &= \sum_1^k [(y_i - y_{i-1})\lambda\varphi(\zeta_i) + (y_i - y_{i-1})\mu\varphi'(\zeta_i)] \\ &= \sum_1^k (y_i - y_{i-1})\lambda\varphi(\zeta_i) + \sum_1^k (y_i - y_{i-1})\mu\varphi'(\zeta_i) \\ &= \lambda I_a^b(\varphi) + \mu I_a^b(\varphi'). \end{aligned}$$

Putem deci enunța :

TEOREMA. Aplicația I_a^b a lui $\mathcal{S}$ în $\mathbf{R}$, care face să corespundă la orice funcție φ în scară pe $[a, b]$ integrala sa $I_a^b(\varphi)$ este o aplicație lineară a spațiului vectorial $\mathcal{S}$ în $\mathbf{R}$.

7.1.4 Interpretare geometrică

Fie P un plan afin euclidian înzestrat cu un reper ortonormat $\mathcal{R}$. Considerăm intuitivă noțiunea de arie a unui domeniu plan, măsurată cu aria u a pătratului construit pe vectorii unitate ai lui $\mathcal{R}$ ca unitate de arie.

Fie φ o funcție în scară pozitivă pe $[a, b]$ ($a < b$); $I_a^b(\varphi)$ apare ca o arie a unui domeniu plan U limitat de graficul lui φ în $\mathcal{R}$, axa absciselor și dreptele de ecuație $x = a$ și $x = b$, adică aria domeniului plan U_φ definit de (fig. 2) :

$$U_\varphi = \left\{ M; M \Big|_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq \varphi(x) \right\}.$$

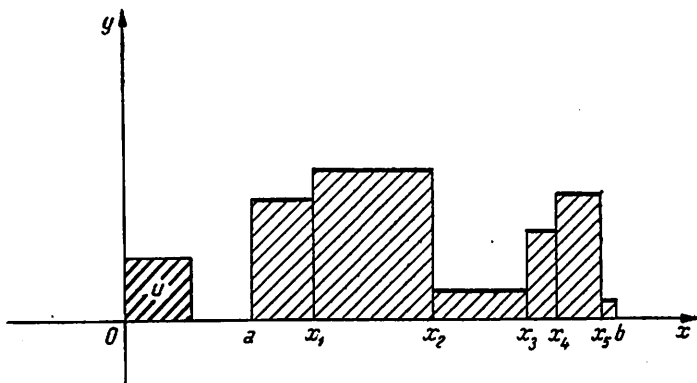


Fig. 2

Fie φ' o funcție în scară negativă pe $[a, b]$; $I_a^b(\varphi')$ apare ca aria unui domeniu plan U' definit de:

$$U' = \left\{ M; M|_x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. a \leq x \leq b, \varphi'(x) \leq y \leq 0 \right\},$$

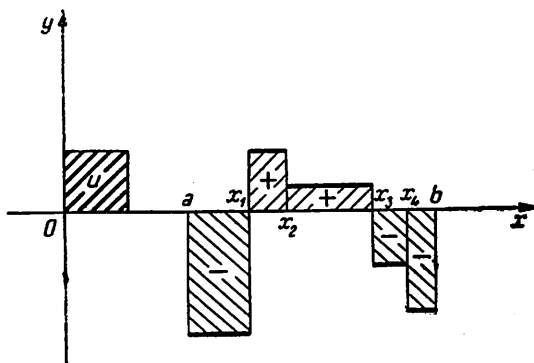


Fig. 3

această arie este socotită negativă. Fie φ_1 o funcție în scară pe $[a, b]$ care nu păstrează un semn constant.

Fie φ'_1 partea pozitivă a lui φ_1 și φ''_1 partea sa negativă.

Se scrie:

$$\forall_{[a,b]x} \varphi_1(x) \geq 0 \Rightarrow \varphi'_1(x) = \varphi_1(x) \text{ și } \varphi''_1(x) = 0;$$

$$\forall_{[a,b]x} \varphi_1(x) \leq 0 \Rightarrow \varphi'_1(x) = 0 \text{ și } \varphi''_1(x) = \varphi_1(x).$$

Avem:

$$\varphi_1 = \varphi'_1 + \varphi''_1$$

De unde:

$$I_a^b(\varphi_1) = I_a^b(\varphi'_1) + I_a^b(\varphi''_1).$$

$I_a^b(\varphi_1)$ apare deci ca diferență a ariilor domeniilor plane limitate de graficul lui φ' și de graficul lui φ'' (fig. 3).

7.1.5 Integrala unei funcții mărginite pe un interval închis și mărginit

Fie f o funcție definită și mărginită pe un interval închis mărginit $[a, b]$ ($a < b$). Păstrăm notațiile de la punctele precedente. Fie $\mathfrak{J}$ mulțimea integralelor pe $[a, b]$ a funcțiilor aparținând mulțimii e și fie $\mathfrak{J}$ mulțimea integralelor pe $[a, b]$ a funcțiilor aparținând mulțimii E .

Să ne amintim (Algebră, Numere reale, calcul numeric, numere complexe, 1.1.4) că două submulțimi A și B ale lui $\mathbb{R}$ se numesc adiacente dacă și numai dacă:

$$\forall_A x, \forall_B y \quad x \leq y,$$

și:

$$\forall_{B+\varepsilon}, \exists_A x, \exists_B y \quad |x - y| < \varepsilon,$$

și că două submulțimi A și B ale lui $\mathbb{R}$ adiacente au o margine comună care este majorant pentru A și minorant pentru B .

DEFINIȚIE. O funcție f , definită și mărginită pe un interval închis mărginit $[a, b]$ se numește integrabilă în sens Riemann pe $[a, b]$ dacă și numai dacă mulțimile $\mathfrak{J}$ și $\mathfrak{J}$ sînt adiacente.

Marginea comună I a lui $\mathfrak{J}$ și $\mathfrak{J}$ este numită integrala lui f pe $[a, b]$ și se notează :

$$I = \int_a^b f(t) dt.$$

Simbolul $\int_a^b$ se citește : „integrală de la a la b ”.

Observație. — Litera t simbolizează modul de formare a numărului I plecînd de la funcția f și intervalul $[a, b]$; t nu intervine în rezultat; o astfel de variabilă se numește *variabilă mută*. Litera t poate fi înlocuită în expresia integralei I cu oricare alt simbol :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

După 7.1.2 și 7.1.3, avem :

$$\forall_{\mathfrak{J}} \delta, \quad \forall_{\mathfrak{J}} \Delta \quad \delta \leq \Delta.$$

Într-adevăr :

$$\forall_{\mathfrak{J}} \delta, \exists_e \varphi_0 \quad \delta = I_a^b(\varphi_0),$$

$$\forall_{\mathfrak{J}} \Delta, \exists_E \Phi_0 \quad \Delta = I_a^b(\Phi_0);$$

sau :

$$\forall_e \varphi, \forall_E \Phi \quad \varphi \dashv \Phi,$$

și :

$$\varphi \dashv \Phi \Rightarrow I_a^b(\varphi) \leq I_a^b(\Phi).$$

Aceste două proprietăți aplicîndu-se în particular pentru φ_0 și Φ_0 , avem :

$$\delta \leq \Delta.$$

Prin urmare funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă și numai dacă :

$$\forall_{R^+ \cdot \varepsilon}, \exists_e \varphi, \exists_E \Phi \quad |I_a^b(\Phi) - I_a^b(\varphi)| < \varepsilon.$$

Numărul I este integrala funcției f pe $[a, b]$ dacă și numai dacă :

$$\forall_{R^+ \cdot \varepsilon}, \exists_e \varphi, \exists_E \Phi \quad |I - I_a^b(\varphi)| < \varepsilon \text{ și } |I - I_a^b(\Phi)| < \varepsilon.$$

Exemple. I. Fie φ o funcție în scară pe $[a, b]$.

În acest caz avem : $e \cap E = \{\varphi\}$.

De aici se deduce : $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J} = \{I_a^b(\varphi)\}$;

prin urmare, φ este integrabilă pe $[a, b]$ și în plus :

$$\int_a^b \varphi(t) dt = I_a^b(\varphi).$$

II. Fie f restricția la intervalul $[a, b]$ a funcției caracteristice a raționalelor χ_Q . Fie σ o diviziune oarecare a lui $[a, b]$. În orice interval $]x_{i-1}, x_i[$, există raționale și iraționale, deci numere a căror imagine prin f este 1 și alte numere a căror imagine prin f este 0. Orice funcție în scară din σ este prin urmare inferioară funcției constante egale cu zero, și orice funcție în scară din E este superioară funcției constante egale cu 1. Prin urmare orice element a lui $\mathcal{J}$ este mai mic ca zero și orice element al lui $\mathcal{I}$ este superior lui $b - a$. Rezultă că mulțimile $\mathcal{J}$ și $\mathcal{I}$ nu sînt adiacente și că f nu este integrabilă pe $[a, b]$ în sens Riemann (doar dacă $a = b$; vezi. 7.2.1)

7.1.6 Primul criteriu de integrabilitate

Fie σ o diviziune a intervalului închis mărginit $[a, b]$.

Fie f o funcție definită și mărginită pe $[a, b]$. Notăm:

$\mathcal{S}_\sigma$ mulțimea funcțiilor în scară pe $[a, b]$ atașate lui σ și

$\mathcal{I}_\sigma$ mulțimea integralelor lor pe $[a, b]$,

$\mathcal{e}_\sigma$ submulțimea lui $\mathcal{S}_\sigma$ formată din funcțiile inferioare lui f și $\mathcal{I}_\sigma$ mulțimea integralelor lor pe $[a, b]$,

$\mathcal{e}_\sigma$ submulțimea lui $\mathcal{S}_\sigma$ formată din funcțiile superioare (pe $[a, b]$) lui f și

$\mathcal{J}_\sigma$ mulțimea integralelor lor.

După proprietățile arătate în paragrafele precedente, $\mathcal{I}_\sigma$ admite un element maxim care este $I_a^b(\bar{\varphi})$ și $\mathcal{J}_\sigma$ admite un element minim care este $I_a^b(\Phi)$ (7.1.2). Pe de altă parte orice element al lui $\mathcal{S}_\sigma$ este inferior oricărui element al lui $\mathcal{J}_\sigma$. $\mathcal{S}_\sigma$ și $\mathcal{J}_\sigma$ nu sînt adiacente decît dacă $\bar{\varphi}' = \Phi$, adică dacă f este o funcție în scară atașată diviziunii σ . Nu putem avea $I_a^b(\bar{\varphi}) = I_a^b(\Phi)$ decît dacă $\bar{\varphi} = \Phi$, pent ru că dacă $\bar{\varphi} \neq \Phi$, oricare ar fi x , avem $\bar{\varphi}(x) \leq \Phi(x)$.

Se deduce că, dacă f nu este o funcție în scară pe $[a, b]$, mulțimile $\mathcal{S}_\sigma$ și $\mathcal{J}_\sigma$ nu sînt adiacente.

Punînd:

$$S_\sigma = I_a^b(\Phi) \text{ și } s_\sigma = I_a^b(\bar{\varphi}).$$

Avem:

$$\begin{aligned} S_\sigma - s_\sigma &= \sum_1^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_1^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_1^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Mulțimea $\mathcal{J}$ (respectiv mulțimea $\mathcal{I}$) este reuniunea mulțimilor $\mathcal{J}_\sigma$ (respectiv a mulțimilor $\mathcal{I}_\sigma$), unde σ aparține mulțimilor Σ a diviziunilor lui $[a, b]$.

Dacă funcția f este integrabilă, pentru orice ε real nenul se poate găsi o diviziune σ_0 a lui $[a, b]$ astfel ca diferența între cel mai mare element a lui $\mathcal{S}_{\sigma_0}$ și cel mai mic element al lui $\mathcal{J}_{\sigma_0}$ să fie inferioară lui ε . Această diferență este $S_{\sigma_0} - s_{\sigma_0}$. Dacă $|\sigma_0|$ este modulul lui σ_0 avem:

$$S_{\sigma_0} - s_{\sigma_0} \geq (M_j - m_j) |\sigma_0|,$$

unde j este așa ca:

$$x_j - x_{j-1} = |\sigma_0|.$$

Prin urmare:

$$S_{\sigma_0} - s_{\sigma_0} \geq \inf_i (M_i - m_i) |\sigma_0|.$$

Presupunem că, în plus, f nu este constantă pe nici un subinterval al lui $[a, b]$. Cel mai mic număr $M_i - m_i$ este atunci nenul și pentru a face $S_\sigma - s_\sigma$ inferior lui ε trebuie să se facă $|\sigma_0|$ inferior unei anumite valori.

Reciproc, admitem că este posibil a găsi un număr real nenul η și astfel că dacă $|\sigma_0|$ este inferior lui η atunci $S_\sigma - s_\sigma$ este inferior lui ε .

Pe de altă parte dacă, fiind dat un număr real pozitiv oarecare nenul ε se poate găsi o subdiviziune σ_1 a lui $[a, b]$ astfel că $S_{\sigma_1} - s_{\sigma_1}$ să fie inferior lui ε , atunci mulțimile $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ sînt adiacente și funcția f este integrabilă pe $[a, b]$.

Se poate deci enunța :

TEOREMA. O funcție f definită și mărginită pe un interval închis mărginit $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$ (în sens Riemann) dacă și numai dacă :

$$\forall_{\mathbb{R}^{++}\varepsilon}, \exists_{\mathbb{R}^{++}\eta}, \forall_{\Sigma\sigma} \quad |\sigma| < \eta \Rightarrow S_\sigma - s_\sigma < \varepsilon.$$

Această proprietate seamănă mult cu o proprietate a limitelor, dar aplicația lui Σ în $\mathbb{R}$ care la orice diviziune a lui $[a, b]$ face să corespundă numărul $S_\sigma - s_\sigma$ nu este o funcție de variabilă reală, funcțiile de acest tip fiind singurele la care am studiat limitele. Pe de altă parte, la orice număr real ρ inferior lui $b - a$ corespunde o infinitate de diviziuni ale lui $[a, b]$ al cărei modul este ρ . Nu există deci funcții care să facă să corespundă la un număr real dat o diferență unică $S_\sigma - s_\sigma$.

Se spune în același timp, impropriu, că f este integrabilă dacă și numai dacă diferența $S_\sigma - s_\sigma$ tinde către zero cînd $|\sigma|$ tinde către zero.

În aceste condiții S_σ și s_σ au aceeași „limită” care nu este alta decît integrala

$$I = \int_a^b f(t) dt.$$

7.1.7 Sume Riemann

DEFINIȚIE. Fie f o funcție definită și mărginită pe un interval închis, mărginit $[a, b]$. Fie σ o subdiviziune a lui $[a, b]$. Se numește sumă Riemann atașată subdiviziunii σ și funcției f orice sumă de forma :

$$R = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(\xi_i),$$

în care ξ_i este un element al intervalului $]x_{i-1}, x_i[$.

Fiind dată o subdiviziune σ , există o infinitate de sume Riemann asociate la σ . Fie $\mathcal{R}_\sigma$ această mulțime.

Cu notația de la 7.1.6, un element al lui $\mathcal{R}_\sigma$ apare ca integrala pe $[a, b]$ a unei funcții în scară superioară pe $[a, b]$ lui $\overline{\varphi}$, și inferioară pe $[a, b]$ lui $\underline{\Phi}$.

Pe de altă parte, S_σ și s_σ sînt sume Riemann particulare, atașate lui σ și f . Mulțimile $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ pe de o parte și $\mathcal{R}_\sigma$ și $\mathcal{J}_\sigma$ pe de alta sînt adiacente.

După 7.1.6, o funcție f este integrabilă pe $[a, b]$ și integrala sa pe $[a, b]$ este numărul I dacă și numai dacă :

$$\forall_{\mathbb{R}^{++}\varepsilon}, \exists_{\mathbb{R}^{++}\eta}, \forall_{\Sigma\sigma} \quad |\sigma| < \eta \Rightarrow S_\sigma - s_\sigma < \varepsilon;$$

în acest caz avem :

$$\begin{cases} I - s_\sigma < \varepsilon \\ S_\sigma - I < \varepsilon. \end{cases}$$

Numărul I aparține tuturor intervalelor $[s_\sigma, S_\sigma]$. Avem deci pentru orice diviziune σ :

$$\mathcal{R}_\sigma \subset [s_\sigma, S_\sigma].$$

Avem întotdeauna :

$$s_\sigma \leq S_\sigma.$$

Rezultă că intersecția tuturor acestor intervale nu este vidă.

Funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă și numai dacă pentru orice ε , există o diviziune σ astfel ca $S_\sigma - s_\sigma$ să fie inferioară lui ε , ceea ce revine la a spune că se poate găsi σ astfel ca mulțimea $\mathcal{R}_\sigma$ a sumelor Riemann atașate funcției f și diviziunii σ să fie incluse într-un interval „oricât de mic dorim”, acest interval conținând de asemenea numărul I .

Ceea ce se poate rezuma, impropriu, spunând că o funcție f definită și mărginită pe un interval închis mărginit $[a, b]$ este integrabilă (în sens Riemann) pe $[a, b]$ dacă și numai dacă sumele Riemann atașate lui f și σ tind toate către aceeași limită I atunci când $|\sigma|$ tinde către zero. Această limită comună I este

$$\text{integrala } \int_a^b f(t) dt.$$

7.1.8 Clase importante de funcții integrabile

■ FUNCȚII MONOTONE

Fie f o funcție monotonă pe un interval închis, mărginit $[a, b]$. Pentru o diviziune σ , avem :

$$S_\sigma = \sum_1^n (x_i - x_{i-1}) M_i,$$

$$s_\sigma = \sum_1^n (x_i - x_{i-1}) m_i.$$

Presupunem funcția f crescătoare. În acest caz avem :

$$m_i = f(x_{i-1}), \quad M_i = f(x_i);$$

de unde :

$$S_\sigma - s_\sigma = \sum_1^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_1^n (M_i - m_i)|\sigma|.$$

adică :

$$S_\sigma - s_\sigma \leq |\sigma| \cdot \sum_1^n [f(x_i) - f(x_{i-1})],$$

$$S_\sigma - s_\sigma \leq |\sigma| [f(b) - f(a)].$$

Diferența $S_\sigma - s_\sigma$ tinde către zero atunci când $|\sigma|$ tinde către zero; ca urmare, f este integrabilă pe $[a, b]$.

Dacă funcția f este descrescătoare, se face o demonstrație analoagă. Se poate enunța:

TEOREMA. O funcție f , monotonă pe un interval închis, mărginit $[a, b]$, este
1 integrabilă pe $[a, b]$.

■ FUNCȚII CONTINUE.

Admitem următoarea teoremă:

TEOREMA. O funcție f definită și continuă pe un interval închis, mărginit
2 $[a, b]$, este integrabilă pe $[a, b]$.

■ Aceste două clase de funcții integrabile sînt cele mai importante; în același timp există funcții integrabile pe un interval închis, mărginit $[a, b]$ care nu sînt nici continue, nici monotone, nici măcar continue sau monotone pe porțiuni.

EXERCIIII

7.1 Fie $[a, b]$ un interval închis, mărginit și fie Σ mulțimea diviziunilor lui $[a, b]$.

1° Să se demonstreze că relația „ $<$ ” definită la 7.1.1 este o relație de ordine parțială pe Σ .
2° Să se demonstreze că în Σ există un element maxim pentru $<$ (adică o diviziune a lui $[a, b]$ mai puțin fină decît toate celelalte).

3° Să se demonstreze că în Σ nu există un element minim pentru $<$ (mai fin decît toate celelalte diviziuni ale lui Σ).

7.2 Să se demonstreze că dacă o diviziune σ' a unui interval închis, mărginit $[a, b]$ este mai fină decît o altă diviziune σ , atunci norma lui σ' este inferioară sau egală cu norma lui σ . Proprietatea reciprocă, este adevărată?

7.3 Să se demonstreze că printre diviziunile atașate unei funcții în scară φ pe un interval închis, mărginit $[a, b]$ există una mai puțin fină decît toate celelalte. Există una mai fină decît toate celelalte?

7.4 Fie $\mathcal{F}([a, b]; \mathbb{R})$ mulțimea aplicațiilor lui $[a, b]$ în $\mathbb{R}$. Să se demonstreze că relația „ $\leq$ ” definită pe $\mathcal{F}([a, b]; \mathbb{R})$ prin:

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall_{[a, b]^x} f(x) \leq g(x),$$

este o relație de ordine parțială.

7.5 1° Să se demonstreze că, dacă $\mathcal{S}_\sigma$ este mulțimea de funcții în scară atașată unei diviziuni σ a lui $[a, b]$, dacă σ' este mai fină ca σ , atunci $\mathcal{S}_\sigma$ este inclus în $\mathcal{S}_{\sigma'}$.

2° Să se demonstreze că oricare ar fi diviziunile σ și σ' a lui $[a, b]$ avem:

$$\mathcal{S}_\sigma \cup \mathcal{S}_{\sigma'} \subset \mathcal{S}_{\sigma \oplus \sigma'}.$$

Să se dea un exemplu care să dovedească că incluziunea poate fi strictă.

7.6 Să se demonstreze că integrala pe $[a, b]$ a unei funcții φ în scară pe $[a, b]$ nu depinde de subdiviziunea atașată lui φ utilizată pentru a o calcula.

7.7 Fie intervalul $[0, 1]$ închis, mărginit și fie funcția f , restricția la $[0, 1]$ a funcției χ_E funcția caracteristică a mulțimii E a inverselor numerelor întregi naturale nenule $\left(E = \left\{ x; x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \right)$.

Să se demonstreze că f este integrabilă pe $[0, 1]$ în sens Riemann. Care este integrala sa?

7.8 Fie f o funcție integrabilă pe un interval închis, mărginit $[a, b]$. Fie g o funcție definită astfel:

E este o mulțime finită de puncte din $[a, b]$;

$x \in E \Leftrightarrow g(x) = C$, unde C este un număr real oarecare;

$x \notin E \Leftrightarrow g(x) = f(x)$.

Să se demonstreze că g este integrabilă în sens Riemann pe $[a, b]$ și că:

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

7.9 Fie intervalul $[0, 1]$. Se construiește o mulțime K în modul următor. Se scoate întâi treimea centrală deschisă a intervalului $[0, 1]$, apoi treimea centrală deschisă a fiecărui interval închis rămas după operația precedentă, și astfel în continuare divizind de fiecare dată intervalele nesuprimate încă în trei părți egale și scoțind partea centrală. Mulțimea astfel obținută se numește mulțimea lui Cantor. Să se demonstreze că funcția χ_K , funcția caracteristică a mulțimii K , este integrabilă în sens Riemann. Care este integrala sa? (Considerați pe intervalul $[0, 1]$ diviziunea σ formată din punctele de abscisă $\frac{k}{3^n}$; calculați $S_\sigma - s_\sigma$, apoi faceți pe n să tindă la infinit).

7.2 PROPRIETĂȚILE INTEGRALEI

7.2.1 Proprietăți legate de intervalul de integrare

■ Fie f o funcție definită într-un punct a . Să studiem integrala funcției f pe intervalul închis, mărginit $[a, a]$. Orice funcție definită pe $[a, a]$ este o funcție în scară pe $[a, a]$. Integrala oricărei funcții în scară φ pe $[a, a]$ este nulă:

$$I_a^a(\varphi) = (a - a)\varphi(a).$$

Ca urmare:

$$\mathcal{J} = \{0\}, \quad \mathcal{I} = \{0\}.$$

Aceste două mulțimi sînt adiacente și admit 0 ca limită comună. S-a obținut următoarea teoremă:

TEOREMA. Oricare ar fi funcția f , definită, deci mărginită pe intervalul $[a, a]$,
1 integrala sa pe $[a, a]$ există și este nulă:

$$\int_a^a f(t) dt = 0.$$

■ Fie f o funcție definită și mărginită pe un interval închis, mărginit $[a, b]$. Oricărei diviziuni $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ a lui $[a, b]$ îi corespunde o diviziune $\sigma_1 = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ a lui $[b, a]$ astfel că $y_i = x_{n-i}$. Intervalul $]x_{i-1}, x_i[$ este egal cu intervalul $]y_{n-i}, y_{n-i+1}[$. Ca urmare, dacă M_i și m_i sînt marginile superioare și respectiv inferioare ale funcției f pe intervalul $]x_{i-1}, x_i[$, acestea sînt de asemenea marginile funcției f pe intervalul $]y_{n-i}, y_{n-i+1}[$.

Avem:

$$S_\sigma = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})M_i = \sum_{i=1}^n (y_{n-i} - y_{n-i+1})M_i,$$

sau, dacă punem $n - i + 1 = j$:

$$S_{\sigma} = \sum_{j=1}^n (y_{j-1} - y_j) M_j,$$

$$S_{\sigma} = - \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i-1}) M_i \text{ (deoarece } M_i = M_j),$$

adică: $S_{\sigma} = -S_{\sigma_1};$

la fel: $s_{\sigma} = -s_{\sigma_1}.$

Dacă funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ și dacă $I = \int_a^b f(t) dt$:

$$\forall_{\epsilon > 0}, \exists_{\eta > 0}, \forall_{\Sigma \sigma} |\sigma| < \eta \Rightarrow [|I - s_{\sigma}| < \epsilon \text{ și } |I - s_{\sigma_1}| < \epsilon].$$

Ca urmare și deoarece:

$$-(I - S_{\sigma}) = -I + S_{\sigma} = -I - S_{\sigma_1},$$

și pentru că: $-(I - s_{\sigma}) = -I - s_{\sigma_1},$

avem:

$$\forall_{\epsilon > 0}, \exists_{\eta > 0}, \forall_{\Sigma_1 \sigma_1} |\sigma_1| < \eta \Rightarrow [| - I - S_{\sigma_1}| < \epsilon \text{ și } | - I - s_{\sigma_1}| < \epsilon].$$

(Σ reprezintă mulțimea de diviziuni ale lui $[a, b]$ și Σ_1 mulțimea de diviziuni ale lui $[b, a]$, mulțimi în corespondență bijectivă.) Se poate deci enunța următoarea teoremă:

TEOREMA. Fie f o funcție mărginită și integrabilă pe intervalul închis, mărginit $[a, b]$; funcția f este integrabilă de asemenea pe $[b, a]$, și avem:

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

Fie f o funcție integrabilă pe un interval închis, mărginit $[a, b]$. Fie $I = \int_a^b f(t) dt$ și fie c un punct al lui a, b .

Fiecărei diviziuni σ a lui $[a, b]$ îi corespunde o diviziune σ^* a lui $[a, b]$, obținută prin adăugarea lui c la σ (7.1.1.).

Restricțiile $\sigma_1 = \sigma^*| [a, c]$ și $\sigma_2 = \sigma^*| [c, b]$ sînt respectiv diviziuni ale lui $[a, c]$ și $[c, b]$.

Avem:

$$S_{\sigma^*} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i.$$

Să presupunem:

$$c = x_p,$$

Avem :

$$S_{\sigma^*} = \sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1})M_i + \sum_{i=k+1}^n (x_i - x_{i-1})M_i = S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2}.$$

De asemenea, avem :

$$s_{\sigma^*} = s_{\sigma_1} + s_{\sigma_2}.$$

Funcția f fiind integrabilă pe $[a, b]$ și $S_{\sigma} - s_{\sigma}$ fiind pozitivă, rezultă :

$$\forall_{R^{+*}} \varepsilon, \exists_{R^{+*}} \eta, \forall_{\Sigma \sigma} |\sigma| < \eta \quad S_{\sigma} - s_{\sigma} < \varepsilon.$$

Deoarece, pe de altă parte :

$$S_{\sigma} - s_{\sigma} = (S_{\sigma_1} - s_{\sigma_1}) + (S_{\sigma_2} - s_{\sigma_2}),$$

și deoarece $S_{\sigma_1} - s_{\sigma_1}$ și $S_{\sigma_2} - s_{\sigma_2}$ sînt pozitive, am arătat că pentru ori ce ε real, pozitiv și nenul există o diviziune σ_1 a lui $[a, c]$ și o diviziune σ_2 a lui $[c, b]$ astfel ca :

$$S_{\sigma_1} - s_{\sigma_1} < \varepsilon \text{ și } S_{\sigma_2} - s_{\sigma_2} < \varepsilon.$$

Funcția f este deci integrabilă pe $[a, c]$ și pe $[c, b]$.

Reciproca : dacă funcția f este integrabilă pe $[a, c]$ și pe $[c, b]$ oricare ar fi ε real, pozitiv nenul, există o diviziune σ_1 a lui $[a, c]$ și o diviziune σ_2 a lui $[c, b]$ astfel ca :

$$S_{\sigma_1} - s_{\sigma_1} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ și } S_{\sigma_2} - s_{\sigma_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie σ diviziunea lui $[a, b]$ astfel ca $\sigma_1 = \sigma|_{[a, c]}$ și $\sigma_2 = \sigma|_{[c, b]}$. Această diviziune este astfel că :

$$S_{\sigma} - s_{\sigma} = S_{\sigma_1} - s_{\sigma_1} + S_{\sigma_2} - s_{\sigma_2} < \varepsilon.$$

Funcția f este deci integrabilă pe $[a, b]$.

TEOREMA Fie f o funcție definită și mărginită pe un interval închis mărginit
3 $[a, b]$, și fie c un element a lui $]a, b[$.

Funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă și numai dacă este integrabilă pe $[a, c]$ și $[c, b]$.

În aceste condițiuni, fie :

$$I_1 = \int_a^c f(t) dt \text{ și } I_2 = \int_c^b f(t) dt.$$

Avem :

$$\forall_{R^{+*}} \varepsilon, \exists_{R^{+*}} \eta, \forall_{\Sigma \sigma}$$

$$|\sigma| < \eta \Rightarrow \begin{cases} |I_1 - S_{\sigma_1}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ și } |I_1 - s_{\sigma_1}| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |I_2 - S_{\sigma_2}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ și } |I_2 - s_{\sigma_2}| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}.$$

Ca urmare, rezultă :

$$|I_1 + I_2 - S_\sigma| < \varepsilon \text{ și } |I_1 + I_2 - s_\sigma| < \varepsilon$$

S-a dedus că $I_1 + I_2$ este integrala I pe $[a, b]$ a funcției f .

Fie f o funcție definită, mărginită și integrabilă pe un interval închis, mărginit $[a, b]$ și fie c un element al lui $]a, b[$. În acest caz avem :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Observație. — Din teorema 3 se deduce imediat că dacă f este o funcție integrabilă pe un interval $[a, b]$ închis, mărginit, ea este integrabilă pe orice interval $[\alpha, \beta]$ în care α și β sînt elemente ale lui $[a, b]$.

Fie a, b și c trei numere reale, și fie f o funcție integrabilă pe cele trei intervale închise, mărginite $[a, b]$, $[a, c]$ și $[b, c]$. Dacă c nu aparține intervalului $]a, b[$, să presupunem că a aparține intervalului $]c, b[$. Avem, conform cu proprietatea precedentă :

$$\int_c^b f(t) dt = \int_c^a f(t) dt + \int_a^b f(t) dt,$$

sau, ținînd seama de teorema 2 :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Tot astfel se demonstrează că această proprietate este valabilă indiferent care ar fi poziția punctelor a, b și c .

TEOREMA Fie a, b și c trei numere reale și fie f o funcție mărginită, integrabilă pe un interval închis, mărginit, conținînd pe a, b și c .
4 Atunci avem :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Această proprietate foarte importantă permite enunțarea următoarei teoreme, a cărei demonstrare este ușoară, împărțind intervalul $[a, b]$ în subintervale în care funcția f este continuă sau monotonă.

TEOREMA Fie $[a, b]$ un interval închis, mărginit. Orice funcție f definită, mărginită, continuă pe porțiuni sau monotonă pe porțiuni pe $[a, b]$
5 este integrabilă pe $[a, b]$.

Observație. — Dacă f este impar :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0;$$

dacă f este par :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt \quad (7.20)$$

7.2.2 Proprietățile relative la funcții

■ Fie f o funcție definită, mărginită, integrabilă pe un interval închis, mărginit $[a, b]$ ($a < b$). Să presupunem că pentru orice x al lui $[a, b]$, $f(x)$ este pozitiv sau nul. La fel și pentru orice funcție în scară a mulțimii E (7.1.2). Pe de altă parte, integrala pe $[a, b]$ ($a < b$) a unei funcții în scară pozitivă, este pozitivă. Mulțimea $\mathcal{J}$ (7.1.5) este deci o mulțime de numere reale, pozitive. Limita sa inferioară este deci pozitivă sau nulă. Or, această limită inferioară nu este alta decât integrala lui f pe $[a, b]$.

TEOREMA Fie f o funcție mărginită, integrabilă pe un interval închis mărginit

1 $[a, b]$ ($a < b$). Dacă f este pozitiv pe $[a, b]$, atunci $\int_a^b f(t) dt$ este un număr real, pozitiv sau nul :

$$[a < b \text{ și } \forall_{[a, b]} x \quad f(x) \geq 0] \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

Reciproca acestei teoreme este falsă.

Fie, de exemplu, φ funcția în scară, definită pe intervalul $[1, 2]$ prin $\varphi(1) = -1$ și $\varphi(x) = 1$ pentru x diferit de 1.

Avem :

$$\int_a^b \varphi(t) dt = I_a^b(\varphi) = 1,$$

și φ nu este pozitiv pe $[a, b]$.

Se pot găsi cu ușurință și alte exemple asemănătoare.

■ Fie f o funcție mărginită, integrabilă pe un interval închis, mărginit $[a, b]$.

Fie σ o subdiviziune a lui $[a, b]$. Să luăm de asemenea (7.16) :

$$S_\sigma = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i,$$

$$s_\sigma = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i,$$

unde M_i și m_i sînt marginile superioară și respectiv inferioară a lui f pe $]x_{i-1}, x_i[$.

Fie funcția $-f$ definită pe $[a, b]$.

Avem în aceleași condițiuni:

$$S'_\sigma = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M'_i,$$

$$s'_\sigma = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m'_i,$$

cu:

$$M'_i = -m_i \text{ și } m'_i = -M_i.$$

Ca urmare:

$$s'_\sigma = -S_\sigma \text{ și } S'_\sigma = -s_\sigma.$$

Funcția f fiind integrabilă pe $[a, b]$, avem:

$$\forall_{\epsilon > 0}, \exists_{\Sigma \sigma_0} \left| S_{\sigma_0} - \int_a^b f(t) dt \right| < \epsilon \text{ și } \left| s_{\sigma_0} - \int_a^b f(t) dt \right| < \epsilon.$$

S-a dedus:

$$\forall_{\epsilon > 0}, \exists_{\Sigma \sigma_0} \left| s'_{\sigma_0} + \int_a^b f(t) dt \right| < \epsilon \text{ și } \left| S'_{\sigma_0} + \int_a^b f(t) dt \right| < \epsilon.$$

În consecință, funcția $-f$ este integrabilă pe $[a, b]$ și:

$$\int_a^b -f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

■ Fie f și g două funcții mărginite și integrabile pe un interval închis, mărginit $[a, b]$, și fie λ și μ două numere reale, pozitive.

Fie e_f (respectiv e_g, e) mulțimea funcțiilor în scară pe $[a, b]$ inferioare pe $[a, b]$ funcției f (respectiv $g, \lambda f + \mu g$). Fie de asemenea $\bar{E}_f$ (respectiv $E_g, \bar{E}$) mulțimea de funcții în scară pe $[a, b]$ superioare pe $[a, b]$ funcției f (respectiv $g, \lambda f + \mu g$) (vezi 7.1).

Fie ϵ un număr real, nenul; i și g fiind integrabile pe $[a, b]$, există funcțiile în scară φ, φ', Φ și Φ' astfel ca;

$$\varphi \in e_f, \varphi' \in e_g,$$

$$\Phi \in E_f, \Phi' \in E_g,$$

$$\left| I_a^b(\varphi) - \int_a^b f(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{2|\lambda|} \text{ și } \left| I_a^b(\Phi) - \int_a^b f(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{2|\lambda|},$$

$$\left| I_a^b(\varphi') - \int_a^b g(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{2|\mu|}, \text{ și } \left| I_a^b(\Phi') - \int_a^b g(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{2|\mu|}.$$

Prin urmare :

$$\left| \lambda I_a^b(\varphi) + \mu I_a^b(\varphi') - \lambda \int_a^b f(t) dt - \mu \int_a^b g(t) dt \right| < \varepsilon,$$

și

$$\left| \lambda I_a^b(\Phi) + \mu I_a^b(\Phi') - \lambda \int_a^b f(t) dt - \mu \int_a^b g(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Pe de altă parte (7.1.3) :

$$\lambda I_a^b(\varphi) + \mu I_a^b(\varphi') = I_a^b(\lambda\varphi + \mu\varphi'),$$

$$\lambda I_a^b(\Phi) + \mu I_a^b(\Phi') = I_a^b(\lambda\Phi + \mu\Phi').$$

Mai mult, λ și μ fiind numere reale, pozitive :

$$\varphi \in e_f \text{ și } \varphi' \in e_g \Rightarrow \lambda\varphi + \mu\varphi' \in e,$$

$$\Phi \in E_f \text{ și } \Phi' \in E_g \Rightarrow \lambda\Phi + \mu\Phi' \in E.$$

ε fiind un număr real, pozitiv nenul, am găsit o funcție $\psi = \lambda\varphi + \mu\varphi'$ din e și o funcție $\Psi = \lambda\Phi + \mu\Phi'$ din E astfel ca :

$$\left| I_a^b(\psi) - \left(\lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt \right) \right| < \varepsilon,$$

și

$$\left| I_a^b(\Psi) - \left(\lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt \right) \right| < \varepsilon.$$

S-a dedus (7.1.5) că funcția $\lambda f + \mu g$ este integrabilă pe $[a, b]$ și că :

$$\int_a^b [\lambda f + \mu g](t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

Să presupunem acum că λ și μ sînt numere reale de semne oarecare. Să ne întoarcem la cazul numerelor pozitive utilizînd eventual funcțiile $-f$ și $-g$, și aplicînd proprietatea :

$$\int_a^b -f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt,$$

se demonstrează aceeași formulă.

TEOREMA Dacă f și g sînt două funcții mărginite, integrabile pe intervalul închis, mărginit $[a, b]$, și λ și μ sînt două numere reale oarecare, atunci funcția $\lambda f + \mu g$ este mărginită și integrabilă pe $[a, b]$.
 În plus:

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

De aici rezultă că mulțimea H a funcțiilor mărginite, și integrabile pe un interval închis, mărginit $[a, b]$ este un spațiu vectorial pe $\mathbb{R}$, și că aplicația, care face

să corespundă pentru orice funcție f din H integrala sa $I = \int_a^b f(t) dt$ pe $[a, b]$

este o aplicație lineară (7.2.3).

■ Fie f o funcție mărginită, integrabilă pe un interval închis, mărginit $[a, b]$. Fie $|f|$ funcția care pentru orice x a lui $[a, b]$ face să corespundă $|f|(x) = |f(x)|$.

Să punem, pentru orice diviziune σ a lui $[a, b]$:

$$S_\sigma = \sum_1^n (x_i - x_{i-1})M_i, \quad S'_\sigma = \sum_1^n (x_i - x_{i-1})M'_i,$$

$$s_\sigma = \sum_1^n (x_i - x_{i-1})m_i, \quad s'_\sigma = \sum_1^n (x_i - x_{i-1})m'_i,$$

în care M_i și m_i sînt marginile superioară și inferioară ale lui f pe $]x_{i-1}, x_i[$, în care M'_i și m'_i sînt marginile superioară și inferioară ale lui $|f|$ pe $]x_{i-1}, x_i[$. După semnul lui $f(x)$ pe $]x_{i-1}, x_i[$ se pot prezenta trei cazuri:

1° Dacă $f(x)$ este pozitivă pe $]x_{i-1}, x_i[$:

$$M'_i = M_i \text{ și } m'_i = m_i;$$

avem atunci:

$$M'_i - m'_i = M_i - m_i;$$

2° Dacă $f(x)$ este negativă pe $]x_{i-1}, x_i[$:

$$M'_i = -m_i \text{ și } m'_i = -M_i;$$

avem atunci:

$$M'_i - m'_i = -m_i + M_i = M_i - m_i.$$

3° Dacă $f(x)$ nu este de semn constant pe $]x_{i-1}, x_i[$ atunci M'_i este cel mai mare dintre numerele M_i și $-m_i$, și m'_i este un număr pozitiv.

a) Dacă $M'_i = M_i$, atunci:

$$M'_i - m'_i \leq M_i;$$

dar:

$$M_i - m_i > M_i \text{ căci } m_i \text{ este negativ};$$

deci:

$$M'_i - m'_i \leq M_i - m_i.$$

b) Dacă $M'_i = -m_i$, atunci:

$$M'_i - m'_i \leq -m_i \leq M_i - m_i.$$

Deci, în toate cazurile:

$$M'_i - m'_i \leq M_i - m_i.$$

Se deduce:

$$0 \leq S'_\sigma - s'_\sigma \leq S_\sigma - s_\sigma.$$

Funcția f fiind integrabilă pe $[a, b]$ și fiind dat un număr ε real, pozitiv, nenul, există o diviziune σ a lui $[a, b]$, astfel ca:

$$S_\sigma - s_\sigma \leq \varepsilon,$$

deci, astfel că:

$$S'_\sigma - s'_\sigma \leq \varepsilon.$$

Prin urmare, funcția $|f|$ este integrabilă pe $[a, b]$.

Fie f_1 (respectiv f_2) partea pozitivă (respectiv negativă) a lui f :

$$[f_1(x) = f(x) \text{ și } f_2(x) = 0] \Leftrightarrow f(x) \geq 0,$$

$$[f_2(x) = -f(x) \text{ și } f_1(x) = 0] \Leftrightarrow f(x) < 0.$$

Avem:

$$f = f_1 - f_2,$$

$$|f| = f_1 + f_2,$$

$$\forall_{[a, b]x} f_1(x) \geq 0 \text{ și } f_2(x) \geq 0.$$

Funcțiile f și $|f|$ fiind integrabile pe $[a, b]$, se deduce din teorema 2 că funcțiile

$f_1 = \frac{f + |f|}{2}$ și $f_2 = \frac{|f| - f}{2}$ sînt integrabile. Avem, printre altele:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f_1(t) dt - \int_a^b f_2(t) dt,$$

$$\int_a^b |f(t)| dt = \int_a^b f_1(t) dt + \int_a^b f_2(t) dt.$$

De aici rezultă:

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left| \int_a^b f_1(t) dt \right| + \left| \int_a^b f_2(t) dt \right|.$$

Dar f_1 și f_2 sînt două funcții pozitive pe $[a, b]$. Ca urmare (Teorema 1):

$$\int_a^b f_1(t) dt \geq 0 \text{ și } \int_a^b f_2(t) dt \geq 0;$$

deci :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b f_1(t) dt + \int_a^b f_2(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

TEOREMA 3 Fie f o funcție mărginită, integrabilă pe intervalul închis, mărginit $[a, b]$. Funcția $|f|$ este deci integrabilă pe $[a, b]$. Mai mult :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Observație. — Invers, există funcții neintegrabile pe un interval închis, mărginit $[a, b]$, în timp ce valoarea lor absolută este integrabilă pe $[a, b]$. Fie, de exemplu, dacă se notează cu $\mathbf{I}$ mulțimea numerelor iraționale, funcția f definită pe $\mathbf{R}$ prin :

$$f = \chi_{\mathbf{Q}} - \chi_{\mathbf{I}}.$$

Avem :

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \mathbf{Q},$$

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow x \in \mathbf{I} = \mathbf{R} - \mathbf{Q}$$

deci, pentru orice număr real x :

$$|f|(x) = 1 = |f(x)|.$$

Funcția $f^* = |f|$ pe $[0, 1]$ nu este integrabilă pe $[0, 1]$ (vezi 7.1.5, Exemplul II). Din contra, funcția $|f^*|$ este integrabilă pe $[0, 1]$, și avem :

$$\int_0^1 |f^*(t)| dt = 1.$$

f^* este într-adevăr o funcție în scară pe $[0, 1]$.

7.2.3 Spațiu vectorial al funcțiilor integrabile pe $[a, b]$

Fie $\mathfrak{I}([a, b]; \mathbf{R})$ mulțimea funcțiilor mărginite, definite și integrabile pe intervalul închis, mărginit $[a, b]$ ($a < b$). Dacă f și g sînt două funcții ale mulțimii $\mathfrak{I}([a, b]; \mathbf{R})$ și λ și μ două numere reale oarecare funcția $\lambda f + \mu g$ este de asemenea un element al lui $\mathfrak{I}([a, b]; \mathbf{R})$ (7.2.2 Teorema 2).

Se deduce că $\mathfrak{I}([a, b]; \mathbf{R})$ este un subspațiu vectorial al spațiului vectorial $\mathfrak{F}([a, b]; \mathbf{R})$ al funcțiilor definite pe $[a, b]$.

Aceeași teoremă (7.2.2, Teorema 2) dovedește că aplicația J a lui $\mathfrak{J}([a, b]; \mathbb{R})$ în $\mathbb{R}$, care pentru orice funcție f mărginită, integrabilă pe $[a, b]$ face să corespundă numărul real $\int_a^b f(t) dt$, este o aplicație liniară.

Mai mult, $\mathfrak{J}([a, b]; \mathbb{R})$ este ordonat prin relația de ordine „ $\leq$ ” (7.1.2). Aplicația J se bucură de proprietatea:

dacă: $f \leq g$,
atunci: $J(f) \leq J(g)$.

Într-adevăr, dacă: $f \leq g$, atunci $g - f$ este o funcție pozitivă pe $[a, b]$;

$$(f \leq g \Leftrightarrow \forall_{[a,b]} x \ f(x) \leq g(x)),$$

fie, aplicînd teorema 1 de la 7.2.2 ($a < b$):

$$\begin{aligned} J(g - f) &= J(g) - J(f) \\ &= \int_a^b (g - f)(t) dt \geq 0. \end{aligned}$$

Prin urmare:

$$J(g) \geq J(f).$$

TEOREMĂ Mulțimea $\mathfrak{J}([a, b]; \mathbb{R})$ a funcțiilor mărginite, integrabile pe un interval închis, mărginit $[a, b]$ este un spațiu vectorial pe $\mathbb{R}$

Aplicația $J = [f \rightarrow \int_a^b f(t) dt]$ este o aplicație liniară a lui $\mathfrak{J}([a, b], \mathbb{R})$

în $\mathbb{R}$.

Dacă a este inferior lui b , aplicația J este crescătoare.

7.2.4 Teorema mediei

Fie f o funcție mărginită, integrabilă pe un interval închis, mărginit $[a, b]$. Dacă există o funcție γ , constantă, a cărei integrală pe $[a, b]$ este egală cu integrala lui f pe $[a, b]$, atunci avem:

$$\int_a^b f(t) dt = \mu(b - a) \quad (\mu = \gamma(x)).$$

De unde, în mod necesar:

$$\gamma(x) = \mu = \frac{\int_a^b f(t) dt}{b - a}.$$

Reciproc :

$$\int_a^b \mu dt = \mu(b-a) = \int_a^b f(t) dt.$$

DEFINIȚIE. Fie f o funcție mărginită, integrabilă pe un interval închis, mărginit $[a, b]$. Numărul μ , astfel ca integrala funcției constante egale cu μ pe $[a, b]$ să fie egală cu integrala lui f pe $[a, b]$, este valoarea medie a funcției f pe intervalul $[a, b]$:

$$\mu = \frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a}.$$

Funcția f fiind o funcție mărginită pe $[a, b]$, fie M și m marginea superioară și respectiv inferioară ale lui f pe $[a, b]$.

Avem :

$$\forall_{[a,b]x} m \leq f(x) \leq M.$$

Să presupunem că a este inferior lui b . Aplicând teorema de la 7.2.3, vom avea :

$$\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b M dt,$$

adică :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a),$$

și împărțind cu numărul pozitiv $b-a$:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a} \leq M.$$

Dacă a este superior lui b , avem :

$$\int_b^a m dt \leq \int_b^a f(t) dt \leq \int_b^a M dt,$$

adică :

$$m(a-b) \leq \int_b^a f(t) dt \leq M(a-b),$$

$$m \leq \frac{\int_b^a f(t) dt}{a-b} \leq M.$$

Dar, deoarece:
$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt, \quad (7.2.1)$$

avem:

$$\frac{\int_b^a f(t) dt}{a-b} = \frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a}.$$

Se poate deci trage concluzia:

TEOREMA. Valoarea medie a unei funcții mărginite, integrabile pe un interval închis, mărginit $[a, b]$ este cuprinsă între marginile m și M ale lui f pe $[a, b]$:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a} \leq M.$$

Observație. — Dacă f este continuă pe $[a, b]$, ea ia toate valorile cuprinse între m și M . Există deci un număr real ξ a lui $[a, b]$, astfel ca

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a}.$$

Admitem că se poate alege ξ în intervalul deschis $]a, b[$.

7.2.5 Legături cu derivarea

Fie f o funcție mărginită, integrabilă pe un interval închis, mărginit $[a, b]$ ($a < b$). Funcția f este integrabilă pe toate intervalele închise, mărginite, incluse în $[a, b]$ (7.2.1).

Să presupunem între altele că f este continuă într-un punct x_0 a lui $[a, b]$. Pentru orice interval $[x_0, x]$ inclus în $[a, b]$, f este integrabilă și i se poate aplica teorema mediei; notînd $m(x)$ și $M(x)$ marginile inferioară și respectiv superioară a lui f pe $[x_0, x]$ avem:

$$m(x) \leq \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x-x_0} \leq M(x).$$

Din definiția lui $m(x)$ și $M(x)$ avem pentru orice număr real, x al intervalului $[a, b]$:

$$m(x) \leq f(x_0) \leq M(x).$$

Funcția f fiind continuă în x_0 , pentru orice număr ε real, pozitiv, nenul, există un număr η real, pozitiv, nenul astfel ca $|x - x_0| < \eta$ să implice :

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (x \in [a, b]).$$

În aceste condiții, dacă x aparține intervalului închis :

$$A = [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap [a, b],$$

avem : $|M(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ și $|m(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

($M(x)$ și $m(x)$ sînt în realitate puncte aderente la $f[A]$.)

Deci :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [x \mapsto m(x)] = f(x_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [x \mapsto M(x)] = f(x_0).$$

Prin urmare :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[x \mapsto \frac{\int_a^x f(t) dt}{x - x_0} \right] = f(x_0).$$

Fie f funcția care fiecărui x din $[a, b]$, face să-i corespundă integrala $\int_a^x f(t) dt$ a lui f pe intervalul $[a, x]$. După 7.2.1, avem :

$$\int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_a^x f(t) dt,$$

și fie :

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = F(x) - F(x_0).$$

Rezultă :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[x \mapsto \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \right] = f(x_0).$$

TEOREMA. Fie f o funcție mărginită și integrabilă pe intervalul închis, mărginit $[a, b]$. Presupunem că f este continuă într-un punct x_0 a lui $[a, b]$. În acest caz, funcția F definită pe $[a, b]$ prin $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ este derivabilă în x_0 și avem :

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

7.2.6 Creșteri finite

Fie f o funcție definită și derivabilă pe un interval închis, mărginit $[a, b]$. Presupunem între altele că funcția f' , derivata lui f pe $[a, b]$ este continuă pe $[a, b]$, deci integrabilă pe $[a, b]$ (7.1.8). În aceste condiții:

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

Fie m și M marginile lui f' pe $[a, b]$. Aplicăm teorema mediei:

$$m \leq \frac{\int_a^b f'(t) dt}{b-a} \leq M,$$

ceea ce înseamnă:

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq M.$$

Dar f' este presupusă continuă pe $[a, b]$. Există deci (7.2.4) un număr real ξ din intervalul $[a, b]$ astfel încît:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Acest rezultat, cunoscut sub numele de *teorema creșterilor finite*, este valabil și îl admitem în cadrul unor ipoteze ceva mai largi. Enunțăm:

TEOREMA. Fie f o funcție definită și continuă pe un interval închis $[a, b]$, și derivabilă pe intervalul deschis $]a, b[$. Există deci un număr real ξ din intervalul deschis $]a, b[$, astfel ca:

$$f(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Interpretare grafică.

Fie Γ graficul funcției f într-un reper $\mathcal{R}$.

Fie A punctul de coordonate $\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ în $\mathcal{R}$.

Fie B punctul de coordonate $\begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}$ în $\mathcal{R}$.

Teorema creșterilor finite afirmă că, în anumite ipoteze, există cel puțin un punct al lui Γ , de abscisă ξ ($\xi \in]a, b[$), în care tangenta la Γ (coeficient unghiular $f'(\xi)$) este paralelă la coarda ce unește A și B (coeficient unghiular $\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$).

Observații. — 1 Dacă $f(a) = f(b)$, teorema creșterilor finite ia numele de teorema lui Rolle.

2 Fie f o funcție care satisface teorema creșterilor finite pe un interval $[a, b]$. Notăm: $b = a + h$. Există în acest caz un număr θ , cuprins între 0 și 1, astfel ca $\xi = a + \theta h$:

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h) \quad (0 < \theta < 1).$$

EXERCIȚII

7.10 Fie f și g două funcții continue pe un interval închis, mărginit $[a, b]$. Care este semnul lui $\int_a^b [f(t) + \lambda g(t)]^2 dt$, unde λ reprezintă un număr real?

Să se deducă următoarea inegalitate, numită inegalitatea lui Schwarz:

$$\left[\int_a^b f(t)g(t) dt \right]^2 \leq \int_a^b [f(t)]^2 dt \cdot \int_a^b [g(t)]^2 dt.$$

$\left(\int_a^b [f(t) + \lambda g(t)]^2 dt \right)$ se poate dezvolta și considera ca un trinom de gradul doi în λ .

7.11 Fie f și g două funcții continue și mărginite pe $[a, b]$. Să se demonstreze că dacă $g(x)$ păstrează un semn constant pe $[a, b]$, m și M reprezentînd marginile lui f pe $[a, b]$, atunci avem:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt} \leq M.$$

7.12 Fie $[a, b]$ un interval închis, mărginit ($a < b$). Fie σ_n progresia aritmetică, cu rația $\frac{b-a}{n}$ cu a ca prim termen și cu b ca termen ultim; σ_n este o diviziune a lui $[a, b]$:

$$\sigma_n = (a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b).$$

Considerăm șirurile (R_n) și (R'_n) definite prin:

$$R_n = \frac{b-a}{n} [f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})],$$

$$R'_n = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + f(b)].$$

Să se găsească următoarele limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (R_n) \text{ și } \lim_{n \rightarrow +\infty} (R'_n).$$

Se va deduce o interpretare a valorii medii a unei funcții pe un interval închis, mărginit $[a, b]$.

7.13 Să se calculeze $\int_0^1 t dt$ utilizînd formula care dă suma primelor n numere naturale. (Se va utiliza o diviziune bine aleasă a lui $[0, 1]$.)

De dedus:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \rightarrow \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right].$$

7.14 Să se calculeze $\int_0^1 t^2 dt$ utilizînd formula care dă suma pătratelor primelor n numere naturale.

7.15 Să se utilizeze o metodă analoagă pentru a calcula $\int_0^1 t^3 dt$.

7.16 Să se găsească un majorant și un minorant pentru următoarele integrale, dacă există:

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(3 + 2 \cos t)^2}; \quad I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

7.17 Să se demonstreze că:

$$0,113 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[3]{4 - \cos^2 t} \, dt < 0,120.$$

7.18 Se notează: $I_n = \int_0^1 t^n \sin \pi t \, dt$.

1° Să se demonstreze că, pentru orice n :

$$0 \leq I \leq \int_0^1 t^n \, dt.$$

2° Să se demonstreze:

$$\lim_{+\infty} \left[n \mapsto \int_0^1 t^n \, dt \right] = 0.$$

3° Să se deducă că:

$$\lim_{+\infty} [n \mapsto I_n] = 0$$

7.19 Fie f și g două funcții pozitive, integrabile pe intervalul închis, mărginit $[a, b]$. Să se demonstreze că funcția fg este de asemenea integrabilă pe $[a, b]$. Să se generalizeze la funcții f și g de semne oarecare, dar care se presupun de semn constant pe porțiuni.

7.20 Să se demonstreze că, dacă f este o funcție impară, definită și continuă pe $[-a, a]$:

$$\int_{-a}^a f(t) \, dt = 0.$$

Să se demonstreze că dacă f este pară, în aceleași condiții avem:

$$\int_{-a}^a f(t) \, dt = 2 \int_0^a f(t) \, dt = 2 \int_{-a}^0 f(t) \, dt.$$

7.3 FUNCȚII PRIMITIVE

7.3.1 Definiție

Concluziile de la 7.2.5 ne sugerează următoarele: fiind dată o funcție f definită pe $[a, b]$, să căutăm funcțiile F a căror derivate pe $[a, b]$ coincid cu funcția f .

DEFINIȚIE. Se spune că o funcție F este o funcție primitivă (sau mai simplu o primitivă) a funcției f pentru a exprima că :

1° F este definită pe același domeniu cu f .

2° Pe acest domeniu, F este derivabilă și admite pe f ca funcție derivată.

Exemple. I. Funcția $[x \mapsto 2x]$, definită pe $\mathbb{R}$, admite funcția $[x \mapsto x^2]$ ca primitivă.

II. Funcția $[x \mapsto x^3 + 3]$ este de asemenea o primitivă a funcției $[x \mapsto 2x]$.

III. Pentru orice valoare dată constantei h , funcția $\left[x \mapsto \sin \frac{x}{2} + h\right]$ este o primitivă a funcției $\left[x \mapsto \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}\right]$.

Domeniul comun de definiție este $\mathbb{R}$.

IV. Funcția $\left[x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$ este definită pe intervalul $]0, +\infty[$. Ea admite ca funcție primitivă funcția $[x \mapsto \sqrt{x}]$. Faptul că domeniul de definiție al acestei funcții primitive poate fi extins este interesant din unele puncte de vedere, dar iese din cadrul prezentului studiu.

V. Funcția $f = \left[x \mapsto -\frac{1}{x^2}\right]$ este definită pe $\mathbb{R}^*$. Considerăm funcția F definită astfel :

$$x \in \mathbb{R}^{-*} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{x} + 3,$$

$$x \in \mathbb{R}^{+*} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{x} + 1.$$

Funcția F este o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}^*$. Să notăm că mulțimea $\mathbb{R}^*$ nu este conexă (1.1.7 și 4.1.6).

VI. Funcția Φ , definită prin :

$$x \in \mathbb{R}^{-} \Rightarrow \Phi(x) = x^2 + 3, \quad x \in \mathbb{R}^{+*} \Rightarrow \Phi(x) = x^2 + 1,$$

nu este o primitivă a funcției $\varphi = [x \mapsto 2x]$ definită pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr, pentru $x = 0$, avem $\varphi(0) = 0$, dar $\Phi'(0)$ nu există.

Din contra, Φ este o primitivă a funcției $\varphi^* = \varphi|_{\mathbb{R}^*}$. De notat că $\mathbb{R}$ este conex și că $\mathbb{R}^*$ nu este.

7.3.2 Mulțimea primitivelor unei funcții definite pe un interval

Este clar că dacă F este o primitivă a funcției f orice funcție G definită prin :

$$G(x) = F(x) + k,$$

în care k este o constantă reală, este o altă primitivă a funcției f . Invers, să studiem relația care există între două primitive ale unei aceleiași funcții. Fie f o funcție definită pe un interval I . Fie F și G două primitive pe I ale funcției f ; F și G fiind derivabile pe I , sînt continue pe acest interval. Mai mult :

$$F' = f \text{ și } G' = f.$$

F și G au deci pe intervalul I aceeași derivată. S-a dedus (4.1.6) că există o constantă C , astfel ca:

$$\forall x \in I \quad F(x) = G(x) + C.$$

Se poate deci enunța următoarea teoremă:

TEOREMA. Fie f o funcție definită pe un interval I . Fie F o primitivă a lui f pe I . Mulțimea $\mathcal{Q}_1(f)$ a primitivelor lui f pe intervalul I este formată din toate funcțiile diferite de F ale unei funcții constante:

$$\mathcal{Q}_1(f) = \{G \mid \exists C, \forall x \in I \quad G(x) = F(x) + C\}.$$

Ipoteza după care f este definită pe un interval este fundamentală pentru ca această teoremă să fie valabilă. Intervalele lui $\mathbb{R}$ sînt într-adevăr singurele submulțimi conexe ale lui $\mathbb{R}$. Dacă domeniul de definiție a lui f nu este conex, teorema precedentă nu se mai aplică, așa cum rezultă din exemplul II, care urmează.

Exemple. I. Funcția F definită prin $F(x) = 2 \sin^2 x$ și funcția G definită prin $G(x) = 8 - \cos 2x$ au ca derivată F' și G' definite respectiv prin:

$$F'(x) = 2 \cdot 2 \sin x \cos x = 2 \sin 2x;$$

$$G'(x) = 2 \sin 2x.$$

Cele două derivate F' și G' sînt egale pe $\mathbb{R}$.

Pe de altă parte, se verifică ușor că pentru orice număr real x :

$$G(x) = 8 - (1 - 2 \sin^2 x) = 7 + 2 \sin^2 x = F(x) + 7.$$

II. Fie funcțiile F și G definite pe $\mathbb{R}^*$ prin:

$$x \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{x} + 3 \text{ și } G(x) = \frac{1}{x} + 5,$$

$$x \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{x} + 1 \text{ și } G(x) = \frac{1}{x} + 10.$$

Pe $\mathbb{R}^*$, avem:

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad F'(x) = G'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Avem pe domeniul conex $\mathbb{R}^{*-}$: $G(x) - F(x) = 2$.

Avem pe domeniul conex $\mathbb{R}^{*+}$: $G(x) - F(x) = 9$.

Dar pe $\mathbb{R}^*$, care nu este conex, funcția diferență $G - F$ nu este o funcție constantă. Ipoteza conexității este deci esențială.

Funcția f fiind definită pe un domeniu conex I (interval), dacă se cunoaște o primitivă F a lui f pe I , toate primitivele lui f pe I se obțin adăugînd la F o funcție constantă.

F fiind o primitivă a lui f pe intervalul I , avem:

$$dF(x) = f(x)dx = F'(x)dx.$$

S-a convenit să se noteze prin $\int f(x) dx$ o primitivă oarecare a lui f pe I . S-a convenit să se scrie, aici însă în mod incorect, confundând funcția primitivă și valoarea sa în x :

$$F(x) + C = \int f(x) dx,$$

în care C reprezintă o constantă arbitrară.

Simbolul $\int$ se citește: „integrală din”.

Exemplu. O primitivă oarecare a funcției $f = [x \mapsto x + \cos x]$ se scrie:

$$\int (x + \cos x) dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C.$$

Notăția $\int f(x) dx$ reprezintă un element oarecare al mulțimii $\mathfrak{A}_1(f)$; se numește uneori integrală nedefinită prin opoziție cu notația $\int_a^b f(t) dt$ care reprezintă o integrală definită.

7.3.3 Existența funcțiilor primitive

Fie f o funcție mărginită, integrabilă pe intervalul închis, mărginit $[a, b]$. Să presupunem între altele că f este continuă într-un punct x_0 a lui $[a, b]$.

În aceste condiții (7.2.5), derivata în x_0 a funcției $F = [x \mapsto \int_a^x f(t) dt]$ este egală cu $f(x_0)$.

Să presupunem acum că f este continuă în toate punctele intervalului $[a, b]$. Raționamentul pe care l-am făcut este valabil în toate punctele lui $[a, b]$. Ca urmare, funcția F este o primitivă a lui f pe $[a, b]$. Mai mult această primitivă are proprietatea de a fi nulă pentru $x = a$:

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 \quad (7.2.1).$$

Pe de altă parte, o funcție continuă pe un interval închis, mărginit, fiind integrabilă pe acest interval, se poate enunța:

TEOREMA. Orice funcție f continuă pe un interval închis, mărginit, admite
1 funcții primitive pe acest interval.

Funcția $\left[x \mapsto \int_a^x f(t) dt \right]$ este aceea primitivă care se anulează pentru $x = a$.

Ipoteza de continuitate a lui f este esențială. Există într-adevăr funcții care nu sînt continue, integrabile în sens Riemann pe un interval închis, mărginit $[a, b]$, dar care nu admit primitive pe $[a, b]$. Există deasemenea funcții care admit o primitivă pe un interval închis, mărginit $[a, b]$ dar care nu sînt integrabile (în sens Riemann) pe $[a, b]$.

Fie acum o funcție f continuă pe un interval I oarecare; f este integrabilă și mărginită pe orice interval închis, mărginit inclus în I . Fie a un element oarecare a lui I . Funcția F , definită pe I prin:

$$\forall x \in I \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

este, pe orice interval închis, mărginit din I , o primitivă a lui f . Dar orice punct x al lui I aparține unui interval închis, mărginit a lui I (de exemplu $[a, x]$). Prin urmare, F este o primitivă a lui f pe întregul interval I .

TEOREMA. Orice funcție f continuă pe un interval I oarecare (submulțime conexă a lui $\mathbb{R}$) admite primitive pe I . Dacă a este un element al lui I , primitiva lui f care se anulează pentru $x = a$ este funcția:

$$F = \left[x \mapsto \int_a^x f(t) dt \right].$$

Dacă o funcție f este continuă pe porțiuni pe un interval I , se poate aplica teorema precedentă de atîtea ori cîte intervale ale lui I există în care f este continuă.

COROLAR. Orice funcție continuă pe porțiuni pe un interval I (submulțime conexă a lui $\mathbb{R}$) admite cel puțin o primitivă pe I .

7.3.4 Integrale și primitive

Fie f o funcție continuă pe un interval I și fie x_0 un element a lui I . Conform paragrafelor precedente, avem, pentru orice număr real x al lui I :

$$\int f(x) dx = \int_{x_0}^x f(t) dt + C.$$

Funcția $F = \left[x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt \right]$ este primitiva lui f pe I , care se anulează pentru $x = x_0$.

Fie a și b două elemente ale lui I . Intervalul închis, mărginit $[a, b]$ este inclus în I și, indiferent care este x_0 din I , avem :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t) dt &= \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^b f(t) dt = \\ &= - \int_{x_0}^a f(t) dt + \int_{x_0}^b f(t) dt,\end{aligned}$$

adică :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Fie Φ o altă primitivă a lui f pe I . Există o constantă C astfel ca, pentru orice x a ui I : $\Phi(x) = F(x) + C$.

Avem deci :

$$\begin{aligned}\Phi(b) - \Phi(a) &= [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a) = \\ &= \int_a^b f(t) dt.\end{aligned}$$

TEOREMĂ. Fie f o funcție continuă pe un interval I . Fie a și b două elemente ale lui I și F o primitivă oarecare a lui f pe I . Avem :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Se notează :

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b.$$

Se citește : „ $F(t)$ luat între a și b ”.

7.3.5 Primitive uzuale

Nu există o metodă generală pentru calcularea primitivelor funcțiilor elementare. Există, chiar, funcții elementare a căror primitive nu sînt funcții elementare. Totuși, regulile de derivare ușurează căutarea primitivelor. În căutarea primitivelor se utilizează și tablourile ce dau derivatele funcțiilor elementare ; aceste tablouri, citite invers, dau primitivele unor funcții elementare. Aceste reguli de căutare sînt rezumate în tablourile ce urmează.

Fie f și g două funcții continue pe un interval I și care admit pe I primitive F și G . Fie C și A constante reale. În acest caz, avem :

$$\begin{aligned} \int [f(x) + g(x)] dx &= F(x) + G(x) + C, \\ \int Af(x) dx &= AF(x) + C, \\ \int [f(x)G(x) + F(x)g(x)] dx &= F(x) \cdot G(x) + C, \\ \int \frac{f(x)G(x) - F(x)g(x)}{G^2(x)} dx &= \frac{F(x)}{G(x)} + C. \end{aligned}$$

Unele primitive uzuale, ce trebuie cunoscute, sînt rezumate în tabloul ce urmează:

$$\begin{aligned} r \in \mathbb{Q} - \{-1\} \quad \int x^r dx &= \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \\ a \in \mathbb{R}^* \quad \int \sin(ax+b) dx &= -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C \\ a \in \mathbb{R}^* \quad \int \cos(ax+b) dx &= \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{tg} x + C \\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\operatorname{cotg} x + C \end{aligned}$$

Rezultatele rezumate în aceste două tablouri permit găsirea a numeroase primitive. În același timp, există funcții ce admit primitive, dar pe care nu vom ști să le găsim prin această metodă. De exemplu, funcția inversă $\left[x \mapsto \frac{1}{x}\right]$ este continuă pe $\mathbb{R}^{+*}$ și $\mathbb{R}^{-*}$. Ea admite deci primitive, dar acestea nu se pot găsi aplicînd numai rezultatele acestui capitol. Vom reveni asupra acestui caz particular, ulterior.

Exemple. I. $f(x) = 3x^3 - 2x^4 + 7$;

$$\int f(x)dx = \frac{3}{7} x^7 - \frac{2}{5} x^5 + 7x + C.$$

$$\text{II. } f(x) = 13x^{13} + 5x^9 - 2x; \quad \int f(x) dx = x^{14} + \frac{x^{10}}{2} - x^2 + C.$$

$$\text{III. } f(x) = \cos 5x + 3 \cos 3x + \sin x;$$

$$\int f(x) dx = \frac{1}{5} \sin 5x + \sin 3x - \cos x + C.$$

$$\text{IV. } f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}; \quad \int f(x) dx = -2 \cos \frac{x}{2} + 3 \sin \frac{x}{3} + C.$$

Pentru a găsi primitivele unei funcții trigonometrice, polinom care nu este de gradul unu în funcțiile circulare ale lui x sau ale multiplilor săi, acest polinom se exprimă sub forma unei combinații lineare de linii trigonometrice ale multiplilor lui x , ceea ce este posibil întotdeauna (vezi Algebra, Numere reale, calcul numeric, numere complexe 3.4.1), apoi se aplică metoda utilizată anterior.

Exemple.

$$f(x) = \cos^2 x,$$

$$f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x,$$

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

7.3.6 Schimbarea de variabilă

Fie F o primitivă a unei funcții f continuă pe un interval I . Fie pe de altă parte φ o funcție derivabilă, a cărei derivată pe un interval I este continuă. Să presupunem în plus că funcția $F \circ \varphi$ există și este definită pe I . Regulile de derivare permit să conchidem că funcția $F \circ \varphi$ este o primitivă pe I a funcției continue $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

TEOREMĂ. Fie φ o funcție continuă derivabilă pe un interval I . În acest caz, pentru orice funcție f definită și continuă pe $\varphi[I]$, vom avea :

$$(x = \varphi(t)) \quad \int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Aplicația practică a acestei teoreme de căutare a primitivelor se prezintă sub două aspecte.

1 Dacă integrala de calculat, $\int f(x) dx$, se prezintă natural sub forma

$\int g[\varphi(x)] \cdot \varphi' \cdot \varphi(x) dx$ și dacă G este o primitivă a funcției g , funcția $G \circ \varphi$ este o primitivă a funcției f :

$$\int f(x) dx = G[\varphi(x)] + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Dacă punem $y = \varphi(x)$, avem :

$$f(x) dx = g[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx = g(y) dy.$$

Acest prim punct de vedere revine la a se face schimbarea de variabilă sub forma : $y = \varphi(x)$, adică exprimând noua variabilă în funcție de cea veche.

Exemple. I. $f(t) dt = \sin^2 t \cos t$;

$$\int f(t) dt = \int \sin^2 t \cos t dt.$$

Punind $x = \sin t$, avem:

$$dx = \cos t dt.$$

$$\text{Prin urmare: } \int f(t) dt = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C = \frac{\sin^3 t}{3} + C.$$

II.

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x};$$

$$\int f(x) dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$$

Aici se poate proceda în diferite moduri. De exemplu, se poate pune $\cos x = u$. Atunci, avem: $du = -\sin x dx$,

$$\text{și prin urmare: } \int f(x) dx = \int -\frac{du}{u^3} = \frac{1}{2u^2} + C = \frac{1}{2 \cos^2 x} + C.$$

Se poate pune și $v = \operatorname{tg} x$. Atunci, avem:

$$dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

și ca urmare:

$$\int f(x) dx = \int v dv = \frac{v^2}{2} + C' = -\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C'$$

Se remarcă desigur că $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

$$\text{Ca urmare: } \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} = \frac{1}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2}$$

$$\text{Avem deci: } C' = C - \frac{1}{2}.$$

$$\text{III. } f(x) = \frac{5x dx}{(x^2 - 5)^2}.$$

$$\text{Punem: } x^2 - 5 = u.$$

$$\text{Avem: } du = 2x dx.$$

$$\text{Prin urmare: } 5x dx = \frac{5 du}{2}.$$

$$\int f(x) dx = \int \frac{5 du}{2u^2} = \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2} \times u^{-1} \right) + C = \frac{-5}{4(x^2 - 5)^2} + C.$$

2 Pentru a calcula integrala $\int f(x) dx$, se poate de asemenea efectua o schimbare de variabilă de forma $x = \psi(t)$, în care ψ este o funcție derivabilă și a cărei

derivată ψ' este continuă. Dacă se cunoaște o primitivă G a funcției $(f \circ \psi)\psi'$, și dacă F este primitiva căutată a funcției continue f , avem:

$$G = F \circ \psi.$$

Să presupunem între altele că ψ , care este continuă, este o bijecție. Există în acest caz o funcție ψ^{-1} , și avem:

$$F = G \circ \psi^{-1}.$$

$$\left(G = \int f[\psi(x)]\psi'(x) dx. \right)$$

Observație. — Este posibil să fim conduși la efectuarea a mai multor schimbări de variabilă succesive, eventual de tip diferit (exercițiile 7.77 la 7.79).

Exemple. I.

Fie:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Să se calculeze:

$$\int f(x) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Fie schimbarea de variabilă: $x = \cos t$ ($0 \leq t < \pi$).

În acest caz avem:

$$\begin{aligned} dx &= -\sin t dt, \\ \sqrt{1-x^2} &= \sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t \end{aligned}$$

(deoarece $\sin t$ este pozitiv în intervalul $[0, \pi]$).

Ca urmare:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\sin t}{\sin t} dt = \int -dt = -t + C.$$

Aplicația $[t \mapsto \cos t]$ este o bijecție a intervalului $[0, \pi]$ pe intervalul $[-1, +1]$.

Bijecția inversă este aplicația $[x \mapsto \text{Arccos } x]$ (vezi 1.8.5):

$$\begin{cases} x = \cos t \\ t \in [0, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \text{Arccos } x \\ x \in [-1, +1] \end{cases}.$$

Ca urmare:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\text{Arccos } x + C.$$

II. Aceeași integrală $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ poate fi tratată diferit.

Fie:

$$\begin{cases} x = \sin t \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \text{Arcsin } x \\ x \in [-1, +1] \end{cases}$$

Avem, atunci:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t \, dt}{\cos t} = t + C',$$

adică:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} x + C'.$$

$$\left(\text{Se știe de altfel (exercițiul 7.142) că } \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} . \right)$$

7.3.7 Integrarea prin părți

Fie F și G două funcții derivabile pe un interval I a lui $\mathbb{R}$, a căror derivate pe I , f și respectiv g , sînt continue pe I .

Avem:

$$dFG = F \, dG + G \, dF,$$

adică:

$$(FG)'(x) \, dx = F(x) \, g(x) \, dx + G(x) \, f(x) \, dx.$$

Invers, integrînd, avem:

$$\begin{aligned} F(x) \, G(x) &= \int F(x) \, g(x) \, dx + \int G(x) \, f(x) \, dx = \\ &= \int F \, dG + \int G \, dF. \end{aligned}$$

Dacă nu se poate găsi direct o primitivă a unei funcții de forma $F \cdot G'$, se poate, aplicînd formula precedentă și ne întoarcem la studiul primitivelor funcției $G \cdot F'$, care sînt poate mai ușor de găsit.

TEOREMĂ. Fie F și G două funcții continue și a căror derivate sînt continue pe un interval I . În acest caz avem:

$$\int F \, dG = FG - \int G \, dF.$$

Exemplu. Să se găsească primitivele funcției definite prin $f(x) = x \sin x$.

Punem:

$$F(x) = x, \, dG(x) = \sin x \, dx.$$

În acest caz avem:

$$G(x) = -\cos x, \, dF(x) = dx,$$

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int -\cos x \, dx,$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Integrarea prin părți se aplică adesea cu succes în cazurile în care funcția de integrat conține o funcție transcendentă a cărei derivată este algebrică. În această problemă, să ne reamintim rezultatele obținute în exercițiile despre derivare, sub forma de integrale. (vezi 3.5.2 și exercițiile 3.115 la 3.117):

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \text{Arc tg } x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc sin } x + C = -\text{Arc cos } x + C'.$$

Integrarea prin părți se folosește de asemenea în mod frecvent pentru a găsi primitivele funcțiilor de forma $f(x) = P(x) \cdot g(x)$ în care P este o funcție polinom și g o funcție la care se cunosc primitive succesive. Într-adevăr, dacă $g(x) dx = dG(x)$:

$$\int f(x) dx = P(x) G(x) - \int P'(x) G(x) dx,$$

în care $P'(x)$ este un polinom de grad inferior lui $P(x)$. Continuând procedeul de atâtea ori de câte ori este necesar, se ajunge la cazul în care P' fiind de gradul zero, o integrare suplimentară a uneia dintre primitivele succesive ale lui G , cunoscută prin ipoteză, permite să se obțină rezultatul.

Exemplu. Să se găsească o primitivă a funcției f , definită prin:

$$f(x) = (x^2 + x + 1) \sin x.$$

Punem:

$$P(x) = x^2 + x + 1,$$

$$g(x) = \sin x.$$

Avem:

$$dP(x) = (2x + 1) dx,$$

$$G(x) = -\cos x;$$

de unde:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + x + 1) \sin x dx &= - (x^2 + x + 1) \cos x - \int - (2x + 1) \cos x dx \\ &= - (x^2 + x + 1) \cos x + \int (2x + 1) \cos x dx. \end{aligned}$$

În sfârșit, punem:

$$\varphi(x) = 2x + 1,$$

$$h(x) = \cos x$$

avem:

$$d\varphi(x) = 2 dx,$$

$$H(x) = \sin x;$$

de unde:

$$\int (2x + 1) \cos x \, dx = (2x + 1) \sin x - \int 2 \sin x \, dx;$$

dar:

$$\int 2 \sin x \, dx = 2 \int \sin x \, dx = -2 \cos x + C;$$

deci:

$$\int (x^2 + x + 1) \sin x \, dx = -(x^2 + x + 1) \cos x + (2x + 1) \sin x + 2 \cos x + C.$$

Pe de altă parte, integrarea prin părți este utilizată frecvent pentru a găsi relații de recurență între primitivele funcțiilor ce depind de un număr întreg n .

Exemplu. Fie: $I_n = \int x^n \sin x \, dx$.

O primă integrare prin părți dă, punind $F(x) = x^n$ și $G(x) = -\cos x$:

$$\begin{aligned} I_n &= -x^n \cos x - \int -nx^{n-1} \cos x \, dx \\ &= -x^n \cos x + \int nx^{n-1} \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Integrăm din nou prin părți, punind $F_1(x) = x^{n-1}$ și $G_1(x) = \sin x$; avem:

$$\int x^{n-1} \cos x \, dx = x^{n-1} \sin x - \int (n-1)x^{n-2} \sin x \, dx,$$

fie:

$$I_n = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1) I_{n-2}.$$

O astfel de relație de recurență permite să se găsească din aproape în aproape primitivele I_n , cunoscând de exemplu, I_0 și I_1 .

EXERCITII

Să se determine mulțimea primitivelor fiecăreia dintre funcțiile f definite prin:

7.21 $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$.

7.22 $f(x) = 7x^3 - 27x^2 + 15x - 57$.

7.23 $f(x) = \frac{27x^5 - 19x^3 + 41x^2 - 57x + 1}{x^3}$.

7.24 $f(x) = \frac{6x^5 - 4x^3 + 21x - 12}{\sqrt[3]{x^3}} \cdot \sqrt{x+4}$.

$$7.25 \quad f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2.$$

$$7.26 \quad f(x) = \frac{(1 - \sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$7.27 \quad f(x) = \frac{x^{5/3} + x^{2/3} - 2}{x^{1/3}}.$$

$$7.28 \quad f(x) = \frac{(1 - \sqrt{x} + \sqrt{x^3})^2}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$7.29 \quad f(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2.$$

7.30 *Exercițiu rezolvat.*

Să se determine primitivele funcției f definite prin :

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 2}{(x - 1)^2}.$$

Avem :

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{(x - 1)^2} = (x + 1)^2 + \frac{1}{(x - 1)^2}.$$

Prin urmare :

$$\begin{aligned} \int f(x) \, dx &= \int (x + 1)^2 dx + \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx \\ &= \frac{(x + 1)^3}{3} - \frac{1}{(x - 1)} + C. \end{aligned}$$

Să se determine primitivele funcțiilor definite prin :

$$7.31 \quad f(x) = \frac{9x^4 - 30x^3 + 16x^2 + 30x - 24}{(3x - 5)^2}.$$

$$7.32 \quad f(x) = \frac{5x^4 + 40x^3 + 20x + 80}{(x^2 + 4)^2};$$

$$\left(\text{Se va scrie } f(x) \text{ sub forma: } \frac{Ax + B}{(x^2 + 4)^2} + K. \right)$$

$$g(x) = \frac{x^6 + 2x^4 - 4x + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$7.33 \quad f(x) = \frac{2x^5 + 2x}{(x^4 - 1)^2}.$$

$$\left(f(x) \text{ se va scrie sub forma: } \frac{Ax + B}{(x^2 - 1)^2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}. \right)$$

După ce eventual $f(x)$ s-a scris sub forma unei combinații liniare de linii trigonometrice ale multiplilor întregi a lui x , calculați primitivele $f(x) \, dx$, în următoarele cazuri :

$$7.34 \quad \begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x; \\ g(x) &= \cos^2 x. \end{aligned}$$

$$7.35 \quad f(x) = \sin^4 x;$$

$$g(x) = \cos^3 x.$$

$$7.36 \quad f(x) = (\sin x + \cos x)^3$$

$$7.37 \quad f(x) = 5 \cos 3x - 3 \sin 3x + 4 \sin (2x + 5) - 2 \cos x;$$

$$g(x) = 3 \sin 3x - 5 \cos 5x + 7 \sin 7x.$$

$$7.38 \quad f(x) = 2 \cos^2 x - \sin^2 x.$$

$$7.39 \quad f(x) = \cos x \sin 3x;$$

$$g(x) = \cos^2 x \sin^2 x.$$

Să se găsească în cazurile următoare, acelea dintre primitivele funcției f care se anulează pentru valoarea dată x_0 :

$$7.40 \quad f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad x_0 = 1.$$

$$7.41 \quad f(x) = x^3 - 4x^2 + x, \quad x_0 = 1.$$

$$7.42 \quad f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = 1.$$

$$7.43 \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \quad x_0 = 1.$$

$$7.44 \quad f(x) = (x+1)^2, \quad x_0 = 1.$$

$$7.45 \quad f(x) = (2x+1)^2, \quad x_0 = 1.$$

$$7.46 \quad f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \quad x_0 = 1.$$

$$7.47 \quad f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}, \quad x_0 = 1.$$

$$7.48 \quad f(x) = x + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 1.$$

$$7.49 \quad f(x) = \cos \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) - \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right), \quad x_0 = 0.$$

$$7.50 \quad f(x) = \sin x + 2 \sin^2 2x, \quad x_0 = 0.$$

$$7.51 \quad f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 1.$$

$$7.52 \quad f(x) = \cos x - 2 \sin x, \quad x_0 = 0.$$

Să se determine, cu ajutorul unei eventuale schimbări de variabilă, primitivele:

$$7.53 \quad \int \operatorname{tg}^2 x \, dx. \quad 7.54 \quad \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 7.55 \quad \int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x}. \quad 7.56 \quad \int \sin^3 3x \cos 3x \, dx.$$

$$7.57 \quad \int \frac{dx}{(x-3)^3}. \quad 7.58 \quad \int \frac{dx}{(7x-4)^5}. \quad 7.59 \quad \int \frac{x \, dx}{\sqrt{(3x^2-7x+5)^3}}.$$

$$7.60 \quad \int \sin^2 x \cos x \, dx. \quad 7.61 \quad \int x \sqrt{(1+x^2)^3} \, dx. \quad 7.62 \quad \int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{\cos x}.$$

$$7.63 \quad \int \frac{x \, dx}{(h^2 + x^2)^2}. \quad 7.64 \quad \int \frac{x \, dx}{(h^2 + x^2)^r}, \quad (r \in \mathbb{Q} - \{1\}).$$

$$7.65' \int x^2 \sqrt{1+x^2} dx.$$

$$7.67 \int \frac{(7x^2 - 10x) dx}{\sqrt{x^3 - 5x^2 + 1}}.$$

$$7.69 \int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$7.71 \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}.$$

$$7.66 \int \frac{(5x^2 - 3x + 4) dx}{\sqrt{\frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 7}}.$$

$$7.68 \int \frac{(2x + \cos x) dx}{\sqrt{x^2 + \sin x}}.$$

$$7.70 \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx.$$

$$7.72 \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cu ajutorul schimbării de variabile indicată, să se găsească următoarele primitive :

$$7.73 \int \frac{dx}{1 + \cos x}, \quad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$7.74 \int \frac{dx}{1 + \cos x}, \quad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$7.75 \int \frac{dx}{1+x^2}, \quad x = \operatorname{tg} t.$$

$$7.76 \int \frac{dx}{a^2 + x^2}, \quad x = -a \operatorname{tg} t.$$

$$7.77 \int x^2 \sqrt{a+x} dx, \quad x = t^2 - a \quad (\sqrt{a+x} = t).$$

$$7.78 \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}, \quad t = \sqrt{x+1}.$$

$$7.79 \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad t = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ apoi } t = \sin u.$$

$$7.80 \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}, \quad t = \sqrt{x} \text{ apoi } t = \operatorname{tg} u.$$

$$7.81 \int \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x}, \quad t = \sin x \text{ apoi } t = \operatorname{tg} u.$$

$$7.82 \int x \sqrt{x+k^2} dx, \quad \sqrt{x+k^2} = t.$$

Cu ajutorul unei singure sau a mai multor integrări prin părți, succesive să se determine următoarele integrale :

$$7.83 \int x \sqrt{x+k^2} dx. \text{ Comparați cu exercițiul 7.82.}$$

$$7.84 \int \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x dx.$$

$$7.85 \int x \sin 2x dx.$$

$$7.86 \int (x^4 + 3x^3 - 5x + 1) \sin 2x dx.$$

$$7.87 \int (3x^3 - 7x + 1) \cos 3x dx.$$

$$7.88 \int (ax^2 + bx + c) [\cos (\omega x + \varphi) + \sin (\omega x + \varphi)] dx.$$

Să se determine următoarele integrale :

$$7.89 \int_2^7 (x^2 - 7x + 15) dx.$$

$$7.90 \int_0^1 \sqrt{x+2} dx.$$

$$7.91 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+5)^3}}$$

$$7.92 \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx.$$

$$7.93 \int_0^{\pi/4} \sin 3x dx.$$

$$7.94 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$7.95 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} dx.$$

$$7.96 \int_{\sqrt{3}}^1 \left(-3x^2 - 5x + 4\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$7.97 \int_{\pi/2}^{-\pi/4} (\cos 2x + 5 \sin 3x - \cos^2 x) dx.$$

$$7.98 \int_{-\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7.99 1° Cu ajutorul unei integrări prin părți să se calculeze integrala :

$$\int \frac{3 \operatorname{Arc} \sin x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2° Să se deducă :

$$\int \frac{3 \operatorname{Arc} \cos x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(Se reamintește că $\operatorname{Arc} \sin x + \operatorname{Arc} \cos x = \frac{\pi}{2}$.)

7.100 Fie I și J următoarele integrale :

$$I = \int \cos^2 x dx, \quad J = \int \sin^2 x dx.$$

Să se calculeze deodată I și J .

7.101 Să se calculeze deodată următoarele integrale :

$$I = \int (ax^2 + bx + c) \cos^2 x dx,$$

$$J = \int (ax^2 + bx + c) \sin^2 x dx.$$

7.102 Fie: $I_n = \int \cos^n x dx$, $J_n = \int \sin^n x dx$.

1° Să se demonstreze că pentru orice n întreg, avem :

$$nI_n = \cos^{n-1}x \sin x + (n-1)I_{n-2},$$

$$nJ_n = -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)J_{n-2}.$$

2° Să se calculeze I_3, J_3 . Să se compare cu exercițiul 7.100.

3° Să se calculeze I_5, J_5 .

4° Dacă n este impar, se poate calcula I_n și J_n cu ajutorul unei schimbări de variabilă simplă?

7.103 Luăm :

$$A_n(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1},$$

$$B_n(x) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + \dots + n(n+1)x^{n-1},$$

$$C_n(x) = 1 + 1^2 x + 2^2 x^2 + \dots + n^2 x^n.$$

1° Să se determine funcția primitivă F_n a lui A_n care este egală cu 1, pentru $x = 0$. Se va deduce o expresie a lui $A_n(x)$.

2° Să se demonstreze că :

$$B_n(x) = A'_{n+1}(x), \text{ și că :}$$

$$C_n(x) = 1 + xA_n(x) + x^2A'_n(x).$$

3° Să se deducă expresiile lui $B_n(x)$ și $C_n(x)$.

7.4 EVALUAREA ARIEI UNOR ANUMITE PĂRȚI DIN PLAN

7.4.1 Noțiunea de arie

Fie un plan afin euclidian P . Admitem că există o aplicație α a unei anumite submulțimi $\mathcal{M}$ a lui $\mathcal{E}(P)$ în $\mathbb{R}$, numită „arie”, astfel ca

a) $\forall_{\mathcal{M}} A \quad \alpha(A) \geq 0;$

b) $\forall_{\mathcal{M}} A, \forall_{\mathcal{M}} B \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow \alpha(A \cup B) = \alpha(A) + \alpha(B),$

deci : $\forall_{\mathcal{M}} C, \forall_{\mathcal{M}} D, \alpha(C \cup D) = \alpha(C) + \alpha(D) - \alpha(C \cap D);$

c) $\forall_{\mathcal{M}} A, \forall_{\mathcal{M}} B$ dacă A și B sînt izometrice, $\alpha(A) = \alpha(B)$.

Mai mult, admitem că există o aplicație „arie” α_u unică astfel că, dacă u este un element dat a lui $\mathcal{M}$, $\alpha_u(u) = 1$. u este numit unitate de arie (u este în mod obișnuit un pătrat sau un dreptunghi, mai rar un paralelogram).

Mai admitem că orice domeniu poligonal al planului este un element a lui $\mathcal{M}$ și că aplicația α_u corespunde, dacă u este un patrat ale cărui laturi sînt egale cu unitatea, noțiunii elementare de arie („suprafață”). Rezultă astfel că aria unui dreptunghi este egală cu produsul „lungimilor” a două laturi consecutive, măsurate cu unitatea de lungime (această lungime coincide cu norma euclidiană a vectorului corespunzător). Rezultă de asemenea că un segment de dreaptă, care poate fi considerat ca un dreptunghi la care una din dimensiuni este nulă, este un element a lui $\mathcal{M}$ a cărui arie este nulă.

Admitem în sfârșit că, f fiind o aplicație continuă, mărginită, pozitivă, a unui interval închis, mărginit $[a, b]$ în $\mathbb{R}$, domeniul plan D definit într-un reper ortogonal de

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ 0 &\leq y \leq f(x) \end{aligned}$$

aparține lui $\mathcal{M}$.

Rezultă de altfel că domeniul plan D' , definit prin :

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ -f(x) &\leq y \leq 0, \end{aligned}$$

este de asemenea un element al lui $\mathcal{M}$ deoarece este isometric cu D .

7.4.2 Arie și integrală

■ CAZUL FUNCȚILOR ÎN SCARĂ

Fie $[a, b]$ un interval închis, mărginit, al lui $\mathbb{R}$ cu $a \leq b$, și fie φ o funcție în scară atașată unei diviziuni $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ a lui $[a, b]$. Să mai presupunem că φ este pozitivă pe $[a, b]$. Fie D_φ domeniul definit într-un reper $\mathcal{R}$ prin :

$$D_\varphi = \left\{ M; M|_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq \varphi(x) \right\}.$$

D_φ este reuniunea dreptunghiurilor ρ_i definite prin :

$$\rho_i = \left\{ M; M|_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; x_{i-1} \leq x \leq x_i; 0 \leq y \leq C_i \right\}.$$

(C_i reprezintă valoarea constantă a lui $\varphi(x)$ pe $]x_{i-1}, x_i[$.)

