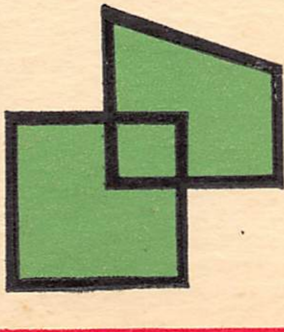
CULEGERI
DE
PROBLEME
DE
MATEMATICĂ
ȘI
FIZICĂ

SERIE

I. A. LAVROV

L. L. MAKSIMOVA

PROBLEME DE TEORIA MULȚIMILOR ȘI LOGICĂ MATEMATICĂ



I. A. LAVROV * L. L. MAKSIMOVA

PROBLEME DE TEORIA MULȚIMILOR ȘI LOGICĂ MATEMATICĂ

Traducere din limba rusă de
prof. EUGENIA METONI și
prof. univ. dr. CONSTANTIN P. POPOVICI

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI – 1974

Culegerea de probleme este alcătuită de colectivul catedrei de logică matematică a Universităţii din Novosibirsk, în care lucrează logicieni cunoscuţi în întreaga lume ca buni specialişti.

Cartea este împărţită în două capitole: probleme de teoria mulţimilor şi probleme de logică matematică; ultimele nu pot fi tratate fără teoria mulţimilor, un instrument excelent care ajută la însuşirea principiilor logicii matematice. Problemele din fiecare paragraf sînt precedate de definiţiile de bază. Unele teoreme, la care se face apel, sînt formulate şi ele ca probleme. Problemele cu un grad de dificultate ridicat sînt marcate cu un asterisc.

Culegerea se adresează elevilor din licee, profesorilor, studenţilor, precum şi inginerilor, care în cadrul acţiunii de reciclare abordează elemente de teoria mulţimilor şi logică matematică

Redactor: Valentina Bucur
Tehnoredactor: Valeriu Morărescu
Coperta: Alexandru Banu

Bun de tipar 4.04.1974. Coli de tipar 6,75 Tiraj 17.150+110 exemplare broşate C.Z. 519+517.11 (083)

Întreprinderea poligrafică Informaţia, str. Brezoianu 23–25.

c. 7

Seria

CULEGERI DE PROBLEME DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

N. А. Лавров, Л. Л. Максимова

ЗАДАЧИ ПО ЛОГИКЕ

НГУ, НОВОСИБИРСК, 1970

*PREFAȚĂ**

Învățămîntul logicii matematice se răspîndește din ce în ce mai mult în țara noastră.

De logică matematică au nevoie matematicienii. Încă din anul școlar 1933—1934 s-a predat un astfel de curs la Universitatea din Iași, iar în 1942 s-a înființat la Universitatea din București o catedră de „Analiză superioară și logică matematică". De logică matematică au nevoie filozofii. La facultatea de filozofie a Universității din București astfel de cursuri se predau de peste două decenii.

De logică matematică au nevoie inginerii. Pe de o parte inginerii care se ocupă de automatică. La facultatea de matematică a Universității din București se predau cursuri în care algebra logicii este folosită pentru studiul automatelor finite încă din 1953.

De logică matematică au nevoie toți cei ce se ocupă de informatică. Pentru ei în primul rînd publicăm acest text.

Gr. C. Moisil

1 martie 1973

---

*) Prefața a fost scrisă pentru lucrarea publicată de Centrul de multiplicare al Universității din București.

DIN PREFAȚA AUTORILOR

Logica matematică a devenit în ultimii ani obiectul a numeroase cursuri în învățămîntul matematic și tehnic. Dacă problema manualelor poate fi considerată ca fiind în linii mari rezolvată, totuși cei care țin seminarii întîmpină mari dificultăți. Cauza constă în aceea că un număr mare de astfel de probleme este dispersat prin diferite cărți. Nu există un volum în care să fie adunate toate aceste probleme și în care să fie date unele indicații pentru rezolvarea lor. De asemenea, trebuie menționat că în literatura mondială nu a existat practic nici o experiență în privința alcătuirii unei culegeri speciale de probleme de logică matematică, sarcină cu care s-a obligat catedra de algebră și logică matematică a Universității de Stat din Novosibirsk.

În stabilirea structurii tematice a lucrării, nu a fost posibil să evităm teoria mulțimilor. Aceasta, deoarece rezolvarea problemelor de teoria mulțimilor constituie un mijloc minunat de pregătire în vederea stăpînirii bazelor logicii matematice, însăși teoria mulțimilor fiind cel mai tipic obiect pentru aplicarea mijloacelor logicii matematice și teoriei algoritmilor.

Autorii și-au propus culegerea problemelor ca scop principal. Din această cauză, lucrarea conține foarte puține probleme create de autori. Dacă problemele ne-au plăcut, nu am ezitat să le luăm din alte cărți; numeroase probleme ne-au fost propuse de membrii catedrei noastre.

Definițiile de bază sînt date la începutul fiecărui paragraf. Uneori a trebuit să modificăm unele definiții standard, dar astfel de situații sînt puține. Avînd în vedere că în privința multor definiții nu există un acord deplin, acestea nu pot provoca mari neplăceri. Teoremele de bază sînt formulate ca probleme.

Lucrarea conține foarte puține probleme dificile; acestea au fost notate cu un asterisc. Unele răspunsuri sînt doar schițate.

În carte sînt folosite următoarele notații convenționale, de largă circulație :

N — *mulțimea numerelor naturale* ;

$\mathcal{R}$ — *mulțimea numerelor reale* ;

$\{x | \ldots X \ldots\}$ — *mulțimea elementelor* x *care satisfac condiția* $\ldots X \ldots$, *ş.a.m.d.*

Autorii, convinşi că alcătuirea unei astfel de culegeri de probleme este o treabă foarte grea, se consolează cu faptul că aceasta este o încercare făcută într-un anumit domeniu de activitate, asupra căruia în viitor va fi depusă o serioasă muncă de finisare şi prelucrare.

I. A. Lavrov
L. L. Maksimova

Novosibirsk, 6 dec. 1970

CUPRINS

LISTĂ DE SIMBOLURI

$\Rightarrow$ implicaţie logică (dacă..., atunci...)
$\Leftrightarrow$ echivalenţă logică (dacă şi numai dacă)
$\bigcup$ reuniune
$\cup$ reunit cu
$\cap$ intersectat cu
$\bigcap$ intersecţie
$\emptyset$ mulţime vidă
$\subseteq$ inclus în
$\supseteq$ include pe
$\in$ aparţine
$\notin$ nu aparţine
$\neq$ diferit de
$\langle ... \rangle$ paranteză
$[\ ,\ ]$ interval închis
$\circ$ compus cu
f^{-1} funcţie inversă
$\leqslant$ mai mic sau egal
$<$ mai mic
$>$ mai mare
$\sim$ echivalent cu
$\nsim$ nu este echivalent
$\overline{\overline{A}}$ cardinalul mulţimii A
$\wedge$ semnul conjuncţiei
$\urcorner$ semnul negaţiei logice
$\vee$ semnul disjuncţiei
$\subset$ semnul de incluziune strictă
$\vdash$ semnul deducţiei logice
$\equiv$ identic cu
$\forall$ cuantificatorul universal
$\exists$ cuantificatorul existenţial

Capitolul 1

TEORIA MULȚIMILOR

1.1. Operații cu mulțimi

Vom presupune că toate mulțimile sînt submulțimi ale unei mulțimi U, numită *mulțime totală*. Vom utiliza următoarele simboluri :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \text{oricare ar fi } x, \text{ dacă } x \in A, \text{ atunci } x \in B;$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ și } B \subseteq A;$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ sau } x \in B;$$

$$x \in \bigcup_{i \in I} A \Leftrightarrow \text{există } i_0 \in I \text{ astfel încît } x \in A_{i_0};$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ și } x \in B;$$

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow x \in A_i \text{ oricare ar fi } i \in I;$$

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \text{ și } x \notin B;$$

$$x \in -A \Leftrightarrow x \notin A;$$

$$x \notin \emptyset \text{ oricare ar fi } x;$$

$P(A)$ — mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii A.

1. Să se demonstreze :

a) $A \subseteq A$;

b) dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq C$, atunci $A \subseteq C$;

c) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

2. Să se demonstreze că, dacă A este mulţimea rădăcinilor ecuaţiei $x^2 - 7x + 6 = 0$ şi $B = \{1, 6\}$, atunci $A = B$.

3. Să se demonstreze că $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

4. Să se demonstreze că $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \neq \{1, 2, 3\}$.

5. Să se demonstreze că oricare ar fi A :

a) $\emptyset \subseteq A$;

b) dacă $A \subseteq \emptyset$, atunci $A = \emptyset$.

6. Să se demonstreze că există numai o mulţime care nu are nici un element.

7. Există mulţimile A, B şi C, astfel încît

$A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $(A \cap B) - C = \emptyset$?

8. Să se demonstreze că mulţimea tuturor rădăcinilor polinomului $\psi(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$ este reuniunea mulţimilor rădăcinilor polinoamelor $f(x)$ şi $\varphi(x)$.

9. Să se demonstreze că mulţimea tuturor rădăcinilor reale ale polinomului $\psi(x) = f^2(x) + \varphi^2(x)$ este intersecţia mulţimilor rădăcinilor reale ale polinoamelor $f(x)$ şi $\varphi(x)$.

10. Să se demonstreze că

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \\ = \emptyset \Leftrightarrow (-A) \cup B = U.$$

11. Să se demonstreze următoarele identităţi :

a) $A \cup A = A \cap A = A$;

b) $A \cap B = B \cap A$;

c) $A \cup B = B \cup A$;

d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

e) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

g) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

h) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap$

$\cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$;

i) $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A = A$;

j) $-(A \cap B) = (-A) \cup (-B)$;

k) $-(A \cup B) = (-A) \cap (-B)$;

l) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;

m) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;

n) $A - (A - B) = A \cap B$;

o) $A - B = A - (A \cap B)$;

p) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$;

r) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C) = A - (B \cup C)$;

s) $A \cup B = A \cup (B - A)$;

ş) $-(-A) = A$;

t) $A \cup (-A) = U$;

u) $A \cap (-A) = \emptyset$;

v) $(A \cup B) \cup [A \cap (-B)] = (A \cup B) \cap [A \cup (-B)] = A$;

z) $[(-A) \cup B] \cap A = A \cap B$.

12. Să se demonstreze că

a) $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ şi $B \subseteq C$;

b) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ şi $A \subseteq C$;

c) $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq (-B) \cup C$;

d) $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap (-B) \subseteq C$;

e) $(A - B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$;

f) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$.

13. Să se determine toate submulţimile mulţimilor: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{x\}$, $\{1, 2\}$.

14. Să se demonstreze că o mulţime formată din n elemente are 2^n submulţimi.

15. Să se demonstreze că oricare ar fi a, b, c, d:

$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Leftrightarrow a = c$ şi $b = d$.

16. Care din următoarele afirmaţii sînt adevărate, oricare ar fi A, B şi C?

a) Dacă $A \in B$ şi $B \in C$, atunci $A \in C$.

b) Dacă $A \subseteq B$ şi $B \in C$, atunci $A \in C$.

c) Dacă $A \cap B \subseteq -C$ şi $A \cup C \subseteq B$, atunci $A \cap C = \emptyset$.

d) Dacă $A \neq B$ şi $B \neq C$, atunci $A \neq C$.

e) Dacă $A \subseteq -(B \cup C)$ şi $B \subseteq -(A \cup C)$, atunci $B = \emptyset$.

17. Să se demonstreze că oricare ar fi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dacă

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq A_1$,

atunci $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$.

18. Pentru fiecare număr întreg pozitiv n să se indice o mulţime A_n, formată din n elemente, cu proprietatea că dacă $x, y \in A_n$, atunci

$$x \in y \text{ sau } y \in x.$$

19. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\left.\begin{array}{l} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{array}\right\},$$

unde A, B şi C sînt mulţimi date şi $B \subseteq A \subseteq C$.

20. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\left.\begin{array}{l} A - X = B \\ X - A = C \end{array}\right\},$$

unde A, B şi C sînt mulţimi date şi $B \subseteq A$, $A \cap C = \emptyset$.

21. Fiind date sistemele de mulţimi $\{A_i\}_{i \in I}$ şi $\{B_i\}_{i \in I}$, unde I este o mulţime oarecare, să se rezolve sistemul:

a) $A_i \cap X = B_i, \qquad i \in I$;

b) $A_i \cup X = B_i, \qquad i \in I$.

Ce condiţii trebuie să satisfacă A_i şi B_i ca aceste sisteme să aibă soluţii?

22. Să se demonstreze că

a) $A = B \Leftrightarrow (A - B) \cup (B - A) = \emptyset$;

b) orice ecuaţie relativă la mulţimea X, care are în membrul al doilea $\emptyset$, este echivalentă cu ecuaţia

$$(A \cap X) \cup [B \cap (-X)] = \emptyset,$$

unde A şi B sînt mulţimi, în reprezentarea cărora nu se află simbolul X;

c) sistemul de ecuaţii

$$\left.\begin{array}{l} A \cap X = \emptyset \\ B \cap (-X) = \emptyset \end{array}\right\}$$

are soluție, dacă și numai dacă $B \subseteq -A$. Dacă această condiție este îndeplinită, soluție a sistemului este orice mulțime X, astfel încît

$$B \subseteq X \subseteq -A.$$

23. a) Să se descrie metoda de rezolvare a sistemului de ecuații cu o necunoscută;

b) folosind această metodă, să se rezolve sistemul următor :

$$\left.\begin{aligned}[A \cup (-X)] \cap (X \cup B) &= X \cup C\\ (X \cap B) \cup C &= -(X \cap A)\end{aligned}\right\}$$

Ce condiții trebuie să satisfacă A, B și C ca acest sistem să aibă soluție?

24. Să se demonstreze că orice mulțime este :

a) reuniunea tuturor submulțimilor sale,

b) reuniunea tuturor submulțimilor sale finite,

c) reuniunea tuturor submulțimilor sale cu cîte un singur element.

25. Fiind dat șirul de mulțimi

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq \cdots,$$

să se demonstreze că intersecția mulțimilor din orice subșir infinit al acestui șir de mulțimi coincide cu intersecția mulțimilor din întregul șir.

26. Fiind dat șirul de mulțimi

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq \cdots,$$

să se demonstreze că reuniunea mulțimilor din orice subșir infinit al acestui șir de mulțimi coincide cu reuniunea mulțimilor din întregul șir.

27. Să se demonstreze următoarele identități :

a) $\bigcup\limits_{k \in K} \bigcup\limits_{l \in L} A_{kl} = \bigcup\limits_{l \in L} \bigcup\limits_{k \in K} A_{kl}$;

b) $\bigcap\limits_{k \in K} \bigcap\limits_{l \in L} A_{kl} = \bigcap\limits_{l \in L} \bigcup\limits_{k \in K} A_{kl}$;

c) $-(\bigcup\limits_{k \in K} A_k) = \bigcap\limits_{k \in K} (-A_k)$;

d) $-(\bigcap_{k\in K} A_k) = \bigcup_{k\in K}(-A_k)$;

e) $\bigcup_{t\in T} A_t \cup \bigcup_{t\in T} B_t = \bigcup_{t\in T}(A_t \cup B_t)$;

f) $\bigcup_{t\in T}(B \cap A_t) = B \cap \bigcup_{t\in T} A_t$;

g) $\bigcap_{t\in T}(B \cup A_t) = B \cup \bigcap_{t\in T} A_t$;

h) $\bigcup_{k\in K}\bigcap_{l\in L} A_{kl} \subseteq \bigcap_{l\in L}\bigcup_{k\in K} A_{kl}$.

28. Să se demonstreze că

a) dacă $A_t \subseteq B$ oricare ar fi $t \in T$, atunci $\bigcup_{t\in T} A_t \subseteq B$;

b) dacă $B \subseteq A_t$ oricare ar fi $t \in T$, atunci $B \subseteq \bigcap_{t\in T} A_t$;

c) dacă $A_t \subseteq B_t$ oricare ar fi $t \in T$, atunci $\bigcup_{t\in T} A_t \subseteq \bigcup_{t\in T} B_t$ şi $\bigcap_{t\in T} A_t \subseteq \bigcap_{t\in T} B_t$.

29. Să se demonstreze că dacă $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, atunci

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [A_n \cap (B_{n-1} - B_n)],$$

unde

$$B_0 \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

30. Să se demonstreze că $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, unde

$$B_1 = A_1,\ B_n = A_n - (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}), \qquad (n > 1).$$

1.2. Relaţii şi funcţii

Vom face următoarele notaţii:

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\},$$

$$A^n = \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in A\}.$$

1. Să se demonstreze că există A, B şi C, astfel încît

a) $A \times B \neq B \times A$;

b) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$.

2. Să se găsească interpretarea geometrică a următoarelor mulţimi :

a) $[a, b] \times [c, d]$, unde $[a, b]$ şi $[c, d]$ sînt intervale ale dreptei reale $\mathscr{R}$;

b) $[a, b]^2$;

c) $[a, b]^3$;

d) $\mathscr{R}^n$.

3. Să se demonstreze că $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

4. Să se determine A, B, C şi D astfel încît

$(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D)$.

5. Să se demonstreze că

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$;

c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$;

d) $A \subseteq B$ şi $C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$;

e) $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$, unde $A \subseteq X$ şi $B \subseteq Y$;

f) $-(A \times B) = [(-A) \times U] \cup [U \times (-B)]$, unde U este mulţimea totală;

g) dacă $A \times B = C \times D$, atunci $A = C$ şi $B = D$ (aici $A, B, C, D \neq \emptyset$);

h) $\bigcup_{s \in S} A_s \times \bigcup_{t \in T} B_t = \bigcup_{\langle s,t \rangle \in S \times T} (A_s \times B_t)$;

i) $\bigcap_{s \in S} A_s \times \bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap_{\langle s,t \rangle \in S \times T} (A_s \times B_t)$;

j) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$. Ce condiţii trebuie să satisfacă A, B, C şi D ca să se obţină egalitatea?

6. Fie $A, B \neq \emptyset$ şi $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$. Să se demonstreze că $A = B = C = D$.

Submulţimile R ale mulţimii $A \times B$ le vom numi *relaţii binare* între elementele mulţimilor A şi B. Fie

$$\langle x, y\rangle \in R^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R;$$

$$-R = (A \times B) - R;$$

$$\delta_R = \{x \mid \text{există } y, \text{ astfel încît } \langle x, y\rangle \in R\};$$

$$\rho_R = \{y \mid \text{există } x, \text{ astfel încît } \langle x, y\rangle \in R\};$$

$$R \top X = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \text{ şi } x \in X\};$$

$$R \perp Y = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \text{ şi } y \in Y\};$$

$$R(X) = \{y \mid \langle x, y\rangle \in R \text{ şi } x \in X\}.$$

Fie $R_1 \subseteq A \times B$ şi $R_2 \subseteq B \times C$. Vom defini relaţia $R_1 \circ R_2$, care va fi numită *produsul* lui R_1 cu R_2:

$$R_1 \circ R_2 = \{\langle x, y\rangle \mid \text{există } z \text{ astfel încît } \langle x, z\rangle \in R_1, \langle z, y\rangle \in R_2\}.$$

Relaţia $f \subseteq A \times B$ o vom numi *funcţie* de la A la B $(f: A \to B)$, dacă $\delta_f = A$ şi din $\langle x, y_1\rangle \in f$ şi $\langle x, y_2\rangle \in f$, urmează că $y_1 = y_2$, oricare ar fi x, y_1, y_2. Dacă f este funcţie, atunci vom scrie $y = f(x)$ în loc de $\langle x, y\rangle \in f$. Pentru orice mulţime A definim $i_A : A \to A$ în felul următor:

$$i_A(x) = x.$$

Funcţia f se numeşte *injectivă* dacă $y = f(x_1)$ şi $y = f(x_2)$, atunci $x_1 = x_2$ oricare ar fi x_1, x_2, y.

Vom spune că funcţia $f: A \to B$ realizează o *corespondenţă biunivocă* între A şi B, dacă $\delta_f = A$, $\rho_f = B$ şi f este injectivă. O corespondenţă biunivocă $f: A \to A$ se numeşte *permutare* a mulţimii A. Mulţimea tuturor funcţiilor de la A la B o vom nota prin B^A. Vom nota

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid f: I \to \bigcup_{i \in I} A_i \text{ şi } f(i) \in A_i\}.$$

7. Să se determine δ_R, ρ_R, R^{-1}, $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$ pentru relațiile:

a) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathscr{R}$ și $x + y \leqslant 0\}$,

b) $R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in N$ și x divide pe $y\}$.

8. Să se demonstreze că

a) $\delta_R = \emptyset \Leftrightarrow R = \emptyset \Leftrightarrow \rho_R = \emptyset$;

b) $\delta_{R^{-1}} = \rho_R$, $\rho_{R^{-1}} = \delta_R$.

9. Să se demonstreze că

a) dacă $Y \neq \emptyset$, atunci $\delta_{X \times Y} = X$;

b) dacă $X \neq \emptyset$, atunci $\rho_{X \times Y} = Y$.

10. Să se demonstreze că pentru orice relație binară R:

a) $R \cup R = R \cap R = R$;

b) $(R^{-1})^{-1} = R$;

c) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$;

d) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$;

e) $-R^{-1} = (-R)^{-1}$.

11. Pentru ce relații binare este adevărat că

$$R^{-1} = -R?$$

12. Fie X și Y mulțimi finite, alcătuite respectiv din m și n elemente.

a) Cîte relații binare există între elementele mulțimilor X și Y?

b) Cîte funcții există de la X la Y?

c) Cîte funcții injective există de la X la Y?

d) Pentru care m și n există o corespondență biunivocă între X și Y?

13. Să se demonstreze că pentru orice relații binare au loc egalitățile :

a) $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$;

b) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$;

c) $(\bigcup_{i \in I} R_i) \circ Q = \bigcup_{i \in I} (R_i \circ Q)$;

d) $Q \circ (\bigcup_{i \in I} R_i) = \bigcup_{i \in I} (Q \circ R_i)$.

14. Să se determine R_i și Q astfel încît :

a) $Q \circ (\bigcap_{i \in I} R_i) \neq \bigcap_{i \in I} (Q \circ R_i)$;

b) $(\bigcap_{i \in I} R_i) \circ Q \neq \bigcap_{i \in I} (R_i \circ Q)$.

15. Relațiile binare formează grup față de operațiile $\circ$ și $^{-1}$?

16. Să se demonstreze că :

a) dacă $R_1 \subseteq R_2$, atunci $Q \circ R_1 \subseteq Q \circ R_2$;

b) dacă $R_1 \subseteq R_2$, atunci $R_1 \circ Q \subseteq R_2 \circ Q$.

17. Să se demonstreze că :

a) $f \top X = i_X \circ f$;

b) $R \perp Y = (R^{-1} \top Y)^{-1}$.

18. Să se demonstreze că

a) dacă $X, Y \neq \emptyset$; atunci $Y^X \neq \emptyset$;

b) $Y^X \subseteq P(X \times Y)$;

c) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$;

d) $P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} P(A_i)$.

19. Să se stabilească o corespondență biunivocă între A^n și A^I pentru $I = \{1, \ldots, n\}$.

20. Folosind definiția dată, scrieți mulțimea $\mathcal{R}^{(\mathcal{R}^{\mathcal{R}})}$, unde $\mathcal{R}$ este mulțimea numerelor reale.

21. Să se demonstreze că dacă $f : A \to B$ și $g : B \to C$ sînt funcții, atunci $(f \circ g) : A \to C$ este funcție.

22. În ce condiții $f \circ g$ este funcție injectivă?

23. Presupunem că A, B, A_1, B_1 sînt mulțimi astfel încît A se găsește în corespondență biunivocă cu A_1, iar B cu B_1. Să se arate că:

a) se poate stabili o corespondență biunivocă între $A \times B$ și $A_1 \times B_1$;

b) între A^B și $A_1^{B_1}$;

c) dacă $A \cap B \neq \emptyset$ și $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, atunci se poate stabili o corespondență biunivocă între $A \cup B$ și $A_1 \cup B_1$.

24. Să se demonstreze că se poate stabili o corespondență biunivocă între mulțimile:

a) $A \times B$ și $B \times A$;

b) $A \times (B \times C)$ și $(A \times B) \times C$;

c) $(A \times B)^C$ și $A^C \times B^C$;

d) $(A^B)^C$ și $A^{B \times C}$;

e) $A^{B \cup C}$ și $A^B \times A^C$, dacă $B \cap C = \emptyset$.

25. Fie $\varphi : A \to A$ o permutare a mulțimii A. Să se demonstreze că φ^{-1} este o permutare a mulțimii A.

26. Să se demonstreze că mulțimea permutărilor mulțimii A formează un grup față de operația $\circ$.

27. Fie $\varphi : A \to B$ o corespondență biunivocă. Să se demonstreze că

a) φ^{-1} este o corespondență biunivocă între B și A;

b) $\varphi^{-1} \circ \varphi = i_B$;

c) $\varphi \circ \varphi^{-1} = i_A$.

În problemele 28—38 $f: X \to Y$, $A_i \subseteq X$ şi $B_i \subseteq Y$ pentru $i \in I \cup \{1, 2\}$.

28. Să se demonstreze că:

a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

b) $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

29. Să se demonstreze că:

a) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$;

b) $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

şi că incluziunea nu poate fi înlocuită cu egalitatea.

30. Să se demonstreze că

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2),$$

oricare ar fi A_1 şi A_2, dacă şi numai dacă f este o funcţie injectivă.

31. Să se demonstreze că $f(A_1) - f(A_2) \subseteq f(A_1 - A_2)$.

32. Să se demonstreze că dacă în exemplul precedent funcţia f se ia injectivă, atunci are loc egalitatea.

33. Să se demonstreze că dacă $A_1 \subseteq A_2$, atunci $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

34. Să se demonstreze că $f(A_1) = \emptyset \Leftrightarrow A_1 = \emptyset$.

35. Să se demonstreze următoarele identităţi:

a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

b) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;

c) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;

d) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;

e) $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$.

36. Să se demonstreze că dacă $B_1 \subseteq B_2$, atunci $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

37. Să se demonstreze că $f^{-1}(B_1) = \emptyset \Leftrightarrow B_1 \cap f(X) = \emptyset$.

38. Să se demonstreze:

a) $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$;

b) $f(f^{-1}(B_1)) = B_1 \cap f(X)$;

c) $f(A_1) \cap B_1 = f(A_1 \cap f^{-1}(B_1))$;

d) $f(A_1) \cap B_1 = \emptyset \Leftrightarrow A_1 \cap f^{-1}(B_1) = \emptyset$;

e) $f(A_1) \subseteq B_1 \Leftrightarrow A_1 \subseteq f^{-1}(B_1)$.

39. Fie $f: A \to B$. Vom defini $f_*: P(A) \to P(B), f^*: P(B) \to P(A)$ prin $f_*(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ şi $f^*(Y) = \{x \mid f(x) \in Y\}$. În ce condiţii $f^* \circ f_* = i_{P(B)}$? În ce condiţii $f_* \circ f^* = i_{P(A)}$?

40. Cu notaţiile din problema anterioară, să se demonstreze că

a) $f^*(X \cap Y) = f^*(X) \cap f^*(Y)$;

b) $(g \circ f)^*(X) = f^*(g^*(X))$.

41. Pentru orice mulţime A vom nota prin χ_A următoarea funcţie (funcţia caracteristică a mulţimii A):

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin A, \\ 1, & \text{dacă } x \in A. \end{cases}$$

Vom defini funcţia $f: P(U) \to \{0, 1\}^U$ astfel: $f(A) = \chi_A$ oricare ar fi $A \in P(U)$. Să se demonstreze că f este o corespondenţă biunivocă între $P(U)$ şi $\{0, 1\}^U$.

42. Să se demonstreze:

a) $\chi_U(x) = 1$;

b) $\chi_\emptyset(x) = 0$;

c) $\chi_{-A}(x) = 1 - \chi_A(x)$;

d) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$;

e) $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x) - \chi_{A\cap B}(x)$;

f) dacă $A = \bigcup_{i\in I} A_i$, atunci $\chi_A(x) = \max_{i\in I} \chi_{A_i}(x)$;

g) dacă $A = \bigcap_{i\in I} A_i$, atunci $\chi_A(x) = \min_{i\in I} \chi_{A_i}(x)$.

