

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

Marius Burtea

Georgeta Burtea

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a



FILIERA TEORETICĂ

TRUNCHI COMUN + CURRICULUM DIFERENȚIAT

Profil real

specializarea: științe ale naturii

FILIERA TEHNOLOGICĂ

TRUNCHI COMUN

toate calificările profesionale



Editura CARMINIS

Marius Burtea

Georgeta Burtea

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

M₂

Trunchi comun

+

curriculum diferențiat

„Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului Educației, Cercetării și Tineretului nr. 1262/32 din 06.06.2007 în urma evaluării calitative și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al ministrului Educației și Cercetării nr. 5959 din 22.12.2006“

Copertă: **Giorgian Gînguț**

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

BURTEA, MARIUS

Matematică M2 : trunchi comun și curriculum diferențiat : clasa a XII-a /

Marius Burtea, Georgeta Burtea. – Pitești: Carminis Educațional, 2007

272 p.; il.; 23,5 cm

ISBN 978-973-123-019-1

I. Burtea, Georgeta

51(075.35)

© Toate drepturile aparțin Editurii CARMINIS

Referenți: **Prof. Univ. Dr. Radovici Mărculescu Paul**, Universitatea din Pitești
Prof. Gr. I Georgică Marineci, Colegiul Național „I. C. Brătianu“, Pitești

Redactor: **Carmen Joldescu**

Tehnoredactori: **Alina Pieptea, Marius Hîrzoiu**

Corectură: **Marius Burtea, Georgeta Burtea**

Tehnoredactare computerizată: **Editura CARMINIS**

Tiparul executat la **S.C. TIPARG S.A. PITEȘTI**

Comenzile se primesc la

tel./fax: **0248253022, 0248252467** sau pe adresa: **Editura CARMINIS**

str. Exercițiu, bl. D 22, sc. B, ap. 1, cod 110242, Pitești, jud. Argeș

www.carminis.ro

e-mail: editura_carminis@yahoo.com

ISBN 978-973-123-019-1

PREFAȚĂ

Manualul are la bază PROGRAMĂ 2 și se adresează elevilor de liceu din clasa a XII-a de la următoarele filiere, profiluri și specializări:

- **filierea teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii:**
2 ore/săptămână (TC) + 1 oră/săptămână (CD);
- **filierea tehnologică, toate calificările profesionale:**
3 ore/săptămână (TC).

Acesta este conceput având în vedere noul curriculum școlar elaborat pentru clasa a XII-a, vizând formarea de competențe, valori și aptitudini în actul învățării, elemente care să dea posibilitatea elevilor să perceapă mai ușor dimensiunile realității înconjurătoare și să aplice metodele matematice în situații cât mai diverse.

Manualul este format în esență din două părți distincte care continuă în mod coerent matematica studiată în clasa a XI-a.

Partea I, intitulată ELEMENTE DE ALGEBRĂ, dezvoltă următoarele capitole: *Grupuri, Inele și corpuri, Inele de polinoame.*

Partea a II-a, intitulată ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ, dezvoltă următoarele capitole: *Primitive (antiderivate), Integrala definită, Aplicații ale integralei definite.*

Partea teoretică a manualului este redată într-o manieră directă, concisă, definind noile concepte matematice și apoi aplicând aceste concepte în exerciții și probleme corespunzătoare.

Când este cazul, partea teoretică este introdusă într-o manieră problematizată pornind de la situații-problemă a căror rezolvare legitimează introducerea și dezvoltarea diferitelor noțiuni și metode de lucru.

Partea aplicativă a manualului este alcătuită din:

- *Exerciții și probleme rezolvate.* Acestea apar cu regularitate în fiecare paragraf, după introducerea unor noțiuni teoretice. Ele oferă modele de aplicare și folosire a elementelor teoretice în exerciții și probleme noi.

- *Teste de evaluare,* care apar la sfârșit de capitol.

- *Seturi de exerciții și probleme* structurate în două categorii:

- a) *Exersare.* În această categorie exercițiile sunt numerotate cu simbolul „E”, iar parcurgerea lor asigură însușirea și folosirea noțiunilor fundamentale învățate într-o lecție sau în grupuri de lecții.

b) Aprofundare. În acest grup de exerciții și probleme, notate cu simbolul „A”, se întâlnesc probleme a căror rezolvare presupune aplicarea noilor noțiuni în contexte variate și realizarea unor conexiuni intra- și extradisciplinare.

- *Teme*, destinate aplicării imediate a unor algoritmi de lucru folosiți în modelele de exerciții rezolvate.

- *Teme de studiu* și *Teme de proiect*, care au drept scop aprofundarea unor noțiuni sau aplicarea acestora în situații noi.

De asemenea, acestea pot constitui subiectul unor referate tematice care să completeze portofoliul elevului.

- *Teme de sinteză* destinate recapitulării și sistematizării cunoștințelor, în vederea susținerii examenului de bacalaureat.

Ca auxiliare în înțelegerea, învățarea și aplicarea unor noțiuni sunt casetele în care se prezintă formule de calcul întâlnite în anii precedenți, rubrică intitulată *Ne reamintim*.

Manualul se încheie cu un paragraf de INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI elaborate pentru un număr semnificativ de exerciții și probleme.

Autorii

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

I. GRUPURI



1 Legi de compoziție pe o mulțime

1.1. Definiții și exemple

Din studiul diferitelor operații întâlnite până acum (adunarea și înmulțirea numerelor, compunerea funcțiilor, adunarea și înmulțirea matricelor etc.) se pot desprinde concluziile:

- există o mare diversitate atât în ceea ce privește natura mulțimilor pe care sunt definite aceste operații (numere, funcții, matrice, vectori, șiruri, perechi ordonate...), cât și în ceea ce privește regulile specifice după care se operează cu elementele acestor mulțimi;
- operațiile algebrice întâlnite au o serie de proprietăți comune, indiferent de natura elementelor asupra cărora operează (comutativitate, asociativitate etc.).

Reținând aspectele esențiale ale operațiilor, în acest capitol se va face o prezentare a acestora într-o formă generală prin intermediul conceptului de lege de compoziție, concept care dă posibilitatea folosirii metodei axiomatice în algebră.

❖ DEFINIȚII

Fie M o mulțime nevidă.

- O aplicație $\varphi : M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$ se numește **lege de compoziție** (operație algebrică) pe mulțimea M .
- Elementul $\varphi(x, y) \in M$, care corespunde prin aplicația φ perechii ordonate $(x, y) \in M \times M$ se numește **compusul** lui x cu y prin legea de compoziție φ .

📖 Exemple de legi de compoziție

- ♦ Operația de adunare „+” și operația de înmulțire „·” pe mulțimile de numere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
 „+”: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $(x, y) \rightarrow x + y$,
 „·”: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $(x, y) \rightarrow x \cdot y$,
 „+”: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \rightarrow x + y$,
 „·”: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \rightarrow x \cdot y$, etc.

- Operația de adunare „+” pe mulțimea $\mathcal{V}$ a vectorilor din plan:
„+”: $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, $(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \vec{a} + \vec{b}$.
- Operațiile de reuniune „ $\cup$ ”, intersecție „ $\cap$ ”, diferență „ $\setminus$ ”, diferență simetrică „ Δ ”, pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$ a părților (submulțimilor) unei mulțimi M :
„ $\cup$ ”: $\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$, $(A, B) \rightarrow A \cup B$,
„ $\cap$ ”: $\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$, $(A, B) \rightarrow A \cap B$, etc.
- Operația de compunere „ $\circ$ ” a funcțiilor pe mulțimea $\mathcal{F}(M) = \{f \mid f: M \rightarrow M\}$:
„ $\circ$ ”: $\mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$, $(f, g) \rightarrow f \circ g$.

Legile de compoziție sunt date în diferite notații:

- În notație aditivă se scrie $\varphi(x, y) = x + y$; elementul $x + y \in M$ se numește **suma** lui x cu y , iar operația φ se numește **adunare**.
 - În notație multiplicativă se scrie $\varphi(x, y) = x \cdot y$; elementul $x \cdot y \in M$ se numește **produsul** lui x cu y , iar operația φ se numește **înmulțire**.
- Deseori, dacă $\varphi: M \times M \rightarrow M$ este o lege de compoziție (operație algebrică) pe mulțimea M , în loc de notația $\varphi(x, y)$ se folosesc notațiile: $x \varphi y$, $x \circ y$, $x * y$, $x \top y$, $x \perp y$ etc.

Problemă rezolvată

☒ Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește operația algebrică „ $\top$ ”, astfel:

$$\top: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \top y = xy - x - y.$$

a) Să se calculeze: $2 \top 3$, $5 \top (-3)$, $(-6) \top (-8)$.

b) Pentru care elemente $x \in \mathbb{R}$, avem $x \top 2 = 8$?

c) Să se rezolve ecuația $x \top (x+1) = 1$.

Soluție

a) $2 \top 3 = 2 \cdot 3 - 2 - 3 = 1$; $5 \top (-3) = 5 \cdot (-3) - 5 - (-3) = -17$, iar $(-6) \top (-8) = (-6) \cdot (-8) - (-6) - (-8) = 62$.

b) Avem: $x \top 2 = x \cdot 2 - x - 2 = x - 2$. Din egalitatea $x - 2 = 8$ se obține $x = 10$.

c) Avem: $x \top (x+1) = x(x+1) - x - (x+1) = x^2 - x - 1$. Rezultă ecuația $x^2 - x - 2 = 0$ cu soluțiile $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Așadar: $(-1) \top 0 = 1$ și $2 \top 3 = 1$.

1.2. Adunarea și înmulțirea modulo n

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr natural și $a \in \mathbb{Z}$. Din teorema împărțirii cu rest a numerelor întregi rezultă că există și sunt unice numerele $q \in \mathbb{Z}$ și $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ cu proprietatea că $a = nq + r$.

Numărul natural r care reprezintă restul împărțirii lui a la n , se notează **$a \bmod n$** (se citește „a modulo n”) și se numește **redusul modulo n** al numărului „a”.

Așadar, $r = a \bmod n$.

Astfel, dacă $n = 6$, atunci:

$$15 \bmod 6 = 3, 5 \bmod 6 = 5, (-10) \bmod 6 = 2.$$

Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim următoarele legi de compoziție:

a) $\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $a \oplus b = (a + b) \bmod n$, numită **adunarea modulo n.**

$a \oplus b$ se numește **suma modulo n** a lui a cu b .

b) $\odot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $a \odot b = (ab) \bmod n$, numită **înmulțirea modulo n.**

$a \odot b$ se numește **produsul modulo n** al lui a cu b .

Astfel, pentru $n = 8$, avem:

$$6 \oplus 10 = (6 + 10) \bmod 8 = 16 \bmod 8 = 0;$$

$$7 \oplus 12 = (7 + 12) \bmod 8 = 19 \bmod 8 = 3;$$

$$4 \odot 3 = (4 \cdot 3) \bmod 8 = 12 \bmod 8 = 4;$$

$$(-2) \odot 5 = (-2) \cdot 5 \bmod 8 = (-10) \bmod 8 = 6.$$

TEMĂ

Pentru $n = 6$ calculați:

$$2 \oplus 5,$$

$$2 \odot 5,$$

$$16 \oplus 9,$$

$$9 \odot 4,$$

$$(-2) \oplus 3,$$

$$(-5) \odot 5,$$

$$(-7) \oplus (-9),$$

$$(-9) \odot (-5),$$

$$(2 \oplus 9) \odot 3,$$

$$(3 \odot 7) \oplus 8.$$

1.3. Adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo n

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr natural fixat. Pentru $a \in \mathbb{Z}$ notăm $\hat{a} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ și $r = a \bmod n$ restul împărțirii lui a la n .

Din teorema împărțirii cu rest, există $q \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a = nq + r$.

Atunci, $\hat{a} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{r + nq + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{r + nh \mid h \in \mathbb{Z}\} = \hat{r}$.

Așadar, în determinarea mulțimii $\hat{a}$ este esențial să cunoaștem restul împărțirii lui a la n .

Mulțimea $\hat{a}$ se numește **clasa de resturi modulo n** a lui a .

Deoarece resturile obținute la împărțirea cu n a numerelor întregi pot fi $0, 1, 2, \dots, n-1$, rezultă că există numai n clase de resturi modulo n distincte două câte două și acestea pot fi considerate $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}$.

Mulțimea claselor de resturi modulo n se notează cu $\mathbb{Z}_n$ și putem scrie $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$.

Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n$ se definesc următoarele legi de compoziție:

a) „+“: $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b}$, numită **adunarea claselor de resturi modulo n, iar $\hat{a} + \hat{b}$ se numește **suma** claselor $\hat{a}$ și $\hat{b}$.**

b) „ $\cdot$ “: $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b}$, numită **înmulțirea claselor de resturi modulo n** , iar $\hat{a} \cdot \hat{b}$ se numește **produsul** claselor $\hat{a}$ și $\hat{b}$.

☞ Exemple

♦ Fie $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$. Atunci, avem: $\hat{2} + \hat{1} = \hat{3}$; $\hat{2} + \hat{3} = \hat{1}$; $\hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$ etc.

De asemenea: $\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{0}$; $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{2}$; $\hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{1}$.

♦ În $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ avem: $\hat{2} + \hat{1} = \hat{3}$, $\hat{2} + \hat{3} = \hat{0}$, $\hat{2} + \hat{2} = \hat{4}$, $\hat{4} + \hat{3} = \hat{2}$ etc.

De asemenea: $\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{4}$, $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{1}$, $\hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{4}$, $\hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{2}$ etc.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se calculeze în $\mathbb{Z}_7$:

a) $(\hat{2})^3$; **b)** $(\hat{3} \cdot \hat{4}) \cdot \hat{6}$; **c)** $(\hat{3})^4 + (\hat{5})^3$.

Soluție

Avem: **a)** $(\hat{2})^3 = \hat{2} \cdot \hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{4} \cdot \hat{2} = \hat{1}$; **b)** $(\hat{3} \cdot \hat{4}) \cdot \hat{6} = \hat{5} \cdot \hat{6} = \hat{2}$;

c) $(\hat{3})^4 + (\hat{5})^3 = \hat{3} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} + \hat{5} \cdot \hat{5} \cdot \hat{5} = \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} + \hat{4} \cdot \hat{5} = \hat{6} \cdot \hat{3} + \hat{6} = \hat{4} + \hat{6} = \hat{3}$.

☒ **2.** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_4$ ecuația $\hat{2}x^2 + \hat{2}x = \hat{0}$.

Soluție

Soluțiile ecuației pot fi doar elemente ale mulțimii $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$.

Fie $f(x) = \hat{2}x^2 + \hat{2}x$. Avem:

$$\bullet f(\hat{0}) = \hat{2} \cdot \hat{0} + \hat{2} \cdot \hat{0} = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0};$$

$$\bullet f(\hat{1}) = \hat{2} \cdot \hat{1} + \hat{2} \cdot \hat{1} = \hat{2} + \hat{2} = \hat{0};$$

$$\bullet f(\hat{2}) = \hat{2} \cdot \hat{0} + \hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0};$$

$$\bullet f(\hat{3}) = \hat{2} \cdot \hat{1} + \hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{2} + \hat{2} = \hat{0}.$$

☐ TEMĂ

Rezolvați ecuațiile:

a) $\hat{3}x + \hat{5} = \hat{0}$, în $\mathbb{Z}_6$;

b) $\hat{3}x^2 + \hat{3}x = \hat{0}$, în $\mathbb{Z}_6$;

c) $\hat{2}x^3 + \hat{3}x + \hat{2} = \hat{0}$, în $\mathbb{Z}_4$.

În concluzie, soluțiile ecuației date sunt $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$. După cum se observă ecuațiile de gradul 2, pe mulțimi diferite de cele uzuale, pot avea mai mult de două soluții.

1.4. Parte stabilă. Lege de compoziție indusă

Fie M o mulțime nevidă și „ $\circ$ “: $M \times M \rightarrow M$ o lege de compoziție pe M .

❖ DEFINIȚIE

• O submulțime $S \subset M$ se numește **parte stabilă** a lui M în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ “ dacă $\forall x, y \in S$ implică $x \circ y \in S$.

Pentru cazul $S = M$ se spune că M este parte stabilă în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”.

Exemple

- Mulțimile de numere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sunt părți stabile ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația de adunare și operația de înmulțire a numerelor reale.
- Mulțimile $p\mathbb{N} = \{px \mid x \in \mathbb{N}\}$, cu $p \in \mathbb{N}$ sunt părți stabile ale lui $\mathbb{N}$ în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire a numerelor naturale.
- Fie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mulțimea matricelor pătrate cu elemente din mulțimea $\mathbb{C}$. Submulțimea $S \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a matricelor inversabile este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

Exerciții rezolvate

- ☒ **1.** Fie $H \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\}$. Să se arate că H este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

Soluție

Fie $A, B \in H$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ și $a^2 + b^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$. Se

$$\text{obține: } AB = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by & ay + bx \\ -ay - bx & -by + ax \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Folosind proprietatea $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ rezultă că:

$$\det(AB) = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = 1 \text{ și astfel } (ax - by)^2 + (ay + bx)^2 = 1. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $AB \in H$, deci H este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea.

- ☒ **2.** Să se arate că mulțimea $\mathcal{R}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu adunarea modulo n și înmulțirea modulo n .

Soluție

Dacă $a, b \in \mathcal{R}_n$, atunci, din definiție, $a \oplus b$ și $a \odot b$ reprezintă restul împărțirii numerelor $a + b$ și $a \cdot b$ la n . În concluzie, $a \oplus b$ și $a \odot b$ sunt elemente ale lui $\mathcal{R}_n$.

Dacă H este parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție $\varphi : M \times M \rightarrow M$, atunci pe mulțimea H se poate defini o lege de compoziție $\psi : H \times H \rightarrow H$, considerând $\psi(x, y) = \varphi(x, y)$, $\forall x, y \in H$.

Legea de compoziție ψ se numește **legea de compoziție indusă** pe mulțimea H de către legea de compoziție ϕ .

Pentru simplificarea scrierii, se obișnuiește să se folosească aceeași notație pentru legea de compoziție pe M și legea de compoziție indusă pe H .

1.5. Tabla unei legi de compoziție

Fie M o mulțime finită, $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ și $\phi : M \times M \rightarrow M$ o lege de compoziție pe M .

Legea de compoziție ϕ poate fi descrisă printr-un tablou cu n linii și n coloane corespunzător elementelor $a_1, a_2, \dots, a_n$. La intersecția liniei i cu coloana j se află elementul $\phi(a_i, a_j)$.

Acest tablou se numește **tabla legii de compoziție** sau **tabla lui Cayley**.

Tabla unei legi de compoziție are un rol deosebit în perfecționarea calculelor algebrice, precum și în verificarea unor proprietăți ale acesteia.

ϕ	a_1	a_2	...	a_j	...	a_n
a_1				$\vdots$		
a_2				$\vdots$		
$\vdots$				$\vdots$		
a_i	...	...	...	$\phi(a_i, a_j)$	...	...
$\vdots$				$\vdots$		
a_n				$\vdots$		

Exerciții rezolvate

- ☒ **1.** Fie $H = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}$. Să se arate că H este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

Soluție

Ecuția $z^4 = 1$ se scrie $(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$, de unde se obține $z \in \{-1, 1, i, -i\} = H$. Alcătuim tabla operației de înmulțire pe H .

După cum se observă din tabla operației, toate rezultatele obținute în urma compunerii elementelor aparțin mulțimii H . În concluzie, mulțimea H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea.

.	-1	1	-i	i
-1	1	-1	i	-i
1	-1	1	-i	i
-i	i	-i	-1	1
i	-i	i	1	-1

- ☒ **2.** Să se alcătuiască tablele operațiilor de adunare și de înmulțire modulo 4 pe $\mathcal{R}_4$ și de adunare și de înmulțire pe mulțimea claselor de resturi $\mathbb{Z}_4$.

Soluție

Având în vedere modul în care s-au definit operațiile pe mulțimile $\mathcal{R}_4$ și $\mathbb{Z}_4$ avem:

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\odot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

- ☒ **3.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că mulțimea $M = [-2, 0]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”.

Soluție

Trebuie arătat că dacă $x, y \in [-2, 0]$, atunci $x \circ y \in [-2, 0]$. Deoarece $x, y \in [-2, 0]$, rezultă că $-2 \leq x \leq 0$, $-2 \leq y \leq 0$ sau $-1 \leq x + 1 \leq 1$, $-1 \leq y + 1 \leq 1$ și se obțin inegalitățile: $|x + 1| \leq 1$, $|y + 1| \leq 1$. Prin înmulțire avem inegalitatea: $|(x + 1)(y + 1)| \leq 1$, care se scrie sub forma $-1 \leq (x + 1)(y + 1) \leq 1$. După reduceri se obține: $-2 \leq xy + x + y \leq 0$, deci $x \circ y \in [-2, 0]$.

EXERCIIII ȘI PROBLEME**EXERSARE**

E1. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definește operația algebrică „ $\circ$ ” astfel: $x \circ y = 2x + y - 3$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Să se calculeze: $4 \circ 7$, $8 \circ (-1)$, $(-8) \circ 3$ și $3 \circ (-8)$.

b) Să se afle valorile $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $x \circ (3x - 1) = 6$.

c) Să se rezolve ecuația $(x + 1) \circ 3 = 5 \circ (x^2 - 8)$.

E2. Pe mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

definim operația algebrică $A \perp B = 3A - 2B$, $\forall A, B \in \mathcal{M}$.

a) Să se arate că $I_2 \in \mathcal{M}$.

b) Să se calculeze $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, știind că

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ a^2 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

E3. Să se calculeze:

- a) $18 \bmod 5$; $28 \bmod 6$; $17 \bmod 8$;
 $(-3) \bmod 4$;
 b) $5 \oplus 4$; $6 \oplus 11$; $(-2) \oplus 5$; $(-4) \oplus$
 $\oplus (-13)$, dacă $n = 9$;
 c) $2 \odot 7$; $5 \odot 8$; $(-3) \odot 17$; $(-5) \odot$
 $\odot (-11)$, dacă $n = 10$.

E4. Să se calculeze:

- a) $\widehat{23}$, $\widehat{21}$, $\widehat{9}$, $\widehat{-3}$, $\widehat{-7}$ în $\mathbf{Z}_3$;
 b) $\widehat{2} + \widehat{11}$, $\widehat{3} + \widehat{7}$, $\widehat{5} + \widehat{9}$ în $\mathbf{Z}_4$;
 c) $\widehat{2} \cdot \widehat{4}$, $\widehat{4} \cdot \widehat{3}$, $(\widehat{3})^3$, $(\widehat{5})^4$ în $\mathbf{Z}_6$;
 d) $(\widehat{2} + \widehat{3}) \cdot (\widehat{4} + \widehat{5}) \cdot (\widehat{3} + \widehat{6})$ în $\mathbf{Z}_7$.

E5. Să se rezolve ecuațiile:

- a) $\widehat{2}x + \widehat{1} = \widehat{0}$, în $\mathbf{Z}_3$;
 b) $x^2 + \widehat{1} = \widehat{0}$, în $\mathbf{Z}_5$;
 c) $\widehat{3}x^2 - x + \widehat{2} = \widehat{0}$, în $\mathbf{Z}_4$;
 d) $x^3 + \widehat{2}x + \widehat{3} = \widehat{0}$, în $\mathbf{Z}_5$.

E6. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc operațiile algebrice: $x \circ y = x + y - xy$ și $x \top y = x - y + 2xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se rezolve:

- a) ecuația $x \circ x = x \top x$;
 b) sistemul $\begin{cases} (x + 3y) \circ 3 = -19 \\ (x - 2y) \top 2 = -22 \end{cases}$.

E7. Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = |x - y|$, $\forall x, y \in M$. Să se alcătuiască tabla operației și să se arate că M este parte stabilă în raport cu această lege de compoziție.

E8. Să se alcătuiască tabla operației „ $\circ$ ” pe mulțimea M și să se studieze dacă mulțimea este parte stabilă în raport cu „ $\circ$ ”, dacă:

- a) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide } 12\}$,
 $x \circ y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$;
 b) $M = \{2, 3, 4, 5\}$,
 $x \circ y = \min(x, y)$;

- c) $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
 $x \circ y = \max(x, y)$.

E9. Să se arate că mulțimea M este parte stabilă în raport cu legea de compoziție specificată:

- a) $M = [2, +\infty)$, $x \circ y = xy - 2(x + y) + 6$;
 b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, în raport cu adunarea matricelor;
 c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$, în raport cu înmulțirea matricelor.

E10. Pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$ se consideră operația algebrică „ $\circ$ ” a cărei tablă este dată mai jos:

$\circ$	1	2	3	4
1	1	3	4	1
2	1	3	4	2
3	2	1	3	4
4	4	3	2	1

- a) Să se determine: $x = 1 \circ (2 \circ 3)$,
 $y = 4 \circ (3 \circ 2)$, $z = (1 \circ 2) \circ (3 \circ 4)$.
 b) Să se rezolve ecuațiile: $x \circ 2 = 4$,
 $4 \circ x = 2$ și $x \circ 2 \circ x = 1$.
 c) Să se rezolve sistemele de ecuații:
 $\begin{cases} x \circ 2 = y \\ y \circ 2 = x \end{cases}$ și $\begin{cases} x \circ y = 1 \\ (x + 1) \circ y = 1 \end{cases}$.

E11. Fie $\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}$ și legea de compoziție $X \perp Y = X + Y - I_2$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, definită pe mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Să se arate că mulțimea $\mathcal{M}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor și în raport cu operația „ $\perp$ ”.

APROFUNDARE

- A1.** Să se determine mulțimile $M \subset \mathbb{Z}_4$, care sunt părți stabile ale lui $\mathbb{Z}_4$ în raport cu operația de adunare.
- A2.** Să se arate că mulțimea M este parte stabilă în raport cu operația specificată:
- a) $M = (a, +\infty)$, $x \circ y = xy - a(x + y) + a^2 + a$;
- b) $M = [4, 6]$, $x \circ y = xy - 5(x + y) + 30$;
- c) $M = (-1, 1)$, $x \circ y = \frac{x + y}{1 + xy}$.
- A3.** Pe mulțimea $M = (2, +\infty)$ se consideră legea de compoziție:
- $$x \circ y = \frac{xy - 2}{x + y - 3}, \quad \forall x, y \in M.$$
- Să se arate că M este parte stabilă în raport cu „ $\circ$ ”.
- A4.** Se consideră mulțimea
- $$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$
- Să se arate că:
- a) mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ este parte stabilă în raport cu adunarea și înmulțirea;
- b) mulțimea $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ în raport cu înmulțirea.
- A5.** Fie funcțiile $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = -x$, $f_4(x) = -\frac{1}{x}$. Să se arate că mulțimea $M = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ este parte stabilă în raport cu compunerea funcțiilor.
- A6.** Fie $M = (2, +\infty)$ și legea de compoziție pe M , $x \circ y = xy - 2x - 2y + a$, $\forall x, y \in M$.
- a) Să se determine valoarea minimă a lui $a \in \mathbb{R}$, astfel încât M să fie parte stabilă în raport cu „ $\circ$ ”.
- b) Să se rezolve ecuația $4 \circ x = 8$.
- c) Să se rezolve sistemul:
- $$\begin{cases} (x + 2) \circ (y - 3) = 46 \\ (2x + 1) \circ (y + 1) = 59 \end{cases}, \text{ pentru } a = 50.$$
- A7.** Să se studieze dacă mulțimea M este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea:
- a) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\}$;
- b) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\}$;
- c) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = \bar{z}\}$;
- d) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$.
- A8.** Să se determine mulțimile finite $M \subset \mathbb{R}$, care sunt părți stabile ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația de înmulțire. Aceeași problemă pentru mulțimea $\mathbb{C}$.
- A9.** Fie M o mulțime cu 3 elemente. Să se determine numărul legilor de compoziție care se pot defini pe mulțimea M . Generalizare.

2 Proprietăți ale legilor de compoziție

2.1. Proprietatea de comutativitate

Fie M o mulțime nevidă.

❖ DEFINIȚIE

- Legea de compoziție „ $\circ$ ”: $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x \circ y$ se numește **comutativă** dacă $x \circ y = y \circ x$, $\forall x, y \in M$.

📖 Exemple de legi de compoziție comutative

- Adunarea și înmulțirea pe mulțimile de numere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Avem:
 $x + y = y + x$ și $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall x, y$.
- Reuniunea, intersecția și diferența simetrică pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$ a submulțimilor mulțimii M :
 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, $A \Delta B = B \Delta A$, $\forall A, B \in \mathcal{P}(M)$.
- Adunarea matricelor pe mulțimea $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$:
 $A + B = B + A$, $A, B \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$.

📖 Exemple de legi de compoziție necomutative

- Scăderea pe mulțimile $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
- Scăderea pe mulțimea matricelor $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$.
- Diferența mulțimilor pe mulțimea $\mathcal{P}(A)$.
- Compunerea funcțiilor pe mulțimea $\mathcal{F}(M) = \{f \mid f : M \rightarrow M\}$, dacă M are cel puțin două elemente.

➡ OBSERVAȚII

1. Dacă $\varphi : M \times M \rightarrow M$ este lege de compoziție comutativă pe mulțimea M și $H \subset M$ este parte stabilă a lui M în raport cu φ , atunci operația indusă pe H de legea φ este comutativă. Se spune că proprietatea de comutativitate este ereditară.
2. Dacă mulțimea M este finită, comutativitatea unei operații φ pe M poate fi verificată pe tabla operației. Legea de compoziție este comutativă dacă tabla legii este simetrică față de diagonala principală a acesteia.

Exercițiu rezolvat

- ☒ Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 2x + ay$.
Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ pentru care legea de compoziție este comutativă.

Soluție

Avem: $y \circ x = y \cdot x + 2y + ax$. Din egalitatea $x \circ y = y \circ x$ se obține $x \cdot y + 2x + ay = y \cdot x + 2y + ax$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$. Din faptul că înmulțirea și adunarea numerelor întregi sunt legi de compoziție comutative se obține $(a-2)(x-y) = 0$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, de unde $a = 2$.

➤ OBSERVAȚIE

- Multe legi de compoziție se definesc cu ajutorul altor legi de compoziție. În asemenea cazuri, în demonstrarea proprietăților legii de compoziție considerate, intervin în mod esențial proprietățile legilor de compoziție folosite în definirea acestora.

2.2. Proprietatea de asociativitate

Fie M o mulțime nevidă.

❖ DEFINIȚIE

- O lege de compoziție $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x \circ y$ se numește **asociativă** dacă $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in M$.

📖 Exemple de legi asociative

- Adunarea și înmulțirea pe mulțimile de numere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$:
 $(x+y)+z = x+(y+z)$ și $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, pentru oricare x, y, z .
- Reuniunea, intersecția și diferența simetrică pe mulțimea părților unei mulțimi M :
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ și
 $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$, $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(M)$.
- Compunerea funcțiilor pe mulțimea $\mathcal{F}(M) = \{f \mid f: M \rightarrow M\}$:
 $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(M)$.
- Adunarea și înmulțirea matricelor pe mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:
 $A + (B + C) = (A + B) + C$, $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

📖 Exemple de legi neasociative

- Scăderea pe mulțimile de numere $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. De exemplu: $2 - (3 - 1) = 0$, iar $(2 - 3) - 1 = -2$.
- Scăderea matricelor pe mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.
- Diferența mulțimilor pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$.

Atunci când este valabilă proprietatea de asociativitate, nu este necesară folosirea parantezelor pentru a indica compusul a trei elemente. În acest caz este suficient să se scrie $a \circ b \circ c$, iar acest element se poate determina fie cu $(a \circ b) \circ c$, fie cu $a \circ (b \circ c)$.

În general, pentru o operație asociativă, se pot considera elemente de forma: $a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n$, acestea având aceeași valoare indiferent de gruparea termenilor cu ajutorul parantezelor.

Elementul $a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n$ se definește recursiv, astfel:

$$a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_{n-1} \circ a_n = (a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_{n-1}) \circ a_n.$$

Pentru o lege de compoziție „ $\circ$ ” asociativă sunt valabile egalitățile:

- $a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n = a_1 \circ (a_2 \circ \dots \circ a_n)$;
- $a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n = (a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_{k-1}) \circ (a_k \circ \dots \circ a_n)$, unde $2 \leq k \leq n$.

☞ OBSERVAȚII

1. Proprietatea de asociativitate este **ereditară**, adică dacă φ este lege de compoziție asociativă pe M și $H \subset M$ este parte stabilă a lui M în raport cu φ , atunci și legea indusă pe H de către φ este asociativă.
2. Dacă φ este lege neasociativă pe M și $H \subset M$ este o parte stabilă a lui M în raport cu φ , nu rezultă în mod necesar că legea indusă de φ pe H este neasociativă.

📖 Exemplu

- Operația de scădere pe $\mathbb{Z}$ nu este asociativă, dar este asociativă pe mulțimea $H = \{0\} \subset \mathbb{Z}$.

Probleme rezolvate

- ☒ 1. Pe mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră legea de compoziție „ $\circ$ ”, dată de relația $A \circ B = A + B + AB$.

a) Să se arate că legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă.

b) Să se determine $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Să se determine $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție

a) Folosind comutativitatea adunării și asociativitatea înmulțirii matricelor, avem $(A \circ B) \circ C = (A + B + AB) \circ C = A + B + AB + C + (A + B + AB) \cdot C = A + B + C + AB + AC + BC + ABC$. Analog, $A \circ (B \circ C) = A + (B \circ C) + A \cdot (B \circ C) = A + B + C + BC + A(B + C + BC) = A + B + C + AB + AC + BC + ABC$.

Așadar, pentru oricare $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$, deci legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă.

b) Legea „ $\circ$ ” fiind asociativă, folosind a) rezultă:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & a+b+c \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & b+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a+b+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4a+4b+4c \\ 0 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Folosind punctul b) rezultă:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 28 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 52 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 80 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

☒ **2.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow x \circ y = xy + ax + ay + b$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât legea de compoziție „ $\circ$ ” să fie asociativă.

b) Să se determine $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ termeni}}$, pentru $a, b \in \mathbb{R}$ determinate la a).

Soluție

a) Folosind proprietățile adunării și înmulțirii numerelor reale, pentru $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, avem $(x \circ y) \circ z = (xy + ax + ay + b) \circ z = (xy + ax + ay + b) \cdot z + a \cdot (xy + ax + ay + b) + az + b = xyz + axz + ayz + bz + axy + a^2x + a^2y + ab + az + b = xyz + axy + ayz + axz + a^2x + a^2y + (a+b)z + ab + b$. Analog se obține: $x \circ (y \circ z) = xyz + axy + ayz + axz + (a+b)x + a^2y + a^2z + ab + b$.

Prin identificarea acestor expresii se obține relația $a^2 = a + b$, de unde $b = a^2 - a$ și astfel: $x \circ y = xy + a(x + y) + a^2 - a = (x + a)(y + a) - a$.

b) Vom folosi metoda inducției matematice.

Fie $t_n = x \circ x \circ \dots \circ x$, compunerea având în total n termeni.

Rezultă: $t_1 = x$, $t_2 = x \circ x = x^2 + 2ax + a^2 - a = (x + a)^2 - a$,

$t_3 = t_2 \circ x = (x + a)(t_2 + a) - a = (x + a)^3 - a$.

Presupunem că $t_k = (x + a)^k - a$.

Atunci $t_{k+1} = t_k \circ x = (x + a)(t_k + a) - a = (x + a)^{k+1} - a$.

Din principiul inducției matematice rezultă că:

$$t_n = (x + a)^n - a \text{ pentru oricare } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

- ☒ **3.** Într-un circuit electric sunt legate în paralel două rezistoare cu rezistențele R_1 și R_2 , măsurate în ohmi. Rezistența echivalentă R a grupării rezistențelor R_1, R_2 este dată de relația:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (1)$$

Să se arate că circuitele din figurile 1 și 2 au aceeași rezistență totală pentru oricare valori $R_1, R_2, R_3 \in (0, +\infty)$.

Soluție:

Fie $M = (0, +\infty)$ mulțimea valorilor rezistențelor dintr-un circuit.

Relația (1) definește pe mulțimea M următoarea lege de compoziție:

$$R_1 \circ R_2 = R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Rezistența totală a circuitului din figura 1 este

$$R' = (R_1 \circ R_2) \circ R_3, \text{ iar a circuitului din figura 2 este } R'' = R_1 \circ (R_2 \circ R_3).$$

Egalitatea $R' = R''$ este echivalentă cu egalitatea $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$, $R_1, R_2, R_3 \in M$.

$$\text{Avem } (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \circ R_3 = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

$$\text{Analog, } R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = R_1 \circ \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Așadar $R' = R''$. Mai mult, se obține că legea de compunere a rezistențelor legate în paralel este asociativă.

Pe o mulțime M se pot defini mai multe legi de compoziție.

O mulțime nevidă înzestrată cu una sau mai multe legi de compoziție, care satisfac un set de axiome date sub formă de identități sau alte condiții, formează o **structură algebrică**.

❖ DEFINIȚII

- Se numește **semigrup** o pereche $(S, \circ)$ formată dintr-o mulțime nevidă S și o lege de compoziție pe S care îndeplinește *axioma de asociativitate*:

$$S_1 : x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z, \forall x, y, z \in S.$$

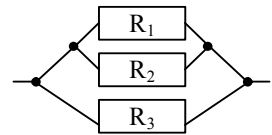


Figura 1

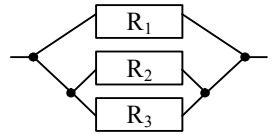


Figura 2

- Un semigrup $(S, \circ)$ se numește **semigrup comutativ** sau **abelian** dacă legea de compoziție verifică *axioma de comutativitate*:
 $S_2 : x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in S.$

Exemple de semigrupuri

- Perechile $(\mathbb{N}, +)$ și $(\mathbb{N}, \cdot)$ sunt semigrupuri comutative. Ele reprezintă semigrupul **aditiv** și semigrupul **multiplicativ** al numerelor naturale.
- Fie A o mulțime și $\mathcal{P}(A)$ familia părților lui A . Perechile $(\mathcal{P}(A), \cup), (\mathcal{P}(A), \cap), (\mathcal{P}(A), \Delta)$ sunt semigrupuri comutative.
- Fie A o mulțime nevidă și $\mathcal{F}(A) = \{f \mid f : A \rightarrow A\}$. Perechea $(\mathcal{F}(A), \circ)$ este semigrup. Dacă mulțimea A are cel puțin două elemente, semigrupul $(\mathcal{F}(A), \circ)$ este necomutativ.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se studieze comutativitatea și asociativitatea legilor de compoziție definite pe mulțimea M , în cazurile:

- a) $M = (1, +\infty), x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3;$
- b) $M = [1, 3], x \circ y = xy - 2x - 2y + 6;$
- c) $M = \mathbb{Z}, x \circ y = x + y + xy;$
- d) $M = \mathbb{Z}, x \circ y = 7xy - 2x - 2y + 8;$
- e) $M = \mathbb{Q}, x \circ y = xy - x - y.$

E2. Să se studieze comutativitatea și asociativitatea legii de compoziție „ $\circ$ ” definite pe mulțimea M , în cazurile:

- a) $M = (-1, 1), x \circ y = \frac{x+y}{1+xy};$
- b) $M = \mathbb{C}, x \circ y = x + y + ixy;$
- c) $M = (1, +\infty),$

$$x \circ y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2};$$

- d) $M = (0, \infty) \setminus \{1\}; x \circ y = x^{\ln y};$

$$e) M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

$$A \circ B = AB - A - B + 2I_2.$$

E3. Să se determine constantele reale pentru care legile de compoziție

„ $\circ$ ” sunt comutative și asociative pe mulțimile M :

- a) $M = \mathbb{Z}, x \circ y = cx + ay + b;$
- b) $M = \mathbb{Q}, x \circ y = xy + 2x + ay + b;$
- c) $M = \mathbb{C}, x \circ y = ixy + ax + by;$
- d) $M = (0, +\infty), x \circ y = \frac{ax + by}{1 + xy}.$

E4. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție $x \circ y = x + y - 4$ și $x \top y = xy - 4x - 4y + 20.$

- a) Să se arate că $(\mathbb{Z}, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, \top)$ sunt semigrupuri comutative.
- b) Să se arate că $x \top (y \circ z) = (x \top y) \circ (x \top z)$ (legea de compoziție „ $\top$ ” este distributivă față de „ $\circ$ ”).

E5. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție $x \circ y = x + y - 3$ și $x \top y = x + y - 7.$

- a) Să se arate că $(\mathbb{Z}, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, \top)$ sunt semigrupuri comutative.
- b) Să se determine $a, b \in \mathbb{N}^*$, astfel încât funcția $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = ax + b$ să verifice egalitatea $f(x \circ y) = f(x) \top f(y).$

- E6.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}_5$ se definește operația algebrică $x \circ y = xy + \hat{2}x + \hat{2}y + a$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}_5$.
- a) Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{Z}_5$ există

egalitatea $(\hat{2} \circ a) \circ a^2 = \hat{2} \circ (a \circ a^2)$?

b) Să se determine $a \in \mathbb{Z}_5$ pentru care operația „ $\circ$ ” este asociativă.

A PROFUNDARE

- A1.** Pe mulțimea $A = [0, 2)$ se definește legea de compoziție „ $\circ$ ” prin:

$$x \circ y = \frac{4x + 4y}{4 + xy}, \quad x, y \in A.$$

- a) Să se arate că legea este asociativă și comutativă.
- b) Să se verifice dacă $x, y, z \in A$ și $x \circ z = y \circ z$, atunci $x = y$.
- c) Să se determine $x \in A$ care verifică ecuația $x \circ x \circ x = 0$.
- (Univ. Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, 2000)

- A2.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 2ax + by$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Legea este asociativă și comutativă dacă:

- a) $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$;
- b) $a = b = \frac{1}{3}$;
- c) $a^2 + b^2 = 2$;
- d) $a = 1$, $b = 2$;
- e) $a = b = 0$ sau $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$.

(Univ. Maritimă, Constanța, 2000)

- A3.** Să se arate că următoarele legi de compoziție definite pe $\mathbb{R}$ sunt comutative și asociative:
- a) $x \perp y = \max(x, y)$;
- b) $x \perp y = \min(x, y)$.

- A4.** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care următoarele operații algebrice, definite pe mulțimea $M \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, sunt comutative și asociative:

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$, $A \circ B =$
 $= A + aB + bI_2$;

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x + y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$,
 $A \circ B = aAB + bBA$;

c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$, $A \circ B =$
 $= aAB + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (A + B)$.

- A5.** Fie M o mulțime nevidă și operația algebrică asociativă „ $\circ$ ” definită pe M . Să se găsească condiții suficiente asupra elementului $a \in M$ pentru care operația „ $\perp$ ” definită pe M este asociativă:

a) $x \perp y = a \circ x \circ y$; b) $x \perp y = x \circ a \circ y$;
 c) $x \perp y = a \circ x \circ y \circ a$; d) $x \perp y =$
 $= x \circ y \circ a$.

- A6.** Să se determine numărul legilor de compoziție comutative definite pe o mulțime cu $n \in \mathbb{N}^*$ elemente.

2.3. Element neutru

Fie M o mulțime nevidă.

❖ DEFINIȚII

- Legea de compoziție $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x \circ y$ admite **element neutru** dacă există un element $e \in M$, astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in M$. (1)
- Elementul $e \in M$ cu proprietatea (1) se numește **element neutru** pentru legea de compoziție „ $\circ$ ”.

🔗 Exemple

- Numărul 0 este element neutru pentru adunarea numerelor pe mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$: $x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x$, $\forall x$.
- Matricea $O_{m, n}$ este element neutru pentru adunarea matricelor pe mulțimea $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$:

$$A + O_{m, n} = O_{m, n} + A = A, \forall A \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C}).$$
- Matricea unitate I_n este element neutru pentru înmulțirea matricelor pe mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Vectorul nul $\vec{0}$ este element neutru pentru adunarea vectorilor pe mulțimea vectorilor $\mathcal{V}$ din plan sau din spațiu:

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}, \forall \vec{v} \in \mathcal{V}.$$

🔑 TEOREMA 1 (unicitatea elementului neutru)

Fie M o mulțime nevidă. Dacă legea de compoziție $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x \circ y$, admite un element neutru, atunci acesta este **unic**.

Demonstrație

Să presupunem că e_1 și e_2 sunt elemente neutre pentru legea de compoziție „ $\circ$ ”. Atunci au loc relațiile:

$$x \circ e_1 = x \text{ și } e_2 \circ y = y.$$

Luând $x = e_2$ și $y = e_1$ se obține că:

$e_2 \circ e_1 = e_2$ și $e_2 \circ e_1 = e_1$, relație din care rezultă că $e_1 = e_2$ și unicitatea este demonstrată. ■

Exerciții rezolvate

- ☒ 1. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow x \circ y = xy + ax + ay + b$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care legea de compoziție dată admite element neutru $e = 2$.

Soluție

Numărul $e = 2$ este element neutru dacă $x \circ 2 = 2 \circ x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Din aceste relații se obține $2x + 2a + ax + b = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde $a + 2 = 1$ și $2a + b = 0$. Rezultă $a = -1$ și $b = 2$, iar legea de compoziție este $x \circ y = xy - x - y + 2$.

☒ **2.** Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se arate că există $A \in M$, astfel încât $AX = X$, $\forall X \in M$.

b) Există matricea $B \in M$, astfel încât $XB = X$, $\forall X \in M$?

Soluție

a) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$ și $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$. Din egalitatea $AX = X$ se obține $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde $\begin{pmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Această relație se verifică pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$ dacă $a = 1$, $b \in \mathbb{R}$, deci $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$.

Rezultă că există o infinitate de matrice A cu proprietatea cerută.

b) Fie $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$. Din egalitatea $XB = X$ se obține: $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} ax & bx \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde $a = 1$, $bx = y$. A doua egalitate nu poate avea loc pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

Așadar, nu există $B \in M$ cu proprietatea cerută.

➤ OBSERVAȚII

1. Fie M o mulțime nevidă și „ $\circ$ ” o lege de compoziție pe M .

Dacă există $e_s \in M$, astfel încât $e_s \circ x = x$, $\forall x \in M$, elementul e_s se numește **element neutru la stânga**.

Dacă există $e_d \in M$, astfel încât $x \circ e_d = x$, $\forall x \in M$, elementul e_d se numește **element neutru la dreapta**.

Din problema rezolvată rezultă că există legi de compoziție care au element neutru la stânga, dar nu au element neutru la dreapta.

2. Operația de scădere pe $\mathbb{R}$ are elementul neutru la dreapta $e_d = 0$, dar nu are element neutru la stânga. Într-adevăr, $x - 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, și nu există $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $e - x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

❖ **DEFINIȚII**

- Perechea $(M, \circ)$ se numește **monoid** dacă verifică următoarele axiome:
 (M_1) *axioma asociativității*:
 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in M;$
 (M_2) *axioma elementului neutru*:
 $\exists e \in M, \text{ astfel încât } x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in M.$
- Dacă, în plus, legea de compoziție „ $\circ$ ” este comutativă, monoidul se numește **monoid comutativ** sau **abelian**.

Se observă că perechea $(M, \circ)$ este monoid dacă este semigrup cu element neutru (semigrup unitar).

📖 **Exemple**

- Perechile $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q}, \cdot)$ sunt monoizi comutativi.
- Perechile $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \cdot), (\mathcal{F}(A), \circ)$ sunt monoizi necomutativi.

2.4. Elemente simetrizabile❖ **DEFINIȚII**

- Fie M o mulțime nevidă, înzestrată cu o lege de compoziție $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) = x \circ y$, care admite elementul neutru e .
- Elementul $x \in M$ se numește **simetrizabil** în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ” dacă există $x' \in M$, astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = e$. (1)
 - Elementul $x' \in M$ se numește **simetricul** elementului x în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”.

📖 **Exemple**

- Orice număr real x este simetrizabil în raport cu adunarea numerelor reale. În acest caz, $x' = -x$ și se numește **opusul** numărului x .
- Orice număr real nenul x este simetrizabil în raport cu înmulțirea pe $\mathbb{R}$. Simetricul elementului $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ este $x' = \frac{1}{x}$ și se numește **inversul** lui x . Numărul $x = 0$ nu este simetrizabil în raport cu înmulțirea numerelor reale.
- Fie $\mathbb{Z}$ mulțimea numerelor întregi. Singurele elemente simetrizabile în raport cu înmulțirea sunt 1 și -1.

Dacă legea de compoziție pe mulțimea M are element neutru, se notează cu $\mathcal{U}(M)$ mulțimea elementelor simetrizabile în raport cu legea de compoziție.

Deoarece elementul neutru are proprietatea $e \circ e = e$, rezultă că $e \in \mathcal{U}(M)$, deci $\mathcal{U}(M)$ este mulțime nevidă.

Mulțimea $\mathcal{U}(M)$ se numește **mulțimea unităților** lui M .

TEOREMA 2 (unicitatea simetricului)

Fie „ $\circ$ ” o lege de compoziție pe mulțimea M , asociativă și cu elementul neutru e . Dacă un element $x \in M$ are un simetric, atunci acesta este unic.

Demonstrație

Presupunem că x' și x'' sunt elemente simetrice ale elementului x . Din asociativitatea legii de compoziție „ $\circ$ ” se obține:

$$x' \circ x \circ x'' = (x' \circ x) \circ x'' = e \circ x'' = x'', \text{ și } x' \circ x \circ x'' = x' \circ (x \circ x'') = x' \circ e = x'.$$

Rezultă că $x' = x''$ și unicitatea este demonstrată. ■

OBSERVAȚIE

- Dacă o lege de compoziție „ $\circ$ ” pe o mulțime M are element neutru, dar nu este asociativă, este posibil ca un element $x \in M$ să admită mai multe elemente simetrice.

Exemplu

- ♦ Fie $M = \{e, a, b\}$ și legea de compoziție dată cu ajutorul tablei lui Cayley:

$\circ$	e	a	b	
e	e	a	b	Legea nu este asociativă deoarece: $(b \circ b) \circ a = a \circ a = e$, iar
a	a	e	e	$b \circ (b \circ a) = b \circ e = b$.
b	b	e	a	Elementul $a \in M$ are simetricele a și b , deoarece $a \circ a = e$ și
				$a \circ b = e = b \circ a$.

TEOREMA 3

Fie M o mulțime nevidă înzestrată cu o lege de compoziție $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x \circ y$, asociativă și cu element neutru.

a) Dacă $x \in M$ este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”, atunci simetricul său x' este simetrizabil și $(x')' = x$.

b) Dacă $x, y \in \mathcal{U}(M)$, atunci $x \circ y \in \mathcal{U}(M)$ și $(x \circ y)' = y' \circ x'$.

c) Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{U}(M)$, atunci $(x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n) \in \mathcal{U}(M)$ și $(x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n)' = x_n' \circ x_{n-1}' \circ \dots \circ x_1'$.

Demonstrație

a) Deoarece $x \circ x' = x' \circ x = e$, se observă că simetricul lui x' este chiar x , deci $(x')' = x$.

b) Să considerăm $z = y' \circ x' \in M$. Avem:

$$(x \circ y) \circ z = (x \circ y) \circ (y' \circ x') = x \circ (y \circ y') \circ x' = x \circ e \circ x' = x \circ x' = e \text{ și}$$

$$z \circ (x \circ y) = (y' \circ x') \circ (x \circ y) = y' \circ (x' \circ x) \circ y = y' \circ e \circ y = y' \circ y = e.$$

c) Se folosește inducția matematică.

Pentru $n = 1$ și $n = 2$, proprietatea este adevărată având în vedere b).

Să presupunem proprietatea adevărată pentru $k \in \mathbb{N}^*$. Avem:

$$(x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_k \circ x_{k+1})' = ((x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_k) \circ x_{k+1})' = x_{k+1}' \circ$$

$\circ (x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_k)' = x_{k+1}' \circ (x_k' \circ \dots \circ x_1') = x_{k+1}' \circ x_k' \circ \dots \circ x_1'$, deci proprietatea are loc și pentru $k + 1$.

În concluzie, proprietatea are loc pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$. ■

Probleme rezolvate

☒ **1.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow x \circ y = xy + ax + by + c$.

a) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care legea este comutativă, asociativă și admite element neutru.

b) Pentru valorile a, b, c găsite, să se determine $\mathcal{U}(\mathbb{R})$.

Soluție

a) Din relația $x \circ y = y \circ x$ se deduce $a = b$, deci $x \circ y = xy + a(x + y) + c$.

Legea de compoziție este asociativă dacă $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\text{Se obține egalitatea: } xyz + a(xy + yz + zx) + a^2x + a^2y + (a + c)z + ac + c = \\ = xyz + a(xy + yz + zx) + (a + c)x + a^2y + a^2z + ac + c, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Rezultă că $a + c = a^2$ și $x \circ y = xy + a(x + y) + a^2 - a$.

Legea de compoziție dată admite elementul neutru „e” dacă $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se obține egalitatea: $xe + a(x + e) + a^2 - a = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde $(x + a)e = (x + a) \cdot (1 - a)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și, astfel, $e = 1 - a$.

În concluzie, $b = a$, $c = a^2 - a$, $a \in \mathbb{R}$.

b) Fie x un element simetrizabil și x' simetricul său. Se obține $x' \circ x = e$ și $xx' + a(x + x') + a^2 - a = 1 - a$, de unde $x'(x + a) = 1 - a^2 - ax$.

Se observă ușor că dacă $x \neq -a$ rezultă $x' = \frac{1-a^2-ax}{x+a}$. Așadar,
 $\mathcal{U}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{-a\}$.

- ☒ **2.** Fie „ $\circ$ ” lege de compoziție asociativă și cu element neutru pe mulțimea M . Să se arate că dacă $x \in \mathcal{U}(M)$, $y \notin \mathcal{U}(M)$, atunci $x \circ y$ și $y \circ x$ nu sunt simetrizabile.

Soluție

Să presupunem prin absurd că $x \circ y \in \mathcal{U}(M)$.

Atunci există $s \in \mathcal{U}(M)$, astfel încât $(x \circ y) \circ s = e = s \circ (x \circ y)$.

De aici rezultă: $x \circ (y \circ s) = e$ și $y \circ s = x'$. Se obține $y = x' \circ s' = (s \circ x)'$ și $y \in \mathcal{U}(M)$, în contradicție cu ipoteza.

Așadar, $x \circ y \notin \mathcal{U}(M)$. Analog se arată că $y \circ x \notin \mathcal{U}(M)$.

EXERCIIII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se verifice dacă operația algebrică „ $\circ$ ” definită pe mulțimea M admite element neutru:

a) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = 2xy + x + y$;

b) $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$;

c) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$;

d) $M = (-1, 1)$, $x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}$;

e) $M = \mathbb{Z}_7$, $x \circ y = xy + \hat{5}x + \hat{5}y + \hat{6}$.

E2. Să se determine elementul neutru pentru operația „ $\circ$ ” definită pe M :

a) $M = (-3, +\infty)$, $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$;

b) $M = [7, +\infty)$, $x \circ y = xy - 7x - 7y + 56$;

c) $M = (0, 1)$, $x \circ y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$;

d) $M = (0, +\infty) \setminus \{1\}$, $x \circ y = x^{9 \log_2 y}$.

E3. Să se determine elementul simetric al elementului $s \in M$, dacă:

a) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = xy + x + y$, $s \in \{-3, 2, \sqrt{2}\}$;

b) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = x + y - 13$,

$s \in \{-1, 0, 3, 11\}$;

c) $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = x + y + i$, $s \in \{i, -i, 1+i\}$;

d) $M = (-3, 3)$, $x \circ y = \frac{9x+9y}{9+xy}$,

$s \in \left\{0, -2, 2, \frac{1}{2}\right\}$.

E4. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $(\mathbb{R}, \circ)$ este monoid comutativ.

b) Să se arate că $\mathcal{U}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine parametrii pentru care operațiile date au elementul neutru indicat:

a) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = xy + ax + ay + 2$, $e = 2$;

b) $M = \mathbb{Q}$, $x \circ y = x + y + a$, $e = -5$;

c) $M = (2, 3)$, $x \circ y = \frac{5xy - 12x - 12y + a}{2xy - 5x - 5y + 13}$,
 $e = \frac{5}{2}$.

A2. Pe mulțimea $\mathbb{Q}$ se consideră legile de compoziție $x \circ y = \frac{xy}{4} - 2x - 2y + 24$,

$x \perp y = x + y + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$. Dacă e_1 și e_2 sunt elementele neutre în raport cu legile „ $\circ$ ”, respectiv „ $\perp$ ”, iar $p = e_1 \perp e_2$, atunci:

a) $p = 4$; b) $p = -6$; c) $p = 10$;

d) $p = 12$; e) $p = 16$.

(ASE, București, 1998)

A3. Pe mulțimea $\mathbb{C}$ se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 \cdot z_2 + i(z_1 + z_2) - 1 - i$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dacă m este modulul elementului neutru al legii „ $\circ$ ”, atunci:

a) $m = 1$; b) $m = \sqrt{5}$; c) $m = \sqrt{2}$;

d) $m = \sqrt{3}$; e) $m = 2\sqrt{2}$.

(ASE, București, 1998)

A4. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - ax + by$.

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $(\mathbb{R}, \circ)$ să fie monoid. Pentru fiecare monoid obținut să se determine $\mathcal{U}(\mathbb{R})$.

(Univ. București, 1986)

A5. Pe mulțimea $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

a) Să se arate că $(M, \circ)$ este monoid comutativ.

b) Să se determine $\mathcal{U}(M)$.

A6. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se arate că $(M, \cdot)$ este monoid comutativ.

b) Să se determine $\mathcal{U}(M)$.

A7. Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$,

$$M = \{a^2 + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}[i]\}.$$

a) Să se arate că $(\mathbb{Z}[i], +)$, $(\mathbb{Z}[i], \cdot)$, $(M, \cdot)$ sunt monoizi comutativi.

b) Să se determine elementele simetrizabile ale fiecărui monoid.

EXERCII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

EXERSARE

E1. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Să se alcătuiască tabla înmulțirii pe mulțimea M și să se studieze proprietățile acesteia.

E2. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3\}$.

a) Să se alcătuiască tabla diferenței

simetrice pe mulțimea $\mathcal{P}(A)$.

b) Să se arate că $(\mathcal{P}(A), \cup)$, $(\mathcal{P}(A), \cap)$, $(\mathcal{P}(A), \Delta)$ sunt monoizi comutativi.

c) Să se determine elementele simetrizabile în monoizii de la b).

E3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

și mulțimea $\mathcal{M} = \{A^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că $(\mathcal{M}, \cdot)$ formează un monoid comutativ în care fiecare element este simetrizabil.

E4. Să se arate că mulțimea:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\}$$

formează un monoid comutativ în raport cu înmulțirea matricelor.

Să se determine $\mathcal{U}(\mathcal{M})$.

E5. Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ și mulțimea } \mathcal{M} = \{aA + B \mid a \in \mathbb{R}^*\}.$$

Să se studieze dacă $(\mathcal{M}, \cdot)$ este monoid comutativ și să se determine $\mathcal{U}(\mathcal{M})$.

APROFUNDARE

A1. Să se dea exemplu de o lege de compoziție care este comutativă și nu este asociativă.

A2. Să se dea exemplu de o lege de compoziție neasociativă și care admite element neutru.

A3. Fie M o mulțime nevidă și $(\mathcal{F}(M), \circ)$ monoidul funcțiilor definite pe M .
a) Să se determine care sunt elementele simetrizabile în raport cu compunerea funcțiilor, dacă elementul neutru este funcția identică.
b) În ce caz monoidul $(\mathcal{F}(M), \circ)$ este comutativ?

A4. Fie $a \in (0, \infty)$ și $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_a(x) = \begin{cases} ax, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

a) Să se arate că $f_a \circ f_b = f_{ab}$.

b) Să se arate că mulțimea $\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in (0, \infty)\}$ formează monoid în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

c) Să se determine $\mathcal{U}(\mathcal{F})$.

A5. Pe mulțimea $\mathbb{N}^*$ se definesc legile de compoziție:

$$x \top y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y) \text{ și}$$

$$x \perp y = \text{c.m.m.m.c.}(x, y).$$

a) Perechile $(\mathbb{N}^*, \top)$ și $(\mathbb{N}^*, \perp)$ sunt monoizi?

b) Să se determine valoarea de adevăr a propoziției: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}^*, x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z)$.

A6. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție „ $\circ$ ”, astfel:

$$x \circ y = axy + bx + by + c, \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{Z}$$

Să se arate că:

a) legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă dacă și numai dacă $b^2 - b = ac$.
b) legea de compoziție „ $\circ$ ” admite element neutru dacă și numai dacă $b + ac = b^2$ și b divide c .

A7. Se consideră mulțimea M nevidă și „ $\circ$ ” o lege de compoziție pe mulțimea M care este asociativă și admite element neutru. Dacă M' este o mulțime nevidă și $f : M \rightarrow M'$ o funcție bijectivă, să se studieze proprietățile legii de compoziție „ $\top$ ” definite pe M' :
 $x \top y = f(f^{-1}(x) \circ f^{-1}(y)).$

A8. Fie $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ ax, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

și $\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in \mathbb{Q}\}$.

a) Să se studieze dacă $\mathcal{F}$ este parte stabilă în raport cu compunerea funcțiilor.

b) Să se studieze dacă $(\mathcal{F}, \circ)$ este monoid și să se afle $\mathcal{U}(\mathcal{F})$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

- 1. Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se consideră legea de compoziție $x \perp y = 7xy - 7(x+y) + 8$. Mulțimea G este parte stabilă a lui $\mathbb{Q}$ în raport cu legea de compoziție „ $\perp$ ”?
- (3 puncte)
- 2. Pe mulțimea $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se definește legea de compoziție notată „ $\circ$ ”, astfel $x \circ y$ reprezintă restul împărțirii numărului x^{1+y} la 5.
- a) Să se alcătuiască tabla legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- b) Să se arate că legea de compoziție nu este comutativă și asociativă.
- (3 puncte)
- 3. Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ definim legea de compoziție: $x \circ y = 1 + (x-1)^{\lg(y-1)}$.
- a) Să se determine $2 \circ 2$ și să se rezolve ecuația $3 \circ x = 3$.
- b) Să se arate că pentru oricare $x, y \in G$, $x \circ y = 1 + 10^{\lg(x-1) \cdot \lg(y-1)}$.
- c) Să se studieze proprietățile legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- (3 puncte)

Testul 2

- 1. Fie mulțimea $M = \{x + y\sqrt{7} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ și $M' = \{x + y\sqrt{7} \mid x, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 7y^2 = 1\}$.
- a) Să se arate că mulțimea M' este parte stabilă a lui M în raport cu înmulțirea.
- b) Să se dea exemplu de cel puțin trei elemente $x + y\sqrt{7} \in M'$, cu $y > 0$.
- (3 puncte)
- 2. Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se definește legea de compoziție „ $\circ$ ” prin:
- $$x \circ y = \begin{cases} x + y, & \text{dacă } y \in (x, 2] \\ x - y, & \text{dacă } y \leq x \\ y - x, & \text{dacă } x \leq 3 \text{ sau } y > 2 \end{cases}.$$
- a) Să se alcătuiască tabla legii de compoziție.
- b) Să se arate că legea de compoziție nu este comutativă și asociativă.
- c) Să se arate că legea de compoziție admite element neutru și fiecare element $x \in M$ este simetrizabil.
- (6 puncte)

Testul 3

- 1. a) Să se calculeze în $\mathbb{Z}_6$ produsul $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{4} \cdot \hat{5}$.
- b) Să se calculeze în $\mathbb{Z}_6$ suma $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5}$.

c) Câte soluții are în $\mathbb{Z}_6$ ecuația: $\hat{3}x = \hat{0}$?

d) Care este cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea că $\underbrace{\hat{2} + \hat{2} + \dots + \hat{2}}_{n \text{ ori}} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_6$?

(Bacalaureat, iunie, 2003)

○ 2. Se consideră funcțiile $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = \log_2 \left[\left(1 + 2^x\right)^a - 1 \right]$, $a > 0$ și mulțimea

$$\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in (0, +\infty)\}.$$

a) Să se arate că f_a este funcție inversabilă și $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

b) Să se demonstreze că mulțimea $\mathcal{F}$ este parte stabilă în raport cu compunerea funcțiilor.

c) Să se arate că $(\mathcal{F}, \circ)$ este monoid comutativ și să se determine $\mathcal{U}(\mathcal{F})$.

○ 3. Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție „ $\circ$ ” definită prin $x \circ y = xy + ix + iy - 1 - i$, $\forall x, y \in \mathbb{C}$.

a) Să se arate că $x \circ y = (x + i)(y + i) - i$.

b) Să se arate că legea „ $\circ$ ” este asociativă.

c) Să se determine mulțimea valorilor lui $n \in \mathbb{N}^*$, pentru care are loc egalitatea:

$$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = (x_1 + i)(x_2 + i) \dots (x_n + i) - i, \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}.$$

d) Să se calculeze: $E = (-100i) \circ (-99i) \circ \dots \circ (-i) \circ 0 \circ i \circ (2i) \circ \dots \circ (99i) \circ (100i)$.

e) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 1 - i$.

(Bacalaureat, iunie, 2003)

3

Noțiunea de grup. Exemple

Fie G o mulțime nevidă și $(x, y) \rightarrow \varphi(x, y) \stackrel{\text{not}}{=} x \circ y$, o lege de compoziție pe G .

❖ DEFINIȚII

- Perechea $(G, \circ)$ se numește **grup** dacă sunt îndeplinite următoarele axiome:

(G1) Axioma asociativității:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in G.$$

(G2) Axioma elementului neutru:

$$\exists e \in G, \text{ astfel încât } x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in G.$$

(G3) Axioma elementelor simetrizabile:

$$\forall x \in G, \exists x' \in G, \text{ astfel încât } x \circ x' = x' \circ x = e.$$

- Un grup $(G, \circ)$ se numește **grup comutativ** sau **abelian** dacă este verificată *axioma de comutativitate*:
(G4): $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in G$.

► COMENTARII

- a) Se observă că perechea $(G, \circ)$ este grup dacă este monoid cu proprietatea că fiecare element este simetrizabil. Într-un grup, $\mathcal{U}(G) = G$.
- b) Elementul $e \in G$, a cărui existență este asigurată de axioma G_2 , este unic determinat și se numește **elementul neutru** al grupului.
- c) Elementul $x' \in G$, a cărui existență o asigură axioma G_3 pentru fiecare $x \in G$, este unic determinat deoarece legea de compoziție a grupului este asociativă.

- Un grup $(G, \cdot)$ se numește **grup finit** dacă mulțimea G este finită.
Un grup $(G, \cdot)$ este **grup infinit** dacă mulțimea G nu este finită.
- Fie $(G, \cdot)$ un grup. Se numește **ordinul grupului** G , cardinalul mulțimii G și se notează $\text{ord}(G)$.

🔍 Exemple de grupuri

1. Din proprietățile adunării și înmulțirii numerelor rezultă:
 - a) $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ sunt grupuri abeliene, numite **grupul aditiv** al numerelor întregi, raționale, reale, respectiv al numerelor complexe.
 - b) $(\mathbb{Q}^*, \cdot), (\mathbb{R}^*, \cdot), (\mathbb{C}^*, \cdot)$ sunt grupuri abeliene, numite **grupul multiplicativ** al numerelor raționale, reale, respectiv al numerelor complexe nenule.
Grupurile de la a) și b) sunt denumite **grupuri numerice**.
2. Mulțimile de matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}), \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ împreună cu adunarea matricelor formează grupuri comutative.

Exercițiu rezolvat

- ☒ Pe mulțimea $G = (2, +\infty)$ se definește legea de compoziție $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \rightarrow x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$. Să se arate că perechea $(G, \circ)$ este grup abelian.

Soluție

Perechea $(G, \circ)$ este grup abelian dacă sunt verificate axiomele grupului (G1)-(G4).

(G1) *Axioma asociativității*:

$$\text{Avem: } (x \circ y) \circ z = (xy - 2x - 2y + 6) \circ z = (xy - 2x - 2y + 6) \cdot z - 2(xy - 2x - 2y + 6) - 2z + 6 = xyz - 2(xy + xz + yz) + 4(x + y + z) - 6.$$

Analog se obține:

$$x \circ (y \circ z) = x \circ (yz - 2y - 2z + 6) = x \cdot (yz - 2y - 2z + 6) - 2x - 2(yz - 2y - 2z + 6) + 6 = xyz - 2(xy + xz + yz) + 4(x + y + z) - 6.$$

În concluzie, axioma asociativității (G1) este verificată.

(G2) Axioma elementului neutru:

Fie $e \in G$, astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in G$.

$$\text{Se obține } xe - 2x - 2e + 6 = x, \forall x \in G, \text{ echivalentă cu } e(x - 2) = 3(x - 2), \forall x \in G.$$

Elementul neutru este $e = 3 \in G$.

(G3) Axioma elementelor simetrizabile:

Dacă $x \in G$, notăm cu x' simetricul lui x . Se obține $x \circ x' = 3 = x' \circ x$, relație care conduce la $x' \cdot x - 2x - 2x' + 6 = 3$.

$$\text{Rezultă } x' = \frac{2x - 3}{x - 2} = 2 + \frac{1}{x - 2} \in (2, +\infty).$$

Așadar, $(G, \circ)$ este grup.

Deoarece $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6 = yx - 2y - 2x + 6 = y \circ x$, pentru oricare $x, y \in G$, grupul $(G, \circ)$ este grup comutativ.

❑ TEMĂ DE STUDIU

Fie $(G, \circ)$ un monoid. Să se arate că $(\mathcal{U}(G), \circ)$ este grup.