Cum, pe de altă parte aria segmentelor definite prin $x = x_i, 0 \leq y \leq \varphi(x_i)$ este nulă, integrala $I_a^b(\varphi)$ apare ca aria domeniului D_φ (vezi 7.1.4).

■ CAZUL UNEI FUNCȚII CONTINUE OARECARE

Fie $[a, b]$ un interval închis, mărginit al lui $\mathbb{R}$ cu $a \leq b$ și fie f o funcție continuă pe $[a, b]$. Să mai presupunem că f este pozitivă pe $[a, b]$. Fie x un element al lui $[a, b]$ și fie $D_f(x)$ domeniul definit într-un reper $\mathcal{R}$ prin :

$$D_f(x) = \left\{ M; M|_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}; a \leq \xi \leq x; 0 \leq \eta \leq f(\xi) \right\}.$$

Fie $\mathcal{A}[D_f(x)] = \Phi(x)$ aria, dependentă de x , a domeniului $D_f(x)$ (fig. 4). Funcția Φ este astfel ca :

$$\begin{aligned} x_0 \leq x &\Rightarrow D_f(x_0) \subset D_f(x), \\ &\Rightarrow \Phi(x_0) \leq \Phi(x). \end{aligned}$$

Funcția Φ este deci crescătoare.

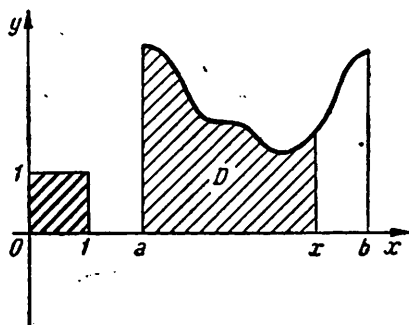


Fig. 4

Fie x_0 un element al lui $[a, b]$. Fie x un element oarecare al lui $[x_0, b]$.

Fie M_x și m_x marginile superioară și respectiv inferioară ale lui Φ pe $[x_0, x]$.

Avem: $x_0 \leq x$

Deci: $D_f(x_0) \subset D_f(x)$.

Fie $\Delta(x)$ domeniul definit prin:

$$\Delta(x) = D_f(x) - D_f(x_0).$$

Avem: $D_f(x) = D_f(x_0) \cup \Delta(x)$.

Prin urmare și deoarece $D_f(x) \cap \Delta(x) = \emptyset$,

avem: $\Phi(x) = \Phi(x_0) + \mathcal{A}[\Delta(x)]$,

adică: $\mathcal{A}[\Delta(x)] = \Phi(x) - \Phi(x_0)$.

Pe intervalul $[x_0, x]$, avem:

$$m_x \leq f(x) \leq M_x.$$

Prin urmare: $m_x(x - x_0) \leq \mathcal{A}[\Delta(x)] \leq M_x(x - x_0)$.

Aria lui $\Delta(x)$ este cuprinsă într-adevăr între ariile a două dreptunghiuri (fig. 5). Avem, deci:

$$m_x \leq \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} \leq M_x.$$

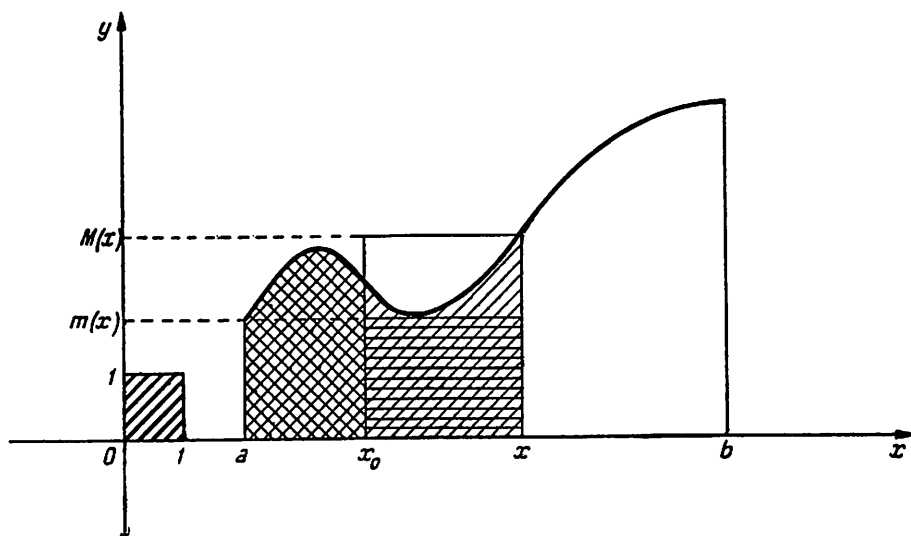


Fig. 5

Funcția f fiind continuă în x_0 , avem :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall [x_0, b] \ x \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

deci :

$$M_x - m_x < \varepsilon \text{ (vezi 7.2.5).}$$

Cum pe de altă parte :

$$m_x \leq f(x_0) \leq M_x,$$

avem :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [x \mapsto M_x] = \lim_{x \rightarrow x_0} [x \mapsto m_x] = f(x_0),$$

și prin urmare :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\rightarrow \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} \right] = f(x_0).$$

Dacă x aparține acum intervalului $[a, x_0]$, același calcul rămâne valabil, $\Phi(x_0) - \Phi(x)$ înlocuind pe $\Phi(x) - \Phi(x_0)$ și $x_0 - x$ înlocuind pe $x - x_0$. Se deduce că :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[x \mapsto \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} \right] = f(x_0),$$

adică :

$$\Phi'(x_0) = f(x_0).$$

Acestea fiind valabile pentru orice element x_0 al lui $[a, b]$, funcția Φ apare ca o primitivă a lui f pe $[a, b]$. Pe de altă parte, $\Phi(a)$ este aria unui domeniu plan redus la un segment de dreaptă ;

deci :

$$\Phi(a) = 0.$$

Se poate trage concluzia că Φ este primitiva lui f care se anulează pentru a :

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Dacă F este o primitivă oarecare a lui f pe $[a, b]$, avem :

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a) \text{ (7.3.4).}$$

În particular :

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

TEOREMA. Fie f o funcție continuă, mărginită, pozitivă pe un interval închis, mărginit $[a, b]$ ($a \leq b$). Fie F o primitivă a lui f pe $[a, b]$. Aria

domeniului plan D_f , definită într-un reper ortogonal $\mathcal{R}$ prin :

$$D_f = \left\{ M ; M|_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \quad a \leq x \leq b ; \quad 0 \leq y \leq f(x) \right\},$$

măsurată ca unitate cu aria dreptunghiului u construit pe vectorii unitate ai lui $\mathcal{R}$, este egală cu :

$$\mathcal{A}(D_f) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Observație. — Domeniul D_f este numit asociat funcției f în reperul $\mathcal{R}$.

Exemplu. Fie funcția $f = [x \mapsto \sin x]$.

Aria $\mathcal{A}$ a domeniului D , definit prin :

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq f(x),$$

este aria unui arc al sinusoidei (fig. 6). Avem :

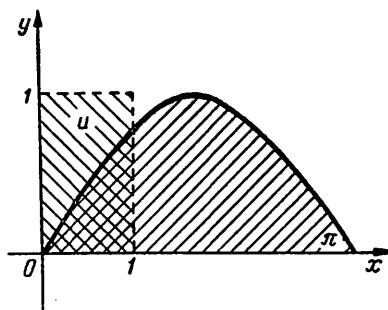


Fig. 6

$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0).$$

$$\mathcal{A} = 2.$$

(Aria este măsurată, avînd ca unitate aria dreptunghiului construit pe vectorii unitate ; acest aspect este adesea subînțeles).

7.4.3 Generalizare

■ CAZUL UNEI FUNCȚII CARE PĂSTREAZĂ UN SEMN CONSTANT

Fie o funcție continuă, pozitivă pe un interval $[b, a]$, închis, mărginit astfel ca : $b \leq a$. Aria domeniului plan definit într-un reper $\mathcal{R}$ prin :

$$b \leq x \leq a \text{ și } 0 \leq y \leq f(x),$$

(măsurată cu unitatea de arie) este conform cu 7.4.3, numărul :

$$\int_b^a f(t) dt.]$$

Or :

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

Dacă a este mai mare sau egal cu b și dacă f este pozitivă pe $[a, b]$, numărul

$\int_a^b f(t) dt$ reprezintă opusul ariei domeniului plan asociat într-un reper $\mathcal{R}$ funcției f .

Fie o funcție f negativă, continuă pe un interval $[a, b]$ închis, mărginit, astfel că $a \leq b$. Aria domeniului plan, definit într-un reper ortogonal $\mathcal{R}$ prin : $a \leq x \leq b$ și $f(x) \leq y \leq 0$ este egală cu aria domeniului plan definit prin :

$$a \leq x \leq b \text{ și } 0 \leq y \leq -f(x),$$

deoarece aceste două domenii sînt simetrice în raport cu axa absciselor. Această arie este deci :

$$\int_a^b f(t) dt.$$

Or :

$$\int_a^b -f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

Dacă funcția f este negativă pe intervalul $[a, b]$ ($a \leq b$), numărul $\int_a^b f(t) dt$

reprezintă opusul ariei domeniului plan asociat, într-un reper ortogonal $\mathcal{R}$, funcției f .

De asemenea dacă funcția f este negativă pe intervalul $[b, a]$ ($b \leq a$), numărul

$\int_a^b f(t) dt$ reprezintă aria domeniului plan asociat, într-un reper ortogonal $\mathcal{R}$, funcției f .

Fie f o funcție continuă care păstrează un semn constant pe un interval închis, mărginit $[a, b]$. Fie D_f domeniul asociat, într-un reper ortogonal $\mathcal{R}$, funcției f .

Fie α dreptunghiul construit pe vectorii unitate ai lui $\mathcal{R}$.

Numărul $\int_a^b f(t) dt$ este un număr algebric :

1° a cărui valoare absolută este aria $\alpha_*(D_f)$ a domeniului D_f ;

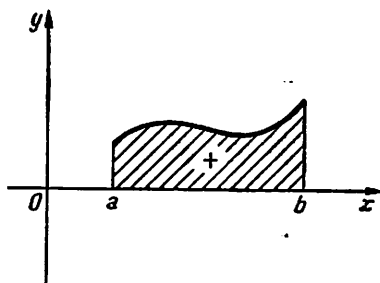


Fig. 7

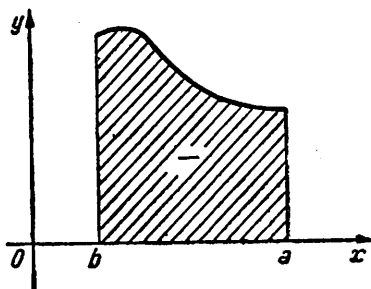


Fig. 8

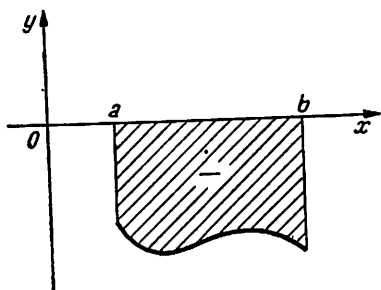


Fig. 9

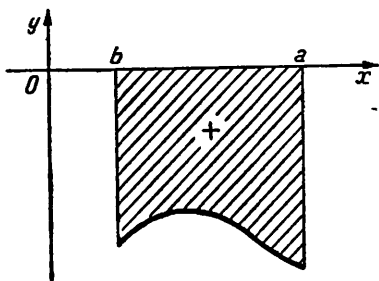


Fig. 10

2° a cărui semn este (figura 7 la 10) :

+ dacă $a \leq b$ și f pozitiv pe $[a, b]$,

sau dacă $a \geq b$ și f negativ pe $[a, b]$;

— dacă $a \leq b$ și f negativ pe $[a, b]$,

sau $a \geq b$ și f pozitiv pe $[a, b]$.

Considerăm drept intuitivă noțiunea de curbă simplă, închisă (fig. 11 a: curbă, simplă închisă; fig. 11 b: curbă închisă nesimplă). Admitem că o curbă simplă închisă, împarte planul în două regiuni, din care una, regiunea interioară, admite o arie.

O curbă simplă orientată este o curbă simplă pe care este definit un „sens de parcurs” (noțiune intuitivă). În aceste condițiuni, dăm următoarea :

DEFINIȚIE. Fie Γ o curbă simplă, închisă, orientată, a planului. Aria algebrică a domeniului plan delimitat de Γ este un număr algebric a cărui valoare absolută este aria acestui domeniu plan, și a cărui semn este + dacă Γ este orientată în sensul trigonometric (pozitiv), și — dacă Γ este orientată în sens invers sensului trigonometric.



Fig. 11

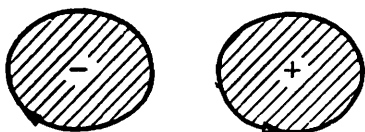


Fig. 12

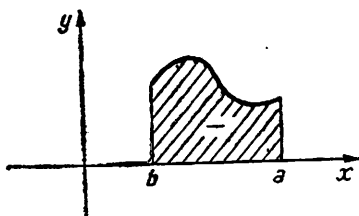


Fig. 13

Cu această definiție (fig. 12), dacă f este o funcție continuă și de semn constant pe un interval închis, mărginit $[a, b]$, domeniul D_f asociat într-un reper $\mathcal{R}$ funcției f este delimitat printr-un contur simplu, închis, orientat desigur de la a la b pe axa absciselor (fig. 13). Se poate deci enunța :

TEOREMA. Numărul $\int_a^b f(t) dt$ este aria algebrică a domeniului asociat într-un reper $\mathcal{R}$ funcției continue f care păstrează un semn constant pe $[a, b]$.

■ CAZUL UNEI FUNCȚII OARECARE

Dacă f este o funcție continuă pe un interval închis, mărginit $[a, b]$, ea este de semn constant pe intervale. Numărul $\int_a^b f(t) dt$ este o sumă algebrică a ariilor.

Pentru a găsi aria domeniului asociat într-un reper $\mathcal{R}$ a lui f , trebuie să împărțim pe $[a, b]$ în intervale în care funcția f păstrează un semn constant, să calculăm ariile domeniilor asociate în $\mathcal{R}$ lui f a acestor diverse intervale și apoi să facem suma lor (fig. 14).

■ CALCULUL UNEI ARII

Fie, într-un plan raportat la un reper $\mathcal{R}$, un domeniu D a cărui arie căutăm să o evaluăm (unitatea u , dreptunghi construit pe vectorii unitate).

- Dacă D este asociat unei funcții f , se aplică metoda precedentă.
- Dacă D nu este asociat unei funcții f , se încearcă să se scrie D sub forma unei intersecții de domenii asociate unor funcții continue și a căror arie știm să o calculăm.

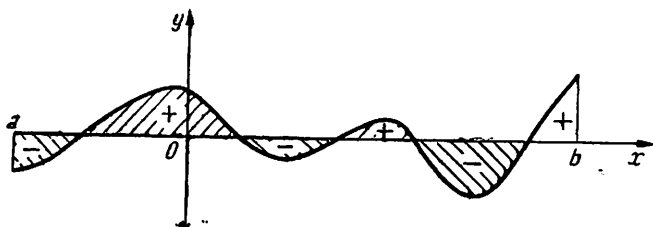


Fig. 14

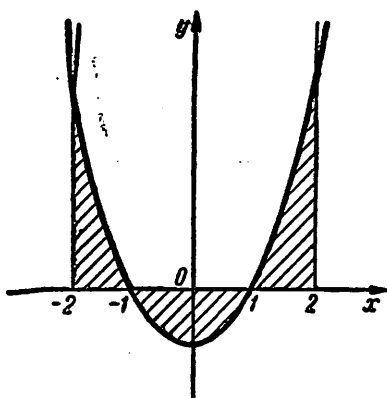


Fig. 15

Exemple. I. Fie: $f(x) = x^2 + 1$.

Fie Γ graficul lui f într-un reper $\mathcal{R}$. Aria $\mathcal{A}$ a domeniului cuprins între Γ , axa absciselor reperului $\mathcal{R}$ și dreptele de ecuații $x = -1$ și respectiv $x = 2$, este:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-1}^2 f(t) dt = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^2 = \\ &= \left(\frac{8}{3} + 2 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right); \\ \mathcal{A} &= 6.\end{aligned}$$

II. Fie: $f(x) = -\sqrt[3]{x}$.

Fie Γ graficul lui f într-un reper $\mathcal{R}$. Aria $\mathcal{A}$ a domeniului cuprins între Γ , axa absciselor a reperului $\mathcal{R}$ și dreptele cu ecuațiile $x = 0$ și $x = 1$, este:

$$\mathcal{A} = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| = \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx = \left[\frac{3x^{4/3}}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4}.$$

III. Fie: $f(x) = x^3 - 1$.

Fie Γ graficul lui f într-un reper $\mathcal{R}$. Aria $\mathcal{A}$ a domeniului cuprins între Γ , axa absciselor a reperului $\mathcal{R}$ și dreptele cu ecuațiile $x = -2$ și $x = 2$, este

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3. \quad (\text{fig. 15})$$

$$\mathcal{A}_1 = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-2}^{-1} = \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{4}{3};$$

$$\mathcal{A}_2 = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^1 = - \left[\left(\frac{1}{3} - 1 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \right] = \frac{4}{3};$$

$$\mathcal{A}_3 = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = \mathcal{A}_1 = \frac{4}{3}.$$

Deci:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = 4.$$

IV. Fie: $f(x) = 2x^2 - 1$ și fie Γ curba reprezentativă a lui f într-un reper $\mathcal{R}$. Fie $g(x) = x$ și fie Γ' curba reprezentativă a lui g în reperul $\mathcal{R}$.

Să se găsească aria domeniului determinat de Γ și Γ' (fig. 16).

Punctele comune ale lui Γ și Γ' au drept abscisă soluțiile ecuației definite pe $\mathbb{R}$ prin $2x^2 - 1 = x$, adică:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = -\frac{1}{2}.$$

Pe de altă parte, fie:

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f(x_2) = 0.$$

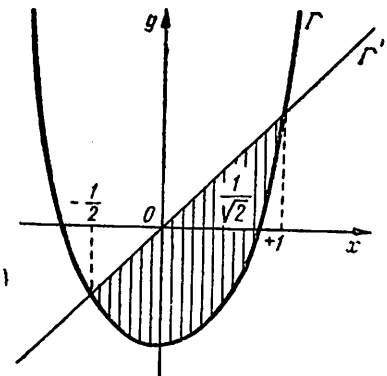


Fig. 16

Pe intervalul $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, avem:

$$0 \geq g(x) \geq f(x).$$

Aria α_1 a porțiunii din domeniul studiat D , corespunzătoare punctelor de abscisă negativă este, deci:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \left| \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(t) dt \right| - \left| \int_{-\frac{1}{2}}^0 g(t) dt \right|, \\ \alpha_1 &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 (f(t) - g(t)) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (2t^3 - t - 1) dt, \\ \alpha_1 &= \left[\frac{2t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - t \right]_{-\frac{1}{2}}^0 = -\frac{2}{3 \times 2^3} - \frac{1}{2 \times 2^3} + \frac{1}{2}, \\ \alpha_1 &= \frac{-2 - 3 + 12}{24} = \frac{7}{24}.\end{aligned}$$

Pe intervalul $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, avem:

$$g(x) \geq 0 \geq f(x).$$

Aria α_2 a porțiunii din domeniul studiat C , corespunzătoare punctelor de abscise cuprinse între 0 și $\frac{1}{\sqrt{2}}$, este, deci:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \left| \int_0^{1/\sqrt{2}} f(t) dt \right| + \left| \int_0^{1/\sqrt{2}} g(t) dt \right| = \int_0^{1/\sqrt{2}} -f(t) dt + \int_0^{1/\sqrt{2}} g(t) dt = \int_0^{1/\sqrt{2}} (g(t) - f(t)) dt = \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} (-2t^3 + t + 1) dt = \left[-\frac{2t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + t \right]_0^{1/\sqrt{2}}; \\ \alpha_2 &= \frac{8 + 3\sqrt{2}}{12\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

În sfârșit, pe intervalul $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$, avem:

$$g(x) \geq f(x) \geq 0.$$

Aria α_3 a porțiunii din domeniul studiat D , corespunzătoare punctelor de abscisă superioară ui $\frac{1}{\sqrt{2}}$ este, deci:

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \int_{1/\sqrt{2}}^1 g(t) dt - \int_{1/\sqrt{2}}^1 f(t) dt = \int_{1/\sqrt{2}}^1 [g(t) - f(t)] dt = \int_{1/\sqrt{2}}^1 (-2t^3 + t + 1) dt = \\ &= \left[-\frac{2t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + t \right]_{1/\sqrt{2}}^1 = \left(-\frac{2}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{8 + 3\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = \frac{5}{6} - \frac{8 + 3\sqrt{2}}{12\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Avem :

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{7}{24} + \frac{8 + 3\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} + \frac{5}{6} - \frac{8 + 3\sqrt{2}}{12\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \frac{27}{24}.$$

Aria domeniului limitat de curbele reprezentative Γ și Γ' a două funcții f și g .
Fie f și g două funcții și fie Γ și Γ' curbele reprezentative într-un reper $\mathcal{R}$ ale lui f și g .

Să presupunem că, pentru orice element x din $[a, b]$, avem :

$f(x) \geq g(x)$ și că f și g sînt continue pe $[a, b]$.

Fie D domeniul delimitat de Γ și Γ' și de dreptele de ecuații $x = a$ și $x = b$.

Punem deci :

$$\varphi(x) = f(x) + h,$$

$$\psi(x) = g(x) + h,$$

astfel ca $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ să fie pozitive pe $[a, b]$.

Domeniul D' delimitat în $\mathcal{R}$ de curbele reprezentative ale funcțiilor ψ și φ este egal cu domeniul studiat D , deoarece el se deduce printr-o translație.

Aria α a lui D' , deci a lui D , este egală cu :

$$\alpha = \int_a^b \varphi(t) dt - \int_a^b \psi(t) dt = \int_a^b (f - g)(t) dt.$$

Exemplu. Exemplul precedent se tratează sub o formă mult mai rapidă, prin această metodă :

$$f(x) = 2x^2 - 1,$$

$$g(x) = x,$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 1.$$

Pe intervalul $[a, b]$, avem :

$$g(x) \geq f(x);$$

$$\text{deci: } \alpha = \int_{-1/2}^1 [g(t) - f(t)] dt = \int_{-1/2}^1 (-2t^2 + t + 1) dt = \left[-\frac{2}{3}t^3 + \frac{t^2}{2} + t \right]_{-1/2}^1 = \frac{27}{24}.$$

EXERCIIII

În cazurile următoare, să se construiască într-un reper $\mathcal{R}$ curba Γ de ecuație $y = f(x)$, apoi să se calculeze aria domeniului D ale cărui limite sînt precizate.

7.104 $f(x) = \sin x$;

D este limitat de curbă, axa absciselor și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = \frac{\pi}{3}$.

$$7.105 \ f(x) = \frac{1}{x^3};$$

D este limitat de curbă, axa absciselor și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$.

$$7.106 \ f(x) = \frac{1}{\cos^3 x};$$

D este domeniul asociat lui *f* în $\mathcal{R}$, pentru intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

$$7.107 \ f(x) = 3x^2 - x + 5;$$

D este domeniul asociat în $\mathcal{R}$ lui *f*, pentru intervalul $[-1, 2]$.

$$7.108 \ f(x) = \sin x - 2 \cos x;$$

D este domeniul asociat în $\mathcal{R}$ lui *f*, pentru intervalul $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

$$7.109 \ f(x) = x^2 - x - 6;$$

D este domeniul delimitat de Γ și axa absciselor reperului.

$$7.110 \ f(x) = (2 + \cos x) \sin x;$$

D este unul dintre domeniile conexe delimitate de curbă și axa absciselor reperului.

$$7.111 \ f(x) = x - \sqrt{x};$$

D este domeniul delimitat de Γ și axa absciselor corespunzătoare ordonatelor negative.

$$7.112 \ f(x) = x^2(3 - x);$$

D este domeniul delimitat de Γ și axa absciselor reperului.

* * *

7.113 Se consideră parabola a cărei ecuație într-un reper $\mathcal{R}$ este definită prin:

$$y = ax^2 + bx + c = f(x).$$

Fie $\mathcal{A}$ aria algebrică a domeniului delimitat de curbă, axa absciselor și dreptele de ecuație $x = x_0$ și $x = x_1$. Să se demonstreze că avem:

$$6\mathcal{A} = (x_1 - x_0) \left[f(x_0) + f(x_1) + 4f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) \right].$$

(Formulă zisă „a celor trei nivele”).

Aplicație:

$$f(x) = -x^2 + x + 12, \quad x_0 = 0 \text{ și } x_1 = 3.$$

* * *

Să se determine aria $\mathcal{A}$ a domeniului *D* delimitat de curbele reprezentative într-un reper $\mathcal{R}$ a funcțiilor *f* și *g* definite prin:

$$7.114 \ f(x) = \frac{x^2}{4};$$

$$g(x) = -\frac{x^2}{4} + x + 12.$$

$$7.115 \ f(x) = x^4;$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x}.$$

$$7.116 \ f(x) = x^2;$$

$$g(x) = x + 2.$$

$$7.117 \ f(x) = \cos x;$$

$$g(x) = \frac{2}{\pi}x + 1.$$

$$7.118 \ f(x) = x^4 - x^2 + 1;$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2.$$

7.119 $f(x) = x^3$;
 $g(x) = 3x^2 - 1$.

* * *

7.120 *Curbele de ecuație $y = \sin x$ și $y = \cos x$ determină, într-un reper $\mathcal{A}$, o infinitate de domenii închise, isometrice. Să se calculeze aria unuia dintre ele și justificați faptul că aceste domenii sînt isometrice.*

7.121 Fie f și g funcțiile definite pe intervalul $[-3, -2]$ prin:

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \text{ și } g(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Să se calculeze aria domeniului delimitat într-un reper $\mathcal{A}$ de curbele reprezentative ale lui f și g , pe intervalul $[-3, -2]$.

7.122 Să se evalueze aria domeniului delimitat prin curbele de ecuații:

$$y = -\frac{1}{x^2}; y = \frac{1}{x}, y = x, y = -x, x = 4.$$

7.123 Să se evalueze aria domeniului delimitat prin curbele de ecuații:

$$y = \operatorname{tg} x, y = \cos x, x = -\frac{\pi}{4}, x = 0,$$

7.124 Să se evalueze aria domeniului delimitat prin curbele de ecuații:

$$y = 2x^2, y = x^2, y = \sqrt[3]{x}.$$

7.125 Fie f funcția definită prin:

$$f(x) = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} - 2\sqrt{2}.$$

1° Să se studieze funcția f și faceți o reprezentare grafică Γ (reper $\mathcal{A}$).

2° Să se calculeze aria domeniului delimitat de Γ și axa absciselor reperului $\mathcal{A}$.

7.126 Fie funcția f definită prin $f(x) = \frac{8x}{(x^2 - 4)^2}$.

1° Să se studieze funcția f și să se facă și o reprezentare grafică Γ (reper $\mathcal{A}$).

2° Să se determine două numere reale a și b astfel ca:

$$\forall_{x \in \{2, -2\}}; f(x) = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x+2)^2}.$$

3° Să se calculeze aria domeniului cuprins între axa absciselor reperului $\mathcal{A}$, curba Γ și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = \frac{3}{2}$.

7.127 1° Să se construiască într-un reper $\mathcal{A}$ graficul Γ al funcției f definite prin

$$x \in [0, 1] \text{ și } f(x) = x - x^2.$$

2° Să se determine a astfel ca dreapta de ecuație $y = ax$, să împartă domeniul limitat de Γ și axa absciselor reperului în două domenii de arii egale.

7.128 Fie f funcția definită prin:

$$f(x) = \frac{x}{2} + p + \frac{r}{x^2}.$$

1° Să se calculeze p și r astfel ca $f(-1) = 0$ și f să admită un minim pentru $x = 2$. Să se traseze graficul Γ al lui f într-un reper $\mathcal{A}$ (se va determina asimptota sa Δ „oblică”).

2° Să se calculeze aria domeniului cuprins între Γ , Δ și dreptele de ecuații $x = 3$ și $x = X$. Această arie, are o limită atunci cînd X este infinit?

7.5 INTEGRALE GENERALIZATE

7.5.1 Cazul în care intervalul de integrare nu este închis

Fie f o funcție mărginită și continuă pe intervalul $[a, b[$. Pe orice interval închis, mărginit $[a, x]$ ($x \in [a, b[$), f este integrabilă.

Fie :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Funcția F este o primitivă a lui f . Ea este deci continuă. $F(b)$ poate fi definită prin limita în b , dacă există, a funcției F :

$$F(b) = \lim_{b^-} F,$$

care se notează de asemenea și cu $\int_a^b f(t) dt$ și pe care o numim integrală de f pe $[a, b[$.

Fie g o funcție mărginită și continuă pe intervalul închis, mărginit $[a, b]$, astfel ca, pentru orice x din intervalul $[a, b[$:

$$f(x) = g(x),$$

$g(b)$ fiind arbitrar.

Avem :

$$\forall_{[a, b[} x \quad \int_a^x f(t) dt = \int_a^x g(t) dt,$$

și

$$\lim_{b^-} \left[x \mapsto \int_a^x f(t) dt \right] = \lim_{b^-} \left[x \mapsto \int_a^x g(t) dt \right],$$
$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt.$$

TEOREMA. Integrala unei funcții f mărginite pe un interval dat I este egală
1 cu integrala lui f pe intervalul închis, mărginit I (aderența lui I , cel mai mic interval închis conținând pe I).

Din această importantă teoremă se poate deduce, împărțind intervalul I în intervale bine alese, următoarea :

TEOREMA. Fie f și g două funcții mărginite, continue pe un interval I oarecare.
2 Dacă f și g sînt egale pe I cu excepția unui număr finit de puncte, atunci integralele lui f și g sînt egale pe I .

Se demonstrează că această teoremă este valabilă pentru o infinitate numărabilă de puncte ale lui I .

7.5.2 Cazul în care funcția nu este mărginită

Fie f o funcție continuă pe un interval mărginit $I = [a, b]$, astfel că f nu este mărginită în vecinătatea lui b :

$$\forall_{\epsilon > 0} N, \forall_{\epsilon > 0} \eta, \exists_I x |x - b| < \eta \Rightarrow f(x) > N.$$

Presupunem între altele că, pentru orice element x a lui I , f este mărginit pe intervalul $I = [a, x]$.

Integrala lui f pe $[a, x]$ există; prin urmare, dacă F este o primitivă a lui f pe I :

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

DEFINIȚIE. Dacă funcția F admite o limită finită L în b , se zice că integrala

$$\int_a^b f(t) dt \text{ este convergentă, și se scrie:}$$

$$\int_a^b f(t) dt = L - F(a).$$

În mod curent, acest caz are loc când f are în b o limită infinită, dar nu este singurul caz (de exemplu: $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ în vecinătatea lui 0).

Dacă f nu este mărginită în vecinătatea lui a , se definește în același fel o integrală convergentă pe $[a, b]$.

DEFINIȚIE. O integrală neconvergentă se numește divergentă.

2

Exemple. I. Fie, pe intervalul $]0, 1]$: $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Funcția f nu este mărginită în vecinătatea lui 0. Avem:

$$\Phi(x) = \int_x^1 f(t) dt = \int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_x^1 = -1 + \frac{1}{x},$$

$$\text{și } \lim_{x \rightarrow 0} \Phi = +\infty.$$

Integrala $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ este deci divergentă.

II. Fie, pe intervalul $]0, 1]$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Funcția f nu este mărginită în vecinătatea lui 0. Avem :

$$\Phi(x) = \int_x^1 f(t) dt = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x},$$

și $\lim \Phi = 2$.

Integrala $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ este deci convergentă. Avem : $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.

7.5.3 Cazul unui interval nemărginit

Fie f o funcție definită și continuă pe un interval nemărginit I (fie, de exemplu, $I = [a, +\infty[$). Mai presupunem că f are limita zero la $+\infty$. În aceste condiții, pentru orice x real superior lui a , există integrala lui f pe $[a, b]$. Fie F o primitivă a lui f pe $[a, +\infty[$. Avem :

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

DEFINIȚIE. Dacă funcția F admite o limită L în $+\infty$, se spune că $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ este convergentă, și se scrie :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = L - f(a).$$

Într-un mod analog se definește convergența integralei :

$$\int_{-\infty}^a f(t) dt.$$

Fie f o funcție continuă definită pe $\mathbb{R}$, ale cărei limite la $+\infty$ și $-\infty$ sînt nule. Se stabilește următoarea definiție :

DEFINIȚIE. Integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ este convergentă dacă există un număr real a astfel ca integralele $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ și $\int_{-\infty}^a f(t) dt$ să fie convergente. Atunci, avem :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt.$$

Observații. — 1 Fie funcția $F = \left[x \mapsto \int_{-x}^{+x} f(t) dt \right]$.

Condiția $\lim_{+\infty} F = L$ nu este suficientă pentru a asigura convergența integralei

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ către L (exemplul următor).

2. Dacă limita lui f la $+\infty$ există și nu este nulă (să o presupunem pozitivă), există un minorant ε pozitiv nenul pentru funcția f într-o vecinătate a lui $+\infty$ de forma $[a, +\infty[$. Pentru orice x superior lui a , avem:

$$0 \leq \varepsilon \leq f(x).$$

De unde:

$$\int_a^x \varepsilon dt \leq \int_a^x f(t) dt,$$

deci:

$$\int_a^x f(t) dt \geq \varepsilon (x - a).$$

Cum:

$$\lim_{+\infty} [x \mapsto \varepsilon(x - a)] = +\infty,$$

funcția $\left[x \mapsto \int_a^x f(t) dt \right]$ nu are o limită finită.

Rezultă că integrala $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ este divergentă.

Obținem aceleași concluzii dacă limita lui f la $+\infty$ este strict negativă. Se obțin exact aceleași concluzii în vecinătatea lui $-\infty$.

3. Dacă este vorba de o funcție care nu are limită la $+\infty$, sînt posibile toate cazurile; este necesar să se facă un studiu direct, cu ajutorul formei particulare a lui f . De asemenea, putem să ne servim de regulile de comparare a integralelor.

Exemple. I. Fie $f(x) = x^2$.

Oricare este numărul real a , $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ este divergentă ca și $\int_{-\infty}^a f(t) dt$.

Dar, pentru oricare x , $\Phi(x) = \int_{-x}^{+x} f(t) dt$ este nulă.

Deci: $\lim_{+\infty} \Phi = 0$.

II. Fie $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Avem:
$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_a^x = -\frac{1}{x} + \frac{1}{a};$$

ca urmare: $\lim_{+\infty} \Phi = \frac{1}{a}$

Integrala $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ este convergentă și:

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{a}.$$

III. Fie: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Avem:
$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt = [2\sqrt{t}]_a^x = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{a}$$

și: $\lim_{+\infty} \Phi = +\infty.$

Integrala $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ este divergentă.

7.5.4 Interpretare grafică

Integralele generalizate pot fi interpretate ca arii ale domeniilor plane a căror puncte nu sînt toate la distanță finită de originea reperului. Drept exemplu, să considerăm funcția $f = \left[x \mapsto \frac{1}{x^2} \right]$.

Aria $\mathcal{A}$ a domeniului D cuprins între curba reprezentativă a lui f , axa absciselor și dreapta de ecuație $x = a (a \geq 0)$, este:

$$\mathcal{A} = \int_a^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{a}.$$

Din contra, aria $\mathcal{A}'$ a domeniului D' cuprins între curbă, axa absciselor, axa ordonatelor și dreapta de ecuație $x = a (a \geq 0)$ nu este finită (această arie nu există).

Într-adevăr: $\int_0^a f(t) dt$ este divergentă (fig. 17).

Fie, de asemenea, funcția $g = \left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \right]$.

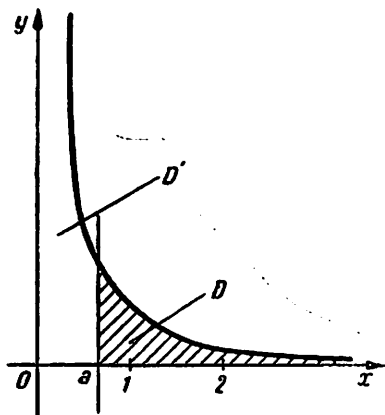


Fig. 17

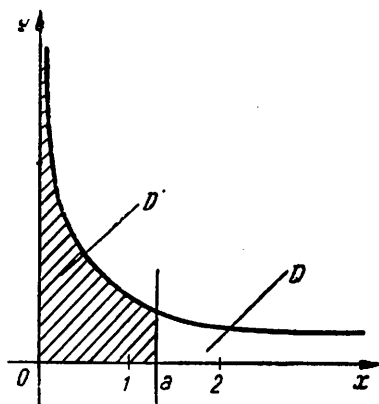


Fig. 18

Aria $\mathcal{A}$ a domeniului D cuprins între curba reprezentativă a lui g , axa absciselor și dreapta de ecuație $x = a (a \geq 0)$, nu este finită. Din contră, aria $\mathcal{A}'$ a domeniului D' cuprinsă între curbă, axa absciselor, axa ordonatelor și dreapta de ecuație $x = a (a \geq 0)$, este

$$\mathcal{A}' = \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{a} \text{ (fig. 18).}$$

Aria unor astfel de domenii nemărginite D este definită astfel, prin trecerea la limită în unele domenii mărginite, care sînt incluse în D .

EXERCIȚII

7.129 Fie α un număr rațional pozitiv diferit de 1.

1° Pentru ce valori ale lui α integrala $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ este convergentă?

2° Pentru ce valori ale lui α integrala $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ este convergentă?

3° Există valori ale lui α pentru care integrala $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ este convergentă?

7.130 Fie f și g două funcții definite continue și pozitive pe un interval $I = [a, +\infty[$. Să presupunem că, pe I , avem:

$$0 \leq f(x) \leq g(x).$$

1° Să se demonstreze că, dacă integrala $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ este convergentă atunci integrala $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ este convergentă.

(Se va folosi mulțimea $E = \left\{ \int_a^x f(t) dt; x \in [a, +\infty[\right\}$.)

2° Să se demonstreze că, dacă integrala $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ este divergentă atunci și integrala $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ este divergentă.

7.131 Fie f o funcție a cărei integrală $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ este convergentă. Fie φ și ψ două funcții pentru care:

$$f = \varphi - \psi \text{ și } |f| = \varphi + \psi.$$

(φ și ψ sînt părțile pozitivă și respectiv negativă ale lui f).

Să se utilizeze rezultatele din exercițiul 7.130 pentru a demonstra că integrala $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ este convergentă.

(O astfel de integrală este numită *absolut convergentă*).

7.132 Fie f și g două funcții continue nemărginite în vecinătatea V a lui a , astfel că: $\forall_V x$ $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

1° Să se demonstreze că, dacă integrala $\int_b^a f(t) dt$ este divergentă, atunci integrala $\int_b^a g(t) dt$ este divergentă.

2° Să se demonstreze că, dacă integrala $\int_b^a g(t) dt$ este convergentă atunci și integrala $\int_b^a f(t) dt$ este convergentă.

3° Fie h o funcție continuă nemărginită în vecinătatea lui a . Să se demonstreze că, dacă inte-

grala $\int_b^a |h(t)| dt$ este convergentă, atunci și integrala $\int_b^a h(t) dt$ este convergentă.

(Se va folosi aceeași metodă ca și în exercițiul 7.131).

7.133 Fie f funcția definită pe $\mathbb{R}^*$ prin:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x}.$$

Folosind rezultatele din exercițiul 7.132 să se demonstreze că integrala $\int_0^1 f(t) dt$ este convergentă.

7.134 Fie f o funcție definită pe $\mathbb{R}$ prin :

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \sin x.$$

Utilizând rezultatele din exercițiul 7.131, să se demonstreze că integrala $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ este convergentă.

Să se studieze următoarele integrale și să se facă interpretarea geometrică :

$$7.135 \int_3^5 \frac{dt}{\sqrt{3-t}}.$$

$$7.136 \int_{-3}^{-\frac{7}{3}} \frac{dt}{\sqrt[3]{7+3t}}$$

$$7.137 \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt[5]{(12-4t)^3}}$$

$$7.138 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{12t+4}$$

$$7.139 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+4)^3}$$

$$7.140 \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(3t-27)^3}$$

$$7.141 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{(12+4t)^3}}$$

$$7.142 \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{\sqrt[3]{(3-5t)^3}}$$

$$7.143 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$$

$$7.144 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$$

$$7.145 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{h^3+t^3}$$

7.6 DIVERSE APLICAȚII ALE NOȚIUNII DE INTEGRALĂ

7.6.1 Volume

Considerăm un spațiu afin euclidian real E_3 , de trei dimensiuni.

Considerăm ca intuitivă noțiunea de volum a unui domeniu al spațiului.

Fie o submulțime Σ de puncte din spațiu. Vom spune că Σ este o suprafață simplă dacă orice plan care o întâlnește o taie după o curbă plană închisă simplă Γ sau după o reuniune de astfel de curbe, delimitând un domeniu plan a cărui arie știm să o calculăm.

Fie D un domeniu al spațiului E_3 delimitat printr-o suprafață simplă Σ . Fie $\mathcal{R}$ un reper ortonormat al lui E_3 . Fie P_λ un plan de ecuație $z = \lambda$ în $\mathcal{R}$, care întâlnește pe Σ după curba plană Γ_λ ce delimitează un domeniu plan a cărui arie $\mathcal{A}(\lambda)$ este funcție de λ (fig. 19).

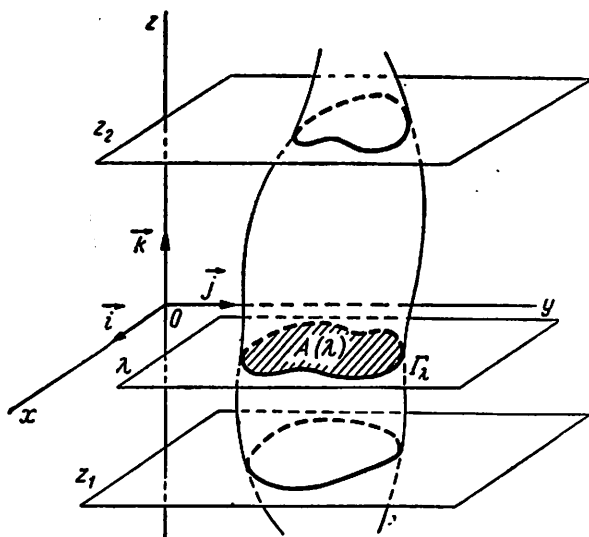


Fig. 19

Admitem în aceste condiții că volumul domeniului delimitat de Σ și planele de ecuații $z = z_1$ și $z = z_2$ și măsurat cu volumul construit pe vectorii de bază, luat ca unitate de volum, este dat de:

$$V = \left| \int_{z_1}^{z_2} a(\lambda) d\lambda \right|.$$

■ PRISME, CILINDRI, PIRAMIDE, CONURI

Fie Γ_0 o curbă plană simplă închisă. Fie δ o direcție de drepte din spațiu și Ω un punct al spațiului. Presupunem că δ nu este paralelă cu planul Γ_0 și că Ω nu aparține planului curbei Γ_0 .

Se numește *suprafață cilindrică* a curbei directoare Γ_0 și a direcției δ , suprafața generată de mulțimea de drepte de direcție δ care au cu Γ_0 o intersecție nevidă (fig. 20 a).

Dacă Γ_0 este un poligon, se obișnuiește ca suprafața cilindrică obținută să fie denumită *suprafață prismatică* (fig. 20 b).

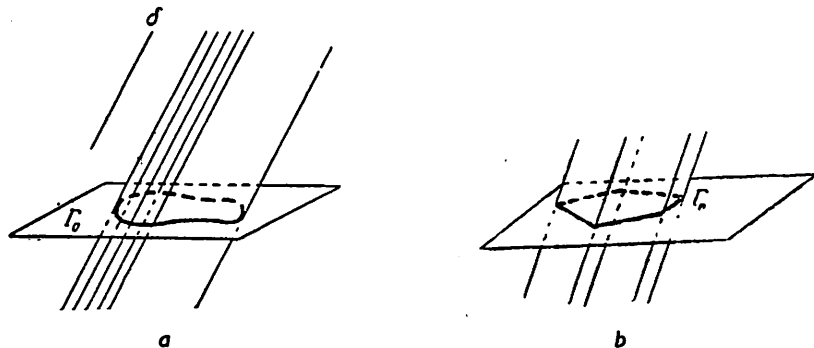


Fig. 20

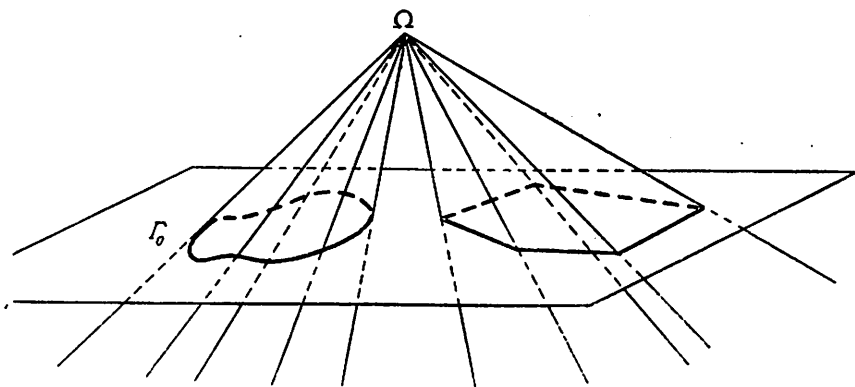


Fig. 21

Se numește *suprafață conică de vîrf Ω* și de *curbă directoare Γ_0* suprafața generată de dreptele din spațiu ce trec prin Ω și care au cu Γ_0 o intersecție nevidă. (Dacă Γ_0 este un poligon, această suprafață se numește *suprafață piramidală*, fig. 21.)

Se numește *cilindru* (sau *prismă*) porțiunea din spațiu delimitată de o suprafață Σ cilindrică (respectiv prismatică) și două plane P_1 și P_2 , paralele între ele, dar neparalele cu direcția suprafeței. Planele P_1 și P_2 taie Σ după două domenii plane numite bazele cilindrului (respectiv ale prisme).

Se numește *con* (sau *piramidă*) porțiunea din spațiu delimitată de o suprafață Σ conică (respectiv piramidală) pe de o parte, de vîrf Ω și un plan P care taie Σ după o curbă simplă închisă numită baza conului, pe de altă parte.

Se numește *trunchi de con* (sau de *piramidă*) porțiunea din spațiu delimitată printr-o suprafață Σ conică (respectiv piramidală) pe de o parte și două plane P_1 și P_2 pe de alta, care taie Σ după curbe simple închise.

■ VOLUMUL CILINDRULUI

Fie C un cilindru și fie $\mathcal{A}$ un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ astfel încît planul $(O, \vec{i}, \vec{j})$ să fie paralel cu bazele lui C (fig. 22).

În aceste condiții, dacă P_1 și P_2 sînt planele de bază ale lui C : P_1 are o ecuație de forma $z = z_1$, și P_2 are o ecuație de forma $z = z_2$.

Fie λ un număr real cuprins între z_1 și z_2 . Planul P_λ de ecuație $z = \lambda$ taie C după o curbă plană închisă simplă Γ_λ care se deduce printr-o translație din curba de bază Γ_{z_1} .

Fie $\mathcal{A}$ aria delimitată de Γ_{z_1} și $\mathcal{A}(\lambda)$ aria delimitată de Γ_λ ; Γ_λ fiind izometrică cu Γ_{z_1} , avem $\mathcal{A}(\lambda) = \mathcal{A}$.

Ca urmare, volumul V al cilindrului C este dat de:

$$V = \left| \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{A} d\lambda \right| = \left| [\lambda \mathcal{A}]_{z_1}^{z_2} \right| = \mathcal{A} |z_2 - z_1|.$$

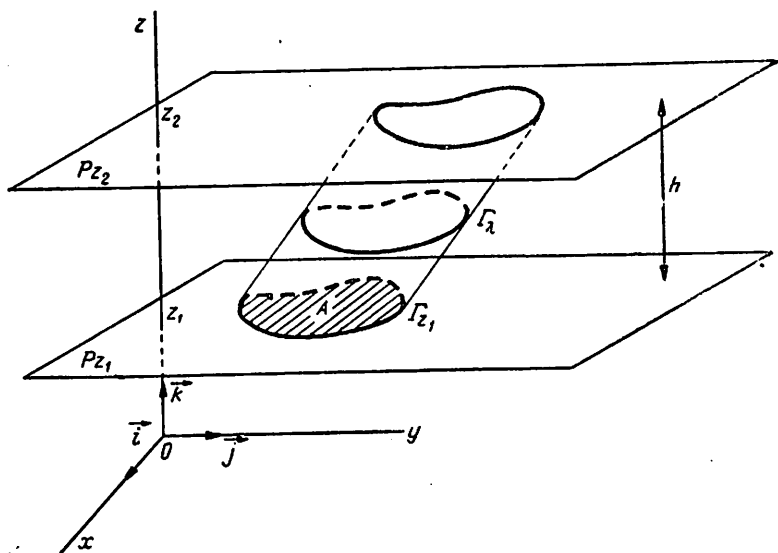


Fig. 22

Valoarea absolută $|z_2 - z_1|$ este numită înălțimea cilindrului (respectiv a prismei). Așadar, dacă luăm $h = |z_2 - z_1|$:

$$V = \mathcal{A}h$$

($\mathcal{A}$ este aria suprafeței bazei)

■ VOLUMUL CONULUI (PIRAMIDEI)

Fie B un con și fie $\mathcal{R}$ un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ astfel încât vârful conului să fie în O iar planul $(O, \vec{i}, \vec{j})$ să fie paralel cu planul de bază al lui B . Fie $z = z_1$, ecuația planului de bază al conului B . Fie $\mathcal{A}$ aria domeniului plan delimitat de baza Γ a conului B (fig. 23).

Fie λ un număr real cuprins între 0 și z_1 . Planul P_λ de ecuație $z = \lambda$ taie conul B după o curbă Γ_λ omotetică cu Γ în raportul $\frac{\lambda}{z_1}$. Admitem că, în aceste condiții, aria suprafeței delimitată de Γ_λ are drept măsură $\mathcal{A}(\lambda)$ dat de:

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{z_1}\right)^2 \mathcal{A}.$$

Prin urmare, volumul conului B este dat de:

$$V = \left| \int_0^{z_1} \mathcal{A}(\lambda) d\lambda \right| = \left| \int_0^{z_1} \frac{\mathcal{A}\lambda^2}{z_1^2} d\lambda \right| = \frac{\mathcal{A}}{z_1^2} \left| \left[\frac{\lambda^3}{3} \right]_0^{z_1} \right| = \mathcal{A} \frac{|z_1|}{3}.$$

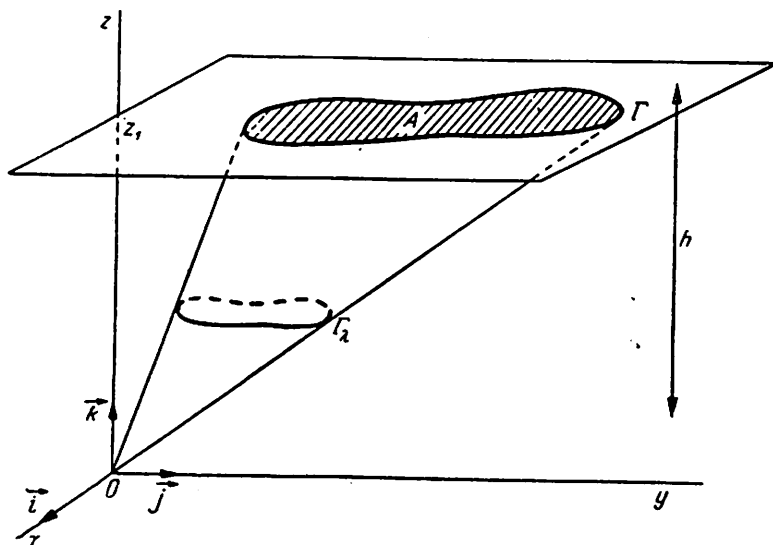


Fig. 23

Valoarea absolută $|z_1|$ este numită *înălțimea conului* (respectiv a piramidei). Dacă luăm $h = |z_1|$, avem:

$$V = \frac{1}{3} a h$$

(a este aria suprafeței bazei).

■ VOLUMUL SFEREI

Fie Σ o sferă de rază R și fie $\mathcal{R}$ un reper ortonormat cu originea în O , centru lui Σ . Fie P_λ un plan de ecuație $z = \lambda$ ($|\lambda| \leq R$); P_λ taie Σ după un cerc Γ_λ a cărui rază $\rho(\lambda)$ este astfel încât (fig. 24):

$$\rho(\lambda)^2 + \lambda^2 = R^2.$$

Rezultă:

$$\rho(\lambda)^2 = R^2 - \lambda^2.$$

Aria $a(\lambda)$ a cercului Γ_λ este deci:

$$a(\lambda) = \pi \rho(\lambda)^2 = \pi (R^2 - \lambda^2).$$

Prin urmare, volumul V al sferei este dat de:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R (R^2 - \lambda^2) d\lambda = \pi \left[R^2 \lambda - \frac{\lambda^3}{3} \right]_{-R}^R = \\ &= \pi \left[\left(R^2 - \frac{R^3}{3} \right) - \left(-R^2 + \frac{R^3}{3} \right) \right] = 2\pi \frac{2R^3}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

■ VOLUMUL DOMENIULUI LIMITAT DE O SUPRAFAȚĂ DE ROTAȚIE

Fie D o dreaptă în spațiu și Γ un arc de curbă conținut în același plan cu D . Se numește *suprafață de rotație* de axă D , și la care Γ este o generatoare, suprafața născută prin pozițiile lui Γ în rotația în spațiu de axă D și de un unghi oarecare (fig. 25).

Fie Σ o suprafață de rotație de axă D . Fie $\mathcal{R}$ un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ astfel încât $(O, \vec{k})$ este un reper a lui D , și fie $y = f(z)$ ($z \in [z_1, z_2]$) ecuația generatoarei Γ a lui Σ , conținute în planul $(O, \vec{j}, \vec{k})$. Planul P_λ de ecuație $z = \lambda$ taie Σ după un cerc Γ_λ de rază $f(\lambda)$. Prin urmare, aria cercului este:

$$a(\lambda) = \pi f(\lambda)^2$$

și volumul V al domeniului delimitat de Σ este dat de:

$$V = \int_{z_1}^{z_2} \pi f(\lambda)^2 d\lambda.$$

Exemplu. Fie un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a spațiului afin euclidian de 3 dimensiuni. Fie Γ curba definită în planul $(O, \vec{j}, \vec{k})$ prin ecuația sa $y = \sqrt{x}$, cu $0 \leq y \leq 2$ (fig. 26). Domeniul definit prin suprafața de rotație de axă Oz , format de Γ , are ca volum:

$$V = \int_0^4 \pi x dx = \left[\pi \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi.$$

7.6.2 Mase. Momente de inerție

Fie S un solid material care ocupă un domeniu D în spațiu. Se poate întâmpla ca domeniul D să fie de o formă atât de particulară încât, într-o primă aproximație, să poată fi asimilat cu o porțiune de plan, de dreaptă sau chiar cu un punct. Este vorba atunci de *solidul plan rectiliniu* sau *punctiform*.

Solidului S i se atașează un coeficient care caracterizează inerția sa, masa, a cărui definiție exactă este dată în fizică.

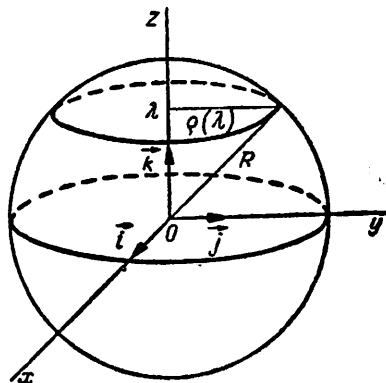


Fig. 24

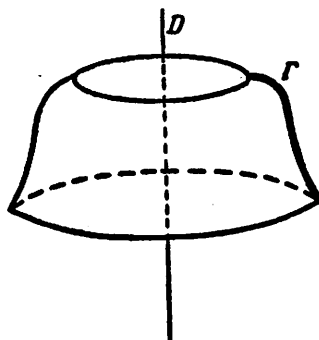


Fig. 25

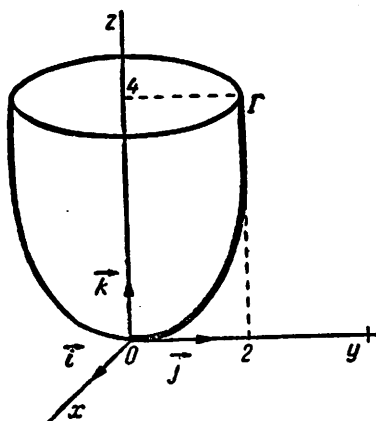


Fig. 26

Să presupunem că solidul S este format dintr-o mulțime de solide punctiforme $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ de mase $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$. Masa solidului S este deci suma maselor solidelor S_i .

La fel se definește centrul de inerție al lui S ca baricentrul punctelor M_i (poziția solidului S_i) de coeficienți m_i .

■ SOLIDE OMOGENE

Să presupunem acum că S nu este format din solide punctiforme și că S este constituit dintr-o materie omogenă (două solide de același volum, formate din această materie au aceeași masă). Se definește atunci *masa specifică* ρ a materiei de care vorbim ca *raportul constant* care există între masă și volum.

În cazul solidelor plane sau rectilinii, se poate da o definiție analoagă, înlocuind volumul prin arie sau respectiv lungime.

Fie S un solid omogen și fie ρ masa specifică a materiei din care este făcut. Fie V volumul lui S (respectiv aria sau lungimea, deoarece este vorba de un solid plan sau rectiliniu și ρ masa specifică corespunzătoare).

Fie M masa lui S . Avem:

$$M = \rho V.$$

Se poate studia atât masa cât și centrul de inerție al unui solid oarecare, dar acest studiu necesită noțiuni ce depășesc cadrul programei (integrale multiple).

■ MOMENT DE INERȚIE

Fie S un sistem material format din n solide punctiforme $S_1, \dots, S_n$ de mase $m_1, \dots, m_n$ și ocupînd punctele $M_1, \dots, M_n$ în spațiu.

Fie O un punct din spațiu, D o dreaptă și P un plan. Momentul de inerție I al lui S în raport cu O (respectiv cu D , cu P) este dat de:

$$I = \sum_1^n m_i r_i^2,$$

în care r_i este distanța de la M_i la O (respectiv la D , la P).

Fie P, Q și R trei plane, două câte două ortogonale. Fie D dreapta comună lui P, Q și O punctul comun lui P, Q și R . Din relațiile evidente care există între distanțele unui punct M la O , la D și la planele P, Q și R , avem:

$$I_P + I_Q + I_R = I_O;$$

$$I_P + I_Q = I_D.$$

I_T reprezintă momentul de inerție al lui S în raport cu elementul geometric T (plan, punct, dreaptă).

Fie Σ un solid omogen de masă specifică ρ .

Fie $a(r)$ aria mulțimii de puncte ce aparțin lui Σ a căror distanță la elementul geometric T (plan, dreaptă, punct) este r . Admitem că momentul de inerție al lui Σ în raport cu T este dat de:

$$I_T = \int_0^{\infty} \rho r^2 a(r) dr.$$

În practică, se întegrează de la 0 la R , R fiind distanța maximă, finită, a unui punct al solidului Σ la elementul geometric T .

a) Dacă Σ este un solid plan, avem de asemenea:

$$I_T = \int_0^{\infty} \rho r^3 \mathcal{L}(r) dr,$$

în care $\mathcal{L}(r)$ reprezintă lungimea mulțimii de puncte a căror distanță la T este r .

b) Dacă Σ este un solid rectiliniu, nu dăm metode generale. Pentru calcul ne vom inspira din exemplele dezvoltate în cele ce urmează.

Observație. — Admitem că proprietățile privind momentele de inerție în raport cu plane ortogonale, enunțate mai înainte, sînt valabile în cazul general:

$$I_P + I_Q + I_R = I_O;$$

$$I_P + I_Q = I_D.$$

Este normal că utilizarea acestor relații și a unor noțiuni de simetrie simplifică calculele momentelor de inerție sau, mai simplu, pun la îndemînă o metodă ușoară de verificare a calculelor.

Exemple. I. 1° *Momente de inerție ale unui solid „segment de dreaptă” în raport cu o extremitate.* Fie l lungimea corespunzătoare a segmentului de dreaptă $[A, B]$. Avem:

$$I_A = \int_0^l x^2 \rho dx = \left[\rho \frac{x^3}{3} \right]_0^l = \rho \frac{l^3}{3};$$

$$I_A = \frac{M l^2}{3} \quad (M \text{ este masa solidului}).$$

2° *Momente de inerție ale unui solid „segment de dreaptă” în raport cu o axă ce poartă solidul.*

Fie D o dreaptă și $[A, B]$ un segment pe ea. Solidul Σ putînd fi asimilat unui segment al dreptei D distanțele punctelor lui Σ la D sînt dacă nu nule, cel puțin neglijabile, și avem: $I_D = 0$.

Fie Δ și Δ' două drepte ortogonale în A , situate într-un plan P ortogonal față de D (fig. 27). Avem:

$$I_P + I_D = I_A.$$

deci:

$$I_P = I_A = \frac{M l^2}{3}.$$

Fie planul Q , definit prin Δ și D . Avem:

$$I_Q = 0,$$

$$\Delta = P \cap Q,$$

$$I_{\Delta} = I_P + I_Q = \frac{M l^2}{3}.$$

Din considerente de simetrie, avem de asemenea:

$$I_{\Delta'} = \frac{M l^2}{3}.$$

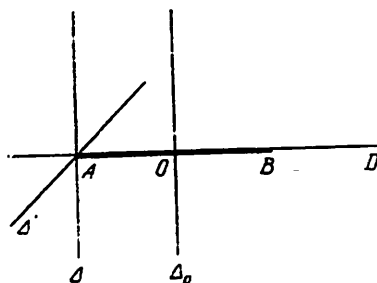


Fig. 27

Fie O mijlocul segmentului $[A, B]$. În acest caz avem :

$$I_O = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \rho \, dx = \left[\rho \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = 2\rho \frac{l^3}{8 \times 3},$$

$$I_O = \frac{Ml^3}{12}.$$

Fie Δ_o o dreaptă care trece prin O . În planul definit de D și Δ_o , avem :

$$I_D + I_{\Delta_o} = I_O.$$

deci :

$$I_{\Delta_o} = I_O.$$

Remarcăm în această privință că, dacă Δ și Δ_1 sînt paralele, avem :

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_o} + M \left(\frac{l}{2} \right)^2,$$

$$\frac{Ml^3}{3} = \frac{Ml^3}{12} + M \frac{l^3}{4}.$$

Acest rezultat, a cărui generalizare o admitem sub numele de *Teorema lui Huyghens*, permite în unele cazuri să se simplifice mult calculul unor momente de inerție :

Fie Σ un sistem material de masă M . Fie O centrul său de inerție, fie Δ o dreaptă a spațiului și fie Δ_o o dreaptă paralelă la Δ , care trece prin O . Fie d distanța dintre dreptele Δ și Δ_o . În acest caz, avem :

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_o} + Md^2.$$

Termenul Md^2 poate fi interpretat ca momentul de inerție în raport cu Δ a unui solid punctiform de masă M situat în O .

Admitem că fiind dat un sistem material omogen Σ ocupînd un domeniu din spațiu, ce admite un centru de simetrie O , centrul de inerție al lui Σ este sigur O .

II. Momente de inerție a unui disc greu.

Fie Σ un disc greu limitat de un cerc C . Fie O centrul cercului C de rază R și fie D axa discului Σ . Fie P planul în care se găsește cercul C (fig. 28).

Avem :

$$I_P = 0,$$

$$I_D + I_P = I_O.$$

$$I_O = \int_0^R 2\pi r \rho r^3 \, dr = 2\pi \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2\pi \rho \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}.$$

Fie Δ și Δ' două diametre ortogonale ale lui C ; avem :

$$I_{\Delta} + I_{\Delta'} = I_O.$$

$$I_{\Delta} = I_{\Delta'}.$$

deci :

$$I_{\Delta} = I_{\Delta'} = \frac{MR^2}{4}.$$

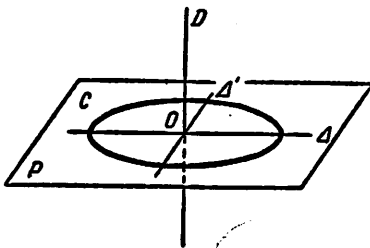


Fig. 28

III. Momente de inerție ale unei bile omogene, grele.

Fie Σ o bilă omogenă, grea, de masă specifică ρ , limitată de o sferă S de centru O și rază R . Fie P un plan diametral al lui S și fie D , Δ și Δ' trei diametre rectangulare ale lui S , astfel ca Δ și Δ' să aparțină lui P (fig. 29). Din motive de simetrie, avem:

$$I_D = I_\Delta = I_{\Delta'} = I.$$

Pe de altă parte:

$$I_D + I_P = I_O.$$

Fie Q planul definit de D și Δ și R planul definit de D și Δ' . Avem:

$$I_\Delta = I_P + I_Q,$$

$$I_{\Delta'} = I_P + I_R,$$

$$I_D = I_Q + I_R,$$

$$I_O = I_P + I_Q + I_R;$$

deci:

$$2I_O = 2I_P + 2I_Q + 2I_R = I_D + I_\Delta + I_{\Delta'} = 3I.$$

Prin urmare:

$$I = \frac{2}{3} I_O;$$

or:

$$I_O = \int_0^R 4\pi r^2 \rho r^2 dr = 4\pi \rho \int_0^R r^4 dr = 4\pi \rho \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} MR^2;$$

deci:

$$I = \frac{2}{5} MR^2 = I_D = I_\Delta = I_{\Delta'};$$

pe de altă parte:

$$I_Q = I_R = I_P;$$

rezultă de aici:

$$I_P = I_Q = I_R = \frac{I}{2} = \frac{1}{5} MR^2.$$

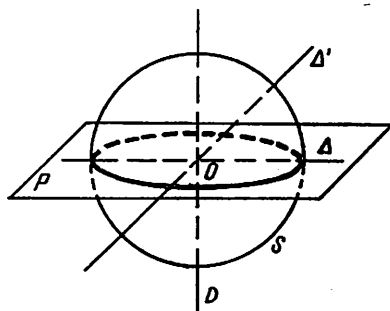


Fig. 29

7.6.3 Viteză și distanță parcursă

Fie M un punct a cărui abscisă x pe o axă $(O, \vec{i})$ depinde de un parametru real t (M este în mișcare și poziția sa depinde de timpul t). Prin definiție, viteza lui M la momentul t este valoarea derivatei funcției x la momentul t : $v(t) = x'(t)$; x este deci o primitivă a funcției v .

Distanța algebrică l parcursă între momentele t_0 și t_1 este dată de:

$$l = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt.$$

Distanța aritmetică parcursă între momentele t_0 și t_1 , în care viteza păstrează un semn constant, este :

$$m = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)| dt.$$

Admitem că această formulă se poate extinde la un interval în care $v(t)$ nu păstrează un semn constant.

Observație. — Aceste rezultate se pot extinde la cazul unui punct M mobil pe o curbă oarecare Γ , cu condiția ca să știm să definim o abscisă pe Γ . Studiul acestei clase de curbe (numite curbe rectificabile) depășește cu mult cadrul programei, cu excepția unor cazuri simple.

7.6.4 Intensitatea și cantitatea de electricitate

Cantitatea de electricitate q transportată de un curent continuu de intensitate I între momentele t_0 și t_1 este dată de :

$$q = I(t_1 - t_0) \quad (t_1 \geq t_0),$$

adică :

$$q = \int_{t_0}^{t_1} I dt.$$

Această formulă se extinde la cazul unui curent a cărui intensitate variabilă $i(t)$ este funcție de timp. În felul acesta, cantitatea algebrică de electricitate transportată între momentele t_0 și t_1 , de un curent de intensitate variabilă $i(t)$, este :

$$q = \int_{t_0}^{t_1} i(t) dt.$$

De asemenea, cantitatea aritmetică de electricitate transportată între momentele t_0 și t_1 de un curent de intensitate variabilă $i(t)$, este :

$$p = \int_{t_0}^{t_1} |i(t)| dt.$$

(Admitem acest rezultat.)

Exemplu. Fie un curent periodic a cărui intensitate $i(t)$ este dată de :

$$i(t) = I_0 \sin \omega t.$$

Ne interesează cantitatea aritmetică de electricitate transportată în cursul unei perioade (fie $T = \frac{2\pi}{\omega}$ perioada acestui curent).

Avem:

$$p = \int_0^T |i(t)| dt,$$

$$\begin{aligned} p &= \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I_0 \sin \omega t dt - \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} I_0 \sin \omega t dt = I_0 \left\{ \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} - \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} \right\} = I_0 \left[\frac{2}{\omega} + \frac{2}{\omega} \right] = \\ &= \frac{4 I_0}{\omega} = \frac{4 I_0}{2\pi} \times \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 I_0}{\pi} T. \end{aligned}$$

Cantitatea de electricitate transportată pe o perioadă este egală cu cantitatea de electricitate transportată pe durata de timp T de un curent constant de intensitate $\frac{2 I_0}{\pi}$.

Observație. — Fie φ o funcție integrabilă de perioadă T , definită pe un domeniu conex K (interval) a lui $\mathbf{R}$.

Oricare ar fi numerele reale t_0 și t_1 , avem:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t) dt = \int_{t_1}^{t_1+T} \varphi(t) dt.$$

Într-adevăr, fie Φ o primitivă a lui φ . Avem:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t) dt = \Phi(t_0 + T) - \Phi(t_0).$$

Să considerăm funcția:

$$\Psi = [x \mapsto \Phi(x + T) - \Phi(x)];$$

Avem:

$$\Psi'(x) = \varphi(x + T) - \varphi(x) = 0.$$

Funcția Ψ' fiind identic nulă și definită pe un domeniu conex K , rezultă că funcția Ψ este o funcție constantă pe K .

7.6.5 Valoarea eficace a unui fenomen periodic

Fie f o funcție definită pe $\mathbf{R}$, de perioadă T , astfel că $f(t)$ și $f\left(t + \frac{T}{2}\right)$ sînt numere reale opuse, oricare ar fi t . Valoarea medie a lui f pe orice interval K de lungime T este nulă. Această valoare medie nu aduce nici o informație asupra funcției f . Se folosește adesea valoarea medie pe K a pătratului lui f .

Fie g o funcție definită prin:

$$g(x) = Y_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Se numește valoare eficace a lui g rădăcina pătrată a valorii medii pe un interval K de lungime T a funcției g^2 :

$$Y_e^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} Y_m^2 \cos^2 (\omega t + \varphi) dt.$$

Funcția $[t \mapsto \cos^2 (\omega t + \varphi)]$ fiind periodică, și una dintre perioadele sale fiind T , avem:

$$Y_e^2 = \frac{1}{T} \int_0^T Y_m^2 \cos^2 (\omega t + \varphi) dt,$$

cu:
$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

$$Y_e^2 = \frac{Y_m^2}{T} \int_0^T \cos^2 (\omega t - \varphi) dt;$$

dar:
$$\cos^2 (\omega t - \varphi) = \frac{1}{2} (1 + \cos 2 (\omega t - \varphi))$$

Prin urmare:

$$\int_0^T \cos^2 (\omega t - \varphi) dt = \int_0^T \frac{dt}{2} + \int_0^T \cos 2 (\omega t - \varphi) dt = \frac{T}{2} + \left[\frac{\sin (2 \omega t - 2 \varphi)}{2 \omega} \right]_0^T = \frac{T}{2}.$$

De aici rezultă că:

$$Y_e^2 = \frac{Y_m^2}{2},$$

și că:
$$Y_e = \frac{Y_m}{\sqrt{2}}.$$

■ LEGEA LUI JOULE PENTRU CURENT ALTERNATIV

Considerăm un conductor de rezistență r , străbătut de un curent alternativ de intensitate $i(t)$: $i(t) = I_m \cos (\omega t - \varphi)$.

Fie J echivalentul mecanic al caloriei și $Q(x)$ cantitatea de căldură degajată în timpul unei durate x .

Legea lui Joule pentru curent continuu ne permite să se scrie, dacă dQ reprezintă cantitatea de căldură degajată în cursul unei durate dt de către un curent de intensitate constantă $i(t)$ (t fixat): $JdQ = ri^2 dt$. În cursul unei perioade (de durată T), avem:

$$JQ(T) = \int_0^T ri^2(t) dt = r \int_0^T i^2(t) dt,$$

adică, cu ajutorul definiției intensității eficace I_e :

$$JQ(T) = rI_e T.$$

Rezultă de aici că, cantitatea de căldură degajată într-o perioadă de un curent alternativ de intensitate maximă I_m , ce parcurge un conductor de rezistență r , este aceeași cu cea pe care ar degaja-o în același conductor un curent continuu, a cărui intensitate ar fi intensitatea eficace a curentului alternativ considerat (de unde și numele de *intensitate eficace*).

■ PUTERE ȘI ENERGIE ELECTRICĂ

Fie AB o porțiune dintr-un circuit electric parcurs de un curent a cărui intensitate $i(t)$ depinde de timpul t . Fie $v(t)$ diferența de potențial între A și B . Legile curentului continuu permit să se scrie, dacă dW reprezintă energia furnizată în AB de un curent continuu de intensitate $i(t_0)$ în cursul unei durate dt :

$$dW = v(t_0)i(t_0) dt.$$

Aceasta fiind valabilă oricare ar fi t_0 , fie W energia furnizată în intervalul de timp $[t_0, t_1]$ de către curentul studiat. Avem:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} v(t) i(t) dt.$$

Fie:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi) \quad t_1 = t_0 + T,$$

$$v(t) = V_m \cos \omega t \quad T = \frac{2\pi}{\omega};$$

avem:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T I_m \cos(\omega t - \varphi) V_m \cos \omega t dt = I_m V_m \int_0^T \frac{1}{2} [\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi] dt = \\ &= I_m V_m \frac{1}{2} \left[\left[\frac{\sin(2\omega t - \varphi)}{4\omega} \right]_0^T + [t \cos \varphi]_0^T \right] = \frac{I_m V_m \cos \varphi}{2}. \end{aligned}$$

Fie I_e și respectiv V_e intensitatea și potențialul eficace; avem:

$$I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}};$$

și prin urmare:

$$W = I_e V_e T \cos \varphi.$$

Dacă P este puterea medie pe perioadă avem:

$$P = \frac{W}{T} = V_e I_e \cos \varphi.$$

Presupunem că circuitul AB nu are decît rezistențe. Avem în acest caz $\varphi = 0$ și $\cos \varphi = 1$. În aceste condițiuni:

$$W = V_e I_e T,$$

$$P = V_e I_e.$$

Aici, puterea și energia în cursul unei perioade, pentru un curent alternativ de intensitate $i(t)$ și cu diferența de potențial $v(t)$ între A și B , sînt aceleași ca și în cazul unui curent continuu de intensitate I_e și cu diferența de potențial V_e între A și B .

7.6.6 „Circulația unui vector”

Fie $\mathcal{S}_3$ spațiul afin euclidian de trei dimensiuni și $\vec{E}_3$ spațiul vectorial $\mathbb{R}^3$. Fie $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un reper $\mathcal{R}$ ortonormat a lui $\mathcal{S}_3$.

Fie G o aplicație a lui $\mathcal{S}_3$ în $\vec{E}_3$, care face să-i corespundă, oricărui punct P al lui $\mathcal{S}_3$, un vector $\vec{G}(P)$ al lui $\vec{E}_3$; G definește un câmp de vectori, notat cu $\vec{G}$. Fie F o funcție vectorială de variabilă reală, definită, continuă și derivabilă pe intervalul $[t_0, t_1]$.

Fie M aplicația lui $[t_0, t_1]$ în $\mathcal{S}_3$, definită prin:

$$\forall_{[t_0, t_1]} t \quad \vec{F}(t) = \overrightarrow{OM(t)}.$$

Fie Γ curba indicatoare în $\mathcal{R}$ a funcției F , și fie $M_0 = M(t_0)$ și $M_1 = M(t_1)$. Curba Γ este închisă dacă $M_0 = M_1$.

Fiecărui număr real t al intervalului $[t_0, t_1]$, funcția G o M asociază un vector. Se numește *circulația câmpului de vectori $\vec{G}$ pe curba Γ* , integrala:

$$C_\Gamma = \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{G(M(t))} \cdot d\vec{M},$$

cu: $\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$;

deci: $d\vec{M} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = (x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}) dt$.

Presupunem că: $\vec{G}[\vec{M}(t)] = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j} + Z(t)\vec{k}$.

Avem deci: $C_\Gamma = \int_{t_0}^{t_1} [X(t)x'(t) + Y(t)y'(t) + Z(t)z'(t)] dt$.

Exemple. I. Fie aplicația lui $\mathcal{S}_3$ în $\vec{E}_3$ care, pentru toate punctele M ale lui $\mathcal{S}_3$, face să corespundă vectorul $\vec{G}(\vec{M}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, în care $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este un reper ortonormat al lui $\mathcal{S}_3$. Fie Γ curba indicatoare a funcției vectoriale F definite pe $[t_0, t_1]$ prin:

$$\vec{F}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Avem:

$$C_\Gamma = \int_{t_0}^{t_1} [x'(t) + y'(t) + z'(t)] dt = [x(t) + y(t) + z(t)]_{t_0}^{t_1}.$$

Există deci o funcție U a lui $[t_0, t_1]$ în $\mathbb{R}$ astfel ca:

$$C_\Gamma = U(t_1) - U(t_0).$$

Se spune deci că „cîmpul de vectori” $\vec{G}$ derivă din potențialul $V = -U$:

$$C_{\Gamma} = V(t_0) - V(t_1).$$

Într-adevăr, potențialul este o funcție care, pentru orice punct M a lui $\mathcal{E}_3$, asociază un scalar $V(M)$. Aici, avem:

$$V(M) = x + y + z.$$

(x, y, z sînt coordonatele lui M în reperul $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.)

Funcția potențial nu este perfect determinată, căci dacă V este un potențial pentru cîmpul $\vec{G}$, atunci, pentru orice constantă h , $V + h$ este un potențial pentru $\vec{G}$. Ceea ce este definit fără echivoc este „diferența de potențial”, aplicație a lui $\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3$ în $\mathbb{R}$.

Dacă un cîmp de vectori derivă dintr-un potențial, circulația sa pe un arc de curbă Γ nu depinde decît de extremitățile M_0 și M_1 ale acestui arc de curbă.

II. Fie aplicația lui $\mathcal{E}_3$ în $\vec{E}_3$ care, la orice punct M din $\mathcal{E}_3$, face să corespundă vectorul:

$$\vec{G}(M) = x(\vec{i} + \vec{k}).$$

(Coordonatele lui M sînt x, y, z în reperul ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.)

Fie Γ curba indicatoare a funcției vectoriale F definită pe $[t_0, t_1]$ prin:

$$\vec{F}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Atunci, avem:

$$C_{\Gamma} = \int_{t_0}^{t_1} [x(t)x'(t) + x(t)z'(t)] dt = \left[\frac{x^2(t)}{2} \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} x(t)z'(t) dt.$$

■ Fie $\vec{F}_1(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$, $t \in [0, \pi]$.

Curba Γ_1 este un arc de cerc cu centrul în O , ale cărei extremități sînt punctele $M_0(1, 0, 0)$ și $M_1(-1, 0, 0)$ și care este situat în planul $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Atunci avem:

$$C_{\Gamma_1} = \int_0^{\pi} x(t)x'(t) dt,$$

$$C_{\Gamma_1} = \left[\frac{\cos^2 t}{2} \right]_0^{\pi} = 0.$$

■ Fie $\vec{F}_2(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{k}$, $t \in [0, \pi]$.

Curba Γ_2 este un arc de cerc cu centrul în O , ale cărei extremități sînt de asemenea M_0 și M_1 , dar care este situat în planul $(O, \vec{i}, \vec{k})$.

Atunci avem:

$$\begin{aligned} C_{\Gamma_2} &= \int_0^{\pi} x(t)x(t) dt + \int_0^{\pi} \cos^2 t dt = \left[\frac{\cos^2 t}{2} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= 0 + \left[\frac{t}{2} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi}, \end{aligned}$$

$$C_{\Gamma_2} = \frac{\pi}{2}.$$

Circulația cîmpului de vectori $\vec{G}$ de-a lungul arcului de curbă Γ depinde de extremitățile lui Γ și de asemenea de curba Γ (Γ_1 și Γ_2 au aceleași extremități și totodată: $C_{\Gamma_1} \neq C_{\Gamma_2}$).

Cîmpul G nu derivă dintr-un potențial.

Această noțiune de potențial este foarte importantă în fizică.

■ LUCRUL MECANIC AL UNEI FORȚE

Fie M un solid punctiform supus unei forțe pe care o putem reprezenta, simbolic printr-un vector $\vec{F}(t)$ a cărui origine este poziția $M(t)$ a mobilului la momentul t . Presupunem că M se deplasează pe un arc al curbei Γ , într-un interval de timp $[t_0, t_1]$.

DEFINIȚIE. Lucrul mecanic τ al forței $\vec{F}(t)$ în intervalul de timp $[t_0, t_1]$ este circulația cîmpului de vectori $\vec{F}$ pe traiectoria Γ :

$$d\tau = \vec{F} \cdot d\vec{M};$$

$$\tau = C_{\Gamma}(\vec{F}) = \int_{M_0 M_1} \vec{F} \cdot d\vec{M}.$$

Exemplu. Lucrul mecanic al forțelor de greutate.

Fie un mobil punctiform ce ocupă la momentul t poziția $M(t)$ în spațiu și care este supus la greutatea proprie P . Fie $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un reper ortonormat astfel că $\vec{P} = -mg\vec{z}$. Să presupunem că mobilul se deplasează într-un interval de timp $[t_0, t_1]$ din poziția $M_0(x_0, y_0, z_0)$ în poziția $M_1(x_1, y_1, z_1)$ după o traiectorie Γ , indicatoare a unei funcții vectoriale $\vec{F}$:

$$\vec{F}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

cu:

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0,$$

$$x(t_1) = x_1, y(t_1) = y_1, z(t_1) = z_1.$$

Lucrul mecanic dat de forța $\vec{P}$ în această deplasare este definit prin:

$$\mathcal{F} = \int_{M_0 M_1} \vec{P} \cdot d\vec{F} = \int_{t_0}^{t_1} -mgx'(t) dt,$$

$$\mathcal{F} = (-mgx_1) - (-mgx_0) = mgx_0 - mgx_1.$$

Forțele de greutate derivă dintr-un potențial V , a cărei expresie în reperul $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este

$$V(M) = mgz.$$

EXERCIȚII

7.146 Să se demonstreze că volumele unui con, unei sfere și unui cilindru sînt proporționale cu numerele 1, 2, 3 dacă conul și cilindrul au drept înălțime diametrul sferei și drept bază un cerc mare de pe sferă.

7.147 Să se calculeze volumul sferei:

1° Circumscrișă unui cub cu muchia a .

2° Înscrișă în acest cub.

3° Tangentă la cele douăsprezece muchii ale cubului.

7.148 Aceeași problemă ca și a exercițiului precedent, înlocuind cubul cu un tetraedru regulat cu muchia a .

7.149 Să se calculeze volumul unei lentile biconvexe a cărei raze sînt egale, știind că grosimea sa este de 4 cm și că diametrul lentilei este de 16 cm.

7.150 Diametrul unui semicerc se împarte în cinci părți egale și, prin fiecare punct de diviziune se duc perpendiculare pe diametru. Se rotește figura obținută în jurul diametrului. Să se calculeze, în funcție de raza R , volumul fiecăruia dintre cele cinci segmente sferice născute prin această mișcare de rotație. Cu ce numere întregi sînt proporționale cele cinci volume?

7.151 Fie ABC un triunghi echilateral de latură a . Pe $[B, C]$ și în exteriorul triunghiului se construiește pătratul $BCDE$. Să se calculeze volumul născut prin rotirea pentagonului $ACDEBA$ în jurul lui $[A, C]$.

7.152 Se dă o sferă cu centrul în O și de rază R și se construiește pe un cerc mare ca bază, un con de rotație de volum egal cu jumătatea volumului sferei.

1° Să se calculeze înălțimea conului.

2° Să se evalueze raza cercului mic de intersecție a conului cu sfera.

3° Să se evalueze volumul solidului comun sferei și conului.

7.153 Se dă o sferă fixă de rază R și un diametru $s'Ox$.

1° Se taie sfera prin două plane: $s = -x$ și $s = +x$ și se consideră cilindrul de rotație avînd drept baze aceste două secțiuni.

Să se determine x astfel ca volumul cilindrului să fie maxim.

2° Fie A punctul în care semi-axa negativă Ox taie sfera. Să se determine x astfel încît conul de rotație cu virful în A , avînd drept bază secțiunea prin $s = x$, să aibă un volum maxim.

7.154 Utilizînd faptul că acestea sînt solide de rotație, să se regăsească volumele următoarelor solide:

a) Cilindrul de rotație.

b) Conul de rotație.

c) Sfera.

7.155 Să se calculeze volumul unui trunchi de con și a unui trunchi de piramidă (cu bazele paralele).

7.156 Se numește *segment sferic* solidul delimitat de o sferă și două plane paralele. Să se calculeze volumul unui segment sferic în funcție de înălțimea sa h (distanța planelor paralele) și de ariile bazelor sale (discuri determinate prin intersecția sferei cu planele).

7.157 Se numește *inel sferic* volumul născut prin rotirea unui segment de cerc în jurul unui diametru care nu îl traversează. Să se determine volumul unui inel sferic. Demonstrați că rezultatul poate fi pus sub forma:

$$V = \frac{\pi}{6} AB^2 \cdot ab \text{ (notația de pe figura 30).}$$

7.158 *Volumul sectorului sferic*. Se numește sector sferic solidul născut de un sector circular care se rotește în jurul unui diametru care nu îl traversează.

Să se demonstreze că volumul unui astfel de sector este dat de formula:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h,$$

în care h este înălțimea zonei care limitează sectorul.

7.159 Fie un semicerc de diametru $[A, B] = 2R$ și punctele C și D care împart arcul $\widehat{AB}$ în trei părți egale:

$$\widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DB}.$$

Se rotește figura în jurul diametrului $[A, B]$.

Să se calculeze în funcție de R volumele sectoarelor sferice, ale inelelor sferice și ale segmentelor sferice corespunzătoare.

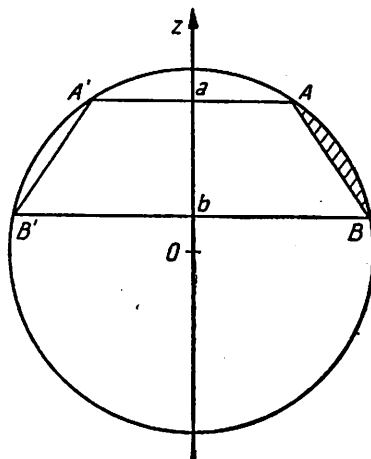


Fig. 30

7.160 Se numește *elipsoid de rotație* suprafața născută prin rotirea unei elipse în jurul uneia din axe (elipsoidul este alungit sau aplatizat după cum elipsa se rotește în jurul axei sale mari sau mici). Să se determine volumul limitat de elipsoidul de revoluție, urmărind procedeul aplicat în cazul sferei.

7.161 Se numește *paraboloid de rotație* suprafața născută de o parabolă, prin rotirea în jurul axei sale. Să se determine volumul segmentului de paraboloid.

7.162 Se numește *hiperboloïd de rotație* cu o pinză, suprafața născută de o hiperbolă, prin rotirea în jurul axei sale netransversale. Să se determine volumul segmentului de hiperboloid.

7.163 Să se determine direct momentul de inerție al unei bile omogene în raport cu un plan diametral. Să se regăsească astfel momentele de inerție în raport cu un diametru și în raport cu centrul.

7.164 Să se determine momentele de inerție ale unei bile omogene în raport cu un plan tangent, în raport cu o dreaptă tangentă:

a) Prin calcul direct.

b) Cu ajutorul teoremei lui Huyghens.

7.165 Să se determine momentele de inerție ale unui pătrat omogen în raport cu axele sale, cu centrul, cu diagonalele, cu laturile, cu virfurile sale.

7.166 Aceeași problemă ca în exercițiul precedent, pentru un dreptunghi ale cărui laturi sînt sub forma $2l \cos \alpha$ și $2l \sin \alpha$. Să se regăsească rezultatele din exercițiul 7.165, ca un caz particular.

7.167 Să se determine momentele de inerție ale unui cub în raport cu elementele sale de simetrie, în raport cu o față, în raport cu o muchie.

7.168 Fie Σ un solid omogen de rotație (masă specifică ρ) de axă D . Fie P un plan ortogonal dreptei D . Fie $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un reper ortonormat astfel ca $(O, \vec{k})$ să fie un reper al dreptei D și $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un reper al planului P . Fie x_0 și x_1 cotele extreme ale punctelor lui Σ .

a) Să se demonstreze că avem:

$$I_P = \int_{x_0}^{x_1} \pi \rho x^2 r^2(x) dx,$$

$$I_D = \int_{x_0}^{x_1} \pi \rho \frac{r^4(x)}{2} dx,$$

în care $r(x)$ reprezintă raza discului comun planului de cotă x și lui Σ .

(Se remarcă faptul că $I_D = \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_0^{r(x)} 2\pi \rho x x^2 dx \right] dx$).

b) Să se determine, cu ajutorul lui I_P și I_D , momentele de inerție ale lui Σ în raport cu trei axe rectangulare, dintre care una este axa lui Σ (axe de coordonate) și în raport cu originea coordonatelor.

c) Să se regăsească, cu ajutorul acestor formule, momentele de inerție ale unei bile în raport cu centrul, cu un diametru și cu un plan diametral.

7.169 Să se folosească rezultatele precedente pentru a determina momentele de inerție ale unui cilindru de rotație omogen, în raport cu axa sa D , în raport cu un punct al axei sale, în raport cu planul său de simetrie perpendicular pe D , în raport cu un plan tangent, cu o generatoare, cu un plan de bază.

7.170 Să se determine de asemenea momentele de inerție ale unui con de rotație omogen de vîrf O , cu axa D , cu unghiul de la vîrf 2α și de înălțime h , în raport cu vîrf, cu axa, cu un plan perpendicular pe D , trecînd prin O .

* * *

Cîmpul vectorilor definiți în exercițiile următoare derivă dintr-un potențial? Dacă da, să se precizeze un potențial posibil; dacă nu, să se dea un exemplu de curbe avînd aceleași extremități, dar pentru care circulațiile cîmpului sînt diferite; $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este un reper ortonormat și M are drept coordonate x, y, z în $\mathcal{R}$.

$$7.171 \quad \overrightarrow{G(M)} = \lambda \overrightarrow{OM} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

$$7.172 \quad \overrightarrow{G(M)} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}.$$

$$7.173 \quad \overrightarrow{G(M)} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2z\vec{k}.$$

$$7.174 \quad \overrightarrow{G(M)} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}.$$

$$7.175 \quad \overrightarrow{G(M)} = 3x^2y^2z\vec{i} + 2x^2yz\vec{j} + x^2y^2\vec{k}.$$

$$7.176 \quad \overrightarrow{G(M)} = \frac{\vec{i}}{x} + \frac{\vec{j}}{y} + \frac{\vec{k}}{z}.$$

$$7.177 \quad \overrightarrow{G(M)} = \sin x\vec{i} + \cos y\vec{j} + \operatorname{tg} z\vec{k}.$$

$$7.178 \quad \overrightarrow{G(M)} = x\vec{i} + xy\vec{j} + xyz\vec{k}.$$

$$7.179 \quad \overrightarrow{G(M)} = \cos x\vec{i} + yz\vec{j} + \sin x\vec{k}.$$

$$7.180 \quad \overrightarrow{G(M)} = \operatorname{Log} |y|\vec{i} + y\vec{j} + y^2\vec{k}.$$

$$7.181 \quad \overrightarrow{G(M)} = z(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}).$$

8. FUNCȚII LOGARITMICE ȘI EXPONENȚIALE

8.1 Funcția logaritmică neperiană

8.2 Funcția exponențială

8.3 Alte funcții logaritmice și exponențiale

8.4 Funcții compuse cu ajutorul funcțiilor logaritmice și exponențiale

8.1 FUNCȚIA LOGARITMICĂ NEPERIANĂ

8.1.1 Definiție. Primele proprietăți

Funcția $\left[x \mapsto \frac{1}{x} \right]$ este definită și continuă pe intervalul deschis $]0, +\infty[$. Prin urmare (7.1.8), ea admite o primitivă pe $\mathbb{R}^{+*}$. Pe de altă parte, această primitivă nu poate fi exprimată cu ajutorul regulilor care permit găsirea, pentru r rațional și diferit de 1, a primitivelor lui $[x \mapsto x^r]$ (7.3.5). Printre primitivele funcției $\left[x \mapsto \frac{1}{x} \right]$ pe $\mathbb{R}^{+*}$, vom studia pe cea care se anulează pentru $x = 1$.