43. Să se demonstreze proprietățile de distributivitate completă:

a) $\bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J} A_{ij} = \bigcap_{f\in J^I} \bigcup_{i\in I} A_{if(i)}$;

b) $\bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J} A_{ij} = \bigcup_{f\in J^I} \bigcap_{i\in I} A_{if(i)}$.

44. Să se demonstreze că $A^I = \prod_{i\in I} A_i$, unde $A_i = A$, oricare ar fi $i \in I$.

45. Fie $A_i \subseteq X_i$. Să se demonstreze că

a) $\prod_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} \prod_{i_1\in I} A_{ii_1}$, unde $A_{ii} = A_i$, $A_{ii_1} = X_{i_1}$ pentru $i \neq i_1$.

b) $\prod_{i\in I} X_i - \prod_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} \prod_{i_1\in I} B_{ii_1}$, unde $B_{ii} = X_i - A_i$; $B_{ii_1} = X_{i_1}$ pentru $i \neq i_1$.

46. Să se demonstreze că

a) $\bigcap_{s\in S} \prod_{t\in T} A_{st} = \prod_{t\in T} \bigcap_{s\in S} A_{st}$;

b) dacă $X_t \cap X_{t'} = \emptyset$ pentru $t \neq t'$, atunci se poate stabili o corespondență biunivocă între

$$Y^{\left(\bigcup_{t\in T} X_t\right)} \text{ și } \prod_{t\in T} Y^{X_t};$$

c) se poate stabili o corespondenţă biunivocă între

$$(\prod_{t\in T} Y_t)^X \text{ şi } \prod_{t\in T} Y_t^X .$$

47. Să se demonstreze că dacă $F_t \neq \emptyset$ oricare ar fi $t \in T$, atunci $\prod_{t\in T} F_t \neq \emptyset$ (una din formulările axiomei alegerii).

48. Să se demonstreze că între $\prod_{t\in T} Y_t$ şi $(\prod_{t_1\in T_1} Y_{t_1}) \times (\prod_{t_2\in T_2} Y_{t_2})$ se poate stabili o corespondenţă biunivocă, dacă $T_1 \cup T_2 = T$ şi $T_1 \cap T_2 = \emptyset$.

1.3. Relaţii binare speciale

Vom considera mai departe relaţiile binare numai între elementele mulţimilor A şi A.

Relaţia binară R o vom numi relaţie de *echivalenţă* pe mulţimea A, dacă:

1) $\langle x, x\rangle \in R$ oricare ar fi $x \in A$ (reflexivitate),

2) dacă $\langle x, y\rangle \in R$, atunci $\langle y, x\rangle \in R$ (simetrie),

3) dacă $\langle x, y\rangle \in R$ şi $\langle y, z\rangle \in R$, atunci $\langle x, z\rangle \in R$ (tranzitivitate).

$[x]_R = \{y \mid \langle x, y\rangle \in R\}$ o vom numi clasa de echivalenţă relativ la R a elementului x.

1. Pe mulţimile N şi $N \times N$ vom defini R_m, Q, S astfel:

a) $\langle a, b\rangle \in R_m \Leftrightarrow a - b$ se divide prin m $(m > 0)$,

b) $\langle\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\rangle \in Q \Leftrightarrow a + d = b + c$,

c) $\langle\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\rangle \in S \Leftrightarrow [(a \cdot d = b \cdot c$ şi $b \neq 0$ şi $d \neq 0)$ sau $(a = c, b = 0, d = 0)]$.

Să se demonstreze că R_m, Q şi S sînt relaţii de echivalenţă.

2. Să se demonstreze că dacă R este relaţie de echivalenţă, atunci:

a) $x \in [x]_R$,

b) $\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow [x]_R = [y]_R$.

3. Să se demonstreze că dacă R este relaţie de echivalenţă, atunci R^{-1} este, de asemenea, relaţie de echivalenţă.

4. Fie $R \subseteq S^2$. Să se demonstreze că R este relaţie de echivalenţă $\Leftrightarrow (R \circ R^{-1}) \cup i_s = R$.

5. Să se demonstreze că dacă R_1 şi R_2 sînt relaţii de echivalenţă pe S, atunci

a) $R_1 \circ R_1 = S^2 \Leftrightarrow R_1 = S^2$.

b) dacă $R_1 \circ R_2 = S^2$, atunci $R_2 \circ R_1 = S^2$.

6. Să se demonstreze că există o corespondenţă biunivocă între clasa tuturor partiţiilor mulţimii A şi familia tuturor relaţiilor de echivalenţă pe A (Familia $\{A_i\}_{i \in I}$ o vom numi partiţie a lui A, dacă

a) $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$;

b) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$.)

7. Să se demonstreze că R este relaţie de echivalenţă pe S, dacă şi numai dacă există un sistem $\mathscr{P}$ de mulţimi disjuncte două cîte două, astfel încît

$$R = \bigcup_{C \in \mathscr{P}} C \times C \text{ şi } \bigcup_{C \in \mathscr{P}} C = S.$$

8. Să se demonstreze că dacă relaţia R pe mulţimea A este simetrică şi tranzitivă şi $\delta_R \cup \rho_R = A$, atunci R este relaţie de echivalenţă pe mulţimea A.

9. Fie $f: A \to B$ o funcţie oarecare. Vom lua

$$Q = \{\langle x, y\rangle \mid f(x) = f(y)\}.$$

Să se demonstreze că Q este relaţie de echivalenţă pe A şi pentru aplicaţia f există descompunerea

$$f = \varepsilon \circ f',$$

unde ε este aplicaţia naturală a lui A pe $A/Q = \{ [x]_Q \mid x \in A\}$, adică $\varepsilon(x) = [x]_Q$, iar f' este o corespondenţă biunivocă între A/Q şi $f(A)$.

10. Să se demonstreze că intersecţia relaţiilor de echivalenţă din orice sistem de relaţii de echivalenţă pe mulţimea A este relaţie de echivalenţă pe A.

11. Să se demonstreze că produsul $R_1 \circ R_2$ a două relaţii de echivalenţă R_1 şi R_2 este relaţie de echivalenţă, dacă şi numai dacă $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

12. Să se demonstreze că dacă R_1 şi R_2 sînt relaţii de echivalenţă şi $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$, atunci $R_1 + R_2 = R_1 \circ R_2$, unde $R_1 + R_2$ este cea mai mică relaţie de echivalenţă care include pe $R_1 \cup R_2$.

13. Să se demonstreze că pentru orice familie de relaţii de echivalenţă $\{R_i\}_{i \in I}$ există o relaţie de echivalenţă Q astfel încît $\bigcup\limits_{i \in I} R_i \subseteq Q$ şi pentru orice relaţie de echivalenţă R, dacă $\bigcup\limits_{i \in I} R_i \subseteq R$, atunci $Q \subseteq R$.

14. Să se demonstreze că

$$p_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, p_i, \qquad (p_0 = 1),$$

unde p_n este numărul relaţiilor de echivalenţă pe o mulţime formată din n elemente.

O relaţie binară R o vom numi relaţie de *ordine parţială* pe mulţimea A, dacă

a) $\langle x, x\rangle \in R$ oricare ar fi $x \in A$ (reflexivitate)

b) dacă $\langle x, y\rangle \in R$ şi $\langle y, x\rangle \in R$, atunci $x = y$ (antisimetrie),

c) dacă $\langle x, y\rangle \in R$ şi $\langle y, z\rangle \in R$, atunci $\langle x, z\rangle \in R$ (tranzitivitate).

O relaţie de ordine parţială R pe mulţimea A o vom numi *totală*, dacă pentru $x \in A$ şi $y \in A$ are loc $\langle x, y\rangle \in R$ sau $\langle y, x\rangle \in R$. Dacă

R este o relaţie de ordine parţială şi $\langle x, y\rangle \in R$, atunci vom scrie $x \leqslant y$. Vom scrie $x < y$, dacă $x \leqslant y$ şi $x \neq y$.

Mulţimea A cu o relaţie de ordine parţială (totală) dată pe ea o vom numi *mulţime parţial* (*total*) *ordonată*, prescurtat m.p.o. (m.t.o.) şi o vom nota prin $\langle A ; \leqslant\rangle$.

Un element $a \in A$ îl vom numi *maximal* (*minimal*), dacă din faptul că $a \leqslant x$, ($x \leqslant a$) rezultă $a = x$. Un element $a \in A$ îl numim *cel mai mare* (*cel mai mic*), dacă $x \leqslant a$, ($a \leqslant x$), oricare ar fi $x \in A$. O submulţime S a mulţimii A o vom numi *lanţ* într-o m.p.o. $\langle A ; \leqslant\rangle$, dacă S este total ordonată de relaţia $\leqslant \cap S^2$. O m.t.o. $\langle A ; \leqslant\rangle$ o vom numi *bine ordonată*, dacă fiecare submulţime nevidă a mulţimii A are cel mai mic element. În acest caz relaţia de ordine $\leqslant$ o vom numi relaţie de *bună ordonare*. Relaţia de ordine R^{-1} o vom numi *duala* relaţiei de ordine parţială R. Fie $f: X \to Y$, X şi Y —m.p.o. Vom spune, că f este o aplicaţie *monotonă*, dacă din $x_1 \leqslant x_2$ urmează $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, oricare ar fi elementele $x_1, x_2 \in X$. Dacă f este corespondenţă biunivocă, iar f şi f^{-1} sînt monotone, atunci f îl numim *izomorfism* al m.p.o. X şi Y, iar X şi Y le numim *izomorfe*.

15. Să se demonstreze că mulţimea tuturor submulţimilor unei mulţimi date A este ordonată parţial de relaţia de incluziune $\subseteq$.

16. Fie $\leqslant$ şi $<$ definite pe mulţimea $N = \{0, 1, \ldots\}$ în mod obişnuit. Să se demonstreze că $< \circ < \neq <$; $\leqslant \circ < = <$; $\leqslant \circ \geqslant = N^2$.

17. Să se demonstreze că i_A este o relaţie de ordine parţială pe A.

18. Fie $a \leqslant b \Leftrightarrow a, b \in N$ şi a divide b. Considerăm, că 0 divide 0. Să se demonstreze că $\leqslant$ este o relaţie de ordine parţială pe N.

19. Să se demonstreze independenţa proprietăţilor de reflexivitate, simetrie, antisimetrie şi tranzitivitate.

20. a) Să se demonstreze că fiecare m.p.o. conţine cel mult un cel mai mare (mic) element.

b) Să se demonstreze că cel mai mare (mic) element al unei m.p.o. este unicul element maximal (minimal).

c) Să se construiască un exemplu de m.p.o. care să aibă numai un element minimal, dar să nu aibă cel mai mic element.

21. Să se demonstreze că dacă R este relaţie de ordine parţială, atunci R^{-1} este relaţie de ordine parţială.

22. Să se arate că dacă $\{R_i\}_{i \in I}$ este sistemul relaţiilor de ordine parţială pe mulţimea A, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ este relaţia de ordine parţială pe mulţimea A.

23. O relație R o vom numi relație de preordine pe A, dacă R este reflexivă și tranzitivă. Să se demonstreze că R este relație de preordine dacă și numai dacă $R = (R \circ R) \cup i_A$.

24. Fie R o relație de preordine pe A. Să punem

$$a \sim b \Leftrightarrow \langle a, b\rangle \in R \text{ și } \langle b, a\rangle \in R.$$

Să se demonstreze că

a) $\sim$ este o relație de echivalență pe A,

b) dacă $a \sim a'$, $b \sim b'$, $\langle a, b\rangle \in R$, atunci $\langle a', b'\rangle \in R$,

c) R_1 este relație de ordine pe $A/\sim$, unde

$$\langle [a], [b]\rangle \in R_1 \Leftrightarrow \langle a, b\rangle \in R.$$

25. Să se demonstreze că dacă R este o relație de ordine parțială (totală, de bună ordonare) pe X și $A \subseteq X$, atunci $R \cap A^2$ este relație de ordine parțială (totală, de bună ordonare) pe A.

26. Fie $\leqslant$ o relație de ordine parțială pe X. Să se demonstreze că $<$ nu este reflexivă ($x \nless x$ oricare ar fi $x \in X$) și este tranzitivă.

27. Să se demonstreze că dacă o anumită relație $<$ pe X nu este reflexivă și este tranzitivă, atunci relația $x \leqslant y \Leftrightarrow x < y$ sau $x = y$ este relație de ordine parțială pe X.

28. Să se demonstreze că dacă $\langle X; \leqslant\rangle$ și $\langle X'; \leqslant'\rangle$ sînt m.p.o. și $f : X \to X'$ este funcție injectivă monotonă, atunci f^{-1} poate să nu fie monotonă.

Să se considere cazul, cînd $\langle X, \leqslant\rangle$ este o m.t.o.

29. Să se arate că orice m.p.o. X este izomorfă cu un anumit sistem de submulțimi ale mulțimii X ordonat cu incluziunea $\subseteq$.

30. Fie R_1 și R_2 relații de ordine totală pe mulținea A. În ce condiții $R_1 \circ R_2$ este relație de ordine totală?

31. Să se demonstreze că orice m.p.o. finită nevidă A conține elementele minimal și maximal.

32. Să se demonstreze că orice mulțime finită poate fi ordonată total.

33. Să se demonstreze că orice relație de ordine parțială R pe mulțimea A poate fi prelungită pînă la o relație de ordine totală Q pe mulțimea A, adică $R \subseteq Q$.

34. Fie $\varphi : X \times X \to X$ şi

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x),$$

$$\varphi(x, \varphi(y, z)) = \varphi(\varphi(x, y), z),$$

$$\varphi(x, x) = x.$$

Definim $x \leqslant y \Leftrightarrow \varphi(x, y) = x$.

Să se demonstreze că:

a) $\leqslant$ este o relaţie de ordine parţială pe X,

b) dacă X are cel mai mic element 0, atunci $\varphi(0, x) = 0$,

c) $\varphi(x, y) \leqslant x$, $\varphi(x, y) \leqslant y$,

d) dacă $z \leqslant x$ şi $z \leqslant y$, atunci $z \leqslant \varphi(x, y)$.

35. Să se demonstreze că orice submulţime a mulţimii $P(A)$, ordonată prin incluziune, are cea mai mică margine superioară şi cea mai mare margine inferioară.

36. Fie A o m.p.o., în care fiecare lanţ are cel mult m elemente, iar orice submulţime de elemente necomparabile două cîte două constă din cel mult n elemente. Să se demonstreze că A are cel mult mn elemente.

37. Fie $\langle A; \leqslant_A \rangle$ şi $\langle B; \leqslant_B \rangle$. O m.p.o. $\langle A \times B; \leqslant \rangle$ o vom numi produsul lor direct dacă $\langle a_1, b_1 \rangle \leqslant \langle a_2, b_2 \rangle \Leftrightarrow a_1 \leqslant_A a_2, b_1 \leqslant_B b_2$ pentru $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$. Să se demonstreze că $\leqslant$ este o relaţie de ordine parţială pe $A \times B$.

38. Fie $\langle X; \leqslant \rangle$ o m.p.o., $a, b \in X$ şi $a \leqslant b$. Mulţimea

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

o vom numi segment. Să se demonstreze că mulţimea tuturor segmentelor unei m.p.o. $\langle X; \leqslant \rangle$ este parţial ordonată de relaţia de incluziune şi este izomorfă unei submulţimi a produsului direct dintre m.p.o. X şi duala ei.

39. M.p.o. $\langle X; \leqslant \rangle$ o vom numi autoduală, dacă ea este izomorfă cu m.p.o., duala sa. Să se demonstreze că:

a) există numai două mulţimi parţial ordonate neizomorfe formate din două elemente, fiecare din aceste mulţimi fiind autoduală.

b) există cinci mulţimi parţial ordonate neizomorfe două cîte două formate din trei elemente, iar trei din aceste mulţimi sînt autoduale.

40. Vom spune că o m.p.o. $\langle A; \leqslant \rangle$ satisface:

1) *condiţia de minimalitate*, dacă orice submulţime nevidă M a mulţimii A are cel puţin un element minimal;

2) *condiţia de rupere a lanţurilor descrescătoare*, dacă orice lanţ strict descrescător în A este finit;

3) *condiţia de inducţie*, dacă pentru orice proprietate T este îndeplinită condiţia: din presupunerea că proprietatea T este adevărată pentru toate elementele care preced strict un element oarecare $a \in A$, rezultă proprietatea T adevărată pentru a; atunci toate elementele mulţimii A se bucură de proprietatea T. Să se demonstreze echivalenţa dintre toate aceste condiţii.

41. Să se arate că o m.p.o. $\langle A; \leqslant \rangle$ satisface condiţia de minimalitate dacă şi numai dacă toate lanţurile ei sînt bine ordonate.

42. Să se scrie toate m.t.o. A, care se bucură de proprietatea că pentru orice $a \leqslant b$ există numai un număr finit de elemente c astfel încît $a \leqslant c \leqslant b$.

43. Fie $\langle M; R \rangle$ şi $\langle M; R^{-1} \rangle$ mulţimi bine ordonate. Să se determine toate astfel de mulţimi M.

44. Mulţimea M o vom numi *latice* (structură), dacă ea este parţial ordonată şi pentru orice pereche de elemente $x, y \in M$ există margine inferioară $x \cap y$ şi margine superioară $x \cup y$. Să se arate că:

a) $x \cup y = y \cup x, \quad x \cap y = y \cap x,$

b) $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z, \qquad x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z,$

c) $(x \cap y) \cup y = y, \quad x \cap (x \cup y) = x.$

45. Presupunem că în mulţimea M sînt date operaţiile binare $\cup$ şi $\cap$ care satisfac identităţile a), b) şi c) din problema precedentă.

a) Să se demonstreze că $x \cup y = y$ pentru $x, y \in M$, dacă şi numai dacă $x \cap y = x$.

b) Definim $x \leqslant y \Leftrightarrow x \cap y = x$. Să se arate că M este latice relativ la $\leqslant$, iar marginea inferioară şi marginea superioară ale elementelor x şi y coincid respectiv cu $x \cap y$ şi $x \cup y$.

46. Mulţimea M cu operaţiile binare $\cup$ şi $\cap$ date pe ea o vom numi *algebră booleană*, dacă:

a) M este latice relativ la $\cup$ şi $\cap$ (satisface identităţile a, b, c din problema 44),

b) $(x \cup y) \cap z = (x \cap z) \cup (y \cap z)$,

c) $(x \cap y) \cup z = (x \cup z) \cap (y \cup z)$,

d) pentru orice $a \in M$ există $b \in M$ astfel încît $(a \cap b) \cup c = c$ şi $(a \cup b) \cap c = c$, oricare ar fi $c \in M$ (un astfel de element b va fi notat prin $\bar{a}$).

Să se demonstreze că în orice algebră booleană:

a) există cel mai mic şi cel mai mare element; le vom nota prin 0 şi 1;

b) pentru orice $a \in M$ există $\bar{a}$ unic;

c) $a \cap \bar{a} = 0$;

d) $a \cup \bar{a} = 1$;

e) $\overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b}$;

f) $\overline{a \cup b} = \bar{a} \cap \bar{b}$;

g) $a \leqslant b \Leftrightarrow a \cap \bar{b} = 0$ (vezi problema 45, b).

47. Să se demonstreze că $P(A)$ pentru orice mulţime A este o algebră booleană relativ la $\cup$, $\cap$.

48*. Să se arate că orice algebră booleană este izomorfă cu o algebră a submulţimilor unei mulţimi convenabil alese (teorema lui Stone).

49*. Să se demonstreze că orice algebră booleană finită este izomorfă cu algebra tuturor submulţimilor unei mulţimi convenabil alese.

1.4. Numere cardinale

Vom spune că mulţimea A este *echivalentă* cu mulţimea B (simbolic $A \sim B$), dacă între elementele lui A şi B se poate stabili o corespondenţă biunivocă.

Vom numi *puterea* mulţimii A clasa tuturor mulţimilor A echivalente cu mulţimea A şi vom nota

$$\bar{\bar{A}} = \{B \mid B \sim A\}.$$

Vom scrie $n = \bar{\bar{A}}$, unde $A_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $n \in N$. Orice mulţime A, echivalentă cu A_n pentru un anumit n, o vom numi *finită*, unde n este numărul elementelor mulţimii A.

Orice mulţime A echivalentă cu mulţimea $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ o vom numi *numărabilă* şi *puterea* ei o vom nota cu $\aleph_0$.

Orice mulţime A, echivalentă cu mulţimea numerelor reale o vom numi *continuum* şi puterea ei va fi notată prin c.

Puterile diferitelor mulţimi vor fi numite *numere cardinale*. Numerele cardinale ale mulţimilor finite le vom numi *finite*, iar ale mulţimilor infinite — *infinite*.

Vom spune, că $\bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{B}}$, dacă $A \sim B_1$, unde B_1 este o submulţime a mulţimii B. Dacă $\bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{B}}$ şi $A \nsim B$, atunci spunem, că $\bar{\bar{A}} < \bar{\bar{B}}$.

1. Să se demonstreze:

a) $A \sim A$,

b) dacă $A \sim B$, atunci $B \sim A$,

c) dacă $A \sim B$ şi $B \sim C$, atunci $A \sim C$.

2. Să se demonstreze că dacă $A \sim B$, atunci $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$.

3*. Fie $A \supseteq A_1 \supseteq A_2$ şi $A \sim A_2$. Să se demonstreze că $A \sim A_1$.

4*. *Teorema Cantor-Bernstein*. Fie $A \sim B_1 \subseteq B$ şi $B \sim A_1 \subseteq A$. Să se demonstreze că $A \sim B$.

5. Să se demonstreze că o mulţime finită nu este echivalentă cu nici o submulţime proprie a sa şi cu nici o supramulţime proprire a sa.

6. Să se demonstreze că două mulţimi finite sînt echivalente dacă şi numai dacă ele conţin acelaşi număr de elemente.

7. Să se demonstreze că o mulţime este infinită, dacă şi numai dacă ea este echivalentă cu o submulţime proprie a sa.

8. Să se demonstreze că din orice mulţime infinită se poate extrage o submulţime numărabilă.

9. Să se demonstreze că orice submulţime a unei mulţimi numărabile este numărabilă sau finită.

10. Să presupunem că domeniul de definiţie al unei funcţii este numărabil. Să se demonstreze că domeniul valorilor acestei funcţii este finit sau numărabil.

11. Să se demonstreze că dacă dintr-o mulţime numărabilă se extrage o mulţime finită, atunci mulţimea rămasă va fi numărabilă.

12. Să se demonstreze că

a) dacă A şi B sînt numărabile, atunci $A \cup B$ este numărabilă,

b) dacă toate A_i sînt finite, nevide şi disjuncte, atunci $\bigcup_{i \in N} A_i$ este numărabilă.

13. Să se demonstreze că

a) dacă A este infinită şi B este o mulţime finită sau numărabilă, atunci $A \cup B \sim A$,

b) dacă A este infinită şi numărabilă, iar B este finită sau numărabilă, atunci $A - B \sim A$.

14. Să se arate că dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt numărabile, atunci $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ este numărabilă.

15. Să se demonstreze că

a) mulţimea numerelor raţionale este numărabilă,

b) mulţimea numerelor raţionale din segmentul $[a, b]$ este numărabilă $(a \neq b)$,

c) mulţimea perechilor $\langle x, y \rangle$, unde x şi y sînt numere raţionale, este numărabilă.

16. Să se demonstreze că mulţimea tuturor submulţimilor unei mulţimi numărabile este numărabilă.

17. Să se demonstreze că mulţimea tuturor şirurilor finite, formate din elementele unei mulţimi numărabile, este o mulţime numărabilă.

18. Să se demonstreze că mulţimea polinoamelor cu coeficienţi întregi este numărabilă.

19. Să se demonstreze numărabilitatea mulţimii numerelor algebrice, adică a numerelor care sînt rădăcini ale polinoamelor cu coeficienţi întregi.

20. Să se demonstreze că mulţimea intervalelor disjuncte de pe axa reală este cel mult numărabilă.

21. Fie A o mulţime numărabilă de puncte pe axă. Se poate alege a astfel ca să avem $\{x + a \mid x \in A\} \cap A = \emptyset$?

22. Să se demonstreze că dacă $A \subseteq \mathscr{R}$ și există $\delta > 0$ astfel încît $|x - y| \geqslant \delta$, oricare ar fi elementele diferite x și y din A, atunci A este finită sau numărabilă.

23. Să se demonstreze că mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții monotone pe axa reală este cel mult numărabilă.

24. Să se demonstreze că

a) $(0, 1) \sim [0, 1] \sim (0, 1] \sim [0, 1)$;

b) $[a, b] \sim [c, d]$, unde $a < b$, $c < d$;

c) $[a, b] \sim \mathscr{R}$.

25. Să se stabilească o corespondență biunivocă între punctele unui segment și punctele unui pătrat.

26. Să se demonstreze că mulțimile punctelor a două circumferințe sînt echivalente.

27. Să se demonstreze că $\mathscr{R}^n \sim \mathscr{R}^m$, $(n, m \geqslant 1)$.

28. Să se stabilească o corespondență biunivocă între punctele unui pătrat și ale unui plan.

29*. Să se demonstreze că mulțimea punctelor din segmentul $[0, 1]$ nu este numărabilă.

30. Să se demonstreze că reuniunea unui număr finit sau a unei mulțimi numărabile de mulțimi de putere c are puterea c.

31. Care este puterea mulțimii numerelor iraționale?

32. Să se demonstreze existența numerelor transcendente (nealgebrice).

33. Să se demonstreze că mulțimea tuturor șirurilor de numere naturale are puterea c.

34. Să se arate că

a) dacă toți A_i sînt continuumuri, atunci $\overline{\overline{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n}} = c$;

b) dacă $\bar{\bar{A}}_i = c$ oricare ar fi i și $\bar{\bar{I}} = \aleph_0$, atunci $\overline{\overline{\prod_{i \in I} A_i}} = c$.

35. Să se demonstreze că mulțimea tuturor șirurilor compuse din 0 și 1 are puterea c.

36. Care este puterea mulțimii:

a) funcțiilor monotone pe axa reală,

b) șirurile de numere reale,

c) funcțiilor continue pe axa reală?

37. Să se demonstreze că :

a) dacă $A = B \cup C$ şi $\bar{\bar{A}} = c$, atunci $\bar{\bar{B}} = c$ sau $C = c$;

b) dacă $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ şi $\bar{\bar{A}} = c$, atunci cel puţin unul din A_n are puterea c.

38*. Să se demonstreze că mulţimea funcţiilor reale definite pe intervalul $[0, 1]$ are puterea mai mare decît c.

39. Care este puterea mulţimii funcţiilor definite pe $[a, b]$ şi discontinue cel puţin într-un punct?

40*. Să se demonstreze că mulţimea $P(A)$ a submulţimilor mulţimii A are puterea mai mare decît a lui A.

1.5. Numere ordinale

Fie A şi B mulţimi total ordonate. Vom numi mulţimea A asemenea cu B (simbolic $A \simeq B$), dacă ele sînt izomorfe ca mulţimi parţial ordonate.

Vom numi *tipul de ordine* al m.t.o. A clasa tuturor m.t.o. asemenea cu A şi vom nota $\bar{A} = \{B \mid B \simeq A\}$.

Vom scrie $n = \bar{A}$, unde $A = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Notăm prin ω, π, η, λ tipurile de ordine ale mulţimilor numerelor naturale, numerelor întregi, numerelor raţionale şi numerelor reale relativ la ordinea lor naturală.

Dacă α este tipul de ordine al mulţimii A, atunci prin α^* notăm tipul de ordine al mulţimii A cu ordinea duală.

Vom numi *tăietură iniţială* extrasă din m.t.o. A de elementul $a \in A$ mulţimea

$$A_a = \{x \mid x \in A,\ x < a\}.$$

Fiind date m.t.o. $\langle L ; \leqslant \rangle$ şi un sistem de m.t.o. disjuncte $\langle A_\lambda ; \leqslant_\lambda \rangle$ $(\lambda \in L)$, vom numi *suma tipurilor de ordine* $\bar{A}_\lambda$ şi vom nota $\sum_{\lambda \in L} \bar{A}_\lambda$ tipul de ordine al m.t.o. $S = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ cu ordinea $\leqslant_s$, definită astfel:

$$x \leqslant_s y \Leftrightarrow (x \in A_{\lambda_1} \text{ şi } y \in A_{\lambda_2} \text{ şi } \lambda_1 < \lambda_2) \text{ sau } (x, y \in A \text{ şi } x \leqslant_\lambda y).$$

Fie α şi β tipurile de ordine ale m.t.o. $\langle A ; \leqslant_A \rangle$ şi $\langle B ; \leqslant_B \rangle$.