3.1. Grupul aditiv al resturilor modulo n

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\mathcal{R}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ mulțimea resturilor obținute la împărțirea numerelor întregi prin n . Pe mulțimea $\mathcal{R}_n$ s-au definit operațiile de adunare și înmulțire modulo n : $\mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n$, prin:

$$a \oplus b = (a + b) \bmod n, \text{ respectiv } a \odot b = (a \cdot b) \bmod n.$$

Elementul $a \oplus b$ reprezintă restul împărțirii sumei $a + b$ prin n . Rezultă că există numărul $q \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a + b = nq + (a \oplus b)$. (1)

➤ TEOREMA 4

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

- a) $(\mathcal{R}_n, \oplus)$ este grup abelian;
- b) $(\mathcal{R}_n, \odot)$ este monoid abelian.

Demonstrație

a) Verificăm axiomele grupului:

(G1) Axioma asociativității:

Folosind relația (1) se obține succesiv:

$$(x \oplus y) \oplus z = ((x + y) \bmod n) \oplus z = ((x + y) + z) \bmod n. \quad (2)$$

De asemenea:

$$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus ((y + z) \bmod n) = (x + (y + z)) \bmod n. \quad (3)$$

Deoarece adunarea numerelor întregi este asociativă, din relațiile (2) și (3) rezultă că $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, $\forall x, y, z \in \mathcal{R}_n$.

Așadar, adunarea modulo n este asociativă.

(G2) Numărul 0 este element neutru, deoarece se verifică imediat că $0 \oplus x = x \oplus 0 = x$, $\forall x \in \mathcal{R}_n$.

(G3) Fie $x \in \mathcal{R}_n \setminus \{0\}$. Atunci $x' = n - x \in \mathcal{R}_n$.

Rezultă că: $x \oplus x' = 0$ și $x' \oplus x = 0$.

Având și $0 \oplus 0 = 0$, rezultă că oricare $x \in \mathcal{R}_n$ este simetrizabil în raport cu adunarea modulo n .

Așadar, $(\mathcal{R}_n, \oplus)$ este grup. Mai mult, pentru orice $x, y \in \mathcal{R}_n$, avem: $x \oplus y = (x + y) \bmod n = (y + x) \bmod n = y \oplus x$, deci grupul $(\mathcal{R}_n, \oplus)$ este grup comutativ.

b) Analog se arată că $(\mathcal{R}_n, \odot)$ este monoid comutativ. ■

3.2. Grupul claselor de resturi modulo n

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$ mulțimea claselor de resturi modulo n . Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n$ s-au definit operațiile:

- $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $(\hat{a}, \hat{b}) \rightarrow \hat{a} + \hat{b} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{a \oplus b}$, numită **adunarea claselor de resturi modulo n** ;
- $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $(\hat{a}, \hat{b}) \rightarrow \hat{a} \cdot \hat{b} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{a \odot b}$, numită **înmulțirea claselor de resturi modulo n** .

TEOREMA 5

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

- a)** $(\mathbb{Z}_n, +)$ este grup abelian, numit **grupul aditiv al claselor de resturi modulo n** ;
- b)** $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ este monoid comutativ;
- c)** $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n) = \{\hat{k} \in \mathbb{Z}_n \mid (n, k) = 1\}$ și $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n), \cdot)$ este grup comutativ, numit **grupul multiplicativ al claselor de resturi modulo n** .

Demonstrație

a) Verificăm axiomele grupului.

(G1) *Axioma asociativității:*

Avem succesiv:

$$(\widehat{x} + \widehat{y}) + \widehat{z} = \widehat{(x \oplus y)} + \widehat{z} = \widehat{(x \oplus y) \oplus z} \quad (1)$$

$$\widehat{x} + (\widehat{y} + \widehat{z}) = \widehat{x} + \widehat{(y \oplus z)} = \widehat{x \oplus (y \oplus z)} \quad (2)$$

Având în vedere asociativitatea adunării modulo n , din relațiile (1) și (2) rezultă $(\widehat{x} + \widehat{y}) + \widehat{z} = \widehat{x} + (\widehat{y} + \widehat{z})$, $\forall \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z} \in \mathbb{Z}_n$.

Așadar, adunarea claselor de resturi modulo n este asociativă.

(G2) *Axioma elementului neutru:*

Pentru oricare $\widehat{x} \in \mathbb{Z}_n$, avem: $\widehat{x} + \widehat{0} = \widehat{x \oplus 0} = \widehat{x}$ și $\widehat{0} + \widehat{x} = \widehat{0 \oplus x} = \widehat{x}$.

Așadar, $\widehat{0}$ este element neutru al adunării claselor de resturi modulo n .

(G3) *Axioma elementelor simetrizabile:*

Avem: $\widehat{0} + \widehat{0} = \widehat{0}$, deci $\widehat{0}$ este propriul său simetric.

Dacă $\widehat{x} \in \mathbb{Z}_n^*$, atunci există $q, r \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x = nq + r$, $0 < r \leq n - 1$. Rezultă că: $r' = n - r \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ și avem:

$$\widehat{x} + \widehat{r'} = \widehat{r + r'} = \widehat{r \oplus (n - r)} = \widehat{0} \text{ și } \widehat{r'} + \widehat{x} = \widehat{r' + r} = \widehat{(n - r) \oplus r} = \widehat{0}.$$

În concluzie, $\widehat{x}$ este element simetrizabil, iar simetricul este elementul $\widehat{r'}$. Simetricul clasei de resturi $\widehat{x}$ se notează cu $-\widehat{x}$.

Așadar, $(\widehat{x})' = \widehat{n - x}$, pentru $\widehat{x} \neq \widehat{0}$ sau $-\widehat{x} = \widehat{n - x}$.

Rezultă că $(\mathbb{Z}_n, +)$ este grup. Mai mult, el este grup comutativ deoarece: $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x \oplus y} = \widehat{y \oplus x} = \widehat{y} + \widehat{x}$, $\forall \widehat{x}, \widehat{y} \in \mathbb{Z}_n$.

b) Verificăm axiomele monoidului comutativ.

(M1) *Asociativitatea.* Pentru oricare $\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z} \in \mathbb{Z}_n$ se obține:

$$(\widehat{x} \cdot \widehat{y}) \cdot \widehat{z} = \widehat{(x \odot y) \cdot z} = \widehat{(x \odot y) \odot z} \quad (3)$$

$$\widehat{x} \cdot (\widehat{y} \cdot \widehat{z}) = \widehat{x \cdot (y \odot z)} = \widehat{x \odot (y \odot z)} \quad (4)$$

Deoarece înmulțirea modulo n este asociativă, rezultă că:

$$(\widehat{x} \cdot \widehat{y}) \cdot \widehat{z} = \widehat{x} \cdot (\widehat{y} \cdot \widehat{z}), \forall \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z} \in \mathbb{Z}_n.$$

Așadar, înmulțirea claselor de resturi modulo n este asociativă.

(M2) *Existența elementului neutru.* Pentru oricare $\widehat{x} \in \mathbb{Z}_n$ se obține:

$$\widehat{x} \cdot \widehat{1} = \widehat{x \odot 1} = \widehat{x} \text{ și } \widehat{1} \cdot \widehat{x} = \widehat{1 \odot x} = \widehat{x}.$$

Astfel, $\hat{1}$ este element neutru pentru înmulțirea claselor de resturi modulo n . În concluzie, $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ este monoid.

Deoarece $\hat{x} \cdot \hat{y} = \widehat{x \odot y} = \widehat{y \odot x} = \hat{y} \cdot \hat{x}$, $\forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_n$, monoidul $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ este monoid comutativ.

c) Pentru $n = 1$, avem $\mathbb{Z}_1 = \{\hat{0}\}$ și $(0, 1) = 1$. Rezultă $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_1) = \{\hat{0}\}$.

Fie $n \geq 2$. Atunci, $\hat{p} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$ dacă și numai dacă există $\hat{q} \in \mathbb{Z}_n$, astfel încât $\hat{p} \cdot \hat{q} = \hat{1}$. Această relație se scrie $\widehat{pq} = \hat{1}$ sau $pq \equiv 1 \pmod{n}$.

Rezultă că există $s \in \mathbb{Z}$, astfel încât $pq + sn = 1$, relație echivalentă cu $(p, n) = 1$.

Așadar, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n) = \{\hat{p} \mid (p, n) = 1\}$. ■

➡ OBSERVAȚIE

- Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este număr prim, mulțimea elementelor inversabile în monoidul $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ este $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n^*$.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se determine $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12})$ pentru monoidul $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$ și să se alcătuiască tabla înmulțirii grupului $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12}), \cdot)$.

Soluție

Conform teoremei 5 elementele inversabile în $\mathbb{Z}_{12}$ sunt clasele $\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{11}$, deoarece numerele 1, 5, 7, 11 sunt relativ prime cu 12. Tabla înmulțirii este dată alăturat. Din tabla înmulțirii se observă că pentru $\forall x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12})$, există relația $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{1}$, deci

fiecare element este propriul său simetric

(invers). De asemenea, $\hat{5} \cdot \hat{7} = \hat{11}$, $\hat{5} \cdot \hat{11} = \hat{7}$ și $\hat{7} \cdot \hat{11} = \hat{5}$, adică produsul a două elemente distincte diferite de $\hat{1}$ este al treilea element diferit de $\hat{1}$.

$\cdot$	$\hat{1}$	$\hat{5}$	$\hat{7}$	$\hat{11}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{5}$	$\hat{7}$	$\hat{11}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{1}$	$\hat{11}$	$\hat{7}$
$\hat{7}$	$\hat{7}$	$\hat{11}$	$\hat{1}$	$\hat{5}$
$\hat{11}$	$\hat{11}$	$\hat{7}$	$\hat{5}$	$\hat{1}$

➤ COMENTARII

a) Un grup $(K, \cdot)$, $K = \{e, a, b, c\}$ a cărei tablă a operației este redată alăturat se numește **grupul lui Klein**.

b) Un grup $(K, \cdot)$ cu un număr finit de elemente este grup de tip Klein dacă oricare element al grupului este propriul său simetric (invers).

c) Grupul $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12}), \cdot)$ este un grup de tip Klein cu patru elemente.

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

3.3. Grupul permutărilor unei mulțimi

Fie M o mulțime nevidă. O funcție bijectivă $f : M \rightarrow M$ se numește **permutare** a mulțimii M . Mulțimea $S(M)$ a permutărilor mulțimii M este o submulțime a mulțimii $\mathcal{F}(M)$ a tuturor funcțiilor $f : M \rightarrow M$. Considerând operația de compunere a funcțiilor, se știe că dacă $f, g \in S(M)$, atunci $f \circ g \in S(M)$ și $g \circ f \in S(M)$.

Așadar, mulțimea $S(M)$ este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{F}(M)$ în raport cu compunerea funcțiilor.

TEOREMA 6

Perechea $(S(M), \circ)$ este grup.

Demonstrație

Verificăm axiomele grupului.

(G1) *Axioma asociativității.* Operația de compunere a permutărilor pe $S(M)$ este asociativă ca fiind indusă de compunerea funcțiilor pe $\mathcal{F}(M)$, care este asociativă.

(G2) *Axioma elementului neutru.* Funcția identică $1_M : M \rightarrow M$, $1_M(x) = x$, este bijectivă, deci este o permutare a mulțimii M , numită permutare identică a lui M . Deoarece $1_M \circ f = f \circ 1_M = f$, $\forall f \in S(M)$, rezultă că permutarea identică a mulțimii M este element neutru pentru compunerea permutărilor.

(G3) *Axioma elementelor simetrizabile.* Se știe că dacă $f \in S(M)$, atunci $f^{-1} \in S(M)$. Rezultă că orice permutare $f \in S(M)$ are un element simetric și anume permutarea f^{-1} .

În concluzie, $(S(M), \circ)$ este grup. ■

➤ OBSERVAȚII

1. Dacă mulțimea M are unul sau două elemente, grupul $S(M)$ este grup comutativ.
2. Dacă mulțimea M are cel puțin trei elemente, $S(M)$ este grup necomutativ.

3.4. Grupul simetric S_n

În cazul în care $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, grupul $S(M)$ al permutărilor lui M se notează S_n și se numește **grup simetric de grad n** .

O permutare $\sigma \in S_n$ se notează astfel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad (1)$$

În linia a doua sunt trecute valorile funcției σ .

Deoarece σ este o permutare a mulțimii M , rezultă că $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\} = \{1, 2, \dots, n\}$, deci a doua linie a tabelului (1) este formată tot din elementele mulțimii M .

Dacă $\sigma, \tau \in S_n$, compunerea (produsul) celor două permutări se scrie:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \sigma(\tau(3)) & \dots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplu

♦ Fie $\sigma, \tau \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem: $\sigma \cdot \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \sigma(\tau(3)) & \sigma(\tau(4)) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\tau \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ordinul grupului simetric S_n este egal cu $n!$.

În grupul S_n elementul neutru este permutarea identică:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Orice permutare $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$ admite elementul simetric $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$, numită **permutare inversă** sau **inversa** permutării σ .

Exemple

- Pentru $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$, permutarea inversă este $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sau

ordonând prima linie, $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

- Inversa permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$ este permutarea:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

• Transpoziție

Fie $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\} = M$, $i \neq j$. Permutarea:

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ se numește}$$

transpoziție.

Pentru transpoziția t_{ij} se folosește și notația $t_{ij} = (i, j)$. Transpoziția (i, j) este o permutare particulară care schimbă între ele numai elementele i și j .

Se arată ușor că $t_{ij}^{-1} = t_{ij}$, $t_{ij} = t_{ji}$ și $t_{ij} \cdot t_{ij} = e$.

• Signatura unei permutări

Fie $\sigma \in S_n$ și $i, j \in M = \{1, 2, \dots, n\}$, $i < j$. Perechea ordonată $(i, j) \in M \times M$ se numește **inversiune** a permutării σ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Numărul tuturor inversiunilor unei permutări $\sigma \in S_n$ se notează $m(\sigma)$.

O permutare poate avea cel mult C_n^2 inversiuni, deci $0 \leq m(\sigma) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numește **signatura (semnul)** permutării σ . Permutarea σ se numește **permutare pară** dacă $\varepsilon(\sigma) = +1$ și **permutare impară** dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Exemple

- Pentru permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$, inversiunile sunt $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, deci

$m(\sigma) = 3$, iar $\varepsilon(\sigma) = (-1)^3 = -1$. Așadar σ este permutare impară.

- Pentru transpoziția $t_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$, inversiunile sunt $(2, 3)$, $(2, 4)$,

$(3, 4)$, deci $\varepsilon(t_{24}) = -1$. Așadar, transpoziția t_{24} este permutare impară.

⇒ OBSERVAȚII

1. În general, se poate arăta că orice transpoziție $t_{ij} \in S_n$ este o permutare impară.

2. Dacă $\sigma \in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.

3. Dacă $\sigma, \tau \in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma \cdot \tau) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau)$.

□ TEMĂ

Să se alcătuiască tabla grupului:

a) $(S_2, \circ)$; b) $(S_3, \circ)$.

3.5. Grupuri de matrice

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mulțimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente numere complexe.

După cum se știe, mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ împreună cu adunarea matricelor formează un grup comutativ, iar cu înmulțirea matricelor formează un monoid necomutativ.

În continuare se vor pune în evidență câteva submulțimi ale mulțimii $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, care împreună cu înmulțirea matricelor formează grupuri.

Grupul liniar general de grad n

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se știe că matricea A este inversabilă în monoidul $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \cdot)$ dacă și numai dacă $\det(A) \neq 0$. Mulțimea unităților monoidului $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \cdot)$ se notează $GL_n(\mathbb{C})$ și avem: $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) \in \mathbb{C}^*\}$.

⇒ TEOREMA 7

Perechea $(GL_n(\mathbb{C}), \cdot)$ este grup necomutativ, numit **grup liniar general de grad n peste $\mathbb{C}$** .

Demonstratie

Fie $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. Rezultă că $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \in \mathbb{C}^*$, deci $AB \in GL_n(\mathbb{C})$. Așadar, mulțimea $GL_n(\mathbb{C})$ este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

Înmulțirea matricelor este asociativă și admite elementul neutru $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Deoarece $\det(I_n) = 1 \in \mathbb{C}^*$, rezultă că $I_n \in GL_n(\mathbb{C})$.

În consecință, înmulțirea matricelor pe mulțimea $GL_n(\mathbb{C})$ admite element neutru și anume matricea I_n .

Dacă $A \in GL_n(\mathbb{C})$, atunci $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \in \mathbb{C}^*$ și se obține că $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$.

În concluzie, $(GL_n(\mathbb{C}), \cdot)$ este grup. ■

❏ TEMĂ DE STUDIU

1. Să se arate că $(GL_n(\mathbb{Q}), \cdot)$ și $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ sunt grupuri.
2. Fie $\mathcal{M}(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$. Să se arate că mulțimea $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ împreună cu înmulțirea matricelor formează un grup necomutativ.

Grupul matricelor ortogonale

Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$.

❖ DEFINIȚIE

- Matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$ se numește **matrice ortogonală** dacă ${}^tA \cdot A = I_n$.
Mulțimea matricelor ortogonale de ordinul n se notează $O_n(\mathbb{C})$.

➡ OBSERVAȚII

1. Dacă $A \in O_n(\mathbb{C})$, atunci $\det(A) = \{-1, 1\}$.

Într-adevăr, din $A \in O_n(\mathbb{C})$ se obține că ${}^tA \cdot A = I_n$. (1)

Din relația (1) se obține succesiv:

$$1 = \det(I_n) = \det({}^tA \cdot A) = \det({}^tA) \cdot \det(A) = (\det(A))^2.$$

Așadar, $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

2. Există incluziunea $O_n(\mathbb{C}) \subset GL_n(\mathbb{C})$.

➡ TEOREMA 8

Perechea $(O_n(\mathbb{C}), \cdot)$ este un grup necomutativ, numit **grupul matricelor ortogonale de ordinul n** .

Demonstrație

Fie $A, B \in O_n(\mathbb{C})$; rezultă că ${}^tA \cdot A = I_n$ și ${}^tB \cdot B = I_n$.

Avem: ${}^t(AB) \cdot (AB) = ({}^tB \cdot {}^tA) \cdot (AB) = {}^tB \cdot ({}^tA \cdot A) \cdot B = {}^tB \cdot B = I_n$.

Așadar, $AB \in O_n(\mathbb{C})$, iar mulțimea $O_n(\mathbb{C})$ este parte stabilă a mulțimii $M_n(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

Să verificăm axiomele grupului.

(G1) *Axioma asociativității.* Înmulțirea matricelor pe mulțimea $O_n(\mathbb{C})$ este asociativă, fiind operație indusă de înmulțirea matricelor pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (proprietatea de ereditate a asociativității).

(G2) *Axioma elementului neutru.* Deoarece ${}^t I_n = I_n$ se obține că ${}^t I_n \cdot I_n = I_n$, deci $I_n \in O_n(\mathbb{C})$. Rezultă că I_n este elementul neutru al înmulțirii matricelor pe mulțimea $O_n(\mathbb{C})$.

(G3) *Axioma elementelor simetrizabile.*

Fie $A \in O_n(\mathbb{C})$. Din observația 1 rezultă că $\det(A) = \pm 1$, deci matricea A este inversabilă în monoidul $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Din relația ${}^t A \cdot A = I_n$ se deduce că $A^{-1} = {}^t A$. Folosind această relație se obține ${}^t(A^{-1}) \cdot A^{-1} = {}^t({}^t A) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$, deci $A^{-1} \in O_n(\mathbb{C})$, iar elementul simetric al matricei A în $O_n(\mathbb{C})$ este matricea A^{-1} .

Înmulțirea matricelor nu este comutativă.

În concluzie $(O_n(\mathbb{C}), \cdot)$ este grup necomutativ. ■

□ TEMĂ

Fie $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A \cdot A = I_n\}$. Să se arate că $(O_n(\mathbb{R}), \cdot)$ este grup, numit grupul matricelor ortogonale de ordinul n peste $\mathbb{R}$.

Exercițiu rezolvat

☒ Fie $A \in O_2(\mathbb{R})$. Să se arate că există $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ sau } A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Soluție

$$\text{Fie } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R}).$$

$$\text{Din condiția } {}^t A \cdot A = I_2 \text{ se obține: } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sau}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Rezultă sistemul: } \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$$

Din ecuația $a^2 + c^2 = 1$ se deduce că există $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $a = \cos \alpha$.

Rezultă $c = \pm \sin \alpha$, iar din a treia ecuație se obține $b \cos \alpha = \pm d \sin \alpha$.

Substituind d în ecuația $b^2 + d^2 = 1$ se obține $b = \pm \sin \alpha$ și $d = \pm \cos \alpha$.

$$\text{Așadar, } A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ sau } A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Pe mulțimea $\mathbb{C}$ se definește operația algebrică $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \rightarrow x \circ y = x + y + 5i$. Să se arate că $(\mathbb{C}, \circ)$ este grup comutativ.

E2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \rightarrow x \circ y = x + y + 6$ și $(x, y) \rightarrow x \perp y = x + y - 5$. Să se arate că $(\mathbb{Z}, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, \perp)$ sunt grupuri comutative.

E3. Pe mulțimea M se consideră legea de compoziție $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x \circ y$. Să se studieze dacă $(M, \circ)$ este grup în cazurile:

- $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = x + y + 3$;
- $M = 2\mathbb{Z}$, $x \circ y = x + y + 4$;
- $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = xy - 10x - 10y + 110$;
- $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = ixy$;
- $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = x + y + ixy$;
- $M = (-1, +\infty)$, $x \circ y = x + y + xy$;
- $M = (0, 1)$, $x \circ y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$;
- $M = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $x \circ y = xy + i(x + y) - 1 - i$.

E4. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legile de compoziție $G \times G \rightarrow G$,

$$(x, y) \rightarrow x \circ y \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2} \text{ și}$$

$$(x, y) \rightarrow x \perp y \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Care dintre perechile $(G, \circ)$, $(G, \perp)$ este un grup?

E5. Pe mulțimea $G = (-2, 2)$ se consideră legile de compoziție $G \times G \rightarrow G$,

$$x \circ y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x + y}{4 + xy} \text{ și } x \perp y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4x + 4y}{4 + xy}.$$

Care dintre perechile $(G, \circ)$, $(G, \perp)$ formează grup comutativ?

E6. Se consideră $G_1 = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 3y^2 = 1\}$ și $G_2 = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 3y^2 = 1\}$.

Care dintre mulțimile G_1 și G_2 este grup abelian în raport cu înmulțirea numerelor reale?

E7. Se consideră mulțimea

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & bi \\ bi & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, \det(A) \neq 0 \right\}.$$

Să se arate că G este un grup în raport cu înmulțirea matricelor.

E8. Fie

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

a) Să se arate că $(\mathcal{M}, \cdot)$ este grup comutativ.

b) Să se studieze dacă operația algebrică: $A \perp B = A^4 \cdot B^4$, definită pe mulțimea $\mathcal{M}$ determină pe aceasta o structură de grup.

E9. Fie $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ este permutare pară}\}$.

a) Să se arate că $(A_n, \circ)$ este grup (grupul altern de ordinul n).

b) Pentru ce valori ale lui n grupul A_n este comutativ?

APROFUNDARE

A1. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$. Să se arate că G este grup comutativ în raport cu înmulțirea matricelor.

A2. Se consideră mulțimea

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}_3, \det(A) = \hat{1} \right\}.$$

a) Să se determine câte elemente are mulțimea G .

b) Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup.

A3. Pe mulțimea $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $E \times E \rightarrow E$:
 $(a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + b)$. Să se arate că $(E, \circ)$ este grup.

A4. Se consideră $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ și legea de compoziție $G \times G \rightarrow G$,
 $(A, B) \rightarrow A \circ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} AB \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 Perechea $(G, \circ)$ este grup?

A5. Pe mulțimea $G = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ se definește legea de compoziție $G \times G \rightarrow G$,
 $x \circ y = xy - 2x - 2y + b$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $(G, \circ)$ să fie un grup comutativ.

A6. Fie $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = ax + 1 - a$ și $\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}^*\}$. Să se arate că $(\mathcal{F}, \circ)$ este grup.

A7. Fie $a \in \mathbb{R}$ și funcțiile $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f_a(x) = x \cdot \operatorname{ch}(a) + \sqrt{1+x^2} \operatorname{sh}(a)$.
 Dacă $\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$, să se arate că $(\mathcal{F}, \circ)$ este grup abelian.

A8. Fie $f_a : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$,

$$f_a(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^\alpha + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^\alpha}{2}$$

și $\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in (0, \infty)\}$.

a) Să se arate că dacă $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, atunci $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha\beta}$.

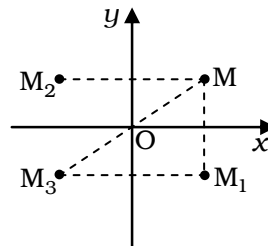
b) Să se arate că $(\mathcal{F}, \circ)$ este un grup abelian.

A9. Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}^*$, astfel încât legea de compoziție $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$,
 $(x, y) \rightarrow x \circ y \stackrel{\text{def}}{=} ax + by + 1$ să determine pe $\mathbb{Z}$ o structură de grup.

A10. Pentru un punct oarecare M din planul $\mathcal{P}$ raportat la reperul cartezian xOy , se notează cu M_1, M_2, M_3 simetricile acestuia față de axele Ox, Oy , respectiv punctul O . Se definesc funcțiile $s_i : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, $i = \overline{1, 3}$ date de relațiile:
 $s_0(M) = M$, $s_1(M) = M_1$, $s_2(M) = M_2$, $s_3(M) = M_3$ și mulțimea $\mathcal{F} = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$.

a) Să se alcătuiască tabla operației „ $\circ$ ” de compunere a funcțiilor pe mulțimea $\mathcal{F}$.

b) Să se arate că $(\mathcal{F}, \circ)$ este grup comutativ (grupul lui Klein).





Reguli de calcul într-un grup

4.1. Puterea unui element într-un grup

Fie $(G, \cdot)$ un grup în notație multiplicativă și $a_1, a_2, \dots, a_n \in G, n \geq 1$. În grupul $(G, \cdot)$ se definește produsul $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ în mod recursiv, astfel:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}) \cdot a_n.$$

În cazul particular când $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, produsul $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ se notează a^n . Prin convenție, pentru $n = 0$ se consideră $a^0 = e$, e fiind elementul neutru al grupului.

TEOREMA 9

Fie $(G, \cdot)$ un grup în notație multiplicativă și $a \in G$. Avem:

$$\text{a) } a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{N}; \quad \text{b) } (a^m)^n = a^{m \cdot n}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație

Folosind asociativitatea operației în grup se obține:

$$\text{a) } a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_m \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m+n} = a^{m+n}.$$

$$\text{b) } (a^m)^n = \underbrace{(a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m)}_n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_m \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_m \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_m \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{mn} = a^{m \cdot n}. \blacksquare$$

OBSERVAȚIE

- În notație aditivă proprietățile anterioare se scriu:

$$\underbrace{(a + a + \dots + a)}_m = m \cdot a, \quad ma + na = (m + n)a \quad \text{și} \quad (m \cdot n) \cdot a = m \cdot (n \cdot a).$$

Pentru cazul în care $n \in \mathbb{Z}$ și $n < 0$, puterea a^n se definește astfel:

$$a^n = (a^{-1})^{-n} = (a^{-n})^{-1}, \quad \text{unde } a^{-1} \text{ este elementul simetric al elementului } a.$$

TEOREMA 10

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a \in G$. Atunci:

$$\text{a) } (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n, \forall n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{b) } a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{c) } (a^m)^n = a^{m \cdot n}, \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Demonstrație

a) Pentru $n < 0$ rezultă:

$$(a^n)^{-1} = \left((a^{-1})^{-n} \right)^{-1} = \left((a^{-1})^{-1} \right)^{-n} = a^{-n} = (a^{-1})^n.$$

b) Pentru $m, n \in \mathbb{N}$ se aplică teorema 9.

Pentru $m < 0, n < 0$, putem scrie:

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot (a^{-n})^{-1} = (a^{-m})^{-1} \cdot (a^{-n})^{-1} = (a^{-n} \cdot a^{-m})^{-1} = (a^{-n-m})^{-1} = a^{m+n}.$$

Fie $m > 0$ și $n < 0$. Dacă $m > |n|$, atunci există $r \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $m = -n + r$.

$$\text{Rezultă } a^m \cdot a^n = a^{-n+r} \cdot a^n = (a^r \cdot a^{-n}) \cdot a^n = a^r \cdot a^{-n+n} = a^r = a^{m+n}.$$

În cazul $m < |n|$ se obține $-m - n = r > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Rezultă: } a^m \cdot a^n &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_m \cdot (a^{-1})^{-n} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_m \cdot \underbrace{(a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1})}_{-n} = \\ &= \underbrace{(a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1})}_{-m-n} = (a^{-1})^{-m-n} = a^{m+n}. \end{aligned}$$

c) Dacă $m, n \in \mathbb{N}$ proprietatea este adevărată. Dacă $m < 0, n > 0$, atunci avem: $(a^m)^n = (a^{-m})^{-n} = a^{(-m)(-n)} = a^{mn}$. Analog se analizează celelalte situații. ■

4.2. Legi de simplificare

TEOREMA 11

Fie $(G, \circ)$ un grup.

a) Dacă $x, y, z \in G$ și $x \circ y = x \circ z$, atunci $y = z$ (legea simplificării la stânga).

b) Dacă $x, y, z \in G$ și $x \circ z = y \circ z$, atunci $x = y$ (legea simplificării la dreapta).

Demonstrație

a) Fie $x \circ y = x \circ z$. Compunem la stânga cu simetricul x^{-1} al lui x și rezultă $x^{-1} \circ (x \circ y) = x^{-1} \circ (x \circ z) \Rightarrow (x^{-1} \circ x) \circ y = (x^{-1} \circ x) \circ z \Rightarrow e \circ y = e \circ z \Rightarrow y = z$.

b) Fie $x \circ z = y \circ z$. Compunem la dreapta cu simetricul lui z și rezultă: $(x \circ z) \circ z^{-1} = (y \circ z) \circ z^{-1} \Rightarrow x \circ (z \circ z^{-1}) = y \circ (z \circ z^{-1}) \Rightarrow x \circ e = y \circ e \Rightarrow x = y$. ■

⇒ OBSERVAȚII

1. În notație aditivă relațiile anterioare se scriu:

$x + y = x + z \Rightarrow y = z$ și $x + z = y + z \Rightarrow x = y$, reprezentând legile reducerii.

În particular, $x + x = x \Rightarrow x = 0$.

2. Dacă $(G, \cdot)$ este un grup finit, atunci în tabla lui Cayley a grupului, pe fiecare linie (coloană) toate elementele sunt distincte.

Într-adevăr, dacă, de exemplu pe linia i ar fi două elemente egale, ele ar avea forma $a_i \cdot a_k = a_i \cdot a_m$. Din legile de simplificare se obține $a_k = a_m$, ceea ce nu se poate.

Exercițiu rezolvat

☒ Fie mulțimea $M = \{a, b, c, d\}$ și legea de compoziție $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x \cdot y$, astfel încât $(M, \cdot)$ este un grup. Să se alcătuiască tabla grupului, știind că $b \cdot a = b$ și $b \cdot b = c$.

Soluție

Tabla incompletă a grupului, conform enunțului, arată ca în figura alăturată.

Deoarece $b \cdot a = b$, rezultă $b \cdot a = b \cdot e$ și din legea simplificării la stânga se obține $a = e$. Pe linia a doua a tablei grupului trebuie să apară

$\cdot$	a	b	c	d
a				
b	b	c		
c				
d				

și elementele a și d . Dacă $b \cdot d = d$, ar rezulta $b = e = a$ și nu se poate.

Rămâne numai posibilitatea $b \cdot d = a$ și $b \cdot c = d$.

Astfel, a doua linie este: b, c, d, a .

Analog, a doua coloană este b, c, d, a .

Produsul $c \cdot d$ nu poate fi egal cu c sau d , deoarece acestea apar și pe linia a treia și nici cu a , deoarece acesta apare deja pe coloana a patra.

Rezultă că $c \cdot d = b$ și, analog, $d \cdot c = b$.

Observând elementele de pe liniile 3 și 4 se obține $c \cdot c = a$ și $d \cdot d = a$.

Probleme rezolvate

☒ 1. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră operațiile algebrice:

$$x \circ y = x + y - 1, \quad x \perp y = x + y + 6 \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

a) Să se arate că $G_1 = (\mathbb{Z}, \circ)$, $G_2 = (\mathbb{Z}, \perp)$ sunt grupuri comutative.

b) Să se calculeze în G_1 și G_2 : 2^2 , $(-2)^2$, 3^3 , x^2 , x^4 .

c) Să se determine: x^n , $n \in \mathbb{N}^*$ în G_1 , respectiv G_2 .

Soluție

a) Se verifică axiomele grupului. (Temă)

b) În grupul G_1 avem: $2^2 = 2 \circ 2 = 2 + 2 - 1 = 3$, $(-2)^2 = (-2) \circ (-2) = -2 - 2 - 1 = -5$, $3^3 = 3 \circ 3 \circ 3 = (3 + 3 - 1) \circ 3 = 5 \circ 3 = 5 + 3 - 1 = 7$, $x^2 = x \circ x = x + x - 1 = 2x - 1$ și $x^4 = x \circ x \circ x \circ x = (x \circ x) \circ (x \circ x) = (2x - 1) \circ (2x - 1) = 2x - 1 + 2x - 1 - 1 = 4x - 3$.

În grupul G_2 avem: $2^2 = 2 \perp 2 = 2 + 2 + 6 = 10$, $(-2)^2 = (-2) \perp (-2) = -2 - 2 + 6 = 2$, $3^3 = 3 \perp 3 \perp 3 = (3 \perp 3) \perp 3 = (3 + 3 + 6) \perp 3 = 12 \perp 3 = 12 + 3 + 6 = 21$, $x^2 = x \perp x = x + x + 6 = 2x + 6$ iar $x^4 = x \perp x \perp x \perp x = (x \perp x) \perp (x \perp x) = (2x + 6) \perp (2x + 6) = 2x + 6 + 2x + 6 + 6 = 4x + 18$.

c) În grupul G_1 , avem: $x^2 = 2x - 1$, $x^3 = 3x - 2$, $x^4 = 4x - 3$.

Se observă că $x^n = nx - (n - 1)$. Demonstrația se face prin inducție matematică. Pentru $n = 1$ avem $x^1 = x$.

Presupunem că $x^k = kx - (k - 1)$ și avem:

$$x^{k+1} = x^k \circ x = x^k + x - 1 = kx - (k - 1) + x - 1 = (k + 1)x - k.$$

Așadar egalitatea are loc și pentru $k + 1$, deci este adevărată pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.

În grupul G_2 avem: $x^2 = 2x + 6$, $x^3 = 3x + 12$, $x^4 = 4x + 18$. Se presupune că $x^n = nx + 6(n - 1)$ și se arată prin inducție. (Temă)

☒ **2.** Pe mulțimea $M = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ se consideră operația algebrică:

$$x \circ y = xy - 4x - 4y + 20, \forall x, y \in M.$$

a) Să se arate că $(M, \circ)$ este grup comutativ.

b) Să se arate că $x \circ x = (x - 4)^2 + 4$, $x \in M$.

c) Să se calculeze în grupul M : $2^2, 2^3, 2^5$ și să se verifice că $2^2 \circ 2^3 = 2^5$.

d) Să se arate că pentru $n \in \mathbb{N}$, există egalitatea:

$$x^n = (x - 4)^n + 4, \forall x \in M.$$

e) Să se verifice prin calcul că $x^m \circ x^n = x^{m+n}$ în grupul $(M, \circ)$.

Soluție

a) Se verifică axiomele grupului. (Temă)

b) $x \circ x = x^2 - 8x + 20 = (x^2 - 8x + 16) + 4 = (x - 4)^2 + 4$.

c) Avem succesiv:

$$2^2 = 2 \circ 2 = (2 - 4)^2 + 4 = 4 + 4 = 8,$$

$$2^3 = 2 \circ 2 \circ 2 = 2 \circ 8 = 16 - 8 - 32 + 20 = -4,$$

$$2^4 = 2 \circ 2 \circ 2 \circ 2 = 2^3 \circ 2 = -4 \cdot 2 - 4 \cdot (-4) - 4 \cdot 2 + 20 = -8 + 16 - 8 + 20 = 20,$$

$$2^5 = 2^4 \circ 2 = 20 \circ 2 = -28.$$

$$\text{Obținem: } 2^2 \circ 2^3 = 8 \circ (-4) = -32 - 32 - 4 \cdot (-4) + 20 = -28 = 2^5.$$

d) Pentru $n = 2$ s-a verificat că $x^2 = (x - 4)^2 + 4$. Presupunem că $x^k = (x - 4)^k + 4$ și arătăm că $x^{k+1} = (x - 4)^{k+1} + 4$.

Avem:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k \circ x = x^k \cdot x - 4 \cdot x^k - 4 \cdot x + 20 = x^k \cdot (x - 4) - 4(x - 4) + 4 = \\ &= \left[(x - 4)^k + 4 \right] (x - 4) - 4(x - 4) + 4 = (x - 4)^{k+1} + 4(x - 4) - 4(x - 4) + 4 = \\ &= (x - 4)^{k+1} + 4. \end{aligned}$$

Așadar, afirmația este adevărată și pentru $k + 1$. Din principiul inducției rezultă că ea este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Avem: $x^m \circ x^n = x^m \cdot x^n - 4 \cdot x^m - 4 \cdot x^n + 20 = \left[(x - 4)^m + 4 \right] \cdot \left[(x - 4)^n + 4 \right] - 4 \left[(x - 4)^m + 4 \right] - 4 \left[(x - 4)^n + 4 \right] + 20 =$

$$\begin{aligned} &= (x - 4)^{m+n} + 4(x - 4)^m + 4(x - 4)^n + 16 - 4(x - 4)^m - 16 - 4(x - 4)^n - 16 + 20 = \\ &= (x - 4)^{m+n} + 4 = x^{m+n}. \end{aligned}$$

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se arate că pentru oricare $a, b, c \in G$, ecuațiile $ax = b$, $y \cdot a = b$ și $azb = c$ au soluție unică.

Soluție

Să rezolvăm prima ecuație.

$$\text{Avem succesiv: } ax = b \Leftrightarrow ax = eb \Leftrightarrow ax = (aa^{-1})b \Leftrightarrow ax = a(a^{-1}b).$$

Folosind regula de simplificare la stânga se obține $x = a^{-1}b$.

Analog: $ya = b \Leftrightarrow ya = be \Leftrightarrow ya = b(a^{-1}a) \Leftrightarrow ya = (ba^{-1})a$ și folosind regula de simplificare la dreapta se obține că $y = ba^{-1}$.

Pentru ecuația $azb = c$, avem succesiv:

$$azb = c \Leftrightarrow a(zb) = c \Leftrightarrow zb = a^{-1}c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = a^{-1}cb^{-1}.$$

Așadar cele trei ecuații au soluții unice.

Reținem

$$ax = b \Rightarrow x = a^{-1}b$$

$$ya = b \Rightarrow y = ba^{-1}$$

$$azb = c \Rightarrow z = a^{-1}cb^{-1}$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Pe mulțimea $G = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ se definește legea de compoziție $G \times G \rightarrow G$,

$$(x, y) \rightarrow x \circ y \stackrel{\text{def}}{=} x + y - xy.$$

a) Să se arate că $(G, \circ)$ este grup comutativ.

b) Să se calculeze în grupul G :

$$(1+i)^2, (1-i)^2 \text{ și } i^5.$$

E2. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Să se arate că G este grup comutativ în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Fie $A \in G$. Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

E3. Se consideră mulțimea $G = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ și legea de compoziție $G \times G \rightarrow G$,

$$(x, y) \rightarrow x \circ y \stackrel{\text{def}}{=} x^{\log_2 y}.$$

a) Să se arate că $(G, \circ)$ este grup comutativ.

b) Să se determine 4^n și x^n , $n \geq 1$, $x \in G$.

E4. Pe mulțimea $G = (4, +\infty)$ se definește legea de compoziție $G \times G \rightarrow G$,

$$(x, y) \rightarrow x \circ y \stackrel{\text{def}}{=} xy - 4(x+y) + 20.$$

a) Să se arate că $(G, \circ)$ este un grup comutativ.

b) În grupul $(G, \circ)$ să se determine 5^n și x^n , $n \geq 1$ și $x \in G$.

E5. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b \in G$ astfel încât $ab = ba$. Să se arate că:

a) $a^2b = ba^2$; b) $a^2b^3 = b^3a^2$;

c) $a^n b = b a^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

E6. Fie $(G, \cdot)$ un grup, $a, b \in G$ și $x = aba^{-1}$. Să se calculeze:

a) x^2 ; b) x^5 ; c) x^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

APROFUNDARE

A1. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b \in G$, astfel încât $ab = ba$. Să se arate că:

a) $a^n b = b a^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

b) $a^m b^n = b^n a^m$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$.

A2. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b \in G$, astfel încât $a = b^2$ și $b = a^2$. Să se arate că:

a) dacă $x = aba$, atunci $x^3 = e$;

b) dacă $x = aba^{-1}$, atunci $x^3 = e$.

A3. În grupul $(G, \cdot)$ se consideră elementele a și b , astfel încât $ab = e$. Să se arate că $ba = e$.

A4. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b \in G$, astfel încât $ab^2 = e$. Să se arate că $ab = ba$.

A5. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $x, y \in G$. Dacă $x^5 = e$ și $y^2 = xyx^{-1}$, să se arate că $y^{31} = e$.

A6. În grupul $(G, \cdot)$ se consideră elementele a, b, c astfel încât $abc = e$. Să se arate că: a) $bca = e$; b) $cab = e$.

A7. Se consideră grupul $(G, \cdot)$ și $a, b \in G$, astfel încât $aba = bab$. Să se arate că $a^5 = e$, dacă și numai dacă $b^5 = e$.

A8. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b \in G$. Să se arate că:

a) dacă $x = aba^{-1}$, atunci $x^n = ab^n a^{-1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

b) dacă $\exists n \in \mathbb{Z}^*$, astfel încât

$$(aba^{-1})^n = e, \text{ atunci } b^n = e.$$

A9. Fie $(A, \cdot)$ un grup, $A = \{a, b, c, d, e\}$.

Dacă $ab = d$, $ca = e$, $dc = b$, să se alcătuiască tabla grupului.

A10. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se arate că

G este comutativ dacă are loc una dintre situațiile:

a) $x^2 = e$, $\forall x \in G$;

b) $(xy)^2 = x^2 y^2$, $\forall x, y \in G$;

c) $(xy)^{-1} = x^{-1} y^{-1}$, $\forall x, y \in G$;

d) $xy^{-1} = yx^{-1}$, $\forall x, y \in G \setminus \{e\}$;

e) $x^3 = e$ și $x^2 y^2 = y^2 x^2$, $\forall x, y \in G$;

f) $x^3 = e$ și $(xy)^2 = (yx)^2$, $\forall x, y \in G$;

g) $xy^{-1} = x^{-1} y$, $\forall x, y \in G \setminus \{e\}$.

A11. Fie $\sigma, \tau, \theta \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se rezolve ecuațiile:

a) $x\sigma = \tau$; b) $\sigma x = \tau$; c) $\sigma x \tau = \theta$;

d) $x\sigma = \sigma x$; e) $x^2 = \sigma$; f) $x^2 = \theta$;

g) $\sigma^{201} \cdot x = \theta^{407}$.

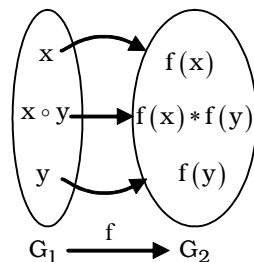
5

Morfisme de grupuri

Fie $(G_1, \circ)$ și $(G_2, *)$ două grupuri.

DEFINIȚII

- Funcția $f : G_1 \rightarrow G_2$ se numește **morfism** (omomorfism) de grupuri dacă $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$, $\forall x, y \in G_1$.
- Funcția $f : G_1 \rightarrow G_2$ se numește **izomorfism** de grupuri dacă f este morfism de grupuri și este funcție bijectivă.
- Grupurile $(G_1, \circ)$ și $(G_2, *)$ se numesc **grupuri izomorfe** și se scrie $G_1 \simeq G_2$, dacă între ele există cel puțin un izomorfism de grupuri.



Exemple

- Funcția $f : \mathbb{Z} \rightarrow \{-1, 1\}$, $f(n) = (-1)^n$ este morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, +)$ și $(\{-1, 1\}, \cdot)$.
Într-adevăr, avem: $f(m + n) = (-1)^{m+n} = (-1)^m \cdot (-1)^n = f(m) \cdot f(n)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$.
- Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = 2^x$ este izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $((0, \infty), \cdot)$. Într-adevăr, funcția exponențială f este bijectivă și: $f(x + y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
Așadar, grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $((0, \infty), \cdot)$ sunt izomorfe.

- ♦ Fie $I_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$ mulțimea matricelor de ordinul n , inversabile. Funcția $f : I_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$, $f(A) = \det(A)$ este morfism între grupurile $(I_n(\mathbb{C}), \cdot)$ și $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, deoarece: $f(A \cdot B) = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = f(A) \cdot f(B)$, $\forall A, B \in I_n(\mathbb{C})$.

Problemă rezolvată

☒ Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x \circ y \stackrel{\text{def}}{=} x + y + 1;$$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x \perp y \stackrel{\text{def}}{=} x + y + 5.$$

a) Să se arate că $(\mathbb{Z}, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, \perp)$ sunt grupuri.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$, pentru care funcția $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$, este izomorfism între grupurile $(\mathbb{Z}, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, \perp)$.

Soluție

a) Se verifică axiomele grupului.

b) Funcția f este morfism de grupuri dacă $f(x \circ y) = f(x) \perp f(y)$,

$\forall x, y \in \mathbb{Z}$. (1)

Din relația (1) se obține $a(x + y + 1) + b = ax + b + ay + b + 5$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, relație din care rezultă $a = b + 5$.

Așadar, $f(x) = ax + a - 5$.

Pentru ca f să fie bijectivă este necesar ca f să fie injectivă și surjectivă.

Din surjectivitatea funcției f , pentru $y = a - 4$ trebuie să existe $x \in \mathbb{Z}$, astfel ca $f(x) = a - 4$.

Rezultă că $ax = 1$, de unde se obține $a \in \{1, -1\}$.

Funcțiile f sunt: $f(x) = x - 4$ și $f(x) = -x - 6$, care se constată că sunt bijective.

TEOREMA 12

Fie $(G_1, \cdot)$ și $(G_2, \cdot)$ două grupuri cu elementele neutru e_1 și e_2 , și $f : G_1 \rightarrow G_2$ un morfism de grupuri. Atunci:

a) $f(e_1) = e_2$;

b) $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$, $\forall x \in G_1$;

c) $f(x^n) = (f(x))^n$, $\forall x \in G_1$ și $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstrație

a) Avem: $f(e_1) = f(e_1 \cdot e_1) \stackrel{f \text{ morfism}}{=} f(e_1) \cdot f(e_1).$

Simplificând cu $f(e_1)$ în grupul G_2 se obține $f(e_1) = e_2.$

b) Avem: $f(x) \cdot f(x^{-1}) = f(x \cdot x^{-1}) = f(e_1) = e_2, \forall x \in G.$

Din această relație rezultă: $f(x) \cdot (f(x))^{-1} = f(x) \cdot f(x^{-1})$ și, aplicând legea de simplificare la stânga cu $f(x)$, se obține relația cerută $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}, \forall x \in G_1.$

c) Pentru $n = 0$ rezultă $f(e_1) = e_2$, adică relația a).

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, avem succesiv:

$$f(x^n) = f(x \cdot x^{n-1}) = f(x) \cdot f(x^{n-1}) = \dots = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x)}_n = (f(x))^n.$$

Pentru $n < 0$, avem succesiv:

$$f(x^n) = f\left((x^{-1})^{-n}\right) = \left(f(x^{-1})\right)^{-n} = (f(x))^{-1 \cdot (-n)} = (f(x))^n. \blacksquare$$

➤ OBSERVAȚIE

• În scriere aditivă, relațiile anterioare se scriu:

a) $f(0) = 0;$

b) $f(-x) = -f(x), \forall x \in G_1;$

c) $f(nx) = nf(x), \forall x \in G_1 \text{ și } n \in \mathbb{Z}.$

▣ TEOREMA 13

Fie grupurile $(G_1, \cdot), (G_2, \cdot)$ și $(G_3, \cdot).$

a) Dacă $f: G_1 \rightarrow G_2$ și $g: G_2 \rightarrow G_3$ sunt morfisme de grupuri, atunci $h: G_1 \rightarrow G_3, h = g \circ f$ este morfism de grupuri.

b) Dacă $f: G_1 \rightarrow G_2$ este izomorfism de grupuri, atunci $f^{-1}: G_2 \rightarrow G_1$ este izomorfism de grupuri.

Demonstrație

a) Avem succesiv:

$$h(xy) = g(f(xy)) = g(f(x) \cdot f(y)) = g(f(x)) \cdot g(f(y)) = h(x) \cdot h(y), \forall x, y \in G_1.$$

b) Funcția $f^{-1}: G_2 \rightarrow G_1$ este bijectivă.

Fie $y_1, y_2 \in G_2$. Deoarece $f: G_1 \rightarrow G_2$ este funcție bijectivă, rezultă că există $x_1, x_2 \in G_1$, astfel încât $f(x_1) = y_1$ și $f(x_2) = y_2.$

$$\begin{aligned} \text{Avem: } f^{-1}(y_1 \cdot y_2) &= f^{-1}(f(x_1) \cdot f(x_2)) = f^{-1}(f(x_1 \cdot x_2)) = x_1 \cdot x_2 = \\ &= f^{-1}(y_1) \cdot f^{-1}(y_2). \end{aligned}$$

Așadar, f^{-1} este izomorfism de grupuri. ■

❖ DEFINIȚII

Fie $(G, \cdot)$ un grup.

- Un morfism $f : G \rightarrow G$ se numește **endomorfism** al grupului G .
- Un izomorfism $f : G \rightarrow G$ se numește **automorfism** al grupului G .

Mulțimea endomorfismelor unui grup G se notează $\text{End}(G)$, iar mulțimea automorfismelor lui G se notează $\text{Aut}(G)$.

▣ TEOREMA 14

Fie $(G, \cdot)$ un grup. Atunci:

- $(\text{End}(G), \circ)$ este monoid;
- $(\text{Aut}(G), \circ)$ este grup.

Demonstratie

a) Din teorema 13 rezultă că dacă $f, g \in \text{End}(G)$, atunci și $f \circ g \in \text{End}(G)$. Compunerea funcțiilor este asociativă, deci și compunerea endomorfismelor lui G este asociativă. Funcția identică 1_G este endomorfism al lui G . În concluzie, $(\text{End}(G), \circ)$ este monoid.

b) Dacă $f, g \in \text{Aut}(G)$, din teorema 13 rezultă că $f \circ g \in \text{Aut}(G)$. Compunerea funcțiilor pe $\text{Aut}(G)$ este asociativă și admite pe $1_G \in \text{Aut}(G)$ element neutru. Dacă $f \in \text{Aut}(G)$, atunci și $f^{-1} \in \text{Aut}(G)$, având în vedere teorema 13. Așadar, $(\text{Aut}(G), \circ)$ este grup. Se observă că $(\text{Aut}(G), \circ)$ este grupul unităților monoidului $(\text{End}(G), \circ)$. ■

📖 Exemplu

- Fie $(\mathbb{Z}, +)$ grupul aditiv al numerelor întregi.
- a)** Să se determine monoidul $(\text{End}(\mathbb{Z}), \circ)$.
- b)** Să se determine $\text{Aut}(\mathbb{Z})$ și să se arate că grupurile $(\text{Aut}(\mathbb{Z}), \circ)$ și $(\mathbb{Z}_2, +)$ sunt izomorfe.

Soluție

a) Fie $f \in \text{End}(\mathbb{Z})$. Rezultă că $f(n) = f(n \cdot 1) = nf(1)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, (teorema 14).

Fie $a = f(1)$; atunci un endomorfism al lui $\mathbb{Z}$ este funcția $f_a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f_a(x) = ax$.

În concluzie, $\text{End}(\mathbb{Z}) = \{f_a \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

b) Deoarece $\text{Aut}(\mathbb{Z}) \subset \text{End}(\mathbb{Z})$, rezultă că automorfismele lui $\mathbb{Z}$ sunt de forma $f_a(x) = ax$. Dacă funcția f_a este surjectivă, atunci rezultă că există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f_a(x) = 1$. Din această relație rezultă că $ax = 1$ și de aici $a \in \{-1, 1\}$.

Așadar, $\text{Aut}(\mathbb{Z}) = \{f_1, f_{-1}\}$.

Definim $\varphi: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z})$, astfel: $\varphi(\hat{0}) = f_1$, $\varphi(\hat{1}) = f_{-1}$.

Evident, funcția φ este bijectivă. De asemenea, φ este și morfism de grupuri, deoarece:

$$\varphi(\hat{0} + \hat{0}) = \varphi(\hat{0}) = f_1 \text{ și } \varphi(\hat{0}) \circ \varphi(\hat{0}) = f_1 \circ f_1 = f_1;$$

$$\varphi(\hat{0} + \hat{1}) = \varphi(\hat{1}) = f_{-1} \text{ și } \varphi(\hat{0}) \circ \varphi(\hat{1}) = f_1 \circ f_{-1} = f_{-1};$$

$$\varphi(\hat{1} + \hat{1}) = \varphi(\hat{0}) = f_1 \text{ și } \varphi(\hat{1}) \circ \varphi(\hat{1}) = f_{-1} \circ f_{-1} = f_1.$$

Așadar, are loc izomorfismul de grupuri: $(\mathbb{Z}_2, +) \simeq (\text{Aut}(\mathbb{Z}), \circ)$.

► COMENTARII

a) Cele două table ale operațiilor grupurilor sunt redată mai jos.

$\circ$	f_1	f_{-1}	$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
f_1	f_1	f_{-1}	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
f_{-1}	f_{-1}	f_1	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$

Se observă că aceste table au aceeași structură cu următoarea tablă:

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	e

b) În general, două grupuri cu un număr finit de elemente sunt izomorfe dacă tablele operațiilor lor sunt la fel structurate.

□ TEMĂ DE PROIECT

1. Să se arate că funcția $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(z) = |z|$ este morfism între grupurile $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ și $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

2. Se notează $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ mulțimea funcțiilor continue pe $\mathbb{R}$ și $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ mulțimea funcțiilor derivabile pe $\mathbb{R}$ cu derivata continuă. Să se arate că:

a) $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), +)$, $(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}), +)$ sunt grupuri comutative.

b) funcția $\varphi: \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $\varphi(f) = f'$, unde f' este derivata funcției f , este morfism de grupuri.

c) Să se determine mulțimea $M = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid \varphi(f) = 0\}$.

d) Să se arate că funcția φ este surjectivă și neinjectivă.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

- E1.** Fie $(G, +)$ un grup, unde $G = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, și $a \in G$. Să se arate că $f: G \rightarrow G$, $f(x) = ax$ este un endomorfism de grupuri. În ce caz f este automorfism de grupuri?
- E2.** Fie $(\mathbb{C}, +)$ grupul aditiv al numerelor complexe. Să se arate că $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ este automorfism de grupuri.
- E3.** Fie $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ grupul multiplicativ al numerelor complexe. Să se arate că $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $f(z) = \bar{z}$ este automorfism de grupuri.
- E4.** Notăm $\mathbb{Q}(\sqrt{7}) = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Să se arate că:
 a) $(\mathbb{Q}(\sqrt{7}), +)$ este grup comutativ;
 b) $f: \mathbb{Q}(\sqrt{7}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{7})$, $f(a + b\sqrt{7}) = a - b\sqrt{7}$ este automorfism de grupuri.
- E5.** Se consideră mulțimea:

$$M = \left\{ A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}.$$
 Să se arate că:
 a) $(M, +)$ este grup;
 b) $f: \mathbb{R} \rightarrow M$, $f(x) = A(x)$ este izomorfism de grupuri între $(\mathbb{R}, +)$ și $(M, +)$.
- E6.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziție $x \circ y = x + y + a$, $x \perp y = x + ay - 1$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$, să fie izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, \circ)$ și $(\mathbb{R}, \perp)$.
- E7.** Fie $G = (-3, 3)$ și legea de compoziție pe G , $x \circ y = \frac{9x + 9y}{9 + xy}$. Să se arate că:
 a) $(G, \circ)$ este grup comutativ;
 b) $f: G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 \frac{3+x}{3-x}$ este izomorfism între grupurile $(G, \circ)$ și $(\mathbb{R}, +)$.
- E8.** Fie $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ unde $f_i: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $i = \overline{1, 4}$ și $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $f_4(x) = -\frac{1}{x}$. Să se arate că:
 a) $(F, \circ)$ este grup comutativ.
 b) $(F, \circ)$ este izomorf cu grupul lui Klein.
- E9.** Fie $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ unde $f_i: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $i = \overline{1, 3}$ și $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_3(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Să se arate că:
 a) $(F, \circ)$ este grup comutativ;
 b) $(F, \circ) \simeq (\mathbb{Z}_3, +)$.
- E10.** Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a \in G$. Pe $G \times G$ se definește legea de compoziție $(x, y) \rightarrow x \circ y = xay$. Să se arate că $(G, \circ)$ este un grup și $(G, \circ) \simeq (G, \cdot)$.

APROFUNDARE

A1. Fie $G = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Să

se arate că:

a) $(G, \cdot)$ este un grup comutativ;

b) $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{R}, +)$.

A2. Fie $G = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.

Să se arate că:

a) $(G, \cdot)$ este un grup comutativ.

b) $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{R}, +)$.

A3. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea

$M = \{A^n \mid n \geq 1\}$. Să se arate că $(M, \cdot)$ este un grup comutativ izomorf cu un grup multiplicativ de numere complexe.

A4. Pe mulțimea $G = (3, +\infty)$ se consideră legea de compoziție:

$$x \circ y = xy - 3x - 3y + 12.$$

a) Să se arate că $(G, \circ)$ este un grup comutativ.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow G$, $f(x) = ax + b$ este izomorfism între grupurile $((0, +\infty), \cdot)$ și $(G, \circ)$.

A5. Fie $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

și $G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Să se arate că $(G_1, \cdot)$ și $(G_2, \cdot)$ sunt grupuri izomorfe.

A6. Fie $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$

și $G_2 = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 2y^2 = 1\}$.

Să se arate că grupurile $(G_1, \cdot)$ și $(G_2, \cdot)$ sunt izomorfe.

A7. Fie $G = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și legea de compoziție

$$G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x \circ y = \arctg(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y).$$

a) $(G, \circ)$ este un grup comutativ.

b) $(G, \circ) \simeq (\mathbb{R}, +)$.

A8. Fie $G = (1, +\infty)$ și legea de compoziție

$$G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x \circ y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}.$$

a) Să se arate că $(G, \circ)$ este un grup comutativ.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care funcția $f: (0, \infty) \rightarrow G$, $f(x) = \sqrt{ax + b}$ este izomorfism între grupurile $((0, +\infty), \cdot)$ și $(G, \circ)$.

A9. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a \in G$. Să se arate că $f_a: G \rightarrow G$, $f_a(x) = axa^{-1}$ este automorfism al grupului G (f_a se numește automorfism interior al grupului G).

A10. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se arate că $f: G \rightarrow G$, $f(x) = x^{-1}$ este automorfism al grupului G dacă și numai dacă G este comutativ.

A11. Se consideră funcția $f_a: G \rightarrow G$, $f_a(x) = \begin{cases} ax, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ și $F = \{f_a \mid a \in (0, +\infty)\}$.

Să se arate că:

a) $(F, \circ)$ este grup comutativ;

b) $(F, \circ) \simeq ((0, +\infty), \cdot)$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

- 1. Fie $G = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ și legea de compoziție $G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x \circ y = x + y - xy$.
- Să se determine $(1-i) \circ (1+i)$ și $i \circ i \circ i \circ i$.
 - Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.
 - Să se rezolve în G ecuațiile: $x \circ i \circ x = i \circ x \circ i$; $x \circ i = i \circ (i \circ x)$.
 - Să se rezolve în G sistemul:

$$\begin{cases} x \circ i = i \circ y \\ (x+1) \circ y = 1 \end{cases}$$
- (6 puncte)
- 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b \in G$, astfel încât $ab \neq ba$.
- Să se arate că următoarele elemente sunt distincte: e, a, b, ab, ba .
 - Să se arate că un grup necomutativ are cel puțin 5 elemente.
- (3 puncte)

Testul 2

- 1. Pe mulțimea $G = (1, 2) \cup (2, +\infty)$ se definește legea de compoziție $G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x \circ y = (x-1)^{\ln(y-1)} + 1$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:
- G nu este parte stabilă în raport cu legea dată.
 - Legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă.
 - Legea de compoziție „ $\circ$ ” admite elementul neutru numărul $e + 2$.
 - $(G, \circ)$ este grup abelian.
- (6 puncte)
- 2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legile de compoziție:
- $$x \circ y = ax + by - 1 \text{ și } x \perp y = 2xy - 2x - 2y + c.$$
- Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $(\mathbb{R}, \circ)$ este grup abelian.
 - Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care $(\mathbb{R}, \circ)$ este grup abelian și $(x \circ y) \perp z = (x \perp z) \circ (y \perp z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - În condițiile găsite la b) să se determine elementele simetrizabile în monoidul $(\mathbb{R}, \perp)$.
- (3 puncte)

Testul 3

○ 1. Se consideră mulțimea de matrice:

$$\mathcal{M} = \left\{ A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mid m \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}).$$

a) Să se arate că $\mathcal{M}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Să se determine $m \in \mathbb{Z}$ știind că $A^2(m) + m \cdot A^3(m) = A(m^2 + 3)$.

c) Să se arate că $(\mathcal{M}, \cdot)$ este grup comutativ.

d) Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{M}$, $f(x) = A(\alpha x + \beta)$ să fie izomorfism între grupurile $(\mathbb{Z}, +)$ și $(\mathcal{M}, \cdot)$.

○ 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}_6 \rightarrow \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_3$, dată prin $f(a) = (a \bmod 2, a \bmod 3)$.

a) Să se arate că f este funcție bijectivă.

b) Să se determine mulțimea $G = \{f^{-1}((0, x)) \mid x \in \mathbb{R}_3\}$.

c) Să se arate că $(G, \oplus)$ este grup.

Testul 4

○ 1. Se consideră mulțimile $G_1 = (-1, +\infty)$, $G_2 = (-\infty, 1)$.

Pe mulțimile G_1 și G_2 se definesc operațiile algebrice:

$$x \circ y = xy + x + y, \quad \forall x, y \in G_1 \text{ și } x \perp y = x + y - xy, \quad \forall x, y \in G_2.$$

a) Să se rezolve ecuațiile $x \circ (x+1) = (x+1) \perp x$ și $x^2 \circ (x-1) = x \perp x^2$.

b) Să se arate că $(G_1, \circ)$ și $(G_2, \perp)$ sunt grupuri comutative.

c) Funcția $f: G_1 \rightarrow G_2$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$ este izomorfism de grupuri?

○ 2. Fie $\sigma \in S_n$ o permutare cu n elemente, $n \geq 1$.

a) Să se arate că funcția $f_\sigma: S_n \rightarrow S_n$, $f_\sigma(x) = \sigma x \sigma^{-1}$ este automorfism de grupuri.

b) Dacă $\mathcal{F} = \{f_\sigma \mid \sigma \in S_n\}$, perechea $(\mathcal{F}, \circ)$ este grup?

Testul 5

○ 1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și submulțimea:

$$H \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad H = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

a) Să se demonstreze că dacă $A, B \in H$ atunci $A + B \in H$.

b) Să se verifice că $O_2 \in H$.

c) Să se arate că dacă $A \in H$ atunci $-A \in H$.

d) Să se arate că submulțimea H împreună cu operația de adunare indusă formează o structură de grup comutativ.

e) Să se demonstreze că dacă $A \in H$ și are determinantul zero, atunci $A = O_2$.

(Bacalaureat, iunie 2000)

○ 2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră operațiile algebrice:

$$x \circ y = ax + cy + b \text{ și } x \perp y = cx + cy + a + b.$$

a) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{Z}$, pentru care perechile $(\mathbb{Z}, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, \perp)$ sunt grupuri.

b) Să se determine $m, n \in \mathbb{Z}$ pentru care funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = mx + n$ este izomorfism între grupurile $(\mathbb{Z}, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, \perp)$.

○ 3. Se consideră mulțimea F a funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile cu proprietatea că $f'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că adunarea funcțiilor determină pe mulțimea F o structură de grup comutativ.

b) Să se arate că grupul $(\mathcal{F}, +)$ este izomorf cu grupul aditiv $(\mathbb{R}, +)$.

Testul 6

○ 1. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție:

$$x \perp y = 3xy - 6x - 6y + 14, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Să se arate că legea este asociativă și comutativă.

b) Să se determine elementul neutru.

c) Să se demonstreze că pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$ are loc identitatea:

$$\underbrace{x \perp x \perp \dots \perp x}_{\text{de } n\text{-ori } x} = 3^{n-1} \cdot (x - 2)^n + 2, x \in \mathbb{R}.$$

(Bacalaureat, iunie 2000)

○ 2. Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = x^{\log_2 y}$, $\forall x, y \in G$.

a) Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.

b) Să se rezolve sistemul:
$$\begin{cases} x * (2y) = 8 \\ (2x) * y = 16 \end{cases}$$

c) Să se arate că între grupurile $((0, +\infty), \cdot)$ și $(G, *)$ există un izomorfism de forma $f(x) = a^x$.

(Univ. Craiova, septembrie 2000)

○ 3. Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & ax + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $(M, \cdot)$ să fie grup.

b) Să se arate că toate grupurile obținute la punctul a) sunt izomorfe.

II. INELE ȘI CORPURI

1

Definiții și exemple

❖ DEFINIȚII

Fie A o mulțime nevidă și legile de compoziție:

$$A \times A \rightarrow A, (x, y) \rightarrow x \perp y;$$

$$A \times A \rightarrow A, (x, y) \rightarrow x \top y.$$

- Tripletul $(A, \perp, \top)$ se numește **inel** dacă sunt verificate axiomele:

(A1) *Axioma grupului:*

Perechea $(A, \perp)$ este grup comutativ.

(A2) *Axioma monoidului:*

Perechea $(A, \top)$ este monoid.

(A3) *Axiomele distributivității:*

$$x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z), \forall x, y, z \in A;$$

$$(x \perp y) \top z = (x \top z) \perp (y \top z), \forall x, y, z \in A.$$

- Inelul $(A, \perp, \top)$ se numește **inel comutativ** dacă legea de compoziție „ $\top$ ” este comutativă.

- Grupul $(A, \perp)$ se numește **grupul subiacent** al inelului $(A, \perp, \top)$.

Pentru simplificarea scrierii, atunci când este posibil, pentru cele două legi de compoziție „ $\perp$ ” și „ $\top$ ” se folosesc notațiile „ $+$ ” și „ $\cdot$ ”. Astfel, tripletul $(A, \perp, \top)$ capătă scrierea $(A, +, \cdot)$.

• Prima operație a inelului se numește **adunarea** inelului, iar a doua operație se numește **înmulțirea inelului**.

• Elementul neutru al adunării inelului se numește **element nul** sau **zero** și se notează 0_A sau, mai simplu, 0 .

• Simetricul unui element $x \in A$ în grupul subiacent $(A, +)$ se numește **opusul** lui x și se notează „ $-x$ ”.

• Dacă $a, b \in A$, elementul $a + (-b)$ se notează $a - b$ și se numește **diferența** elementelor a și b .

• Elementul neutru al monoidului $(A, \cdot)$ se numește **elementul unitate** al inelului și se notează 1_A sau, mai simplu, 1 .

• Cu notațiile „ $+$ ” și „ $\cdot$ ” pentru operațiile inelului, axiomele distributivității se scriu:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall x, y, z \in A;$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \forall x, y, z \in A.$$

• Acestea reprezintă reguli de înmulțire a unui element cu o sumă, respectiv a înmulțirii unei sume cu un element al inelului.

• Elementele simetrizabile ale monoidului $(A, \cdot)$ se numesc **elemente inversabile** ale inelului A sau **unități** ale inelului A. Mulțimea unităților inelului A se notează $\mathcal{U}(A)$. Se știe că perechea $(\mathcal{U}(A), \cdot)$ este un grup, numit **grupul unităților** inelului A. Dacă x este inversabil, inversul său se notează x^{-1} .

📖 Exemple de inele

- Din proprietățile adunării și înmulțirii numerelor rezultă că tripletele $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt inele comutative, numite **inele numerice**.
- Având în vedere proprietățile adunării și înmulțirii matricelor, rezultă că tripletele $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), +, \cdot)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Q}), +, \cdot)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ și $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +, \cdot)$, $n \geq 2$, sunt inele necomutative. Elementul nul în aceste inele este matricea nulă O_n , iar elementul unitate este matricea unitate I_n .

□ TEMĂ

1. Activitate individuală

Să se determine grupul unităților inelelor numerice $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

2. Activitate pe grupe

Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție:

Grupa 1

$$x \perp y = x + y + 1,$$

$$x \top y = xy + x + y,$$

Grupa 2

$$x \perp y = x + y - 1,$$

$$x \top y = x + y - xy,$$

Grupa 3

$$x \perp y = x + y + 3,$$

$$x \top y = xy + 3x + 3y + 6.$$

a) Să se studieze dacă $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este inel comutativ.

b) Să se determine $\mathcal{U}(\mathbb{Z})$.

1.1. Inelul claselor de resturi modulo n

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$ mulțimea claselor de resturi modulo n. Se știe că $(\mathbb{Z}_n, +)$ este grup comutativ, iar $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ este monoid comutativ.