DEFINIȚIE. Se numește funcție logaritmică neperiană, primitiva funcției $\left[x \mapsto \frac{1}{x} \right]$ pe $\mathbb{R}^{+*}$, care se anulează pentru $x = 1$.
Se notează

$$\text{Log } x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

(Nu omiteți pe t , majuscul și enunțarea „logaritm neperian de x ”. Logaritmul neperian se mai notează și: $\ln$.)

Conform acestei definiții, rezultă imediat că:

a) Funcția Log este definită pe $\mathbb{R}^{+*}$.

b) $\text{Log } 1 = 0$.

c) Pe $\mathbb{R}^{+*}$, avem: $(\text{Log } x)' = \frac{1}{x}$.

d) Funcția Log avînd o derivată pozitivă în orice punct a lui $\mathbb{R}^{++}$ este continuă și este crescătoare pe $\mathbb{R}^{++}$.

$$\begin{aligned} \forall_{\mathbb{R}^{++}} a, \forall_{\mathbb{R}^{++}} b \quad & a > b \Rightarrow \text{Log } a > \text{Log } b; \\ & a > 1 \Rightarrow \text{Log } a > 0; \\ & a < 1 \Rightarrow \text{Log } a < 0. \end{aligned}$$

8.1.2 Proprietatea fundamentală

Fie u o funcție derivabilă definită pe $\mathbb{R}$, cu valori în $\mathbb{R}^{++}$. După regula de derivare a funcțiilor compuse, avem:

$$(\text{Log } [u(x)])' = u'(x). \quad \text{Log}' [u(x)] = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

DEFINIȚIE. Fie u o funcție derivabilă cu valori pozitive. Funcția $\frac{u'}{u}$ este derivata logaritmică a lui u .

În particular, fie u o funcție liniară:

$$u = [x \mapsto kx] \quad (k \in \mathbb{R}^{++}).$$

Avem deci:
$$(\text{Log } kx)' = \frac{k}{kx} = \frac{1}{x} = (\text{Log } x)'. \quad \text{Log } kx = \text{Log } x + C.$$

De aici rezultă că funcția $[x \mapsto \text{Log } kx]$ este, de același gen ca și funcția $[x \mapsto \text{Log } x]$, adică o primitivă a funcției $\left[x \mapsto \frac{1}{x}\right]$ pe $\mathbb{R}^{++}$, care este un interval.

Prin urmare (7.3.2), aceste două funcții diferă printr-o constantă și există o constantă pozitivă nenulă C astfel ca, pentru orice număr real pozitiv nenul x :

$$\text{Log } kx = \text{Log } x + C.$$

Pentru a determina valoarea lui C , aplicăm numărului 1 această formulă, valabilă pentru numerele reale pozitive nenule:

$$\text{Log } (k \times 1) = \text{Log } 1 + C.$$

Prin urmare și pentru că $\text{Log } 1 = 0$:

$$\text{Log } k = C.$$

Aceasta fiind valabilă ori care ar fi numerele reale pozitive nenule k și x , se poate enunța:

TEOREMĂ. Oricare ar fi numerele reale pozitive nenule a și b avem:

$$\text{Log } ab = \text{Log } a + \text{Log } b.$$

Funcția Log este deci un homomorfism a lui $(\mathbb{R}^{++}, \times)$ peste $(\mathbb{R}, +)$.

8.1.3 Consecințe imediate

■ Fie b un număr real pozitiv nenul. Avem: $b \times \frac{1}{b} = 1$;

deci:
$$\text{Log} \left(b \times \frac{1}{b} \right) = \text{Log} 1 = 0,$$

și, după teorema fundamentală (8.1.2):

$$\text{Log } b + \text{Log } \frac{1}{b} = 0.$$

TEOREMA. Oricare ar fi numărul real pozitiv nenul b , avem;

$$1 \qquad \text{Log } \frac{1}{b} = -\text{Log } b.$$

Deoarece, pentru orice cuplu de numere reale a și b pozitive și nenule, avem $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$, se deduce următoarea teoremă:

TEOREMA. Oricare ar fi numerele reale pozitive nenule a și b , avem:

$$2 \qquad \text{Log } \frac{a}{b} = \text{Log } a - \text{Log } b.$$

■ Fie $n + 1$ numere reale pozitive nenule: $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$. Presupunem că, pentru un produs de n termeni, avem:

$$\text{Log } (a_1 a_2 \dots a_n) = \text{Log } a_1 + \text{Log } a_2 + \dots + \text{Log } a_n.$$

Putem scrie:

$$\begin{aligned} \text{Log } (a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1}) &= \text{Log } ((a_1 a_2 a_3 \dots a_n) a_{n+1}) = \\ &= \text{Log } (a_1 a_2 \dots a_n) + \text{Log } a_{n+1}. \end{aligned} \qquad (8.1.2)$$

și pe baza proprietății de recurență:

$$\text{Log } (a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}) = \text{Log } a_1 + \text{Log } a_2 + \dots + \text{Log } a_{n+1}.$$

Întrucât această proprietate este adevărată pentru $n = 2$, ea este adevărată pentru orice întreg natural și superior sau egal cu 2.

TEOREMA. Logaritmul neperian al unui produs de numere reale pozitive
3 nenule este egal cu suma logaritmilor neperieni ai acestor numere.

În particular, dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, avem pentru orice întreg natural n :

$$\text{Log } a^n = n \text{Log } a.$$

Pe de altă parte :

$$\text{Log } a^{-n} = \text{Log} \left(\frac{1}{a} \right)^n = n \text{Log} \frac{1}{a} = -n \text{Log } a.$$

Avem deci pentru orice întreg k și pentru orice număr real pozitiv nenul a :

$$\text{Log } a^k = k \text{Log } a.$$

Fie $r = \frac{p}{q}$ un număr rațional dat. Avem :

$$y = a^r \Leftrightarrow y^q = a^p \quad (q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z});$$

de unde :

$$\text{Log } y^q = \text{Log } a^p,$$

$$q \text{Log } y = p \text{Log } a,$$

$$\text{Log } y = \frac{p}{q} \text{Log } a = r \text{Log } a.$$

Se poate deci enunța :

TEOREMA. Pentru orice număr rațional r și pentru orice număr real pozitiv nenul a , avem :

$$\text{Log } a^r = r \text{Log } a.$$

8.1.4 Limite la extremități

Funcția Log este definită pe $\mathbb{R}^{++} =]0, +\infty[$. Să studiem comportamentul său în vecinătatea lui infinit, apoi în vecinătatea lui zero.

■ Fie A un număr real pozitiv nenul și fie n un număr întreg natural superior lui $\frac{A}{\text{Log } 2}$.

Să presupunem că x este un număr real superior lui 2^n . Funcția Log fiind crescătoare, avem :

$$x > 2^n \Rightarrow \text{Log } x > \text{Log } 2^n,$$

adică :

$$\text{Log } x > n \text{Log } 2.$$

Dar, prin ipoteză, n este superior lui $\frac{A}{\text{Log } 2}$.

Ca urmare :

$$\text{Log } x > \frac{A}{\text{Log } 2} \text{Log } 2.$$

Fie A un număr real pozitiv nenul. Am găsit un număr real N astfel că dacă x este superior lui N , atunci $\text{Log } x$ este superior lui A .

TEOREMA. Limita funcției logaritmice neperiene la $+\infty$ este $+\infty$

1

$$\lim_{+\infty} \text{Log} = +\infty.$$

■ Proprietatea $\text{Log } \frac{1}{x} = -\text{Log } x$, valabilă pentru orice număr real pozitiv nenul, permite să tragem concluzia:

TEOREMA Limita funcției logaritmice neperiene în 0 este $-\infty$

$$\lim_0 \text{Log} = -\infty.$$

De aici rezultă că funcția Log este o aplicație continuă monotonă a intervalului $]0, +\infty[$ în intervalul $] -\infty, +\infty[$. Este deci (1.7.4) o bijecție a lui $\mathbb{R}^{++}$ pe $\mathbb{R}$. Cum pe de altă parte (8.1.2) ea este și un homomorfism al structurii multiplicative a lui $\mathbb{R}^{++}$ în structura aditivă a lui $\mathbb{R}$, se poate trage concluzia:

TEOREMA. Funcția $\text{Log } x$ este un izomorfism continuu al structurii de grup
3 $(\mathbb{R}^{++}, \times)$ pe structura de grup $(\mathbb{R}, +)$.

Rezultă de aici că două numere reale pozitive nenule sînt egale dacă și numai dacă logaritmi lor neperieni sînt egali, și că:

$$\lim_{x_0} [x \mapsto u(x)] = L \Leftrightarrow \lim_{x_0} [x \mapsto \text{Log } u(x)] = \text{Log } L$$

(dacă funcția u este cu valori pozitive în vecinătatea lui x_0).

8.1.5 Curba reprezentativă. Ramuri infinite

■ Proprietatea:

$$\lim_0 [x \mapsto \text{Log } x] = -\infty.$$

ne permite să tragem concluzia că curba reprezentativă Γ a funcției Log într-un reper $\mathcal{R}$ admite axa ordonatelor lui $\mathcal{R}$ drept asimptotă, în vecinătatea lui 0.

■ Să studiem ramura infinită în vecinătatea punctului de la infinit. Căutarea direcției asimptotice eventuale conduce la studiul limitei la $+\infty$ a funcției $\left[x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x} \right]$.

Pentru orice X al intervalului $]1, +\infty[$, avem:

$$1 > \frac{1}{X}.$$

Prin urmare, pentru orice x mai mare ca 1:

$$\int_1^x dt > \int_1^x \frac{dt}{t},$$

deci:

$$X - 1 > \text{Log } X.$$

Mai mult, pentru orice X din intervalul $]0, 1[$, $\text{Log } x$ este negativ și se poate trage concluzia :

$$\forall_{x \in]0, 1[} \quad \text{Log } x < x.$$

În particular, pentru orice x pozitiv nenul :

$$\text{Log } \sqrt{x} < \sqrt{x},$$

adică (Teorema 4, 8.1.3)

$$\frac{1}{2} \text{Log } x < \sqrt{x};$$

și prin urmare :

$$\frac{\text{Log } x}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x},$$

$$\frac{\text{Log } x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Cum, pe de altă parte :

$$x > 1 \Rightarrow \text{Log } x > 0,$$

și cum :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}} \right] = 0,$$

se poate trage concluzia :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x} \right] = 0.$$

Axa absciselor reperului $\mathcal{R}$ reprezintă deci direcția asimptotică a funcției Log la $+\infty$. Cum limita acestei funcții la $+\infty$ este infinită, curba Γ nu admite asimptote, admite însă o ramură parabolică în această direcție.

Tabloul de variație este următorul :

x	0	1	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		+	+
$\text{Log } x$	$-\infty$	0	$+\infty$

Curba reprezentativă este dată în figura 1.

Există tabele numerice pentru funcția Log (paginile 309 și urm.)

Observații. — 1 Aceeași metodă, ca și cea precedentă, permite să se demonstreze că :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x^n} \right] = 0$$

și, aceasta , oricare ar fi numărul rațional pozitiv n .

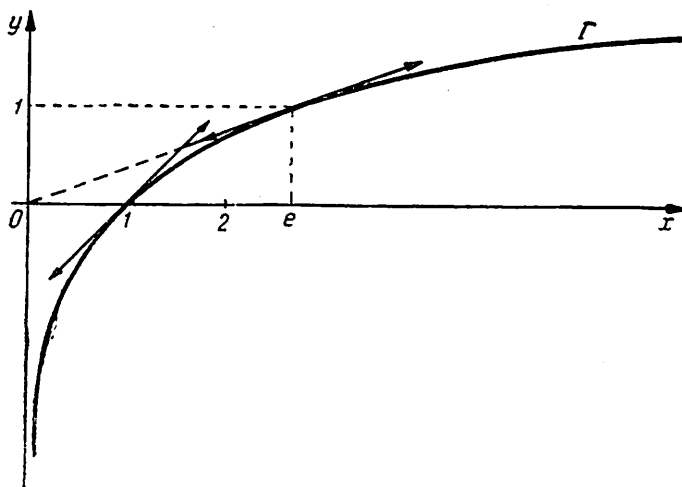


Fig. 1

2 Derivata funcției Log fiind egală cu 1 pentru $x = 1$, avem :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[x \mapsto \frac{\text{Log } x - \text{Log } 1}{x - 1} \right] = 1,$$

sau, dacă punem $x = 1 + h$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[h \mapsto \frac{\text{Log}(1+h)}{h} \right] = 1.$$

3 Fie $X = \frac{1}{x}$. Avem : $\frac{\text{Log } x}{\frac{1}{x}} = -X \text{Log } X$;

prin urmare : $\lim_{x \rightarrow 0} [X \mapsto X \text{Log } X] = 0,$

($X \text{Log } X$ este negativ în vecinătatea lui 0).

8.1.6 Numărul e

Funcția Log fiind o bijecție a lui $\mathbf{R}^{++}$ pe $\mathbf{R}$, există un număr, și numai unul, al cărui logaritm neperian este 1. (Imaginea unui număr x prin funcția logaritmică neperiană este numită logaritmul neperian al lui x .) Anticipând asupra paragrafului 8.2, să dăm următoarea :

DEFINIȚIE. Numărul e, soluție unică în $\mathbf{R}^{++}$ a ecuației definite prin $\text{Log } x = 1$, este numit baza logaritmilor neperieni.

Se demonstrează, și noi vom admite, că e este un număr irațional și că o valoare cu o aproximația de 10^{-10} a lui e este :

$$e \approx 2,718\ 281\ 285.$$

Să notăm că tangenta în punctul de coordonate $(e, 1)$ la curba Γ reprezentativă într-un reper $\mathfrak{A}$ al funcției Log are drept coeficient director $\frac{1}{e}$ și drept ecuație :

$$y - 1 = \frac{1}{e} (x - e) = \frac{x}{e} - 1,$$

adică :

$$y = \frac{x}{e}.$$

Prin urmare, această tangentă trece prin originea reperului $\mathfrak{A}$ (fig. 1).

8.1.7 Primitive ale funcției $\left[x \mapsto \frac{1}{x} \right]$.

■ Am văzut că toate funcțiile de forma :

$$[x \mapsto \text{Log } kx]$$

erau, pentru k pozitiv, o primitivă a lui $\left[x \mapsto \frac{1}{x} \right]$ pe $\mathbf{R}^{++}$.

Reciproc, toate primitivele acestei funcții pe $\mathbf{R}^{++}$ sînt de forma :

$$[x \mapsto \text{Log } x + C], \quad C \in \mathbf{R}.$$

Fie k unicul număr pozitiv al cărui logaritm neperian este C .
Avem :

$$[x \mapsto \text{Log } x + C] = [x \mapsto \text{Log } x + \text{Log } k] = [x \mapsto \text{Log } kx].$$

Toate primitivele funcției $\left[x \mapsto \frac{1}{x} \right]$ pe $\mathbf{R}^{++}$ sînt deci de forma $[x \mapsto \text{Log } kx]$, în care k este un număr real pozitiv.

■ Pe de altă parte să considerăm următoarea funcție φ , definită pe $\mathbf{R}^*$.

$$\varphi = [x \mapsto \text{Log } (-x)];$$

avem :

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Funcția φ este deci o primitivă a funcției $\left[x \mapsto \frac{1}{x} \right]$ pe $\mathbf{R}^*$.

Funcția $[x \mapsto \text{Log } |x|]$ este deci o primitivă pe $\mathbf{R}^*$ a funcției $\left[x \mapsto \frac{1}{x} \right]$, ca și toate funcțiile :

$$[x \mapsto \text{Log } |kx|] \text{ în care } k \text{ este un număr oarecare real.}$$

Reciproc, toate primitivele funcției $\left[x \mapsto \frac{1}{x} \right]$ pe $\mathbf{R}^*$ nu sînt de această formă, întru cît $\mathbf{R}^*$ nu este conex.

TEOREMĂ. Fie k un număr real oarecare. Funcția $[x \mapsto \text{Log } |kx|]$ este o primitivă pe $\mathbf{R}^*$ a funcției $\left[x \mapsto \frac{1}{x} \right]$.

Exemplu. Funcția f , definită prin :

$$f(x) = \text{Log } 2x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+*}$$

$$f(x) = \text{Log } |5x| \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{-*},$$

este o primitivă pe $\mathbb{R}^*$ a funcției $\left[x \mapsto \frac{1}{x} \right]$. În același timp, ea nu are forma $[x \mapsto \text{Log } |h(x)|]$ pe $\mathbb{R}^*$.

EXERCIIII

8.1 EXERCIIII REZOLVATE

Să se rezolve ecuațiile definite pe $\mathbb{R}$ prin :

a) $\text{Log } (x - 2)(x - 1) = \text{Log } (2x + 8);$

b) $\text{Log } (x - 2) + \text{Log } (x - 1) = \text{Log } (2x + 8).$

a) $S = \{x; x \in \mathbb{R}; (x - 2)(x - 1) > 0 \text{ și } (x - 2)(x - 1) = 2x + 8\};$

$$S = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - 5x - 6 = 0 \text{ și } x^2 - 3x + 2 > 0\};$$

$$S = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } [x = -1 \text{ sau } x = 6] \text{ și } x^2 - 3x + 2 > 0\};$$

avem $(-1)^2 - 3(-1) + 2 = 6$ care este pozitiv, și :

$$36 - 3 \times 6 + 2 = 20,$$

care este de asemenea pozitiv;

deci: $S = \{-1; 6\}.$

b) $S = \{x, x \in \mathbb{R}; x - 2 > 0 \text{ și } x - 1 > 0 \text{ și } (x - 2)(x - 1) = 2x + 8\};$

$$S =]2, +\infty[\cap \{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - 5x - 6 = 0\} =]2, +\infty[\cap \{-1, 6\} = \{6\};$$

$$S = \{6\}.$$

Să se rezolve ecuațiile definite pe $\mathbb{R}$, prin :

8.2 $\text{Log } (x + 3) + \text{Log } (x + 5) = \text{Log } 15.$

8.3 $\text{Log } (x - 2) + \text{Log } (x + 2) = \text{Log } 45.$

8.4 $\text{Log } (x - 3) + \text{Log } (x + 1) = \text{Log } (x^2 + 5).$

8.5 $2 \text{Log } (x - 4) = \text{Log } x - 2 \text{Log } 2.$

8.6 $\frac{1}{2} \text{Log } (3x - 1) + \frac{1}{2} \text{Log } (8x - 2) = \text{Log } (4x - 1).$

8.7 $2 \text{Log } (2x - 1) - \text{Log } (3x - 2x^2) = \text{Log } (4x - 3) - \text{Log } x.$

8.8 $2 \text{Log } 2 + \text{Log } (x^2 - 1) = \text{Log } (4x - 1).$

8.9 $\frac{1}{3} \text{Log } (x - 1) = \text{Log } x - \text{Log } 2.$

Să se rezolve sistemele definite pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prin următoarele relații simultane :

$$8.10 \begin{cases} x + y = 65 \\ \text{Log } x + \text{Log } y = \text{Log } 1\,000. \end{cases}$$

$$8.11 \begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \text{Log } x + \text{Log } y = \text{Log } 60. \end{cases}$$

8.12 Să se calculeze pe y știind că :

$$\text{Log } y = \text{Log } (7 + 5\sqrt{2}) + 8 \text{Log } (\sqrt{2} + 1) + 7 \text{Log } (\sqrt{2} - 1) + 2 \text{Log } (3 - 2\sqrt{2}).$$

8.13 Să se demonstreze egalitatea :

$$\frac{7}{16} \text{Log } (3 + 2\sqrt{2}) - 4 \text{Log } (\sqrt{2} + 1) = \frac{25}{8} \text{Log } (\sqrt{2} - 1).$$

8.14 Să se determine limita la $+\infty$ a următoarelor funcții :

a) $[x \rightarrow \text{Log } x - x];$

b) $[x \rightarrow (\text{Log } x)^2 - \sqrt{x}];$

c) $\left[x \rightarrow \frac{\text{Log } x + 1}{\text{Log } x} \right].$

8.15 Să se determine limita în 0_+ a următoarelor funcții :

a) $[x \rightarrow \sqrt{x} (\text{Log } x)^2];$

b) $[x \rightarrow \sqrt[3]{x} (\text{Log } x)^3];$

8.16 1° Să se studieze funcțiile :

$$u = \left[x \rightarrow \text{Log } x - \frac{x-1}{x} \right];$$

$$v = [x \rightarrow x - 1 - \text{Log } x].$$

Să se deducă că :

$$x > 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x} < \text{Log } x < x-1.$$

2° Să se aplice inegalitatea găsită la numărul e , apoi la numărul $\sqrt{e}$.

3° Să se aplice inegalitatea la numărul $\sqrt[n]{e}$. Să se deducă că :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n}.$$

8.17 Cu ajutorul unei integrări prin părți, să se determine primitivele funcției Log . Să se deducă natura și eventual valoarea integralei generalizate

$$\int_0^1 \text{Log } t \, dt.$$

Să se calculeze derivatele următoarelor funcții :

$$8.18 \left[x \mapsto \text{Log} \left| \text{tg } \frac{x}{2} \right| \right].$$

8.19 $[x \mapsto \text{Log} |\cos(ax + b)|]$.

8.20 $[x \mapsto \text{Log} |\text{Log } x|]$.

8.21 $[x \mapsto \text{Log}(x + \sqrt{x^2 + 1})]$.

8.22 1° Cu ajutorul integrării prin părți, să se calculeze următoarele primitive:

a) $\int \text{Log}^2 x \, dx;$

b) $\int \text{Log}^3 x \, dx.$

2° Să se deducă natura și eventual valoarea următoarelor integrale generalizate:

a) $\int_0^1 \text{Log}^2 x \, dx;$

b) $\int_0^1 \text{Log}^3 x \, dx.$

8.23 Se propune să se determine dacă există polinoamele A și B astfel ca:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}^+} \quad \text{Log } x = \frac{A(x)}{B(x)}.$$

1° Se presupune că există astfel de polinoame. Să se demonstreze că atunci avem:

$$\frac{B^2(x)}{x} = B(x) A'(x) - A(x) B'(x).$$

Să se deducă că B^2 conține în mod necesar x ca factor.

2° Studiind polinoamele B , de forma:

$$B(x) = x^n C(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

în care C este un polinom astfel că $C(0) \neq 0$, să se demonstreze că condiția obținută la 1° implică o contradicție. (Se vor distinge două cazuri: $n = 1$ și $n > 1$).

3° Să se deducă din aceste rezultate că funcția Log nu este o funcție rațională.

8.24 1° Să se studieze funcțiile:

$$f = [x \mapsto \text{Log } x];$$

$$g = [x \mapsto \text{Log } x^2];$$

$$h = [x \mapsto \text{Log } x^3];$$

Se vor trasa cele trei curbe reprezentative într-un același reper.

2° Să se demonstreze că tangentele la cele trei curbe corespunzând la puncte de aceeași abscisă, sînt concurente.

.

Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:

8.25 $\left[x \mapsto \frac{4}{2x + 1} \right].$

8.26 $[x \mapsto \text{tg } x].$

$$8.27 \quad \left[x \mapsto \frac{x}{1+x^2} \right].$$

$$8.28 \quad \left[x \mapsto \frac{1}{x \operatorname{Log} |x|} \right].$$

$$8.29 \quad \left[x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x} \right].$$

$$8.30 \quad \left[x \mapsto \frac{\cos (\operatorname{Log} x)}{x} \right].$$

$$8.31 \quad \left[x \mapsto \frac{3 \sin x}{1 + \cos^2 \frac{x}{2}} \right].$$

$$8.32 \quad [x \rightarrow \cot g x].$$

$$8.33 \quad \left[x \mapsto \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{x + \sin x} \right].$$

$$8.34 \quad \left[x \mapsto \frac{1}{2 + \sqrt{x}} \right]. \text{ (Se va pune } 2 + \sqrt{x} = u)$$

$$8.35 \quad [x \mapsto \cos x \operatorname{Log} (1 + \cos x)] \text{ (integrare prin părți).}$$

$$8.36 \quad [x \mapsto \operatorname{Log} (x + \sqrt{x^2 - 1})] \text{ (integrare prin părți).}$$

8.37 1° Utilizând teorema mediei, să se demonstreze că pentru orice număr întreg natural n :

$$\frac{1}{n+1} < \operatorname{Log} (n+1) - \operatorname{Log} n < \frac{1}{n}.$$

2° Să se deducă că $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, definit prin:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n},$$

este divergent.

8.38 Fie n un număr întreg natural. Să se determine primitiva:

$$\int t^n \operatorname{Log} t \, dt.$$

Să se deducă valoarea integralei:

$$I_n = \int_0^1 t^n \operatorname{Log} t \, dt.$$

8.39 1° Să se determine o funcție a cărei derivată secundă este funcția Log .

2° Aceeași problemă pentru derivata a treia.

8.40 1° Să se determine primitiva:

$$\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx.$$

(Se va observa imediat că funcția tangentă are ca derivată funcția $[x \rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 x]$, apoi se va integra prin părți).

2° Să se deducă valoarea următoarelor integrale :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t \operatorname{tg}^2 t \, dt,$$

$$I_2 = \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} t \operatorname{tg}^2 t \, dt.$$

3° Care este natura integralei generalizate :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \operatorname{tg}^2 t \, dt?$$

8.2 FUNCȚIE EXPONENȚIALĂ

8.2.1 Definiție. Primele proprietăți

Funcția logaritmică neperiană studiată în paragraful 8.1 este o aplicație continuă, strict crescătoare a lui $\mathbb{R}^{++}$ în $\mathbb{R}$. Ea este o bijecție care admite deci o bijecție inversă.

DEFINIȚIE. Bijecția inversă a unei funcții logaritmice neperiene este o aplicație a lui $\mathbb{R}$ pe $\mathbb{R}^+$, pe care o numim funcție exponențială. Se notează :

$\operatorname{Exp} x$.

Din această definiție rezultă imediat că :

a) $y = \operatorname{Exp} x \Leftrightarrow [x = \operatorname{Log} y \text{ și } y \in \mathbb{R}^{++}].$

b) Pentru orice număr real x , $\operatorname{Exp} x$ este un număr real strict pozitiv.

c) Funcția Exp este definită pe $\mathbb{R}$.

d) $\operatorname{Exp} 0 = 1$.

e) Funcția Exp fiind funcția inversă a unei funcții continue crescătoare, este ea însăși continuă crescătoare (1.8) ; prin urmare :

$$\forall_{\mathbb{R}} a, \forall_{\mathbb{R}} b \begin{cases} a > b \Rightarrow \operatorname{Exp} a > \operatorname{Exp} b ; \\ a > 0 \Rightarrow \operatorname{Exp} a > 1 ; \\ b < 0 \Rightarrow \operatorname{Exp} b < 1. \end{cases}$$

8.2.2 Proprietăți fundamentale

Funcția Log fiind un izomorfism de la structura $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ la structura $(\mathbb{R}, +)$, funcția exponențială este un izomorfism de la structura $(\mathbb{R}, +)$ la structura $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$.

TEOREMĂ. Indiferent care sînt numerele reale a și b , avem :

$$\text{Exp } (a + b) = \text{Exp } a \cdot \text{Exp } b.$$

Să ne reamintim demonstrația acestei proprietăți.

Fie f un izomorfism de la structura $(E, *)$ la structura $(F, \circ)$.

Avem: $\forall_E a, \forall_E b \quad f(a * b) = f(a) \circ f(b).$

Fie f^{-1} aplicația inversă a lui f ; f^{-1} este o bijecție a lui F pe E .

Avem :

$$\forall_F x, \forall_F y \quad f[f^{-1}(x \circ y)] = x \circ y, \quad f[f^{-1}(x) * f^{-1}(y)] = f[f^{-1}(x)] \circ f[f^{-1}(y)] = x \circ y,$$

ca urmare :

$$\forall_F x, \forall_F y \quad f[f^{-1}(x \circ y)] = f[f^{-1}(x) * f^{-1}(y)].$$

Or, f fiind un izomorfism, este, în particular, o bijecție.

Se deduce că :

$$\forall_F x, \forall_F y \quad f^{-1}(x \circ y) = f^{-1}(x) * f^{-1}(y)$$

și că, drept urmare, f^{-1} este un homomorfism de la $(F, \circ)$ la $(E, *)$ f^{-1} fiind o bijecție, este deci un izomorfism de la structura $(F, \circ)$ la structura $(E, *)$.

Din faptul că funcția exponențială este un izomorfism continuu de la $(\mathbb{R}, +)$ la $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ rezultă printre altele că pentru orice cuplu (x, y) de numere reale :

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y,$$

și că $\lim_{x \rightarrow a} [x \mapsto u(x)] = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} [x \mapsto e^{u(x)}] = e^L.$

8.2.3 Consecințe imediate

■ Pentru orice numere reale a și b , avem :

$$a = a - b + b.$$

Ca urmare :

$$\text{Exp } a = \text{Exp } (a - b + b) = \text{Exp } (a - b) \times \text{Exp } b.$$

TEOREMA Indiferent care sînt numerele reale a și b , avem :

1

$$\frac{\text{Exp } a}{\text{Exp } b} = \text{Exp } (a - b).$$

■ Fie r un număr rațional oarecare. Se știe că (8.1.3) pentru orice număr y real și pozitiv :

$$\text{Log } y^r = r \text{ Log } y.$$

Punem $y = \text{Exp } x$. Avem deci :

$$\text{Log } (\text{Exp } x)^r = r \text{ Log Exp } x = rx = \text{Log Exp } rx.$$

Funcția Log fiind o bijecție, se poate deduce :

TEOREMA. Fie r un număr rațional oarecare. Pentru orice număr real x ,
2 avem :

$$\text{Exp } rx = (\text{Exp } x)^r.$$

Pentru orice număr rațional r avem $r = r \times 1$, deci :

$$\text{Exp } r = \text{Exp } (r \times 1) = (\text{Exp } 1)^r.$$

Numărul $\text{Exp } 1$ este numărul al cărui logaritm neperian este 1. Acesta este numărul e (8.1.6), care se introduce aici cu totul natural. Pentru orice număr r rațional, avem deci :

$$\text{Exp } r = e^r.$$

Pentru un număr irațional x , nu am definit niciodată „ridicarea la puterea x ”. Stabilim :

DEFINIȚIE. Pentru orice număr real x , se serie :

$$e^x = \text{Exp } x.$$

Această definiție coincide, cum am verificat deja, cu definițiile date pentru exponenții raționali.

Avem deci :

$$y^x = e^x \Leftrightarrow [x = \text{Log } y \text{ și } y \in \mathbf{R}^{++}].$$

8.2.4 Derivata funcției exponențiale

Să ne reamintim că (3.5.2) :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Dacă punem aici :

$$f = [x \mapsto \text{Log } x],$$

avem :

$$f^{-1} = [x \mapsto e^x],$$

și ca urmare :

$$(e^x)' = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

Exponențiala are deci proprietatea fundamentală de a fi egală cu derivata sa.

TEOREMĂ. Funcția exponențială $[x \rightarrow e^x]$ este egală cu derivata funcției sale.

Observație. — Funcția exponențială mai este numită și *funcție exponențială de baza e*.

8.2.5 Limite la extremități

Funcția exponențială este definită pe $\mathbb{R}$. Să studiem comportarea sa în vecinătatea lui $+\infty$ și $-\infty$.

■ Dacă x este superior lui 0, e^x este superior lui 1. Deci funcția $\varphi = [x \mapsto e^x - (x + 1)]$, care are drept derivată funcția $\varphi' = [x \mapsto e^x - 1]$ pozitivă pentru x mai mare ca 1, este pozitivă pentru orice x mai mare ca zero ($\varphi(0) = 0$). Deci, pentru x mai mare ca zero, avem:

$$e^x > x + 1.$$

Ca urmare: $\lim_{+\infty} [x \mapsto e^x] = +\infty$.

■ Dacă x este negativ, relația $e^x e^{-x} = e^0 = 1$ arată că:

$$\lim_{-\infty} [x \mapsto e^x] = 0.$$

(Într-adevăr: $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ și $\lim_{-\infty} [x \mapsto e^{-x}] = +\infty$.)

De notat că aceste proprietăți rezultă din proprietățile funcției Log.

8.2.6 Ramuri infinite. Reprezentare grafică

■ Rezultatele precedente permit să se tragă concluzia că în vecinătatea lui $-\infty$, curba reprezentativă Γ într-un reper $\mathcal{R}$ al funcției exponențiale are ca asimptotă axa absciselor reperului $\mathcal{R}$.

■ În vecinătatea lui $+\infty$ avem:

$$\text{Log } \frac{e^x}{x} = x - \text{Log } x = x \left(1 - \frac{\text{Log } x}{x} \right).$$

Deci, după rezultatele de la 8.1.5:

$$\lim_{+\infty} \left[x \mapsto \text{Log } \frac{e^x}{x} \right] = +\infty.$$

Ca urmare: $\lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{e^x}{x} \right] = +\infty$.

Curba reprezentativă Γ admite deci o ramură parabolică în direcția axei ordonatelor reperului (fig. 2).

Curba este reprezentată în figura 2. Tabloul de variații este următorul :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x		+	1	+	
e^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Pe figura 2 sînt de asemenea reprezentate :

- a) punctat, curba reprezentativă a funcției Log ;
- b) tangentele în punctele $(0, 1)$ și $(1, e)$, ultima trecînd prin origine (8.1.6).

Observație. — Se demonstrează (vezi exercițiul 8.65) că pentru orice număr rațional pozitiv r :

$$\lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{e^x}{x^r} \right] = +\infty.$$

(Demonstrație analogă cu cea precedentă).

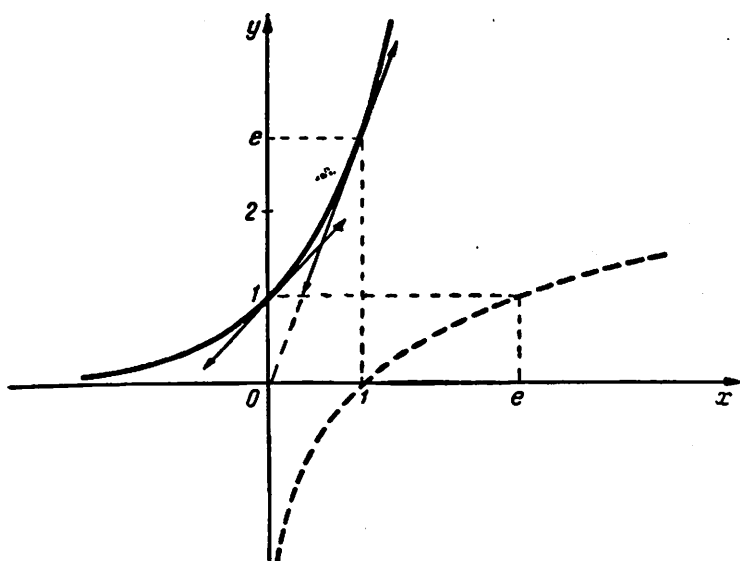


Fig. 2

8.2.7 Rezultate

Am considerat util de a strînge într-un tablou principalele rezultate ale paragrafelor 8.1 și 8.2:

$e \Rightarrow 2,7182818285$	
$\forall_{\mathbb{R}^{++}} x \quad \text{Log } x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ $\text{Log } 1 = 0$ $\text{Log } e = 1$ $\forall_{\mathbb{R}^{++}} x, \forall_{\mathbb{R}^{++}} y \quad \text{Log } xy = \text{Log } x + \text{Log } y$ $\lim_{+\infty} [x \mapsto \text{Log } x] = +\infty$ $\lim_0 [x \mapsto \text{Log } x] = -\infty$ $\lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x} \right] = 0$ $\forall_{\mathbb{Q}^{++}} r \quad \lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x^r} \right] = 0$ $\lim_0 [x \mapsto x \text{Log } x] = 0$ $\lim_0 \left[x \mapsto \frac{\text{Log } (1+x)}{x} \right] = 1$	$y = e^x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{Log } y \\ y \in \mathbb{R}^{++} \end{cases}$ $e^0 = 1$ $e^1 = e$ $\forall_{\mathbb{R}} x, \forall_{\mathbb{R}} y \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ $\lim_{+\infty} [x \mapsto e^x] = +\infty$ $\lim_{-\infty} [x \mapsto e^x] = 0$ $\lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{e^x}{x} \right] = +\infty$ $\forall_{\mathbb{Q}^{++}} r \quad \lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{e^x}{x^r} \right] = +\infty$

EXERCITII

8.41 Exercițiu rezolvat.

Să se simplifice expresia $y = xe^{\frac{1}{2}|\text{Log } x|}$, apoi să se studieze funcția f definită prin:

$$f(x) = xe^{\frac{1}{2}|\text{Log } x|}$$

De remarcat că $f(-x) = -f(x)$. Funcția f este o funcție impară.

1° Pentru x superior lui zero, avem: $\text{Log } x^2 = 2 \text{Log } x$.

a) dacă x este superior sau egal cu 1, avem: $|\text{Log } x| = \text{Log } x$ căci: $\text{Log } x > 0$;

deci:
$$e^{\frac{1}{2}|\text{Log } x|} = e^{\text{Log } x} = x,$$

și:
$$y = x^2.$$

b) dacă x este inferior sau egal cu 1, avem:

$$|\operatorname{Log} x| = -\operatorname{Log} x \quad \text{căci:} \quad \operatorname{Log} x < 0;$$

deci:

$$e^{\frac{1}{2}|\operatorname{Log} x^2|} = e^{-\operatorname{Log} x} = \frac{1}{e^{\operatorname{Log} x}} = \frac{1}{x},$$

și:

$$y = 1.$$

2° Pentru $x = 0$, expresia y nu are sens.

3° Pentru x inferior lui zero, imparitatea lui f permite să se tragă concluzia:

$$x \leq -1: y = -x^2;$$

$$x \geq -1: y = -1.$$

În rezumat:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-x^2$	-1	fără sens	$+1$	x^2

Rezultă de aici reprezentarea grafică a funcției f . Graficul se compune: dintr-un segment $[A, B]$ (A exclus) legind punctele $A(0, 1)$ și $B(1, 1)$, dintr-un arc de extremitate B făcând parte din parabola de ecuație $y = x^2$ și din figura simetrică în raport cu originea O a acestei mulțimi (fig. 3). De notat că funcția f este discontinuă pentru $x = 0$ cu limita la stânga diferită de limita la dreapta.

8.42 *Exercițiu rezolvat.*

Să se rezolve ecuația definită pe $\mathbb{R}$ prin:

$$e^x - e^{-x} = \frac{8}{3}$$

Punem $e^x = y.$

Avem $e^{-x} = \frac{1}{y}$

Ecuația se scrie

$$y - \frac{1}{y} = \frac{8}{3},$$

sau. $3y^2 - 8y - 3 = 0.$

Rădăcinile sînt

$$y_1 = 3; \quad y_2 = -\frac{1}{3}.$$

Or $y = e^x$ este pozitiv.

Soluția $y_1 = \frac{1}{3}$ nu convine.

Soluția $y = 3$ convine.

Ca urmare $e^x = 3.$

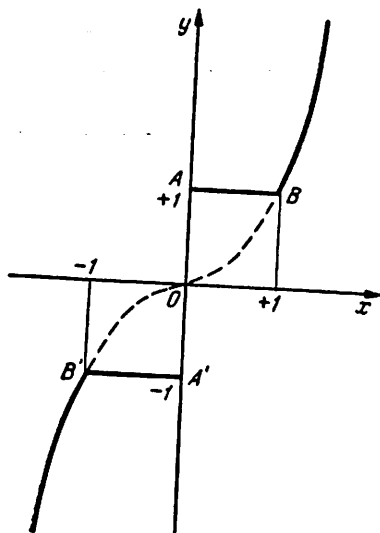


Fig. 3

Aceasta înseamnă, din definiția funcției exponențiale:

$$x = \text{Log } 3 \approx 1,098 \text{ (prin lipsă).}$$

8.43 Să se simplifice următoarele expresii

$$e^{3 \text{Log } 2}; \text{Log } \sqrt{e}; \text{Log } e^{\frac{1}{3}};$$

$$e^{-2 \text{Log } 3}; \text{Log } e^{-\frac{1}{2}}; \text{Log } \sqrt[3]{e};$$

8.44 Să se rezolve ecuațiile definite pe $\mathbb{R}$ prin:

a) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$;

b) $e^x + e^{-x} = 3$.

8.45 Să se demonstreze că dacă a și b sînt numere reale distincte, avem:

$$\frac{e^a + e^b}{2} > e^{\frac{a+b}{2}}.$$

Să se interpreteze geometric această inegalitate cu ajutorul graficului funcției e^x .

8.46 Să se demonstreze că pentru orice x real, avem:

$$e^x \geq 1 + x.$$

(Se va putea studia variațiile funcției $[x \mapsto e^x - 1 - x]$.)

8.47 Să se studieze următoarele funcții și reprezentați-le grafic:

$$f = [x \mapsto e^{x^2}];$$

$$g = \left[x \mapsto e^{\frac{1}{x}} \right].$$

8.48 1° Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția $[x \mapsto e^{-x}]$.

2° Să se calculeze aria $\mathcal{A}$ a domeniului delimitat de curba reprezentativă, axele reperului și dreapta de ecuație $x = a$.

3° Care este natura integralei generalizate $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$? Dați eventual și valoarea ei.

4° Aceeași întrebare și pentru: $\int_{-\infty}^0 e^{-t} dt$.

*

Să se determine următoarele primitive:

8.49 $\int e^{2x} dx$.

8.50 $\int x e^{x^2} dx$.

8.51 $\int \frac{e^x dx}{1 + e^x}$

8.52 $\int \cos x e^{\sin x} dx$.

8.53 $\int x e^{2x} dx$ (integrare prin părți).

8.54 $\int x^2 e^{2x} dx$ (două integrări prin părți, succesive).

8.55 $\int (ax^2 + bx + c) e^{2x} dx$ (se vor folosi rezultatele din exercițiile precedente).

8.56 $\int x^2 e^{-x} dx$.

8.57 $\int x e^{\sqrt{x}} dx$ (se va pune $t = \sqrt{x}$).

*

8.58 Fie integralele:

$$I = \int e^{2x} \cos 2x dx, \quad J = \int e^{2x} \sin 2x dx.$$

1° Integrând I prin părți, să se găsească o relație între I și J .

2° Integrând J prin părți, să se găsească o altă relație între I și J .

3° Cu ajutorul relațiilor astfel găsite, să se determine pe I și J .

4° Să se calculeze simultan integralele:

$$I_1 = \int e^{2x} \cos^2 x dx, \quad J_1 = \int e^{2x} \sin^2 x dx.$$

(Se va combina I_1 și J_1 și se vor aplica rezultatele de la 3°).

8.59 Fie:

$$I_n = \int x^n e^x dx.$$

Să se demonstreze că:

$$I_n = x^n e^x - n I_{n-1}.$$

Să se studieze cazul în care n este un număr natural.

8.60 Considerăm șirul (u_n) definit prin:

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Fie, pe de altă parte, șirul (v_n) , definit prin:

$$v_n = \text{Log } u_n.$$

1° Să se demonstreze că șirul (v_n) este convergent. Determinați limita (vezi 8.2.7).

2° Să se deducă că șirul (u_n) este convergent. Care este limita lui?

8.61 1° Să se demonstreze că funcția exponențială este suma unei funcții pare γ și a unei funcții impare σ .

2° Să se studieze și să se reprezinte funcțiile γ și σ .

3° Să se calculeze, pentru orice număr real x :

$$[\gamma(x)]^2 - [\sigma(x)]^2.$$

8.62 Fie f o funcție continuă și derivabilă pe un interval I , astfel ca toate derivatele succesive ale lui f să fie continue și mărginite pe I printr-un același număr B .

1° În aceste condiții, fie a și x două elemente ale lui I . Integrând de un număr oarecare de ori prin părți să se demonstreze că:

$$\int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(t-x)^n}{n!} dt = f(x) - f(a) - f'(a) \frac{x-a}{1!} - \dots - f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

2° Să se deducă că, a fiind un element al lui I , avem, oricare ar fi numărul real x al lui I :

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{x-a}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(t-x)^n}{n!} dt.$$

3° Să se demonstreze că, fiind dat un număr real ε pozitiv nenul, se poate găsi un număr întreg N , astfel ca:

$$n > N \Rightarrow \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(t-x)^n}{n!} dt < \varepsilon.$$

4° Să se aplice formula de la 2° la funcția $f = [x \mapsto e^x]$ și pentru $a=0$. Să se deducă că șirul (u_n) , definit prin:

$$u_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

este convergent către e .

5° Să se calculeze u_n . Să se compare cu o valoare apropiată a lui e dată în lucrare.

8.63 1° Să se aplice formula din exercițiul 8.62 (2°) funcțiilor:

$$f = [x \mapsto e^x]; g = [x \mapsto \sin x]; h = [x \mapsto \cos x],$$

și cu $a = 0$.

2° Să se deducă, pentru orice x , un șir $(u_n(x))$, un șir $(v_n(x))$ și un șir $(w_n(x))$ convergente către e^x , $\sin x$ și respectiv $\cos x$.

3° Să se calculeze, pentru orice număr întreg natural n : $x_n(x) = w_n(x) + i v_n(x)$, în care i este un număr complex astfel că $i^2 = -1$.

Să se compare $x_n(x)$ cu $u_n(ix)$.

Trecând la limită, se stabilește pentru orice număr real x :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

(Vezi asupra acestui subiect 9.3.3. și Algebra Numere reale, calcul numeric, numere complexe 3.4.4)

Să se studieze următoarele limite:

$$8.64 \lim_{0} \left[x \mapsto \frac{e^x - 1}{x} \right].$$

Să se înscrie rezultatele în tabloul de la 8.2.7).

$$8.65 \lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{(\text{Log } x)^m}{x^n} \right] \quad (m \in \mathbb{Q}^+, n \in \mathbb{Q}^+).$$

$$8.66 \lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{x^n}{e^{px}} \right] \quad (n \in \mathbb{Q}^+, p \in \mathbb{Q}^+).$$

$$8.67 \lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{(\text{Log } x)^m}{e^{px}} \right] \quad (m \in \mathbb{Q}^+, p \in \mathbb{Q}^+).$$

$$8.68 \text{ a) } \lim_{0} [x \mapsto x^n (\text{Log } |x|)^m] \quad (n \in \mathbb{Q}^+, m \in \mathbb{Q}^+).$$

$$\text{b) } \lim_{-\infty} [x \mapsto x^n e^{px}] \quad (n \in \mathbb{Q}^+, p \in \mathbb{Q}^+).$$

8.3 ALTE FUNCȚII LOGARITMICE ȘI EXPONENȚIALE

8.3.1 Funcția logaritmică în baza a

Căutînd și studiînd primitivele funcției $\left[x \mapsto \frac{1}{x}\right]$, am găsit funcția Log , care este un izomorfism monoton și continuu al structurilor $(\mathbb{R}^{++}, \times)$ și $(\mathbb{R}, +)$, relația de ordine și topologia fiind în fiecare caz relația de ordine și topologia firească a lui $\mathbb{R}$. Este normal să se caute dacă există și alte izomorfisme ale lui $(\mathbb{R}^{++}, \times)$ în $(\mathbb{R}, +)$, adică funcții φ astfel ca :

φ este bijectiv din $\mathbb{R}^{++}$ pe $\mathbb{R}$,

$$\forall_{\mathbb{R}^{++}} x, \forall_{\mathbb{R}^{++}} y \quad \varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Se știe că funcția Log satisface aceste condiții :

$$\forall_{\mathbb{R}^{++}} x, \forall_{\mathbb{R}^{++}} y \quad \text{Log}(xy) = \text{Log } x + \text{Log } y.$$

Deci, pentru orice k real nenul, avem :

$$k \text{Log}(xy) = k(\text{Log } x + \text{Log } y) = k \text{Log } x + k \text{Log } y$$

În plus, funcția $[x \mapsto k \text{Log } x]$ definită pe $\mathbb{R}^{++}$ este o bijecție a lui $\mathbb{R}^{++}$ pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr, oricare ar fi numărul real y , există un număr real pozitiv nenul, astfel ca : $\text{Log } x = \frac{y}{k}$, adică astfel ca :

$$y = k \text{Log } x.$$

TEOREMĂ. Oricare ar fi numărul real nenul k , funcția :

$$[x \mapsto k \text{Log } x]$$

este un izomorfism al structurilor $(\mathbb{R}^{++}, \times)$ și $(\mathbb{R}, +)$.

S-ar putea caracteriza fiecare izomorfism astfel construit, prin numărul k corespunzător, dar, anticipînd încă de aici asupra studiului funcțiilor exponențiale oarecare, se preferă să se opereze în modul următor :

Funcția $[x \mapsto k \text{Log } x]$ fiind, pentru k nenul, o bijecție a lui $\mathbb{R}^{++}$ pe $\mathbb{R}$, există numai un singur număr real pozitiv diferit de 1, astfel că :

$$k \text{Log } a = 1 ;$$

ca urmare :

$$k = \frac{1}{\text{Log } a}.$$

DEFINIȚIE. Pentru orice număr real pozitiv a nenul, diferit de 1, funcția $\left[x \mapsto \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}\right]$ este numită funcție logaritmică în bază a , și se notează :

$$\log_a x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$$

Numărul a este numărul unic pentru care $\log_a a = 1$. Cu această definiție, funcția logaritmică neperiană apare ca o funcție logaritmică cu baza e .

8.3.2 Proprietăți

Proprietățile funcțiilor logaritmice de baza a se deduc ușor din proprietățile funcției logaritmice neperiene.

Le vom rezuma mai jos:

$$\begin{aligned} \forall_{\mathbb{R}} y, \exists_{\mathbb{R}^{+*}} x & \quad y = \log_a x; \\ \forall_{\mathbb{R}^{+*}} y, \forall_{\mathbb{R}^{+*}} x & \quad x \neq y \Leftrightarrow \log_a x \neq \log_a y; \\ \forall_{\mathbb{R}^{+*}} x, \forall_{\mathbb{R}^{+*}} y & \quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y; \\ & \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y; \\ & \quad \log_a x^r = r \log_a x \quad (\forall_{\mathbb{Q}} r); \\ & \quad \log_a 1 = 0; \log_a a = 1. \end{aligned}$$

Derivata funcției $[x \mapsto \log_a x]$ este funcția:

$$\left[x \mapsto \frac{1}{x \operatorname{Log} a} \right].$$

Avem în toate cazurile:

$$\log'_a(1) = \frac{1}{\operatorname{Log} a}.$$

Dacă a este mai mare ca 1, $\operatorname{Log} a$ este pozitiv. Ca urmare, funcția $\log_a$ este crescătoare.

Dacă a este mai mic ca 1, $\operatorname{Log} a$ este negativ. Deci, funcția $\log_a$ este descrescătoare.

$a > 1$	$a < 1$
$\forall_{\mathbb{R}^{+*}} x, \forall_{\mathbb{R}^{+*}} y$ $x > y \Rightarrow \log_a x > \log_a y$ $\lim_{+\infty} [x \mapsto \log_a x] = +\infty$ $\lim_0 [x \mapsto \log_a x] = -\infty$	$\forall_{\mathbb{R}^{+*}} x, \forall_{\mathbb{R}^{+*}} y$ $x > y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$ $\lim_{+\infty} [x \mapsto \log_a x] = -\infty$ $\lim_0 [x \mapsto \log_a x] = +\infty$

În figura 4 sînt curbele reprezentative. S-a luat cîte un exemplu din fiecare formă de curbă:

$$a) \ a = \sqrt{e} \quad \log_{\sqrt{e}} x = \frac{\operatorname{Log} x}{\log \sqrt{e}} = 2 \operatorname{Log} x;$$

$$b) \quad a = e^{-1}: \quad \log_{\frac{1}{e}} x = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} \frac{1}{e}} = -\operatorname{Log} x.$$

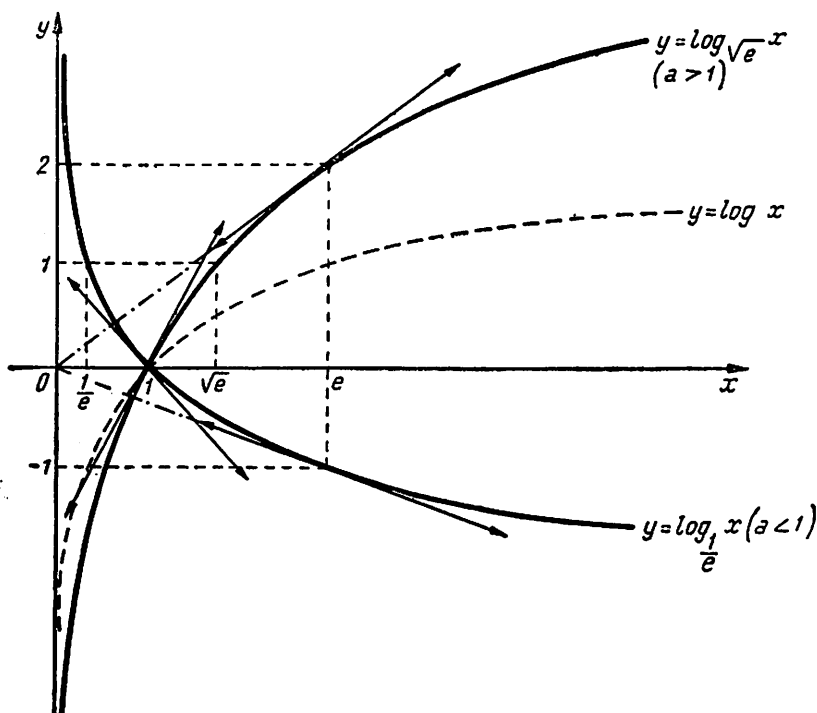


Fig. 4

8.3.3 Schimbarea bazei

Fie a și b două numere reale pozitive nenule și diferite de 1. Ne propunem să comparăm funcțiile $\log_a$ și $\log_b$. Pentru orice număr real pozitiv nenul x , avem :

$$\log_a x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a},$$

și :

$$\log_b x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } b},$$

de unde :

$$\log_a x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } b} \times \frac{\text{Log } b}{\text{Log } a} = \log_b x \times \log_a b.$$

Reținem această proprietate sub forma :

$$\forall_{x \neq 0} \quad \log_a x = \log_b b \times \log_b x$$

Se deduce de aici că raportul $\frac{\log_a x}{\log_b x} = \log_a b$ este independent de x .

În practică, se folosesc mai ales logaritmi în baza 10 (vezi 10.3.1). Pentru a calcula logaritmul neperian al unui număr al cărui logaritm zecimal este cunoscut, avem:

$$\text{Log } x = \log_e x = \log_e 10 \times \log_{10} x = \text{Log } 10 \times \log_{10} x.$$

Funcția $\log_{10}$ este foarte adesea notată „log”. Numărul $\log_e$ este adesea numit M . Avem:

$$\log e = \frac{\text{Log } e}{\text{Log } 10} = \frac{1}{\text{Log } 10}.$$

Numărul $\text{Log } 10$ este deci egal cu $\frac{1}{M}$. Avem, cu aproximație de 10^{-10}

$$M \approx 0,4342944819;$$

$$\frac{1}{M} \approx 2,3025850930.$$

Prin urmare: $\text{Log } x = M \times \log x.$

8.3.4 Funcția exponențială de bază a

Funcția $\log_a$ este, pentru orice număr a pozitiv nenul diferit de 1, un izomorfism continuu, monoton, al structurii $(\mathbb{R}^+, \times)$ în structura $(\mathbb{R}, +)$. Ea admite prin urmare o aplicație inversă care este de asemenea un izomorfism continuu, monoton, al lui $(\mathbb{R}, +)$ în $(\mathbb{R}^+, \times)$.

DEFINIȚIE. Aplicația inversă a funcției $\log_a$ este numită funcție exponențială cu baza a . Se notează:

$$y = \exp_a x \Leftrightarrow [x = \log_a y \text{ și } y > 0].$$

Avem: $y = \exp_a x \Leftrightarrow x = \log_a y \text{ și } y > 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\text{Log } y}{\text{Log } a} \text{ și } y > 0.$$

$$\Leftrightarrow \log_a x = \text{Log } y \text{ și } y > 0.$$

De aici rezultă: $y = \exp_a x \Leftrightarrow y = e^{x \text{Log } a}.$

Se demonstrează, la fel ca la 8.2.3, că pentru orice număr r rațional, avem:

$$\exp_a r = (\exp_a 1)^r = a^r.$$

Aceasta justifică notația adoptată a exponențialei cu baza a :

$\forall_R x \quad \exp_a x = e^{x \text{Log } a} = a^x$

8.3.5 Proprietățile funcțiilor exponențiale cu baza a

Proprietățile funcțiilor exponențiale cu baza a se deduc ușor din proprietățile funcțiilor Log și Exp. Le vom rezuma în continuare:

$$\forall_{\mathbb{R}^+} y, \exists_{\mathbb{R}} x \quad y = a^x;$$

$$\forall_{\mathbb{R}^+} y, \forall_{\mathbb{R}^+} x \quad x \neq y \Leftrightarrow a^x \neq a^y;$$

$$a^{x+y} = a^x \times a^y;$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y};$$

$$a^{rs} = (a^r)^s \quad (\forall r, s);$$

$$a^1 = a; \quad a^0 = 1.$$

Funcțiile exponențiale cu baza a sînt monotone ca funcții inverse ale unor funcții monotone. Ca și în cazul funcțiilor logaritmice, sensul lor de variație depinde de poziția lui a în raport cu 1:

Dacă a este superior lui 1:

$[x \mapsto a^x]$ este crescătoare.

Dacă a este inferior lui 1:

$[x \mapsto a^x]$ este descrescătoare.

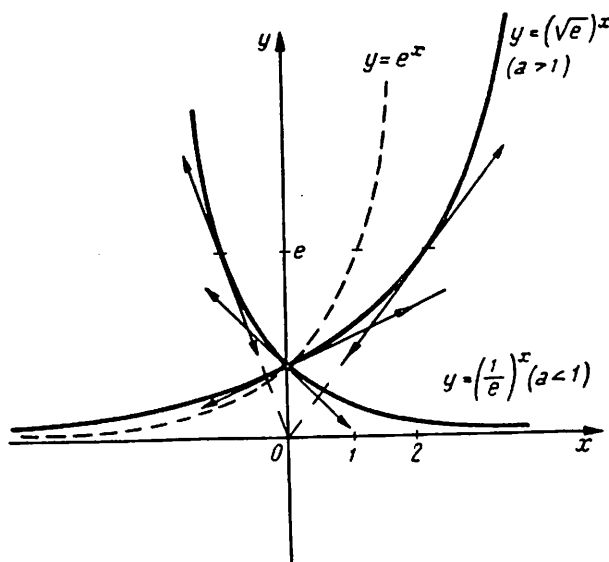


Fig. 5

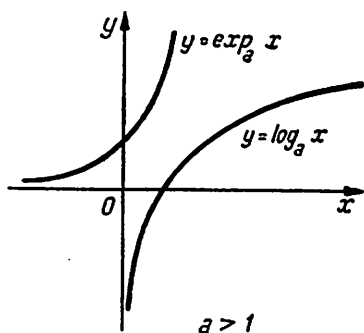


Fig. 6

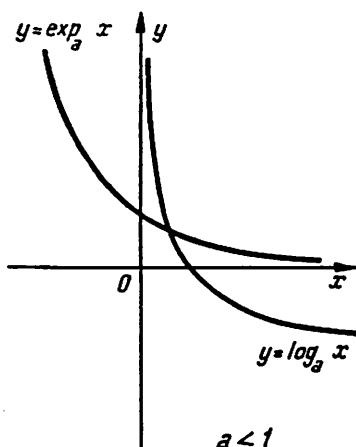


Fig. 7

Derivata funcției exponențiale cu baza a se poate calcula considerînd această funcție ca o funcție compusă din funcția exponențială (cu baza e) și din funcția $[x \mapsto x \operatorname{Log} a]$. Avem :

$$a^x = e^{x \operatorname{Log} a},$$

$$(e^{x \operatorname{Log} a})' = \operatorname{Log} a \cdot e^{x \operatorname{Log} a},$$

deci :

$$(a^x)' = (\operatorname{Log} a) a^x.$$

Curbele reprezentative sînt trasate în figura 5. S-a luat cîte un exemplu din fiecare formă a curbei :

$$y = (\sqrt{e})^x \text{ și } y = \left(\frac{1}{e}\right)^x.$$

Figurile 6 și 7 arată pentru fiecare caz, forma curbelor ce reprezintă funcțiile logaritmice și exponențiale cu baza a .

(Pentru figura 6 : $a > 1$; pentru figura 7 : $a < 1$.)

8.3.6 Funcția putere [exponent real]

Fie α un număr real. Considerăm funcția $[x \mapsto x^\alpha]$.

Avem :

$$x^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} x}.$$

Rezultă că funcția $[x \mapsto x^\alpha]$ este definită pe $\mathbf{R}^{++}$.

Pe de altă parte avem :

$$(e^{\alpha \operatorname{Log} x})' = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \operatorname{Log} x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Se regăsește astfel, și se generalizează pentru orice exponent real, formula care dă derivata funcțiilor putere.

8.3.7 Schimbarea bazei

Fie a și b două numere reale, pozitive, nenule, diferite de 1. Ne propunem să comparăm funcțiile $\exp_a$ și $\exp_b$.

Pentru orice număr real pozitiv nenul, avem :

$$a^x = e^{x \operatorname{Log} a}, \quad b^x = e^{x \operatorname{Log} b};$$

de unde :

$$(a^x)^{\operatorname{Log} b} = (b^x)^{\operatorname{Log} a},$$

adică :

$$a^x = (b^x)^{\frac{\operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} b}} = b^{x \operatorname{Log}_b a}.$$

Pe de altă parte, pentru $x = 1$, avem :

$$a^{\operatorname{Log} b} = b^{\operatorname{Log} a}.$$

Observație. — Pentru $a = 1$, funcția $[x \mapsto 1^x]$ este o funcție constantă, egală cu 1.

■ Trebuie notat că proprietățile funcțiilor $\exp_a$ se deduc ușor din proprietățile funcțiilor logaritmice. În probleme, toate relațiile de forma :

$$y = a^x$$

vor fi scrise de preferință sub forma :

$$\operatorname{Log} y = x \operatorname{Log} a.$$

Exemplu. Să se compare, pentru a și b pozitivi nenuli și pentru x real, numerele :

$$\alpha = a^x b^x \text{ și } \beta = (ab)^x.$$

Avem :

$$\operatorname{Log} \alpha = \operatorname{Log} a^x + \operatorname{Log} b^x = x \operatorname{Log} a + x \operatorname{Log} b = x(\operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b) = x \operatorname{Log} ab$$

și

$$\operatorname{Log} \beta = x \operatorname{Log} ab.$$

De unde :

$$\operatorname{Log} \alpha = \operatorname{Log} \beta$$

și, prin urmare :

$$\alpha = \beta.$$

8.3.8 Calculul practic al lui e^x

Dacă dispunem de o tabelă de logaritmi zecimali, scriem :

$$y = e^x \text{ și } \operatorname{Log} y = x,$$

deci :

$$\log y = x \times M.$$

Cunoscând pe x , deducem pe $\log y$ și apoi pe y .

Exemplu. Calculul lui $y = e^{1,32}$.

$$\begin{array}{r}
 \log y = 1,32 \times M \\
 M \approx 0,434\ 29 \\
 0,3M \approx 0,130\ 29 \\
 0,02M \approx 0,008\ 69 \\
 \hline
 \log y \approx 0,573\ 27 \\
 \log 3,743 \approx 0,573\ 22, \ D = 12 \\
 \hline
 \text{Diferență:} \quad 5 \\
 \text{corecție:} \quad 4 \quad 4,8 \\
 \hline
 e^{1,32} \approx 3,743\ 4.
 \end{array}$$

EXERCITII

8.69 a) Să se demonstreze că pentru orice număr a real pozitiv și diferit de 1, avem:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \log_a x \cdot \log_{a^2} x = \frac{1}{2} (\log_a x)^2.$$

b) Să se rezolve ecuația definită pe $\mathbb{R}^{+*}$ prin $\log_3 x \cdot \log_9 x = 2$.

8.70 a) Să se demonstreze că pentru orice triplet (a, b, c) de numere reale pozitive nenule și diferite de 1, avem:

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1.$$

b) Să se generalizeze la mai mult de trei numere

8.71 Să se rezolve ecuația definită pe $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$ prin $\log_3 q = 2$.

8.72 a, b, c fiind trei numere reale pozitive nenule diferite de 1, fie f funcția definită prin:

$$f(x) = \log_a x \cdot \log_b x + \log_b x \cdot \log_c x + \log_c x \cdot \log_a x.$$

1° Să se exprime f cu ajutorul funcției logaritmice neperiene.

2° Remarcind că pentru orice numere reale a, b, c, x nenule, avem:

$$\frac{(\text{Log } x)^2 \cdot \text{Log } (abc)}{\text{Log } a \cdot \text{Log } b \cdot \text{Log } c} = \frac{\text{Log } x \cdot \text{Log } x \cdot \text{Log } x \cdot \text{Log } (abc)}{\text{Log } a \cdot \text{Log } b \cdot \text{Log } c \cdot \text{Log } x},$$

să se demonstreze că:

$$f(x) = \frac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x}{\log_{abc} x}.$$

• • •

Să se rezolve sistemele definite prin:

$$8.73 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } \begin{cases} 4(\log_x y + \log_y x) = 17 \\ xy = 243. \end{cases}$$

$$8.74 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ și } \begin{cases} 7(\log_y x + \log_x y) = 50 \\ xy = 256. \end{cases}$$

(Bacalaureat, Clermont 1970)

• • •

8.75 Să se rezolve inecuația definită pe $\mathbb{R}$ prin :

$$\log_a x < \log_{a^3} (3x - 2).$$

(Bacalaureat, Montpellier 1970)

* * *

Să se rezolve ecuațiile definite pe $\mathbb{R}$ prin :

8.76 $e^{\text{Log}(1-x^2)} = -2x + 1.$

8.77 $(x^2 - 1)e^{\text{Log}(x-2)} = \text{Log } e^{(x+1)}.$ (Bacalaureat, Orléans, 1970)

8.78 $7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2 \left(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1} \right).$ (Bacalaureat, Rennes 1970)

8.79 $2^{2x-1} + 3 + 4^{x+\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0.$ (Bacalaureat, Amiens 1970)

8.80 $3^{x+2} + 9^{x-1} = 1458.$ (Bacalaureat, Dijon 1970)

8.81 $2^x + \frac{6}{2^x} = 5.$ (Bacalaureat, Lyon 1970)

8.82 Fie a și b două numere reale. Știind că :

$$a = \frac{1}{2} (e^b - e^{-b}),$$

să se exprime b în funcție de a .

(Bacalaureat, Montreal și New York 1970)

8.83 Să se rezolve ecuația definită pe $\mathbb{R}$ prin :

$$\log_x 10 + 6 \log_{10x} 10 - 8,4 \log_{100x} 10 = 0.$$

8.84 Știind că : $\pi^2 < 10$, să se demonstreze că :

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2.$$

8.85 Să se alcătuiască reprezentările grafice într-un reper $\mathcal{R}$ ale funcțiilor $\log_a$ și $\log_{\frac{1}{a}}$ ($a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}$).

8.86 1° Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția :

$$f = \left[x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x} \right].$$

2° Să se arate că, dacă există numere ale lui $\mathbb{N}^* - \{1\}$, a și b , astfel ca :

$$a^b = b^a,$$

atunci perechea (a, b) nu poate fi decît cuplul $(2, 4)$ sau cuplul $(4, 2)$.

Să se verifice dacă aceste soluții convin.

3° Să se discute ecuația definită pe $\mathbb{R}^{+*}$ prin $x^\lambda = \lambda^x$ (în care λ este un număr real dat).

8.87 *Exercițiu rezolvat.*

Să se calculeze cu ajutorul logaritmulor zecimale, valorile aproximative ale rapoartelor :

$$\frac{e^{10}}{10}, \quad \frac{e^{100}}{100}$$

Fie $a = \frac{e^{10}}{10}$. Avem :

$$\log a = 10 \times M - 1 \approx 3,3429.$$

S-a dedus: $a \approx 2\,202$ (cu aproximație de o unitate).

Fie $b = \frac{e^{100}}{100}$. Avem:

$$\log b = 100 M - 2 \approx 41,429.$$

Partea întreagă a numărului b are deci 42 cifre.

Găsim:

$$26,85 < \frac{b}{10^{40}} < 26,86.$$

Acest calcul arată că funcția e^x crește foarte repede.

8.88 Exercițiul rezolvat.

Utilizând un grafic să se găsească valorile aproximative ale lui x , astfel ca să avem:

$$1^\circ e^x = 2(x + 1).$$

$$2^\circ e^x = 5 - x.$$

1° Într-un reper $\mathcal{A}$, se construiesc curbele reprezentative Γ și Δ ale funcțiilor $[x \rightarrow e^x]$ și $[x \rightarrow 2(x + 1)]$ (fig. 8). Se constată că Γ și Δ se taie în două puncte M_1 și M_2 , a căror abscise, citite pe grafic, sînt aproximativ:

$$x_1 \approx -0,8; \quad x_2 \approx 1,7.$$

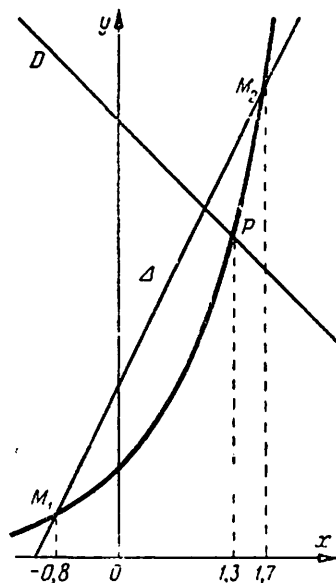


Fig. 8

2° Dreapta D , de ecuație $y = 5 - x$ în $\mathcal{A}$, taie curba într-un singur punct P , a cărei abscisă, citită pe grafic, este aproximativ:

$$x \approx 1,3.$$

8.89 Să se calculeze, cu ajutorul unei tabele de logaritmi zecimali, valorile apropiate de $e^{-\sqrt{n}}$, în care n este un număr natural cuprins între 0 și 6.

8.90 Să se rezolve grafic ecuația definită pe $\mathbb{R}$ prin:

$$e^{-x} = 2 + 3x.$$

8.91 Să se rezolve grafic ecuația definită pe $\mathbb{R}$ prin:

$$e^{\frac{x}{3}} = x.$$

* * *

Să se rezolve și eventual să se discute ecuațiile definite pe $\mathbb{R}$ prin:

$$8.92 \quad 5^{3x} = 7.$$

$$8.93 \quad e^{2x} - 10e^x + 9 = 0$$

$$8.94 \quad (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = \frac{(a-b)^{2x}}{(a-b)^2} \quad (a > b > 0).$$

* * *

8.95 1° a fiind un număr real să se calculeze derivata funcției $[x \rightarrow a^{-x}]$.

2° Să se studieze integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} x a^{-x^2} dx$, și, în cazul cînd este convergentă, să se calculeze.

8.4 FUNCȚII COMPUSE CU AJUTORUL FUNCȚIILOR LOGARITMICE ȘI EXPONENȚIALE

8.4.1 Recapitularea rezultatelor

Dăm în acest paragraf câteva exemple de studiu al funcțiilor compuse de tip logaritmice sau exponențiale.

Vom urma metoda generală de studiu a unei funcții, expusă în 4.2.

Fie funcția numerică u . Funcția compusă.

$$[x \mapsto \text{Log } u(x)]$$

este definită pentru valorile lui x pentru care $u(x)$ este strict pozitivă ; funcția $[x \mapsto e^{u(x)}]$ este definită pentru valorile lui x pentru care funcția u este definită.

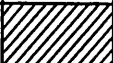
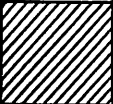
Exemplu. I. Funcția $\left[x \mapsto \text{Log } \frac{1+x}{1-x} \right]$ este definită pentru :

$$-1 < x < 1.$$

II. Funcția $\left[x \mapsto e^{\frac{1}{x-2}} \right]$ este definită pentru :

$$x \neq 2.$$

■ **LIMITE.** — Să ne reamintim, prin tabelul ce urmează, cele mai importante limite :

x	$+\infty$	$-\infty$	0
$\log x$	$+\infty$		$-\infty$
e^x	$+\infty$	0	1
$\frac{\log x}{x}$	0		$-\infty$
$\frac{e^x}{x}$	$+\infty$	0	∞ semnul lui x
$x \log x$	$+\infty$		0
$\frac{\log(1+x)}{x}$	0		1
$\frac{e^x - 1}{x}$	$+\infty$	0	1

Unele din aceste rezultate pot fi generalizate. Astfel, avem :

$$\forall_{q+n} \lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{e^x}{x^n} \right] = +\infty$$

$$\lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x^n} \right] = 0.$$

Exemplu.

$$\lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{e^x}{x^{100}} \right] = +\infty$$

$$\lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{\text{Log } x}{\sqrt[100]{x}} \right] = 0.$$

Uneori aceste proprietăți se exprimă spunând că funcția exponențială „crește mai repede” decât orice putere a lui x și că funcția logaritmică neperiană „crește mai puțin repede” decât orice putere a lui x .

Pe de altă parte, introducerea funcțiilor logaritmice și exponențiale face să apară forme nedeterminate noi în cercetarea limitelor.

8.4.2 Forme nedeterminate legate de funcțiile logaritmice și exponențiale

Fie u și v două funcții numerice de variabilă reală. Funcția u^v se poate defini astfel :

$$(u^v)(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \text{Log } u(x)}.$$

Avem deci, pentru orice x din domeniul comun de definiție a lui u și v :

$$\text{Log } [u^v(x)] = v(x) \text{Log } u(x).$$

Pentru orice element x_0 din $\mathbb{R}$, aplicînd teoremele asupra limitelor, se poate determina limita în x_0 a funcției care asociază, pentru orice x , numărul $\text{Log } [u^v(x)]$, cu excepția formelor nedeterminate „ $0 \times \infty$ ”.

Dacă :

$$\lim_{x_0} v = \alpha, \lim_{x_0} [x \mapsto \text{Log } u(x)] = \beta,$$

avem :

$$\lim_{x_0} [x \mapsto \text{Log } [u^v(x)]] = \alpha \cdot \beta,$$

adică :

$$\lim_{x_0} [x \mapsto u^v(x)] = e^{\alpha\beta},$$

afară, dacă : $[\alpha = 0 \text{ și } |\beta| = +\infty]$ sau $[|\alpha| = +\infty \text{ și } \beta = 0]$.
Acest caz corespunde la :

a) $\lim_{x_0} v = 0$ și $\lim_{x_0} [x \mapsto |\text{Log } u(x)|] = +\infty,$

(adică : $\lim_{x_0} u = +\infty$ sau $\lim_{x_0} u = 0$).

Forme nedeterminate corespunzătoare la: „ ∞^0 ” și „ 0^0 ”.

$$b) \quad \lim_{x_0} |v| = +\infty \text{ și } \lim_{x_0} [x \mapsto \text{Log } u(x)] = 0,$$

$$\text{adică:} \quad \lim u = 1;$$

formă nedeterminată corespunzătoare la „ 1^∞ ”.

Studiul limitelor în cazul funcțiilor construite cu ajutorul funcțiilor logaritmice și exponențială se face aplicând teoremele generale asupra limitelor. În cursul studiului se pot introduce nedeterminări.

Formele nedeterminate legate de funcții exponențiale sînt de forma „ ∞^0 ”, „ 0^0 ”, „ 1^∞ ”.

Pentru a studia aceste forme nedeterminate, se aduc la formele nedeterminate multiplicative, prin logaritmare.

Exemple. I. Fie funcția $f = [x \mapsto x^x]$.

Să studiem limitele lui f în 0 (forma 0^0).

$$\text{Avem:} \quad \text{Log } f(x) = x \text{ Log } x;$$

$$\text{sau:} \quad \lim_0 [x \mapsto x \text{ Log } x] = 0,$$

$$\text{adică:} \quad \lim_0 [x \mapsto \text{Log } f(x)] = 0.$$

$$\text{Ca urmare:} \quad \lim_0 f = 1 \quad (\text{Log } 1 = 0).$$

$$\text{II. Fie funcția } f = \left[x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right].$$

Să studiem limita lui f la $+\infty$ (forma 1^∞).

$$\text{Avem:} \quad \text{Log } f(x) = x \text{ Log } \left(1 + \frac{1}{x} \right),$$

$$\text{Log } f(x) = x \times \frac{1}{x} \times \frac{\text{Log} \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\text{Log} \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}};$$

$$\text{or:} \quad \lim_0 \left[h \mapsto \frac{\text{Log}(1+h)}{h} \right] = 1;$$

$$\text{deci:} \quad \lim_{+\infty} [x \mapsto \text{Log } f(x)] = 1;$$

$$\text{de aici rezultă: } \lim_{+\infty} f = e.$$

8.4.3 Studiul funcției

$$\left[x \mapsto \frac{x^2}{4} (2 \operatorname{Log} x - 3) \right]$$

Fie funcția $f = \left[x \mapsto \frac{x^2}{4} (2 \operatorname{Log} x - 3) \right]$.

Funcția f este definită și continuă pe $\mathbb{R}^{+*}$.

■ Avem:
$$f(x) = \frac{x}{2} \cdot x \operatorname{Log} x - \frac{3x^2}{4},$$

$$\lim_0 [x \mapsto x \operatorname{Log} x] = 0;$$

deci:
$$\lim_0 f = 0$$

Pe de altă parte:
$$f(x) = \frac{x^2}{4} (2 \operatorname{Log} x - 3);$$

prin urmare:
$$\lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Mai avem:
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{4} (2 \operatorname{Log} x - 3);$$

deci:
$$\lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{f(x)}{x} \right] = +\infty.$$

Curba reprezentativă a funcției f admite deci o ramură parabolică în direcția axei de ordinate a reperului.

■ Fie f' funcția derivată de ordinul I a lui f . Avem:

$$f'(x) = \frac{x}{2} (2 \operatorname{Log} x - 3) + \frac{x^2}{4} \cdot \frac{2}{x},$$

$$f'(x) = x \operatorname{Log} x - x = x (\operatorname{Log} x - 1).$$

În $\mathbb{R}^{+*}$, x este pozitiv; $\operatorname{Log} x$ este inferior lui 1 dacă x este inferior lui e , superior lui 1 în caz contrar.

Punctul $(0, 0)$ este un punct limită pentru curba reprezentativă.

Pentru că $\lim_0 f' = 0$, curba este tangentă în acest punct la axa absciselor reperului.

Există un minimum unde derivata este nulă pentru $x = e$. Atunci avem:

$$f(e) = -\frac{e^2}{4} \approx -1,85.$$

Tangenta la curbă în acest punct este paralelă cu axa absciselor reperului.

■ Tabloul de variație este:

x	0	e	$e\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	$\frac{e\sqrt{e}}{2}$	+
$f(x)$	0	$\searrow -\frac{1}{4}e^2 \nearrow$	0	$\nearrow +\infty$

Figura 9 indică profilul curbei reprezentative.

Observații. — 1 Un punct particular a fost precizat. Este vorba de punctul de ordonată nulă, la care abscisa este astfel că:

$$2 \operatorname{Log} x - 3 = 0,$$

adică:
$$\operatorname{Log} x = \frac{3}{2};$$

de unde:
$$x = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}.$$

Coeficientul unghiular al tangentei în punctul corespunzător, este:

$$f'(e\sqrt{e}) = \frac{e\sqrt{e}}{2} \approx 2,24.$$

2 Se poate preciza graficul curbei, studiind concavitataea.

Avem:
$$f''(x) = \operatorname{Log} x.$$

Numărul $f''(x)$ se anulează și schimbă de semn pentru $x = 1$, care corespunde punctului de coordonate $(1, f(1))$;

$$f(1) = -\frac{3}{4}.$$

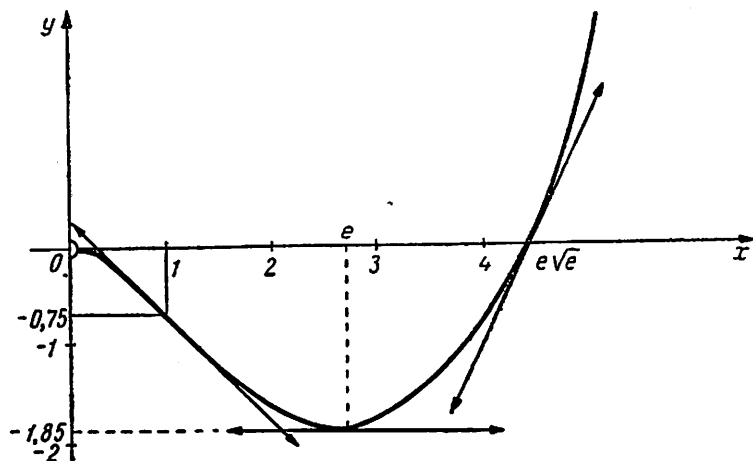


Fig. 9

Acest punct $\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ este un punct de inflexiune pentru curbă, iar tangenta are în acest punct drept coeficient director

$$f'(1) = -1.$$

8.4.4 Studiul funcției $\left[x \mapsto x e^{\frac{1}{x+3}}\right]$.

Fie funcția

$$f = \left[x \mapsto x e^{\frac{1}{x+3}}\right],$$

Funcția f este definită și continuă pe $\mathbb{R} - \{-3\}$.

Domeniul de definiție este deci format din două intervale $] -\infty, -3[$ și $] -3, +\infty[$.

■ *Studiul la extremități. Ramuri infinite.*

Avem:

$$\lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{1}{x+3}\right] = \lim_{-\infty} \left[x \mapsto \frac{1}{x+3}\right] = 0,$$

$$\lim_{+\infty} \left[x \mapsto e^{\frac{1}{x+3}}\right] = \lim_{-\infty} \left[x \mapsto e^{\frac{1}{x+3}}\right] = e^0 = 1,$$

deci:

$$\lim_{-\infty} f = +\infty, \quad \lim_{+\infty} f = -\infty.$$

Pe de altă parte: $\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x+3}},$

$$\lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{-\infty} \left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right] = 1.$$

Curba reprezentativă a funcției f admite deci o direcție asimptotică de coeficient unghiular 1. Să studiem asimptota:

$$f(x) - x = x \left(e^{\frac{1}{x+3}} - 1 \right),$$

În apropiere de infinit, $f(x) - x$ se prezintă sub forma unei nedeterminări („ $\infty \times 0''$ ”).

Avem:

$$f(x) - x = \frac{x}{x+3} \left(\frac{e^{\frac{1}{x+3}} - 1}{\frac{1}{x+3}} \right);$$

or:

$$\lim_0 \left[t \mapsto \frac{e^t - 1}{t} \right] = 1$$

(într-adevăr, această limită este derivata în 0 a funcției $[t \mapsto e^t]$);

deci:
$$\lim_{-\infty} [x \mapsto f(x) - x] = \lim_{+\infty} [x \mapsto f(x) - x] = 1.$$

Curba reprezentativă admite ca asimptotă, în vecinătatea lui $+\infty$ și $-\infty$, dreapta de ecuație $y = x + 1$ (în reperul în care se efectuează studiul).

Avem:
$$\lim_{-3^-} \left[x \mapsto \frac{1}{x+3} \right] = -\infty,$$

deci:
$$\lim_{-3^-} \left[x \mapsto e^{\frac{1}{x+3}} \right] = 0;$$

ca urmare:
$$\lim_{-3^-} f = 0.$$

Punctul $(-3, 0)$ este deci un punct limită (la stînga) pentru curba reprezentativă. Fie A acest punct.

Avem:
$$\lim_{-3^+} \left[x \mapsto \frac{1}{x+3} \right] = +\infty,$$

deci:
$$\lim_{-3^+} \left[x \mapsto e^{\frac{1}{x+3}} \right] = +\infty.$$

Ca urmare:
$$\lim_{-3^+} f = +\infty.$$

Dreapta de ecuație $x = -3$ este asimptotă la curba reprezentativă (la dreapta).

■ *Derivate. Sens de variație.*

Avem:
$$f'(x) = e^{\frac{1}{x+3}} - \frac{x}{(x+3)^2} e^{\frac{1}{x+3}} = \frac{x^2 + 5x + 9}{(x+3)^2} e^{\frac{1}{x+3}}.$$

Derivata este pozitivă pe tot domeniul de definiție. Pentru a determina semitangenta în punctul limită A , să studiem limita la stînga a lui f' în -3 . Avem:

$$\lim_{-3^-} \left[x \mapsto \frac{x^2 + 5x + 9}{(x+3)^2} \right] = +\infty,$$

$$\lim_{-3^-} \left[x \mapsto e^{\frac{1}{x+3}} \right] = 0.$$

Această limită se prezintă sub forma nedeterminată („ $0 \times \infty$ ”). Luăm:

$$\frac{1}{x+3} = -\alpha.$$

Se scrie:
$$\lim_{-3^-} [x \mapsto \alpha] = +\infty;$$

de aici rezultă:

$$f'(x) = (x^2 + 5x + 9)\alpha^2 e^{-\alpha} = (x^2 + 5x + 9) \frac{\alpha^2}{e^\alpha};$$

or (8.2.7) :

$$\lim_{+\infty} \left[\alpha \mapsto \frac{e^\alpha}{\alpha^3} \right] = +\infty ;$$

deci :

$$\lim_{+\infty} \left[\alpha \mapsto \frac{\alpha^3}{e^\alpha} \right] = 0 ;$$

ca urmare :

$$\lim_{-3^-} f' = 0.$$

Observăm că studiul coeficientului unghiular al tangentei în punctul limită se poate face studiind limita în -3^- a lui $\frac{f(x)}{x+3}$, adică făcând direct un studiu al derivatei, la stînga în punctul -3 .

■ Tabloul de variație este :

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	0	$+\infty$

iar curba reprezentativă este dată în figura 10.

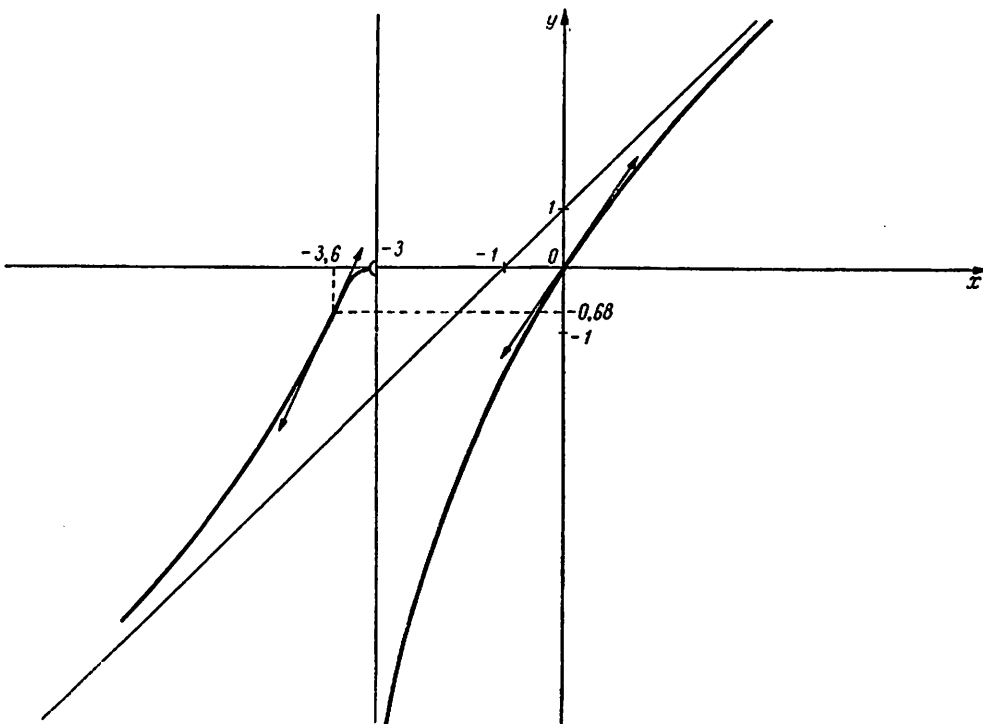


Fig. 10

Observație. — 1 S-a precizat un punct particular. Este vorba de origine. Într-adevăr: $f(0) = 0$.

Curba reprezentativă trece deci prin originea reperului. În acest punct, coeficientul unghiular al tangentei este $e^{\frac{1}{3}} \approx 1,4$.

2 Se poate preciza graficul curbei studiind concavitatea.

Avem:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x+3}} - \frac{x}{(x+3)^2} e^{\frac{1}{x+3}};$$

prin urmare:

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+3)^3} e^{\frac{1}{x+3}} - \frac{(x+3)^2 - 2x(x+3)}{(x+3)^4} e^{\frac{1}{x+3}} + \frac{x}{(x+3)^4} e^{\frac{1}{x+3}},$$

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x+3}} \frac{-5x - 18}{(x+3)^4}.$$

$f''(x)$ se anulează și schimbă de semn pentru $x = -\frac{18}{5}$, care corespunde unui punct de inflexiune al curbei, ale cărui coordonate sînt:

$$-\frac{18}{5} \text{ și } f\left(-\frac{18}{5}\right).$$

Avem:

$$-\frac{18}{5} = -3,6$$

$$f(-3,6) = (-3,6) e^{-\frac{5}{3}} \approx (-3,6)(0,19) \approx -0,68.$$

Coeficientul unghiular al tangentei în acest punct este:

$$f'(-3,6) = e^{-\frac{5}{3}} \left(1 - \frac{-\frac{18}{5}}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} \right) = e^{-\frac{5}{3}} \times 11 \approx 2,1.$$

8.4.5 Studiul funcției

$$\left[x \mapsto 2 \cos x + \operatorname{Log} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right]$$

f are perioadă 2π . O vom studia deci în intervalul $[0, 2\pi[$. $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ nefiind deci strict pozitivă decît în intervalul $]0, \pi[$, studiul asupra lui f se restrînge la acest interval $]0, \pi[$ în care ea este definită și continuă.

■ Avem: $f(\pi - x) = -f(x).$

Curba reprezentativă este deci simetrică în raport cu punctul $I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right).$

Nu studiem pe f decât pe $]0, \frac{\pi}{2}[.$

Avem: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

Pe de altă parte:

$$\lim_0 \left[x \mapsto \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] = 0,$$

deci: $\lim_0 \left[x \mapsto \operatorname{Log} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right] = -\infty;$

ca urmare: $\lim_0 f = -\infty.$

Curba reprezentativă admite dreapta de ecuație $x = 0$ ca asimptotă.