Tipul de ordine γ îl vom numi produsul lui α cu β şi-l vom nota prin $\alpha \cdot \beta$, dacă $\gamma = \overline{A \times B}$ şi ordinea totală pe $A \times B$ este definită astfel:

$$\langle x_1, y_1 \rangle \leqslant \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow (y_1 <_B y_2) \text{ sau } (y_1 = y_2 \text{ şi } x_1 \leqslant_A x_2).$$

Vom nota $\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ factori}}$.

1. Să se demonstreze că dacă două mulţimi ordonate sînt asemenea, atunci ele sînt şi echivalente.

2. Să se demonstreze că orice mulţime A, echivalentă cu o mulţime total ordonată B, poate fi ordonată total, astfel încît A să devină asemenea cu B.

3. Să se arate că mulţimea formată din n elemente poate fi ordonată total în $n!$ moduri.

4. Să se demonstreze că toate mulţimile total ordonate finite cu aceeaşi putere sînt asemenea între ele.

5. Să se demonstreze că pentru mulţimi infinite afirmaţia din problema precedentă este falsă.

6. Fie A, B, C mulţimi total ordonate. Să se demonstreze că:

a) $A \simeq A$,

b) dacă $A \simeq B$, atunci $B \simeq A$,

c) dacă $A \simeq B$ şi $B \simeq C$, atunci $A \simeq C$.

7. Să se demonstreze că:

a) dacă $A = B$, atunci $\bar{A} = \bar{B}$, dar reciproca nu este adevărată,

b) dacă $\bar{A} = \bar{B}$, atunci $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$, dar reciproca nu este adevărată.

8. Să se arate că $(\alpha^*)^* = \alpha$ pentru orice tip de ordine α.

9. Să se demonstreze că tipul de ordine al oricărui interval (nu segment) de numere reale este λ.

10. Să se arate că $\pi^* = \pi$.

11. Să se demonstreze că pentru orice mulţime total ordonată A şi a, $a' \in A$:

a) $a \notin A_a$,

b) dacă a este cel mai mic element al lui A, atunci $A_a = \emptyset$,

c) A_a este o mulţime total ordonată,

d) dacă $a < a'$, atunci $(A_{a'})_a = A_a$.

12. Să se arate că mulţimea H a tăieturilor unei mulţimi total ordonate A, ordonată cu relaţia de incluziune, este asemenea cu A.

13. Să se demonstreze că oricare ar fi mulţimea numărabilă total ordonată A, din mulţimea numerelor raţionale Q poate fi extrasă o parte Q_0 asemenea cu mulţimea A.

14. Să se demonstreze corectitudinea definiţiilor sumei şi produsului tipurilor de ordine.

15. Să se demonstreze că $\alpha \cdot \beta = \sum_{\lambda \in L} \bar{A}_\lambda$, unde $\bar{L} = \beta$, $\bar{A}_\lambda = \alpha$.

16. Să se demonstreze că:

a) $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$,

b) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,

c) $2 + 3 = 5$,

d) $1 + \omega = \omega$, dar $\omega + 1 \neq \omega$,

e) $\omega^* + \omega = \pi$,

f) $\eta + \eta = \eta$,

g) $\lambda + 1 + \lambda = \lambda$,

h) $\lambda + \lambda \neq \lambda$,

i) $1 + \lambda + 1$ este tipul de ordine al segmentului $[a, b]$.

17. Să se arate că:

a) $(\alpha+\beta)^* = \beta^* + \alpha^*$,

b) $(\alpha\beta)^* = \alpha^*\beta^*$.

18. Să se demonstreze că:

a) $\alpha\beta \neq \beta\alpha$,

b) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$,

c) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$,

d) $(\alpha+\beta)\gamma \neq \alpha\gamma + \beta\gamma$,

e) $\eta^2 = \eta$,

f) $(\omega\eta)^2 = (\omega\eta + \omega)^2$,

g) $\omega\eta \neq \omega\eta + \omega$.

19. Să se construiască mulțimile cu tipurile de ordine ω^2, ω^3, ω^4, ...

20. Să se demonstreze că

a) orice mulțime total ordonată finită este bine ordonată,

b) $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ este bine ordonată,

c) $M = \{0, 2, 4, \ldots, 1, 3, 5, \ldots\}$ este bine ordonată,

d) $L = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ nu este bine ordonată.

21. Să se demonstreze că orice mulțime nevidă bine ordonată are cel mai mic element.

22. Să se demonstreze că dacă $A \simeq B$ și A este bine ordonată, atunci B este bine ordonată.

23. Să se arate că pentru fiecare element al unei mulțimi A bine ordonate, cu excepția celui mai mare, există un element imediat următor.

24. Se poate extrage dintr-o mulţime bine ordonată un lanţ descrescător infinit de elemente $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$?

25. Fie A o mulţime bine ordonată şi $B \subseteq A$. Să se demonstreze că nu există nici o corespondenţă biunivocă $f : A \to B$, încît pentru un anumit element $a \in A$ să avem $f(a) < a$.

26. Să se demonstreze că o mulţime bine ordonată nu poate fi asemenea cu o tăietură a sa sau cu o parte a unei tăieturi ale sale.

27. Să se demonstreze că două tăieturi diferite ale unei mulţimi bine ordonate nu pot fi asemenea.

28. Să se demonstreze că nu există mai mult de un izomorfism între două mulţimi bine ordonate.

29*. Să se demonstreze că din două mulţimi bine ordonate una este asemenea cu cealaltă sau cu o tăietură a acesteia.

30. Să se arate că o m.t.o. este finită, dacă şi numai dacă ea este bine ordonată relativ atît la ordinea dată cît şi la ordinea duală.

31. Fie A o mulţime bine ordonată şi $B \subseteq A$, şi pentru orice element $x \in A$ mulţimea B îndeplineşte condiţia: dacă $A_x \subseteq B$, atunci $x \in B$, rezultă $B = A$ (principiul inducţiei transfinite).

Tipurile de ordine ale mulţimilor bine ordonate vor fi numite numere *ordinale* sau *de ordine*. Dacă α şi β sînt numere ordinale, vom spune că $\alpha < \beta$, dacă orice mulţime A cu tipul de ordine α este izomorfă cu o tăietură iniţială a mulţimii B cu tipul de ordine β.

32. Fie α, β două numere ordinale arbitrare. Să se demonstreze că:

a) $\alpha < \beta$ sau $\beta < \alpha$ sau $\beta = \alpha$,

b) din condiţiile date mai sus pentru α şi β numai una este îndeplinită.

33. Să se demonstreze că orice mulţime de numere ordinale este bine ordonată.

34. Fie $W_\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$, unde α şi β sînt numere ordinale. Să se arate că $\overline{W}_\alpha = \alpha$.

35. Să se demonstreze că pentru fiecare mulţime de numere ordinale S există un număr ordinal, mai mare decît toate numerele din S.

36. Să se demonstreze că $\alpha + 1$ este numărul ordinal imediat următor lui α.

37. Fie Ω clasa tuturor numerelor ordinale. Să se demonstreze că pentru orice $\alpha \in \Omega$ are loc una şi numai una dintre afirmaţii:

a) $\alpha = 0$,

b) $\{\beta \mid \beta \in \Omega \text{ şi } \beta < \alpha\}$ are element maximal,

c) $\alpha \neq 0$ şi $\alpha = \sup\{\beta \mid \beta < \alpha, \beta \in \Omega\}$ (un astfel de α se numeşte *limită*).

38. Să se demonstreze că orice număr ordinal se reprezintă sub forma $\lambda + n$, unde λ este număr limită sau egal cu 0.

39. Să se demonstreze că:

a) suma a două numere ordinale este număr ordinal,

b) produsul a două numere ordinale este un număr ordinal,

c) suma ordonată a numerelor ordinale, unde mulţimea de indexare este bine ordonată, este număr ordinal.

40. Să se demonstreze că

a) dacă $\alpha < \beta$, atunci $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$,

b) dacă $\alpha \leqslant \beta$, atunci $\alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$,

c) $\beta + \gamma \geqslant \gamma$,

d) dacă $\alpha \geqslant \beta$, atunci există numai un număr ordinal astfel încît $\alpha = \beta + \gamma$; îl vom numi pe γ diferenţa dintre α şi β şi îl vom nota prin $\alpha - \beta$,

e) dacă $\alpha > \alpha_1 \geqslant \beta$, atunci $\alpha - \beta > \alpha_1 - \beta$,

f) dacă $\alpha \geqslant \beta_1 \geqslant \beta_2$, atunci $\alpha - \beta_1 \leqslant \alpha - \beta_2$,

g) dacă $\alpha < \beta$, atunci $\gamma\alpha < \gamma\beta$, pentru $\gamma \neq 0$,

h) dacă $\alpha \leqslant \beta$, atunci $\alpha\gamma \leqslant \beta\gamma$,

i) dacă $\beta \geqslant \gamma$, atunci $\alpha(\beta - \gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$,

j) dacă $\beta > 0$, atunci pentru orice α există γ şi ρ, astfel încît $\alpha = \beta\gamma + \rho$, $\rho < \beta$ şi γ, β sînt unic determinate,

k) dacă $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha + \beta$ şi $\beta_1 > \beta$, atunci $\alpha_1 < \alpha$.

41. Fie proprietatea P astfel încît, pentru orice număr ordinal λ, din faptul că toate numerele ordinale $\mu < \lambda$ se bucură de proprietatea P, urmează că λ se bucură de proprietatea P. Să se demonstreze că toate numerele ordinale se bucură de proprietatea P (*principiul inducţiei transfinite pentru numere ordinale*).

42. Definim:

$$\gamma^0 = 1,$$

$$\gamma^{\xi+1} = \gamma^{\xi} \cdot \gamma,$$

$$\gamma^{\lambda} = \sum_{\xi<\lambda} \gamma^{\xi} \text{ pentru } \lambda \text{ limită.}$$

a) Să se construiască mulţimea cu tipul de ordine ω^{ω}.

b) Să se demonstreze că dacă $\alpha < \beta$, atunci $\gamma^{\alpha} < \gamma^{\beta}$ pentru $\gamma \neq 0$,

c) Să se demonstreze că $\gamma^{\xi+\eta} = \gamma^{\xi} \cdot \gamma^{\eta}$.

d) Să se arate că dacă $\omega^{\xi} = \alpha + \beta$ şi $\beta \neq 0$, atunci $\beta = \omega^{\xi}$.

43*. Să se demonstreze echivalenţa dintre următoarele afirmaţii.

1. *Lema lui Zorn.* O mulţime parţial ordonată, în care fiecare submulţime total ordonată are o margine superioară, conţine elementul maximal.

2. *Lema lui Kuratowski.* Orice lanţ al unei mulţimi parţial ordonate face parte dintr-un lanţ maximal.

3. *Axioma alegerii.* Fie X_a o mulţime nevidă pentru fiecare $a \in A$. Atunci există o funcţie de alegere $f : A \to \bigcup\limits_{a \in A} X_a$ astfel încît $f(a) \in X_a$ pentru orice $a \in A$.

4. *Axioma lui Zermelo.* Pentru fiecare familie $\mathfrak{A}$ de mulţimi nevide disjuncte există o mulţime C, astfel încît $A \cap C$ pentru fiecare $A \in \mathfrak{A}$ este alcătuită numai dintr-un punct.

5. *Principiul bunei ordonări.* Fiecare mulţime poate fi bine ordonată.

44. Fie E o m.p.o., în care fiecare lanţ are o margine superioară, şi $a \in E$. Să se demonstreze că există un element maximal $m \in E$, astfel încît $m \geqslant a$.

45. Fie $\mathfrak{F}$ mulţimea submulţimilor mulţimii E astfel încît pentru fiecare lanţ C (ordonat după incluziune) reuniunea mulţimilor din C face parte din $\mathfrak{F}$. Să se demonstreze atunci că $\mathfrak{F}$ are un element maximal.

1.6. Operaţii cu numere cardinale

Numărul cardinal $\mathfrak{m}$ îl vom numi suma numerelor cardinale $\mathfrak{n}_1$ şi $\mathfrak{n}_2$ şi-l vom nota prin $\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$, dacă fiecare mulţime de putere $\mathfrak{m}$ este echivalentă cu reuniunea a două mulţimi disjuncte de puteri $\mathfrak{n}_1$ şi $\mathfrak{n}_2$. În mod analog, numărul cardinal $\mathfrak{m}$ îl vom numi *suma numerelor cardinale* $\mathfrak{n}_i$, $(i \in I)$, şi îl vom nota cu $\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{n}_i$, dacă fiecare mulţime de putere $\mathfrak{m}$ este echivalentă cu $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, unde $\bar{\bar{A}}_i = \mathfrak{n}_i$ şi toate mulţimile A_i sînt două cîte două disjuncte.

Numărul cardinal $\mathfrak{m}$ îl vom numi *produsul numerelor cardinale* $\mathfrak{n}_1$ şi $\mathfrak{n}_2$ şi-l vom nota prin $\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2$, dacă fiecare mulţime de putere

$\mathfrak{m}$ este echivalentă cu $A \times B$, unde A şi B au puterile $\mathfrak{n}_1$ şi $\mathfrak{n}_2$. Analog, numărul cardinal $\mathfrak{m}$ îl vom numi *produsul numerelor cardinale* $\mathfrak{n}_i$, $(i \in I)$, şi îl vom nota cu $\mathfrak{m} = \prod\limits_{i \in I} \mathfrak{n}_i$, dacă fiecare mulţime de putere $\mathfrak{m}$ este echivalentă cu $\prod\limits_{i \in I} A_i$, unde $\overline{\overline{A}}_i = \mathfrak{n}_i$.

Numărul cardinal $\mathfrak{m}$ îl vom numi ridicarea lui $\mathfrak{n}_1$ la puterea $\mathfrak{n}_2$ pentru numerele cardinale $\mathfrak{n}_1$ şi $\mathfrak{n}_2$ şi-l vom nota prin $\mathfrak{n}_1^{\mathfrak{n}_2}$, dacă fiecare mulţime de putere $\mathfrak{m}$ este echivalentă cu A^B, unde A şi B au puterile $\mathfrak{n}_1$ şi $\mathfrak{n}_2$.

1. Să se demonstreze că pentru puterile arbitrare α şi β se îndeplineşte una şi numai una din relaţiile $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$ sau $\beta < \alpha$.

2. Să se demonstreze că numerele cardinale sînt ordonate cu relaţia $\leqslant$.

3. Să se arate că printre numerele cardinale nu există unul cel mai mare.

4. Să se demonstreze că

a) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$,

b) $\aleph_0 + c = c$.

c) pentru orice mulţimi A_1 şi A_2 există mulţimile B_1 şi B_2, astfel încît $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$ şi $B_1 \cap B_2 = \emptyset$,

d) există totdeauna suma a două numere cardinale.

5. Să se demonstreze că pentru numere cardinale arbitrare:

a) $\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_1$,

b) $\mathfrak{n}_1 + (\mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_3) = (\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2) + \mathfrak{n}_3$.

6. Fie A, B, C mulţimi finite. Să se demonstreze că:

a) $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{A \cap B}}$,

b) $\overline{\overline{A \cup B \cup C}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}} - \overline{\overline{A \cap B}} - \overline{\overline{A \cap C}} - \overline{\overline{B \cap C}} +$

$+ \overline{\overline{A \cap B \cap C}}$.

7. Să se demonstreze că

a) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$,

b) $\aleph_0 \cdot c = c$,

c) $\aleph_0 \cdot \alpha = \alpha$ pentru orice număr cardinal infinit α,

d) dacă $A \sim B$ şi $C \sim D$, atunci $A \times C \sim B \times D$,

e) produsul a două numere cardinale există totdeauna.

8. Să se demonstreze că pentru numere cardinale arbitrare

a) $\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_2 \cdot \mathfrak{n}_1$,

b) $\mathfrak{n}_1 \cdot (\mathfrak{n}_2 \cdot \mathfrak{n}_3) = (\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2) \cdot \mathfrak{n}_3$,

c) $\mathfrak{n}_1 \cdot (\mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_3) = (\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2) + (\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_3)$,

d) $\mathfrak{n}_1 \cdot 1 = \mathfrak{n}_1$.

9. Să se demonstreze că $\alpha^2 = \alpha$, dacă α este un număr cardinal infinit.

10. Să se arate că dacă α şi β sînt numere cardinale şi unul din ele este infinit, atunci $\alpha \cdot \beta = \alpha + \beta = \max(\alpha, \beta)$, dacă $\alpha \neq 0$ şi $\beta \neq 0$.

11. Să se demonstreze:

a) $2^{\aleph_0} = c$,

b) $\aleph_0^{\aleph_0} = c$,

c) $c^{\aleph_0} = c$.

12. Să se demonstreze că pentru două numere cardinale α şi β totdeauna există α^β.

13. Să se demonstreze că pentru numere cardinale arbitrare:

a) $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{n}^{\mathfrak{q}}$,

b) $(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p})^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{q}} \cdot \mathfrak{p}^{\mathfrak{q}}$,

c) $(\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}})^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$,

d) $\mathfrak{n}^1 = \mathfrak{n}$,

e) $1^{\mathfrak{n}} = 1$.

14. Să se demonstreze că $\overline{\overline{P(A)}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$.

15. Să se demonstreze că pentru numere cardinale arbitrare:

a) dacă $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ şi $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{p}$, atunci $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{p}$,

b) dacă $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, atunci $\mathfrak{m} + \mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{n} + \mathfrak{p}$,

c) dacă $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, atunci $\mathfrak{m}\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{n}\mathfrak{p}$,

d) dacă $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, atunci $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$,

e) dacă $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, atunci $\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}} \leqslant \mathfrak{p}^{\mathfrak{n}}$,

f) $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$ dacă şi numai dacă $\aleph_0 \cdot \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$,

g) dacă $\mathfrak{n} + \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ şi $\mathfrak{n}_1 \geqslant \mathfrak{n}$, atunci $\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{m} = \mathfrak{n}_1$,

h) $\mathfrak{n} + \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ dacă şi numai dacă $\mathfrak{n} + k\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ $(k \in N)$,

i) $\mathfrak{n} + \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, dacă şi numai dacă $\mathfrak{n} + \aleph_0 \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$,

j) $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$.

16. Să se demonstreze că pentru numere cardinale arbitrare:

a) dacă $2^{\mathfrak{m}} \geqslant \aleph_0$, atunci $2^{\mathfrak{m}} \geqslant 2^{\aleph_0}$,

b) dacă $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \aleph_0$, atunci $\mathfrak{m} = \aleph_0$, cînd $\mathfrak{n}$ este finit.

17. Să se demonstreze că dacă X este infinit, atunci $2^X \sim X^X$.

18. Să se demonstreze că pentru numere cardinale arbitrare:

a) dacă $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$, atunci $2^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{n}}$,

b) dacă $1 < \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$, atunci $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{n}}$.

19. Să se demonstreze că pentru numere cardinale arbitrare:

a) $\mathfrak{m} + 0 = \mathfrak{m} \cdot 1 = \mathfrak{m}$,

b) dacă $\overline{\overline{I}} = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}_i = \mathfrak{n}$ oricare ar fi $i \in I$, atunci $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} = \sum_{i \in I} \mathfrak{n}_i$,

c) dacă $\mathfrak{m} + 1 = \mathfrak{n} + 1$, atunci $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$,

d) dacă $2\mathfrak{n}_1 = 2\mathfrak{n}_2$, atunci $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2$.

20. Să se demonstreze că dacă $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$ este un număr cardinal şi α este un număr ordinal, astfel încît fiecare mulţime cu tipul de ordine α are puterea $\leqslant 1$, atunci pentru un şir dat A_ξ, $(\xi < \alpha)$, unde $\overline{\overline{A}}_\xi = \mathfrak{n}$, se poate construi un şir B_ξ $(\xi < \alpha)$ astfel încît $\bigcup_\xi A_\xi = \bigcup_\xi B_\xi$, $\overline{\overline{B}}_\xi = \mathfrak{n}$ şi $B_{\xi_1} \cap B_{\xi_2} = \emptyset$, dacă $\xi_1 \neq \xi_2$ şi $B_\xi \subseteq A_\xi$.

21. Fie $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$, $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ familia numerelor care nu sînt mai mari ca $\mathfrak{n}$, $\overline{\overline{I}} \leqslant \mathfrak{n}$. Să se demonstreze că $\sum_{i \in I} \alpha_i \leqslant \mathfrak{n}$.

22. Fie α şi β numere cardinale, $\overline{\overline{I}} = \beta$ şi $\alpha_i = \alpha$ pentru fiecare $i \in I$. Să se demonstreze că $\alpha^\beta = \prod_{i \in I} \alpha_i$.

Capitolul 2

LOGICĂ MATEMATICĂ

2.1. Calculul propozițiilor

Vom considera alfabetul $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, unde

$\gamma_1 = \{A, B, C, \ldots, A_0, A_1, \ldots\}$ sînt variabile propoziționale,

$\gamma_2 = \{\supset, \wedge, \vee, \neg\}$ sînt simboluri logice (conective)

$\gamma_3 = \{(\ ,\ )\}$ sînt simboluri auxiliare.

Definiția *expresiei* :

1) variabila propozițională este expresie,

2) dacă $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$ sînt expresii, atunci $\neg\mathfrak{A}$, $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$ sînt expresii,

3) nu există alte expresii, în afara celor indicate la punctele 1 și 2.

1. Să se determine care dintre următoarele cuvinte sînt expresii :

a) $(A \wedge B)\, C \neg\, D$,

b) $(A \wedge B) \supset C$,

c) $((A \supset B) \wedge \neg\, C)$,

d) $(((\neg A) \supset B) \supset \neg(C \vee D))$.

2. În cîte moduri pot fi puse parantezele între termenii cuvintelor:

a) $A \supset \neg B \vee C \wedge D$,

b) $A \supset B \supset C \supset \neg A \supset \neg B$,

ca să obținem expresii?

3. Să se scrie toate subexpresiile expresiilor:

a) $(((A \supset B) \wedge (B \supset C)) \supset (\neg A \vee C))$,

b) $((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg B))$.

4. Să se demonstreze că orice expresie $\mathfrak{C}$, care nu este variabilă propozițională, poate fi reprezentată în mod unic într-una din următoarele forme: $\neg\, \mathfrak{A}$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ cu anumite expresii $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$.

5. Să se demonstreze că rezultatul substituirii expresiei $\mathfrak{C}$ în expresia $\mathfrak{A}$ în locul subexpresiei $\mathfrak{B}$ este tot o expresie.

Să considerăm calculul propozițiilor. Axiomele calculului propozițiilor sînt următoarele expresii:

1. $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}))$,

2. $((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C})))$,

3. $((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A})$,

4. $((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B})$,

5. $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})))$,

6. $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}))$,

7. $(\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}))$,

8. $((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C})))$,

9. $((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{A} \supset \neg \mathfrak{B}) \supset \neg \mathfrak{A}))$,

10. $(\neg\neg \mathfrak{A} \supset \mathfrak{A})$,

unde $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sînt orice expresii.

Calculul propozițiilor are următoarea regulă de deducție (*modus ponens*):

$$\frac{\mathfrak{A}, (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})}{\mathfrak{B}};$$

$\mathfrak{B}$ se numește *consecință imediată* a expresiilor $\mathfrak{A}$ și $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$.

Deducție în calculul propozițiilor se numește o înșiruire finită de expresii $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$, astfel încît pentru fiecare i, $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $\mathfrak{A}_i$ este fie axiomă fie consecință imediată a expresiilor anterioare.

Deducție din mulțimea de expresii Γ este o înșiruire $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ astfel încît pentru fiecare i, $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $\mathfrak{A}_i$ este fie axiomă, fie una din expresiile din Γ, fie consecință imediată a expresiilor anterioare.

Vom scrie $\vdash \mathfrak{A}$ $(\Gamma \vdash \mathfrak{A})$, dacă există o deducție (deducție din Γ), care se termină cu expresia $\mathfrak{A}$.

Mulțimea de expresii Γ o numim *contradictorie*, dacă există o expresie $\mathfrak{A}$ astfel încît $\Gamma \vdash \mathfrak{A}$ și $\Gamma \vdash \neg \mathfrak{A}$; *necontradictorie* în caz contrar.

6. Sînt deducții următoarele înșiruiri de expresii:

a) $(A \supset (A \vee B))$;

b) $(A \supset (A \vee B))$, $((A \supset (A \vee B)) \supset (B \supset (A \supset (A \vee B))))$, $(B \supset (A \supset (A \vee B)))$;

c) $(A \supset (B \supset A))$, $((A \supset (B \supset A)) \supset B)$, B?

7. Să se arate că următoarele expresii sînt deductibile:

a) $(A \supset A)$,

b) $((A \vee A) \supset A)$,

c) $((A \supset \neg A) \supset \neg A)$.

8. Să se demonstreze următoarea regulă de substituție: dacă expresia $\mathfrak{A}$ este deductibilă, atunci $S^A_{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}$ este de asemenea deductibilă, unde $S^A_{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}$ este substituția expresiei $\mathfrak{B}$ în locul variabilei A peste tot unde aceasta apare în expresia $\mathfrak{A}$.

9. Din care ipoteze Γ este deducție fiecare dintre următoarele înșiruiri de expresii?

a) $(A \supset (B \supset C))$, A, $(B \supset C)$, B, C,

b) $(A \supset (A \supset (A \wedge A)))$, A, $(A \supset (A \wedge A))$, $(A \wedge A)$.

10. Să se demonstreze următoarele reguli de deducție:

a) $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A}$,

b) $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}, \Gamma \vdash \mathfrak{A}}$,

c) $\dfrac{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}, \Gamma \vdash \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}, \Gamma \vdash \mathfrak{A}}$,

d) $\dfrac{\Gamma_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Gamma_2 \vdash \mathfrak{C}}{\Gamma_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \Gamma_2 \vdash \mathfrak{C}}$,

e) $\dfrac{\Gamma_1 \vdash \mathfrak{A};\ \mathfrak{A}, \Gamma_2 \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \mathfrak{B}}$,

f) $\dfrac{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k \vdash \mathfrak{B}}{S_{\mathfrak{C}}^{A} \mathfrak{A}_1, \ldots, S_{\mathfrak{C}}^{A} \mathfrak{A}_k \vdash S_{\mathfrak{C}}^{A} \mathfrak{B}}$.

(Aici Γ_1, Γ_2, Γ sînt mulțimi arbitrare de expresii).

11. Să se demonstreze teorema deducției:

$$\frac{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}.$$

12. Să se demonstreze următoarele reguli de deducție:

a) $\Gamma, \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vdash (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$ (introducerea lui $\wedge$),

b) $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$ (introducerea lui $\vee$),

c) $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A})$ (introducerea lui $\vee$),

d) $\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B};\ \Gamma, \mathfrak{A} \vdash \neg \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash \neg \mathfrak{A}}$ (introducerea lui $\neg$),

e) $\Gamma, (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \vdash \mathfrak{A}$ (eliminarea lui $\wedge$),

f) $\Gamma, (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \vdash \mathfrak{B}$ (eliminarea lui $\wedge$),

g) $\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C};\ \Gamma, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}}{\Gamma, (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vdash \mathfrak{C}}$ (eliminarea lui $\vee$),

h) $\Gamma, \neg \neg \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A}$ (eliminarea lui $\neg$).