Se verifică totodată și axiomele distributivității:

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot (\hat{y} + \hat{z}) &= \hat{x} \cdot \widehat{y \oplus z} = \widehat{x \odot (y \oplus z)} = \widehat{(x \odot y) \oplus (x \odot z)} = \widehat{x \odot y} + \widehat{x \odot z} = \\ &= \hat{x} \cdot \hat{y} + \hat{x} \cdot \hat{z}, \quad \forall \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \mathbb{Z}_n. \end{aligned}$$

$$\text{Analog, } (\hat{x} + \hat{y}) \cdot \hat{z} = \hat{x} \cdot \hat{z} + \hat{y} \cdot \hat{z}, \quad \forall \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \mathbb{Z}_n.$$

Așadar, înmulțirea claselor de resturi modulo n este distributivă în raport cu adunarea claselor de resturi modulo n.

În concluzie, tripletul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este un inel comutativ, numit **inelul claselor de resturi modulo n**.

În monoidul $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ un element $\hat{p} \in \mathbb{Z}_n$ este inversabil dacă și numai dacă $(p, n) = 1$. Se obține că $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n) = \{\hat{p} \in \mathbb{Z}_n \mid (p, n) = 1\}$.

În particular, dacă n este număr prim, rezultă că $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n \setminus \{\hat{0}\}$.

□ TEMĂ

Activitate pe grupe de elevi

1. Să se determine elementele inversabile în inelele:

Grupa 1
 $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{16}$

Grupa 2
 $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{18}$

Grupa 3
 $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{24}$

2. Să se determine elementele x din inelul $(M, +, \cdot)$ cu proprietatea că $x \cdot x = \hat{0}$, dacă:

Grupa 1
 $M = \mathbb{Z}_{16}$

Grupa 2
 $M = \mathbb{Z}_9$

Grupa 3
 $M = \mathbb{Z}_{25}$

și să se arate că $\{\hat{1} - x \mid x \in M, x \cdot x = \hat{0}\} \subset \mathcal{U}(M)$.

1.2. Inele de matrice pătratice

Fie $(K, +, \cdot)$ un inel comutativ. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se notează cu $\mathcal{M}_n(K)$ mulțimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente din inelul K .

Pe mulțimea $\mathcal{M}_n(K)$ se definesc operațiile de **adunare** și **înmulțire** ale matricelor, astfel:

Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, atunci:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij});$$

$$A \cdot B = (c_{ij}), \text{ unde } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

De asemenea, pentru matricea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ se definește determinantul acesteia: $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$ care este un element al inelului K . Proprietățile determinantilor sunt aceleași ca în cazul determinantilor cu coeficienți în inele numerice.

Modul în care s-a definit adunarea și înmulțirea matricelor pe mulțimea $\mathcal{M}_n(K)$ face ca proprietățile acestora să fie asemănătoare cu cele definite pe mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Astfel, are loc următorul rezultat:

TEOREMA 1

Fie $(K, +, \cdot)$ un inel comutativ. Atunci:

- a) tripletul $(\mathcal{M}_n(K), +, \cdot)$ este un inel, numit **inelul matricelor pătrate de ordin n peste inelul K** ;
- b) pentru $n \geq 2$, inelul $\mathcal{M}_n(K)$ este inel necomutativ și are divizori ai lui zero.

Demonstrație

a) Se verifică axiomele inelului, având în vedere proprietățile operațiilor în inelul K . Elementul neutru este matricea nulă O_n cu toate elementele egale cu 0_K – elementul nul din inelul K , iar elementul unitate este matricea I_n cu toate elementele de pe diagonala principală egale cu 1_K și în rest egale cu 0_K .

b) Inelul este necomutativ, deoarece, luând matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ se obține } A \cdot B = B \text{ și}$$

$B \cdot A = O_n$, deci $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Din egalitatea $B \cdot A = O_n$, se observă că matricele A și B sunt divizori ai lui zero, deci inelul $\mathcal{M}_n(K)$ are divizori ai lui zero. ■

Următorul rezultat precizează care sunt elementele inversabile în inelul $\mathcal{M}_n(K)$.

TEOREMA 2

Fie $(K, +, \cdot)$ un inel comutativ, $(\mathcal{M}_n(K), +, \cdot)$ inelul matricelor pătrate de ordinul n peste inelul K și $A \in \mathcal{M}_n(K)$ o matrice.

Matricea A este inversabilă în inelul $\mathcal{M}_n(K)$, dacă și numai dacă $d = \det(A)$ este element inversabil în inelul K .

Demonstrație

Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$ o matrice inversabilă. Atunci există $B \in \mathcal{M}_n(K)$, astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Folosind proprietățile determinantilor se obține că $\det(A \cdot B) = \det(I_n) = 1$ și $\det(A) \cdot \det(B) = 1$, deci $\det(A) \in \mathcal{U}(K)$.

Reciproc, fie $\det(A) \in \mathcal{U}(K)$. Ca și în cazul inelelor numerice, matricea A^{-1} , inversa matricei A , se construiește după același algoritm:

- construcția matricei transpuse tA ;
- construcția matricei adjuncte A^* ;
- matricea inversă: $A^{-1} = (\det(A))^{-1} \cdot A^*$.

Printr-un procedeu analog aceluia din inelele numerice, se arată că A^{-1} are proprietatea: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$. ■

Grupul multiplicativ $\mathcal{U}(\mathcal{M}_n(K))$ al matricelor inversabile peste inelul K se notează $GL_n(K)$ și se numește **grupul liniar de ordinul n** peste inelul K .

$$\text{Avem: } GL_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid \det(A) \in \mathcal{U}(K)\}.$$

Probleme rezolvate

- ☒ **1.** Să se verifice dacă matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ este inversabilă și în caz afirmativ, să se afle A^{-1} .

Soluție

Se știe că $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_5) = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$.

Avem: $\det(A) = \hat{3} \cdot \hat{3} - \hat{2} \cdot \hat{1} = \hat{4} - \hat{2} = \hat{2} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_5)$, deci A este matrice inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$.

Conform algoritmului de determinare a matricei inverse, se obține:

$${}^tA = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix} \text{ și } A^* = \begin{pmatrix} \hat{3} & -\hat{1} \\ -\hat{2} & \hat{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{3} \end{pmatrix} \text{ și}$$

$$A^{-1} = \hat{2}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{3} \end{pmatrix} = \hat{3} \cdot \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{2} \\ \hat{4} & \hat{4} \end{pmatrix}.$$

- ☒ **2.** Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{a} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_6)$. Să se determine

$\hat{a}$ pentru care matricea A este inversabilă.

Soluție

$$\text{Avem } \det(A) = \hat{2} \cdot \hat{a} - \hat{1}.$$

Matricea A este inversabilă dacă $\hat{2} \cdot \hat{a} - \hat{1} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_6) = \{\hat{1}, \hat{5}\}$.

Rezultă cazurile:

- $\hat{2} \cdot \hat{a} = \hat{2}$ cu soluțiile $\hat{a} \in \{\hat{1}, \hat{4}\}$;
- $\hat{2} \cdot \hat{a} = \hat{1} + \hat{5} = \hat{0}$, cu soluțiile $\hat{a} \in \{\hat{0}, \hat{3}\}$.

Așadar, A este inversabilă pentru $\hat{a} \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}, \hat{4}\}$.

1.3. Inele de funcții reale

Fie $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ inelul numerelor reale, $M \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă și $\mathcal{F}(M) = \{f \mid f : M \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Pe mulțimea $\mathcal{F}(M)$ se definesc operațiile de adunare și înmulțire a funcțiilor:

„+“: $\mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$, $(f, g) \rightarrow f + g$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in M$,

„ $\cdot$ “: $\mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$, $(f, g) \rightarrow f \cdot g$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in M$.

Referitor la operațiile de adunare și înmulțire a funcțiilor reale are loc următorul rezultat:

TEOREMA 3

Tripletul $(\mathcal{F}(M), +, \cdot)$ este inel comutativ, numit inelul funcțiilor definite pe M cu valori în $\mathbb{R}$.

Demonstrație

Verificarea axiomelor structurii de inel se face având în vedere proprietățile adunării și înmulțirii numerelor reale.

Axiomele grupului: $(\mathcal{F}(M), +)$ este grup comutativ.

• *Asociativitate.* Fie $f, g, h \in \mathcal{F}(M)$. Atunci pentru $x \in M$, se obține:
 $((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) =$
 $= f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x)$. Așadar: $(f + g) + h = f + (g + h)$.

• *Element neutru.* Se observă ușor că funcția nulă, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, este element neutru față de adunare.

• *Elemente simetrizabile.* Dacă $f \in \mathcal{F}(M)$, atunci funcția $-f \in \mathcal{F}(M)$ este elementul simetric pentru funcția f .

• *Comutativitate.* Fie $f, g \in \mathcal{F}(M)$. Atunci, pentru $x \in M$ avem:
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$, deci $f + g = g + f$.

Axiomele monoidului: $(\mathcal{F}(M), \cdot)$ este monoid comutativ.

• *Asociativitate.* Fie $f, g, h \in \mathcal{F}(M)$. Pentru $x \in M$, avem:

$$((f \cdot g) \cdot h)(x) = (f \cdot g)(x) \cdot h(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = f(x) \cdot (gh)(x) = (f \cdot (gh))(x), \text{ deci } (fg) \cdot h = f \cdot (gh).$$

• *Element neutru.* Funcția $f \in \mathcal{F}(M)$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, este element neutru în raport cu înmulțirea funcțiilor.

• *Comutativitate.* Dacă $f, g \in \mathcal{F}(M)$ și $x \in M$, avem:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = (g \cdot f)(x), \text{ deci } f \cdot g = g \cdot f.$$

Axiomele de distributivitate

Fie $f, g, h \in \mathcal{F}(M)$ și $x \in M$. Se obține succesiv:

$$(f \cdot (g + h))(x) = f(x) \cdot (g + h)(x) = f(x) \cdot (g(x) + h(x)) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x) = (f \cdot g)(x) + (f \cdot h)(x) = (f \cdot g + f \cdot h)(x), \text{ deci } f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h.$$

Analog se arată că $(f + g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h$.

Așadar $(\mathcal{F}(M), +, \cdot)$ este inel comutativ.

➤ OBSERVAȚII

1. În cazul în care funcțiile din mulțimea $\mathcal{F}(M)$ au anumite proprietăți se obțin inele remarcabile de funcții reale.

- Dacă $\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}$, se obține inelul comutativ $(\mathcal{C}([a, b]), +, \cdot)$ al funcțiilor continue.
- Dacă $\mathcal{D}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ derivabilă}\}$, se obține inelul comutativ $(\mathcal{D}([a, b]), +, \cdot)$ al funcțiilor derivabile.
- Pentru $\mathcal{M} = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mărginită}\}$, se obține inelul comutativ $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ al funcțiilor mărginite.
- Pentru $P_T = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ periodică de perioadă } T > 0\}$, se obține inelul comutativ $(P_T, +, \cdot)$.

2. Există inele de funcții reale nu numai în raport cu adunarea și înmulțirea funcțiilor. Dacă $(G, +)$ este un subgrup al grupului aditiv $(\mathbb{R}, +)$, atunci tripletul $(\text{End}(G), +, \circ)$ este inel necomutativ (inelul endomorfismelor lui G).

TEMĂ DE PROIECT

1. Să se demonstreze afirmațiile din observațiile 1 și 2.
2. Temă de studiu.

a) Dacă $\mathcal{P} = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ are primitive}\}$, tripletul $(\mathcal{P}, +, \cdot)$ este inel?

b) Dacă $\mathcal{I} = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ integrabilă pe } [a, b]\}$, tripletul $(\mathcal{I}, +, \cdot)$ este inel?

EXERCII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se studieze distributivitatea legii de compoziție „ $\top$ ” în raport cu legea de compoziție „ $\perp$ ” definite pe mulțimea M , în cazurile:

a) $M = \mathbb{Q}$, $x \top y = \frac{1}{2}xy$,

$x \perp y = 2x + 2y$;

b) $M = \mathbb{Q}$, $x \top y = xy$,

$x \perp y = x + y + 1$;

c) $M = \mathbb{R}$, $x \top y = 2xy + 4x + 4y + 6$,

$x \perp y = x + y + 2$;

d) $M = \mathbb{R}$, $x \top y = -xy + 3x + 3y - 6$,

$x \perp y = x + y - 3$.

E2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ se consideră operațiile algebrice $x \perp y = x + y - \hat{5}$, și

$x \top y = xy - \hat{5}x - \hat{5}y, \forall x, y \in \mathbb{Z}_6$.

Să se studieze distributivitatea operației „ $\top$ ” în raport cu operația „ $\perp$ ”.

E3. Pe mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

se definesc operațiile algebrice „ $\top$ ” și „ $\perp$ ”. Să se studieze distributivitatea operației „ $\top$ ” în raport cu operația „ $\perp$ ”, în cazurile:

a) $A \perp B = A + B - I_2, A \top B = A \cdot B, \forall A, B \in \mathcal{M}$;

b) $A \perp B = A + B - I_2, A \top B = AB - A - B + 2I_2, \forall A, B \in \mathcal{M}$.

E4. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră opera-

țiile algebrice $x \perp y \stackrel{\text{def}}{=} x + y + 2$ și $x \top y = xy + 2x + 2y + 2$.

a) Să se arate că $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este un inel comutativ.

b) Să se determine elementele inversabile ale inelului.

E5. Să se studieze dacă $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este inel și să se determine elementele inversabile, în cazurile:

a) $x \perp y = x + y - 3$;

$x \top y = xy - 3x - 3y + 12$;

b) $x \perp y = x + y + 2$;

$x \top y = 2xy + 4x + 4y + 6$;

c) $x \perp y = x + y - 5$;

$x \top y = xy - 5x - 5y + 30$.

E6. Să se studieze dacă adunarea și înmulțirea matricelor determină pe mulțimea M o structură de inel, pentru:

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$;

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$;

c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$;

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$;

e) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

APROFUNDARE

A1. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc operațiile algebrice:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \perp y =$$

$$= \max\{x, y\}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \top y =$$

$$= \min\{x, y\}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se studieze distributivitatea operației „ $\perp$ ” în raport cu operația „ $\top$ ” și a operației „ $\top$ ” în raport cu operația „ $\perp$ ”.

A2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră operațiile algebrice $x \perp y = x + y + 2$ și $x \top y = xy + 2x + 2y + 2$.

a) Să se arate că $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este un inel comutativ.

b) Să se determine elementele inversabile ale inelului.

A3. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziție:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x \perp y = x + y - 3;$$

$$(x, y) \rightarrow x \top y = x \cdot y - 3x + ay + b.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$, astfel încât legea de compoziție „ $\perp$ ” să fie distributivă în raport cu „ $\top$ ”.

A4. Pe mulțimea $\mathbb{C}$ se consideră operațiile algebrice $x \perp y = x + y$ și

$$x \top y = xy + \operatorname{Im}(x) \cdot \operatorname{Im}(y).$$

a) Să se arate că tripletul $(\mathbb{C}, \perp, \top)$ este inel comutativ.

b) Să se determine elementele inversabile ale acestui inel.

A5. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definesc operațiile algebrice:

$$x \perp y = x \cdot y \text{ și } x \top y = x^{\ln y}.$$

a) Să se arate că $(M, \perp, \top)$ este inel comutativ.

b) Să se determine $\mathcal{U}(M)$.

A6. Fie $a \in \mathbb{R}$ și

$$\mathcal{M}_a = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot A \right\}.$$

a) Să se arate că $(\mathcal{M}_a, +, \cdot)$ este inel.

b) Să se determine $\mathcal{U}(\mathcal{M}_a)$.

A7. Pe mulțimea $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se definesc operațiile algebrice:

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b),$$

$$(x, y) \cdot (a, b) = (xa, xb + ya).$$

a) Să se arate că $(A, +, \cdot)$ este un inel.

b) Să se determine $\mathcal{U}(A)$.

A8. Se consideră mulțimea:

$$\mathcal{F} = \{ f_a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \mid f_a(x) = a \cdot x, a \in \mathbb{Z} \}.$$

Să se studieze dacă următoarele triplete formează inel și să se afle $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ în fiecare caz:

a) $(\mathcal{F}, +, \circ)$; b) $(\mathcal{F}, \perp, \top)$,

$$f_a \perp f_b = f_1 + f_a + f_b,$$

$$f_a \top f_b = f_a + f_b + f_{ab}.$$

A9. Să se arate că mulțimea:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\},$$

împreună cu adunarea și înmulțirea matricelor formează un inel. Să se determine numărul elementelor acestui inel și $\mathcal{U}(M)$.

A10. Se consideră mulțimea $M = \{a, b, c\}$.

a) Să se arate că $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$ este un inel comutativ.

b) Să se determine $\mathcal{U}(\mathcal{P}(M))$.

2

Reguli de calcul într-un inel

Calculul algebric cu elementele unui inel $(A, +, \cdot)$ respectă toate regulile de calcul date pentru grup și monoid, când sunt implicate separat adunarea, respectiv înmulțirea inelului. În afară de acestea, într-un inel există și alte reguli de calcul specifice, care fac legătura între cele două operații algebrice ale inelului.

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu elementul nul 0 și elementul unitate 1 . Din definiția acestora se obține că: $0 + 0 = 0$ și $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$.

➤ **TEOREMA 4 (înmulțirea cu 0 în inel)**

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel nenul. Pentru oricare $a \in A$, au loc relațiile:

a) $a \cdot 0 = 0$;

b) $0 \cdot a = 0$.

Demonstrație

a) Fie $a \in A$ și $x = a \cdot 0$.

Se obține: $x = a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = x + x$.

Aplicând regula reducerii în grupul $(A, +)$ se obține $x = 0$, deci $a \cdot 0 = 0$.

b) Se consideră $x = 0 \cdot a$ și se obține:

$x = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a = x + x$, de unde rezultă că $x + x = x$ și $x = 0$. ■

➤ **OBSERVAȚII**

1. Dacă într-un inel $(A, +, \cdot)$ avem $1 = 0$, atunci pentru $a \in A$ se obține: $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$, deci $A = \{0\}$. Inelul în care $1 = 0$ se numește **inel nul**.

În continuare se va presupune că $1 \neq 0$ și inelul $(A, +, \cdot)$ nu este inel nul.

2. Reciproca teoremei 4 nu este adevărată deoarece există inele $(A, +, \cdot)$ în care un produs să fie egal cu 0_A , fără ca unul din factorii produsului să fie 0_A .

📖 **Exemple**

• În inelul de matrice $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ avem: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

• În inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ avem: $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{0}$, $\hat{3} \cdot \hat{4} = \hat{0}$.

Divizori ai lui zero într-un inel

❖ DEFINIȚIE

- Fie $(A, \perp, \top)$ un inel cu elementul nul 0_A . Un element $d \in A \setminus \{0_A\}$ se numește **divizor al lui zero** dacă există $d' \in A \setminus \{0_A\}$, astfel încât: $d \top d' = 0_A$ sau $d' \top d = 0_A$.

După cum s-a constatat în exemplele date în observația 2, inelele $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ au divizori ai lui zero.

❖ DEFINIȚIE

- Un inel comutativ nenul și fără divizori ai lui zero se numește **domeniu de integritate** sau **inel integru**.

➤ OBSERVAȚII

- Inelele numerice $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sunt domenii de integritate.
- Fie $(A, \perp, \top)$ un domeniu de integritate. Atunci $x \top y = 0_A \Leftrightarrow x = 0_A$ sau $y = 0_A$.
- Fie $n \geq 2$ un număr natural compus. Atunci inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ nu este domeniu de integritate. Într-adevăr, dacă $n = p \cdot q$, cu $p, q \geq 2$, se obține: $\hat{0} = \hat{n} = \hat{p} \cdot \hat{q}$, deci $\hat{p}$ și $\hat{q}$ sunt divizori ai lui zero.
- Orice divizor al lui zero al inelului $(A, +, \cdot)$ nu este element inversabil. Într-adevăr, fie $a \in A$, divizor al lui zero. Dacă $a \in \mathcal{U}(A)$, există $b \in \mathcal{U}(A)$, astfel încât $a \cdot b = 1$ și $b \cdot a = 1$. Deoarece a este divizor al lui zero rezultă că există $c \in A \setminus \{0\}$, astfel încât $c \cdot a = 0$. Din relația $a \cdot b = 1$ se obține $c \cdot (ab) = c$ și $(ca) \cdot b = c$, deci $0 = c$, în contradicție cu $c \neq 0$. Așadar, $a \notin \mathcal{U}(A)$.

Următoarea teoremă dă o caracterizare a divizorilor lui zero în inelul claselor de resturi modulo n .

☞ TEOREMA 5

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n$. Clasa de resturi $\hat{x}$ este divizor al lui zero dacă și numai dacă $(x, n) = d > 1$.

Demonstrație

Să presupunem că $(x, n) = d > 1$. Rezultă că există $p, q \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ astfel încât $x = p \cdot d$ și $n = q \cdot d$.

Se obține: $\widehat{x} \cdot \widehat{q} = \widehat{(pd)q} = \widehat{p(qd)} = \widehat{p \cdot n} = \widehat{0}$, deci $\widehat{x}$ este divizor al lui zero.

Reciproc, să presupunem că $\widehat{x}$ este divizor al lui zero. Rezultă că există $\widehat{p} \in \mathbb{Z}_n \setminus \{\widehat{0}\}$, astfel ca $\widehat{x} \cdot \widehat{p} = \widehat{0}$.

Dacă am avea $(x, n) = 1$, ar exista $r, s \in \mathbb{Z}$, astfel încât $rx + sn = 1$.

Din această relație se obține:
 $\widehat{1} = \widehat{rx + sn} = \widehat{rx} + \widehat{sn} = \widehat{r} \cdot \widehat{x} + \widehat{0} = \widehat{r} \cdot \widehat{x}$,
 deci $\widehat{x} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$, ceea ce nu se poate. Așadar, $(x, n) > 1$. ■

□ **TEMĂ**

1. Să se determine divizorii lui zero în inelele $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Z}_{24}$ și $\mathbb{Z}_{100}$.

2. Să se arate că dacă $\widehat{a}, \widehat{b} \in \mathbb{Z}_n$ sunt divizori ai lui zero, atunci $\widehat{a} \cdot \widehat{b}$ este divizor al lui zero. Elementul $\widehat{a} + \widehat{b}$ este divizor al lui zero în $\mathbb{Z}_n$?

Regula semnelor într-un inel

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Deoarece $(A, +)$ este un grup comutativ, sunt valabile regulile de calcul specifice grupului. Astfel, în notație aditivă, avem:

$$\bullet \quad -(-a) = a, \quad \forall a \in A \quad (1)$$

$$\bullet \quad -(a + b) = (-a) + (-b), \quad \forall a, b \in A \quad (2)$$

$$\bullet \quad a + b = 0 \Rightarrow b = -a \text{ și } a = -b, \quad \forall a, b \in A \quad (3)$$

Dacă în locul scrierii $a + (-b)$ se folosește scrierea $a - b$, relația (2) devine: $-(a + b) = -a - b$, sau, mai general:

$$-(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = -a_1 - a_2 - \dots - a_n, \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in A, n \in \mathbb{N}^*.$$

În cazul inelelor numerice $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ se regăsește regula schimbării semnului termenilor unei sume dintr-o paranteză, dacă în fața acestora se află semnul minus.

➤ **TEOREMA 6 (regula semnelor)**

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Atunci:

a) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab), \quad \forall a, b \in A;$

b) $(-a) \cdot (-b) = ab, \quad \forall a, b \in A.$

Demonstrație

a) Fie $a, b \in A$. Se obține succesiv:

$$0 = 0 \cdot b = [a + (-a)] \cdot b = a \cdot b + (-a) \cdot b, \text{ deci}$$

$$ab + (-a) \cdot b = 0.$$

Din această egalitate rezultă că $(-a)b = -(ab)$.

Analog, se arată că $a \cdot (-b) = -(ab)$.

b) Rezultă succesiv: $(-a) \cdot (-b) \stackrel{a)}{=} -(a \cdot (-b)) = -(-(ab)) = ab$. ■

+	+	=	+
-	-	=	+
+	-	=	-
-	+	=	-

☞ **OBSERVAȚIE**

- În inelul $(A, +, \cdot)$ au loc egalitățile $(-1) \cdot a = -a$ și $a \cdot (-1) = -a$, $\forall a \in A$.

Problemă rezolvată

- ☒ Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și $x \in A$. Să se arate că dacă $x \in \mathcal{U}(A)$, atunci $-x \in \mathcal{U}(A)$.

Soluție

Fie $x \in \mathcal{U}(A)$. Rezultă că există $x' \in \mathcal{U}(A)$, astfel încât $x \cdot x' = 1$.

Se obține: $(-x) \cdot (-x') = x \cdot x' = 1$.

Așadar, $-x \in \mathcal{U}(A)$.

Mai mult, în inelul $(A, +, \cdot)$ se obține: $(-x)^{-1} = -x^{-1}$.

Legi de simplificare în inele integrale

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Deoarece $(A, \cdot)$ nu este grup, regulile de simplificare în raport cu înmulțirea inelului nu pot fi aplicate în orice inel.

☛ **TEOREMA 7**

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel integrabil, $a \in A \setminus \{0\}$ și $x, y \in A$.

a) Dacă $ax = ay$, atunci $x = y$ (legea de simplificare la stânga).

b) Dacă $xa = ya$, atunci $x = y$ (legea de simplificare la dreapta).

Demonstrație

a) Din $ax = ay$ rezultă succesiv:

$$ax + (-ay) = ay + (-ay) = 0, \quad (1).$$

Folosind regula semnelor în inel, relația (1) se scrie:

$$0 = ax + (-ay) = ax + a \cdot (-y) = a[x + (-y)].$$

Deoarece inelul este integru și $a \neq 0$, se obține că $x + (-y) = 0$, relație care conduce la egalitatea $x = -(-y) = y$.

b) Se demonstrează analog punctului a). Temă. ■

Legile de simplificare sunt utile în rezolvarea ecuațiilor într-un domeniu de integritate.

Problemă rezolvată

☒ Să se rezolve în $\mathbb{Z}_7$ ecuațiile:

a) $x^2 + x - \hat{2} = \hat{0}$;

b) $x^3 - 3x + \hat{2} = \hat{0}$.

Soluție

a) Ecuația se transformă succesiv:

$$x^2 - \hat{1} + x - \hat{1} = \hat{0}, (x - \hat{1})(x + \hat{1}) +$$

$$+(x - \hat{1}) = \hat{0} \text{ și se obține}$$

$$(x - \hat{1})(x + \hat{2}) = \hat{0}.$$

Deoarece inelul $\mathbb{Z}_7$ este inel integru, rezultă că $x - \hat{1} = \hat{0}$ sau $x + \hat{2} = \hat{0}$, cu soluțiile $x = \hat{1}$ și $x = \hat{5}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{\hat{1}, \hat{5}\}$.

b) Ecuația poate fi adusă la forma: $(x - \hat{1})^2 \cdot (x + \hat{2}) = \hat{0}$.

Mulțimea soluțiilor este $S = \{\hat{1}, \hat{5}\}$.

□ TEMĂ DE STUDIU

Să se arate că într-un inel comutativ au loc următoarele formule de calcul:

a) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$;

b) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

c) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

d) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

e) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

f) $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} \cdot b^k, \forall n \in \mathbb{N}^*,$

(binomul lui Newton).

EXERCII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se determine elementele $x \in \mathbb{Z}_n$ care sunt divizori ai lui zero, în cazurile:

- a)** $n = 4$; **b)** $n = 6$;
c) $n = 8$; **d)** $n = 60$.

E2. Să se arate că următoarele inele nu sunt inele întregi:

- a)** $(\mathcal{F}(\mathbb{Z}), +, \cdot)$; **b)** $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

E3. Pe mulțimea M a numerelor întregi impare se definesc operațiile alge-

brice $x \perp y = x + y - 1$, $x \top y = \frac{1}{2}$.

$\cdot (xy - x - y - 3)$, $x, y \in M$.

a) Să se arate că $(M, \perp, \top)$ este inel comutativ.

b) Inelul M are divizori ai lui zero?

c) Să se determine $\mathcal{U}(M)$.

E4. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Să se arate că:

- a) $-(-a - b) = a + b$;
- b) $(-a) \cdot (-b - c) = ab + ac$;
- c) $(-a + b) \cdot (a + b) = b^2 - a^2$, dacă $ab = ba$.

E5. Să se arate că într-un inel comutativ $(A, +, \cdot)$ are loc egalitatea:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca). \text{ Ce devine această egalitate în } \mathbb{Z}_2? \text{ Dar în } \mathbb{Z}_3?$$

E6. Să se arate că în inelul $\mathbb{Z}_2$ au loc egalitățile:

- a) $(a + b)^2 = a + b$;
- b) $(a + b)^n = a + b, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

E7. Să se arate că în inelul $\mathbb{Z}_4$ au loc relațiile:

- a) $(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- b) $(a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- c) $(a + b)^4 = (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2$.

E8. Să se rezolve ecuațiile:

- a) $x^2 + \hat{2} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_3$ și $\mathbb{Z}_6$;
- b) $x^4 + x^2 + \hat{1} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_3$ și $\mathbb{Z}_7$;
- c) $x^6 + \hat{6} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_7$.

E9. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ și $a, b \in A$, astfel încât $a^2 = a, b^2 = b$ și $M = \{ab, 1 - a, 1 - b\}$. Să se arate că dacă $x \in M$, atunci $x^2 = x$.

A PROFUNDARE

A1. Să se rezolve în $\mathbb{Z}_{12}$ sistemele:

$$\text{a) } \begin{cases} \hat{5}x + \hat{2}y = \hat{1} \\ \hat{4}x + \hat{9}y = \hat{2} \end{cases}; \text{ b) } \begin{cases} \hat{5}x + \hat{2}y = \hat{1} \\ \hat{3}x + \hat{3}y = \hat{1} \end{cases}.$$

A2. Să se rezolve în $\mathbb{Z}_8$ sistemele:

$$\text{a) } \begin{cases} \hat{2}x + \hat{5}y = \hat{2} \\ \hat{3}x + \hat{7}y = \hat{6} \end{cases}; \text{ b) } \begin{cases} x + \hat{5}y = \hat{2} \\ \hat{3}x + \hat{7}y = \hat{6} \end{cases}.$$

A3. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și $a, b \in A$.

Să se arate că dacă $x = 1 - ab$ este element inversabil, atunci $1 - ba$ este inversabil și $(1 - ba)^{-1} = 1 + bx^{-1}a$.

A4. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și $a \in A$, astfel încât $a^2 = 0$. Să se arate că elementele $1 - a$ și $1 + a$ sunt inversabile.

A5. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și $a \in A$. Să se arate că dacă există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a^n = 0$, elementul $1 - a$ este inversabil.

A6. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel astfel încât

$x^2 = x, \forall x \in A$ (inelul A se numește inel boolean). Să se arate că:

- a) $x + x = 0, \forall x \in A$;
- b) $(x + y)^2 = x + y, \forall x, y \in A$;
- c) inelul A este comutativ.

A7. Se consideră mulțimea $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{12})$,

$$\mathcal{M} = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2}a \\ \hat{6}a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}_{12} \right\}.$$

- a) Să se arate că $\mathcal{M}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{12})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.
- b) Să se arate că $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ este inel comutativ.
- c) Să se determine $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ și să se verifice dacă grupul $(\mathcal{U}(\mathcal{M}), \cdot)$ este de tip Klein.
- d) Să se determine mulțimea divizorilor lui zero în inelul $\mathcal{M}$.

3 Corpuri

Inelele numerice $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ au proprietatea remarcabilă că oricare element nenul este inversabil. Pentru aceste inele mulțimea unităților este $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, respectiv $\mathbb{C}^*$.

❖ DEFINIȚII

- Un inel nenul $(K, +, \cdot)$ în care oricare element nenul este inversabil, se numește **corp**.
- Dacă inelul K este comutativ, corpul K se numește **corp comutativ**.

Tripletele $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt corpuri comutative.

➤ OBSERVAȚII

1. Pentru un corp $(K, +, \cdot)$ există egalitatea: $\mathcal{U}(K) = K \setminus \{0\} = K^*$.

Rezultă că perechea $(K^*, \cdot)$ este grup.

Așadar, tripletul $(K, +, \cdot)$ este corp dacă verifică axiomele:

- a) $(K, +)$ este grup comutativ;
- b) $(K^*, \cdot)$ este grup, numit **grupul multiplicativ al corpului K** ;
- c) înmulțirea este distributivă față de adunare.

2. Un corp $(K, +, \cdot)$ nu are divizori ai lui zero.

Într-adevăr, dacă $a, b \in K^*$, astfel încât $a \cdot b = 0$, atunci se obține:

$$a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0 \text{ sau } 1 \cdot b = 0, \text{ deci } b = 0, \text{ în contradicție cu } b \in K^*.$$

3. Inelele $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt corpuri deoarece oricare element nenul este inversabil. Acestea sunt numite **corpuri numerice**.

Problemă rezolvată

- ☒ Fie $d \in \mathbb{N}^*$ un număr natural liber de pătrate și $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{d}) = \{a + bi\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Să se arate că $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}), +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}(i\sqrt{d}), +, \cdot)$ sunt corpuri comutative (corpuri de numere pătratice).

Soluție

Pentru $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $x = a + b\sqrt{d}$, $y = u + v\sqrt{d}$, se obține:

$$x + y = a + u + (b + v)\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \text{ și } x \cdot y = au + bvd + (av + bu)\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}).$$

Rezultă că $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu adunarea și înmulțirea.

Perechea $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}), +)$ este grup abelian, deoarece adunarea este asociativă și comutativă; numărul $0 = 0 + 0\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ este element neutru, iar dacă $x = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, atunci $-x = (-a) + (-b)\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ este opusul lui x .

Perechea $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \setminus \{0\}, \cdot)$ este grup comutativ.

Într-adevăr, înmulțirea este asociativă și comutativă, elementul $1 = 1 + 0\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \setminus \{0\}$ este element neutru.

Fie $x = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \setminus \{0\}$.

Să determinăm $x' \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \setminus \{0\}$, astfel ca $xx' = 1$. Avem:

$$x' = \frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{d}} = \frac{a - b\sqrt{d}}{a^2 - b^2d} = \frac{a}{a^2 - b^2d} - \frac{b}{a^2 - b^2d}\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \setminus \{0\}.$$

Se observă că $a^2 - b^2d \neq 0$, deoarece din $a^2 - b^2d = 0$ ar rezulta $a = \pm b\sqrt{d}$, în contradicție cu $a \in \mathbb{Q}^*$.

În concluzie, $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \setminus \{0\}, \cdot)$ este grup comutativ.

Deoarece înmulțirea este distributivă în raport cu adunarea, se obține că $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}), +, \cdot)$ este un corp comutativ.

Analog se arată că $(\mathbb{Q}(i\sqrt{d}), +, \cdot)$ este corp comutativ.

$$\text{În acest corp: } x' = \frac{1}{a + bi\sqrt{d}} = \frac{a}{a^2 + b^2d} + \frac{-bi}{a^2 + b^2d}\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{d}).$$

TEOREMA 8

Inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este corp dacă și numai dacă n este număr prim.

Demonstrație

Fie n număr prim. Atunci pentru orice $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n$, $x \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ avem $(n, x) = 1$, deci $\hat{x} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$. Așadar, $\mathbb{Z}_n$ este corp comutativ.

Reciproc, fie că $\mathbb{Z}_n$ este corp. Dacă, prin absurd, n nu este număr prim, rezultă că există $p, q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, astfel încât $n = p \cdot q$. Se obține $\hat{p} \cdot \hat{q} = \hat{n} = \hat{0}$, deci $\mathbb{Z}_n$ are divizori ai lui zero, în contradicție cu faptul că $\mathbb{Z}_n$ este corp.

Așadar, n este număr prim. ■

➤ OBSERVAȚII

1. Dacă $p \in \mathbb{N}$ este un număr prim, atunci există corpuri cu p elemente: $\mathbb{Z}_p$.
2. Orice corp finit $(K, +, \cdot)$ are p^n elemente, unde p este număr prim.
În concluzie, nu există corpuri cu 6, 10, 12 elemente.
3. Orice corp finit este comutativ (**Teorema lui Wedderburn**).



Joseph WEDDERBURN
(1882-1948)
matematician scoțian

A adus contribuții în cadrul algebrei moderne.

Corpuri de matrice

Inelul de matrice pătratică $(\mathcal{M}_n(A), +, \cdot)$, unde $(A, +, \cdot)$ este inel, nu este în general corp.

Într-adevăr, dacă $A = \mathbb{R}$, atunci în inelul $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ matricea $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, este divizor al lui zero având: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2.$$

Condiția ca inelul $(\mathcal{M}_n(A), +, \cdot)$ să fie corp este ca $\forall M \in \mathcal{M}_n(A)$ să fie matrice inversabilă, ceea ce revine la faptul că $\det(M) \in \mathcal{U}(A)$.

❑ TEMĂ DE PROIECT

Să se arate că următoarele inele de matrice $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ sunt corpuri:

$$\text{a) } \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\};$$

$$\text{b) } \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & bd \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, \right.$$

$$\left. d \in \mathbb{Q}_+, \sqrt{d} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \right\};$$

$$\text{c) } \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

(corpul cuaternionilor).

EXERCII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Pe mulțimea $\mathbb{Q}$ se definesc operațiile algebrice $x \perp y = x + y - 5$ și $x \top y = -xy + 5x + 5y - 20$. Să se studieze dacă tripletul $(\mathbb{Q}, \perp, \top)$ este corp.

E2. Să se arate că tripletul $(M, \perp, \top)$ este corp comutativ, dacă:

a) $M = \mathbb{Q}$, $x \perp y = x + y - 4$,
 $x \top y = xy - 4(x + y) + 20$;

b) $M = \mathbb{R}$, $x \perp y = x + y + \frac{3}{4}$,
 $x \top y = 4xy + 3x + 3y + 1,5$;

c) $M = \mathbb{R}$, $x \perp y = x + y - 1$,
 $x \top y = 2xy - 2x - 2y + 3$;

d) $M = \mathbb{R}$, $x \perp y = x + y - 2$,
 $x \top y = \frac{1}{4}xy - \frac{1}{2}(x + y) + 3$.

E3. Să se arate că mulțimea M împreună cu adunarea și înmulțirea matricelor determină o structură de corp, dacă:

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$;

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 7b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$;

c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$;

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ ia & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}$.

E4. Fie $\varepsilon \in \mathbb{C}$ o soluție a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$ și mulțimea $\mathbb{R}(\varepsilon) = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Să se arate că $\mathbb{R}(\varepsilon)$ împreună cu adunarea și înmulțirea numerelor complexe determină o structură de corp comutativ.

E5. Să se arate că mulțimea M împreună cu operațiile algebrice date determină o structură de corp comutativ, dacă:

a) $M = \mathbb{R}$, $x \perp y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$ și
 $x \top y = x \cdot y$;

b) $M = (0, +\infty)$, $x \perp y = x \cdot y$ și
 $x \top y = x^{\ln y}$.

APROFUNDARE

A1. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc operațiile algebrice:

$x \perp y = ax + by - 2$ și

$x \top y = xy - 2x - 2y + c$.

Să se determine a, b, c pentru care $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ este corp comutativ.

A2. Să se arate că adunarea și înmulțirea numerelor complexe determină pe mulțimea M o structură de corp, dacă:

a) $M = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$;

b) $M = \mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;

c) $M = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$

A3. Fie $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a = \begin{cases} ax, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Să se arate că adunarea și compunerea funcțiilor determină pe mulțimea $F = \{f_a \mid a \in \mathbb{Q}\}$ o structură de corp comutativ.

A4. Fie $K = \{0, 1, a, b\}$ un corp cu patru elemente. Să se arate că:

a) $ab = ba = 1$; b) $a^2 = b$;

c) $a^3 = 1$; d) $a^2 + a + 1 = 0$;

e) $1 + 1 = 0$.

Să se scrie tabla lui Cayley pentru operațiile corpului K .

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

○1. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră operațiile algebrice:

$$x \perp y = x + y - 5 \text{ și } x \top y = 3xy - 15x - 15y + 80, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Să se studieze ce structuri algebrice reprezintă $(\mathbb{R}, \perp)$ și $(\mathbb{R}, \top)$.
 b) Să se arate că operația „ $\top$ ” este distributivă în raport cu „ $\perp$ ”.
 c) Să se arate că $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ este inel fără divizori ai lui zero.

(5 puncte)

○2. Să se rezolve în $\mathbb{Z}_4$:

a) $\hat{2}x^3 + \hat{2}x = \hat{0}$; b) $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{1} \\ \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{2} \end{cases}$.

(4 puncte)

Testul 2

○1. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră operațiile $x \perp y = x + y + a$, $x \top y = xy + bx + 3y + c$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

- a) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{Z}$ pentru care au loc relațiile: $(2 \perp 3) \top 1 = 41$, $(2 \perp 1) \top 3 = 51$ și $1 \top (2 \perp 3) = (1 \top 2) \perp (1 \top 3)$.
 b) Pentru valorile lui a, b, c găsite, să se precizeze dacă $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este inel, să se afle $\mathcal{U}(\mathbb{Z})$ și mulțimea divizorilor lui zero.

(5 puncte)

○2. a) Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$, astfel încât în inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ inversul elementului $\hat{3}$ să fie $\hat{7}$.

b) Pentru valorile lui n găsite să se determine $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$.

(4 puncte)

Testul 3

○1. Pe mulțimea $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se introduc legile de compoziție:

$$(a, b) + (x, y) = (a + x, b + y);$$

$$(a, b) \cdot (x, y) = (ax, ay + bx).$$

a) Să se arate că $(E, +, \cdot)$ este inel comutativ. Este acesta corp?

b) Să se arate că aplicația $f: E \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, verifică relațiile

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ și } f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in E.$$

(6 puncte)

(Univ. București)

○2. Fie $A = \{0, 1, a, b\}$ un inel cu patru elemente. Să se arate că:

a) funcția $f : A \rightarrow A$, $f(x) = 1 + x$ este bijectivă;

b) $\sum_{x \in A} f(x) = 1 + a + b$ și $1 + 1 + 1 + 1 = 0$.

c) dacă A este corp, atunci $1 + 1 = 0$.

(3 puncte)

(Univ. București, 1981)

Testul 4

○1. Pe mulțimea $\mathbb{C}$ definim operațiile algebrice:

$$z_1 \perp z_2 = z_1 + z_2, \quad z_1 \top z_2 = z_1 \cdot z_2 + (\operatorname{Im} z_1) \cdot (\operatorname{Im} z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

a) Să se arate că tripletul $(\mathbb{C}, \perp, \top)$ este inel.

b) Să se determine $\mathcal{U}(\mathbb{C})$.

c) Dacă $\mathcal{M} = \left\{ xI_2 + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$, să se arate că $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ formează inel.

d) Să se arate că $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}$, $f(x + iy) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, este bijectivă și verifică relațiile

$$f(x \perp y) = f(x) + f(y) \text{ și } f(x \top y) = f(x) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{C}.$$

(6 puncte)

○2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că $x^2 = x$, $\forall x \in A$. Să se arate că:

a) $1 + 1 = 0$;

b) inelul este comutativ;

c) dacă A este corp atunci $(A, +) \simeq (\mathbb{Z}_2, +)$.

(3 puncte)

III. INELE DE POLINOAME



Mulțimea polinoamelor cu coeficienți într-un corp comutativ

În acest capitol se va considera un corp comutativ $(K, +, \cdot)$, unde K reprezintă una dintre mulțimile $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$, p număr prim.

1.1. Șiruri finite de elemente din corpul K

În clasa a IX-a s-a definit șirul de numere reale ca o funcție $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Mai general, o funcție $f: \mathbb{N} \rightarrow K$ se numește **șir de elemente din corpul K** . Ca și în cazul corpului $\mathbb{R}$, se folosește notația $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Elementele $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ se numesc **termenii șirului**, iar elementul $a_n \in K$ se numește **termenul general** al șirului.

Pentru un șir de elemente din corpul K se va folosi notația $f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ sau $f = \{a_n\}$.

Două șiruri $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ și $g = (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$ sunt **egale** dacă $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n, \dots$.

❖ DEFINIȚIE

• Un șir $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ de elemente din corpul K se numește **șir finit** dacă există un număr natural p , astfel încât $a_m = 0, \forall m > p$.

Așadar, un șir este finit dacă are un număr finit de elemente nenule.

☞ Exemple

• $f = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, $g = (9, 0, 0, 5, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ sunt șiruri finite cu elemente din corpul $\mathbb{R}$.

1.2. Operații cu șiruri de elemente din corpul K

Notăm cu $K^{(\mathbb{N})}$ mulțimea șirurilor finite cu elemente din corpul K .

Dacă $f, g \in K^{(\mathbb{N})}$, $f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots, 0)$ și $g = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots)$, $m, n \in \mathbb{N}$, atunci:

• șirul $h \in K^{(\mathbb{N})}$, $h = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_p + b_p, \dots)$ se numește **suma** șirurilor f și g și se notează $h = f + g$.

• şirul $h \in K^{(\mathbb{N})}$, $h = (c_0, c_1, \dots, c_p, \dots)$, unde pentru $s \in \mathbb{N}$, $c_s = a_0 b_s + a_1 b_{s-1} + \dots + a_s b_0 = \sum_{k=0}^s a_k \cdot b_{s-k}$, se numeşte **produsul** şirurilor f şi g şi se notează $h = f \cdot g$.

Exemplu

- ♦ Fie $K = \mathbb{C}$ şi $f = (1, 1, 2, 3, -1, 0, 0, \dots)$, $g = (0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$.

Atunci:

$$f + g = (1, 2, 3, 3, -1, 1, 0, 0, \dots),$$

$$f \cdot g = (0, 1, 2, 3, 5, 3, 0, 2, 3, -1, 0, 0, \dots).$$

După cum se observă din exemplul anterior suma şi produsul a două şiruri finite de elemente din K sunt de asemenea şiruri finite.

Mai mult, are loc următorul rezultat important:

TEOREMA 1

- a)** Mulţimea $K^{(\mathbb{N})}$ a şirurilor finite cu elemente din corpul K este parte stabilă în raport cu adunarea şi înmulţirea şirurilor finite.
- b)** Tripletul $(K^{(\mathbb{N})}, +, \cdot)$ formează un inel comutativ fără divizori ai lui zero.

Demonstraţie

- a)** Fie $f, g \in K^{(\mathbb{N})}$, $f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$,

$g = (b_0, b_1, \dots, b_m, 0, 0, \dots)$ astfel încât $a_n, b_m \in K^*$. Atunci:

- dacă $p > \max(m, n)$, avem $a_p + b_p = 0$ şi astfel:

$$f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_{p-1} + b_{p-1}, 0, 0, \dots) \in K^{(\mathbb{N})};$$

- dacă $p > m + n$ şi $f \cdot g = (c_0, c_1, c_2, \dots, \dots)$ se obţine că:

$$c_p = \sum_{k=0}^p a_k \cdot b_{p-k} = 0 \quad \text{deoarece elementele } a_p, a_{p+1}, \dots \text{ respectiv}$$

$b_p, b_{p+1}, \dots$ sunt nule şi fiecare termen al sumei este nul. Aşadar, $f \cdot g \in K^{(\mathbb{N})}$.

b) Verificarea axiomelor de inel este lăsată drept temă. Elementul neutru în raport cu adunarea este $e = (0, 0, \dots)$, iar în raport cu înmulţirea este $f = (1, 0, 0, \dots)$. ■

❖ **DEFINIȚII**

- Orice element $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \in K^{(\mathbb{N})}$, $a_n \in K^*$ se numește **polinom cu coeficienți în corpul K**.
- Elementele $a_0, a_1, \dots, a_n$ se numesc **coeficienții** polinomului f .
- Numărul $n \in \mathbb{N}$ se numește **gradul polinomului** și se notează $n = \text{grad}(f)$.
- Coeficientul $a_n \in K^*$ al polinomului f se numește **coeficient dominant**. Dacă coeficientul dominant este egal cu 1, polinomul se numește polinom **unitar** sau **monic**.
- Un polinom cu un singur coeficient nenul se numește **monom**.
- Polinomul $f = (0, 0, \dots)$ cu toți coeficienții zero se numește **polinom nul**. Polinomului nul i se atribuie gradul $-\infty$.

Dacă $f, g \in K^{(\mathbb{N})}$, $n = \text{grad}(f)$, $m = \text{grad}(g)$, atunci se verifică relațiile:

a) $\text{grad}(f + g) \leq \max(\text{grad}(f), \text{grad}(g))$;

b) $\text{grad}(f \cdot g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$.

□ **TEMĂ**

Să se determine suma și produsul polinoamelor:

a) $f = (1, 2, -1, 3, 0, 0, \dots)$, $g = (-1, -2, 1, 1, 0, 0, \dots)$, $f, g \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$;

b) $f = (-1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$, $g = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$, $f, g \in \mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$;

c) $f = (\hat{1}, \hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{0}, \hat{0}, \dots)$, $g = (\hat{2}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{0}, \dots)$, $f, g \in \mathbb{Z}_3^{(\mathbb{N})}$.

2**Forma algebrică a polinoamelor****2.1. Polinoame constante**

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ și $K_1^{(\mathbb{N})}$ mulțimea polinoamelor de forma $f = (a, 0, 0, \dots) \in K^{(\mathbb{N})}$.

Dacă $f, g \in K_1^{(\mathbb{N})}$, $f = (a, 0, 0, \dots)$, $g = (b, 0, 0, \dots)$, atunci se obțin relațiile:

$$f + g = (a + b, 0, 0, \dots) \quad (1)$$

$$f \cdot g = (a \cdot b, 0, 0, \dots). \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că mulțimea $K_1^{(\mathbb{N})}$ este parte stabilă a mulțimii $K^{(\mathbb{N})}$ în raport cu adunarea și înmulțirea polinoamelor.

Mai mult, rezultă că tripletul $(K_1^{(\mathbb{N})}, +, \cdot)$ este un inel comutativ (temă), iar funcția $F : K_1^{(\mathbb{N})} \rightarrow K$, $F((a, 0, 0, \dots)) = a$, este bijectivă.

Acest rezultat permite identificarea polinomului $f \in K_1^{(\mathbb{N})}$, $f = (a, 0, 0, \dots)$ cu elementul $a \in K$.

Așadar, vom avea identificarea $(a, 0, 0, \dots) = a$.

Polinoamele $f \in K_1^{(\mathbb{N})}$, $f = (a, 0, 0, \dots)$ se numesc **polinoame constante**.

Dacă $x \in K$ și $f \in K^{(\mathbb{N})}$, $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$, atunci:
 $x \cdot f = (x, 0, 0, \dots) \cdot (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) = (xa_0, xa_1, \dots, xa_n, 0, 0, \dots)$ (3).

Relația (3) exprimă regula de înmulțire a unui polinom cu un element din corpul K și anume:

Un polinom se înmulțește cu un element din corpul K înmulțind fiecare coeficient al polinomului cu acest element.

2.2. Forma algebrică a unui polinom

Un rol important în scrierea unui polinom $f \in K^{(\mathbb{N})}$ îl are monomul $X = (0, 1, 0, 0, \dots)$ care se citește „nedeterminata X ”.

Cu ajutorul operațiilor cu polinoame se definesc în mod recurent puterile nedeterminatei X astfel: $X^2 = X \cdot X$, $X^n = X^{n-1} \cdot X$, $n \geq 2$.

Se obține:

$$X^2 = (0, 0, \mathbf{1}, 0, 0, \dots)$$

$$X^3 = (0, 0, 0, \mathbf{1}, 0, 0, \dots)$$

.....

$$X^n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, \mathbf{1}, 0, 0, \dots)$$

n zerouri

.....

Se observă că $X^2, X^3, \dots, X^n, \dots$ reprezintă monoame.

Monomul $f_k = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, a_k, 0, \dots)$, $a_k \in K^*$, se poate scrie:

$$f_k = a_k \cdot (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, \mathbf{1}, 0, 0, \dots) = a_k X^k.$$

k zerouri

Așadar $f_k = a_k \cdot X^k$, egalitate care reprezintă **forma algebrică** a monomului f_k .

Numărul $k \in \mathbb{N}$ reprezintă **gradul monomului** f_k .

Două monoame se numesc **asemenea** dacă au același grad.

☞ **Exemple**

- Monoamele $2X^3$ și $-5X^3$ sunt asemenea.
- Monoamele $3X^5$ și $3X^6$ nu sunt asemenea.

Două monoame sunt **egale** dacă sunt asemenea și au coeficienți egali.

Fie $f \in K^{(\mathbb{N})}$, $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$, $a_n \in K^*$ un polinom de gradul $n \in \mathbb{N}$.

Folosind operațiile cu polinoame se obține:

$$\begin{aligned} f &= (a_0, 0, 0, \dots) + (0, a_1, 0, 0, \dots) + (0, 0, a_2, 0, 0, \dots) + \underbrace{(0, 0, 0, \dots, 0, a_n, 0, 0, \dots)}_{n \text{ zerouri}} = \\ &= a_0 + a_1 \cdot (0, 1, 0, 0, \dots) + a_2 (0, 0, 1, 0, 0, \dots) + \dots + a_n \cdot \underbrace{(0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)}_{n \text{ zerouri}} = \\ &= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n. \end{aligned}$$

Așadar, se obține că polinomul f se scrie sub forma:

$$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n, \quad a_n \neq 0. \quad (1)$$

Forma de scriere (1) se numește **forma algebrică** a polinomului de gradul n în nedeterminata X .

☞ **Exemplu**

- Polinomul $f = (1, -1, 2, 3, 0, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ are forma algebrică $f = 1 + (-1)X + 2 \cdot X^2 + 3X^3 = 1 - X + 2X^2 + 3X^3$.

Relația (1) arată că un polinom este o sumă de monoame.

Monomul „ $a_n X^n$ ” se numește **monomul dominant** al polinomului f .

Scrierea unui polinom sub formă algebrică este unică, abstracție făcând de ordinea de scriere a monoamelor.

Pentru mulțimea $K^{(\mathbb{N})}$ a polinoamelor cu coeficienți în corpul K se folosește notația $K[X]$ pentru a pune în evidență nedeterminata X .

În particular, avem mulțimile de polinoame $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{Z}_p[X]$, adică mulțimile de polinoame în nedeterminata X cu coeficienți în corpurile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, respectiv $\mathbb{Z}_p$.

Se observă că există incluziunile $\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

❖ DEFINIȚIE

- Fie $f, g \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$, $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots + b_mX^m$, $\text{grad}(f) = n$ și $\text{grad}(g) = m$.

Polinoamele f și g se numesc **polinoame egale** și se scrie $f = g$, dacă au același grad și coeficienții respectiv egali:

$$m = n, \quad a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_k = b_k, \quad \dots, \quad a_n = b_n.$$

Exerciții rezolvate

- ☒ **1.** Fie $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = -\hat{2} + \hat{3}X - \hat{4}X^2$, $g = \hat{3} + X^2 - \hat{2}X$. Sunt egale cele două polinoame?

Soluție

Polinoamele au același grad. Deoarece în $\mathbb{Z}_5$, au loc egalitățile $-\hat{2} = \hat{3}$, $-\hat{4} = \hat{1}$, cele două polinoame au coeficienții egali. Așadar $f = g$.

- ☒ **2.** Să se determine parametrii reali pentru care polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2 + (a+1)X + 3X^2$ și $g = (3a-b) + (a+b)X + (2a+1)X^n$ sunt egale.

Soluție

Din egalitatea gradelor obținem $n = 2$. Egalând coeficienții celor două polinoame se obțin egalitățile: $3a - b = 2$, $a + 1 = a + b$, $2a + 1 = 3$. Rezultă că $a = 1$, $b = 1$ și $f = g = 2 + 2X + 3X^2$.

2.3. Valoarea unui polinom. Funcții polinomiale

Fie $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, $a_n \in K^*$ un polinom de gradul n .

❖ DEFINIȚIE

- Dacă $x \in K$, elementul $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in K$ se numește **valoarea polinomului f în x** .

Exemple

- Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 1 + X + X^2$ și $x \in \{-1, 0, 1\}$.

Atunci $f(-1) = 1 - 1 + 1 = 1$, $f(0) = 1 + 0 + 0^2 = 1$, $f(1) = 1 + 1 + 1 = 3$.

- Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = 2 + X^2 + X^4$ și $x \in \{i, i\sqrt{3}\}$.

Atunci $f(i) = 2 - 1 + 1 = 2$, $f(i\sqrt{3}) = 2 - 3 + 9 = 8$.

- Fie $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{2} + X + \hat{3}X^3$ și $x \in \{\hat{1}, \hat{0}, \hat{2}\}$.

Atunci $f(\hat{1}) = \hat{2} + \hat{1} + \hat{3} = \hat{1}$, $f(\hat{0}) = \hat{2} + \hat{0} + \hat{0} = \hat{2}$, $f(\hat{2}) = \hat{2} + \hat{2} + \hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{4} + \hat{4} = \hat{3}$.

OBSERVAȚIE

- Dacă $f, g \in K[X]$, atunci au loc egalitățile:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in K;$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad \forall x \in K;$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in K.$$

DEFINIȚII

- Fie $f \in K[X]$ un polinom nenul. Se numește **funcție polinomială** atașată polinomului f , funcția $\tilde{f} : K \rightarrow K$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, $x \in K$.
- Funcția $f : K \rightarrow K$ se numește **funcție polinomială** dacă există un polinom $g \in K[X]$, astfel încât $f = \tilde{g}$.

Exemple

• Funcția $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{f}(z) = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ este funcție polinomială atașată polinomului de gradul 1, $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = b + aX$.

• Funcția $\tilde{f} : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$, $\tilde{f}(x) = \hat{2}x^2 + \hat{3}x + \hat{2}$ este funcție polinomială atașată polinomului $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{2} + \hat{3}X + \hat{2}X^2$.

OBSERVAȚIE

- Dacă $f \in K[X]$, atunci funcția polinomială $\tilde{f}$ atașată lui f este unică. Reciproca acestei afirmații nu este adevărată.

Exemplu

• Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $f_n \in \mathbb{Z}_2[X]$, $f_n = X^n$. Atunci $\tilde{f}_n(\hat{0}) = \hat{0}$ și $\tilde{f}_n(\hat{1}) = \hat{1}$. Așadar, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$ funcția $f : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, $f(\hat{0}) = \hat{0}$, $f(\hat{1}) = \hat{1}$ este funcția atașată pentru fiecare polinom f_n .

În cazul în care nu există posibilitatea unei confuzii se va nota cu f funcția atașată polinomului $f \in K[X]$.

3

Operații cu polinoame scrise sub formă algebrică

3.1. Adunarea și înmulțirea polinoamelor scrise sub formă algebrică

Fie $p \in \mathbb{N}$ și $f, g \in K[X]$ monoame de gradul p : $f = a_p X^p$, $g = b_p X^p$. Având în vedere modul de definire a adunării polinoamelor obținem: $(f + g) = (a_p + b_p) X^p$, (1).

Mai general, dacă $f, g \in K[X]$ sunt polinoame de gradul n , respectiv m , de forma:

$$\begin{aligned} f &= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n, \\ g &= b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots + b_m X^m, \end{aligned}$$

polinomul sumă se va scrie sub forma:

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + \dots + (a_p + b_p)X^p + \dots, \quad (2),$$

cu convenția că $a_i = 0$, pentru $i > n$ și $b_j = 0$, pentru $j > m$.

Relația (2) ne arată că suma a două polinoame se face adunând monoamele asemenea din cele două polinoame.

Exemple

$$\diamond f = 2 + X + 3X^2 + 6X^3, g = 1 - 2X + 2X^2 - X^3.$$

$$\text{Avem } f + g = (2 + 1) + (1 - 2)X + (3 + 2)X^2 + (6 - 1)X^3 = 3 - X + 5X^2 + 5X^3.$$

$$\diamond f = -1 + X - X^2, g = 1 + X + X^2 + X^3.$$

$$\text{Avem } f + g = (-1 + 1) + (1 + 1)X + (-1 + 1)X^2 + (0 + 1)X^3 = 0 + 2X + 0 \cdot X^2 + 1 \cdot X^3 = 2X + X^3.$$

Fie $f, g \in K[X]$, $f = a_p X^p$, $g = b_q X^q$ două monoame. Folosind definiția înmulțirii polinoamelor se obține: $f \cdot g = a_p b_q X^{p+q}$, (3), deci produsul a două monoame de gradul p , respectiv de gradul q este un monom de gradul $p + q$.

Analog, dacă $f, g \in K[X]$, $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$, $g = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots + b_m X^m$ sunt polinoame de gradul n , respectiv m , vom obține cu convenția că $a_i = 0$, dacă $i > n$ și $b_j = 0$, dacă $j > m$:

$$\begin{aligned} f \cdot g &= a_0 \cdot b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)X + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)X^2 + \dots + \\ &+ (a_0 b_{m+n} + a_1 b_{m+n-1} + \dots + a_{m+n} b_0)X^{m+n}, \quad (4). \end{aligned}$$

Produsul $f \cdot g$ este un polinom de gradul $m+n$. Relația (4), care dă forma algebrică a polinomului produs $f \cdot g$, poate fi ușor obținută dacă avem în vedere înmulțirea a două sume în inelul $K[X]$, scriind:

$$f \cdot g = (a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n)(b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots + b_mX^m) \text{ și}$$

efectuând calculele, având în vedere regulile de înmulțire a două paranteze și calculele cu sume și produse de monoame. De asemenea se are în vedere că adunarea și înmulțirea polinoamelor sunt comutative.

Exemple

♦ $f = 1 + X + X^2, g = 1 - X.$

Se obține: $f \cdot g = (1 + X + X^2)(1 - X) = 1 - X + X - X^2 + X^2 - X^3 = 1 - X^3.$

♦ $f = (1 + 2X + X^2)^2 = (1 + 2X + X^2)(1 + 2X + X^2) = 1 + 2X + X^2 + 2X + 4X^2 + 2X^3 + X^2 + 2X^3 + X^4 = 1 + 4X + 6X^2 + 4X^3 + X^4.$

Exercițiu rezolvat

☒ Să se determine polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$ de gradul 1, care verifică egalitățile $(X+1)f + (X-1)g = 2X^2 - 2$ și $\tilde{f}(2) = \tilde{g}(0).$

Soluție

Fie $f = aX + b, g = cX + d, a, c \in \mathbb{C}^*.$ Egalitatea dată se scrie:

$$(X+1)(aX+b) + (X-1)(cX+d) = 2X^2 - 2.$$

După efectuarea înmulțirilor și adunării se obține:

$$(a+c)X^2 + (a+b+d-c)X + b-d = 2X^2 + 0 \cdot X - 2.$$

Egalitatea de polinoame conduce la egalitățile:

$$a+c=2, a+b+d-c=0, b-d=-2.$$

Rezultă că $c=2-a, b=-a, d=2-a, a=\alpha \in \mathbb{C}.$

Așadar, $f = \alpha X - \alpha, g = (2-\alpha)X + 2 - \alpha.$

Din condiția $\tilde{f}(2) = \tilde{g}(0)$ se obține $\alpha = 1$ și $f = X - 1, g = X + 1.$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se scrie sub formă algebrică polinomul f și să se specifice gradul acestuia:

a) $f = (1, 0, 1, 2, 3, -1, 0, 0, \dots) \in \mathbb{Q}[X];$

b) $f = (0, 0, 0, 1, 2, -1, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}[X];$

c) $f = (0, 1, 0, 1, 0, i, -i, 0, 0, \dots) \in \mathbb{C}[X];$

d) $f = (\hat{1}, \hat{2}, -\hat{1}, \hat{0}, \hat{1}, \hat{0}, \hat{0}, \dots) \in \mathbb{Z}_5[X].$

E2. Să se determine în funcție de parametrul $m \in \mathbb{R}$, gradul polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$:

- a) $f = m + (m-1)X$;
 b) $f = 2 + (m^2 - 1)X + (m^2 - 3m + 2)X^2$.

E3. Să se determine gradul polinomului f , în cazurile:

- a) $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 2 + (m-1)X^2 + (2m^2 - 3m + 1)X^3$;
 b) $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = \hat{1} + mX + (m^2 - m)X^2$;
 c) $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = (m^2 + \hat{1})X^3 + (m + \hat{3})X + \hat{2}$;
 d) $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = m^2 - 1 + 2X + (m^2 - 3m + 2)X^2 + (m^2 - 4)X^3$;
 e) $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = 1 + (m^2 + 1)X + mX^2 + (m^3 + m)X^3$.

E4. Se consideră $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = 1 + X + X^2 + X^3$. Să se calculeze:

- a) $f(1+i)$, $f(1-i)$, $f(1+i\sqrt{3})$, $\overline{f(1-i\sqrt{3})}$;
 b) $f(1+\sqrt{2})$, $f(1-\sqrt{2})$, $f(3+2\sqrt{2})$, $f(4+\sqrt{5})$;
 c) $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$.

E5. Să se determine $f \in \mathbb{C}[X]$, astfel încât:

- a) $f = a + bX$, $f(i) = 1$, $f(1-i) = 1$;
 b) $f = a + bX + cX^2$, $f(1) = f(i) = f(-i) + 1 = 0$.

E6. Să se efectueze suma polinoamelor $f, g \in \mathbb{C}[X]$:

- a) $f = 1 + X + X^2 + X^3$, $g = 1 - X^2 - X^3 + X^4$;
 b) $f = 1 + (1+i)X + (1-i)X^3$, $g = 1 + (1-i)X + (1+i)X^3$;
 c) $f = 1 + 2iX + 3X^2$, $g = -1 + iX^2 + (1+i)X^3$.

E7. Să se efectueze suma polinoamelor $f, g \in \mathbb{Z}_p[X]$:

- a) $f = \hat{1} + \hat{3}X + \hat{4}X^2$, $g = \hat{3} + \hat{2}X + X^2 + X^3$, $p = 5$;
 b) $f = \hat{2} + \hat{2}X + X^3$, $g = \hat{5} + \hat{4}X + \hat{6}X^3 - X^4$, $p = 7$;
 c) $f = \hat{1} + X + X^2 - X^3$, $g = \hat{1} + X - X^2 + X^3 - X^4$, $p = 2$.

E8. Să se efectueze produsul polinoamelor $f, g \in \mathbb{C}[X]$:

- a) $f = X^2 + X + 1$, $g = X^2 - X + 1$;
 b) $f = X - 1$, $g = X^2 + iX - 1$;
 c) $f = 1 + X + X^2 + X^3$, $g = 1 - X$;
 d) $f = (1+X)(2+X)(1-X)$, $g = (1-X)(2-X)$.

E9. Să se efectueze produsul polinoamelor $f, g \in \mathbb{Z}_p[X]$:

- a) $f = \hat{1} + X$, $g = \hat{1} + X + X^2$, $p = 2$;
 b) $f = \hat{2} + X + X^2$, $g = \hat{2} + \hat{2}X - X^2$, $p = 3$;
 c) $f = (\hat{1} + \hat{2}X) \cdot X + X^2$, $g = (\hat{1} + \hat{3}X + X^2)X$, $p = 5$.

E10. Să se afle polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = aX + b$, $g = cX + d$, în cazurile:

- a) $X^2 \cdot f + (X^2 + 1)g = X^3 + 1$;
 b) $(X+1)^2(X+f) + (X+g)X = X^3 + 1$.

APROFUNDARE

- A1.** Să se determine parametrii pentru care polinoamele f și g sunt egale:
- a) $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 2 + 3X + (m+1)X^2$,
 $g = (2m+4) + 3X + (m^2-1)X^3$;
- b) $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = m + nX + (m+n)X^2$,
 $g = m^2 + n^2X + 2X^2$;
- c) $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = m + \hat{1} + (m + \hat{2})X + 2X^2$, $g = n + m^2X + m^5X^2$.
- A2.** Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = n^2 - 1 + (m+n)^2X + (m^2-1)X^2$. Pentru ce valori $m, n \in \mathbb{C}$ polinomul f este polinom nul?
- A3.** Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$,
 $f = (a-b)X^3 + (2a+b+1)X + a+1$
și $g = (2a-b-1)X^3 + (a^2+b^2)X + 1-b$. Pentru ce valori $a, b \in \mathbb{C}$ polinoamele au același grad?
- A4.** Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^2 - aX - b$. Să se determine a și b , știind că $f(1) = 2$, $f(-2) = 8$.
- A5.** Să se determine $f \in \mathbb{C}[X]$ de gradul 2, dacă $f(1) = f(2) = 0$ și $f(3) = 6$.
- A6.** Să se determine $f \in \mathbb{Z}_5[X]$ de gradul 2, dacă $f(\hat{1}) = f(\hat{3}) = \hat{2}$ și $f(\hat{0}) = \hat{3}$.
- A7.** Fie $f = 1 + aX + X^2 \in \mathbb{C}[X]$. Să se demonstreze că dacă $f(1+z) = f(1-z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$, atunci f este pătratul unui polinom de gradul 1.
- A8.** Fie $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = a + bX + cX^2$. Să se determine f știind că funcția $\tilde{f}$ este egală cu funcția polinomială atașată polinomului $g \in \mathbb{Z}_3[X]$,
 $g = \hat{2} - X + \hat{2}X^2$.
- A9.** Se consideră polinomul $f = \hat{1} + \hat{3}X + X^2 + \hat{2}X^3 \in \mathbb{Z}_5[X]$. Să se determine polinoamele $g \in \mathbb{Z}_5[X]$, de grad cel mult 3, astfel încât $\tilde{f} = \tilde{g}$.
- A10.** Să se determine $a, b \in \mathbb{C}$, astfel încât polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = a + X$, $g = 2 + bX$ să verifice egalitatea $f \cdot g = X^2 - 4$.
- A11.** Să se determine $f \in \mathbb{C}[X]$, dacă:
- a) $f \cdot (X^2 + 2X + 4) = X^3 - 8$;
- b) $f \cdot (X^2 + X + 1) = X^4 + X^2 + 1$;
- c) $f \cdot (1 - X)(1 + X^2) = X^8 - 1$.
- A12.** Fie $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = a + X + X^2$,
 $g = b + aX$. Pentru ce valori ale lui „a” și „b” există egalitatea:
 $(X + \hat{1})f - (X^2 + \hat{2})g = X^2 - X - X^3$?
- A13.** Să se determine polinoamele $f \in K[X]$, în cazurile:
- a) $\text{grad}(f) = 2$ și $(f(x))^2 = f(x^2)$,
 $\forall x \in K$;
- b) $\text{grad}(f) \leq 2$ și $f(x^2 + 1) = f^2(x) + 1$,
 $\forall x \in K$;
- c) $f(x-1) + 2f(2-x) = x^2 + x + 1$,
 $\forall x \in K$.
- A14.** Să se arate că următoarele funcții nu sunt funcții polinomiale:
- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$;
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + |x|$;
- c) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z + |z|$;
- d) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + \bar{z}$.
- A15.** Să se arate că oricare funcție $f: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$ este funcție polinomială. Generalizare.