■ Avem:

$$f'(x) = -2 \sin x + \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = -2 \sin x + \frac{1}{\sin x},$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \sin^2 x}{\sin x}.$$

Pe intervalul $]0, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x)$ este de același semn cu $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x\right);$

deci: $x \in]0, \frac{\pi}{4}[\Rightarrow f'(x) > 0;$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f'(x) = 0;$$

$$x \in \left] \frac{\pi}{4}, \pi \right[\Rightarrow f'(x) < 0.$$

Pentru $x = \frac{\pi}{4}$, funcția admite un maximum unde derivata este nulă. Punctul corespunzător are drept ordonată:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}.$$

Se găsește: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0,49.$

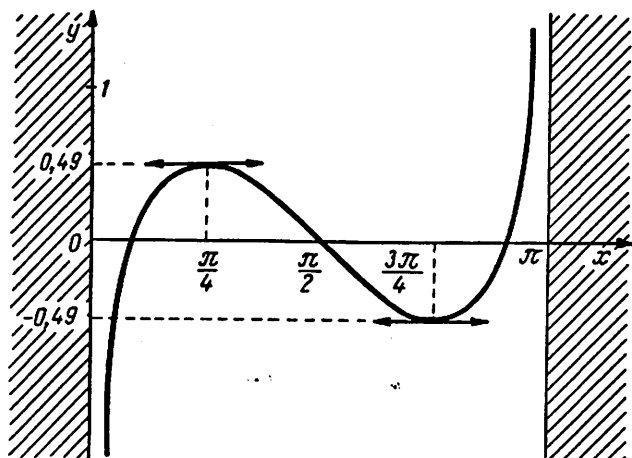


Fig. 11

Tabelul de variație este:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$
		α	0

$$\alpha \approx 0,49;$$

iar curba reprezentativă este dată în figura 11.

Observație. — 1 Se poate preciza graficul curbei utilizând un număr oarecare de puncte particulare; de exemplu:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0,45;$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0,41;$$

$$f\left(\frac{\pi}{10}\right) \approx -0,57.$$

2 Punctul $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ fiind centru de simetrie este neapărat un punct de inflexiune, deoarece aparține curbei. Studiul complet al concavității cu ajutorul derivatei secunde va confirma că acest punct este singurul punct de inflexiune al curbei în intervalul $[0, 2\pi]$. Tangenta în punctul de inflexiune are drept coeficient unghiular -1 .

EXERCITII ȘI PROBLEME

Să se studieze și să se reprezinte grafic funcțiile definite prin :

$$8.96 \quad f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{Log} x.$$

$$8.97 \quad f(x) = \frac{1 + (\operatorname{Log} x)^2}{1 - (\operatorname{Log} x)^2}.$$

$$8.98 \quad f(x) = (2 - x)e^x.$$

$$8.99 \quad f(x) = x \operatorname{Log} x - x.$$

$$8.100 \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

$$8.101 \quad f(x) = \frac{x - \operatorname{Log} x}{x}.$$

$$8.102 \quad f(x) = x \operatorname{Log} [(x + 1)^2].$$

$$8.103 \quad f(x) = \frac{x}{x - 1} - \operatorname{Log} |x - 1|.$$

$$8.104 \quad f(x) = xe^{-x}.$$

$$8.105 \quad f(x) = x^2 e^{-x}.$$

$$8.106 \quad f(x) = \operatorname{Log} x + 1 - x + 2 \left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

$$8.107 \quad f(x) = \frac{e^x}{|x - 1|}.$$

(Bacalaureat, Amiens 1970)

$$8.108 \quad f(x) = \frac{1}{e^{x-1}}.$$

(Bacalaureat, Caen 1970)

$$8.109 \quad f(x) = \frac{e^x + 2}{1 - 3e^x}.$$

(Bacalaureat, Nantes, 1970)

$$8.110 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x}{\operatorname{Log} |x|} & (x \neq 0), \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

(Bacalaureat, Toulouse 1970)

$$8.111 \quad f(x) = \operatorname{Log} \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right|.$$

(Bacalaureat, Aix-en-Provence, 1970)

$$8.112 \quad f(x) = \operatorname{Log} |\operatorname{Log} x|.$$

(Bacalaureat, Limoges, 1970)

8.113 Se consideră funcția numerică f de variabilă reală definită prin :

$$-\infty < x < -1 : x \mapsto f(x) = \sqrt{-x - 1};$$

$$-1 \leq x \leq +1 : x \mapsto f(x) = x^2 - 1;$$

$$+1 < x < +\infty : x \mapsto f(x) = 2 \operatorname{Log} x.$$

1° Să se studieze continuitatea lui f .

2° Se notează prin f' , funcția derivată a lui f . Să se afle f' și să se studieze continuitatea sa.

3° Să se traseze o reprezentare grafică a lui f în reper ortonormat.

(Bacalaureat, Caen 1970)

8.114 Se consideră funcția:

$$f = \left[x \mapsto y = \frac{1 + \operatorname{Log} x}{x} \right].$$

în care notația $\operatorname{Log} x$ reprezintă logaritmul neperian al lui x .

Să se studieze variația lui f și să se construiască cu precizie o reprezentare grafică C , într-un reper ortonormat.

Se vor determina în particular următoarele puncte ale lui C :

a) M_1 , de abscisă x_1 , intersecția lui C și a axei xx' ;

b) M_2 , de abscisă x_2 , punct în care tangenta trece prin origine;

c) M_3 , de abscisă x_3 , punct în care tangenta este paralelă cu xx' ;

d) M_4 , de abscisă x_4 , punct în care se anulează derivata secundă.

Să se verifice că cele patru numere x_1, x_2, x_3 și x_4 formează o progresie geometrică.

(Bacalaureat, Lille 1970)

8.115 Se consideră funcția f_m , definită pentru x real prin:

$$f_m(x) = e^x - mx,$$

m fiind un parametru real, pozitiv.

Fie C_m graficul lui f_m în raport cu un reper ortonormat.

1° Să se studieze variația funcției f_m . Demonstrați că, oricare ar fi m , curba C_m admite o asimptotă a cărei ecuație se va găsi. Determinați coordonatele punctului M corespunzător minimumului funcției f_m .

2° Să se găsească, când m variază, ecuația mulțimii Γ a punctelor M și construiți mulțimea Γ .

8.116 Se consideră funcția f de variabilă reală x :

$$f = \left[x \mapsto y = f(x) = \frac{\operatorname{Log} x}{x} \right].$$

în care $\operatorname{Log} x$ reprezintă logaritmul neperian al lui x .

1° Să se studieze variațiile lui f . Construiți, relativ la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$, curba C de ecuație:

$$y = \frac{\operatorname{Log} x}{x}$$

2° Fie Ox și Oy semidreptele de vectori directori unitari respectiv $\vec{i}$ și $\vec{j}$. Observind că f se poate scrie $u \cdot u'$, să se determine o funcție primitivă F , a funcției f . Să se deducă aria suprafeței limitate prin curba C , semidreapta Ox , paralelele la semidreapta Oy , de abscise 1 și respectiv e^2 .

(Bacalaureat, Limoges 1970)

8.117 Să se rezolve inecuația definită prin:

$$\operatorname{Log} |x| < 1.$$

în care simbolul Log reprezintă logaritmul neperian.

2° Se consideră funcția f de valoare reală, definită cum urmează:

$$\begin{cases} y = f(x) = 2x - x \operatorname{Log} |x| & \text{pentru } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea funcției f , apoi variația sa. (Pentru studiul în origine se poate lua $x_1 = \frac{1}{X}$, în care X tinde către infinit).

3° Să se construiască într-un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ curba care reprezintă variația lui f . Precizați simetria, tangenta în punctul de abscisă zero, ramurile infinite.

(Bacalaureat, Reims 1970)

8.118 Fie f funcția definită pentru x real prin :

$$y = f(x) = (1 - x)e^x.$$

1° Să se studieze variația lui f și să se reprezinte grafic într-un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Să se determine numerele reale a și b astfel ca funcția F , definită prin :

$$F(x) = (ax + b)e^x,$$

să fie o funcție primitivă a lui f .

Să se deducă aria domeniului plan, mulțime a punctelor de coordonate (x, y) astfel încât să avem :

$$x \geq 0 \text{ și } 0 \leq y \leq (1 - x)e^x.$$

(Bacalaureat, Reims 1970)

8.119 Să se calculeze, pentru x real strict pozitiv, integrala definită prin :

$$\int_1^x \left(-\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Se consideră funcția :

$$f = \left[x \mapsto \int_1^x \left(-\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt \right] \quad (x \in \mathbb{R}, x > 0).$$

1° Să se studieze sensul de variație al lui f . Să se construiască curba sa reprezentativă într-un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Să se studieze, utilizând ceea ce a precedat, sensul de variație al funcției g :

$$g = [x \mapsto e^{(1-x)\text{Log}^2 x}] \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Să se precizeze limitele acestei funcții la marginile intervalului de definiție. (Nu este cerută curba reprezentativă a lui g).

(Bacalaureat, Toulouse 1970)

8.120 Se consideră funcția f definită pe mulțimea numerelor reale prin :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1° Să se studieze f și să se traseze curba reprezentativă C într-un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Să se determine primitiva lui f care se anulează pentru $x = 0$. Să se calculeze aria regiunii limitate prin C , dreapta $x = 1$ și dreptele de ecuații $x = 1$ și respectiv $x = 2$.

(Bacalaureat, Cameroun 1970)

8.121 1° Să se studieze funcția numerică f de variabilă reală x , definită prin :

$$f(x) = e^x + \text{Log } |x|.$$

(Se poate studia semnul lui $f'(x)$ pentru x diferit de zero ; nu se cere să se calculeze punctele de inflexiune).

2° Să se calculeze, pentru x diferit de zero, derivata funcției :

$$[x \mapsto x \text{Log } |x|].$$

3° Să se calculeze aria domeniului plan cuprins între curbă, axa absciselor și dreptele de ecuații $x = 1$ și respectiv $x = \alpha$, pentru $\alpha > 2$. Să se demonstreze că această arie tinde către $+\infty$ când α tinde către $+\infty$.

(Bacalaureat, Amiens 1970)

8.122 Fie funcția f :

$$f = \left[x \mapsto y = x^3 \operatorname{Log} x - \frac{x^3}{2} \right].$$

Să se studieze limitele lui y și $\frac{y}{x}$ când x tinde către 0 și când x tinde către $+\infty$. Să se calculeze derivata lui f , să se găsească sensul de variație al lui f și să se traseze graficul său C într-un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Să se calculeze derivata lui:

$$y = \frac{x^3}{3} \operatorname{Log} x - \frac{5x^3}{18}.$$

Să se deducă aria domeniului limitat prin dreapta $x'x$ de reper $(O, \vec{i})$, dreapta de ecuație $x = \lambda$ ($0 < \lambda < \sqrt{e}$) și arcul lui C , situat deasupra dreptei $x'x$. Să se calculeze limita acestei arii atunci când λ tinde către 0.

(Bacalaureat, Caen 1970)

8.123 a) $\operatorname{Log} x$ reprezintă logaritmul neperian a lui x . Fie f funcția definită pentru x pozitiv prin:

$$f(x) = \operatorname{Log}^2 x.$$

Să se traseze curba reprezentativă C a lui f într-un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Să se calculeze derivata funcției G , definită pentru x pozitiv prin:

$$G(x) = x(\operatorname{Log}^2 x - 2 \operatorname{Log} x).$$

Să se deducă o primitivă a lui f .

c) Fie A punctul comun al lui C și al semidreptei Ox de vector director unitar $\vec{i}$, și fie I punctul distinct de A , astfel ca tangenta în I la C să treacă prin O . Să se determine coordonatele lui I și aria limitată prin arcul $\widehat{AB}$ a lui C și segmentele $[O, I]$ și $[O, A]$.

(Bacalaureat, Clermont 1970)

8.124 1° Se consideră funcția f care, la un număr real x , face să corespundă:

$$y = f(x) = \sqrt{x} \operatorname{Log} x,$$

în care Log reprezintă logaritmul neperian cu baza e .

Să se determine domeniul de definiție al lui f și studiați variația sa în acest domeniu. (Pentru a studia $f(x)$ când x tinde către 0 prin valori pozitive, se poate lua $x = \frac{1}{u^2}$).

Să se construiască reprezentarea grafică a funcției f în planul înzestrat cu un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Să se determine derivata φ' a funcției φ definite prin:

$$\varphi(x) = x \sqrt{x} \operatorname{Log} x \quad (x > 0).$$

Să se deducă o primitivă a funcției f , apoi să se calculeze integrala definită prin:

$$A(x) = \int_1^x f(t) dt \quad (x > 0).$$

Să se studieze limita lui $A(x)$ când x tinde către 0 prin valori pozitive.

(Bacalaureat, Paris 1970)

8.125 1° Să se studieze funcțiile :

$$u = \left[x \mapsto \text{Log } x - \frac{x-1}{x} \right] \text{ și } v = [x \mapsto x - 1 - \text{Log } x].$$

Să se deducă că :

$$\forall_{\mathbb{R}} x, x > 1 \rightarrow \frac{x-1}{x} < [\text{Log } x < x - 1].$$

2° Să se aplice inegalitatea găsită pentru $x = e$, apoi pentru $x = \sqrt[n]{e}$.

3° Să se aplice inegalitatea pentru $x = \sqrt[n]{e}$. Să se deducă că :

$$\forall_{\mathbb{N}} n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n}$$

8.126 1° Să se studieze funcția :

$$f = [x \mapsto \text{Log } (1 + x) - x].$$

2° Să se studieze funcția :

$$g = \left[x \mapsto \text{Log } (1 + x) - x + \frac{x^2}{2} \right].$$

3° Să se deducă din rezultatele precedente că :

$$\forall_{\mathbb{R}} x, x > 0 \rightarrow x - \frac{x^2}{2} < \text{Log } (1 + x) < x,$$

și să se utilizeze această dublă inegalitate pentru a determina limita expresiei :

$$\left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) \dots \left(1 + \frac{p}{n^2} \right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2} \right),$$

atunci când n tinde către infinit.

4° Să se aplice formula din exercițiul 8.62, funcției :

$$[x \mapsto \text{Log } (1 + x)] \text{ și la } x_0 = 0.$$

Să se deducă pentru orice x , un șir $(u_n(x))$ convergent către $\text{Log } (1 + x)$.

8.127 Se consideră curba C reprezentînd într-un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ funcția $[x \mapsto \text{Log } x]$.

Fie pe C , punctul A de abscisă 1, și punctul M de abscisă $1 + \frac{1}{n}$, în care n este un număr întreg pozitiv. Să se demonstreze că coeficientul unghiular al dreptei AM poate fi pus sub forma :

$$\text{Log } \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Să se deducă că, atunci când n tinde către $+\infty$, expresia $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ tinde către e .

8.128 Se consideră funcția $\left[x \mapsto \text{Log } \left| \frac{x+1}{x} \right| \right]$

1° Să se studieze această funcție și să se traseze graficul său G .

2° O paralelă la axa absciselor a reperului tale G în două puncte M_1 și M_2 de abscise x_1 și respectiv x_2 . Să se demonstreze că x_1 și x_2 sînt conjugate armonic în raport cu două numere fixe a și b .

8.129 Se consideră funcțiile:

$$u = \left[x \mapsto \frac{1}{2} x^3 \operatorname{Log} x - \frac{3}{4} x^3 \right],$$

$$v = [x \mapsto x \operatorname{Log} x - x],$$

$$w = [x \mapsto \operatorname{Log} x].$$

1° Să se calculeze u' și v' .

2° Să se traseze curba reprezentativă C a funcției w . Fie, pe C , punctul M de abscisă $x(x > 1)$, și punctul A de abscisă 1. Fie, pe tangenta la C în A , punctul P de abscisă $x(x > 1)$.

Să se calculeze aria $f(x)$ a porțiunii de plan limitată de arcul $\widehat{AM}$ a lui C și de segmentele $[A, P]$ și $[P, M]$.

Evaluează $f(4)$.

8.130 Să se demonstreze că graficul funcției f :

$$f = \left[x \mapsto \operatorname{Log} \frac{ax + b}{ax + d} \right] (ad \neq 0)$$

admite un centru de simetrie I de coordonate:

$$x_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c} \right),$$

$$y_0 = \operatorname{Log} \left| \frac{a}{c} \right|.$$

În ce condiții I aparține curbei?

8.131 1° Să se studieze variația funcției f :

$$f = [x \mapsto 2\operatorname{Log} |x| + x - 2].$$

Să se verifice dacă această funcție se anulează pentru trei valori α, β, γ , care se cer a fi plasate în raport cu numerele $-1, 0, 1, 5, 6$.

Să se traseze curba reprezentativă C a lui f într-un reper $\mathcal{A}$. Să se demonstreze că toate dreptele D de ecuație $y = x + \lambda$ în $\mathcal{A}$ tale C în două puncte M și N . că mijlocul lui $[M, N]$ este pe Oy și că tangentele în M și N la C se taie pe Oy (Oy este axa ordonatelor reperului $\mathcal{A}$).

2° Să se studieze variația funcției g .

$$g = \left[x \mapsto \frac{x \operatorname{Log} |x|}{x - 2} \right].$$

Să se demonstreze că există trei puncte A, B, C ale curbei reprezentative Γ a lui g în care tangenta este paralelă cu Ox , și verificați dacă A, B, C sînt situate pe o dreaptă care trece prin O (Ox este axa absciselor reperului $\mathcal{A}$).

Să se traseze în mod sumar Γ .

8.132 Se consideră funcția $f_a = \left[x \mapsto \frac{xe^x}{e^x - a} \right]$, în care a este un număr real nenul.

1° Să se determine după valorile lui a , intervalele de definiție ale lui f_a . Să se studieze limitele lui f la marginile acestor intervale, în diferite cazuri. Într-un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$, fie C_a curba reprezentativă. Să se demonstreze că, oricare ar fi a , C_a admite o asimptotă D independentă de a , neparalelă cu semidreapta Oy a vectorului director unitar $\vec{j}$. Să se studieze poziția lui C_a în raport cu D .

2° Să se calculeze f'_a . Pentru a studia semnul și rădăcinile lui f'_a , se va studia funcția u :

$$u = \left[x \mapsto \frac{e^x}{x + 1} \right]$$

Se vor așeza, după valorile lui a , zerourile lui f'_a în raport cu 0 și -1 . Să se verifice dacă punctele C_a , în care tangenta este paralelă cu semidreapta Ox de vector director unitar $\vec{i}$, sînt situate pe o dreaptă D_1 , independentă de a .

3° Să se termine studiul și să se construiască sumară C_a pentru următoarele valori particulare.

$$a = -1; a = \frac{1}{e}; a = 1; a = e.$$

8.133 Se presupune că există o funcție continuă unică f , definită pe $\mathbb{R}$, care verifică:

$$(1) \quad \forall_{\mathbb{R}} x, \forall_{\mathbb{R}} y \quad f(x+y) + x \cdot y = [f(x) + x][f(y) + y], \text{ și}$$

$$(2) \quad f(1) = e - 1.$$

1° Luînd $x = y = \frac{t}{2}$, să se verifice dacă:

$$(3) \quad \forall_{\mathbb{R}} t \quad f(t) + t \geq 0,$$

și să se demonstreze că, dacă există un număr real x_0 astfel ca:

$$f(x_0) + x_0 = 0,$$

atunci:

$$(4) \quad \forall_{\mathbb{R}} x \quad f(x) + x = 0.$$

Să se deducă pe baza considerației de la (2), că $f(x) + x$ nu este niciodată nul și să se stabilească că $f(0) = 1$.

2° Să se demonstreze că:

$$(5) \quad \forall_{\mathbb{R}} x, \forall_{\mathbb{N}} n \quad f(nx) = [f(x) + x]^n - nx.$$

Punînd $y = -x$ în (1), să se calculeze $f(-x) - x$ și să se stabilească că (5) rămîne verificat pentru orice număr real x și pentru orice întreg relativ n .

3° Să se calculeze, în funcție de numărul e și de întregul q , expresia:

$$f\left(\frac{1}{q}\right) + \frac{1}{q}.$$

Să se demonstreze, utilizînd (5), că avem:

$$(6) \quad \forall_{\mathbb{Q}} x \quad f(x) = e^x - x.$$

4° Se admite, în continuare, că funcția f definită pe mulțimea numerelor raționale este definită și prin:

$$\forall_{\mathbb{R}} x \quad f(x) = e^x - x.$$

(Se va verifica că (1) are loc).

a) Să se determine atunci cînd x tinde către $+\infty$ și cînd x tinde către $-\infty$, limitele lui $\frac{e^x}{x} - 1$.

Să se deducă, în aceleași condiții, limitele lui $f(x)$.

Să se studieze și să se reprezinte grafic variația lui f , urmărind în particular studiul ramurilor infinite.

Ce se poate spune despre tangenta curbei reprezentative în punctul $x = 1$?

b) Să se evalueze aria $\mathcal{A}(x)$ a porțiunii din plan cuprinsă între curbă, asimptota sa și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = X$ ($X < 0$). Ce se poate spune despre $\mathcal{A}(x)$ atunci cînd X tinde către $-\infty$?

5° Să se demonstreze că avem:

$$(7) \quad \forall_{\mathbb{R}} x \quad 1 + x \leq e^x.$$

b) Se pune:

$$P_n(a) = (1+a)(1+a^2) \dots (1+a^n), \text{ pentru } a > 0.$$

Să se verifice dacă $P_n(a)$ este o funcție crescătoare de n , satisfăcând

$$(8) \quad 0 < P_n(a) < e^{\frac{1-a^n}{1-a}} \quad (n \geq 0).$$

În sfârșit, demonstrați că pentru $0 < a < 1$, există numere M dependente de a și care verifică:

$$(9) \quad \forall n \quad P_n(a) < M.$$

Să se precizeze, în funcție de a , o valoare posibilă a lui M .

N.B. Punctele 4° și 5° sînt independente față de cele precedente.

(Bacalaureat, Bordeaux 1970)

8.134 Fie f funcția de o variabilă reală x , definită prin:

$$f(x) = xe^{ax},$$

în care e este baza logaritmulor neperieni.

1° Să se calculeze prima și a doua derivată a lui f , deducînd prin recurență, derivata de ordinul n .

2° Să se studieze variațiile funcției f_n definită prin: $f_n(x) = (x+n)e^{ax}$ în care n este un întreg relativ dat. Să se traseze curbele reprezentative C_{-1} , C_0 , C_1 a funcțiilor f_{-1} , f_0 și f_1 .

3° Să se calculeze:

$$I_0(h) = \int_0^h f_0(x) dx \text{ și } I_n(h) = \int_{-n}^{-n+h} f_n(x) dx,$$

în funcție de h , și stabiliți relația (R):

$$I_n(h) = e^{-n} I_0(h),$$

(Bacalaureat, Poitiers 1970)

8.135 A) Fie funcția f definită prin:

$$f(t) = \frac{1}{t(t+1)^2}.$$

a) Să se studieze funcția f și să se traseze curba sa reprezentativă în reper ortonormat.

b) Să se determine constantele a , b și c , astfel ca:

$$f(t) = \frac{a}{(t+1)^2} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t} \quad (t \neq -1 \text{ și } t \neq 0).$$

c) Pentru: $0 < x < y$, luăm:

$$A(x, y) = \int_x^y f(t) dt.$$

Să se demonstreze că:

$$A(x, y) = \frac{x-y}{(x+1)(y+1)} + \text{Log} \frac{y(x+1)}{x(y+1)}.$$

B) Se consideră funcția $g = \left[t \rightarrow \frac{-1}{t^2(t+1)} \right]$.

a) Să se verifice că:

$$g(t) - f(t) = -\frac{2t+1}{(t^2+t)^2}.$$

Să se determine o primitivă a funcției $g - f$.

b) Să se deducă:

$$B(x, y) = \int_x^y g(t) dt, \text{ cu: } 0 < x < y.$$

c) Considerând x fix, pozitiv, să se determine, pentru y tinde către $+\infty$, limitele lui $A(x, y)$ și $B(x, y)$ denumite $\Phi(x)$ și $\Gamma(x)$.

C) a) Să se demonstreze că:

$$\Gamma(x) < 0 < \Phi(x).$$

b) Să se deducă că, pentru x pozitiv, avem:

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < e < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}.$$

c) n fiind un număr natural, nenul, stabiliți inegalitățile:

$$1 < \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

Să se deducă limita lui $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ atunci când n tinde către $+\infty$.

(Bacalaureat, Niamey 1970)

8.136 Numărul a fiind un număr real, pozitiv, dat, se consideră funcția f_a definită pe $\mathbb{R}$ prin:

$$f_a(x) = e^x - a(x+1)$$

și curba sa reprezentativă C_a .

Fiecărui număr a i se asociază astfel o funcție f_a și o curbă C_a de ecuație $y = f_a(x)$ trasată într-un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Să se găsească, când x tinde către $+\infty$ și când x tinde către $-\infty$, limitele lui

$$\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}.$$

Să se studieze variația funcției f_1 și construiți curba C_1 de ecuație $y = e^x - (x+1)$. Această curbă C_1 admite o asimptotă D_1 căreia i se va da ecuația.

În orice punct M de coordonate (α, β) luat pe curba C_1 există o tangentă, căreia i se va stabili ecuația. Această tangentă întâlnește asimptota D_1 într-un punct N ; proiecțiile ortogonale ale lui M și N pe dreapta $x'x$ a reperului $(O, \vec{i})$ fiind notate cu M' și respectiv N' , demonstrați că $\overline{M'N'}$ este un număr constant. Să se deducă o construcție simplă a tangentei în M .

2° Numărul a , avind o valoare oarecare strict pozitivă, să se studieze variația funcției f_a și să se dea alura generală a curbei reprezentative C_a . Fiecare curbă C_a admite o asimptotă D_a , care se va preciza. În ceea ce privește proprietatea lui $\overline{M'N'}$ definită în prima întrebare, ea este verificată pentru o curbă C_a oarecare. Demonstrați-o.

3° Fiecare funcție f_a admite un minim q pentru o valoare a lui x reprezentată prin p ; se notează cu A punctul corespunzător de pe curba C_a , avînd drept coordonate (p, q) și se consideră mulțimea E a acestor puncte A . (Nu se caută să se construiască sau să se precizeze această mulțime E).

Există o bijecție între mulțimea $R' = R^{++}$ a numerelor reale strict pozitive și mulțimea E . Se definește pe E o lege de compoziție internă, notată $*$, în modul următor: spunem că punctul A' de abscisă p' este compusul punctelor A_1 și A_2 de abscise p_1 și respectiv p_2 dacă și numai dacă $p_1 + p_2 = p'$. Se notează: $A_1 * A_2 = A'$.

Să se demonstreze că există un izomorfism între mulțimea R' înzestrată cu legea multiplicativă și mulțimea E , înzestrată cu legea $*$. Ce se poate spune despre structura mulțimii E , înzestrată cu această lege $*$?

4° Se consideră, pe o curbă C_a , punctul M de abscisă α și punctul K de abscisă $\alpha - 1$; N este punctul în care tangenta în M întâlnește D_a și H este punctul de abscisă α pe D_a .

Să se calculeze, în funcție de α , aria domeniului limitat prin segmentele $[M, H]$, $[H, N]$, $[N, K]$ și prin arcul $\widehat{KM}$, (unitatea de arie este aria patratului de latură $|\vec{i}|$).

Să se calculeze apoi aria domeniului limitat de segmentele $[M, N]$, $[N, K]$ și de arcul $\widehat{KM}$. Verificați că această arie este independentă de curba C_a considerată.

(Bacalaureat, Teritoriul de peste mări, 1970)

9. ECUAȚII DIFERENȚIALE

9.1 Generalități

9.2 Ecuații diferențiale definite prin $y'' + \omega^2 y = 0$

9.3 Extinderea la cazul funcțiilor vectoriale

9.1 GENERALITĂȚI

9.1.1 Definiții

Adesea anumite funcții necunoscute de variabilă reală x trebuie să satisfacă o relație, între funcțiile derivatelor succesive și unele funcții de x . O astfel de relație se prezintă în general sub următoarea formă, în care y reprezintă $f(x)$ și Φ o funcție din $\mathbb{R}^{n+2}$ în $\mathbb{R}$:

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

O astfel de relație trebuie verificată pentru orice x real.

În mulțimea funcțiilor reale de variabilă reală, ea definește o ecuație diferențială.

Se spune că o ecuație diferențială este de ordin n dacă și numai dacă relația de definire conține în mod explicit derivata de ordinul n a funcției necunoscute, dar nu conține derivata de ordinul $n + 1$.

Exemple. 1. Fie $f(t)$ numărul de indivizi ai unei populații $\mathcal{Q}$ la un moment t . Sarcina de creștere $\frac{\Delta f}{\Delta t}(t)$ la momentul t este proporțională cu populația $f(t)$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t}(t) = \lambda f(t).$$

La limită, și oricare ar fi t , : $f'(t) = \lambda f(t)$.

Funcția f este soluția ecuației diferențiale de ordinul 1, definită prin:

$$y' = \lambda y,$$

$$y' - \lambda y = 0,$$

unde λ este un număr real ce depinde de populația studiată și unde y reprezintă pe $f(t)$.

II. Fie M un punct din plan a cărui poziție depinde de un parametru t :

$$\overrightarrow{OM(t)} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

unde $x = f(t)$ și $y = g(t)$ sînt două funcții de timp.

■ Se poate pune problema de a determina pe $\overrightarrow{OM(t)}$ pentru ca vectorul accelerației $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ să fie dat de:

$$\overrightarrow{\Gamma(t)} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}.$$

x și y sînt deci soluțiile ecuațiilor diferențiale de ordinul doi definite prin:

$$x'' = \varphi(t),$$

$$y'' = \psi(t).$$

■ La fel, se poate pune problema de a determina pe $\overrightarrow{OM(t)}$ pentru ca vectorul accelerației $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ să fie astfel ca, fiind dat un număr k real:

$$\overrightarrow{\Gamma(t)} + k^2 \overrightarrow{OM(t)} = 0.$$

x și y sînt deci soluțiile ecuațiilor diferențiale de ordinul doi definite prin:

$$x'' + k^2 x = 0,$$

$$y'' + k^2 y = 0.$$

III. Funcțiile $f_a = [x \mapsto ax^3]$ depinzînd de parametrul a , sînt reprezentate printr-o familie de curbe de ecuație $y = ax^3$.

Pentru fiecare punct al fiecărei curbe, avem:

$$y' = 3ax^2,$$

adică:

$$y' = \frac{3y}{x}.$$

Ecuația diferențială definită de:

$$xy' - 3y = 0,$$

este verificată de toate funcțiile f_a .

Se spune că aceasta este ecuația diferențială asociată familiei de funcții f_a .

A rezolva o ecuație diferențială înseamnă a determina mulțimea $\mathcal{S}$ a funcțiilor ce satisfac relația de definiție. Astfel, în cazul ecuației diferențiale de ordinul întâi definită prin:

$$xy' = 3y \text{ (exemplul III)}$$

mulțimea de soluții este mulțimea de funcții f_a , în care a este un număr real arbitrar.

Dacă $\mathcal{F}$ este mulțimea funcțiilor definite pe $\mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{R}$, avem:

$$\mathcal{S} = \{f \mid f \in \mathcal{F} \text{ și } \forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0\}.$$

O ecuație diferențială admite, în general, o infinitate de soluții.

O funcție soluție este numită și *soluție particulară*. Se numește *soluție generală* o expresie conținând un anumit număr de constante arbitrare astfel că, ori care ar fi valorile atribuite acestor constante arbitrare, funcția obținută să fie soluție a ecuației diferențiale studiate.

Rezultă astfel că $y = 6x^3$ este o soluție particulară a ecuației diferențiale de prim ordin definită prin: $xy' - 3y = 0$.

Soluția generală a acestei ecuații este:

$$y = ax^3,$$

în care a este o constantă reală arbitrară.

Soluția generală a unei ecuații diferențiale de ordin n comportă, în general, n constante arbitrare ce pot fi determinate în așa fel ca să fie îndeplinite un anumit număr de condiții pentru funcția căutată și derivatele sale succesive. (De exemplu, se poate căuta o soluție a unei ecuații diferențiale care satisface:

$$f(0) = \alpha, f'(0) = \beta, \dots, f^{(n)}(0) = \lambda.$$

Aceste condiții sînt numite uneori *condiții inițiale*).

Observație. — Se poate ca o ecuație diferențială dată să admită soluții particulare imposibil a fi exprimate cu ajutorul soluției generale. O astfel de soluție este numită *soluție singulară*.

9.1.2 Primele exemple

■ Fie F o funcție a cărei derivată este funcția f . Ecuația diferențială definită prin:

$$y' - f(x) = 0$$

admite ca soluție generală:

$$y = F(x) + C,$$

în care C este o constantă arbitrară.

Altfel spus, mulțimea funcțiilor soluție ale acestei ecuații diferențiale este mulțimea de funcții:

$$\varphi_C = [x \mapsto F(x) + C].$$

■ În aceleași condiții, ecuația diferențială definită prin:

$$y' - yf(x) = 0$$

conduce la:

$$\frac{y'}{y} = f(x).$$

Dar $\frac{y'}{y}$ este derivata lui $\text{Log } |y|$.

Prin urmare:

$$\text{Log } |y| = F(x) + C.$$

Soluția generală a acestei ecuații diferențiale este dată de :

$$|y| = e^{(F(x)+C)},$$

în care C este o constantă arbitrară. Această soluție mai poate fi scrisă :

$$y = Ke^{F(x)},$$

în care $K = e^C$ este o constantă arbitrară nenulă.

■ În aceleași condiții, ecuația diferențială definită prin :

$$\alpha y^{\alpha-1} y' = f(x)$$

admite ca soluție generală :

$$y = [F(x) + C]^{\frac{1}{\alpha}},$$

unde C este o constantă arbitrară.

■ În aceleași condiții, ecuația diferențială definită prin :

$$y'' = f'(x)$$

admite ca soluție generală :

$$y = F(x) + Cx + D,$$

unde C și D sînt două constante arbitrare.

9.1.3 Funcția diferențială definită prin $y' = ay$

Fie a un număr real, arbitrar. Ecuația diferențială definită prin :

$$y' = ay$$

conduce la :

$$\frac{y'}{y} = a.$$

Prin urmare :

$$\text{Log } |y| = ax + C,$$

unde C este o constantă arbitrară.

Soluția generală a ecuației diferențiale studiate este deci dată prin :

$$|\varphi(x)| = |y| = e^{ax+C},$$

adică :

$$y = Ke^{ax},$$

unde K este o constantă, arbitrară și nenulă.

■ Se poate încerca determinarea lui K astfel ca, de exemplu, y și y' să ia în x_0 aceeași valoare :

$$y_0 = \varphi_C(x_0) = Ke^{ax_0},$$

$$y'_0 = \varphi'_C(x_0) = Kae^{ax_0}.$$

Avem deci :

$$Ke^{ax_0} = Kae^{ax_0}.$$

Singura soluție este $K = 0$. Această valoare corespunde funcției identic nule, care este soluția ecuației diferențiale propusă, cu toate că nu este dată prin soluția generală. O astfel de soluție este numită *soluție singulară*.

■ Se poate încerca să se determine K astfel ca, de exemplu, y să ia în x_0 o valoare α dată :

$$y_0 = \varphi_C(x_0) = Ke^{ax_0} = \alpha,$$

$$K = \frac{\alpha}{e^{ax_0}}.$$

9.2 ECUAȚII DIFERENȚIALE DEFINITE PRIN:

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

9.2.1 Mulțimea soluțiilor

Fie ω un număr real și fie ecuația diferențială de ordinul doi, definită prin :

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Fie $\mathcal{S}$ mulțimea soluțiilor acestei ecuații diferențiale. $\mathcal{S}$ este o submulțime a mulțimii $\mathcal{F}$ de funcții reale de variabilă reală, care este un spațiu vectorial pe $\mathbb{R}$.

Fie z_1 și z_2 două elemente ale lui $\mathcal{S}$. Avem atunci :

$$z_1'' + \omega^2 z_1 = 0,$$

$$z_2'' + \omega^2 z_2 = 0.$$

Oricare ar fi numerele reale α și β , avem :

$$(\alpha z_1'' + \beta z_2'') + \omega^2(\alpha z_1 + \beta z_2) = 0.$$

Deoarece avem :

$$(\alpha z_1 + \beta z_2)'' = \alpha z_1'' + \beta z_2'',$$

funcția $z = \alpha z_1 + \beta z_2$ este un element a lui $\mathcal{S}$. Prin urmare :

Mulțimea $\mathcal{S}$ a soluțiilor ecuației diferențiale, definită prin :

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

este un subspațiu vectorial al spațiului vectorial $\mathcal{F}$ al funcțiilor reale de variabilă reală.

Admitem că acest subspațiu vectorial este de dimensiune 2. Două soluții linear independente f și g formează deci o bază, deci un sistem generator, și soluția generală a ecuației diferențiale este definită prin :

$$y = Af(x) + Bg(x),$$

în care A și B sînt două constante arbitrare.

9.2.2 Baza mulțimii soluțiilor

Fie f funcția definită prin : $f(x) = \cos \omega x$.

Fie g funcția definită prin : $g(x) = \sin \omega x$.

Avem în aceste două cazuri :

$$f''(x) = -\omega^2 \cos \omega x = -\omega^2 f(x),$$

$$g''(x) = -\omega^2 \sin \omega x = -\omega^2 g(x).$$

Prin urmare, funcțiile f și g vor satisface ecuația diferențială studiată.

Pentru a demonstra că funcțiile f și g sînt linear independente, se studiază funcția $\alpha f + \beta g$.

Pentru că :

$$\alpha f + \beta g = 0,$$

este necesar și suficient ca pentru orice x :

$$\alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x = 0.$$

În particular, pentru $x = 0$, și pentru $x = \frac{\pi}{2\omega}$, avem :

$$\alpha = 0 \text{ (pentru } x = 0 \text{)}$$

$$\beta = 0 \text{ (pentru } x = \frac{\pi}{2\omega} \text{)}.$$

O combinație liniară a funcțiilor f și g nu este nulă decît dacă este identic nulă. Funcțiile f și g sînt deci linear independente și formează o bază a lui $\mathfrak{S}$.

9.2.3 Soluție generală

Soluția generală a ecuației diferențiale definită prin :

$$y'' + \omega^2 y = 0,$$

este dată deci de :

$$y = A \cos \omega x + B \sin \omega x,$$

în care A și B sînt constante reale arbitrare ; y se poate scrie și sub forma :

$$y = D \cos (\omega x + \varphi),$$

unde D și φ sînt constante reale, cu :

$$D = \sqrt{A^2 + B^2},$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ \cos \varphi &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned} \right\} \quad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

EXERCIIII

Să se rezolve ecuațiile diferențiale definite pe mulțimea funcțiilor reale de variabilă reală, prin următoarele relații. Pentru fiecare caz, să se determine soluțiile particulare, dacă există, o soluție particulară fiind 1 pentru $x = 1$:

9.1 $xy' = a \quad (a \in \mathbb{R}).$

9.2 $x^2y' = a \quad (a \in \mathbb{R};).$

9.3 $x^n y' = a \quad (a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}).$

9.4 $x^2 y'' = 1.$

9.5 $y'' = \cos x.$

9.6 $y'' = \sin x.$

9.7 $y'' = x^3 - 3x.$

9.8 $y'' = e^{-x}.$

9.9 $y'' = x^3 - 2x.$

9.10 $y + xy' = 0.$

9.11 $xy'' - y' = 0.$

9.12 $y''' = 0.$

9.13 *Exercițiu rezolvat.**

Să se determine funcția f astfel că, dacă $y = f(x)$, să avem :

$$y'' + \frac{\pi^2}{4} y = 0,$$

funcția satisfăcînd în plus condițiile :

$$f'(1) = -2\pi; f(1) = 4.$$

Soluția generală este de forma :

$$f(x) = y = A \cos \frac{\pi}{2} x + B \sin \frac{\pi}{2} x,$$

$$f'(x) = y' = -\frac{A\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x + B \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} x.$$

Condițiile dau, pentru $x = 1$:

$$4 = B, \quad -2\pi = -\frac{A\pi}{2},$$

Deci:

$$A = 4, B = 4.$$

Funcția căutată este:

$$f(x) = 4 \cos \frac{\pi}{2} x + 4 \sin \frac{\pi}{2} x.$$

Se poate scrie:

$$f(x) = 4 \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$f(x) = 4 \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right).$$

*

Să se determine funcțiile f care satisfac următoarele condiții:

9.14 $f'' + 4f = 0$, $f(0) = 3$, $f'(0) = -4$.

9.15 $f'' + 9f = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = -3$.

9.16 $f'' + f = 0$, $f(0) = 0$, $f'(\pi) = -1$.

*

9.17 1° Să se determine derivata funcției $[x \mapsto \text{Log} |\cos x|]$.

2° Să se determine funcțiile f astfel că, dacă $y = f(x)$:

$$y' \cos x + \sin x = 0.$$

9.18 Fie f o funcție de x și $y = f(x)$. Care este derivata funcției $[x \mapsto \text{Log} |y|]$? Folosiți rezultatul pentru a regăsi soluțiile ecuației diferențiale definite prin: $y' = ay$.

9.19. Să se determine funcția f astfel ca:

$$\begin{cases} f' + 3f = 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

9.20 Fie ecuația diferențială definită prin:

$$y' + y = x.$$

1° Se pune $y = x - 1 + z$ unde $z = g(x)$. Să se demonstreze că avem:

$$z' + z = 0.$$

2° Să se deducă expresia generală a lui z .

3° Să se determine funcția f care să satisfacă prima ecuație diferențială, și astfel ca $f(0) = 0$.

9.21 Să se dea soluția generală a ecuației diferențiale:

$$y'' + 9y = 0.$$

Să se determine soluția particulară corespunzătoare la următoarele soluții:

$$\text{pentru } x = 0, \text{ avem } y = 1 \text{ și } y' = 3.$$

9.3 EXTINDERE LA CAZUL FUNCȚIILOR VECTORIALE

9.3.1 Definiție

Fie $\vec{E}$ un spațiu vectorial pe $\mathbb{R}$, și fie F o aplicație a lui $\mathbb{R}$ în $\vec{E}$. Dacă F și derivatele sale succesive satisfac relația :

$$\Phi(t, F, F', \dots, F^{(n)}) = \vec{0},$$

se spune că F satisface ecuația diferențială definită prin această relație, în mulțimea funcțiilor lui $\mathbb{R}$ în $\vec{E}$.

Fiind dat un reper $\mathcal{A}$, o ecuație diferențială vectorială se transformă într-un sistem de ecuații diferențiale, punând în evidență funcțiile componente ale lui F în reperul $\mathcal{A}$ și derivatele lor succesive.

Ne vom mărgini, în cele ce urmează, la cazul în care $\vec{E}$ este de dimensiunea 2, și la ecuații diferențiale de ordinul întâi, definite printr-o relație de tipul :

$$\overrightarrow{F'}(x) - \tau(\overrightarrow{F}(x)) = \vec{0},$$

în care τ este o transformare a spațiului vectorial $\vec{E}$.

Spațiul vectorial $\vec{E}$ fiind de două dimensiuni, este posibil să se facă o traducere completă a rezultatelor obținute. Astfel, pentru orice vector $\vec{V}$ a lui $\vec{E}$, a cărui componente într-un reper dat $\mathcal{A}$ sînt x și y , putem să facem să corespundă numărul complex $x + iy$.

Funcției vectoriale F , ale cărei funcții componente în $\mathcal{A}$ sînt f și g , îi corespunde funcția complexă de o variabilă reală Z , definită prin :

$$Z(x) = f(x) + i g(x).$$

La fel, derivata $Z'(x)$ a acestei funcții este definită de :

$$Z'(x) = f'(x) + i g'(x).$$

Trebuie distinse mai multe cazuri elementare, după natura lui τ .

9.3.2 Cazul în care τ este o omotetie

Avem :

$$\tau(\overrightarrow{F}(x)) = k\overrightarrow{F}(x).$$

Dacă $\overrightarrow{F'}(x) = \tau(\overrightarrow{F}(x))$ pentru orice x , funcțiile componente f și g ale lui F , într-un reper $\mathcal{A}(O, \vec{i}, \vec{j})$, vor satisface ecuațiile diferențiale :

$$f'(x) = kf(x),$$

$$g'(x) = kg(x).$$

sau încă, dacă se pune $y_1 = f(x)$ și $y_2 = g(x)$;

$$y_1' = ky_1,$$

$$y_2' = ky_2.$$

Aceste ecuații diferențiale sînt de tipul celor care au fost studiate la 9.3.1. Avem în consecință:

$$y_1 = f(x) = C_1 e^{kx},$$

$$y_2 = g(x) = C_2 e^{kx},$$

în care C_1 și C_2 sînt numere reale arbitrare.

Avem:

$$\overrightarrow{F(x)} = C_1 e^{kx} \vec{i} + C_2 e^{kx} \vec{j},$$

$$\overrightarrow{F(x)} = e^{kx} (C_1 \vec{i} + C_2 \vec{j}).$$

Fie $\vec{u} = C_1 \vec{i} + C_2 \vec{j}$ un vector arbitrar al lui $\vec{E}$.

Avem:

$$\overrightarrow{F(x)} = \vec{u} e^{kx}.$$

Funcția complexă Z , asociată funcției vectoriale F , este deci determinată prin:

$$Z(x) = z_0 e^{kx},$$

în care z_0 este un număr complex arbitrar.

Această funcție complexă este soluția ecuației diferențiale definită pe mulțimea funcțiilor lui $\mathbb{R}$ în $\mathbb{C}$ prin:

$$Z'(x) = kZ(x),$$

sau încă prin $z' = kz$ cu $z = Z(x)$.

(Comparați cu 9.1.3).

9.3.3 Cazul în care τ este o rotație de „unghi $\frac{\pi}{2}$ ”

Fie $\mathfrak{A} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un reper ortonormat.

Fie:

$$\overrightarrow{F(x)} = f(x) \vec{i} + g(x) \vec{j}.$$

$$\tau(\overrightarrow{F(x)}) = -g(x) \vec{i} + f(x) \vec{j}.$$

Funcția F satisface ecuația diferențială, definită prin:

$$\overrightarrow{F'(x)} = \tau(\overrightarrow{F(x)}),$$

dacă și numai dacă funcțiile sale componente în $\mathfrak{A}$ satisfac ecuațiile diferențiale definite prin:

$$f'(x) = -g(x),$$

$$g'(x) = f(x).$$

■ CONDIȚIE NECESARĂ

Avem :

$$f''(x) = -f(x),$$

$$g''(x) = -g(x).$$

Altfel spus, dacă F este soluția ecuației diferențiale propuse, ea este și a ecuației diferențiale de ordinul doi definită prin :

$$\overline{F}''(\vec{x}) = -\overline{F}(\vec{x}).$$

Prin utilizarea rezultatelor de la 9.2, se deduce că :

$$\overline{F}(\vec{x}) = (A \cos x + B \sin x)\vec{i} + (\alpha \cos x + \beta \sin x)\vec{j},$$

în care A , B , α și β sînt constante arbitrare. Adică :

$$\overline{F}(\vec{x}) = \vec{u} \cos x + \vec{v} \sin x,$$

unde $\vec{u} = A\vec{i} + \alpha\vec{j}$ și $\vec{v} = B\vec{i} + \beta\vec{j}$ sînt vectori arbitrari ai lui $\vec{E}$.

■ CONDIȚIE SUFICIENTĂ

Reciproc, fie F o astfel de funcție vectorială. Avem, folosind notațiile precedente :

$$f(x) = A \cos x + B \sin x,$$

$$g(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x,$$

deci :

$$f'(x) = -A \sin x + B \cos x,$$

$$g'(x) = -\alpha \sin x + \beta \cos x.$$

Or, trebuie să avem :

$$\begin{cases} g'(x) = f(x), \\ f'(x) = -g(x). \end{cases}$$

Prin urmare, valorile arbitrare A , B , α și β trebuie să fie astfel încît, pentru orice număr real, x , să avem :

$$\begin{cases} -A \sin x + B \cos x = -\alpha \cos x - \beta \sin x, \\ -\alpha \sin x + \beta \cos x = A \cos x + B \sin x. \end{cases}$$

Trebuie deci să avem pentru orice x :

$$\begin{cases} (\beta - A) \sin x + (B + \alpha) \cos x = 0, \\ (-B - \alpha) \sin x + (\beta - A) \cos x = 0. \end{cases}$$

Adică funcțiile $\sin$ și $\cos$ fiind liniar independente :

$$\begin{cases} B + \alpha = 0 \\ \beta - A = 0. \end{cases}$$

Se deduce :

$$\beta = A \text{ și } \alpha = -B.$$

■ Soluția generală a ecuației diferențiale definite prin :

$$\overline{F}'(\vec{x}) = \tau(\overline{F}(\vec{x})),$$

în care τ este o rotație de unghi $\frac{\pi}{2}$, este funcția vectorială definită pe $\mathbb{R}$ prin :

$$\overrightarrow{F(x)} = (A \cos x + B \sin x)\vec{i} + (-B \cos x + A \sin x)\vec{j},$$

unde A și B sînt constante reale arbitrare.

$\overrightarrow{F(x)}$ poate să mai fie scris :

$$\overrightarrow{F(x)} = \vec{U} \cos x + \vec{V} \sin x,$$

în care $\vec{U}$ și $\vec{V}$ sînt vectori arbitrari, de același modul și ortogonali ($\vec{U} = \tau(\vec{V})$).

■ TRANSCRIERE COMPLEXĂ

Dacă $\vec{V}$ corespunde numărului complex $x + iy$, $\tau(\vec{V})$ corespunde numărului complex $-y + ix = i(x + iy)$. Ecuația diferențială corespunzătoare în domeniul complex ecuației pe care am studiat-o, este deci definită prin :

$$z' = iz,$$

și vom avea o soluție generală definită prin :

$$z = (A - Bi) \cos x + (B + Ai) \sin x.$$

Prin analogie cu rezultatele de la 9.1.3, această soluție generală este notată :

$$z = z_0 e^{ix},$$

unde z_0 este o constantă complexă arbitrară.

Ținînd seama de faptul că :

$$e^0 = 1,$$

avem :

$$(A - Bi) \cos 0 + (B + Ai) \sin 0 = z_0, \\ A - Bi = z_0.$$

z_0 poate fi determinat pentru că funcția Z_{z_0} , definită prin :

$$Z_{z_0}(x) = z_0^{ix}$$

ia valoarea 1 pentru $x = 0$. Avem, în acest caz :

$$z_0 = 1, \text{ deci : } \begin{cases} A = 1 \\ B = 0. \end{cases}$$

Rezultă următoarea relație fundamentală :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Funcția $[x \rightarrow e^{ix}]$ definită pe $\mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{C}$ este soluția ecuației diferențiale definite prin :

$$z' = iz,$$

care ia valoarea 1 pentru $x = 0$.

α fiind un număr complex dat ($\alpha = a + ib$), e^α se definește în concordanță cu regula de calcul pentru exponențiale, prin :

$$e^{a+ib} = e^a \times e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

9.3.4 Cazul în care τ este o similitudine directă

În cazul în care τ este o similitudine, ecuația diferențială definită prin :

$$\overline{F'(x)} = \tau(\overline{F(x)})$$

se transpune în domeniul complex prin ecuația diferențială :

$$z' = az,$$

în care $a = \alpha + i\beta$ este un complex ce caracterizează similitudinea (centrul O). Soluția generală a acestei ecuații este dată de :

$$z = Ke^{ax},$$

unde K este o constantă arbitrară, adică prin :

$$z = Ke^{(\alpha+i\beta)x} = Ke^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x).$$

Acest rezultat general se aplică în cazurile particulare în care a este un număr real (omotetie) sau un număr pur imaginar și de modul 1 (rotație de „unghi $\frac{\pi}{2}$ ”).

EXERCIȚII

9.22 Să se demonstreze că :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Să se compare cu exercițiul 8.61.

9.23 1° Să se calculeze următoarele numere complexe :

$$e^{i\pi}; \quad e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad e^{i\frac{\pi}{3}}; \quad \dots; \quad e^{i\frac{\pi}{n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

2° Să se demonstreze că :

$$e^{i(k+1)\frac{\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) e^{i\frac{\pi}{n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}).$$

3° Să se demonstreze că :

$$\left(e^{i\frac{\pi}{n}} \right)^n = 1.$$

4° Admițând că formula care dă suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice este valabilă în domeniu complex, să se demonstreze că suma rădăcinilor de ordinul n ale unității este nulă, pentru orice întreg n superior sau egal cu 2.

9.24 Să se demonstreze că mulțimea U a numerelor complexe de formă e^{ix} , în care x este real, este grup față de înmulțire.

9.25 Să se determine θ astfel ca:

$$A = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \dots (\cos n\theta + i \sin n\theta) = 1$$

(se notează adesea: $A = \prod_{k=1}^n (\cos k\theta + i \sin k\theta)$.)

9.26 Fie:

$$U = \cos x + \cos(x+q) + \dots + \cos(x+(n-1)q);$$

$$V = \sin x + \sin(x+q) + \dots + \sin(x+(n-1)q).$$

Să se calculeze U și V (se va calcula $U + iV$).

9.27 Să se calculeze următoarele expresii, în funcție de numărul natural n :

$$U_n = \sum_{k=1}^n \cos kx;$$

$$V_n = \sum_{k=1}^n \sin kx.$$

9.28 Să se calculeze:

$$U_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cos nx.$$

(Se va remarca că $-\cos x = \cos(x+\pi)$ și se va aduce la un caz analog celui din exercițiul 9.26).

9.29 Să se calculeze:

$$U_n = \sum_{k=1}^n \cos^2 kx;$$

$$V_n = \sum_{k=1}^n \sin^2 kx.$$

(Se va aduce la cazul din exercițiul 9.26).

9.30 Funcția „exponențială complexă” definește o bijecție a lui $\mathbb{C}$ pe $\mathbb{C}$?

$$(e^{x+iy} = e^x e^{iy}).$$

Se poate defini o funcție „Logaritm complex”?

Să se definească imaginea reciprocă prin funcția „exponențială complexă” a mulțimii $\{z\}$ în care z este numărul complex de modul ρ și de argument θ .

9.31 1° Fie $z = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$). Să se exprime $\cos^n \theta$ și $\sin^n \theta$ în funcție de z (se va calcula z^n și $\frac{1}{z^n}$).

2° Să se calculeze $\cos^n \theta$ sub forma unui polinom în z și $\frac{1}{z}$. Să se deducă $\cos^n \theta$ sub forma unei combinații liniare de cosinus a multiplilor lui θ .

3° De asemenea, să se exprime $\sin^n \theta$ sub forma unei combinații liniare de sinus a multiplilor lui θ .

4° Să se transforme $\sin^4 \theta \cos^5 \theta$ sub forma unei combinații liniare de sinus și cosinus a multiplilor lui θ .

9.32 Fie $z = x + iy$ un număr complex ($x \in \mathbb{R}$ și $y \in \mathbb{R}$). Avem:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Prin analogie cu funcțiile corespondente ale lui $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, se poate defini:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

a) Să se demonstreze că:

$$\forall_C z \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1;$$

$$\forall_C z, \forall_C z' \quad \cos(z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z';$$

$$\forall_C z, \forall_C z' \quad \sin(z + z') = \sin z \cos z' + \sin z' \cos z;$$

$$\forall_C z \quad \cos iz = \operatorname{ch} z;$$

$$\forall_C z \quad \sin iz = i \operatorname{sh} z.$$

b) Să se calculeze $\cos(x + iy)$ și $\sin(x + iy)$ în funcție de $\cos x$, $\cos y$, $\sin x$, $\sin y$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{sh} y$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch} y$.

c) Calculați $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ în funcție de e^z .

10. CALCUL NUMERIC

10.1 Rezultate principale

10.2 Utilizarea tabelelor numerice

10.3 Folosirea tabelelor logaritmice zecimale

10.4 Logaritmi ai valorilor funcțiilor circulare. Utilizare

10.5 Rigla de calcul

10.6 Calculul cu mașina. Noțiuni de programare

10.1 REZULTATE PRINCIPALE

10.1.1 Aproximații

DEFINIȚIE. Un număr zecimal a este un număr rațional care poate fi reprezentat printr-o fracție zecimală (adică o fracție al cărui numitor este o putere a lui 10):

$$a = \frac{p}{10^n}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exemple.

$$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{75}{10^2}.$$

$$-3,2634 = \frac{-32\,634}{10\,000} = \frac{-32\,634}{10^4}.$$

DEFINIȚIE. Partea întreagă $E(a)$ a unui număr zecimal a se numește caracteristica lui a .
Numărul $\alpha = a - E(a)$ este mantisa lui a .

Se știe că: $0 \leq \alpha < 1$ (5.4.7 Algebră II Funcții și ecuații numerice).

Exemple.

$$a = 3,18 \quad E(a) = 3 \quad \alpha = 0,18.$$

$$a = -3,18 \quad E(a) = -4 \quad \alpha = 0,82.$$

Pentru orice număr real x și pentru orice întreg natural n , există un întreg relativ p , astfel ca :

$$\frac{p}{10^n} \leq x < \frac{p+1}{10^n}.$$

Aceasta rezultă din faptul că ordinul lui $\mathbb{R}$ este arhimedian (1.1.6 Algebră, Numere reale, calcul numeric, numere complexe).

DEFINIȚIE. Numărul zecimal $\frac{p}{10^n}$ este numit valoare aproximativă zecimală

3 mală cu aproximație de $\frac{1}{10^n}$, prin lipsă, a numărului x .

Numărul zecimal $\frac{p+1}{10^n}$ este numit valoare aproximativă zecimală, cu aproximație de $\frac{1}{10^n}$, prin adaos, a numărului x .

Exemple

I. Fie numărul rațional nezeecimal $\frac{1}{3}$. Se poate scrie :

$$0,333 < \frac{1}{3} < 0,334 \quad \frac{333}{10^3} < \frac{1}{3} < \frac{334}{10^3};$$

0,333 este valoarea aproximativă zecimală, cu aproximație de $\frac{1}{10^3}$, prin lipsă, a lui $\frac{1}{3}$;

0,334 este valoarea aproximativă zecimală cu aproximație de $\frac{1}{10^3}$, prin adaos, a lui $\frac{1}{3}$.

Se poate scrie de asemenea :

$$0,3333 < \frac{1}{3} < 0,3334,$$

$$\frac{3333}{10^4} < \frac{1}{3} < \frac{3334}{10^4}.$$

0,3333 și 0,3334 sînt valorile aproximative zecimale, cu aproximație de $\frac{1}{10^4}$ prin lipsă și respectiv prin adaos, ale lui $\frac{1}{3}$.

Pentru a obține valorile aproximative zecimale cu aproximație de $\frac{1}{10^n}$ ale lui $\frac{1}{3}$ este suficient să împărțim pe 1 la 3 pînă ce se obțin n cifre zecimale. Acest lucru este valabil pentru orice număr rațional nezeecimal reprezentat prin fracția $\frac{A}{B}$; este suficient să se împartă A la B pînă ce se obțin n cifre zecimale.

II. Fie numărul irațional $\sqrt{2}$. Se poate scrie :

$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143,$$

$$\frac{14142}{10^4} < \sqrt{2} < \frac{14143}{10^4}.$$

III. Fie numărul irațional π . Se poate scrie :

$$3,1415 < \pi < 3,1416.$$

Prin calcul direct, ca în primul exemplu, sau cu ajutorul tabelelor numerice, ca în ultimul exemplu, vom putea găsi valorile zecimale aproximative ale unui număr dat.

Fie: $a' < x < a$.

Considerăm numerele: $d = a - x$ și $d' = a' - x$.

DEFINIȚIE. d este eroarea comisă atunci când se înlocuiește x cu a .

4 d' este eroarea comisă atunci când se înlocuiește x cu a' .

DEFINIȚIE. Un majorant al lui $|d|$ și a lui $|d'|$ se numește incertitudine asupra
5 lui x .

Exemple. I. $12,8 < x < 13,1$.

12,8 este o valoare aproximativă, prin lipsă, a lui x ;

13,1 este o valoare aproximativă, prin adaos, a lui x .

Nu se cunoaște eroarea d' comisă atunci când x se înlocuiește cu 12,8, nici eroarea d comisă atunci când x se înlocuiește cu 13,1, dar se știe că $|d|$ și $|d'|$ sînt inferioare lui:

$$13,1 - 12,8 = 0,3.$$

Incetitudinea asupra lui x este de 0,3.

II. Fie un număr real nezeecimal x și valorile sale aproximative zecimale cu aproximație de $\frac{1}{10^n}$ prin lipsă și prin adaos:

$$\frac{p}{10^n} < x < \frac{p+1}{10^n}.$$

$\frac{1}{10^n}$ este o incertitudine asupra lui x .

III. $a' = 2,34$ este o valoare aproximativă prin lipsă cu o aproximație de 0,02 a lui x . Se știe deci că:

$$2,34 < x < 2,36.$$

0,02 este o incertitudine asupra lui x .

10.1.2 Încadrarea unei expresii algebrice

TEOREMA. Suma valorilor aproximative prin lipsă dă o valoare aproximativă
1 prin lipsă a sumei; suma valorilor apropiate prin adaos, dă o valoare aproximativă prin adaos.

TEOREMA. Incertitudinea asupra sumei este egală cu suma incertitudinilor
2 asupra fiecărui termen.

TEOREMA. Se obține o valoare aproximativă prin lipsă a lui $x - y$, scăzînd
3 dintr-o valoare aproximativă prin lipsă a lui x o valoare aproximativă luată prin adaos a lui y .

TEOREMA. Incertitudinea asupra diferenței este egală cu suma incertitudinilor
4 asupra fiecărui termen.

TEOREMA. Produsul valorilor aproximative prin lipsă a două numere pozitive
5 dă o valoare aproximativă prin lipsă a produsului.

TEOREMA. Pentru a avea o valoare aproximativă prin lipsă a cîtului a două
6 numere pozitive, este suficient să luăm o valoare prin lipsă a număratorului și o valoare prin adaos a numitorului.

Exemple. I. Să se încadreze $\frac{u}{v}$ știind că:

$$-3,2 \leq u < -3,15; 1,6 \leq v < 1,65.$$

După proprietățile inegalităților:

$$3,15 < -u \leq 3,2;$$

deci:

$$\begin{aligned} -3,2 \times 1,65 &< uv < -3,15 \times 1,6 \\ -5,280 &< uv < -5,040. \end{aligned}$$

Incertitudine: 0,240.

II. Să se încadreze $\frac{u}{v}$ știind că:

$$-1,120 < u < -1,118; -4,111 < v < -4,110.$$

Citul este pozitiv; ne putem deci îndrepta atenția asupra valorilor absolute, și:

$$\frac{1,118}{4,111} < \frac{u}{v} < \frac{1,120}{4,110}.$$

Dacă am fi înlocuit $\frac{u}{w}$ cu $w = -v$, am fi răsturnat ordinea valorilor absolute:

$$-\frac{1,120}{4,110} < \frac{u}{w} < -\frac{1,118}{4,111}.$$

10.1.3 Valori aproximative ale unor expresii particulare

Expresia de calculat	Valoarea aproximativă	Sensul de aproximație	Ordinul de mărime al eroarei comise
$(1 + \varepsilon)^2$	$1 + 2\varepsilon$	prin lipsă	ε^2
$(1 - \varepsilon)^2$	$1 - 2\varepsilon$	prin lipsă	ε^2
$\frac{1}{1 + \varepsilon}$	$1 - \varepsilon$	prin lipsă	ε^2
$\frac{1}{1 - \varepsilon}$	$1 + \varepsilon$	prin lipsă	ε^2
$\sqrt{1 + \varepsilon}$	$1 + \frac{\varepsilon}{2}$	prin adaos	$\frac{\varepsilon^2}{8}$
$\sqrt{1 - \varepsilon}$	$1 - \frac{\varepsilon}{2}$	prin adaos	$\frac{\varepsilon^2}{8}$

Exemple. I. $(1,003)^3 \approx 1,006$ cu o eroare egală cu $\frac{9}{10^3}$, deci inferioară lui $\frac{1}{10^3}$; $\left(1 + \frac{1}{273}\right)^3 \approx 1 + \frac{2}{273}$ cu o eroare egală cu $\frac{1}{273^2}$, deci inferioară lui $\frac{1}{4 \times 10^4}$.

II. 0,98 este o valoare aproximativă prin lipsă a lui $\frac{1}{1,02}$, cu o eroare inferioară lui $\frac{4}{10^4}$:

$$0,98 < \frac{1}{1,02} < 0,9804.$$

III. $\frac{1}{0,99} = \frac{1}{1 - 0,01} \approx 1,01$.

Eroarea comisă este de ordinul lui $(0,01)^2 = \frac{1}{10^4}$.

Mai precis, ea este egală cu $\frac{1}{0,99 \times 10^4}$.

1,01 este o valoare aproximativă prin lipsă a lui $\frac{1}{0,99}$.

IV. $\sqrt{1,03} \approx 1,015$.

V. $\sqrt{0,98} \approx 0,99$.

10.2 UTILIZAREA TABELELOR NUMERICE

10.2.1 Folosirea tabelelor numerice

Tabelele numerice dau pentru anumite valori ale lui x valorile expresiilor x^2 , x^3 , $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, ... cu o anumită aproximație.

Observație. — Tabelele numerice pot da valori exacte ale numerelor zecimale, dar numai valori aproximative ale numerelor nezecimale. Cu toate că dezvoltarea zecimală a acestora din urmă este nelimitată, numărul de cifre zecimale date este necesar să fie finit și variabil după precizia tabelului (este de asemenea posibil ca să nu figureze toate cifrele zecimale ale unui număr zecimal). Convenția este următoarea. Să presupunem că un număr este dat în tabele cu n cifre zecimale. Ultima cifră dată este a n -a din dezvoltarea zecimală a numărului dacă cifra a $(n + 1)$ -a a dezvoltării zecimale este strict mai mică decât 5. Dacă nu, ultima cifră dată este a n -a din dezvoltarea zecimală, mărită cu 1. Astfel, într-o tabelă în care n nu poate fi mai mare decât 4:

1,414 21 ... va fi scris 1,414 2; (1)

1,732 05 ... va fi scris 1,732 1. (2)

Însă, nu se precizează în general dacă valoarea dată este o valoare aproximativă prin lipsă [cazul (1)] sau prin adaos [cazul (2)]: incertitudinea este deci dublă. Într-adevăr, dispunind de exemplu numai de numărul 1,414 2, nu se poate ști dacă provine de la:

1,414 20 ... ; 1,414 21 ... ; 1,414 22 ... ; 1,414 23 ... ; 1,414 24

sau de la:

1,414 15 ... ; 1,414 16 ... ; 1,414 17 ... ; 1,414 18 ... ; 1,414 19 ...

Se poate afirma numai, pentru valoarea exactă a lui x :

$$1,414\,15 \leq x < 1,414\,25.$$

Incertitudinea este: 0,0001. Numărul $a = 1,414\,2$ este o valoare aproximativă cu aproximația $\varepsilon = \frac{0,0001}{2}$ a lui x , dar nu se știe dacă este prin lipsă sau prin adaos.

10.2.2 Interpolare liniară

■ PROBLEMA DIRECTĂ

Dacă dorim să calculăm valoarea unei expresii de la 10.2.1 pentru o valoare a lui x care nu este în tabele, corespunzând acestei expresii, tabelele se mai pot folosi după următoarea manieră: rezultatul căutat este cuprins între două numere y_1 și y_2 , date în tabele, corespunzător numerelor x_1 și x_2 care încadrează pe x și care figurează în tabele. Aceasta ne dă deja o încadrare pentru rezultat.

Exemplu. Fie: să se calculeze $(52,37)^2$ cu ajutorul unei tabele care dă pătratele numerelor întregi.

Avem:

$$52 < 52,37 < 53 \quad 2\,704 < (52,37)^2 < 2\,809.$$

Pentru a obține cea mai bună încadrare, adică pentru a avea o incertitudine cât mai mică, vom face ceea ce se numește o interpolare liniară.

Pentru a expune această tehnică, vom considera expresia:

$$f(x) = x^2.$$

Trasăm graficul lui f pentru: $x \geq 0$ (fig. 1).

Reluăm notațiile x_1, x_2, y_1, y_2 indicate mai înainte. Fie punctele $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$.

Valoarea exactă a lui $f(x)$ este astfel ca:

$$y_1 < f(x) < y_2.$$

Vom lua ca valoare aproximativă a lui $f(x)$ ordonata y a punctului M aparținând dreptei M_1M_2 și a cărei abscisă este x . Ecuația dreptei M_1M_2 este:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ca urmare:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

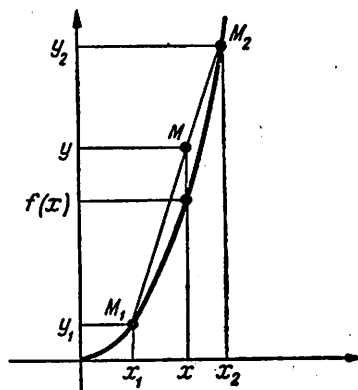


Fig. 1

Exemplu. Calculul lui $(52,37)^3$ prin interpolare liniară:

$$x_1 = 52, y_1 = 2704;$$

$$x_2 = 53, y_2 = 2809;$$

$$d = x_2 - x_1 = 1;$$

$$\Delta = y_2 - y_1 = 105 \text{ } (\Delta \text{ se numește diferența tabulară)};$$

$$h = x - x_1 = 0,37;$$

$$y = y_1 + \frac{\Delta}{d} h = 2704 + \frac{105}{1} \times 0,37 = 2704 + 38,85;$$

$$[(52,37)^3 \approx 2743.]$$

Se poate face următorul raționament: cînd valoarea variabilei crește cu $d = 1$, valoarea funcției crește cu $\Delta = 105$; deci, cînd valoarea variabilei crește cu $h = 0,37$, valoarea funcției crește cu $\frac{\Delta}{d} h = \frac{105}{1} \times 0,37$.

Să determinăm incertitudinea asupra rezultatului obținut prin interpolare liniară în cazul în care $f(x) = x^3$, x fiind pozitiv și valorile exacte ale lui x_1 și x_2 fiind date de tabelele pătratelor numerelor întregi.

Eroarea făcută luînd pe y ca valoare aproximativă prin adaos a lui x^2 este:

$$y - x^3 = y_1 + h - x^3 \text{ (deoarece } d = 1 \text{)};$$

$$y_1 - x^3 = x_1^3 - x^3 = (x_1 - x)(x_1 + x) = -h(x_1 + x);$$

$$\Delta = y_2 - y_1 = [x_2^3 - x_1^3 = (x_1 + 1)^3 - x_1^3 = 2x_1 + 1];$$

$$y - x^3 = h(\Delta - x_1 - x) = h(1 - x + x_1) = h(1 - h).$$

Suma lui h și a lui $1 - h$ este egală cu 1, deci constantă atunci cînd h variază. Produsul între h și $1 - h$ este deci maxim atunci cînd $h = 1 - h$, adică atunci cînd $h = \frac{1}{2}$. Acest maxim este $\frac{1}{4}$. Ca urmare: $y - x^3 < \frac{1}{4}$.

Incertitudinea asupra rezultatului este 0,25. Să-l verificăm pe exemplul precedent.

Valoarea exactă a lui $(52,37)^3 = 2742,6169$;

[

$$y - x^3 = 2742,85 - 2742,6169 = 0,2331 < 0,25.]$$

Observații. — 1. În exemplul de mai înainte, f este o funcție crescătoare pe un interval ce conține pe x , iar graficul său are concavitatea îndreptată către y -cii pozitivi: s-a obținut o valoare aproximativă prin adaos a lui $f(x)$. Dacă f ar fi fost o funcție crescătoare pe un interval conținînd pe x , dar dacă graficul său ar fi avut concavitatea îndreptată spre y -cii negativi, s-ar fi obținut o valoare aproximativă prin lipsă (exemplu: $f(x) = \sqrt{x}$).

2 Dacă f este o funcție descrescătoare pe un interval care conține pe x , avem:

$$x_1 < x < x_2 \Rightarrow y_2 < f(x) < y_1,$$

ceea ce modifică calculul (vezi exemplul care urmează).

Exemplu. Calculul lui $\cos x$ pentru $x = 70,8$ grade.

$$x_1 = 70, y_1 = 0,4540;$$

$$x_2 = 71, y_2 = 0,4399.$$

Cînd valoarea variabilei crește cu 1, valoarea funcției scade cu 0,014 1; cînd valoarea variabilei crește cu 0,8, valoarea funcției scade cu $\frac{0,014\ 1}{1} \times 0,8$.

$$y = 0,454\ 0 - (0,014\ 1 \times 0,8).$$

Aceasta se mai poate de asemenea scrie:

$$y = 0,439\ 9 + (0,014\ 1 \times 0,2) = 0,442\ 72.$$

De unde:

$$\cos 70,8\ \text{gr} \approx 0,442\ 7.$$

■ PROBLEMA INVERSĂ

Să presupunem că, invers, cunoaștem valoarea unei expresii și că se caută să se calculeze numărul x corespunzător. Se utilizează aceeași metodă, rezumată grafic în figura 1. Să păstrăm notațiile precedente. Valoarea $f(x)$ cunoscută, este fie egală cu un număr conținut în tabele (caz în care nu mai sînt probleme), fie cuprinsă între două valori $y_1 = f(x_1)$ și $y_2 = f(x_2)$, figurînd în tabele. Avem deci o încadrare pentru x , care este cuprins între x_1 și x_2 (funcția f este presupusă monotonă pe un interval conținînd pe x_1 și x_2).

Exemplu. Să se calculeze numărul pozitiv x al cărui pătrat este 2 743.

Avem:

$$52^2 = 2\ 704,$$

$$53^2 = 2\ 809.$$

deci:

$$52 < \sqrt{2\ 743} < 53.$$

Pentru a obține cea mai bună încadrare, se utilizează formula de interpolare liniară, deja întîlnită:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Dar, de data aceasta, y este cunoscut și x este cel pe care îl căutăm:

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} (y - y_1).$$

Exemplu. Calculul lui $\sqrt{2\ 743}$ prin interpolare liniară.

$$y_1 = 2\ 704, \quad x_1 = 52;$$

$$y_2 = 2\ 809, \quad x_2 = 53;$$

$$d = x_2 - x_1 = 1;$$

$$\Delta = y_2 - y_1 = 105 \text{ (diferența tabulară)};$$

$$h = y - y_1 = 39;$$

$$x = x_1 + \frac{d}{\Delta} h = 52 + \frac{1}{105} \times 39 \approx 52 + 0,37;$$

$$\sqrt{2\ 743} \approx 52,37.$$

Se poate face următorul raționament. Când valoarea lui y crește cu 105, valoarea lui x crește cu 1; deci, când valoarea lui y crește cu 39, valoarea lui x crește cu $\frac{1}{105} \times 39$.

Observație. — Dacă f este o funcție descrescătoare pe un interval ce conține pe x_1 și x_2 , deci pe x , avem:

$$y_1 < y < y_2 \Rightarrow x_2 < x < x_1,$$

ceea ce modifică calculul la fel ca în cazul problemei directe.

10.3 FOLOSIREA TABELELOR DE LOGARITMI ZECIMALI

10.3.1 Logaritmi zecimali

1. Orice număr pozitiv are un logaritm zecimal.
2. Numerele negative sau zero, nu au logaritmi.
3. $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$.

$$\forall_{\mathbb{R}^{++}} a, \forall_{\mathbb{R}^{++}} b$$

4. $a > 1 \Leftrightarrow \log a > 0$; $0 < a < 1 \Leftrightarrow \log a < 0$.
5. $a > b \Rightarrow \log a > \log b$.
6. $\log ab = \log a + \log b$.
7. $\log a^n = n \log a \quad n \in \mathbb{N}$.
8. $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$.

10.3.2 Mantisa și caracteristica

Presupunem că cunoaștem logaritmul zecimal al numărului 1 632:

$$\log 1\,632 \approx 3,212\,72.$$

Să calculăm logaritmul lui 163 200.

Avem:

$$\log 163\,200 = \log 1\,632 + \log 100 \approx 3,212\,72 + 2 = 5,212\,72.$$

De asemenea:

$$\log 16,32 = \log 1\,632 - \log 100 \approx 3,212\,72 - 2 \approx 1,212\,72.$$

Partea zecimală a logaritmului nu s-a schimbat.

Să calculăm logaritmul lui 0,001 632.

Avem, de această dată:

$$\log 0,001\,632 = \log 16,32 - \log 10\,000 \approx 1,212\,72 - 4 \approx -2,787\,28.$$

Acest logaritm este negativ; partea zecimală este schimbată.

Dar se mai poate scrie :

$$1,212\ 72 - 4 = -3 + 0,212\ 72.$$

Convenim să scriem acest al doilea număr: $\bar{3},212\ 72$, adică sub forma care amintește că caracteristica 3 este negativă, mantisa singură fiind pozitivă. Cu această convenție, un număr zecimal, pozitiv sau negativ, este suma :

1° unei caracteristici pozitive, nule sau negative.

2° unei mantise, totdeauna pozitive și mai mici decât 1.

Aceasta este forma sub care vom scrie totdeauna logaritmi zecimali.

Astfel, opusul logaritmului unui număr real pozitiv nenul a se scrie cu o caracteristică algebrică și o mantisă pozitivă, ceea ce necesită un calcul prealabil.

Opusul logaritmului zecimal a lui a se numește *cologaritmul* lui a .

Cu ajutorul acestei convenții, logaritmi nu se scad niciodată.

Într-o astfel de adunare, se adună mantisele și se face suma algebrică a caracteristicilor.

Rezultă explicația dată mai înainte, că mantisele logaritmilor numerelor :

$$1\ 632, 163\ 200, 16,32, 0,001\ 632$$

sînt aceleași.

Se poate deci enunța :

Mantisa logaritmului unui număr nu se schimbă dacă multiplicăm sau împărțim acel număr printr-o putere a lui 10.

Exemplu.

$$\log 1\ 846 \approx 3,266\ 23;$$

$$\log 18,46 \approx 1,266\ 23;$$

$$\log 0,018\ 46 \approx \bar{2},266\ 23.$$

De notat că teorema precedentă nu este adevărată decît dacă se presupune că partea zecimală este pozitivă. Fără această convenție, dacă se calculează, de exemplu :

$$2,127\ 85 - 7,$$

se găsește $-4,872\ 15$; partea zecimală este schimbată. Ea nu este păstrată decît dacă numărul se scrie sub forma :

$$\bar{5},127\ 85.$$

Rezultă, din cele ce au precedat, că, pentru a găsi logaritmul zecimal al unui număr, se caută succesiv caracteristica și mantisa.

10.3.3 Căutarea caracteristicii

Pentru orice număr real x pozitiv nenul, există un număr întreg n astfel ca :

$$10^n \leq x < 10^{n+1}.$$

Funcția logaritm fiind crescătoare, rezultă că :

$$n \leq \log x < n + 1.$$

Ca urmare, caracteristica lui $\log x$ este numărul întreg n . Caracteristica lui $\log x$ este numărul întreg n astfel că:

$$10^n \leq x \leq 10^{n+1}.$$

10.3.4 Căutarea logaritmului zecimal al unui număr

Tabelele de logaritmi cu cinci zecimale dau mantisele logaritmilor numerelor întregi cuprinse între 1 000 și 10 000.

Coloanele marcate cu N dau zecimile, coloanele de la 0 la 9, unitățile; cifrele unei mantise sînt citite la intersecțiile unei linii cu o coloană.

Exemple. I. $x = 1\,861$.

În coloana N se găsește 186. Pe linia lui 186, în coloana 1, se citesc cifrele mantisei $\log x$:

26 975

(cifrele 2 și 6, scrise pentru 1 820, nu mai sînt repetate).

Se obține: $\log x \approx 3,269\,75$.

II. $x = 1\,863$.

Pe linia lui 186, în coloana 2, asteriscul așezat în fața lui 021 indică că aceste trei cifre trebuie precedate de 27 și nu de 26. Cifrele mantisei pentru $\log 1\,863$ sînt deci: 27 021. Se obține: $\log 1\,863 \approx 3,270\,21$.

III. $x = 1\,860$.

Cifrele mantisei sînt: 26 951.

Ele sînt în același timp cifrele mantisei pentru:

$\log 186$; $\log 18,6$; $\log 1,86$; $\log 0,186$; $\log 0,0186$; etc.

Aceste tabele permit de asemenea să se obțină logaritmul numerelor întregi de la 1 la 10 000 și, mai mult, logaritmul numerelor cu patru cifre semnificative în plus.

Dacă numărul, al cărui logaritm îl căutăm, este format din mai mult de patru numere semnificative, se poate face apel la metoda interpolării liniare.

Dacă numărul considerat este destul de mare, admitem că creșterea lui $\log x$ este proporțională cu creșterea lui x (ceea ce revine din punct de vedere grafic,

să se confunde segmentul $[M_1, M_2]$ cu arcul $\widehat{M_1 M_2}$ al graficului funcției logaritmice).

Calculule de interpolare sînt ușurate prin prezența, pe margine, a unor tabele de părți proporționale, corespunzătoare diferențelor tabelare observate în aceeași pagină. Tabelele corespunzătoare diferenței tabelare Δ prezintă numerele $0,1 \times \times k \times \Delta$ ca întregi, k fiind cuprins între 1 și 9. Pentru a obține numerele $(0,1)^n \times \times k \times \Delta$, este suficient să se înmulțească cele găsite în această tabelă cu $(0,1)^{n-1}$. Interpolarea liniară se face succesiv, la nivelul zecimilor, sutimilor, etc.

Exemplu. Calculul lui $y = \log 2\,521,7$.

$x_1 = 2\,521$, $y_1 = \log x_1 = 3,401\,57$ (dat de tabele);

$x_2 = 2\,522$, $y_2 = \log x_2 = 3,401\,75$;

diferența tabelară :

$$\Delta = y_2 - y_1 = 0,000\ 18$$

$$d = x_2 - x_1 = 1$$

$$h = x - x_1 = 0,7 \text{ (punind } x = 2\ 521,7)$$

$$y = y_1 + \frac{\Delta}{d} h = 3,401\ 57 + (0,000\ 18 \times 0,7) = 3,401\ 57 + 0,000\ 126 \approx 3,401\ 696.$$

Calculul lui $\frac{\Delta}{d} h$ este de altfel efectuat în tabelă, unde, în mica tabelă intitulată 18, se citește p_e

linia lui 7 : 12,6.

Nu vom păstra decît 5 zecimale și vom scrie :

$$y \approx 3,401\ 70.$$

Așezăm calculul sub următoarea formă :

$$\begin{array}{rcl} \log 2\ 521 & = & 3,401\ 57 \\ 7 & & 13 \\ \hline \log 2\ 521,7 & = & 3,401\ 70 \end{array} \quad \Delta = 18$$

10.3.5 Căutarea unui număr căruia îi cunoaștem logaritmul

1° Fie : să se calculeze x astfel ca : $\log x = \overline{2},438\ 86$.

Căutăm pe 43 886 în tabele. Figurează acolo pe linia care începe cu 274 și în coloana intitulată 7. Numărul căutat este deci 2 747. Caracteristica fiind -2 , se deduce :

$$x \approx 0,02\ 747.$$

2° Fie : să se calculeze x astfel ca : $\log x = 2,420\ 51$.

Căutăm pe 420 51 în tabele. Găsim 420 45 și 420 62 care încadrează numărul și care corespund lui 2 633 și 2 634. Diferența tabelară este de 17 sutimi de miimi. Deci, cînd numărul crește cu o unitate, mantisa logaritmului său crește cu 17 sutimi de miimi. Pentru ca să crească cu 6 sutimi de miimi și să devină 420 51, admitem că numărul trebuie să crească cu $\frac{6}{17}$.

Numărul căutat este deci :

$$2\ 633 + \frac{6}{17} \approx 2\ 633,35.$$

Caracteristica logaritmului lui x este 2, deci x este cuprins între 100 și 1 000. Avem, deci :

$$x \approx 263,335.$$

Este comod să se utilizeze tabelele de părți proporționale, citite invers, pentru a evita să se facă o împărțire.

Calculul se aranjează după cum urmează :

$$\begin{array}{rcl} \log x & = & 2,420\ 51 \\ \log 263,3 & \approx & 2,420\ 45 \quad \Delta = 17 \\ & & \underline{6} \\ \text{diferența :} & & 3 \quad \text{pentru } 5,1 \\ \text{corecția :} & & 0,5 \quad \text{pentru } 0,85 \\ & & \underline{\quad} \\ x & \approx & 263,335 \end{array}$$

10.3.6 Calculul unei expresii

Fie x expresia de calculat. Se calculează $\log x$, utilizând proprietățile logaritmilor. Se găsește x , cunoscând $\log x$.

Exemplu. Să se calculeze: $x = \frac{25 \times \sqrt{280,15}}{\sqrt[3]{2\,744,2}}$.

Vom avea:

$$\log x = \log 25 + \frac{1}{2} \log 280,15 + \frac{1}{3} \operatorname{colog} 2\,744,2.$$

Calculare auxiliare	Calculare definitive
$\log 25 \approx 1,397\,94$	1,397 94
	1,223 70
Calculul $\log 280,15$	2,853 86
$\log 280,1 \approx 2,447\,31 \quad \Delta = 16$	$\log x \approx 1,475\,50$
5 8	$\log 29,88 \approx 1,475\,38 \quad \Delta = 15$
$\log 280,15 \approx 2,447\,39$	diferența: 12
$\frac{1}{2} \log 280,15 \approx 1,223\,70$	corecția: 8 pentru 12
	$x \approx 29,888$
Calculul $\log 2\,744,2$	
$\log 2\,744 \approx 3,438\,38 \quad \Delta = 16$	
2 32	
$\log 2\,744,2 \approx 3,438\,41$	
$\frac{1}{3} \log 2\,744,2 \approx 1,146\,14$	
$\operatorname{colog} \sqrt[3]{2\,744,2} \approx 2,853\,86$	
	$x \approx 29,888$

De remarcat interesul pe care îl prezintă scrierea: $\overline{2,853\,86}$ care permite să nu avem în definitiv de făcut decît o adunare, de următoarea formă:

$$\begin{aligned} \text{coloana zecimilor 1 (reținut)} &+ 3 + 2 + 8 = 14 \\ \text{coloana unităților 1 (reținut)} &+ 1 + 1 + (-2) = 1. \end{aligned}$$

10.3.7 Calcule cu ajutorul logaritmilor neperieni

Am văzut că avem:

$$\operatorname{Log} x = \log x \frac{1}{M},$$

cu:

$$\frac{1}{M} \approx 2,302\,59 \text{ cu o aproximație de } \frac{1}{2 \cdot 10^5}.$$

Tabela dă logaritmul zecimal al lui x .

Este vorba de a înmulți acest număr cu $\frac{1}{M}$.

Pentru a evita înmulțirea lui $\log x$ cu 2,302 59, se utilizează multiplii lui $\frac{1}{M}$.

	M	$\frac{1}{M}$
1	0,434 29	2,302 59
2	0,868 59	4,605 17
3	1,302 88	6,907 76
4	1,737 18	9,210 34
5	2,171 47	11,512 93
6	2,605 77	13,815 51
7	3,040 06	16,118 10
8	3,474 36	18,420 68
9	3,908 65	20,723 27

Exemplu. Să se calculeze $\text{Log } 2$.

Avem:

$$\log 2 \approx 0,301\ 03.$$

Se majorează zecimala a 5-a dacă a 6-a este superioară sau egală cu 5.

$$0,3 \times \frac{1}{M} \approx 0,690\ 78$$

$$0,001 \times \frac{1}{M} \approx 0,002\ 30$$

$$0,000\ 03 \times \frac{1}{M} \approx 0,000\ 07$$

$$\text{Log } 2 \approx 0,693\ 15$$

Invers, cunoscînd $\text{Log } x$, se calculează $\log x$ prin:

$$\log x = \text{Log } x \times M.$$

Exemplu. Să se calculeze x astfel ca $\text{Log } x = 2,792\ 14$.

Avem:

$$\log x = 2,792\ 14 \times M$$

$$2M \approx 0,868\ 59$$

$$0,7\ M \approx 0,304\ 01$$

$$0,09M \approx 0,039\ 09$$

$$0,002M \approx 0,000\ 87$$

$$0,000\ 1M \approx 0,000\ 04$$

$$0,000\ 04M \approx 0,000\ 02$$

$$\log x \approx 1,212\ 62$$

$$\log 16,31 \approx 1,212\ 45 \quad D = 27$$

diferență:

corecția:

6

0,3

$$x \approx 16,316\ 3$$

17

pentru 16,2

pentru 0,8

Atunci cînd caracteristica logaritmului zecimal este negativă, se revine la scrierea normală, înainte de a face înmulțirea cu $\frac{1}{M}$.

Exemplu. Să se calculeze $\text{Log } 0,043$.

Avem:
$$\log 0,043 \approx \overline{2},633\ 47 = -2 + 0,633\ 47 \approx$$
$$\approx -1,366\ 53.$$

Se găsește:
$$1,366\ 53 \times \frac{1}{M} \approx 3,146\ 57.$$

Deci:
$$\text{Log } 0,043 \approx -3,146\ 57 = \overline{4},853\ 43$$

EXERCIȚII

10.1 Știind că: $\log 3 \approx 0,477\ 12$ și $\log 12 \approx 1,079\ 18$, să se calculeze, utilizînd proprietățile logaritmilor zecimali:

$$\begin{array}{cccccc} \log 9, & \log \sqrt{3}, & \log 4, & \log 36, & \log 30, \\ \log 300, & \log 0,3, & \log \sqrt[5]{12}, & \log \sqrt[4]{27}. \end{array}$$

10.2 Să se calculeze valoarea lui: $y = \frac{1}{2} \log (4 + \sqrt{7}) + \frac{1}{2} \log (4 - \sqrt{7})$.

Să se rezolve ecuațiile definite pe $\mathbb{R}$ prin:

10.3 $\log (x + 1) + \log (x - 2) = \log 18$.

10.4 $\log (2x - 5) + \log (3x + 7) = 4 \log 2$.

10.5 $\log \sqrt{x + 1} + \log \sqrt{x - 1} = \log 5$.

10.6 $2 \log x = \log \left(x + \frac{11}{10} \right) + 1$.

10.7 $\log (x + 1) - \log 3 = \log (2x - 3) + \log 7$.

. .

Să se efectueze următoarele operații:

10.8 $\overline{2},142\ 89 + 1,725\ 34 - \overline{1},708\ 01$.

10.9 $\overline{3},252\ 75 - 2,831\ 65 - 0,478\ 99$.

10.10 $\overline{5},074\ 15 \times 3; \overline{2},817\ 95 \times 4$.

10.11 $\overline{3},504\ 712 : 4; \overline{2},478\ 12 : 5$.

10.12 Să se calculeze, utilizînd logaritmi zecimali:

1° $92,24 \times 0,875$.

2° $(0,878)^3$.

3° $\sqrt[5]{28,34}$.

4° $\frac{57\ 978}{2,84}$.

5° $\frac{\sqrt[3]{4,58 \times 27}}{(3,6)^2}$.

10.13 Să se rezolve următoarele ecuații:

1° $\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^4 = 28,75\}?$

2° $\{x; x \in \mathbb{R} \text{ și } x^5 = 3\,724,6\}?$

Să se determine logaritmi zecimali și neperieni ai numerelor:

10.14 4 687,5; 883,7; 123,45.

10.15 27,108; 0,059 63; 0,001 988 7.

10.16 Să se calculeze: $\sqrt[5]{12}$; $\sqrt{0,2}$; $\sqrt[3]{0,002\,81}$.

10.17 Să se calculeze: $x = \frac{ab}{c}$ pentru: $a = 248,97$; $b = 3,728\,4$; $c = 1,829\,7$.

10.18 Să se calculeze: $\sqrt[5]{\frac{0,714\,2}{283}}$; $(1,273)^9 \times \sqrt{17}$; $\sqrt[9]{250,12}$.

10.19 Să se calculeze: $\frac{\pi^2}{15}$; $\frac{\sqrt{226}}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Să se calculeze x dat de formulele:

10.20 $x = \frac{762,3 \times 48,56 \times 74,79}{\sqrt[3]{25,752}}$; $x = \sqrt[3]{28,85} \times \sqrt{121,7}$.

10.21 $x = \frac{(2,15)^7}{(1,63)^2}$; $x = \frac{(37,51)^2 - (3,285)^3}{(2,75)^4}$.

10.22 $x = \pi^2 \frac{(1,07)^3}{(0,95)^2}$; $x = 381,5 \sqrt[3]{\frac{25\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}}$.

10.23 $x = \frac{865\sqrt[3]{22,5}}{432\sqrt{3}}$; $x = \frac{\sqrt{362,93} \times \sqrt[5]{2\,777}}{\sqrt[3]{(6,279\,4)^2}}$.