13. Să se demonstreze că Γ este necontradictorie, dacă şi numai dacă există o expresie, care nu este deductibilă din Γ.

14. Să se demonstreze următoarele reguli :

a) $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}), (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \vdash (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C})$,

b) $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})) \vdash (\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))$,

c) $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})) \vdash ((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C})$,

d) $((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C}) \vdash (\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}))$,

e) $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \vdash ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))$,

f) $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \vdash ((\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}))$,

g) $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \vdash ((\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{B}))$,

h) $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \vdash ((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}))$,

i) $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \vdash ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}))$,

j) $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \vdash ((\mathfrak{C} \vee \mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}))$,

k) $\neg \mathfrak{A} \vdash (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$,

l) $\mathfrak{A} \vdash (\neg \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$,

m) $\mathfrak{B} \vdash (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$,

n) $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \vdash (\neg \mathfrak{B} \supset \neg \mathfrak{A})$,

o) $(\mathfrak{A} \supset \neg \mathfrak{B}) \vdash (\mathfrak{B} \supset \neg \mathfrak{A})$,

p) $(\neg \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \vdash (\neg \mathfrak{B} \supset \mathfrak{A})$,

r) $(\neg \mathfrak{A} \supset \neg \mathfrak{B}) \vdash (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A})$.

15. Considerînd $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}) = ((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}))$, să se demonstreze următoarele reguli :

a) $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}), (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}) \vdash (\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B})$,

b) $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}) \vdash (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$,

c) $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B})) \vdash (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A})$,

d) $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}), (\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B})$,

e) $\vdash (\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A})$,

f) $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}) \vdash (\neg \mathfrak{A} \equiv \neg \mathfrak{B})$,

g) $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}) \vdash (\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A})$,

h) $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}), (\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}) \vdash (\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{C})$,

i) $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}) \vdash ((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \equiv (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}))$,

j) $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}) \vdash ((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C}) \equiv (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}))$,

k) $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}) \vdash ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{C}) \equiv (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}))$,

l) $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}) \vdash ((\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \equiv (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}))$.

16. Să se demonstreze *teorema substituției.* Dacă $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ și $\mathfrak{C}$ sînt expresii și $\mathfrak{D}$ este o subexpresie a expresiei $\mathfrak{C}$, atunci $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}) \vdash$ $\vdash (\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{D}} \equiv \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{D}})$, unde $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{D}}$ este rezultatul înlocuirii cu expresia $\mathfrak{A}$ a subexpresiei $\mathfrak{D}$ în expresia $\mathfrak{C}$.

17. Să se demonstreze următoarele reguli:

a) $\vdash (((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \wedge \mathfrak{C}) \equiv (\mathfrak{A} \wedge (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C})))$,

b) $\vdash (((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{C}) \equiv (\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})))$,

c) $\vdash ((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \equiv (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{A}))$,

d) $\vdash ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \equiv (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}))$,

e) $\vdash ((\mathfrak{A} \wedge (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})) \equiv ((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \vee (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C})))$,

f) $\vdash ((\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C})) \equiv ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{C})))$,

g) $\vdash ((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A})$,

h) $\vdash ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A})$,

i) $\vdash ((\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})) \equiv \mathfrak{A})$,

j) $\vdash ((\mathfrak{A} \wedge (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})) \equiv \mathfrak{A})$,

k) $\vdash (\neg\neg \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A})$,

l) $\vdash \neg(\mathfrak{A} \wedge \neg \mathfrak{A})$,

m) $\vdash (\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A})$,

n) $\vdash((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \equiv \neg(\neg\mathfrak{A} \wedge \neg\mathfrak{B}))$,

o) $\vdash((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \equiv \neg(\neg\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{B}))$,

p) $\vdash((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \equiv \neg(\mathfrak{A} \wedge \neg\mathfrak{B}))$,

r) $\vdash((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \equiv (\neg\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}))$,

s) $\vdash((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \equiv \neg(\mathfrak{A} \supset \neg\mathfrak{B}))$,

t) $\vdash((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \equiv (\neg\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}))$,

u) $\vdash(\neg(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \equiv (\neg\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{B}))$,

v) $\vdash(\neg(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \equiv (\neg\mathfrak{A} \wedge \neg\mathfrak{B}))$,

w) $\vdash(\mathfrak{A} \equiv \neg\neg\mathfrak{A})$,

x) $\vdash(\neg\neg\neg\mathfrak{A} \equiv \neg\mathfrak{A})$.

Vom considera calculul secvențial. *Axiomele* și *regulile de deducție* ale acestui calcul sînt următoarele:

1. $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A}$,

2. $\dfrac{\Gamma_1 \vdash \mathfrak{A};\ \Gamma_2 \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})}$,

3. $\dfrac{\Gamma \vdash (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})}{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}$,

4. $\dfrac{\Gamma \vdash (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})}{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}$,

5. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}{\Gamma \vdash (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})}$,

6. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})}$,

7. $\dfrac{\Gamma_1 \vdash (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B});\ \Gamma_2, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C};\ \Gamma_3, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \mathfrak{C}}$,

8. $\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma \vdash (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})}$,

9. $\dfrac{\Gamma_1 \vdash (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B});\ \Gamma_2 \vdash \mathfrak{A}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \mathfrak{B}}$,

10. $\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \vdash}{\Gamma \vdash \neg\mathfrak{A}}$,

11. $\dfrac{\Gamma_1 \vdash \mathfrak{A};\ \Gamma_2 \vdash \neg\mathfrak{A}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash}$,

12. $\dfrac{\Gamma, \neg\mathfrak{A} \vdash}{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}$,

13. $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}$,

14. $\dfrac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}}{\Gamma, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A}}$,

15. $\dfrac{\Gamma_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Gamma_2 \vdash}{\Gamma_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \Gamma_2 \vdash}$,

16. $\dfrac{\Gamma_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \Gamma_2 \vdash}{\Gamma_1, \mathfrak{A}, \Gamma_2 \vdash}$,

unde $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sînt expresii arbitrare, Γ, Γ_1, Γ_2, Γ_3 sînt mulțimi de expresii.

Deducție în calculul secvențial este o înșiruire finită de secvențe $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k$, astfel încît pentru fiecare i, $(1 \leqslant i \leqslant k)$, Σ_i este fie axiomă, fie consecință imediată după regulile 2—16 ale secvențelor anterioare.

18. Să se deducă secvențele:

a) $\vdash (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A})$,

b) $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}), (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}), \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C}$,

c) $\vdash (\neg\neg\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A})$,

d) $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})), (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}), \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C}$,

e) $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}), \neg\mathfrak{B} \vdash \neg\mathfrak{A}$,

f) $\mathfrak{A}, \neg\mathfrak{B} \vdash \neg(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$.

19. Să se demonstreze regula de substituție:

dacă $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k \vdash \mathfrak{B}$, atunci $S^p_{\mathfrak{G}}\mathfrak{A}_1, \ldots, S^p_{\mathfrak{G}}\mathfrak{A}_k \vdash S^p_{\mathfrak{G}}\mathfrak{B}$.

20. Să se demonstreze secvența (teorema substituției):

$$(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}) \vdash (\mathfrak{C}^{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{A}} \equiv \mathfrak{C}^{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{B}}) \text{ (vezi problema 16).}$$

21. Deduceți următoarele secvențe:

a) $\vdash (\neg(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \equiv (\neg\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{B}))$,

b) $\vdash (\neg(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \equiv (\neg\mathfrak{A} \wedge \neg\mathfrak{B}))$,

c) $\vdash ((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \equiv (\neg\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}))$,

d) $\vdash (\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A})$,

e) $\vdash ((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \vee (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}))$,

f) $(\mathfrak{A} \wedge (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})) \vdash ((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \vee (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C}))$,

g) $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \vdash (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{A})$,

h) $(\mathfrak{A} \wedge (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C})) \vdash ((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \wedge \mathfrak{C})$,

i) $((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \wedge \mathfrak{C}) \vdash (\mathfrak{A} \wedge (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}))$,

j) $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vdash (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A})$,

k) $(\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})) \vdash ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{C})$,

l) $((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{C}) \vdash (\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}))$.

22. Să se demonstreze că:

a) din demonstrabilitatea secvențelor $\Gamma \vdash \mathfrak{A}$; $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ urmează demonstrabilitatea secvenței $\Gamma \vdash \mathfrak{B}$;

b) din demonstrabilitatea secvențelor $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C}$; $\Gamma, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$ urmează demonstrabilitatea secvenței $\Gamma, (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vdash \mathfrak{C}$;

c) din demonstrabilitatea secvențelor $\Gamma_1 \vdash (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$; $\Gamma_2 \vdash (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})$ urmează demonstrabilitatea secvenței $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C})$.

23. Să se demonstreze că dacă expresia $\mathfrak{A}$ este demonstrabilă în calculul propozițional, atunci secvența $\vdash \mathfrak{A}$ este demonstrabilă în calculul secvențial.

24*. Să se demonstreze că:

a) dacă secvența $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k \vdash \mathfrak{B}$ este demonstrabilă în calculul secvențial, atunci regula $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k \vdash \mathfrak{B}$ este demonstrabilă în calculul propozițional;

b) dacă secvența $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k \vdash \mathfrak{B}$ este demonstrabilă în calculul secvențial, atunci regula $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k \vdash (\mathfrak{B} \wedge \neg \mathfrak{B})$ este demonstrabilă în calculul propozițional;

c) dacă secvența $\vdash \mathfrak{B}$ este demonstrabilă în calculul secvențial, atunci expresia $\mathfrak{B}$ este deductibilă în calculul propozițional.

25*. Să se demonstreze teorema de interpolare: dacă secvența $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ este demonstrabilă, iar secvențele $\mathfrak{A} \vdash$ și $\vdash \mathfrak{B}$ sînt nedemonstrabile, atunci există o expresie $\mathfrak{C}$, toate variabilele căreia intră atît în $\mathfrak{A}$ cît și în $\mathfrak{B}$, astfel încît secvențele $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{C}$ și $\mathfrak{C} \vdash \mathfrak{B}$ sînt demonstrabile.

26. Să se construiască pentru secvențele

a) $\neg(\neg B \vee C) \vdash (A \supset B)$,

b) $\neg(A \supset \neg(B \wedge D)) \vdash ((D \supset (A \supset C)) \supset C)$

expresii $\mathfrak{C}$, a căror existență este afirmată în problema anterioară.

27. Fie $\mathcal{C}$ calculul propozițiilor cu axiomele:

$\mathcal{C}_1$ $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}))$,

$\mathcal{C}_2$ $((\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})) \supset ((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C})))$,

$\mathcal{C}_3$ $((\neg \mathfrak{A} \supset \neg \mathfrak{B}) \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}))$.

şi regula de deducţie

$$\frac{\mathfrak{A}, (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})}{\mathfrak{B}}.$$

Vom pune prin definiţie

$$(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) = \neg(\mathfrak{A} \supset \neg \mathfrak{B}), \quad (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) = (\neg \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}).$$

Să se demonstreze că calculul $\mathfrak{C}$ este echivalent cu calculul propoziţiilor definit după problema 5 din §2.1.

2.2. Algebra propoziţiilor

Vom interpreta simbolurile logice ca funcţii definite pe mulţimea $\{a, f\}$, cu valori în $\{a, f\}$, cu ajutorul următoarelor tabele:

Negaţia

	$\neg$
a	f
f	a

Conjuncţia

$\wedge$	a	f
a	a	f
f	f	f

Disjuncţia

$\vee$	a	f
a	a	a
f	a	f

Implicaţia

$\supset$	a	f
a	a	f
f	a	a

Atunci fiecare expresie va fi interpretată ca o funcţie a algebrei logicii, adică drept o funcţie definită pe mulţimea $\{a, f\}$, cu valori în $\{a, f\}$, obţinută din $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, după regulile de construcţie a expresiei date. Această funcţie poate fi dată sub forma unui tabel pe care îl vom numi *tabel de adevăr* al expresiei date. Două expresii $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$, care depind de aceleaşi variabile, le vom numi *echivalente* şi vom scrie $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, dacă aceste expresii au tabele de adevăr identice. Numim expresie *realizabilă* (*nerealizabilă*), dacă există un astfel de sistem de valori ale variabilelor, pentru care expresia dată capătă valoarea a (f); *identic adevărată* (*identic falsă*), dacă expresia capătă valoarea a (f) pentru toate sistemele de valori ale variabilelor.

În problemele 19–32 se utilizează definiţiile din cartea: Iablonski, S. V., Gavrilov, G. P., Kudreavţev, V. B. *Funcţiile algebrei logicii şi clasele lui Post*. Moscova, 1966.

1. Să se construiască tabelele de adevăr pentru expresiile:

a) $((P \supset Q) \vee (P \supset (Q \wedge P)))$,

b) $(\neg (P \supset \neg (Q \wedge P)) \supset (P \vee R))$,

c) $((P \wedge (Q \supset P)) \supset \neg P)$,

d) $(((P \wedge \neg Q) \supset Q) \supset (P \supset Q))$,

e) $((P \supset (Q \supset R)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset R)))$,

f) $((P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \supset P) \vee Q))$.

2. Să se demonstreze realizabilitatea expresiilor:

a) $\neg(P \supset \neg P)$,

b) $((P \supset Q) \supset (Q \supset P))$,

c) $((Q \supset (P \wedge R)) \wedge \neg((P \vee R) \supset Q))$.

3. Să se demonstreze că următoarele expresii sînt identic adevărate:

a) $((P \supset Q) \vee (Q \supset P))$,

b) $((P \supset Q) \vee (P \supset \neg Q))$,

c) $(P \supset (Q \supset (P \wedge Q)))$,

d) $((P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R)))$,

e) $((\neg P \supset \neg Q) \supset (Q \supset P))$,

f) $(P \supset (Q \supset P))$.

4. Pentru ce valori ale variabilelor X, Y, Z, U, V, W următoarele expresii sînt false?

a) $(((X \supset (Y \wedge Z)) \supset (\neg Y \supset \neg X)) \supset \neg Y)$,

b) $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \vee (U \wedge V) \vee (U \wedge W) \vee (W \wedge V) \vee$
$\vee (\neg X \wedge \neg U)$,

c) $(((X \vee Y) \vee Z) \supset ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z))$,

d) $(((X \vee Y) \wedge ((Y \vee Z) \wedge (Z \vee X))) \supset ((X \wedge Y) \wedge Z))$,

e) $((X \vee Y) \supset ((\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y)))$.

5. Să se demonstreze că dacă expresiile $\mathfrak{A}$ și $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ sînt identic adevărate, atunci $\mathfrak{B}$ este identic adevărată.

6. Să se demonstreze că dacă expresia $\mathfrak{A}$ este identic adevărată, iar expresia $\mathfrak{B}$ se obține din expresia $\mathfrak{A}$ prin înlocuirea expresiei $\mathfrak{C}$ în locul variabilei P peste tot unde ea apare, atunci expresia $\mathfrak{B}$ este identic adevărată.

7. Să se demonstreze că dacă expresiile $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C})$, $(\mathfrak{B} \supset \mathfrak{D})$ sînt identic adevărate, atunci expresia $(\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D})$ este identic adevărată.

8. Să se demonstreze că dacă expresiile $(\neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\neg \mathfrak{C} \vee \neg \mathfrak{B})$ sînt identic adevărate, atunci expresia $(\mathfrak{A} \supset \neg \mathfrak{C})$ este identic adevărată.

9. Să se demonstreze că:

a) $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}$,

b) $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}$,

c) $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ și $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{A} \sim \mathfrak{C}$.

10. Să se demonstreze că din $\mathfrak{A}_1 \sim \mathfrak{A}_2$ și $\mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}_2$ rezultă:

a) $\neg \mathfrak{A}_1 \sim \neg \mathfrak{A}_2$,

b) $(\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{B}_1) \sim (\mathfrak{A}_2 \wedge \mathfrak{B}_2)$,

c) $(\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{B}_1) \sim (\mathfrak{A}_2 \vee \mathfrak{B}_2)$,

d) $(\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{B}_1) \sim (\mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{B}_2)$.

11. Să se demonstreze că dacă $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, atunci $S^A_{\mathfrak{C}}\, \mathfrak{A} \sim S^A_{\mathfrak{C}}\mathfrak{B}$, unde $S^A_{\mathfrak{C}}\, \mathfrak{X}$ este rezultatul substituției expresiei $\mathfrak{C}$ în expresia $\mathfrak{X}$ în locul variabilei A peste tot unde ea apare.

12. Să se demonstreze că dacă $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C}$, atunci $\mathfrak{A}^{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{B}} \sim \mathfrak{A}$, unde $\mathfrak{A}^{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{B}}$ este rezultatul înlocuirii subexpresiei $\mathfrak{C}$, acolo unde ea se află în expresia $\mathfrak{A}$, cu expresia $\mathfrak{B}$.

13. Să se demonstreze echivalențele:

a) $(A \wedge A) \sim A$,

b) $(A \wedge B) \sim (B \wedge A)$,

c) $(A \wedge (B \vee C)) \sim ((A \wedge B) \wedge C)$,

d) $(A \wedge (B \vee C)) \sim ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$,

e) $(A \wedge (B \vee A)) \sim A$,

f) $(A \vee A) \sim A$,

g) $(A \vee B) \sim (B \vee A)$,

h) $(A \vee (B \vee C)) \sim ((A \vee B) \vee C)$,

i) $(A \vee (B \wedge C)) \sim ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$,

j) $(A \vee (B \wedge A)) \sim A$.

14. Să se demonstreze echivalențele :

a) $\neg\neg A \sim A$,

b) $(A \supset B) \sim (\neg A \vee B)$,

c) $\neg (A \wedge B) \sim (\neg A \vee \neg B)$,

d) $\neg(A \supset B) \sim (A \wedge \neg B)$,

e) $\neg (A \vee B) \sim (\neg A \wedge \neg B)$,

f) $(A \wedge (B \vee \neg B)) \sim A$,

g) $(A \vee (B \wedge \neg B)) \sim A$,

h) $(A \supset \neg A) \sim \neg A$,

i) $((A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee D) \wedge (C \vee D)) \sim ((A \wedge D) \vee (B \wedge C))$,

j) $(A \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C)) \sim ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$,

k) $(((A \vee B) \wedge (B \vee C)) \wedge (C \vee A)) \sim (((A \wedge B) \vee (B \wedge C)) \vee (C \wedge A))$,

l) $((A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee D)) \sim ((A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge D))$,

m) $((A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C \vee D) \wedge (C \vee D \vee A)) \sim$

$\sim ((A \wedge B) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge D) \vee C)$,

n) $((A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) \sim A$,

o) $((A \wedge B) \vee ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B))) \sim (A \vee B)$,

p) $(A \vee (\neg A \wedge B)) \sim (A \vee B)$.

15. Să se demonstreze că pentru fiecare expresie există o expresie echivalentă ei cu negații restrînse, adică o expresie, în care nu există simbolul $\supset$, iar negațiile se aplică numai variabilelor propoziționale.

16. Fie $\mathfrak{A}$ o formulă cu negații restrînse, iar $\mathfrak{A}'$ se obține din $\mathfrak{A}$ prin înlocuirea lui $\wedge$ cu $\vee$, $\vee$ cu $\wedge$ și a variabilelor A_i cu $\neg A_i$. Să se demonstreze că $\mathfrak{A}' \sim \neg \mathfrak{A}$.

17. Fie $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$ expresii cu negații restrînse și $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$ expresii duale respectiv lui $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}^*$ se obține din $\mathfrak{A}$ prin înlocuirea lui $\wedge$ cu $\vee$, $\vee$ cu $\wedge$). Să se demonstreze că din $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ rezultă $\mathfrak{A}^* \sim \mathfrak{B}^*$ (legea dualității).

18. Fie $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}) = ((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}))$. Să se demonstreze că:

a) $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}) \sim (\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B})$,

b) $(\mathfrak{A} \equiv (\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C})) \sim ((\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}) \equiv \mathfrak{C})$.

19. Să se demonstreze că următoarele sisteme de funcții sînt complete:

a) $\{\wedge, \neg\}$,

b) $\{\vee, \neg\}$,

c) $\{\supset, \neg\}$.

20. Să se demonstreze că următoarele sisteme de funcții nu sînt complete:

a) $\{\wedge, \vee, \supset\}$,

b) $\{\neg\}$.

21. Să se demonstreze că următoarele sisteme de funcții sînt complete:

a) $\{\mid\}$ (Aici $(A \mid B) = (\neg A \wedge \neg B)$, funcția $\mid$ se numește hașura lui Sheffer).

b) $\{\downarrow\}$ (Aici $(A \downarrow B) \sim (\neg A \vee \neg B)$).

c) $\{\supset, f\}$ (Aici f este o expresie identic falsă arbitrară).

d) $\{\oplus, \wedge\}$ (Aici $(A \oplus B) \sim \neg(A \equiv B)$),

e) $\{\oplus, \vee\}$.

22. Să se arate că următoarele sisteme de funcții sînt independente :

a) $\{\neg, \equiv\}$,

b) $\{\neg, \oplus\}$,

c) $\{\equiv, \oplus\}$,

d) $\{\equiv, \vee\}$.

23. Să se arate că următoarele sisteme de funcții sînt complete și independente :

a) $\{\supset, \not\subset\}$

b) $\{a, f, [\cdot, \cdot, \cdot]\}$,

c) $\{\equiv, \vee, f\}$,

unde $(A \not\subset B) \sim \neg(B \supset A)$, $[A, B, C] \sim ((B \wedge A) \vee (\neg B \wedge C))$, a sînt expresii identic adevărate.

24. Arătați că $\equiv$, $\oplus$ nu alcătuiesc un sistem complet de funcții. Găsiți toate mijloacele posibile de a face acest sistem sistem complet independent de funcții prin adăugarea a cel mult a funcțiilor de două variabile.

25. Să se demonstreze că :

a) funcțiile $\wedge$ și $\vee$ sînt monoton crescătoare,

b) funcția $\neg$ este monoton descrescătoare,

c) funcția $\supset$ este monoton crescătoare după primul argument și monoton descrescătoare după al doilea argument. (Considerăm, că f este mai mic decît a).

26. Ce sistem format dintr-o funcție de două variabile este complet? Să se determine toate aceste funcții.

27. Să se dea un exemplu de sistem complet de funcții :

a) format dintr-o funcție de trei variabile,

b) format dintr-o funcție de n variabile ($n \geqslant 2$).

28. Să se demonstreze că funcțiile care reproduc pe a formează o clasă precompletă.

29. Să se demonstreze că funcțiile care reproduc pe f formează o clasă precompletă.

30. Să se demonstreze că următoarele funcţii formează clase precomplete :

a) funcţiile autoduale,
b) funcţiile monotone,
c) funcţiile liniare.

31*. Să se demonstreze că nu există clase precomplete diferite de cele menţionate în problemele 28—30 (teorema lui E. Post).

32*. Să se demonstreze că orice bază a oricărei clase închise conţine cel mult patru funcţii (teorema lui S. V. Iablonski).

33. Să se scrie toate funcţiile algebrei logicii, care depind de două variabile. Să se exprime aceste funcţii cu ajutorul lui $\wedge$, $\vee$ şi $\neg$.

34. Cîte funcţii ale algebrei logicii depind de n variabile?

35. Pentru un sistem de valori ale variabilelor, folosind numai $\wedge$ ($\vee$) să se construiască o expresie din variabile şi negaţiile lor, adevărată (falsă) numai pentru acest sistem de valori ale variabilelor. [Vom numi o astfel de expresie *conjuncţie* (*disjuncţie*) *elementară*, corespunzătoare sistemului dat de valori ale variabilelor].

36. Să se demonstreze că orice expresie $\mathfrak{A}$ este echivalentă cu o disjuncţie de conjuncţii elementare, corespunzătoare acelor sisteme de valori ale variabilelor, pentru care expresia dată este adevărată.

37. Să se demonstreze că orice expresie $\mathfrak{A}$ este echivalentă cu o conjuncţie de disjuncţii elementare, corespunzătoare acelor sisteme de valori ale variabilelor pentru care expresia dată este falsă.

38. Să se construiască o expresie $\mathfrak{A}$ astfel încît expresiile :

a) $(((\mathfrak{A} \wedge Q) \supset \neg P) \supset ((P \supset \neg Q) \supset \mathfrak{A}))$,

b) $(((R \supset (\neg Q \wedge P)) \supset \mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{A} \wedge (P \supset Q) \wedge R))$

să fie identic adevărate.

39. Să se construiască o expresie de trei variabile care este adevărată, dacă şi numai dacă numai două variabile sînt false.

40. Să se construiască o expresie de trei variabile, care ia aceleaşi valori ca şi majoritatea (minoritatea) variabilelor.

41. Să se demonstreze că pentru fiecare expresie există echivalentă cu ea :

a) o formă normală conjunctivă (f.n.c.), adică o conjuncţie de anumite disjuncţii elementare,

b) o formă normală disjunctivă (f.n.d.), adică o disjuncţie de anumite conjuncţii elementare.

42. Să se aducă la forma normală disjunctivă şi conjunctivă:

a) $(((A \supset B) \supset (C \supset \neg A)) \supset (\neg B \supset \neg C))$,

b) $(((((A \supset B) \supset \neg A) \supset \neg B) \supset \neg C) \supset C)$,

c) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset \neg C) \supset (A \supset \neg B)))$.

43. Să se aducă la forma normală disjunctivă completă, adică la f.n.d., în care toate conjuncţiile elementare depind de fiecare variabilă care face parte din expresia dată:

a) $((\neg A \supset \neg B) \supset ((B \wedge C) \supset (A \wedge C)))$,

b) $(((A \supset B) \supset \neg A) \supset (A \supset (B \wedge A)))$,

c) $(\neg ((A \wedge B) \supset \neg A) \wedge \neg ((A \wedge B) \supset \neg B))$.

44. Să se aducă la forma normală conjunctivă completă, adică la f.n.c., în care toate disjuncţiile elementare depind de fiecare variabilă care face parte din expresia dată:

a) $((C \supset A) \supset (\neg (B \vee C) \supset A))$,

b) $(\neg ((A \wedge B) \supset A) \vee (A \wedge (B \vee C)))$,

c) $(\neg (A \wedge (B \vee C)) \supset \neg ((A \wedge B) \vee C))$.

45. Să se demonstreze că pentru fiecare expresie realizabilă există o formă normală disjunctivă completă (f.n.d.c.), echivalentă cu ea.

46. Să se demonstreze că pentru fiecare expresie nerealizabilă există o formă normală conjunctivă completă (f.n.c.c.), echivalentă cu ea.

47. Să se demonstreze că o expresie de n variabile este o expresie identic adevărată (identic falsă), dacă şi numai dacă f.n.d.c. (f.n.c.c.) a ei conţine 2^n conjuncţii (disjuncţii) elementare.

48. Să se demonstreze că expresia $\mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_m)$ este echivalentă cu expresia

$$\Big(\bigvee_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k} ((X_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge X_k^{\sigma_k}) \wedge \mathfrak{A}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, X_{k+1}, \ldots, X_m))\Big)$$

(descompunerea expresiei după k variabile). Aici

$$\sigma_i \in \{a, f\}, \quad X^a = X, \quad X^f = \neg X.$$

49. Fie expresia $\mathfrak{A}$ scrisă în f.n.d.c. Construim formula $\mathfrak{B}$ în modul următor:

1) scriem conjuncţia termenilor disjunctivi, care nu intră în $\mathfrak{A}$,
2) înlocuim $\wedge$ cu $\vee$, $\vee$ cu $\wedge$, A_i cu $\neg A_i$, $\neg A_i$ cu A_i.

Să se demonstreze că formula $\mathfrak{B}$ este f.n.c.c. a expresiei $\mathfrak{A}$.

50. Să se demonstreze că expresia $\mathfrak{A}$ de variabile $P_1, \ldots, P_k$ este echivalentă cu o expresie, care conţine numai $\wedge$, $\vee$, $\supset$, dacă şi numai dacă în f.n.c.c. a ei lipseşte termenul

$$\neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_k.$$

51. Fie o expresie $\mathfrak{A}$ care nu conţine alte conective în afară de $\equiv$ (vezi problema 18). Să se demonstreze că $\mathfrak{A}$ este identic adevărată, dacă şi numai dacă fiecare variabilă face parte din $\mathfrak{A}$ de un număr par de ori.

52. Fie o expresie $\mathfrak{A}$ care nu conţine alte conective în afară de $\equiv$ şi $\neg$. Să se demonstreze că $\mathfrak{A}$ este identic adevărată, dacă şi numai dacă fiecare variabilă şi semnul de negaţie face parte din $\mathfrak{A}$ de un număr par de ori.