3.2. Împărțirea polinoamelor

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ și polinoamele $f, g \in K[X]$, g polinom nenul.

❖ DEFINIȚIE

- A împărți polinomul f la polinomul nenul g în $K[X]$ înseamnă a determina polinoamele $q, r \in K[X]$, astfel încât:

a) $f = g \cdot q + r;$ (1)

b) $\text{grad}(r) < \text{grad}(g).$

Polinomul f se numește **deîmpărțit**, g se numește **împărțitor**, iar polinoamele q și r se numesc **câtul**, respectiv **restul** împărțirii.

Având în vedere egalitatea $f = g \cdot q + r$ se obține egalitatea:

$$\text{grad}(q) = \text{grad}(f) - \text{grad}(g).$$

În legătură cu împărțirea a două polinoame în inelul $K[X]$ se pun câteva probleme:

- Pentru oricare două polinoame există un cât și un rest al împărțirii?
- Dacă există câtul și restul împărțirii atunci acestea sunt unice?
- Prin ce algoritm se pot determina câtul și restul împărțirii?

Răspunsurile la aceste probleme sunt date de următoarea teoremă.

☛ TEOREMA 2 (teorema împărțirii cu rest)

Fie $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$. Atunci există și sunt unice polinoamele $q, r \in K[X]$ cu proprietățile:

a) $f = g \cdot q + r;$

b) $\text{grad}(r) < \text{grad}(g).$

Demonstrație

Unicitatea câtului și restului

Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există polinoamele $q_1, q_2, r_1, r_2 \in K[X]$, astfel încât $q_1 \neq q_2, r_1 \neq r_2$ care verifică relațiile $f = g \cdot q_1 + r_1, f = g \cdot q_2 + r_2$ și $\text{grad}(r_1) < \text{grad}(g), \text{grad}(r_2) < \text{grad}(g)$.

Atunci rezultă că $f = g \cdot q_1 + r_1 = g \cdot q_2 + r_2$, relație din care rezultă egalitatea $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.

Referitor la grade se obține:

$$\text{grad}(g) + \text{grad}(q_1 - q_2) = \text{grad}(r_2 - r_1) < \text{grad}(g).$$

Contradicția rezultată conduce la egalitatea $q_1 = q_2$, și apoi $r_1 = r_2$.

Existența

Fie $n = \text{grad}(f)$, $m = \text{grad}(g)$. Deosebim cazurile:

1. Pentru $n < m$, avem $f = 0 \cdot g + f$ și se ia $q = 0$, $r = f$.

2. Pentru $n \geq m$, fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$, $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots + b_mX^m$.

Considerăm polinomul:

$$g_1 = a_n \cdot b_m^{-1} X^{n-m} \cdot g = a_n X^n + a_n b_{m-1} \cdot b_m^{-1} \cdot X^{n-1} + \dots + b_0 a_n b_m^{-1} X^{n-m}.$$

Rezultă că polinomul $f_1 = f - g$ are gradul strict mai mic decât gradul polinomului f .

Fie $f_1 = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \dots + c_{n_1}X^{n_1}$, $n_1 < n$.

• Dacă $n_1 < m$, avem $f_1 = f - a_n b_m^{-1} X^{n-m} g$ sau $f = a_n b_m^{-1} X^{n-m} g + f_1$ și se ia $q = a_n b_m^{-1} X^{n-m}$ și $r = f_1$.

• Dacă $n_1 \geq m$, repetăm procedeul anterior de micșorare a gradului printr-o nouă scădere, luând: $g_2 = c_{n_1} \cdot b_m^{-1} \cdot X^{n_1-m} \cdot g$ și $f_2 = f_1 - g_2$. Evident $n_2 = \text{grad}(f_2) < n_1 < n$.

Se repetă procedeul pentru perechile de polinoame (f_2, g_2) și se obțin succesiv relațiile:

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = f - g_1 \\ f_2 = f_1 - g_2 \\ f_3 = f_2 - g_3 \\ \dots\dots\dots \\ f_{p+1} = f_p - g_{p+1} \\ \dots\dots\dots \\ f_s = f_{s-1} - g_s \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Deoarece între gradele polinoamelor} \\ f, f_1, f_2, \dots, f_p, \dots \text{ există relațiile:} \\ n > n_1 > n_2 > \dots > n_p > \dots \text{ și } m \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ \text{atunci există un număr } s \in \mathbb{N}^*, \text{ astfel încât} \\ s < m. \end{array}$$

Adunând relațiile anterioare, se obține:

$$f_s = f - g_1 - g_2 - \dots - g_s, \text{ grad}(f_s) = n_s < m.$$

Așadar, $f = \left(\sum_{k=1}^s g_k \right) + f_s = g \cdot q + f_s$, deoarece fiecare polinom g_k

verifică egalitatea $g_k = g \cdot \alpha \cdot X^{n_k-m}$, cu $\alpha \in K$.

Luând $r = f_s$, teorema este demonstrată. ■

⇒ OBSERVAȚIE

- Teorema împărțirii cu rest oferă un algoritm concret de determinare a câtului și a restului împărțirii a două polinoame.

🔗 Exemplu

♦ Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 + X^2 + X + 2$, $g = X^2 - X + 1$.

Construim polinoamele $g_1 = X^{3-2} \cdot g = X \cdot g = X^3 - X^2 + X$.

Se obține $f_1 = f - g_1 = 2X^2 + 2$, $g_2 = 2g = 2X^2 - 2X + 2$ și $f_2 = f_1 - g_2 = 2X$. Cum f_2 are gradul mai mic decât gradul lui g , restul va fi $r = 2X$.

Avem $f = f_2 + g_1 + g_2 = f_2 + Xg = (X + 2) \cdot g + 2X$ și astfel $q = X + 2$ și $r = 2X$.

Algoritmul sugerat în demonstrația teoremei poate fi aranjat sub o formă convenabilă, urmând o cale analoagă împărțirii cu rest a numerelor întregi.

Se procedează astfel:

- Se împarte monomul dominant al deîmpărțitului la monomul dominant al împărțitorului. Se obține astfel monomul dominant al câtului.
- Se înmulțește monomul obținut la cât cu împărțitorul g și produsul obținut se scade din deîmpărțitul f , obținându-se polinomul f_1 .
- Se continuă împărțirea luând ca deîmpărțit polinomul f_1 și se împarte monomul dominant al lui f_1 la monomul dominant al lui g rezultând al doilea monom al câtului.
- Se repetă procedeul anterior până când polinomul f_s are gradul inferior gradului polinomului g .

Polinomul f_s va fi restul împărțirii. Schema de calcul arată astfel:

$(f): a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$	$b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_0 \quad (g)$
$-a_n X^n - a_n b_{m-1} b_m^{-1} X^{n-1} - \dots$	$\underbrace{a_n b_m^{-1} X^{n-m}}_{\substack{\text{primul monom} \\ \text{al câtului}}} + \underbrace{\quad}_{\substack{\text{al doilea} \\ \text{monom} \\ \text{al câtului}}} + \dots$
$(f_1):$	$(câtul)$
$(f_2):$	
$\text{Restul } (f_s):$	

Exemplu

♦ Să se împartă polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 + X^2 + 1$ la polinomul $g \in \mathbb{C}[X]$, $g = X - 1$.

Secvențele împărțirii

Monomul dominant al câtului este

$$X^{4-1} = X^3. \text{ Se obține:}$$

$$\bullet f_1 = f - X^3 g = f - X^3 (X - 1) = X^3 + X^2 + 1.$$

• Al doilea monom al câtului este:

$$X^{3-1} = X^2.$$

Se obține: $f_2 = f_1 - X^2 g = 2X^2 + 1$.

• Al treilea monom al câtului este

$$2X^{2-1} = 2X, \text{ iar } f_3 = f_2 - 2X \cdot g = 2X + 1.$$

• Al patrulea monom al câtului este

$$2X^{1-1} = 2, \text{ iar } f_4 = f_3 - 2g = 3 = \text{restul.}$$

Schema împărțirii

deîmpărțitul	împărțitorul
(f) $\overline{X^4 + X^2 + 1}$	(g) $\overline{X - 1}$
$-X^4 + X^3$	$\overline{X^3 + X^2 + 2X + 2}$
(f ₁) $\overline{X^3 + X^2 + 1}$	câtul
$-X^3 + X^2$	
(f ₂) $\overline{2X^2 + 1}$	
$-2X^2 + 2X$	
(f ₃) $\overline{2X + 1}$	
$-2X + 2$	
(f ₄) $\overline{3}$	
restul	

OBSERVAȚII

1. În cadrul algoritmului anterior, asupra coeficienților celor două polinoame f și g se efectuează numai operații de adunare și înmulțire în corpul K . Astfel, va rezulta că polinoamele cât și rest vor avea coeficienți în corpul K .

2. Fie $f, g \in K[X]$ și $f = gq + r$, unde q este câtul, iar r este restul împărțirii lui f la g .

Dacă împărțim f la $g_1 = ag$, $a \in K$, putem scrie $f = agq_1 + r_1$.

Dar $f = gq + r = ag(a^{-1}q) + r = agq_1 + r$ și din unicitatea câtului și restului rezultă $r_1 = r$ și $q_1 = a^{-1}q$.

EXERCIIII ȘI PROBLEME
EXERSARE

E1. Să se efectueze împărțirile de polinoame în $\mathbb{C}[X]$:

- a) $f = X^3 + X + 1, g = X - 1$;
- b) $f = X^4 + 2X^3 + X + 2, g = X^2 + X + 1$;
- c) $f = (X + 1)(X + 2) + X^3,$
 $g = (X - 1)(X + 1)$;
- d) $f = X^5 + X^4 + X^2 + 1, g = X^2 + 1$;
- e) $f = X^4 + iX^2 + X + i, g = X + 1$;
- f) $f = X^4 + (1 + i)X^3 - i + 1, g = X^2 + i$.

E2. Să se efectueze împărțirile de polinoame în $\mathbb{Z}_p[X]$:

- a) $f = X^3 + X^2 + \hat{1}, g = X + \hat{2}, p = 3$;
- b) $f = \hat{2}X^4 + \hat{3}X + \hat{2}, g = X + \hat{3},$
 $p = 5$;
- c) $f = X^5 - X^4 + X - \hat{1}, g = X^2 + \hat{1},$
 $p = 2$;
- d) $f = (X^2 + \hat{1})^2 + 2(X^3 + \hat{2}),$
 $g = (X + \hat{1})^2 + \hat{1}, p = 3$.

E3. Să se determine polinomul $g \in \mathbb{C}[X]$, știind că polinomul $f = X^3 - X^2 + X + 15 \in \mathbb{C}[X]$ împărțit la g dă câtul $q = X + 2$ și restul $r = 1$.

E4. Să se efectueze împărțirile de polinoame în $\mathbb{C}[X]$:

a) $f = (X - 1)^3 + (X + 1)^3$,

$g = (X - 1)^2 + (X + 1)^2$;

b) $f = (X - 1)^2(X + 2) + (X + 1)^2(X + 2)$,

$g = X^2 + X + 1$;

c) $f = (X - 1)(X + 2)(X + 3) + X$,

$g = X(X + 1)$;

d) $f = X(X - i)(X - 2i)(X - 3i)$,

$g = (X + i)(X - i)$.

E5. Să se efectueze în $\mathbb{Z}_p[X]$, împărțirile:

a) $f = (X + \hat{2})^3$, $g = (X + \hat{1})^2$, $p = 3$;

b) $f = (X + \hat{2})(X + \hat{3})(X + \hat{4})$,

$g = (2X + \hat{1})^2$, $p = 5$;

c) $f = (X^3 + X + \hat{1})^2$, $g = (X^2 + \hat{1})^2$,

$p = 7$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la g :

a) $f = X^6 + \hat{3}X^4 + \hat{2}$, $g = X^2 + \hat{3}$, în $\mathbb{Z}_5[X]$;

b) $f = X^8 + \hat{2}X^4 + X^2 + \hat{1}$, $g = X^4 + X + \hat{1}$, în $\mathbb{Z}_3[X]$;

c) $f = \hat{2}X^{10} + \hat{3}X^8 + \hat{2}X + \hat{2}$, $g = X^5 + X^4 + \hat{2}$, în $\mathbb{Z}_5[X]$.

A2. Să se determine parametrii pentru care restul împărțirii polinomului $f \in K[X]$ la $g \in K[X]$ este cel specificat:

a) $f = X^4 + X - a$, $g = 2X + 1$, $r = 0$, $K = \mathbb{C}$;

b) $f = aX^3 + bX^2 + 2$, $g = X^2 - 1$, $r = 2X$, $K = \mathbb{R}$;

c) $f = X^3 + aX^2 - bX + 1$, $g = X^2 - 3X + 2$, $r = X - 1$, $K = \mathbb{Q}$;

d) $f = X^3 + aX^2 + \hat{2}X + \hat{1}$, $g = X - \hat{2}$, $r = \hat{1}$, $K = \mathbb{Z}_3$;

e) $f = X^4 + \hat{2}X^3 + aX + b$, $g = \hat{2}X^2 - \hat{1}$, $r = X + \hat{1}$, $K = \mathbb{Z}_5$.

A3. Fie r restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 + X^2 + 1$ la polinomul $g = X^2 + 2X \in \mathbb{C}[X]$. Să se arate că șirul $(r(n))_{n \in \mathbb{N}}$ este o progresie aritmetică.

A4. Să se afle restul împărțirii polinomului $f \in K[X]$ la polinomul $(X - a)(X - b)$ în cazurile:

a) $a = 1$, $b = 2$, $K = \mathbb{Q}$, $f(1) = 3$,

$f(2) = 2$;

b) $a = i$, $b = 1 + i$, $K = \mathbb{C}$, $f(i) = i$,

$f(1 + i) = -i$;

c) $a = \hat{1}$, $b = \hat{3}$, $K = \mathbb{Z}_5$, $f(\hat{1}) = \hat{0}$,

$f(-\hat{2}) = \hat{1}$.

A5. Să se determine polinoamele de gradul al treilea $f \in \mathbb{R}[X]$, știind că f împărțit la $X^2 + X$ dă restul $r = X + 1$ și împărțit la $X^2 - X$ dă restul $r_1 = 3X + 1$.

(Univ. Craiova, 1997)

A6. Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 - 3X^2 + aX + b$.
Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$ pentru care f împărțit la $X - 2$ dă restul 0 și împărțit la $X - 1$ dă restul 4.
(Univ. Transilvania, Brașov, 2002)

A7. Polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ are coeficientul dominant 1. Să se determine f și $a, b \in \mathbb{R}$, știind că f împărțit la $X - a$ dă câtul $X^2 - 3X + 4$, iar câtul împărțirii lui f la $X - b$ este $X^2 - 4X + 2$.

A8. Un polinom $f \in \mathbb{R}[X]$, prin împărțirea la $X - a$, $X - b$, $X - c$, dă căturile q_1, q_2, q_3 . Să se arate că $(b - a)q_1(b) + (c - b)q_2(c) + (a - c) \cdot q_3(a) = 0$.

A9. Un polinom $f \in \mathbb{C}[X]$ împărțit la $X - 1$, $X + 1$ și $X + 4$ dă resturile 15, 7, respectiv -80.

a) Să se afle restul r al împărțirii lui f la $(X - 1)(X + 1)(X + 4)$.

b) Să se determine:

$$S_n = \frac{r(1) + r(2) + \dots + r(n)}{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)}.$$

A10. Să se determine $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 3$, știind că împărțit la $X^2 - 1$ dă restul R_1 , împărțit la $X^2 + 1$ dă restul R_2 și $R_1 \cdot R_2 = 5X^2 - 28X + 15$.

(ASE, București, 2000)

A11. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (X + 1)^{10}$, având forma algebrică $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{10}X^{10}$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .

c) Să se arate că $a_0 + a_2 + \dots + a_{10} = 2^9$.

(Bacalaureat, august, 2002)

A12. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $P, Q, T \in \mathbb{R}[X]$, $P = X^n + X^{2n+1} + X^{3n+2} + \dots + X^{n^2+n-1}$,

$Q = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1$ și T restul împărțirii lui P la Q . Dacă s este suma pătratelor coeficienților polinomului T , atunci:

a) $s = n^3 + 2$; b) $s = \frac{n(n+1)}{2}$;

c) $s = 0$; d) $s = n + 5$; e) $s = 16$.

(ASE, București, 2003)

3.3. Împărțirea la $X - a$. Schema lui Horner

Fie $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ un polinom de gradul n și $g = X - a \in K[X]$.

TEOREMA 3 (a restului)

Restul împărțirii polinomului nenul $f \in K[X]$, la polinomul $g = X - a \in K[X]$ este egal cu valoarea $f(a)$ a polinomului f în a .

Demonstrație

Din teorema împărțirii cu rest se obține:

$$r = f(a)$$

$f = (X - a)q + r$, $\text{grad}(r) < 1$, deci $r \in K$.

Rezultă că $f(a) = 0 \cdot q(a) + r$, de unde $r = f(a)$. ■

Teorema restului este eficientă pentru determinarea restului împărțirii unui polinom prin $X - a$, fără a efectua împărțirea.

Exercițiu rezolvat

☒ Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^{2n} + 5X^{n+1} + 7$. Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X - i$, știind că împărțit la $X - 2$ dă restul 151.

Soluție

Din teorema restului se obține că $151 = r = f(2) = 2^{2n} + 5 \cdot 2^{n+1} + 7$. Se obține ecuația exponențială $2^{2n} + 10 \cdot 2^n - 144 = 0$. Se notează $2^n = a$ și rezultă ecuația $a^2 + 10a - 144 = 0$, cu soluțiile $a \in \{8, -18\}$. Avem $2^n = 8$ cu soluția $n = 3$. Așadar $f = X^6 + 5X^4 + 7$. Restul împărțirii lui f la $X - i$ este $r = f(i) = 11$.

Schema lui Horner

Fie $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$, polinom nenul de gradul n și $g = X - a \in K[X]$.

Notăm $q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots + b_{n-1}X^{n-1}$ câtul împărțirii polinomului f la g . Din teorema împărțirii cu rest se obține:

$$f = (X - a)(b_0 + b_1X + \dots + b_{n-1}X^{n-1}) + r = r - ab_0 + (b_0 - ab_1)X + (b_1 - ab_2)X^2 + \dots + (b_{n-1} - ab_n)X^n, \quad (1).$$

Identificând coeficienții celor două polinoame în relația (1) se obține:

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - ab_{n-1} \\ a_{n-2} &= b_{n-3} - ab_{n-2} \\ &\dots\dots\dots \\ a_2 &= b_1 - ab_2 \\ a_1 &= b_0 - ab_1 \\ a_0 &= r - ab_0 \end{aligned}$$

Aceste relații permit deducerea în mod recursiv a coeficienților câtului $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0$ și a restului r .

Avem:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + ab_{n-1} \\ b_{n-3} &= a_{n-2} + ab_{n-2} \\ &\dots\dots\dots \\ b_0 &= a_1 + ab_1 \\ r &= a_0 + ab_0 \end{aligned}$$

În mod practic, pentru determinarea coeficienților $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0$ ai câtului și a restului r se alcătuieste următoarea schemă:

Coeficienții lui f în ordine descrescătoare a gradelor monoamelor						
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-1}a + a_{n-1}$	$b_{n-2}a + a_{n-2}$	...	$b_1a + a_1$	$b_0a + a_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_0	r
Coeficienții câtului						Restul

Această schemă de lucru în care se operează numai cu elementul $a \in K$ și coeficienții polinomului f se numește **schema lui Horner**. Schema lui Horner are la bază relația de recurență:

$$b_k = b_{k-1} \cdot a + a_{k-1}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se efectueze împărțirea polinomului f la g , dacă:

a) $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 3X + 1$, $g = X - 2$;

b) $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = 3X^5 - 4X^3 + 3X^2 - X - 5$, $g = X + 1$;

c) $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = 8X^3 - 2X^2 + X + 2$, $g = 2X - 1$.

Soluție

a) Folosim schema lui Horner pentru $a = 2$. Avem:

	1	-3	4	-3	1
$a = 2$	1	$1 \cdot 2 - 3 = -1$	$-1 \cdot 2 + 4 = 2$	$2 \cdot 2 - 3 = 1$	$1 \cdot 2 + 1 = 3$

Câtul împărțirii este: $q = 1 \cdot X^3 + (-1) \cdot X^2 + 2X + 1$, iar restul $r = 3$.

b) În acest caz avem $g = X - (-1)$, deci $a = -1$. Schema lui Horner:

	3	0	-4	3	-1	-5
$a = -1$	3	$3 \cdot (-1) + 0 = -3$	$(-3) \cdot (-1) - 4 = -1$	$(-1) \cdot (-1) + 3 = 4$	$4 \cdot (-1) - 1 = -5$	$(-5) \cdot (-1) - 5 = 0$

Se obține: $q = 3X^4 + (-3)x^3 + (-1)X^2 + 4X - 5$ și $r = 0$.

c) Scriem $g = 2\left(X - \frac{1}{2}\right)$. Vom împărți mai întâi polinomul f prin $X - \frac{1}{2}$. Alcătuim schema lui Horner cu $a = \frac{1}{2}$.

	8	-2	1	2
$a = \frac{1}{2}$	8	2	2	3

Se obține câtul $q_1 = 8X^2 + 2X + 2$ și restul $r_1 = 3$. Câtul împărțirii lui f la g este $q = \frac{1}{2}q_1 = 4X^2 + X + 1$, iar restul $r = r_1 = 3$ (vezi observația 2, § 3.2.)

☒ **2.** Fie $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = \hat{2}X^5 - X^4 + \hat{2}X^2 + mX + \hat{1}$, $g = X + \hat{2}$. Să se determine $m \in \mathbb{Z}_3$, știind că restul împărțirii lui f la g este $r = \hat{2}$.

Soluție

Aflăm restul împărțirii polinomului f la g prin schema lui Horner. Avem $a = -\hat{2} = \hat{1}$.

	$\hat{2}$	$-\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	m	$\hat{1}$
$a = \hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	m	$m + \hat{1}$

Restul împărțirii este $r = m + \hat{1}$ și se obține ecuația $m + \hat{1} = \hat{2}$, deci $m = \hat{1}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se determine restul împărțirii polinomului $f \in K[X]$ la $X - a \in K[X]$, în cazurile:

a) $f = X^3 - 2007X^2 + 2006$, $a = 1$, $K = \mathbb{R}$;

b) $f = 2X^8 - 3X^7 + X + 1$, $a = -1$, $K = \mathbb{Q}$;

c) $f = X^{10} + 2X^4 + 3$, $a = i$, $K = \mathbb{C}$;

d) $f = \hat{2}X^7 + \hat{4}X^6 + \hat{3}X + \hat{2}$, $a = \hat{2}$, $K = \mathbb{Z}_5$.

E2. Să se determine $m \in K$ cu proprietatea că polinomul $f \in K[X]$, împărțit la $g = X - a \in K[X]$ dă restul specificat:

a) $f = X^3 + mX^2 + 3X - m$, $a = 2$,

$K = \mathbb{C}$, $r = 17$;

b) $f = X^4 + mX^2 + 2$, $a = -i$, $K = \mathbb{C}$, $r = 3 + i$;

c) $f = \hat{2}X^4 + \hat{2}X^3 - mX + \hat{1}$, $a = \hat{2}$, $K = \mathbb{Z}_7$, $r = \hat{3}$.

E3. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ la polinomul $g \in \mathbb{R}[X]$:

a) $f = X^5 + 4X^4 + 3X^2 + X - 2$, $g = X - 2$;

b) $f = -2X^4 + 3X^3 + 5X^2 - 6X - 1$, $g = X - 3$;

c) $f = 3X^6 + 2X^4 + 2X^2 + X + 2$, $g = X + 1$;

d) $f = X^8 + X^4 + X^2 + 1$, $g = X + 2$;

e) $f = 6X^3 + 2X + 2$, $g = 2X - 1$;

f) $f = X^4 + 3X^2 + X - 6$, $g = 2X + 1$.

E4. Să se împartă polinomul $f \in K[X]$ la polinomul $g \in K[X]$ prin schema lui Horner:

a) $f = X^3 + X^2 + X + 1$, $g = X - i$,
 $K = \mathbb{C}$;

b) $f = X^4 - X^3 + X^2 - X + 2$, $g = X + i$,
 $K = \mathbb{C}$;

c) $f = 2X^3 + X - i$, $g = X + 2i$, $K = \mathbb{C}$;

d) $f = X^4 + \hat{2}X^3 + \hat{3}X + \hat{1}$, $g = X + \hat{2}$,
 $K = \mathbb{Z}_5$;

e) $f = \hat{2}X^5 - \hat{3}X^3 + \hat{4}X - \hat{4}$, $g = \hat{2}X - \hat{1}$, $K = \mathbb{Z}_5$.

A PROFUNDARE

A1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{C}[X]$ la $X + i$ să fie număr real, dacă:

a) $f = X^3 + mX^2 + mX + 3$;

b) $f = X^4 - (m^2 - 1)X - 8i$.

A2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^3 - aX^2 + X - 7$ la $X - 2$ să fie 3.

(Univ. Transilvania, Brașov, 2002)

A3. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + X^3 + aX + 6a$. Să se determine parametrul $a \in \mathbb{R}$, astfel încât restul împărțirii polinomului $f(X + 2)$ la $X + 1$ să fie egal cu -12 .

(Univ. Transilvania, Brașov, 2002)

A4. Împărțind polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = 2X^3 - mX^2 + nX - 6$ la $X - 3$ și $X + 1$ se obțin resturi egale cu -2 . Să se afle restul împărțirii polinomului f la $X - 2$.

A5. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f = 3X^3 + mX^2 + 15 \in \mathbb{R}[X]$ la polinomul $g = X - 2 \in \mathbb{R}[X]$, știind că restul împărțirii acestuia la $2X - 1$ este $r = \frac{225}{8}$.

A6. Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_5[X]$, știind că împărțind polinomul $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^3 + aX^2 + \hat{4}X + b$, la polinoamele $g_1, g_2 \in \mathbb{Z}_5[X]$, $g_1 = X - \hat{1}$, $g_2 = \hat{2}X + \hat{1}$, se obțin resturile $r_1 = \hat{2}$, $r_2 = \hat{3}$.

A7. Să se determine restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^{n+1} - 3X^n + 4$ la $X + 2 \in \mathbb{C}[X]$, știind că restul împărțirii lui f la $X - 2$ este -12 .

A8. Împărțind polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^m + X^n + 1$ la polinomul $X - 2 \in \mathbb{C}[X]$ se obține restul 13 și împărțindu-l la $X - 4 \in \mathbb{C}[X]$ se obține restul 81. Să se determine restul împărțirii lui f la $X - i$.

A9. Polinomul $f \in K[X]$ împărțit la $X - a \in K[X]$ și $X - b \in K[X]$ dă câturile q_1 și q_2 . Să se arate că $q_1(b) = q_2(a)$.

A10. Să se determine polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^8 + aX^7 + \hat{2}X^3 + X + b$, știind că împărțit la $g = X - \hat{2}$ dă câtul q și restul $r = \hat{2}$, iar q împărțit la $g_1 = X + \hat{2}$ dă restul $r_1 = \hat{0}$.



Divizibilitatea polinoamelor

4.1. Relația de divizibilitate pe mulțimea $K[X]$

Problemă rezolvată

☒ Fie $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 2X^3 + 3X^2 + 3X + 2$, $g = X + 1$.

Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la g .

Soluție

Aplicăm schema lui Horner și rezultă:

	2	3	3	2
$a = -1$	2	1	2	0

Se obține câtul $q = 2X^2 + X + 2$ și restul $r = 0$.

Așadar $f = g \cdot (2X^2 + X + 2)$.

Se observă că la această împărțire restul este polinomul nul. Ca și în cazul împărțirii numerelor întregi, împărțirea cu rest zero constituie un caz special.

❖ DEFINIȚIE

- Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ și polinoamele $f, g \in K[X]$.

Spunem că polinomul g **divide** polinomul f dacă există un polinom $h \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot h$, (1).

Dacă polinomul g divide polinomul f vom scrie $g \mid f$ (se citește „ g divide f ”) sau $f : g$ (se citește „ f este divizibil cu g ”).

Polinomul g se numește **divizor** al polinomului f , iar polinomul f se numește **multiplu** al polinomului g .

☞ OBSERVAȚIE

- Polinomul $f \in K[X]$ se divide cu polinomul $g \in K[X]$, $g \neq 0$, dacă și numai dacă restul împărțirii lui f la g este polinomul nul.

4.2. Proprietăți ale relației de divizibilitate

Relația de divizibilitate pe mulțimea de polinoame $K[X]$ are proprietăți asemănătoare cu relația de divizibilitate pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi.

P1. Relația de divizibilitate pe mulțimea $K[X]$ este reflexivă.

• $f \mid f, \forall f \in K[X]$.

Într-adevăr $f = 1 \cdot f$, deci $f \mid f$.

P2. Relația de divizibilitate pe mulțimea $K[X]$ este tranzitivă.

• Dacă $f, g, h \in K[X]$, $f \mid g$ și $g \mid h$, atunci $f \mid h$.

Într-adevăr, din ipoteză rezultă că $\exists u, v \in K[X]$, astfel încât $g = f \cdot u$ și $h = g \cdot v$. Se obține că $h = g \cdot v = (f \cdot u) \cdot v = f \cdot (uv)$, deci $f \mid h$.

P3. Polinomul nul $f = 0 \in K[X]$, este divizibil cu oricare polinom $g \in K[X]$, deoarece $0 = 0 \cdot g$. Se spune că $f = 0$ este cel mai mare element în raport cu divizibilitatea pe $K[X]$.

P4. Polinoamele constante $f = a, a \in K^*$, sunt divizori pentru orice polinom din $K[X]$.

P5. Dacă $f, g, h \in K[X]$, astfel încât $f \mid g$ și $f \mid h$, atunci $f \mid (ug + vh), \forall u, v \in K[X]$.

Într-adevăr, fie $\alpha, \beta \in K[X]$, astfel încât $g = \alpha f, h = \beta f$. Rezultă că $ug + vh = u(\alpha f) + v(\beta f) = f \cdot (\alpha u + \beta v)$, deci $f \mid (ug + vh)$.

❖ DEFINIȚIE

- Polinoamele $f, g \in K[X]$ se numesc **asociate în divizibilitate** și se notează $f \sim g$, dacă $f \mid g$ și $g \mid f$.

☛ TEOREMA 4

Polinoamele nenule $f, g \in K[X]$ sunt asociate în divizibilitate dacă și numai dacă $\exists a \in K \setminus \{0\}$, astfel încât $f = a \cdot g$.

Demonstrație

Dacă $f = ag$, atunci $g \mid f$ și cum $g = a^{-1} \cdot f$, rezultă $f \mid g$, deci $f \sim g$.

Reciproc, fie $f \sim g$. Atunci $f \mid g$ și $g \mid f$, deci există $u, v \in K[X]$, astfel încât $f = ug$ și $g = vf$. Se obține că $f = uvf$ și cum f este nenul, rezultă că $uv = 1$. Așadar $u, v \in K \setminus \{0\}$ și teorema este demonstrată. ■

Exemple

- ♦ Polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = 2X^2 + X + 1$ și $g = 4X^2 + 2X + 2$ sunt asociate în divizibilitate, deoarece $g = 2f$.
- ♦ Polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{2}X^2 + X + \hat{3}$ și $g = X^2 + \hat{3}X + \hat{4}$ sunt asociate în divizibilitate deoarece $g = \hat{3}f$.

Probleme rezolvate

- ☒ **1.** Fie $f \in K[X]$. Să se arate că $f \in \mathcal{U}(K[X])$ dacă și numai dacă $f \sim 1$.

Soluție

Presupunem că $f \sim 1$. Atunci există $a \in K^*$, astfel încât $f = a \cdot 1 = a \in K^*$, deci f este un element inversabil în inelul $K[X]$.

Reciproc, fie $f \in \mathcal{U}(K[X])$. Rezultă că există $g \in K[X]$, astfel încât $f \cdot g = 1$. Atunci $\text{grad}(f) + \text{grad}(g) = 0$, deci $\text{grad}(f) = 0$, și cum f este nenul se obține că $f \in K^*$. Așadar $f \sim 1$.

- ☒ **2.** Să se arate că polinomul $f = (X+1)^{6n+1} + X^{6n+2} \in \mathbb{Q}[X]$ se divide cu polinomul $g = X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

Soluție

Avem $g = X^2 + X + 1$ și $X + 1 = g - X^2$. Folosind binomul lui Newton rezultă că:

$$\begin{aligned} (X+1)^{6n+1} &= (g - X^2)^{6n+1} = C_{6n+1}^0 g^{6n+1} + C_{6n+1}^1 g^{6n} \cdot (-X^2) + \dots + \\ &+ C_{6n+1}^{6n} g \cdot (-X^2)^{6n} + C_{6n+1}^{6n+1} \cdot (-X^2)^{6n+1} = g \cdot h - X^{12n+2}, \quad (1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Așadar, } f &= (X+1)^{6n+1} + X^{6n+2} = g \cdot h + X^{6n+2} - X^{12n+2} = g \cdot h - X^{6n+2} \cdot \\ &\cdot (X^{6n} - 1) = g \cdot h - X^{6n+2} (X^{3n} - 1)(X^{3n} + 1), \quad (2). \end{aligned}$$

Dar, $X^{3n} - 1 = (X^3)^n - 1 = (X^3 - 1)(X^{3n-3} + X^{3n-6} + \dots + X^3 + 1) = (X^3 - 1) \cdot h_1$, iar din relația (2) se obține că $f = g \cdot h - X^{6n+2} (X - 1) g \cdot h_1$, deci f este divizibil cu g .

4.3. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor

❖ DEFINIȚIE

- Fie $f, g \in K[X]$. Un polinom $d \in K[X]$ se numește un **cel mai mare divizor comun** al polinoamelor f și g dacă:
 - d este divizor comun al lui f și g , adică $d \mid f$ și $d \mid g$;
 - oricare ar fi alt divizor comun d_1 al polinoamelor f și g , atunci $d_1 \mid d$.

Dacă d este un cel mai mare divizor comun pentru f și g , el se notează $\text{c.m.m.d.c.}(f, g)$ sau, mai simplu (f, g) .

❖ DEFINIȚIE

- Două polinoame $f, g \in K[X]$ se numesc **relativ prime** (sau **prime între ele**) dacă $(f, g) \sim 1$.

☛ TEOREMA 5

Fie $f, g \in K[X]$ două polinoame nenule și $\mathcal{D} = \{d \in K[X] \mid d \text{ este un c.m.m.d.c.}(f, g)\}$.

Dacă $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$, atunci $d_1 \sim d_2$.

Demonstrație

Deoarece $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$, atunci $d_1 \mid d_2$, dar și $d_2 \mid d_1$, conform condiției 2 din definiția $\text{c.m.m.d.c.}(f, g)$. Așadar $d_1 \sim d_2$. ■

Teorema 5 ne asigură că fiind date două polinoame $f, g \in K[X]$, polinomul (f, g) este unic, abstracție făcând de un factor multiplicativ $a \in K^*$.

În continuare vom considera ca polinom care să desemneze (f, g) polinomul unitar, iar pentru polinoamele constante, polinomul constant 1.

Rezultă că două polinoame $f, g \in K[X]$ sunt prime între ele dacă $(f, g) = 1$.

TEOREMA 6

Fie $f, g \in K[X]$ polinoame nenule și $r \in K[X]$ restul împărțirii lui f la g . Dacă există (f, g) și (g, r) , atunci $(f, g) = (g, r)$.

Demonstrație

Din teorema împărțirii cu rest, există $q, r \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot q + r$, $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$.

- Dacă $r = 0$, are loc relația $f = g \cdot q$ și $(f, g) = g = (g, 0) = (g, r)$.
- Fie $r \neq 0$ și $d = (f, g)$, $d_1 = (g, r)$.

Deoarece $d \mid f$ și $d \mid g$ rezultă că $d \mid (f - gq)$, deci $d \mid r$ și astfel $d \mid (g, r) = d_1$.

Din relația $d_1 = (g, r)$ și $f = gq + r$ se obține că $d_1 \mid f$, deci d_1 este divizor comun pentru f și g . Rezultă că $d_1 \mid d$, și astfel $d_1 \sim d$. ■

Această teoremă oferă posibilitatea calculării polinomului (f, g) , folosind polinoame de grad mai mic.

Exemplu

- ♦ Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 3X^2 + 2$, $g = X^3 - X$.

Avem: $f = g \cdot X + (-2X^2 + 2)$. Rezultă că $(f, g) = (g, -2X^2 + 2)$. Așadar problema s-a redus la a calcula c.m.m.d.c. $(X^3 - X, -2X^2 + 2)$. Avem $g = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ și $r = -2(X-1)(X+1)$. Se obține că c.m.m.d.c. $(f, g) = (X-1)(X+1) = X^2 - 1$.

TEOREMA 7 (de existență a c.m.m.d.c. pentru două polinoame)

Fie $f, g \in K[X]$. Atunci există un cel mai mare divizor comun al polinoamelor f și g .

Demonstrație

a) În cazul $f = g = 0$, polinomul nul este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g .

b) Dacă $f \neq 0$ și $g = 0$, avem $(f, g) = f$, iar dacă $f = 0$, $g \neq 0$, avem $(f, g) = g$.

c) Să considerăm f și g polinoame nenule. Din teorema împărțirii cu rest, există polinoamele $q_1, r_1 \in K[X]$, astfel încât:

$$f = gq_1 + r_1, \text{grad}(r_1) < \text{grad}(g).$$

Conform teoremei 6 avem că $(f, g) = (g, r_1)$.

• Dacă $r_1 = 0$, atunci $(f, g) = (g, 0) = g$ și teorema este demonstrată.

• Dacă $r_1 \neq 0$, există polinoamele $q_2, r_2 \in K[X]$, astfel încât $g = r_1 q_2 + r_2$, $\text{grad}(r_2) < \text{grad}(r_1)$ și astfel $(g, r_1) = (r_1, r_2)$.

Pentru $r_2 = 0$, $(g, r_1) = r_1$ și astfel $(f, g) = r_1$.

În cazul în care $r_2 \neq 0$ se continuă procedeul obținând șirul de relații:

$$\begin{array}{ll} f = gq_1 + r_1, & \text{grad}(r_1) < \text{grad}(q_1) \\ g = r_1q_2 + r_2, & \text{grad}(r_2) < \text{grad}(r_1) \\ r_1 = r_2q_3 + r_3, & \text{grad}(r_3) < \text{grad}(r_2) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}, & \text{grad}(r_{n+1}) < \text{grad}(r_n) \end{array}$$

Deoarece $\text{grad}(q) > \text{grad}(r_1) > \text{grad}(r_2) > \dots > \text{grad}(r_n) > \dots \geq 0$, se formează un șir descrescător de numere naturale. Rezultă că există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $r_p \neq 0$ și $r_{p+1} = 0$.

În acest caz se obține:

$$(f, g) = (g, r_1) = (r_1, r_2) = \dots = (r_{p-1}, r_p) = (r_p, 0) = r_p.$$

Așadar, polinomul r_p este un c.m.m.d.c.(f, g). ■

Din demonstrația teoremei rezultă și un algoritm de determinare pentru c.m.m.d.c.(f, g). Acesta este ultimul rest nenul în șirul de polinoame:

$$f, g, r_1, r_2, \dots, \boxed{r_p}, 0.$$

Acest algoritm poartă numele de **algoritmul lui Euclid** de determinare a c.m.m.d.c. pentru două polinoame.

Problemă rezolvată

☒ Să se determine c.m.m.d.c.(f, g) pentru polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 3X^3 + X^2 - 3X + 4$, $g = X^3 - 1$.



EUCLID din Alexandria
(325-265 î.Hr.)

A fost unul dintre marii matematicieni ai Antichității, cu rezultate în toate ramurile matematicii.

Soluție

Alcătuiim șirul de polinoame, prin împărțiri succesive:

$$f, g, r_1 = X^2 - 2X + 1, r_2 = \boxed{3X - 3}, r_3 = 0.$$

Rezultă că $(f, g) \sim 3(X - 1)$. Conform convenției de a desemna c.m.m.d.c. prin polinoame unitare, avem $(f, g) = X - 1$.

☛ OBSERVAȚIE

- Pentru obținerea șirului de polinoame $f, g, r_1, r_2, \dots, r_p, 0$ contează doar restul împărțirilor efectuate. Acest fapt permite simplificarea sau înmulțirea acestora cu elemente din corpul K pentru ca împărțirile să fie mai comode.

Astfel, șirul anterior poate fi scris:

$$f, g, r_1 = X^2 - 2X + 1, r_2 = \boxed{X - 1}, r_3 = 0.$$

☛ TEOREMA 8 (Etienne Bézout)

Fie $f, g \in K[X]$ și $d = (f, g)$.

Atunci există polinoamele $u, v \in K[X]$, astfel încât $d = uf + vg$.

Demonstrație

Aplicând algoritmul lui Euclid se obține șirul de egalități:

$$f = g \cdot q_1 + r_1 \quad (1) \qquad r_1 = f - gq_1 = \alpha_1 f + \beta_1 g, \quad (1')$$

$$g = r_1 q_2 + r_2 \quad (2) \qquad r_2 = g - r_1 q_2 \stackrel{(1')}{=} \alpha_2 f + \beta_2 g, \quad (2')$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3 \quad (3) \qquad r_3 = r_1 - r_2 q_3 \stackrel{(2')}{=} \alpha_3 f + \beta_3 g, \quad (3')$$

.....

$$r_k = r_{k+1} q_{k+2} + r_{k+2} \quad (k) \qquad r_3 = r_1 - r_2 q_3 = \alpha_3 f + \beta_3 g, \quad (3')$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n = r_{n-1} q_n + d \quad (n - 2)$$

Prin înlocuire din aproape în aproape se obține: $r_k = \alpha_k f + \beta_k g, (k')$ și în final $d = r_n = \alpha_n \cdot f + \beta_n \cdot g$.

Luând $u = \alpha_n, v = \beta_n$ teorema este demonstrată. ■

☛ Exemplu

♦ Pentru $f, g \in \mathbb{C}[X], f = X^4 - 3X^3 + X^2 - 3X + 4, g = X^3 - 1$, din problema rezolvată, rezultă că $d = 3(X - 1) = f \cdot (-X - 2) + g \cdot (X^2 - X - 5)$.

❖ **DEFINIȚIE**

- Fie $f, g \in K[X]$. Un polinom $m \in K[X]$ se numește un **cel mai mic multiplu comun** al polinoamelor f și g dacă:
 1. $f \mid m$ și $g \mid m$ (m este multiplu comun pentru f și g);
 2. oricare ar fi $m_1 \in K[X]$, multiplu comun pentru f și g rezultă $m \mid m_1$.

Pentru un cel mai mic multiplu comun al polinoamelor f și g se folosește notația $\text{c.m.m.m.c.}(f, g)$ sau $[f, g]$.

Dacă $f, g \in K[X]$ sunt polinoame nenule și m este un $\text{c.m.m.m.c.}(f, g)$, atunci oricare polinom $m_1 \sim m$ este un $\text{c.m.m.m.c.}(f, g)$.

Se va considera de regulă că polinomul $[f, g]$ este polinomul unitar.

Pentru determinarea $[f, g]$ se folosește relația:

$$f \cdot g = (f, g) \cdot [f, g]. \quad (1)$$

➔ **OBSERVAȚIE**

- Se poate defini c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru trei, patru sau mai multe polinoame.

Astfel: $(f, g, h) = ((f, g), h)$ și $[f, g, h] = [[f, g], h]$ etc.

Problemă rezolvată

- ☒ Să se determine $[f, g]$ pentru $f = X^4 - 3X^3 + X^2 - 3X + 4$ și $g = X^3 - 1$.

Soluție

Din relația (1), $f \cdot g = (f, g) \cdot [f, g]$, și având în vedere că $(f, g) = X - 1$ se obține $[f, g] = (X^4 - 3X^3 + X^2 - 3X + 4)(X^3 - 1) : (X - 1) =$
 $= (X^4 - 3X^3 + X^2 - 3X + 4)(X^2 + X + 1) = X^6 - 2X^5 - X^4 - 5X^3 + 2X^2 + X + 4.$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se arate că polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ se divide cu polinomul $g \in \mathbb{C}[X]$ și să se determine câtul împărțirii lui f la g :

a) $f = X^4 - X^3 + X^2 - X - 4$, $g = X + 1$;

b) $f = 2X^5 + X^4 - 3X^3 - 4X + 4$,
 $g = X - 1$;

c) $f = X^7 - X^4 - 3X + 3$, $g = (X - 1)^2$;

d) $f = (2X^2 + X + 2)^2 + (2X^2 - X + 2)^2 - 2X^2$, $g = X^2 + 1$;

e) $f = X^5 + (X - 1)^4$, $g = X^2 - X + 1$.

E2. Să se arate că polinomul $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ se divide cu polinomul $g \in \mathbb{Z}_p[X]$, în cazurile:

a) $f = X^4 + X^2 + \hat{1}$, $g = X^2 + X - \hat{2}$,
 $p = 3$;

b) $f = X^4 + \hat{3}X^2 + \hat{4}X - \hat{1}$, $g = X + \hat{3}$,
 $p = 5$;

c) $f = X^6 + X^5 - \hat{3}X^4 - \hat{4}X^3 + X^2 - \hat{2}X + \hat{2}$, $g = X^2 + X - \hat{3}$, $p = 5$.

E3. Să se determine c.m.m.d.c. al polinoamelor $f, g \in K[X]$:

a) $f = X^2 - 2X$, $g = X^3 - 2X - 4$,
 $K = \mathbb{C}$;

b) $f = X^6 - 1$, $g = X^3 + X^2 + X + 1$,
 $K = \mathbb{Q}$;

c) $f = X^4 + 4X^3 + 3X^2 - 4X - 4$,
 $g = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$, $K = \mathbb{R}$;

d) $f = X^4 - \hat{3}X^2 + \hat{2}$, $g = X^2 + \hat{4}$,
 $K = \mathbb{Z}_5$;

e) $f = X^6 + X^5 + \hat{2}X + \hat{2}$, $g = X^3 - X^2 + X + \hat{1}$, $K = \mathbb{Z}_3$.

E4. Să se determine parametrul $m \in K$ pentru care polinomul $f \in K[X]$ se divide cu polinomul $g \in K[X]$:

a) $f = X^3 + mX^2 + 4$, $g = X - 2$, $K = \mathbb{Q}$;

b) $f = X^4 + mX^3 + (m - 1)$, $g = 2X + 3$,
 $K = \mathbb{R}$;

c) $f = X^4 + X^3 + mX + m$, $g = X + \hat{2}$,
 $K = \mathbb{Z}_3$;

d) $f = X^4 + (m + \hat{1})X + \hat{3}m + \hat{3}$,
 $g = X - \hat{3}$, $K = \mathbb{Z}_5$.

E5. Să se determine c.m.m.m.c. pentru polinoamele $f, g \in K[X]$:

a) $f = X^2 - 1$, $g = X^2 - X$, $K = \mathbb{Q}$;

b) $f = X^2 + 1$, $g = X^2 - iX$, $K = \mathbb{C}$;

c) $f = X^4 + X^2 + 1$, $g = X^3 + X^2 + X$,
 $K \in \mathbb{R}$;

d) $f = X^2 + X + \hat{1}$, $g = X^4 + \hat{2}$, $K = \mathbb{Z}_3$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine $a, b \in K$ pentru care polinomul $f \in K[X]$ se divide cu polinomul $g \in K[X]$, în cazurile:

a) $f = \hat{2}X^2 + aX + \hat{2}$, $g = X + a$, $K = \mathbb{Z}_3$;

b) $f = X^4 + X^3 + aX + \hat{1}$, $g = \hat{2}X + \hat{1}$,
 $K = \mathbb{Z}_5$;

c) $f = X^4 + X^3 + aX^2 + X + b$,
 $g = X^2 + \hat{1}$, $K = \mathbb{Z}_3$;

d) $f = X^5 + X^3 + aX^2 + \hat{1}$, $g = X^2 + a$,
 $K = \mathbb{Z}_3$;

e) $f = X^4 + aX^2 + \hat{1}$, $g = X^2 + bX + \hat{1}$,
 $K = \mathbb{Z}_3$.

- A2. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^2 + 2X + m$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul $g \in \mathbb{R}[X]$, $g = f(X^2 + 2X)$ se divide cu f .
(Univ. Tehnică Cluj-Napoca, 2000)
- A3. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră polinoamele $f = X(X+1)^{2n+1} + (m-1)X^n \in \mathbb{R}[X]$, $g = X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Dacă $M = \{m \in \mathbb{R} \mid f \text{ divizibil cu } g\}$ și $S = \sum_{m \in M} m^2$, atunci:
a) $S = 1$; b) $S = 2$; c) $S = 3$;
d) $S = 4$; e) $S = 5$.
(ASE, București, 2005)
- A4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 3mX^2 + 4(m^2 + 1)X - m^3 - 5$ se divide cu $g = X - 1 \in \mathbb{R}[X]$.
- A5. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{C}$, astfel încât polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ să se dividă cu $g \in \mathbb{C}[X]$:
a) $f = X^4 - 3X^3 + bX^2 + aX + b$,
 $g = X^2 - 1$;
b) $f = aX^3 + bX^2 - 73X + 102$,
 $g = X^2 - 5X + 6$;
c) $f = aX^3 + bX^2 - 37X + 14$,
 $g = X^2 + X - 2$;
d) $f = X^4 + aX^3 + iX^2 + b$, $g = X^2 - i$;
e) $f = X^4 + aX^3 - bX^2 - cX + 8$,
 $g = (X-1)(X^2 - bX + 8)$;
f) $f = X^5 - aX^4 - 2X^3 - bX^2 - 3X + c$, $g = X^3 + 1$.
- A6. Să se determine polinoamele $f \in \mathbb{C}[X]$ de gradul 3, știind că se divid cu $X+1$, iar la împărțirea cu $X-2$, $X-3$, $X-4$ resturile sunt egale.
- A7. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $g = 3aX^2 + 2bX + c$, $a \in \mathbb{R}_+^*$. Să se demonstreze că dacă polinomul f se divide cu g , atunci f și g sunt puteri ale unui polinom de grad 1.
- A8. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 4X^2 + X + m$, $g = X^3 - 7X + m$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că (f, g) este polinom de gradul 1.
- A9. Se dau polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 - X^2 + ax + b$, $g = X^3 + X^2 + X + 1$. Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$ pentru care polinomul (f, g) are gradul 2 și să se afle apoi $[f, g]$.
- A10. Fie $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + X^2 + a$, $g = X^3 + X + \hat{2}$. Să se determine:
a) valorile lui $a \in \mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul (f, g) are gradul 1;
b) c.m.m.m.c. (f, g) pentru „a” determinat.
- A11. Să se arate că polinomul $f = (1 + X + X^2 + \dots + X^n)^2 - X^n \in \mathbb{Q}[X]$ se divide cu $g = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} \in \mathbb{Q}[X]$.
- A12. Să se arate că polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ se divide cu $g \in \mathbb{C}[X]$, în cazurile:
a) $f = (X^2 + X + 1)^{4n+1} + (X^2 - X + 1)^{4n+1}$, $g = X^2 + 1$;

$$\text{b) } f = (X - 1)^{n+2} + X^{2n+1},$$

$$g = X^2 - X + 1;$$

$$\text{c) } f = (X - 1)^{2n+1} - (-X)^{n+2},$$

$$g = X^2 - X + 1;$$

$$\text{d) } f = (X + 1)^{3n+2} + X + 2,$$

$$g = X^2 + 3X + 3.$$

A13. Se consideră polinomul $f = X^m + (X - 1)^m + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Pentru ce valori $m \in \mathbb{N}^*$ polinomul f este divizibil cu $g = X^2 - X + 1 \in \mathbb{R}[X]$?

A14. Să se determine $a, b \in \mathbb{C}$ și produsul polinoamelor $f, g \in \mathbb{C}[X]$ știind că $(f, g) = X^2 + 2X$ și $[f, g] = X^4 + aX^3 + 8X + b$.

A15. Pentru care valori ale lui $n \in \mathbb{N}^*$ polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = X + i$, $g = 1 + X + X^2 + \dots + X^n$ sunt prime între ele?

A16. Să se determine $f, g \in \mathbb{R}[X]$, știind că $f(-1) = 3$, $g(0) = 1$ și $(f, g) = X^2 + 1$, $[f, g] = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$.

5 Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili

5.1. Rădăcini ale polinoamelor

Fie $f \in K[X]$ un polinom nenul.

❖ DEFINIȚIE

• Elementul $\alpha \in K$ se numește **rădăcină** a polinomului $f \in K[X]$ dacă $f(\alpha) = 0$.

🔍 Exemple

- Polinomul de gradul 1, $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = aX + b$, are rădăcina reprezentată de numărul complex $\alpha = -\frac{b}{a}$.
- Pentru polinomul de gradul 2, $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = aX^2 + bX + c$, rădăcinile sunt date de formulele: $\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, dacă $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, respectiv $\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, dacă $\Delta < 0$.

Următoarea teoremă pune în evidență o legătură între rădăcinile unui polinom $f \in K[X]$ și divizibilitatea polinoamelor pe mulțimea $K[X]$.

TEOREMA 9 (E. Bézout)

Fie $f, g \in K[X]$ și $\alpha \in K$. Atunci:

- a)** α este rădăcină a polinomului f dacă și numai dacă f se divide cu polinomul $X - \alpha \in K[X]$;
b) dacă f se divide cu polinomul nenul g și α este rădăcină a lui g , rezultă că α este rădăcină și a lui f .

Demonstrație

a) Fie $\alpha \in K$ și $X - \alpha \in K[X]$. Din teorema împărțirii cu rest rezultă că există h și $r \in K[X]$ astfel încât $f = h \cdot (X - \alpha) + r$, $r \in K$, (1).

Din teorema restului rezultă că $r = f(\alpha)$ și relația (1) se scrie $f = (X - \alpha) \cdot h + f(\alpha)$, (2).

Din relația (2) rezultă că dacă α este rădăcină pentru f , atunci $f(\alpha) = 0$ și $f = (X - \alpha) \cdot h$, deci f se divide cu $X - \alpha$.

Reciproc, dacă f se divide cu $X - \alpha$, din relația (2) se obține că $f(\alpha) = 0$.

b) Dacă f se divide cu g , atunci există $h \in K[X]$, astfel încât $f = g \cdot h$. Rezultă că $f(\alpha) = g(\alpha) \cdot h(\alpha) = 0$, deci α este rădăcină a polinomului f . ■



Etienne BÉZOUT
(1730-1843)
matematician francez

A stabilit unele rezultate importante în teoria ecuațiilor algebrice și teoria numerelor.

Problemă rezolvată

☒ Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 + 3X^2 + aX + b$, $g = X^2 - 3X + 2$. Să se determine $a, b \in \mathbb{C}$ pentru care polinomul f se divide cu g . Să se afle apoi rădăcinile lui f .

Soluție

Rădăcinile polinomului g sunt date de ecuația $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Se obține $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Se impun condițiile $f(2) = 0$ și $f(1) = 0$.

Rezultă sistemul
$$\begin{cases} a + b = -4 \\ 2a + b = -20 \end{cases} \text{ cu}$$

soluția
$$\begin{cases} a = -16 \\ b = 12 \end{cases}.$$

TEMĂ

Fie $f, g \in K[X]$, $f = X^4 + X^2 + aX + b$. Pentru ce valori ale lui $a, b \in K$, polinomul f se divide cu g , dacă:

- a) $g = X^2 - 1$, $K = \mathbb{Q}$;
 b) $g = X^2 - 1$, $K = \mathbb{Z}_3$;
 c) $g = X^2 + 1$, $K = \mathbb{C}$?

Se obține $f = X^3 + 3X^2 - 16X + 12 = (X^2 - 3X + 2)(X + 6)$, iar rădăcinile lui f sunt $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -6$.

5.2. Rădăcini multiple ale unui polinom

❖ DEFINIȚIE

• Fie $f \in K[X]$ un polinom nenul și $m \in \mathbb{N}^*$. Elementul $\alpha \in K$ se numește **rădăcină multiplă** de ordinul m dacă polinomul f se divide cu $(X - \alpha)^m$, dar nu se divide cu $(X - \alpha)^{m+1}$.

Numărul m se numește **ordinul de multiplicitate** al rădăcinii α .

Dacă $m = 1$ rădăcina α se numește rădăcină **simplă**. Dacă $m = 2, 3, \dots$ rădăcina α se numește rădăcină **dublă, triplă, ...**.

Așadar, dacă $\alpha \in K$ este rădăcină multiplă de ordinul m , polinomul f se poate scrie sub forma $f = (X - \alpha)^m \cdot g$, unde $g \in K[X]$ și $\tilde{g}(\alpha) \in K^*$.

Problemă rezolvată

☒ Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 + aX + b$. Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$, știind că $\alpha = 1$ este rădăcină dublă pentru f .

Soluția 1 (metoda coeficienților nedeterminați):

Deoarece $\alpha = 1$ este rădăcină dublă, polinomul f se divide cu $(X - \alpha)^2 = (X - 1)^2$.

Avem $f = (X - 1)^2(X + c) = X^3 + X^2(c - 2) + X(1 - 2c) + c = X^3 + aX + b$.

Folosind egalitatea polinoamelor prin identificarea coeficienților monoamelor asemenea, rezultă $c = 2$, $a = 1 - 2c$, $b = c$, deci $a = -3$, $b = 2$ și $f = (X - 1)^2(X + 2)$. Rădăcinile lui f sunt $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ și $\alpha_3 = -2$.

Soluția 2

Dacă $\alpha = 1$ este rădăcină dublă a polinomului f , atunci f se divide cu $(X - 1)^2$. Efectuăm prin schema lui Horner împărțirea polinomului f cu $X - 1$ și a câtului rezultat cu $X - 1$. Avem:

	1	0	a	b
$\alpha = 1$	1	1	$a + 1$	$a + b + 1 = r_1$
$\alpha = 1$	1	2	$a + 3 = r_2$	

Resturile sunt $r_1 = a + b + 1$ și $r_2 = a + 3$. Punând condițiile $r_1 = r_2 = 0$ se obține $a = -3$ și $b = 2$.

➤ OBSERVAȚIE

- Considerând funcția polinomială asociată lui f , $\alpha = 1$ este rădăcină dublă dacă $\tilde{f}(1) = 0$ și $\tilde{f}'(1) = 0$. Cu această observație se obține $\tilde{f}'(1) = 1 + a + b = 0$ și $\tilde{f}(1) = 3 + a = 0$, cu soluțiile $a = -3$, $b = 2$.

📌 TEMĂ

Pentru ce valori $a \in \mathbb{R}$ polinomul $f = X^3 + 3X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$ are rădăcină dublă $\alpha = -1$? Dar triplă?

5.3. Ecuații algebrice

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ și $f \in K[X]$ un polinom de gradul n , $n \in \mathbb{N}^*$.

❖ DEFINIȚIE

- O ecuație de forma $f(x) = 0$ se numește **ecuație algebrică de gradul n** cu coeficienți în K și necunoscuta x .

Dacă $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n \in K[X]$, ecuația algebrică de gradul n are forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$, (1).

Numerele $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ se numesc **coeficienții ecuației**, iar n se numește **gradul ecuației**.

Elementul $\alpha \in K$ cu proprietatea că $f(\alpha) = 0$ se numește **soluție** a ecuației.

În legătură cu ecuațiile algebrice sunt studiate câteva probleme importante:

1. existența soluțiilor în corpul K ;
2. numărul soluțiilor ecuației în corpul K ;
3. existența unor formule generale de rezolvare a ecuațiilor algebrice de diferite grade.

În cazul corpului $\mathbb{C}$ al numerelor complexe au fost demonstrate câteva proprietăți generale care rezolvă cele trei probleme puse.

☛ TEOREMA 10 (teorema fundamentală a algebrei)

O ecuație algebrică de grad cel puțin 1 cu coeficienți complecși admite cel puțin o soluție complexă.

Această teoremă a fost dată de către matematicienii C. Gauss și J. L. D'Alembert.

Problema 3 a fost rezolvată de matematicienii N. Abel și A. Ruffini.

☛ TEOREMA 11 (Abel-Ruffini)

Fie $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$ o ecuație algebrică de grad n , $n \geq 5$, cu coeficienți în $\mathbb{C}$. Atunci nu există o formulă generală de rezolvare a acestei ecuații în care să apară numai coeficienții $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.

☉ OBSERVAȚII

- Din teorema fundamentală a algebrei rezultă că o ecuație algebrică de gradul $n \in \mathbb{N}^*$ cu coeficienți complecși are exact n soluții complexe.
- Deoarece polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, de gradul $n \in \mathbb{N}^*$, are exact n rădăcini complexe, rezultă că el nu poate lua valoarea zero decât de n ori. Astfel, dacă polinomul se anulează de mai mult de n ori, atunci el este polinom nul.



Niels Henrik ABEL

(1802-1829)

matematician norvegian

A adus contribuții importante în teoria ecuațiilor algebrice, teoria calculului diferențial și integral.

Problemă rezolvată

- ☒ Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, cu proprietatea că $f(\alpha) = f(\alpha + 1)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$. Să se arate că f este polinom constant.

Soluție

Pentru $\alpha = 0, 1, 2, \dots$, se obține că $f(0) = f(1) = f(2) = \dots$.

Notăm $a = f(0) = f(1) = \dots$ valoarea comună și fie $g = f - a \in \mathbb{C}[X]$.

Atunci $0 = g(0) = g(1) = g(2) = \dots$, deci polinomul g are o infinitate de rădăcini. Rezultă că el este polinom nul și astfel $f = a \in \mathbb{C}$.

5.4. Polinoame ireductibile în $K[X]$

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ.

❖ DEFINIȚII

- Polinomul nenul $f \in K[X]$ se numește **reductibil peste corpul K** dacă există polinoamele $g, h \in K[X]$ de grad cel puțin 1, astfel încât $f = g \cdot h$.
- Un polinom $f \in K[X]$, $\text{grad}(f) \geq 1$, care nu este reductibil peste K , se numește **ireductibil peste K** .

➤ OBSERVAȚII

1. Orice polinom de gradul 1 din $K[X]$ este polinom ireductibil peste K .
2. Dacă un polinom $f \in K[X]$, de grad cel puțin 2, este ireductibil peste K , atunci el nu are rădăcini în K .
Într-adevăr, dacă f ar avea elementul $\alpha \in K$ rădăcină, atunci f se divide cu $X - \alpha$ și se poate scrie că $f = (X - \alpha) \cdot g$, deci f nu ar fi ireductibil.
3. Dacă polinomul $f \in K[X]$ are gradul 2 sau 3 și nu admite rădăcini în K , atunci el este polinom ireductibil peste K .
Într-adevăr, dacă f ar fi reductibil peste K , atunci el s-ar scrie sub forma $f = g \cdot h$, unde g sau h ar avea gradul 1. Dacă $g = aX + b$, atunci $g(-ba^{-1}) = 0$ și se contrazice ipoteza că f nu are rădăcini în K .

📖 Exemple

- Polinomul $f = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$. Dacă f ar fi reductibil peste $\mathbb{Q}$, atunci el ar avea o rădăcină $\alpha \in \mathbb{Q}$. Dar $f(\alpha) = 0$ conduce la $\alpha^2 = 2$, deci $\alpha \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ceea ce nu se poate.
- Polinomul $f = X^2 - 2 \in \mathbb{R}[X]$ este reductibil peste $\mathbb{R}$ deoarece $f = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$.
- Polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 - \hat{2}$ este reductibil peste $\mathbb{Z}_3$ deoarece $f(\hat{2}) = \hat{0}$ și $f = (X - \hat{2})^3$, dar este ireductibil peste $\mathbb{Z}_7$, deoarece $f(a) \neq \hat{0}, \forall a \in \mathbb{Z}_7$.

După cum s-a observat din exemplele anterioare, descompunerea în factori ireductibili depinde de corpul K în care polinomul are coeficienții.

Cazul $K = \mathbb{C}$

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinom nenul de grad n , $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $n \geq 2$, din teorema fundamentală a algebrei rezultă că f are cel puțin o rădăcină $\alpha \in \mathbb{C}$, iar din teorema lui Bezout se obține că f se divide cu polinomul $g = X - \alpha \in \mathbb{C}[X]$. Așadar, f nu este ireductibil pentru $n \geq 2$.

În concluzie, un polinom nenul $f \in \mathbb{C}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{C}$ dacă și numai dacă are gradul 1.

Cazul $K = \mathbb{R}$

Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$ este un polinom nenul, el este ireductibil numai în următoarele două cazuri:

- f are gradul 1;
- f are gradul 2 și nu are rădăcini reale.

Rezultă că orice polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ de grad n , $n \geq 3$, este polinom reductibil peste $\mathbb{R}$, deci el se poate scrie ca produs de polinoame de grad cel puțin 1.

Cazul $K = \mathbb{Q}$ și $K = \mathbb{Z}_p$, p prim

În inelele de polinoame $\mathbb{Q}[X]$ și $\mathbb{Z}_p[X]$ există polinoame ireductibile de orice grad n , $n \in \mathbb{N}^*$. De exemplu $f = X^n - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.

5.5. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili

TEOREMA 12

Fie K un corp comutativ și $f \in K[X]$ un polinom de grad $n \in \mathbb{N}^*$.

Au loc următoarele rezultate:

- a)** Polinomul f se descompune într-un produs finit de polinoame ireductibile peste K .
- b)** Dacă $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_m = g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_k$ sunt două descompuneri în produs de polinoame ireductibile ale lui f , atunci $m = k$ și există o permutare $\sigma \in S_m$ cu proprietatea că $f_i \sim g_{\sigma(i)}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Demonstrație

a) Folosim inducția matematică.

Dacă $n = 1$, atunci f este ireductibil peste K și afirmația este adevărată.

Presupunem că $n > 1$ și că afirmația este adevărată pentru polinoame de grad mai mic decât n . Dacă f este ireductibil peste K , atunci demonstrația este încheiată. În caz contrar, există $g, h \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot h$ și $\text{grad}(g) < n$, $\text{grad}(h) < n$. Din ipoteza de inducție, polinoamele g și h se scriu ca produs finit de polinoame ireductibile peste K , deci $f = g \cdot h$ este produs de polinoame ireductibile peste K .

b) Demonstrația rămâne temă. ■

Teorema anterioară demonstrează numai existența și unicitatea descompunerii în produs de polinoame ireductibile, dar nu oferă și o modalitate concretă de găsire a acesteia.

În cazul inelului $\mathbb{C}[X]$ există o legătură directă între descompunerea în factori ireductibili și rădăcinile polinomului.

☛ TEOREMA 13

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ un polinom de grad n , $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului, atunci:

$$f = a_n (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n).$$

b) Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile distincte ale polinomului f , cu multiplicitățile $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$f = a_n (X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_k)^{m_k}.$$

Demonstrație

a) Dacă $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ este rădăcină a lui f , atunci f se divide cu $X - \alpha_1$, deci există $g \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $f = (X - \alpha_1)g$.

Deoarece α_2 este rădăcină a polinomului f , se observă ușor că trebuie să fie rădăcină pentru g . Așadar g se divide cu $X - \alpha_2$.

Rezultă că există $g_1 \in \mathbb{C}[X]$ cu proprietatea că $g = (X - \alpha_2)g_1$, iar $f = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)g_1$.

Se continuă raționamentul pentru α_3 și g_1 , α_4 și g_2 etc., și se obține în final descompunerea dorită.

b) Demonstrația rămâne temă. ■

Dacă $f \in \mathbb{D}[X]$, atunci f poate fi privit și ca element al inelului $\mathbb{C}[X]$, deci el va avea rădăcinile complexe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ rădăcinile reale ale lui f . Atunci f se divide în $\mathbb{R}[X]$ cu polinomul $g = (X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_k)^{m_k}$, unde $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$ sunt multiplicitățile rădăcinilor $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Rezultă că f se scrie sub forma $f = g \cdot h$, unde $h \in \mathbb{R}[X]$ și h nu are rădăcini reale, ci numai rădăcini $z_k = a_k + b_k i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dar, se observă ușor că dacă $h(z_k) = 0$, atunci și $h(\overline{z_k}) = 0$ și astfel polinomul h se divide cu $h_k = (X - z_k)(X - \overline{z_k}) = X^2 - 2a_k X + a_k^2 + b_k^2 \in \mathbb{R}[X]$.

În concluzie, polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ va avea următoarea descompunere în polinoame ireductibile:

$$f = a_n (X - \alpha_1)^{m_1} \dots (X - \alpha_k)^{m_k} (X^2 + a_1 X + b_1)^{n_1} \dots (X^2 + a_p X + b_p)^{n_p},$$

unde $m_1, m_2, \dots, m_k, n_1, n_2, \dots, n_p \in \mathbb{N}^*$ și $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ sunt rădăcinile reale ale lui f , iar polinoamele $X^2 + a_s X + b_s$, $s = \{1, 2, \dots, p\}$ nu au rădăcini reale.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se descompună în factori ireductibili peste corpurile $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, polinoamele:

a) $f = X^4 + X^2 + 1$;

b) $f = X^5 + X^4 - X^3 - X^2 - 2X - 2$.