10.24 Să se rezolve sistemul definit pe $\mathbb{R}^3$ prin:

$$\begin{cases} yz = 0,312\,12 \\ xz = 0,518\,13 \\ xy = 0,707\,03. \end{cases}$$

10.25 Să se rezolve sistemul definit pe $\mathbb{R}^3$ prin:

$$\begin{cases} xyz = 1,348\,1 \\ xy^2x^3 = 5,413\,2 \\ xy^3x^4 = 9,481\,6. \end{cases}$$

10.26 Pentru ce valori ale lui n , ecuația definită pe $\mathbb{R}^1$ prin:

$$x^2 - 2x + \log n = 0$$

are rădăcini? Calculați-le pentru $n = 1$ și $n = 2$.

10.27 Aceeași problemă pentru:

$$x^2 - 2x \log n + 4 = 0$$

Aplicație: $n = 100$ și $n = 1\,000$.

10.28 Să se rezolve sistemul definit pe $\mathbb{R}^2$ prin:

$$\begin{cases} \log x - \log y = \log 10 \\ \log x^2 + \log y^2 = \log 3\,200. \end{cases}$$

10.29 Să se calculeze aria discului de rază $R = 27,56$ m.

10.30 Să se calculeze diagonala pătratului de latură $a = 0,784$ cm.

10.31 Aplicând formula:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

să se calculeze aria triunghiului ale cărui laturi măsoară:

$$a = 161,5m; b = 163,3m; c = 251,4m.$$

(p este semiperimetru).

10.4 LOGARITMI AI VALORILOR FUNCȚIILOR CIRCULARE. UTILIZARE

Numărul real x fiind o măsură în radiani a unghiului $\hat{\theta}$, $\sin x$, $\cos x$ și $\operatorname{tg} x$ sînt numere reale (Alef, II. Funcții numerice, aplicații diverse, 9.2). Să ne reamintim că numerele reale $\sin x^0$, $\cos x^0$, $\operatorname{tg} x^0$ reprezintă sinusul, cosinusul și tangenta unui unghi la care x este o măsură a lui θ în grade. De asemenea dacă x este o măsură a lui $\hat{\theta}$ în grade vechi aceste numere reale fiind notate printr-un abuz de scriere $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Același lucru se întîmplă dacă x este o măsură în grade a lui θ .

10.4.1 Constituirea tabelelor

Tabelele de logaritmi ale lui Bouvard și Retinet dau logaritmi ai lui $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{cotg} x$, numărul real x fiind cuprins între 0 și 100 grade noi, din centigrad în centigrad. Aceleași tabele dau și logaritmi pentru x cuprins între zero și 90 grade vechi, din minut în minut.

Fiecare tabel este cu intrare dublă. De exemplu, pentru tabela în grade noi, urmărind coloana din stînga, de sus în jos, de la începutul la sfîrșitul tabelului, se găsește măsura unghiurilor de la zero la 50 de grade noi, din centigrad în centigrad. Este prima intrare.

Urmărind coloana din dreapta, de jos în sus, de la finele tabelului către început, se găsește mărimea unghiurilor de la 50 la 100 grade noi, din centigrad în centigrad. Este cea de a doua intrare.

Cele două intrări conduc, pentru o aceeași linie, la măsura unghiurilor complementare. Prima coloană, care se intitulează sinus, sus, pentru prima intrare, se intitulează cosinus, jos, pentru cea de a doua. La fel, pentru toate coloanele. Diferențele tabulare sînt indicate ca și părțile lor proporționale.

10.4.2 Calculul unui „logaritm sinus”

Fie de calculat: $\log \sin 28,374$ gr.

Se citește în tabelă: $\log \sin 28,37 \approx \bar{1},634\ 51$, iar diferența tabulară este de 14 sutimi de miimi.

Dacă admitem, ceea ce este greșit dar satisfăcător pentru calculele pe care le facem, că în intervalul de un minut, creșterea logaritmului sinusului este pro-

porțională cu creșterea măsurii stabilite a unghiului, rezultă că pentru o creștere de $\frac{4}{10}$ centigrade, creșterea logaritmului este în sutimi de miimi :

$$14 \times \frac{4}{10} = 5,6.$$

De altfel, calculul acesta se găsește făcut la margine. Avem deci :

$$\log \sin 28,374 \text{ gr} \approx \bar{1},634 \ 57,$$

mărind ultima cifră datorită suprimării lui 6.

Aranjăm calculul astfel :

$$\begin{array}{rcl} \log \sin 28,37 \text{ gr} & \approx \bar{1},634 \ 51 & \Delta = 14 \\ \quad \quad \quad 4 & \quad \quad \quad 5,6 & \\ \hline \log \sin 28,374 \text{ gr} & \approx \bar{1},634 \ 57 & \end{array}$$

■ PROBLEMA INVERSĂ

Fie, să calculăm x astfel ca : $\log \sin x = \bar{1},977 \ 41$.
Facem calculul în grade vechi. Se citește în tabele :

$$\log \sin 71^\circ 40' \approx \bar{1},977 \ 38,$$

și : $\log \sin 71^\circ 41' \approx \bar{1},977 \ 42.$

Diferența între logaritmul dat și primul dintre aceste numere este de 3 sutimi de miimi.

Or, la o creștere de 4 sutimi de miimi corespunde o creștere de $60''$.

Creșterea pentru 3 sutimi de miimi este de :

$$60'' \times \frac{3}{4} = 45''.$$

Aranjăm calculul astfel :

$$\begin{array}{rcl} \log \sin x & = \bar{1},977 \ 41 & \\ \log \sin 71^\circ 40' & \approx \bar{1},977 \ 38 & \Delta = 4 \\ \text{corecție } 45'' & \quad \quad \quad 3 & \\ \hline x & \approx 71^\circ 40' 45'' & \end{array}$$

Aici, calculul de corecție se face mintal.

În cazul general, se pot utiliza tabelele de părți proporționale, citite invers.

10.4.3 Calculul unui „logaritm tangentă”

Fie: să se calculeze: $\log \operatorname{tg} 29^{\circ}56'35''$.

Calculul se dispune astfel:

$$\begin{array}{rcl} \log \operatorname{tg} 29^{\circ}56' & \approx \bar{1},760\ 27 & \Delta = 29 \\ & \begin{array}{r} 30'' \\ 5'' \end{array} & \begin{array}{r} 14,5 \\ 2,42 \end{array} \\ \hline \log \operatorname{tg} 29^{\circ}56'35'' & \approx \bar{1},760\ 44 & \end{array}$$

S-a majorat cea de a cincea zecimală din cauza lui 9, care o urmează, și care nu s-a scris.

■ PROBLEMA INVERSĂ

Fie: să se calculeze x astfel ca: $\log \operatorname{tg} x = 0,296\ 53$.

Calculul îl vom face în grade vechi.

Se citește în tabele:

$$\log \operatorname{tg} 70^{\circ}21\ \text{gr} \approx 0,296\ 38.$$

Se folosește tabela părților proporționale, citită invers.

Calculul se dispune astfel:

$$\begin{array}{rcl} \log \operatorname{tg} x & = 0,296\ 53 & \\ \log \operatorname{tg} 70,21\ \text{gr} & \approx 0,296\ 38 & \Delta = 17 \\ \text{diferența} & & 15 \\ \text{corecție: } 8\ \text{pentru} & & 13,6 \\ 0,8\ \text{pentru} & & 1,36 \\ & x \approx 70,218\ 8\ \text{gr.} & \end{array}$$

10.4.4 Calculul unui „logaritm cosinus”

Fie: să se calculeze: $\log \cos 78^{\circ}40'24''$.

Se scrie: $78^{\circ}40'24'' = 78^{\circ}41' - 36''$.

Calculul se dispune astfel:

$$\begin{array}{rcl} \log \cos 78^{\circ}41' & \approx \bar{1},292\ 77 & \Delta = 63 \\ & \begin{array}{r} -30'' \\ -6'' \end{array} & \begin{array}{r} 31,5 \\ 6,3 \end{array} \\ \hline \log \cos 78^{\circ}40'24'' & \approx \bar{1},293\ 15 & \end{array}$$

Micșorării de $36''$ îi corespunde o majorare a logaritmului calculat cu ajutorul tabelor de proporționalitate. Se va remarca că diferența tabelară trebuie să fie luată urcînd de la $78^{\circ}41'$ la $78^{\circ}40'$.

■ PROBLEMA INVERSĂ

Fie: să se calculeze x astfel ca: $\log \cos x = \bar{1},827\ 40$.
 Calculul îl vom face în grade noi. El se dispune astfel:

$$\begin{array}{rcl} \log \cos x & = & \bar{1},827\ 40 \\ \log \cos 53,08\ \text{gr} & \approx & \bar{1},827\ 42 \quad \Delta = 7 \\ \text{diferență} & & -2 \\ \text{corecție: } 3\ \text{pentru} & & -2,1 \\ & & x \approx 53,083\ \text{gr.} \end{array}$$

S-a luat, din tabele, logaritmul imediat superior și s-a notat diferența tabulară către logaritmi descrescători.

10.4.5 Cazul „unghiurilor mici”

Când x tinde către zero, situația este aceeași pentru sinusul și tangenta sa. Valoarea logaritmilor acestor două funcții tinde către $-\infty$ și, ca urmare, variază mult atunci când măsura unghiului variază puțin.

Astfel, se citește în tabele, în grade noi:

$$\log \sin 0,01\ \text{gr} \approx \bar{4},196\ 12$$

$$\log \sin 0,02\ \text{gr} \approx \bar{4},497\ 15$$

$$\log \sin 0,03\ \text{gr} \approx \bar{4},673\ 24$$

$$\log \sin 0,04\ \text{gr} \approx \bar{4},798\ 18$$

$$\log \sin 0,05\ \text{gr} \approx \bar{4},895\ 09$$

Diferențele tabelare care apar, sînt, în sutimi de miimi:

$$30\ 103, 17\ 609, 12\ 494, 9\ 691.$$

Am admis, în calculele precedente, că creșterea logaritmului sinus era proporțională cu creșterea măsurii unghiului.

Este greșit, dar acceptabil pentru diferențele tabelare, care variază puțin. Este greșit și inacceptabil în cazul de față, unde diferența tabelară variază de la 30 103 la 17 609 sutimi de miimi pentru o aceeași creștere a unghiului. Începînd de la 3 grade se poate admite, fără o eroare apreciabilă, proporționalitatea pe care am folosit-o pînă în prezent.

Dificultăți asemănătoare se constată pentru tangenta unghiurilor a căror măsură este inferioară lui 3 grade și pentru cosinusul unghiurilor a căror măsură este superioară lui 97 grade noi. Căci, întrucît avem: $\cos x = \sin(100\ \text{gr} - x)$, ultimul caz se raportează la cel dintîi.

Trebuie să învățăm să calculăm $\log \sin x$ și $\log \tg x$ pentru x inferior lui 3 grade și neegal cu un număr întreg de centigrade. În acest ultim caz, tabela dă imediat logaritmul căutat.

■ I. Sinus. Raportul $\frac{\sin x}{x}$, dacă x este exprimat în radiani, este apropiat de 1 cînd x este apropiat de zero. Dacă se formează raportul $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$, α fiind exprimat în centigrade, avem :

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{\alpha}, \text{ cu } \frac{x}{\alpha} = \frac{\pi}{20\,000}.$$

De unde :

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{\pi}{20\,000}.$$

Cînd α tinde către zero, $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ tinde către $\frac{\pi}{20\,000}$ și $S = \log \frac{\sin \alpha}{\alpha}$, tinde către $\log \frac{\pi}{20\,000} = \bar{4},196\,12$.

Cînd α este 300, se găsește $S \approx \bar{4},195\,96$. Numărul S variază deci foarte puțin. De aici rezultă metoda folosită pentru „unghiurile mici”.

Se evaluează unghiul în centigrade. Fie α măsura sa. Tabela dă valorile lui S pentru unghiuri sub 3 gr și se scrie :

$$\log \sin \alpha = \log \alpha + S.$$

Se folosește o metodă similară pentru unghiurile a căror măsură este sub 4°. Dacă β este măsura în secunde a unui unghi de x radiani, avem :

$$\frac{\sin \beta}{\beta} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{\pi}{64\,800}$$

și $S = \log \frac{\sin \beta}{\beta}$ tinde către $\bar{6},685\,57$ cînd x tinde către zero. Pentru măsura de 4°, avem :

$$S \approx \bar{6},685\,22.$$

Numărul S variază încă foarte puțin. De unde metoda :

Se evaluează unghiul în secunde. Fie β măsura sa. Tabela dă valorile lui S pentru unghiuri sub 4° și se scrie :

$$\log \sin \beta = \log \beta + S.$$

Exemplu. I. Să se calculeze $\log \sin 0,246$ gr.

Avem : $\alpha = 24,6$; $S \approx \bar{4},196\,12$.

Utilizînd tabelele de numere, se găsește : $\log 24,6 \approx 1,390\,94$;

de unde : $\log \sin 0,246 \text{ gr} \approx 1,390\,94 + \bar{4},196\,12 \approx \bar{3},587\,06$.

II. Să se calculeze $\log \sin 1^{\circ}8'15''$.

Se citește, în tabele, că :

$$1^{\circ}8' = 4\,080'' \text{ și } S \approx \bar{6},685\,55 ;$$

deci :

$$\beta = 4\,095 ; \log \beta \approx 3,612\,25 ;$$

de unde :

$$\log \sin 1^{\circ}8'15'' \approx 3,612\,25 + \bar{6},685\,55 \approx \bar{2},297\,80.$$

III. Să se calculeze x în grade noi, știind că $\log \sin x = \bar{2},095\,81$.

Tabela arată că avem : $0,79 \text{ gr} < x < 0,80 \text{ gr}$.

Luăm: $S \approx \overline{4,196\ 11}$

Formula: $\log \alpha = \log \sin \alpha - S$ conduce la următoarele calcule:

$$\log \sin \alpha = \overline{2,095\ 81}$$

$$\underline{\underline{S \approx \overline{4,196\ 11}}}$$

de unde, prin scădere: $\log \alpha \approx 1,899\ 70$.

Se citesc, în tabele, numerele:

$$\log 79,37 \approx 1,899\ 66 \quad \Delta = 5$$

diferența:

4

corecția:

8

de unde:

$$\alpha \approx 79,378 \text{ și } x \approx 0,793\ 78 \text{ gr.}$$

Se notează că, pentru a trece de la $\log \alpha$ la α , se știe, apriori, că α este cuprins între 79 și 80.

■ II. Tangenta. Ceea ce am spus pentru raportul $\frac{\sin x}{x}$ poate fi repetat pentru raportul $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

El variază puțin pentru unghiuri a căror măsură este sub 3 gr sau 4°. Se mai constată că dacă α este o măsură a lui x în centigrade și β măsura sa în secunde, numerele $\log \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}$ și $\log \frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta}$, variază foarte puțin.

Numerele figurează în tabele sub notația T .

Se folosesc formulele:

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \log \alpha + T;$$

$$\log \operatorname{tg} \beta = \log \beta + T.$$

Exemple. I. Să se calculeze $\log \operatorname{tg} 0,679\ 4$ gr.

Avem: $\alpha = 67,94$; $T \approx \overline{4,196\ 14}$; $\log \alpha \approx 1,832\ 13$;

de unde: $\log \operatorname{tg} 0,679\ 4 \text{ gr} \approx \overline{4,196\ 14} + 1,832\ 13 \approx \overline{2,028\ 27}$.

II. Să se calculeze x în grade noi, știind că: $\log \operatorname{tg} x = \overline{2,378\ 52}$.

Se citește în tabelă că: $1,52 \text{ gr} < x < 1,53 \text{ gr}$

și: $T = \overline{4,196\ 20}$.

Formula $\log \alpha = \log \operatorname{tg} \alpha - T$ conduce la următoarele calcule:

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \overline{2,378\ 52}$$

$$\underline{\underline{T \approx \overline{4,196\ 20}}}$$

de unde: $\log \alpha \approx 2,182\ 32$

se găsește: $\log 152,1 \approx 2,182\ 13 \quad \Delta = 28$

diferența: 19

corecția: 7 pentru 19,3

de unde: $\alpha \approx 152,17$ și $x \approx 1,521\ 7 \text{ gr.}$

Căutarea lui α este simplificată deoarece știm că el este cuprins între 152 și 153.

III. Să se calculeze x în grade vechi, știind că $\log \operatorname{tg} x = \overline{2,337\ 14}$.
 Se citește în tabelă că: $1^{\circ}14' < x < 1^{\circ}15'$,
 fie: $4\ 440^{\circ} < x < 4\ 500^{\circ}$.
 Avem: $T \approx \overline{6,685\ 64}$.
 Formula $\log \beta = \log \operatorname{tg} \beta - T$ conduce la următoarele calcule:

$$\begin{array}{rcl} \log \operatorname{tg} \beta & = & \overline{2,337\ 14} \\ & & \underline{T \approx \overline{6,685\ 64}} \\ \log \beta & \approx & 3,651\ 50 \\ \log 4482 & \approx & 3,651\ 47 \quad \Delta = 10 \\ \text{diferența:} & & 3 \\ \text{corecția:} & & 3 \\ \text{de unde:} & & \beta \approx 4\ 482,3; \\ \text{și ca urmare:} & & x \approx 1^{\circ}14'42'',3. \end{array}$$

10.4.6 Rezolvarea ecuațiilor numerice de tipul

$$a \cos x + b \sin x = c$$

Fie, de exemplu, de rezolvat ecuația:

$$0,732 \cos x - 1,572 \sin x = 0,897,$$

în care x este o măsură a unghiului, în grade noi.

Fie:
$$R = \sqrt{0,732^2 + 1,572^2}.$$

Metoda din primul curs (Alef₀, Algebră II, Funcții numerice, aplicații diverse 9.7.2), utilizează unghiul definit de:

$$\cos \varphi = \frac{0,732}{R}, \quad \sin \varphi = \frac{-1,572}{R}.$$

Putem deci pune:

$$\varphi = -\alpha \quad \text{cu} \quad 0 < \alpha < 100 \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1,572}{0,732}.$$

Evităm astfel să calculăm două ridicări la pătrat și o extragere de rădăcină. Vom utiliza deci următoarele formule:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,572}{0,732}, \quad \cos \beta = \frac{0,897}{0,732} \cos \alpha, \quad x = -\alpha + \varepsilon \beta + K \cdot 400, \quad (\varepsilon \in \{-1, 1\})$$

făcînd calculul în grade noi.

1° Calculul lui α .

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \log 1,572 - \log 0,732.$$

$$\begin{array}{rcl} \log 1,572 & \approx & 0,196\ 45 \\ \log 0,732 & \approx & \overline{1,864\ 51} \\ \log \operatorname{tg} \alpha & \approx & 0,331\ 94 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \log \operatorname{tg} \alpha & \approx & 0,331\ 94 \\ \log \operatorname{tg} 72,25 \text{ gr} & \approx & \overline{0,331\ 82} \quad \Delta = 18 \\ \text{diferența:} & & 12 \\ \text{corecția: } 7 \text{ pentru} & & 12,6 \\ & & \alpha \approx 72,257 \text{ gr.} \end{array}$$

2° Calculul lui β .

$$\log \cos \beta = \log 0,897 + \log \cos \alpha + \text{colog } 0,732$$

$$\begin{array}{rcl} \log \cos 72,25 & = & \overline{1,625\ 54} \\ \text{pentru } 7 & & -9,8 \end{array} \quad \Delta = 14$$

$$\log \cos \alpha \approx \overline{1,625\ 44}$$

$$\log 0,897 \approx \overline{1,952\ 79}$$

$$\text{colog } 0,732 \approx \overline{0,135\ 49}$$

$$\log \cos \beta \approx \overline{1,713\ 72}$$

$$\log \cos 65,39 \text{ gr} \approx \overline{1,713\ 72}$$

$$\log \cos 65,39 \text{ gr} \approx \overline{1,713\ 71} \quad \Delta = 12$$

$$\text{diferența:} \quad 1$$

$$\text{corecția:} \quad -1 \text{ pentru } 1,2$$

$$\beta = 65,389 \text{ gr.}$$

- 3° Soluții: (1) $x \approx -72,257 + 65,389 + K \cdot 400$
 unde $x \approx (-6,868 + K \cdot 400)$ grade noi.
 (2) $x \approx -72,257 - 65,389 + K \cdot 400$
 unde $x \approx (-137,646 + K \cdot 400)$ grade noi.

EXERCIIU

10.32 1° Să se calculeze logaritmiile pentru sinusul, cosinusul, tangenta unghiurilor a căror măsură este:

$$31,226 \text{ gr}; 83,482 \text{ gr}; 42,372 \text{ gr.}$$

2° Aceeași problemă pentru:

$$51^\circ 12' 28''; 38^\circ 14' 11''; 78^\circ 2' 4''.$$

10.33 Să se calculeze în grade vechi, pe x cuprins între 0° și 180° , astfel ca să avem:

$$\text{tg } x = -\frac{\sqrt{2}}{5}; \quad \sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}.$$

Se vor calcula logaritmiile pentru $|\text{tg } x|$ și pentru $\sin x$ și se va deduce x .

10.34 Să se calculeze $\log \sin x$ și $\log \text{tg } x$ pentru următoarele valori ale lui x :

$$0,427 \text{ gr}; 1^\circ 18' 43''; 2,573 \text{ gr}; 2^\circ 15''.$$

10.35 Să se calculeze pe x în grade noi, astfel ca:

$$\sin x = \frac{1}{10} \sin 10^\circ \quad (0 < x < 100 \text{ gr}).$$

10.36 Să se determine x în grade noi, știind că:

$$\text{a) } \log \sin x = \overline{2,594\ 25}; \log \text{tg } x = \overline{3,906\ 28};$$

$$\text{b) } \log \cos x = \overline{3,184\ 00}; \log \text{cotg } x = \overline{2,612\ 47}.$$

10.37 Să se determine x în grade vechi, știind că:

$$\text{a) } \log \sin x = \overline{3,182\ 75}; \log \text{tg } x = \overline{2,732\ 00};$$

$$\text{b) } \log \cos x = \overline{2,623\ 21}; \log \text{cotg } x = \overline{3,000\ 43}.$$

10.38 Să se calculeze valoarea expresiei :

$$y = 8 \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7},$$

evaluând valoarea lui $\log y$.

10.39 Să se determine x în grade vechi ($0 < x < 90^\circ$) astfel ca :

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha}} \quad \text{cu:} \quad \begin{aligned} \alpha &= 27^\circ 43' 17'' \\ \beta &= 38^\circ 14' 29''. \end{aligned}$$

(Există două soluții).

10.40 Să se calculeze x pozitiv în grade vechi, măsură a „celui mai mic unghi”, astfel ca :

$$\sin^3 x = \frac{\sin^3 12^\circ 40' 20'' \times \operatorname{tg}^3 203^\circ 9' 21''}{\sqrt[3]{\cos 280^\circ 27''} \times \sqrt{0,2317}}.$$

10.41 Să se calculeze la fel x în grade noi, astfel ca :

$$\begin{aligned} \log \sin^3 x &= (\log a)^3 \times \operatorname{tg} \alpha; \\ \alpha &= 120,583 \text{ gr}; a = 1,2504. \end{aligned}$$

10.42 Să se calculeze, cu cinci zecimale, valorile pe care le ia expresia :

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \cos nA \quad (\text{unde } A = 14^\circ 16' 28'')$$

în cazul în care lui n i se dau valorile : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9.
Să se calculeze suma S a acestor opt valori.

10.43 Să se calculeze expresia :

$$R = \sqrt{0,00046506} \times \cos 176,145 \text{ gr} \times \operatorname{tg} 345,607 \text{ gr}.$$

* * *

Să se rezolve ecuațiile definite pe $\mathbb{R}$ prin :

10.44 $2,561 \cos x + 1,443 \sin x = 2,328,$

x fiind măsura unghiului în grade vechi, minute, secunde.

10.45 $\sqrt{2} \cos x + \sqrt{3} \sin x = 1,$

x fiind măsura în grade noi a unui unghi, astfel ca :

$$0 < x < 400.$$

* * *

10.46 Să se calculeze sinusurile unghiurilor x a căror măsuri în radiani sînt : 0, 2; 0,4; 0,8; 1; 1,2; 1,4 :

a) convertind aceste măsuri în grade vechi și utilizînd o tabelă de valori naturale.

b) convertind aceste măsuri în grade noi, calculînd $\log \sin x$ și trecînd de la logaritmi la număr.
Să se compare rezultatele.

10.47 Să se calculeze x în radiani $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, astfel ca să avem :

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{n^2} \quad \text{cu } n = 1, 2, 3, 4, 5.$$

a) calculând $\log \operatorname{tg} x$ și utilizând gradele noi;

b) utilizând o tabelă de valori naturale.

10.48 Să se determine numerele reale x, y, z, t , cuprinse între 0° și 180° , astfel ca:

$$\cotg x = \cos a \operatorname{tg} c, \quad \sin (y - x) = \frac{\cos b \cos x}{\sin c \cos a},$$

$$\operatorname{tg} z = \cos y \operatorname{tg} a,$$

$$\sin (t - z) = \cotg b \sin y \cos z \operatorname{tg} a,$$

în care: $a = 68^\circ 41' 5''$; $b = 127^\circ 30' 10''$; $c = 43^\circ 17' 20''$.

10.49 Să se calculeze numărul V dat de formula:

$$V = \frac{abc}{3} \sqrt{\sin p \sin (p - \alpha) \sin (p - \beta) \sin (p - \gamma)},$$

în care:

$$\alpha = 43,877 \ 3 \text{ gr}; \ a = 72,436;$$

$$\beta = 67,242 \ 9 \text{ gr}; \ b = 107,872;$$

$$\gamma = 35,432 \ 6 \text{ gr}; \ c = 99,255;$$

și: $2p = \alpha + \beta + \gamma$.

10.50 Se dă: $a = 113^\circ 2' 57''$, $b = 82^\circ 39' 29''$, $c = 74^\circ 54' 31''$,

și se consideră: $2p = a + b + c$.

Să se calculeze o mărime, în grade vechi, a unghiurilor $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{\varphi}$, cuprinsă între 0° și 180° și definită de formulele:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p - b) \sin (p - c)}{\sin p \sin (p - a)}}; \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p - a) \sin (p - c)}{\sin p \sin (p - b)}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p - a) \sin (p - b)}{\sin p \sin (p - c)}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p - a}{2} \operatorname{tg} \frac{p - b}{2} \operatorname{tg} \frac{p - c}{2}}.$$

Să se verifice numeric relațiile:

$$\varphi = A + B + C - 180^\circ;$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = p.$$

Să se calculeze p .

Să se rezolve sistemele definite pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prin:

$$10.51 \quad \begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3. \end{cases}$$

$$10.52 \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 425 \\ \log x + \log y = 2. \end{cases}$$

$$10.53 \quad \begin{cases} x^4 + y^4 = 641 \\ \log x + \log y = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x + \log y = \frac{3}{2} \\ \log x - \log y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

*

10.54 Să se calculeze muchia unui cub a cărui diagonală măsoară 3 metri.

10.55 Să se calculeze raza unei sfere a cărei volum este 2 metri cubi.

10.56 1° Care este diametrul unei măsuri pentru lapte care are forma unui cilindru de rotație și a cărei înălțime este egală cu diametrul? Să se facă calculul pentru măsurile de: 1 litru, $\frac{1}{2}$

litru, 2 deciletri, 1 decilitru.

2° Aceeași problemă pentru măsurile a căror înălțime este dublul diametrului.

10.57 Care este lungimea unui pendul care bate secunde la Paris (Se va găsi $\log g$ în tabele).
 10.58 Să se calculeze masa unui con de rotație din bronz (densitate 9,24), știind că generatoarea și diametrul de bază sînt egale cu 2,37 cm.

10.5 RIGLA DE CALCUL

10.5.1 Un exemplu de scară

Considerăm funcția f , definită pentru orice x aparținînd intervalului $[0, 2]$, prin :

$$f(x) = x^2.$$

și graficul acestei funcții în raport cu un reper cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 Dacă notăm cu Ox și OX cele două semidrepte cu originea în O și de vectori directori unitari $\vec{i}$ și respectiv $\vec{j}$, valoarea cuplului (Ox, OX) caracterizează reperul $(O, \vec{i}, \vec{j})$, care poate fi deci notat OxX (fig. 2).

Pe figură : $\vec{i} = \vec{OA}_1$, $\vec{j} = \vec{OA}_2$.

Să alegem pe semidreapta Ox un anumit număr de puncte, de exemplu :

$$\begin{aligned} m_1 : x_1 &= 0; \\ m_2 : x_2 &= 0,5; \\ m_3 : x_3 &= 1; \\ m_4 : x_4 &= 1,5; \\ m_5 : x_5 &= 2. \end{aligned}$$

Să marcăm pe semidreapta Ox punctele M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 corespunzătoare, apoi în loc să indicăm, lângă M_i , valoarea lui $f(x_i)$, vom indica valoarea lui x_i . Vom obține o scară a funcției $x \mapsto x^2$, relativ la intervalul $[0, 2]$. Pe această scară, punctele nu sînt regulat distanțate.

Este posibil să obținem o scară cu *pas constant* (fig. 3) alegînd convenabil valorile variabilei. Valorile trebuie să fie date cu o anumită precizie.

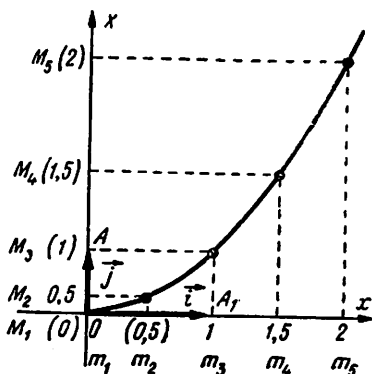


Fig. 2

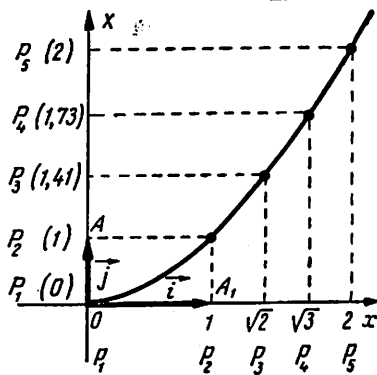


Fig. 3

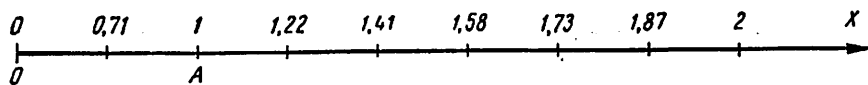


Fig. 4

În general, se indică două sau trei cifre semnificative, după virgulă.

$\overrightarrow{OA}$ se numește *modulul* scării.

Scara, odată construită, se prezintă într-un mod autonom. Figura 4 reprezintă o scară a funcției:

$$x \mapsto x^2,$$

relativ la intervalul $[0, 2]$; pasul acestei scări este constant și egal cu $\overrightarrow{OA}$; sînt date două cifre semnificative, după virgulă.

10.5.2 Scara unei funcții crescătoare

Fie f o funcție crescătoare pe un interval $[a, b]$. Fie OX o axă măsurată și gradată prin $\overrightarrow{OA}$, de măsură 1. Se obține o scară a funcției f indicînd, față de un anumit număr de puncte M_i de pe OX , numărul x_i astfel ca :

$$\overrightarrow{OM_i} = x_i \overrightarrow{OA}, \quad x_i = f(x_i).$$

Cu alte cuvinte, dacă φ este funcția reciprocă a lui f , avem :

$$x_i = \varphi(X_i).$$

Exemplu. Funcția $x \mapsto \log x$ este definită și crescătoare pe intervalul $]0, \infty[$. Figura 5 reprezintă o scară a acestei funcții pentru :

$$1 \leq x \leq 100.$$

Modulul scării, fie $\overrightarrow{OA}$, are drept lungime, 4 centimetri.

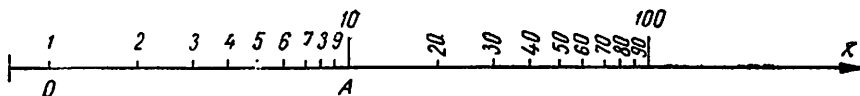


Fig. 5

Scara este descrisă prin tabelul dat în continuare :

x_i	$\log(x_i) = X_i = \frac{\overline{OM}_i}{\overline{OA}}$	lungimea lui $\overline{OM}_i$ în cm	Gradația marcată	$10^{X_i} = x_i$
1	$\log 1 = 0$	0	1	$10^0 = 1$
2	$\log 2 \approx 0,30$	1,2	2	$10^{0,30} \approx 2$
3	$\log 3 \approx 0,48$	1,92	3	$10^{0,48} \approx 3$
4	$\log 4 \approx 0,60$	2,4	4	$10^{0,60} \approx 4$
5	$\log 5 \approx 0,70$	2,8	5	$10^{0,70} \approx 5$
6	$\log 6 \approx 0,78$	3,12	6	$10^{0,78} \approx 6$
7	$\log 7 \approx 0,85$	3,4	7	$10^{0,85} \approx 7$
8	$\log 8 \approx 0,90$	3,6	8	$10^{0,90} \approx 8$
9	$\log 9 \approx 0,95$	3,8	9	$10^{0,95} \approx 9$
10	$\log 10 = 1$	4	10	$10^1 = 10$
20	$\log 20 \approx 1,30$	5,2	20	$10^{1,30} \approx 20$
30	$\log 30 \approx 1,48$	5,92	30	$10^{1,48} \approx 30$ etc.

În coloana a doua a tabelului și în ultima coloană s-a pus în evidență că, în acest exemplu, funcția f este astfel că: $X = f(x) = \log x$ și funcția φ , funcția inversă a lui f , este astfel că: $x = \varphi(X) = 10^X$.

10.5.3 Compunerea scărilor

Fie f și g două funcții crescătoare și fie două scări relative, respectiv ale lui f și g , pentru care vectorii unitari $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{O'A'}$ au același modul.

Să așezăm cele două scări paralel, astfel încât segmentul $[O, O']$ să fie ortogonal pe amîndouă.

Fie un punct M al scării lui f și fie M' un punct al scării lui g situat vertical față de M (presupus că există). Avem :

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = X, \quad X = f(x);$$

$$\frac{\overline{O'M'}}{\overline{O'A'}} = X', \quad X' = g(x');$$

or, $\overline{OA} = \overline{O'A'}$ și $\overline{OM} = \overline{O'M'}$ prin ipoteză ; avem deci, pentru două puncte asociate : $f(x) = g(x')$.

Dacă φ este funcția inversă a lui f , avem de asemenea : $x = \varphi[g(x')]$.

Punerea în paralel a scărilor echivalează cu formarea scării funcției $\varphi \circ g$. Dacă se citește o valoare x' pe scara funcției g , se găsește, pe direcția gradației x' și pe scara funcției f , valoarea lui $\varphi \circ g(x')$. Practic, gradațiile sînt concepute astfel încît se pot interpola dintr-o privire.

Exemple. I. Fie funcția f , definită pentru orice x aparținînd lui $\mathbb{R}^+$, prin :

$$f(x) = x^2 = X.$$

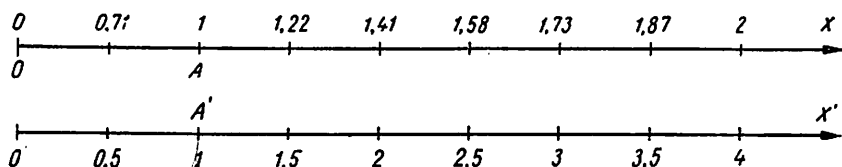


Fig. 6

Funcția sa inversă φ este astfel că: $\varphi(X) = \sqrt{X} = x$.

Fie g funcția identică, definită pentru orice x' , aparținând lui $\mathbb{R}^+$, prin:

$$g(x') = x' = X'.$$

Avem:

$$x = \varphi(g(x')) = \sqrt{x'}.$$

Să așezăm scara lui g sub aceea a lui f (fig. 6).

Deasupra lui $x' = 2$ se citește $x = \sqrt{2} \approx 1,41$.

Mărind numărul de gradații, se poate citi:

$$\sqrt{2,25} \approx 1,5; \sqrt{2,75} \approx 1,65.$$

Cu ajutorul celor două scări se pot citi de asemenea pătratele. De exemplu:

$$(1,73)^2 \approx 3.$$

II. Să păstrăm aceeași funcție f și fie acum funcția g definită prin:

$$g(x') = x'^3 = X'.$$

Avem:

$$x = \varphi(g(x')) = \sqrt[3]{x'^3}.$$

Deasupra lui $x' = 0,79$ se poate citi astfel, (fig. 7).

$$\sqrt[3]{0,79^3} \approx 0,71.$$

Cu ajutorul acestor două scări se poate citi de asemenea:

$$x' = \sqrt[3]{x^3}.$$

Astfel, sub $x = 1,22$:

$$\sqrt[3]{1,22^3} \approx 1,14.$$

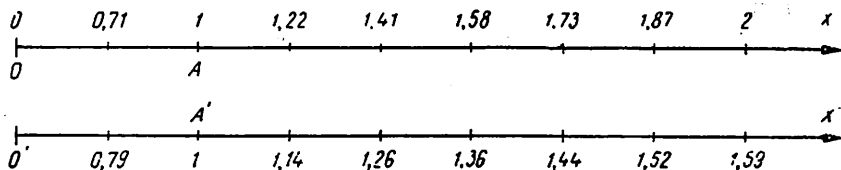


Fig. 7

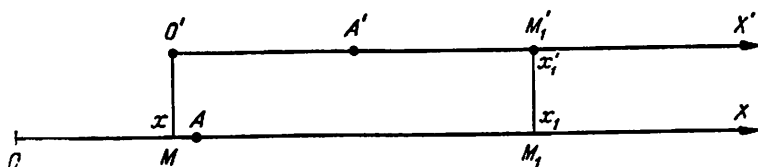


Fig. 8

10.5.4 Decalaj prin translație

Să construim două exemplare identice ale unei scări a funcției f și să decalăm scara așezată pe $O'X'$ paralel cu scara așezată pe OX , astfel ca O' să cadă în dreptul unui punct M gradat x .

Fie atunci x_1' o gradație a lui $O'X'$.

Ea cade în dreptul lui x_1 (fig. 8).

Avem, pe de o parte :

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = X = f(x), \quad \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OA}} = X_1 = f(x_1), \quad \frac{\overline{O'M_1'}}{\overline{O'A'}} = X_1' = f(x_1'),$$

și pe de altă parte :

$$\overline{OM_1} = \overline{OM} + \overline{O'M_1'},$$

$$\overline{OA} = \overline{O'A'};$$

se deduce :

$$f(x_1) = f(x) + f(x_1').$$

Exemple. I. Pornind de la scara $f(x) = x^2$, prin decalaj, se obțin triplete pitagoriene :

$$x_1^2 = x^2 + x_1'^2.$$

I. Un exemplu foarte important face obiectul paragrafului următor.

10.5.5 Scări logaritmice decalate

Să studiem cazul în care scările decalate prin translație sînt două exemplare identice relative la funcția $x \mapsto \log x$.

Avem deci, folosind notațiile din paragraful precedent :

$$\log x_1 = \log x + \log x_1';$$

de unde :

$$x_1 = xx_1',$$

și :

$$x_1' = \frac{x_1}{x}.$$

Este deci teoretic posibil să obținem produsele și cîturile. Practic, rigla de calcul are o parte fixă și o parte mobilă numită rigletă; și una și cealaltă au scări logaritmice identice.

Cum aceste scări au lungimi finite, se „cadrează calculul” utilizînd un factor 10 sau 100, pentru a rămîne în numerele pe care le dă rigla.

10.5.6 Scări logaritmice asemenea

Considerăm două scări logaritmice a căror vectori unitate $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{O'A'}$ au module diferite. Așezăm aceste scări astfel încît să fie paralele de același sens și perpendiculare pe segmentul $[O, O']$ (fig. 9).

Dacă $M(x)$ și $M'(x')$ corespund, avem:

$$\frac{\overline{OM}}{OA} = X = \log x, \quad \frac{\overline{O'M'}}{O'A'} = X' = \log x', \quad \overline{OM} = \overline{O'M'}.$$

Se deduce: $\overline{OA} \log x = \overline{O'A'} \log x'$.

Punem $\frac{\overline{O'A'}}{OA} = \lambda$; avem: $\log x = \lambda \log x'$;

se deduce: $x = x'^\lambda, \quad x' = x^{\frac{1}{\lambda}}.$

Pe figura 9 s-a luat $\lambda = 2$; în acest caz avem:

$$x = x'^2, \quad x' = \sqrt{x}.$$

Ansamblul celor două scări echivalează cu o tabelă de pătrate și cu o tabelă a rădăcinilor pătrate.

Se obține, de exemplu, interpolînd dintr-o privire;

$$\sqrt{20} \approx 4,48.$$

Într-adevăr, avem:

$$\sqrt{20} \approx 4,472 \text{ 1.}$$



Fig. 9

10.5.7 Rigla de calcul

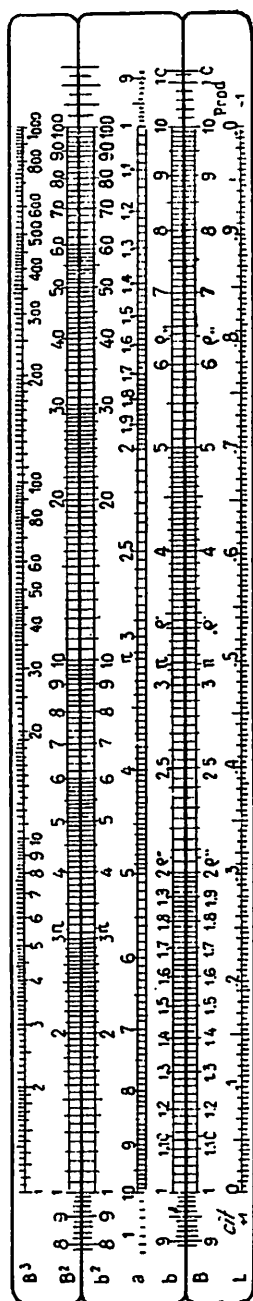


Fig. 10

Începînd din 1623, deci 10 ani după inventarea logaritmilor, au apărut în Anglia instrumente ce pot fi considerate ca strămoșii riglelor noastre actuale de calcul. O mare perfecționare (către anul 1670) a fost inventarea rigletei alunecătoare, care permite decalarea scărilor.

Riglele moderne sînt fabricate dintr-o rășină sintetică nedeformabilă. Ele sînt prevăzute cu un cursor mobil, care permite reperarea precisă a corespondențelor unei scări cu cealaltă. Riglele au scări ale funcțiilor uzuale, într-un număr mai mic sau mai mare, după model. Pentru o singură operație, mărimea erorii este de ordinul $\frac{1}{1000}$; această eroare crește desigur cu nu-

mărul de citiri și de manipulări ale rigletei. O asemenea precizie este satisfăcătoare pentru a avea rapid un ordin de mărime al rezultatului. Dacă datele nu sînt ele însele definite cu o precizie mare, rigla este un instrument perfect adecvat. Cum există modele variate, pentru detalii practice recomandăm instrucțiunile constructorilor de rigle.

Vom indica numai tehnica operațiilor elementare.

10.5.8 Gradațiile instrumentului

Figura 10 prezintă o riglă de calcul de dimensiuni mici,

O riglă de calcul se compune din două părți:

a) o riglă fixă;

b) o rigletă pe care o putem face să alunece în scobitura făcută în acest scop în riglă (fig. 10). Rigla și rigleta sînt de aceeași lungime și gradate la fel. Ele au fiecare două diviziuni, una numită superioară (B^2 , b^2), alta inferioară (B , b).

Distanța unei diviziuni oarecare la originea marcată cu 1, este proporțională cu logaritmul numărului care corespunde acestei diviziuni.

■ **DIVIZIUNEA SUPERIOARĂ.** Partea utilă a riglei este împărțită în două părți egale și, luînd o jumătate drept unitate de lungime, s-au marcat diviziunile 1, 2, 3, ..., 10 la distanțe față de origine, egale cu logaritmiile acestor diferite numere. Diviziunea 1 este în origine, deoarece $\log 1 = 0$; diviziunea 10 se găsește la mijloc, deoarece $\log 10 = 1$.

Între diviziunile principale, de la 1 la 10, care sînt singurele care poartă numere, s-au intercalat diviziuni secundare.

Toate aceste diviziuni, natural, nu sînt echidistante, căci de exemplu: $\log(n+1) - \log n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ descrește în timp ce n crește. De aceea, pe

riglele normale (25 cm), subdiviziunile sînt de $\frac{1}{50}$ între 1 și 2, de $\frac{1}{20}$ între 2 și 3,3

și 4,4 și 5 și de $\frac{1}{10}$ în celelalte intervale. Aceeași gradație este repetată pe cea de a doua jumătate. Dar, diviziunea care va fi marcată cu 3 în cea de a doua jumătate este la o distanță față de origine egală cu:

$$\log 10 + \log 3 = \log 30;$$

din această cauză, în general, aceste diviziuni sînt notate de la 10 la 100.

■ **DIVIZIUNEA INFERIOARĂ.** Partea utilă, egală cu cea a diviziunii superioare, este luată drept unitate. Diviziunile principale merg de la 1 la 10. Subdiviziunile sînt de $\frac{1}{100}$ de la 1 la 2 (1, 1; 1, 2; ...; 1, 9, sînt indi-

cate), de $\frac{1}{50}$ de la 2 la 3 și de la 3 la 4, de $\frac{1}{20}$ în celelalte intervale.

Prima grijă a celui ce folosește rigla de calcul este de a o studia și de a se obișnui cu diviziunile sale.

Făcînd să alunece rigleta pe riglă, se obține suma sau diferența logaritmilor a două numere, ceea ce corespunde înmulțirii sau împărțirii acestor două numere.

10.5.9 Înmulțirea

Fie, de exemplu, să se calculeze produsul:

$$p = 0,003\,25 \times 64,81.$$

Se începe prin mutarea virgulelor pentru a se ajunge la produsul: $p' = 3,25 \times 6,481$ ($p = p' \times 10^{-2}$), a două numere cuprinse între 1 și 10.

Dacă se folosesc diviziunile superioare, se caută pe riglă diviziunea care corespunde factorului 3,25 și se aduce originea rigletei pînă ce coincide cu această diviziune. Se caută pe rigletă diviziunea care corespunde lui 6,481, sau cel puțin aceea care corespunde numărului imediat învecinat acestui factor, fie 6,48 (prin estimare vizuală între 6,4 și 6,5). În sfîrșit, se citește pe riglă diviziunea care coincide cu această ultimă diviziune a rigletei; se găsește 21.

Avem, deci: $p' \approx 21$ (rezultat exact 21,063 25);

deci: $p \approx 0,21$.

Dacă, pentru același calcul, se folosesc diviziunile inferioare, se vede că diviziunea 6,48 a rigletei este în afara riglei. Se aduce în acest caz valoarea 10 de pe rigletă să corespundă cu 3,25 de pe riglă; se citește pe riglă, corespunzător lui 6,48, produsul 21,1.

10.5.10 Împărțirea

Fie: să se calculeze cîțul $q = \frac{0,1244}{23,47}$; se trece la cîțul;

$$q' = \frac{12,44}{2,347} \quad (q = q' \times 10^{-3}).$$

Se caută pe riglă (diviziunile superioare) deîmpărțitul 12,44 și pe rigletă împărțitorul 2,347, și se aduc cele două diviziuni să coincidă. Se caută la ce diviziune a riglei corespunde originea rigletei. Se găsește: $q' \approx 5,3$; de unde se deduce: $q \approx 0,0053$.

Făcînd operațiunea cu diviziunile inferioare, se observă că originea rigletei este în afara riglei. Cîțul se citește la suprapunerea cu diviziunea 10 a rigletei.

10.5.11 A patra proporțională

Rigla de calcul permite, printr-o singură operație, să se găsească cel de al patrulea proporțional a trei numere date.

Într-adevăr, rigleta fiind plasată de o oarecare manieră, adică x și y două numere citite pe rigletă și X, Y , numerele corespunzătoare de pe riglă.

Avem: $\log X - \log Y = \log x - \log y$.

deci: $\frac{X}{Y} = \frac{x}{y}$.

Fie deci să calculăm pe x definit prin:

$$x = \frac{7,25 \times 312}{12,43}, \quad \text{sau: } \frac{7,25}{12,34} = \frac{x}{312}$$

se va calcula x' astfel ca:

$$\frac{7,25}{12,43} = \frac{x'}{3,12} \quad (x = 100 \ x').$$

Se face să coincidă 12,45 de pe riglă cu 3,12 de pe rigletă. Se citește pe riglă 1,81 în fața lui 7,25. Avem deci: $x \approx 181$.

10.5.12 Alte operații

1. Rezultă din însăși construirea diviziunilor inferioare că un număr n citit pe diviziunea inferioară corespunde numărului n^3 citit pe diviziunea superioară.

Rigla de calcul permite deci calcularea imediată a pătratului unui număr și, invers, extragerea unei rădăcini pătrate. (Atenție la deplasarea virgulelor; trebuie să avem grijă să înmulțim sau să împărțim cu o putere pară a lui 10).

2. Notițele dau, în general, indicații pentru :

calculul cuburilor și rădăcinilor cubice ;

calculul logaritmului unui număr dat ;

calculul sinusului și al tangentei unui unghi ascuțit dat.

Anumite numere remarcabile, ca de exemplu π , sînt indicate cu precizie.

Un cursor mobil ușurează citirile de pe rigla de calcul.

EXERCITII

Să se calculeze cu ajutorul riglei de calcul :

10.59 $1,17 \times 2,8$; $4,65 \times 3,28$; $7,42 \times 48,5$.

10.60 $0,0428 \times 72,5$; $0,00632 \times 7,27$.

10.61 $\frac{23,5}{2,6}$; $\frac{358,4}{0,24}$; $\frac{0,3673}{7,3}$.

10.62 $\frac{3,5 \times 2,6}{3}$; $\frac{356 \times 0,44}{6,2}$; $\frac{0,08 \times 0,29}{0,73}$.

10.63 $(2,8)^3$; $(7,56)^3$; $(13,5)^3$.

10.64 $\sqrt{8}$; $\sqrt{13,2}$; $\sqrt{2,864}$.

10.65 $\sqrt[3]{13}$; $\sqrt[3]{28,8}$; $\sqrt[3]{3,976}$.

10.6 CALCULUL LA MAȘINĂ.

NOȚIUNI DE PROGRAMARE

10.6.1 Mașinile de calculat

Calculul numeric „cu mîna” devine tot mai greoi dacă se abordează probleme de un grad puțin mai complex. Unele calcule sînt atît de complicate și atît de lungi încît sînt imposibil de realizat de un om și chiar de o echipă de matematicieni. Astfel s-au folosit mașini de calcul, pe care tehnica modernă le-a dezvoltat într-un mod extraordinar. Există astăzi mașini de putere și complexitate foarte diversă. Dar, ori care ar fi capacitățile mașinii, esențialul muncii se face de către cel ce o folosește. Mașina scutește omul de facerea unor muncii plictisitoare, dar nu ar ști în nici un caz să-l înlocuiască, cel puțin în actuala ei stare, în ceea ce privește concepția și organizarea calculului.

Cele mai simple mașini sînt mașinile de birou, capabile să efectueze operații elementare. Funcționarea lor diferă după model și este prezentată prin instrucțiuni de întrebuințare. Dacă întrebuințarea unor astfel de mașini necesită o organizare prealabilă a calculelor în cazurile cele mai complicate, această organizare poate fi mai puțin strict studiată față de cazul mașinilor cu program, deoarece operatorul controlează toate etapele calculului și ia în fiecare moment deciziile ce se impun. Mașina este redusă aici la un simplu rol auxiliar, același, dar mai rapid și mai eficient, cu rolul pe care îl joacă creionul sau hîrtia atunci cînd operatorul calculează el însuși rezultatele.

Cu totul altul este obiectivul „mașinilor cu program”, numite adesea *ordina-toare*. Aceste mașini sînt capabile nu numai de a efectua operații aritmetice, ci și operații logice. Ele sînt destinate să efectueze calcule complexe conținînd date foarte numeroase și care necesită un număr de operații extrem de ridicat. Pentru ca aceste calcule să poată fi bine conduse, este indispensabil ca fiecare operație elementară să fie efectuată foarte rapid și ca înlănțuirea operațiilor să se facă foarte repede. Or, intervenția omului în cursul calculului constituie un factor de încetinire. Scopul programării este deci de a evita intervenția omului în timpul calculului. Pentru aceasta, este necesar ca desfășurarea calculului să fie prevăzută în cele mai mici detalii, să fie transmisă mașinii și ca aceasta să fie în măsură să efectueze lucrul comandat. Con-

strucția și punerea la punct a mașinilor (*hard-ware*) sînt de domeniul tehnicii; utilizarea mașinii și organizarea calculelor (*software*) sînt de domeniul matematicilor și logicii.

Caracteristica esențială a unui ordinator este posibilitatea de a trata rapid o cantitate importantă de informații. Folosirea ordina-toarelor nu este rezervată rezolvării probleme-lor matematice : ele s-au dovedit utile în toate științele, inclusiv științelor umaniste.

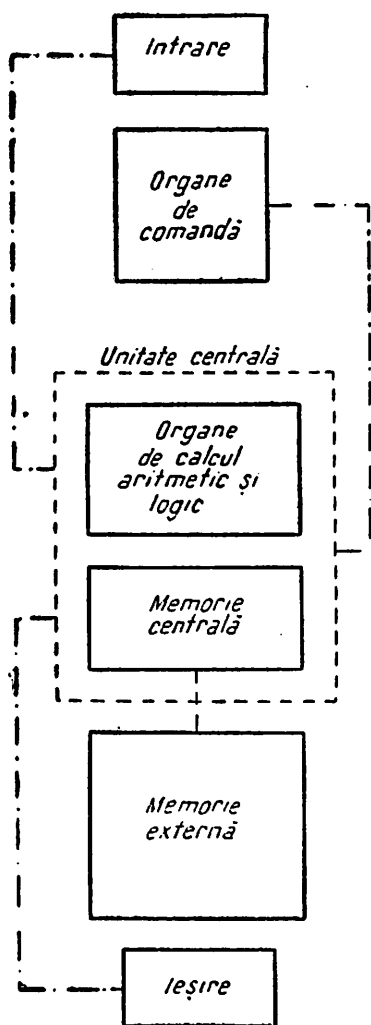


Fig. 11

10.6.2 Schema generală de structură

Un ordinator are mai multe tipuri de dispo-zitive (fig. 11).

1. Dispozitive de intrare și ieșire

Rolul dispozitivelor de intrare este citirea in-formațiilor, programelor și datelor furnizate mașinii sub formă codificată.

Rolul dispozitivelor de ieșire este de a da, cel mai adesea sub formă codificată, rezultatele parțiale sau definitive ale problemei tratate. Suporturile pe care informația este transmisă sub formă codificată sînt foarte diverse. Prin-tre cele mai cunoscute, cităm : cartelele perfo-rate, benzile magnetice, benzile imprimate, etc.

2. Dispozitive de comandă.

Aceste dispozitive sînt destinate să comande, începînd cu programul recepționat, buna func-tionare a mașinii, să organizeze și să coordo-neze operațiile de rezolvare.

3. Dispozitive de memorie.

Aceste dispozitive sînt destinate să înmagazineze informațiile (datele, programele, rezultatele parțiale). Există o *memorie centrală*, direct legată de elementele de calcul și *memorii periferice*, mai puțin rapid accesibile, dar care evită încărcarea memoriei centrale atunci cînd numărul de date este extrem de important (date de tip statistic). O memorie este împărțită în mai multe blocuri (registre) care sînt reperate prin „adresa lor”.

4. Dispozitive de calcul aritmetic și logic.

Scopul acestor dispozitive este de a efectua operațiile aritmetice și logice necesare pentru rezolvarea problemei, așa cum sînt indicate în program, comandate și ordonate prin dispozitivul de comandă.

10.6.3 Programarea

Scopul programării este de a obține un șir ordonat (secvență) de instrucțiuni rezumînd într-un „limbaj” accesibil mașinii, diferitele operații ce intervin în calcul. Este important să nu se subînțeleagă nici o operație, oricît de elementară ar fi, dacă nu, riscul de a vedea mașina oprindu-se în timpul lucrului este mare, sau de a avea rezultate eronate. Un program este desigur finalizarea unui întreg studiu cu privire la o problemă în general destul de complexă. În acest studiu convenim să distingem mai multe faze.

I. PRIMA FAZĂ. — *Studiul teoretic al problemei.*

1°. Prima demarare atunci cînd se abordează o problemă, fie ea simplă sau complexă, este de a defini cît mai complet și detaliat problema pusă și datele de care dispunem.

2°. În fine, urmează *faza de analiză a problemei*. În general, fiind dată o problemă, există mai multe metode matematice, care permit să o abordăm. Primul scop al analizei problemei este de a alege un model matematic care să permită abordarea și rezolvarea problemei. Această alegere poate constitui o problemă pentru un studiu ulterior.

Modelul fiind ales, există încă multe posibilități în alegerea procedurii de rezolvare (un astfel de procedeu este numit un *algoritm*). Se defalcă apoi metoda aleasă într-o suită de operații elementare cărora li se precizează legătura logică reciprocă.

Exemplu. Pentru a calcula valoarea unui polinom de gradul n :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

există mai multe metode. Un procedeu cunoscut constă în a calcula $P(x)$ sub forma:

$$P(x) = [(a_nx + a_{n-1})x + a_{n-2}]x + \dots$$

Acest procedeu conduce calculul la o suită de operații foarte simple.

3°. Analiza problemei conduce deci la un algoritm de rezolvare, căruia se convine să i se facă un plat detaliat în care apar operațiile esențiale, comparațiile și alegerile, legăturile logice între diversele etape de calcul. Acest plan detaliat este ceea ce numim o *organigramă*. Această primă organigramă detaliază cu precizie metoda ce urmează a fi folosită în rezolvare. Ea este adesea numită *organigramă de principiu*.

O organigramă se prezintă sub forma unei succesiuni de despărțituri de forme diverse, după operația pe care o simbolizează, legate printr-un traseu ce indică relațiile care există între diversele etape de calcul.

Principalele etape de reprezentat într-o organigramă, sînt:

- operațiile de efectuat asupra datelor, pe care le vom înscris într-un dreptunghi;
- comparațiile de făcut, pe care le vom înscris într-un oval. Astfel de comparații condiționează alegerea în continuare a lucrului. O astfel de alegere este indicată printr-o bifurcare în traseul organigramei. Diversele ramuri ale organigramei se regroupează destul de des, după necesitățile organizării calculului.

Exemplu. Figura 12 prezintă o organigramă posibilă pentru calculul rădăcinilor unei ecuații de gradul doi, definită pe $\mathbb{R}$, printr-o relație de forma $ax^2 + bx + c = 0$. Se pot concepe asupra acestui subiect și alte forme de organigrame, în particular dacă dorim să distingem cazul rădăcinilor duble sau să înscriem rădăcinile imaginare sub o altă formă.

Se întîmplă frecvent că același calcul trebuie repetat de mai multe ori. În acest caz, faza corespunzătoare nu se scrie decît o singură dată, și se indică pe organigramă că, calculul trebuie efectuat de mai multe ori, precum și numărul de repetări.

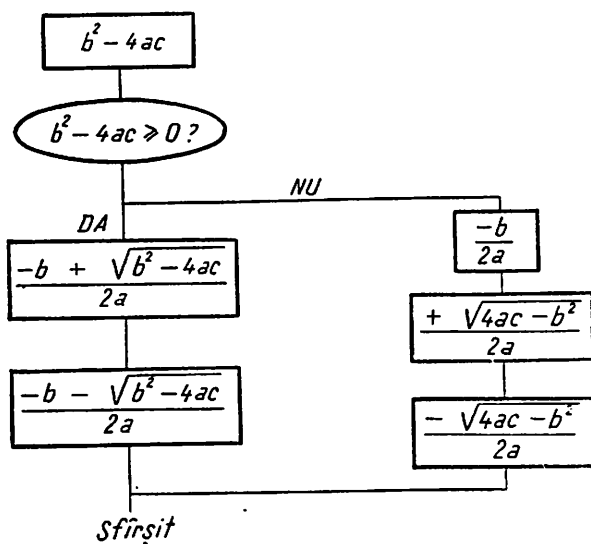


Fig. 12

Exemplu. Figura 13 prezintă o organigramă posibilă pentru calculul numărului $n!$. Traseul brațului „da” indică că, calculul trebuie reluat din punctul A. Se spune obișnuit că s-a realizat o buclă.

Observație. — În loc de a nota „ k este înlocuit cu $k + 1$ ” se scrie uneori, desigur în mod abuziv, mențiunea „ $k = k + 1$ ” care nu este decît o simplă notație simbolică.

2 FAZA A DOUA. — *Tra-ducerea studiului precedent în limbaj înțeles de mașină.*

■ **Redactarea unei orga-nigrame-mașină.**

Plecînd de la organigrama de principiu, se redactează o organigramă extrem de

detaliată care se ocupă foarte amănunțit de posibilitățile mașinei folosite. Ordinatorul lucrează în general pe o „secvență” de instrucțiuni (un șir ordonat). În cazul în care organigrama de principiu comportă bifurcări, se convine să se întoarcă la un șir de instrucțiuni prin utilizarea unui „salt condiționat” sau a unui „salt necondițional”.

Organigrama-mașină trebuie să fie foarte detaliată. Ea trebuie să prevadă, ținând seama de posibilitățile mașinii, fazele de tratare, introducerile de date, extragerea de rezultate, eventual reîntoarcerea la începutul programului și modul cum ar putea să îl refolosească cu noile date. De asemenea trebuie ca niciodată să nu se propună mașinii operații imposibile, care ar opri funcționarea (de exemplu: împărțirea prin zero).

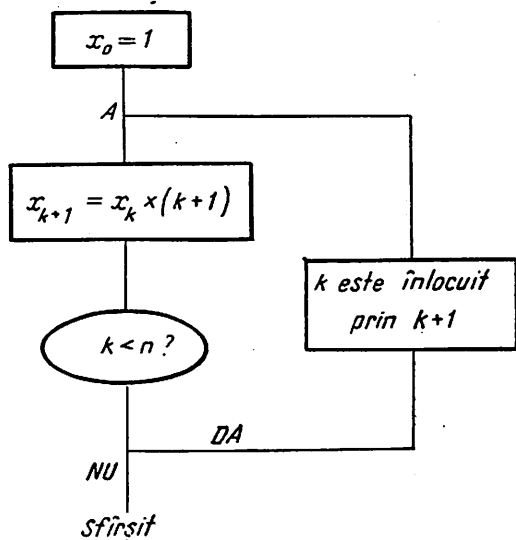


Fig. 13

Exemple. Figurile 14 și 15 prezintă organigrame-mașină posibile în legătură cu exemplele date în prima fază. Am simbolizat arbitrar introducerea de date printr-un semicerc și extragerea de rezultate printr-un triunghi.

Dintre toate organigramele-mașină posibile plecând de la organigrama de principiu, este de dorit să se aleagă aceea care reduce la minimum importanța fazelor de tratare, adică lungimea (deci și prețul) programului. În cursul acestei faze, este util să se prevadă în care dintre registrele de memorie ale mașinii vor fi stocate datele și rezultatele, parțiale și definitive.

■ Redactarea programului.

Organigrama-mașină trebuie tradusă acum într-un șir ordonat (secvență) de instrucțiuni codificate, direct asimilabile de mașină. Există numeroase tipuri de limbaje simbolice, divers adaptate și evaluate.

O instrucțiune comportă teoretic, în general:

- 1° O adresă a instrucțiunii (codificarea instrucțiunii).
- 2° Un cod simbolizând operația de efectuat.
- 3° Adrese (care constau dintr-o codificare a registrului de memorie în care se găsesc informațiile privitoare la problemă):
 - a) adresa primului termen;
 - b) adresa celui de al doilea termen;
 - c) adresa rezultatului;
 - d) adresa instrucțiunii care urmează.

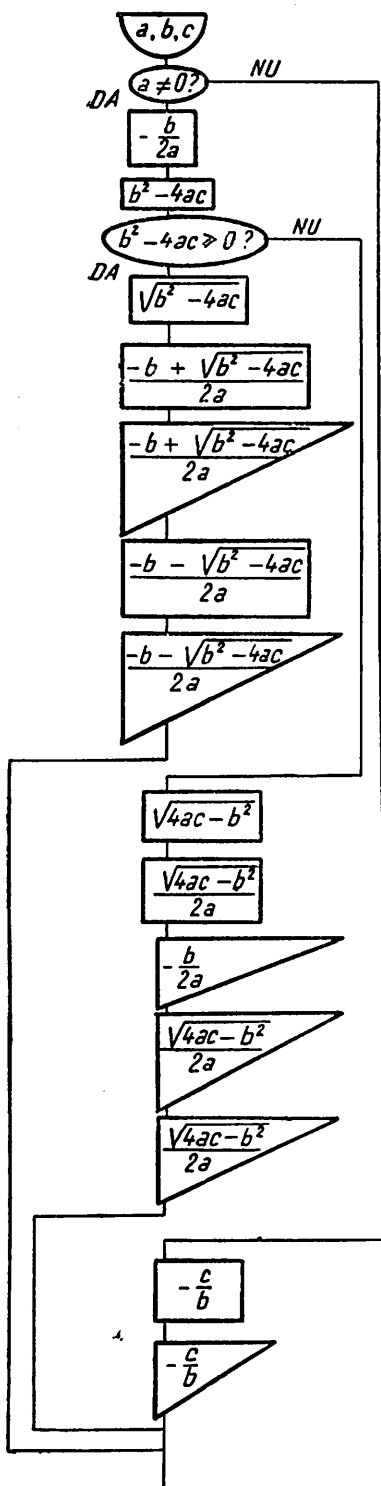


Fig. 14

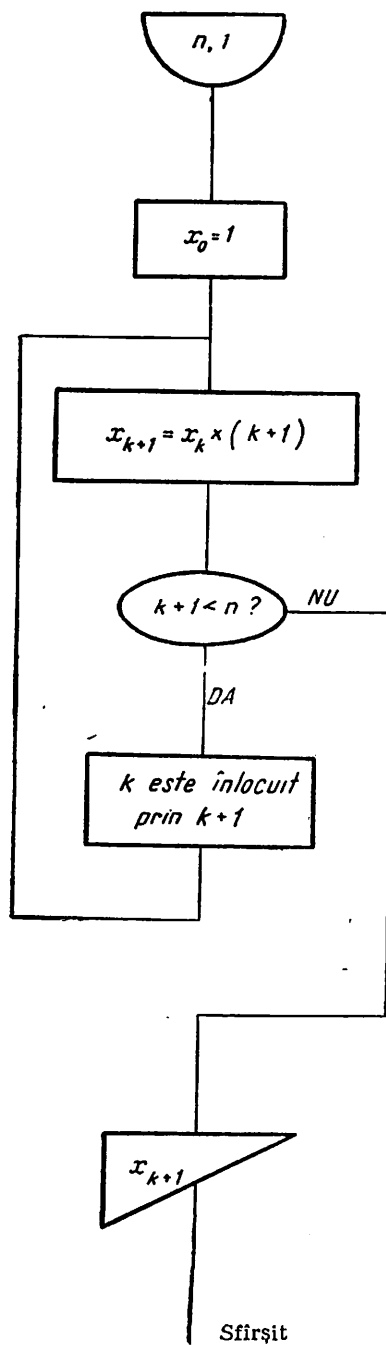


Fig. 15

În anumite mașini, unele dintre primele trei adrese sînt implicate, anumite registre comportînd întotdeauna același mod operant sau rezultat. Adresa instrucțiunii următoare este de asemenea implicită, cînd această instrucțiune urmează imediat în ordinea de redactare a programului. Ea este din contră explicită în cazul instrucțiunilor „de salt”.

■ **Principalele instrucțiuni sînt:**

1° *Instrucțiuni aritmetice* care dau ordinatorului funcția sa de calcul. Ele pot fi diverse. În principal, ele sînt cele care realizează cele patru operații elementare (+, -, ×, :), dar unele mașini au și altele, care pot fi foarte diverse după utilizarea prevăzută pentru mașină.

2° *Instrucțiuni de transfer* care servesc la schimbarea unei informații din registrul de memorie.

3° *Instrucțiuni de serviciu* (intrări, ieșiri, ...).

4° *Instrucțiuni logice*. Printre ele se găsesc comparațiile care condiționează înlănțuirea calculelor și care sînt natural combinate cu operațiuni de salt.

5° *Instrucțiuni de înlănțuire*. Ele sînt de două tipuri:

- a) *Salt necondiționat*; permite trecerea de la o instrucțiune oarecare la alta, care nu este următoarea în ordine secvențială, a cărei adresă este deci dată;
- b) *Salt condiționat*; la care avem de ales între două posibilități în vederea continuării programului și la care mașina face alegerea constatînd dacă una din condiții este sau nu este îndeplinită.

Exemplu. Considerăm o mașină fictivă, concepută în felul următor:

- a) Există trei registre operatorii, de adrese respective X, Y, Z . Registrul X este cel al primului operand, Y al celui de-al doilea și Z al rezultatului. Aceasta face implicate trei din cele patru adrese necesare unei instrucțiuni aritmetice.
- b) Între altele, X este registrul de intrare; aceasta înseamnă că orice dată este introdusă în X și că este necesară o instrucțiune de transfer pentru a trece aceste date într-un registru diferit.
- c) Există pe de altă parte mai multe registre de memorie (vom lua în mod arbitrar, cinci) a căror adrese respective sînt A, B, C, D, E .
- d) În scopul de a simplifica programarea, presupunem că sînt posibile toate transferurile (ceea ce nu este cazul totdeauna). Presupunem de asemenea că există toate instrucțiunile combinate de forma $\alpha * \beta$, în care:

$$\alpha \in \{A, B, C, D, E\},$$

$$\beta \in \{A, B, C, D, E\},$$

$$* \in \{+, \times, :, -\}.$$

Instrucțiunea $\alpha * \beta$ combină:

1° transferurile $\alpha \rightarrow X$ și $\beta \rightarrow Y$;

2° operația $X * Y$ a cărui rezultat merge în Z .

e) Presupunem printre altele că toate comparațiile pot să se facă asupra conținutului tuturor registrelor. Dacă condiția precizată nu este îndeplinită, instrucțiunea următoare este cea care urmează în ordine secvențială. Dacă ea este îndeplinită, instrucțiunea precizează adresa instrucțiunii următoare.

Vom simboliza, în cele două exemple pe care le-am dezvoltat în acest paragraf, instrucțiunile ce permit realizarea calculului, în fața, vom înscrie starea diferitelor registre ale memoriei în același timp în care sînt astfel definite diferitele codificări ale limbajului, sînt stabilite programele ce permit pe mașina noastră fictivă, calculul rădăcinilor ecuației definite pe $\mathbb{R}$ prin $ax^2 + bx + c = 0$ (exemplul I) și calculul lui $n!$ (exemplul II). Programul figurează în coloana numită „cod”.

Observație. — Pentru simplificare, în cazul rădăcinilor unui polinom de gradul doi, am presupus că b este nul.

#° instruc- țiunii		instrucțiunea		cod	starea registrelor							
					X	Y	Z	A	B	C	D	E
1	Începutul progr.	D										
2	Introducerea lui a	I			a			a				
3	Transfer	$X \rightarrow A$			a			a				
4	Introducerea lui b	I			b			a	b			
5	Transfer	$X \rightarrow B$			b			a	b			
6	Introducerea lui c	I			c			a	b	c		
7	Transfer	$X \rightarrow C$			c			a	b	c		
8	Verific. (salt cond.)	$A=0 \rightarrow \alpha$			c			a	b	c		
9	Calcul lui 2a	$A + A$		a	a		2a	a	b	c	2a	0
10	Transfer	$Z \rightarrow D$		a	a		2a	a	b	c	2a	0
11	{	$E - E$		a	0		0	a	b	c	2a	0
12		$Z \rightarrow E$		b	0		-b	a	b	c	2a	0
13		$E - E$		0	b		-b	a	b	c	2a	0
14	Calculul lui $-\frac{b}{2a}$	$Z : D$		-b	2a		$-\frac{b}{2a}$	a	b	c	2a	0
15	Transfer	$Z \rightarrow A$		-b	2a		$-\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	b	c	2a	0
16		$B \times B$		b	b		b^2	$-\frac{b}{2a}$	b	c	2a	0
17		$Z \rightarrow E$		b	b		b^2	$-\frac{b}{2a}$	b	c	2a	b^2
18		$D \times C$		2a	c		2ac	$-\frac{b}{2a}$	b	c	2a	b^2
19		$Z + Z$		2ac	2ac		4ac	$-\frac{b}{2a}$	b	c	2a	b^2
20		$E - Z$		b^2	4ac		$b^2 - 4ac$	$-\frac{b}{2a}$	b	c	2a	b^2
21	Salt conditional	$Z < 0 \rightarrow \beta$		b^2	4ac		$b^2 - 4ac$	$-\frac{b}{2a}$	b	c	2a	b^2
22		$Z \sqrt{\quad}$					$\sqrt{b^2 - 4ac}$	$-\frac{b}{2a}$	b	c	2a	b^2
23		$Z : D$		$\sqrt{b^2 - 4ac}$	2a		$\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	b	c	2a	b^2

24	$Z \rightarrow E$	$\sqrt{b^3 - 4ac}$	$\frac{2a}{\sqrt{b^3 - 4ac}}$	$\frac{\sqrt{b^3 - 4ac}}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	c	$2a$	$\frac{\sqrt{b^3 - 4ac}}{2a}$
25	$A + E$	$-\frac{b}{2a}$	$\frac{\sqrt{b^3 - 4ac}}{2a}$	$-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^3 - 4ac}}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	c	$2a$	$\frac{\sqrt{b^3 - 4ac}}{2a}$
26	$Z \diamond$								
27	$A - E$	$\frac{b}{2a}$	$\frac{\sqrt{b^3 - 4ac}}{2a}$	$-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^3 - 4ac}}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	c	$2a$	$\frac{\sqrt{b^3 - 4ac}}{2a}$
28	$Z \diamond$								
29	Salt necondiționat $\rightarrow \gamma$								
30	Destinația saltului β	b^3	$4ac$	$b^3 - 4ac$	$-\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	c	$2a$	b^3
31		b^3	$4ac$	$b^3 - 4ac$	$-\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	c	$2a$	b^3
32	$E - E$	b^3	b^3	0	$-\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	c	$2a$	b^3
33	$Z \rightarrow E$	b^3	b^3	0	$-\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	c	$2a$	0
34	$E - B$	0	$b^3 - 4ac$	$4ac - b^3$	$-\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	c	$2a$	0
35	$Z \sqrt{\quad}$			$\sqrt{4ac - b^3}$	$-\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	c	$2a$	0
36	$Z : D$	$\sqrt{4ac - b^3}$	$2a$	$-\frac{\sqrt{4ac - b^3}}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	c	$2a$	0
37	Rezultat (parte reală)								
38	$A \diamond$ $Z \diamond$								
39	$E - Z$	0	$\frac{\sqrt{4ac - b^3}}{2a}$	$-\frac{\sqrt{4ac - b^3}}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	c	$2a$	0
40	$Z \diamond$								
41	Salt necondițional $\rightarrow \gamma$	c	b	$\frac{c}{b}$	0	0	c		
42	Destinația saltului α	c	b	$\frac{c}{b}$	0	0	c		
43		0	$\frac{c}{b}$	$-\frac{c}{b}$	0	0	c		
44	$A - Z$								
45	$Z \diamond$								
46	γ								
47	Destinația saltului Sfârșit								

Instrucțiunea	cod	starea registrelor							
		X	Y	Z	A	B	C	D	E
Început	D	"							
Introducerea lui n	I	"			"				
Transfer	$X \rightarrow A$	"			"				
Introducerea lui I	A : A	"	"	1	"	1			
Transfer	$Z \rightarrow B$	"	"	1	"	1	1		
$n_0 = 1$	$B \rightarrow C$	"	"	1	"				
{	D - D			0					
	$Z \rightarrow D$				"	1	1	0	
	β				"	1	n_h	h	
	D + B	h	1	$h + 1$	"	1	n_h	h	
Destinația saltului (bucle)	$Z \rightarrow D$	h	1	$h + 1$	"	1	n_h	$h + 1$	
	$C \times D$	n_h	$h + 1$	$n_h + 1$	"	1	n_h	$h + 1$	
	$Z \rightarrow C$	n_h	$h + 1$	$n_h + 1$	"	1	$n_h + 1$	$h + 1$	
	D - A	$h + 1$	"	$h + 1 - n$	"	1	$n_h + 1$	$h + 1$	
Salt condițional	$Z \geq 0 \rightarrow \alpha$								
Salt necondițional	$\rightarrow \beta$								
(Începutul buclei)									
Destinația saltului	α	"	"	0	"	1	$n!$	"	
Rezultat	C $\diamond$								
	F								

11. FUNCȚII UZUALE

REZUMAT. PROBLEME

11.1 Progresii

11.2 Funcții putere. Polinoame și funcții raționale

11.3 Funcții circulare

11.4 Funcții logaritmice și exponențiale

11.5 Reguli de derivare

11.6 Principalele metode de integrare

11.7 Probleme

Ne-am gândit că va fi util să reunim într-un singur capitol rezultatele principale privind funcțiile uzuale, întâlnite în curs.

11.1 PROGRESII

11.1.1 Progresii aritmetice

Fie (u_n) o progresie aritmetică de rație r și u_1 , primul termen.
Avem:

$$1 \quad u_n = u_{n-1} + r.$$

2 Progresia (u_n) este crescătoare dacă r este pozitiv, descrescătoare dacă r este negativ și staționară dacă r este nul.

$$3 \quad \sum_{i=1}^n u_i = \frac{n}{2} (u_1 + u_n) = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2} r.$$

11.1.2 Progresii geometrice

Fie (u_n) o progresie geometrică de rație q și u_1 , primul termen.
Avem:

$$1 \quad u_n = qu_{n-1}.$$

2 $q > 1 \Rightarrow (u_n)$ crescătoare dacă $u_1 > 0$, descrescătoare dacă $u_1 < 0$;
 $q = 1 \Rightarrow (u_n)$ staționară;

$1 > q > 0 \Rightarrow (u_n)$ descrescătoare dacă $u_1 > 0$, crescătoare dacă $u_1 < 0$;
 $q = 0 \Rightarrow (u_n)$ staționară;
 $q < 0 \Rightarrow (u_n)$ alternantă.

3 Dacă $u_1 = 0$, (u_n) staționară.

$$4 \quad S_n = \sum_{i=1}^n u_i = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

5 $|q| < 1 \Rightarrow (u_n)$ și (S_n) convergentă;
 $q = 1 \Rightarrow (u_n)$ convergentă și (S_n) divergentă.

11.2 FUNCȚII PUTERE. POLINOAME ȘI FUNCȚII RAȚIONALE

11.2.1 Funcții putere. Exponenți întregi

$$f_n = [x \mapsto x^n], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

■ 1° $n > 0$.

- a) f_n este definită și continuă pe $\mathbb{R}$;
- b) f_n este crescătoare pe $\mathbb{R}^+$;
- c) f_n este crescătoare pe $\mathbb{R}^-$ dacă n este impar;
 f_n este descrescătoare pe $\mathbb{R}^-$ dacă n este par.

2° $n = 0$.

- a) f_n este definită și continuă pe $\mathbb{R}^*$ (0^0 nu este definit);
- b) $\forall_{\mathbb{R}^*} x \quad x^0 = 1$.

3° $n < 0$.

a) $f_n = \frac{1}{f_{-n}};$

- b) f_n este definită și continuă pe $\mathbb{R}^*$;
- c) f_n este descrescătoare pe $\mathbb{R}^{++}$;
- d) f_n este descrescătoare pe $\mathbb{R}^{-*}$ dacă n este impar;
 f_n este crescătoare pe $\mathbb{R}^{-*}$ dacă n este par.

■ $\forall_{\mathbb{Z}} n \quad f'_n = n f_{n-1};$

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}.$$

■ a) $\forall_{\mathbb{Z} - \{-1\}} n \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$

b) $\int \frac{dx}{x} = \text{Log } |x| + C.$

11.2.2 Funcții putere. Exponenți raționali

Funcția f_n , fiind monotonă și continuă pe $\mathbf{R}^+$ admite o funcție reciprocă, funcția „rădăcină a n -a”, notată cu $f_{\frac{1}{n}}$. Avem:

$$f_{\frac{1}{n}}(x) = \sqrt[n]{x};$$

$$f_{\frac{1}{n}}(x) = \frac{1}{f_{-\frac{1}{n}}}.$$

Dacă α este un număr rațional pozitiv, de exemplu $\alpha = \frac{p}{q}$, în care p și q sînt întregi pozitivi, avem:

$$f_{\alpha}(x) = x^{\alpha} = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}.$$

1° $\alpha > 0$.

- a) f_{α} este definită și continuă pe $\mathbf{R}^+$ și ia valori în $\mathbf{R}^+$;
- b) f_{α} este crescătoare pe $\mathbf{R}^+$;
- c) $\lim_{+\infty} f_{\alpha} = +\infty$.

2° $\alpha < 0$.

- a) f_{α} este definită pe $\mathbf{R}^{+*}$ și ia valori în $\mathbf{R}^{+*}$;
- b) $f_{\alpha} = \frac{1}{f_{-\alpha}}$;
- c) f_{α} este descrescătoare pe $\mathbf{R}^{+*}$;
- d) $\lim_{+\infty} f_{\alpha} = 0$,
 $\lim_0 f_{\alpha} = +\infty$.

OBSERVAȚIE. — Este important să se insiste asupra faptului că funcția f_{α} nu este definită decît pe $\mathbf{R}^+$.

Se notează uneori $-2 = \sqrt[3]{-8}$. Această notație trebuie înlăturată căci atunci vom avea succesiv:

$$-2 = -8^{\frac{1}{3}} = -8^{\frac{2}{6}} = 2;$$

(înr-adevăr, $\frac{1}{3}$ și $\frac{2}{6}$ reprezintă același număr rațional).

■ $\forall \alpha$

$$f'_{\alpha} = \alpha f_{\alpha-1};$$

$$\frac{dx^{\alpha}}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

$$\blacksquare \text{ a) } \forall \alpha \neq -1 \quad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;$$

$$\text{b) } \int \frac{dx}{x} = \text{Log } |x| + C.$$

11.2.3 Funcții putere. Exponenți reali

Fie α un număr real oarecare.

Avem: $x^\alpha = e^{\alpha \text{Log } x}.$

Funcția putere $[x \mapsto x^\alpha]$ este definită pe $\mathbf{R}^{++}$. Pe de altă parte:

$$\forall_{\mathbf{R}^{++} \times \mathbf{R}} \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

1.2.4 Funcții polinom. Funcții raționale

O funcție P definită pe $\mathbf{R}$ cu valori în $\mathbf{R}$ este o funcție polinom de gradul n dacă există $n+1$ numere reale $a_0, a_1, \dots, a_n$, cu a_n diferit de zero, astfel ca:

$$\forall_{\mathbf{R}} x \quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n;$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i x^i.$$

P este o combinație liniară de un număr finit de funcții putere (exponenți întregi naturali).

a) Funcția P este definită pe $\mathbf{R}$.

$$\text{b) } P'(x) = \sum_{i=1}^{i=n} i a_i x^{i-1}.$$

$$\text{c) } \int P(x) dx = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + K.$$

$\blacksquare$ O funcție rațională F este raportul a două funcții polinoame P și Q :

$$F = \frac{P}{Q}.$$

a) Funcția F este definită pe mulțimea numerelor reale care nu anulează polinomul Q .

$$\text{b) } \text{Avem: } F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

c) Pentru a găsi primitivele unei funcții raționale, ne întoarcem mai întâi, prin împărțire euclidiană, la cazul în care gradul numărătorului este inferior gradului numitorului. Apoi, descompunem fracția obținută, într-un număr de fracții de forma:

$$\frac{A}{(x-a)^k} \text{ sau } \frac{Bx+C}{(x^2+ax+\beta)^k},$$

a căror primitive se studiază succesiv. Această cercetare sistematică este în afara programei, dar poate fi întâlnită în unele cazuri simple pentru care enunțul indică drumul de urmat.

11.3 FUNCȚII CIRCULARE

11.3.1 Formule fundamentale

■ RELAȚII FUNDAMENTALE

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

■ NUMERE ASOCIATE

$$\sin(-x) = -\sin x; \quad \sin(\pi - x) = \sin x; \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x; \quad \cos(\pi - x) = -\cos x; \quad \cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

■ FORMULE DE ADUNARE ȘI CONSECINȚE

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

11.3.2 Diferențiale. Primitive

$$d(\sin x) = \cos x dx = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) dx;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + K = \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + K;$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) dx;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + K = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + K;$$

$$d(\operatorname{tg} x) = (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \frac{1}{\cos^2 x} dx;$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\operatorname{Log} \cos x + K;$$

$$d(\operatorname{cotg} x) = (-1 - \operatorname{cotg}^2 x) dx = -\frac{1}{\sin^2 x} dx;$$

$$\int \operatorname{cotg} x dx = \operatorname{Log} |\sin x| + K.$$

11.3.3 Funcții circulare inverse

$$a) y = \operatorname{Arc} \sin x \Leftrightarrow x = \sin y \text{ și } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right];$$

$$d(\operatorname{Arc} \sin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$b) y = \operatorname{Arc} \cos x \Leftrightarrow x = \cos y \text{ și } y \in [0, \pi];$$

$$d(\operatorname{Arc} \cos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$c) y = \text{Arc tg } x \Leftrightarrow x = \text{tg } y \text{ și } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$d(\text{Arc tg } x) = \frac{1}{1+x^2} dx.$$

$$d) y = \text{Arc cotg } x \Leftrightarrow x = \text{cotg } y \text{ și } y \in [0, \pi];$$

$$d(\text{Arc cotg } x) = -\frac{1}{1+x^2} dx.$$

11.4 FUNCȚII LOGARITMICE ȘI EXPONENȚIALE

11.4.1 Funcții logaritmice neperiene

$$\text{Log } x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (= \ln x).$$

a) Funcția Log este definită și continuă pe $\mathbf{R}^{+*}$. Ea este crescătoare

$$\text{Log } 1 = 0;$$

$$\text{Log } e = 1; e \approx 2,718\,281\,828.$$

$$b) \forall_{\mathbf{R}^{+*}} a; \forall_{\mathbf{R}^{+*}} b \quad \text{Log } ab = \text{Log } a + \text{Log } b;$$

$$\text{Log } \frac{a}{b} = \text{Log } a - \text{Log } b.$$

$$c) \lim_{+\infty} [x \mapsto \text{Log } x] = +\infty; \lim_0 [x \mapsto \text{Log } x] = -\infty;$$

$$\lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x} \right] = 0; \lim_0 [x \mapsto x \text{Log } x] = 0.$$

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \alpha; \forall_{\mathbf{R}^{+*}} \beta$$

$$\lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{(\text{Log } x)^\alpha}{x} \right] = 0; \lim_0 [x \mapsto x^\beta (\text{Log } x)^\alpha] = 0.$$

$$d) d(\text{Log } x) = \frac{dx}{x}.$$

$$e) \int \text{Log } x dx = x \text{Log } x - x + K.$$

11.4.2 Funcția exponențială [de bază e]

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \text{Log } y \text{ și } y \in \mathbf{R}^{+*}.$$

a) Funcția exponențială (de bază e) este definită și continuă pe $\mathbf{R}$. Ea este crescătoare.

$$e^0 = 1; e^1 = e.$$

$$b) \forall_{\mathbb{R}} a, \forall_{\mathbb{R}} b \quad e^{a+b} = e^a \cdot e^b;$$

$$(e^a)^b = e^{ab}.$$

$$c) \lim_{+\infty} [x \mapsto e^x] = +\infty;$$

$$\lim_{-\infty} [x \mapsto \text{Log } x] = 0;$$

$$\lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{e^x}{x} \right] = +\infty;$$

$$\lim_{-\infty} [x \mapsto xe^x] = 0;$$

$$\forall_{\mathbb{R}^{++}} \alpha, \forall_{\mathbb{R}^{++}} \beta$$

$$\lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{e^{\alpha x}}{x} \right] = +\infty;$$

$$\lim_{-\infty} [x \mapsto x^{\beta} e^{\alpha x}] = 0.$$

$$d) d(e^x) = e^x dx.$$

$$e) \int e^x dx = e^x + K.$$

11.4.3 Alte funcții logaritmice și exponențiale

$$a \in \mathbb{R}^{++} \quad \log_a x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a};$$

$$a^x = e^{x \text{Log } a}.$$

$$a) \log_a x = \log_b x \times \log_a b.$$

$$b) \log_{10} x = \log x (= \lg x) = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } 10} = M \text{Log } x,$$

$$\text{cu: } M = \frac{1}{\text{Log } 10} = \frac{\text{Log } e}{\text{Log } 10} = \log e.$$

$$c) d(\log_a x) = \frac{1}{x \text{Log } a} dx.$$

$$d) d(a^x) = (\text{Log } a) a^x dx.$$

11.5 REGULI DE DERIVARE

Fie f și g două funcții derivabile.

Avem:

$$\forall_{\mathbb{R}} \lambda, \forall_{\mathbb{R}} \mu \quad (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g';$$

$$(fg)' = fg' + f'g$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Dacă $f \circ g$ există:

$$(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g).$$

Dacă f^{-1} există:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

11.6 METODE PRINCIPALE DE INTEGRARE

Fie f și g două funcții integrabile.

Avem:

a) **Liniaritate.**

$$\forall \lambda; \forall \mu \quad \int (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx.$$

b) **Schimbare de variabilă.**

Dacă $f \circ g$ există:

$$\int (f \circ g)(x) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du. \quad (u = g(x)).$$

c) **Integrare prin părți.**

Fie G o primitivă a lui g .

Avem:

$$\int f(x) g(x) dx = f(x) G(x) - \int G(x) f'(x) dx;$$

$$\left(\int f dG = fG - \int G df \right).$$

PROBLEME

11.1 1° Să se studieze funcția f care, pentru x real, diferit de $+1$ și de -1 , asociază:

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Să se traseze curba reprezentativă Γ a lui f într-un reper ortonormat.

2° Să se demonstreze că $f(x)$ se poate scrie sub forma:

$$f(x) = \frac{m}{1+x} + \frac{n}{1-x},$$

m și n fiind două numere reale ce trebuie determinate.

Să se determine toate primitivale funcției f .

3° Se consideră funcția φ care, pentru orice număr real t aparținând intervalului $] -1 + 1[$, face să corespundă:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+t}{1-t} - t,$$

în care Log reprezintă logaritmul neperian.

a) Să se demonstreze că funcția φ este impară.

b) Să se calculeze numărul derivat $\varphi'(t)$. Studiați sensul variației lui φ .

c) Să se deducă că $\varphi(t)$ este de același semn cu t .

4° Pentru t aparținând intervalului $]0, +1[$, să se calculeze

$$F(t) = \int_0^t \frac{dx}{1-x^2}.$$

- a) Care este semnificația graficului lui $F(t)$?
- b) Care este numărul derivat, $F'(t)$ al funcției F de variabilă t ?
- Să se deducă sensul de variație a lui F , când t aparține intervalului: $[0, +1]$.
- c) Reperul este ortonormat. Fie C curba reprezentativă a funcției F , când t aparține intervalului $[0, +1]$. Să se utilizeze rezultatul din problema 3° (c) pentru a plasa curba C în raport cu prima bisectoare a reperului. Să se construiască curba C .
- 5° a) Să se justifice existența unei funcții inverse, F^{-1} , a funcției F , când t variază în intervalul $[0, +1]$.
- Să se construiască curba reprezentativă C' a lui F^{-1} în același reper ca și C .
- (Nu se va căuta să se explicitizeze $F^{-1}(t)$ în funcție de t .)
- b) Numerele reale a și b verifică următoarele inegalități:

$$0 \leq a < 1 \quad \text{și} \quad 0 \leq b < 1.$$

Se ia $c = \frac{a+b}{1+ab}$. Să se demonstreze că: $0 \leq c < 1$.