53. Avînd f.n.c.c. a expresiei $\mathfrak{A}$, să se alcătuiască:

a) f.n.d.c. a lui $\mathfrak{A}^*$, unde $\mathfrak{A}^*$ este duala lui $\mathfrak{A}$ (vezi problema 17),
b) f.n.c.c. a expresiei $\neg\mathfrak{A}$,
c) f.n.d.c. a expresiei $\neg\mathfrak{A}$.

54. Avînd f.n.d.c. a expresiei $\neg\mathfrak{A}$ şi f.n.c.c. a lui $\mathfrak{B}$, să se alcătuiască:

a) f.n.c.c. şi f.n.d.c. ale expresiei $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$,
b) f.n.c.c. şi f.n.d.c. ale expresiei $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$,
c) f.n.c.c. şi f.n.d.c. ale expresiei $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$.

55. Din contactele A, B, C să se alcătuiască o schemă astfel încît ea să fie închisă, dacă şi numai dacă este închisă orice pereche din cele trei contacte A, B, C.

56. Să se alcătuiască schemele cu relee şi contacte pentru expresiile:

a) $((X \supset Y) \wedge (Y \supset Z))$,

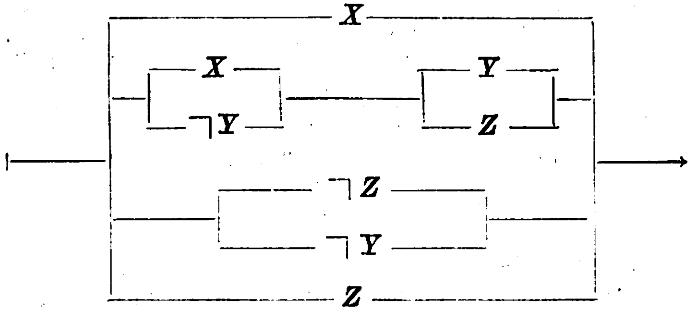
b) $(((X \supset Y) \wedge (Y \supset Z)) \supset (X \supset Z))$,

c) $((X \supset Y) \supset (\neg X \wedge (Y \vee Z)))$,

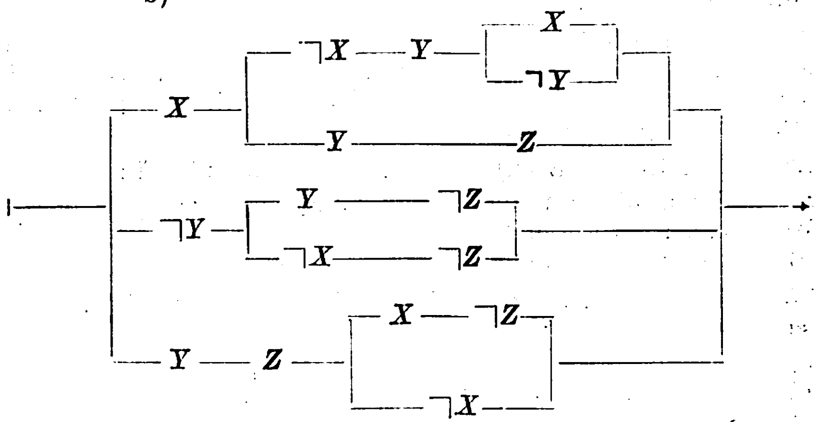
d) $((X \supset (Y \supset Z)) \supset (Y \supset \neg X))$.

57. Să se simplifice schemele

a)



b)



Fie $\mathfrak{A}$ o expresie, din algebra propozițiilor, de variabile $A_1, A_2, \ldots, A_k$, în scrierea căreia întîlnim numai conectivele $\wedge$, $\vee$ și $\neg$.

Vom nota cu $\mathfrak{A}^{\in}(x)$ o expresie din teoria mulțimilor, obținută din $\mathfrak{A}$ prin substituirea expresiilor $x \in Z_1, \ldots, x \in Z_k$ respectiv în locul variabilelor $A_1, \ldots, A_k$.

Vom nota cu $Z_{\mathfrak{A}}$ expresia care se obține din expresia $\mathfrak{A}$ prin înlocuirea variabilelor A_i cu simbolurile Z_i, și a simbolurilor $\wedge$, $\vee$, $\neg$ respectiv cu simbolurile $\cap$, $\cup$, $-$.

58. Să se demonstreze că

a) $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})^{\in}(x) \sim (\mathfrak{A}^{\in}(x) \vee \mathfrak{B}^{\in}(x))$,

b) $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})^{\in}(x) \sim (\mathfrak{A}^{\in}(x) \wedge \mathfrak{B}^{\in}(x))$,

c) $(\neg \mathfrak{A})^{\in}(x) \sim \neg \mathfrak{A}^{\in}(x)$.

59. Să se demonstreze că:

a) $Z_{\neg \mathfrak{A}} = -Z_{\mathfrak{A}}$, unde $-Z_{\mathfrak{A}} = E - Z_{\mathfrak{A}}$, iar E este mulţimea totală,

b) $Z_{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} = Z_{\mathfrak{A}} \cup Z_{\mathfrak{B}}$,

c) $Z_{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}} = Z_{\mathfrak{A}} \cap Z_{\mathfrak{B}}$.

60. Să se demonstreze că în teoria mulţimilor $\mathfrak{A}^{\in}(x) \Leftrightarrow x \in Z$.

61. Să se demonstreze că:

a) dacă $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ sînt logic echivalente, atunci $Z_{\mathfrak{A}} = Z_{\mathfrak{B}}$,

b) dacă $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ este identic adevărată, atunci $Z_{\mathfrak{A}} \subseteq Z_{\mathfrak{B}}$,

c) dacă $\mathfrak{A}$ este identic adevărată, atunci $Z_{\mathfrak{A}} = E$,

d) dacă $\mathfrak{A}$ este identic falsă, atunci $Z_{\mathfrak{A}} = \emptyset$.

62. Să se demonstreze că dacă $Z_{\mathfrak{A}} = E$ pentru mulţimi arbitrare $Z_1, \ldots, Z_k \subseteq E$, atunci $\mathfrak{A}$ este identic adevărată.

63. În baza căror echivalenţe ale algebrei propoziţiilor se pot obţine următoarele teoreme ale teoriei mulţimilor:

a) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$,

b) $X \cap Y = Y \cap X$,

c) $-(X \cap Y) = -X \cup -Y$,

d) $--X = X$?

64. Care teoreme din teoria mulţimilor se pot obţine din următoarele formule identic adevărate şi echivalenţe ale algebrei propoziţiilor:

a) $((A \wedge (\neg A \vee B)) \supset B)$,

b) $(A \wedge (A \vee B)) \sim A$,

c) $(A \vee \neg A)$,

d) $((A \wedge B) \supset (A \vee B))$,

e) $(A \wedge B) \sim (B \wedge A)$,

f) $A \sim (A \wedge (B \vee \neg B))$,

g) $\neg(A \wedge B) \sim (\neg A \vee \neg B)$,

h) $((A \wedge B) \vee A) \sim A$?

65. Să se demonstreze că:
a) toate axiomele din calculul propozițiilor sînt identic adevărate,
b) toate formulele demonstrabile în calculul propozițiilor sînt identic adevărate.

66*. Să se demonstreze teorema de completitudine: orice expresie identic adevărată este demonstrabilă în calculul propozițiilor.

67. Sînt demonstrabile în calculul propozițiilor următoarele expresii și reguli:

a) $((A \vee B) \supset (A \wedge B))$,

b) $(((A \supset B) \supset B) \supset A)$,

c) $(((A \supset B) \supset B) \supset B)$,

d) $(\neg (A \vee \neg A) \supset (A \vee \neg A))$,

e) $A \vdash \neg(A \supset \neg A)$;

f) $(A \supset B) \vdash (B \supset A)$?

68. Să se determine astfel de expresii $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$, ca din demonstrabilitatea lui $\mathfrak{A}$ să rezulte demonstrabilitatea lui $\mathfrak{B}$, însă să avem $\mathfrak{A} \nvdash \mathfrak{B}$.

69. Să se demonstreze că dacă expresia $\mathfrak{A}$, toate variabilele căreia sînt $P_1, \ldots, P_n$, nu este demonstrabilă în calculul propozițiilor, atunci există expresii $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ astfel încît

$$\vdash S^{P_1, \ldots, P_n}_{\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n} \neg \mathfrak{A}.$$

70*. Să se demonstreze independența axiomelor calculului propozițiilor.

71*. Să se demonstreze independența axiomelor calculului $\mathfrak{C}$ (vezi § 2.1, problema 27).

2.3. Limbajul calculului restrîns al predicatelor (c.r.p.)

Vom considera alfabetul $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \gamma_5$, unde:

$\gamma_1 = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$ — variabile obiect,

$\gamma_2 = \{P^{n_\alpha}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — simboluri predicative, formula signaturii $\sigma_M = \sigma \cup M$ fără variabile legate. *Valoarea adevărată* a propoziției $\mathfrak{A}$ în $\mathfrak{M}$ o definim prin inducție: $\mathfrak{M} \models \mathfrak{A}$ va însemna că $\mathfrak{A}$ este adevărată în $\mathfrak{M}$:

a) $\mathfrak{M} \models P_i^{n_i}(t_1, \ldots, t_{n_i})$ (aici $t_1, \ldots, t_{n_i}$ sînt termenii signaturii σ_M fără variabile libere), dacă și numai dacă $P_i^{n_i}(t_1, \ldots, t_{n_i})$ este adevărată în $\mathfrak{M}$;

b) $\mathfrak{M} \models (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$ dacă și numai dacă $\mathfrak{M} \models \mathfrak{A}$ și $\mathfrak{M} \models \mathfrak{B}$;

c) $\mathfrak{M} \models (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$ dacă și numai dacă $\mathfrak{M} \models \mathfrak{A}$ sau $\mathfrak{M} \models \mathfrak{B}$;

d) $\mathfrak{M} \models (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ dacă și numai dacă $\mathfrak{M} \not\models \mathfrak{A}$ sau $\mathfrak{M} \models \mathfrak{B}$;

e) $\mathfrak{M} \models \neg \mathfrak{A}$ dacă și numai dacă $\mathfrak{M} \not\models \mathfrak{A}$;

f) $\mathfrak{M} \models (\forall x)\mathfrak{A}(x)$ dacă și numai dacă $\mathfrak{M} \models \mathfrak{A}(m)$, oricare ar fi $m \in M$;

g) $\mathfrak{M} \models (\exists x)\mathfrak{A}(x)$ dacă și numai dacă $\mathfrak{M} \models \mathfrak{A}(m)$ pentru un anumit $m \in M$.

Formula signaturii σ, $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k)$, ale cărei variabile $x_1, \ldots, x_k$ sînt toate libere, o vom numi *adevărată* în $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma \rangle$ respectiv pentru valorile variabilelor $m_1, \ldots, m_k$, dacă propoziția $\mathfrak{A}(m_1, \ldots, m_k)$ este adevărată în $\mathfrak{M}$. În caz contrar, $\mathfrak{A}$ este considerată *falsă* în $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma \rangle$.

1. Fie f^1, g^2, h^3 simboluri funcționale respectiv de o variabilă, de două variabile și de trei variabile. Sînt termeni următoarele cuvinte?

a) $f^1(g^2(x, y))$,

b) $g^2(f^1(z), h^3(x, y, z))$,

c) $f^1(g^2(x), h^3(x, y, z))$.

2. Fie f^1, g^2, h^3 aceleași ca în problema anterioară și P^1, Q^3 simboluri predicative respectiv de o variabilă și de trei variabile. Sînt formule următoarele cuvinte?

a) $Q^3(x, f^1(x), h^3(y, z, z))$,

b) $(P^1(x) \supset (\forall y)(Q^3(x, y, z) \wedge P^1(g^2(x, y))))$,

c) $Q^3(P^1(x), f^1(y), z)$,

d) $f^1(h^3(x, y, z))$.

$\gamma_3 = \{f_\beta^{n_\beta}\}_{\beta \in B}$ — simboluri funcţionale,

$\gamma_4 = \{\supset, \wedge, \vee, \neg, \forall, \exists\}$ — simboluri logice,

$\gamma_5 = \{, , (,)\}$ — simboluri auxiliare,

$\sigma = \gamma_2 \cup \gamma_3$ îl numim *signatură.* În cele ce urmează vom fixa o signatură. Vom da definiţia *termenilor* signaturii σ.

1. Variabila obiect este termen.

2. Dacă f^n este simbol funcţional de n variabile din σ şi $t_1, \ldots, t_n$ sînt termeni, atunci $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ este termen.

3. Nu există nici un termen, în afară de cei construiţi la punctele 1, 2.

Vom numi *formulă atomică* a signaturii σ orice cuvînt $P^n(t_1, \ldots, t_n)$, unde P^n este simbol predicativ de n variabile din σ, iar $t_1, \ldots, t_n$ sînt termenii signaturii σ. Vom da definiţia *formulei* signaturii σ:

1. Formula atomică este formulă.

2. Dacă $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ sînt formule, atunci $\neg\mathfrak{A}$, $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ sînt formule.

3. Dacă $\mathfrak{A}$ este formulă, atunci $(\forall x)\mathfrak{A}$, $(\exists x)\mathfrak{A}$ sînt formule. (În acest caz $\mathfrak{A}$ se numeşte *domeniul de acţiune* al cuantificatorului $(\forall x)$ respectiv al lui $(\exists x)$).

4. Nu există nici o altă formulă, în afară de cele construite la punctele 1—3.

Variabila x care intră într-o formulă se numeşte *legată,* dacă ea se găseşte în domeniul de acţiune al cuantificatorului $(\forall x)$ sau $(\exists x)$, şi *liberă* în caz contrar. Subcuvîntul unei formule, care el însuşi este o formulă, se numeşte *subformulă.* Dacă $\mathfrak{A}(x)$ este o formulă cu o variabilă liberă x, atunci cu $\mathfrak{A}(y)$ vom nota formula obţinută din $\mathfrak{A}(x)$ prin substituirea cu y a variabilei libere x peste tot unde ea apare.

Vom numi *sistem algebric* $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma\rangle$ al signaturii

$$\sigma = \langle\{P_i\}_{i \in I}, \{f_j\}_{j \in J}, \{a_k\}_{k \in K}\rangle,$$

mulţimea nevidă M cu predicatele P_i, date pe ea, cu funcţiile f_j şi elementele a_k puse în evidenţă în σ. Dacă $\sigma \subseteq \sigma'$, atunci $\mathfrak{M}_1 = \langle M; \sigma\rangle$ o vom numi *restricţia* lui $\mathfrak{M}_2 = \langle M; \sigma'\rangle$, iar $\mathfrak{M}_2$ *extensia* lui $\mathfrak{M}_1$. Dacă $M \subseteq M'$, atunci $\mathfrak{M}_1 = \langle M; \sigma\rangle$ îl numim *subsistem* al lui $\mathfrak{M}_2 = \langle M'; \sigma\rangle$, iar $\mathfrak{M}_2$ *extinderea* lui $\mathfrak{M}_1$. Dacă $M \neq M'$, atunci subsistemul (extinderea) îl numim *propriu.* Vom numi *model* sistemul algebric $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma\rangle$, dacă σ nu conţine simboluri funcţionale. Vom numi pe $\overline{\overline{M}}$ puterea lui $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma\rangle$ şi o vom nota cu $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$. *Vom numi propoziţia signaturii* σ, *relativ la sistemul algebric* $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma\rangle$,

3. Să se demonstreze că cuvîntul

$$(\exists x)(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)(P(y_1)\wedge\ldots\wedge P(y_n)),$$

unde P este simbol predicativ de o variabilă, nu este formulă.

4. Să se scrie toate subformulele formulei

a) $Q^2(f^1(x), g^2(x, y))$,

b) $((\exists x) Q^2(x, y) \supset \neg(P^1(g^2(x, y)) \wedge (\forall z) P^1(z)))$.

5. a) Descrieți mulțimea termenilor pentru o variabilă x și simbolul funcțional f^1,

b) la fel pentru f^2.

În problemele 6–13 avem $\mathfrak{M} = \langle N; S^3, P^3\rangle$, unde

$$S^3(x, y, z) = E \Leftrightarrow x + y = z,$$

$$P^3(x, y, z) = E \Leftrightarrow x \cdot y = z.$$

6. Să se scrie o formulă cu o variabilă liberă x, adevărată dacă și numai dacă:

a) $x = 0$,

b) $x = 1$,

c) $x = 2$,

d) x este par,

e) x este impar,

f) x este număr prim.

7. Să se scrie o formulă cu două variabile libere x și y, adevărată dacă și numai dacă:

a) $x = y$,

b) $x \leqslant y$,

c) $x < y$,

d) x divide y,

e) x și y sînt numere prime gemene*.

---

* Două numere prime se numesc gemene, dacă diferența lor este egală cu doi. (*N.R.*)

8. Să se scrie o formulă cu trei variabile libere x, y și z, adevărată dacă și numai dacă:

a) z este cel mai mic multiplu comun al lui x și y,
b) z este cel mai mare divizor comun al lui x și y.

9. Să se scrie propoziția care exprimă:

a) comutativitatea adunării,
b) asociativitatea adunării,
c) comutativitatea înmulțirii,
d) asociativitatea înmulțirii,
e) distributivitatea adunării față de înmulțire,
f) infinitatea mulțimii numerelor prime,
g) că fiecare număr este suma a patru pătrate,
h) existența celui mai mic multiplu comun și celui mai mare divizor comun pentru numere diferite de zero.

10. Să se scrie propoziția care exprimă:

a) inexistența unității,

b) că numerele prime sînt în număr finit,

c) că orice număr poate fi reprezentat sub forma sumei a două pătrate,

d) că pentru fiecare număr există unul strict mai mic,

e) existența celui mai mare număr natural.

Sînt adevărate aceste propoziții în sistemul nostru?

11. Să se scrie că:

a) șirul numerelor prime gemene este infinit,

b) orice număr par, mai mare ca 2, este suma a două numere prime.

12. Să se scrie că ecuația $3x + 2x^2 + 1 = 0$ are exact două rădăcini.

13. Să se scrie că sistemul de ecuații

$$\left.\begin{aligned} 3x - y &= 0 \\ x + y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

nu are soluție.

14. Fie M o m.p.o. și $Q^2(x, y) = E \Leftrightarrow x \leqslant y$. Să se scrie că:

a) x este cel mai mic element,
b) x este elementul minimal,
c) x este cuprins între y și z,
d) mulțimea M este dens ordonată,
e) fiecare element maximal este minimal,
f) mulțimea M este total ordonată.

15. Fie $M = P(A)$, unde A este o mulţime arbitrară şi

$$Q^2(x, y) = E \Leftrightarrow x \leqslant y.$$

Să se scrie că:

a) x este intersecţia lui y şi z,
b) x este reuniunea lui y şi z,
c) $x = \emptyset$,
d) $x = A$,
e) x este complementara lui y.

16. Vom considera $\mathfrak{M} = \langle P(A); f^2, g^2\rangle$, unde $f^2(x, y) = x \cap y$, $g^2(x, y) = x \cup y$. Să se scrie că:

a) $x \subseteq y$,

b) x este o mulţime cu un element.

17. Fie $\mathfrak{M} = \langle N, P^1, g^1\rangle$, unde $g^1(x) = x + 1$, iar P^1 este un predicat arbitrar de o variabilă. Să se scrie axioma inducţiei pentru P^1.

18. Fie $\mathfrak{M} = \langle M; Q^2, P^1\rangle$, unde M este o mulţime bine ordonată, $Q^2(x, y) \Leftrightarrow x \leqslant y$, P^1 — un predicat arbitrar de o variabilă. Să se scrie axioma inducţiei transfinite pentru P^1.

2.4. Realizabilitatea formulelor c.r.p.

Numim *realizabilă* o formulă $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k)$ a signaturii σ, dacă există un sistem algebric $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma\rangle$, astfel încît $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k)$ este adevărată în $\mathfrak{M}$ pentru anumite valori ale variabilelor. Formula $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k)$ a signaturii σ o vom numi *identic adevărată*, dacă $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k)$ este adevărată în fiecare sistem algebric al signaturii σ pentru orice valori ale variabilelor. Vom spune că formula $\mathfrak{A}$ *rezultă în mod semantic* dintr-o mulţime de formule Γ (simbolic $\Gamma \models \mathfrak{A}$), dacă, pentru orice sistem algebric $\mathfrak{M}$, din veridicitatea în $\mathfrak{M}$ a tuturor formulelor din Γ pentru anumite valori ale variabilelor rezultă veridicitatea lui $\mathfrak{A}$ în $\mathfrak{M}$ pentru aceleaşi valori ale variabilelor. Vom nota prin $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, dacă $\mathfrak{A} \models \mathfrak{B}$ şi $\mathfrak{B} \models \mathfrak{A}$.

1. Să se demonstreze că o formulă Φ a signaturii σ este realizabilă în sistemul algebric $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma\rangle$ dacă şi numai dacă Φ este realizabilă în orice extensie $\mathfrak{M}' = \langle M; \sigma'\rangle$.

2. Să se demonstreze că pentru orice propoziţie $\mathfrak{A}$ a signaturii σ, care se referă la sistemul algebric $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma\rangle$, avem $\mathfrak{M} \models \mathfrak{A}$ sau $\mathfrak{M} \models \neg\mathfrak{A}$.

3. Să se demonstreze că

a) $\mathfrak{A}$ este realizabilă, dacă şi numai dacă $\neg\mathfrak{A}$ nu este identic adevărată;

b) $\mathfrak{A}$ este identic adevărată, dacă şi numai dacă $\neg\mathfrak{A}$ nu este realizabilă.

4. Să se demonstreze că o formulă fără cuantificatori este identic adevărată, dacă şi numai dacă eá poate fi obţinută printr-o substituţie dintr-o formulă identic adevărată a calculului propoziţiilor.

5. Să se demonstreze că

a) dacă o $\forall$-formulă închisă, adică care are forma $(\forall x_1) \ldots \ldots (\forall x_n)\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$, unde $\mathfrak{A}$ este o formulă fără cuantificatori, este adevărată într-un sistem algebric, atunci ea este adevărată în orice subsistem al său;

b) dacă o $\exists$-formulă închisă, adică care are forma $(\exists x_1) \ldots \ldots (\exists x_n)\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$, unde $\mathfrak{A}$ este o formulă fără cuantificatori, este adevărată într-un sistem algebric, atunci ea este adevărată în orice extindere a sa.

6. Sînt realizabile următoarele formule?

a) $(\exists x)\, P(x)$,

b) $(\forall x)\, P(x)$,

c) $(\exists x)(\forall y)(Q(x, x) \wedge \neg Q(x, y))$,

d) $(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge \neg P(y))$,

e) $(\exists x)(\forall y)(Q(x, y) \supset (\forall z)\, R(x, y, z))$,

f) $(P(x) \supset (\forall y)\, P(y))$.

7. Sînt identic adevărate următoarele formule?

a) $((\exists x)\, P(x) \supset (\forall x)\, P(x))$,

b) $((\exists x)(\forall y)\, Q(x, y) \supset (\forall y)(\exists x)\, Q(x, y))$,

c) $\neg((\exists x)\, P(x) \supset (\forall x)\, P(x))$,

d) $((\forall x)(\exists y)\, Q(x, y) \supset (\exists y)(\forall x)\, Q(x, y))$.

8. Să se dea un exemplu de formulă $\mathfrak{A}(x)$, astfel încît să fie realizabilă următoarea formulă:

a) $\neg((\forall x)\, \mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{A}(t))$,

b) $\neg(\mathfrak{A}(t) \supset (\exists x)\, \mathfrak{A}(x))$.

9. Să se demonstreze că formula

$$((\forall x)(\exists y) P(x, y) \wedge (\forall x)(\forall y)(P(x, y) \supset$$
$$\supset \neg P(y, x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x, y) \supset (P(y, z) \supset P(x, z))))$$

este realizabilă într-un anumit model infinit și falsă în toate cele finite.

10. Să se demonstreze că formula

$$(\exists x)(\forall y)(F(x, y) \supset (\neg F(y, x) \supset (F(x, x) \equiv F(y, y))))$$

este adevărată în orice model, care conține cel mult trei elemente.

11. Să se demonstreze că următoarele formule sînt adevărate în orice model finit, dar nu sînt identic adevărate :

a) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)((F(y, z) \supset F(x, z)) \supset (F(x, x) \supset F(y, z)))$,

b) $((\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(F(x_1, x_1) \wedge (F(x_1, x_3) \supset (F(x_1, x_2) \vee$
$\vee F(x_2, x_3)))) \supset (\exists y)(\forall z) F(y, z))$.

12. Să se dea un exemplu de formulă falsă în toate modelele cu un număr impar de elemente astfel încît pentru fiecare număr par n să existe un model de putere n, în care această formulă să fie adevărată.

13. Să se scrie o formulă cu predicate de o variabilă, care este realizabilă numai în modele ce conțin cel puțin cinci elemente.

14. Să se demonstreze că următoarele formule sînt identic adevărate :

a) $(\neg(\exists x)\, \mathfrak{A}(x) \supset \neg(\forall x)\, \mathfrak{A}(x))$,

b) $((\exists x)(\mathfrak{A}(x) \wedge (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}(x)) \supset ((\forall x)(\mathfrak{A}(x) \supset \neg \mathfrak{C}(x)) \supset \neg \mathfrak{B}))$,

unde $\mathfrak{B}$ nu conține nici o variabilă liberă x,

c) $((\forall x)(\mathfrak{A}(x) \supset \neg \mathfrak{B}(x)) \supset \neg((\exists x)\, \mathfrak{A}(x) \wedge (\forall x)\, \mathfrak{B}(x)))$,

d) $((\forall x)(\mathfrak{A}(x) \supset \neg \mathfrak{B}(x)) \supset \neg((\forall x)\, \mathfrak{A}(x) \wedge (\exists x)\, \mathfrak{B}(x)))$.

15. Să se demonstreze:

a) $\neg(\forall x)\, \mathfrak{A}(x) \sim (\exists x) \neg \mathfrak{A}(x)$,

b) $\neg(\exists x)\, \mathfrak{A}(x) \sim (\forall x) \neg \mathfrak{A}(x)$,

c) $((\forall x)\mathfrak{A}(x) \wedge (\forall x)\mathfrak{B}(x)) \sim (\forall x)(\mathfrak{A}(x) \wedge \mathfrak{B}(x))$,

d) $((\exists x)\mathfrak{A}(x) \vee (\exists x)\mathfrak{B}(x)) \sim (\exists x)(\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}(x))$,

e) $(\mathfrak{A} \vee (\forall x)\mathfrak{B}(x)) \sim (\forall x((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(x))$, aici $\mathfrak{A}$ nu conţine variabila liberă x,

f) $(\mathfrak{A} \wedge (\exists x)\mathfrak{B}(x)) \sim (\exists x)(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}(x))$, aici $\mathfrak{A}$ nu conţine variabila liberă x,

g) $(\forall x)\mathfrak{A}(x) \sim (\forall y)\mathfrak{A}(y)$, aici $\mathfrak{A}(x)$ nu conţine variabila liberă y şi $\mathfrak{A}(y)$ nu conţine variabila liberă x,

h) $(\exists x)\mathfrak{A}(x) \sim (\exists y)\mathfrak{A}(y)$, aici $\mathfrak{A}(x)$ nu conţine variabila liberă y şi $\mathfrak{A}(y)$ nu conţine variabila liberă x.

16. Să se demonstreze teorema substituţiei: dacă $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, atunci $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}} \sim \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$.

17. Să se demonstreze că pentru orice formulă există o formulă normală *prenexă* echivalentă cu ea, adică o formulă de forma $(Qx_1) \dots (Qx_n)\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$, unde $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ este o formulă fără cuantificatori, iar Q_i este $\forall$ sau $\exists$.

18. Să se aducă la forma normală prenexă:

a) $\neg(\exists x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)\mathfrak{A}$,

b) $((\exists x)(\forall y)\mathfrak{A} \wedge (\exists x)(\forall y)\mathfrak{B})$,

c) $((\exists x)(\forall y)\mathfrak{A} \vee (\exists x)(\forall y)\mathfrak{B})$,

d) $((\exists x)(\forall y)\mathfrak{A} \subset (\exists x)(\forall y)\mathfrak{B})$.