Soluție

a) Avem $f = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$.

Aceasta este descompunerea lui f în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}$.

Peste corpul $\mathbb{C}$ f are descompunerea $f = (X - \varepsilon)(X - \varepsilon^2)(X - \varepsilon_1)(X - \varepsilon_2)$,

unde ε este o rădăcină a polinomului $X^2 + X + 1$, iar $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sunt rădăcinile polinomului $X^2 - X + 1$.

b) Se observă că $f(-1) = 0$, deci f se divide cu $X + 1$.

Folosind schema lui Horner se obține:

$$f = (X + 1)(X^4 - X^2 - 2) = (X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - 2).$$

Rezultă că f are următoarele descompuneri:

- $f = (X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - 2)$ peste $\mathbb{Q}$;

- $f = (X + 1)(X^2 + 1)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ peste $\mathbb{R}$;

- $f = (X + 1)(X - i)(X + i)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ peste $\mathbb{C}$.

- ☒ **2.** Să se determine c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru polinoamele:
 $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = (X-1)(X^2-1)(X+2)^2$, $g = (X^2-3X+2)(X^2-4)$.

Soluție

Vom descompune în factori ireductibili cele două polinoame.

$$\text{Avem } f = (X-1)^2(X+1)(X+2)^2 \text{ și } g = (X-1)(X-2)(X-2)(X+2) = (X-1)(X-2)^2(X+2).$$

Folosind descompunerile în factori ireductibili se obține:

$(f, g) = (X-1)(X+2)$ (se aleg factorii ireductibili comuni la puterea cea mai mică), iar $[f, g] = (X-1)^2(X+1)(X-2)^2(X+2)^2$ (se aleg factorii comuni și necomuni la puterea cea mai mare).

REȚINEM!

Dacă polinoamele $f, g \in K[X]$ sunt descompuse în produse de factori ireductibili, atunci:

- (f, g) este produsul factorilor ireductibili comuni, luați la puterea cea mai mică;
- $[f, g]$ este produsul factorilor ireductibili comuni sau necomuni, luați la puterea cea mai mare.

EXERCIIII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se determine care dintre elementele specificate sunt rădăcini ale polinomului f :

- a) $f = X^3 - 3X^2 + 2 \in \mathbb{C}[X]$,
 $\alpha \in \{1, i, 1 + \sqrt{3}\}$;
 b) $f = X^5 - X^4 + X^3 + X^2 - X + 1 \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha \in \left\{-1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$;
 c) $f = X^6 + \hat{6} \in \mathbb{Z}_7[X]$,
 $\alpha \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}\}$.

E2. Să se determine pentru polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ rădăcinile și ordinul de multiplicitate al acestora:

- a) $f = X^2(X-1)^3(2X-1)^4$;

b) $f = X^2(X^2 - X)^3(X^2 - 1)^2$;

c) $f = (X^2 - X - 2)^2(2X^2 - 3X + 1)^3 \cdot (X^2 - 1)^2$.

E3. Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_p$ astfel încât polinomul $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ să admită rădăcinile indicate și să se afle apoi celelalte rădăcini ale lui f :

- a) $f = X^3 + X^2 + a$, $p = 3$, $\alpha = \hat{2}$;
 b) $f = X^4 + aX^2 + \hat{1}$, $p = 5$, $\alpha = \hat{3}$;
 c) $f = X^4 + \hat{2}X^2 + aX + b$, $p = 3$,
 $\alpha \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$.

E4. Să se arate că polinomul $f \in K[X]$ admite rădăcina dublă indicată și apoi să se afle celelalte rădăcini ale lui f :

- a) $f = X^3 - 3X + 2$, $K = \mathbb{Q}$, $\alpha = 1$;
- b) $f = X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4$, $K = \mathbb{Q}$, $\alpha = 2$;
- c) $f = X^4 - 2iX^3 - 5X^2 + 8iX + 4$, $K = \mathbb{C}$, $\alpha = i$;
- d) $f = X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 4$, $K = \mathbb{Z}_5$, $\alpha = \hat{2}$.

E5. Să se descompună în factori ireductibili polinoamele:

- a) $f = X^4 - 3X^3 + 2X^2 \in \mathbb{R}[X]$;
- b) $f = X^6 - 1 \in \mathbb{C}[X]$;
- c) $f = X^5 - X \in \mathbb{C}[X]$;
- d) $f = X^4 + 3X^2 + 4 \in \mathbb{C}[X]$;
- e) $f = X^2 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$;

$$f) f = X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{2} \in \mathbb{Z}_7[X];$$

$$g) f = X^3 + X^2 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X].$$

E6. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 + (m+n)X^3 - X^2 + mX + n - 1$. Să se determine rădăcinile polinomului f , știind că $\alpha_1 = -1$ și $\alpha_2 = -2$ sunt rădăcini ale acestuia.

E7. Să se determine c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al polinoamelor:

- a) $f = (X-1)^3(X+1)^4(X-2)(X+3)$,
 $g = (X^2-1)^2(X+1)^5(X^2-4)$,
 $f, g \in \mathbb{Q}[X]$;
- b) $f = (X-i)^3(X+i)^2(X+1)^2$,
 $g = (X^2+1)^2(X^2-1)$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$;
- c) $f = X^6 - 1$, $g = X^9 - 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine rădăcinile polinomului f în condițiile date:

- a) $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (2 + \sqrt{3})X^3 + 3X^2 + (1 + 2\sqrt{3})X + 3\sqrt{3}$, știind că are o rădăcină rațională;
- b) $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = 2X^3 + (i+5)X^2 - 2iX + 3(-1-i)$, știind că are o rădăcină reală;
- c) $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (1+2i)X^2 + (2m-i)X - (3+mi)$, dacă $m \in \mathbb{R}$ și f are o rădăcină reală;
- d) $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 + (3+i)X^2 - 3X - m - i$, dacă $m \in \mathbb{R}$ și f are o rădăcină reală.

A2. Să se determine $a \in \mathbb{C}$, știind că polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ admite rădăcini reale duble:

- a) $f = (X-1)(X+2)(X-a)$;

$$b) f = (X+1)(X-3)(X-a)(X-6a);$$

$$c) f = (X^2-1)^2 - (X^2+a)^2.$$

A3. Să se rezolve ecuațiile în $\mathbb{C}$, știind că au soluțiile indicate:

- a) $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$, $x_1 = 2$;
- b) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$,
 $x_1 = i$, $x_2 = -i$;
- c) $z^4 - 3z^3 + z^2 + 4 = 0$, $z_1 = 2$ soluție dublă;
- d) $z^5 - z^4 - 4z^2 + 7z - 3 = 0$, $z_1 = 1$ soluție triplă.

A4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 - mX^3 + X^2 + m + 1$ are rădăcină dublă $\alpha = 2$. Să se afle apoi celelalte rădăcini ale polinomului.

- A5. Să se afle rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^5 - X^4 + aX^3 + bX + c$, știind că are rădăcina triplă $\alpha = 1$.
- A6. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ are rădăcină reală dublă:
- $f = X^3 - 5X^2 + 8X + a$;
 - $f = X^3 - 2X^2 + aX + 8$;
 - $f = X^3 + aX^2 + 7X - 3$.
- A7. Să se determine parametrii reali, știind că polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ are o rădăcină triplă. Să se descompună apoi în factori ireductibili polinomul f :
- $f = X^3 - 6X^2 + aX + b$;
 - $f = X^3 + aX^2 + 3X + b$;
 - $f = X^4 - 5X^3 + 9X^2 + bX + a$.
- A8. Să se determine $a \in \mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + aX^2 + (a + 2)X + a$ are trei rădăcini în $\mathbb{Z}_3$.
- A9. Se consideră polinomul $f = X^{2n} - 4X^{n+1} + 5X^n - 4X + 4 \in \mathbb{R}[X]$. Dacă $\alpha = 2$ este rădăcină a lui f , să se determine ordinul său de multiplicitate.
- A10. Să se determine $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ de gradul 4, știind că $x = \hat{2}$ este rădăcină triplă în cazurile $p \in \{2, 3\}$.
- A11. Să se determine polinoamele ireductibile $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = aX^3 + bX + \hat{2}$.
- A12. Să se determine polinoamele de gradul 4 ireductibile în $\mathbb{Z}_2[X]$.
- A13. Să se afle valoarea parametrului „a” pentru care polinomul $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ este ireductibil:
- $f = \hat{2}X^3 + (a + \hat{2})X + \hat{1}$, $p = 3$;
 - $f = X^6 + aX + \hat{5}$, $p = 7$;
 - $f = X^4 + aX^2 + (a + \hat{1})X + \hat{2}$, $p = 5$.
- A14. Să se descompună în factori ireductibili polinoamele:
- $f = X^8 + X^4 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$;
 - $f = X^8 - \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$;
 - $f = X^9 - \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$.
- A15. Fie $f = X^3 + bX^2 + cX + a \in \mathbb{Q}[X]$, astfel încât $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și $ab + ac$ este număr impar. Să se arate că f este ireductibil peste $\mathbb{Z}$.
- A16. Să se arate că polinomul $f = (X - 1) \cdot (X - 2) \cdot (X - 3) - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ este polinom ireductibil peste $\mathbb{Z}$.
- A17. Fie p număr prim. Să se descompună în factori ireductibili polinomul $f = X^p + \hat{1} \in \mathbb{Z}_p[X]$.
- A18. Să se arate că $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = (X - 1)^2 \cdot (X - 2)^2 \cdot \dots \cdot (X - n)^n + 1$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}$.
- A19. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $\tilde{f}(1) + \tilde{f}(2) + \dots + \tilde{f}(n) = n^3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine rădăcinile polinomului f și să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$.
- A20. Să se determine $f \in \mathbb{R}[X]$ și să se descompună în factori, știind că:
- $$(x + 3)\tilde{f}(x) = (x - 1)\tilde{f}(x + 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

A21. Fie $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^4 + mX^3 + \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{1}$. Dacă $A = \{m \in \mathbb{Z}_5 \mid f \text{ are două rădăcini distincte în } \mathbb{Z}_5\}$ și $B = \{m \in \mathbb{Z}_5 \mid g = f + \hat{3}X + \hat{4} \text{ are rădăcină triplă în } \mathbb{Z}_5\}$, atunci:

i) a) $A \subset \{\hat{0}, \hat{1}\}$; b) $A \subset \{\hat{1}, \hat{4}\}$;

c) $A \subset \{\hat{1}, \hat{2}\}$; d) $A \subset \{\hat{2}, \hat{3}\}$;

e) $A \subset \{\hat{0}, \hat{3}\}$.

ii) a) $B = \{\hat{1}\}$; b) $B = \{\hat{1}, \hat{4}\}$;

c) $B = \{\hat{2}, \hat{3}\}$; d) $B = \{\hat{1}, \hat{2}\}$;

e) $B = \{\hat{4}\}$.

(ASE, iulie, 2000)

6

Relațiile lui Viète

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_0X^2 + a_1X + a_2$ un polinom de gradul al doilea. Dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f , atunci acesta are descompunerea în factori ireductibili:

$$f = a_0(X - z_1)(X - z_2), \quad (1).$$

Efectuând produsul în relația (1) obținem că:

$$f = a_0X^2 - a_0(z_1 + z_2)X + a_0z_1z_2, \quad (2).$$

Din identificarea celor două exprimări ale polinomului f obținem relațiile între rădăcinile și coeficienții acestuia:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{a_1}{a_0} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{a_2}{a_0} \end{cases}, \quad \text{(relațiile lui Viète pentru polinomul de gradul 2)}$$

În mod analog, pentru un polinom de gradul trei, $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3$, avem descompunerea în factori ireductibili $f = a_0(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$, unde $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului.

Din egalitatea $a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3 = a_0(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$ se obține că $a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3 = a_0X^3 - a_0(z_1 + z_2 + z_3)X^2 + a_0(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)X - a_0z_1z_2z_3$, (3).

Din identificarea coeficienților se obțin relațiile:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{a_1}{a_0} \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \frac{a_2}{a_0}, \text{ numite } \mathbf{relațiile} \\ z_1z_2z_3 = -\frac{a_3}{a_0} \end{cases}$$

lui Viète pentru polinomul de gradul 3.

Mai general, procedând în mod analog pentru un polinom $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n$, $a_0 \in \mathbb{C}^*$, cu rădăcinile $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, se obțin relațiile lui Viète:

$$(S) \begin{cases} s_1 = z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_1}{a_0} \\ s_2 = z_1z_2 + z_1z_3 + \dots + z_1z_n + z_2z_3 + \dots + z_{n-1}z_n = \frac{a_2}{a_0} \\ \dots \dots \dots \\ s_k = z_1z_2 \dots z_k + z_1z_3 \dots z_{k+1} + \dots + z_{n-k+1} \dots z_{n-1} \cdot z_n = (-1)^k \frac{a_k}{a_0} \\ \dots \dots \dots \\ s_n = z_1z_2 \dots z_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

După cum se observă, suma s_k este suma tuturor produselor a k dintre rădăcinile polinomului f . Rezultă că suma s_k are C_n^k termeni.

➤ OBSERVAȚII

1. Pentru ecuația algebrică $\tilde{f}(x) = 0$ soluțiile $z_1, z_2, \dots, z_n$ sunt rădăcinile polinomului f și, astfel, ele verifică același sistem de relații ale lui Viète.
2. Relațiile lui Viète se pot scrie pentru un polinom $f \in K[X]$, de gradul n , $n \in \mathbb{N}^*$, care are toate cele n rădăcini $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ în corpul K . În caz contrar, nu se pot scrie relațiile lui Viète.
Astfel, polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^n - 2$, $n \geq 2$, nu are nici o rădăcină în $\mathbb{Q}$, deci nu putem scrie sistemul (S) de relații ale lui Viète.



François VIÈTE
(1540-1603)
matematician francez

Este unul dintre creatorii algebrei având rezultate importante în domeniul trigonometriei și geometriei analitice.

Aplicații ale relațiilor lui Viète

1. Relațiile lui Viète se dovedesc utile în aflarea rădăcinilor unui polinom $f \in \mathbb{C}[X]$, în cazul când aceste rădăcini verifică relații suplimentare.

Problemă rezolvată

☒ Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $z^3 - z^2 - z - 2 = 0$, știind că două dintre soluțiile sale verifică relația $z_1 + z_2 = -1$.

Soluție

Din prima relație a lui Viète, $z_1 + z_2 + z_3 = 1$, se obține $z_3 = 1 - z_1 - z_2 = 1 - (-1) = 2$. Considerând polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 - X^2 - X - 2$, care are rădăcina 2, obținem cu ajutorul schemei lui Horner, descompunerea:

$$f = (X - 2)(X^2 + X + 1).$$

Rezultă că ecuația algebrică atașată se scrie sub forma:

$$(z - 2)(z^2 + z + 1) = 0 \text{ și are soluțiile } z_3 = 2, z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

2. Dacă sunt cunoscute soluțiile unei ecuații algebrice de gradul $n \in \mathbb{N}^*$, $z_1, z_2, \dots, z_n$, atunci se cunosc sumele $s_1, s_2, \dots, s_n$ și ecuația se poate scrie sub forma:

$$z^n - s_1 z^{n-1} + s_2 z^{n-2} - \dots + (-1)^n s_n = 0, (1).$$

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se scrie ecuația de gradul 3 cu coeficienți complecși, care are soluțiile $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = 1 - i$.

Soluție

Avem $s_1 = z_1 + z_2 + z_3 = 2$, $s_2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = 2 + i$, $s_3 = z_1 z_2 z_3 = 1 + i$. Având în vedere relația (1), obținem ecuația:

$$z^3 - 2z^2 + (2 + i)z - (1 + i) = 0.$$

☒ **2.** Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Să se scrie polinomul unitar de gradul 3 care are rădăcinile:

$$y_1 = 1 + x_1, y_2 = 1 + x_2, y_3 = 1 + x_3.$$

Soluția 1

Polinomul căutat este $g = X^3 - s_1' X^2 + s_2' X - s_3'$, unde:

$$s_1' = y_1 + y_2 + y_3 = 3 + (x_1 + x_2 + x_3) = 3 + s_1$$

$$s_2' = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = (1+x_1)(1+x_2) + (1+x_1)(1+x_3) + (1+x_2) \cdot (1+x_3) = 3 + 2(x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3 + 2s_1 + s_2$$

$$s_3' = y_1y_2y_3 = (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) = 1 + (x_1 + x_2 + x_3) + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + x_1x_2x_3 = 1 + s_1 + s_2 + s_3, \text{ unde } s_1, s_2, s_3 \text{ sunt date de relațiile lui Viète pentru polinomul } f.$$

Rezultă $s_1 = 0, s_2 = 1, s_3 = -1$ și se obține $s_1' = 3, s_2' = 4, s_3' = 1$.

Polinomul căutat este $g = X^3 - 3X^2 + 4X - 1$.

Soluția 2

Din relațiile date se obține:

$$x_1 = y_1 - 1, x_2 = y_2 - 1, x_3 = y_3 - 1.$$

Cu substituția $x = y - 1$, ecuația $f(x) = 0$ atașată polinomului f se transformă astfel: $(y-1)^3 + (y-1) + 1 = 0$, care adusă la forma cea mai simplă devine: $y^3 - 3y^2 + 4y - 1 = 0$. Rezultă că polinomul g care are atașată această ecuație este $g = X^3 - 3X^2 + 4X - 1$.

☒ **3.** Să se rezolve în $\mathbb{C}$ sistemele de ecuații:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3; \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3, \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}, a, b, c \in \mathbb{C} \text{ distincte.}$$

Soluție

a) Considerăm numerele $x, y, z \in \mathbb{C}$ ca rădăcini ale unui polinom f de gradul 3. Rezultă că $f = X^3 - s_1X^2 + s_2X - s_3$, unde $s_1 = x + y + z = 1$, $s_2 = xy + yz + zx$ și $s_3 = xyz$.

Din relația $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$ se obține că $3 = 1 - 2s_2$, adică $s_2 = -1$.

Deoarece x, y, z sunt rădăcini ale polinomului f , obținem:

$$x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3 = 0$$

$$y^3 - s_1y^2 + s_2y - s_3 = 0.$$

$$z^3 - s_1z^2 + s_2z - s_3 = 0$$

Prin adunarea acestor egalități se obține:

$$x^3 + y^3 + z^3 - s_1(x^2 + y^2 + z^2) + s_2(x + y + z) - 3s_3 = 0.$$

Având în vedere sistemul dat rezultă că $s_3 = -1$.

Așadar, $f = X^3 - X^2 - X + 1 = X^2(X-1) - (X-1) = (X-1)(X^2-1)$ și are rădăcinile $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$.

Obținem că $x = 1, y = 1, z = -1$ sau $x = 1, y = -1, z = 1$ sau $x = -1, y = 1, z = 1$.

b) Considerăm polinomul $f \in \mathbb{C}[X], f = X^3 - zX^2 - yX - x$.

Avem $f(a) = 0, f(b) = 0, f(c) = 0$, deci a, b, c sunt rădăcinile polinomului f . Din relațiile lui Viète pentru f , obținem:

$a + b + c = z, ab + bc + ac = -y, abc = x$ și astfel sistemul are soluția $x = abc, y = -(ab + bc + ac), z = a + b + c$.

EXERCIIII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se scrie relațiile lui Viète pentru polinoamele $f \in \mathbb{C}[X]$:

- a) $f = X^3 - 3X^2 + 4X - 10$;
- b) $f = X^4 - 3X + 1$;
- c) $f = X^5 - 1$;
- d) $f = 3X^5 - X^4 + 2$;
- e) $f = (X-1)(X-2)(X-3)$;
- d) $f = (X^2 - X + 1)(X + 2)$.

E2. Să se arate că polinomul $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ are toate rădăcinile în $\mathbb{Z}_p$ și să se scrie relațiile lui Viète pentru acesta:

- a) $f = X^4 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$;
- b) $f = X^3 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$;
- c) $f = X^5 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_5[X]$;
- d) $f = X^3 - X^2 + X + \hat{4} \in \mathbb{Z}_5[X]$.

E3. Să se determine rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{C}[X]$, știind că are loc relația specificată:

- a) $f = 3X^3 + 7X^2 - 18X + 8, z_1 + z_2 = -3$;

$$b) f = 5X^3 - 27X^2 + 7X + 15,$$

$$z_1 \cdot z_2 = 5;$$

$$c) f = X^3 - 7X^2 + 4X + 12, z_1 = 3z_2;$$

$$d) f = X^3 - 10X^2 + 27X - 18, z_3 = 2z_1z_2;$$

$$e) f = X^4 - X^2 + 12X - 36, z_1z_2 + z_3z_4 = 0.$$

E4. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$,

$f = X^3 - 3X^2 + X + 3$ și $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale. Să se calculeze:

$$a) z_1^2 + z_2^2 + z_3^2; \quad b) z_1^3 + z_2^3 + z_3^3;$$

$$c) \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}; \quad d) \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2};$$

$$e) \frac{z_1}{1+z_1} + \frac{z_2}{1+z_2} + \frac{z_3}{1+z_3}.$$

E5. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile știind că au loc relațiile date:

$$a) z^3 - 6z^2 - az + 12 = 0, z_1 + z_2 = z_3;$$

$$b) z^3 - 11z^2 + az - 36 = 0, z_1 = z_2z_3;$$

$$c) z^3 - 12z^2 + az - 60 = 0, z_1 + z_2 = 2z_3.$$

E6. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$,

$f = 1 + X - 2X^2 + X^3$ cu rădăcinile z_1, z_2, z_3 . Să se formeze polinoamele care au rădăcinile:

a) $y_1 = 1 - z_1, y_2 = 1 - z_2, y_3 = 1 - z_3$;

b) $y_1 = z_2 + z_3, y_2 = z_1 + z_3, y_3 = z_1 + z_2$;

c) $y_1 = z_2 z_3, y_2 = z_1 z_3, y_3 = z_1 z_2$;

d) $y_1 = \frac{1}{z_1}, y_2 = \frac{1}{z_2}, y_3 = \frac{1}{z_3}$.

E7. Fie $f \in \mathbb{Z}_3[X], f = X^4 + X^2 + \hat{1}$. Dacă

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{Z}_3$ sunt rădăcinile polinomului f , să se calculeze:

a) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2$;

b) $\alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1} + \alpha_3^{-1} + \alpha_4^{-1}$;

c) $\alpha_1^5 + \alpha_2^5 + \alpha_3^5 + \alpha_4^5$;

d) $\alpha_1^n + \alpha_2^n + \alpha_3^n + \alpha_4^n, n \in \mathbb{N}^*$.

E8. Se consideră ecuația $x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = 0$ în $\mathbb{C}$, cu soluțiile $x_1, x_2,$

$x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ și $S = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} +$

$+\frac{1}{1+x_3} + \frac{1}{1+x_4}$. Atunci:

a) $S = 2$; b) $S = -2$;

c) $S = 0$; d) $S = 1$.

(Univ. Transilvania, Brașov, 2000)

APROFUNDARE

A1. Dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului

$f = X^3 - 2X^2 + 2X + 17 \in$

$\in \mathbb{C}[X]$ și $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, atunci:

a) $\Delta = 0$; b) $\Delta = 4$;

c) $\Delta = 1$; d) $\Delta = 2$.

(Univ. Transilvania, Brașov, 2000)

A2. Să se determine rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{C}[X]$, știind că rădăcinile sale verifică relația dată:

a) $f = X^3 + mX^2 - 4X + 4, z_1 + z_2 = 0$;

b) $f = X^3 + 2X^2 + aX + 2, z_1 + z_2 = -3$;

c) $f = X^3 - 2X^2 + aX + 6, z_1 z_2 = 3$;

d) $f = X^3 - 3X^2 - 4X + a, 2z_1 = 3z_2$;

e) $f = X^3 - (a+2)X^2 + (2a+1)X - a,$

$\frac{3}{z_1} = \frac{2}{z_2} + \frac{2}{z_3}$;

f) $f = X^4 - 3X^3 + 12X + a, z_1 z_2 = z_3 z_4$.

A3. Să se rezolve ecuațiile în $\mathbb{C}$, știind că au soluțiile în progresie aritmetică, pentru $m \in \mathbb{R}$:

a) $x^3 - 6x^2 + mx - 2 = 0$;

b) $z^3 - 3mz^2 + 6z - 4 = 0$;

c) $z^4 - 10z^3 + mz^2 - 50z + 24 = 0$;

d) $z^5 - 20z^4 + az^2 + bz + c = 0$.

A4. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{C}$ ecuațiile de mai jos știind că au soluțiile în progresie geometrică, pentru $m \in \mathbb{R}$:

a) $x^3 - mx^2 - 6x + 27 = 0$;

b) $8x^4 - 30x^3 + 35x^2 + mx + 2 = 0$;

c) $x^4 - 14x^3 + 56x + m = 0$.

A5. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$,

$f = aX^3 + bX^2 + cX + d$, astfel încât $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ sunt în progresie geometrică cu rația $q \in (0, +\infty)$.

Să se calculeze $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.

A6. Fie $f = X^3 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, atunci:

$$x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

A7. Se consideră polinomul $f = X^3 - mX^2 + aX + m \in \mathbb{C}[X]$. Să se determine $a, m \in \mathbb{R}$, știind că rădăcinile lui f verifică relația $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = m^3$.

A8. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemele:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6; \\ xyz = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6; \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3. \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3 \end{cases}$$



Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Teorema lui Abel-Ruffini afirmă că pentru ecuația algebrică de grad n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, nu există formule generale de rezolvare. Aceasta face ca rezolvarea unor astfel de ecuații să fie dificilă în lipsa unor informații suplimentare asupra ecuației.

De asemenea, corpul în care ecuația are coeficienți poate conduce la obținerea unor soluții particulare și astfel, rezolvarea ecuației să fie redusă la ecuații algebrice de grad inferior.

7.1. Ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$

Fie $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, (1)$, ecuație algebrică de gradul n , $n \in \mathbb{N}^*$, cu coeficienții $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$.

Pentru ecuația de tipul (1) se pot determina soluțiile din $\mathbb{Z}$ și $\mathbb{Q}$ pe baza următorului rezultat:

TEOREMA 14

Fie $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$, ecuație algebrică de gradul $n \in \mathbb{N}^*$ cu coeficienți în $\mathbb{Z}$.

a) Dacă $\alpha \in \mathbb{Z}$ este soluție a ecuației, atunci α divide a_n .

b) Dacă $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1$, este soluție a ecuației, atunci p divide a_n , iar q divide a_0 .

Demonstrație

a) Dacă $\alpha \in \mathbb{Z}$ este soluție pentru ecuație, rezultă că $a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$ sau, altfel scris, $\alpha(a_0\alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}) = -a_n$, (2).

Din relația (2) rezultă că α divide a_n .

b) Dacă $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ este soluție a ecuației, rezultă că $a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right) + a_n = 0$, egalitate care se poate scrie sub formele:

$$p \cdot (a_0p^{n-1} + a_1 \cdot p^{n-2}q + \dots + a_{n-1}q^{n-1}) = -a_n \cdot q^n \text{ respectiv,}$$

$$q \cdot (a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2}q + \dots + a_nq^n) = -a_0 \cdot p^n.$$

Deoarece $(p, q) = 1$, se obține că p divide a_n și q divide a_0 . ■

Teorema oferă o modalitate simplă de a determina soluțiile $\alpha \in \mathbb{Z}$, respectiv $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ale unei ecuații algebrice cu coeficienți numere întregi, și anume:

- soluțiile $\alpha \in \mathbb{Z}$ ale ecuației se caută printre divizorii termenului liber a_n ;

- soluțiile $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1$, se caută printre numerele raționale de forma $\frac{p}{q}$, unde p este un divizor al termenului liber a_n , iar q este un divizor al coeficientului dominant a_0 .

Problemă rezolvată

☒ Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{C}$ ecuațiile:

a) $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0$;

b) $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.

Soluție

a) Căutăm soluțiile întregi ale ecuației printre divizorii lui 6. Avem: $\mathcal{D}_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

Alcătuim schema lui Horner pentru acești divizori:

	1	-1	-5	-1	-6	
$\alpha = 1$	1	0	-5	-6	-12	$\alpha = 1$ nu este soluție
$\alpha = -1$	1	-2	-3	2	-8	$\alpha = -1$ nu este soluție
$\alpha = -2$	1	-3	1	-3	R = 0	$\alpha = -2$ este soluție
$\alpha = 2$	1	-1	-1	-5		$\alpha = 2$ nu este soluție
$\alpha = 3$	1	0	1	R = 0		$\alpha = 3$ este soluție

Așadar s-au găsit două soluții întregi $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 3$. Rezultă că ecuația se scrie: $(x+2)(x-3)(x^2+1) = 0$, și va avea soluțiile $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_{3,4} = \pm i$.

TEMĂ

Rezolvați ecuațiile:

- $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$;
- $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$;
- $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$.

b) Se obține ușor că ecuația nu are rădăcini întregi.

Termenul liber al ecuației este -1 și are mulțimea divizorilor $\mathcal{D}_{-1} = \{-1, 1\}$, iar termenul dominant este 2 cu $\mathcal{D}_2 = \{-1, 1, -2, 2\}$. Numerele raționale, care nu sunt în $\mathbb{Z}$ și pot fi soluții, aparțin mulțimii $S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

Se alcătuiește schema lui Horner.

	2	1	1	-1	
$\alpha = -\frac{1}{2}$	2	0	1	$-\frac{3}{2}$	$\alpha = -\frac{1}{2}$ nu este soluție
$\alpha = \frac{1}{2}$	2	2	2	R = 0	$\alpha = \frac{1}{2}$ este soluție

Așadar $\alpha = \frac{1}{2}$ este soluție, iar ecuația poate fi scrisă sub forma

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2) = 0. \text{ Se găsesc soluțiile } \alpha_1 = \frac{1}{2} \text{ și } \alpha_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

În cazul în care termenii $a_0, a_n \in \mathbb{Z}$ au mulți divizori, apar prea multe fracții $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ care trebuie încercate dacă sunt soluții. Vom arăta unele modalități practice de îndepărtare a unora dintre aceste fracții.

• Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, un polinom de gradul $n \in \mathbb{N}^*$ cu coeficienți întregi și $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1$ o rădăcină a sa. Rezultă că polinomul f este

divizibil cu $X - \frac{p}{q}$ și $f = \left(X - \frac{p}{q}\right) \cdot C(X)$ sau $f = (qX - p)C_1(X)$, unde C_1 este un polinom cu coeficienți în $\mathbb{Z}$ (temă). Atunci vom obține: $f(1) = (q - p)C_1(1)$ și $f(-1) = (-q - p)C_1(-1)$.

Deoarece $C_1(1), C_1(-1) \in \mathbb{Z}$, este necesar ca $p - q$ să dividă $f(1)$ și $p + q$ să dividă $f(-1)$.

Așadar, dacă $p - q$ nu divide $f(1)$ sau $p + q$ nu divide $f(-1)$, atunci $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ nu este soluție a ecuației.

Problemă rezolvată

☒ Să se rezolve ecuația $4x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 13x - 3 = 0$.

Soluție

• Căutăm soluții întregi printre divizorii lui 3. Va rezulta că ecuația nu are soluții în $\mathbb{Z}$.

• Căutăm soluții raționale. Acestea pot fi:

$$\frac{p}{q} \in \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4} \right\}.$$

Polinomul asociat este $f = 4X^4 - 8X^3 - 11X^2 + 13X - 3$ și $f(1) = -5$ și $f(-1) = -15$. Înlăturăm fracțiile care nu pot fi soluții:

$\frac{p}{q}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	
$p + q$	3	1	5	3	5	-1	7	1	$f(-1) = -15$
$p - q$	-1	-3	-3	-5	1	-5	-1	-7	$f(1) = -5$

Se observă că au mai rămas de probat dacă sunt soluții numai fracțiile $\frac{p}{q} \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2} \right\}$.

Făcând proba prin schema lui Horner se constată că sunt soluții $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{3}{2}$ și se obține ecuația: $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)(x^2 - 3x + 1) = 0$.

Rezultă că $\alpha_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

7.2. Ecuații algebrice cu coeficienți raționali

Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}$, astfel încât $b \neq 0$, $c > 0$ și $\sqrt{c} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Numerele reale de forma $u = a + b\sqrt{c}$ se numesc **numere iraționale pătratice**.

Numărul irațional pătratic $\bar{u} = a - b\sqrt{c}$ se numește **conjugatul numărului** $u = a + b\sqrt{c}$.

Se observă ușor că oricare număr irațional pătratic $u = a + b\sqrt{c}$ se poate scrie sub una din formele $\alpha + \sqrt{\beta}$ sau $\alpha - \sqrt{\beta}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, $\beta > 0$, $\sqrt{\beta} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, având în vedere introducerea sau scoaterea factorilor de sub radicali.

Folosind formula binomului lui Newton, rezultă că dacă $u = a + \sqrt{b}$ este număr irațional pătratic atunci $u^n = (a + \sqrt{b})^n = a_n + \sqrt{b_n}$, unde $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$, și $b_n > 0$, $\sqrt{b_n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Așadar u^n este număr irațional pătratic. De asemenea, se observă că $\bar{u}^n = a_n - \sqrt{b_n} = \overline{(u^n)}$.

TEOREMA 15

Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$, un polinom de gradul n ,

$n \in \mathbb{N}^*$ și $u = a + \sqrt{b}$ număr irațional pătratic.

Dacă u este rădăcină a polinomului f , atunci:

a) $\bar{u} = a - \sqrt{b}$ este rădăcină a lui f ;

b) u și $\bar{u}$ au același ordin de multiplicitate.

Demonstrație

a) Avem succesiv:

$$\begin{aligned} f(\bar{u}) &= a_0 + a_1(a - \sqrt{b}) + \dots + a_n(a - \sqrt{b})^n = a_0 + a_1(\alpha_1 - \sqrt{\beta_1}) + \\ &+ a_2(\alpha_2 - \sqrt{\beta_2}) + \dots + a_n(\alpha_n - \sqrt{\beta_n}) = a_0 + a_1(\overline{\alpha_1 + \sqrt{\beta_1}}) + a_2(\overline{\alpha_2 + \sqrt{\beta_2}}) + \dots + \\ &+ a_n(\overline{\alpha_n + \sqrt{\beta_n}}) = \overline{f(u)} = 0, \text{ deci } \bar{u} \text{ este rădăcină a polinomului } f. \end{aligned}$$

b) Fie $m, m_1 \in \mathbb{N}$ ordinele de multiplicitate ale rădăcinilor u și $\bar{u}$. Polinomul f se scrie: $f = (X - u)^m \cdot (X - \bar{u})^{m_1} \cdot g$, (1), unde $g \in \mathbb{Q}[X]$ și $g(u) \neq 0$, $g(\bar{u}) \neq 0$.

Să presupunem că $m < m_1$. Atunci, din relația (1), se obține:

$$f = (X^2 - 2aX + a^2 - b)^m \cdot (X - \bar{u})^{m_1 - m} \cdot g = (X^2 - 2aX + a^2 - b)^m \cdot h, \quad (2).$$

Polinomul $h = (X - \bar{u})^{m_1 - m} \cdot g \in \mathbb{Q}[X]$ și $h(\bar{u}) = 0$. Din punctul a) al teoremei se obține că $h(u) = 0$, deci $(u - \bar{u})^{m_1 - m} \cdot g(u) = 0$. Dar $u - \bar{u} \neq 0$, deci este necesar ca $g(u) = 0$, în contradicție cu $g(u) \neq 0$.

Așadar nu se poate ca $m < m_1$. Analog se arată că nu are loc inegalitatea $m_1 < m$. În concluzie $m = m_1$ și teorema este demonstrată. ■

Problemă rezolvată

☒ Să se rezolve ecuația $x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$, știind că $a, b \in \mathbb{Q}$ și că admite soluția $x_1 = 1 + \sqrt{2}$.

Soluție

Considerăm $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 + 2X^2 + aX + b$. Polinomul f admite rădăcina $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, deci conform teoremei anterioare admite și rădăcina $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Din relațiile lui Viète se obține:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2, \text{ deci } x_3 = -4.$$

Așadar:

$$\begin{aligned} f &= (X - 1 + \sqrt{2})(X - 1 - \sqrt{2})(X + 4) = \\ &= X^3 + 2X^2 - 9X - 4 \text{ și se obține că } a = \\ &= -9, b = -4. \end{aligned}$$

☐ TEMĂ

Să se rezolve următoarele ecuații dacă:

$$\bullet x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0,$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{2};$$

$$\bullet x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0,$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{3};$$

$$\bullet x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0,$$

$$x_1 = 2 - \sqrt{3}.$$

☐ TEMĂ DE STUDIU

Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinom de gradul $n \in \mathbb{N}^*$, cu rădăcina $x_1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ și $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

a) Să se studieze dacă numerele $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, $\sqrt{b} - \sqrt{a}$, $-\sqrt{a} - \sqrt{b}$ sunt rădăcini ale polinomului f .

b) Care este gradul minim al polinomului f ?

7.3. Ecuații algebrice cu coeficienți reali

TEOREMA 16

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, un polinom de gradul $n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ este rădăcină a polinomului f , atunci:

- a) $\bar{z}$ este rădăcină a polinomului f ;
- b) z și $\bar{z}$ au același ordin de multiplicitate.

Demonstrație (Temă)

OBSERVAȚII

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, un polinom cu coeficienți reali de gradul $n \in \mathbb{N}^*$.

- Polinomul f are un număr par de rădăcini $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
- Dacă n este impar, atunci polinomul f are cel puțin o rădăcină reală. Mai mult, numărul de rădăcini reale este impar.

Probleme rezolvate

- ☒ **1.** Să se rezolve ecuația $z^3 - z^2 + 2 = 0$, știind că admite soluția $z_1 = 1 + i$.

Soluție

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 - X^2 + 2$, polinomul cu coeficienți reali atașat ecuației date.

Rezultă că f are rădăcina $z_1 = 1 + i$, deci va avea și rădăcina $z_2 = 1 - i$. Din relațiile lui Viète rezultă că $z_1 + z_2 + z_3 = 1$, deci $z_3 = -1$.

TEMĂ

Să se rezolve ecuația $z^3 + z + 10 = 0$, știind că admite soluția $z_1 = 1 + 2i$.

- ☒ **2.** Să se determine numerele reale a, b și să se rezolve ecuația $z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 4z^2 + az + b = 0$, știind că admite soluția dublă $z_1 = i$.

Soluție

Deoarece ecuația admite soluția $z_1 = i$, ea va admite și soluția $z_3 = \bar{z}_1 = -i$, soluție dublă. Așadar sunt cunoscute soluțiile: $z_1 = z_2 = i$, $z_3 = z_4 = -i$. Din relația lui Viète $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = -2$ se obține că $z_5 = -2$. Așadar $f = (X - i)^2 \cdot (X + i)^2 \cdot (X + 2) = (X^2 + 1)^2 (X + 2)$.

Împărțind polinomul f prin $X^2 + 1$ (sau folosind relațiile lui Viète) se obține că $a = 1$ și $b = 2$.

- ☒ **3.** Să se rezolve ecuația $x^5 - 3x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, știind că admite soluțiile $x_1 = 1 + i$ și $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Soluție

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^5 - 3X^4 + X^3 + aX^2 + bX + c$, polinomul atașat ecuației. Deoarece $a, b, c \in \mathbb{Q}$ rezultă că f admite și soluțiile $x_3 = 1 + \sqrt{2}$, $x_4 = 1 - i$. Din relația lui Viète: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$ se obține $x_5 = -1$. Rezultă că f are forma $f = (X - 1 - i)(X - 1 + i)(X - 1 + \sqrt{2})(X - 1 - \sqrt{2}) \cdot (X + 1) = (X^2 - 2X + 2)(X^2 - 2X - 1) \cdot (X + 1)$. Împărțind polinomul f la $X^2 - 2X + 2$ și $X + 1$, sau folosind relațiile lui Viète corespunzătoare, se obține $a = 3$, $b = -4$, $c = -2$.

EXERCITII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se determine soluțiile întregi ale ecuațiilor:

- a) $x^4 - x^3 - x^2 + x - 2 = 0$;
b) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = 0$;
c) $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = 0$.

E2. Să se determine soluțiile raționale ale ecuațiilor:

- a) $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4 = 0$;
b) $4x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 8x + 3 = 0$;
c) $12x^5 - 23x^4 + 10x^3 + 2x - 1 = 0$.

E3. Să se determine polinoamele $f \in \mathbb{Q}[X]$ de gradul 4 care au rădăcinile:

- a) $1, 2, 2 + \sqrt{3}$; b) -2 dublă, $1 - \sqrt{2}$;
c) $1 - \sqrt{3}$ dublă; d) $2 - \sqrt{3}$ și $3 - \sqrt{2}$.

E4. Să se rezolve ecuațiile, știind că au soluția indicată:

- a) $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x + 12 = 0$,
 $x_1 = 1 - \sqrt{3}$;
b) $x^4 - 2x^3 - 2x - 1 = 0$,
 $x_1 = 1 + \sqrt{2}$;

c) $z^4 - 7z^3 + 14z^2 - 2z - 12 = 0$,

$z_1 = 1 - \sqrt{3}$;

d) $z^4 - 10z^3 + 31z^2 - 34z + 12 = 0$,

$z_1 = 3 - \sqrt{5}$;

e) $z^4 - z^3 - 2z^2 - 3z - 1 = 0$,

$z_1 = 1 + \sqrt{2}$;

f) $2z^4 - 7z^3 + 5z^2 + z - 1 = 0$,

$z_1 = 1 - \sqrt{2}$.

E5. Să se rezolve ecuațiile știind soluția indicată:

a) $z^4 + 6z^3 + 15z^2 + 18z + 10 = 0$,

$z_1 = -1 - i$;

b) $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = 0$,

$z_1 = i$;

c) $z^4 + z^3 + 4z^2 + z + 3 = 0$, $z_1 = i$;

d) $3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z - 2 = 0$,

$z_1 = 1 + i$;

e) $2z^3 - 3z^2 + 2z + 2 = 0$, $z_1 = 1 + i$;

f) $z^4 - 8z^3 + 26z^2 - 40z + 25 = 0$,

$z_1 = 2 - i$.

APROFUNDARE

- A1.** Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ și rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 - aX^2 + 3X + 2$ știind că acesta admite rădăcini numere întregi.
- A2.** Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + bX - 2$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$ știind că are cel puțin două soluții în $\mathbb{Z}$.
- A3.** Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ știind că polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$ admite rădăcini raționale:
- $f = X^3 + aX^2 + 3X - 3$;
 - $f = X^4 + aX^2 - 3$;
 - $f = 2X^3 + 4X^2 + aX - 6$;
 - $f = 4X^4 - 12X^3 + 7X^2 + aX - 2$.
- A4.** Să se determine $m \in \mathbb{Q}$ și apoi să se rezolve ecuațiile obținute știind că admit și soluțiile indicate:
- $x^3 + 5x + m = 0$, $x_1 = \sqrt{2} - 1$;
 - $x^4 + 2x^2 - 64x + m = 0$, $x_1 = 2 + \sqrt{3}$;
 - $x^3 + mx^2 + 2m + 8 = 0$, $x_1 = \sqrt{5} + 1$.
- A5.** Să se rezolve ecuațiile date, dacă $a, b \in \mathbb{Q}$ și admit soluția indicată:
- $z^3 + 2z^2 + az + b = 0$, $z_1 = \sqrt{2} - 1$;
 - $z^3 - 4z^2 + az + b = 0$, $z_1 = 2 - \sqrt{3}$;
 - $z^4 + 2z^3 - 2az^2 + 2bz + 1 = 0$, $z_1 = \sqrt{3} - 2$;
 - $z^4 + 4z^3 + az^2 + bz + 4 = 0$, $z_1 = 3 - \sqrt{5}$.
- A6.** Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$, știind că ecuația $x^3 - 4x^2 - 5x + a = 0$ admite soluția $x_1 = b + \sqrt{2}$.
- A7.** Să se rezolve ecuațiile și să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, în cazurile:
- $z^4 - z^3 + az^2 - z + 1 = 0$, $z_1 = -i$;
 - $z^4 + 3z^3 + az^2 + 21z + b = 0$, $z_1 = 1 - 2i$;
 - $z^4 + 2z^3 + az^2 + bz + 39 = 0$, $z_1 = 3 - 2i$;
 - $z^3 + az^2 + bz + 2 = 0$, $z_1 = 1 - i$.
- A8.** Să se rezolve ecuațiile știind că $a, b \in \mathbb{Z}$ și că admit o soluție dublă număr întreg:
- $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$;
 - $x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 2 = 0$.
- A9.** Să se rezolve ecuațiile următoare în condițiile:
- $z^5 - 5z^4 + 9z^3 - 7z^2 + 2 = 0$, $z_1 = 1 + \sqrt{2}$, $z_2 = 1 + i$;
 - $z^6 - 4z^5 + 4z^4 - 8z^3 + 4z^2 + 32z + 16 = 0$, $z_1 = z_2 = 1 + \sqrt{3}$;
 - $z^6 - 5z^5 + 19z^4 - 39z^3 + 38z^2 - 34z + 20 = 0$, $z_1 = i$, $z_2 = 1 + 3i$;
 - $z^5 - 4z^3 + 4z^2 + 4z - 8 = 0$, $z_1 = \sqrt{2}$, $z_2 = 1 - i$.
- A10.** Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Să se rezolve ecuațiile în condițiile specificate:
- $x^6 + ax^5 + bx^4 + 4x^3 + 23x^2 + cx + d = 0$, dacă $x_1 = 3 - \sqrt{11}$, $x_2 = 2 - \sqrt{5}$;
 - $2x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 - x^2 + dx + 8 = 0$, $x_1 = 5 - i\sqrt{3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.
- A11.** Se dă ecuația $x^6 + 3x^5 - 12x^4 - 42x^3 - 19x^2 + ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Să se rezolve ecuația, știind că admite soluția $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$.
- A12.** Să se scrie ecuația cu coeficienți raționali de gradul cel mai mic

$n \in \mathbb{N}^*$, care admite soluția x_1 în cazurile:

- a) $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; b) $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$;
c) $x_1 = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

A13. Să se rezolve ecuațiile știind că admit soluții independente de parametrul $m \in \mathbb{C}$.

- a) $x^3 + (m-3)x^2 - (3m+4)x - 4m = 0$;
b) $x^3 - x^2 - (m^2 + m + 2)x + 2m^2 + 2m = 0$.

A14. Se consideră ecuația $(p^2 - 1)x^4 -$

$$-(p^2 + 3)x^3 - (3p^2 + 1)x^2 + (5p^2 + 3)x - 2(p^2 - 1) = 0, \text{ unde}$$

$p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, |p| \geq 1$, cu soluțiile x_1, x_2, x_3, x_4 . Dacă x_1, x_2 sunt soluțiile reale independente de p și $S = \operatorname{Re}(x_3) + \operatorname{Re}(x_4)$, atunci:

- a) $S \in [0, +\infty)$; b) $S \in (-\infty, -25)$;
c) $S \in (-4, -3)$; d) $S \in (-2, -1)$;
e) $S \in (-1, 0)$.

(ASE, București, 2002)

8

Rezolvarea unor ecuații algebrice de grad superior cu coeficienți în $\mathbb{C}$

8.1. Ecuații bipătrate

O **ecuație bipătrată** cu coeficienți în $\mathbb{C}$ este o ecuație algebrică de forma $az^4 + bz^2 + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Pentru rezolvare se parcurg următorii pași:

- se notează $z^2 = y$ și se obține ecuația de gradul doi:

$ay^2 + by + c = 0$, numită **ecuația rezolventă** a ecuației bipătrate;

- se rezolvă ecuația rezolventă în mulțimea $\mathbb{C}$ obținându-se soluțiile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$;

- se scriu și se rezolvă ecuațiile $z^2 = y_1$ și $z^2 = y_2$ obținându-se soluțiile z_1, z_2, z_3, z_4 ale ecuației bipătrate.

Exemplu

- Să se rezolve ecuațiile în $\mathbb{C}$:

a) $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$; b) $z^4 + (1-i)z^2 - i = 0$.

Soluție

Ecuațiile sunt bipătrate.

a) Fie $z^2 = y$. Se obține ecuația rezolventă $y^2 - 3y - 4 = 0$ cu soluțiile $y_1 = -1$, $y_2 = 4$. Rezultă $z^2 = -1$ și $z^2 = 4$ cu soluțiile $z_1 = i$, $z_2 = -i$, respectiv $z_3 = 2$, $z_4 = -2$.

b) Notând $z^2 = y$ se obține ecuația rezolventă $y^2 + (1-i)y - i = 0$ cu soluțiile $y_1 = -1$ și $y_2 = i$. Rezultă ecuațiile: $z^2 = -1$ și $z^2 = i$. Din prima ecuație se obține $z_1 = i$, $z_2 = -i$. Pentru a rezolva a doua ecuație considerăm $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ și se

obține: $(a + bi)^2 = i$ sau $a^2 - b^2 + 2abi = i$. Din egalitatea de numere complexe se obține sistemul $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$. Substituind $b = \frac{1}{2a}$ în prima ecuație a sistemului se obține ecuația $4a^4 = 1$ cu soluțiile reale $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Rezultă că $b = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, iar $z_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

Problemă rezolvată

☒ Să se arate că $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$.

Soluție

$$\text{Știm că } 0 = \sin \pi = \sin \left(\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} \right) = \sin \frac{2\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{3\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5}, (1).$$

Notând $x = \cos \frac{\pi}{5}$ și având în vedere că $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$, $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$, din relația (1) se obține ecuația: $x \cdot (16x^4 - 12x^2 + 1) = 0$. Rezultă că $x \in \left\{ 0, \pm \frac{\sqrt{5} + 1}{4}, \pm \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right\}$. Se obține soluția convenabilă $x = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$.

8.2. Ecuații binome

O ecuație binomă cu coeficienți în mulțimea $\mathbb{C}$ este o ecuație algebrică de forma: $z^n - a = 0$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$. (1)

Scriind ecuația binomă (1) sub forma $z^n = a$, rezolvarea ei se reduce la determinarea rădăcinilor de ordinul $n \in \mathbb{N}^*$ ale numărului complex a .

Dacă $a = r(\cos t + i \sin t)$ este scrierea sub formă trigonometrică a numărului a , atunci se obține:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2k\pi}{n} \right),$$

$k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, (2), (rădăcinile complexe ale lui $z \in \mathbb{C}$).

NE REAMINTIM!

Pentru $z \in \mathbb{C}$, se cunosc:

- $z = a + bi$, forma algebrică;
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, modulul lui z ;
- $z = |z|(\cos t + i \sin t)$, $\cos t = \frac{a}{|z|}$, $\sin t = \frac{b}{|z|}$, forma trigonometrică;
- $(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt$, formula lui Moivre.

Exemplu

- Să se rezolve ecuația binomă $z^4 - i = 0$.

Soluție

Forma trigonometrică a numărului $a = i$ este: $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$. Având în vedere

relația (2) rezultă soluțiile: $z_k = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

8.3. Ecuații reciproce**DEFINIȚIE**

- Polinomul $f \in K[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$, de gradul $n \in \mathbb{N}^*$ se numește **polinom reciproc** dacă între coeficienții săi există relațiile: $a_k = a_{n-k}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. (1)

Exemple

Polinoamele reciproce $f \in K[X]$ de gradul 1, 2, 3 și 4 au formele:

- $f_1 = aX + a$, $f_2 = aX^2 + bX + a$, $f_3 = aX^3 + bX^2 + bX + a$, respectiv $f_4 = aX^4 + bX^3 + cX^2 + bX + a$, unde $b, c \in K$ și $a \in K^*$.

DEFINIȚIE

- Se numește **ecuație algebrică reciprocă de gradul** $n \in \mathbb{N}^*$ o ecuație de forma $f(x) = 0$, unde $f \in K[X]$ este un polinom reciproc de gradul n .

Forma particulară a polinoamelor (ecuațiilor) reciproce de gradul n conduce la câteva observații generale:

1. Orice ecuație algebrică reciprocă de grad impar admite soluția $x_1 = -1$.

Într-adevăr, polinomul f se poate scrie sub forma $f = a_0(1 + X^n) + a_1 \cdot (X + X^{n-1}) + a_2(X^2 + X^{n-2}) + \dots$ și se obține $f(-1) = 0$.

2. Prin împărțirea polinomului reciproc f de grad impar n la $X + 1$ se obține un cât care este polinom reciproc de grad $n - 1$.

3. Dacă ecuația reciprocă are soluția α , atunci are și soluția $\frac{1}{\alpha}$.

Rezolvarea ecuației reciproce de gradul 3

Ecuția reciprocă de gradul 3 cu coeficienți în corpul $\mathbb{C}$ are forma: $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$. Ecuția se poate scrie succesiv: $a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0$ sau $(x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0$. (1)

Forma de scriere (1) arată că ecuația are soluția $x_1 = -1$ și alte două soluții date de ecuația reciprocă de gradul 2: $ax^2 + (b - a)x + a = 0$.

Problemă rezolvată

☒ Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$.

Soluție

Ecuția se scrie $(x + 1)(2x^2 + x + 2) = 0$ și are soluțiile $x_1 = -1$ și $x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{4}$.

Rezolvarea ecuației reciproce de gradul 4

Forma generală a ecuației reciproce de gradul 4 cu coeficienți întregi este $az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a = 0$.

Se observă că ecuația nu admite soluția $z = 0$.

Pentru rezolvare se parcurg următorii pași:

- Se împarte prin z^2 și se obține: $az^2 + bz + c + \frac{b}{z} + \frac{a}{z^2} = 0$.

- Se grupează termenii care au coeficienți egali:

$$a\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c = 0.$$

- Se notează $z + \frac{1}{z} = y$ și rezultă că $z^2 + \frac{1}{z^2} = y^2 - 2$. Se obține ecuația de gradul 2 în y : $a(y^2 - 2) + by + c = 0$ sau $ay^2 + by + c - 2a = 0$ numită **ecuația rezolventă** a ecuației reciproce de gradul 4.

- Se rezolvă ecuația rezolventă obținând soluțiile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.

• Se rezolvă ecuațiile $z + \frac{1}{z} = y_1$ și $z + \frac{1}{z} = y_2$ care se aduc la forma:
 $z^2 - y_1 z + 1 = 0$ și $z^2 - y_2 z + 1 = 0$. Rezultă astfel soluțiile $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ ale ecuației reciproce.

Așadar, rezolvarea ecuației reciproce de gradul 4 se reduce la rezolvarea a trei ecuații de gradul 2.

Problemă rezolvată

☒ Să se rezolve ecuația reciprocă: $z^4 + z^3 - 4z^2 + z + 1 = 0$.

Soluție

După împărțirea cu z^2 se obține: $z^2 + \frac{1}{z} - 4 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$ sau
 $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 4 = 0$. Cu notația $y = z + \frac{1}{z}$, obținem $z^2 + \frac{1}{z^2} = y^2 - 2$
 și ecuația rezolventă $y^2 + y - 6 = 0$ cu soluțiile $y_1 = -3, y_2 = 2$.

Avem ecuațiile: $z + \frac{1}{z} = -3$ și $z + \frac{1}{z} = 2$ sau $z^2 + 3z + 1 = 0$ și $z^2 - 2z + 1 = 0$.
 Se obțin soluțiile $z_{1,2} = 1$ și $z_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

TEMĂ

Să se rezolve ecuațiile:

- $2z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 3z + 2 = 0$;
- $z^4 + 3z^3 - 8z^2 + 3z + 1 = 0$.

➤ OBSERVAȚII

1. Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, este polinom reciproc de gradul $n \in \mathbb{N}^*$, n număr impar, atunci rezolvarea ecuației reciproce de gradul n se reduce la rezolvarea ecuației $z + 1 = 0$ și a unei ecuații reciproce de gradul $n - 1$.

☞ Exemplu

• Să se rezolve ecuația $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Soluție

Deoarece $x = -1$ este soluție a ecuației, prin împărțirea polinomului $f = X^5 - 3X^4 + 2X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ la $g = X + 1$ obținem descompunerea $f = (X + 1) \cdot (X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1)$. Rezultă ecuația $(x + 1)(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) = 0$. Avem $x_1 = -1$, iar celelalte 4 soluții sunt date de ecuația reciprocă $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$. Se obține $x_{2,3,4,5} = 1$.

2. Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, este un polinom reciproc de gradul n , $n = 2k$, rezolvarea ecuației reciproce atașate se poate reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul k cu necunoscuta $y = z + \frac{1}{z}$, și a k ecuații de gradul 2 date de ecuațiile $z + \frac{1}{z} = y_p$, $p \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Exemplu

- ♦ Să se rezolve ecuația reciprocă de gradul 6 în mulțimea $\mathbb{C}$:

$$z^6 - 5z^5 + 4z^4 + 4z^2 - 5z + 1 = 0.$$

Soluție

Împărțind cu z^3 se obține: $z^3 + \frac{1}{z^3} - 5\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 4\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0$. Dacă $z + \frac{1}{z} = y$ atunci $z^2 + \frac{1}{z^2} = y^2 - 2$ și $z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^2 + \frac{1}{z^2} - 1\right) = y(y^2 - 3)$. Se obține ecuația rezolventă de gradul 3 în y : $y^3 - 5y^2 + y + 10 = 0$ care se descompune astfel: $(y - 2)(y^2 - 3y - 5) = 0$. Se obțin soluțiile: $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{3 - \sqrt{29}}{2}$, $y_3 = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$ și se obțin ecuațiile în z de forma: $z + \frac{1}{z} = y$, sau $z^2 - yz + 1 = 0$, unde $y \in \left\{2, \frac{3 - \sqrt{29}}{2}, \frac{3 + \sqrt{29}}{2}\right\}$.

3. În cazul unei ecuații reciproce cu coeficienți într-un corp K se procedează în mod analog.

EXERCIIII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{C}$ ecuațiile bipătrate:

- $z^4 - 2z^2 + 1 = 0$;
- $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$;
- $z^4 - 10z^2 + 9 = 0$;
- $9z^4 - 10z^2 + 1 = 0$;
- $z^4 - 17z^2 + 16 = 0$;
- $25z^4 - 26z^2 + 1 = 0$;
- $z^4 + z^2 + 2 = 0$;
- $z^4 + 29z^2 + 100 = 0$;
- $z^4 - 2z^2 - 15 = 0$.

E2. Să se rezolve ecuațiile binome în mulțimea $\mathbb{C}$:

- $z^3 - 125 = 0$;
- $z^4 - 625 = 0$;
- $z^3 + 8 = 0$;
- $z^3 + 125 = 0$;
- $z^4 + 16 = 0$;
- $z^4 + i = 0$;
- $z^6 - i = 0$;
- $z^5 - i^3 = 0$.

E3. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile reciproce de gradul 3:

- a) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;
- b) $x^3 - 5x^2 - 5x + 1 = 0$;
- c) $2x^3 - 7x^2 - 7x + 2 = 0$;
- d) $4x^3 - x^2 - x + 4 = 0$;
- e) $\sqrt{2}x^3 + x^2 + x + \sqrt{2} = 0$;
- f) $2x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0$.

E4. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile reciproce de gradul 4:

- a) $6x^4 + x^3 - 14x^2 + x + 6 = 0$;
- b) $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$;
- c) $2x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$;
- d) $7x^4 - x^3 - 12x^2 - x + 7 = 0$;

- e) $x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 7x + 1 = 0$;
- f) $2x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 5x + 2 = 0$.

E5. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile reciproce:

- a) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;
- b) $2x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$;
- c) $3x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0$;
- d) $x^6 + x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

E6. Să se rezolve în $\mathbb{C}$:

- a) $(x-1)^4 + (x+1)^4 = 82$;
- b) $(x-i)^4 + (x+i)^4 = 16$.

== APROFUNDARE ==

A1. Să se rezolve ecuațiile bipătrate în mulțimea $\mathbb{C}$:

- a) $x^4 + x^2 + 1 = 0$;
- b) $x^4 + 17x^2 + 16 = 0$;
- c) $x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 40$;
- d) $x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5$.

A2. Să se rezolve în $\mathbb{Z}_5$ ecuațiile:

- a) $x^4 - x^2 + \hat{1} = \hat{0}$;
- b) $\hat{2}x^4 + x^2 + \hat{2} = \hat{0}$;
- c) $\hat{3}x^4 + \hat{4}x^2 + \hat{3} = \hat{0}$;
- d) $\hat{2}x^4 + \hat{3}x^2 + \hat{1} = \hat{0}$.

A3. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $x^4 + (a^2 + b^2 - 2ab + 2b - 23)x^3 - (3a + 3b - 2)x^2 - (a + b - 7)x + 3(ab + a - b - 1) = 0$, este ecuație bipătrată și să se rezolve în acest caz.

A4. Să se rezolve ecuațiile în mulțimea numerelor complexe:

- a) $x^3 + ix^2 + ix + 1 = 0$;
- b) $ix^3 + (1+i)x^2 + (1+i)x + i = 0$;
- c) $z^3 - \varepsilon^2 z^2 - \varepsilon z + 1 = 0$, $\varepsilon^3 = 1$.

A5. Pentru care valori ale lui $a \in \mathbb{R}$, ecuația $x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$ admite soluții multiple?

A6. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $x^4 + (a+1)x^3 + bx^2 + 5x + 1 = 0$, știind că este ecuație reciprocă și admite o soluție dublă.

A7. Să se arate că dacă o ecuație reciprocă de gradul 4 cu coeficienți în corpul K admite soluția $\alpha \in K^*$, atunci ea admite și soluția $\alpha^{-1} \in K$. Generalizare.

A8. Să se rezolve ecuațiile reciproce în $\mathbb{C}$:

- a) $x^6 - x^4 - x^2 + 1 = 0$;

b) $x^6 - x^5 + 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$.

A9. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că ecuația $z^3 + az^2 + az + 1 = 0$ are numai soluții reale.

A10. Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ ecuația reciprocă $x^4 + x^2 + ax + x + 1 = 0$ are toate soluțiile reale?

A11. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{C}$ ecuațiile de grad superior:

a) $x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0$;

b) $x^4 + x^3 - 24x^2 - 6x + 36 = 0$;

c) $x^4 + x^3 - 4a^2x^2 + ax + a^2 = 0$.

A12. Să se rezolve ecuațiile în mulțimea $\mathbb{C}$:

a) $(x-1)^4 + (x+1)^4 = 82$;

b) $(x+a)^4 + (x-a)^4 = b$, $a, b \in \mathbb{R}$;

c) $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$;

d) $(x^2 + x + 1)^2 + 1 = 0$;

e) $(x+a)(x^3 + a^3) = x^2$, $a \in \mathbb{R}$.

A13. Să se rezolve ecuația:

$$\log_x^2 6 + \log_{\frac{1}{6}}^2 \left(\frac{1}{x} \right) + \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} \left(\frac{1}{6} \right) +$$

$$+ \log_{\sqrt{6}} x + \frac{3}{4} = 0.$$

(Admitere, ASE, București, 1999)

A14. Să se calculeze:

$$\sin \frac{2\pi}{5}, \sin \frac{\pi}{10}, \cos \frac{\pi}{10}.$$

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

○1. Polinomul $f = X^4 - 4X^3 + 4X^2 + mX + n \in \mathbb{Q}[X]$ se divide cu polinomul $g = X^2 - 4X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$, pentru:

a) $\begin{cases} m = -4 \\ n = 3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} m = 4 \\ n = -3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} m = -4 \\ n = 4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases}$.

(3 puncte)

(Univ. Maritimă, Constanța, 2002)

○2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + 2X + m - 1 \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3 .

a) Să se arate că: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -m^3 + 3m + 3$.

b) Să se determine m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \geq 3(x_1x_2x_3)^2$.

c) Să se determine m pentru care polinomul f se divide cu $X - 1$ și, în acest caz, să se găsească rădăcinile sale. (4 puncte)

(Univ. București, Facultatea de Matematică și Informatică, 2002)

○3. Să se rezolve ecuația: $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$ în mulțimea $\mathbb{C}$ știind că admite ca rădăcină numărul $x_1 = 1 - \sqrt{3}$. (3 puncte)

(Univ. de Nord, Baia-Mare, 2002)

Testul 2

- 1. Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
- a) Să se calculeze $f(1)$ și $f(-1)$.
- b) Să se determine $a \in \mathbb{C}$, astfel încât să avem identitatea:

$$f = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4).$$
- c) Să se arate că: $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) = 1$.
- d) Să se arate că: $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4) = 5$. (4 puncte)
- (Bacalaureat, iulie 2002)
- 2. Fie $f = X^4 - 7X^3 + (m + 13)X^2 - (4m + 3)X + m \in \mathbb{C}[X]$. Să se rezolve ecuația $\tilde{f}(x) = 0$, știind că $m \in \mathbb{Q}$, admite soluția $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, iar $x_3 = 2x_4$.
(Univ. Lucian Blaga, Sibiu, 1998)
(3 puncte)
- 3. Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ polinomul
 $f = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$ știind că admite rădăcina $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
(Univ. Babeș Bolyai, Cluj-Napoca, 1996)
(3 puncte)

Testul 3

- 1. Să se determine rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale polinomului $f = X^3 - mX^2 - 2 \in \mathbb{C}[X]$ dacă $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$.
(Univ. Lucian Blaga, Sibiu, 2002)
(3 puncte)
- 2. Ecuația $x^4 - x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$, $m, n \in \mathbb{R}$ admite soluția $x_1 = 1 + i$ pentru:
- a) $m = 2, n = -3$;
 b) $m = 0, n = 2$;
 c) $m = -1, n = 0$;
 d) $m = 1, n = 4$;
 e) $m = n = 0$.
- (Univ. Maritimă, Constanța, 2000)
 (3 puncte)
- 3. Se consideră ecuația $x^4 - (m - 1)x^3 + mx^2 - (m - 1)x + 1 = 0$.
 Fie $M = \{m \in \mathbb{R} \mid \text{ecuația are două rădăcini reale, distincte și negative}\}$.
 Atunci:
- a) $M = (-\infty, 0)$; b) $M = [0, +\infty)$; c) $M = (-\infty, -1]$; d) $M = (-1, 1)$; e) $M = \emptyset$.
- (ASE, Cibernetică, 1997)
 (3 puncte)

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

I. PRIMITIVE

În clasa a XI-a s-a văzut că noțiunea de derivată a unei funcții a fost introdusă pornind de la câteva considerente practice. Astfel, în domeniul fizicii, viteza instantanee a unui mobil este descrisă de o funcție care reprezintă derivata funcției „spațiu“.

Fizica experimentală ridică însă și problema oarecum inversă celei de derivată, în sensul că impune determinarea proprietăților unei funcții care modelează un fenomen, folosind valori ale derivatei rezultate dintr-un experiment.

Relativ la astfel de situații practice a apărut conceptul de „integrală“. Denumirea de „integrală“ rezultă din ideea deducerii unei concluzii asupra întregului, idee formulată având în vedere concluzii asupra părților acestuia, (integer = întreg, în limba latină).

1

Probleme care conduc la noțiunea de integrală

Problema spațiului parcurs de un mobil în mișcarea rectilinie

Se consideră un punct mobil M care se deplasează rectiliniu, în același sens, pe o axă, cu viteza instantanee la momentul x egală cu $v(x)$. Dacă $S(x)$ este distanța parcursă de mobil de la momentul inițial $t = 0$ la momentul $t = x$, atunci, conform definiției vitezei instantanee, are loc egalitatea $v(x) = S'(x)$.

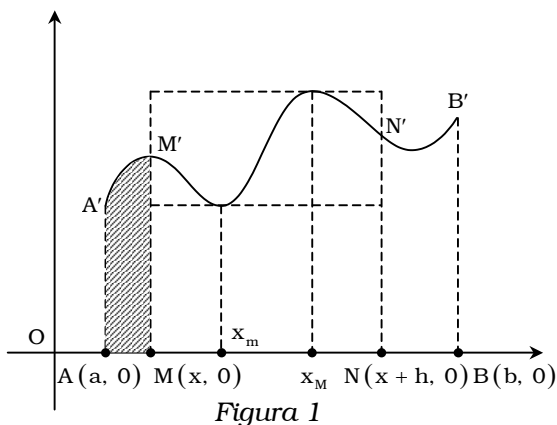
Problema se poate pune însă și invers: „Dacă se cunoaște viteza instantanee $v(x)$ în fiecare moment x , atunci se poate determina distanța parcursă de mobil în intervalul de timp $[0, x]$?“.

Din punct de vedere matematic, problema revine la a studia dacă există o funcție S care verifică egalitatea $S'(x) = v(x)$. Cu alte cuvinte, problema revine la a determina funcția când se cunoaște derivata sa, determinare care face obiectivul capitolelor următoare.

Problema ariei unei suprafețe plane

Se consideră $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și pozitivă ($f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$).

Se notează cu S funcția care asociază fiecărui $x \in [a, b]$ aria $S(x)$ a suprafeței plane mărginite de curba $y = f(x)$, axa Ox pe intervalul $[a, x]$ și segmentele $[AA']$, $[MM']$ unde $A(a, 0)$, $A'(a, f(a))$, $M(x, 0)$, $M'(x, f(x))$, (figura 1).



Funcția S , numită funcția „arie” este derivabilă pe intervalul $[a, x]$.

Într-adevăr, fie $N \in Ox$, $N(x+h, 0)$, $h > 0$ și $x_m, x_M \in [x, x+h]$ puncte în care f ia valoare minimă, respectiv valoarea maximă pe intervalul $[x, x+h]$.

Deoarece aria suprafeței curbilinii $[MM'N'N]$ este cuprinsă între ariile suprafețelor dreptunghiulare cu baza $[MN]$ și cu înălțimile egale cu $f(x_m)$, respectiv $f(x_M)$, au loc relațiile:

$h \cdot f(x_m) \leq S(x+h) - S(x) \leq h \cdot f(x_M)$. De aici se obține:

$$f(x_m) \leq \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \leq f(x_M). \quad (1)$$

Pentru $h \rightarrow 0$ se obține: $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_m) = f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_M)$.