- c) Să se demonstreze că avem:

$$F(c) = F(a) + F(b). \quad (1)$$

- d) Să se demonstreze că pentru toate perechile de numere reale, pozitive (α, β) , avem:

$$F^{-1}(\alpha + \beta) = \frac{F^{-1}(\alpha) + F^{-1}(\beta)}{1 + F^{-1}(\alpha) \cdot F^{-1}(\beta)}. \quad (2)$$

(Bacalaureat D, Lille, Septembrie 1970)

- 11.2 Fie funcția f :

$$f = [x \mapsto f(x) = \text{Log}(x^x)],$$

în care Log reprezintă logaritmul neperian. Ea este definită pentru orice x real, nenul.

- 1° Să se studieze variația lui f și reprezentați-o grafic în raport cu un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie C curba reprezentativă.

- 2° Să se scrie ecuația tangentei la C în punctul E , având drept abscisă numărul e , baza logaritmilor neperieni.

- 3° Să se verifice dacă funcția F , definită prin:

$$F(x) = x \text{Log}(x^x) - 2x,$$

este o primitivă a funcției definite prin $f(x) = \text{Log}(x^x)$, în fiecare din intervalele în care ultima este definită.

- 4° Să se evalueze aria domeniului plan limitat prin axa absciselor, $x'x$, curba C și tangenta la C în E .

(Bacalaureat, Lyon 1969)

- 11.3 Să se calculeze, pentru x real, strict pozitiv, integrala definită:

$$\int_1^x \left(-\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Se consideră funcția f :

$$f = \left[x \mapsto \int_1^x \left(-\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt \right] \quad (x \in \mathbb{R}, x > 0).$$

- 1° Să se studieze sensul variației lui f . Construiți curba sa reprezentativă într-un reper ortonormat.

- 2° Să se studieze, utilizând ceea ce precede, sensul variației funcției g :

$$g = [x \mapsto e^{(1-x)\text{Log } x}] \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Să se precizeze limitele acestei funcții la extremități intervalului de definiție.

(Curba reprezentativă a funcției g nu a fost cerută).

(Bacalaureat C, Toulouse, Iunie 1970)

11.4 Spațiul E este raportat la un reper ortonormat de axe Ox, Oy, Oz .

Fie mulțimea de numere reale φ astfel ca: $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Fie R o constantă reală, strict pozitivă. Se consideră aplicația A a lui D în E care, pentru φ , face să corespundă punctul M de coordonate:

$$\begin{aligned}x &= R \cos^2 \varphi, \\y &= R \sqrt{2} \sin \varphi \cos \varphi, \\z &= R \sin^2 \varphi.\end{aligned}$$

1° a) Fie $\vec{V}$ vectorul de componente $(+1, 0, +1)$. Să se demonstreze că, oricare ar fi φ , avem $\vec{OM} \cdot \vec{V} = R$. Să se deducă că imaginea $A(D)$ a lui D prin A (adică mulțimea de imagini prin A a punctelor lui D) este conținută într-un plan P , pe care îl veți defini.

b) Să se demonstreze că $A(D)$ este de asemenea conținută în sfera S , cu centrul în O și de rază R .

c) Să se deducă din cele două rezultate precedente că $A(D)$ este conținut într-un cerc Γ , căruia i se notează centrul cu ω și raza prin R .

Să se demonstreze că aplicația lui D în Γ este injectivă. Precizați poziția lui ω . Să se determine R_1 în funcție de R . Faceți o figură.

2° Se consideră un punct M ale cărui coordonate x, y, z verifică:

$$\begin{cases}x + z = R, \\x^2 + y^2 + z^2 = R^2.\end{cases}$$

a) Să se demonstreze că avem:

$$0 \leq x \leq R \quad \text{și} \quad 0 \leq z \leq R.$$

b) Să se demonstreze că există, în general, două numere φ , elemente ale lui D , astfel că avem:

$$x = R \cos^2 \varphi \quad \text{și} \quad z = R \sin^2 \varphi.$$

c) Să se exprime pe y în funcție de φ .

d) Să se deducă că A aplică D pe Γ .

N.B. — Rezolvarea acestei probleme nu este neapărat necesară pentru ceea ce urmează.

3° Să se dea ecuația curbei γ , proiecția lui Γ pe planul xOy . Natura și reprezentarea lui γ într-un reper ortonormat al axelor Ox, Oy .

4° $M(\varphi)$ este un punct dat al lui Γ . Să se dea o reprezentare parametrică a tangentei Δ la Γ în punctul $M(\varphi)$. Să se exprime, în funcție de φ coordonatele x_G, y_G, z_G ale punctului G în care

Δ taie planul xOy . Cazul în care $\varphi = 0$. Cazul în care $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Planul P fiind orientat, dați o interpretare geometrică a parametrului, după ce ați remarcat că $y_G = R_1 \operatorname{tg} \varphi$.

(Bacalaureat F, Nice 1969)

11.5 A) Chestiuni preliminare.

$\operatorname{Log} x$ reprezentînd logaritmul neperian a lui x , se consideră funcțiile g și h care, pentru x real pozitiv, asociază:

$$g(x) = x \operatorname{Log} x \quad \text{și} \quad h(x) = x^2 \operatorname{Log} x.$$

Luînd $u = \frac{1}{x}$, să se determine limitele lui $g(x)$ și $h(x)$ cînd x tinde către 0.

B) Fie funcția f care, pentru x real pozitiv, asociază:

$$f(x) = 2(2 - \operatorname{Log} x).$$

Să se formeze intervalul valorilor lui x în care $f(x)$ este pozitiv sau nul și studiați variația lui f în acest interval. Se va preciza comportarea lui f și a derivatei sale f' , atunci cînd x tinde către zero.

Să se construiască reprezentarea grafică corespunzătoare într-un plan raportat la un reper ortonormat (unitate = 1 cm).

C) 1° Să se scrie derivata în raport cu t a lui:

$$Y = \frac{t^2}{2} \left(\operatorname{Log} t - \frac{1}{2} \right).$$

și să se deducă expresia, în funcție de x , a integralei:

$$I(x) = \int_x^{e^x} t (2 - \log t) dt.$$

Să se demonstreze că $I(x)$ tinde către o limită finită atunci când x tinde către zero. Ce reprezintă această limită pe reprezentarea grafică precedentă?

2° Să se exprime, în funcție de m și de x , integrala:

$$I_m(x) = \int_x^{e^m} t (m - \log t) dt.$$

Să se demonstreze că $I_m(x)$ tinde către o limită finită atunci când x tinde către zero. Pentru ce valoare a lui m , această limită este egală cu 1?

(Bacalaureat D, Nice 1970)

11.6 Fie C mulțimea de numere complexe și i numărul de modul 1 și argument $\frac{\pi}{2}$.

Se consideră aplicația lui $C - \{i\}$ către C definită prin:

$$f(z) = \frac{iz + 2}{z - 1}.$$

În planul care reprezintă pe C , punctul M are ca afix z . Fie M' punctul de afix $f(z)$. Se asociază astfel lui f o transformare punctuală, notată F , astfel ca:

$$M' = F(M).$$

Ea este definită afară de cazul când M este punctul I de afix i .

Se notează un punct, fie prin afixul său, fie prin coordonatele sale într-un reper ortonormat al planului.

1° a) Să se determine punctele A și B invariante ale transformării F .

b) Să se demonstreze că f este involutiv, adică că $M = F(M')$.

c) Să se demonstreze că, dacă $z = iy$, cu y element în $\mathbb{R} - \{1\}$, $f(z)$ se exprimă prin $f(z) = iY$, în care Y este real.

Să se demonstreze că, dacă $z = x + i$, cu x element a lui $\mathbb{R} - \{0\}$, $f(z)$ se exprimă prin $f(z) = X + i$, în care X este real.

Să se deducă că există două drepte care fiecare este global invariantă (se exceptează totdeauna punctul I) în transformarea lui F .

2° a) Să se demonstreze că, pentru orice z diferit de i :

$$|f(z) - i| \cdot |z - i| = 1.$$

(Notarea $|z|$ înseamnă „modul de z ”).

Care este transformarea prin F a unui cerc de centru I și de rază R ?

b) Să se demonstreze că transformata prin F a unui punct, al cărui afix este real, aparține cercului cu centrul în punctul ω de afix $\frac{3i}{2}$ și având rază $\frac{1}{2}$.

3° Se consideră aplicația g a lui C în C definită prin:

$$g(z) = z - 1.$$

Fie G transformarea punctuală asociată. Demonstrați că g este bijectiv. Se notează prin g^{-1} aplicația inversă a lui g . Determinați g^{-1} . Să se determine aplicația h astfel ca aplicația f , definită la începutul problemei, să se scrie:

$$f = g^{-1} \circ h \circ g,$$

compusă aplicațiilor g , apoi h , apoi g^{-1} .

4° Se consideră un punct mobil $M(t)$ în planul reprezentării numerelor complexe. Coordonatele lui $M(t)$ sînt date în funcție de timp prin:

$$\begin{cases} x = e^t & (e \text{ este baza logaritmilor neperieni}) \\ y = 0. \end{cases}$$

Se consideră punctul $M'(t)$ transformatul prin F al punctului $M(t)$ și se studiază mișcarea sa, care începe la timpul $t = 0$ și se continuă indefinit.

a) Să se calculeze, în funcție de t , coordonatele $X(t)$ și $Y(t)$ ale punctului $M'(t)$. Prin ce curbă este reprezentată traiectoria lui M' ?

b) Care este poziția lui M' , la momentul $t = 0$? Are o poziție limită cînd t tinde către $+\infty$? Să se precizeze care este traiectoria efectivă a lui M' .

(Bacalaureat E, Paris iunie 1970)

11.7 1° Să se determine toate rădăcinile polinomului:

$$2x^3 + x^2 - 3,$$

remarcînd că se anulează pentru $x = 1$.

2° Să se studieze funcția f definită prin:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3}{x},$$

și să se construiască curba reprezentativă C , într-un reper ortonormat.

3° Să se precizeze poziția lui C în raport cu parabola P de ecuație:

$$y = x^2 + x.$$

4° Să se calculeze, în funcție de a , aria regiunii limitate prin curba C , parabola P , dreapta $x = 1$ și dreapta $x = a$ ($a > 1$).

5° Să se determine a , cu o precizie de 0,01, astfel ca această arie să fie egală cu 1.

(Bacalaureat C și E, Grenoble, iunie 1970).

11.8 Recapitulări și notații. Un șir de numere reale este o aplicație a mulțimii N , a întregilor naturali în mulțimea R a numerelor reale. Șirul cu termenul general u_n va fi precizat prin (u_n) . Suma $(u_n) + (v_n)$ a două șiruri este șirul $(u_n + v_n)$.

Produsul $\lambda(u_n)$ a unui șir (u_n) cu un număr real λ este șirul (λu_n) .

Ne propunem să studiem mulțimea E a șirurilor (u_n) astfel ca:

$$\forall n \quad 2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0. \quad (1)$$

A) 1° Să se demonstreze că adunarea a două șiruri și înmulțirea unui șir printr-un număr real conferă mulțimii E o structură de spațiu vectorial peste corpul numerelor reale.

2° Să se demonstreze că o progresie geometrică (r^n) , r nenul, aparține lui E dacă și numai dacă r verifică relația:

$$2r^2 - 5r + 2 = 0.$$

Să se calculeze valorile lui r care răspund la această chestiune.

3° Să se demonstreze că orice șir $(\lambda 2^{-n} + \mu 2^n)$, în care λ și μ reprezintă două numere reale arbitrare, aparține lui E .

4° Fie a și b două numere reale. Să se demonstreze că există în E mai mult de un șir (u_n) care verifică:

$$u_0 = a \text{ și } u_1 = b.$$

5° Să se utilizeze rezultatul din problema precedentă pentru a demonstra că fiecărui element (u_n) a lui E i se poate asocia un cuplu unic (λ, μ) de numere reale astfel ca:

$$(u_n) = (\lambda 2^{-n} + \mu 2^n).$$

6° Fie a și b două numere reale. Să se demonstreze că există în E un șir (u_n) care verifică:

$$u_0 = a \text{ și } u_1 = b.$$

Aplicație. Să se calculeze u_1, u_2, λ și μ pentru $a = 0$ și $b = \frac{3}{2}$, apoi pentru $a = 2$ și $b = \frac{5}{2}$.

B) Fie f_λ funcția reală de o variabilă reală definită prin:

$$f_\lambda(x) = \lambda 2^{-x} + 2^x,$$

reprezentând un parametru real. Fie C_λ graful său.

1° Să se studieze variațiile funcției f_λ , limitele sale, când x tinde către $\pm\infty$. (Se vor distinge trei cazuri, după cum λ este negativ, nul sau pozitiv.)

2° Să se traseze, raportate la același reper ortonormat (unitate = 1 cm), curbele C_{-1} , C_0 și C_1 . Se va preciza tangenta fiecăreia dintre aceste curbe în punctul său de abscisă nulă. (Logaritmul neperian al lui 2 este apropiat de 0,7).

3° Să se calculeze aria S_a a domeniului limitat de curbele C_{-1} și C_1 , axa ordonatelor și dreapta de ecuație $x = a$ ($a > 0$).

Are această arie o limită atunci când a tinde către $+\infty$?

N.B. Cele două părți ale problemei sînt independente.

(Bacalaureat C, Nice 1969)

11.9 Într-un plan P raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$, se consideră punctul M_1 , a cărui coordonate sînt definite în funcție de timpul t prin:

$$x = a \cos t \quad \text{și} \quad y = a \sin t,$$

și punctul M_2 , a cărui coordonate sînt definite prin:

$$x = a \cos 2t \quad \text{și} \quad y = -a \sin 2t.$$

a) Care sînt traiectoriile punctelor M_1 și M_2 ?

b) Fie M punctul definit prin $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2})$. La ce momente M , M_1 și M_2 sînt confundate?

c) Să se demonstreze că M aparține segmentului M_1M_2 cînd acest segment este definit.

Fie $\vec{V}$ vectorul-viteză al punctului M . Să se demonstreze că $\vec{V}$ și $\overrightarrow{M_1M_2}$ sînt ortogonale la o dată oarecare.

(Bacalaureat C Nantes, septembrie 1969)

11.10 1° Să se construiască într-un același reper ortonormat (unitatea = centimetrul), graficele funcțiilor y_1 și y_2 definite prin:

$$y_1(x) = e^x \quad \text{și} \quad y_2(x) = \frac{e}{x}.$$

e fiind baza logaritmilor neperieni.

Să se deducă din aceste grafice semnul expresiei $e^x - \frac{e}{x}$, urmărind valorile lui x .

2° Să se studieze variațiile funcției y definite prin:

$$y(x) = e^x - e \log x \quad \text{pentru: } 0 < x \leq e,$$

$\log x$ reprezentînd logaritmul neperian al lui x .

Să se construiască graficul său Γ într-un reper ortogonal (Unități: 2 cm pe Ox , 1 cm pe Oy).

Se va calcula cu o precizie de 0,001, utilizînd tabelele de logaritmi, ordonatele punctelor de abscise e și $\frac{1}{e}$.

3° Să se calculeze derivata funcției F , definite prin: $F(x) = e^x (\log x - 1)$.

Să se deducă o primitivă a funcției y .

Să se calculeze cu o precizie de 0,001, aria limitată prin Γ , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.

(Bacalaureat, Lille 1969)

11.11 1° Fie o funcție f , continuă și derivabilă pe un interval I .
Să se dea, în funcție de derivata f' a lui f , expresia derivatei funcției F , definită prin:

$$F(x) = \frac{f(x)}{e^x} \quad (x \in I)$$

(e fiind baza logaritmilor neperieni).

2° Să se demonstreze că există un cuplu de constante (A, B) astfel ca, oricare ar fi x ($x \neq -1$), să avem:

$$\frac{x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1}.$$

Să se deducă că există o funcție v de derivată v' , astfel ca:

$$v(x) - v'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}.$$

3° Care este mulțimea primitivelor funcției F când $f(x) = \frac{x-2}{(x+1)^2}$?

(Bacalaureat E, Reims, iunie 1969)

11.12 Se consideră funcția f , de variabilă reală x , definită prin:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$$

1° Să se studieze domeniul său de definiție. Demonstrați că el este periodic, de perioadă π și studiați variațiile sale în intervalul $\left] -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$.

Să se traseze curba reprezentativă a lui f într-un reper ortonormat.

2° Să se calculeze primitivele lui f . Se va pune $f(x)$ sub forma:

$$f(x) = A + B \left(\frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} \right).$$

în care A și B sînt constante ce trebuie precizate.

Se reamintește, în sfîrșit, că o primitivă a funcției $\frac{u'}{u}$ este $\text{Log } |u|$ în care simbolul Log înseamnă funcția logaritmului neperian. Să se deducă valoarea ariei domeniului cuprins între curbă, axa absciselor și cele două drepte de ecuații $x=0$, $x \approx \frac{\pi}{2}$, paralele la axa ordonatelor.

(Bacalaureat C, Besançon 1970)

11.13 f reprezintă funcția care, pentru o variabilă reală x , face să corespundă numărul real:

$$y = f(x) = e^x (2x^2 - 3x),$$

unde e este baza logaritmilor neperieni.

1° Să se studieze sensul variației acestei funcții și trasați curba reprezentativă C în raport cu un reper ortonormat al axelor $x'Ox$ și $y'Oy$. (Se va preciza, în particular, limitele lui y cînd x tinde către $+\infty$ și către $-\infty$ și se va determina tangenta lui C în origine.)

2° Să se calculeze prima și a doua derivată, $y' = f'(x)$ și $y'' = f''(x)$, a funcției f și verificați dacă $y = f(x)$ este o soluție a ecuației diferențiale:

$$y'' - 2y' + y = 4e^x.$$

Să se deducă că $4e^x + 2y - y'$ este o primitivă a lui y .

Să se evalueze aria aritmetică $S(a)$ limitată de curba C , axa $x'x$ și drepte de ecuații $x=0$ și respectiv $x=a$, în care a este un număr real negativ. Să se demonstreze că $S(a)$ are o limită, l , pe care o veți evalua cînd a tinde către $-\infty$.

3° Fie $f^{(n)}(x)$ derivata de ordinul n a lui f . Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul întreg n , mai mare sau egal cu 1, avem:

$$f(0)(x) = e^x(2x^2 + a_n x + b_n),$$

în care a_n și b_n sînt numere întregi, funcții de n .
Să se stabilească relațiile:

$$a_{n+1} = a_n + 4; \quad b_{n+1} = b_n + a_n.$$

Să se calculeze a_n și b_n în funcție de n .

4° Să se demonstreze că, oricare ar fi n , ecuația:

$$2x^2 + a_n x + b_n = 0$$

are două rădăcini reale și distincte.

Ne propunem să găsim toate valorile întregi ale lui n , superioare lui 1, pentru care aceste rădăcini sînt numere raționale. Pe această bază, se va stabili mai întîi că aceste valori ale lui n sînt astfel că $16n + 9$ este pătratul unui număr întreg p și, în sfîrșit, că restul împărțirii lui p prin 8 este egal cu 3 sau 5. Să se deducă forma generală a întregilor n , căutați, și să se precizeze toate valorile lui n inferioare lui 30.

(Bacalaureat C Grupa I, iunie 1969)

11.14 1° Se consideră n numere reale, distincte două cîte două:

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Să se demonstreze că, dacă n numere $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n)$ sînt reale, funcția φ care are asociat lui t numărul:

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e^{a_i t}$$

nu este identic nulă pentru orice t , decît dacă numerele λ_i sînt toate nule (se va putea proceda prin recurență pentru n).

2° Se consideră variabila aleatoare A , luînd valorile a_i (două cîte două distincte) cu probabilitățile λ_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Fiecărui număr real t i se asociază variabila aleatoare $B(t)$ care ia valorile $e^{a_i t}$ cu probabilitățile λ_i , și se notează $f_A(t)$ valoarea medie a lui $B(t)$.

Să se demonstreze că, dacă A și A' sînt două variabile aleatoare de tipul celor de mai înainte și respectiv astfel ca:

$$\text{pentru } A: \quad a_1 < a_2 < \dots < a_n,$$

$$\text{pentru } A': \quad a'_1 < a'_2 < \dots < a'_n,$$

funcțiile f_A și $f_{A'}$ sînt distincte cu excepția cazului cînd avem, oricare ar fi i al mulțimii, $\{1, \dots, n\}$:

$$(a_i, \lambda_i) = (a'_i, \lambda'_i).$$

Calculați $f_A(0)$ și $f_{A'}(0)$.

3° Să se demonstreze că există o valoare aleatoare C astfel ca produsul $f_A(t) \times f_{A'}(t)$ să fie valoarea medie a unei variabile aleatoare $D(t)$ definite plecînd din C , ca la punctul doi.

Să se determine explicit C atunci cînd $a_i = a'_i = i$ și $\lambda_i = \lambda'_i = \frac{1}{n}$ ($i \in \{0, \dots, n\}$).

11.15 A) Se consideră următoarele expresii în care a și b sînt numere reale și în care $\text{Log } x$ reprezintă logaritmul neperian al lui x :

$$y_1 = \frac{1}{a-b} \text{Log } \frac{b}{a},$$

$$y_2 = \frac{1}{a-b} \text{Log } \frac{b^2}{a^2}.$$

1° Pentru orice cuplu (a, b) se asociază un punct M din plan, de coordonate carteziane (a, b) , într-un reper ortonormat.

a) Să se determine submulțimea E_1 a planului în care y este definit. (Se va construi un grafic în care se vor indica fără ambiguitate regiunile care interesează.)

b) Să se determine submulțimea E_2 a planului în care y_2 este definit.

c) Să se determine submulțimea E_1' a planului în care y_1 este pozitiv sau nul.

d) Să se determine submulțimea E_2' a planului, în care y_2 este pozitiv sau nul.

2° y_1 admite o limită atunci cînd b tinde către a ? Dacă da, care?

B) 1° Să se rezolve fiecare dintre ecuațiile definite în continuare:

$$x \in \mathbb{R} \text{ și } ae^{ax} = be^{bx} \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R});$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ și } a^x e^{ax} = b^x e^{bx} \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}).$$

2° Fie funcția $f_{a,b}$ care asociază numărului real t , numărul real $e^{at} - e^{bt}$. Să se compare graficele lui $f_{a,b}$, $f_{b,a}$ și $f_{-a,-b}$.

3° Să se studieze funcțiile $f_{a,0}$ și $f_{0,b}$. Reprezentați-le grafic.

4° Să se studieze, în singurul caz în care: $a > b > 0$, funcția $f_{a,b}$ și reprezentați-o grafic.

11.16 Se notează prin $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ o primitivă a funcției f (dacă ea există), care se anulează pentru $x = a$.

1° f este o funcție numerică definită prin:

$$f(t) = 1 - t \quad \text{dacă: } 0 \leq t \leq 1;$$

$$f(t) = 0 \quad \text{dacă: } t > 1;$$

$$f(t) = f(-t) \quad \text{dacă: } t < 0.$$

Se consideră funcția g de variabilă x , astfel ca:

$$g(x) = + \int_0^x f(t) dt \quad \text{dacă: } x \geq 0;$$

$$g(x) = - \int_0^x f(t) dt \quad \text{dacă: } x < 0.$$

a) Să se explicitizeze $g(x)$ după valorile lui x . Determinați x pentru a avea $g(x) = 0$. Să se compare $g(x)$ și $g(-x)$. Să se studieze continuitatea și sensul variației lui g . Să se traseze curba sa reprezentativă într-un reper ortonormat.

b) Să se demonstreze că, pentru $x \geq 0$ și $y \geq 0$, avem:

$$g(x+y) \leq g(x) + g(y). \quad (1)$$

Să se demonstreze că inegalitatea (1) este adevărată oricare ar fi numerele reale x și y .

2° a) Se ia $\varphi(x, y) = g(x - y)$. Să se explicitizeze φ cunoscînd pe x și y .

Să se demonstreze că, pentru orice x , pentru orice y și orice z , φ verifică următoarele proprietăți:

$$\alpha) \varphi(x, y) \geq 0;$$

$$\varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$\beta) \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

$$\gamma) \varphi(x, y) \leq \varphi(x, z) + \varphi(z, y).$$

b) Se notează prin $E(x_0, r)$ mulțimea de numere reale x astfel ca:

$$\varphi(x_0, x) < r.$$

Să se precizeze:

$$E(0, 1); \quad E\left(0, \frac{1}{2}\right); \quad E\left(1, \frac{1}{2}\right).$$

11.17 Fie:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

1° Să se justifice existența integralei I_n . Calculați I_1 și I_2 .

2° Să se stabilească o relație de recurență între I_n și I_{n-2} . Să se deducă expresia lui I_n în funcție de n .

3° Luăm:

$$u_p = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2p-2)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-1)} \right)^2 2p.$$

Să se demonstreze că u_p este o valoare aproximativă prin adaos a lui $\frac{\pi}{2}$, cu:

$$u_p - \frac{\pi}{2} < \frac{u_p}{2p+1}.$$

11.18 Fie f o funcție reală, continuă, derivabilă pe intervalul $[a, b]$. Demonstrați că derivata sa f' ia pe $[a, b]$ toate valorile cuprinse între $f'(a)$ și $f'(b)$.

Fie, pentru x aparținând intervalului $[-1, 1]$, funcția g definită prin:

$$g(x) = -\chi_{[-1, 0]}(x) + \chi_{[0, 1]}(x).$$

(χ_A este funcția caracteristică a lui A).

Să se demonstreze că funcția g nu admite nici o primitivă pe intervalul $[-1, +1]$.

Relația $f(x) = \int_{-1}^x g(t) \, dt$ definește o funcție pentru x aparținând intervalului $[-1, +1]$ deoarece

g este integrabil.

Să se calculeze derivata lui f , dacă aceasta este posibil. Explicați de ce acest rezultat nu contrazice teoremele care leagă noțiunile de derivată și integrală.

11.19 Fie a un număr real mai mare ca 1. Luăm $h = \text{Log } a$.

Se consideră, în axe ortonormate, curbele:

$$C_1: y = \text{Log } x,$$

$$C_h: y = \text{Log}_a x.$$

Se notează cu A punctul de pe Ox de abscisă 1.

1° Să se determine prin coordonatele sale, în funcție de h , punctul B_h , al curbei C_h în care tangenta la C_h este paralelă cu dreapta de ecuație $y = x$.

2° Pentru h diferit de 1, dreapta AB_h taie axa $y'y$ în S_h ; tangenta în A la C_1 taie $y'y$ în S_1 . Să se calculeze ordonata y_h a lui S_h în funcție de numărul real pozitiv h . Să se studieze variațiile lui y_h în funcție de h .

Să se demonstreze că, dacă punem $y'_h = -y_h$, aplicația $[h \mapsto y'_h]$ determină o bijecție a intervalului $]0, +\infty[$ pe ea însăși.

3° a) Să se demonstreze că C_h este transformatul lui C_1 printr-o omotetie căreia i se va determina centrul și raportul în funcție de h .

Să se deducă că, pentru h și h' pozitive, C_h și $C_{h'}$ sint corespondente printr-o omotetie, ce se va determina.

b) Să se demonstreze că există un cerc Γ_1 , și numai unul, cu centrul pe Oy , tangent la C_1 în D_1 , a cărei rază este egală cu $d(A, D_1)$. Să se deducă numărul de cercuri Γ cu centrul pe Oy , de rază R dată, astfel încât să existe o curbă C_h tangentă la Γ într-un punct D_h astfel ca $R = d(B_h, D_h)$.

- 4° a) Fie h un număr real, pozitiv, diferit de 1. Să se demonstreze că C_1 și C_h admit o tangentă comună T_h , punctele de contact ale lui T_h cu C_1 și C_h fiind respectiv P_h și Q_h . Să se formeze, în funcție de h , expresiile coordonatelor lui P_h și Q_h și ecuația lui T_h . Să se găsească limita abscisei lui Q_h atunci cînd h tinde către zero.
- b) Fie h și h' două numere reale pozitive diferite de 1. Să se demonstreze că, dacă $hh' = 1$, T_h și $T_{h'}$ se taie pe $x'x$.

11.20 1° Să se demonstreze că, pentru orice număr real x strict pozitiv, avem:

$$x - \text{Log}(1+x) > 0.$$

2° Integrînd de la 0 la x funcțiile $\left[t \mapsto \frac{1}{1+t}\right]$ și $\left[t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}\right]$, să se demonstreze că, pentru orice număr real x strict pozitiv, avem:

$$\text{Log}(1+x) > 1 - \frac{1}{x} \text{Log}(1+x).$$

3° Se consideră funcția φ care, pentru orice număr real strict pozitiv x , asociază numărul $\varphi(x)$ definit prin:

$$\varphi(x) = \frac{x - \text{Log}(1+x)}{x \text{Log}(1+x)}.$$

- a) Să se calculeze limita lui φ în $+\infty$.
 b) Să se calculeze limita lui φ în 0^+ .
 c) Să se demonstreze că: $x \in \mathbb{R}^{+*} \Rightarrow \varphi(x) \in]0, 1[$.
 4° Să se demonstreze că oricărui număr real pozitiv, x , i se poate asocia un număr real θ , unic determinat astfel ca:

$$\text{Log}(x+1) - \text{Log } x = \frac{1}{x+\theta} \text{ și } 0 < \theta < 1.$$

Să se calculeze θ în funcție de x și regăsiți astfel fără calcul inegalitățile de la 1°, 2° și 3° c).

11.21 O funcție monom este o funcție de forma $[x \mapsto ax^n]$ ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$).
 Se reamintește formula binomului:

$$(x+h)^n = x^n + C_n^1 h x^{n-1} + C_n^2 h^2 x^{n-2} + \dots + C_n^p h^p x^{n-p} + \dots + C_n^n h^n,$$

unde C_n^p este numărul combinațiilor de n obiecte luate câte p .

A) se consideră expresia:

$$P_n(x) = \frac{1}{2} (x+a)^n + (x-a)^n, \quad (1)$$

în care x și a reprezintă numere reale sau complexe și n este un întreg pozitiv sau nul.

1° Să se pună $P_n(x)$ sub forma unei sume de monoame ordonate după puterile descrescătoare ale lui x . (Se pot face la început calculele pentru $n = 0, 1, 2, 3$).

Să se precizeze ultimul termen al dezvoltării lui $P_n(x)$ pentru n par și pentru n impar.

2° Se presupune $a = 1$. Să se demonstreze că suma coeficienților monoamelor dezvoltării:

$$\frac{1}{2} [(x+1)^n + (x-1)^n]$$

este egală cu 2^{n-1} .

B) Fie $Q_n(x)$ expresia obținută plecînd de la dezvoltarea lui $P_n(x)$ punînd:

$$a^2 = x^2 - 1. \quad (2)$$

1° Care este monomul de cel mai înalt grad al noului polinom $Q_n(x)$ astfel obținut?

2° Să se calculeze $Q_n(1)$. Să se deducă suma coeficienților polinomului $Q_n(x)$.

3° Se ia $x = \cos \theta$.

- a) Să se utilizeze inegalitățile (1) și (2) pentru a exprima pe $Q_n(x)$ în funcție de θ .
 b) Să se deducă rădăcinile ecuației:

$$Q_n(x) = 0.$$

(Se va admite că un polinom de gradul n are n rădăcini complexe.)

- c) Să se stabilească relația:

$$Q_n(x) + Q_{n-1}(x) = 2xQ_{n-1}(x). \quad (3)$$

[Se va putea demonstra că, dacă a verifică (2), egalitatea (1) atrage după sine:

$$P_n(x) + P_{n-1}(x) = 2xP_{n-1}(x).]$$

Regăsiți punctul a) de la 3° utilizând relația (3) și procedînd prin recurență.

11.22 A) Se reamintește că numărul a (real sau complex) este numit rădăcina polinomului $P(x)$, dacă $P(a) = 0$.

Se dau următoarele trei polinoame:

$$A(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2,$$

$$B(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2,$$

$$C(x) = c_0x^2 + c_1x + c_2.$$

Constantele $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ sînt reale și astfel alese că, pentru orice x , avem:

$$A^2(x) + B^2(x) = C^2(x).$$

Pe de altă parte, niciunul din numerele a_0, b_0, c_0 nu este nul.

1° Să se demonstreze că, dacă două din cele trei polinoame admit o rădăcină comună, reală sau complexă, această rădăcină este și rădăcină a celui de al treilea polinom.

2° Să se demonstreze că, dacă două polinoame:

$$B(x) - C(x) \quad \text{și} \quad B(x) + C(x)$$

admit o rădăcină comună, această rădăcină este în același timp rădăcină a lui $B(x)$ și $C(x)$.

B) În toate problemele următoare se presupune că polinoamele $A(x)$, $B(x)$ și $C(x)$ nu au rădăcini comune.

1° Să se demonstreze că $C(x)$ posedă două rădăcini complexe conjugate. Plecînd de la egalitatea:

$$A^2(x) = [C(x) - B(x)][C(x) + B(x)],$$

să se demonstreze că polinoamele $C(x) - B(x)$ și $C(x) + B(x)$ au fiecare o rădăcină dublă reală. Să se deducă că $A(x)$ și $B(x)$ admit fiecare două rădăcini reale distincte.

2° Se ia $a_0 = 1$ și se presupun cunoscute rădăcinile p și q ale lui $A(x)$. Să se demonstreze că există o infinitate de polinoame $B(x)$ și $C(x)$ dependente de un parametru, și care verifică:

$$A^2(x) + B^2(x) = C^2(x).$$

3° Să se demonstreze că între rădăcinile p și q ale lui $A(x)$ și rădăcinile r și s ale lui $B(x)$ există o relație independentă de parametrul precedent și pe care o veți explicita.

C) Fiînd stabilite numerele reale p și q , rădăcini ale lui $A(x)$, există o infinitate de polinoame $C(x)$ calculate la § B, 2°. Se vor numi:

$$X + iY \quad \text{și} \quad X - iY$$

rădăcinile lui $C(x)$. Arătați că între X, Y , și p, q există o relație pe care o veți explicita. Care este curba geometrică descrisă, într-un reper ortonormat, de mulțimea de puncte de coordonate X, Y ?

11.23 Se consideră șirul numerelor $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$. Se dau primele două numere reale u_0 și u_1 ; celelalte sînt definite prin relația de recurență:

$$u_n = u_{n-1} - u_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

1° Să se construiască acest șir de numere. Stabiliți că el este periodic. Din cîte numere se compune perioada?

2° Să se demonstreze că u_n poate fi pus sub forma :

$$u_n = \lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta,$$

unde θ este independent de u_0, u_1 și n , și unde λ și μ depind de u_0 și u_1 , și nu de n . Să se calculeze θ ($0 < \theta < \pi$), λ și μ .

3° $\vec{i}$ și $\vec{j}$ fiind vectorii unitate ai unui reper ortonormat (Ox, Oy) , se consideră vectorii :

$$\vec{OP}_n = \vec{i} \lambda \cos n\theta + \vec{j} \mu \sin n\theta,$$

λ, μ și θ avînd valorile de mai înainte. Să se demonstreze că punctele P_n sînt pe o aceeași conică, L , căreia i se vor preciza elementele.

Să se demonstreze că dreptele $P_n P_{n-1}$ sînt tangente la o aceeași conică L' , omotetică și concentrică cu L .

4° Să se demonstreze că orice expresie :

$$v_n = A \cos n\varphi + B \sin n\varphi,$$

unde A, B, φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) sînt trei numere reale date, oarecare, independente de n , poate fi considerată ca termen de rang $n+1$ al unui șir $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, \dots$ care satisface relația de recurență :

$$v_n - av_{n-1} + bv_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

a și b fiind două constante ce se vor calcula în funcție de φ . Pentru ce valori ale lui φ , acest șir este periodic, perioada sa avînd pe p ca termen ?

11.24 Fie polinomul :

$$P(x) = x^3 + mx^2 + nx,$$

în care m și n sînt constante reale.

1° Să se determine polinomul $Q(x)$ și numărul real R , astfel ca :

$$P(x) = (x-1)Q(x) + R.$$

2° Se consideră :

$$P(x) = (x-1)Q(x) + R.$$

Să se determine n în funcție de m , așa încît funcția :

$$f = \left[x \mapsto Q'(x) - \frac{R}{(x-1)^2} \right]$$

să se anuleze pentru $x = -1$ (Q' este derivata lui Q).

Să se studieze atunci, în funcție de m , numărul de rădăcini ale ecuației definite de :

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{și} \quad f(x) = 0.$$

3° Să se calculeze α, a, b, m pentru ca :

$$f(x) = \frac{(x-\alpha)^2(ax+b)}{(x-1)^2}.$$

Într-unul din cazuri, $f(2) = 0$. Se notează această funcție prin f_1 și prin $y_1 = F(x)$ aceea a primitivelor care se anulează pentru $x = 0$. Calculați $F(x)$. Să se studieze variația funcției y_1 și

trasați graficul Γ . Pe același reper (ortonormat) să se traseze curba γ de ecuație $y = \frac{8}{x-1}$ și să se calculeze aria porțiunii din plan cuprinse între Γ, γ și dreptele de ecuație $x = 2$ și $x = 3$.

11.25 În tot ce urmează, simbolul $E(u)$, care se citește „parte întreagă a lui u ” reprezintă cel mai mare întreg n care este inferior sau egal cu u :

$$n \leq u < n+1$$

1° Să se studieze și să se reprezinte grafic variația funcției E .

2° Să se rezolve ecuația definită prin :

$$(E\sqrt{x}) = \sqrt{E(x)}.$$

3° Să se reprezinte grafic, pe trei figuri distincte, soluțiile (x, y) ale fiecăreia din ecuațiile definite prin :

$$a) E(\sqrt{x}) = E(\sqrt{y}).$$

$$b) E(\sqrt{x}) = \sqrt{E(y)}.$$

$$c) \sqrt{E(x)} = \sqrt{E(y)}.$$

4° Să se întocmească un catalog al discontinuităților fiecăreia dintre funcțiile f_1 și f_2 :

$$f_1 = \left[x \mapsto E\left(\frac{x}{2}\right) \right],$$

$$f_2 = [x \mapsto E[(\sqrt{2} - 1) \sqrt{x}]].$$

5° Se consideră funcția g :

$$g = \left[x \mapsto 2E\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) - E(\sqrt{x}) - E[(\sqrt{2} - 1) \sqrt{x}] \right]$$

Să se calculeze $g(x)$ pentru : $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Să se studieze variația lui g și construiți graficul când x variază de la 0 la 7.

11.26 1° Să se verifice următoarele identități :

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = (x - 1)^2(2x + 1).$$

2° Să se rezolve inecuațiile definite pe $\mathbb{R}$, prin :

$$x \sqrt{3 - 2x} + 1 < 0; \quad (1)$$

$$x \sqrt{3 - 2x} - 1 < 0. \quad (2)$$

3) Să se studieze sensul variației funcției g , de variabilă x definită prin relația $g(x) = x^3(3 - 2x)$ și să se deducă, fără calcule noi, sensul variației funcției f , de variabilă x , definită prin relația :

$$f(x) = x \sqrt{3 - 2x}.$$

Să se traseze forma aproximativă a curbei reprezentative C a funcției f în raport cu două axe de coordonate rectangulare Ox și Oy .

Să se regăsească, cu ajutorul lui C , rezultatele de la 2°.

4° Să se determine coeficienții a, b, c , pentru ca :

$$F = [x \mapsto (ax^2 + bx + c) \sqrt{3 - 2x}]$$

să fie o primitivă a funcției f și deduceți valoarea ariei porțiunii din plan cuprinsă între partea pozitivă a axei Ox și partea din curba C a cărei puncte au abscise pozitive.

11.27 Se consideră funcția :

$$f = \left[x \mapsto 1 - \frac{1}{(x + 1)^2} \right].$$

1° Să se studieze variațiile funcției f . Trasați graficul C raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Simetria curbei.

2° Să se discute numărul de puncte comune lui C și ale dreptei de ecuație $y = mx$. Precizați în ce regiune a planului se găsește D pentru ca să existe trei puncte de intersecție O, M', M'' ; se pot confunda punctele M' și M'' ?

3° Să se dea, în funcție de m , coordonatele x, y ale punctului I , mijloc al segmentului $[M'M'']$. Să se deducă mulțimea de puncte I . Construiți-le.

4° Să se determine aria S a domeniului cuprins între curba C , dreapta Δ de ecuație $y = 1$ și dreptele de ecuație $x = -\frac{1}{2}$ și $x = \lambda$ ($\lambda > 0$). Calculați limita ariei S atunci când λ tinde către $+\infty$.

11.28 Se reamintesc formulele:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

1° Să se demonstreze formulele:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2,$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3},$$

$$1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) = n(2n-1),$$

$$3 + 7 + 11 + \dots + (4n-1) = n(2n+1).$$

2° Se dă în raport cu un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ($\vec{i}$ vector unitate al suportului Ox , $\vec{j}$ vector unitate al suportului Oy) pătratul Q ale cărui două vîrfuri opuse sînt originea O și punctul A de coordonate $(2n, 2n)$, n fiind un număr natural.

Fie G mulțimea numită grilă, a tuturor punctelor de coordonate întregi sau nule, situate în interiorul sau pe conturul pătratului Q . Să se evalueze numărul tuturor pătratelor C a căror vîrfuri aparțin grilei G și care sînt în situația de a avea o diagonală paralelă la Ox .

3° Să se evalueze numărul tuturor romburilor L — considerate pătrate — a căror vîrfuri aparțin grilei G și sînt în situația de a avea o diagonală paralelă la Ox . Calculați suma ariilor acestor rombururi.

11.29 Se consideră o tabelă de valori numerice ale rădăcinilor pătrate aritmetice ale numerelor întregi $1, 2, 3, \dots, n, \dots$

Se folosește această tabelă ca mijloc de interpolare proporțională între doi întregi succesivi n și $n+1$, așa cum se procedează și cu o tabelă de funcții circulare sau de logaritmi.

1° Să se justifice că, dacă $n+h$ este cuprins între n și $n+1$, această interpolare dă pentru $\sqrt{n+h}$ valoarea aproximativă:

$$\sqrt{n} + h(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Să se demonstreze că adaosul $\varepsilon(h)$ al lui $\sqrt{n+h}$ asupra valorii sale apropiate se poate scrie:

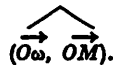
$$\varepsilon(h) = (\sqrt{n+h} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+h})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

2° Să se studieze variația funcției $\varepsilon(h)$ atunci când h variază de la 0 la 1 (n rămînd fix). Pentru ce valoare h_n funcția $\varepsilon(h)$ este maximă. Să se demonstreze că valoarea maximă este:

$$\frac{1}{32(n+h_n)^{\frac{3}{2}}}.$$

11.30 Planul este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ($\vec{i}$ vector unitate al suportului Ox , $\vec{j}$ vector unitate al suportului Oy). Se dau: punctele $\omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $F(1, 0)$ și cercul C de centru ω și trecînd prin F .

Fie $M(x, y)$ un punct oarecare de pe C . Fie φ o măsură în radiani a unghiului:



Oricărui punct $M(x, y)$ aparținând cercului C , face să-i corespundă punctul $M'(X, Y)$ definit astfel:

$$\begin{aligned} X &= \sin^2 \varphi - x; \\ Y &= \frac{-2y \cos 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi}. \end{aligned}$$

- 1° Să se calculeze raportul $\frac{x}{y}$ în funcție de $\operatorname{tg} \varphi$ și demonstrați că suportul vectorului $\overrightarrow{MM'}$ trece printr-un punct fix, ce se va determina, atunci când M descrie cercul C .
 2° Să se găsească ecuația curbei, mulțime a punctelor M' când $M(x, y)$ se deplasează pe cercul C cu $x \geq 0$ și $y \geq 0$.
 3° Să se studieze variațiile funcției:

$$f = \left[x \mapsto x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right],$$

și trasați graficul Γ .

4° Pentru această parte a problemei, presupunem că unitatea aleasă pe axe este centimetrul; Γ taie axa xOx într-un punct A , diferit de origine. Care este abscisa, a , a acestui punct?

Se rotește graficul în jurul axei xOx . Arcul $\widehat{OA}$ al graficului Γ dă naștere, în această rotație, unui solid de rotație V . Se taie acest solid cu un plan perpendicular, pe axa xOx într-un punct H de abscisă x , astfel ca: $a < x < 0$.

Să se calculeze, în funcție de x , aria $S(x)$ a secțiunii obținute.

Să se calculeze o primitivă $V(x)$ a funcției $S(x)$. Să se deducă volumul solidului V .

Se dă:

$$\operatorname{Log} 2 \approx 0,69.$$

11.31 Să se studieze variația funcției f :

$$f = \left[x \mapsto \frac{x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} \right],$$

precum și variația derivatei sale.

Se vor da valorile exacte (reprezentate cu ajutorul simbolurilor ordinare) ale valorilor lui x , corespunzătoare maximum-ului și minimum-ului a două funcții, precum și valorilor corespunzătoare ale celor două funcții; în sfârșit, se vor da valorile aproximative cu aproximație $1/200$, prin adaos sau prin lipsă.

Să se traseze curba reprezentând variația lui f .

11.32 1° Să se studieze variația funcției f :

$$f = [x \mapsto 4x^3 - 3x + 1 = (x+1)(2x-1)^2].$$

Să se construiască graficul C . Demonstrați că această curbă are un centru de simetrie.

2° Să se calculeze aria cuprinsă între axa Ox , axa Oy și arcul de curbă C pe care x variază de la 0 la $\frac{1}{2}$.

3° Să se demonstreze că graficul funcției g :

$$g = \left[x \mapsto \frac{4x^3}{2} - 3x + \lambda \right],$$

în care λ este constant, se deduce din C , prin omotetie. Care este mulțimea de puncte ale acestei curbe care corespunde la un maxim al lui $g(x)$ și care este mulțimea de puncte care corespunde la un minim.

4° Să se studieze variația funcției h :

$$h = [x \mapsto \sqrt{f(x)}].$$

Nu se va construi graficul, dar se va indica care vor fi tangentele la această curbă în punctele care au ca abscisă -1 și $\frac{1}{2}$.

5° Să se calculeze $\cos 3\theta$ în funcție de $\cos \theta$. Se va utiliza relația obținută și schimbarea $x = \cos \theta$ pentru a găsi rădăcinile ecuației definite pe $\mathbb{R}$ prin:

$$4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

11.33 1° Se consideră următoarea progresie geometrică:

$$1, 3, 9, 27, 81, \dots$$

Care este valoarea termenului de rangul n ? Demonstrați că diferențele între doi termeni succesivi formează o progresie geometrică. Această proprietate, se poate generaliza?

2° Se consideră suma:

$$A_n = x + x^2 + \dots + x^n.$$

Calculați-o. Să se deducă suma:

$$A'_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}.$$

Ce formă iau expresiile găsite pentru A_n și A'_n dacă se face $x = 1$?

Care sînt în realitate, valorile lui A_n și A'_n pentru $x = 1$?

3° Obțineți de asemenea expresiile următoarelor sume:

$$1 + 3x^2 + 5x^4 + \dots + (2n+1)x^{2n};$$

$$1 + 4x + 9x^2 + \dots + n^2x^{n-1}.$$

4° Se consideră funcția în x :

$$B = [x \mapsto 9x^{10} - 10x^9 + 1].$$

Să se studieze variația sa. Deduceți variația lui $A_9(A_n)$, pentru $n = 9$. Să se construiască graficele.

Ce particularitate prezintă graficul lui B pentru $x = 0$?

Graficul lui A_9 prezintă vre-o particularitate pentru $x = 1$?

11.34 1° Se dă funcția f_a :

$$f_a = \left[x \mapsto \frac{(x+1)^2}{x^2 + ax + 1} \right].$$

în care a este un număr real, dat.

Pentru ce valori ale lui a funcția este definită, oricare ar fi valoarea atribuită lui x ? Presupunind că este astfel, studiați variația acestei funcții.

2° Să se construiască curba C_0 , reprezentînd funcția f_0 . Demonstrați că curba C_0 are un centru de simetrie, A . Determinați tangenta în A la curbă.

3° Fie M , punctul de pe C_0 reprezentînd maximum-ul funcției f_0 . Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între arcul AM al lui C_0 și coarda sa. (Se va arăta mai înainte că $f_0(x)$ se poate scrie sub forma:

$$f_0(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

11.35 1° Se determină experimental o valoare necunoscută x . S-a măsurat de n ori și s-au găsit ca măsură a sa, numerele $x_1, x_2, \dots, x_n$. Se convine să se aleagă, pentru această necunoscută, valoarea x care dă minimum expresiei:

$$E = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2.$$

a) Să se determine, în funcție de $x_1, x_2, \dots, x_n$ valoarea pentru x astfel ales.

b) Să se calculeze valoarea minimă a lui E .

2° Se determină experimental două necunoscute x și y despre care se știe că $x + y = a$ (a este un număr cunoscut). Ca urmare a n măsurători s-au obținut n valori ale lui x : $x_1, x_2, \dots, x_n$, asociate la n valori ale lui $y = y_1, y_2, \dots, y_n$. Se stabilește să se aleagă pentru x și y valorile care asigură minimum pentru funcția:

$$F = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2 + (y - y_1)^2 + (y - y_2)^2 + \dots + (y - y_n)^2$$

a) Să se exprime F cu ajutorul numai al lui x .

b) Să se determine x astfel încât F să fie minimum. Deduceți pe y . Aceste valori ale lui x și y se exprimă în funcție de a , de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

c) Să se facă calculul numeric pentru $a = 100$, $n = 4$ și

$$x_1 = 75; \quad x_2 = 75,2; \quad x_3 = 75,1; \quad x_4 = 75,3;$$

$$y_1 = 24,8; \quad y_2 = 25,2; \quad y_3 = 24,9; \quad y_4 = 24,9.$$

3° Studiul experimental al unei funcții $y = f(x)$ a dat, pentru valorile $x_1, x_2, \dots, x_n$ ale variabilei x , valorile corespunzătoare $y_1, y_2, \dots, y_n$ ale funcției y .

Raportat la un reper ortonormat, graficul celor n puncte de coordonate $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ arată că aceste puncte sînt sensibil în linie dreaptă cu originea coordonatelor. Se adoptă deci ca lege a relației între x și y , legea: $y = mx$.

a) Să se determine m în funcție de $x_1, x_2, \dots, x_n$ și de $y_1, y_2, \dots, y_n$, astfel ca expresia:

$$S = (y_1 - mx_1)^2 + (y_2 - mx_2)^2 + \dots + (y_n - mx_n)^2$$

să fie minimă.

Să se calculeze m în cazul în care $n = 4$ și:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 1,98; \quad x_3 = 3; \quad x_4 = 4;$$

$$y_1 = 2,02; \quad y_2 = 4; \quad y_3 = 5,98; \quad y_4 = 8,02.$$

b) Să se determine m în funcție de $x_1, x_2, \dots, x_n$ și de $y_1, y_2, \dots, y_n$ astfel ca expresia:

$$T = \left(\frac{y_1}{m} - x_1 \right)^2 + \left(\frac{y_2}{m} - x_2 \right)^2 + \dots + \left(\frac{y_n}{m} - x_n \right)^2$$

să fie minimă.

Să se calculeze m pentru cele patru valori precedente.

c) Avem: $S = m^2 T$. Să se deducă, printr-o derivare, că S și T nu pot fi minime pentru o aceeași valoare a lui m , decît dacă avem:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \dots = \frac{y_n}{x_n}.$$

11.36 1° Se consideră un șir de numere: $u_1, u_2, \dots, u_n$ și se pune: $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Se dă $s_n = n \left(\frac{n^2}{4} - an + b \right)$, a și b fiind constante. Să se calculeze u_n .

2° Să se deducă expresia fiecăreia dintre sumele:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2;$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1).$$

3° Să se reia pentru cazul general. Alegeți a și b astfel ca termenii $u_1, u_2, \dots, u_n$ să fie pozitivi. Rezultatele se vor interpreta grafic, după poziția punctului $P(a, b)$, într-un reper ortonormat.

4° Studiați funcția f :

$$f = \left[x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \right]$$

și construiți-l graficul.

5° Să se demonstreze că avem, pentru orice x mai mare ca 0:

$$x - \frac{x^2}{2} < f(x) < x.$$

6° Să se încadreze suma:

$$S = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n^2}\right),$$

și calculați limita lui S_n când n tinde către $+\infty$.

11.37 Numărul e reprezintă baza funcției logaritmice neperiene, funcție notată Log .

Se consideră relația:

$$y' + y = e^{-x}, \quad (1)$$

în care x este o variabilă reală oarecare, y o funcție necunoscută de variabilă x (care urmează a fi determinată precis) și y' prima derivată a lui y .

1° Se ia $y = xe^{-x}$, definind astfel o nouă funcție x , a cărei derivată este notată x' . Să se calculeze y' în funcție de x , x' și formați relația satisfăcută de x' . Să se deducă toate funcțiile y care verifică relația (1).

2° Utilizând faptul că $\frac{1}{t} \text{Log } t$ are o limită zero atunci când variabila t tinde către $+\infty$, demonstrați că xe^{-x} are de asemenea o limită zero atunci când variabila x tinde către $+\infty$.

3° Revenind la relația (1), se notează pentru orice număr real λ , cu y_λ valoarea soluției relației (1) care ia valoarea λ pentru $x = 0$.

Să se verifice egalitatea:

$$y_\lambda = (x + \lambda)e^{-x},$$

apoi relația:

$$y'_\lambda = -y_{\lambda-1}.$$

4° Într-un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ($\vec{i}$ și $\vec{j}$ fiind vectori unitate ai suportului Ox și respectiv Oy), se notează prin Γ_λ curba reprezentativă a funcției y . Să se determine variațiile funcției y_λ și construiți sumară curba Γ_λ . Se va preciza, în special, alura brațelor infinite ale lui Γ_λ . Curba Γ_λ are un singur punct, S_λ , în care tangenta sa este paralelă cu axa Ox . Să se determine coordonatele punctului S_λ , apoi mulțimea S descrisă de punctul S_λ atunci când λ descrie mulțimea tuturor numerelor reale.

5° Să se demonstreze că, printr-un punct dat M_0 al planului, de coordonate (x_0, y_0) trece o curbă Γ_λ , și numai una.

Să se determine λ în funcție de coordonatele (x_0, y_0) .

6° Se dau trei numere reale, λ, μ, v , distincte două câte două și se notează cu M_λ, M_μ, M_v punctele curbelor $\Gamma_\lambda, \Gamma_\mu, \Gamma_v$ de aceeași abscisă variabilă x .

Să se demonstreze că raportul algebric $\frac{MM_0}{MM_v}$ rămâne constant atunci când x variază. Re-

ciproc, fie N punctul de pe dreapta $M_\lambda M_\mu$ care împarte segmentul $[M_\lambda, M_\mu]$ într-un raport algebric dat h ($h \neq 1$), h fiind independent de abscisa x . Să se demonstreze că, dacă x variază, punctul N descrie o curbă Γ_σ pentru o valoare σ convenabilă, care depinde de h .

Se presupune $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $v = -1$ și se notează prin N conjugata armonică a punctului M_{-1} în raport cu punctele M_0 și M_1 . Care este mulțimea punctelor N , atunci când x variază?

7° Fie x_0 o abscisă fixă. Se notează totdeauna, pentru orice λ , prin M_λ punctul de pe Γ_λ de abscisă x_0 și se duce tangenta T la curba Γ_λ în punctul M_λ .

Să se scrie ecuația tangentei T_λ .

Să se arate că dacă λ variază (abscisa x_0 rămânând fixă), tangenta T_λ trece printr-un punct fix, T .

Să se determine, în funcție de x_0 , coordonatele punctului T și deduceți de aici o construcție cât mai simplă a punctului T , făcând să intervină curba S .

8° Se ia o unitate grafică egală cu 5 cm. Ținând cont de rezultatele precedente, trasați cu grijă, pe hîrtie milimetrică, curbele Γ_{-1} , Γ_0 , Γ_1 . Mai întîi se va poziționa curba S luînd ca valori apropiate ale funcției e^{-x} , următoarele valori:

x	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
e^{-x}	1,65	1	0,61	0,37	0,22	0,14

Se vor trasa apoi curbele Γ_{-1} , Γ_0 , Γ_1 precizînd punctele și tangentele cu abscise $-\frac{1}{2}$, 0 , $\frac{1}{2}$, 1 , $\frac{3}{2}$.

11.38. Notății. $\text{Log } a$ reprezintă logaritmul neperian al numărului a , e este baza logaritmilor neperieni. Se va lua în calcul 2,72 ca valoare aproximativă a lui e .

Se consideră funcția f :

$$f = [x \mapsto xe - \text{Log } x].$$

1° Să se studieze variația lui f .

2° Să se calculeze ordonata punctului de pe grafic, de abscisă 1. Determinați ecuația tangentei în acest punct.

3° Să se determine punctul de contact al tangentei care trece prin originea axelor de coordonate.

4° Utilizînd rezultatele precedente, construiți graficul acestei funcții, într-un sistem de axe perpendiculare nenormate (curba C). Vectorul unitate al axei $x'Ox$ va avea drept modul 6 cm, iar cel al axei $y'Oy$, 2 cm.

5° Determinați o primitivă F a lui f .

Să se determine aria domeniului plan cuprins între curba C , axa absciselor și dreptele de ecuații $x = \frac{1}{2}$, respectiv $x = 1$.

11.39 Simbolul Log reprezintă logaritmul neperian, e reprezintă baza logaritmului acestuia, $\text{Log } e = 1$.

Fie ecuația de gradul doi definită prin:

$$x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - 2ax + e^{ab} = 0, \quad (1)$$

în care x reprezintă necunoscuta și a și b sînt doi parametri.

A) 1° Să se rezolve ecuația atunci cînd parametrilor a și b li se atribuie următoarele valori:

$$a = 1, b = 0; a = -2, b = \text{Log } 2; a = 5, b = \text{Log } 4.$$

2° Ce relație trebuie să verifice a și b pentru ca ecuația (1) să admită două rădăcini egale? Să se rezolve ecuația în cazul cînd această relație este verificată.

Se dă $a = -3$. Să se determine pe b , cu precizia dată de tabelele de logaritmi, pentru ca ecuația (1) să admită două rădăcini egale.

3° Dacă b este dat, pentru ce valori ale lui a ecuația (1) admite două rădăcini distincte?

Dacă a este dat, pentru ce valori ale lui b , ecuația (1) admite două rădăcini distincte?

4° Dacă rădăcinile există, ce relație independentă de a există între ele dacă $b = 0$?

Rădăcinile există dacă $a = 0$?

B) Fie $\mathcal{R}$ un reper ortonormat al planului. Fiecărui cuplu (a, b) i se face să corespundă punctul M al planului, ale cărui coordonate în raport cu $\mathcal{R}$ sînt a și b .

1° Să se construiască cu grijă graficul funcției $[b \mapsto \text{Log } a]$ și al funcției $[b \mapsto \text{Log } (-a)]$.

2° Să se studieze, după poziția lui M în plan, existența și semnul rădăcinilor ecuației (1). Indicați pe grafic rezultatele obținute.

3° În cele ce urmează, se presupune că $a = b$. În acest caz ecuația (1) se scrie:

$$x \in \mathbb{R} \text{ și } x^2 - ax + e^{2a} = 0. \quad (2)$$

α) Să se găsească mulțimea punctelor M pentru care ecuația (2) admite rădăcini.

β) Să se determine poziția M_0 a lui M astfel ca ecuația (2) să admită două rădăcini egale.

Cu precizia permisă de grafic, găsiți o valoare aproximativă a abscisei a_0 a lui M_0 .

γ) Să se determine mulțimea punctelor M pentru care ecuația (2) admite două rădăcini distincte. După poziția lui M , indicați semnul rădăcinilor. Să se demonstreze că există între aceste rădăcini o relație independentă de a .

11.40 Se consideră, într-un reper ortonormat, curba H de ecuație $y = \frac{1}{x}$.

Fie x un număr pozitiv.

Se notează cu P și P' două puncte ale axei $x'x$ astfel ca:

$$\overline{OP} = x, \quad \overline{OP'} = \frac{e^2}{x},$$

e fiind baza logaritmilor neperieni

Fie M și M' punctele curbei H care se proiectează ortogonal în P și P' pe axa $x'x$.

1° Să se calculeze aria, S a suprafeței limitate prin axa absciselor, dreptele MP și $M'P'$ și curba H .

2° Se consideră funcția f definită prin:

$$S(x) = 2 - 2 \operatorname{Log} x \quad \text{pentru: } 0 < x \leq e,$$

$$S(x) = 2 \operatorname{Log} x - 2 \quad \text{pentru: } x \geq e.$$

Să se calculeze derivata funcției S pentru: $x \neq e$.

Să se studieze variațiile lui S și construiți graficul său.

Să se precizeze pe acest grafic tangenta în punctul de abscisă $x = e$.

3° Să se calculeze valorile lui x pentru care aria S este egală cu 2.

4° Să se studieze limita în e a funcției:

$$\left[x \mapsto \frac{S(x)}{2(x - e)} \right].$$

(Se vor studia eventual limitele la dreapta și la stînga).

11.41 Fie funcția $f = \left[x \mapsto \operatorname{Log} \frac{x^2}{x+1} \right]$ (Log reprezintă logaritmul neperian).

1° Pentru ce valori ale lui x este definită această funcție?

2° Să se determine derivata f' a lui f .

Întocmiți tabloul variațiilor funcțiilor date.

Acest tablou se va completa după studiul limitelor lui f când x tinde către anumite valori particulare.

3° Să se calculeze valorile aproximative ale lui f , corespunzătoare următoarelor valori ale lui x :

$$x = -\frac{3}{4}, \quad x = -\frac{1}{2}; \quad x = -\frac{1}{4},$$

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 5, \quad x = 10,$$

cu ajutorul următoarelor date:

$$\operatorname{Log} 2 \approx 0,69, \quad \operatorname{Log} 3 \approx 1,10, \quad \operatorname{Log} 6 \approx 1,79,$$

$$\operatorname{Log} 11 \approx 2,40, \quad \operatorname{Log} 12 \approx 2,48, \quad \operatorname{Log} 25 \approx 3,22.$$

$$\operatorname{Log} 100 \approx 4,60.$$

4° Să se construiască graficul acestei funcții într-un reper ortonormat (O, i, j) (unitate 2 cm).

11.42 1° Se consideră funcția f :

$$f = \left[x \mapsto 1 - \frac{1}{x} + \text{Log } x \right].$$

(Simbolul Log reprezintă logaritmul neperian).

Care este valoarea lui $f(x)$ pentru $x = 1$?

Să se studieze variația funcției f (nu s-a cerut și curba reprezentativă). Deduceți din acest studiu semnul lui $f(x)$, după valorile lui x .

2° Fie acum, funcția g :

$$g = [x \mapsto x - 1 \text{ Log } x].$$

Să se studieze variațiile sale și construiți curba sa reprezentativă, C , într-un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ($\vec{i}$ și $\vec{j}$ sînt vectori unitate ai suportului Ox , respectiv Oy).

3° Să se exprime, cu ajutorul numărului e (baza logaritmilor neperieni), abscisele nesituate pe Ox , în care C este tăiată de dreapta de ecuație $y = x - 1$.

4° Mai general, fie dreapta D , trecînd prin punctul A de coordonate $x = 1, y = 0$, și de pantă m , nenulă.

Să se discute, după valorile lui m , existența punctelor nesituate pe Ox , în care D taie pe C . Găsiți relația independentă de m care leagă abscisele x' și x'' a acestor puncte, în cazul în care există.

12. SPAȚII PROBABILISTICE FINITE

12.1 Algebre Boole

12.2 Spații probabilistice finite

12.3 Probabilități pe o mulțime oarecare

12.4 Probabilități condiționate

12.5 Produse de probabilități

12.1 ALGEBRE BOOLE

12.1.1 Definiție

Să ne reamintim (Alef₀, Algebră I, Mulțimi, statistică, probabilități, 2.4), că o mulțime $\mathcal{S}$ este înzestrată cu o structură algebrică Boole dacă s-au definit pe $\mathcal{S}$ două legi de compoziție internă $\top$ și $\perp$, și o aplicație γ a lui $\mathcal{S}$ în $\mathcal{S}$, astfel ca:

$$\exists_{\mathcal{S}} \alpha, \exists_{\mathcal{S}} \omega, \forall_{\mathcal{S}} a, \forall_{\mathcal{S}} b, \forall_{\mathcal{S}} c$$

$a \top a = a \perp a = a$ (Orice element este idempotent pentru legea $\top$ și pentru legea $\perp$.)

$$\left. \begin{aligned} a \top b &= b \top a \\ a \perp b &= b \perp a \end{aligned} \right\}$$

(Legile $\top$ și $\perp$ sînt comutative în $\mathcal{S}$.)

$$\left. \begin{aligned} a \top (b \top c) &= (a \top b) \top c \\ a \perp (b \perp c) &= (a \perp b) \perp c \end{aligned} \right\}$$

(Legile $\top$ și $\perp$ sînt asociative în $\mathcal{S}$.)

$$\left. \begin{aligned} a \top (b \perp c) &= (a \top b) \perp (a \top c) \\ a \perp (b \top c) &= (a \perp b) \top (a \perp c) \end{aligned} \right\}$$

(Legea $\top$ este distributivă în raport cu legea $\perp$; legea $\perp$ este distributivă în raport cu $\top$.)

$$\left. \begin{aligned} a \top \alpha &= a \\ a \perp \alpha &= \alpha \end{aligned} \right\}$$

(Există un element α a lui $\mathcal{S}$, simultan neutru pentru legea $\top$ și absorbant pentru legea $\perp$ (fie α .)

$$\left. \begin{aligned} a \top \omega &= \omega \\ a \perp \omega &= a \end{aligned} \right\}$$

(Există un element ω a lui $\mathcal{S}$, simultan neutru pentru legea $\perp$ și absorbant pentru legea $\top$ (fie ω .)

$$\gamma[\gamma(a)] = a$$

(γ este involutivă).

Se notează adesea: $\gamma(a) = \bar{a}$.

Cu această notație:

$$\bar{\bar{a}} = a; a \perp \bar{a} = \alpha; a \top \bar{a} = \omega.$$

Mai mult, într-o algebră Boole sînt valabile următoarele proprietăți:

$$\begin{aligned} & \forall_s a, \forall_s b \\ & \left. \begin{aligned} a \perp (a \top b) &= a \\ a \top (a \perp b) &= a \end{aligned} \right\} \text{(legile lui Boole).} \\ & \left. \begin{aligned} a \top b &= \bar{a} \perp \bar{b} \\ a \perp b &= \bar{a} \top \bar{b} \end{aligned} \right\} \text{(legile lui Morgan).} \end{aligned}$$

Printre altele, dacă legea de compoziție internă $\square$ este definită prin: $\forall_s a, \forall_s b, a \square b = (a \top b) \perp (\bar{a} \top \bar{b})$,

structura $(\mathcal{B}, \square, \perp)$ este un inel în care orice element este idempotent (inel al lui Boole).

(De remarcat că o algebră Boole nu este niciodată vidă).

Să ne reamintim în fine că, fiind dată o mulțime E , mulțimea $\mathcal{B}(E)$ înzestrată cu intersecția, cu reuniunea și cu operația de complementare este o algebră Boole.

12.1.2 Subalgebre Boole în $(\mathcal{B}(E), \cup, \cap, \gamma)$

DEFINIȚIE. Fie $\mathcal{B}(E)$ o submulțime a lui $\mathcal{B}(E)$. Dacă $\mathcal{B}(E)$, înzestrată cu reuniunea, intersecția și complementarea este o algebră Boole, se spune că este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}(E)$.

Pentru ca o submulțime $\mathcal{B}(E)$ a lui $\mathcal{B}(E)$ să fie o subalgebră Boole față de $\mathcal{B}(E)$, este necesar și suficient ca $\mathcal{B}(E)$ să fie „stabilă” (sau „închisă”) pentru operațiile de intersecție, de reuniune și de complementare. (Demonstrația acestei proprietăți face obiectul exercitiului 12.1).

Se demonstrează deci, și vom admite, că există o partiție E^* a lui E , astfel ca algebrele Boole $\mathcal{B}(E)$ și $\mathcal{B}(E^*)$ să fie izomorfe:

$$\begin{aligned} & (E^* = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_h\}; \quad \eta_i \in \mathcal{B}(E), \\ & \forall_{1, \dots, n}^i, \forall_{1, \dots, n}^j \quad \eta_i \cap \eta_j = \emptyset, \\ & \bigcup_{i=1}^{i=h} \eta_i = \eta_1 \cup \eta_2 \cup \dots \cup \eta_h = E). \end{aligned}$$

Să remarcăm faptul că intersecția a două subalgebre Boole a lui $\mathcal{B}(E)$ este de asemenea o subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}(E)$ (exercitiul 12.2).

Exemplu. Fie: $E = \{a, b, c, d\}$.

Avem:

$\mathcal{B}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, E\}$.

$\mathcal{B}_0(E) = \{\emptyset, E\}$ este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}(E)$;

$$E_0^* = \{E\}, \quad \mathcal{B}(E_0^*) = \{\emptyset, E\}.$$

Fie i aplicația lui $\mathcal{B}_0(E)$ în $\mathcal{B}(E_0)$ definită prin:

$$\begin{aligned} i(\emptyset) &= \emptyset, \\ i(E) &= \{E\}. \end{aligned}$$

Avem:

$$\begin{aligned} i(\emptyset \cup E) &= i(E) = \{E\}, & i(\emptyset \cap E) &= i(\emptyset) = \emptyset \\ i(\emptyset) \cup i(E) &= \emptyset \cup \{E\} = E, & i(\emptyset) \cap i(E) &= \{\emptyset \cap \{E\} = \emptyset, \\ i(\overline{\emptyset}) &= I(E) = \{E\}, & i(\overline{E}) &= i(\emptyset) = \emptyset. \\ i(\overline{\emptyset}) &= \overline{\emptyset} = \{E\}, & i(\overline{E}) &= \overline{\{E\}} = \emptyset. \end{aligned}$$

i este un izomorfism al algebrelor Boole $\mathfrak{B}_0(E)$ și $\mathfrak{A}(E_0)$:

$$\mathfrak{B}_0(E) \simeq (E_0^*)$$

$\mathfrak{B}_1(E) = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, E\}$ este o subalgebră Boole a lui $\mathfrak{A}(E)$.

Fie: $E_1^* = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}.$

Se verifică: $\mathfrak{B}_1(E) \simeq \mathfrak{A}(E_1^*).$

12.2 SPAȚII PROBABILISTICE FINITE

12.2.1 Spații probabilizabile

DEFINIȚIE. Fie E o mulțime finită și fie $\mathfrak{B}(E)$ o subalgebră Boole a lui $\mathfrak{A}(E)$.
Cuplul $(E, \mathfrak{B}(E))$ este numit spațiu finit probabilizabil.

În prima clasă nu ne-am ocupat decât de spații finite probabilizabile de forma $(E, \mathfrak{A}(E))$.

12.2.2 Vocabular al evenimentelor

Fie $(E, \mathfrak{B}(E))$ un spațiu finit, probabilizabil. Să ne reamintim vocabularul întâlnit în clasa întâi, și care rămâne aproape integral valabil.

E este *universul posibilităților* (sau al eventualităților)

Un element a lui $\mathfrak{B}(E)$ este un eveniment. (Nu orice submulțime a lui E este în mod necesar un eveniment.)

Dacă A este un eveniment, complementarul său $\bar{A}$ este un eveniment: evenimentul contrar lui A .

E este un eveniment: *eveniment sigur*.

$\emptyset$ este un eveniment: *eveniment imposibil*.

Dacă A și B sînt evenimente, $A \cap B$ este un eveniment: *conjuncția evenimentelor* A și B .

Dacă A și B sînt evenimente astfel încît: $A \cap B = \emptyset$, A și B sînt numite *incompatibile*.

Dacă A și B sînt evenimente, $A \cup B$ este un eveniment: *disjuncția inclusivă* a evenimentelor A și B .

O partiție a lui E formată din evenimente este un *sistem complet* de evenimente.

Fie A și B două evenimente astfel că: $A \subset B$. Se spune atunci că A *implică* pe B .

Un eveniment al spațiului finit probabilistic $(E, \mathfrak{B}(E))$ ($\eta \in \mathfrak{B}(E)$) este numit *eveniment elementar* al acestui spațiu dacă și numai dacă:

$$\forall_{\mathfrak{B}(E)} A \quad A \subset \eta \Rightarrow [A = \eta \text{ sau } A = \emptyset].$$

Două evenimente elementare distincte sînt incompatibile (exercițiul 12.3). În cazul în care $\mathfrak{B}(E) = \mathfrak{B}(E)$, evenimentele elementare coincid cu evenimentele reduse la o singură posibilitate (submulțime a lui E , al cărui cardinal este 1).

Să remarcăm că vocabularul pe care îl dăm nu este decît o simplă transcriere, într-un limbaj particular, al vocabularului mulțimilor.

Exemplu. Fie $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(E poate fi considerat ca universul posibilelor corespunzător rezultatului aruncării unui zar). Să presupunem că nu ne interesăm decît de paritatea rezultatului.

Se alege: $\mathfrak{B}_0(E) = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, E\}$.

Evenimentele elementare sînt în acest caz: $A = \{1, 3, 5\}$ și $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$.

Să remarcăm deci că: $\mathfrak{B}_0(E) \simeq \mathfrak{B}(\{A, \bar{A}\})$.

Dacă ne interesează numărul de divizori ai rezultatului, alegem:

$\mathfrak{B}_1(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 5\}, \{4\}, \{6\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{2, 3, 5, 4\}, \{2, 3, 5, 6\}, \{4, 6\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 5, 4\}, \{1, 2, 3, 5, 6\}, \{2, 3, 5, 4, 6\}, E\}$.

Evenimentele elementare sînt deci:

$$\eta_1 = \{1\}, \eta_2 = \{2, 3, 5\}, \eta_3 = \{4\}, \eta_4 = \{6\},$$

și avem: $\mathfrak{B}_1(E) \simeq \mathfrak{B}(\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\})$.

OBSERVAȚIE. — Fiind dat un spațiu finit probabilizabil $(E, \mathfrak{B}(E))$, se demonstrează că mulțimea E^* , astfel ca: $\mathfrak{B}(E) \simeq \mathfrak{B}(E^*)$, este mulțimea evenimentelor elementare ale lui $\mathfrak{B}(E)$.

12.2.3 Probabilitate pe un spațiu finit probabilizabil

DEFINIȚIE. Fiind dat un spațiu finit probabilizabil $(E, \mathfrak{B}(E))$, se numește

1 probabilitate pe $(E, \mathfrak{B}(E))$ orice aplicație p a lui $\mathfrak{B}(E)$ în $\mathbb{R}$ care satisface următoarele axiome:

1 Pentru orice element A a lui $\mathfrak{B}(E)$:

$$p(A) \geq 0.$$

2

$$p(E) = 1.$$

3 Dacă A și B sînt două evenimente:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

Axioma 3 este numită formula probabilităților totale.

DEFINIȚIE. În condițiile precedente, tripletul $(E, \mathfrak{B}(E), p)$ este un spațiu
2 finit probabilistic.¹⁾

12.2.4 Proprietăți fundamentale

Proprietățile întâlnite în prima clasă (Alef₀, Algebră I Mulțimi, statistică, probabilități, 5.2.2) cu privire la spațiile finite probabilistice de forma $(E, \mathfrak{B}(E), p)$ sînt valabile în cazul unui spațiu finit probabilistic mai general. Demonstrațiile sînt întru totul analoage, ținînd seama de faptul că $\mathfrak{B}(E)$ fiind o subalgebră Boole a lui $\mathfrak{B}(E)$ este stabilă față de operațiile de reuniune, intersecție și complementare în E (exercițiile de la 12.4 la 12.6). Vom aminti în continuare, fără demonstrație, aceste diverse proprietăți fundamentale.

$(E, \mathfrak{B}(E), p)$ fiind un spațiu finit probabilistic, avem:

$$\forall_{\mathfrak{B}(E)} A, \forall_{\mathfrak{B}(E)} B \quad A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B);$$

$$\forall_{\mathfrak{B}(E)} A \quad p(A) \leq 1;$$

$$\forall_{\mathfrak{B}(E)} A \quad p(\bar{A}) = 1 - p(A), \quad p(\emptyset) = 0;$$

$$\forall_{\mathfrak{B}(E)} A, \forall_{\mathfrak{B}(E)} B \quad p(A) + p(B) = p(A \cup B) + p(A \cap B).$$

OBSERVAȚII. — 1 Evenimentul sigur nu este în mod necesar singurul care trebuie să aibă o probabilitate egală cu 1. (Un eveniment de probabilitate egală cu 1, și nu sigur, este uneori numit eveniment aproape sigur.)

2 Evenimentul imposibil nu este în mod necesar singurul care trebuie să aibă o probabilitate nulă. (Un eveniment nevid de probabilitate nulă este uneori numit eveniment aproape imposibil.)

3 A inclus în B și $p(A) = p(B)$ nu antrenează în mod necesar să avem $A = B$.

4 Ori care este evenimentul A a lui $\mathfrak{B}(E)$, există o partiție a lui A în evenimente elementare ale lui $\mathfrak{B}(E)$ (exercițiul 12.3). Rezultă că, pentru a defini o probabilitate pe $(E, \mathfrak{B}(E))$, este suficient să definim probabilitățile a k evenimente elementare ale lui $\mathfrak{B}(E)$, adică a elementelor partiției E^* .

Exemple. I. Fie:

$$E = \{a, b, c, d, e\}.$$

Fie:

$$\mathfrak{B}(E) = \{\emptyset, \{a, e\}, \{b, c, d\}, E\}.$$

Avem:

$$\mathfrak{B}(E) \simeq \mathfrak{B}(E^*),$$

cu:

$$E^* = \{\{a, e\}, \{b, c, d\}\}.$$

O probabilitate p pe $(E, \mathfrak{B}(E))$ se poate defini punînd, de exemplu:

$$p(\{a, e\}) = \frac{2}{5}.$$

¹⁾ În literatura românească de specialitate i se mai spune „cîmp finit de probabilitate” (N.red.)

Avem atunci:

$$p(\emptyset) = 0, \quad p(E) = 1, \quad p(\{b, c, d\}) = \frac{3}{5}.$$

II. Fie:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Avem:

$$\mathfrak{A}(E) \simeq \mathfrak{A}(E^*),$$

cu:

$$E^* = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}, \{7\}\}.$$

$$\mathfrak{A}(E) = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}, \{7\}, \{1, 3, 5, 2, 4\}, \{1, 3, 5, 6\}, \{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 7\}, \{6, 7\}, \{1, 3, 5, 2, 4, 6\}, \{1, 3, 5, 2, 4, 7\}, \{1, 3, 5, 6, 7\}, \{2, 4, 6, 7\}, E\}.$$

Se poate înzestra $(E, \mathfrak{A}(E))$ cu probabilitatea p , definită prin:

$$p(\{1, 3, 5\}) = \frac{1}{2}, \quad p(\{2, 4\}) = \frac{1}{4}, \quad p(\{6\}) = \frac{1}{4}, \quad p(\{7\}) = 0.$$

Aceste probabilități definesc probabilitatea unui eveniment oarecare. Orice element al lui $\mathfrak{A}(E)$ este efectiv o reuniune de evenimente elementare, două câte două disjunctive. De exemplu:

$$\{1, 3, 5, 7\} = \{1, 3, 5\} \cup \{7\}; \quad \{1, 3, 5\} \cap \{7\} = \emptyset;$$

$$p(\{1, 3, 5, 7\}) = p(\{1, 3, 5\}) + p(\{7\}) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2};$$

$$\{1, 3, 5, 6, 7\} = \{1, 3, 5\} \cup \{6\} \cup \{7\};$$

$$p(\{1, 3, 5, 6, 7\}) = p(\{1, 3, 5\}) + p(\{6\}) + p(\{7\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 = \frac{3}{4}.$$

Se observă:

$$p(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1,$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \neq E.$$

OBSERVAȚIE. — Studiul unei probleme de probabilitate începe în mod necesar prin determinarea algebrei evenimentelor $\mathfrak{A}(E)$, apoi prin cele ale probabilității p . Determinarea probabilității p conduce frecvent la probleme de numărătoare (recenzămînt), mai cu seamă în cazul foarte frecvent al unui spațiu finit probabilistic de forma $(E, \mathfrak{A}(E), p)$ în care probabilitatea p este uniformă (vezi Alef₀, Algebra I, Mulțimi, statistică, probabilități, capitolele 3 și 5).

12.3 PROBABILITĂȚI PE O MULȚIME OARECARE¹

12.3.1 Algebre de probabilități

DEFINIȚIE. Se numește algebră de probabilități pe o mulțime oarecare E , orice parte $\mathfrak{A}$ a mulțimii părților $\mathfrak{A}(E)$ conținînd:

- mulțimea E ;
- complementarul $\bar{A}$ al oricărui element A al lui $\mathfrak{A}$;
- reuniunea oricărui șir A_n de elemente ale lui $\mathfrak{A}$.

¹ Cu toate că această parte nu figurează explicit în programă, ne-a părut interesant să o expunem cititorilor.

Observație. — O algebră de probabilități pe o mulțime E este o subalgebră Boole a lui $\mathfrak{A}(E)$; dar, reciproc, orice subalgebră Boole a lui $\mathfrak{A}(E)$ nu este în mod necesar o algebră de probabilități pe E . Dacă E este finit, și numai în acest caz, orice subalgebră Boole a lui $\mathfrak{A}(E)$ este o algebră de probabilități.

Exemplu. I. $\mathfrak{A}(E)$ este o algebră de probabilități.

II. Mulțimea $\mathfrak{A}$ a submulțimilor finite ale lui N și a complementarelor lor nu este o algebră de probabilități, cu toate că aceasta este o subalgebră Boole a lui $\mathfrak{A}(N)$; într-adevăr, $\mathfrak{A}$ nu conține mulțimea numerelor pare, care este reuniunea mulțimilor finite:

$$A_n = \{2n\}.$$

Observații. — 1 Nu trebuie să se confunde „șirul” cu „mulțimea”. Pe de o parte, într-adevăr, un șir nu conține decât o infinitate numărabilă a mulțimilor A_n (adică o mulțime a mulțimilor ce pot fi indexate cu ajutorul numerelor întregi). Pe de altă parte, două familii indexate prin două mulțimi de indici diferiți pot avea totuși aceleași elemente.

2 Să ne reamintim definiția reuniunii unei familii de mulțimi: este mulțimea de elemente a aparținând cel puțin uneia dintre mulțimile familiei. Intersecția lor este, oricum, mulțimea de elemente aparținând tuturor mulțimilor familiei. Astfel:

$$N = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{0, 1, 2, \dots, n\}, \quad \{0\} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n} \right].$$

3 O algebră de probabilități conține de asemenea:

a) reuniunea unui număr finit de elemente ale lui $\mathfrak{A}$ (este suficient de exemplu să punem:

$$A_n = A_{n+1} = A_{n+2} = \dots,$$

de unde:

$$A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{p=0}^{+\infty} A_p \in \mathfrak{A};$$

b) intersecția unui număr finit de elemente ale lui $\mathfrak{A}$, sau intersecția unui șir de elemente ale lui $\mathfrak{A}$: este suficient să se treacă la complementare, deoarece:

$$\bigcup_{p=0}^{+\infty} A_p = \bigcap_{p=0}^{+\infty} A_p.$$

12.3.2 Probabilități

DEFINIȚIE. Fiind dată o mulțime E și o algebră de probabilități $\mathfrak{A}$ definite pe E , se numește probabilitate p definită pe $\mathfrak{A}$ orice aplicație a lui $\mathfrak{A}$ în mulțimea numerelor reale care satisface următoarele axiome:

1 Pentru orice element A a lui $\mathfrak{A}$:

$$p(A) \geq 0.$$

2

$$p(E) = 1.$$

3 Dacă șirul A_n este format din elemente ale lui $\mathfrak{A}$. două câte două disjunctive:

$$p\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^m p(A_n).$$

(Formula aditivității complete).

Elementele lui $\mathcal{A}$ sînt și aici numite evenimente. Să notăm că se scrie în general:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m p(A_n).$$

Observație. — 1 Dacă mulțimea E este finită sau numărabilă (adică, imaginea lui N printr-o injecție) se poate lua:

$$\mathcal{A} = \mathfrak{B}(E).$$

Aceasta este imposibil în general pentru mulțimile mai bogate decît $\mathbb{R}$: noi o admitem.

2 Dacă E este finită, orice șir A_n de evenimente două cîte două incompatibile este în mod necesar formată dintr-un număr finit de mulțimi nevide și dintr-un număr infinit de mulțimi vide; există un m astfel că, pentru n superior sau egal cu m :

$$A_m = A_{m+1} = \dots = A_n = \dots = \emptyset.$$

Axioma 3 este deci echivalentă cu axioma 3 a cazului în care E este finită. Sînt total valabile proprietățile de mai jos:

$$\begin{aligned} & \forall_{\mathcal{A}} A, \forall_{\mathcal{A}} B, \\ & A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B), \\ & p(A) \leq 1, \\ & p(\bar{A}) = 1 - p(A), \\ & p(\emptyset) = 0, \\ & p(A) + p(B) = p(A \cup B) + p(A \cap B), \\ & p(A \cup B) \leq p(A) + p(B). \end{aligned}$$

Dacă $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ este o partiție finită a lui E :

$$p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) = 1.$$

În continuare, noțiunile și proprietățile care nu fac să intervină explicit caracterul finit a lui E vor fi de asemenea valabile în cazul unui spațiu probabilistic oarecare $(E, \mathcal{A}, p)$.

12.4 PROBABILITĂȚI CONDIȚIONATE

12.4.1 Independența a două evenimente relativ la o probabilitate

Fie A și B două evenimente ale unui spațiu probabilistic $(E, \mathfrak{B}(E), p)$.

DEFINIȚIA. Evenimentele A și B sînt numite independente, relativ la probabilitatea p , dacă și numai dacă:

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Exemplu. Pot fi independente două evenimente contrare?

Fie:

$$p = p(A), \quad 1 - p = p(\bar{A}).$$

Intruct:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset,$$

este necesar și suficient ca: $0 = p(1 - p)$.

O condiție necesară și suficientă este ca: $p(A) = 0$ sau $p(A) = 1$.

Se va arăta de asemenea o condiție necesară și suficientă ca A să fie independent de el însuși ($p = p^2$), cît și față de orice eveniment B .

OBSERVAȚIE. — Trebuie să ne ferim de a confunda *incompatibilitatea cu independența*.

Prima noțiune este definită fără referire la o probabilitate prin relația:

$$A \cap B = \emptyset.$$

Cea de a doua depinde de probabilitatea p și este definită prin relația:

$$p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

Astfel, considerăm mulțimea $E = \{a, b\}$ înzestrată cu probabilitățile:

$$p(a) = 0, \quad p(b) = 1,$$

$$q(a) = q(b) = \frac{1}{2}.$$

Evenimentele $\{a\}$ și $\{b\}$ sînt incompatibile. Ele sînt independente pentru probabilitatea p , dar nu pentru probabilitatea q . Evenimentele $\{a\}$ și E nu sînt incompatibile. Ele sînt independente pentru probabilitatea p , dar nu pentru probabilitatea q .

Pentru ca două evenimente incompatibile să fie independente, este necesar și suficient ca unul dintre ele să aibă o probabilitate nulă. De exemplu: A și $\bar{A}$, dacă $p(A)$ este egal cu 0 sau cu 1.

Mai general, două sisteme complete de evenimente ale unui spațiu probabilistic $(E, \mathfrak{B}(E), p)$:

$$\{A_1, \dots, A_p, \dots, A_m\} \text{ și } \{B_1, \dots, B_j, \dots, B_l\}$$

sînt independente relativ la probabilitatea p dacă, pentru orice cuplu (i, j) în care:

$$1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq l,$$

se poate scrie:

$$p(A_i \cap B_j) = p(A_i)p(B_j).$$

Exemplu. Să se demonstreze că, pentru ca sistemele $\{A, \bar{A}\}$ și $\{B, \bar{B}\}$ să fie independente, este necesar și suficient ca evenimentele A și B să fie independente.

Condiția este evident necesară. Dacă este verificată, se notează:

$$p = p(A), \quad q = p(B).$$

se vede că:

$$p(A \cap B) = pq,$$

de unde:

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) =$$

$$= p - pq = p(1 - q)$$

$$= p(A)p(\bar{B}).$$

$$p(\bar{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$$

$$= q - pq = q(1 - p) = p(B)p(\bar{A}),$$

și în fine:

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) - p(A \cap \bar{B}) =$$

$$= (1 - p) - q(1 - p) = (1 - q)(1 - p)$$

$$= p(\bar{B})p(\bar{A}).$$

Tablourile următoare arată independența sistemelor $\{A, \bar{A}\}$ și $\{B, \bar{B}\}$, și dau probabilitățile intersecțiilor evenimentelor $A, \bar{A}, B, \bar{B}$.

$A \cap B$	$A \cap \bar{B}$
$\bar{A} \cap B$	$\bar{A} \cap \bar{B}$

U

$\cap$	A	$\bar{A}$	Total
B	pq	$(1-p)q$	q
$\bar{B}$	$p(1-q)$	$(1-p)(1-q)$	$1-q$
Total	p	$1-p$	1

Un exemplu foarte simplu este dat la bridge, dacă se trage o carte neagră sau o carte roșie, un onor sau o carte mică.

$$\left(\text{alci: } p = \frac{1}{2}, q = \frac{4}{13} \right).$$

DEFINIȚIA. Fie n evenimente $A_1, A_2, \dots, A_n$ ale unui spațiu probabilistic $(E, \mathfrak{B}(E), p)$.

Aceste evenimente se numesc global independente în totalitatea lor pentru probabilitatea p dacă, ori care ar fi submulțimea $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ al lui $\{1, 2, \dots, n\}$, avem:

$$p(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = p(A_{i_1}) \times p(A_{i_2}) \times \dots \times p(A_{i_k}).$$

Această definiție generalizează definiția 1 pentru cazul mai multor evenimente.

Ea atrage imediat faptul că, dacă n evenimente sînt independente în totalitatea lor pentru probabilitatea p , atunci ele sînt independente două cîte două.

Reciproc, nu este suficient ca n evenimente să fie independente două cîte două pentru ca ele să fie independente în totalitatea lor.

Exemplu. Fie $E = \{a, b, c, d\}$ și fie spațiul finit probabilistic $(E, \mathfrak{B}(E), p)$ definit prin:

$$p(\{a\}) = \frac{1}{4}; \quad p(\{b\}) = \frac{1}{4};$$

$$p(\{c\}) = \frac{1}{4}; \quad p(\{d\}) = \frac{1}{4}.$$

Fie: $A_1 = \{b, c\}, \quad A_2 = \{a, c\}, \quad A_3 = \{b, c\}.$

Avem: $p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= \{c\}, \\ A_1 \cap A_3 &= \{b\}, \\ A_2 \cap A_3 &= \{c\}. \end{aligned}$$

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2) = \frac{1}{4},$$

$$p(A_1 \cap A_3) = p(A_1) \cdot p(A_3) = \frac{1}{4},$$

$$p(A_2 \cap A_3) = p(A_2) \cdot p(A_3) = \frac{1}{4}.$$

Cele trei evenimente A_1, A_2, A_3 sînt independente două cîte două; în același timp, ele nu sînt independente în totalitatea lor. Într-adevăr:

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 \cap A_3 &= \emptyset, \\ p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= 0, \\ p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

OBSERVAȚIE. — Caracterul finit al lui E nu a intervenit în acest paragraf.

12.4.2 Probabilitate condiționată relativă a unui eveniment de probabilitate nenulă

DEFINIȚIE. Fie un eveniment A al unui spațiu probabilistic $(E, \mathfrak{B}(E), p)$ astfel ca:

$$p(A) \neq 0.$$

Se numește probabilitate condiționată relativă a lui A probabilitatea definită pe $(E, \mathfrak{B}(E))$ prin formula:

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Se mai spune: *probabilitatea lui B știind că A este realizat*, și se notează uneori:

$$p(B|A) \text{ sau } p(B \text{ dacă } A).$$

■ p_A este o probabilitate pe $(E, \mathfrak{B}(E))$. Într-adevăr:

a)
$$p_A(B) \geq 0.$$

b)
$$p_A(E) = \frac{p(A \cap E)}{p(A)} = \frac{p(A)}{p(A)} = 1.$$

c) Dacă: $B \cap C = \emptyset$, atunci, afortiori:

și:
$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap (A \cap C) &= A \cap (B \cap C) = \emptyset, \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C); \end{aligned}$$

deci:
$$p(A \cap [B \cup C]) = p(A \cap B) + p(A \cap C),$$

adică:
$$p_A(B \cup C) = p_A(B) + p_A(C).$$

$(E, \mathfrak{B}(E), p_A)$ este deci un spațiu probabilistic.