19. Fie $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma\rangle$ şi $M = \{m_1, \dots, m_n\}$. Fie $\mathfrak{C}(x)$ o formulă, cu variabila liberă x, a signaturii $\sigma_M = \sigma \cup M$. Să se demonstreze:

$$\mathfrak{M} \models (\exists x)\mathfrak{C}(x) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\mathfrak{C}(m_1) \vee \dots \vee \mathfrak{C}(m_n)),$$

$$\mathfrak{M} \models (\forall x)\mathfrak{C}(x) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\mathfrak{C}(m_1) \wedge \dots \wedge \mathfrak{C}(m_n)).$$

20. Să se demonstreze că dacă un sistem algebric $\mathfrak{M}$ este finit, atunci pentru fiecare formulă $\mathfrak{A}$ se poate construi o formulă fără cuantificatori $\mathfrak{A}^*$, astfel încît în $\mathfrak{M}$ este adevărată formula $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}^*) \wedge (\mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{A})$.

21. Să se demonstreze că dacă un sistem algebric este finit, atunci pentru fiecare formulă se poate verifica, într-un număr finit de paşi, dacă este realizabilă sau nu în acest sistem.

22. Să se demonstreze că o formulă de forma

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_m)\,\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_m),\ \text{unde}\ \mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_m)$$

este o formulă fără cuantificatori, este identic adevărată, dacă și numai dacă ea este adevărată în fiecare model cu m elemente.

23. Să se demonstreze că o formulă de forma

$$(\exists x_1)\ldots(\exists x_m)\,\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_m),\ \text{unde}\ \mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_m)$$

este o formulă fără cuantificatori, este identic adevărată dacă și numai dacă ea este adevărată în fiecare model cu un element.

24. Să se demonstreze că o formulă de forma

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_m)(\exists y_1)\ldots(\exists y_n)\mathfrak{A}(y_1,\ldots,y_n),\text{unde}\ \mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$$

este o formulă fără cuantificatori, este identic adevărată dacă și numai dacă ea este adevărată în fiecare model cu m elemente.

25. Fie $\mathfrak{A}$ o formulă a signaturii $\sigma = \langle P_1,\ldots,P_n\rangle$, unde $P_1,\ldots,P_n$ sînt simboluri predicative de o variabilă. Să se demonstreze că $\mathfrak{A}$ este realizabilă, dacă și numai dacă $\mathfrak{A}$ este realizabilă în modele care conțin cel mult 2^n elemente.

26. Sînt realizabile următoarele formule?

a) $(\forall x)(\exists y)(P(x) \equiv \neg P(y))$,

b) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P_1(x) \equiv (P_2(y) \vee P_3(z)))$.

În problemele 27—29 se consideră o clasă de modele cu un singur predicat $=$, unde $x = y$ este adevărat dacă și numai dacă x și y coincid.

27. Să se scrie o propoziție a signaturii $\{=\}$:

a) adevărată în toate modelele care conțin cel mult n elemente $(n \geqslant 1)$,

b) adevărată în toate modelele care conțin cel puțin n elemente $(n \geqslant 1)$,

c) adevărată pentru toate modelele care conțin exact n elemente $(n \geqslant 1)$.

28*. Fie

$$E_n = (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\left(\bigwedge_{i\neq j} x_i \neq x_j\right).$$

a) Să se demonstreze că E_n este adevărată pentru fiecare model care conține cel puțin n elemente;

b) Să se demonstreze echivalenţa dintre următoarele formule:

$$(\exists v)\big((\bigwedge_{i\neq j,\, i\leqslant n} x_i \neq x_j) \wedge (\bigwedge_{i\leqslant n} v \neq x_i)\big) \text{ şi } \big((\bigwedge_{i\neq j,\, i\leqslant n} x_i \neq x_j) \wedge E_{n+1}\big).$$

c) Să se demonstreze că fiecare propoziţie a signaturii $\{=\}$ este echivalentă cu o formulă construită din $E_1, \ldots, E_n$ cu ajutorul conectivelor $\wedge$, $\vee$ şi $\neg$.

d) Vom numi *spectrul* formulei Φ totalitatea puterilor modelelor în care este realizabilă formula Φ. Să se arate, că fiecare formulă, construită din $E_1, \ldots, E_n$ cu ajutorul conectivelor $\wedge$, $\vee$, $\neg$, are un spectru, care este reuniunea unui număr finit de intervale de forma

$$\{m \mid a \leqslant m \leqslant b,\ a \in N,\ b \in N \text{ şi } \{m \mid m \geqslant a,\ a \in N\}.$$

e) Să se arate că o propoziţie a signaturii $\{=\}$ este identic adevărată, dacă şi numai dacă ea are spectrul $\{m \mid m \geqslant 1\}$.

29. Să se determine un sistem infinit de formule ale signaturii $\{=\}$, care este realizabil numai în modele infinite.

30. Fie $\sigma = \langle \{P_i\}_{i\in I}, \{f_j\}_{j\in J}, \{a_k\}_{k\in K}\rangle$, iar T mulţimea tuturor termenilor signaturii σ. Să se determine pe T predicate şi funcţii, astfel încît T să devină un sistem algebric al signaturii σ.

31*. Să se demonstreze că pentru fiecare formulă $\mathfrak{A}$ a signaturii σ există o anumită $\forall$-formulă $\mathfrak{A}'$ a signaturii σ', obţinută prin adăugare la σ a unor noi simboluri funcţionale, care se bucură de următoarea proprietate: pentru fiecare sistem $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma\rangle$, $\mathfrak{A}$ este adevărată în $\mathfrak{M}$, dacă şi numai dacă $\mathfrak{A}'$ este adevărată într-o extensie $\mathfrak{M}' = \langle M; \sigma'\rangle$.

32. Pentru formula $(\forall x)(\exists z)(\forall y)(\exists u)((y > z \supset y > x) \wedge (u < z) \wedge \wedge \neg(u < x))$ să se construiască o $\forall$-formulă a cărei existenţă este afirmată în problema 31. Pentru sistemul $\mathfrak{M} = \langle N; <\rangle$ să se determine extensia necesară.

33. Pentru formula $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\exists t)(P(x, t) \wedge \neg P(y, z))$ să se construiască o $\forall$-formulă, a cărei existenţă este afirmată în problema 31. Pentru fiecare sistem $\mathfrak{M} = \langle M; P\rangle$, unde $M = \{1, 2\}$, să se determine extensia convenabilă.

34. Să se demonstreze că dacă o formulă a signaturii σ este realizabilă, atunci ea este realizabilă pe o anumită algebră a termenilor signaturii $\sigma' \supseteq \sigma$.

35. a) Să presupunem că $\mathfrak{A}(x, y)$ nu conţine variabile libere, diferite de x şi y. Să se demonstreze că $(\forall x)(\exists y)\,\mathfrak{A}(x, y)$ este identic adevărată, dacă şi numai dacă este identic adevărată

$((\forall x)((\exists y)\mathfrak{A}(x, y) \supset P(x)) \supset (\forall x) P(x))$, unde P este simbol predicativ de o variabilă care nu face parte din $\mathfrak{A}(x, y)$;

b) Să se demonstreze că pentru fiecare propoziţie $\mathfrak{A}$ se poate construi o propoziţie $\mathfrak{A}'$ de forma $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)(\forall y_1) \ldots (\forall y_m) \mathfrak{A}$ (*forma normală a lui Skolem* pentru $\mathfrak{A}$), astfel încît $\mathfrak{A}$ să fie identic adevărată, dacă şi numai dacă $\mathfrak{A}'$ este identic adevărată.

36. Fie $\mathfrak{A}'$ forma normală a lui Skolem a propoziţiei $\mathfrak{A}$. Să se arate că $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}'$ nu este adevărată în general. Este adevărat totdeauna că $\mathfrak{A} \models \mathfrak{A}'$? Întrebare analoagă pentru $\mathfrak{A}' \models \mathfrak{A}$.

37. Să se aducă la forma normală a lui Skolem:

a) $((\exists x)(\forall y)Q(x, y) \supset (\forall x(\exists y)Q(x, y))$,

b) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(\forall v) R(x, y, z, v)$,

c) $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists v) R(x, y, z, v)$.

2.5. Calculul restrîns al predicatelor

Vom fixa o anumită signatură σ, care este formată numai din litere predicative. Vom numi *axiome* ale calculului restrîns al predicatelor (c.r.p.) următoarele formule ale signaturii σ:

1. $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}))$,
2. $((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C})))$,
3. $((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A})$,
4. $((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B})$,
5. $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})))$,
6. $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}))$,
7. $(\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}))$,
8. $((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C})))$,
9. $((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{A} \supset \neg \mathfrak{B}) \supset \neg \mathfrak{A}))$,
10. $(\neg\neg \mathfrak{A} \supset \mathfrak{A})$,
11. $((\forall x) \mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{A}(t))$,
12. $(\mathfrak{A}(t) \supset (\exists x) \mathfrak{A}(x))$.

În axiomele 1 –10 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sînt formule oarecare; în axiomele 11 –12 $\mathfrak{A}(x)$ este o formulă, t este o variabilă obiect astfel încît nici un x din formula $\mathfrak{A}(x)$ nu se găsește în domeniul de acțiune al cuantificatorului în raport cu t, $\mathfrak{A}(t)$ este o formulă obținută din $\mathfrak{A}(x)$ prin înlocuirea cu t a variabilei libere x peste tot unde aceasta apare.

Regulile de deducție pentru c.r.p. sînt:

$$\text{I. } \frac{\mathfrak{A}\,(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})}{\mathfrak{B}},$$

$$\text{II. } \frac{(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}(x))}{(\mathfrak{C} \supset (\forall y)\,\mathfrak{A}(y))},$$

$$\text{III. } \frac{(\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{C})}{((\exists y)\mathfrak{A}(y) \supset \mathfrak{C})},$$

astfel încît în regulile II și III variabila x nu intră liber în $\mathfrak{C}$, și y nu intră liber în $\mathfrak{A}(x)$. $\mathfrak{B}$ se numește *consecință imediată* a formulelor $\mathfrak{A}$ și $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ după regula I. $(\mathfrak{C} \supset (\forall y)\,\mathfrak{A}(y))$ și $((\exists y)\mathfrak{A}(y) \supset \mathfrak{C})$ sînt *consecințe imediate* ale formulelor $(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}(x))$ după regula II și respectiv $(\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{C})$ după regula III.

Deducție în c.r.p. se numește o însușire finită de formule $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$, astfel încît $\mathfrak{A}_i$, oricare ar fi i, $(1 \leqslant i \leqslant k)$, este fie axiomă, fie consecință imediată a unei singure sau a două din formulele anterioare.

Deducție dintr-o mulțime finită de formule Γ este o înșiruire $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$, astfel încît $\mathfrak{A}_i$, oricare ar fi i, $(1 \leqslant i \leqslant k)$, este fie axiomă, fie una din formulele Γ, fie consecință imediată a unei singure sau a două din formulele anterioare, astfel încît cu regulile II și III pot fi legate numai variabilele care nu sînt libere în Γ.

Vom scrie $\vdash \mathfrak{A}$, dacă există o deducție care se termină cu formula $\mathfrak{A}$.

Vom scrie $\Gamma \vdash \mathfrak{A}$, dacă există o submulțime finită Γ_0 a mulțimii Γ și o deducție din Γ_0 care se termină cu formula $\mathfrak{A}$.

Mulțimea de formule Γ o vom numi *necontradictorie*, dacă nu există nici o formulă $\mathfrak{A}$ astfel, ca $\Gamma \vdash \mathfrak{A}$ și $\Gamma \vdash \neg \mathfrak{A}$. În caz contrar, Γ se numește *contradictorie.*

Mulțimea de formule Γ ale signaturii σ o vom numi *completă*, dacă pentru fiecare formulă închisă $\mathfrak{A}$ a signaturii σ avem $\Gamma \vdash \mathfrak{A}$ sau $\Gamma \vdash \neg \mathfrak{A}$. În caz contrar, Γ se numește *incompletă.*

1. Să se arate că o deducție din mulțimea vidă de formule este o deducție în c.r.p.

2. Sînt deducţii următoarele înşiruiri?

a) $((\forall x)(\exists y)\mathfrak{A}(x, y) \supset (\exists y)\mathfrak{A}(x, x))$,

b) $((\forall x)P(x) \supset P(y))$, $((\forall x)P(x) \supset (\forall y)P(y))$,

unde P este o variabilă predicativă de o variabilă;

c) $((\forall x)\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{A}(x))$, $(\mathfrak{A}(x) \supset (\exists x)\mathfrak{A}(x))$,

$((\mathfrak{A}(x) \supset (\exists x)\mathfrak{A}(x)) \supset ((\forall x)\mathfrak{A}(x) \supset (\mathfrak{A}(x) \supset (\exists x)\mathfrak{A}(x))))$,

$((\forall x)\mathfrak{A}(x) \supset (\mathfrak{A}(x) \supset (\exists x)\mathfrak{A}(x)))$,

$(((\forall x)\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{A}(x)) \supset (((\forall x)\mathfrak{A}(x) \supset (\mathfrak{A}(x) \supset (\exists x)\mathfrak{A}(x))) \supset$
$\supset ((\forall x)\mathfrak{A}(x) \supset (\exists x)\mathfrak{A}(x))))$,

$(((\forall x)\mathfrak{A}(x) \supset (\mathfrak{A}(x) \supset (\exists x)\mathfrak{A}(x))) \supset ((\forall x)\mathfrak{A}(x) \supset (\exists x)\mathfrak{A}(x)))$,

$((\forall x)\mathfrak{A}(x) \supset (\exists x)\mathfrak{A}(x))$.

3. Ce condiţii trebuie să satisfacă formula $\mathfrak{A}(x)$ ca următoarele înşiruiri să fie deducţii?

a) $(\mathfrak{A}(y) \supset (\exists x)\mathfrak{A}(x))$, $((\exists y)\mathfrak{A}(y) \supset (\exists x)\mathfrak{A}(x))$;

b) $((\forall x)\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{A}(y))$, $((\forall x)\mathfrak{A}(x) \supset (\forall y)\mathfrak{A}(y))$.

4. Să se construiască deducţiile formulelor:

a) $((\forall x)(\forall y)\mathfrak{A}(x, y) \supset (\forall y)(\forall x)\mathfrak{A}(x, y))$;

b) $((\exists x)(\exists y)\mathfrak{A}(x, y) \supset (\exists y)(\exists x)\mathfrak{A}(x, y))$;

c) $((\exists x)(\forall y)\mathfrak{A}(x, y) \supset (\forall y)(\exists x)\mathfrak{A}(x, y))$.

5. Sînt următoarele înşiruiri de formule deducţii din $\Gamma = \{\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}(x)\}$, unde $\mathfrak{C}$ nu conţine variabila liberă x:

a) $(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}(x))$, $(\mathfrak{C} \supset (\forall x)\mathfrak{A}(x))$;

b) $((\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}(x)) \supset (\mathfrak{B}(y) \supset (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}(x))))$, $(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}(x))$,

$(\mathfrak{B}(y) \supset (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}(x)))$, $((\exists y)\mathfrak{B}(y) \supset (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}(x)))$,

dacă $\mathfrak{C}$ şi $\mathfrak{A}(x)$ nu conţin variabila liberă y?

6. Să se construiască deducțiile din $\Gamma = \{(\forall x)(\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{B}(x))\}$ ale următoarelor formule :

a) $((\exists x)\mathfrak{A}(x) \supset (\exists x)\mathfrak{B}(x))$,

b) $((\forall y)\mathfrak{A}(y) \supset (\forall z)\mathfrak{B}(z))$.

7. Să se demonstreze că dacă $\Gamma \vdash \mathfrak{A}$ și $\Gamma \subseteq \Gamma_1$, atunci $\Gamma_1 \vdash \mathfrak{A}$.

8. Să se determine Γ, $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$ astfel încît deducția $\mathfrak{B}$ din Γ să nu fie deducție $\mathfrak{B}$ din $\{\Gamma, \mathfrak{A}\}$.

9*. Să se demonstreze că, dacă $\Gamma \vdash \mathfrak{A}$ și $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$, atunci $\Gamma \vdash \mathfrak{B}$.

10. Să se demonstreze teorema deducției pentru c.r.p. :

$$\text{dacă } \Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}, \text{ atunci } \Gamma \vdash (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}).$$

11. Să se demonstreze că regulile de deducție derivate în calculul propozițiilor (vezi § 2.1, problema 12) sînt derivate și în c.r.p.

12. Să se demonstreze următoarele reguli :

a) $\forall$-eliminare : $(\forall x)\mathfrak{A}(x) \vdash \mathfrak{A}(t)$, unde $\mathfrak{A}(x)$ și t se supun acelorași condiții ca și în axioma II,

b) $\exists$-introducere : $\mathfrak{A}(t) \vdash (\exists x)\mathfrak{A}(x)$ pentru aceleași condiții ca și în a),

c) $\forall$-introducere :

$$\frac{\Gamma \vdash \mathfrak{A}(x)}{\Gamma \vdash (\forall x)\mathfrak{A}(x)},$$

unde x nu intră liber în formulele din Γ,

d) $\exists$-eliminare :

$$\frac{\Gamma, \mathfrak{A}(x) \vdash \mathfrak{B}}{\Gamma, (\exists x)\mathfrak{A}(x) \vdash \mathfrak{B}},$$

unde x nu intră liber nici în formulele din Γ, nici în formula $\mathfrak{B}$.

13. Să se demonstreze că formula $\mathfrak{A}(x)$ este deductibilă dacă și numai dacă este deductibilă formula $(\forall x)\mathfrak{A}(x)$.

14. Să se demonstreze că următoarele formule sînt deductibile :

a) $((\forall x)\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A})$, aici $\mathfrak{A}$ nu conține variabila liberă x,

b) $((\exists x)\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A})$, aici $\mathfrak{A}$ nu conține variabila liberă x,

c) $((\forall x)(\forall y)\mathfrak{A}(x, y) \equiv (\forall y)(\forall x)\mathfrak{A}(x, y))$,

d) $((\exists x)(\exists y)\mathfrak{A}(x, y) \equiv (\exists y)(\exists x)\mathfrak{A}(x, y))$,

e) $((\forall x)(\forall y)\mathfrak{A}(x, y) \supset (\forall x)\mathfrak{A}(x, x))$,

f) $((\exists x)\mathfrak{A}(x, x) \supset (\exists x)(\exists y)\mathfrak{A}(x, y))$,

g) $((\exists x)\mathfrak{A}(x) \equiv \neg(\forall x)\neg\mathfrak{A}(x))$,

h) $((\forall x)\mathfrak{A}(x) \equiv \neg(\exists x)\neg\mathfrak{A}(x))$,

i) $(\neg(\forall x)\mathfrak{A}(x) \equiv (\exists x)\neg\mathfrak{A}(x))$,

j) $(\neg(\exists x)\mathfrak{A}(x) \equiv (\forall x)\neg\mathfrak{A}(x))$,

k) $(((\forall x)\mathfrak{A}(x) \wedge (\forall x)\mathfrak{B}(x)) \equiv (\forall x)(\mathfrak{A}(x) \wedge \mathfrak{B}(x)))$,

l) $(((\exists x)\mathfrak{A}(x) \vee (\exists x)\mathfrak{B}(x)) \equiv (\exists x)(\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}(x)))$,

m) $((\mathfrak{A} \wedge (\forall x)\mathfrak{B}(x)) \equiv (\forall x)(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}(x)))$, aici $\mathfrak{A}$ nu conține variabila liberă x,

n) $((\mathfrak{A} \vee (\exists x)\mathfrak{B}(x)) \equiv (\exists x)(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(x)))$, aici $\mathfrak{A}$ nu conține variabila liberă x,

o) $((\mathfrak{A} \wedge (\exists x)\mathfrak{B}(x)) \equiv (\exists x)(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}(x)))$, aici $\mathfrak{A}$ nu conține variabila liberă x,

p) $((\mathfrak{A} \vee (\forall x)\mathfrak{B}(x)) \equiv (\forall x)(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(x)))$, aici $\mathfrak{A}$ nu conține variabila liberă x,

q) $((\exists x)(\mathfrak{A}(x) \wedge \mathfrak{B}(x)) \supset ((\exists x)\mathfrak{A}(x) \wedge (\exists x)\mathfrak{B}(x)))$,

r) $(((\forall x)\mathfrak{A}(x) \vee (\forall x)\mathfrak{B}(x)) \supset (\forall x)(\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}(x)))$,

s) $((\forall x)(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}(x)) \equiv (\mathfrak{A} \supset (\forall x)\mathfrak{B}(x)))$, aici $\mathfrak{A}$ nu conține variabila liberă x,

t) $((\forall x)(\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{B})) \equiv ((\exists x)\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{B}))$, aici $\mathfrak{B}$ nu conține variabila liberă x,

u) $((\exists x)\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{B}) \equiv ((\forall x)\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{B}))$, aici $\mathfrak{B}$ nu conține variabila liberă x,

v) $((\exists x)(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}(x)) \equiv (\mathfrak{A} \supset (\exists x)\mathfrak{B}(x)))$, aici $\mathfrak{A}$ nu conține variabila liberă x,

x) $((\exists x)(\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{B}(x)) \equiv ((\forall x)\mathfrak{A}(x) \supset (\exists x)\mathfrak{B}(x)))$.

15. Să se demonstreze că dacă $\vdash(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B})$, atunci:

a) $\vdash (\neg \mathfrak{A} \equiv \neg \mathfrak{B})$,

b) $\vdash ((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C}) \equiv (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}))$,

c) $\vdash ((\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{A}) \equiv (\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{B}))$,

d) $\vdash ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{C}) \equiv (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}))$,

e) $\vdash ((\mathfrak{C} \vee \mathfrak{A}) \equiv (\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}))$,

f) $\vdash ((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \equiv (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}))$,

g) $\vdash ((\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \equiv (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}))$,

h) $\vdash ((\forall x)\mathfrak{A} \equiv (\forall x)\mathfrak{B})$,

i) $\vdash ((\exists x)\mathfrak{A} \equiv (\exists x)\mathfrak{B})$.

16. Să se deducă teorema substituției în c.r.p.:

$$\text{dacă } \vdash(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}), \text{ atunci } \vdash (\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}} \equiv \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}),$$

unde $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$ este rezultatul înlocuirii unui anumit $\mathfrak{A}$ din $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}$ cu $\mathfrak{B}$.

17. Să se demonstreze că pentru fiecare formulă există o formulă normală prenexă echivalentă cu ea.

18. Să se aducă la formula normală prenexă:

a) $(\forall x)(\exists y)((\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{B}(y, z)) \supset (\forall x)(\forall z)\mathfrak{B}(x, z) \wedge \mathfrak{A}(y)))$,

b) $((\forall x) P(x) \supset (\forall y)((\forall z) Q(x, z) \supset (\forall y) P(y)))$.

19. Fie $\mathfrak{A}$ o formulă construită din formule atomice și din negațiile lor cu ajutorul lui $\wedge$, $\vee$ și cuantificatorilor $\forall$, $\exists$ în raport cu diferite variabile. Fie $\mathfrak{A}^+$ rezultatul înlocuirii lui $\wedge$ cu $\vee$, a lui $\vee$ cu $\wedge$, a lui $\forall$ cu $\exists$, a lui $\exists$ cu $\forall$ și a formulelor atomice cu negațiile lor. Să se demonstreze că $\vdash (\mathfrak{A}^+ \equiv \neg \mathfrak{A})$.

20. Fie Φ' obținută din Φ prin înlocuirea lui $\wedge$ cu $\vee$, a lui $\vee$ cu $\wedge$, a lui $\exists$ cu $\forall$ și a lui $\forall$ cu $\exists$. Să se demonstreze:

a) dacă $\vdash (\Phi \supset \psi)$, atunci $\vdash (\psi' \supset \Phi')$,

b) dacă $\vdash (\Phi \equiv \psi)$, atunci $\vdash (\Phi' \equiv \psi')$.

21. Să presupunem că $z_1, \ldots, z_q$ nu sînt legate în $\mathfrak{A}(z_1, \ldots, z_q)$ și $\mathfrak{B}(z_1, \ldots, z_q)$ și fie $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$. Să se demonstreze că există o deducție $\mathfrak{B}(z_1, \ldots, z_q)$ din $\mathfrak{A}(z_1, \ldots, z_q)$, în care $z_1, \ldots, z_q$ nu sînt legate.

22. Să presupunem că $z_1, \ldots, z_q$ nu sînt legate în $\mathfrak{A}(z_1, \ldots, z_q)$ şi $\mathfrak{B}(z_1, \ldots, z_q)$, iar $x_1, \ldots, x_q$ sînt variabile care nu fac parte din $\mathfrak{A}(z_1, \ldots, z_q)$ şi $\mathfrak{B}(z_1, \ldots, z_q)$. Să se demonstreze că $\mathfrak{A}(z_1, \ldots, z_q) \vdash \vdash \mathfrak{B}(z_1, \ldots, z_q) \Leftrightarrow \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_q) \vdash \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_q)$.

23. Fie Γ mulţimea de formule ale signaturii σ şi $\mathfrak{A}$ o formulă a signaturii σ. Să se demonstreze că dacă $\Gamma \vdash \mathfrak{A}$, atunci există o deducţie a lui $\mathfrak{A}$ din Γ, care este alcătuită numai din formulele signaturii σ.

24*. Să se demonstreze *teorema lui Lindenbaum* : orice mulţime necontradictorie de formule poate fi extinsă la o mulţime completă necontradictorie.

25*. Să se demonstreze că dacă $\Gamma \vdash \mathfrak{A}$, atunci $\Gamma \models \mathfrak{A}$ (din Γ rezultă $\mathfrak{A}$ în mod semantic).

26*. Să se demonstreze că toate formulele deductibile în c.r.p. sînt formule identic adevărate (*teorema de completitudine*).

27. Să se demonstreze că dacă o mulţime de formule este realizabilă, atunci ea este necontradictorie.

28*. Să se demonstreze *teorema Löwenheim-Skolem* : orice mulţime necontradictorie de formule închise ale unei signaturi numărabile este realizabilă într-un model numărabil.

29. Să se demonstreze că dacă o formulă închisă $\mathfrak{A}$ este nedeductibilă în c.r.p., atunci $\neg \mathfrak{A}$ este realizabilă în mulţimea numerelor naturale.

30. Să se demonstreze că dacă o formulă închisă $\mathfrak{A}$ este identic adevărată, atunci $\mathfrak{A}$ este deductibilă în c.r.p.

31. Să se arate că dacă o formulă închisă $\mathfrak{A}$ este adevărată pe toate modelele pe mulţimea numerelor naturale, atunci $\mathfrak{A}$ este identic adevărată.

32. Să se demonstreze că dacă o formulă închisă $\mathfrak{A}$ este realizabilă într-un model, atunci $\mathfrak{A}$ este realizabilă pe mulţimea numerelor naturale.

33*. Să se demonstreze că dacă mulţimea Γ de formule închise este numărabilă şi fiecare submulţime finită a lui Γ este realizabilă, atunci întreaga mulţime Γ este realizabilă.

34. Să se demonstreze că dacă o formulă închisă $\mathfrak{A}$ este adevărată pe fiecare model, în care sînt adevărate formulele unei mulţimi numărabile Γ, atunci $\Gamma \vdash \mathfrak{A}$.

35. Să se demonstreze că dacă negaţia fiecărei conjuncţii a unui număr finit de formule închise ale unei mulţimi numărabile Γ

este nedemonstrabilă în c.r.p., atunci toate formulele din Γ sînt simultan realizabile.

36. Să se demonstreze *teorema de echivalență* pentru fiecare formulă $\mathfrak{A}$ și fiecare mulțime Γ: $\Gamma \vdash \mathfrak{A}$ este echivalentă cu $\Gamma \models \mathfrak{A}$.

37*. Să se demonstreze *teorema de compactitate a lui A. I. Malțev* : dacă $\Gamma \models \mathfrak{A}$, atunci $\Gamma_0 \models \mathfrak{A}$ pentru o anumită submulțime finită $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

38. Să se arate că o mulțime de formule are un model dacă și numai dacă fiecare submulțime finită a acesteia are un model.

39. Să se demonstreze că pentru ca $\mathfrak{A}$ să fie demonstrabilă, nu este suficient ca $\mathfrak{A}$ să fie adevărată pe toate modelele finite.