Prin trecere la limită după $h \rightarrow 0$ în relația (1) și folosind definiția derivatei, se obține:

$$S'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x).$$

Așadar, funcția S este derivabilă pe intervalul $[a, b]$ și $S'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$, (2), relație care exprimă derivata funcției „arie” cu ajutorul funcției f .

O problemă care se pune în legătură cu relația (2) și care va face obiectul de studiu al capitolelor următoare este: „Să se determine aria suprafeței plane asociate funcției f pe un interval $[a, b]$, în ipoteza că se cunoaște derivata sa.”

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) a notat această arie cu simbolul

$\int_a^b f(x)dx$, citit „integrală de la a la b

din $f(x)dx$ ”.

Rezolvarea deplină a problemelor care cer determinarea funcției când se cunoaște derivata sa se va face introducând noile concepte matematice: „primitivă” și „integrală definită”.



Gottfried Wilhelm LEIBNIZ
(1646-1716)
matematician german

Este creatorul calculului diferențial și integral, având contribuții remarcabile în analiza combinatorie, calculul probabilităților, aritmetică și mecanică.

2

Primitivele unei funcții

Integrala nedefinită a unei funcții continue

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval de numere reale și funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

❖ DEFINIȚII

- Funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ **admite primitive pe intervalul I** dacă există o funcție $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:
 - a) F este funcție derivabilă pe intervalul I ;
 - b) $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.
- Funcția F cu proprietățile de mai sus se numește **funcția primitivă** (sau **antiderivată**) a funcției f pe intervalul I .
- Dacă funcția F există, se spune că funcția f este **primitivabilă** pe intervalul I .

📖 Exemple

- Funcția nulă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Într-adevăr, pentru orice număr real c , funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = c$ este funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x) = 0 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Funcțiile $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^3}{3}$ și $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = \frac{x^3}{3} + k$, $k \in \mathbb{R}$, sunt primitive ale funcției f pe $\mathbb{R}$.

Într-adevăr, funcțiile F și G sunt derivabile pe $\mathbb{R}$ și $F'(x) = x^2 = G'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln x$ este o primitivă a funcției $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. De asemenea, $G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = \ln x + 1$ este o primitivă a funcției f pe $(0, +\infty)$.

Se observă că funcțiile primitivabile f , conținute în exemplele de mai sus, au proprietatea de a fi continue pe domeniul de existență.

În general are loc următoarea teoremă care conturează o clasă largă de funcții care admit primitive:

TEOREMA 1

Orice funcție continuă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul I .

Din exemplele de mai sus se observă că funcțiile alese admit mai multe primitive pe intervalul de definiție. Relația dintre diferitele primitive ale unei funcții pe un interval este dată de următorul rezultat:

TEOREMA 2

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Dacă $F_1, F_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcției f pe intervalul I , atunci există o constantă $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x) - F_2(x) = c$, $\forall x \in I$.

Demonstrație

Funcțiile F_1, F_2 fiind primitive ale funcției f pe intervalul I , sunt derivabile pe I și $F_1'(x) = f(x) = F_2'(x)$, $\forall x \in I$.

Folosind operațiile cu funcții derivabile, rezultă că funcția $F_1 - F_2$ este deriva-

bilă și $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in I$.

Deoarece funcția $F_1 - F_2$ are derivata nulă pe intervalul I , din consecința teoremei lui Lagrange rezultă că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $(F_1 - F_2)(x) = c$, $\forall x \in I$.

Așadar $F_1(x) - F_2(x) = c$, $\forall x \in I$. ■

Ne reamintim!

Consecință a teoremei lui Lagrange

Fie $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, funcții derivabile pe intervalul I , astfel încât $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in I$. Atunci există $c \in \mathbb{R}$, astfel încât $f - g = c$. (Funcțiile f și g diferă printr-o constantă.)

Teorema afirmă că două primitive ale unei funcții primitivabile pe un interval diferă printr-o constantă. Dacă F este o primitivă a funcției $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, atunci orice altă primitivă G a lui f este de forma $G = F + c$, unde c este funcție constantă pe I .

Se deduce astfel că dacă funcția f admite o primitivă, atunci admite o infinitate de primitive.

❖ DEFINIȚII

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe I .

- Mulțimea tuturor primitivelor funcției f pe intervalul I se numește **integrala nedefinită** a funcției f și se notează $\int f(x) dx$.
- Operația prin care se determină mulțimea primitivelor unei funcții se numește **operația de integrare**.

➡ OBSERVAȚII

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție primitivabilă și F o primitivă a sa pe intervalul I .

1. Din teorema 2 se deduce că mulțimea primitivelor funcției f pe intervalul I satisface egalitatea:

$$\int f(x) dx = \{F + c \mid c \text{ este funcție constantă}\}.$$

2. Dacă se notează $\mathcal{C} = \{c : I \rightarrow \mathbb{R} \mid c \text{ este funcție constantă}\}$, atunci:

$$\int f(x) dx = F + \mathcal{C}.$$

Precizări:

- Dacă $\mathcal{F}(I) = \{f \mid f : I \rightarrow \mathbb{R}\}$ și $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{F}(I)$, se definesc operațiile:

$$\textbf{a)} \quad \mathcal{F} + \mathcal{G} = \{f + g \mid f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\};$$

$$\textbf{b)} \quad \lambda \mathcal{F} = \{\lambda f \mid f \in \mathcal{F}\}, \lambda \in \mathbb{R};$$

$$\textbf{c)} \quad f + \mathcal{G} = \{f + h \mid h \in \mathcal{G}\}, f \in \mathcal{F}(I).$$

- Pentru mulțimea $\mathcal{C}$ a funcțiilor constante pe intervalul I au loc egalitățile:

$$\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}; \quad \lambda \mathcal{C} = \mathcal{C}, \text{ pentru } \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

3. Cu ajutorul notațiilor utilizate pentru integrala nedefinită, cele trei exemple conduc la:

$$\int 0 dx = \mathcal{C}, x \in \mathbb{R}; \quad \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + \mathcal{C}, x \in \mathbb{R}; \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x + \mathcal{C}, x \in (0, +\infty).$$

3

Proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite

TEOREMA 3 (proprietatea de aditivitate a integralei nedefinite)

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții care admit primitive pe I . Atunci funcția sumă $f + g : I \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive și are loc egalitatea:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Demonstrație (extindere)

Fie $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$ primitive ale funcțiilor f, g pe intervalul I . Funcțiile F și G sunt derivabile pe I și $F' = f$ și $G' = g$. Folosind operațiile cu funcții derivabile pe un interval, rezultă că funcția $F + G$ este funcție derivabilă pe I și are loc egalitatea: $(F + G)' = F' + G' = f + g$.

Așadar, funcția $f + g$ admite primitive pe I și funcția $F + G$ este o primitivă a acesteia pe intervalul I .

Totodată au loc egalitățile:

$$\int f(x) dx = F + \mathcal{C}, \quad (1)$$

$$\int g(x) dx = G + \mathcal{C}, \quad (2)$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = (F + G) + \mathcal{C}, \quad (3).$$

Folosind relația $\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$ și egalitățile (1), (2), (3) se obține:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx + \int g(x) dx &= (F + \mathcal{C}) + (G + \mathcal{C}) = (F + G) + (\mathcal{C} + \mathcal{C}) = (F + G) + \mathcal{C} = \\ &= \int [f(x) + g(x)] dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

TEOREMA 4

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe I și $\lambda \in \mathbb{R}$. Atunci funcția λf admite primitive pe I , iar pentru $\lambda \neq 0$ are loc egalitatea:

$$\int (\lambda f)(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \quad (4).$$

Demonstrație

Fie F o primitivă a funcției f pe intervalul I . Rezultă că F este funcție derivabilă pe I și $F' = f$. Conform operațiilor cu funcții derivabile se obține că funcția λF este derivabilă pe I și $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$. Așadar, funcția λf admite primitive pe I și funcția λF este o primitivă a ei.

Totodată are loc egalitatea $\int (\lambda f)(x) dx = \lambda F + \mathcal{C}$.

Din faptul că $\lambda \mathcal{C} = \mathcal{C}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$ se obține:

$\lambda \int f(x) dx = \lambda (F + \mathcal{C}) = \lambda F + \mathcal{C} = \int (\lambda f)(x) dx$ și teorema este astfel demonstrată. ■

➤ OBSERVAȚII

1. Pentru $\lambda = 0$, egalitatea (4) nu este adevărată. Într-adevăr, pentru $\lambda = 0$ avem: $\int (\lambda f)(x) dx = \int 0 dx = \mathcal{C}$, iar $\lambda \int f(x) dx = 0 \cdot \int f(x) dx = \{0\}$.

2. Pentru $\lambda \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea:

$$\int (\lambda f)(x) dx = \lambda \int f(x) dx + \mathcal{C}.$$

➤ CONSECINȚĂ (Proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite)

Fie $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ funcții care admit primitive pe I și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, numere nesimultan nule.

Atunci funcția $\alpha f + \beta g$ admite primitive pe I și are loc egalitatea:

$$\int (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

Exerciții rezolvate

☒ 1. Să se determine funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care o primitivă a sa este de forma:

a) $F(x) = e^x (x^2 + 6x)$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $F(x) = \frac{2-x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot e^{\arctg x}$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $F(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $x > 0$.

Soluție

Se aplică definiția primitivei unei funcții, arătând că funcția F este funcție derivabilă și $F'(x) = f(x)$.

a) Funcția F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca produs de funcții derivabile și $f(x) = F'(x) =$

$$= \left[e^x (x^2 + 6x) \right]' = e^x \cdot (x^2 + 6x) + e^x \cdot (2x + 6).$$

Rezultă că $f(x) = e^x (x^2 + 8x + 6)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ne reamintim!

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$(\arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$(\arccos u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

b) Funcția F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ fiind exprimată cu ajutorul operațiilor cu funcții derivabile.

$$\begin{aligned} \text{Avem: } f(x) = F'(x) &= \left(\frac{2-x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' \cdot e^{\arctg x} + \frac{2-x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot (e^{\arctg x})' = \\ &= \frac{-\sqrt{1+x^2} - (2-x) \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \cdot e^{\arctg x} + \frac{2-x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot e^{\arctg x} = \\ &= e^{\arctg x} \cdot \frac{1-3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c) Funcția F este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $f(x) = F'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$.

$$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \frac{-(1+x^2)}{\sqrt{4x^2}} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}, \quad x > 0.$$

☒ **2.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} \cdot \sin x$. Să se determine constantele reale m și n astfel încât funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = e^{2x} (m \sin x + n \cos x)$ să fie o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

Soluție

Din ipoteza că F este o primitivă a funcției f , rezultă că F este derivabilă și $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Se obține egalitatea:

$$e^{2x} [(2m-n) \sin x + (m+2n) \cos x] = e^{2x} \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pentru $x=0$, se obține $m+2n=0$, iar pentru $x=\frac{\pi}{2}$, se obține

$2m-n=1$. Rezultă, în final, că $m=\frac{2}{5}$ și $n=-\frac{1}{5}$, valori care verifică condițiile din enunț.

☒ **3.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 3x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze primitiva F a funcției f care verifică relația $F(2)=5$.

Soluție

a) Studiem dacă f este funcție continuă pe $\mathbb{R}$.

$$\text{Avem: } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^x = 1, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (3x^2 + 1) = 1 \quad \text{și} \quad f(0) = e^0 = 1.$$

Așadar, există egalitatea $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, deci f este continuă în $x = 0$.

De asemenea, f este continuă pe $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$ fiind exprimată cu ajutorul unor funcții continue. Rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Căutăm o funcție $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă și cu proprietatea că $F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

O primitivă a funcției $f|_{(-\infty, 0]}$ este funcția $F_1: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_1(x) = e^x + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

O primitivă a funcției $f|_{(0, +\infty)}$ este funcția $F_2: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F_2(x) = x^3 + x + c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$.

Rezultă că o primitivă a funcției f va avea forma:

$$F(x) = \begin{cases} e^x + c_1, & x \leq 0 \\ x^3 + x + c_2, & x > 0 \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Constantele c_1, c_2 vor fi determinate astfel încât funcția F să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$, în particular să fie continuă pe $\mathbb{R}$, deci și în $x = 0$.

Așadar, $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0)$ conduce la $1 + c_1 = c_2 = c$.

Cu această relație între constantele c_1, c_2 se obține:

$$F(x) = \begin{cases} e^x - 1 + c, & x \leq 0 \\ x^3 + x + c, & x > 0 \end{cases}.$$

Din condiția $F(2) = 5$ se obține $c = -5$ și primitiva cerută este:

$$F(x) = \begin{cases} e^x - 6, & x \leq 0 \\ x^3 + x - 5, & x > 0 \end{cases}.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se determine funcția $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care o primitivă a sa este de forma:

a) $F(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 9, x \in \mathbb{R};$

b) $F(x) = \sqrt[3]{x^2} + 4x^2\sqrt{x}, x \in (0, +\infty);$

c) $F(x) = x \sin x, x \in \mathbb{R};$

d) $F(x) = x(\ln x - 1), x \in (0, +\infty);$

e) $F(x) = \frac{x^3 - 2x}{x + 1}, x \in (0, +\infty);$

f) $F(x) = e^x(x - 1) + 4, x \in \mathbb{R};$

g) $F(x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$

E2. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 6x^2 - 4x$. Care dintre funcțiile $F_1, F_2,$

$F_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F_1(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3,$

$F_2(x) = 12x - 4, F_3(x) = 2x^3 - 2x^2 - 5$ sunt primitive ale funcției f ?

E3. Dați exemplu de trei primitive pentru fiecare dintre funcțiile:

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3, g(x) = \cos x.$

E4. Să se verifice dacă funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2^x}{\ln 2} + x - \frac{2}{\ln 2}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}, & x > 1 \end{cases} \quad \text{este}$$

primitivă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x \leq 1 \\ x + 2, & x > 1 \end{cases}.$$

E5. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 2x$, să se determine primitiva F care verifică condiția $F(-1) = 2.$

E6. Folosind faptul că o funcție continuă pe un interval admite primitive pe acel interval, să se arate că următoarele funcții admit primitive pe domeniul de definiție:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 4, & x \leq 2 \\ 3x^2 - 5x, & x > 2 \end{cases};$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+9}-3}{2x}, & x < 0; \\ 0,1(6), & x \geq 0 \end{cases};$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 2 \\ \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x > 2 \end{cases}.$

APROFUNDARE

A1. Să se determine funcția $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care o primitivă este de forma:

a) $F(x) = x(\ln^2 x - \ln x^2 + 1),$
 $x \in (0, +\infty);$

b) $F(x) = e^{x+1}(x^2 - 4x), x \in \mathbb{R};$

c) $F(x) = 2x \sin x + 2 \cos x - x^2,$
 $x \in \mathbb{R};$

d) $F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin \frac{x}{3},$
 $x \in (-3, 3);$

e) $F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$
 $x \in \mathbb{R};$

f) $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right), x > 0.$

A2. Funcțiile $F_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, k \in \{1, 2, 3\},$

$F_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{16}\sin\left(\frac{4x}{3}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{16}\cos\left(\frac{4x}{3}\right),$

$F_2(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2x}{3}\right),$

$F_3(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{8}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4x}{3}\right),$

sunt primitive ale funcției

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2x}{3}\right)?$$

A3. Să se arate că următoarele funcții admit primitive pe domeniul de definiție:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{4x^5 - 5x^4 + 1}{(x-1)^2}, & x < 1; \\ 7x^2 + 4x - 1, & x \geq 1 \end{cases};$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{x^4 + x^2}, & x < 0; \\ x^3 - 3x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases};$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 1 + \ln x, & x \in (0, 1] \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x \in (1, +\infty) \end{cases};$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\}; \\ \sqrt{2}, & x = 0 \end{cases};$$

$$e) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos x + |x-1|e^{nx}}{1 + e^{nx}}.$$

A4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1}, & x \leq -1 \\ 2 + x, & x > -1 \end{cases}. \text{ Să se arate}$$

că f admite primitive pe $\mathbb{R}$ și să se determine o primitivă F cu proprietatea că $F(2) = \frac{3}{2}$.

A5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \max\{1, x^2\}$. Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$ și să se determine o primitivă F care verifică relația:

$$4F\left(-\frac{3}{2}\right) - 3F\left(\frac{1}{2}\right) = 3F(2).$$

A6. Să se determine constantele $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} \ln^2 x, & x \in (0, e] \\ ax + b, & x \in (e, +\infty) \end{cases} \text{ să fie}$$

primitivă a unei funcții.

A7. Se consideră funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 3, & x \leq 1 \\ \frac{3x+b}{x^2+2}, & x > 1 \end{cases}.$$

Există valori pentru $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția F să fie antiderivata unei funcții?

A8. Se dă funcția $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \in [0, 1] \\ 2x + 1, & x \in (1, 2) \\ x + 3a, & x \in [2, 3] \end{cases}. \text{ Să se}$$

determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât f să admită primitive pe $[0, 3]$.

A9. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \ln x, & x \in (0, 1) \\ ax + b, & x \in [1, 2] \\ \sqrt{3x-2} - 2\sqrt{x+2}, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

să admită primitive pe $(0, +\infty)$.

A10. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}. \text{ Să se determine cons-}$$

tantele $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = (ax+b)\sqrt{x}$ să fie o antiderivată a funcției f .

A11. Se dau funcțiile $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1) \text{ și}$$

$$g(x) = \frac{1}{x} [c + bx + a \ln(x+1)].$$

Există valori ale constantelor reale $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția g să fie o primitivă a funcției

$$h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{f(x)}{x^2}?$$

4

Primitive uzuale

O problemă esențială care se pune, relativ la noul concept de primitivă a unei funcții continue pe un interval, este aceea a stabilirii unor metode și procedee de determinare a mulțimii primitivelor.

Fie I un interval de numere reale și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe I .

Dacă $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a ei, atunci F este o funcție derivabilă și $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

Astfel, definiția primitivei dă posibilitatea determinării acesteia în strânsă legătură cu folosirea formulelor de derivare învățate în clasa a XI-a.

Ca urmare, apar următoarele situații:

4.1. Primitive deduse din derivatele funcțiilor elementare

Ilustrăm acest procedeu prin câteva exemple.

a) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Avem $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, și astfel se obține că $\int \cos x \, dx = \sin x + \mathcal{C}$.

b) Fie $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Avem: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, și se obține $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + \mathcal{C}$.

c) Fie $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Avem $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ și se obține $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}$.

Procedând în mod analog și pentru alte funcții, se obține următorul tabel de integrale nedefinite:

Tabel de integrale nedefinite		
Nr. crt.	Funcția	Mulțimea primitivelor (integrala nedefinită)
1.	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}$

2.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^r, I \subset (0, +\infty),$ $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + \mathcal{C}$
3.	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}$
4.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}, I \subset \mathbb{R}^*$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + \mathcal{C}$
5.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2},$ $I \subset \mathbb{R} \setminus \{\pm a\}, a \neq 0$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + \mathcal{C}$
6.	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, a \neq 0$	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \mathcal{C}$
7.	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}$
8.	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}$
9.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x,$ $I \subset \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + \mathcal{C}$
10.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x,$ $I \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + \mathcal{C}$
11.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$ $I \subset \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}$
12.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sin^2 x},$ $I \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}$
13.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}},$ $I \subset (-a, a), a > 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C}$
14.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}},$ $I \subset (-\infty, -a) \text{ sau } I \subset (a, +\infty)$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left x + \sqrt{x^2 - a^2} \right + \mathcal{C}$
15.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}},$ $a \neq 0, I \subset \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + \mathcal{C}$

Exercițiu rezolvat

☒ Să se determine integralele nedefinite pentru următoarele funcții folosind proprietățile integralei nedefinite și tabelul de integrale nedefinite:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + \sqrt{x}$, $x > 0$;

b) $f(x) = \frac{\cos 2x - 3}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2+6}}{\sqrt{(x^2+6)(1-x^2)}}$, $x \in (-1, 1)$;

d) $f(x) = \frac{x^4 + 8x^2 + 17}{x^2 + 4}$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluție

a) Avem $\int (x^3 - 3x^2 + \sqrt{x}) dx = \int x^3 dx - \int 3x^2 dx + \int \sqrt{x} dx = \frac{x^4}{4} - 3 \int x^2 dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \mathcal{C} = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{2}{3} \cdot x\sqrt{x} + \mathcal{C}$.

b) Se prelucrează expresia de la numărător și rezultă:

$$\cos 2x - 3 = \cos^2 x - \sin^2 x - 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = -2\cos^2 x - 4\sin^2 x.$$

Mulțimea de primitive va fi:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos 2x - 3}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx &= \int \frac{-2\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + \int \frac{-4\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \\ &= -2 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - 4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2\operatorname{ctg} x - 4\operatorname{tg} x + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

c) Se distribuie numitorul comun la termenii numărătorului și se obține:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2+6}}{\sqrt{(x^2+6)(1-x^2)}} dx &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+6}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+6}} dx + \\ &+ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2+6} \right) + \arcsin x + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

d) Avem: $\int \frac{x^4 + 8x^2 + 17}{x^2 + 4} dx = \int \frac{(x^2 + 4)^2 + 1}{x^2 + 4} dx = \int (x^2 + 4) dx + \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{x^3}{3} + 4x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \mathcal{C}$.

4.2. Primitive deduse din derivarea funcțiilor compuse

Ilustrăm procedeul prin câteva exemple:

a) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ funcție derivabilă pe I și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin u(x)$.

Avem $f'(x) = (\sin u(x))' = \cos u(x) \cdot u'(x)$.

Rezultă că $\sin u(x)$ este primitivă pentru $\cos u(x) \cdot u'(x)$, deci

$$\int \cos u(x) \cdot u'(x) dx = \sin u(x) + \mathcal{C}.$$

b) Fie $u : I \rightarrow (0, +\infty)$ funcție derivabilă pe I și $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln u(x)$. Avem $f'(x) = (\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$, și ca urmare se obține:

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + \mathcal{C}.$$

În mod analog se pot obține integralele nedefinite și pentru alte funcții obținute prin derivarea unor funcții compuse.

Astfel, dacă funcția $u : I \rightarrow J$ este derivabilă pe intervalul I , se obține următorul tabel de integrale nedefinite:

Nr. crt.	Integrala nedefinită
1.	$\int u^n(x) \cdot u'(x) dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + \mathcal{C}, n \in \mathbb{N}$
2.	$\int u^r(x) \cdot u'(x) dx = \frac{u^{r+1}(x)}{r+1} + \mathcal{C}, r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, u(I) \subset (0, +\infty)$
3.	$\int a^{u(x)} \cdot u'(x) dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + \mathcal{C}, a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$
4.	$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln u(x) + \mathcal{C}, u(x) \neq 0, x \in I$
5.	$\int \frac{u'(x)}{u^2(x) - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u(x) - a}{u(x) + a} \right + \mathcal{C}, u(x) \neq \pm a, x \in I, a \neq 0$
6.	$\int \frac{u'(x)}{u^2(x) + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{u(x)}{a} + \mathcal{C}, a \neq 0, x \in I$
7.	$\int \sin u(x) \cdot u'(x) dx = -\cos u(x) + \mathcal{C}, x \in I$
8.	$\int \cos u(x) \cdot u'(x) dx = \sin u(x) + \mathcal{C}, x \in I$

9.	$\int \operatorname{tg} u(x) \cdot u'(x) dx = -\ln \cos u(x) + \mathcal{C}, u(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},$ $k \in \mathbb{Z}, x \in I$
10.	$\int \operatorname{ctg} u(x) \cdot u'(x) dx = \ln \sin u(x) + \mathcal{C}, u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, x \in I$
11.	$\int \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} dx = \operatorname{tg} u(x) + \mathcal{C}, u(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, x \in I$
12.	$\int \frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)} dx = -\operatorname{ctg} u(x) + \mathcal{C}, u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, x \in I$
13.	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2 - u^2(x)}} dx = \arcsin \frac{u(x)}{a} + \mathcal{C}, a > 0, u(I) \subset (-a, a)$
14.	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) - a^2}} dx = \ln \left u(x) + \sqrt{u^2(x) - a^2} \right + \mathcal{C}, a > 0,$ $u(I) \subset (-\infty, -a) \text{ sau } u(I) \subset (a, +\infty)$
15.	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) + a^2}} dx = \ln \left[u(x) + \sqrt{u^2(x) + a^2} \right] + \mathcal{C}, a \neq 0$

În general are loc următorul rezultat:

TEOREMA 5 (formula de schimbare de variabilă)

Fie I, J intervale din $\mathbb{R}$ și funcțiile $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ cu proprietățile:

a) u este derivabilă pe intervalul I ;

b) f admite primitive pe intervalul J .

Dacă F este o primitivă a funcției f , atunci funcția $(f \circ u) \cdot u'$ admite primitive pe I și $\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F \circ u + \mathcal{C}$.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se calculeze $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4} dx, x \in \mathbb{R}$.

Soluție

Alegem funcția $u: \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{7}{4}, +\infty\right), u(x) = x^2 + 3x + 4$ derivabilă pe

$\mathbb{R}$. Se obține $u'(x) = 2x + 3$ și $\frac{2x+3}{x^2+3x+4} = \frac{u'(x)}{u(x)}, x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Rezultă că } \int \frac{2x+3}{x^2+3x+4} dx &= \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + \mathcal{C} = \\ &= \ln(x^2+3x+4) + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

☒ **2.** Să se calculeze $\int 4x^3(x^4-2)^3 dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluție

Alegem funcția $u: \mathbb{R} \rightarrow [-2, +\infty)$, $u(x) = x^4 - 2$, derivabilă, cu $u'(x) = 4x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Rezultă că $4x^3(x^4-2)^3 = u'(x) \cdot u^3(x)$ și $\int 4x^3(x^4-2)^3 dx =$

$$= \int u'(x) \cdot u^3(x) dx = \frac{u^4(x)}{4} + \mathcal{C} = \frac{1}{4} \cdot (x^4 - 2)^4 + \mathcal{C}.$$

☒ **3.** Să se calculeze $\int 2x \cdot \sqrt[3]{x^2+1} dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluție

Alegem funcția $u: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$, $u(x) = x^2 + 1$, derivabilă pe $\mathbb{R}$, cu $u'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Rezultă că } \int 2x \cdot \sqrt[3]{x^2+1} dx &= \int u'(x) \cdot [u(x)]^{\frac{1}{3}} dx = \frac{[u(x)]^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \mathcal{C} = \\ &= \frac{3}{4} \cdot [u(x)]^{\frac{4}{3}} + \mathcal{C} = \frac{3}{4} \cdot (x^2+1) \sqrt[3]{x^2+1} + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

4.3. Primitive deduse din formula de derivare a produsului a două funcții

Fie $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții derivabile pe intervalul I , cu derivatele continue. Atunci $(fg)' = f'g + fg'$. Rezultă că fg este o primitivă a funcției $f'g + fg'$ iar mulțimea primitivelor verifică egalitatea:

$$\begin{aligned} \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] dx &= f(x)g(x) + \mathcal{C} \text{ sau} \\ \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) + \mathcal{C}, \quad (1) \end{aligned}$$

Din egalitatea (1) se obține:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)g(x) dx. \quad (2)$$

Egalitatea (2) se numește **formula de integrare prin părți**.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se calculeze:

a) $\int x \ln x \, dx, x > 0;$ **b)** $\int x \sin x \, dx, x \in \mathbb{R};$ **c)** $\int \arctg x \, dx, x \in \mathbb{R}.$

Soluție

a) Integrala se scrie:

$$\int x \ln x \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} (\ln x)' \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \mathcal{C}.$$

b) Avem: $\int x \sin x \, dx = \int x \cdot (-\cos x)' \, dx = -x \cos x - \int x' \cdot (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + \mathcal{C}.$

c) Avem: $\int \arctg x \, dx = \int x' \cdot \arctg x \, dx = x \arctg x - \int x \cdot (\arctg x)' \, dx = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} \, dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \mathcal{C}.$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se determine mulțimea primitivelor următoarelor funcții:

- a) $f(x) = x^4, x \in \mathbb{R};$
- b) $f(x) = 8x^7, x \in \mathbb{R};$
- c) $f(x) = x^{\frac{4}{5}}, x > 0;$
- d) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}, x \in \mathbb{R};$
- e) $f(x) = x^{-\frac{8}{3}}, x > 0;$
- f) $f(x) = 11x \cdot \sqrt[4]{x^3}, x > 0;$
- g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, x > 0;$
- h) $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R};$
- i) $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R};$
- j) $f(x) = \frac{1}{x-1}, x > 1;$

k) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}, x \in (-3, 3);$

l) $f(x) = \frac{1}{16 + x^2}, x \in \mathbb{R};$

m) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}, x \in (-\infty, -2);$

n) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}, x \in (-2, 2);$

o) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 25}}, x \in \mathbb{R};$

p) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(6-x)(6+x)}}, x \in (0, 6).$

E2. Să se calculeze integralele nedefinite:

a) $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1) \, dx, x \in \mathbb{R};$

- b) $\int (x^2 - 2x)^3 dx, x \in \mathbb{R};$
 c) $\int \left(\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^5} - \frac{3}{x} \right) dx, x < 0;$
 d) $\int (8x^2 \sqrt{x} + 7x^4 \sqrt[4]{x^3}) dx, x > 0;$
 e) $\int \left(\frac{x}{3\sqrt[3]{x^7}} - 21x^4 \cdot \sqrt[4]{x} \right) dx, x > 0;$
 f) $\int \frac{1}{4x^2 - 1} dx, x > \frac{1}{2};$
 g) $\int \frac{30}{9x^2 - 25} dx, x > \frac{5}{3};$
 h) $\int \frac{8}{4x^2 + 1} dx, x \in \mathbb{R};$
 i) $\int \frac{18}{3x^2 + 27} dx, x \in \mathbb{R};$
 j) $\int (5^x \ln 5 - 4^x \ln 16) dx, x \in \mathbb{R};$

- k) $\int \frac{1}{\sqrt{6x^2 + 24}} dx, x \in \mathbb{R};$
 l) $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 18}} dx, x > 3;$
 m) $\int \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48 - 3x^2}} dx, x \in (-2, 2).$

E3. Să se calculeze integralele nedefinite:

- a) $\int (3 \sin x + 4 \cos x) dx, x \in \mathbb{R};$
 b) $\int (2 \sin^2 x - \sqrt[3]{-8 \cos^2 x}) dx, x \in \mathbb{R};$
 c) $\int 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx, x \in \mathbb{R};$
 d) $\int 2 \cos^2 \frac{x}{2} dx, x \in \mathbb{R};$
 e) $\int 2 \sin^2 \frac{x}{2} dx, x \in \mathbb{R}.$

APROFUNDARE

A1. Să se determine integralele nedefinite:

- a) $\int \frac{3x^5 + x^2 + x - 1}{x^3} dx, x > 0;$
 b) $\int \frac{2x^3 - x^4}{\sqrt{x}} dx, x > 0;$
 c) $\int (x \cdot \sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{x^2} - x \cdot \sqrt[4]{x}) dx, x > 0;$
 d) $\int \frac{x \cdot \sqrt[3]{x} + 2x^2 \cdot \sqrt[4]{x^2}}{\sqrt{x}} dx, x > 0;$
 e) $\int (2^x \ln \sqrt[3]{4} - \ln 3 \cdot 9^x) dx, x \in \mathbb{R};$
 f) $\int \left(\frac{1}{3 + x^2} - \frac{1}{\sqrt{3 + x^2}} \right) dx, x \in \mathbb{R};$
 g) $\int \frac{(x-1)^4}{x^2} dx, x > 1;$
 h) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 1}{x^2 + 4} dx, x \in \mathbb{R};$
 i) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4} + 4}{x^2 - 4} dx, x > 2;$

- j) $\int \frac{\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{4 - x^4}} dx, |x| < \sqrt{2};$
 k) $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - 16}} dx, x > 4.$

A2. Să se calculeze:

- a) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right);$
 b) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right);$
 c) $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx, x \in \mathbb{R};$
 d) $\int \frac{\sin^3 x - 8}{1 - \cos^2 x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right);$
 e) $\int \frac{3 \cos 2x + 1}{\sin^2 2x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right);$
 f) $\int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right);$
 g) $\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right).$

A3. Să se calculeze:

- a) $\int 6x(3x^2 + 1)^7 dx, x \in \mathbb{R};$
- b) $\int x^4(1 - x^5)^5 dx, x \in \mathbb{R};$
- c) $\int x^4 \cdot \sqrt[3]{x^5 + 1} dx, x \in \mathbb{R};$
- d) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx, x > 0;$
- e) $\int \frac{1}{x} \ln^4 x dx, x > 0;$
- f) $\int \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7} dx, x \in \mathbb{R};$
- g) $\int \frac{x - 1}{3x^2 - 6x + 11} dx, x \in \mathbb{R};$
- h) $\int \frac{2x}{x^4 - 1} dx, x \in (-1, 1);$
- i) $\int \frac{x^2}{16 - x^6} dx, x > 2;$
- j) $\int \frac{x}{x^2 + 9} dx, x \in \mathbb{R};$
- k) $\int \frac{x}{x^4 + 1} dx, x \in \mathbb{R};$
- l) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 25}} dx, x > 5;$
- m) $\int \frac{3^x}{\sqrt{1 - 9^x}} dx;$
- n) $\int \frac{x + x^3}{1 + x^4} dx, x \in \mathbb{R}.$

A4. Să se calculeze:

- a) $\int \frac{\arctg^6 x}{1 + x^2} dx, x \in \mathbb{R};$

- b) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 4} dx, x \in \mathbb{R};$
- c) $\int \frac{\sin x}{9 - \cos^2 x} dx, x \in \mathbb{R};$
- d) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4} dx, x \in \mathbb{R};$
- e) $\int 2x \sin(x^2 + 1) \cos(x^2 + 1) dx,$
 $x \in \mathbb{R};$
- f) $\int 4x \sin 2(x^2 + 1) dx, x \in \mathbb{R};$
- g) $\int (\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x) dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$
- h) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} dx, x \in \mathbb{R};$
- i) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^4 x + 1}} dx, x \in \mathbb{R};$
- j) $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx, x \in \mathbb{R}.$

A5. Să se calculeze integralele nedefinite, folosind formula de integrare prin părți:

- a) $\int x^2 \ln x dx, x > 0;$
- b) $\int x e^{-x} dx, x > 0;$
- c) $\int \sin^2 x dx, x \in \mathbb{R};$
- d) $\int (x + 1) \cos x dx, x \in \mathbb{R};$
- e) $\int \sqrt{x^2 + 25} dx, x \in \mathbb{R};$
- f) $\int x \sqrt{x^2 - 9} dx, x > 3;$
- g) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$
- h) $\int \operatorname{xarctg} x dx, x \in \mathbb{R}.$

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

○1. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x \sin x, g(x) = e^x \cos x$. Să se arate că:

- a) f este primitivă a funcției $f + g$;
- b) g este primitivă a funcției $g - f$.

(3 puncte)

- 2. Se consideră funcțiile $f, F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 1) \ln x$ și $F(x) = x(ax^2 - 1) \cdot \ln x - x\left(\frac{x^2}{9} - b\right)$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât F să fie o primitivă a lui f pe $(0, +\infty)$.

(3 puncte)

- 3. Să se determine mulțimea primitivelor pentru funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = (x-1)^2(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = \frac{1}{9x^2-1} - x\sqrt{x}$, $x > 1$;

c) $f(x) = x^2 e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

(3 puncte)

Testul 2

- 1. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \geq 0 \\ \sqrt{x^2+6x+9}, & x < 0 \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$ și să se determine primitiva F care verifică relația $F(0) + F(-3) = -4, 5$.

(4 puncte)

- 2. Să se demonstreze în două moduri că funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + \ln x)$ este o primitivă a funcției $g: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x(1 + \ln x)}$.

(2 puncte)

- 3. Să se determine integralele nedefinite:

a) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} dx$, $x \in \mathbb{R}$; b) $\int (x+2)e^x dx$, $x \in \mathbb{R}$; c) $\int \sin x \cos x dx$, $x \in \mathbb{R}$.

(3 puncte)

Testul 3

- 1. Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax$, $g(x) = bxf(x)$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care g este o primitivă a lui f .

(3 puncte)

- 2. Să se arate că $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (1-x)^2 \cdot e^{-x}, & x \in (-\infty, 1] \\ \frac{\ln^2 x}{x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$ admite primitive pe

$\mathbb{R}$ și să se determine primitiva F care verifică relația $F(e) + F(0) = \frac{-2(e+3)}{3e}$.

(2 puncte)

- 3. Să se calculeze: a) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $\int \frac{\sqrt{4-25x^2}+1}{4-25x^2} dx$, $x \in \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$; c) $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

(4 puncte)

II. INTEGRALA DEFINITĂ

1

Definirea integralei Riemann a unei funcții continue prin formula lui Leibniz-Newton

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a sa.

❖ DEFINIȚIE

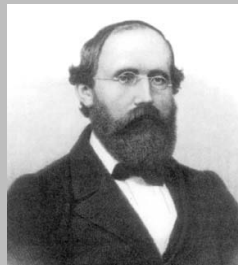
- Numărul real $F(b) - F(a)$ se numește **integrala Riemann (integrala definită sau integrala)** a funcției f pe intervalul $[a, b]$.

Integrala Riemann a funcției continue f pe intervalul $[a, b]$ se notează $\int_a^b f(x) dx$ și se citește „integrală de la a la b din $f(x) dx$ “.

Așadar, integrala Riemann a funcției f este exprimată cu formula

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ numită } \mathbf{formula}$$

lui Leibniz-Newton (după numele matematicienilor care au pus bazele calculului integral).



Bernhard RIEMANN
(1826-1866)

matematician german

Este unul dintre creatorii calculului diferențial și integral. A adus contribuții importante în geometria neeuclidiană.

➡ OBSERVAȚII

- În loc de $F(b) - F(a)$ se folosește frecvent notația $F(x) \Big|_a^b$ și se citește „ $F(x)$ luat între a și b “.

📖 Exemplu

$$\diamond \int_a^b 2x dx = x^2 \Big|_a^b = b^2 - a^2.$$

- Numerele a și b se numesc **limite (capete) de integrare**: a este **limita de integrare inferioară** iar b este **limita de integrare superioară**.
- Intervalul $[a, b]$ se numește **intervalul de integrare**.

4. Funcția f se numește **funcția de integrat**.

5. Variabila x se numește **variabila de integrare**.

Astfel, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(z) dz$ etc.

6. Integrala definită a unei funcții continue pe un interval $[a, b]$ este diferită de integrala nedefinită a acestei funcții pe intervalul $[a, b]$.

De ce? Integrala definită este un număr real, iar integrala nedefinită este o mulțime de funcții.

7. Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci:

$$\bullet \int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x) dx; \quad \bullet \int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0.$$

8. Integrala Riemann a funcției f pe intervalul $[a, b]$ nu depinde de primitiva aleasă.

Într-adevăr, dacă F și G sunt primitive ale funcției f pe intervalul $[a, b]$, atunci există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $G = F + k$, iar integrala funcției f pe intervalul $[a, b]$ este:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

$$\int_a^b f(x) dx = G(x) \Big|_a^b = G(b) - G(a) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) - F(a).$$

$$\text{Rezultă că } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = G(x) \Big|_a^b.$$

Exercițiu rezolvat

☒ Să se calculeze următoarele integrale Riemann (integrale definite sau integrale):

a) $\int_1^2 (2x + 3) dx;$

b) $\int_1^e \frac{1}{x} dx;$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx;$

d) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2 + 4} dx.$

Soluție

a) Se consideră funcția $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$.

Funcția f este funcție continuă pe $[1, 2]$, deci admite primitive pe intervalul $[1, 2]$. Mulțimea primitivelor funcției f este:

$$\int f(x) dx = \int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + \mathcal{C}, \quad x \in [1, 2].$$

Pentru o primitivă oarecare $F : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + 3x + c$, $c \in \mathbb{R}$, cu formula lui Leibniz-Newton se obține:

$$\int_1^2 f(x) dx = F(x) \Big|_1^2 = F(2) - F(1) = (4 + 6 + c) - (1 + 3 + c) = 6.$$

b) Se consideră funcția $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, funcție continuă pe $[1, e]$ fiind restricția unei funcții elementare la intervalul $[1, e]$.

O primitivă a funcției f este funcția $F : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln x$. Rezultă că integrala definită a funcției f pe intervalul $[1, e]$ este:

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

c) Se consideră funcția $f : \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

Funcția f este restricția funcției elementare sinus la intervalul $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, deci este continuă și admite primitive pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

O primitivă a funcției f este $F : \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = -\cos x$.

$$\begin{aligned} \text{Rezultă că } \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\cos \frac{\pi}{3} - (-\cos 0) = \\ &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

d) Se consideră funcția $f : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$, funcție continuă (restricție de funcție continuă) și care admite primitive pe $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Mulțimea primitivelor funcției f este:

$$\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \mathcal{C}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Alegând primitiva $F : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ se obține că:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Folosind formula lui Leibniz-Newton, să se calculeze integralele:

a) $\int_{-1}^2 (6x^2 - 4x + 1) dx;$

b) $\int_{-1}^1 (2x + 1)^3 dx;$

c) $\int_1^{16} \left(\frac{3}{x^4} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) dx;$

d) $\int_0^4 x\sqrt{x} dx;$

e) $\int_1^2 \frac{1}{x^5} dx;$

f) $\int_1^{64} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx;$

g) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{9}{x^2 + 9} dx;$

h) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 - 4} dx;$

i) $\int_1^4 \frac{1}{25 - x^2} dx.$

E2. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx;$

b) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x dx;$

c) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx;$

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx;$

e) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx;$

f) $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin^2 4x + \cos^2 4x) dx;$

g) $\int_{\pi}^{2\pi} \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \right) dx;$

h) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \cos^2 x} dx;$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} dx.$

E3. Să se calculeze integralele definite:

a) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} dx;$

b) $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2}} dx;$

c) $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx;$

d) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{9 + x^2}} dx;$

e) $\int_1^2 2^x dx;$

f) $\int_0^1 9^x \ln 3 dx.$

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze integralele definite:

a) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{9x^2 - 4} dx;$

b) $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{1}{25x^2 + 1} dx;$

c) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx;$

d) $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} dx.$

A2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\int_1^a (2x + 1) dx = 10.$$

A3. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\int_n^{n+1} \frac{6}{x^2 - 9} dx = \ln \frac{7}{4}, \quad n > 3.$$

A4. Valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\int_{-a}^a (3x^2 + x + 1) dx = 4$ este:

a) 3; b) 0; c) 1; d) -1; e) 2.

(Univ. de Petrol și Gaze, Ploiești, 2002)

A5. Există valori ale parametrului $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_a^{a+1} (x^3 + 4) dx = \frac{31}{4}$?

(Univ. Maritimă, Constanța, 2004)

A6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $\int_1^x (3t - 2) dt \leq \frac{5}{2};$

b) $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4}} dt \leq \ln \frac{1}{2}.$

A7. Viteza unui punct material variază în funcție de timp după legea $v(t) = 0,01 t^3$ (m/s). Ce drum parcurge punctul în 10 secunde?

2

Proprietăți ale integralei definite

2.1. Proprietatea de liniaritate a integralei definite

▣ TEOREMA 1 (proprietatea de liniaritate a integralei)

Fie $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcții continue și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci:

a) $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$

(integrala sumei este egală cu suma integralelor);

b) $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx,$

(constanta reală iese în fața integralei).

⇒ OBSERVAȚII

1. Cele două afirmații ale teoremei de liniaritate a integralei definite se pot formula astfel: „Dacă $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci are loc egalitatea:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.”$$

2. Mai general, dacă $f_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$, sunt funcții continue și $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$, atunci:

$$\begin{aligned} \int_a^b [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x)] dx &= \alpha_1 \int_a^b f_1(x) dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x) dx + \\ &+ \dots + \alpha_n \int_a^b f_n(x) dx. \end{aligned}$$

Aplicație

☒ Să se calculeze $\int_0^1 (3x^2 - 6x + 4) dx$.

Soluție

Se aplică proprietatea de liniaritate a integralei și se obține, succesiv:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3x^2 - 6x + 4) dx &= 3 \int_0^1 x^2 dx - 6 \int_0^1 x dx + 4 \int_0^1 1 dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - 6 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \\ &+ 4x \Big|_0^1 = x^3 \Big|_0^1 - 3x^2 \Big|_0^1 + 4x \Big|_0^1 = (1 - 0) - 3(1 - 0) + 4(1 - 0) = 1 - 3 + 4 = 2. \end{aligned}$$

2.2. Proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare

Să considerăm funcția $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in [-2, 0] \\ \frac{1}{1+x^2}, & x \in (0, 1] \end{cases}$, func-

ție continuă pe intervalul $[-2, 1]$.

Cum se calculează integrala definită $\int_{-2}^1 f(x) dx$?

Un procedeu de calcul al acestei integrale ar fi determinarea unei primitive a funcției f pe intervalul $[-2, 1]$ și aplicarea formulei Leibniz-Newton (temă).

Altfel, prin următoarea proprietate se va stabili un nou procedeu de calcul al integralei definite a unei funcții continue, exprimată prin mai multe formule.

☐ TEOREMA 2 (proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare)

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $c \in [a, b]$.

Atunci $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Cu această proprietate, integrala funcției de mai sus se calculează astfel:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 f(x) dx &= \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-2}^0 (2x + 1) dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= (x^2 + x) \Big|_{-2}^0 + \arctg x \Big|_0^1 = 0 - (4 - 2) + \arctg 1 - \arctg 0 = -2 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exerciții rezolvate

☒ 1. Se dă funcția $f: [-1, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \in [-1, 0] \\ 1 + \sin x, & x \in (0, \pi] \end{cases}$.

a) Să se arate că f este funcție continuă pe intervalul $[-1, \pi]$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$.

Soluție

a) Funcția f este continuă pe intervalele $[-1, 0)$ și $(0, \pi]$ deoarece este exprimată cu ajutorul unor funcții continue.

În punctul $x = 0$ avem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 2^x = 1; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + \sin x) = 1 \quad \text{și} \quad f(0) = 2^0 = 1.$$

Așadar, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ și, ca urmare, funcția f este funcție continuă în punctul $x = 0$.

Rezultă că f este continuă pe $[-1, 0) \cup \{0\} \cup (0, \pi] = [-1, \pi]$.

b) Se aplică proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare și se obține:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{-1}^0 2^x dx + \int_0^{\pi} (1 + \sin x) dx = \\ &= \left. \frac{2^x}{\ln 2} \right|_{-1}^0 + (x - \cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{2^{-1}}{\ln 2} + \pi - \cos \pi - (0 - \cos 0) = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2 \ln 2} + \\ &+ \pi - (-1) + 1 = \frac{1}{2 \ln 2} + \pi + 2. \end{aligned}$$

☒ 2. Să se calculeze:

a) $\int_{-1}^3 |x^2 - 4| dx$;

b) $\int_{-2}^2 \max(x^2 - 1, x + 1) dx$.

Soluție

a) Se explicitază funcția de integrat și se obține funcția:

$$f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & x \in [-1, 2] \\ x^2 - 4, & x \in (2, 3] \end{cases}.$$

Funcția f este continuă pe $[-1, 3]$. Aplicând proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul, rezultă:

$$\int_{-1}^3 |x^2 - 4| dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + 4) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-1}^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_2^3 = 9 + \left(\frac{19}{3} - 4 \right) = \frac{34}{3}.$$

b) Se explicitează funcția „max” pe intervalul $[-2, 2]$ și se obține succesiv:

$$g(x) = \max(x^2 - 1, x + 1) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{dacă } x^2 - 1 \geq x + 1 \\ x + 1, & \text{dacă } x + 1 > x^2 - 1 \end{cases}, \quad x \in [-2, 2].$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in [-2, -1] \\ x + 1, & x \in (-1, 2] \end{cases}.$$

Funcția g este funcție continuă pe intervalul $[-2, 2]$.

$$\begin{aligned} \text{Rezultă că } \int_{-2}^2 g(x) dx &= \int_{-2}^2 \max(x^2 - 1, x + 1) dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx + \\ &+ \int_{-1}^2 (x + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^2 = \left(\frac{7}{3} - 1 \right) + \left(5 - \frac{1}{2} \right) = \frac{35}{6}. \end{aligned}$$

2.3. Proprietatea de monotonie a integralei definite

▣ TEOREMA 3

Se consideră funcțiile continue $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Dacă $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x) dx \geq 0$,

(pozitivitatea integralei).

b) Dacă $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$,

(monotoniea integralei).

Problemă rezolvată

☒ Fără a calcula integralele, să se demonstreze inegalitatea:

$$\int_0^e \ln(x+1) dx \geq \int_0^e \frac{x}{x+1} dx.$$

Soluție:

Fie funcțiile $f, g: [0, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1)$ și $g(x) = \frac{x}{x+1}$. Se va demonstra că $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [0, e]$.

Definim funcția $h: [0, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$, funcție derivabilă pe intervalul $[0, e]$ cu $h'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

Pentru $x \in [0, e]$, $h'(x) \geq 0$. Rezultă că funcția h este strict crescătoare pe intervalul $[0, e]$ și $0 = h(0) \leq h(x) \leq h(e)$, $\forall x \in [0, e]$.

Așadar, $h(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, e]$, adică $\ln(x+1) \geq \frac{x}{x+1}$, $\forall x \in [0, e]$.

Aplicând proprietatea de monotonie a integralei, se obține că:

$$\int_0^e \ln(x+1) dx \geq \int_0^e \frac{x}{x+1} dx.$$

■ CONSECINȚA 1 (proprietatea de medie a integralei)

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $m, M \in \mathbb{R}$ două numere reale, astfel încât $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$.

Atunci $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

Demonstratie

Într-adevăr, aplicând proprietatea de monotonie a integralei pentru funcția f și funcțiile constante m și M pe intervalul $[a, b]$, se obține:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx, \text{ relații din care rezultă inegalitățile}$$

din enunț. ■

➤ OBSERVAȚIE

- Funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe intervalul compact $[a, b]$ este mărginită și își atinge marginile.

Dacă $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ și $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, atunci are

loc relația: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

Problemă rezolvată

☒ Să se demonstreze inegalitatea: $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$.

Soluție

Funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ este funcție continuă pe $[0, 1]$, deci este funcție mărginită. Pentru determinarea marginilor $m, M \in \mathbb{R}$, studiem monotonia funcției.

Deoarece $f'(x) = 2xe^{x^2} \geq 0$, $\forall x \in [0, 1]$, rezultă că funcția f este crescătoare pe $[0, 1]$. Rezultă că $m = f(0) = 1$ și $M = f(1) = e$.

Aplicând proprietatea de medie, se obține:

$$1(1-0) \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e(1-0) \text{ și problema este rezolvată.}$$

☐ CONSECINȚA 2 (modulul integralei)

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci are loc relația:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \text{ (Modulul integralei este mai mic sau egal cu integrala modulului.)}$$

Demonstrație

Într-adevăr, din proprietățile modulului, au loc relațiile:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \forall x \in [a, b].$$

Aplicând monotonia integralei pentru funcțiile continue f și $|f|$ se obține: $-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

$$\text{Așadar, } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \blacksquare$$

Problemă rezolvată

☒ Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$ și $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. Să se arate că $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M \cdot (b-a)$.

Soluție

Din consecința 2 și proprietatea de monotonie a integralei rezultă:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a).$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze integralele următoare aplicând proprietatea de liniaritate a integralei:

a) $\int_{-1}^3 (x^2 - 6x + 4) dx;$

b) $\int_1^4 (4x - 3\sqrt{x}) dx;$

c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (3 \sin x - 4 \cos x) dx;$

d) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{x^3} dx;$

e) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^3 + 2x^2 - x}{x^5} dx;$

f) $\int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx.$

E2. Să se calculeze integralele aplicând proprietatea de aditivitate a integralei în raport cu intervalul:

a) $\int_{-1}^3 |x - 2| dx;$

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin x| dx;$

c) $\int_0^{\frac{5\pi}{6}} |\cos x| dx;$

d) $\int_{-1}^2 |1 - x^2| dx.$

E3. Să se arate că funcțiile $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue și să se calculeze integralele acestora:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \in [-1, 1] \\ 6x^2 - 1, & x \in (1, 2] \end{cases};$

b) $f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3, & x \in [-2, 1] \\ \frac{1}{x}, & x \in (1, e] \end{cases};$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \end{cases}.$

E4. Fără a calcula integralele, să se arate că:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx \geq 0;$

b) $\int_0^2 (2x - x^2) e^{-x} dx \geq 0;$

c) $\int_1^3 \sqrt[3]{x^3 - 3x} dx < 0;$

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 x dx \leq 0.$

E5. Folosind proprietatea de monotonie a integralei, să se arate că:

a) $\int_{-1}^1 (x^2 - 3x) dx \leq \int_{-1}^1 (2 - 2x) dx;$

b) $\int_1^2 \frac{x-5}{x+1} dx \geq 2 \int_1^2 \frac{x-4}{x+2} dx;$

c) $\int_2^4 \sqrt{x+2} dx \geq \int_2^4 x dx;$

d) $\int_1^e \ln x dx \leq \int_1^e (x-1) dx.$

E6. Fără a calcula integralele, să se verifice că:

a) $-15 \leq \int_{-2}^3 (2x+1) dx \leq 35;$

b) $0 \leq \int_0^1 (1+2x-3x^2) dx \leq \frac{4}{3};$

c) $-2 \leq \int_{-1}^0 \frac{x+2}{x-1} dx \leq -\frac{1}{2};$

d) $\frac{16}{3} \leq \int_4^6 \frac{x^2}{x+2} dx \leq 10;$

e) $\frac{8}{3} \leq \int_{-1}^1 \frac{x^3-3}{x^3-2} dx \leq 4;$

f) $2\sqrt{3} \leq \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+3} dx \leq 4.$

APROFUNDARE

A1. Să se arate că următoarele funcții sunt continue și să se calculeze integralele lor:

a) $f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \max(x^2, x + 2);$$

b) $f: \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \min(\operatorname{tg} x, \operatorname{tg}^3 x);$$

c) $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x - 1| + |2x - 4|;$$

d) $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |2x + x^2|$.

A2. Se consideră funcția $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 6x + 2, & x \in [-1, 0] \\ 4^x - a, & x \in (0, 1] \end{cases}.$$

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie funcție continuă.

b) Pentru $a = -1$ să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

A3. Dacă $I = \int_0^2 e^{|x-1|} dx$, atunci:

a) $I = 2e - 2$; b) $I = e$; c) $I = 3$;

d) $I = 2 - e$; e) $I = e + 1$.

(Univ. Ovidius, Constanța, 2002)

A4. Să se calculeze valoarea integralei

$$I = \int_{-2}^2 (|x - 1| + |x + 1|) dx.$$

(Univ. Transilvania, Brașov, 2005)

A5. Să se calculeze $\int_{-1}^2 \frac{x}{1 + |x|} dx$.

A6. Fie funcția: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^x + ax, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\int_{-1}^{\pi} f(x) dx > -\frac{1}{e}.$$

(Univ. Tehnică, Cluj-Napoca, 2005)

A7. Folosind proprietatea de monotonie a integralei, să se arate că:

a) $\int_{-1}^2 e^{x+1} dx \geq \int_{-1}^2 e^x dx$;

b) $\int_{-1}^2 e^{x^2} dx \geq \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx$;

c) $\int_1^e \ln x dx \leq \int_1^e \frac{x^2 - 1}{2} dx$;

d) $\int_0^1 (x+1) \ln(x+1) dx \geq \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$;

e) $\int_1^3 \ln \frac{x+1}{x} dx > \int_1^3 \frac{2}{2x+1} dx$.

A8. Să se arate că au loc relațiile:

a) $2\sqrt{e} \leq \int_0^1 e^{x^2} dx + \int_0^1 e^{1-x^2} dx \leq 1 + e$;

b) $\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2} dx \leq \sqrt{2}$;

c) $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$;

d) $\frac{\pi}{9} \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx \leq \frac{\pi}{6}$.

A9. Fie $n \in (0, +\infty)$. Să se arate că:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx \leq \frac{1}{2n+1} \quad \text{și să se calcu-}$$

$$\text{leze } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx.$$

A10. Fie funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă

pe $[0, 1]$ și $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$,

$n \in (0, +\infty)$. Folosind modulul integralei, să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

○1. Să se calculeze:

a) $\int_{-2}^{-1} \frac{5x^3 + 4}{x^3} dx;$

b) $\int_{-1}^2 \frac{10}{x^2 - 25} dx.$

(4 puncte)

○2. Să se determine funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, care satisface condițiile: $3f(2) - f'(-1) = -8$ și $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{8}{3}$.

(3 puncte)

○3. Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$, știind că $f(x) = \min(x, \ln(1 + x^2))$.

(2 puncte)

Univ. Transilvania, Brașov, 2005

○4. Căldura specifică a unui corp la temperatura t este egală cu $c(t) = 0,2 + 0,001t$. Ce căldură este necesară pentru a încălzi un gram din acest corp de la 0°C la 100°C ?

Testul 2

○1. Să se calculeze:

a) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{x+3} + \frac{1}{9+x^2} \right) dx;$

b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{\cos^2 x} + \frac{1}{2 \sin^2 x} \right) dx.$

(4 puncte)

○2. Să se compare numerele $\int_1^4 \ln x dx$ și $\int_1^4 \frac{x-1}{x} dx$.

(3 puncte)

○3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 + |x^2 - x| - 1|$.

Dacă $I = \int_0^2 f(x) dx$, atunci:

a) $I = \frac{49}{6};$

b) $I = \frac{5}{6};$

c) $I = \frac{8}{3};$

d) $I = \frac{2}{3}.$

(2 puncte)

Admitere ASE, București, 1999

3

Metode de calcul al integralelor definite

3.1. Metoda de integrare prin părți

TEOREMA 4

Fie $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcții derivabile cu derivatele f' și g' continue. Atunci $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.

(Formula de integrare prin părți)

Demonstrație

Funcția fg este funcție derivabilă pe intervalul $[a, b]$, fiind un produs de funcții derivabile și $(fg)' = f'g + fg'$. Rezultă că funcția fg este o primitivă a funcției $f'g + fg'$.

Aplicând formula lui Leibniz-Newton, se obține:

$$\int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx = f(x)g(x)\Big|_a^b, \quad (1).$$

Din proprietatea de liniaritate a integralei și relația (1) rezultă că:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b, \text{ egalitate din care}$$

se obține relația din enunț:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \quad \blacksquare$$

Exerciții rezolvate

☒ 1. Să se calculeze următoarele integrale, utilizând metoda de integrare prin părți:

$$\text{a) } \int_1^2 xe^x dx; \quad \text{b) } \int_1^e \ln x dx; \quad \text{c) } \int_0^\pi x \cos x dx;$$

$$\text{d) } \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx; \quad \text{e) } \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{x^2-4} dx; \quad \text{f) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x} dx.$$

Soluție

a) Se alege $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$ și se obține $f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$. Conform formulei de integrare prin părți rezultă:

$$\int_1^2 xe^x dx = xe^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = xe^x \Big|_1^2 - e^x \Big|_1^2 = (2e^2 - e) - (e^2 - e) = e^2.$$

b) Se alege $f(x) = \ln x$ și $g'(x) = 1$. Se obține $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$.

Aplicând metoda de integrare prin părți avem:

$$\int_1^e \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e 1 \, dx = (e - 0) - x \Big|_1^e = e - (e - 1) = 1.$$

c) Fie $f(x) = x$ și $g'(x) = \cos x$. Avem $f'(x) = 1$ și $g(x) = \sin x$. Cu această alegere, aplicând metoda de integrare prin părți se obține:

$$\int_0^\pi x \cos x \, dx = x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx = 0 + \cos x \Big|_0^\pi = -1 - 1 = -2.$$

► COMENTARIU

Dacă s-ar face alegerea $f(x) = \cos x$, $g'(x) = x$, atunci metoda de integrare prin părți ar conduce la egalitatea:

$$\int_0^\pi x \cos x \, dx = \frac{x^2}{2} \cos x \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 \sin x \, dx.$$

Se observă că integrala rezultată în membrul al doilea este mai complicată decât cea inițială. În astfel de situații se face o nouă alegere pentru funcțiile f și g' .

d) Alegem $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ și $g'(x) = 1$. Rezultă că $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ și $g(x) = x$.

Aplicând metoda de integrare prin părți se obține:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, dx &= \int_0^1 (x)' \sqrt{1+x^2} \, dx = x \sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \\ &= \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{(1+x^2) - 1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, dx + \\ &+ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, dx + \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \Big|_0^1 = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, dx + \\ &+ \ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Așadar, $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, dx + \ln(1+\sqrt{2})$, relație din care se obține $2 \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, dx = \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$ și $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$.

► COMENTARIU

Calculul acestei integrale putea fi pornit amplificând radicalul cu el însuși, obținându-se succesiv: $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx =$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_0^1 x \cdot \left(\sqrt{1+x^2} \right)' dx.$$

Din acest moment, prima integrală se calculează folosind formula lui Leibniz-Newton pentru primitiva $F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, iar cealaltă integrală se calculează folosind metoda de integrare prin părți alegând $f(x) = x$, $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ și, ca urmare, $f'(x) = 1$ și $g(x) = \sqrt{1+x^2}$.

$$\text{Se obține: } \int_0^1 x \left(\sqrt{1+x^2} \right)' dx = x\sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx.$$

$$\text{Așadar, } \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx, \text{ deci}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) \right].$$

e) Să amplificăm funcția de integrat cu $\sqrt{x^2-4}$.

Avem:

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{x^2-4} dx &= \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} \frac{x^3-4x}{\sqrt{x^2-4}} dx = \\ &= \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}} dx - 4 \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx = \\ &= I_1 - 4\sqrt{x^2-4} \Big|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} = I_1 - 4, \quad (1). \end{aligned}$$

Pentru calculul integralei I_1 se folosește metoda de integrare prin părți, obținând:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} x^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} x^2 \left(\sqrt{x^2-4} \right)' dx = x^2 \sqrt{x^2-4} \Big|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} - \\ &- 2 \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{x^2-4} dx = 11 - 2 \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{x^2-4} dx. \end{aligned}$$

Se observă că I_1 conține și integrala de la care s-a pornit.

Înlocuind pe I_1 în relația (1) se obține în final: $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{x^2-4} dx = \frac{7}{3}$.

□ TEMĂ DE PROIECT

Să se verifice următoarele egalități (în condițiile de existență):

$$1. \int_a^b \sqrt{x^2+c^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2+c^2} + c^2 \ln \left(x + \sqrt{x^2+c^2} \right) \right] \Big|_a^b;$$

$$2. \int_a^b \sqrt{x^2-c^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2-c^2} - c^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2-c^2} \right| \right] \Big|_a^b;$$

$$3. \int_a^b \sqrt{c^2-x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{c^2-x^2} + c^2 \arcsin \frac{x}{c} \right] \Big|_a^b.$$

f) Pentru început, se scrie $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ și apoi se distribuie numitorul comun la fiecare termen al numărătorului. Se obține succesiv:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx + \operatorname{tg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg} x)' dx + (\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3} - 1) + I_1, \quad (2). \end{aligned}$$

Pentru integrala I_1 se aplică metoda de integrare prin părți și se obține:

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x \cdot (\operatorname{tg} x)' dx = \operatorname{tg}^3 x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x \cdot (\operatorname{tg} x)' dx = 3\sqrt{3} - 1 - 2I_1.$$

$$\text{Rezultă că } I_1 = \frac{3\sqrt{3} - 1}{3}, \quad (3).$$

$$\text{Din relațiile (2) și (3) se obține în final că } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x} dx = \frac{6\sqrt{3} - 4}{3}.$$

☒ 2. Să se găsească o formulă de recurență pentru șirul de integrale (I_n) , $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$.

(Bacalaureat 2002, Sesiunea specială)

Soluție

$$\text{Pentru } n = 0 \Rightarrow I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Pentru } n = 1 \Rightarrow I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Pentru $n \geq 2$ vom aplica metoda de integrare prin părți alegând $f(x) = \sin^{n-1} x$ și $g'(x) = \sin x$. Rezultă că $f'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x$, $g(x) = -\cos x$, iar integrala I_n devine:

$$\begin{aligned} I_n &= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

Așadar, $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, relație din care se obține următoarea formulă de recurență: $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze folosind metoda de integrare prin părți:

- a) $\int_0^1 x e^{2x} dx$;
 b) $\int_0^1 (2x-1) e^x dx$;
 c) $\int_1^e x \ln x dx$; d) $\int_1^e x^2 \ln x dx$;
 e) $\int_1^{e^2} \ln^2 x dx$; f) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.

E2. Să se calculeze folosind metoda de integrare prin părți:

- a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin x dx$;
 b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin x dx$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx$;
 d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

E3. Să se calculeze folosind metoda de integrare prin părți:

- a) $\int_1^{\sqrt{5}} \sqrt{x^2+4} dx$;
 b) $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$;
 c) $\int_3^4 \sqrt{x^2-5} dx$;
 d) $\int_0^1 x \sqrt{x^2+1} dx$.

E4. Să se verifice egalitățile:

- a) $\int_0^1 x e^{x-2} dx = \frac{1}{e^2}$;
 b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \right)$;
 c) $\int_0^1 (x + \arcsin x) dx = \frac{\pi-1}{2}$;
 d) $\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{2e^3+1}{9}$.

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze integralele:

- a) $\int_{-1}^1 x^3 e^{x+1} dx$;
 b) $\int_1^{e^2} x \ln^2 x dx$;
 c) $\int_0^1 [x + \ln(1+x^2)] dx$;
 d) $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx$;
 e) $\int_1^e \sin(\ln x) dx$;
 f) $\int_1^{\sqrt{e}} x \log_3 x dx$;

- g) $\int_0^1 (x+x^3) e^{x^2} dx$;
 h) $\int_1^e x^n \ln x dx$, $n \in \mathbb{N}$;
 i) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

A2. Să se calculeze integralele:

- a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$;
 b) $\int_0^{\pi} x \sin^2 \frac{x}{2} dx$;

- c) $\int_0^{\frac{1}{2}} x \arcsin x \, dx$;
- d) $\int_0^1 \arctg x \, dx$;
- e) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \, dx$;
- f) $\int_0^1 e^{\arcsin x} \, dx$;
- g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} \, dx$;
- h) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx$.

A3. Să se calculeze integralele:

- a) $\int_0^1 \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$;
- b) $\int_{\sqrt{2}}^2 x \arctg \sqrt{x^2-1} \, dx$;
- c) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \arcsin x \, dx$;
- d) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \, dx$;
- e) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x \arccos x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \, dx$;
- f) $\int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 \, dx$.

A4. Să se calculeze:

- a) $\int_0^{2\pi} x |\sin x| \, dx$;
- b) $\int_{-1}^3 |x^2 - x| e^x \, dx$;
- c) $\int_{\frac{1}{e}}^e \left(|\ln x| + \frac{1}{x} [\ln x] \right) \, dx$.

A5. Să se determine $a > 0$ astfel încât:

- a) $\int_a^{a+1} (3x-2) e^{x-a} \, dx = 3$;
- b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - ax) \cdot \sin x \, dx = \pi + 8 - 3a^2$.

A6. Să se calculeze integralele:

- a) $\int_0^1 x^2 \sqrt{x^2+4} \, dx$;
- b) $\int_0^1 x^3 \sqrt{x^2+1} \, dx$.

A7. Să se calculeze următoarele integrale:

- a) $\int_1^2 \ln x \cdot g(x) \, dx$, unde $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $g(x) = \max(x+1, x^2-1)$;
- b) $\int_{-1}^2 e^{xf}(x) \, dx$, unde $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = \min(x, x^2)$.

A8. Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că:

- a) $I_n + nI_{n-1} = e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;
- b) (I_n) este monoton și mărginit.

A9. Se consideră șirul (I_n) ,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) Să se calculeze I_0, I_1, I_2 .
- b) Să se studieze monotonia șirului (I_n) .
- c) Să se găsească o formulă de recurență pentru I_n folosind metoda de integrare prin părți.

**A10. Fie șirul (I_n) , $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$,
 $n \in \mathbb{N}$.**

- a) Să se arate că $I_n \cdot (2n+1) = 2n \cdot I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- b) Să se determine formula termenului I_n .
- c) Să se arate că $I_n = C_n^0 - \frac{1}{3} C_n^1 + \frac{1}{5} C_n^2 - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} C_n^n$.

A11. Fie șirul (I_n) , $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx$ și

$$I_n = \int_0^1 e^{-x} x^n dx, n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se calculeze I_0 , I_1 și I_2 .

b) Folosind metoda de integrare prin părți, să se arate că $I_n = -\frac{1}{e} +$

$$+ n \cdot I_{n-1}, n \in \mathbb{N}^*.$$

c) Să se arate că: $I_n = \frac{n!}{e} \left(e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \dots - \frac{1}{n!} \right), n \in \mathbb{N}^*.$

(Bacalaureat, 2002)

3.2. Metode de integrare prin schimbare de variabilă

3.2.1. Prima metodă de schimbare de variabilă

TEOREMA 5

Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval și funcțiile $[a, b] \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ cu proprietățile:

a) u este funcție derivabilă cu derivata continuă pe $[a, b]$;

b) f este funcție continuă pe intervalul J .

$$\text{Atunci } \int_a^b f(u(x)) u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt.$$

(Prima formulă de schimbare de variabilă)

Demonstrație

Funcția f este continuă pe J , deci admite primitive pe intervalul J . Fie F o primitivă a ei. Atunci funcția $F \circ u$ este o funcție derivabilă pe $[a, b]$ și $(F \circ u)'(x) = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x), x \in [a, b]$.