OBSERVAȚIE. — Notăția $p(B|A)$ se pretează la o confuzie în măsura în care nu am definit ca „eveniment” $B|A$. O vom evita, ca notație $p(B \text{ dacă } A)$ și expresia:

„eveniment condiționat”,

Din contră, notația $p_A(B)$ nu prezintă acest inconvenient, mai ales dacă se observă că, pentru orice eveniment X :

$$p(X) = p_E(X).$$

■ Dacă $p(A)$ este nenul, relațiile :

$$p(A \cap B) = p(A)p(B) \text{ și } p_A(B) = p(B)$$

sînt echivalente. Se deduce :

TEOREMĂ. Un eveniment A de probabilitate nenulă este independent de un eveniment B dacă, și numai dacă :

$$p_A(B) = p(B).$$

■ A fiind un eveniment de probabilitate nenulă, se poate enunța formula probabilităților compuse :

$$p(A \cap B) = p(A)p_A(B)$$

care rezumă numeroase calcule.

Exemple. I. Se aruncă două zaruri. Suma obținută este pară. Care este probabilitatea ca pe primul zar să apară fața cu șase?

Fie A evenimentul „suma este pară”. Probabilitatea sa este suma probabilităților evenimentelor elementare egal posibile :

(1, 1),	(1, 3),	(1, 5),	(2, 2),	(2, 4),	(2, 6),
(3, 1),	(3, 3),	(3, 5),	(4, 2),	(4, 4),	(4, 6),
(5, 1),	(5, 3),	(5, 5),	(6, 2),	(6, 4),	(6, 6),

Deci : $p(A) = \frac{1}{2}$, ceea ce era evident prin considerațiile de simetrie, sau calculînd probabilitatea evenimentului C : „pe cel de al doilea zar apare fața cu un număr de aceeași paritate ca și numărul adus de primul zar”, căci A este egal cu C :

$$p(A) = p(C) = \frac{3}{6}.$$

De asemenea, dacă B este evenimentul „pe primul zar apare fața cu un șase”, $A \cap B$ este evenimentul compus al evenimentelor elementare (6, 2), (6, 4), (6, 6), de probabilitate :

$$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Deci :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{1}{6} = p(B).$$

A și B sînt independente.

II. *Într-o urnă sînt plasate cinci bile roșii și o bilă neagră. Care este probabilitatea pentru ca retrăgînd succesiv trei bile, fără o reintroducere a lor în urnă, să se extragă bila neagră?*

Evenimentul considerat se poate scrie : $A = B \cap C \cap D$, în care B înseamnă „prima bilă este roșie”, C „a doua bilă este roșie”, și D „a treia bilă este neagră”.

Probabilitatea $p_{B \cap C}(D)$ este egală cu $\frac{1}{4}$, căci în acest caz nu rămîn în urnă decît trei bile roșii și o bilă neagră.

Deci :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(B \cap C \cap D) = p(B \cap C)p_{B \cap C}(D) = \\ &= \frac{1}{4} p(B \cap C) = \frac{1}{4} p(B)p_B(C). \end{aligned}$$

De asemenea :

$$p_B(C) = \frac{4}{5},$$

căci rămîn deci patru bile roșii și o bilă neagră.

În sfîrșit :

$$p(B) = \frac{5}{6},$$

de unde :

$$p(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

Introducerea de probabilități condiționate a evitat o numărătoare directă, dificilă. Un raționament incorect ar fi constat în a scrie diferitele situații posibile a trei extrageri succesive, în care R și N înseamnă „roșu” și „negru”: RRR , RRN , RNR , NRR , presupuse egal posibile, și în a deduce că :

$$p(A) = \frac{1}{4}.$$

În realitate, probabilitățile acestui eveniment sînt, respectiv :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \text{ și } \frac{1}{6}.$$

■ Caracterul finit al lui E nu a intervenit în acest paragraf.

12.4.3 Formula lui Bayes

Fie un sistem complet de evenimente :

$$\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \quad (A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dacă } i \neq j)$$

și o probabilitate p definită pe :

$$E = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m.$$

Oricare ar fi evenimentul A :

$$\begin{aligned} A &= A \cap E = A \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = \\ &= (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup \dots \cup (A \cap A_m). \end{aligned}$$

Evenimentele $(A \cap A_i)$ și $(A \cap A_j)$ sînt incompatibile, deoarece :

$$(A \cap A_i) \cap (A \cap A_j) = A \cap (A_i \cap A_j) = \emptyset.$$

Formula :

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset \Rightarrow p(B_1 \cup B_2) = p(B_1) + p(B_2)$$

se extinde imediat prin recurență și devine :

$$[i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset] \Rightarrow p(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m) = \\ = p(B_1) + p(B_2) + \dots + p(B_m).$$

Aplicînd această formulă la evenimentele :

$$B_i = A \cap A_i,$$

se deduce că :

$$p(A) = p(A \cap A_1) + p(A \cap A_2) + \dots + p(A \cap A_m).$$

Să presupunem că probabilitățile evenimentelor $A, A_1, A_2, \dots, A_m$ sînt toate nenule, adică :

$$p(A)p(A_1)p(A_2) \dots p(A_m) \neq 0.$$

Expresiile :

$$p_A, p_{A_1}, p_{A_2}, \dots, p_{A_m}$$

au în acest caz un sens.

În particular :

$$p_A(A_i) = \frac{p(A \cap A_i)}{p(A)} = \frac{p(A_i)p_{A_i}(A)}{p(A)}$$

adică :

$$p_A(A_i) = \frac{p(A_i)p_{A_i}(A)}{p(A_1)p_{A_1}(A) + p(A_2)p_{A_2}(A) + \dots + p(A_m)p_{A_m}(A)}$$

Această formulă este cunoscută sub numele de formula lui Bayes (se spunea înainte : probabilitate de cauze). Ea este adesea utilizată în cazul în care m este egal cu 2.

Deci, dacă punem :

$$A_1 = \bar{B}, A_2 = B,$$

urmează :

$$p_A(B) = \frac{p(B)p_B(A)}{p(B)p_B(A) + p(\bar{B})p_{\bar{B}}(A)}.$$

Exemplu. Două urne, H și K , conțin respectiv : trei bile roșii și două bile negre urna H și cinci bile roșii și o bilă neagră urna K . Se aruncă un zar. Dacă cade un as sau un doi, se extrage o bilă din H . Dacă cade un alt număr, se extrage o bilă din K . Știind că bila extrasă este neagră, care este probabilitatea ca ea să fi fost extrasă din urna H ? Să notăm cu B evenimentul : „a apărut pe zar unu sau doi” și cu A evenimentul „bila extrasă este neagră”.

Numărul căutat este : $p_A(B)$.

Or :

$$p(B) = \frac{1}{3}, \quad p(\bar{B}) = \frac{2}{3},$$

$$p_B(A) = \frac{2}{5}, \quad p_{\bar{B}}(A) = \frac{1}{6}.$$

Formula lui Bayes permite să se calculeze numărul căutat :

$$p_A(B) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}}{\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{15} + \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{11}{45}} = \frac{6}{11}.$$

Calculul precedent arată că :

$$p(A) = p(B)p_B(A) + p(\bar{B})p_{\bar{B}}(A) = \frac{2}{15} + \frac{1}{9} = \frac{11}{45};$$

cum :

$$p(A \cap B) = p(B)p_B(A) = \frac{2}{15},$$

se deduce ușor că :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{6}{11}.$$

12.5 PRODUSE DE PROBABILITĂȚI

Fie un spațiu probabilistic de forma $(E, \mathfrak{A}(E), p)$.

Fie F mulțimea :

$$F = E \times E \times \dots \times E = E^m.$$

F este deci mulțimea de m -upluri de forma :

$$(a_1, a_2, \dots, a_m) \quad (a_i \in E).$$

Se poate defini o probabilitate q pe F prin formula :

$$q[(a_1, a_2, \dots, a_m)] = p(a_1) \times p(a_2) \times \dots \times p(a_m).$$

Aceasta definește bine o funcție reală, pozitivă, pe elementele lui F . Dacă se face suma acestor probabilități de evenimente elementare ale lui F , se găsește ușor 1. Demonstrația se face prin recurență asupra lui m .

Dacă $m = 2$, este suficient să se scrie :

$$q(a, b) = \sum_a p(a) \sum_b p(b) = 1 \times 1 = 1.$$

Avînd verificată această condiție, nu mai rămîne decît să se definească probabilitatea unei submulțimi B a lui V ca sumă a probabilităților evenimentelor elementare ale lui B . Se spune că q este generat de p .

Dacă $A_1, A_2, \dots, A_m$ sînt submulțimi arbitrare ale lui E , produsul :

$$B = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$$

adică mulțimea de m -upluri $(a_1, a_2, \dots, a_m)$, în care :

$$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_m \in A_m,$$

este o submulțime a lui F . Se arată imediat că :

$$q(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m) = p(A_1) \times p(A_2) \times \dots \times p(A_m).$$

OBSERVAȚIE. — Definiția de mai înainte se extinde imediat la produsul de m mulțimi $E_1, E_2, \dots, E_m$ prevăzută fiecare cu o structură de spațiu probabilistic finit de forma $(E_i, \mathfrak{E}(E_i), p_i)$.

Produsul probabilităților este esențial pentru teoria *probelor repetate*. Fie E mulțimea punctelor aduse de un zar ; E^m este deci mulțimea de m -upluri a punctelor aduse prin m aruncări succesive ale aceluiași zar.

Exemplu. Să se calculeze probabilitatea de a obține peste zece, aruncînd trei zaruri („sece depășit”).

Acest eveniment, A , este constituit din evenimentele elementare :

$$X = (x, y, z),$$

cu x, y, z elemente din $[1, 6]$ și :

$$S = x + y + z > 10.$$

Avem :

$$p(X) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}.$$

Rămîne de a număra pe A . La fiecare eveniment elementar X , se poate asocia biunivoc evenimentul (distinct de X) :

$$X' = (7 - x, 7 - y, 7 - z),$$

astfel ca :

$$s' = 21 - x - y - z \leq 10.$$

Se separă astfel E^3 în două clase de același cardinal, la care primul este A . Se deduce că :

$$|A| = 108 \text{ și } p(A) = \frac{1}{2}.$$

O numărare directă permite să se regăsească acest rezultat. Fixînd pe S (între 11 și 18) și pe x , trebuie să rezolvăm ecuația definită prin :

$$y + z = S - x = n,$$

care are $(n - 1)$ soluții dacă n este cuprins între 2 și 7, și $(13 - n)$ soluții dacă n este cuprins între 8 și 12 ; se obține tabloul :

$\begin{matrix} s \\ \backslash \\ x \end{matrix}$	11	12	13	14	15	16	17	18	Total
1	3	2	1						6
2	4	3	2	1					10
3	5	4	3	2	1				15
4	6	5	4	3	2	1			21
5	5	6	5	4	3	2	1		26
6	4	5	6	5	4	3	2	1	30
Total	27	25	21	15	10	6	3	1	108

OBSERVAȚII. — I. Este posibil să se definească produsul a două spații finite probabilistice oarecare:

$$(E_1, \mathfrak{B}(E_1), p_1) \text{ și } (E_2, \mathfrak{B}(E_2), p_2),$$

dar aceasta necesită un studiu prealabil al algebrelor Boole „produs”.

2 Reciproc, presupunem că noi cunoaștem o probabilistică p definită pe produsul cartezian a două mulțimi E_1 și E_2 înzestrat cu algebra Boole a mulțimii părților sale. Aplicațiile p_1 și p_2 definite pe $\mathfrak{B}(E_1)$ și $\mathfrak{B}(E_2)$ prin:

$$p_1(A_1) = p(A_1 \times E_2),$$

$$p_2(A_2) = p(E_1 \times A_2),$$

sînt respectiv probabilități pe spațiile probabilizabile $(E_1, \mathfrak{B}(E_1))$ și $(E_2, \mathfrak{B}(E_2))$. Ele sînt numite *probabilități marginale asociate lui p* .

Se poate, plecînd de la p , să se determine probabilitățile marginale asociate, p_1 și p_2 , dar, plecînd de la p_1 și p_2 nu se poate, în general, regăsi p .

EXERCITII

12.1 Fie E o mulțime și $\mathfrak{B}(E)$ mulțimea părților sale.

1° Să se demonstreze că, pentru ca o submulțime $\mathcal{A}$ a lui $\mathfrak{B}(E)$ să fie o subalgebră Boole a lui $\mathfrak{B}(E)$, trebuie și este suficient ca $\mathcal{A}$ să fie stabil (sau închis) pentru operațiile de intersecție, de reuniune și de complementare.

($\mathcal{A}$ este stabil pentru o operație notată $*$ dacă și numai dacă:

$$\forall \mathcal{A} \in \mathcal{A}, \forall \mathcal{B} \in \mathcal{A} \quad \mathcal{A} * \mathcal{B} \in \mathcal{A}.$$

2° Să se demonstreze că, pentru ca $\mathcal{A}$ să fie o subalgebră Boole a lui $\mathfrak{B}(E)$, este suficient ca $\mathcal{A}$ să fie stabil pentru reuniune și complementare (sau pentru intersecție și complementare).

12.2 Să se demonstreze că intersecția a două subalgebre Boole ale lui $\mathfrak{B}(E)$ este de asemenea o subalgebră Boole a lui $\mathfrak{B}(E)$.

12.3 Fie un spațiu finit probabilizabil $(E, \mathfrak{B}(E))$, în care $\mathfrak{B}(E)$ este o subalgebră Boole a lui $\mathfrak{B}(E)$.

1° Să se demonstreze că două evenimente elementare distincte ale lui $\mathfrak{B}(E)$ sînt incompatibile (vezi 12.2.2).

2° Fie A un eveniment oarecare. Demonstrați că există o partiție a lui A în evenimentele elementare ale lui $\mathfrak{B}(E)$. Demonstrați că această partiție este unică (E este finit).

Fie $(E, \mathfrak{B}(E), p)$ un spațiu probabilistic oarecare. Să se demonstreze următoarele proprietăți:

12.4 a) $\forall \mathfrak{B}(E) A, \forall \mathfrak{B}(E) B \quad A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B).$

b) $\forall \mathfrak{B}(E) A \quad p(A) \leq 1.$

12.5 a) $\forall \mathfrak{B}(E) A \quad p(A) = 1 - p(\bar{A}).$

b) $\forall \mathfrak{B}(E) A \quad p(A) + p(B) = p(A \cup B) + p(A \cap B).$

În toate exercițiile care urmează ne plasăm într-un spațiu finit probabilistic $(E, \mathfrak{B}(E), p)$.

12.7 A și B sînt două evenimente, $\bar{A}$ și $\bar{B}$ sînt respectiv „non A ” și „non B ”. Să se scrie sub o formă mai simplă următoarele evenimente:

1° $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}).$

2° $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}).$

12.8 A, B și C sînt trei evenimente compatibile, două cîte două. Să se scrie următoarele evenimente:

1° A se produce singur.

2° A și B se produc, nu însă și C .

- 3° Cele trei evenimente se produc în același timp.
- 4° Cel puțin două din cele trei evenimente se produc.
- 5° Cel puțin unul din cele trei evenimente se produce.
- 6° Două evenimente, și numai două, se produc.
- 7° Nu se produce nici un eveniment.

12.9 Următoarele egalități sau incluziuni, sînt adevărate?

- 1° $A \cup B \cup C = A \cup (B - A \cap B) \cup (C - A \cap C)$.
- 2° $A \cup B = (A - A \cap B) \cup B$.
- 3° $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \supseteq A \cup B \cup C$.
- 4° $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq A \cup B \cup C$.

12.10 Avem un pachet de treizeci și două de cărți. Se trag opt din ele, adică o „mîină”. Să se numere toate rezultatele posibile. Să se calculeze probabilitatea de a obține:

- 1° Un as, și numai unul.
- 2° Exact doi ași.
- 3° Nici un as.
- 4° Cel puțin un as.
- 5° Exact două cupe.
- 6° Exact două cupe și un as.
- 7° Exact trei cupe și două dame.
- 8° Un careu.

(Se va completa în fiecare caz numărul de mîini posibile).

12.11 Se aruncă douăsprezece zaruri. Calculați probabilitatea pentru ca fiecare număr (de la 1 la 6) să iasă de două ori.

12.12 O loterie se compune din nouăzeci de bilete numerotate de la 01 la 90. Biletele cîștigătoare sînt multipli de 5. O persoană are patru bilete. Care este probabilitatea ca să cîștige:

- 1° Un loz? 2° Două lozuri? 3° Zero lozuri? 4° Cel puțin un loz.

12.13 Se aruncă trei zaruri A , B , C , fețele fiind numerotate de la 1 la 6. Numărați rezultatele posibile.

Să se calculeze probabilitatea de a obține:

- 1° Trei fețe distincte.
- 2° Exact un as.
- 3° Cel puțin un as ($\text{as} = 1$).
- 4° Cel puțin două fețe identice.
- 5° Exact două fețe identice.
- 6° O sumă pară de puncte.

12.14 Se aruncă patru zaruri, fețele fiind numerotate de la 1 la 6. Cîte rezultate sînt posibile Să se calculeze probabilitatea de a avea:

- 1° Un careu (a, a, a, a).
- 2° Un brelan (a, a, a, b).
- 3° O pereche dublă (a, a, b, b).
- 4° O distribuție banală (a, b, c, d).

12.15 Se trag două cărți (simultan), dintr-un joc de treizeci și două de cărți. Să se calculeze probabilitatea de a avea:

- 1° Cel puțin un as.
- 2° Exact un as.
- 3° Doi ași.

12.16 Două cluburi de fotbal, A și B , au respectiv optsprezece și cincisprezece jucători. Jucătorul X este din clubul A , jucătorul Y este din clubul B . O echipă de fotbal fiind constituită din unsprezece jucători, să se calculeze probabilitatea ca X să joace, contra lui Y în duminica următoare.

12.17 Se aruncă trei zaruri. Să se calculeze probabilitatea pentru ca suma punctelor obținute să fie:

- 1° Egală cu 16.
- 2° Superioară lui 16.
- 3° Egală cu 20.
- 4° Inferioară lui 20.

12.18 Să se calculeze probabilitatea de a avea o sumă egală cu 7, aruncînd două zaruri.

12.19 Să se calculeze probabilitatea ca cei patru ași să se găsească la același jucător de bridge (jucător nestabilit dinainte).

12.20 1° O urnă conține a bile verzi și b bile galbene. Se extrag simultan două bile. Să se calculeze probabilitatea ca ele să fie de culori diferite.

2° Urna conține de data aceasta a bile verzi, b bile galbene și c bile negre. Se extrag trei bile. Să se calculeze probabilitatea ca ele să fie de culori diferite.

3° Aplicație: $a = 3$, $b = 5$, $c = 2$.

12.21 O urnă conține două sute zece bile numerotate de la 1 la 210. Să se calculeze probabilitățile de a obține:

1° O bilă a cărui număr să fie divizibil prin 5 și 7.

2° O bilă a cărei număr să fie divizibil prin 6 și 10.

12.22 O părere p asupra unui zar cu șase fețe ușor truate, este:

$$p(1) = 0,15; p(2) = 0,15; p(3) = 0,18;$$

$$p(4) = 0,20; p(5) = 0,12; p(6) = 0,20.$$

1° Să se calculeze $p\{X \geq 5\}$, $p\{X \geq 4\}$, $p\{X \geq 2\}$, $p\{X < 6\}$, X fiind rezultatul.

2° K este evenimentul „rezultatul este inferior lui 6”; H este evenimentul „rezultatul este superior sau egal cu 4”. Calculați pe $p_K(H)$.

12.23 O probabilitate pe o algebră de evenimente este următoarea:

$$p(A_1) = \frac{1}{4}; p(A_2) = \frac{1}{3}; p(A_3) = \frac{1}{6}; p(A_4) = \frac{1}{6}; p(A_5) = \frac{1}{12}, \text{ unde } A_1, \dots, A_5$$

realizează o partiție a evenimentului sigur Ω sau formează un sistem de evenimente elementare.

1° Să se calculeze:

$$p(A_1 \cup A_2); p(A_2 \cup A_4 \cup A_5); p(A_3 \cup \bar{A}_4); p(A_5 \cup \bar{A}_4 \cup \bar{A}_5).$$

2° Evenimentele $A_1, \dots, A_5$ corespund la tragerea 1, 2, 3, 4, 5. Altfel spus, într-o urnă avem jetoane numerotate 1, 2, 3, 4, 5, astfel dispuse încît pot ieși respectiv cu probabilitatea $\frac{1}{4}, \frac{1}{3},$

$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$; K este evenimentul „numărul tras este inferior lui 5”; X este evenimentul „numărul tras este superior lui 2”. Să se calculeze $p_K(X)$.

3° Toate jetoanele sînt din nou în urnă. H este evenimentul „3 și 2 nu au ieșit”, Y este evenimentul „a ieșit 4”. Să se calculeze $p_H(Y)$.

4° Z este evenimentul „a ieșit 1”. Să se calculeze $p_H(Z)$.

5° Să se completeze variabila definită prin probabilitate, știind că „2 și 3 nu au ieșit”.

12.24 Să se calculeze probabilitatea pentru ca o mină (treisprezece cărți) să nu conțină decît o singură damă, știind că ea conține dama de pică (la bridge: cincizeci și două de cărți).

12.25 La o populație, avem 45% bărbați și 55% femei; 4% dintre bărbați și 5% dintre femei au un caracter P . Care este proporția de persoane care au acest caracter? Se ia un individ la întimplare și se constată că are caracterul P . Care este probabilitatea ca el să fie bărbat, știind că prezintă caracterul P ?

12.26 La bridge, care este probabilitatea ca o mină care are dama de cupă să aibă și regele de cupă?

12.27 La ruletă, la care se presupune că sînt treizeci și două de numere, saispzece roșii și saispzece negre, o persoană joacă pe 2 de roșu, dar ea este departe de masă și nu vede ruleta. Crupierul anunță roșu. Care este probabilitatea ca persoana să cîștige?

12.28 Se dispune de un joc de treizeci și două de cărți.

1° Se trage o carte. Să se calculeze probabilitatea ca aceasta să fie un rege, știind că este o cupă?

2° Se trag două cărți. Să se calculeze probabilitatea ca acestea să fie cupe (două cupe), știind că una din aceste cărți este o cupă.

12.29 Se aruncă trei zaruri. Să se calculeze probabilitatea ca unul din ele să arate asul, știind că nu au două fețe asemănătoare.

12.30 Se admite că sexul a doi copii consecutivi este independent și că fiecare copil are probabilitatea $\frac{1}{2}$ de a fi bărbat. O familie are doi copii.

1° Care este probabilitatea ca ea să aibă cel puțin un băiat?

2° Care este probabilitatea ca ea să aibă doi băieți?

3° Care este probabilitatea ca ea să aibă doi băieți, știind că are cel puțin unul?

4° Cel mai în vîrstă din această familie este un băiat. Care este probabilitatea pentru ca cel de al doilea copil să fie băiat?

12.31 Se aruncă zece zaruri. Se știe că pe unul dintre zaruri a apărut un as sau, mai exact, că cel puțin unul, din zaruri a adus un as. Care este probabilitatea ca să obținem cel puțin doi ași? (Se va calcula probabilitatea pentru ca, pe zece rezultate, să nu avem decît un as, știind că avem cel puțin un as, și se va lua complementarul lui 1.)

12.32 O urnă conține o sută jetoane numerotate de la 1 la 100. Se extrage unul. Care este probabilitatea pentru ca numărul său să fie:

1° Divizibil prin 6?

2° Divizibil prin 2?

3° Divizibil prin 6, știind că este divizibil prin 3?

4° Divizibil prin 12, știind că este divizibil prin 2?

5° Divizibil prin 12, știind că este divizibil prin 3?

12.33 Se consideră două trageri succesive. Prima aduce unul dintre numerele 1, 2, 3 sau 4, aceste rezultate fiind egal posibile. Cea de a doua tragere aduce un număr întreg al lui $[1, h]$, aceste numere fiind egal posibile, h reprezintă rezultatul primei trageri. Aceste două trageri definesc două variabile aleatoare X și Y , respectiv. Să se determine:

1° Legea lui X (prima tragere).

2° Probabilitatea condiționată a evenimentului $Y = 2$, știind că $X = 2$.

3° Probabilitatea pentru ca $Y = 1$.

4° Legea lui Y .

5° Probabilitatea condiționată a evenimentului $X = 2$, știind că $Y = 1$.

12.34 1° Să se completeze tabloul care urmează astfel încît să se obțină pe fiecare linie și pe fiecare coloană totalul indicat:

	A	B	C	D	TOTAL
X			3		5
Y	2		0		4
Z		2		3	9
Total	6	2	4	6	18

2° Să se întocmească un alt tabel împărțind toate numerele din primul tablou prin 18; A , B , C , D pe de o parte, X , Y , Z pe de alta, sînt două partiții ale aceleiași mulțimi Ω de 12 elemente. Cel de al doilea tablou dă probabilitățile asociate evenimentelor elementare ale fiecărei partiții (înscrise în linia sau coloana „total”). Dă de asemenea probabilitatea asociată la evenimentele elementare ale partiției obținute prin „încrucișarea” celor două partiții inițiale. Se va găsi, de

exemplu: $p(Y \cap D) = \frac{1}{9}$.

3° Acest al doilea tablou permite să se calculeze și probabilitățile condiționate. De exemplu:

$p_Y(A) = \frac{1}{2}$. Să se întocmească două noi tablouri, dînd probabilitățile condiționate:

- a) Probabilitatea lui A, B, C și D , cunoscînd succesiv X, Y sau Z .
b) Probabilitatea lui X, Y și Z , cunoscînd succesiv A, B, C sau D .

12.35 A, B și C sînt trei evenimente ale aceleiași algebre. Fie două evenimente: $E_1 = A \cap (B \cup C)$ și $E_2 = A \cup (B \cap C)$.

Să se calculeze pe $p(E_2)$, știind că:

$$\begin{aligned} p(A) &= 0,6; p(B) = 0,4; p(C) = 0,3; p(A \cap B) = 0,2; \\ p(B \cap C) &= 0,1; p(A \cap C) = 0,1; p(A \cap B \cap C) = 0,05. \end{aligned}$$

12.36 Avem două pachete de cărți distincte, de cîte cincizeci și două de cărți. Să se calculeze probabilitatea de a trage o damă din prima și o pică din cea de a doua.

12.37 Să se calculeze probabilitatea de a trage „un as”, sau dama de pică, sau valetul de treflă”, trăgînd o carte dintr-un joc de cincizeci și două de cărți.

12.38 Se aruncă un zar cu șase fețe egal posibile. Să se calculeze probabilitățile de a obține:

1° 2 sau 3.

2° Non 5.

3° Un rezultat par.

4° Un număr impar sau un număr inferior sau egal cu 4.

12.39 A, B, C sînt trei evenimente ale unei aceleiași algebre. Se dă:

$$\begin{aligned} p(A) &= 0,30; p(B) = 0,25; p(C) = 0,25; p(A \cap B) = 0,15; \\ p(B \cap C) &= 0,15; p(A \cap C) = 0,20 \text{ și } p(A \cap B \cap C) = 0,08. \end{aligned}$$

1° Să se scrie următoarele evenimente:

- a) A și B se produc, C însă nu (eveniment E);
b) două din trei evenimente se produc, dar nu trei (eveniment F).

2° Să se calculeze probabilitățile evenimentelor E și F .

3° Să se calculeze probabilitățile condiționate:

$$p_B(A), p_A(B) \text{ și } p_C(A \cap B).$$

12.40 Ω este o mulțime finită înzestrată cu o probabilitate p ; A, B și C sînt trei evenimente ale unei algebre construite pe Ω de probabilitățile respective $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ și $\frac{1}{4}$. Să se calculeze, cînd aceasta este posibil, probabilitățile atașate următoarelor evenimente: $A \cap B$; $A \cap B \cap C$; $A - B$; $A \cup B \cup C$.

12.41 A, B și C sînt trei evenimente ale unei algebre $\mathcal{A}$ construită pe o mulțime Ω înzestrată cu o probabilitate p .

Se definesc următoarele două evenimente:

$$E_1 = A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \text{ și } E_2 = A \cap (B \cup C).$$

1° Ce se spune despre E_1 și E_2 între ele?

2° Să se calculeze $p(E_1 \cup E_2)$ în funcție de $p(A)$.

3° Să se calculeze $p(E_1)$ și $p(E_2)$, știind că:

$$\begin{aligned} p(A) &= 0,6; p(B) = 0,4; p(C) = 0,3; p(A \cap B) = 0,2; \\ p(B \cap C) &= p(A \cap C) = 0,1; p(A \cap B \cap C) = 0,05. \end{aligned}$$

12.42 Se aruncă trei zaruri identice. Evenimentele elementare au fost numărate în exercițiile precedente: sînt două sute șaisprezece. Se definesc următoarele evenimente:

A : cele trei fețe ieșite sînt diferite.

B : este cel puțin un as.

1° Să se calculeze $p(A \cup B)$, cu probabilitatea de a avea trei fețe diferite, sau de a avea cel puțin un as.

2° Să se calculeze $p(A \cap \bar{B})$ și $p(B \cap \bar{A})$.

12.43 Avem un pachet de cărți de joc de treizeci și două de cărți. Un eveniment elementar este „extragerea unei cărți”. Se definesc următoarele evenimente:

A : cartea trasă este valetul de cupă.

B : cartea trasă este o cupă.

C : cartea trasă este o figură de pică (valet, damă, rege) sau o cupă.

Să se calculeze:

1° $p(A)$; $p(B)$; $p(C)$.

2° $p(A \cap B)$; $p(B \cap C)$; $p(C \cap A)$.

3° $p(A \cup B)$; $p(B \cup C)$; $p(C \cup A)$.

4° $p_B(A)$; $p_C(B)$; $p_C(A)$; $p_A(C)$.

12.44 Din șase obiecte prelucrate, două sînt cu defecte. Vrem să le găsim cu ajutorul unui test care se oprește atunci cînd cele două obiecte cu defect sînt identificate.

1° Care este probabilitatea ca testul să se oprească la începutul a două operații?

2° Care este probabilitatea ca acest test să necesite cel puțin trei operații?

12.45 Avem la dispoziție trei jetoane A , B , C identice în ceea ce privește forma; A este alb, C este negru și B este cu o față albă și o față neagră. Se trage un jeton la întimplare, și nu i se vede decît o față. Aceasta este albă. Care este probabilitatea de a fi tras jetonul A ?

13. VARIABLE ALEATOARE

13.1 Definiții

13.2 Proprietăți

13.3 Valori tipice ale unei variabile aleatoare

13.4 Cupluri de variabile aleatoare

13.5 Probe repetate. Legea numerelor mari

13.6 Legea binomială

13.7 Apendice. Recapitularea combinărilor

13.1 DEFINIȚII

13.1.1 Recapitularea funcțiilor numerice reale

Fie E o mulțime oarecare și fie f o aplicație a lui E în $\mathbb{R}$. Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}$. Imaginea inversă a lui A prin f este mulțimea elementelor lui E a căror imagine este A :

$$f^{-1}[A] = \{x; x \in E \text{ și } f(x) \in A\}.$$

Vom utiliza de aici înainte următoarele notații:

$$(f < x) = f^{-1}[]-\infty, x[);$$

$$(f \leq x) = f^{-1}[]-\infty, x];$$

$$(f > x) = f^{-1}[x, +\infty[);$$

$$(f \geq x) = f^{-1}[x, +\infty];$$

$$(f = x) = f^{-1}[\{x\}];$$

$$(x < f < y) = f^{-1}[x, y[);$$

$$(x \leq f < y) = f^{-1}[x, y];$$

$$(x < f \leq y) = f^{-1}[x, y];$$

$$(x \leq f \leq y) = f^{-1}[x, y].$$

■ Să ne reamintim printre altele că dacă f este o aplicație a unei mulțimi E în o mulțime G , și dacă A, B sînt submulțimi ale lui G :

$$f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B);$$

$$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B);$$

$$A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B);$$

$$f^{-1}[\bar{A}] = \overline{f^{-1}[A]}.$$

Avem, de exemplu: $(f < x) \cap (f \geq y) = (y \leq f < x)$.

OBSERVAȚIE. — Funcția f ca atare nu se bucură de proprietăți atât de simple. Astfel, de exemplu, se poate scrie numai:

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

(Vezi Analiza 1, Calcul diferențial, 1.1.4.)

13.1.2 Variabilă aleatoare

DEFINIȚIE. Fie $(E, \mathcal{A}, p)$ un spațiu probabilistic. Se numește **variabilă aleatoare** pe acest univers probabilitizat orice aplicație a lui E în $\mathbb{R}$ astfel ca, pentru orice număr real x , submulțimea lui E :

$$(X < x)$$

aparține lui $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ este o algebră de probabilități (12.3.1), adică, dacă E este finit, este simplu o subalgebră Boole a lui $\mathfrak{E}(E)$. Imaginea $X[E]$, adică mulțimea de numere reale x astfel ca mulțimea $(X = x)$ să nu fie vidă, poate fi de diferite tipuri. Noi vom cita în continuare tipurile principale:

■ $X[E]$ este finit: $X[E] = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($x_i < x_{i+1}$).

Se zice atunci: variabila aleatoare X este *discretă de ordin finit*.

■ $X[E]$ este numărabilă și are un element minim:

$$X[E] = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \quad (x_i < x_{i+1}).$$

Se zice atunci: variabila aleatoare X este *discretă*.

■ $X[E]$ este un interval închis a lui $\mathbb{R}$.

Se zice atunci: variabila aleatoare X este *continuă*.

Exemplu. Dacă E este finită (sau numărabilă), mulțimea $X(E)$ este un mod necesar finită (sau numărabilă). Dar $X[E]$ poate fi finită fără ca E să fie și ea finită. De exemplu, variabila aleatoare indicator χ_A , definită pe o mulțime oarecare A a lui E prin egalitățile:

$$\chi_A(a) = 1 \text{ dacă } a \text{ aparține lui } A,$$

$$\chi_A(a) = 0 \text{ dacă } a \text{ nu aparține lui } A,$$

este discretă chiar dacă E este nenumărabilă.

Dacă E este finită sau numărabilă, știm că putem lua $\mathcal{A} = \mathfrak{E}(E)$; de unde:

TEOREMA. Orice aplicație în corpul $\mathbb{R}$, a unei mulțimi finită sau numărabilă E înzestrată cu o probabilitate p , este o **variabilă aleatoare** pe $(E, \mathfrak{E}(E), p)$.

Dacă E este nenumărabilă, admitem că variabilele aleatoare, pe care sîntem siliți să le introducem, vor satisface totdeauna condiția:

$$(X < x) \in \mathcal{A},$$

cu toate că nu putem defini exact pe $\mathcal{A}$.

OBSERVAȚII. — 1 Există numeroase tipuri de variabile aleatoare, nici discrete, nici continue, ca de exemplu cele a căror imagine este de forma:

$$X[E] = \mathbb{Z},]a, +\infty[, \mathbb{N} \cup [a, b], \mathbb{Q} \cap [a, b], \text{ etc.}$$

2 Uneori variabilele aleatoare de dimensiune n se definesc ca aplicație a lui E în $\mathbb{R}^n$.

13.1.3 Legea de probabilitate a unei variabile aleatoare

Funcția de repartiție

Fie $(E, \mathcal{A}, p)$ un spațiu probabilizat și X o variabilă aleatoare pe acest spațiu. Deoarece $(X < x)$ este un element al lui $\mathcal{A}$, numărul:

$$p(X < x)$$

este totdeauna definit.

$(X \geq x)$ este de asemenea o mulțime a lui $\mathcal{A}$ deoarece este complementar cu precedentul. El este de asemenea al mulțimii:

$$(X > x) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(X \geq x + \frac{1}{n} \right),$$

deoarece $\frac{1}{n}$ tinde către 0 când n tinde către infinit și când $\mathcal{A}$ este o algebră de probabilitate (12.3.1). În sfârșit $(X \leq x)$ aparține lui $\mathcal{A}$ ca complementar celui precedent.

Rezultă imediat că (13.1.1):

$$(X = x) = (X \leq x) \cap (X \geq x),$$

$$(x < X < y) = (X > x) \cap (X < y),$$

$$(x \leq X < y) = (X \geq x) \cap (X < y),$$

$$(x < X \leq y) = (X > x) \cap (X \leq y),$$

și $(x \leq X \leq y) = (X \geq x) \cap (X \leq y)$

aparțin de asemenea lui $\mathcal{A}$.

Se poate deci enunța:

TEOREMĂ. Numerele:

$$p(X < x), p(X \geq x), p(X > x), p(X \leq x),$$

$$p(X = x), p(x < X < y), p(x \leq X < y),$$

$$p(x < X \leq y) \text{ și } p(x \leq X \leq y)$$

sint definite oricare ar fi numerele reale x și y .

DEFINIȚIE. Formulele :

$$f(x) = p(X = x),$$

$$F(x) = p(X < x)$$

definesc legea de probabilitate f și respectiv funcția de repartiție F asociată variabilei aleatoare X .

OBSERVAȚII. — 1 Se spune de asemenea repartiția lui X și funcție cumulativă în loc de lege și de funcție de repartiție.

2 f fiind nulă în afară de $X[E]$, deoarece :

$$x \notin X[E] \Rightarrow (X = x) = \emptyset.$$

se definește f uneori ca o aplicație a lui $X[E]$ în intervalul $[0, 1]$.

De asemenea, dacă $X[E]$ este un interval închis $[a, b]$, F se definește uneori numai pe acest interval.

3 Unii autori pun :

$$F(x) = p(X \leq x),$$

și nu

$$F(x) = p(X < x).$$

Diferența între aceste două funcții este egală cu $p(X = x)$.

13.1.4 Imaginea probabilității

Fie $(E, \mathfrak{B}(E), p)$ un spațiu finit probabilistic ; $X[E]$ este în același timp o mulțime finită. Ca urmare, $(X[E], \mathfrak{A}(X[E]))$ este un spațiu probabilizabil. Mai mult, orice submulțime A a lui $X[E]$ fiind reuniunea unui număr finit de mulțimi ale cardinalului 1 :

$$A = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\} \quad (i > j \Rightarrow x_i > x_j),$$

și evenimentele $(X = x_i)$ fiind elemente ale lui $\mathfrak{B}(E)$ (13.1.3), putem defini numărul :

$$p[X^{-1}(A)].$$

DEFINIȚIE. Fie $(E, \mathfrak{B}(E), p)$ un spațiu finit probabilistic și fie X o variabilă aleatoare pe acest spațiu. Se numește imagine a acestui spațiu prin X , spațiul finit probabilistic :

$$(X[E], \mathfrak{A}(X[E]), p_x),$$

în care p_x , imagine a probabilității p prin X , este definită prin :

$$\forall \mathfrak{A}(X[E]) A \quad p_x(A) = p(X^{-1}[A]).$$

OBSERVAȚII. 1 p_x este numit și *probabilitate indusă* prin X pe $\mathfrak{A}(X[E])$.

2 Pentru a studia probabilitățile relative ale unei variabile aleatoare X într-un spațiu finit probabilistic $(E, \mathfrak{B}(E), p)$, este inutil de a da $E, \mathfrak{B}(E), p$ și X explicit. Se va mărgini, în cele mai multe cazuri, la a cunoaște $X[E]$ și p_x care se definește prin legea sa de probabilitate sau prin funcția sa de repartiție. Se va mărgini deci a lucra în spațiul probabilistic imagine.

13.2 PROPRIETĂȚI

13.2.1 Proprietăți fundamentale

În cazul unei variabile aleatoare discretă, avem regulile de calcul:

$$x \leq x_1 \Rightarrow F(x) = 0;$$

$$x_i < x \leq x_{i+1} \Rightarrow F(x) = \sum_{j=1}^i p(X = x_j).$$

Într-adevăr, în acest caz:

$$(X < x) = (X = x_1) \cup (X = x_2) \cup \dots \cup (X = x_i).$$

Dacă $X[E]$ are un element maxim x_n :

$$x > x_n \Rightarrow F(x) = 1$$

deoarece evenimentele $(X = x_i)$ definesc o partiție a lui E (fig. 1).

x	$p(X = x)$
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{6}$

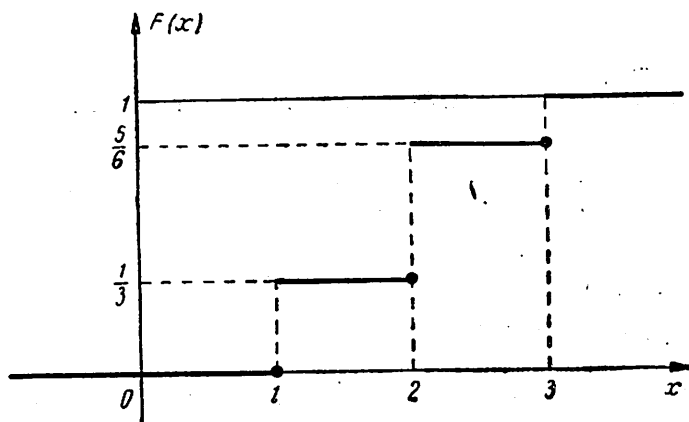


Fig. 1

În toate cazurile se poate remarca că F definește complet pe f , deoarece :

$$f(x_i) = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

$$[(X = x_i) = (X < x_{i+1}) - (X < x_i).]$$

■ Fie X o variabilă aleatoare oarecare. Din implicația :

$$(x \leq y) \Rightarrow (X \leq x) \subset (X < y),$$

se deduce că :

$$F(x) = p(X < x) \leq F(y) = p(X < y).$$

Funcția de repartiție este deci crescătoare (în sens larg) :

$$x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$$

Admitem în plus că următoarele condiții :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow y} F(x) = F(y) \\ \left\{ \begin{array}{l} x \mapsto y \\ x \leq y \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{ (continuitate la stînga)}$$

sînt necesare și suficiente pentru ca o funcție numerică crescătoare F să fie funcția de repartiție a unei variabile aleatoare X . Se va remarca că de aici rezultă, în mod special, că :

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

13.2.2 Variabile aleatoare absolut continue

Printre numerele aleatoare continue, nu vom vorbi succint decît de numerele aleatoare absolut continue, adică de variabile aleatoare astfel ca F să fie o funcție derivabilă (rezultă de aici că este continuă). Pentru astfel de aleatoare se poate scrie :

$$(X = x) \subset (x \leq X < x + h) \quad (h > 0);$$

$$\begin{aligned} \text{de unde: } 0 \leq p(X = x) &= f(x) \leq p(x \leq X < x + h) = \\ &= p(X < x + h) - p(X < x) = \\ &= F(x + h) - F(x). \end{aligned}$$

Funcția F fiind continuă, se vede că limita acestei expresii, cînd h tinde către 0, este nulă, adică :

$$p(X = x) = 0.$$

Dar, dacă punem :

$$\varphi(x) = F'(x),$$

se poate observa că :

$$\frac{p(x \leq X < x+h)}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

are drept limită $\varphi(x)$, când h tinde către zero.

DEFINIȚIE. Derivata funcției de repartiție a unei variabile aleatoare absolut continue este numită densitate de repartiție a acestei variabile.

Teorema creșterilor finite (7.2.6) permite să se scrie formula :

$$p(a \leq X < b) = (b - a)\varphi(c),$$

unde c aparține intervalului $]a, b[$.

Avem, de altfel :

$$p(X = x) = 0,$$

de unde :

$$\begin{aligned} p(a \leq X < b) &= p(a < X < b) \\ &= p(a \leq X \leq b) = p(a < X < b). \end{aligned}$$

■ Să notăm proprietățile :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt,$$

și :

$$F(+\infty) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt.$$

Mai general :

$$p(a \leq X < b) = \int_a^b \varphi(t) dt.$$

13.2.3 Variabile aleatoare de ordin finit

Fie X o variabilă aleatoare astfel ca imaginea sa :

$$X[E] = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (x_i < x_{i+1})$$

să fie o mulțime finită.

Exemple. 1 O variabilă aleatoare constantă este astfel ca :

$$X(a) = h, \text{ oricare ar fi } a \text{ în } E.$$

II. Variabila aleatoare indicator a submulțimii A a lui E are o imagine finită :

$$\chi_A[E] = \{0, 1\}.$$

III. Presupunem E finit și considerăm variabila aleatoare uniformă astfel că, dacă :

$$E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$\left| \begin{array}{l} X(a_1) = x_1, \text{ și } p(X = x_1) = f(x_1) = \frac{1}{n}, \\ X(a_2) = x_2, \text{ și } p(X = x_2) = f(x_2) = \frac{1}{n}, \\ \vdots \\ X(a_n) = x_n, \text{ și } p(X = x_n) = f(x_n) = \frac{1}{n}. \end{array} \right.$$

Prin definiție, oricare ar fi indicele i :

$$p(a_i) = \frac{1}{n}.$$

Aceasta ar putea să se generalizeze la o mulțime E oarecare : mulțimile $(X = x_i)$ formează atunci o partiție a lui E într-un sistem complet finit de evenimente, toate de probabilitate $\frac{1}{n}$.

Admitem că suma și produsul :

$$S = X + Y, P = XY$$

a două variabile aleatoare sînt variabile aleatoare definite prin $S(a) = X(a) + Y(a)$, $P(a) = X(a)Y(a)$. Variabilele aleatoare definite pe E formează un spațiu vectorial și un inel unitar (exercițiul 13.11).

Variabila aleatoare X este determinată complet prin cele n numere pozitive sau nule :

$$p_i = f(x_i) = p(X = x_i)$$

legate prin relația :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Într-adevăr : $\{(X = x_i) ; i \in \{1, \dots, n\}\}$ este o partiție finită a lui E . $f(x)$ este nulă în afara lui $X[E]$ și :

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i).$$

OBSERVAȚIE. — Admitem că funcțiile definite prin :

$$\begin{aligned} \sup (X, Y) = Z : Z(a) &= \sup (X(a), Y(a)) = \\ &= \begin{cases} X(a) & \text{dacă } X(a) \geq Y(a), \\ Y(a) & \text{dacă } X(a) \leq Y(a), \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \inf (X, Y) = T : T(a) &= \inf (X(a), Y(a)) = \\ &= \begin{cases} X(a) & \text{dacă } X(a) \leq Y(a), \\ Y(a) & \text{dacă } X(a) \geq Y(a), \end{cases} \end{aligned}$$

sînt variabile aleatoare, asemenea variabilei aleatoare definite în exemplul de mai înainte.

Exemplu. Fie H o parte nevidă a lui $X[E]$, V mulțimea $X^{-1}[H]$ a elementelor a ale lui E astfel ca $X(a)$ să aparțină lui H . Presupunem: $p(V) \neq 0$. Să se demonstreze că probabilitatea condiționată p_V permite să definim o nouă variabilă aleatoare în V .

Într-adevăr, să punem: $\forall a \in V \quad Y(a) = X(a)$ ($V \subset E$).

Y este o variabilă aleatoare definită pe V , a cărei lege este:

$$q(Y = x) = 0 \quad \text{dacă: } x \notin H,$$

$$q(Y = x) = p_o(X = x) \quad \text{dacă: } x \in H.$$

Într-adevăr:

$$\sum_{x \in H} q(Y = x) = \sum_{x \in H} p_o(X = x) = \frac{1}{p(V)} \sum_{x \in \Sigma} p(X = x) = \frac{p(V)}{p(V)} = 1.$$

Cel mai simplu exemplu este cel în care:

$$V = (X \leq k);$$

de unde:

$$H = X[E] \cap ([-\infty, k]).$$

Se reintâlnește în exemplul care urmează.

■ Un material poate fi scos din uz după n ani cu probabilitatea:

$$p_n = \frac{\lambda}{2^{n+1}} \quad (0 \leq n \leq 10).$$

Se decide să fie distrus la capătul a patru ani împliniți, chiar dacă este în stare bună. Care este probabilitatea pentru ca el să fie scos din uz accidental la capătul a n ani ($n \leq 4$)?

Să remarcăm mai întâi că:

$$\begin{aligned} 1 &= p_0 + p_1 + \dots + p_{10} = \lambda \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{11}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lambda \frac{1 - \frac{1}{2^{11}}}{1 - \frac{1}{2}} = \lambda \left(1 - \frac{1}{2^{11}} \right) = \frac{2047}{2048} \lambda; \end{aligned}$$

de unde:

$$\lambda = \frac{2048}{2047};$$

$\left(p_0 = \frac{1}{2} \right)$ este probabilitatea pentru a avea un defect de fabricație.

Aici, $V = (X \leq 4)$, în care X este numărul de ordine al anului în care materialul nu mai funcționează. Legea noii variabile aleatoare Y este cunoscută din moment ce se cunoaște:

$$p(V) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \lambda \left(1 - \frac{1}{2^5} \right) = \frac{31\lambda}{32} = \frac{31 \times 64}{2047} \approx 0,97.$$

Știind că materialul a fost scos din uz accidental înainte de a fi distrus sistematic, ceea ce se produce în jur de 97% din cazuri, probabilitatea ca acest accident să se producă în anul n ($0 \leq n \leq 4$) este deci:

$$q_n = q(Y = n) = p_o(X = n) = \frac{\lambda 2^{-n-1}}{p(V)} = \frac{\lambda}{2^{n+1}} \frac{32}{31} = \frac{32}{31 \times 2^{n+1}};$$

fie :

n	0	1	2	3	4
q_n	$\frac{16}{31}$	$\frac{8}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{31}$
Valori aproximative	0,52	0,26	0,13	0,06	0,03

Se observă :

$$q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1.$$

13.3 VALORI TIPICE ALE UNEI VARIABLE ALEATOARE

13.3.1 Momente de ordinul k , valoare medie

DEFINIȚIE. Fie, într-un spațiu probabilistic finit $(U, \mathcal{B}(U), p)$, o variabilă aleatoare X putînd lua valorile :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

cu probabilitățile :

$$p_i = f(x_i) = p(X = x_i).$$

1 Se numește valoare medie a lui X , numărul :

$$m = E(X) = \bar{X} = M_1(X) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i).$$

2 Se numește moment de ordinul k a lui X , numărul :

$$M_k(X) = E(X^k) \quad (k > 0),$$

De aici se deduce formula :

$$M_k(X) = \sum_{i=1}^n (x_i)^k f(x_i), \quad (k > 0),$$

și se ia :

$$M_0 = 1.$$

■ Mai mult, presupunem U finit : $U = \{a, b, c, \dots, l\}$, $(|U| = n)$.

Dacă se calculează suma $\sum_{a \in A} X(a)p(a)$ pe mulțimea de valori ale lui U care au aceeași imagine ca a , adică $X^{-1}[\{X(a)\}]$, se găsește :

$$X(a) \sum_a p(a) = X(a)p(X = X(a)).$$

De aici se deduce următoarea formulă, care rezultă din partiția lui U în mulțimile $(X = x_i)$:

$$E(X) = \sum_{i \in U} X(i)p_i.$$

Rezultă de asemenea că:

$$M_h(X) = \sum_{i \in U} X(i)^h p_i$$

cu convenția $X^0 = 1$.

Considerăm atunci variabilele aleatoare:

$$Z = \lambda X + \mu Y \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Pentru orice x din U , avem:

$$Z(x) = \lambda X(x) + \mu Y(x).$$

Rezultă că:

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$$

Dacă $Y = 1$, atunci:

$$E(1) = \sum_{x \in U} p(x) = 1;$$

de unde:

$$E(\lambda X + \mu) = \lambda E(X) + \mu.$$

Luăm cazul particular $\lambda = 1$, $\mu = -\bar{X}$, care este un număr real, constant:

$$E(X - \bar{X}) = E(X) - \bar{X},$$

adică:

$$E(X - \bar{X}) = 0$$

$(X - \bar{X})$ se numește variabilă aleatoare numerică centrată a variabilei aleatoare X .

■ Admitem că aceste formule sînt valabile pentru orice variabilă aleatoare care ia un număr finit de valori. Va fi suficient să considerăm, în locul lui U , mulțimea:

$$\{(X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_n)\}.$$

Exemple. I. Variabila aleatoare centrată: $X[U] = \{x\}$,

$$E(X) = x, \quad M_h(X) = x^h.$$

II. Variabilă aleatoare indicator: $\chi_A[U] = \{0, 1\}$,

$$M_h(\chi_A) = \sum_{a \in U} \chi_A^h(a) p(a) = \sum_{a \in U} p(a),$$

adică:

$$M_h(\chi_A) = p(A).$$

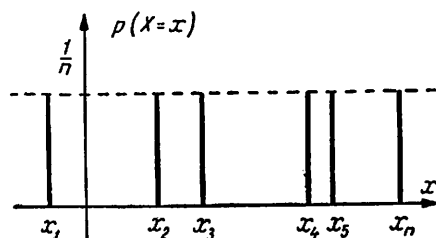


Fig. 2

III. Variabilă aleatoare uniformă: $X(U) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,

$$f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = \frac{1}{n}.$$

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (\text{medie aritmetică}).$$

Dacă, în plus, (fig. 2): $x_m = \frac{m}{n}$, atunci:

$$E(X) = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \frac{n+1}{2n},$$

ceea ce era evident apriori, datorită motivelor de simetrie.

Să calculăm în acest caz particular momentul de ordinul doi:

$$M_2(X) = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right] = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

sau:
$$M_2(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Să remarcăm în fine că: $M_h(\lambda X) = \lambda^h M_h(X)$.

13.3.2 Dispersie și abatere medie pătratică

DEFINIȚIA Se numește dispersie a unei variabile aleatoare numărul pozitiv sau nul:

$$V(X) = M_2(X - \bar{X}).$$

Se mai poate scrie:

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - \bar{X})^2] = E[X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2] = \\ &= E(X^2) - 2XE(\bar{X}) + \bar{X}^2 = \\ &= E(X^2) - \bar{X}^2, \end{aligned}$$

adică:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = [M_2 - M_1^2](X).$$

Acest rezultat este cunoscut sub numele de teorema lui König (sau a lui Huyghens).

Exemple. I. Dispersia unei variabile aleatoare centrată este egală cu:

$$V(X) = x^2 - x^2 = 0.$$

Reciproca este adevărată; într-adevăr:

$$0 = V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 f(x_i)$$

antrenează sigur $x_i = \bar{X}$ pentru oricare i ; de unde: $n = 1$.

II. Dispersia unei variabile aleatoare indicator este egală cu :

$$V(\chi_A) = M_2 - M_1^2 = p(A) - p^2(A) = p(A)[1 - p(A)],$$

adică : $V(\chi_A) = p(A)p(\bar{A})$.

Această observație simplifică mult calculele.

III. Dispersia unei variabile aleatoare uniformă, ca de exemplu : $x_m = \frac{m}{n}$, este egală cu :

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 = \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12n^3},$$

fie : $V(X) = \frac{n^2 - 1}{12n^3}$.

Avem, pe de altă parte :

$$V(\lambda X + \mu) = E[(\lambda X + \mu - \overline{\lambda X + \mu})^2] = E(\lambda^2(X - \bar{X})^2),$$

adică : $V(\lambda X + \mu) = \lambda^2 V(X)$.

Pentru calculul numeric, $\bar{X}$ fiind rar un număr întreg, se folosește adesea următorul artificiu : dacă m' este un număr apropiat al lui $\bar{X}$, se poate arăta imediat că este avantajos să se calculeze cantitatea :

$$V(X) = M_2[(X - m') - (\bar{X} - m')^2],$$

deoarece $V(X) = V(X - m')$. Se deduce :

TEOREMA. Dispersia este minimum-ul momentului de ordinul doi al variabilei aleatoare $(X - m)$. Acesta este obținut pentru $m = \bar{X}$.

DEFINIȚIA. Numărul $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ este numit abatere medie patraticeă a variabilei aleatoare X ,

Avem :

$$\sigma(\lambda X + \mu) = |\lambda| \sigma(X).$$

Exemple. I. Se extrage o zecimală arbitrară, luată din primele o sută de zecimale ale lui π . Cele obținute sînt date prin :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_i	8	8	12	11	10	8	9	8	12	14

Fie X această zecimală. Se presupune că probabilitatea de a trage pe i este proporțională cu p_i . Să se calculeze : $\bar{X}$, $V(X)$ și $\sigma(X)$.

Avem :

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sum_{i=0}^9 \frac{p_i}{100} i = 0 + 0,08 + 2(0,12) + 3(0,11) + 4(0,10) + 5(0,08) + 6(0,09) + 7(0,08) + \\ &\quad + 8(0,12) + 9(0,14) = 4,77. \end{aligned}$$

Pentru a calcula pe $V(X)$, luăm $m' = 5$; se ajunge la:

$$\begin{aligned} V(X) &= \left[\sum_{i=0}^9 \frac{p_i}{100} (i - 5)^2 \right] - (4,77 - 5)^2 = \\ &= (0,08)5^2 + (0,08)4^2 + (0,12)3^2 + (0,11)2^2 + (0,10)1^2 + \\ &+ (0,09)1^2 + (0,08)2^2 + (0,12)3^2 + (0,14)4^2 - (0,23)^2 = \\ &= 8,6300 - 0,0529 = 8,5771. \end{aligned}$$

Deci:

$$\sigma(X) = \sqrt{8,5771} \approx 2,93.$$

Calculul direct ar fi dat:

$$M_2 = 31,33;$$

de unde: $\bar{X} = 4,77$ $V = 31,3300 - (4,77)^2 = 8,5771.$

II. Se consideră că mulțimea de valori a lui X este dată prin:

$$x_1 = a, x_2 = a + b, \dots, x_m = a + (m - 1)b, \dots, x_n = a + (n - 1)b.$$

Să se dea o formulă simplă pentru calculul varianței.

Avem:

$$\bar{X} = \sum_m^n (a + [m - 1]b)p_m = a \sum_m^n p_m + b \sum_m^n (m - 1)p_m.$$

fie:
$$\bar{X} = a + b \sum_m^n (m - 1)p_m.$$

Poate fi observat, pentru calculul lui $V(X)$, că:

$$\bar{X} = a + bY,$$

unde Y ia valorile $0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Se deduce că:

$$V(X) = b^2 V(Y) = b^2 [M_2(Y) - \bar{Y}^2],$$

fie:
$$V(X) = b^2 \left[\sum_m^n (m - 1)^2 p_m - \left(\sum_m^n (m - 1) p_m \right)^2 \right].$$

DEFINIȚIA Se numește variabilă aleatoare centrată redusă asociată lui X ,
3 variabila aleatoare:

$$X^* = \frac{X - \bar{X}}{\sigma(X)}.$$

Variabila aleatoare centrată redusă asociată lui X satisface următoarele proprietăți:

$$E(X^*) = E(\lambda X + \mu) = \lambda E(X) + \mu = \frac{1}{\sigma} \bar{X} - \frac{\bar{X}}{\sigma},$$

$$\text{și: } V(X^*) = V(\lambda X + \mu) = \lambda^2 V(X) = \frac{1}{\sigma^2} V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2},$$

$$\text{fie: } \boxed{E(X^*) = 0, V(X^*) = 1}$$

■ Momentele de ordinul k ale variabilei aleatoare centrate $X' = X - \bar{X}$ sînt numite *momente centrate* ale lui X :

$$\mu_k = M_k(X - \bar{X}).$$

Se pot calcula, observînd că:

$$\begin{aligned} \mu_k &= E[(X - \bar{X})^k] = E\left[\sum_{h=0}^k (-1)^h C_k^h (\bar{X})^h X^{k-h}\right] = \\ &= \sum_{h=0}^k (-1)^h (\bar{X})^h C_k^h E(X^{k-h}), \end{aligned}$$

$$\text{fie și } \mu_k = \sum_{h=0}^k (-1)^h C_k^h (M_1)^h M_{k-h}.$$

Astfel, $k = 2$ d  teorema lui K nig:

$$\mu_2 = V = M_2 - (M_1)^2 \quad (M_0 = 1).$$

(Să notăm că $\mu_0 = 1, \mu_1 = 0$.)

Reciproc, putem să calculăm M_k în funcție de $M_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_k$ deoarece

$$X = X' + \bar{X};$$

de unde:

$$\begin{aligned} M_k &= E(X^k) = E[(X' + \bar{X})^k] = \\ &= E\left[\sum_{h=0}^k C_k^h (\bar{X})^h X'^{k-h}\right] = \\ &= \sum_{h=0}^k (\bar{X})^h C_k^h E(X'^{k-h}), \end{aligned}$$

fie și:

$$M_k = \sum_{h=0}^k C_k^h (M_1)^h \mu_{k-h}.$$

 n sf r it, *momentele factoriale* $\mu_{[k]}$ se definesc prin formula:

$$\mu_{[k]} = E[X(X-1)\dots(X-k+1)].$$

Aceste no iuni diferite: *moment*, *dispersie*, *moment centrat*, constituie mulțimea de valori tipice (sau elemente caracteristice) ale variabilei aleatoare X . Ne mul umim, în general, de a cunoaște pe $\bar{X}$  i $V(X)$ (sau $\sigma(X)$).

Exemple. I. Să se dea o formulă care să permită să se calculeze $M_k(X+Y)$ (U fiind o mulțime finită).

Avem:

$$M_k(X+Y) = \sum_{a \in U} [X(a) + Y(a)]^k p(a) = \sum_{h=0}^k C_k^h \left[\sum_{a \in U} [X(a)]^h [Y(a)]^{k-h} p(a) \right] = \sum_{h=0}^k C_k^h E(X^h - Y^{k-h}).$$

Nu se poate merge mai departe, în general, în afară de cazul cînd, de exemplu, Y este o constantă (exemplu: $Y = \bar{X}$ sau $Y = -\bar{X}$).

II. Fie variabila aleatoare X , astfel ca :

$$X[U] = \{1, 2, 3, \dots, n\} \text{ și } p(X = m) = \frac{1}{n}.$$

Să se calculeze momentele factoriale.

Prin definiția lui $\mu_{[k]}$:

$$\mu_{[k]} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{n} m(m-1) \dots (m-k+1) = \frac{1}{n} \sum_{m=k}^n A_m^k,$$

$$(A_m^k = 0 \text{ dacă: } m < k; \mu_{[k]} = 0 \text{ dacă } k > n).$$

Se poate calcula $\mu_{[k]}$ prin recurență, sau se poate observa că, dacă punem :

$$n\mu_{[k]} = f(k, n),$$

$$\text{atunci: } f(k, n) - f(k, n-1) = A_n^k.$$

Or :

$$A_{n+1}^{k+1} - A_n^{k+1} = (k+1)A_n^k.$$

de unde formula, adevărată pentru $k = n$:

$$\mu_{[k]} = \frac{A_{n+1}^{k+1}}{n(k+1)} = \frac{n+1}{n+2} (n-1)(n-2) \dots (n-k+1).$$

EXERCIIU

13.1 O variabilă aleatoare poate lua valorile 1, 2, 3, 4, 5 cu probabilitățile $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$

1° Să se calculeze :

a) $p\{X < 2\}$; b) $p\{X < 4\}$ c) $p\{X < 1\}$; d) $p\{X < 5\}$.

2° Să se calculeze funcția de repartiție $[x \mapsto F(x)]$ și reprezentați-o grafic.

3° Să se calculeze :

a) $p\{X < 4, 5\}$; b) $p\{2 \leq X \leq 4, 5\}$; c) $p\{X \leq 2\}$.

13.2 Același exercițiu cu variabila aleatoare X la care avem probabilitățile $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}$ respectiv pentru valorile 1, 2, 3, 4, 5.

13.3 O urnă conține opt bile albe, șase bile negre, cinci bile roșii și o bilă verde. Se trag simultan trei bile.

1° Care este probabilitatea ca ele să fie de culori diferite?

2° Care este probabilitatea ca ele să fie de aceeași culoare?

3° Se trag trei bile, succesiv, reintroducînd de fiecare dată bila trasă, înapoi în urnă, și se consideră variabila aleatoare X egală cu numărul total de bile roșii trase.

Să se studieze variabila aleatoare.

(Bac. Lion septembrie 1966)

13.4 Fie X o variabilă aleatoare a lui Bernoulli, adică o variabilă aleatoare care ia valoarea 1 cu probabilitatea p și valoarea 0 cu probabilitatea q .

1° Să se calculeze :

a) valoarea medie;

b) momentul de ordinul 2;

c) momentele de ordinul 3 și 4.

2° Să se aplice la jocul de aruncare cu banul.

13.5 Să se calculeze momentele centrate de ordinul unu și doi ale unei variabile aleatoare a lui Bernoulli (exercițiul 13.4) și aplicați rezultatele la jocul de aruncare cu banul.

13.6 Se aruncă un zar cu șase fețe, numerotate de la 1 la 6. Fețele sînt egal posibile.

Să se calculeze:

1° Valoarea medie a jocului.

2° Momentul simplu de ordinul doi.

3° Dispersia.

13.7 Se aruncă două zaruri identice, fețele lor fiind numerotate de la 1 la 6 și egal posibile. Se consideră variabila aleatoare X egală cu suma punctelor obținute.

1° Să se indice legea lui X .

2° Să se calculeze valoarea medie a lui X .

3° Să se calculeze momentul simplu de ordinul doi.

4° Să se calculeze abaterea medie pătratică.

13.8 O variabilă aleatoare poate lua valorile 1, 2, 3, 4 și 5 cu probabilitățile $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$ și $\frac{1}{12}$.

Calculați:

1° Valoarea medie.

2° Momentul simplu de ordinul doi și abaterea medie pătratică.

13.9 Același exercițiu, cu variabila aleatoare X care ia valorile 1, 3, 5, 7 și cu probabilitățile

$\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$.

13.10 Se consideră variabila aleatoare $X = \frac{Y}{4}$, Y fiind numărul fețelor „stemă” obținut în cursul

probei ce constă în patru aruncări succesive a unei monede. (X este deci frecvența fețelor „stemă” obținută în cursul probei).

1° Care este legea probabilității variabilei aleatoare X ?

2° Să se calculeze:

a) Valoarea medie $E(X)$.

b) Abaterea probabilă $E[|X - E(X)|]$.

c) Abaterea medie pătratică σ cu $\sigma^2 = E[X - E(X)]^2$.

13.11 Următorul tablou indică valorile posibile ale unei variabile aleatoare X și probabilitatea corespunzătoare:

x_i	-2	-1	0	1	3
p_i	0,1	0,2	0,1	0,05	p

Să se calculeze p . Să se calculeze momentele necentrate de ordinul 1, 2 și 3. Să se deducă momentele centrate de ordinul 1 și 2.

13.12 Fie $(U, \mathcal{B}(U), p)$ un spațiu probabilistic finit. Fie: $U^* = \{\omega_1, \dots, \omega_h\}$ mulțimea de evenimente elementare ale lui $\mathcal{B}(U)$.

1° Să se demonstreze că mulțimea χ a variabilelor aleatoare definite pe U este un spațiu vectorial în $\mathbb{R}$ și un inel unitar.

2° Fie A și B două elemente distincte ale lui $\mathcal{B}(U)$. Să se demonstreze că variabilele aleatoare indicatoare χ_A și χ_B sînt independente liniar.

3° Fie X o variabilă aleatoare definită pe U . Să se demonstreze că X se poate pune sub forma unei combinații liniare de variabile aleatoare indicatoare.

4° Să se deducă dimensiunile spațiului vectorial χ în $\mathbb{R}$.

5° Să se demonstreze că aplicația care face ca pentru orice element X a lui χ să-i corespundă valoarea medie $E(X)$ este o aplicație liniară.

13.13 Se numește „joc” aruncarea a cinci zaruri. Fie X variabila aleatoare egală cu numărul de jocuri, într-o suită de cinci jocuri, în care șase iese mai des decît unu.

a) Să se studieze această variabilă aleatoare și faceți o reprezentare grafică a legii probabilității lui X și a funcției sale de repartiție.

b) Să se calculeze probabilitățile: $p(0 \leq X \leq 5)$; $p(X > 2)$; $p(2 \leq X < 5)$.

13.14 1° Într-o urnă A , șase bile poartă numerele 0, 1, 2, 3, 4, 5. Fie X variabila aleatoare definită prin operația de extragere a unei bile din urna A . Să se studieze și reprezinte variabila aleatoare X .

2° Într-o urnă B , șase bile poartă numerele 1, 1, 1, 2, 2, 3. Fie Y variabila aleatoare definită prin operația de extragere a unei bile din urna B . Să se studieze și reprezinte variabila aleatoare Y .

3° Se extrage simultan câte o bilă din fiecare urnă. Să se studieze și reprezinte variabila aleatoare $Z = X - Y$, apoi variabila aleatoare $T = X + Y$.

13.15 Un zar A este măsluit astfel ca:

$$p(6) = 0,2; p(1) = 0,1; p(k) = 0,175 \text{ pentru: } k \in \{1, 6\}.$$

Se definește o variabilă aleatoare X . Un zar simetric B definește variabila aleatoare Y .

1° Să se studieze variabila aleatoare $2X - Y = Z$.

2° Să se compare cu variabila aleatoare Z' obținută cu două zaruri simetrice.

13.16 Se aruncă două zaruri, presupuse perfect simetrice. Se notează punctele obținute, fie x și y .

Se extrage în continuare o bilă dintr-o urnă conținând trei bile negre, cinci bile roșii și șapte bile verzi. Dacă bila este neagră, se notează $x = 3$; dacă ea este roșie, se notează $x = 5$; dacă ea este verde, se notează $x = 7$.

Să se studieze variabila aleatoare: $X = x + y - z$.

13.17 Se consideră două urne A și B . Urna A conține zece bile numerotate 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 10, 10, 20. Urna B conține zece bile numerotate 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 10. Se trage simultan câte o bilă din fiecare urnă și li se adaugă numerele găsite x_A și x_B .

1° Să se studieze variabila aleatoare obținută: $Z = x_A + x_B$.

2° Să se reprezinte grafic legea probabilității lui Z și funcția sa de repartiție.

13.4 CUPLURI DE VARIABLE ALEATOARE

13.4.1 Legea comună [mixtă]

Fie un cuplu (X, Y) de variabile aleatoare, definite pe același univers finit probabilizat $(U, \mathfrak{B}(U), p)$. Probabilitatea unei mulțimi astfel ca:

$$(X = x) \cap (Y = y_i),$$

sau astfel ca:

$$(X < x) \cap (Y < y)$$

nu este determinată, în general, prin funcțiile f și F (asociate lui X) și funcțiile g și G (asociate lui Y).

Vom pune:

DEFINIȚIA Legea comună asociată cuplului de variabile aleatoare (X, Y) este aplicația h a produsului $X[U] \times Y[U]$ în $\mathbb{R}$ definită prin:

$$h(x_i, y_j) = p[(X = x_i) \cap (Y = y_j)].$$

De asemenea, funcția de repartiție comună este definită prin:

$$H(x, y) = p[(X < x) \cap (Y < y)].$$

Exemplu. Se aruncă un zar : fie X numărul obținut. Se extrage apoi un număr întreg cuprins între 1 și X cu o probabilitate egală cu $\frac{1}{X}$ pentru fiecare : fie Y numărul obținut. Să se calculeze funcția $h(x, y)$.

Mulțimile $X[U]$ și $Y[U]$ sint identice cu : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Fie $X = k$. Probabilitatea de a ieși n este în acest caz :

$$\begin{cases} 0 & \text{dacă : } n > k, \\ \frac{1}{k} & \text{dacă : } n \leq k. \end{cases}$$

Deci :

$$p[(X = k) \cap (Y = n)] = \begin{cases} 0 & \text{dacă : } n > k, \\ \frac{1}{6k} & \text{dacă : } n \leq k. \end{cases}$$

Să formăm tabloul care dă pe $h(k, n)$:

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	Totaluri
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{49}{120}$
2	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{29}{120}$
3	0	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{19}{120}$
4	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{37}{360}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{180}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
Totaluri	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Am obținut $h(k, n)$, aplicind formula :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B).$$

$H(x, y)$ este o funcție destul de complicată. Ea este nulă dacă x este inferior sau egal cu 1. Ea este discontinuă pentru valorile întregi ale lui x și y cuprinse între 1 și 6. Ea este egală cu 1 dacă x și y sint superioare lui 6. Se poate calcula prin formula :

$$H(x, y) = \sum_{h < x} \sum_{n < y} h(h, n).$$

■ Evenimentele $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$, în care x_i parcurge mulțimea finită $X[U]$ și y_j parcurge mulțimea finită $Y[U]$, sînt disjunctive. Se poate observa că:

$$X[U] = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, Y[U] = \{y_1, y_2, \dots, y_m\},$$

atunci:

$$\begin{aligned} (X = x_i) &= (X = x_i) \cap U = (X = x_i) \cap [(Y = y_1) \cup \dots \cup (Y = y_m)] = \\ &= [(X = x_i) \cap (Y = y_1)] \cup \dots \cup [(X = x_i) \cap (Y = y_m)]; \end{aligned}$$

de unde prima formulă:

$$f(x_i) = p(X = x_i) = \sum_{j=1}^m h(x_i, y_j)$$

apoi, o formulă analogă:

$$g(y_j) = p(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n h(x_i, y_j)$$

și, în fine, formula care rezultă din faptul că mulțimile:

$$(X = x_i) \cap (Y = y_j)$$

formează o partiție a lui U în $m \times n$ evenimente incompatibile:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h(x_i, y_j) = 1$$

■ Reciproc, dacă se dă o astfel de funcție h pozitivă sau nulă în $X[U] \times Y[U]$, se pot deduce legile asociate ale lui X și Y pe baza formulelor de mai înainte. Funcția h a lui $X[U] \times Y[U]$ în $\mathbb{R}$ trebuie să fie astfel ca:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h(x_i, y_j) = 1$$

pentru ca să fie legea comună a două variabile aleatoare X și Y .

DEFINIȚIA. Fie h legea comună a două variabile aleatoare X (a cărei lege este f) și Y (a cărei lege este g); f și g se numesc legi marginale ale lui h .

O notație comodă este:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= p[(X = x_i) \cap (Y = y_j)] = h(x_i, y_j) \\ p_{i\cdot} &= \sum_{j=1}^m p_{ij} = f(x_i); \quad p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^n p_{ij} = g(y_j) \end{aligned}$$

Exemplu. Legile marginale în exemplul precedent sînt :

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

și

y	1	2	3	4	5	6
$g(y)$	$\frac{49}{120}$	$\frac{29}{120}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{37}{360}$	$\frac{11}{180}$	$\frac{1}{36}$

O lege comună este în general prezentată sub forma :

		(Y)					
		y_1	---	y_j	---	y_m	Total
(X)	x_1	p_{11}	---	p_{1j}	---	p_{1m}	$p_{1\cdot}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\diagdown$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	x_i	p_{i1}	---	p_{ij}	---	p_{im}	$p_{i\cdot}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\diagdown$	$\vdots$	$\vdots$
	x_n	p_{n1}	---	p_{nj}	---	p_{nm}	$p_{n\cdot}$
	Total	$p_{\cdot 1}$	---	$p_{\cdot j}$	---	$p_{\cdot m}$	1

Exemplu. Fie X_A și X_B variabilele aleatoare indicatoare a două submulțimi ale lui U . Să se studieze variabila aleatoare $X_{A \cap B}$ și cuplul (X_A, X_B) .

■ $X_{A \cap B}$ ia valoarea 1 dacă și numai dacă : $X_A(a) = X_B(a) = 1$. Dacă nu, $X_{A \cap B}$ ia valoarea 0. Se poate deci observa că :

$$X_{A \cap B} = X_A X_B$$

De asemenea :

$$X_{\bar{A}} = 1 - X_A, \quad X_{A \cap B} = X_A + X_B - X_{A \cap B}.$$

■ X_A și X_B definesc o lege comună h :

$$h(1, 1) = p([X_A = 1] \cap [X_B = 1]) = p(A \cap B),$$

$$h(1, 0) = p(\bar{A} \cap B),$$

$$h(0, 1) = p(A \cap \bar{B}),$$

$$h(0, 0) = p(\bar{A} \cap \bar{B}).$$

Notind :

$$p = p(A), \quad q = p(B), \quad r = p(A \cap B),$$

avem :

		(X_B)		
(X_A)	h	1	0	Totale
	1	r	$p - r$	p
	0	$q - r$	s	$1 - p$
	Total	q	$1 - q$	1

$$(s = r + 1 - p - q) = p(\bar{A} \cap \bar{B}).$$

13.4.2 Covarianță. Corelație

■ Fie (X, Y) o pereche de variabile aleatoare definite pe un același spațiu finit probabilistic $(U, \mathfrak{B}(U), p)$.

Se știe că : (13.3.1) : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Să se calculeze $V(X + Y)$. Avem :

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= E[(X + Y)^2] - [E(X + Y)]^2 = \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - [E(X) + E(Y)]^2 = \\ &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - [E(X)]^2 - [E(Y)]^2 - \\ &\quad - 2E(X) \cdot E(Y) = \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 + 2[E(XY) - \\ &\quad - E(X) \cdot E(Y)] = \\ &= V(X) + V(Y) + 2[E(XY) - E(X) \cdot E(Y)]. \end{aligned}$$

Or, pe de altă parte :

$$\begin{aligned} E[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})] &= E(XY) - E(X\bar{Y}) - E(\bar{X}Y) + E(\bar{X}\bar{Y}) = \\ &= E(XY) - E(X) \cdot E(Y). \end{aligned}$$

De aici, rezultă :

DEFINIȚIA. Fie X și Y două variabile aleatoare definite pe un același spațiu finit probabilistic $(U, \mathfrak{B}(U), p)$. Se numește covarianță a lui X și a lui Y , și se notează $\text{cov}(X, Y)$, numărul definit prin :

$$\text{cov}[X, Y] = E[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})].$$

Cu ajutorul acestei definiții, rezultatul precedent se scrie :

$$V(X + Y) = V(X) + 2 \text{cov}(X, Y) + V(Y).$$

■ Dăm câteva proprietăți interesante :

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X) \text{ (deoarece : } XY = YX);$$

$$\text{cov}(X, X) = V(X)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\lambda X + \mu Y, Z) &= E[(\lambda X + \mu Y - \overline{\lambda X + \mu Y})(Z - \bar{Z})] = \\ &= E[(\lambda[X - \bar{X}] + \mu[Y - \bar{Y}])(Z - \bar{Z})] = \\ &= E[\lambda(X - \bar{X})(Z - \bar{Z})] + E[\mu(Y - \bar{Y})(Z - \bar{Z})],\end{aligned}$$

adică: $\operatorname{cov}(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda \operatorname{cov}(X, Z) + \mu \operatorname{cov}(Y, Z).$

Întrucît: $\operatorname{cov}(X, 1) = E(X - \bar{X})(1 - 1) = 0,$

se deduce că: $\operatorname{cov}(\lambda X + \mu, Y) = \lambda \operatorname{cov}(X, Y)$

Presupunem: $V(X) \cdot V(Y) \neq 0.$

Se ştie că $V(Z)$ este mai mare sau egal cu 0 pentru orice Z . Deci, pentru orice λ :

$$\begin{aligned}0 \leq V(\lambda X + Y) &= V(\lambda X) + 2 \operatorname{cov}(\lambda X, Y) + V(Y) = \\ &= \lambda^2 V(X) + 2\lambda \operatorname{cov}(X, Y) + V(Y) = \\ &= \alpha \lambda^2 + 2\beta \lambda + \gamma.\end{aligned}$$

Acest trinom, avînd un semn constant, se ştie că nu poate admite două rădăcini reale, distincte, de unde:

$$\beta^2 - \alpha\gamma \leq 0,$$

adică: $\beta^2 = [\operatorname{cov}(X, Y)]^2 \leq \alpha\gamma = V(X) \cdot V(Y),$

sau, şi: $\left| \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} \right| \leq 1$

DEFINIȚIA. Numărul ρ , definit prin $\rho = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$ este numit **coeficient de**
2 **corelație a două variabile aleatoare X și Y .**

Coeficientul de corelație ρ a două variabile aleatoare este cuprins între -1 și $+1$. Dacă $|\rho| = 1$, discriminantul trinomului precedent este nul, și admite o rădăcină dublă α . Există deci un număr real α astfel ca:

$$V(\alpha X + Y) = 0,$$

și, prin urmare (13.3.2, Exemplul 1), un număr real β astfel ca:

$$\alpha X + Y = \beta.$$

Observație. — Un număr analog acestuia se introduce în statistica descriptivă.

■ Calculul practic al covarianței și al coeficientului de corelație se efectuează în funcție de numerele:

$$\rho_{ij} = h(x_i, y_j) = \rho[(X = x_i) \cap (Y = y_j)].$$

Să ne reamintim un rezultat deja întilnit și care simplifică mult anumite calcule:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - \overline{XY}$$

(Această proprietate constituie o generalizare a teoremei lui König.)

Avem deci: $\bar{X} = \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i$, $V(X) = \left[\sum_{i=1}^n p_i \cdot (x_i)^2 \right] - \bar{X}^2$,

și: $\text{cov}(X, Y) = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} x_i y_j \right] - \bar{X} \bar{Y}$.

Această formulă conduce la calculul lui ρ :

$$\rho = \frac{\sum_{ij} p_{ij} x_i y_j - \bar{X} \bar{Y}}{\sqrt{\sum_i p_i \cdot x_i^2 - \bar{X}^2} \sqrt{\sum_j p_j \cdot y_j^2 - \bar{Y}^2}}.$$

Exemplu. Fie legea comună definită prin următorul tablou:

(X)	(Y)						
	$j \backslash i$	5	7	9	11	13	Totale
	0	0	0	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{3}{40}$
	8	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
	10	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{2}$
	13	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{8}$
	Totale	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	1

Aici: $X[U] = \{0, 8, 10, 13\}$, $Y[U] = \{5, 7, 9, 11, 13\}$.

Legile marginale sînt:

x	0	8	10	13
$f(x)$	$\frac{3}{40}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

și:

y	5	7	9	11	13
$g(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

Pentru a calcula $\bar{X}$ și $\bar{Y}$, luăm mediile provizorii ale lui a și b , vecine apriori ale lui $\bar{X}$ și $\bar{Y}$ și întregi, de exemplu :

$$a = 9, b = 9,$$

și punem :

$$X' = X - 9, Y' = Y - 9.$$

$$\text{Deci : } \bar{X}' = \frac{3}{40}(-9) + \frac{3}{10}(-1) + \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{8}(4) = \frac{1}{40};$$

$$\text{de unde : } \bar{X} = 9 + \frac{1}{40} = \frac{361}{40},$$

$$\text{și : } \bar{Y}' = \frac{1}{8}(-4) + \frac{9}{40}(-2) + \frac{1}{5}(0) + \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{5}(4) = \frac{7}{20};$$

de aici rezultă :

$$\bar{Y} = 9 + \frac{7}{20} = \frac{187}{20}.$$

Să formăm tabloul care dă pe $p_{ij}x'_i y'_j$ în care :

$$x'_i = x_i - 9, y'_j = y_j - 9:$$

$p_{ij}x'_i y'_j$	-4	-2	0	2	4	Totale
-9	0	0	0	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{9}{5}$
-1	0	$\frac{1}{10}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{11}{20}$
1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$
4	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$
Totale	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{11}{10}$	0	-1	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{61}{20}$

$$\text{Astfel : } \sum_{i,j} p_{ij}x'_i y'_j = -\frac{61}{20},$$

$$\text{și : } \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X', Y') = \sum_{i,j} p_{ij}x'_i y'_j - \bar{X}'\bar{Y}' = -\frac{61}{20} - \frac{7}{800} = -\frac{2447}{800}.$$

Avem :

$$\begin{aligned} V(X) = V(X') &= \sum_i p_i (x'_i)^2 - \bar{X}'^2 = \left[\frac{3}{40}(81) + \frac{3}{10}(1) + \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{8}(16) \right] - \left(\frac{1}{40} \right)^2 = \\ &= \frac{355}{40} - \frac{1}{1600} = \frac{14199}{1600} \approx 8,874 \quad (\sigma \approx 2,98); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(Y) = V(Y') &= \sum_j p_j (y_j')^2 - \bar{Y}'^2 = \left[\frac{1}{8} (16) + \frac{9}{40} (4) + \frac{1}{5} (0) + \frac{1}{4} (4) + \frac{1}{5} (16) \right] - \left(\frac{7}{20} \right)^2 = \\
 &= \frac{71}{10} - \frac{49}{400} = \frac{2791}{400} \approx 6,977 \quad (\sigma \approx 2,64).
 \end{aligned}$$

Astfel :

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}} = - \frac{2\,447 \times 800}{800 \sqrt{14\,199 \times 2\,791}} = - \frac{2\,447}{\sqrt{39\,629\,409}} \approx -0,389$$

($\sqrt{39\,629\,409}$ este apropiat lui 6 295).

13.4.3 Variabile aleatoare independente

DEFINIȚIE. Două variabile aleatoare X și Y sînt independente dacă sistemele
1 complete de evenimente :

$$\{(X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_n)\}$$

$$\{(Y = y_1), (Y = y_2), \dots, (Y = y_m)\}$$

sînt independente.

Știm că acestea sînt echivalente cu :

$$\forall_{\{1, \dots, n\}^i}, \forall_{\{1, \dots, m\}^j}$$

$$p[(X = x_i) \cap (Y = y_j)] = p(X = x_i) \times p(Y = y_j).$$

Sau și :

$$\forall_{\{1, \dots, n\}^i}, \forall_{\{1, \dots, m\}^j} h(x_i, y_j) = f(x_i) \cdot g(y_j), \quad p_{ij} = p_i \cdot p_j.$$

Pentru ca X și Y să fie independente, este necesar și suficient ca funcția $h(x, y)$ să poată fi descompusă sub forma :

$$h(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y).$$

Se va pune atunci :

$$f(x) = \varphi(x) \sum_{j=1}^m \psi(y_j), \quad g(y) = \psi(y) \sum_{i=1}^n \varphi(x_i).$$

Este clar că dacă X și Y sînt independente, vom avea independente și $(X + a)$ și $(Y + b)$, deci de exemplu variabilele aleatoare centrate :

$$(X - \bar{X}) \text{ și } (Y - \bar{Y}).$$

■ Să presupunem U finit X și Y independente și definite pe U . Atunci:

$$\begin{aligned} E(X^k Y^h) &= \sum_{a \in U} X^k(a) Y^h(a) p(a) = \\ &= \sum_{i,j} x_i^k y_j^h p_{ij} = \sum_{i,j} x_i^k y_j^h p_i \cdot p_j = \\ &= \left(\sum_i p_i \cdot x_i^k \right) \left(\sum_j p_j \cdot y_j^h \right) \end{aligned}$$

adică: $E(X^k Y^h) = E(X^k) \cdot E(Y^h)$.

Se deduc în special formulele:

$$M_k(XY) = M_k(X) \cdot M_k(Y) \quad (k = h),$$

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y) \quad (k = h = 1),$$

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})] = E(X - \bar{X}) \cdot E(Y - \bar{Y}) = 0,$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Se poate deci enunța

TEOREMĂ. Dacă X și Y sînt variabile aleatoare independente, definite într-un spațiu finit probabilistic $(U, \mathfrak{B}(U), p)$, avem:

$$E(X^k Y^h) = E(X^k) \cdot E(Y^h); \quad (1)$$

$$M_k(XY) = M_k(X) \cdot M_k(Y); \quad (2)$$

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y); \quad (3)$$

$$\text{cov}(X, Y) = 0 \quad (4)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y). \quad (5)$$

(Demonstrarea directă a relațiilor (3), (4) și (5) este prezentată în exercițiul 13.18).

Admitem că toate aceste relații se extind la cazuri mult mai generale.

Se poate demonstra prin recurență că dacă $X_1, X_2, \dots, X_n$ sînt variabile aleatoare *independente două cîte două* și de aceeași lege (avînd în particular aceeași valoare medie $\bar{X}$ și aceeași dispersie $V(X)$) atunci:

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = nE(X);$$

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = nV(X).$$

Exemple. I. Demonstrarea relației care permite să se obțină:

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

poate fi dedusă din următoarea formulă generală, ceea ce se va demonstra prin recurență:

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(X_i, X_j).$$

II. Fie o variabilă aleatoare indicator X_A :

$$E(X_A) = p = p(A),$$

$$V(X_A) = p(A) \cdot p(\bar{A}) = p(1 - p).$$

Se spune că este o variabilă aleatoare a lui Bernoulli, dacă:

$$U = \{a, b\}, A = \{a\}.$$

Presupunem că există un întreg N astfel ca pN să fie întreg.

Fie un șir (X_i) de n variabile aleatoare Bernoulli independente și de aceeași lege ca X_A , și fie X variabila:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Se poate considera de exemplu că X este numărul de bile roșii extrase dintr-o urnă care conține (Np) bile roșii și $(N - Np)$ bile negre, după n extrageri independente, fiecare bilă extrasă urmînd a fi reintrodusă, în urnă.

Deci:

$$E(X) = np,$$

$$V(X) = np(1 - p).$$

Observație. — Condiția:

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

$$(\text{sau } p = 0)$$

este o condiție necesară dar nu suficientă pentru ca X și Y să fie independente.

Exemplu. Considerăm legea comună definită prin tabloul care urmează:

$x_i \backslash y_j$	5	6	9	Totale
10	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
11	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
12	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$
13	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
14	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
Totale	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Se constată că X și Y sînt independente. De exemplu:

$$p([X = 10] \cap [Y = 5]) = 0 \neq p(X = 10) \times p(Y = 5) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}.$$

Or, calculul pentru $\text{cov}(X, Y)$ dă:

$$\text{cov}(X, Y) = [\sum p_{ij} X_i Y_j] - \bar{X}\bar{Y} = \frac{1}{5} [90 + 66 + 60 + 78 + 126] - 12 \times 7 = \frac{1}{5} [420] - 84 = 0.$$

Într-adevăr:

$$\bar{X} = \frac{1}{5} (10 + 11 + 12 + 13 + 14) = \frac{60}{5} = 12,$$

și

$$\bar{Y} = \frac{1}{5} (5 + 2 \times 6 + 2 \times 9) = \frac{35}{5} = 7.$$

Se va putea observa că aici avem: $Y = (X - 12)^2 + 5$.

13.5 PROBE REPETATE. LEGEA NUMERELOR MARI

13.5.1 Inegalitatea lui Bienaymé-Cebîșev

Fie X o variabilă aleatoare pe un spațiu finit probabilistic $(U, \mathfrak{B}(U), p)$, fie $\bar{X}$ valoarea medie și σ abaterea medie pătratică. Distingem în U mulțimea H a elementelor a astfel ca:

$$|X(a) - \bar{X}| \geq \varepsilon \text{ unde } \varepsilon \text{ este un număr pozitiv.}$$

$$\text{Notăm: } H = \{|X - \bar{X}| \geq \varepsilon\}. \quad (1)$$

Prin definiția lui σ avem:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{a \in U} (X(a) - \bar{X})^2 p(a) \geq \\ &\geq \sum_{a \in H} (X(a) - \bar{X})^2 p(a) \geq \quad (H \text{ inclus în } U) \\ &\geq \varepsilon^2 \sum_{a \in H} p(a) = \varepsilon^2 p(H) \end{aligned}$$

în virtutea inegalității (1).

$$\text{Deci: } p(H) = p(|X - \bar{X}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Notăm $(|X - \bar{X}| < \varepsilon)$ evenimentul contrar care corespunde valorilor lui X situate în intervalul: $]\bar{X} - \varepsilon, \bar{X} + \varepsilon[$.

Avem deci:

$$p(|X - \bar{X}| < \varepsilon) = 1 - p(H) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Se obține astfel inegalitatea lui Bienaymé—Cebîșev :

$$p(|X - \bar{X}| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Uneori această inegalitate se scrie sub forma următoare (λ fiind un număr strict pozitiv, se pune $\varepsilon = \lambda\sigma$) :

$$p(|X - \bar{X}| < \lambda\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

De exemplu, probabilitatea pentru ca X să ia o valoare cuprinsă în intervalul :

$$]\bar{X} - 3\sigma, \bar{X} + 3\sigma[$$

este mai mare sau egală cu $\frac{8}{9}$.

Abaterea medie patratică σ este într-un anumit fel o măsură a împrăștierii valorilor lui X în jurul valorii medii.

Se arată că :

$$p(|X - \bar{X}| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^n} E(|X - \bar{X}|^n),$$

în care n este un număr întreg, pozitiv.