40. Să se demonstreze că:

a) fiecare mulțime necontradictorie de formule Γ este realizabilă într-un model, a cărui putere este max $(\aleph_0, \overline{\overline{\Gamma}})$;

b) dacă nu este adevărat că $\Gamma \vdash \neg\mathfrak{A}$, atunci există un model $\mathfrak{M}$ astfel încît Γ și $\mathfrak{A}$ sînt realizabile în $\mathfrak{M}$ și $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \max(\aleph_0, \overline{\overline{\Gamma}})$;

c) dacă $\mathfrak{B}$ nu este deductibilă din Γ, atunci există un model $\mathfrak{M}$, în care toate formulele Γ sînt realizabile, $\mathfrak{B}$ este nerealizabilă, $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \max(\aleph_0, \overline{\overline{\Gamma}})$.

41. Presupunem că o mulțime Γ este realizabilă într-un model infinit. Să se demonstreze că pentru orice număr cardinal $m \geqslant \max(\aleph_0, \overline{\overline{\Gamma}})$ există un model pentru Γ de putere m.

42. Să se demonstreze că dacă o anumită mulțime de formule pentru fiecare număr natural n are un model de putere mai mare decît n, atunci această mulțime are un model infinit.

43. Să se demonstreze că nu există nici o formulă adevărată pe toate modelele finite și falsă pe fiecare model infinit.

44. Să se demonstreze că dacă formula $\mathfrak{A}$ este adevărată pe toate grupurile infinite, atunci $\mathfrak{A}$ este adevărată pe toate grupurile finite de ordin suficient de mare.

45. Fie $\mathfrak{A}$ o formulă fără cuantificatori în c.r.p. Să se demonstreze că $\vdash \mathfrak{A}$ dacă și numai dacă $\mathfrak{A}$ este deductibilă numai din axiomele 1—10 după regula I.

2.6. Teorii axiomatice

Numim *teorie elementară a signaturii* σ o mulțime de propoziții T, care conține toate propozițiile signaturii σ, deductibile din T în calculul predicatelor. Vom numi *sistem de axiome* pentru teoria

T o mulțime oarecare de formule $A \subseteq T$, din care sînt deductibile toate propozițiile din T. Vom numi *model al teoriei* T orice sistem algebric, în care sînt realizabile toate formulele din T.

1. Să se demonstreze că dacă Γ este mulțimea axiomelor teoriei T de signatură σ și $\mathfrak{M}$ este sistemul algebric de signatură σ, în care sînt adevărate toate formulele din Γ, atunci în $\mathfrak{M}$ sînt adevărate propozițiile din T.

2. Presupunem că propoziția $\mathfrak{A}$ este adevărată în orice sistem, în care sînt adevărate toate axiomele teoriei T. Să se demonstreze că $\mathfrak{A}$ aparține lui T (vezi § 2.5, problema 36).

Fie $\sigma_0 = \{=\}$. Notăm prin E o teorie, ale cărei axiome sînt:

$E1$. $(\forall x)(x = x)$,

$E2$. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(((x = y \wedge (y = z)) \supset (x = z))$,

$E3$. $(\forall x)(\forall y)((x = y) \supset (y = x))$.

3. Să se demonstreze că pentru fiecare formulă $\mathfrak{A}(x)$ de signatură σ_0 cu o variabilă liberă formula

$$(\forall x)(\forall y)((x = y) \supset (\mathfrak{A}(x) \equiv \mathfrak{A}(y)))$$

aparține lui E, unde y nu face parte din $\mathfrak{A}(x)$.

4. Să se demonstreze că teoria E este incompletă, adică există o propoziție $\mathfrak{A}$, astfel încît în E nu este demonstrabilă nici $\mathfrak{A}$, nici $\neg\mathfrak{A}$.

5. Fie T o teorie de signatură σ, cu axiomele $E1$, $E2$, $E3$ și mulțimea infinită de axiome:

$$E4.\ (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(((x_1 = y_1) \wedge \ldots \wedge (x_n = y_n)) \supset \\ \supset (\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathfrak{A}(y_1, \ldots, y_n)))$$

pentru fiecare formulă $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ de signatură σ, toate variabilele libere ale căreia sînt $x_1, \ldots, x_n$. Să se demonstreze că dacă σ este finită, atunci schema axiomelor $E4$ poate fi înlocuită cu o mulțime finită de axiome.

6*. Să se demonstreze că fiecare formulă identic adevărată de signatură σ este deductibilă în E (vezi § 2.4, problema 28).

7. Să se construiască un algoritm care să permită să aflăm, dacă orice formulă de signatură σ_0 aparține lui E.

Vom considera următoarea signatură $\sigma = \langle 0, S, +, \cdot, = \rangle$, unde 0 este simbolul unei funcții de zero variabile, S este simbolul unei funcții de o variabilă, $+$ și $\cdot$ sînt simbolurile unor funcții de două variabile, iar $=$ este simbolul unui predicat de două variabile.

Prin Q vom nota o teorie, axiomele căreia sînt:

Q_1. $(\forall x)(\forall y)((S(x) = S(y)) \supset (x = y))$,

Q_2. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(((x = y) \wedge (x = z)) \supset (y = z))$,

Q_3. $(\forall x)(S(x) \neq 0)$,

Q_4. $(\forall x)(\forall y)((x = y) \supset (S(x) = S(y)))$,

Q_5. $(\forall x)((x \neq 0) \supset (\exists y)(x = S(y)))$,

Q_6. $(\forall x)(\forall y)(x + S(y) = S(x + y))$,

Q_7. $(\forall x)(x + 0 = x)$,

Q_8. $(\forall x)(x \cdot 0 = 0)$,

Q_9. $(\forall x)(\forall y)(x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$.

8. Să se demonstreze că Q este o teorie colectivă.

9*. Sistemul de axiome $\{Q_1, \ldots, Q_9\}$ este independent?

10*. Să se demonstreze că în teoria Q nu sînt demonstrabile formulele:

a) $(\forall x)(x \neq S(x))$,

b) $(\forall x)(0 + x = x)$,

c) $(\forall x)(0 \cdot x = 0)$,

d) $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$,

e) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x + y) + z = x + (y + z))$,

f) $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x)$,

g) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$,

h) $(\forall x)(x \leqslant x)$,

i) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))$.

(aici $(x \leqslant y) \underset{\text{def}}{=} (\exists z)(z + x = y)$).

11. Sînt demonstrabile în teoria Q formulele:

a) $(\forall x)(\forall y)((x + y = 0) \supset (x = 0))$,

b) $(\forall x)(\forall y)((x \cdot y = 0) \supset ((x = 0) \vee (y = 0)))$,

c) $(\forall x)(x = x)$,

d) $(\forall x)(\forall y)((x = y) \supset (y = x))$?

12. Să se demonstreze că orice model al teoriei Q este infinit.

13. Să se definească funcţiile 0, S, $+$ şi $\cdot$, astfel încît un model al teoriei Q să fie mulţimea :

a) $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$,

b) $N \cup \{a\} = \{0, 1, 2, \ldots, a\}$, $(a \notin N)$,

c) $N \cup \{a, b\}$, $(a, b \notin N)$,

d) $N \cup N_1 = \{0, 1, 2, \ldots, a_0, a_1, \ldots\}$, ($a_i \notin N$, oricare ar fi i).

14*. Se pot defini funcţiile 0, S, $+$ şi $\cdot$, astfel ca model al teoriei Q să devină :

a) mulţimea numerelor întregi,
b) mulţimea numerelor raţionale nenegative,
c) mulţimea numerelor raţionale,
d) mulţimea numerelor reale,
e) mulţimea numerelor complexe?

Vom adăuga axiomelor $Q_1 - Q_9$ o mulţime infinită de formule de forma

$$(\forall y)((\mathfrak{A}(0) \wedge (\forall x)(\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{A}(S(x)))) \supset \mathfrak{A}(y)),$$

unde $\mathfrak{A}(v)$ este orice formulă de signatură σ cu o variabilă liberă v. Vom nota cu P teoria care se bazează pe aceste axiome. Avem $P \supseteq Q$. Mulţimea numerelor naturale cu elementul 0 pus în evidenţă, cu operaţia $s(x) = x + 1$ şi adunarea şi înmulţirea obişnuite o vom numi *model standard* $\mathfrak{N} = \langle N; 0, S, +, \cdot, = \rangle$ al teoriei P.

15. Să se demonstreze că teoria P este compatibilă.

16*. Să se demonstreze independenţa sistemului de axiome ale teoriei P.

17. Să se demonstreze că toate formulele din exerciţiul 10 sînt demonstrabile în teoria P.

18*. Să se demonstreze că există un model nestandard (adică neizomorf cu $\mathfrak{N}$) al teoriei P.

19. Să se demonstreze că în teoria P sînt demonstrabile formulele :

a) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x = y) \supset (x + z = y + z))$,

b) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x = y) \supset (x \cdot z = y \cdot z))$,

c) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x + z = y + z) \supset (x = y))$,

d) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(z \neq 0 \supset ((x \cdot z = y \cdot z) \supset (x = y)))$,

e) $(\forall x)(x < S(x))$ (aici $x < y \underset{\text{def}}{=} (x < y \wedge x \neq y)$),

f) $(\forall x)(0 < S(x))$,

g) $(\forall x)(0 \leqslant x)$,

h) $(\forall x)(\forall y)(y \neq 0 \supset x \cdot y \geqslant x)$,

i) $(\forall x)(\forall y)(x + y \geqslant x)$,

j) $(\forall xy)(y \neq 0 \supset (\exists qr)(x = qy + r \wedge r < y))$,

k) $(\forall xy\, q_1 r_1 q_2 r_2)((x = q_1 y + r_1 \wedge x = q_2 y +$
$+ r_2 \wedge r_1 < y \wedge r_2 < y) \supset (q_1 = q_2 \wedge r_1 = r_2))$.

20. Să se introducă în teoria P noţiunea de număr prim şi să se demonstreze, că pe modelele teoriei P mulţimea numerelor prime este infinită.

În modelele de signatură σ vom introduce următoarele notaţii :

$$\Delta_0 = 0,\ \Delta_1 = S(0), \ldots, \Delta_{n+1} = S(\Delta_n), \ldots$$

Vom defini teoria R. Axiomele ei vor fi mulţimea infinită de formule de forma :

R_1. $\Delta_n + \Delta_p = \Delta_{n+p}$ (pentru fiecare n şi p),

R_2. $\Delta_n \cdot \Delta_p = \Delta_{n \cdot p}$ (pentru fiecare n şi p),

R_3. $\Delta_n \neq \Delta_p$ (pentru fiecare $n \neq p$),

R_4. $(\forall x)(x \leqslant \Delta_n \supset (x = \Delta_0 \vee \ldots \vee x = \Delta_n))$ (pentru fiecare n),

R_5. $(\forall x)(x \leqslant \Delta_n \vee \Delta_n \leqslant x)$ (pentru fiecare n).

21. Să se demonstreze că $R \subseteq Q$.

22*. Sistemul de axiome ale teoriei R este independent?

Vom considera spaţiul euclidian tridimensional şi următoarele predicate :

$P(x) =$ „x este punct”,

$D(x) =$ „x este dreaptă”,

$\Pi(x) =$ „x este plan”,

$A(x, y) =$ „x se află pe y”.

23. Să se scrie următoarele formule:

a) două puncte determină o dreaptă; dacă aceste puncte sînt diferite, atunci dreapta este unică,

b) trei puncte necoliniare determină un singur plan,

c) definiția dreptelor paralele,

d) definiția planelor paralele.

24. Să se scrie axioma lui Euclid a dreptelor paralele.

25. Să se scrie axioma lui Lobacevski a dreptelor paralele.

26. Să se aleagă predicatele și să se scrie axiomele lui Hilbert pentru geometria euclidiană (vezi Hilbert, D. *Fundamentele geometriei*, 1948).

27. Problemă analoagă pentru geometria lui Lobacevski.

28. Problemă analoagă pentru geometria lui Riemman.

Vom considera modele cu un predicat de două variabile $R(x, y)$.

29. Să se scrie că predicatul dat $R(x, y)$ este:

a) reflexiv,

b) simetric,

c) tranzitiv,

d) $R(x, y)$ este relație de echivalență,

e) $R(x, y)$ este relație de ordine parțială,

f) $R(x, y)$ este relație de ordine totală.

30. Să se scrie cu signatura $\tau = \langle \leqslant \rangle$ axiomele pentru:

a) mulțime dens ordonată,

b) mulțime ordonată cu cel mai mare și cel mai mic element,

c) mulțime ordonată discret,

d) latice,

e) latice distributivă,

f) laticea lui Dedekind,

g) latice distributivă cu complementare relative,

h) algebră booleană,

i) algebră atomică booleană,

31. Să se scrie într-o signatură convenabilă axiomele pentru:

a) cvasigrup,

b) grupoid,

c) semigrup,

d) semigrup comutativ,

e) semigrup comutativ cu simplificare.

32. Să se scrie într-o signatură convenabilă axiomele pentru:
a) grup,
b) grup abelian,
c) grup abelian ordonat,
d) grup complet.

33. Să se scrie într-o signatură convenabilă axiomele pentru:
a) inel,
b) inel asociativ şi comutativ,
c) inel Lie,
d) domeniu de integritate,
e) corp necomutativ,
f) corp,
g) corp algebric închis,
h) corp real închis.

34. În problemele 30–33 să se studieze independenţa sistemului de axiome. Să se determine sistemele de axiome independente.

Fie ZF teoria signaturii $\langle \in, = \rangle$, unde $\in$ este predicat de două variabile cu axiomele:

ZF_1. Axioma extensionalităţii:

$$(\forall xy)((\forall z)(z \in x \equiv z \in y) \equiv x = y).$$

ZF_2. Axioma perechilor:

$$(\forall xy)(\exists z)(\forall v)(v \in z \equiv (v = x \vee v = y)).$$

ZF_3. Axioma submulţimilor:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \equiv (z \in x \wedge \Phi(z)),$$

unde $\Phi(z)$ este o formulă cu o variabilă liberă z.

ZF_4. Axioma mulţimii părţilor:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \equiv (\forall v)(v \in z \supset v \in x)).$$

ZF_5. Axioma reuniunii:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \equiv (\exists w)(z \in w \wedge w \in x)).$$

ZF_6. Axioma alegerii:

$$(\forall x)\{(\forall y)(\forall z)((y \in x \wedge z \in x) \supset [(\exists v)(v \in y) \wedge ((\exists u)(u \in z \wedge u \in y) \supset$$
$$\supset z = y)]) \supset (\exists u)(\forall t)(t \in x \supset (\exists v)(\forall w)[u = w \equiv (w \in u \wedge w \in t)])\}.$$

ZF_7. Axioma infinității:

$$(\exists x)[(\forall y)(\neg(\exists z)(z \in y) \supset y \in x) \wedge$$
$$\wedge (\forall w)(w \in x \supset (\forall u)((\forall v)(v \in u \equiv (v = w \vee v \in w)) \supset u \in x))].$$

ZF_8. Axioma de fundamentare:

$$(\forall x)[(\forall y)\neg(y \in x) \vee (\exists y)(y \in x \wedge (\forall z)(z \in x \supset \neg(z \in y)))].$$

ZF_9. Axioma substituirii:

$$(\forall x)\{(\forall yzw)[(y \in x \wedge \psi(y, z) \wedge \psi(y, w)) \supset z = w] \supset$$
$$\supset (\exists r)(\forall s)[s \in r \equiv (\exists t)(t \in x \wedge \psi(t, s))]\},$$

unde $\psi(t, s)$ este o formulă ZF.

35. Să se demonstreze următoarele teoreme:

a) există mulțimea vidă $\emptyset$: $(\exists x)(\forall y)\neg y \in x$;

b) $(\forall x)\neg x \in x$;

c) $(\forall xy)(\neg x \in y \vee \neg y \in x)$;

d) axioma perechii ordonate:

$$(\forall abcd)(\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \supset (a = c \wedge b = d)),$$

unde:

$$\langle a, b\rangle \underset{\text{def}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\},$$

$$z = \{a\} \underset{\text{def}}{=} (\forall x)(x \in z \equiv x = a),$$

$$z = \{a, b\} \underset{\text{def}}{=} (\forall x)(x \in z \equiv (x = a \vee x = b));$$

e) existența lui $\cap x$ pentru fiecare x, adică

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \equiv (\forall w)(w \in x \supset z \in w)).$$

36. Vom defini predicatul Ord (x)(„x este număr ordinal") cu ajutorul condiției:

$$\text{Ord}(x) \underset{\text{def}}{=} (\forall yz)[(z \in y \wedge y \in x) \supset z \in x] \wedge (\forall yz)[(y \in x \wedge z \in x) \supset$$
$$\supset (z \in y \vee y = z \vee y \in z)].$$

Să se demonstreze că

a) $(\forall xy)\,[(\mathrm{Ord}\,(x) \wedge (y \in x)) \supset \mathrm{Ord}\,(y)]$;

b) $(\forall xyz)\,[\mathrm{Ord}\,(z) \supset (y \in z \supset (x \in y \supset x \in z))]$;

c) $(\forall xy)\,[(\mathrm{Ord}\,(x) \wedge \mathrm{Ord}\,(y)) \supset (x \in y \vee y \in x \vee x = y)]$

(numerele ordinale sînt comparabile în raport cu $\in$);

d) $(\forall x)\{\mathrm{Ord}(x) \supset (\forall y)\,[(\forall v)\,(v \in y \equiv (v \in x \vee v = x)) \supset \mathrm{Ord}\,(y)]\}$;

e) $(\forall x)\{(\forall y)(y \in x \supset \mathrm{Ord}(y)) \supset (\exists z)\,[z \in x \wedge (\forall v)\,(v \in x \supset \neg v \in z)]\}$;

f) inducţia transfinită:

$$\{[(\forall z)\,((\forall v)\,\neg v \in z \supset \Phi(z)) \wedge (\forall x)\,((\forall y)\,(y \in x \supset \Phi(y)) \supset \Phi(x))] \supset$$
$$\supset (\forall x)\,(\mathrm{Ord}\,(x) \supset \Phi(x))\},$$

unde $\Phi(z)$ este o formulă arbitrară cu o variabilă liberă z.

37. Vom defini $\delta = \sup s \underset{\mathrm{def}}{=} (\forall x)\,(x \in s \supset x \in \delta) \wedge \mathrm{Ord}\,(\delta) \wedge$
$\wedge\ (\forall z)\,(((\forall x)\,(x \in s \supset x \in z) \wedge \mathrm{Ord}\,(z)) \supset (\delta \in z \vee \delta = z))$.

Să se demonstreze că $(\forall s)\,\{(\forall x)\,(x \in s \supset \mathrm{Ord}\,(x)) \supset (\exists \delta)(\delta = \sup s)\}$.

38. Vom defini ω, funcţiile S, $+$ şi $\cdot$:

$$S(x) = x \cup \{x\},$$

$$x = \omega \underset{\mathrm{def}}{=} \emptyset \in x \wedge (\forall y)\,(y \in x \supset s(y) \in x) \wedge \mathrm{Ord}\,(x) \wedge$$
$$\wedge\ (\forall z)\,[(0 \in z \wedge (\forall y)\,(y \in z \supset (s\,(y) \in z)) \wedge \mathrm{Ord}\,(z)) \supset (z = x \vee x \in z)],$$

$$\alpha + \emptyset = \alpha, \qquad \alpha \cdot \emptyset = \emptyset,$$
$$\alpha + \beta = \sup\,\{\alpha + \gamma \mid \gamma \in \beta\}, \quad \alpha \cdot \beta = \sup\,\{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in \beta\}.$$

Să se demonstreze că

a) $(\exists x)\,x = \omega$,

b) $(\forall xy)\,(x \in \omega \wedge y \in \omega) \supset [(\exists z)\,(z = S(x)) \wedge (\exists z)\,(z = x + y) \wedge$
$\wedge\ (\exists z)\,(z = xy)]\}$.

39*. Să se demonstreze că dacă $\mathfrak{A}$ aparţine teoriei P (vezi §2.6, problema 15), atunci formula $\mathfrak{A}'$, obţinută din $\mathfrak{A}$ cu restrîngerea cuantificatorilor la mulţimea ω, aparţine teoriei ZF.

2.7. Filtre şi produse de filtrare

Se numeşte *filtru* pe mulţimea I o submulţime nevidă $\mathfrak{F}$ a mulţimii $P(I)$, care satisface condiţiile:

a) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$,

b) dacă $X, Y \in \mathfrak{F}$, atunci $(X \cap Y) \in \mathfrak{F}$,

c) dacă $X \in \mathfrak{F}$, $X \subseteq Y \subseteq \mathfrak{F}$, atunci $Y \in \mathfrak{F}$.

Filtrul $\mathfrak{F}$, care satisface condiţia:

d) $X \in \mathfrak{F}$ sau $(I - X) \in \mathfrak{F}$, oricare ar fi $X \subseteq I$,

se numeşte *ultrafiltru* pe I. Filtrul $\mathfrak{F}$ se numeşte *principal*, dacă conţine cel mai mic element. Filtrul $\mathfrak{F}$ se numeşte *numărabil complet*, dacă pentru orice sistem numărabil de elemente din $\mathfrak{F}$ intersecţia lor aparţine lui $\mathfrak{F}$.

1. Să se demonstreze că dacă $\mathfrak{F}$ este filtru pe I, atunci $I \in \mathfrak{F}$.

2. Fie $X \subseteq I$. Să se demonstreze că $\{Y \mid Y \subseteq I$ şi $Y \supseteq X\}$ este filtru pe I.

3. Fie $\mathfrak{F}$ filtru pe I şi $J \in \mathfrak{F}$. Să se arate că $\mathfrak{F}_1 = \{X \cap J \mid X \in \mathfrak{F}\}$ este filtru pe J, şi de asemenea că dacă $\mathfrak{F}$ nu este filtru principal, atunci nici $\mathfrak{F}_1$ nu este filtru principal.

4. Să se demonstreze că dacă o mulţime finită aparţine filtrului, atunci acest filtru este principal.

5. Să se demonstreze că orice ultrafiltru care nu este principal conţine toate mulţimile care au complementare finite.

6. Să se demonstreze că filtrul $\mathfrak{F}$ pe I este ultrafiltru, dacă şi numai dacă $\mathfrak{F}$ este mulţime maximală în mulţimea tuturor filtrelor pe I, ordonată cu incluziune.

7. Să se demonstreze că în mulţimea Φ a filtrelor pe I, ordonată cu incluziune, $\{I\}$ este cel mai mic element. Să se arate de asemenea, că dacă $\overline{\overline{I}} \geqslant 2$, atunci în Φ nu există cel mai mare element.

8. Fie I o mulţime infinită de putere α şi $\Phi = \{X \mid X \subseteq I$ şi $\overline{\overline{I - X}} < \alpha\}$. Să se demonstreze că Φ este filtru pe I. (Acest filtru se numeşte *filtru minimal Fréchet*). În general *filtru Fréchet* pe I se numeşte orice filtru care conţine Φ.

9. Să se demonstreze că sistemul ψ al submulţimilor mulţimii I este conţinut într-un filtru Fréchet dacă şi numai dacă orice intersecţie a unui număr finit de mulţimi ale sistemului are puterea egală cu puterea mulţimii I.

10. Să se demonstreze că orice ultrafiltru pe o mulţime numărabilă şi care nu este principal este filtru Fréchet.

11. Să se demonstreze că pentru ca pe I să existe un filtru care să conţină o mulţime $S \subseteq P(I)$, este necesar şi suficient ca intersecţia oricărui număr finit de elemente din S să fie nevidă.

12. Să se demonstreze că dacă reuniunea unei înşiruiri finite $\{A_i\}_{i \leqslant n}$ de submulţimi ale mulţimii I aparţine ultrafiltrului $\mathfrak{F}$, atunci cel puţin una dintre mulţimile A_i aparţine lui $\mathfrak{F}$.

13*. Să se arate că orice filtru poate fi extins la un ultrafiltru.

14. Să se demonstreze că orice filtru este intersecţia tuturor ultrafiltrelor care-l conţin.

15. Fie $\mathfrak{F}$ un filtru pe I, $A \subseteq I$ şi $\mathfrak{F}_A = \{X \cap A \mid X \in \mathfrak{F}\}$. Să se demonstreze că pentru ca $\mathfrak{F}_A$ să fie filtru pe A, este necesar şi suficient ca să avem $X \cap A \neq \emptyset$, oricare ar fi $X \in \mathfrak{F}$.

16. Fie $\mathfrak{F}$ un ultrafiltru pe I, $A \subseteq I$ şi $\mathfrak{F}_A = \{X \cap A \mid X \in \mathfrak{F}\}$. Să se demonstreze că pentru ca $\mathfrak{F}_A$ să fie ultrafiltru pe A, este necesar şi suficient ca $A \in \mathfrak{F}$.

17. Fie $\mathfrak{F}$ şi $\mathfrak{G}$ filtre pe I. Să se demonstreze că

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G} = \{X \cup Y \mid X \in \mathfrak{F} \text{ şi } Y \in \mathfrak{G}\}.$$

18. Fie $\mathfrak{F}$ un ultrafiltru, iar $G_1, G_2, \ldots, G_n$ filtre pe I. Să se demonstreze că dacă $\mathfrak{F} \supseteq G_1 \cap \ldots \cap G_n$, atunci există i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$, astfel încît $\mathfrak{F} \supseteq G_i$.

19. Să se construiască un ultrafiltru $\mathfrak{F}$ şi o familie de ultrafiltre $\{G_j\}_{j \in J}$, astfel încît $\mathfrak{F} \supseteq \bigcap_{j \in J} G_j$, însă $\mathfrak{F}$ să nu conţină G_j pentru nici un j.

20. Să se demonstreze că $\bigcap \mathfrak{F}$, unde $\mathfrak{F}$ este ultrafiltru, conţine cel mult un punct.

În cele ce urmează, vom presupune că signatura σ conţine simbolul predicativ binar $=$, unde pentru sistemele algebrice considerate $x = y$ este adevărată, dacă şi numai dacă x şi y coincid.

Fie $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ şi $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma\rangle$. Aplicaţia $\varphi : A \to B$ se numeşte *omomorfism* de la A în B, dacă pentru fiecare $a_1, \ldots, a_n \in A$:

a) $\mathfrak{A} \models P^n(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \models P^n(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$ oricare ar fi simbolul predicativ $P^n \in \sigma$;

b) $\varphi(F^m(a_1, \ldots, a_n)) = F^m(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$, oricare ar fi simbolul funcţional $F^m \in \sigma$.

Omomorfismul $\varphi : A \to B$ îl numim *tare*, dacă îndeplineşte condiţia:

c) dacă $\mathfrak{B} \models P^n(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$, atunci există $a_1', \ldots, a_n' \in A$, astfel încît $\varphi(a_1) = \varphi(a_1'), \ldots, \varphi(a_n) = \varphi(a_n')$ şi $\mathfrak{A} \models P^n(a_1', \ldots, a_n')$.

Corespondenţa biunivocă φ între A şi B o numim *izomorfism* de la $\mathfrak{A}$ în $\mathfrak{B}$, dacă φ şi φ^{-1} sînt omomorfisme.

Sistemele algebrice $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ le vom numi *izomorfe*, dacă există un izomorfism de la $\mathfrak{A}$ în $\mathfrak{B}$ şi vom scrie $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$. Dacă $\mathfrak{A}$ este izomorfă cu un subsistem al sistemului $\mathfrak{B}$, atunci $\mathfrak{A}$ se numeşte *izomorfa scufundării* în $\mathfrak{B}$.

Fie $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ familia sistemelor algebrice ale signaturii σ, iar A_i mulţimile de bază ale lui $\mathfrak{A}_i$.