Rezultă că $F \circ u$ este o primitivă pentru funcția $(f \circ u) \cdot u'$. Aplicând formula lui Leibniz-Newton, avem: $\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = (F \circ u)(x) \Big|_a^b = F(u(b)) - F(u(a)), (1).$

Pe de altă parte, aplicând formula lui Leibniz-Newton pentru integrala din membrul drept al egalității din concluzie rezultă:

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt = F(t) \Big|_{u(a)}^{u(b)} = F(u(b)) - F(u(a)), (2).$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt$ și teorema este demonstrată. ■

► COMENTARIU METODIC

Prima formulă de schimbare de variabilă se aplică în mod practic astfel:

- se identifică funcțiile $[a, b] \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$;
- se determină noile limite de integrare $u(a)$ și $u(b)$;
- se calculează $\int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt$.

Funcția u se numește funcția care schimbă variabila.

Exerciții rezolvate

☒ 1. Să se calculeze:

- a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$; b) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx$;
- c) $\int_0^2 (2x-1)e^{x^2-x} dx$; d) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$.

Soluție

a) Se consideră funcția $u: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 1]$, $u(x) = \sin x$, derivabilă, cu $u'(x) = \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și u' continuă. Noile limite de integrare sunt $u(0) = 0$, $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t^3$ este funcție continuă pe $[0, 1]$. În aceste condiții integrala se scrie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^3(x) u'(x) dx = \int_{u(0)}^{u\left(\frac{\pi}{2}\right)} f(t) dt = \int_0^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

b) Se alege funcția $u: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $u(x) = x^3$, funcție derivabilă cu derivata $u'(x) = 3x^2$, $x \in [0, 1]$, funcție continuă.

Rezultă că $u(0) = 0$, $u(1) = 1$. Funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ este funcție continuă. Aplicând prima formulă de schimbare de variabilă se obține:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} dx = \frac{1}{3} \int_{u(0)}^{u(1)} f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= \frac{1}{3} \arctgt \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

c) Se consideră funcția $u : [0, 2] \rightarrow \left[-\frac{1}{4}, 2\right]$, $u(x) = x^2 - x$, derivabilă și cu derivata $u'(x) = 2x - 1$, $x \in [0, 2]$, continuă.

Funcția $f : \left[-\frac{1}{4}, 2\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = e^t$ este continuă pe $\left[-\frac{1}{4}, 2\right]$. Noile limite de integrare sunt $u(0) = 0$, $u(2) = 2$. Integrala se scrie astfel:

$$\int_0^2 (2x-1)e^{x^2-x} dx = \int_0^2 u'(x)e^{u(x)} dx = \int_{u(0)}^{u(2)} f(t) dt = \int_0^2 e^t dt = e^t \Big|_0^2 = e^2 - 1.$$

d) Se alege funcția $u : [0, 2] \rightarrow [0, 4]$, $u(x) = x^2$, funcție derivabilă cu derivata $u'(x) = 2x$, $x \in [0, 2]$, continuă. Noile limite de integrare sunt $u(0) = 0$, $u(2) = 4$, iar funcția $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ este funcție continuă pe intervalul $[0, 4]$.

În aceste condiții, integrala dată se scrie:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)+1}} dx = \int_{u(0)}^{u(2)} f(t) dt = \int_0^4 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln(t + \sqrt{t^2+1}) \Big|_0^4 = \frac{1}{2} \ln(4 + \sqrt{17}). \end{aligned}$$

☒ **2.** Fie $a > 0$ și $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci:

a) $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$, dacă f este funcție pară;

b) $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$, dacă f este funcție impară.

Soluție

Din ipoteza că f este funcție continuă pe $[-a, a]$, rezultă că f este funcție integrabilă pe $[-a, a]$. Aplicând proprietatea de aditivitate la interval, se obține:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx, \quad (1).$$

$$\text{Dar } \int_{-a}^0 f(x) = -\int_0^{-a} f(x) dx.$$

Ne reamintim!

Funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este funcție pară dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$ și funcție impară dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Pentru această ultimă integrală aplicăm schimbarea de variabilă luând $u(x) = -x$, $x \in [0, a]$ și obținem:

$$\begin{aligned}
 -\int_0^{-a} f(x) dx &= \int_0^{-a} u'(x) \cdot f(-u(x)) dx = \int_{u(0)}^{u(-a)} f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx = \\
 &= \begin{cases} \int_0^a f(x) dx, & \text{dacă } f \text{ este funcție pară} \\ -\int_0^a f(x) dx, & \text{dacă } f \text{ este funcție impară} \end{cases}, \quad (2).
 \end{aligned}$$

Din (1) și (2) se obține, pe rând:

a) $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$, dacă f este funcție pară;

b) $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$, dacă f este funcție impară.

Aplicație

☒ Să se calculeze:

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{x^4} \sin x \, dx$;

b) $\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos x \, dx$.

Soluție

a) Funcția $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^4} \cdot \sin x$ este funcție impară. Rezultă că $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 0$.

b) Funcția $f: \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ este funcție pară. Rezultă că $\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos x \, dx = 2 \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos x \, dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} = 2 \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$.

☒ **3.** Să se calculeze $I = \int_{\frac{3}{2}}^2 \sqrt{x^2 - 4x + 6} \, dx$.

Soluție

Expresia de sub radical se scrie sub formă canonică astfel:

$$x^2 - 4x + 6 = (x - 2)^2 + 2.$$

Pentru integrarea prin metoda schimbării de variabilă, alegem funcția $u: \left[\frac{3}{2}, 2\right] \rightarrow \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $u(x) = x - 2$, derivabilă și cu derivata $u'(x) = 1$, $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Noile limite de integrare sunt $u\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, $u(2) = 0$.

Ne reamintim!

$$\bullet ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]$$

(forma canonică a expresiei de gradul 2)

Funcția $f: \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \sqrt{t^2 + 2}$ este continuă pe $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

$$\begin{aligned} \text{În aceste condiții avem } I &= \int_{\frac{3}{2}}^2 \sqrt{u^2(x) + 2} \cdot u'(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \sqrt{t^2 + 2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[t\sqrt{t^2 + 2} + 2 \ln(t + \sqrt{t^2 + 2}) \right] \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 = \ln \sqrt{2} + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

☒ **4.** Să se calculeze integrala: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx$.

Soluție

$$\begin{aligned} \textbf{Metoda 1.} \text{ Avem } I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin x)'}{1 - \sin^2 x} dx = \\ &= -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2 - 1} dt = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \ln \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Metoda 2. Exprimăm $\cos x$ în funcție de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ și avem:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)'}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 1} dx = \\ &= -2 \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1}{t^2 - 1} dt = -\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_0^{2-\sqrt{3}} = \ln \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ne reamintim!

$$\begin{aligned} \bullet \sin x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \\ \bullet \cos x &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

☒ 5. Să se calculeze integrala $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg} x}{4 \cos^2 x + \sin^2 x} dx$.

Soluție

Exprimăm $\sin x$ și $\cos x$ în funcție de $\operatorname{tg} x$ și avem:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{4 + \operatorname{tg}^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x)'}{4 + \operatorname{tg}^2 x} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{2t}{4 + t^2} dt = \int_0^1 \frac{(4 + t^2)'}{4 + t^2} dt = \ln(t^2 + 4) \Big|_0^1 = \ln \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Ne reamintim!

- $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$;
- $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Folosind prima metodă de schimbare de variabilă, să se calculeze:

- a) $\int_1^2 (x-3)^6 dx$;
- b) $\int_{-1}^1 6x^2 (2x^3 + 1)^4 dx$;
- c) $\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^3} dx$;
- d) $\int_{-1}^0 \sqrt[3]{(x-2)} dx$;
- e) $\int_{-1}^0 4x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$;
- f) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{(2x^3 + 3)^3} dx$;
- g) $\int_0^{\sqrt{e}-1} \frac{x}{x^2 + 1} dx$;
- h) $\int_{-1}^1 \frac{2x+3}{x^2 + 3x + 5} dx$;
- i) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^4 - 1} dx$;
- j) $\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{3x^2}{16 - x^6} dx$;
- k) $\int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{1}{4x^2 + 3} dx$;
- l) $\int_0^1 \frac{2x}{x^4 + 1} dx$.

E2. Să se calculeze folosind prima metodă de schimbare de variabilă:

- a) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$;
- b) $\int_0^1 x \cdot 3^{-2x^2} dx$;
- c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cdot \cos x dx$;
- d) $\int_2^{e+1} \frac{1}{x-1} \cdot \ln^4(x-1) dx$;
- e) $\int_{\sqrt{e}}^e \frac{1}{x \cdot \ln^3 x} dx$;
- f) $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx$;
- g) $\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 1}} dx$;
- h) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6 + 1}} dx$.

E3. Să se verifice dacă următoarele egalități sunt adevărate:

- a) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx = \frac{1}{3}$;
- b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx = -\frac{1}{2}$;

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x} dx = \frac{\pi}{4};$$

$$d) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} \arctg^2 x dx = \frac{\pi^3}{96};$$

$$e) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2};$$

$$f) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin^4 x} dx = \frac{63}{\pi^3}.$$

E4. Să se arate că:

$$a) \int_{-3}^3 e^{x^2+1} \cdot \sin^5 x dx = 0;$$

$$b) \int_{-2}^2 \frac{x^6 \arctg x^3}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx = 0.$$

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze utilizând prima metodă de schimbare de variabilă:

$$a) \int_{-1}^1 \frac{x^2 + 4x}{x^3 + 6x^2 + 1} dx;$$

$$b) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 1}} dx;$$

$$c) \int_1^4 \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$d) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3-2x}{2x^2 + 1} dx;$$

$$e) \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^4} dx;$$

$$f) \int_0^{\sqrt{5}} \frac{2x+1}{\sqrt{2x^2+8}} dx;$$

$$g) \int_0^3 \sqrt[3]{(3x-1)^2} dx;$$

$$h) \int_{-1}^7 \frac{1}{4\sqrt{(x+2)^3}} dx;$$

$$i) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx;$$

$$j) \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx;$$

$$k) \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}} dx;$$

$$l) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}} dx;$$

$$m) \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+6x+10} dx;$$

$$n) \int_2^5 \sqrt{-x^2+7x-6} dx;$$

A2. Să se calculeze integralele:

$$a) \int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)} dx;$$

$$b) \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx;$$

$$c) \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx;$$

$$d) \int_1^2 \frac{1}{e^x-1} dx;$$

$$e) \int_{\ln 2}^1 \frac{e^{2x}}{e^x-1} dx;$$

$$f) \int_{\ln \sqrt{2}}^{\ln 2} \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x+1} dx.$$

A3. Să se calculeze integralele:

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 4} dx;$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x + 3} dx;$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx;$$

$$d) \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x \cdot \sin x^2 \cdot \cos x^2 dx;$$

$$e) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{4}{\pi}} (tg^3 x + tg x) dx;$$

$$f) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{4}{\pi}} ctg^3 x dx;$$

$$g) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}} dx;$$

$$h) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^4 x + 1}} dx;$$

$$i) \int \frac{1}{2} \frac{\arcsin x}{x^2} dx;$$

$$j) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{\cos 2x}} dx.$$

A4. Să se calculeze integralele:

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos 3x dx;$$

$$b) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cdot \sin 4x dx;$$

$$c) \int_0^{2\pi} \cos ax \cdot \cos bx dx, a, b \in \mathbb{N};$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \cdot \sin 3x \cdot \cos 2x dx;$$

A5. Să se calculeze integralele:

$$a) \int \frac{2}{3} \frac{1}{\sin x} dx; \quad b) \int \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sin^4 x} dx;$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx; \quad d) \int \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sin^6 x} dx;$$

$$e) \int \frac{\pi}{2} \frac{\cos x}{\sqrt{7 + \cos 2x}} dx.$$

A6. Să se calculeze integralele:

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sin x} dx;$$

$$b) \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx;$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx;$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{9 \cos^2 x + \sin^2 x} dx;$$

$$e) \int \frac{\pi}{3} \frac{1}{\operatorname{tg}^6 x} dx;$$

$$f) \int \frac{\pi}{6} \frac{1}{\cos^4 x \cdot \sin^2 x} dx;$$

$$g) \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x};$$

$$h) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx.$$

A7. Să se calculeze integralele:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx;$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

A8. Se dau următoarele integrale:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx,$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x + \cos x} dx.$$

Să se calculeze $I + J$, $I - J$, I , J .

A9. Calculând în două moduri integrala

$$\int_0^1 (1+x)^n dx, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{să se}$$

$$\text{arate că: } \frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1} =$$

$$= \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

A10. Calculând în două moduri integrala

$$\int_0^1 x(1+x)^n dx, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{să se arate că:}$$

$$\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{n+2} = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}.$$

3.2.2. A doua metodă de schimbare de variabilă

▣ TEOREMA 6

Fie funcțiile $[a, b] \xrightarrow{u} [c, d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ cu proprietățile:

a) u este funcție bijectivă, u și u^{-1} sunt funcții derivabile cu derivatele continue pe intervalul $[a, b]$;

b) f este funcție continuă pe intervalul $[c, d]$.

$$\text{Atunci } \int_a^b f(u(x)) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) (u^{-1})'(t) dt.$$

(A doua formulă de schimbare de variabilă)

Demonstrație

Funcțiile f și u fiind continue, rezultă că $f \circ u$ este funcție continuă pe intervalul $[a, b]$, deci admite primitive pe $[a, b]$. Fie G o primitivă a funcției $f \circ u$ pe intervalul $[a, b]$.

Conform formulei lui Leibniz-Newton se poate scrie:

$$\int_a^b f(u(x)) dx = G(b) - G(a), \quad (1).$$

$$\begin{aligned} \text{Pe de altă parte, } (G \circ u^{-1})'(t) &= G'(u^{-1}(t)) (u^{-1})'(t) = f(u^{-1}(t)) \cdot \\ &\cdot (u^{-1})'(t) = f(t) \cdot (u^{-1})'(t). \end{aligned}$$

$$\text{Rezultă că } \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) (u^{-1})'(t) dt = (G \circ u^{-1})(t) \Big|_{u(a)}^{u(b)} = G(b) - G(a), \quad (2).$$

Din relațiile (1) și (2) se obține relația din enunț. ■

Exerciții rezolvate

▣ **1.** Să se calculeze $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$.

Soluție

$$\text{Avem: } \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2 + 1} = f(u(x)), \quad x \in [1, 3].$$

Alegem funcțiile $u : [1, 3] \rightarrow [1, \sqrt{3}]$, $u(x) = \sqrt{x}$, funcție bijectivă și derivabilă și $f : [1, \sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, funcție continuă.

Funcția inversă $u^{-1} : [1, \sqrt{3}] \rightarrow [1, 3]$, $u^{-1}(t) = t^2$ este funcție derivabilă

cu derivata $(u^{-1})' : [1, \sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{R}$, $(u^{-1})'(t) = 2t$, funcție continuă.

Aplicând formula a doua de schimbare de variabilă se obține:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx &= \int_1^3 f(u(x)) dx = \int_{u(1)}^{u(3)} f(t) \cdot (u^{-1})'(t) dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1} \cdot 2t dt = \\ &= 2 \int_1^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = 2(t - \arctg t) \Big|_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

☒ **2.** Să se calculeze $\int_1^4 \ln(1 + \sqrt{x}) dx$.

Soluție

Se definesc funcțiile:

$$u : [1, 4] \rightarrow [2, 3], u(x) = 1 + \sqrt{x}.$$

$$u^{-1} : [2, 3] \rightarrow [1, 4], u^{-1}(t) = (t-1)^2.$$

$$f : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x.$$

Funcțiile f , u , u^{-1} satisfac condițiile teoremei de schimbare de variabilă și, ca urmare, are loc egalitatea:

$$\begin{aligned} \int_1^4 \ln(1 + \sqrt{x}) dx &= \int_1^4 f(u(x)) dx = \int_{u(1)}^{u(4)} f(t) \cdot (u^{-1})'(t) dt = \\ &= \int_2^3 2(t-1) \cdot \ln t dt. \end{aligned}$$

Ultima integrală se calculează prin metoda de integrare prin părți și se obține:

$$\begin{aligned} \int_2^3 2(t-1) \ln t dt &= \int_2^3 \left[(t-1)^2\right]' \ln t dt = (t-1)^2 \cdot \ln t \Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{(t-1)^2}{t} dt = \\ &= 4 \ln 3 - \ln 2 - \int_2^3 \left(t - 2 + \frac{1}{t}\right) dt = 4 \ln 3 - \ln 2 - \left(\frac{t^2}{2} - 2t + \ln t\right) \Big|_2^3 = 3 \ln 3 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Așadar, } \int_1^4 \ln(1 + \sqrt{x}) dx = 3 \ln 3 - \frac{1}{2}.$$

EXERCIIII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Utilizând metoda a doua de schimbare de variabilă, să se calculeze:

a) $\int_{\frac{1}{4}}^1 (1 + \sqrt{x})^5 dx$; b) $\int_{\frac{1}{8}}^1 (1 - \sqrt[3]{x})^4 dx$;

c) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x+4} dx$; d) $\int_4^9 \frac{1}{2 + \sqrt{x}} dx$.

E2. Să se calculeze integralele:

a) $\int_1^8 \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$;

b) $\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$.

APROFUNDARE

A1. Aplicând metoda a doua de schimbare de variabilă, să se verifice dacă au loc egalitățile:

a) $\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx = 11 + 6 \ln \frac{2}{3};$

b) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x \cdot \ln(1 + e^x) dx = \ln \frac{256}{27e};$

c) $\int_1^8 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx = 8;$

d) $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2}} dx = \frac{\pi}{6}.$

A2. Să se calculeze integralele:

a) $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1} dx;$

b) $\int_1^{27} \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx;$

c) $\int_1^4 \cos^2 \sqrt{x} dx;$

d) $\int_0^3 \sin \sqrt{x+1} dx.$

A3. Să se verifice egalitățile:

a) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx = \frac{1}{3};$

b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2 + 1)(e^x + 1)} dx = \frac{\pi}{4};$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$

DEZVOLTARE

D1. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcție continuă.

a) Să se arate că $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx.$

b) Dacă $f(x) = f(a + b - x),$

$\forall x \in [a, b],$ să se arate că

$\int_a^b x \cdot f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$

c) Dacă $2f(x) + 3f(a + b - x) = 5,$

$\forall x \in [a, b],$ să se calculeze

$\int_a^b f(x) dx.$

D2. Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se arate că:

a) $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx;$

b) $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$

D3. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$ o funcție continuă. Să se calculeze:

a) $\int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a) + f(b-x)} dx;$

b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx, n \in \mathbb{N}^*,$

$J = \int_1^2 \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - 3x + 3}} dx.$

TESTE DE EVALUARE

Testul 1 (pe două grupe de elevi)

○1. Să se calculeze:

a) $\int_0^{\pi} (2x + 3) \sin x \, dx;$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \sqrt{6 \sin x + 1} \, dx;$

c) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \, dx.$

○2. Să se calculeze:

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \sin 2x \, dx.$

○1. Să se calculeze:

a) $\int_0^{\pi} (3x - 1) \cos x \, dx;$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \sqrt{10 \cos x + 4} \, dx;$

c) $\int_1^8 \frac{1}{2 + \sqrt[3]{x}} \, dx.$

○2. Să se calculeze:

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x} \cdot \sin 2x \, dx.$

Testul 2

○1. Să se verifice egalitățile:

a) $\int_1^e \ln \sqrt{x} \, dx = \frac{1}{2};$

(Univ. Craiova, 2004)

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} \, dx = \ln 2;$

(Univ. Tehnică, Petroșani, 1999)

c) $\int_0^1 x e^{1-x} \, dx = e - 2;$

(Univ. Dunărea de Jos, Galați, 2002)

d) $\int_0^1 \frac{x}{x + \sqrt{1+x^2}} \, dx = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{3};$

(Univ. Constantin Brâncoveanu, Pitești, 1999)

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos^2 x \, dx = \frac{2}{15}.$

(Univ. de Petrol și Gaze, Ploiești, 2002)

○2. Fie șirul de integrale (I_n) , $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1 și I_2 .

b) Să se arate că șirul (I_n) este monoton și mărginit.

c) Să se găsească o relație de recurență pentru (I_n) .

Calculul integralelor de forma

4 $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \text{grad}(Q) \leq 4$ prin metoda

descompunerii în funcții raționale simple

Până acum s-a făcut calculul unui număr suficient de integrale de funcții continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, utilizând definiția integralei definite cu ajutorul formulei Leibniz-Newton, metoda de integrare prin părți sau metoda de integrare prin schimbarea de variabilă. Sunt unele funcții continue pentru care calculul integralei definite necesită alte tehnici decât cele întâlnite până aici.

Situație-problemă

Se consideră funcția $f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{9x+2}{x^2+x-6}$. Se pune problema calculului integralei ei, și anume $\int_{-2}^1 \frac{9x+2}{x^2+x-6} dx$.

Se observă că metodele de integrare folosite până acum nu se pot aplica în mod direct acestui tip de integrală. De aceea, se va introduce o nouă metodă de integrare, specifică funcțiilor de felul celei de mai sus, metodă care să înglobeze în multe cazuri și celelalte metode de integrare studiate.

Elemente pregătitoare

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval de numere reale.

❖ DEFINIȚIE

• Funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **funcție rațională** dacă există două funcții polinomiale P, Q astfel încât pentru orice $x \in I$, $Q(x) \neq 0$ și

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

O funcție rațională $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **funcție rațională simplă (fracție simplă)** dacă legea de corespondență are una din formele:

I) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{0, n};$

$$\text{II)} f(x) = \frac{A}{(x-a)^n}, n \in \mathbb{N}^*, x \neq a, A \in \mathbb{R};$$

$$\text{III)} f(x) = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}, n \in \mathbb{N}^*, b^2-4ac < 0, A, B \in \mathbb{R}.$$

4.1. Calculul integralei definite a unei funcții raționale simple

I. Integrale de forma $\int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx$, f_n funcție polinomială de gradul n

Dacă $f_n : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ este funcție polinomială de gradul n , atunci, cu ajutorul formulei lui Leibniz-Newton se obține:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) dx = \left(a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots + a_1 \cdot \frac{x^2}{2} + a_0 x \right) \Big|_{\alpha}^{\beta}, \quad (1).$$

Exemplu

$$\begin{aligned} \bullet \int_1^2 (5x^4 - 4x^3 + 6x - 1) dx &= \left(5 \cdot \frac{x^5}{5} - 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 6 \cdot \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 = (x^5 - x^4 + 3x^2 - x) \Big|_1^2 = \\ &= (2^5 - 2^4 + 3 \cdot 2^2 - 2) - (1^5 - 1^4 + 3 \cdot 1^2 - 1) = 24. \end{aligned}$$

II. Integrale de forma $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{A}{(x-a)^n} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \notin [\alpha, \beta]$

$$1. \text{ Dacă } n=1, \text{ atunci } \int_{\alpha}^{\beta} \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| \Big|_{\alpha}^{\beta}, \quad (2).$$

2. Dacă $n \geq 2$, atunci se folosește metoda schimbării de variabilă și se obține integrala unei funcții putere:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{A}{(x-a)^n} dx &= A \int_{\alpha}^{\beta} (x-a)^{-n} dx = A \int_{\alpha}^{\beta} (u(x))^{-n} \cdot u'(x) dx = \\ &= A \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} t^{-n} dt = -\frac{A}{n-1} \cdot \frac{1}{t^{n-1}} \Big|_{u(\alpha)}^{u(\beta)}, \quad (3). \end{aligned}$$

Exercițiu rezolvat

☒ Să se calculeze următoarele integrale de funcții raționale simple:

a) $\int_{-1}^{e-2} \frac{1}{x+2} dx$; **b)** $\int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{1}{2x+1} dx$; **c)** $\int_1^{\frac{5}{3}} \frac{1}{(3x-6)^3} dx$.

Soluție

a) Aplicând formula (2) se obține:

$$\int_{-1}^{e-2} \frac{1}{x+2} dx = \ln|x+2| \Big|_{-1}^{e-2} = \ln e - \ln 1 = 1.$$

b) Integrala se scrie succesiv: $\int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{1}{2x+1} dx = \int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{1}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} dx =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{1}{x+\frac{1}{2}} dx \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{2} \right| \Big|_0^{\frac{e-1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{e-1}{2} + \frac{1}{2} \right) - \ln \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{e}{2} - \ln \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e}{2} \cdot \frac{2}{1} \right) = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}.$$

Calcululele mai pot fi organizate și astfel:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{1}{2x+1} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{2}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{(2x+1)'}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{u(0)}^{u\left(\frac{e-1}{2}\right)} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln |t| \Big|_1^e = \frac{1}{2} (\ln e - \ln 1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) $\int_1^{\frac{5}{3}} \frac{1}{(3x-6)^3} dx = \int_1^{\frac{5}{3}} \frac{1}{3^3 (x-2)^3} dx = \frac{1}{27} \int_1^{\frac{5}{3}} (x-2)^{-3} dx \stackrel{(3)}{=}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{27} \int_1^{\frac{5}{3}} u^{-3}(x) \cdot u'(x) dx = \frac{1}{27} \int_{u(1)}^{u\left(\frac{5}{3}\right)} t^{-3} dt = \frac{1}{27} \int_{-1}^{-\frac{1}{3}} t^{-3} dt = \frac{1}{27} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot t^{-2} \right) \Big|_{-1}^{-\frac{1}{3}} = \\ &= -\frac{1}{54} \cdot \frac{1}{t^2} \Big|_{-1}^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{54} (9 - 1) = -\frac{4}{27}. \end{aligned}$$

➤ OBSERVAȚIE

• Această integrală se poate calcula aplicând mai întâi metoda schimbării de variabilă, apoi formula (2):

$$\int_1^{\frac{5}{3}} \frac{1}{(3x-6)^3} dx = \frac{1}{3} \int_1^{\frac{5}{3}} \frac{3}{(3x-6)^3} dx = \frac{1}{3} \int_1^{\frac{5}{3}} \frac{u'(x)}{u^3(x)} dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{t^3} dt = \dots = -\frac{4}{27}.$$

III. Integrale de forma

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} dx, \quad b^2 - 4ac < 0, \quad n \in \{1, 2\}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

În funcție de valorile lui n și ale coeficienților A, B, a, b, c apar următoarele tipuri de integrale:

1. Integrale de forma $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{Ax + B}{x^2 + a^2} dx, \quad a \neq 0$

a) Dacă $A = 0$ și $B = 1$ se obține integrala:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \Big|_{\alpha}^{\beta}.$$

b) Dacă $A = 1, B = 0$ se obține integrala:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{x^2 + a^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(x^2 + a^2)'}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln |t| \Big|_{u(\alpha)}^{u(\beta)}. \end{aligned}$$

c) Dacă $A \neq 0, B \neq 0$, atunci se obține succesiv integrala:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{Ax + B}{x^2 + a^2} dx = A \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{x^2 + a^2} dx + B \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x^2 + a^2} dx \quad \text{și calculul se continuă ca la punctele a) și b).}$$

Exercițiu rezolvat

☒ Să se calculeze integralele de funcții raționale:

a) $\int_0^5 \frac{dx}{x^2 + 25};$ **b)** $\int_1^3 \frac{x}{x^2 + 3} dx;$ **c)** $\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{4x - 3}{x^2 + 9} dx.$

Soluție

a) Avem $\int_0^5 \frac{dx}{x^2 + 25} = \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{5} \Big|_0^5 = \frac{1}{5} (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{20}.$

b) $\int_1^3 \frac{x}{x^2 + 3} dx = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{2x}{x^2 + 3} dx = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{(x^2 + 3)'}{x^2 + 3} dx = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{u'(x)}{u(x)} dx =$
 $= \frac{1}{2} \int_{u(1)}^{u(3)} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \int_4^{12} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln |t| \Big|_4^{12} = \frac{1}{2} (\ln 12 - \ln 4) = \frac{1}{2} \ln \frac{12}{4} = \frac{1}{2} \ln 3.$

c) $\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{4x - 3}{x^2 + 9} dx = \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{4x}{x^2 + 9} dx - \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{3}{x^2 + 9} dx = 2 \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{2x}{x^2 + 9} dx -$

$$\begin{aligned}
 -3 \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{1}{x^2 + 9} dx &= 2 \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{(x^2 + 9)'}{x^2 + 9} dx - 3 \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{1}{x^2 + 9} dx = 2 \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{u'(x)}{u(x)} dx - \\
 -3 \cdot \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} \Big|_{\sqrt{3}}^3 &= 2 \int_{12}^{18} \frac{1}{t} dt - \arctg \frac{x}{3} \Big|_{\sqrt{3}}^3 = 2 \ln t \Big|_{12}^{18} - \arctg 1 + \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = \\
 &= 2(\ln 18 - \ln 12) - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = 2 \ln \frac{3}{2} - \frac{\pi}{12}.
 \end{aligned}$$

2. Integrale de forma $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{Ax + B}{(x^2 + a^2)^2} dx$, $a \neq 0$

a) Dacă $A = 1$ și $B = 0$ se obține integrala de tipul:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} dx \text{ care se calculează cu metoda schimbării de }$$

variabilă. Se obține:

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(x^2 + a^2)'}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} u^{-2}(x) \cdot u'(x) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} t^{-2} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} \Big|_{u(\alpha)}^{u(\beta)}.
 \end{aligned}$$

b) Dacă $A = 0$ și $B = 1$ se obține integrala de tipul $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx$.

Pentru calculul acestei integrale de funcție rațională se procedează astfel:

- se amplifică funcția de integrat cu a^2 ;
- se adună și se scade x^2 la numărător;
- se desparte integrala în sumă de două integrale mai simple: o integrală este de tipul III.1.a), iar cealaltă integrală se calculează prin metoda integrării prin părți.

Calculule se organizează astfel:

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx &= \frac{1}{a^2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{a^2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(a^2 + x^2) - x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \\
 &= \frac{1}{a^2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x^2 + a^2} dx - \frac{1}{a^2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{a^3} \arctg \frac{x}{a} \Big|_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{a^2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx.
 \end{aligned}$$

Ultima integrală se calculează cu metoda de integrare prin părți:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} dx \stackrel{\text{III.2.a)}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + a^2} \right)' dx =$$

$$= -\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + a^2} \Big|_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = -\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + a^2} \Big|_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \Big|_{\alpha}^{\beta}.$$

În final se obține: $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{x^2 + a^2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \quad (4)$

c) Dacă $A \neq 0$, $B \neq 0$ se obține integrala de formă completă:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{Ax + B}{(x^2 + a^2)^2} dx.$$

Calculul acestei integrale se reduce la calculul a două integrale de tipurile prezentate mai sus.

Avem: $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{Ax + B}{(x^2 + a^2)^2} dx = A \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} dx + B \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx. \quad (5)$

Exercițiu rezolvat

☒ Să se calculeze următoarele integrale de funcții raționale simple:

a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$; **b)** $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$; **c)** $I_3 = \int_0^1 \frac{3x - 2}{(x^2 + 1)^2} dx$.

Soluție

Integrala I_1 este de tipul III.2.a) și ca urmare se calculează folosind metoda schimbării de variabilă. Avem:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u'(x)}{u^2(x)} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 t^{-2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4}. \text{ Așadar, } I_1 = \frac{1}{4}.$$

b) Integrala I_2 este de tipul III.2.b). Pentru calculul ei se urmează algoritmul descris la acest tip de integrală. Se obține succesiv:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \int_0^1 \frac{(1 + x^2) - x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx - \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx =$$

$$= \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - J = \frac{\pi}{4} - J.$$

Integrala J se calculează cu metoda integrării prin părți și se obține succesiv:

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int_0^1 x \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \int_0^1 x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \right)' dx = -\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}.$$

TEMĂ
Să se calculeze integrala I_2 aplicând formula (4).

Rezultă că $I_2 = \frac{\pi}{4} - J = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \right)$, adică

$$I_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

c) Conform formulei (5), integrala I_3 se scrie sub forma:

$$I_3 = \int_0^1 \frac{3x-2}{(x^2+1)^2} dx = 3 \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx - 2 \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx.$$

Se observă că $I_3 = 3I_1 - 2I_2$. Preluând rezultatele de la punctele a) și b) se obține în final că $I_3 = \frac{1-\pi}{4}$.

3. Integrale de forma $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$

a) Dacă $A = 0$, $B = 1$, se obține integrala de tipul $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$,

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

Pentru calculul acestei integrale, se scrie expresia ax^2+bx+c sub forma canonică, anume $ax^2+bx+c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$ și apoi se aplică metoda de integrare prin schimbare de variabilă.

Se obține succesiv:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{ax^2+bx+c} dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}} dx = \frac{1}{a} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} \right)^2} dx = \\ &= \frac{1}{a} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{u'(x)}{u^2(x) + k^2} dx = \frac{1}{a} \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} \frac{1}{t^2 + k^2} dt = \frac{1}{a \cdot k} \operatorname{arctg} \frac{t}{k} \Big|_{u(\alpha)}^{u(\beta)}. \end{aligned}$$

(S-a notat $k^2 = \left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\right)^2$ și $u(x) = x + \frac{b}{2a}$, $x \in [\alpha, \beta]$.)

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se calculeze integrala $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$.

Soluție

Se observă că $\Delta = -3 < 0$, caz în care scriem expresia de la numitor sub formă canonică: $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

Integrala se scrie:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx.$$

Aplicând metoda schimbării de variabilă, notând $u(x) = x + \frac{1}{2}$,

$x \in [0, 1]$ se obține:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{u'(x)}{u^2(x) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{1}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

☒ **2.** Să se calculeze integrala $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{4x^2 - 4x + 2} dx$.

Soluție

Numitorul funcției de integrat are $\Delta = -16$ și forma canonică $4x^2 - 4x + 2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$. În acest caz integrala se scrie succesiv:

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{4x^2 - 4x + 2} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dx.$$

Alegând $u(x) = x - \frac{1}{2}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, cu $u'(x) = 1$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ și aplicând metoda schimbării de variabilă, integrala devine:

$$I = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{u'(x)}{u^2(x) + \left(\frac{1}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{4} \int_{u\left(\frac{1}{2}\right)}^{u(1)} \frac{1}{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} dt = \frac{1}{4} \cdot 2 \operatorname{arctg} 2t \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8}.$$

b) Dacă $A = 1$ și $B = 0$ se obține integrala de tipul $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx$,

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

Pentru calculul integralei se folosește metoda schimbării de variabilă luând $u(x) = ax^2 + bx + c$, cu $u'(x) = 2ax + b$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Calculul decurge astfel:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx &= \frac{1}{2a} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2ax}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{2a} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(2ax + b) - b}{ax^2 + bx + c} dx = \\ &= \frac{1}{2a} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{u'(x)}{u(x)} dx - \frac{b}{2a} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{2a} \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} \frac{1}{t} dt - \frac{b}{2a} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \\ &= \frac{1}{2a} \ln t \Big|_{u(\alpha)}^{u(\beta)} - \frac{b}{2a} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx. \end{aligned}$$

Ultima integrală obținută este de tipul III.3.a) tratat anterior.

c) Dacă $A \neq 0$, $B \neq 0$, atunci se desparte în sumă de două integrale de tipul celor întâlnite anterior.

$$\text{Astfel, } \int_{\alpha}^{\beta} \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = A \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx + B \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Exercițiu rezolvat

☒ Fie funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{3x^2 - 6x + 4}$.

a) Să se scrie sub forma canonică expresia $3x^2 - 6x + 4$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

Soluție

a) Pentru expresia $3x^2 - 6x + 4$, $\Delta = 36 - 48 = -12$.

$$\text{Rezultă că } 3x^2 - 6x + 4 = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} = 3(x-1)^2 + 1.$$

b) Avem:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \frac{x+1}{3x^2-6x+4} dx = \int_0^1 \frac{x}{3x^2-6x+4} dx + \int_0^1 \frac{1}{3x^2-6x+4} dx = \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{6x}{3x^2-6x+4} dx + \int_0^1 \frac{1}{3x^2-6x+4} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{(6x-6)+6}{3x^2-6x+4} dx + \\
 &+ \int_0^1 \frac{1}{3x^2-6x+4} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{(3x^2-6x+4)'}{(3x^2-6x+4)} dx + 2 \int_0^1 \frac{1}{3x^2-6x+4} dx = \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)} dx + \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2 + \frac{1}{3}} dx = \frac{1}{6} \cdot \ln t \Big|_4^1 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \arctg(x-1)\sqrt{3} \Big|_0^1 = \\
 &= -\frac{1}{6} \ln 4 + \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi.
 \end{aligned}$$

4. Integrale de forma $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^2} dx$, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$

Dacă $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]$ și $u(x) = x + \frac{b}{2a}$, $x \in [\alpha, \beta]$,

integrala se transformă astfel:

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{Ax+B}{a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]^2} dx &= \frac{1}{a^2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{A \left(x + \frac{b}{2a} \right) - \frac{Ab}{2a} + B}{\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]^2} dx = \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(Cu(x)+D)u'(x)}{(u^2(x)+k^2)^2} dx = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} \frac{Ct+D}{(t^2+k^2)^2} dt, \text{ unde } C = \frac{A}{a^2}, \quad D = \frac{1}{a^2} \left(-\frac{Ab}{2a} + B \right)
 \end{aligned}$$

și $k^2 = \frac{-\Delta}{4a^2}$.

Așadar, calculul acestei integrale s-a redus la calculul unei integrale de tipul III. 2.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se calculeze integrala $\int_{-2}^0 \frac{2x+3}{(x^2+4x+8)^2} dx$.

Soluție

Numitorul se scrie sub forma: $x^2 + 4x + 8 = (x + 2)^2 + 4$, iar integrala se scrie succesiv astfel:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^0 \frac{2x+3}{[(x+2)^2+4]^2} dx = \int_{-2}^0 \frac{2(x+2)-1}{[(x+2)^2+4]^2} dx = \int_{-2}^0 \frac{2u(x)-1}{[u^2(x)+4]^2} \cdot u'(x) dx = \\ &= \int_{u(-2)}^{u(0)} \frac{2t-1}{(t^2+4)^2} dt = \int_0^2 \frac{2t}{(t^2+4)^2} dt - \int_0^2 \frac{1}{(t^2+4)^2} dt = I_1 - I_2. \end{aligned}$$

Integralele I_1 și I_2 sunt de tipul III.2. Se obține:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 \frac{2t}{(t^2+4)^2} dt = \int_0^2 \frac{(t^2+4)'}{(t^2+4)^2} dt = \int_0^2 \frac{v'(t)}{v^2(t)} dt = \int_{v(0)}^{v(2)} \frac{1}{y^2} dy = \\ &= -\frac{1}{y} \Big|_4^8 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}; \quad (v(t) = t^2 + 4). \\ I_2 &= \int_0^2 \frac{1}{(t^2+4)^2} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{4}{(t^2+4)^2} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{(4+t^2) - t^2}{(t^2+4)^2} dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{1}{t^2+4} dt - \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{t^2}{(t^2+4)^2} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \arctg \frac{t}{2} \Big|_0^2 - \frac{1}{4} \int_0^2 t \cdot \left(\frac{-1}{2(t^2+4)} \right)' dt = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{-t}{2(t^2+4)} \Big|_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{t^2+4} dt \right) = \frac{\pi}{32} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{t}{2} \Big|_0^2 \right) = \\ &= \frac{\pi}{32} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{8} + \frac{\pi}{16} \right) = \frac{\pi}{64} + \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

În final se obține că $I = I_1 - I_2 = \frac{6-\pi}{64}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze integralele:

a) $\int_{-2}^1 (8x^3 - 6x^2 + 4x - 1) dx;$

b) $\int_{-1}^1 ((2x^2 - 3)^2 + 6x^4) dx;$

c) $\int_0^1 (5x - 2)(2x^2 - 3) dx.$

E2. Să se calculeze integralele:

a) $\int_1^3 \frac{1}{x+2} dx;$ b) $\int_1^2 \frac{1}{x-5} dx;$

$$\text{c) } \int_{-5}^3 \frac{1}{2x-8} dx; \quad \text{d) } \int_{\frac{3}{5}}^1 \frac{1}{5x-2} dx.$$

E3. Să se verifice egalitățile:

$$\text{a) } \int_{-2}^1 \frac{1}{(x-2)^2} dx = \frac{3}{4};$$

$$\text{b) } \int_{-3}^{-2} \frac{1}{(x+1)^4} dx = \frac{7}{24};$$

$$\text{c) } \int_{-1}^2 \frac{1}{(3x+6)^2} dx = \frac{1}{12};$$

$$\text{d) } \int_{-1}^1 \frac{32}{(2x-6)^3} dx = -\frac{3}{8};$$

$$\text{e) } \int_{-1}^0 \frac{8}{(-x+1)^5} dx = \frac{15}{8};$$

$$\text{f) } \int_{-1}^0 \frac{24}{(\sqrt[3]{4x} - \sqrt[3]{32})^3} dx = -\frac{5}{12}.$$

E4. Să se calculeze integralele:

$$\text{a) } \int_0^6 \frac{1}{x^2 + 36} dx;$$

$$\text{b) } \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 3} dx;$$

$$\text{c) } \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2x^2 + 18} dx;$$

$$\text{d) } \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6x^2 + 24}} dx.$$

E5. Să se calculeze integralele:

$$\text{a) } \int_0^3 \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx;$$

$$\text{b) } \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx;$$

$$\text{c) } \int_{-5}^5 \frac{10}{(3x^2 + 75)^2} dx;$$

$$\text{d) } \int_{-1}^1 \frac{12}{(\sqrt{18} + \sqrt{2x^2})^2} dx.$$

E6. Să se calculeze integralele:

$$\text{a) } \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx;$$

$$\text{b) } \int_2^4 \frac{1}{x^2 - 8x + 20} dx;$$

$$\text{c) } \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 3x + 3} dx;$$

$$\text{d) } \int_0^{\sqrt{3}} \frac{6}{x^2 - 2\sqrt{3}x + 12} dx;$$

$$\text{e) } \int_6^8 \frac{1}{x^2 - 14x + 50} dx;$$

$$\text{f) } \int_{-1}^1 \frac{1}{(x+3)^2 - 4x} dx.$$

E7. Să se calculeze integralele:

$$\text{a) } \int_{-\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}-1} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx;$$

$$\text{b) } \int_3^4 \frac{dx}{(x^2 - 6x + 10)^2};$$

$$\text{c) } \int_{-7}^{-3} \frac{dx}{(x^2 + 10x + 29)^2};$$

$$\text{d) } \int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{18}{(x^2 + 2\sqrt{3}x + 12)^2} dx.$$

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze integralele:

$$\text{a) } \int_1^{\sqrt{6}} \frac{4x}{x^2 + 9} dx;$$

$$\text{b) } \int_{-1}^1 \frac{4x-3}{2x^2 + 6} dx;$$

$$\text{c) } \int_{-1}^2 \frac{5x}{(x^2 + 6)^2} dx;$$

$$\text{d) } \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x - \sqrt{2}}{(x^2 + 2)^2} dx.$$

A2. Să se verifice dacă sunt adevărate egalitățile:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} dx = \ln \sqrt{3} - \frac{(2 - \sqrt{3})\pi}{18};$$

$$\text{b) } \int_3^5 \frac{2x}{x^2 - 8x + 17} dx = 4\pi;$$

$$\text{c) } \int_{-5}^{-1} \frac{8x - 3}{x^2 + 6x + 13} dx = -\frac{27\pi}{4}.$$

A3. Să se verifice dacă sunt adevărate egalitățile:

$$\text{a) } \int_{-1}^0 \frac{2x + 3}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \frac{\pi + 6}{8};$$

$$\text{b) } \int_5^8 \frac{x - 6}{(x^2 - 10x + 34)^2} dx = \frac{4 - \pi}{216}.$$

4.2. Calculul integralei definite a unei funcții raționale oarecare

În acest paragraf se va vedea că orice funcție rațională se scrie ca o sumă finită de funcții raționale simple. Astfel, calculul integralei definite a unei funcții raționale oarecare se reduce la calculul de integrale de funcții raționale simple. Scrierea funcției raționale ca o sumă finită de funcții raționale simple este asigurată de următoarea teoremă care va fi dată fără demonstrație:

TEOREMA 7 (de descompunere a unei funcții raționale în sumă finită de funcții raționale simple)

Fie funcția rațională $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, unde $P, Q \in \mathbb{R}[X]$

sunt polinoame prime între ele și $Q(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.

Dacă $Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_p)^{\alpha_p} (x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1} \cdot$

$\cdot (x^2 + b_2x + c_2)^{\beta_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + b_rx + c_r)^{\beta_r}$, unde $b_k^2 - 4c_k < 0$, $k = \overline{1, r}$,

atunci $f(x)$ se scrie în mod unic sub forma:

$$f(x) = L(x) + \sum_{k=1}^p \left(\frac{A_k^{(1)}}{x - a_k} + \frac{A_k^{(2)}}{(x - a_k)^2} + \dots + \frac{A_k^{(\alpha_k)}}{(x - a_k)^{\alpha_k}} \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^r \left(\frac{B_k^{(1)}x + C_k^{(1)}}{x^2 + b_kx + c_k} + \frac{B_k^{(2)}x + C_k^{(2)}}{(x^2 + b_kx + c_k)^2} + \dots + \frac{B_k^{(\beta_k)}x + C_k^{(\beta_k)}}{(x^2 + b_kx + c_k)^{\beta_k}} \right), \text{ unde}$$

$L \in \mathbb{R}[X]$.

Mod practic de aplicare a teoremei

Pentru descompunerea unei funcții raționale în sumă finită de funcții raționale simple se procedează astfel:

a) Se efectuează împărțirea cu rest a polinoamelor P, Q , dacă $\text{grad} P \geq \text{grad} Q$, rezultând relația $P = L \cdot Q + R$, $0 \leq \text{grad} R < \text{grad} Q$ și

$$f(x) = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

b) Pentru $\frac{R(x)}{Q(x)}$ se scrie for-

mula de descompunere în sumă finită de funcții raționale simple conform teoremei anterioare, unde coeficienții $A_k^{(i)}, B_k^{(i)}, C_k^{(i)}$ urmează a fi determinați.

c) În egalitatea obținută la punctul b) se elimină numitorul comun $Q(x)$ și se ajunge la o egalitate de funcții polinomiale.

d) Din egalitatea funcțiilor polinomiale se obține un sistem de ecuații în care necunoscutele sunt coeficienții $A_k^{(i)}, B_k^{(i)}, C_k^{(i)}$.

Metoda de determinare a coeficienților $A_k^{(i)}, B_k^{(i)}, C_k^{(i)}$ se numește **metoda coeficienților nedeterminați**.

Vom exemplifica utilizarea acestei teoreme în calculul integralei unei funcții raționale pentru diferite funcții raționale $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0, \quad \text{pentru } x \in [a, b], \quad P, Q \in \mathbb{R}[X] \quad \text{și} \quad \text{grad} Q \leq 4,$$

distingând între diferite moduri de descompunere în factori ireductibili a numitorului $Q(x)$.

ISTORIC

LEIBNIZ și Johann BERNOULLI au inițiat în 1702 metoda integrării funcțiilor raționale prin descompunerea în funcții raționale simple (cazul rădăcinilor reale sau complexe simple).

Leonhard EULER a completat metoda în cazul rădăcinilor complexe multiple (1748).

1. Numitorul are rădăcini reale simple.

Exemplu

♦ Să se calculeze următoarele integrale:

$$\text{a)} \quad I = \int_{-2}^1 \frac{9x+2}{x^2+x-6} dx;$$

$$\text{b)} \quad J = \int_1^2 \frac{2x^3+3x^2-4x+2}{x^2+2x} dx.$$

Soluție

$$\text{a)} \quad \text{Considerăm funcția rațională } f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{9x+2}{x^2+x-6}.$$

Expresia $x^2 + x - 6$ are următoarea descompunere în produs de factori ireducibili peste $\mathbb{R}$: $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$.

Conform teoremei 7, funcția f are următoarea scriere ca sumă de funcții raționale simple:

$$f(x) = \frac{9x + 2}{x^2 + x - 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 3}, \quad x \in [-2, 1], \quad (1).$$

Se elimină numitorul comun și se obține egalitatea de funcții:

$$9x + 2 = x(A + B) + 3A - 2B, \quad x \in [-2, 1], \quad (2).$$

Identificând coeficienții expresiilor polinomiale din egalitatea (2) se obține sistemul de ecuații:

$$A + B = 9, \quad 3A - 2B = 2 \quad \text{cu soluția } A = 4, B = 5.$$

$$\text{Așadar, relația (1) devine: } f(x) = \frac{4}{x - 2} + \frac{5}{x + 3}, \quad x \in [-2, 1].$$

$$\text{Rezultă că } I = \int_{-2}^1 \left(\frac{4}{x - 2} + \frac{5}{x + 3} \right) dx = (4 \ln|x - 2| + 5 \ln|x + 3|) \Big|_{-2}^1 = \ln 4.$$

➤ OBSERVAȚIE

Cu această rezolvare, s-a răspuns la situația-problemă formulată la începutul paragrafului 4.

b) Considerăm funcția rațională $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x + 2}{x^2 + 2x}$. Se observă că gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului. Aplicând algoritmul de împărțire a două polinoame și teorema împărțirii cu rest a polinoamelor, se obține că $2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = (2x - 1)(x^2 + 2x) + (-2x + 2)$.

$$\text{Rezultă că } f(x) = \frac{(2x - 1)(x^2 + 2x) + (-2x + 2)}{x^2 + 2x} = 2x - 1 + \frac{-2x + 2}{x^2 + 2x}.$$

Rămâne de scris ca sumă de funcții raționale simple funcția:

$$g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{-2x + 2}{x^2 + 2x}.$$

$$\text{Avem: } \frac{-2x + 2}{x^2 + 2x} = \frac{-2x + 2}{x(x + 2)}.$$

$$\text{Conform teoremei 7 se obține } \frac{-2x + 2}{x(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2}, \quad x \in [1, 2].$$

Eliminând numitorul se obține egalitatea de funcții polinomiale:

$$-2x + 2 = x(A + B) + 2A, \quad \forall x \in [1, 2].$$

Identificând coeficienții celor două expresii polinomiale se obține sistemul de ecuații: $A + B = -2$, $2A = 2$ cu soluția $A = 1$ și $B = -3$.

$$\text{Așadar, } g(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x + 2}, \quad \forall x \in [1, 2] \quad \text{și } f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x + 2}, \quad x \in [1, 2].$$

$$\begin{aligned} \text{Rezultă că } J &= \int_1^2 \left(2x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x + 2} \right) dx = \left(x^2 - x + \ln|x| - 3 \ln|x + 2| \right) \Big|_1^2 = \\ &= 2 + \ln 2 + 3 \cdot \ln \frac{3}{4} = 2 + \ln \frac{27}{32}. \end{aligned}$$

2. Numitorul are rădăcini reale multiple.

Exemplu

- ♦ Să se calculeze integrala $I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{3-2x}{x^2(x-1)^2} dx$.

Soluție

Se consideră funcția $f: \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3-2x}{x^2(x-1)^2}$.

Aplicând teorema 7, expresia funcției f se scrie astfel:

$$\frac{3-2x}{x^2(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}, \quad x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right].$$

Eliminând numitorul comun se obține egalitatea:

$$3-2x = Ax(x-1)^2 + B(x-1)^2 + Cx^2(x-1) + Dx^2, \quad x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \text{ sau } 3-2x = (A+C)x^3 + (-2A+B-C+D)x^2 + (A-2B)x + B, \quad x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \quad (1).$$

Identificând coeficienții aceluiași puteri ale lui x din cei doi membri ai egalității se obține sistemul de ecuații: $A+C=0$, $-2A+B-C+D=0$, $A-2B=-2$, $B=3$, cu soluția $A=4$, $B=3$, $C=-4$, $D=1$.

$$\text{Așadar, } \frac{3-2x}{x^2(x-1)^2} = \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}, \quad x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right].$$

$$\begin{aligned} \text{Rezultă că: } I &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \left(4 \ln|x| - \frac{3}{x} - 4 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} \right) \Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{19}{6} - 4 \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

OBSERVAȚIE

Constantele A, B, C, D din egalitatea (1) se mai pot determina astfel:

- Se dă lui x valoarea zero și se obține $B=3$ și apoi pentru $x=1$ se obține $D=1$.
- Pentru determinarea constantelor A și C se derivează egalitatea (1) și se obține:

$$-2 = A(3x^2 - 4x + 1) + 2B(x-1) + C(3x^2 - 2x) + 2Dx.$$

Punând în această egalitate $x=0$ se obține $A=4$ și punând $x=1$ se obține $C=-4$.

3. Numitorul are rădăcini complexe simple.

Exemplu

- Să se determine integrala funcției $f: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{16}{x^4 + 4}$.

Soluție

Descompunerea în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ a numitorului conduce la următoarea scriere $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

Aplicăm teorema 7 și obținem următoarea descompunere în sumă finită de funcții raționale:

$$\frac{16}{x^4 + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2}, \quad \forall x \in [-1, 0].$$

Aplicând metoda coeficienților nedeterminați se obține egalitatea:

$$16 = (A + C)x^3 + (2A + B - 2C + D)x^2 + (2A + 2B + 2C - 2D)x + 2B + 2D, \quad x \in [-1, 0].$$

Identificând coeficienții acelorași puteri ale lui x din cei doi membri se obține sistemul de ecuații:

$$A + C = 0, \quad 2A + B - 2C + D = 0, \quad 2A + 2B + 2C - 2D = 0, \quad 2B + 2D = 16, \quad \text{cu soluția } A = -2, \quad B = 4, \quad C = 2, \quad D = 4.$$

$$\begin{aligned} \text{Așadar, } f(x) &= \frac{-2x+4}{x^2-2x+2} + \frac{2x+4}{x^2+2x+2} \text{ și } \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{-2x+4}{x^2-2x+2} dx + \\ &+ \int_{-1}^0 \frac{2x+4}{x^2+2x+2} dx = -\int_{-1}^0 \left(\frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{x^2-2x+2} \right) dx + \int_{-1}^0 \left(\frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \right. \\ &\left. + \frac{2}{x^2+2x+2} \right) dx = -\int_{-1}^0 \frac{(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2} dx + 2 \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-1)^2+1} + \int_{-1}^0 \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2} dx + \\ &+ 2 \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int_2^5 \frac{dt}{t} + 2 \int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t^2+1} + \int_1^2 \frac{dt}{t} + 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \ln t \Big|_2^5 + 2 \arctg t \Big|_{-2}^{-1} + \\ &+ \ln t \Big|_1^2 + 2 \arctg t \Big|_0^1 = \ln 5 + 2 \arctg 2. \end{aligned}$$

4. Numitorul are rădăcini complexe multiple.

Exemplu

- Să se calculeze integrala $\int_{-1}^1 \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 + 1)^2} dx$.

Soluție

$$\text{Considerăm funcția rațională } f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Aplicând teorema 7 se obține:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Metoda coeficienților nedeterminați conduce la următoarea egalitate:

$x^2 - 3x + 2 = (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D$, $x \in [-1, 1]$, din care se obține sistemul de ecuații:

$A = 0$, $B = 1$, $A + C = -3$, $B + D = 2$ cu soluțiile $A = 0$, $B = 1$, $C = -3$, $D = 1$. Rezultă că f se scrie ca sumă de funcții raționale simple astfel:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{3x - 1}{(x^2 + 1)^2}, \quad x \in [-1, 1], \text{ iar integrala se scrie sub forma:}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 1} - \int_{-1}^1 \frac{3x - 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \arctg x \Big|_{-1}^1 - I_1 = \frac{\pi}{2} - I_1, \quad (1).$$

Calculăm I_1 în felul următor:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx - \int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{3}{2} \int_2^1 \frac{1}{t^2} dt - \int_{-1}^1 \frac{(1 + x^2) - x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \\ &= 0 - \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)} + \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = -\arctg x \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 x \left[\frac{-1}{2(x^2 + 1)} \right] dx = \\ &= -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2(x^2 + 1)} \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \arctg x \Big|_{-1}^1 = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}, \quad (2). \end{aligned}$$

Din relațiile (1) și (2) se obține că $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

Aplicație în fizică

Concentrația unei soluții apoase a unei substanțe, variază urmând

legea: $C(x) = \frac{10x}{x+1}$ (g/m³), x fiind grosimea stratului de soluție.

Care este cantitatea Q de substanță conținută într-o coloană verticală de soluție a cărei secțiune dreaptă este $S = 1 \text{ m}^2$ și grosimea variind între 0 și 200 m?

Soluție

Considerăm un strat foarte mic al coloanei de soluție apoasă cu secțiunea S și grosimea dx , situat la adâncimea x (figura 1).

Cantitatea de substanță conținută în acest strat este: $dQ = C \cdot S dx = \frac{10x}{x+1} dx$. Integrând de la 0 la 200 se obține:

$$\begin{aligned} Q &= 10 \int_0^{200} \frac{x}{x+1} dx = 10 \int_0^{200} \frac{(x+1) - 1}{x+1} dx = \\ &= 10 \left[x - \ln(x+1) \right] \Big|_0^{200} = 10(200 - \ln 201). \end{aligned}$$

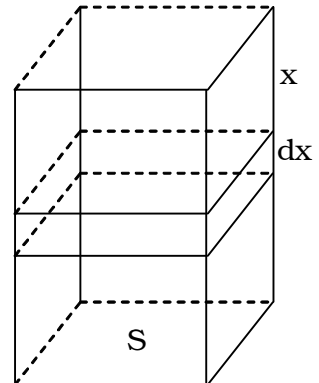


Figura 1

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze integralele de funcții raționale (numitorii au rădăcini reale simple):

a) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$;

b) $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx$;

c) $\int_0^4 \frac{5x+1}{(x+2)(2x+1)} dx$;

d) $\int_2^3 \frac{x+5}{(x-1)(x+2)(x+1)} dx$;

e) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{12}{(x^2-1)(x^2-4)} dx$;

f) $\int_{-2}^0 \frac{x^3-3x^2+5x}{x^2-3x+2} dx$;

g) $\int_2^3 \frac{x^4-x^2-2}{x(x^2-1)} dx$.

E2. Să se calculeze integralele de funcții raționale (numitorii au rădăcini reale multiple):

a) $\int_{-2}^{-1} \frac{x}{(x-1)^2} dx$;

b) $\int_0^1 \frac{x^2}{(x-2)^3} dx$;

c) $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2(x-1)^2} dx$;

d) $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} dx$;

e) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5x^2+2x+1}{(x^2-1)^2} dx$;

f) $\int \frac{3}{\frac{1}{2}x(x+2)^2} dx$.

E3. Să se calculeze integralele de funcții raționale (numitorii au rădăcini complexe simple):

a) $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x(x^2+1)}$;

b) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$;

c) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)} dx$;

d) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{x^4-1} dx$.

E4. Să se calculeze integralele de funcții raționale (numitorii au rădăcini complexe multiple):

a) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+3)^2} dx$;

b) $\int_{-2}^0 \frac{x^2+2}{(x^2+4)^2} dx$;

c) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x^2-x+12}{(x^2+6)^2} dx$;

d) $\int_{-1}^0 \frac{x^2-2}{(x^2+1)^2} dx$.

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze integralele de funcții raționale:

a) $\int_2^3 \frac{2x^2-6}{x^3+2x^2-3x} dx$;

b) $\int_1^2 \frac{x^4+x^3+2x-1}{x^3+2x^2+x} dx$;

c) $\int_0^2 \frac{x-1}{(x+1)^3} dx$.

(Univ. Ovidius, Constanța, 1999)

A2. Să se calculeze integralele:

a) $\int_0^1 \frac{x}{x^3 + 1} dx;$

(Univ. București, 1999)

b) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2 - 2x + 2}{(2x - 1)(x^2 + 1)} dx;$

(Univ. Babeș Bolyai,
Cluj-Napoca, 1999)

c) $\int_0^1 \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx.$

(Univ. Dunărea de Jos,
Galați, 1999)

A3. Fie $I(t) = \int_{t-1}^t \frac{x^2 + 4}{x^2 + 3x + 2} dx, t \in \mathbb{R}.$

Dacă $\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} (t + \sqrt{t} + 3) \cdot I(t),$

atunci:

a) $\alpha = 0;$ b) $\alpha = 1;$

c) $\alpha = e;$ d) $\alpha = \sqrt{e}.$

(ASE, București, 2000, REI)

A4. Să se calculeze integralele:

a) $\int_3^5 \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^3 dx;$

b) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x(x+1) - 5}{x^4 + 5x^2 + 6} dx;$

c) $\int_{-\sqrt{2}}^0 \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 9}{x^4 + 5x^2 + 6} dx;$

d) $\int_0^1 \frac{x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx.$

A5. Fie $I_n = \int_4^5 \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)(x-3)+n} dx,$
 $n \in \mathbb{N}.$ Să se calculeze I_0, I_1 și $I_2.$

A6. Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R},$

$f(x) = \frac{(x+1)^n + (x-1)^n}{x^2 + 1}, n \in \mathbb{N}.$

Să se determine n astfel încât

$\int_0^1 f(x) dx \in \mathbb{Q}.$

TESTE DE EVALUARE

Testul 1 (pe două grupe de elevi)

Să se calculeze:

Grupa I:

a) $\int_0^1 x \ln(x+1) dx;$

b) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x-1}{\sqrt{4-x^2}} dx;$

c) $\int_1^2 \frac{x^2 + x + 2}{x(x^2 + 2x + 2)} dx;$

Grupa II:

a) $\int_0^\pi x \sin(x + \pi) dx;$

b) $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+4}} dx;$

c) $\int_3^4 \frac{x+4}{(x+1)(x^2-4)} dx.$

Testul 2

O1. Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ și $I_n = \int_1^n f(x) dx, n \geq 1.$

a) Să se calculeze $I_n, n \geq 1.$

b) Să se determine $a_n = \sum_{k=1}^n I_k.$

(3 puncte)

○2. Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$.

a) Să se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$ știind că funcția f admite extreme locale în $x = -1$, $x = 1$ și că $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$.

b) Pentru valorile determinate ale parametrilor să se calculeze $\int_2^3 \frac{1}{f(x)} dx$.

(3 puncte)

○3. Să se calculeze $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx$.

(ASE, București)

(3 puncte)

Testul 3

○1. Se consideră funcția $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{\sin x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ \cos x - 2 \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$.

Dacă $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \cos x dx$, atunci:

a) $I = e - \frac{\pi}{4}$; b) $I = \frac{e + \pi - 1}{4e}$; c) $I = \frac{1}{e} + \frac{\pi}{4} - 1$; d) $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{e}$.

(ASE, București, 1999)

(3 puncte)

○2. Să se calculeze:

a) $I_k = \int_0^k \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$, $k \in \mathbb{N}^*$;

b) $S_n = n \ln \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n I_k$.

(Univ. de Nord, Baia Mare, 1999)

(4 puncte)

○3. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x) dx$.

(Univ. Lucian Blaga, Sibiu, 2000)

(2 puncte)

III. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE

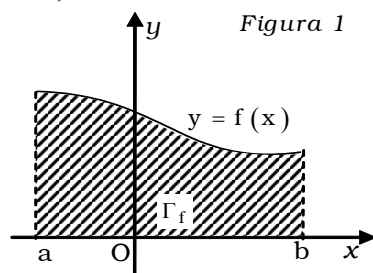
1 Aria unei suprafețe plane

Fie funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție continuă și pozitivă. Suprafața plană mărginită de imaginea geometrică a graficului funcției f , axa Ox și dreptele de ecuație $x = a$, $x = b$ se numește *subgraficul funcției f* și se notează Γ_f .

Așadar, $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, figura 1.

În acest paragraf se vor da răspunsuri la următoarele întrebări:

- Ce înseamnă că o mulțime de puncte din plan de tipul Γ_f are arie?
- Care este legătura între integrala definită a funcției f pe un interval $[a, b]$ și aria mulțimii Γ_f ?
- Cum se calculează aria unei suprafețe plane cuprinse între imaginile geometrice ale graficelor a două funcții continue pe un interval $[a, b]$?



1.1. Aria subgraficului unei funcții

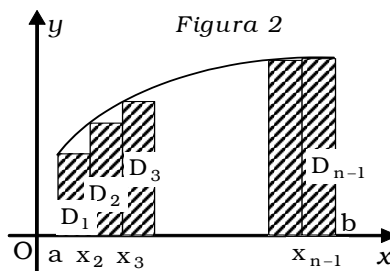
Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și pozitivă și mulțimea Γ_f , subgraficul funcției f .

Se notează prin aria (Γ_f) , aria subgraficului Γ_f .

Pentru început se va face o estimare a acestei arii folosind aria unei suprafețe dreptunghiulare.

De aceea, se împarte intervalul $[a, b]$ în n părți de lungimi egale prin punctele $x_1 = a$, $x_2 = a + \frac{b-a}{n}$, $x_3 = a + \frac{2 \cdot (b-a)}{n}$, ..., $x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$.

Pe fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n-1}$, se construiesc dreptunghiurile D_i incluse în subgraficul funcției f ca în figura 2. Dacă s_n este suma ariilor suprafețelor dreptunghiulare $[D_i]$, atunci aceasta aproximează prin lipsă aria (Γ_f) .



Rezultă că $s_n \leq \text{aria}(\Gamma_f)$.

În mod analog, construim pe fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n-1}$, dreptunghiurile E_n ca în figura 3.

Dacă S_n este suma ariilor suprafețelor dreptunghiulare $[E_i]$, se observă că aceasta este o aproximare prin adaos a ariei subgraficului Γ_f și are loc relația:

$$\text{aria}(\Gamma_f) \leq S_n.$$

În concluzie, pentru orice împărțire a intervalului $[a, b]$ în n părți egale, au loc inegalitățile:

$$s_n \leq \text{aria}(\Gamma_f) \leq S_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ foarte mare, atunci aproximările s_n și S_n sunt din ce în ce mai bune.

❖ DEFINIȚIE

- Mulțimea Γ_f **are arie** dacă pentru orice împărțire a intervalului $[a, b]$ în n părți egale șirurile (s_n) , (S_n) de arii de suprafețe dreptunghiulare au limite finite egale.

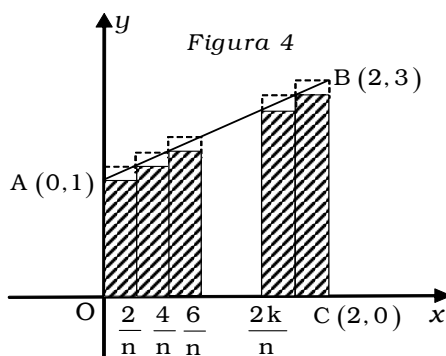
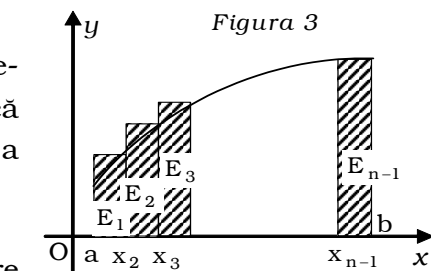
În acest caz, $\text{aria}(\Gamma_f) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

1.2. Calculul ariei mulțimii Γ_f cu ajutorul integralei definite

Fie funcția $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x + 1$ și subgraficul $\Gamma_f = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3\}$ a cărei reprezentare geometrică este trapezul OABC, figura 4.

Se pune problema calculării ariei mulțimii Γ_f .

Folosind construcția descrisă mai sus se obțin punctele $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{n}$, $x_3 = 2 \cdot \frac{2}{n}$, $x_4 = 3 \cdot \frac{2}{n}$, ..., $x_k = k \cdot \frac{2}{n}$, ..., $x_n = 2$.



Șirurile de aproximări prin lipsă și prin adaos obținute pentru aria (Γ_f) sunt:

$$\begin{aligned} \bullet \quad s_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n} \cdot f\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2k}{n} + 1\right) = \frac{2(2n-1)}{n} = 4 - \frac{2}{n}; \\ \bullet \quad S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} \cdot f\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n} + 1\right) = \frac{2(2n+1)}{n} = 4 + \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Avem că $s_n \leq \text{aria}(\Gamma_f) \leq S_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, relație din care rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \text{aria}(\Gamma_f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Aplicând criteriul cleștelui se obține că $\text{aria}(\Gamma_f) = 4$.

➤ OBSERVAȚII

1. Un calcul direct pentru aria suprafeței trapezoidale OABC conduce la

$$\text{relația: } \mathcal{A}(\text{OABC}) = \frac{(\text{OA} + \text{BC}) \cdot \text{OC}}{2} = \frac{(1+3) \cdot 2}{2} = 4.$$

2. Calculând integrala definită a funcției f pe intervalul $[0, 2]$ se obține:

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{2} + 2 - 0 = 4.$$

Așadar, pentru funcția f studiată s-a obținut că:

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_0^2 f(x) dx = 4.$$

În general, are loc următorul rezultat care dă legătura între $\text{aria}(\Gamma_f)$ și integrala definită a funcției f pe un interval $[a, b]$.

➤ TEOREMA 1

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și pozitivă. Atunci:

a) mulțimea $\Gamma_f = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ are arie;

b) $\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x) dx$.

Probleme rezolvate

☒ 1. Să se determine ariile subgraficelor funcțiilor:

a) $f_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 + x$;

b) $f_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = \sin x$;

c) $f_3 : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = \ln x$;

d) $f_4 : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_4(x) = \sqrt{x}$.