Exemple. I. Fie distribuția uniformă :

$$X[U] = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right\}, \quad p\left(X = \frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Se știe că :

$$\bar{X} = \frac{n+1}{2n}, \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12n^3}.$$

Probabilitatea ca X să difere de $\frac{n+1}{2n}$ cu mai puțin decît ε este mai mare sau egală cu :

$$1 - \frac{V}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{n^2-1}{12n^3 \varepsilon^2} \approx 1 - \frac{1}{12 \varepsilon^2}.$$

Or, această probabilitate este, în fapt, proporțională cu numărul de numere întregi pozitive h mai mici sau egale cu n , astfel ca :

$$\frac{n+1}{2n} - \varepsilon < \frac{h}{n} < \frac{n+1}{2n} + \varepsilon,$$

fie aproximativ $2n\varepsilon$; de unde o valoare aproximativă a probabilității :

$$p(|X - m| < \varepsilon) \approx 2\varepsilon \quad \left(\text{dacă } \varepsilon < \frac{1}{2} \right).$$

În aceste condițiuni avem :

$$2\varepsilon \geq 1 - \frac{1}{12\varepsilon^2},$$

cum se vede studiind funcția f definită prin :

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{12x^2} \text{ pentru : } 0 < x < \frac{1}{2},$$

și derivata sa f' definită prin :

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{6x^3}.$$

Minimumul lui f este atins pentru :

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{12}} \approx 0,436.$$

Valorează $3x - 1$, fie aproximativ : $0,308 > 0$.

Se vede deci că majorarea dată de inegalitatea lui Bienaymé-Cebîșev este mult prea mare și nu poate avea niciodată o utilitate practică. Aceasta devine evident, în mod deosebit, dacă :

$$\lambda < 1 \text{ sau } \varepsilon < \sigma;$$

se găsește deci că p este superior unei cantități negative !

II. În cazul unei variabile aleatoare care are o repartiție simetrică [adică astfel ca, dacă x_i este un element a lui $X[U]$ atunci $x_j = 2\bar{X} - x_i$ aparține de asemenea lui $X[U]$] și lui $p(X = x_j) = p(X = x_i)$, abaterea probabilă se definește ca numărul e , astfel ca :

$$p(|X - \bar{X}| < e) = \frac{1}{2};$$

deoarece :

$$x_i p(X = x_i) + x_j p(X = x_j) = 2\bar{X} p(X = x_i),$$

e este asociat la abaterea medie patrată prin relația :

$$\boxed{e \leq \sigma \sqrt{2}}$$

Să calculăm abaterea probabilă a distribuției uniforme precedente. Dacă :

$$p(|X - m| < e) = \frac{1}{2},$$

atunci e are valoarea aproximativ $\frac{1}{4}$ deoarece avem $(2n - 1)$ numere de forma $\frac{k}{4n}$ în intervalul :

$$\left[\bar{X} - \frac{1}{4}, \bar{X} + \frac{1}{4} \right] = \left[\frac{n+2}{4n}, \frac{3n+2}{4n} \right] \quad (k \text{ variază de la } (n+3) \text{ la } (3n+1));$$

de unde, în jur de $\frac{2n-1}{4} \approx \frac{n}{2}$ numere de forma $\frac{k}{n}$ în acest interval; probabilitatea sa este

deci apropiată de $\frac{1}{2}$.

Pentru o distribuție discretă, e nu este niciodată determinat cu exactitate, dar poate să varieze într-un anumit interval.

Adoptînd $e = \frac{1}{4}$, se verifică inegalitatea :

$$e \leq \sigma \sqrt{2} \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,41,$$

și inegalitatea echivalentă :

$$2e \geq 1 - \frac{1}{12e^2}.$$

13.5.2 Legea slabă a numerelor mari

Considerăm n variabile aleatoare, independente două câte două, $X_1, X_2, \dots, X_n$, de aceeași lege de repartiție, deci în particular de aceeași valoare medie:

$$\bar{X}_i = \bar{X},$$

și de aceeași abatere medie pătratică: $\sigma(X_i) = \sigma$.

Considerăm variabila aleatoare: $S_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

(Aceasta este *media aritmetică* a variabilelor aleatoare X_i .)

Este clar că:

$$E(S_n) = \frac{1}{n} E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \sum_i E(X_i) = \bar{X},$$

$$\begin{aligned} \text{și că:} \quad V(S_n) &= \frac{1}{n^2} V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_i V(X_i) = \frac{1}{n^2} (n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}, \end{aligned}$$

căci X_i și X_j sînt independente (dacă $i \neq j$).

Aplicăm asupra lui S_n inegalitatea lui Bienaymé-Cebîșev:

$$p(|S_n - \bar{X}| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{n\lambda^2}.$$

ε și σ fiind fixe, va apărea deci că această probabilitate tinde către 1 cînd n tinde către infinit:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p(|S_n - \bar{X}| < \varepsilon) = 1}$$

Se deduce legea slabă a numerelor mari¹ sau teorema lui Bernoulli:

TEOREMĂ. Media aritmetică S_n a n variabile aleatoare, două câte două independente și de aceeași lege, admit aceeași valoare medie $\bar{X}$ ca fiecare dintre ele. Dacă ε este un număr real pozitiv, probabilitatea evenimentului $|S_n - \bar{X}| < \varepsilon$ tinde către 1 cînd n tinde către infinit.

■ Acestei teoreme i se poate da următoarea aplicație.

Considerăm variabila aleatoare indicator X_{A_i} , o succesiune de evenimente A_n , independente două câte două și cu o aceeași probabilitate de apariție p .

Numărul: $nS_n = X_{A_1} + X_{A_2} + \dots + X_{A_n}$

¹ Aici lege este sinonim cu teoremă și nu cu lege de probabilitate.

reprezintă numărul de evenimente A_i printre primele n , astfel ca $X_{A_i} = 1$ (se spune atunci că A_i s-a realizat). Pentru ca probabilitatea :

$$p(|S_n - p| < \varepsilon)$$

să fie superioară lui $1 - \alpha$, este suficient să se ia :

$$1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} > 1 - \alpha,$$

fie :

$$n\varepsilon^2 > \frac{\sigma^2}{\alpha} = \frac{p(1-p)}{\alpha},$$

sau, și :

$$n > \frac{p(1-p)}{\alpha\varepsilon^2}$$

Exemplu. Se aruncă de n ori consecutiv un zar cu șase fețe. Cum se poate alege n pentru ca numărul de apariții al feței șase să fie cuprins între 0 și $\frac{n}{3}$, cu o probabilitate egală cel puțin cu 0,9?

Dorim ca: $nS_n \in \left[0, \frac{n}{3}\right]$, adică: $S_n \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ sau :

$$S_n \in \left[\bar{S}_n - \frac{1}{6}, \bar{S}_n + \frac{1}{6}\right]. \text{ Într-adevăr, } \bar{S}_n = \frac{1}{6}.$$

Calculul precedent este aplicabil cu $p = \frac{1}{6}$, $\varepsilon = \frac{1}{6}$ și $\alpha = \frac{1}{10}$ ($1 - \alpha = 0,9$).

Avem :

$$p\left(\left|S_n - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{6}\right) \geq 1 - \frac{1}{10},$$

$$n \geq \frac{p(1-p)}{\alpha\varepsilon^2}$$

de unde minorantul :

$$n \geq 10(6)^2 \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = 50.$$

■ Se știe deja că un eveniment de probabilitate 1 nu este cu necesitate evenimentul sigur (numai U este evenimentul sigur). Mai mult, faptul că probabilitatea unui eveniment H_n (de exemplu, astfel ca $(|S_n - \bar{X}| < \varepsilon)$ tinde către 1 nu dovedește că H_n are o limită, și nici, afortiori, că o astfel de limită este sigură.

Trebuie deci să ne ferim de a trage din teorema precedentă concluzia optimistă că șirul S_n converge necesar către $\bar{X}$ (contrar unei opinii răspândite).

Se poate de asemenea demonstra că probabilitatea de a obține exact de $\frac{n}{6}$ ori numărul șase într-o suită de n aruncări tinde către 0 când n crește la infinit

(o astfel de probabilitate este într-adevăr dată de următoarea formulă, în care $n = 6m$:

$$C_n^m \frac{5^{n-m}}{6^n} = C_{6m}^m \left(\frac{5^6}{6^6}\right)^m,$$

și se poate arăta că limita acestui număr este 0 când m tinde către infinit). Ceea ce nu înseamnă de altfel că acest eveniment este imposibil, ci mai degrabă că el este excesiv de rar pe măsură ce n crește.

Credința populară a unor „compensații” a efectelor întâmplătoare trebuie deci îndepărtată.

■ Se poate demonstra o altă teoremă, datorată lui Borel, și numită *legea tare a numerelor mari*. Ea are o mulțime de enunțuri apropiate, ca cea care urmează, în aceleași condițiuni :

$$p(\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \bar{X}) = 1.$$

■ Această lege a numerelor mari arată legătura care unește *frecvența* și *probabilitatea*.

Într-adevăr, în cazul unei variabile aleatoare indicator, se poate considera S_n ca frecvența evenimentelor realizate în cursul a n probe independente ; această frecvență are deci ca limită „aproape sigură” probabilitatea :

$$\bar{X} = p.$$

Realizarea concretă a unei experiențe permite deci, dacă nu se cunoaște valoarea lui p , să se dea o valoare apropiată.

13.5.3 Variabile aleatoare discrete

Paragrafele precedente (de la 13.2.2) priveau variabilele aleatoare de ordin finit, astfel ca :

$$|X[U]| = n.$$

Definițiile și demonstrațiile date (presupunând sigur printre altele în mod explicit pe U finit) pot să se extindă mai ales la cazul în care $\bar{X}[U]$ este numărabil și admite un cel mai mic element :

$$X[U] = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

(variabila aleatoare de ordin infinit).

În lipsă de cunoștințe suficiente asupra calculului sumelor de felul

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$$

(numite *serii*), nu putem da noile demonstrații.

Admitem deci că :

a) variabila aleatoare este total determinată prin darea numerelor pozitive sau nule :

$$p_i = p(X = x_i) \quad (i \in \mathbb{N})$$

astfel ca :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1}$$

- b) X^n , $X + Y$, XY , $\sup(X, Y)$, $\inf(X, Y)$ sînt variabile aleatoare ;
 c) dacă momentele există, definițiile și teoremele care le privesc rămîn valabile ;
 d) legile compuse au definiții analoage și în care independența a două variabile aleatoare se bucură de aceleași proprietăți cu condiția de a se înlocui, de exemplu :

$$p_i = \sum_{j=1}^m p_{ij}$$

prin :

$$p_i = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} ;$$

- e) inegalitatea lui Bienaymé-Cebîșev își păstrează valoarea dacă dispersia lui X există, de asemenea teorema lui Bernoulli.

Exemple. I. Fie variabila aleatoare geometrică :

$$X[U] = N ;$$

$$p(X = n) = p_n = \lambda p^n \quad (0 < p < 1).$$

λ poate fi calculat în următorul mod. Se știe că :

$$1 + p + p^2 + \dots + p^n = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p} \quad (p \neq 1).$$

Dacă n tinde către infinit, întrucît $|p|$ este inferior lui 1, p^{n+1} tinde către 0 și :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n = \frac{1}{1 - p}.$$

Se va lua deci :
 adică :

$$\lambda = (1 - p),$$

$$\boxed{p_n = (1 - p)p^n = p^n - p^{n+1}}$$

Să calculăm valoarea medie. Dacă aceasta are un sens, $\bar{X}$ este definit prin formula :

$$\bar{X} = \sum_{n=0}^{+\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda n p^n = \lambda p \sum_{n=0}^{+\infty} n p^{n-1}.$$

Se demonstrează ușor că cele două funcții de x , definite prin formula :

$$f_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} \quad \text{și}$$

$$g_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

sunt egale pentru x diferit de 1; acestea sunt derivatele lui:

$$x \mapsto 1 + x + x^2 + \dots + x^n \text{ și ale lui } x \mapsto \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Pentru orice x , când n tinde către infinit, $g_n(x)$ tinde către $\frac{1}{(1-x)^2}$ căci nx^n tinde către 0.

Deci:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} np^{n-1} = \frac{1}{(1-p)^2}$$

și:

$$\boxed{\bar{X} = \frac{p}{1-p}}.$$

Calculul dispersiei este mult mai complicat. Să luăm derivata a doua a lui:

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^n),$$

e găsește: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + \dots + n(n-1)x^{n-2} =$

$$= \frac{-(n^2 - n)x^{n+1} + (n^2 - 1)x^n - (n+1)x^{n-1} + 2}{(1-x)^3}$$

Această cantitate avind drept limită $\frac{2}{(1-x)^3}$, când n tinde către infinit, avem:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)p^{n-2} = \frac{2}{(1-p)^3},$$

fie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 p^{n-2} = \frac{2}{(1-p)^3} + \sum_{n=0}^{+\infty} np^{n-2},$$

sau și:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 p^n = \frac{2p^2}{(1-p)^3} + \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{p(p+1)}{(1-p)^3}$$

Momentul M_2 este deci egal cu:

$$M_2 = \lambda \frac{p(p+1)}{(1-p)^3} = \frac{p(p+1)}{(1-p)^3};$$

de unde:

$$V = M_2 - (\bar{X})^2 = \frac{p(p+1) - p^2}{(1-p)^3},$$

adică:

$$\boxed{V = \frac{p}{(1-p)^2}}$$

Se poate demonstra că această variabilă aleatoare are momente de toate ordinele.

Iată o interpretare probabilistică, posibilă. Dacă, pe timp de o secundă, un anumit eveniment are probabilitatea p de a nu se produce (și $(1-p)$ de a se produce) independent de ceea ce s-a întâmplat mai înainte, probabilitatea de a avea de așteptat $(n+1)$ secunde înainte de prima sa realizare este egală cu:

$$p_n = \underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{\text{de } n \text{ ori}} \cdot (1-p).$$

Se zice că este vorba de un proces fără memorie, ca și în cazul așteptării unui taxi (dar nu și a unui autobuz, a cărui frecvență este regulată).

II. Să considerăm o variabilă aleatoare, definită prin :

$$X[U] = N,$$

și :

$$p(X = n) = p_n = \frac{\lambda}{(n+1)(n+2)}.$$

Întru cit :

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

se vede că :

$$\frac{1}{\lambda} [p_0 + p_1 + \dots + p_n] = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Deci :

$$\lambda = 1 \text{ și } p_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Se arată că X nu admite nici un moment; de exemplu, pentru h superior sau egal cu 2 :

$$n^h p_n = \frac{n^h}{(n+1)(n+2)}$$

nu tinde către 0 când n tinde către infinit.

Suma $\sum_{m=0}^n m^h p_m$ nu poate deci avea limită, deoarece :

$$\sum_0^n - \sum_0^{n-1} = n^h p_n$$

Demonstrarea faptului că X nu are valoare medie este prea lungă pentru a fi expusă aici. Se poate arăta, de exemplu, că suma numerelor $n^h p_n$, unde n variază între 2^k și $2^{k+1} - 1$, este superioară lui $\frac{1}{2}$, ceea ce dovedește că suma $\sum_0^n m^h p_m$ tinde către infinit.

III. Există variabile aleatoare astfel ca valoarea medie $\bar{X}$ să existe chiar dacă dispersia V (precum și momentele de ordin superior lui 1) este infinită.

Admitem că acesta este cazul variabilei aleatoare definită pe N prin legea :

$$p_n = \frac{4}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Suma $p_0 + p_1 + \dots + p_n$ este egală cu :

$$\frac{n^2 + 5n + 4}{(n+2)(n+3)},$$

asa după cum se poate verifica prin recurență; ea tinde către 1.

De asemenea suma $p_1 + 2p_2 + \dots + np_n$ este egală cu :

$$\frac{n^2 + n}{(n+2)(n+3)};$$

limita sa este deci : $\bar{X} = 1$.

13.5.4 Variabile aleatoare absolut continue

Cazul în care $X[U]$ este $\mathbb{R}$ întreg sau un interval al lui $\mathbb{R}$, este extrem de important în practică, dar cere în același timp cunoștințe matematice deosebit de înalte (de analiză și de algebră).

Ne vom mulțumi deci să indicăm că, chiar dacă ne vom restrânge la cazul în care funcția de repartiție F este o funcție derivabilă care se poate scrie sub forma :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

(φ este densitatea de repartiție a variabilei aleatoare X), momentele de ordin k , definite prin formulele :

$$M_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x) dx,$$

nu există totdeauna. Dacă momentele există, teoremele deduse prin analogie, din cazul discret, mai sînt încă valabile ; de exemplu :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 \varphi(x) dx = M_2 - m^2,$$

în care :

$$m = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx.$$

Independența este deci definită prin :

$$p([X < x] \cap [Y < y]) = \left[\int_{-\infty}^x \varphi(t) dt \right] \times \left[\int_{-\infty}^y \psi(t) dt \right]$$

adică :

$$p([X < x] \cap [Y < y]) = p(X < x) \cdot p(Y < y).$$

Se deduc de aici aceleași consecințe.

13.6 LEGEA BINOMIALĂ

13.6.1 Definiție

Considerăm un spațiu probabilistic finit $(U, \mathfrak{B}(U), p)$. Fie χ_A variabila aleatoare a unui eveniment A . Vom nota :

DEFINIȚIE. Se numește lege binomială de parametri n și p , legea de probabilitate a variabilei aleatoare X :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

în care X_i este o variabilă avînd aceeași lege ca și variabila aleatoare χ_1 definită prin :

$$p(\chi_A = 1) = p(A) = p;$$

$$p(\chi_A = 0) = p(\bar{A}) = 1 - p = q.$$

Observație. — Această variabilă aleatoare X poate fi considerată ca definită pe U^* . Fie într-adevăr, în mulțimea U^n evenimentele definite prin :

$$A_1 = A \times U \times U \times \dots \times U,$$

$$A_2 = U \times A \times U \times \dots \times U,$$

$$A_8 = U \times U \times A \times U \times \dots \times U,$$

.....

$$A_{n-1} = U \times U \times U \times \dots \times U,$$

$$A_n = U \times U \times U \times \dots \times U \times A.$$

Avem:

$$p(A_1) = p(A) \times p(U) \times p(\underline{U}) \times \dots \times p(\underline{U}) = p(A),$$

$$\vec{p}(A_2) = \vec{p}(U) \times \vec{p}(A) \times \vec{p}(U) \times \dots \times \vec{p}(U) = \vec{p}(A),$$

• • • • •

$$p(A_n) = p(U) \times p(U) \times \dots \times p(A) = p(A).$$

Considerăm variabilele aleatoare X_i , ale evenimentelor A_i . Sînt variabilele aleatoare definite pe U^n care au toate aceeași lege de probabilitate, iar variabila aleatoare $X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ este o variabilă aleatoare definită pe U^n înzestrată cu probabilitatea generală p (12.5).

13.6.2 Lege de probabilitate a acestei variabile aleatoare

Variabilele aleatoare X_i putînd lua în mod independent valorile 0 și 1, variabila aleatoare X poate lua valori întregi cuprinse între 0 și n :

$$X[U^n] = \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

■ Considerăm, de exemplu, evenimentul B al lui U^n :

$$B = A \times A \times A \times \dots \times A.$$

Acest eveniment B este inclus în A_i pentru orice i cuprins între 0 și n .

Deci :

$$\bigvee_{\{0, \dots, n\}^i} X_i[B] = 1.$$

În consecință: $X[B] = n$.

Fie din nou, de exemplu, evenimentul C al lui U^n :

$$C = C_1 \times C_2 \times C_3 \times \dots \times C_n,$$

unde C_i este egal cu A pentru i aparținând unei submulțimi K de cardinal k a mulțimii $\{0, \dots, n\}$, și unde C_j este egal cu $\bar{A}$ pentru j aparținând mulțimii $\{0, \dots, n\} - K$. Avem:

a) $X_i[C] = \{1\}$ căci C este inclus în A , pentru i aparținând lui K ;

b) $X_j[C] = \{0\}$ căci C este inclus în $\bar{A}$, pentru j aparținând lui $\{0, \dots, n\} - K$.

Deci, în acest caz: $X(C) = k$.

Reciproc, fie un eveniment D a lui Ω^n , de forma:

$$D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n,$$

și astfel ca:

$$X[D] = k.$$

Există o submulțime K' de cardinal k a mulțimii $\{0, \dots, n\}$ astfel ca

$$i \in K' \Rightarrow X_i[D] = \{1\} \quad D_i \supset A \quad (X(D_i) = \{1\}),$$

$$j \in \{0, \dots, n\} - K' \quad X_j[D] = \{0\} \Leftrightarrow D_j \subset \bar{A} \quad (X(D_j) = \{0\}).$$

Deci, D implică un eveniment de forma C .

■ Probabilitatea unui eveniment C a lui U^n astfel ca $X(C) = k$ este

$$p(C) = \underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{\text{de } k \text{ ori}} \times \underbrace{(1-p)(1-p) \dots (1-p)}_{\text{de } (n-k) \text{ ori}} = p^k q^{n-k},$$

după definiția unei probabilități generate.

■ Există totuși diferite moduri de a alege un eveniment de tip C ca și diferite moduri de a alege o submulțime de cardinal k într-o mulțime de cardinal n aici: $\{0, \dots, n\}$, adică:

$$C_n^k = \binom{n}{k} \text{ moduri.}$$

Pe de altă parte, două evenimente diferite C și C' astfel ca:

$$X(C') = X(C) = k$$

sînt incompatibile. Într-adevăr, fie:

$$C = C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n \quad \text{și} \quad C' = C'_1 \times C'_2 \times \dots \times C'_n.$$

Avem:

$$\exists_{\{0, \dots, n\}^i} C_i \subset \bar{A} \quad \text{și} \quad C'_i \subset A;$$

$$\exists_{\{0, \dots, n\}^j} C_j \subset A \quad \text{și} \quad C'_j \subset \bar{A}.$$

Nu există deci nici un element comun lui C și C' , căci un astfel de element ar avea o componentă în intersecția $C_i \cap C'_i$, care este vidă.

În consecință: $p(C \cup C') = p(C) + p(C') = 2p(C)$.

Prin urmare, întrucît avem $\binom{n}{k}$ evenimente diferite astfel ca $X(C) = k$:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Observații. — 1. Numărul $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ se notează uneori $b(k, n, p)$.

Legea binomială $\mathfrak{B}(n, p)$ este deci aplicația care, pentru orice număr întreg natural cuprins între 0 și n , face să corespundă numărul $b(k, n, p)$.

2. După formula binomului, avem:

$$\sum_{k=0}^n b(k, n, p) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n.$$

$$\text{Or:} \quad q = p - 1.$$

$$\text{Deci:} \quad p + q = 1.$$

Prin urmare, avem:

$$\sum_{k=0}^n b(k, n, p) = 1.$$

13.6.3 Valorile tipice ale variabilei aleatoare binomiale

Aplicarea rezultatelor obținute la 13.4.3 permite să se dea imediat rezultatul:

$$E(\mathfrak{B}(n, p)) = np;$$

$$V(\mathfrak{B}(n, p)) = np(1 - p) = npq.$$

13.6.4 Utilizarea variabilei aleatoare binomiale

Variabilele aleatoare binomiale își găsesc o utilizare frecventă în cazurile în care se observă de mai multe ori consecutiv realizarea unui fenomen aleator sau nerealizarea sa.

De exemplu, dacă considerăm n probe consecutive ale jocului aruncarea cu banul și dacă ne interesează numărul de apariții ale feței cu banul, „valoare” obținute, se utilizează variabila aleatoare $\mathfrak{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

În practică, variabila aleatoare binomială nu se utilizează decît pentru valori mici ale lui n . În cazul care n este destul de mare, dispunem de alte legi de probabilitate, care permit să se dea variabilei binomiale o reprezentare suficient de apropiată.

De asemenea, în practică, coeficienții $b(k, n, p)$ sînt dați prin valori aproximative, și nu se observă repede că valorile lui $b(k, n, p)$, pentru valorile extreme ale lui k , sînt adesea negliabile.

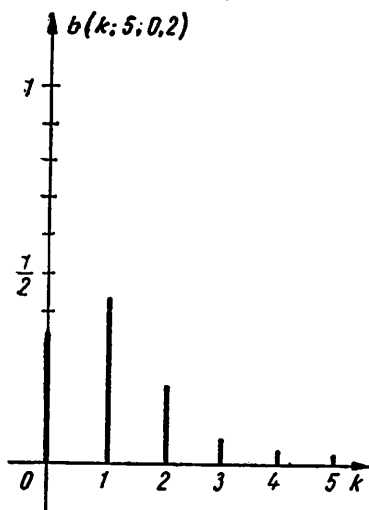


Fig. 3

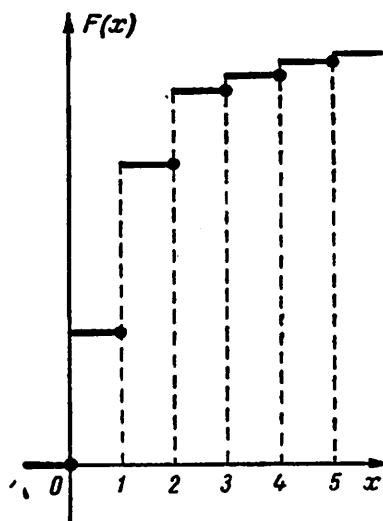


Fig. 4

Valorile coeficienților $b(k, n, p)$ sînt, pentru valorile uzuale ale parametrilor, date în tabele.

Figura 3 dă diagrama în bastoane a legii lui $\mathfrak{B}\left(5, \frac{1}{2}\right)$; figura 4 dă reprezentarea grafică carteziană a funcției de repartiție.

Exemple. I. O urnă conține șaiszeci de bile roșii și zece bile negre. Se efectuează n extrageri ale unei bile, procedînd la reintroducerea bilei imediat după ce s-a notat culoarea. Care este probabilitatea de a extrage exact o sută de bile roșii?

Dacă n este inferior lui 100, probabilitatea căutată este nulă. Dacă nu, se poate aplica formula precedentă, cu:

$$p = \frac{60}{60 + 10} = \frac{6}{7} \quad \text{și} \quad q = \frac{1}{7}.$$

De unde rezultatul:

$$p(X = 100) = \left(\frac{n}{100}\right) \left(\frac{6}{7}\right)^{100} \left(\frac{1}{7}\right)^{n-100} = \frac{1}{7^n} C_n^{100} 6^{100}.$$

II. Se așază arbitrar cincizeci de obiecte identice în zece cutii numerotate. Care este probabilitatea ca una dintre cutii, luată arbitrar, să conțină exact: nouă obiecte?, mai mult de nouă obiecte?, mai puțin de nouă obiecte?

Considerăm un obiect ω . În cursul repartizării ce se face diferitelor obiecte în casetele numerotate, obiectul ω intră în caseta i cu probabilitatea $\frac{1}{10}$, sau nu intră în caseta i cu probabilitatea $\frac{9}{10}$. Fie variabila aleatoare X_i definită, pentru indiferent oricare i , prin:

$$X_i(\omega) = 1 \text{ dacă } \omega \text{ intră în caseta } C;$$

$$X_i(\omega) = 0 \text{ dacă nu intră în caseta } C.$$

Variabila aleatoare $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{50} = \sum_{i=1}^{50} X_i$ este o variabilă aleatoare binomială

de parametrii 50 și $\frac{1}{10}$.

Avem, deci:

$$p(X = h) = \binom{50}{h} \left(\frac{1}{10}\right)^h \left(\frac{9}{10}\right)^{50-h}$$

Ca urmare:

$$p(X = 9) = \binom{50}{9} \left(\frac{1}{10}\right)^9 \left(\frac{9}{10}\right)^{41} \approx 0,0333;$$

$$p(X < 9) = p(X = 8) + p(X = 7) + \dots + p(X = 0) \approx 0,9421$$

$$p(X > 9) = 1 - p(X = 9) - p(X < 9) \\ \approx 1 - 0,9421 - 0,0333 \approx 0,0245.$$

EXERCIIII

13.18 1° Să se demonstreze direct (pe baza definițiilor) că dacă X și Y sînt două variabile aleatoare independente:

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y).$$

2° Să se deducă că, în aceleași condițiuni:

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \quad \text{și} \quad V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

13.19 Se consideră două variabile aleatoare independente X și Y a căror momente de ordinul 1 și 2 sînt cunoscute. Variabilele aleatoare se definesc:

$$A = X + Y \quad \text{și} \quad B = X - Y.$$

Să se calculeze:

1° $E(A)$, $E(B)$, $E(AB)$.

2° $V(A)$, $V(B)$.

3° $\text{Cov}(A, B)$.

13.20 Același exercițiu cu variabilele aleatoare:

$$A = 2X + 3Y \quad \text{și} \quad B = X - Y$$

13.21 Să se determine covarianța variabilelor aleatoare X și Y definite în exemplul 13.4.1 Care este coeficientul de corelație?

13.22 Fie X variabila aleatoare definită pe un spațiu finit probabilistic $(U, \mathfrak{B}(U), p)$ și care ia toate valorile n ale mulțimii $\{1, 2, 3, 6\}$ cu o probabilitate $\frac{\lambda}{n}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

1° Să se determine λ .

1° Să se studieze variabila aleatoare X astfel definită (lege, funcție de repartiție, valori tipice).

3° Să se studieze variabila aleatoare Y definită prin

$$Y = (X - 3)^2.$$

4° Se poate determina legea comună a variabilei X și Y ?

5° Să se calculeze covarianța lui X și Y , cît și coeficientul de corelație.

Tablourile de mai jos definesc o lege comună de probabilitate?
Dacă da, să se studieze legile marginale, covarianța lor și coeficienții lor de corelație.

13.23

	1	2	4	8
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{24}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{24}$

13.24

a)

	-1	0	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{64}$

b)

	-1	0	1
0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$

13.25

	0	2	4	6
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{3}$
3	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$
5	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{27}$
7	0	0	0	$\frac{1}{12}$

13.26 O variabilă aleatoare X urmează o lege binomială $\mathcal{B}(n, p)$.

Se definește frecvența $F_n = \frac{X}{n}$.

1° Să se calculeze valoarea medie $E(F_n) = E\left(\frac{X}{n}\right)$.

2° Să se calculeze dispersia lui F_n : $V(F_n) = V\left(\frac{X}{n}\right)$.

3° Atunci când n tinde către $+\infty$, care este limita lui $E(F_n)$; $V(F_n)$.
Să se deducă că $p\{|F_n - p| > \varepsilon\}$ tinde către zero când n tinde către infinit.

13.27 Se aplică rezultatele din exercițiul precedent: X este numărul de succese posibile (de exemplu „valoare”) în n probe. Sau de asemenea, X este o sumă de variabile aleatoare, fiecare dintre acestea putând lua valorile 1 sau 0 cu probabilitatea $\frac{1}{2}$.

1° Să se calculeze $E\left(\frac{X}{10}\right)$ și $V\left(\frac{X}{10}\right)$.

2° Să se calculeze $E\left(\frac{X}{100}\right)$ și $V\left(\frac{X}{100}\right)$.

3° Să se calculeze $E\left(\frac{X}{1000}\right)$ și $V\left(\frac{X}{1000}\right)$.

Să se deducă probabilitatea maximă pentru ca:

a) Într-o 100 experiențe: $\frac{X}{100} \in \{0, 4, 0, 6\}$.

b) Într-o mie de experiențe: $\frac{X}{1000} \in [0,49, 0,51]$.

13.28 Se aruncă un zar; Y este variabila aleatoare care poate să ia valorile 1, 2, 3, 4, 5 și 6 cu probabilitățile $\frac{1}{6}$.

1° Să se calculeze $E(Y) = m$.

2° Să se calculeze dispersia $V(Y)$.

3° Să se determine un număr n de aruncări, astfel încât probabilitatea pentru ca media punctelor obținute să difere de m cu mai mult de $\frac{1}{100}$, să fie superioară lui 0,95.

13.29 Să se determine un număr de aruncări a unei monezi la care probabilitatea ca media de „stemă” să difere de 0,5, cu mai mult de $\frac{1}{100}$, să fie superioară lui 0,95.

13.30 O urnă conține bile albe într-o proporție p și bile negre într-o proporție $1 - p$; X este variabila aleatoare egală cu numărul de extrageri necesare pentru obținerea unei bile albe.

1° Să se calculeze:

a) $p_1 = p\{X = 1\}$;

b) p_2 și p_3 ;

c) $p_k = p\{X = k\}$.

2° Să se calculeze $E(X)$, valoarea medie a lui X .

3° Știind că $E\{X(X - 1)\} = \frac{2(1 - p)}{p^2}$, să se calculeze:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

De fiecare dată extragerea este făcută cu reintroducere.

13.31 Fie variabila aleatoare Y egală cu numărul de bile negre trase înainte de extragerea unei bile albe (exercițiul precedent).

1° Să se calculeze:

a) $p'_0 = p\{Y = 0\}$;

b) p'_1 și p'_2 ;

c) $p'_k = p\{Y = k\}$.

Să se demonstreze că: $p_k = p_{k+1}$ (exercițiul precedent).

2° Să se calculeze $E(Y)$, valoarea medie a lui Y .

3° Să se calculeze $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$.

13.32 Se aruncă cu banul; X este variabila aleatoare egală cu numărul de aruncări necesare pentru a obține fața cu banul.

1° Să se calculeze:

a) $p_1 = p\{X = 1\}$;

b) p_2 și p_3 ;

c) $p_h = p \{X = h\}$.

2° Să se calculeze $E(X)$, valoarea medie a lui X .

3° Calculați $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

13.33 Același exercițiu cu un zar cu șase fețe, X fiind variabila aleatoare egală cu numărul de aruncări necesare pentru a obține șase.

13.7 APENDICE. RECAPITULARE ASUPRA COMBINĂRILOR

Ne vom reaminti în continuare câteva rezultate din Algebra combinatorie (Alef., Algebra I, Mulțimi, statistică, probabilități, Cap. 3).

Dacă E este o mulțime finită de cardinal n , atunci $\mathfrak{Z}(E)$ este o mulțime finită de cardinal 2^n .

O permutare a unei mulțimi finite E de cardinal n este o bijecție ω a mulțimii $\{1, \dots, n\}$ pe E .

Numărul P_n al permutărilor unei mulțimi finite E de cardinal n este egal cu factorialul cardinalului lui E :

$$P_n = n!$$

O substituție a unei mulțimi finite E este o bijecție a lui E pe ea însăși.

Numărul substituțiilor unei mulțimi finite E este egal cu numărul permutărilor sale.

Un aranjament fără repetiție a unei mulțimi finite E de cardinal n este o injecție α a mulțimii $\{1, \dots, p\}$ în E ; p este ordinul aranjamentului.

Numărul de aranjamente de ordin p a unei mulțimi finite de cardinal n este produsul a p întregi consecutivi, descrescători, începînd de la n :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \dots [n-(p-1)].$$

Numărul injecțiilor unei mulțimi finite F într-o mulțime finită E este egal cu numărul de aranjamente de ordinul $\text{Card } F$ în E .

O combinare fără repetiție a unei mulțimi finite E , de cardinal n este o submulțime de cardinal p a mulțimii E ; p este numit ordinul combinării.

$$0 \leq p \leq n \Rightarrow C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{p!}$$

Numerele C_n^p sînt numite de asemenea coeficienți binomiali și sînt de asemenea notate:

$$C_n^p = \binom{n}{p}.$$

■ PROPRIETĂȚI ALE COEFICIENȚILOR BINOMIALI

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n;$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n-p+1}{p} \binom{n}{p-1};$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p};$$

$$\forall \{1, \dots, n-1\} \quad p \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \quad (\text{formula lui Pascal});$$

$$\forall n, \forall a \quad (x+a)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i x^{n-i}.$$

În exercițiile următoare s-au introdus noțiunile de aranjamente, permutări, combinații cu repetiție.

EXERCIIII

Aranjamente cu repetiție

13.34 Se consideră o mulțime A conținând p elemente și o mulțime B , conținând n . Vrem să numărăm toate aplicațiile ale lui A în B .

1° Fie:

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{1, 2\}.$$

Se utilizează un procedeu grafic: „arborele exponențial” (fig. 5); sînt două brațe de la plecare, ceea ce indică că se poate avea ca imagine 1 sau 2; sînt aceleași posibilități și pentru b , de unde patru brațe noi și în fine, opt brațe pentru c . S-au indicat două aplicații. Să se compare rezultatele. Avem $2^3 = 8$.

2° Să se deseneze arborele exponențial pentru:

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{1, 2, 3\}.$$

apoi pentru:

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3\}.$$

Să se numere aplicațiile pentru fiecare caz. Se vede o lege generală?

3° Să se dea numărul de aplicații ale lui A în B dacă cardinalele A și B valorează, respectiv p și n (cardinalul lui A = număr de elemente ale lui A ; în continuare, vom scrie: $\text{card } A = |A|$).

4° Să se numere toate aplicațiile unei mulțimi de cardinal p către o mulțime de cardinal n , adică numărări toate grupele de p obiecte luate din cele n obiecte, un obiect putînd fi luat pînă la de p ori. Aceasta înseamnă a număra aranjamentele cu repetiție a n obiecte luate câte p . Rezultatul este $\alpha_n^p = n^p$.

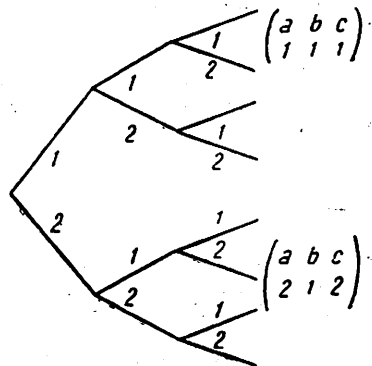


Fig. 5.

13.35 Avem un alfabet a două simboluri a și e . Cîte cuvinte de lungime k se pot forma cu ajutorul acestui alfabet, o literă putîndu-se repeta pînă la de k ori? (Un cuvînt de lungime k este un cuvînt cu k litere.) Se ia $k = 1, k = 2, k = 3$, apoi un oarecare k (aranjamente cu repetiție).

13.36 Avem un alfabet de zece litere. Câte cuvinte se pot forma?

1° De lungime 2?

2° De lungime 3?

3° De lungime 4?

4° De o lungime inferioară lui 4?

13.37 Un număr de telefon din rețeaua pariziană are șapte cifre, împrumutate din mulțimea $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Care este capacitatea acestei rețele (numărul numerelor posibile)?

Permutări cu repetiție.

13.38 Avem $n = \alpha + \beta$ litere, printre care α litere a și β litere b . Se numește permutare cu repetiție toate dispunerile acestor n litere, două permutări neputând diferi decât prin ordinea literelor, deoarece fiecare permutare conține toate literele. Fie P_α una dintre aceste permutări. Afectăm literelor a un indice de la 1 la α , literelor b un indice de la 1 la β ; avem permutarea fără repetiție a $n = \alpha + \beta$ litere diferite: $a_1 a_2 \dots a_\alpha b_1 \dots b_\beta$. Avem $\alpha! \beta!$ modalități de a așeza indicii și ca urmare, fiecărei permutări P_α cu repetiție îi corespund $\alpha! \beta!$ permutări fără repetiție, iar acestea din urmă sînt în număr de $n! = (\alpha + \beta)!$

De unde:

$$P_\alpha = \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!}.$$

Se generalizează:

$$P_\beta = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)!}{\alpha! \beta! \gamma!},$$

și:

$$P_v = \frac{(\alpha + \beta + \dots + \lambda)!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!},$$

cu semnificații evidente.

Aplicații. 1° Câte numere de cinci cifre se pot forma cu simbolurile 2, 2, 3, 4 și 4?

2° Câte situații diferite sînt la jocul de bridge (cincizeci și două de cărți), fiecare jucător fiind individualizat și presupus jucător de unul singur (fiecare jucător primește treisprezece cărți). Indicați ordinul de mărime al rezultatului.

3° Sub o formă mai generală, câte situații diferite de repartizare a n obiecte câte k grupe respectiv de $n_1, n_2, \dots, n_k$ obiecte avem, cu:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n?$$

De exemplu: se aruncă douăsprezece zaruri identice, cu cele 6 fețe numerotate de la 1 la 6 zarurile fiind numerotate de la 1 la 12.

1° Câte rezultate posibile avem?

2° Câte rezultate avem, în care fiecare față este obținută de câte două ori?

13.39 1° La bridge, câte împărțiri diferite avem pentru un anumit jucător?

2° Câte situații posibile sînt în care A, B, C, D fiind jucătorii, t, p, c, q fiind culorile, jucătorii să aibă:

$$A: 5t, 2p, 4c, 2q; \quad B: 4t, 0p, 7c, 2q;$$

$$C: 3t, 10p, 0c, 0q; \quad D: 1t, 1p, 2c, 9q?$$

13.40 La bridge, o mînă este de tip 7321 dacă obține șapte cărți de o culoare, trei de altă culoare, două de o altă culoare și una din ultima culoare. Cîte mîini de acest tip există? Cîte mîini există de tipul 5521?

13.41 Șaisprezece cai sînt pe linia de plecare a unei curse. Să se numere:

1° Treimea în ordinea ajungerii:

2° O treime într-o ordine diferită.

13.42 În câte moduri se pot repartiza în două colonii de vacanță A și B și în modul cel mai echitabil posibil:

1° Nouăsprezece copii?

2° Douăzeci de copii?

13.43 O loterie conține șaptezeci de bilete, dintre care trei câștigătoare. Petre cumpără patru bilete. Câte posibilități are ca să câștige:

1° Un loz?

2° Două lozuri?

3° Trei lozuri?

4° Nici un loz?

5° Cel puțin un loz?

13.44 Într-un joc de cincizeci și două de cărți, câte mâini avem care să conțină cel puțin o damă? Câte care să conțină: cel puțin o damă și un rege?, cel puțin o damă, un rege, un valet?

Combinări cu repetiție.

13.45 Fie n obiecte diferite. Se numește combinare cu repetiție de p obiecte din n , orice dispunere neordonată de p exemplare din aceste obiecte, fiecare obiect putând figura de p ori. (Este posibil ca p să fie superior lui n , ca și pentru aranjamentele cu repetiție.) Se notează cu K_n^p numărul de astfel de combinări.

1° Să se demonstreze că se poate scrie: $K_n^p = K_n^{p-1} + K_{n-1}^p$, considerînd un obiect particular următor care este sau nu prezent în combinare.

2° Să se calculeze: K_1^p, K_n^1 .

3° Admițînd că relația $K_n^p = C_{n+p-1}^p$ este adevărată pentru n inferior lui m , demonstrați-o pentru $n = m$, efectuînd o recurență asupra lui p .

Probleme diverse.

13.46 (Moivre). P aruncă două monezi; Q aruncă trei. Acela din ei doi care obține de mai multe ori „stema”, câștigă. Dacă amîndoi jucătorii obțin „stema” de același număr de ori, operația reîncepe. Să se calculeze probabilitatea ca Q să câștige.

13.47 (Huyghens). 1° O urnă conține zece bile albastre, zece bile albe, zece bile roșii și zece bile negre. Se scot patru, la întîmplare. Să se calculeze probabilitatea de a obține o bilă din fiecare culoare.

2° Urna conține de data aceasta patru bile albe și opt bile negre. Se scot șapte bile la întîmplare. Să se calculeze probabilitatea de a scoate cel puțin trei bile albe.

13.48 (Cavaler de Méré și Pascal). 1° Un zar se aruncă de n ori în continuare. Să se calculeze probabilitatea de a obține șase cel puțin odată.

Să se calculeze n pentru ca p să fie inferior lui $\frac{1}{2}$.

2° Se aruncă două zaruri de n ori succesiv. Să se calculeze probabilitatea de a avea dubla de șase cel puțin odată.

Să se calculeze n pentru ca p^2 să fie inferior lui $\frac{1}{2}$.

Generalizare. O urnă conține s bile, din care b bile albe. De câte ori trebuie să se scoată o bilă din urnă (ex. ere cu reintroducere) pentru ca probabilitatea de a scoate cel puțin o bilă albă să fie superioară unui număr real dat r ($0 < r < 1$)?

13.49 (J. Bernoulli). Se aruncă un zar de n ori. Să se calculeze probabilitatea p de a scoate 6 cel puțin de două ori. Să se calculeze n pentru ca p să fie superior lui $\frac{1}{2}$.

13.50 (Cavaler de Méré).

- 1° Să se calculeze probabilitatea p_1 de a obține cel puțin odată cifra 6, aruncînd patru zaruri.
2° Să se calculeze probabilitatea p_2 de a obține cel puțin de două ori cifra 6, aruncînd de douăzeci și patru de ori două zaruri.

13.51 Se consideră două variabile aleatoare, independente, X și Y , de aceeași lege de probabilitate X sau $Y = 1, 2, 3, 4, 5$ cu:

$$p_i = p\{X = i\} = \frac{1}{5}, \quad i = \{1, \dots, 5\}.$$

1° Să se calculeze:

$$E(X), E(X^2), V(X).$$

2° Fie $Z = (X, Y)$. Cuplului Z i se asociază variabila aleatoare $S = X + Y$. Calculați:

$$E(S), E(S^2), V(S).$$

3° Cuplului Z i se asociază variabila aleatoare $N = 10X + Y$.

- a) Să se prezinte tabloul valorilor luate de N și probabilitățile corespunzătoare.
b) Să se calculeze: $E(N)$, $E(N^2)$, $V(N)$.
c) Să se calculeze $p(N \leq 40)$ și demonstrați că inegalitatea Bienaymé-Cebîșev dă acestei valori o majorare foarte grosolană.

4° Cuplul $Z = (X, Y)$ poate fi considerat drept un eșantion de tip $\bar{X} = \frac{X + Y}{2}$.

a) Să se prezinte tabloul valorilor pe care le ia $\bar{X}$.

b) Să se calculeze: $E(\bar{X})$ și $\sigma(\bar{X})$.

c) Să se verifice că $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$, $n = 2$.

13.52 Un proprietar care închiriază automobile dispune de trei mașini identice, pe care le închiriază cu ziua. Cererea zilnică este un număr x (variabil).

Un studiu prealabil a permis să se determine probabilitățile atașate diferitelor valori ale lui x . Rezultatul este următorul:

x	0	1	2	3	4	5	6 și peste	Total:
$p(x)$	0,224	0,336	0,251	0,125	0,047	0,017	0,000	1

A) Se presupune că cele trei vehicule sînt constant în stare de funcționare. Fie y numărul (variabil) al vehiculelor închiriate într-o anumită zi.

1° Să se determine probabilitățile diferitelor valori ale lui y .

2° Prețul de locație pe zi și vehicol este 600. Depășirea totală angajată de către proprietar este, în medie, de 200 pe zi și vehicol, închiriat sau neînchiriat, la care se adaugă 150 pe zi și vehicol folosit. Beneficiul proprietarului este deci, pe zi:

$$b = 600y - (600 + 150y).$$

a) Să se întocmească tabloul diferitelor valori posibile ale beneficiului zilnic și probabilitățile corespunzătoare.

b) Să se calculeze valoarea medie a beneficiului zilnic.

c) Să se calculeze valoarea medie a beneficiului anual (365 zile).

B) Se consideră de data aceasta că un vehicul poate fi oprit pentru întreținere sau reparație și că probabilitatea ca două vehicule să fie oprite simultan este nulă.

Care este probabilitatea ca proprietarul să nu poată satisface cererea, în ziua în care un vehicul este oprit?

13.53 O persoană scrie la patru corespondenți scrisori personale, pune fiecare scrisoare într-un plic, închide plicul și apoi scrie adresa la întâmplare.

a) Care este probabilitatea ca cel puțin o scrisoare să ajungă la destinația sa reală?

b) Numărul X al scrisorilor ce vor ajunge la destinatarul lor definesc variabila aleatoare pe care o veți studia.

13.54 Fie două mașini A și B producând zilnic 400 și respectiv 600 obiecte de aceeași natură. Printre obiectele pe care le produce mașina A , se găsesc 5% cu defecte. În cazul mașinii B , valoarea rebuturilor crește la 7%. Fie un obiect cu defecte. Care este probabilitatea ca acesta să fie fabricat de mașina A ?

13.55 Cu ajutorul unui zar A se încearcă inițial la întâmplare să se aleagă un număr între 1 și 7. Se face o primă partidă preliminară. Dacă iese 2, 3, 4, 5 sau 6, se alege numărul ieșit. Dacă iese 1, se rejoacă. Dacă de data aceasta iese 1, 2, sau 3, se alege 1, dacă iese 4, 5 sau 6 se alege 7. Zarul A se consideră perfect simetric.

Această alegere preliminară i fiind făcută, se ia zarul D_i , cu $i - 1$ fețe albe și $7 - i$ fețe negre. Se joacă de aici înainte cu zarul D_i și se numerează 1, ..., j , ..., n partidele succesive, independente unele de altele.

1° Să se calculeze probabilitatea ca să iasă o față neagră, din prima partidă.

2° Știind că a ieșit o față neagră din primele două partide ($j = 1, j = 2$), să se calculeze probabilitatea ca să iasă o față neagră în cea de a treia partidă ($j = 3$).

3° Știind că a ieșit o față neagră în primele $n - 1$ partide să se calculeze probabilitatea p_n pentru ca să iasă o față neagră în cea de a n -a partidă.

4° Să se studieze limita lui p_n atunci cînd n tinde către infinit. Să se explice rezultatul.

13.56 O urnă conține b bile albe și n bile roșii. Fiind scoasă o bilă, ea se reintroduce în plus cu c bile din culoarea trasă. Se pune:

$$p = \frac{b}{b+r}; \quad q = \frac{r}{b+r}; \quad \gamma = \frac{c}{b+r}.$$

Se definește variabila aleatoare X_n ca variabilă aleatoare a evenimentului A_n : „bilă trasă în cea de a n -a extragere este roșie”

Fie, pe de altă parte, variabila aleatoare S_n definită prin:

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

A) 1° Să se calculeze probabilitatea condiționată $p(X_2 = 0 | X_1 = 0)$.

2° Să se studieze legea de probabilități a cuplului (X_1, X_2) .

3° Să se calculeze $p(X_1 = 0 | X_2 = 0)$. Comparați cu rezultatul obținut la 1°.

4° Să se deducă legile de probabilitate ale variabilelor aleatoare X_1 și X_2 .

5° Să se calculeze valoarea medie și dispersia lui X_1 și X_2 .

6° Să se calculeze coeficientul de corelare între X_1 și X_2 .

B) 1° Care este compoziția urnei la a n -a extragere, știind că:

$$S_{n-1} = k \quad (k \in \{0, \dots, n-1\}).$$

2° Să se deducă legea probabilității a variabilei aleatoare X_n .

3° Care este coeficientul de corelație a variabilelor aleatoare X_n și X_m , în care n și m sînt numere întregi naturale nenule (se va calcula acest coeficient în funcție de γ).

4° Să se dea o condiție necesară pentru ca variabilele aleatoare X_i să fie independente două câte două.

5° Această condiție fiind realizată, în ce caz uzual ne vom găsi? X_i sînt efectiv independente două câte două? Care este în acest caz legea lui S_n ?

I. Pătrate și rădăcini pătrate

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
1	1	1,000 00	51	2 601	7,141 43
2	4	1,414 21	52	2 704	7,211 10
3	9	1,732 05	53	2 809	7,280 11
4	16	2,000 00	54	2 916	7,348 47
5	25	2,236 07	55	3 025	7,416 20
6	36	2,449 49	56	3 136	7,483 31
7	49	2,645 75	57	3 249	7,549 83
8	64	2,828 43	58	3 364	7,615 77
9	81	3,000 00	59	3 481	7,681 15
10	100	3,162 28	60	3 600	7,745 97
11	121	3,316 62	61	3 721	7,810 25
12	144	3,464 10	62	3 844	7,874 01
13	169	3 605 55	63	3 969	7,937 25
14	196	3,741 66	64	4 096	8,000 00
15	225	3,872 98	65	4 225	8,062 26
16	256	4,000 00	66	4 356	8,124 04
17	289	4,123 11	67	4 489	8,185 34
18	324	4,242 64	68	4 624	8,246 21
19	361	4,358 90	69	4 761	8,306 62
20	400	4,472 14	70	4 900	8,366 60
21	441	4,582 58	71	5 041	8,426 15
22	484	4,690 42	72	5 184	8,485 28
23	529	4,795 83	73	5 329	8,544 00
24	576	4,898 98	74	5 476	8,602 33
25	625	5,000 00	75	5 625	8,660 25
26	676	5,099 02	76	5 776	8,717 80
27	729	5,196 15	77	5 929	8,774 96
28	784	5,291 50	78	6 084	8,831 76
29	841	5,385 16	79	6 241	8,888 19
30	900	5,477 23	80	6 400	8,944 27
31	961	5,567 76	81	6 561	9,000 00
32	1 024	5,656 85	82	6 724	9,055 39
33	1 089	5,744 56	83	6 889	9,110 43
34	1 156	5,830 95	84	7 056	9,165 15
35	1 225	5,916 08	85	7 225	9,219 54
36	1 296	6,000 00	86	7 396	9,273 62
37	1 369	6,082 76	87	7 569	9,327 38
38	1 444	6,164 41	88	7 744	9,380 83
39	1 521	6,245 00	89	7 921	9,433 98
40	1 600	6,324 56	90	8 100	9,486 83
41	1 681	6,403 12	91	8 281	9,539 39
42	1 764	6,480 74	92	8 464	9,591 66
43	1 849	6,557 44	93	8 649	9,643 65
44	1 936	6,633 25	94	8 836	9,695 36
45	2 025	6,708 20	95	9 025	9,746 79
46	2 116	6,782 33	96	9 216	9,797 96
47	2 209	6,855 65	97	9 409	9,848 86
48	2 304	6,928 20	98	9 604	9,899 49
49	2 401	7,000 00	99	9 801	9,949 87
50	2 500	7,071 07	100	10 000	10,000 00

II. Tabelă trigonometrică din grad în grad [grade sexagesimale]

Grade	Sinus	Tangentă	Grade	Sinus	Tangentă
1	0,017 5	0,017 5	46	0,719 3	1,035 5
2	0,034 9	0,034 9	47	0,731 4	1,072 4
3	0,052 3	0,052 4	48	0,743 1	1,110 6
4	0,069 8	0,069 9	49	0,754 7	1,150 4
5	0,087 2	0,087 5	50	0,766 0	1,191 8
6	0,104 5	0,105 1	51	0,777 1	1,234 9
7	0,121 9	0,122 8	52	0,788 0	1,279 9
8	0,139 2	0,140 5	53	0,798 6	1,327 0
9	0,156 4	0,158 4	54	0,809 0	1,376 4
10	0,173 6	0,176 3	55	0,819 2	1,428 1
11	0,190 8	0,194 4	56	0,829 0	1,482 6
12	0,207 9	0,212 6	57	0,838 7	1,539 9
13	0,225 0	0,230 9	58	0,848 0	1,600 3
14	0,241 9	0,249 3	59	0,857 2	1,644 3
15	0,258 8	0,267 9	60	0,866 0	1,732 1
16	0,275 6	0,286 7	61	0,874 6	1,804 0
17	0,292 4	0,305 7	62	0,882 9	1,880 7
18	0,309 0	0,324 9	63	0,891 0	1,926 6
19	0,325 6	0,344 3	64	0,898 8	2,050 3
20	0,342 0	0,364 0	65	0,906 3	2,144 5
21	0,358 4	0,383 9	66	0,913 5	2,246 0
22	0,374 6	0,404 0	67	0,920 5	2,355 9
23	0,390 7	0,424 5	68	0,927 2	2,475 1
24	0,406 7	0,445 2	69	0,933 6	2 605 1
25	0,422 6	0,466 3	70	0,939 7	2,747 5
26	0,438 4	0,487 7	71	0,945 5	2,904 2
27	0,454 0	0,509 5	72	0,951 1	3,077 7
28	0,469 5	0,531 7	73	0,956 3	3,270 9
29	0,484 8	0,554 3	74	0,961 3	3,487 4
30	0,500 0	0,577 4	75	0,965 9	3,732 1
31	0,515 0	0,600 9	76	0,970 3	4,010 8
32	0,529 9	0,624 9	77	0,974 4	4,331 5
33	0,544 6	0,649 4	78	0,978 1	4,704 6
34	0,559 2	0,674 5	79	0,981 6	5,144 6
35	0,573 6	0,700 2	80	0,984 8	5,671 3
36	0,587 8	0,726 5	81	0,987 7	6 313 8
37	0,601 8	0,753 6	82	0,990 3	7,115 4
38	0,615 7	0,781 3	83	0,992 5	8,144 3
39	0,629 3	0,809 8	84	0,994 5	9,514 4
40	0,642 8	0,839 1	85	0,996 2	11,430 1
41	0,656 1	0,869 3	86	0,997 6	14,300 7
42	0,669 1	0,900 4	87	0,998 6	19 081 1
43	0,682 0	0,932 5	88	0,999 4	28,636 3
44	0,694 7	0,975 7	89	0,999 8	57,290 0
45	0,707 1	1,000 0	90	1	∞

III. Tabelă trigonometrică din grad în grad [grade centesimale]

Grade	Sinus	Tangentă	Grade	Sinus	Tangentă
1	0,015 7	0,015 7	51	0,718 1	1,031 9
2	0,031 4	0,031 4	52	0,729 0	1,064 9
3	0,047 1	0,047 2	53	0,739 6	1,099 0
4	0,062 8	0,062 9	54	0,750 1	1,134 3
5	0,078 5	0,078 7	55	0,760 4	1,170 8
6	0,094 1	0,094 5	56	0,770 5	1,208 8
7	0,109 7	0,110 4	57	0,780 4	1,248 2
8	0,125 3	0,126 3	58	0,790 2	1,289 2
9	0,140 9	0,142 3	59	0,799 7	1,331 9
10	0,156 4	0,158 4	60	0,809 0	1,376 4
11	0,171 9	0,174 5	61	0,818 1	1,422 9
12	0,187 4	0,190 8	62	0,827 1	1,471 5
13	0,202 8	0,207 1	63	0,835 8	1,522 4
14	0,218 1	0,223 5	64	0,844 3	1,575 7
15	0,233 4	0,240 1	65	0,852 6	1,631 9
16	0,248 7	0,256 8	66	0,860 7	1,690 9
17	0,263 9	0,273 6	67	0,868 6	1,753 2
18	0,279 0	0,290 5	68	0,876 3	1,819 0
19	0,294 0	0,307 6	69	0,883 8	1,888 7
20	0,309 0	0,324 9	70	0,891 0	1,962 6
21	0,323 9	0,342 4	71	0,898 0	2,041 3
22	0,338 7	0,360 0	72	0,904 8	2,125 1
23	0,353 5	0,377 9	73	0,911 4	2,214 8
24	0,368 1	0,395 9	74	0,917 8	2,310 9
25	0,382 7	0,414 2	75	0,923 9	2,414 2
26	0,397 1	0,432 7	76	0,929 8	2,525 7
27	0,411 5	0,451 5	77	0,935 4	2,646 4
28	0,425 8	0,470 6	78	0,940 9	2,777 6
29	0,439 9	0,489 9	79	0,946 1	2,920 8
30	0,454 0	0,509 5	80	0,951 1	3,077 7
31	0,467 9	0,529 5	81	0,955 8	3,250 6
32	0,481 8	0,549 8	82	0,960 3	3,442 0
33	0,495 5	0,570 4	83	0,964 6	3,655 4
34	0,509 0	0,591 4	84	0,968 6	3,894 7
35	0,522 5	0,612 8	85	0,972 4	4,165 3
36	0,535 8	0,634 6	86	0,975 9	4,473 7
37	0,549 0	0,656 9	87	0,979 2	4,828 8
38	0,562 1	0,679 6	88	0,982 3	5,242 2
39	0,575 0	0,702 8	89	0,985 1	5,729 7
40	0,587 8	0,726 5	90	0,987 7	6,313 8
41	0,600 4	0,750 8	91	0,990 0	7,026 4
42	0,612 9	0,775 7	92	0,992 1	7,915 8
43	0,625 2	0,801 2	93	0,994 0	9,057 9
44	0,637 4	0,827 3	94	0,995 6	10,578 9
45	0,649 4	0,854 1	95	0,996 9	12,706 2
46	0,661 3	0,881 6	96	0,998 0	15,894 5
47	0,673 0	0,909 9	97	0,998 9	21,204 9
48	0,684 5	0,939 1	98	0,999 5	31,820 5
49	0,695 9	0,969 1	99	0,999 9	61,656 7
50	0,707 1	1,000 0	100	1,000	∞

IV. Tabela valorilor lui $\text{Log } x$ [logaritm neperian]

$\begin{array}{c} u \\ d \end{array}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$-\infty$	0	0,693 1	1,098 6	1,386 3	1,609 4	1,791 8	1,945 9	2,079 4	2,197 2
1	2,302 6	2,397 9	2,484 9	2,564 9	2,639 1	2,708 1	2,772 6	2,833 2	2,890 4	2,944 4
2	2,995 7	3,044 5	3,091 0	3,135 5	3,178 1	3,218 9	3,258 1	3,295 8	3,332 2	3,367 3
3	3,401 2	3,434 0	3,465 7	3,496 5	3,526 4	3,555 3	3,583 5	3,610 9	3,637 6	3,663 6
4	3,688 9	3,713 6	3,737 7	3,761 2	3,784 2	3,806 7	3,828 6	3,850 1	3,871 2	3,891 8
5	3,912 0	3,931 8	3,951 2	3,970 3	3,989 0	4,007 3	4,025 4	4,043 1	4,060 4	4,077 5
6	4,094 3	4,110 9	4,127 1	4,143 1	4,158 9	4,174 4	4,189 7	4,204 7	4,219 5	4,234 1
7	4,248 5	4,262 7	4,276 7	4,290 5	4,304 1	4,317 5	4,330 7	4,343 8	4,356 7	4,369 4
8	4,382 0	4,394 4	4,406 7	4,418 8	4,430 8	4,442 7	4,454 3	4,465 9	4,477 3	4,488 6
9	4,499 8	4,510 9	4,521 8	4,532 6	4,543 3	4,553 9	4,564 3	4,574 7	4,585 0	4,595 1

Logaritmul neperian al numărului întreg x ($x < 100$) se găsește la încrucișarea liniei și coloanei care corespunde cifrei d a zecilor numărului x și a cifrei unităților u ale numărului x .

Exemplu: $\text{Log } 74 = 4,304 1$ cu o precizie de $\frac{1}{2 \cdot 10^4}$.

V. Tabela valorilor lui e^x și e^{-x}

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0,1	1,105 2	0,904 8	1,1	3,004 2	0,332 9	2,1	8,166 2	0,122 5
0,2	1,221 4	0,818 7	1,2	3,320 1	0,301 2	2,2	9,025 0	0,110 8
0,3	1,349 9	0,740 8	1,3	3,669 3	0,272 5	2,3	9,974 2	0,100 3
0,4	1,491 8	0,670 3	1,4	4,055 2	0,246 6	2,4	11,032 2	0,090 7
0,5	1,648 7	0,606 5	1,5	4,481 7	0,223 1	2,5	12,182 5	0,082 1
0,6	1,822 1	0,548 8	1,6	4,953 0	0,201 9	2,6	13,463 7	0,074 3
0,7	2,013 8	0,496 6	1,7	5,473 9	0,182 7	2,7	14,879 7	0,067 2
0,8	2,225 5	0,449 3	1,8	6,049 6	0,165 3	2,8	16,444 6	0,060 8
0,9	2,459 6	0,406 6	1,9	6,685 9	0,149 6	2,9	18,174 1	0,055 0
1	2,718 3	0,367 9	2	7,389 1	0,135 3	3	20,085 5	0,049 8

**VI. Reproducere [de la pagina 7] a tabelii
de logaritmi cu cinci zecimale de Bouvard și Ratinet
[Editura Hachette]**

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
250	39 794	811	829	846	863	881	898	915	933	950	1	18
1	967	985	*002	*019	*037	*054	*071	*088	*106	*123	2	1,8
2	40 140	157	175	192	209	226	243	261	278	295	3	3,6
3	312	329	346	364	381	398	415	432	449	466	4	5,4
4	483	500	518	535	552	569	586	603	620	637	5	7,2
5	654	671	688	705	722	739	756	773	790	807	6	9,0
6	824	841	858	875	892	909	926	943	960	976	7	10,8
7	993	*010	*027	*044	*061	*078	*095	*111	*128	*145	8	12,6
8	41 162	179	196	212	229	246	263	280	296	313	9	14,4
9	330	347	363	380	397	414	430	447	464	481	17	16,2
260	497	514	531	547	564	581	597	614	631	647	1	1,7
1	664	681	697	714	731	747	764	780	797	814	2	3,4
2	830	847	863	880	896	913	929	946	963	979	3	5,1
3	996	*012	*029	*045	*062	*078	*095	*111	*127	*144	4	6,8
4	42 160	177	193	210	226	243	259	275	292	308	5	8,5
5	325	341	357	374	390	406	423	439	455	472	6	10,2
6	488	504	521	537	553	570	586	602	619	635	7	11,9
7	651	667	684	700	716	732	749	765	781	797	8	13,6
8	813	830	846	862	878	894	911	927	943	959	9	15,3
9	975	991	*008	*024	*040	*056	*072	*088	*104	*120	16	1,6
270	43 136	152	169	185	201	217	233	249	265	281	1	3,2
1	297	313	329	345	361	377	393	409	425	441	2	4,8
2	457	473	489	505	521	537	553	569	584	600	3	6,4
3	616	632	648	664	680	696	712	727	743	759	4	8,0
4	775	791	807	823	838	854	870	886	902	917	5	9,6
5	933	949	965	981	996	*012	*028	*044	*059	*075	6	11,2
6	44 091	107	122	138	154	170	185	201	217	232	7	12,8
7	248	264	279	295	311	326	342	358	373	389	8	14,4
8	404	420	436	451	467	483	498	514	529	545	15	1,5
9	560	576	592	607	623	638	654	669	685	700	1	3,0
280	716	731	747	762	778	793	809	824	840	855	2	4,5
1	871	886	902	917	932	948	963	979	994	*010	3	6,0
2	45 025	040	056	071	086	102	117	133	148	163	4	7,5
3	179	194	209	225	240	255	271	286	301	317	5	9,0
4	332	347	362	378	393	408	423	439	454	469	6	10,5
5	484	500	515	530	545	561	576	591	606	621	7	12,0
6	637	652	667	682	697	712	728	743	758	773	8	13,5
7	788	803	818	834	849	864	879	894	909	924	14	1,4
8	939	954	969	984	*000	*015	*030	*045	*060	*075	1	2,8
9	46 090	105	120	135	150	165	180	195	210	225	2	4,2
290	240	255	270	285	300	315	330	345	359	374	3	5,6
1	389	404	419	434	449	464	479	494	509	523	4	7,0
2	538	553	568	583	598	613	627	642	657	672	5	8,4
3	687	702	716	731	746	761	776	790	805	820	6	9,8
4	835	850	864	879	894	909	923	938	953	967	7	11,2
5	982	997	*012	*026	*041	*056	*070	*085	*100	*114	8	12,1
6	47 129	144	159	173	188	202	217	232	246	261	9	
7	276	290	305	319	334	349	363	378	392	407		
8	422	436	451	465	480	494	509	524	538	553		
9	567	582	596	611	625	640	654	669	683	698		
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		

VII. Coeficienți binomiali

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k} n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1).$$

Pentru n cuprins între 10 și 20, C_n^{n-k} se va calcula prin formula: $C_n^{n-k} = C_n^k$.

Exemplu: $C_{18}^{12} = C_{18}^6$.

$\begin{smallmatrix} n \\ \backslash \\ k \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	35	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1 287	1 716	1 716	1 287	715	286
14	1	14	91	364	1 001	2 002	3 003	3 432	3 003	2 002	1 001
15	1	15	105	455	1 365	2 003	5 005	6 435	6 435	5 005	3 003
16	1	16	120	560	1 820	4 368	8 008	11 440	12 870	11 440	8 008
17	1	17	136	680	2 380	6 188	12 376	19 448	24 310	24 310	19 448
18	1	18	153	816	3 060	8 568	18 564	31 824	43 758	48 620	43 758
19	1	19	171	969	3 876	11 628	27 132	50 388	75 582	92 378	92 378
20	1	20	190	1 140	4 845	15 504	38 760	77 520	125 970	167 960	184 756

VIII. Logaritmi ai factorialilor

Pentru calculul termenilor legii binomiale, este important să avem logaritmi ai factorialilor, cu 7 zecimale: aceștia se pot deduce din întregi prin împărțire, ceea ce dă pe $(\log p^k)$ cu o precizie bună, dacă p este un număr rațional al cărui numărător și numitor nu sînt prea mari.

n	$n!$	$\log n!$	n	$n!$	$\log n!$
1	1	0,000 000 0	11	39 916 800	7,601 155 7
2	2	0,301 030 0	12	47 900 160 · 10	8,680 337 0
					9,794 280 3
4	24	1,380 211 2	14	87 178 291 · 10 ³	10,940 408 4
5	120	2,079 181 3	15	13 076 744 · 10 ⁵	12,116 499 6
6	720	2,857 332 5	16	20 922 790 · 10 ⁶	13,320 619 6
7	5 040	3,702 430 5	17	35 568 743 · 10 ⁷	14,551 068 5
8	40 320	4,605 520 5	18	64 023 737 · 10 ⁸	15,806 341 0
9	362 880	5,559 763 0	19	12 164 510 · 10 ¹⁰	17,085 094 6
10	3 628 800	6,559 763 0	20	24 329 020 · 10 ¹¹	18,386 124 6

$$\log \pi = 0,497 149 87 \quad \log e = 0,434 294 48 \quad \frac{1}{\log e} = 2,302 585 09.$$

IX. Lege binomială

k	p	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$n = 5$	0	0,590 5	0,327 7	0,168 1	0,077 8	0,031 3
	1	0,328 0	0,409 6	0,360 1	0,259 2	0,156 2
	2	0,072 9	0,204 8	0,308 7	0,345 6	0,312 5
	3	0,008 1	0,051 2	0,132 3	0,230 4	0,312 5
	4	0,000 5	0,006 4	0,028 4	0,076 8	0,156 2
	5	—	0,000 3	0,002 4	0,010 2	0,031 3
$n = 10$	0	0,348 7	0,107 4	0,028 2	0,006 0	0,001 0
	1	0,387 4	0,268 4	0,121 1	0,040 4	0,009 7
	2	0,193 7	0,302 0	0,233 5	0,120 9	0,044 0
	3	0,057 4	0,201 3	0,266 8	0,215 0	0,117 2
	4	0,011 2	0,088 1	0,200 1	0,250 8	0,205 1
	5	0,001 5	0,026 4	0,103 0	0,200 7	0,246 0
	6	0,000 1	0,005 5	0,036 7	0,111 4	0,205 1
	7	—	0,000 8	0,009 0	0,042 5	0,117 2
	8	—	0,000 1	0,001 5	0,010 6	0,044 0
	9	—	—	0,000 1	0,001 6	0,009 7
	10	—	—	—	0,000 1	0,001 0
$n = 15$	0	0,205 9	0,035 2	0,004 7	0,000 5	—
	1	0,343 1	0,131 9	0,030 6	0,004 7	0,000 5
	2	0,266 9	0,230 9	0,091 5	0,021 9	0,003 2
	3	0,128 5	0,250 2	0,170 1	0,063 4	0,013 9
	4	0,042 9	0,187 6	0,218 6	0,126 8	0,041 6
	5	0,010 5	0,103 1	0,206 1	0,185 9	0,091 7
	6	0,001 9	0,043 0	0,147 3	0,206 6	0,152 7
	7	0,000 3	0,013 9	0,081 1	0,177 1	0,196 4
	8	—	0,003 4	0,034 8	0,118 1	0,196 4
	9	—	0,000 7	0,011 5	0,061 2	0,152 7
	10	—	0,000 1	0,003 0	0,024 5	0,091 7
	11	—	—	0,000 6	0,007 4	0,041 6
	12	—	—	0,000 1	0,001 6	0,013 9
	13	—	—	—	0,000 3	0,003 2
	14	—	—	—	—	0,000 5
	15	—	—	—	—	—
$n = 20$	0	0,121 6	0,011 5	0,000 8	—	—
	1	0,270 1	0,057 7	0,006 8	0,000 5	—
	2	0,285 2	0,136 9	0,027 9	0,003 1	0,000 2
	3	0,190 1	0,205 3	0,071 6	0,012 4	0,001 1
	4	0,089 8	0,218 2	0,130 4	0,035 0	0,004 6
	5	0,031 9	0,174 6	0,178 9	0,074 6	0,014 8
	6	0,008 9	0,109 1	0,191 6	0,124 4	0,037 0
	7	0,002 0	0,054 6	0,164 3	0,165 9	0,073 9
	8	0,000 3	0,022 1	0,114 4	0,179 7	0,120 1
	9	0,000 1	0,007 4	0,065 3	0,159 7	0,160 2
	10	—	0,002 0	0,030 9	0,117 2	0,176 2
	11	—	0,000 5	0,012 0	0,071 0	0,160 2
	12	—	0,000 1	0,003 8	0,035 5	0,120 1
	13	—	—	0,001 0	0,014 5	0,073 9
	14	—	—	0,000 3	0,004 9	0,037 0
	15	—	—	—	0,001 3	0,014 9
	16	—	—	—	0,003 3	0,004 6
	17	—	—	—	—	0,001 1
	18	—	—	—	—	0,000 2
	19	—	—	—	—	—
	20	—	—	—	—	—

$$p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

Index

A

abatere medie patratică 267(2)
 accelerație 267(1)
 acumulare (punct de ...) 86,229(1)
 adăugare (prin) 6(2)
 aderență 26,91(1)
 adiacentă (submulțime) 11(2)
 aleatoare (variabilă) 256(2)
 aleatoare (variabila... a lui Bernoulli) 282(2)
 algebră Boole 233(2)
 alternantă (progresie) 42(1)
 aproape imposibil (eveniment) 237(2)
 — sigur — 237(2)
 aproximatie 140(1)
 — 158(2)
 arc sinus (cosinus, tangentă) 75, 157, 166(1)
 — 43(2)
 arie 10, 50, 67(2)
 — algebrică 56(2)
 aritmetică (șir, progresie) 36(1)
 asimptotă 182(1)
 asimptotică (direcție) 185(1)

B

Bayes (formula lui...) 245(2)
 baza (funcției logaritmice) 112 (2)
 — (schimbare de...) 114(2)
 Bernoulli (teorema lui...) 286(2)
 — (variabila aleatoare a lui...) 282(2)
 Bienaymé — Cebîșev 283(2)
 binomială (legea) 292(2)
 Boole (algebră) 233(2)
 — (legea lui...) 234(2)
 bulă (deschisă, închisă) 17,215(1)

C

caracteristică 158, 166(2)
 centrat (moment) 269(2)
 centrată (variabilă aleatoare) 265(2)
 — redusă (variabilă aleatoare) 268(2)

cilindru 71(2)
 cinematica 264(1)
 circulară (funcție) 94(1)
 circulația unui vector 84(2)
 cîmp de vectori 84(2)
 coeficient de corelație 277(2)
 cologaritm 167(2)
 combinator 300(2)
 complex exponențial 154(2)
 con 71(2)
 condiții inițiale 145(2)
 conex 25, 53, 177(1)
 conică 253(1)
 continuă (funcție) 53, 66, 224(1)
 — — 16(2)
 — (variabilă aleatoare) 256(2)
 continuitate (la dreapta, la stînga) 58(1)
 — pe un interval 67(1)
 convergent (șir) 116(1)
 convergentă (integrală) 64(2)
 corelație (coeficient de...) 277(2)
 covariantă 276(2)
 crescătoare (funcție) 28(1)
 creștere finită 31(2)
 cumulativă (funcție) 258(2)
 (curbă) indicatoare 220, 248(1)

D

densă 85(1)
 densitate de probabilitate 261(2)
 derivabilă 131(1)
 derivată (funcție) 152(1)
 — (funcție vectorială) 241(1)
 — la dreapta, la stînga 131(1)
 — (logaritm) 91(2)
 derivată 130(1)
 — (vector) 239(1)
 derivate succesive 161, 245(1)
 deschis 17, 21, 51, 215(1)
 descrescătoare (funcție) 28(1)
 diferență tabelară 164(2)
 diferențială 129, 142, 236(1)
 — (ecuație) 143(2)
 — (notație) 158(1)
 direcție asimptotică 185(1)
 directoare 253(1)

discretă (variabilă aleatoare) 256,
288(2)
discontinuuă 53, 57(1)
dispersie 266(2)
distanță 16, 215(1)
distribuția unei variabile alea-
toare 258(2)
divergentă (integrală) 64(2)
— (șir) 116(1)
diviziune 1(2)
domeniu de definiție 27, 219(1)
dreaptă încheiată 98(1)
durată 265(1)

E

e 143(2)
ecuație diferențială 143(2)
— vectorială 249(1)
ecuații parametrice 249(1)
elice circulară 220, 258(1)
elipsă 254(1)
elipsoid 88(2)
eroare 160(2)
eveniment 235, 240(2)
— aproape imposibil 237(2)
— — sigur 237(2)
— contrar 235(2)
— elementar 236(2)
eveniment incompatibil 235(2)
— sigur 235(2)
evenimente independente 240(2)
eventualitate 235(2)
excentricitate 253(1)
exponent 102(2)
— complex 154(2)
— fracționar 78(1)
— în baza a 115(2)
— rațional 76, 81(1)
— real 117(2)
extreme 29, 175(1)

F

formă nedeterminată 104(1)
— — 123(2)
formula lui Bayes 245(2)
formula lui Leibnitz 163(1)
fracționar (exponent) 78(1)

funcție afină tangentă 127, 137,
237(1)

— circulară 94(1)
— continuă 53, 66, 224(1)
— — 16(2)
— crescătoare 28(1)
— cumulativă 258(2)
— de repartitie 258(2)
— derivată 152(1)
— descrescătoare 28(1)
— impară 29, 219(1)
— inversă 31, 72(1)
— în scară 219(1)
— — 6(2)
— logaritmică (baza...) 112(2)
— majorată 29(1)
— mărginită 29, 219(1)
— minorată 29(1)
— monotonă 28(1)
— — 15(2)
— numerică 27(1)
— pară 29, 219(1)
— polinom 206(2)
— putere 117, 204(2)
— rațională 206(2)
— — 33, 109(1)
— radical 76(1)
— tangentă 125, 236(1)
— vectorială 214(1)
— — 151(2)
— — derivată 241(1)

G

generatoare (a conului, cilindru-
lui) 75(2)
generalizate (integrale) 63(2)
geometrică (progresie) 41(1)
global independent 242(2)
grafic 30(1)
grafică (reprezentare) 30(1)

H

hiperbolă 254(1)
hiperboloid 88(2)
Huygens (teorema lui) 266(2)

I

identitate 31(1)
 imagine directă 51, 223(1)
 — inversă 49, 223(1)
 — — 255(2)
 impară (funcție) 29, 219(1)
 incertitudine 160(2)
 incompatibile (evenimente) 235(2)
 independente (evenimente) 240(2)
 — (variabile aleatoare)
 280(2)
 indicatoare (curbă) 220, 248(1)
 indicator (variabilă aleatoare)
 261(2)
 indusă (probabilitate) 258(2)
 — (topologie) 24, 217(1)
 inegalitatea lui Schwarz 32(2)
 infinită ramură 182(1)
 inflexiune (punct) 191(1)
 instrucțiune 199(2)
 integrabil 11, 15(2)
 integrală 8, 37, 51(2)
 — definită 36(2)
 — convergentă 64(2)
 — divergentă 64(2)
 — generalizată 63(2)
 — nedefinită 36(2)
 integrale generalizate 63(2)
 integrare prin părți 43(2)
 interior 26(1)
 interpolare liniară 136(1)
 — — 163(2)
 interval (închis, deschis) 16(1)
 — — 5(2)
 inversă (funcție) 31, 72(1)
 — (imagine) 49, 223(1)
 — — 278(2)
 izolat (punct) 59, 86(1)

I

înălțime (con, cilindru) 72, 74(2)
 încadrare 160(2)
 încheiată (dreaptă) 98(1)
 închis 16, 51, 215(1)
 întoarcere (punct) 192(1)

K

König (teorema lui ...) 266(2)

L

legea binomială 292(2)
 — comună 272(2)
 — lui Boole 234(2)
 — lui Morgan 234(2)
 — numerelor mari 286(2)
 — orară 268(1)
 — probabilității 258(2)
 legi marginale 274(2)
 Leibnitz (legea lui ...) 163(1)
 limită 87(1)
 — (la dreapta, la stînga) 88(1)
 — (punct) 190(1)
 logaritm derivat 91(2)
 — în bază „a” 112(2)
 — neperian 90, 170(2)
 — zecimal 166(2)
 logaritmică (scară) 188(2)
 lucru mecanic 86(2)

M

majorată (funcție) 29(1)
 mantisă 158, 166(2)
 margine 29, 176(1)
 marginale (legi) 274(2)
 masă 75(2)
 — specifică 76(2)
 mașină de calcul 193(2)
 matematizare 264(1)
 maxim 29(1)
 mărginită (funcție) 29, 219(1)
 — (parte) 16(1)
 mecanică 265(1)
 medie 27(2)
 minim 29(1)
 minorată (funcție) 29(1)
 mișcare 265(1)
 — circulară 268(1)
 — — uniformă 271(1)
 — helicoidală 272(1)
 — — uniformă 272(1)
 mobil 266(1)
 — matematic 265(1)
 modul scară 186(2)
 moment centrat 268(2)
 — de inerție 76(2)
 — de ordin k al unei varia-
 bile aleatoare 264(2)

monotonă (funcție) 28(1)
 — — 15(2)
 Morgan (lege a lui...) 234(2)
 mută (variabilă) 12(2)

N

nedeterminată (formă) 104(1)
 — — 123(2)
 norma unei diviziuni 5(2)
 normă 214(1)
 numere mari (legea...) 286(2)

O

omogen (solid) 76(2)
 oprire (punct de...) 190(1)
 ordinator 194(2)
 organigramă 196(2)

P

parabolă 253(1)
 parabolică (ramură) 186(1)
 paraboloid 88(2)
 pară (funcție) 29, 219(1)
 parametrice (ecuații) 249(1)
 parte mărginită 16(1)
 perioadă 28, 219(1)
 piramidă 72(2)
 polinom 34, 63, 108(1)
 — 206(2)
 potențial 85(2)
 primitivă 33; 37(2)
 prin părți (integrare...) 43(2)
 prismă 72(2)
 probabilistic (spațiu) 235; 237(2)
 probabilitate 236; 239(2)
 — compusă 244(2)
 — condiționată 243(2)
 — de cauză 246(2)
 — imagine 258(2)
 — indusă 258(2)
 — marginală 249(2)
 — (produs de) 247(2)
 probabilizabil (spațiu) 235(2)
 probe repetate 248; 283(2)
 produs scalar 214, 222(1)
 program 193(2)
 progresie alternată 42(1)
 — aritmetică 36(1)
 — geometrică 41(1)

punct 21, 217(1)
 — de acumulare 86, 229(1)
 — de inflexiune 191(1)
 — izolat 59, 86(1)
 — limită 190(1)
 — de întoarcere 192(1)
 — de oprire 190(1)
 — staționar 252(1)
 — unghiular 192(1)

R

ramura infinită 182(1)
 — parabolică 186(1)
 rație 36, 41(1)
 rațională (funcție) 33, 109(1)
 radical (funcție) 76(1)
 raport de creștere 27(1)
 recurent (șir) 36, 120(1)
 repartitie (funcție de...) 258(2)
 repetate (probe...) 248; 283(2)
 reprezentare grafică 30(1)
 restricție 31(1)
 Riemann (suma lui...) 14(2)
 rigla de calcul 190(2)
 Rolle (teorema lui...) 31(2)

S

scalar (produs...) 214, 222(1)
 scară 184(2)
 (funcție în scară) 219(1)
 — — — 6(2)
 — logaritmică 188(2)
 schimbare de bază 114(2)
 — de variabilă 40(2)
 Schwarz (inegalitatea lui...) 32(2)
 sens de variație 27(1)
 separată 24(1)
 sferic (inel, sector, segment) 87(2)
 sigur (eveniment) 235(2)
 sistem complet de evenimente 235(2)
 soluție generală 145(2)
 — particulară 145(2)
 — singulară 145; 147(2)
 spațiu probabilistic 237(2)
 spațiu probabilizabil 235(2)
 — topologic 21(1)
 — vectorial euclidian 241(1)

submulțime adiacentă 11(2)
 suma lui Riemann 14(2)
 suprafață de bază 73(2)
 — de rotație 75(2)
 staționar (punct) 252(1)
 — (șir) 36, 117(1)

Ș

șir aritmetic 36(1)
 — convergent 116(1)
 — divergent 116(1)
 — finit 35(1)
 — geometric 41(1)
 — numeric 35(1)
 — recurent 36, 120(1)
 — staționar 36, 117(1)

T

tangentă 250(1)
 — (funcție afină) 127, 137, 237(1)
 — (funcții 125, 236(1)
 teoreme lui Bernoulli 286(2)
 — lui Huyghens 78; 266(2)
 — lui König 266(2)
 — lui Rolle 31(2)
 topologic (spațiu...) 21(1)
 topologie indusă 24, 217(1)
 traiectorie 266(1)
 trunchi (de con, de piramidă) 72(2)

U

unghi orar 269(1)
 — polar 267(1)
 unghiular (punct) 192(1)

uniformă (mișcare circulară) 271(1)
 — — (helicoidală) 272(1)
 — (variabilă aleatoare) 262(2)
 univers al posibilităților 235(2)

V

valoare apropiată 159(2)
 — eficace 81(2)
 valoare medie 264(2)
 — mijlocie a unei integrale 28(2)
 — tipică a variabilei aleatoare 264(2)
 variabilă aleatoare 256(2)
 — — a lui Bernoulli 282(2)
 — — centrată 265(2)
 — — redusă 268(2)
 — — continuă 256(2)
 — — discretă 256; 288(2)
 — — independentă 280(2)
 — — indicator 261(2)
 — — constantă 261(2)
 — — uniformă 262(2)
 — mută 12(2)
 vecinătate 21, 100, 260(1)
 — la dreapta, la stînga 25(1)
 vector derivat 239(1)
 vectorial (spațiu euclidian...) 241(1)
 vectorială (ecuație) 249(1)
 viteză 267(1)
 — 79(2)
 — unghiulară 270(1)
 volum 70(2)

$\mathcal{O}$	21 (1)	$+\infty$	99 (1)	$\int_a^a$	65 (2)
$\mathfrak{F}$	21 (1)	$-\infty$	99 (1)	$\int_{-\infty}^{\infty}$	65 (2)
$\mathfrak{O}(x_0)$	22 (1)	$\bar{R}$	99 (1)	$\int_{-\infty}^{+\infty}$	65 (2)
$\mathcal{C}(x_0)$	24 (1)	$D(f, x_0)$	130 (1)	$\int_{M_0 M_1}$	86 (2)
$\overset{\circ}{E}$	26 (1)	$d_{x_0} f$	130 (1)	e	96 (2)
$\overline{E}$	26 (1)	f'	152 (1)	$\log_a$	112 (2)
$[x \mapsto f(x)]$	27 (1)	df	158 (1)	M	115 (2)
$g \circ f$	31 (1)	$\frac{df}{dx}$	159 (1)	$\exp_a$	115 (2)
I_E	31 (1)	$f'', f''', \dots, f^{(n)}$	161 (1)	x^a	117 (2)
f^{-1}	31 (1)	$\ \vec{u}\ $	214 (1)	e^{ix}	154 (2)
$f F$	31 (1)	$<$	5 (2)	$\mathfrak{B}(E)$	234 (2)
$E(x)$	32 (1)	$\oplus$	5 (2)	$\mathfrak{A}(E^*)$	234 (2)
(σ_n)	35 (1)	$\perp$	6 (2)	P_A	243 (2)
$f[A]$	49 (1)	$\vdash$	6 (2)	$p(B A)$	243 (2)
f^{-1}	49 (1)	$I_a^b(\varphi)$	9 (2)	$E(X)$	264 (2)
$f[B]$	49 (1)	$\int_a^b$	11 (2)	$M_\lambda(X)$	264 (2)
χ_A	57 (1)	$\mathfrak{A}_1(f)$	35 (2)	$V(X)$	266 (2)
$\lim f$	88 (1)	$\int$	36 (2)	X^*	268 (2)
$\lim_{x_0} f$	88 (1)	$\mathcal{A}$	50 (2)	$\text{cov}(X, Y)$	276 (2)
$\lim_{x_0^+} f$	88 (1)	$\mathcal{A}_u$	50 (2)	$\mathfrak{B}(n, p)$	295 (2)
$\lim_{x_0^-} f$	88 (1)	$\int_a^{+\infty}$	65 (2)	$b(k, n, p)$	295 (2)
$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$	88 (1)			A_n^p	300 (2)
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	88 (1)			C_n^p	300 (2)
$\mathfrak{O}^*(x_0)$	88 (1)				

TABLA DE MATERII

7			
Integrale. Primitive	1	Integrala unei funcții pe un interval închis mărginit	5
	2	Proprietățile integralei	17
	3	Funcții primitive	33
	4	Evaluarea ariei unor anumite părți din plan	50
	5	Integrale generalizate	63
	6	Diverse aplicații ale noțiunii de integrală	70
8			
Funcții logaritmice și exponențiale	1	Funcția logaritmică neperiană	90
	2	Funcție exponențială	102
	3	Alte funcții logaritmice și exponențiale	112
	4	Funcții compuse cu ajutorul funcțiilor logaritmice și exponențiale.	122
9			
Ecuatii diferențiale	1	Generalități	143
	2	Ecuatii diferențiale definite prin $y'' + \omega^2 y = 0$	147
	3	Extindere la cazul funcțiilor vectoriale	151
10			
Calcul numeric	1	Rezultate principale	158
	2	Utilizarea tabelor numerice	162
	3	Folosirea tabelor de logaritmi zecimali	166
	4	Logaritmi ai valorilor funcțiilor circulare. Utilizare.	174
	5	Rigla de calcul	184
	6	Calculul la mașină. Noțiuni de programare	193

11	1 Progresii	203
Funcții uzuale	2 Funcții putere. Polinoame și funcții raționale	204
Rezumat	3 Funcții circulare	207
Probleme	4 Funcții logaritmice și exponențiale 5 Reguli de derivare	209 210
	6 Metode principale de integrare . . .	211
	7 Probleme	211

12	1 Algebre Boole	233
Spații	2 Spații probabilistice finite	235
probabilistice finite	3 Probabilități pe o mulțime oarecare 4 Probabilități condiționate	238 240
	5 Produse de probabilități	247

13	1 Definiții	255
Variabile aleatoare	2 Proprietăți	259
	3 Valori tipice ale unei variabile alea- toare.	264
	4 Cupluri de variabile aleatoare . .	272
	5 Probe repetate. Legea numerelor mari	283
	6 Legea binomială.	292
	7 Apendice. Recapitulare asupra com- binărilor	300
	Tabele	306
	Index	313

Tiraj: 17 900. Ex. S.P.: 80 ex. broșate.
 Coll de tipar: 20. Hîrtia: Scris Tip I—A.
 Format: 16/70×100.
 Bun de tipar: 20 — XI — 1975.
 Ediția: 1975. Nr. plan: 6045.



Intreprinderea Poligrafică Cluj
 Str. Brassai Nr. 5—7.
 Municipiul Cluj-Napoca
 Republica Socialistă România
 Comanda Nr. 469.

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ – BUCUREȘTI

Au apărut:

Alef ₀ Algebră,	vol. I, Mulțimi, aplicații, numere reale vol. II, Funcții și ecuații numerice
Alef ₀ Geometrie,	vol. I, Plan afin, plan vectorial vol. II, Geometrie vectorială, geometrie afină vol. III, Geometrie metrică vol. IV, Geometrie în spațiu și geometrie descriptivă
Alef ₀ Algebră,	vol. I, Mulțimi, statistică, probabilități vol. II, Funcții numerice, aplicații diverse
Alef ₀ Geometrie,	vol. I, Spații vectoriale, spații afine vol. II, Geometrie metrică
Alef ₀ Algebră,	Numere întregi
Alef ₀ Algebră,	Numere reale, calcul numeric, numere complexe
Alef ₀ Geometrie,	vol. I, II, Elemente de geometrie afină și euclidiană
Alef ₀ Analiză,	vol. I, Calcul diferențial, aplicații vol. II, Calcul integral, aplicații
Alef ₀ Probleme	