Sistemul algebric $\mathfrak{A} = \langle \prod_{i\in I} A_i; \sigma\rangle$ îl vom numi *produsul direct* $(\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i)$ *al sistemului* $\mathfrak{A}_i$, unde

a) pentru fiecare simbol predicativ $P^n \in \sigma$,

$$\mathfrak{A} \models P^n(f_1, \ldots, f_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}_i \models P^n(f_1(i), \ldots, f_n(i)),$$

oricare ar fi $i \in I$,

b) pentru fiecare simbol funcţional $F^n \in \sigma$,

$$F^n(f_1, \ldots, f_n)(i) = F^n(f_1(i), \ldots, f_n(i)).$$

Fie $\mathfrak{F}$ un filtru pe I. Vom defini pe $\prod_{i\in I} A_i$ relaţia

$$f \underset{\mathfrak{F}}{\approx} g \Leftrightarrow \{i \mid f(i) = g(i)\} \in \mathfrak{F}$$

şi fie

$$f/\mathfrak{F} = \{g \mid f \underset{\mathfrak{F}}{\approx} g\},$$

$$\prod_{i\in I} A_i/\mathfrak{F} = \{f/\mathfrak{F} \mid f \in \prod_{i\in I} A_i\}.$$

Presupunem că pentru simbolul predicativ de n variabile P^n din σ

$$P^n(f_1/\mathfrak{F}, \ldots, f_n/\mathfrak{F}) = a \Leftrightarrow \{i \mid P^n(f_1(i), \ldots, f_n(i)) = a\} \in \mathfrak{F}$$

și că pentru simbolul funcțional de n variabile F^n din σ

$$F^n(f_1/\mathfrak{F}, \ldots, f_n/\mathfrak{F}) = F^n(f_1, \ldots, f_n)/\mathfrak{F}.$$

Sistemul $\mathfrak{A} = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F} = \langle \prod_{i \in I} A_i/\mathfrak{F} ; \sigma \rangle$ cu predicatele și funcțiile astfel definite se numește *produs filtrat* (sau *redus*) al sistemelor $\mathfrak{A}_i$ în raport cu filtrul $\mathfrak{F}$.

Dacă $\mathfrak{F}$ este ultrafiltru, atunci $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F}$ se numește *ultraprodus*. Dacă toți $\mathfrak{A}_i$ coincid și sînt egali cu $\mathfrak{A}$, atunci $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F}$ se numește *ultraputere* a lui $\mathfrak{A}$ și se notează $\mathfrak{A}^I/\mathfrak{D}$.

21. Să se demonstreze că $\mathfrak{F}$ este o relație de echivalență pe $\prod_{i \in I} A_i$.

22. Să se demonstreze că dacă $f_1 \underset{\mathfrak{F}}{\sim} f'_1, \ldots, f_n \underset{\mathfrak{F}}{\sim} f'_n$, atunci:

a) $P^n(f_1/\mathfrak{F}, \ldots, f_n/\mathfrak{F}) = P^n(f'_1/\mathfrak{F}, \ldots, f'_n/\mathfrak{F})$,

b) $\varphi^n(f_1, \ldots, f_n) \underset{\mathfrak{F}}{\sim} F^n(f'_1, \ldots, f'_n)$.

23. Să se demonstreze că oricare ar fi I,

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \simeq \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F}, \text{ unde } \mathfrak{F} = \{I\}.$$

24. Să se demonstreze că dacă o formulă care nu conține $\neg$ și $\supset$ este adevărată pe produsul direct $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, atunci ea este adevărată pe produsul filtrat $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F}$ în raport cu fiecare filtru $\mathfrak{F}$.

25. Să se demonstreze că dacă $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$ sînt filtre pe I și $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$, atunci aplicația φ, definită prin $\varphi(f/\mathfrak{F}) = f/\mathfrak{F}_1$, este omomorfism de la $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F}$ pe $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F}_1$.

26. Fie $J \in \mathfrak{F}$ și $\mathfrak{F}$ filtru pe I. Să se demonstreze că

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F} \simeq \prod_{j \in J} \mathfrak{A}_j/\mathfrak{F}_J,$$

unde $\mathfrak{F}_J$ este filtrul obținut prin intersecția lui J cu mulțimile filtrului $\mathfrak{F}$. În particular, dacă $\mathfrak{F}$ este filtrul principal, alcătuit din supramulțimile mulțimii J, atunci

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F} \simeq \prod_{j \in J} \mathfrak{A}_j.$$

27. Fie I finită și $\mathfrak{F}$ filtru pe I. Să se demonstreze că $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F}$ este izomorf cu produsul direct al unor sisteme $\mathfrak{A}_i$.

28. Fie $\{I_k \mid k \in K\}$ o partiție a lui I și fie date pe I_k filtrele $\mathfrak{F}_k$, iar pe K filtrul $\mathfrak{F}^*$. Să se arate că

$$\mathfrak{F} = \{X \subseteq I \mid \{k \mid k \in K \text{ și } X \cap I_k \in \mathfrak{F}_k\} \in \mathfrak{F}^*\}$$

este filtru pe I și oricare ar fi $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$,

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F} \simeq \prod_{k \in K} (\prod_{i \in I_k} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F}_k)/\mathfrak{F}^*$$

(legea asociativă pentru produse filtrate).

29. Să se demonstreze că dacă intersecția J a tuturor mulțimilor filtrului $\mathfrak{F}$ pe I este nevidă și nu aparține lui $\mathfrak{F}$, atunci

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F} \simeq \prod_{j \in J} \mathfrak{A}_j \cdot (\prod_{\beta \in J'} \mathfrak{A}_\beta /\mathfrak{F}_{J'}),$$

unde $J' = I - J$ și $\mathfrak{F}_{J'}$ este filtru pe J', obținut prin intersecția lui J' cu toate mulțimile filtrului $\mathfrak{F}$.

30. Fie $\varphi_i : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{B}_i$ omomorfisme, $\varphi(f/\mathfrak{F}) = (\varphi'(f))/\mathfrak{F}$, unde $(\varphi'(f))(j) = \varphi_j(f(j))$ pentru $f \in \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, $j \in I$. Să se demonstreze atunci că φ este omomorfism de la $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F}$ în $\prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i/\mathfrak{F}$. Să se demonstreze că dacă φ_i sînt omomorfisme (izomorfisme) tari, atunci așa este și φ'.

31. O formulă $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ a signaturii Ω o vom numi *filtrată condițional* în raport cu filtrul $\mathfrak{F}$ pe I, dacă pentru orice sistem algebric $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ al signaturii Ω și orice $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, din aceea că $\{i \mid \mathfrak{A}_i \models \Phi(a_1(i), \ldots, a_n(i))\} \in \mathfrak{F}$ rezultă că

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F} \models \Phi(a_1/\mathfrak{F}, \ldots, a_n/\mathfrak{F}).$$

Să se demonstreze că dacă Φ_1 și Φ_2 sînt filtrate condițional în raport cu $\mathfrak{F}$, atunci $(\Phi_1 \wedge \Phi_2)$, $(\exists x)\Phi_1$, $(\forall x)\Phi_1$ sînt, de asemenea, filtrate condițional în raport cu $\mathfrak{F}$.

32. Vom spune că formula $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ a signaturii Ω este filtrată în raport cu filtrul $\mathfrak{F}$ pe I, dacă pentru orice sistem algebric $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ al signaturii Ω și orice $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, $\{i \mid \mathfrak{A}_i \models \Phi(a_1(i), \ldots, a_n(i))\} \in \mathfrak{F}$ dacă și numai dacă $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F} \models \Phi(a_1/\mathfrak{F}, \ldots, a_n/\mathfrak{F})$.

Să se demonstreze că dacă Φ_1 și Φ_2 sînt filtrate în raport cu $\mathfrak{F}$, atunci $(\Phi_1 \wedge \Phi_2)$, $(\exists x)\Phi_1$ sînt filtrate tot în raport cu $\mathfrak{F}$.

33. Să se demonstreze că formulele atomice sînt filtrate în raport cu orice filtru.

34. Fie Φ filtrată în raport cu ultrafiltrul $\mathfrak{F}$. Să se demonstreze că $\neg\Phi$ este filtrată în raport cu $\mathfrak{F}$.

35. Să se demonstreze că orice formulă este filtrată în raport cu orice ultrafiltru (teorema lui Losi).

36. Fie Φ_1 filtrată în raport cu filtrul $\mathfrak{F}$ pe I, iar Φ_2 filtrată condițional în raport cu $\mathfrak{F}$. Să se demonstreze că $(\Phi_1 \supset \Phi_2)$ este filtrată condițional în raport cu $\mathfrak{F}$.

37. O formulă o vom numi *formula lui Hornov*, dacă ea se obține din formule de forma $\neg\Phi_1$, $(\Phi_1 \supset \Phi_2)$, Φ_2, unde Φ_1 este conjuncție de formule atomice, iar Φ_2 este formulă atomică, cu ajutorul operației de conjuncție și aplicarea cuantificatorilor. Să se demonstreze că formulele lui Hornov sînt filtrate condițional în raport cu orice filtru.

38. Să se demonstreze că ultraprodusul de mulțimi total ordonate este total ordonat.

39. Să se demonstreze că produsul filtrat al mulțimilor preordonate este preordonat (vezi § 1.3, problema 23).

40. Să se demonstreze că produsul filtrat al mulțimilor parțial ordonate este parțial ordonat.

41. Să presupunem că un sistem finit $\mathfrak{A}$ conține n elemente. Să se demonstreze că orice ultraputere a lui $\mathfrak{A}$ conține tot n elemente.

42. Să se arate că dacă puterile tuturor factorilor nu sînt mai mari ca numărul natural n, atunci puterea ultraputerilor nu este mai mare ca n.

43. Să se demonstreze că orice produs filtrat al sistemelor infinite este infinit.

44. Să presupunem că pentru orice n în familia $\{\mathfrak{A}_\iota\}_{\iota\in I}$ există numai un număr finit de sisteme de putere n. Să se demonstreze că în acest caz ultraprodusul $\prod\limits_{\iota\in I} \mathfrak{A}_\iota/\mathfrak{F}$ în raport cu un ultrafiltru neprincipal $\mathfrak{F}$ este infinit.

45. Să presupunem că toți factorii $\mathfrak{A}_\alpha$, $(\alpha \in N)$, sînt finiți sau numărabili, $\mathfrak{F}$ este un ultrafiltru neprincipal pe mulțimea numerelor naturale N și $\{\alpha \mid \overline{\overline{\mathfrak{A}_\alpha}} = n\} \notin \mathfrak{F}$, oricare ar fi n natural. Să se demonstreze că puterea $\prod\limits_{\alpha\in N} \mathfrak{A}_\alpha/\mathfrak{F}$ este un continuum.

46. Să se demonstreze că pentru orice sistem algebric infinit $\mathfrak{A}$ și orice putere dată $\mathfrak{m}$ există o ultraputere a sistemului $\mathfrak{A}$ cu puterea mai mare decît $\mathfrak{m}$.

47. Să se demonstreze că pentru orice mulţime infinită I există un filtru $\mathfrak{F}$ pe I, astfel încît pentru orice filtru $\mathfrak{F}_1$ pe I, care conţine $\mathfrak{F}$, şi fiecare sistem infinit $\mathfrak{A}$,

$$(\overline{\overline{\mathfrak{A}^I/\mathfrak{F}_1}}) \geqslant 2^{\bar{I}}.$$

48. Să se demonstreze că dacă $\mathfrak{F}$ nu este un ultrafiltru complet numărabil şi pentru orice n natural $\{i \mid \overline{\overline{\mathfrak{A}}}_i = n\} \notin \mathfrak{F}$, atunci $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F}$ are puterea cel puţin cît a continuumului.

49*. Fie $\mathfrak{F}$ un ultrafiltru neprincipal pe N, iar Z_{p_i} grupuri ciclice de ordin p_i, ($p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5, \ldots$). Să se demonstreze că $\prod_{i \in N} Z_{p_i}/\mathfrak{F}$ este izomorf cu produsul direct al continuumului copie a grupului aditiv al numerelor raţionale.

50. Presupunem că σ este o signatură finită, $\{\mathfrak{A}_i = \langle M_i ; \sigma\rangle\}_{i \in I}$ este sistemul sistemelor algebrice finite ale signaturii σ şi există n astfel încît $\overline{\overline{M}}_i \leqslant n$. Să se demonstreze că pentru orice ultrafiltru $\mathfrak{F}$ pe I există $i_0 \in I$ astfel încît $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F} \simeq \mathfrak{A}_{i_0}$.

51. Să se demonstreze că dacă $\mathfrak{F}$ este un ultrafiltru complet nenumărabil pe I şi sistemul algebric $\mathfrak{A}$ este infinit, atunci scufundarea naturală $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^I/\mathfrak{F}$, adică $\varphi(a) = f/\mathfrak{F}$, unde $f(i) = a$, oricare ar fi $i \in I$, nu va fi o aplicaţie biunivocă a lui $\mathfrak{A}$ pe $\mathfrak{A}^I/\mathfrak{F}$.

52*. Să se demonstreze că dacă orice submodel finit al modelului $\mathfrak{A}$ este izomorf scufundat într-un model din clasa modelelor K, atunci $\mathfrak{A}$ este izomorf scufundat într-un ultraprodus convenabil al modelelor din K.

2.8. Clase axiomatizabile

Clasa K a sistemelor algebrice de signatură σ o vom numi clasă *axiomatizabilă*, dacă există un ansamblu Σ de formule de signatură σ, pentru care K este familia tuturor modelelor. În acest caz Σ se numeşte *sistem de axiome* pentru K. Sistemele algebrice din clasa K le vom numi *K-sisteme*. Vom numi *K-subsistem* (*K-extindere*) a unui sistem dat $\mathfrak{A}$ un sistem din clasa K, care este subsistem (extindere) al lui $\mathfrak{A}$. Clasa K o vom numi *abstractă*, dacă împreună cu orice sistem algebric K conţine toate sistemele algebrice izomorfe cu ea. Sistemele $\mathfrak{A} = \langle A ; \sigma\rangle$ şi $\mathfrak{B} = \langle B ; \sigma\rangle$ le vom numi *echivalente elementar*, dacă pentru orice propoziţie Φ a signaturii σ:

$$\mathfrak{A} \models \Phi \Rightarrow \mathfrak{B} \models \Phi.$$

Aplicaţia $\varphi : A \to B$ o vom numi elementară, dacă pentru orice formulă $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ şi orice $a_1, \ldots, a_n \in A$:

$$\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \Phi(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)).$$

$\mathfrak{A}$ se numeşte *subsistem elementar* al lui $\mathfrak{B}$, iar $\mathfrak{B}$ *extindere elementară* a lui $\mathfrak{A}$ (simbolic $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$), dacă

a) $\mathfrak{A}$ este subsistem al lui $\mathfrak{B}$,

b) aplicaţia identică a lui $\mathfrak{A}$ în $\mathfrak{B}$ este elementară.

Vom spune că clasa K este *universal axiomatizabilă*, dacă există un sistem de axiome pentru K, care este format din $\forall$-formule (vezi § 2.4, problema 5).

1. Să se demonstreze că reuniunea şi intersecţia claselor axiomatizabile sînt clase axiomatizabile.

2. Fie K o clasă axiomatizabilă, $\mathfrak{A} \in K$ şi $\mathfrak{A}'$ izomorfă cu $\mathfrak{A}$. Să se arate că $\mathfrak{A}' \in K$.

3. Fie K o clasă axiomatizabilă $\{i \mid i \in I,\ \mathfrak{A}_i \in K\} \in \mathfrak{F}$, unde $\mathfrak{F}$ este ultrafiltru pe I. Să se demonstreze că $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F} \in K$.

4*. Să se demonstreze că clasa K este axiomatizabilă dacă şi numai dacă K este abstractă, închisă în raport cu ultraprodusele şi închisă în raport cu formarea subsistemelor elementare.

5. Să se demonstreze că dacă clasa K a sistemelor algebrice este axiomatizabilă, atunci clasa K a tuturor sistemelor infinite din K este tot axiomatizabilă.

6. Fie K o clasă axiomatizabilă, care conţine sisteme finite cu un număr oricît de mare de elemente. Să se construiască un sistem infinit din clasa K. Să se demonstreze că K conţine un sistem infinit a cărui putere este cel mult cît puterea continuumului.

7. Să se demonstreze că nu sînt axiomatizabile:

a) clasa grupurilor finite,

b) clasa grupurilor abeliene finite,

c) clasa grupurilor libere,

d) clasa grupurilor ciclice.

8. Să se demonstreze că clasa corpurilor de caracteristică finită este neaxiomatizabilă.

9. Fie $A_0, A_1, \ldots$ familia mulţimilor bine ordonate şi $\bar{\bar{A}}_k \geqslant k$. Să se demonstreze că ultraprodusul $\prod\limits_{i \in N} A_i/\mathfrak{F}$ este bine ordonat în raport cu ordinea indusă, dacă şi numai dacă $\mathfrak{F}$ este ultrafiltru principal. Să se deducă de aici că clasa mulţimilor bine ordonate este neaxiomatizabilă.

10. Fie K o clasă axiomatizabilă finită (numărul axiomelor este finit) şi $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F} \in K$, unde $\mathfrak{F}$ este ultrafiltru pe I. Să se demonstreze că $\{i \mid \mathfrak{A}_i \in K\} \in \mathfrak{F}$.

11*. Să se construiască un exemplu de clasă axiomatizabilă K, astfel încît această clasă K să conţină modele finite cu un număr oricît de mare de elemente, iar toate modelele infinite din K să aibă puterea egală sau mai mare decît puterea continuumului.

12*. Să se construiască un exemplu de clasă axiomatizabilă, astfel încît în K să existe un model numărabil, iar toate modelele clasei K diferite de acesta, care sînt extinderi ale acestui model, să aibă puterea egală sau mai mare decît puterea continuumului.

13*. Să se demonstreze că clasa K este axiomatizabilă, dacă şi numai dacă ea este închisă în raport cu ultraprodusele şi echivalenţa elementară.

14. Să presupunem că clasa K este axiomatizabilă, PK este clasa produselor directe ale sistemelor din K, iar SPK este clasa sistemelor izomorfe subsistemelor din PK. Să se demonstreze că clasa SPK este universal axiomatizabilă.

15*. Să se arate că clasa K este universal axiomatizabilă, dacă şi numai dacă K este închisă relativ la ultraproduse, este abstractă şi ereditară (închisă relativ la luarea subsistemelor).

16*. Să se demonstreze teorema de *compactitate*: fie dată o familie infinită de clase axiomatizabile. Dacă intersecţia fiecărei subfamilii finite a claselor acestei familii este nevidă, atunci intersecţia tuturor claselor familiei este nevidă.

17. Să se demonstreze că pentru ca clasa K să fie axiomatizabilă finit, este necesar şi suficient, ca clasa K şi complementara ei să fie axiomatizabile.

18. Fie K o clasă axiomatizabilă. Să se demonstreze că dacă K conţine sisteme finite cu un număr oricît de mare de elemente, atunci din aceea că $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathfrak{F} \in K$ nu urmează că $\{i \mid \mathfrak{A}_i \in K\} \in \mathfrak{F}$.

19. Să se demonstreze că orice mulţime finită sau numărabilă de elemente ale unui sistem dintr-o clasă axiomatizabilă K de signatură finită este inclusă într-un subsistem K finit sau numărabil al acestui sistem.

20. Să se demonstreze că orice sistem dintr-o clasă axiomatizabilă K de signatură finită conţine un K-subsistem finit sau numărabil.

21. Să se demonstreze *teorema Lövenheim-Skolem*: Fie K o clasă axiomatizabilă, a cărei signatură Ω are puterea $\mathfrak{p}$ şi fie $\mathfrak{A} = \langle A ; \Omega \rangle$ un K-sistem. Atunci fiecare submulţime $A' \subseteq A$, care are puterea $\mathfrak{m}$, este închisă într-un K-subsistem convenabil al sistemului $\mathfrak{A}$ de putere mai mică sau egală cu $\mathfrak{m} + \mathfrak{p} + \aleph_0$.

22. Să se demonstreze *teorema de extindere* a lui A. I. Malţev: Dacă $\mathfrak{A}$ este un sistem infinit al clasei axiomatizabile K şi $\mathfrak{m}$ un număr cardinal arbitrar, atunci în K se va găsi un sistem de putere mai mare ca $\mathfrak{m}$ şi care conţine pe $\mathfrak{A}$ ca subsistem. Dacă clasa axiomatizabilă K conţine sisteme cu un număr oricît de mare de elemente, atunci K conţine şi un sistem infinit.

23*. Să presupunem că o clasă axiomatizabilă K conţine un sistem $\mathfrak{A}$ de putere infinită $\mathfrak{m}$. Să se demonstreze că $\mathfrak{A}$ are K-extinderi proprii de putere $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$.

24. Să presupunem că o clasă axiomatizabilă K posedă sisteme cu puterile $\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \ldots$ Să se demonstreze că K conţine un sistem cu puterea cuprinsă între $\sum\limits_{i \in N} \mathfrak{m}_i$ şi $\prod\limits_{i \in N} \mathfrak{m}_i$.

25. Să se demonstreze că orice sistem infinit $\mathfrak{A}$ al unei clase axiomatizabile K admite o K-extindere de orice putere dată dinainte, mai mare decît $\bar{\bar{\mathfrak{A}}} + \bar{\bar{\sigma}}$.

26*. Să presupunem că este adevărată *ipoteza generalizată a continuumului*: pentru orice numere cardinale $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ din $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n} \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$ urmează că $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ sau $\mathfrak{n} = 2^{\mathfrak{m}}$. Să se demonstreze că pentru fiecare clasă axiomatizabilă K este adevărată numai una dintre următoarele condiţii:

a) puterile sistemelor finite din K sînt mărginite de un număr natural şi K constă numai din sisteme finite.

b) puterile sistemelor finite din K sînt mărginite de un număr natural şi există un număr cardinal infinit $\mathfrak{m}$, astfel încît, pentru orice număr cardinal infinit $\mathfrak{n}$, K conţine un model de putere $\mathfrak{n}$, dacă şi numai dacă $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$,

c) puterile sistemelor finite din K nu sînt mărginite şi există un număr cardinal infinit $\mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph}$, astfel încît K conţine un sistem de putere infinită $\mathfrak{n}$, dacă şi numai dacă $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$. Să se dea exemple de clase pentru fiecare din cazurile a), b), c).

27. Să se demonstreze că dacă $\varphi : A \to A'$ este o aplicaţie elementară, atunci φ este biunivocă şi pentru orice formulă $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ şi orice $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \Phi(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)).$$

28. Să se demonstreze că aplicația canonică $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^I/\mathfrak{F}$, pentru orice ultrafiltru $\mathfrak{F}$ pe I, este definită astfel:

$\varphi(a) = f/\mathfrak{F}$, unde $f(i) = a$, oricare ar fi $i \in I$, este scufundarea elementară a lui $\mathfrak{A}$ în $\mathfrak{A}^I/\mathfrak{F}$.

29. Fie $\mathfrak{N} = \langle N; \leqslant \rangle, \mathfrak{M} = \langle M; \leqslant \rangle$, unde N este mulțimea numerelor naturale, M este mulțimea numerelor întregi pozitive. Să se arate că $\mathfrak{N}$ și $\mathfrak{M}$ sînt echivalente elementar, însă $\mathfrak{N}$ nu este extindere elementară a lui $\mathfrak{M}$.

30. Să se demonstreze că orice clasă axiomatizabilă constă din reuniunea sistemelor algebrice ale unei clase universale axiomatizabile (vezi problema 31 din § 2.4).

31. Fie $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \ldots$ o mulțime de sisteme astfel încît, pentru orice i, $\mathfrak{A}_{i+1}$ este extinderea elementară a lui $\mathfrak{A}_i$. Să se demonstreze că $\bigcup_i \mathfrak{A}_i$ este extinderea elementară a oricărui $\mathfrak{A}_i$.

32. Să se demonstreze că orice teorie necontradictorie cu signatura numărabilă are cel mult un model numărabil (caz particular al teoremei Lövenheim-Skolem).

33. Să se demonstreze că orice sistem infinit de signatură σ finită sau numărabilă este extinderea elementară a unui sistem numărabil de signatură σ.

34. Fie $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ un sistem infinit, $X \subseteq A$ și $\mathfrak{m}$ o putere, astfel încît $\max\{\overline{\overline{\sigma}}, \overline{\overline{X}}, \aleph_0 \leqslant\} \mathfrak{m} \leqslant \overline{\overline{A}}$. Să se demonstreze că există un subsistem elementar $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma \rangle$ de putere $\mathfrak{m}$, astfel încît $X \subseteq B$.

35. Fie $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ un sistem infinit și $\mathfrak{m} \geqslant \max\{\overline{\overline{A}}; \overline{\overline{\sigma}}\}$. Să se demonstreze că $\mathfrak{A}$ are o extindere elementară de putere $\mathfrak{m}$.

36. Să se demonstreze că dacă ultraputerile $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$ sînt izomorfe, atunci $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$ sînt echivalente elementar. Dacă acceptăm ipoteza generalizată a continuumului (vezi § 2.8, problema 26), atunci este adevărată și reciproca: din echivalența elementară a lui $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$ rezultă un izomorfism între ultraputeri convenabile pe unul și același filtru.

37. Să se demonstreze că pentru ca $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$ să fie echivalente elementar, este necesar și suficient să existe un astfel de ultrafiltru $\mathfrak{F}$ pe I, pentru care există o aplicație elementară de la $\mathfrak{B}$ în $\mathfrak{A}^I/\mathfrak{F}$.

38. Să se demonstreze că dacă $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$ sînt echivalente elementar și $\mathfrak{A}$ este finită, atunci $\mathfrak{B}$ este finită și $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$.

39. Să se demonstreze că pentru ca o teorie T să fie completă, este necesar și suficient ca toate modelele ei să fie echivalente elementar.

40. Să se demonstreze că clasa modelelor unei teorii categorice constă (pînă la un izomorfism) dintr-un singur sistem finit. (Teoria se numeşte *categorică*, dacă toate modelele ei sînt izomorfe).

41. Să se demonstreze criteriul lui Vaught : Fie T o teorie elementară cu modele infinite, care este $\mathfrak{m}$-categorică cu o putere oarecare $\mathfrak{m}$, unde $\mathfrak{m} \geqslant \max\{\bar{\bar{\sigma}}, \aleph_0\}$. Atunci T este o teorie completă. (O teorie se numeşte $\mathfrak{m}$-*categorică*, dacă toate modelele ei de putere $\mathfrak{m}$ sînt izomorfe).

BIBLIOGRAFIE

1. A l e k s a n d r o v, P. S. *Vvedenie v obşciuiu teoriiu mnojestv i funkţii*. Moscova, Leningrad, 1948.
2. C h u r c h, A. *Introduction to mathematical logic*. Princeton University Press, Princeton, 1956.
3. H a u s d o r f f, F. *Mengenlehre*. Berlin-Leipzig, 1927.
4. H i l b e r t, D., A c k e r m a n n, W. *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlin, Springer, 1972.
5. G o o d s t e i n, R. L. *Matematiceskaia loghika*. IL, Moscova, 1961.
6. K l e e n e, S. C. *Introduction to Metamathematics*. Wolters Noordhofs Publishing, Groningenn, 1971.
7. K u r a t o w s k i, K., M o s t o w s k i, A. *Teoriia mnojestv*. Moscova, „Mir", 1970.
8. L a v r o v, I. A. *Loghika i algoritmi*. Novosibirsk, NGU, 1970.
9. L y n d o n, R. *Zametki po loghike*. Moscova, „Mir", 1968.
10. M a l ţ e v, A. I. *Alghebraiceskie sistemi*. Moscova, „Nauka", 1970.
11. S t o l l, R. *Mnojestvo, loghika, aksiomaticeskaia teoriia*. Moscova, „Prosveşcenie", 1968.

Vă mai recomandăm următoarele lucrări:

12. B e c h e a n u, M., C ă z ă n e s c u, V., N ă s t ă s e s c u, C., R u d e a n u, S. *Logică matematică şi teoria mulţimilor*. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1972.
13. F r e u d e n t h a l, H. *Limbajul logicii matematice*. Bucureşti, Editura tehnică, 1973.
14. K a u f m a n n, A., P r é c i g o u t, M. *Elemente de teoria mulţimilor şi algebră modernă*. Vol. I şi II, Bucureşti, Editura tehnică, 1973.
15. K u r a t o w s k i, K. *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*. Bucureşti, Editura tehnică, 1969.
16. L o v i n, M., P r e o t e a s a, P., P o p o v i c i, C. P. *Informatică*. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1972.
17. M o i s i l, Gr. C. *Elemente de logică matematică şi teoria mulţimilor*. Bucureşti, Editura ştiinţifică, 1968.
18. N o v i k o v, P. S. *Elemente de logică matematică*. Bucureşti, Editura ştiinţifică, 1966.