Soluție

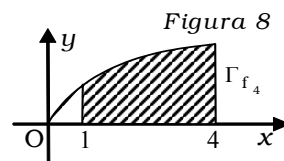
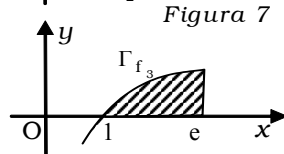
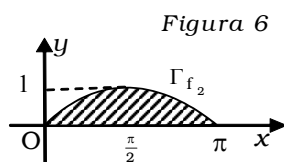
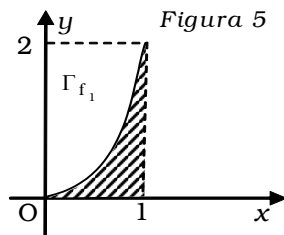
Pentru fiecare funcție subgraficul va fi ilustrat în desenele alăturate prin suprafața hașurată, figurile 5-8.

$$\begin{aligned} \text{a) Avem: } \text{aria}(\Gamma_{f_1}) &= \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 (x^2 + x) dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \text{aria}(\Gamma_{f_2}) &= \int_0^\pi f_2(x) dx = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = \\ &= 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \text{aria}(\Gamma_{f_3}) &= \int_1^e f_3(x) dx = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e x' \cdot \\ &\cdot \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - x \Big|_1^e = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \text{aria}(\Gamma_{f_4}) &= \int_1^4 f_4(x) dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$



☒ **2.** Să se determine aria suprafeței plane Γ_f pentru:

a) $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1|$;

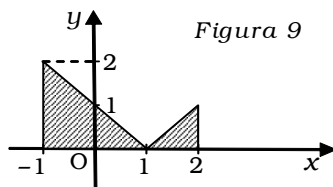
b) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \in [0, 1] \\ -x^2 + x + 2, & x \in (1, 2] \end{cases}$.

Soluție

a) Expresia $f(x)$ se explicitează astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [-1, 1] \\ x - 1, & x \in (1, 2] \end{cases}.$$

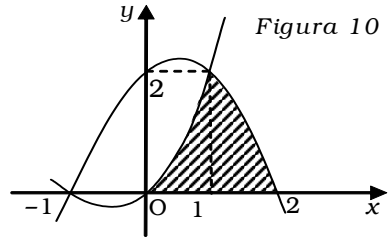
Subgraficul Γ_f este reprezentat în figura 9.



$$\begin{aligned} \text{În acest caz, } \text{aria}(\Gamma_f) &= \int_{-1}^2 |x - 1| dx = \int_{-1}^1 (1 - x) dx + \int_1^2 (x - 1) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 = \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(-1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{4}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

b) Subgraficul Γ_f este reprezentat în figura 10.

$$\begin{aligned} \text{aria}(\Gamma_f) &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + x) dx + \\ &+ \int_1^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \\ &+ \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 0 \right) + \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2 \right) = 2. \end{aligned}$$



1.3. Aria suprafețelor plane cuprinse între două curbe

Problemă-suport

Se consideră funcțiile $f, g: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -x + 3$.

a) Să se illustreze domeniul plan D mărginit de curbele reprezentative ale funcțiilor f și g și dreptele de ecuații $x = -2$, $x = 1$.

b) Să se calculeze aria acestui domeniu.

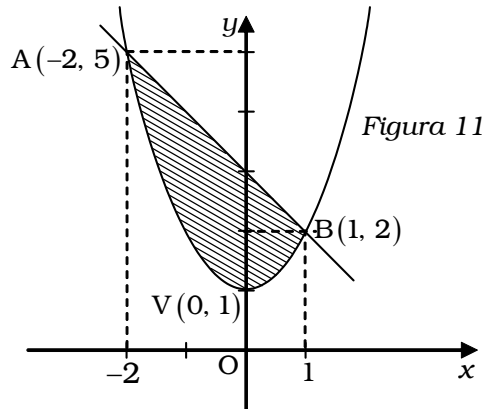
Rezolvare

a) Imaginea geometrică a graficului funcției f este arcul de parabolă AVB inclus în parabola de ecuație $y = x^2 + 1$, cu vârful $V(0,1)$ și care trece prin punctele $A(-2,5)$ și $B(1,2)$, figura 11.

Imaginea geometrică a graficului funcției g este segmentul de dreaptă $[AB]$, reprezentat în figura 11.

Rezultă că domeniul plan D este regiunea hașurată.

b) Se observă că $D = \Gamma_g \setminus \Gamma_f$.



$$\begin{aligned} \text{Rezultă că } \text{aria}(D) &= \text{aria}(\Gamma_g) - \text{aria}(\Gamma_f) = \int_{-2}^1 g(x) dx - \int_{-2}^1 f(x) dx = \\ &= \int_{-2}^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 \right) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Această problemă sugerează modul general de determinare a ariei unei suprafețe plane mărginite de graficele a două funcții continue pe un interval $[a, b]$.

TEOREMA 2

Fie $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcții continue astfel încât $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$. Atunci:

a) mulțimea

$$\Gamma_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

cuprinsă între graficele funcțiilor f și g și dreptele de ecuații $x = a, x = b$ (figura 12)

are arie și aria $(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$.

b) Dacă $g(x) \geq f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, atunci

$$\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \text{aria}(\Gamma_g) - \text{aria}(\Gamma_f).$$

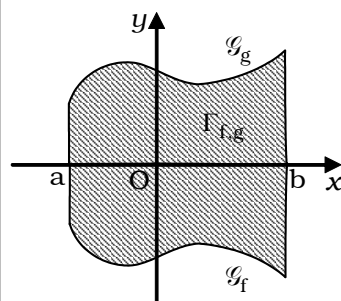


Figura 12

Probleme rezolvate

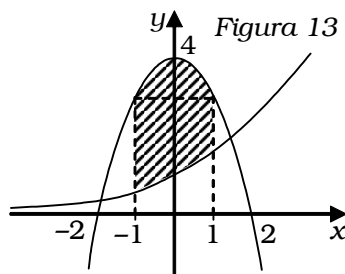
- ☒ **1.** Să se determine aria suprafeței plane mărginite de graficele funcțiilor $f, g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$, $g(x) = 4 - x^2$.

Soluție

Reprezentările geometrice ale graficelor celor două funcții sunt redată în figura 13.

$$\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_{-1}^1 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-1}^1 (4 - x^2 - 2^x) dx =$$

$$= \left(4x - \frac{x^3}{3} - \frac{2^x}{\ln 2} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{22}{3} - \frac{3}{\ln 4}.$$

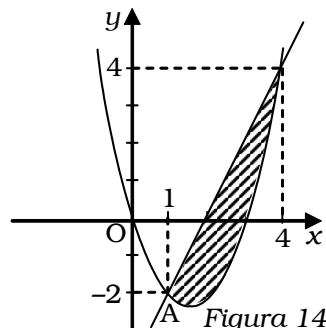


- ☒ **2.** Să se determine aria suprafeței plane mărginite de curbele de ecuații $y = x^2 - 3x$ și $y = 2x - 4$.

Soluție

Se determină mai întâi punctele de intersecție ale celor două curbe rezolvând sistemul

$$\text{de ecuații: } \begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = 2x - 4 \end{cases}.$$



Se obține ecuația $x^2 - 5x + 4 = 0$ cu soluțiile $x_1 = 1, x_2 = 4$.

Rezultă că soluțiile sistemului sunt: $(1, -2), (4, 4)$. Curbele se intersectează în punctele $A(1, -2), B(4, 4)$ și sunt reprezentate în figura 14.

Asociem acestor curbe funcțiile $f, g: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = 2x - 4$.

Din lectura grafică se observă că $g(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [1, 4]$.

$$\begin{aligned} \text{Rezultă că } \text{aria}(\Gamma_{f,g}) &= \int_1^4 [g(x) - f(x)] dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right) \Big|_1^4 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

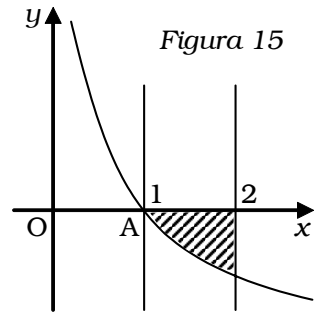
☒ **3.** Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

a) Să se reprezinte grafic funcția f .

b) Să se determine aria domeniului plan mărginit de axa Ox , graficul funcției și dreptele de ecuații $x = 1$, $x = 2$.

Soluție

a) Funcția f este strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Intersecția curbei logaritmice cu axa Ox este punctul $A(1, 0)$. Curba logaritmică este redată în figura 15.



b) Considerăm funcția $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 0$. Rezultă că aria domeniului plan cuprins între curbele $\mathcal{G}_g$, $\mathcal{G}_f$ și dreptele de ecuații $x = 1$, $x = 2$ este:

$$\begin{aligned} \text{aria}(\Gamma_{f,g}) &= \int_1^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_1^2 [-f(x)] dx = -\int_1^2 \log_{\frac{1}{2}} x dx = \\ &= +\frac{1}{\ln 2} \int_1^2 \ln x dx = +\frac{1}{\ln 2} \cdot \int_1^2 x' \ln x dx = +\frac{1}{\ln 2} \cdot \left(x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \\ &= +\frac{1}{\ln 2} \cdot (2 \ln 2 - x \Big|_1^2) = \frac{2 \ln 2 - 1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

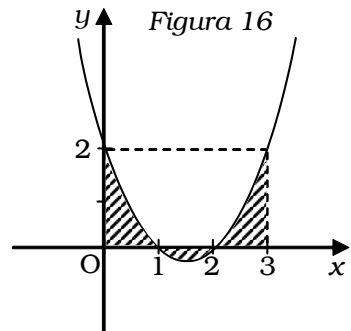
☒ **4.** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între axa Ox și imaginea geometrică a graficului funcției $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Soluție

Imaginea geometrică a graficului funcției f este redată în figura 16.

Aria suprafeței plane hașurate este:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 (0 - f(x)) dx + \int_2^3 f(x) dx = \\ &= \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx + \\ &+ \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) dx = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$



EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze aria mulțimii Γ_f în cazurile:

a) $f(x) = 3x - 4, x \in [2, 3];$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}, x \in [1, 8];$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}, x \in [3, 4];$

d) $f(x) = \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}, x \in [-2, -1];$

f) $f(x) = \frac{4}{x^2 + 4x}, x \in [1, 6];$

g) $f(x) = xe^x, x \in [0, 1];$

h) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}, x \in [1, \sqrt{6}].$

E2. Să se determine aria mulțimii $\Gamma_{f,g}$ în cazurile:

a) $f(x) = x^2, g(x) = 4x - 1, x \in [1, 3];$

b) $f(x) = 2x - 3, g(x) = x^2 + 1, x \in \left[0, \frac{3}{2}\right];$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}, g(x) = x + 1, x \in [1, 3];$

d) $f(x) = e^{-x}, g(x) = e^x, x \in [0, 1];$

e) $f(x) = -\sqrt{x+1}, g(x) = \sqrt{x+1}, x \in [0, 3];$

f) $f(x) = 0, g(x) = 2 \sin x, x \in [0, \pi];$

g) $f(x) = \arctg x, g(x) = 0, x \in [-\sqrt{3}, -1].$

E3. Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de axa Ox și imaginea geometrică a graficului funcției:

a) $f(x) = -4 - x^2, x \in [-2, 2];$

b) $f(x) = 9 - x^2, x \in [-4, 4];$

c) $f(x) = 2x - x^2, x \in [-1, 3];$

d) $f(x) = \sin x, x \in [0, 2\pi];$

e) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in [-1, 1] \\ 1 - x, & x \in (1, 2] \end{cases}.$

APROFUNDARE

A1. Să se determine aria mulțimii Γ_f pentru:

a) $f(x) = x \arctg x, x \in [0, \sqrt{3}];$

b) $f(x) = x \ln^2 x, x \in [e, e^2];$

c) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, x \in [0, \sqrt{3}];$

d) $f(x) = |x - 2|, x \in [-1, 4];$

e) $f(x) = |x^2 - 9|, x \in [-4, 5];$

f) $f(x) = \frac{x - 3}{(x^2 - 6x + 5)^2}, x \in [2, 4].$

A2. Să se determine aria mulțimii cuprinse între curbele de ecuații:

a) $y = x^2, y = 8 - x^2;$

b) $y = x^2 - 4x, y = x - 4;$

c) $y = 4 - x^2, y = x + 4.$

(Univ. Petrol și Gaze Ploiești, 2002)

A3. Să se determine aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției

$f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x},$ axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = \frac{\pi}{2}.$

A4. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{-2, 6\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x - 12}.$$

Să se calculeze aria suprafeței planei mărginite de graficul funcției, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 4$, $x = 5$.

A5. Să se determine aria suprafeței plane mărginite de curbele de ecuații $y = \sqrt{x}$ și $y = 2x^2 - x$.

A6. Să se determine aria domeniului mărginit de axa Oy , graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ și tangenta la graficul acesteia care trece prin origine.

(Univ. Tehnică Cluj-Napoca, 2005)

A7. Se dau funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \arctg x, \quad g(x) = \ln(1 + x^2).$$

Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficele funcțiilor f și g și dreptele de ecuații $x = 0$, $x = 1$.

A8. Se consideră funcția $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x - x^2.$$

$m \in \mathbb{R}$, astfel încât dreapta de ecuație $y = mx$ să împartă subgraficul funcției f în două mulțimi de arii egale.

(Bacalaureat, iunie 1998)

A9. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x - 1)e^{-x}.$$

Să se calculeze $\lim_{u \rightarrow \infty} A(u)$, unde $A(u)$ reprezintă

aria mulțimii plane mărginite de graficul funcției, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = u$, $u > 1$.

(Bacalaureat, iunie 1998)

A10. Fie funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) =$

$$= m^2 x^2 + (m^2 - m + 1)x + 1, \quad m \in \mathbb{R}^*.$$

a) Să se determine aria $A(m)$ a subgraficului funcției f .

b) Pentru ce valori ale parametrului $m \in \mathbb{R}$, $A(m) = \frac{3}{2}$?

c) Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, aria $A(m)$ este minimă?

2

Volumul unui corp de rotație

Din studiul geometriei în spațiu sunt cunoscute o serie de corpuri geometrice pentru care se știu formulele de calcul ale volumului: prisma, piramida, trunchiul de piramidă, cilindrul, conul, trunchiul de con și sfera.

În acest paragraf se va indica o metodă de a determina volumul unor corpuri obținute prin rotirea subgraficului unei funcții continue și pozitive în jurul axei Ox folosind calculul integral.

Fie $f: [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ o funcție continuă.

❖ DEFINIȚIE

- Se numește **corp de rotație** determinat de funcția f , corpul obținut prin rotirea subgraficului acesteia în jurul axei Ox , figura 1.

Corpul de rotație determinat de funcția f se notează C_f și reprezintă mulțimea de puncte din spațiu:

$$C_f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x) \right\}.$$

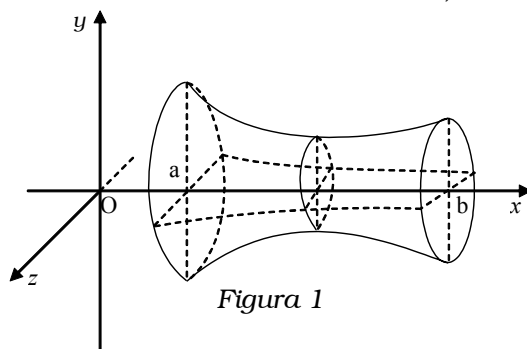


Figura 1

Pentru calculul volumului corpului de rotație C_f se folosește următorul rezultat.

TEOREMA 3

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție continuă și C_f corpul de rotație determinat de funcția f . Atunci:

$$\text{Vol}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (1)$$

Exerciții rezolvate

☒ 1. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția:

a) $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$; **b)** $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

Soluție

a) Funcția f este continuă și pozitivă și are imaginea geometrică a graficului segmentul de dreaptă $[AB]$, $A(0,1)$ și $B(2,3)$, figura 2.

Corpul de rotație C_f este un trunchi de con circular drept.

Aplicând formula (1) se obține:

$$\begin{aligned} \text{vol}(C_f) &= \pi \int_0^2 f^2(x) dx = \pi \int_0^2 (x+1)^2 dx = \\ &= \pi \cdot \frac{(x+1)^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{26\pi}{3}. \end{aligned}$$

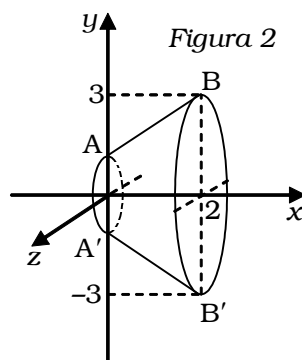


Figura 2

TEMĂ DE STUDIU

1. Să se calculeze volumul corpului C_f aplicând formula cunoscută a volumului trunchiului de con circular drept:

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} (R^2 + r^2 + Rr). \quad (2)$$

2. Folosind calculul integral să se deducă formula (2).

(Indicație: $f(x) = \frac{R-r}{h} \cdot x + r$, $x \in [0, h]$.)

$$\text{b) } \text{vol}(C_f) = \pi \int_0^3 \left(\sqrt{x^2 + 4} \right)^2 dx = \pi \int_0^3 (x^2 + 4) dx = \pi \cdot \left(\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_0^3 = 21\pi.$$

- ☒ 2. Fie funcția $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in [-1, 0] \\ \sqrt{x+1}, & x \in (0, 2] \end{cases}$. Să se determine volumul corpului de rotație C_f .

Soluție

Funcția f este continuă pe intervalul $[-1, 2]$ și este pozitivă.

$$\begin{aligned} \text{Se obține: } \text{vol}(C_f) &= \pi \int_{-1}^2 f^2(x) dx = \pi \cdot \int_{-1}^0 f^2(x) dx + \pi \int_0^2 f^2(x) dx = \\ &= \pi \int_{-1}^0 (x^2 + 1)^2 dx + \pi \cdot \int_0^2 (x+1) dx = \pi \cdot \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^0 + \pi \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{88\pi}{15}. \end{aligned}$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME
EXERSARE

- E1. Să se calculeze volumele corpurilor de rotație determinate de funcțiile:

a) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - x^2$;

b) $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$;

c) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$;

d) $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

e) $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;

f) $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|$;

g) $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3} - \sqrt{x}$;

h) $f: [a, a+1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \sqrt{x^2(x-a)}$;

i) $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \frac{\sqrt{(x+2)(4-x)}}{x}$.

- E2. Să se calculeze volumul corpurilor de rotație determinate de funcțiile:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$, $x \in [0, 2]$;

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$, $x \in [4, 6]$;

c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$, $x \in [\sqrt{3}, 3]$;

d) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x \in [1, e^2]$.

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția:

a) $f: \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arcsin x;$

b) $f: \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = xe^x;$

c) $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \ln x;$

d) $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |3x+1| - |x-3|.$

A2. Se consideră funcția

$$f: \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1-x^2} - x.$$

Să se determine volumul corpului de rotație determinat de funcția f .

A3. Să se calculeze volumul corpului de rotație generat de funcția

$$f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

(Bacalaureat, iunie 1998)

A4. Se consideră funcția

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{\arctg x}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Să se determine $\text{vol}(C_f)$.

A5. Să se determine volumul corpului C_f generat de funcția:

a) $f: [1, \sqrt{e}] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln \sqrt[4]{x};$

b) $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R},$

$$f(x) = \begin{cases} \lg x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \sin 2x, & x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

A6. Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea poligonului ABCD în jurul axei Ox , dacă $A(1, 0)$, $B(2, 3)$, $C(4, 6)$, $D(10, 0)$.

TESTE DE EVALUARE
Testul 1 (pe grupe de elevi)
Grupa 1

○1. Să se determine aria (Γ_f) pentru funcția:

• $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x \sin x$$

○2. Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficele funcțiilor:

• $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}; \quad g(x) = x$$

○3. Să se calculeze volumul corpului C_f determinat de funcția:

• $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R},$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{(x+1)(x^2+1)}}$$

Grupa 2

• $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x \cos x$$

• $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 1}; \quad g(x) = x^2$$

• $f: [2, 2\sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2+4)(x-1)}}$$

Testul 2

- 1. Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între curbele de ecuații $y = x^3$ și $y = 4x$.

(3 puncte)

- 2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 2}$.

a) Să se arate că $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- b) Să se calculeze aria cuprinsă între asimptota oblică a funcției și graficul funcției pe intervalul $[3, 4]$.

(4 puncte)

- 3. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$.

(2 puncte)

Testul 3

- 1. Să se determine aria suprafeței cuprinse între curbele de ecuații $y = \ln^2 x$ și $y = 2 \ln x$.

(3 puncte)

- 2. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

- a) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 3$.

- b) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției, tangenta în punctul $A(3, f(3))$ și axa Ox .

(4 puncte)

- 3. Se consideră patrulaterul convex $OABC$ cu vârfurile $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ și $C(5, 0)$.

- a) Să se determine aria suprafeței poligonale $[OABC]$.

- b) Să se calculeze volumul corpului de rotație generat de linia poligonală $OABC$.

(2 puncte)

TEME DE SINTEZĂ

TEMA 1

- Mulțimi de numere: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ -

SETUL 1 DE PROBLEME (MULTIMEA $\mathbb{R}$)

○1. Se dau numerele reale:

$$x = \left(3\frac{3}{5}\right)^{-1} + \sqrt{0,8(3) \cdot 0,0(3)} \text{ și}$$

$$y = \left(\frac{7}{2\sqrt{3}}\right)^2 \cdot [0,125 - 0,25 + (-1)^{-4}]^{-2}.$$

a) Să se determine media aritmetică, media geometrică și media armonică a numerelor x , y .

b) Să se calculeze $[x + y]$, $\{y - x\}$ și

$$\log_{\frac{3}{4}}(xy)^2.$$

Noțiuni de recapitulat

- forme de scriere;
- parte întreagă;
- parte fracționară;
- relația de ordine pe $\mathbb{R}$;
- operații;
- puteri și radicali;
- logaritmi;
- intervale;
- mulțimi mărginite;
- vecinătăți;
- elemente de logică matematică;
- tipuri de raționamente.

○2. Se dă numărul real $x = \sqrt{\frac{97n+2}{2n-1}}$, $n \in \mathbb{Z}^*$.

a) Pentru $n = 1$ să se calculeze produsul primelor 3 zecimale ale lui x .

b) Să se determine mulțimea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbb{N}\}$.

○3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât să existe:

a) $\sqrt{m(m+2)x^2 - (2+m)x + 1}$ pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

b) $\log_2 \frac{m^2 - 4}{m - 3}$.

○4. Să se raționalizeze expresiile:

a) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$; b) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

○5. Să se demonstreze că:

a) $\frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

○6. Se dau intervalele de numere reale $I = (-\infty, x^2)$, $J = (x^2 - 1, +\infty)$ și $K = (1 - x, 3)$.

Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care:

a) K este interval simetric;

- b) K este interval centrat în $a = -1$;
 c) J este vecinătate a punctului $a = 3$;
 d) $K \subset I \cap J$.

○7. Să se aducă la formă simplă expresia:

a) $\log_{0,32} \left(\frac{2}{5} \sqrt{2} \right) + \log_{\frac{1}{128}} \frac{1}{32}$;

b) $\log_2 (\ln e^4) - \log_8 384 + \log_8 3 - \frac{1}{3} \sqrt[4]{9^3 \sqrt{243}}$.

○8. Fie mulțimea $A(a, b) = \left\{ \frac{x+1}{x-a} \mid x \in (b, +\infty), b \geq a \right\}$.

- a) Să se arate că $A(1, 2)$ este mulțime mărginită și să se afle $\inf A$, $\sup A$.
 b) Să se arate că $A(1, 1)$ este nemărginită superior și să se determine mulțimea minoranților.

○9. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$. Să se determine $\text{Im } f$.

○10. Să se determine mulțimea de adevăr a predicatului:

a) $p(x): „(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x - 3) = 5, x \in \mathbb{N}”$;

b) $P(x, y): „(2x + y + 2)\sqrt{2} + (4x + y + 5)\sqrt{7} = 0, x, y \in \mathbb{Q}”$.

SETUL 2 DE PROBLEME (MULȚIMEA $\mathbb{C}$)

○1. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea:

a) $\left(\frac{x-1}{2} + 3yi \right) + \left(\frac{y-1}{3} - 4xi \right) = 2(y-x) + i$;

b) $\frac{3+xi}{(3-2i)} + \frac{x+y}{(3+2i)} = 1$;

c) $(x+2y+i)(y-i) = (y+x+i)(3-4i)$.

○2. Să se calculeze opusul, inversul, conjugatul și modulul numărului complex

$$z = \frac{(1-i)(\sqrt{3}+i)}{1+i}.$$

○3. Să se determine numărul complex z în cazurile:

a) $z^2 = \frac{-2+4i}{2+i}$; b) $2z + z \cdot \bar{z} = 4 + 2i$; c) $i|z| + |z-1| = 1+i$.

Noțiuni de recapitulat

- forma algebrică;
- forma trigonometrică;
- operații cu numere complexe;
- numere complexe conjugate;
- modulul unui număr complex;
- rezolvarea în $\mathbb{C}$ a ecuației de gradul 2 cu coeficienții în $\mathbb{R}$;
- aplicații în geometrie.

- 4. Fie S suma valorilor distincte pe care le ia $a_n = \left| x^n + \frac{1}{x^n} \right|$, dacă $x^2 + x + 1 = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:
 a) $S = 4$; b) $S = 3$; c) $S = 5$; d) $S = 8$; e) $S = 12$.
 (Admitere ASE, București, 1997)
- 5. Fie $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z \cdot \bar{z} = 2, \left| \frac{2z+3}{z-3i} \right| = 1 \right\}$. Dacă $S = \sum_{z \in A} z$ atunci:
 a) $S = 1 - 2i$; b) $S = 3$; c) $S = 1 + 2i$; d) $S = -\frac{4}{5} - \frac{2i}{5}$.
 (Admitere ASE, București, 2004)
- 6. Valoarea expresiei $E = \frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{2007}}{i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2009}}$ este:
 a) $-i$; b) 2007; c) 0; d) $d = 1$.
- 7. a) Se consideră ecuația $x^2 - 4x + 5 = 0$ cu soluțiile x_1, x_2 . Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2, x_1^3 + x_2^3, x_1^4 + x_2^4, \frac{x_1^2 + 3}{x_1^2 - 1} + \frac{x_2^2 + 3}{x_2^2 - 1}$.
 b) Să se formeze ecuația de gradul II cu coeficienți reali care are o soluție dată de $z_1 = \frac{1 - 3i}{2 - i}$.
- 8. Se consideră ecuația bipătrată $x^4 - 2mx^2 + (m+1)^2 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine m astfel încât ecuația să aibă:
 a) toate soluțiile în $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;
 b) două soluții reale.
- 9. Se dau numerele complexe $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ și $z_2 = 1 - i$.
 a) Să se scrie sub formă trigonometrică z_1 și z_2 .
 b) Să se calculeze $(z_1 z_2)^{10}, \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{15}$ și rădăcinile de ordinul 4 ale numărului z_1 .
- 10. Se consideră punctele A, B, C cu afizele $z_A = 6 + 5i, z_B = 7 - 3i, z_C = -2 + 4i$.
 a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.
 b) Să se determine distanța dintre centrul de greutate al triunghiului și centrul cercului circumscris acestuia.
 c) Să se determine punctul $D(4 + bi)$ știind că este coliniar cu punctele A și B.

TEMA 2

– Funcții. Proprietăți –

SETUL 1 DE PROBLEME

- 1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + 2$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- a) Pentru $a = 0$, să se dea exemplu de o funcție f care să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și de alta care să fie strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
- b) Dacă $b = 0$ să se precizeze paritatea (imparitatea) funcției obținute.
- c) Dacă $a = 1$, $b = -3$ să se arate că funcția f este mărginită inferior și să se precizeze dacă este funcție convexă sau concavă pe $\mathbb{R}$.
- 2. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + m, & x \geq 1 \\ -x^2 + 2x, & x < 1 \end{cases}$.
- a) Pentru $m = 0$ să se arate că funcția f este inversabilă și să se determine f^{-1} .
- b) Să se rezolve ecuația $4[f(x) - f^{-1}(x)] = 7 - 7x$.
- c) Să se arate că funcția f^{-1} este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- 3. Să se studieze injectivitatea și surjectivitatea funcției:
- a) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 2z + 5\bar{z}$;
- b) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) + 2f(\bar{z}) = 2z + 3\bar{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
- c) $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$.
- 4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 4$. Să se determine funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $(f \circ g \circ f^{-1})(x) = \frac{3}{2}x + 1$.
- 5. Să se studieze periodicitatea funcției:
- a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = \left\{ \frac{n}{2} \right\} + \left\{ \frac{n}{3} \right\}$;
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \sin 3x$.
- 6. Să se arate că:
- a) funcția $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2$ nu este surjectivă;
- b) funcția $f: S_n \rightarrow S_n$, $f(x) = \sigma x \sigma^{-1}$, unde $\sigma \in S_n$ este funcție inversabilă și să se calculeze f^{-1} ;
- c) funcția $f: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $f(x) = x^2 + x + \hat{1}$ nu este bijectivă pentru $n \in \{2, 3, 4, 5\}$.
- 7. Câte funcții $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ injective, verifică egalitatea:
- a) $f(1) \cdot f(2) = 4$; b) $f(1) + f(2) = 3$?

Notiuni de recapitulat

- monotonie;
- mărginire;
- paritate-imparitate;
- convexitate-concavitate;
- periodicitate;
- injectivitate;
- surjectivitate;
- bijectivitate;
- inversabilitate;
- continuitate;
- derivabilitate;
- primitivabilitate;
- integrabilitate.

SETUL 2 DE PROBLEME

○1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 9^{ax} - 4 \cdot 3^{ax+1} + 12, & x < 1 \\ -15x^2 - ax + a, & x \geq 1 \end{cases}$.

a) Să se arate că pentru $a = 1$ funcția este continuă.

b) Să se studieze continuitatea funcției f discutând după $a \in \mathbb{R}$.

○2. Se consideră funcția $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} px, & x \in [0, 1) \\ m, & x = 1 \\ x^3 + q, & x \in (1, 2] \end{cases}$.

Fie $A = \{(p, m, q) \in \mathbb{R}^3 \mid f \text{ derivabilă pe } (0, 2)\}$, $S = \sum_{(p, m, q) \in A} (p + m + q)$.

Atunci: a) $S = 7$; b) $S = -1$; c) $S = 0$; d) $S = 10$; e) $S = 8$.

(Admitere ASE, București, 1998)

○3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (-1)^{[x]} \left(x + a \cdot \left[\frac{x}{2} \right] + b \right) + 3$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Dacă $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid f \text{ este periodică cu perioada 2 și continuă în } x = 1\}$ și

$S = \sum_{(a, b) \in A} (a + b)$, atunci:

a) $S = 2$; b) $S = -1$; c) $S = 0$; d) $S = -3$; e) $S = 4$.

(Admitere, Economie generală, București, 2002)

○4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} |x - 1| + a, & x < 2 \\ b \cdot |x^2 - 9| + 2, & x \in [2, 4] \\ |x - 5| + bx + 4, & x > 4 \end{cases}$.

a) Să se determine parametrii $a, b \in \mathbb{R}$ știind că funcția admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se determine primitivele funcției f pe intervalul $[1, 4]$.

c) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_1^3 f(x) dx = 14$ și $\int_4^6 f(x) dx = 39$.

○5. Se consideră funcția polinomială $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + ax^3 + 85x - 2$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că $f''(-3) = 0$.

b) Pentru $a = -30$ să se precizeze intervalele de monotonie și convexitate-concavitate ale funcției f .

○6. a) Să se demonstreze că suma a două funcții convexe $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I interval deschis) este funcție convexă.

b) Să se arate că următoarele funcții sunt convexe:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^4 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ și $a, b > 0$;

$h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 4x^4 + 3x^2 - 5x + 7 + \log_{\frac{1}{5}} x$.

(Examen bacalaureat, 1999)

TEMA 3

- Ecuatii, inecuatii, sisteme de ecuatii și inecuatii -

SETUL 1 DE PROBLEME

○1. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ în cazurile:

a) $\frac{2x-1}{3} \in \left(\frac{x-1}{2}, \frac{2x+1}{5}\right)$;

b) $3x+1 \in [2x, x^2+1]$.

○2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2m+3)x^2 - 2(1+3m)x + 7$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Pentru ce valori ale lui m graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte?

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției este situat sub axa Ox .

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $f(x) = 0$ să aibă soluțiile negative.

d) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât soluțiile x_1, x_2 ale ecuației $f(x) = 0$ să verifice relația $x_1 + 2x_2 = 3$.

○3. Se consideră ecuația $x^2 - |x| = mx(x+1)$, $m \in \mathbb{R}$.

Dacă $M = \{m \in \mathbb{R} \mid \text{ecuația are exact trei rădăcini reale distincte}\}$, atunci:

a) $M = (-\infty, -1]$; b) $M = (-1, 1)$; c) $M = (2, +\infty)$; d) $M = \emptyset$; e) $M = \mathbb{R}$.

(Admitere ASE, București, 1997)

○4. Fie $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \left\lfloor \frac{2x+1}{4} \right\rfloor = x-3, \left\lceil \frac{3x-1}{2} \right\rceil = y+3 \right\}$.

Dacă $M = \sum_{(x,y) \in A} \frac{x}{y}$, atunci:

a) $M = \frac{49}{20}$; b) $M = \frac{5}{8}$; c) $M = \frac{24}{7}$; d) $M = 7$; e) $M = \frac{63}{29}$.

(Admitere ASE, București, 2003)

○5. Să se rezolve:

a) $\sqrt{\frac{x+4}{x-4}} + 2\sqrt{\frac{x-4}{x+4}} = \frac{11}{3}$;

b) $\sqrt{4-x^2} > 1-x$;

c) $(7-4\sqrt{3})^{3x} + (7+4\sqrt{3})^{3x} = 14$.

(Bacalaureat, 2002)

Noțiuni de recapitulat

- semnul funcțiilor de gradul I și de gradul II;

- tipuri de ecuații, inecuații, sisteme:

• de gradul I și II;

• cu parte întreagă și fracționară;

• cu modul;

• iraționale;

• exponențiale;

• logaritmice;

• trigonometrice;

• combinatorice;

• cu permutări;

• matriciale;

• sisteme de ecuații liniare;

• algebrice cu coeficienți într-un corp.

○6. Se dă funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{2 - \lg x}$.

a) Să se determine D .

b) Să se determine $x \in D$, astfel încât termenul al cincilea din dezvoltarea binomului $(1 + x^{f(x)})^6$ să fie 15.

(Simulare Bacalaureat, 2000)

○7. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „ $\circ$ ” prin $x \circ y = x + y - 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se rezolve ecuația $2^x \circ 4^x = 5$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuația $C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 = 44 + n$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x \circ x^2 \leq 1$.

(Bacalaureat, 2002)

○8. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$A_x^y = 10A_x^{y-1}, C_x^y = \frac{5}{3}C_x^{y+1}.$$

(Admitere Universitatea Transilvania, Brașov, 2002)

○9. Să se rezolve ecuațiile:

a) $2 \sin^2 x + 5 \cos x - 4 = 0$;

b) $\sin x + 2 \sin 3x + \sin 5x = 0$;

c) $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2$.

○10. Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + 2^y = 8 \\ x + 2^{y+1} = 10 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \log_2 x - \log_4 y = 1 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} 3x - \sqrt{y+1} = 3 \\ -x + 2\sqrt{y+10} = 5 \end{cases}.$$

SETUL 2 DE PROBLEME

○1. Să se rezolve ecuațiile:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x & i \\ 1+x & i+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+i & 1+i \\ 1-i & x+i \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} x+1 & x+3 & 2x+5 \\ x-1 & x & 2x+1 \\ 2x+6 & 2x+3 & x \end{vmatrix} = 0.$$

○2. Să se calculeze determinantul $D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ știind că x_1, x_2, x_3 sunt

soluțiile ecuației: $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$.

(Admitere Universitatea Transilvania, Brașov, 2000)

○3. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația:

$$\begin{vmatrix} 2-a & a-x & x-1 \\ 1-x^2 & x^2 & -1 \\ 2-a-2x & x+a & x-2 \end{vmatrix} = 0 \text{ să aibă o rădăcină dublă număr întreg.}$$

○4. Să se rezolve ecuațiile matriceale:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$ b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$, unde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

○5. Fie $\alpha, \beta \in S_6$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Să se determine semnatura permutărilor α și β și să se rezolve ecuațiile:

a) $\alpha^{10}x = \beta^{16};$ b) $\alpha^{-200}\beta^{-101} = (\alpha\beta)^{50}.$

○6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se determine rangul lui A în funcție de m .

b) Pentru $m = 1$ să se calculeze A^{-1} .

c) Să se rezolve și să se discute sistemul de ecuații liniare
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ x + 2y + mz = m \end{cases}.$$

(Admitere, Universitatea Craiova, 2004)

○7. Se dă sistemul de ecuații liniare:
$$\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ x + y + az + t = -1, \quad a, b \in \mathbb{R}. \\ x - y + z - t = b \end{cases}$$
 Să se rezolve

sistemul de ecuații pentru $a = -1$ și $b = 1$.

(Bacalaureat, 1999)

○8. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0;$

b) $3x^3 + 7x^2 + 7x + 3 = 0;$

c) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 8x + 1 = 0;$

d) $2x^4 + x^3 - 4x^2 - 10x - 4 = 0.$

○9. Să se rezolve ecuația în condițiile date:

a) $4x^3 - 12x^2 + 11x + 3a = 0$, dacă soluțiile sunt în progresie aritmetică;

b) $2x^3 - (a + 4)x^2 + 7x - 2 = 0$, dacă soluțiile sunt în progresie geometrică;

c) $x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 6x + a = 0$, $a \in \mathbb{Q}$ și $x_1 = 3 - 2\sqrt{2}$.

d) $x^4 - 4x^3 + x^2 + ax - 20 = 0$, $a \in \mathbb{R}$ și $x_1 = 2 + i$.

○10. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^4 + aX^2 + \hat{2}X + b$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_5$ știind că $f : (X + \hat{4})(X + \hat{2})$.

b) Pentru $a = b = \hat{1}$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili.

c) Dacă $d \in \mathbb{Z}_5[X]$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor $g = X^3 + \hat{3}X + \hat{1}$ și f pentru $a = b = \hat{1}$ să se rezolve ecuația $d(x) = \hat{0}$.

d) Să se afle probabilitatea ca polinoamele f și g să aibă cel puțin o rădăcină comună.

TEMA 4

– Elemente de geometrie plană –

- 1. Fie triunghiul ABC și M, N, P mijloacele laturilor [BC], [CA], [AB]. Să se demonstreze că pentru orice punct O din plan au loc relațiile:
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OP}$;
 - $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.
- 2. Se consideră punctele A(3, 2), B(8, 4), C(8, 8), D(3, 6).
- Să se arate că vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sunt vectori coliniari.
 - Să se determine coordonatele punctului M dacă $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.
 - Să se determine coordonatele punctului N astfel încât BCND este paralelogram.
 - Să se arate că punctele C, M, N sunt coliniare.
- 3. Fie D, E, F mijloacele laturilor [BC], [CA], [AB] ale triunghiului ABC. Să se arate că:
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$;
 - $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \forall O \in \mathcal{P}$.
 - mediatoarele laturilor triunghiului sunt concurente.
- 4. Să se verifice dacă au loc egalitățile pe domeniul de existență:
- $\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \sin x + \cos x$;
 - $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0$;
 - $\frac{\cos(-480^\circ)}{\cos 660^\circ} - \frac{\operatorname{tg} 570^\circ \cdot \sin 675^\circ}{\cos 900^\circ} = -1 - \frac{\sqrt{6}}{6}$.
- 5. Să se calculeze $\sin(a+b)$ și $\cos(a-b)$ dacă $\sin a = \frac{3}{5}$, $\sin b = -\frac{5}{13}$ și $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $b \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.
- 6. Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:
- $\frac{\sin 27x + \sin 13x}{\cos 41x - \cos x}$;
 - $\frac{\sin^2 3x - \sin^2 7x}{\cos^2 3x - \cos^2 7x}$;
 - $\sin^2 x + 2 \cos a \cos x \cos(a+x) - \cos^2(a+x)$;
 - $\operatorname{tg} \frac{3x}{2} + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Noțiuni de recapitulat

- vectori în plan;
- operații cu vectori;
- vectorul de poziție al unui punct;
- coliniaritate, concurență, paralelism;
- funcții trigonometrice;
- aplicații ale trigonometriei în geometrie;
- dreapta în plan – ecuații ale drepte;
- calcul de distanțe;
- arii.

- 07. Să se demonstreze că pentru oricare $a, x \in \mathbb{R}$ au loc relațiile:
- $(1 - \sin a)x^2 - 2x \cos a + 1 + \sin a \geq 0$;
 - $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \frac{1}{2}$.
- 08. Se dă triunghiul ABC în care se cunosc: $a = 12$, $B = 105^\circ$, $C = 15^\circ$.
- Să se rezolve triunghiul ABC.
 - Să se calculeze aria suprafeței $[ABC]$.
 - Să se determine lungimea medianei din A.
 - Să se determine R și r.
- 09. Se dau punctele distincte $A(a+1, 2a-1)$, $B(3a-2, a-1)$, $C(4, 6)$, $D(1, 0)$.
Să se determine $a \in \mathbb{R}$ în cazurile:
- centrul de greutate al triunghiului ABC este situat pe prima bisectoare a axelor de coordonate;
 - $\mathcal{A}_{[ABC]} = \frac{3}{2}$;
 - A, B, D sunt puncte coliniare;
 - dreptele AB și CD sunt paralele;
 - dreptele AD și BC sunt perpendiculare;
 - punctele A și B sunt egal depărtate de dreapta CD.

TEMA 5

– Șiruri de numere reale. Limite de funcții –

- 01. Fie (a_n) o progresie aritmetică.
- Să se determine a_1 și rația r dacă $2a_5 - 3a_2 + a_{10} = 42$ și $a_3 \cdot a_5 = 112$.

b) Să se calculeze suma $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

- 02. Fie (a_n) o progresie geometrică în care a_3 și a_5 sunt respectiv cea mai mică și cea mai mare soluție a ecuației $\frac{1}{2}[1 + \log_4(3x-2)] = \log_4(1 + \sqrt{10x-11})$.

Să se calculeze suma $S = \sum_{k=1}^9 a_k$.

(Admitere ASE, București, 2002)

- 03. Dacă numerele pozitive x, y, z sunt în progresie aritmetică cu rația r , iar $x, y+2, z+12$ sunt în progresie geometrică cu rația $r+1$, atunci $x+y+z$ este:
- 12;
 - 12;
 - 9;
 - 7;
 - 15.

(Admitere ASE, București, 2002)

Noțiuni de recapitulat

- șiruri monotone;
- șiruri mărginite;
- progresii aritmetice;
- progresii geometrice;
- limita unei funcții într-un punct;
- operații cu limite de funcții;
- limite remarcabile;
- asimptotele unei funcții.

○4. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are limită în punctul specificat:

$$a) f(x) = \begin{cases} 3x - 4, & x \geq -1 \\ (3a - 1)x + 1, & x < -1 \end{cases}, x_0 = -1;$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \sqrt{(3a - 2)x^2 - a}, & x < 1 \\ (2a - 1)x - 3, & x \geq 1 \end{cases}, x_0 = 1.$$

○5. Să se calculeze:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 3}{-4x^2 - 5x + 1};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 + x - 2x^2}{(2x + 2)(x + 3)};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{2x + 1} - 3};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{4 - \sqrt{7 + x}}{\sqrt{x} - 3};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos x}{\sin 2x \cdot \sin 3x};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{\arctg(x + 3)};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^x - 9}{x - 2};$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{4^x - 3^x};$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1 + 6x)}{2x^2 + x};$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\ln(1 + 2 \sin 3x)}.$$

○6. Să se determine asimptotele funcțiilor $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

$$a) f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}; \quad b) f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x}; \quad c) f(x) = \frac{x|x|}{x^2 - 1}; \quad d) f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{x + 3}.$$

TEMA 6

- Derivate. Primitive. Integrale -

SETUL 1 DE PROBLEME

○1. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

$$a) f(x) = x|x|;$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin x, & x \leq 0 \\ \ln(1 + x^2), & x > 0 \end{cases};$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 1}, & x \geq 1 \\ \arcsin x, & x \in [-1, 1) \end{cases}.$$

○2. Să se determine parametrii reali astfel încât funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ să fie derivabilă:

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 2, & x \in [1, 2) \\ 4, & x = 2 \\ bx^2 - 2x + c, & x \in (2, +\infty) \end{cases};$$

$$b) f(x) = \begin{cases} a \arctg x + b, & x \leq 0 \\ 2ax + 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Noțiuni de recapitulat

- derivata unei funcții într-un punct;
- reguli de derivare;
- regula lui l'Hospital;
- rolul derivatei întâi și a doua;
- graficul unei funcții;
- primitivele unei funcții;
- integrala definită;
- calculul ariei și volumului cu ajutorul integralei.

○3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{mx+n}{x+3}$, $m, n \in \mathbb{R}$. Să se determine m și n astfel încât punctul $A(3, -2) \in \mathcal{G}_f$, iar tangenta în punctul A să fie înclinată la 45° față de axa Ox .

○4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln(3-x), & x \leq 2 \\ ax^2 - x(2a-b) + c, & x > 2 \end{cases}$.

a) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie de două ori derivabilă în $x = 2$.

b) Pentru $a = -\frac{1}{2}$ și $b = c = 0$ să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul A care are abscisa egală cu $18f''(0)$.

○5. Să se calculeze derivata funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 2}$;

b) $f(x) = x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$;

c) $f(x) = 3\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+4}}$;

d) $f(x) = \ln(2x^2 + 2x + 1) - 4\operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}$.

○6. Fie $f: (1, +\infty) \rightarrow (3, +\infty)$, $f(x) = 3^x + x^2 - x$. Să se arate că f este funcție inversabilă și să se calculeze $(f^{-1})'(11)$ și $(f^{-1})'(33)$.

○7. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + a^x - 5^x - 6^x$, $a > 0$.

a) Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.

b) Să se determine a astfel încât $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

SETUL 2 DE PROBLEME

○1. Folosind regula lui l'Hospital, să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^{4x})}{\ln(1+e^{2x})}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{100 \cdot x^{102} - 101x^{101} + x}{(1-x)^2}$;

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (x-3)e^{\frac{1}{x^2-9}}$;

d) $\lim_{x \rightarrow -3} \left[\frac{1}{x+3} - \frac{1}{\ln(x+4)} \right]$.

○2. Fie $I_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^n - \sin 2x}{x^3}$, $n \in \mathbb{N}$, și p cel mai mic număr natural pentru care I_p este număr real nenul. Atunci:

a) $p = 1$;

b) $p = 2$;

c) $3p = 4$;

d) $p = 0$.

(Admitere ASE, București, 2004)

- 3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție polinomială de gradul trei.
- Să se determine funcția știind că are un maxim local egal cu -1 în $x = 1$ și un minim local egal cu -2 în $x = 2$.
 - Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
 - Să se arate că punctele de extrem local și punctul de inflexiune ale graficului funcției f sunt coliniare.
 - Să se reprezinte grafic funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + 1$.
 - Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției g și axa Ox .
- 4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + 2^{-x}$.
- Să se verifice că $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, +\infty)$.
 - Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{f(x)}$.
- (Bacalaureat, 2004)
- 5. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + cx - 1}$, $a > 0$, $b > 0$.
- Să se determine parametrii a , b , $c \in \mathbb{R}$, astfel încât dreapta $y = 2x + 1$ să fie asimptotă oblică spre $+\infty$, iar $y = -1$ să fie asimptotă orizontală spre $-\infty$.
 - Să se determine aria subgraficului funcției $g: \left[\frac{5}{6}, \frac{5}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x+1)f(x)$.
- 6. Se consideră funcția $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \leq 1 \\ \ln(x^2 - 3x + 3), & x > 1 \end{cases}$.
- Să se determine a , b , $c \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie derivabilă și $f(-1) = f(2)$.
 - Să se calculeze $\int_1^2 f' \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$.
- 7. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - ax$ și $g(x) = 3ax - x^2$, $a \in [0, +\infty)$.
- Să se studieze poziția parabolilor corespunzătoare funcțiilor f și g .
 - Să se calculeze aria suprafeței plane S , cuprinsă între cele două parabole.
 - Dacă A este punctul de intersecție a celor două parabole, diferit de origine, să se arate că dreapta OA împarte suprafața S în două suprafețe echivalente.
- 8. Se consideră funcția $f_n: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$.
- Să se rezolve inecuația $f_1(x) - f_2(x) > 0$.

- b) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficele funcțiilor f_1 și f_2 și dreptele $x = 1$, $x = e$.
- c) Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția $g : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x\sqrt{x} [f_1(x) - f_2(x)]$.

TEMA 7

- Structuri algebrice -

- 1. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legile de compoziție „ $\circ$ ” și „ $\perp$ ” definite astfel:

$$x \circ y = x + y + 2, \quad x \perp y = xy + x + y + a,$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Să se studieze proprietățile legii „ $\circ$ ”.
- b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât legea „ $\perp$ ” să fie asociativă.
- c) Pentru $a = 0$ să se rezolve ecuațiile:
- $$(x^2 - 1) \circ (2x - 3) = 6, \quad 2^x \perp (2^x - 1) = 71.$$
- d) Să se rezolve sistemul de ecuații pentru $a = 0$:

$$\begin{cases} (x+1) \circ (y+1) = 6 \\ (x+1) \perp (y-1) = 2 \end{cases}$$

- e) Știind că $(-2) \perp 3 = -5$, să se arate că $\underbrace{2 \perp 2 \perp \dots \perp 2}_{n \text{ ori}} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} [(-2) \circ 3^k], \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Noțiuni de recapitulat

- legi de compoziție - proprietăți;
- monoid;
- grupuri;
- morfisme de grupuri;
- inel;
- corp;
- morfisme de inele și corpuri;
- inele de polinoame.

- 2. Se consideră mulțimile:

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R});$$

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\} \subset S_4.$$

- a) Să se alcătuiască tabla înmulțirii matricelor pe mulțimea G_1 și tabla compunerii permutărilor pe mulțimea G_2 .
- b) Să se arate că $(G_1, \cdot)$ și $(G_2, \circ)$ sunt grupuri.
- c) Să se arate că $(G_1, \cdot) \simeq (G_2, \circ)$.

- 3. Se dă matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1+5a & 3a \\ -\frac{25a}{3} & 1-5a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- a) Să se arate că $A(a)$ este matrice inversabilă, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
- b) Să se arate că $A(a) \cdot A(b) = A(a+b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
- c) Să se rezolve ecuația $A(x+1)A(2) = A(1-x)A(3)$.

- d) Să se rezolve sistemul de ecuații
$$\begin{cases} A^2(x + 3y) = A(-8) \\ A(2x + y)A(3) = A(2)A(y - x) \end{cases}$$
- e) Dacă $G = \{A(a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ să se arate că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.
- f) Să se stabilească un izomorfism între grupurile $(G, \cdot)$ și $((0, +\infty), \cdot)$.

○4. Pe mulțimea $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se definesc operațiile algebrice:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ad + bc + 2ac, bd - ac).$$

- a) Să se arate că $(A, \cdot)$ este monoid și să se determine mulțimea $\mathcal{U}(A)$.
- b) Să se arate că $(A, +, \cdot)$ este inel.
- c) Inelul $(A, +, \cdot)$ are divizori ai lui zero?

○5. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și

mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$, unde $\bar{u}$ este conjugatul numărului complex u .

- a) Să se verifice că $I_2 \in G$ și $O_2 \in G$.
- b) Să se arate că dacă $z, w \in \mathbb{C}$ și $|z|^2 + |w|^2 = 0$, atunci $z = w = 0$.
- c) Să se arate că dacă $P, Q \in G$, atunci $P \cdot Q \in G$.
- d) Să se arate că dacă $D \in G$, $D \neq O_2$, atunci D este matrice inversabilă și $D^{-1} \in G$.
- e) Să se găsească o matrice $X \in G$ cu proprietatea că $XC \neq CX$, unde $C = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.
- f) Să se arate că dacă $A, B \in G$ și $A \cdot B = O_2$, atunci $A = O_2$ sau $B = O_2$.
- g) Să se arate că $(G \setminus \{O_2\}, \cdot)$ este grup necomutativ.
- h) Să se arate că $(G, +, \cdot)$ este corp necomutativ.

(Bacalaureat, 2004)

○6. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (1 + X + X^2)^{10}$ cu forma sa algebrică

$$f = a_{20}X^{20} + \dots + a_1X + a_0.$$

- a) Să se determine a_0 și a_1 .
- b) Să se calculeze $f(1)$, $f(-1)$, $f(i)$.
- c) Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .
- d) Să se arate că $a_0 + a_4 + \dots + a_{16} + a_{20} = \frac{1}{4}[f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i)]$.

(Bacalaureat, 2000)

○7. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinom de gradul $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine f știind că funcția polinomială atașată verifică egalitatea:

$$f(x) - f'(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, (1).$$

b) Să se arate că dacă f verifică relația (1) atunci nu poate avea rădăcini reale multiple.

c) Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{C}$ ecuația $f(x) + 12 = 0$ pentru $n = 4$.

○8. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră operațiile algebrice:

$$x \perp y = x + y - 1, \quad x \top y = 2xy - 2(x + y) + a, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ este inel.

b) Pentru $a \in \mathbb{R}$ determinat să se determine $\mathcal{U}(\mathbb{R})$.

c) Să se afle $m, n \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$ verifică simultan condițiile:

i) f este funcție bijectivă;

ii) $f(x + y) = f(x) \perp f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$;

iii) $f(x \cdot y) = f(x) \top f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

- ALGEBRĂ -

CAPITOLUL I. GRUPURI

1. Legi de compoziție pe o mulțime (pag. 11)

• **E2. c)** $a \in \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$. • **E6. a)** $x \in \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$; **b)** $x = \frac{2}{5}, y = \frac{53}{15}$. • **E9. a)** Avem

succesiv: $x, y \in [2, +\infty) \Rightarrow x \geq 2, y \geq 2 \Rightarrow x - 2 \geq 0, y - 2 \geq 0 \Rightarrow (x - 2)(y - 2) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy - 2x - 2y + 4 \geq 0 \Rightarrow x \circ y \geq 2$. **c)** Dacă $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$ cu

$\det(A) = a^2 - 2b^2 = 1, \det(B) = x^2 - 2y^2 = 1$ se obține $A \cdot B = \begin{pmatrix} ax + 2by & 2ay + 2bx \\ bx + ay & 2by + ax \end{pmatrix}$

și $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = 1$, deci $AB \in M$. • **E11. a)** Se obține că $A^6 = I_2$, deci sunt 6 elemente.

• **A1.** $\{\hat{0}\}, \{\hat{0}, \hat{2}\}, \mathbb{Z}_4$. • **A2. a)** $x > a, y > a \Rightarrow x - a > 0, y - a > 0 \Rightarrow (x - a)(y - a) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy - a(x + y) + a^2 > 0 \Rightarrow x \circ y > a$. **b)** Avem: $x, y \in [4, 6] \Rightarrow 4 \leq x \leq 6$ și

$4 \leq y \leq 6 \Rightarrow -1 \leq x - 5 \leq 1, -1 \leq y - 5 \leq 1 \Rightarrow |x - 5| \leq 1$ și $|y - 5| \leq 1 \Rightarrow |(x - 5)(y - 5)| \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 \leq (x - 5)(y - 5) \leq 1 \Rightarrow 4 \leq x \circ y \leq 6$. • **A3.** Dacă $x, y \in M$ atunci $x + y - 3 > 0$.

Se arată că $\frac{xy - 2}{x + y - 3} > 2 \Leftrightarrow xy - 2 > 2x + 2y - 6 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 2)(y - 2) > 0$. • **A6.** Avem: $x \circ y > 2 \Rightarrow xy - 2x - 2y + a > 2 \Rightarrow (x - 2)(y - 2) +$

$+ a - 6 > 0$ și rezultă $a \geq 6$. • **A8.** Fie $x \in M$. Atunci $x^n \in M$, pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezultă că $\{x, x^2, \dots, x^n, \dots\} \subset M$. Dar M este finită, deci există $m \in \mathbb{N}^*$, astfel

încât $x^m = x$. Așadar $x^m - x = 0$ cu soluțiile $x \in \{-1, 0, 1\}$, după paritatea lui

m . În concluzie $M \subset \{-1, 0, 1\}$ și se obține: $\{0\}, \{0, 1\}, \{1\}, \{0, 1, -1\}, \{-1, 1\}$.

Pentru $\mathbb{C}$, din egalitatea $x^m = x \Rightarrow x = 0$ sau $x^m = 1$ deci x rădăcină complexă a

unității. Rezultă că M este: $\{0\}, \mathcal{U}_n$ sau $\{0\} \cup \mathcal{U}_n, n \in \mathbb{N}$. • **A9.** Avem: $3^{3^3} = 3^9$,

respectiv n^{n^2} funcții (legi de compoziție).

2. Proprietăți ale legilor de compoziție (pag. 19)

• **E3. a)** $a = c = 1, b \in \mathbb{Z}$. **b)** $a = 2, b = 2$. **c)** $a = b \in \{0, 1\}$. **d)** $a = b = 1$. • **E5.** Rezultă

$3a + b = 7$, cu soluțiile $(a, b) \in \{(1, 4), (2, 1)\}$. • **E6. a)** $a = \hat{3}$.

• **A2.** Răspuns e). • **A4. a)** $a = b = 1$; **b)** Avem că: $AB = BA$ deci $A \circ B = (a + b)AB$

și $a, b \in \mathbb{R}$; **c)** $a \in \mathbb{R}$. • **A5. a)** $ax = xa, \forall x \in M$; **b)** $a \in M$; **c)** $ax = xa, \forall x \in M$.

• **A6.** $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

2.4. Elemente simetrizabile (pag. 26)

- **E1. a)** $e = 0$; **b)** $e = -1$; **c)** $e = 4$; **d)** $e = 0$; **e)** $e = \hat{3}$. • **E2. a)** $e = -2$; **b)** $e = 8$; **c)** $e = \frac{1}{2}$; **d)** $e = 2^{\frac{1}{9}}$.

3. Noțiunea de grup. Exemple (pag. 42)

- **E4.** $(G, \perp)$. • **E5.** $(G, \perp)$. • **E6.** Amândouă. • **E7.** $A(a, b) \cdot A(c, d) = A(ac - bd, ad + bc)$, $E = I_2$. • **E8. b)** Se arată că: $A^3 = I_3$, $\forall A \in M$. • **A2. a)** 4. • **A3.** $e = (0, 1)$ și $(a, b)' = \left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right)$. • **A4.** Se obține că $A \circ B = A \cdot B$. • **A5.** $A = 2$, $b = 6$. • **A6.** $e = f_1$ și $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$. • **A7.** Se arată că $f_a \circ f_b = f_{a+b}$. • **A9.** $a = b = 1$.

4. Reguli de calcul într-un grup (pag. 49)

- **E1. b)** 2, 2, respectiv $5 - 4i$. • **E2. b)** $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. • **E3.** $x^n = 2^{(\log_2 x)^n}$. • **E4.** $x^n = 4 + (x - 4)^n$. • **E5. a)** $a^2b = a(ab) = a(ba) = (ab)a = baa = ba^2$; **c)** Inducție matematică. • **E6. a)** $x^2 = (aba^{-1})(aba^{-1}) = aba^{-1}aba^{-1} = abba^{-1} = ab^2a^{-1}$; **c)** $x^n = ab^n a^{-1}$. • **A1. a)** Inducție matematică și faptul că $a^{-n} = (a^{-1})^n$, $n \in \mathbb{N}$. • **A2. a)** $x = aba = aa^2a = a^4$. Dar din $a = b^2 \Rightarrow a = (a^2)^2 \Rightarrow a = a^4 \Rightarrow a^3 = e$. Așadar $x = a^4 = a \Rightarrow x^3 = a^3 = e$. **b)** $x^3 = ab^3a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$. • **A3.** $ab = e \Rightarrow a = b^{-1} \Rightarrow ba = bb^{-1} \Rightarrow ba = e$. • **A4.** $ab^2 = e \Rightarrow ab = b^{-1} \Rightarrow bab = bb^{-1} \Rightarrow bab = e \Rightarrow ba = b^{-1} = ab$. • **A5.** Din relația $y^2 = xyx^{-1} \Rightarrow y^2x = xy$, deci $xy = y^2x$. Avem succesiv folosind această egalitate: $x^2y = xy^2x = xy \cdot yx = y^2x \cdot yx = y^2 \cdot y^2x \cdot x = y^4x^2$. Așadar $x^2y = y^4x^2$. Avem: $x^3y = xy^4x^2 \Rightarrow x^3y = xy \cdot y^3x^2 = y^2x \cdot y^3x^2 = y^2xy \cdot y^2x^2 = y^2 \cdot y^2xy^2x^2 = y^4xyx^2 = y^4 \cdot y^2yx^2 = y^6 \cdot y^2x \cdot x^2 = y^8x^3$. Analog din $x^3y = y^8x^3$ se obține $x^4y = y^{16}x^4$ apoi: $x^5y = y^{32}x^5$. Dar cum $x^5 = e$ rezultă că $y = y^{32}$ deci $y^{31} = e$. • **A6. a)** $abc = e \Rightarrow bc = a^{-1} \Rightarrow bca = a^{-1}a = e$. • **A7.** Din $aba = bab \Rightarrow a^2ba = aba \cdot b = bab \cdot b = bab^2 \Rightarrow a^3ba = aba \cdot b^2 \Rightarrow a^3ba = bab \cdot b^2 = bab^3 \Rightarrow a^4ba = abab^3 = bab^4 \Rightarrow a^5ba = abab^4 = bab \cdot b^4 = bab^5$. Așadar $a^5ba = bab^5$. Dar $a^5 = e \Rightarrow ba = bab^5$ și după simplificarea cu ba se obține $e = b^5$. • **A10. a)** $x^2 = e \Rightarrow x = x^{-1}$. Avem: $xy = (xy)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1} = yx$. **b)** $(xy)^2 = x^2y^2 \Rightarrow xyxy = xxxy$ și după simplificare cu x la stânga și cu y la dreapta se

obține $xy = yx$. **c)** Avem: $y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1}$, $\forall x, y \in G$. Luând $x \rightarrow x^{-1}$ și $y \rightarrow y^{-1}$ se obține că $yx = xy$, $\forall x, y \in G$.

5. Morfisme de grupuri (pag. 55)

• **E1.** $a \in \{-1, 1\}$ pentru $\mathbb{Z}$ și $a \in G \setminus \{0\}$ în celelalte cazuri. • **E6.** $a = 1$, $b = 2$.

• **E10.** $f(x) = ax$.

• **A1.** $f(A(a)) = a$. • **A2.** $f(A(a)) = a$. • **A3.** $\mathcal{M} = \{I_3, A, A^2\}$ și $M \simeq \mathcal{U}_3$. • **A4.** $a = 1$,

$b = 3$. • **A5.** $f: G_2 \rightarrow G_1$, $f(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. • **A7.** $f(x) = \operatorname{tg} x$.

• **A8.** $a = b = 1$. • **A10.** $f(xy) = f(x) \cdot f(y) \Leftrightarrow (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \Leftrightarrow xy = yx$.

• **A11.** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}$, $f(a) = f_a$.

CAPITOLUL II. INELE ȘI CORPURI

1. Definiții și exemple (pag. 67)

• **A2.** $0_{\mathbb{Z}} = -2$, $1_{\mathbb{Z}} = -1$, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}) = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{-2x-3}{x+2} \in \mathbb{Z} \right\} = \{-1, -3\}$. • **A3.** Se obține

$b + 3a = 3$ și $a = -3$, $b = 12$. • **A4.** $0_{\mathbb{C}} = 0$, $1_{\mathbb{C}} = 1$, $\mathcal{U}(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \neq 0\}$.

• **A5.** $0_M = 1$, $1_M = e$, $\mathcal{U}(M) = M \setminus \{1\}$. • **A6.** Din egalitatea dată se obține că

$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$. $0_M = 0_2$, $1_M = I_2$, $\mathcal{U}(M) = \{a \in M \mid \operatorname{Tr}(A) \neq 0\}$.

• **A7.** $0_A = (0, 0)$, $1_A = (1, 0)$. • **A8.** $f_a \perp f_b = f_{a+b+1}$, $f_a \top f_b = f_{a+b+ab}$, $f_a + f_b = f_{a+b}$, $f_a \circ f_b = f_{ab}$. • **A9.** $\operatorname{card}(M) = 2^3 = 8$.

2. Reguli de calcul într-un inel (pag. 73)

• **E1.** **a)** $\hat{2}$; **b)** $\hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$; **c)** $\hat{2}, \hat{4}, \hat{6}$; **d)** $\hat{x}$ unde $(x, 60) \neq 1$. • **E2.** **a)** Se consideră

$f(x) = \begin{cases} 1, & x = \text{par} \\ 0, & x = \text{impar} \end{cases}$ și $g(x) = \begin{cases} 0, & x = \text{par} \\ 2, & x = \text{impar} \end{cases}$. **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• **E6.** În $\mathbb{Z}_2$ are loc egalitatea $x^2 = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}_2$. • **E8.** **a)** $x \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$, respectiv

$x \in \{\hat{2}, \hat{4}\}$; **b)** $x \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$ și $x \in \{\hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$; **c)** $x \in \mathbb{Z}_7 \setminus \{\hat{0}\}$.

• **E9.** $(ab)^2 = a^2b^2 = ab$, $(1-a)^2 = 1 - 2a + a^2 = 1 - 2a + a = 1 - a$.

• **A1.** **a)** $(\hat{5}, \hat{6})$; **b)** Prin înmulțire cu $\hat{4}$ a doua ecuație se scrie $\hat{0} = \hat{4}$. Rezultă

sistem incompatibil. • **A2.** **a)** $(\hat{0}, \hat{2})$; **b)** $x = \hat{2} + \hat{3}\alpha$, $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_8$. • **A3.** Avem:

$$(1 - ba)(1 + bx^{-1}a) = 1 + bx^{-1}a - ba - babx^{-1}a = 1 + bx^{-1}a - ba - b(ab)x^{-1}a = \\ = 1 + bx^{-1}a - ba - b(x - 1)x^{-1}a = 1 + bx^{-1}a - ba - b(x^{-1} - 1)a = 1.$$

• **A4.** $1 = 1 - 0 = 1 - a^2 = (1 - a) \cdot (1 + a)$. • **A5.** $1 = 1 - 0 = 1 - a^n = (1 - a)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$.

• **A6. a)** Pentru $x \rightarrow -x$ se obține că $(-x)^2 = -x$ sau $x^2 = -x$ deci $x = -x$ sau $x + x = 0$.

b) $(x + y)^2 = x + y \Rightarrow x^2 + xy + yx + y^2 = x + y \Rightarrow x + xy + yx + y = x + y \Rightarrow xy + yx = 0 \Rightarrow xy = -yx = yx$.

3. Corpuri (pag. 78)

• **A1.** $a = b = 1$, $c = 6$. • **A3.** Se obțin egalitățile $f_a + f_b = f_{a+b}$ și $f_a \circ f_b = f_{ab}$.

• **A4. a)** Evident $a \cdot b \notin \{0, a, b\}$, deci $ab = 1$ și astfel $ba = 1$. **b)** $\mathcal{U}(K) = \{1, a, b\}$.

Atunci $a^2 \in \{1, a, b\}$. Cum $a^2 = a$ implică $a = 1$, iar $a^2 = 1 = ab$ ar implica $ab = a^2$ deci $b = a$, rezultă că $a^2 = b$. Analog rezultă că $a = b^2$. **c)** Avem: $a^3 = a \cdot a^2 = a \cdot b = 1$.

d) Din $a^3 = 1 \Rightarrow a^3 - 1 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a^2 + a + 1) = 0$ și cu $a \neq 1$ se obține $a^2 + a + 1 = 0$. **e)** Fie $x = -1$. Cum $x^2 = 1$ rezultă că $x \in \{1, a, b\}$.

• Dacă $a = -1 \Rightarrow a^2 = 1 = ab \Rightarrow a = b$ fals.

• Dacă $b = -1 \Rightarrow b^2 = 1 = ab \Rightarrow a = b$ fals.

Așadar $-1 = 1 \Rightarrow 1 + 1 = 0$.

CAPITOLUL III. INELE DE POLINOAME

3.1. Adunarea și înmulțirea polinoamelor

scrise sub formă algebrică (pag. 89)

• **E2. a)** $m = 1 \Rightarrow \text{grad}(f) = 0$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Rightarrow \text{grad}(f) = 1$. **b)** Pentru $m = 1 \Rightarrow \text{grad}(f) = 0$, pentru $m = 2 \Rightarrow \text{grad}(f) = 1$, pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \Rightarrow \text{grad}(f) = 2$.

• **E5. a)** $a = 1$, $b = 0$. • **E10. a)** $f = X - 1$, $g = 1$; **b)** $f = 1$, $g = -4x - 3$.

• **A1. a)** $m = -1$; **b)** $m = n = 1$; **c)** $m = \hat{2}$, $n = 0$. • **A2.** $m = 1$, $n = -1$ sau $m = -1$, $n = 1$.

• **A3.** Pentru $a = b = 1$, $\text{grad}(f) = \text{grad}(g) = 1$, pentru $a \neq b$ și $b \neq 2a - 1$, $\text{grad}(f) = \text{grad}(g) = 3$. • **A4.** $a = 1$, $b = -2$. • **A5.** $f = 3(X^2 - 3X + 2)$.

• **A6.** $f = \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{3}$. • **A7.** $a = -2$. • **A10.** $a = -2$, $b = 1$. • **A11. a)** $f = X - 2$;

b) $f = X^2 - X + 1$; **c)** $f = -(X + 1)(X^4 + 1)$. • **A12.** $a = \hat{2}$, $b = \hat{1}$. • **A14. a)** Dacă

$f \in \mathbb{R}[X]$ și $\text{grad}(f) = n$, atunci din $f(x) = |x|$ se obține că $f^2(x) = x^2$, deci f are gradul 1. Așadar am avea $ax + b = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce nu se poate. **b)** Avem:

$|x| = f(x) - x^2$ și s-a arătat că $|x|$ nu este funcție polinomială. **c)** Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$,

funcția polinomială verifică egalitatea $f(z) = z^2 + |z|$ și pentru $x \in \mathbb{R}$ am avea că

$|x| = f(x) - x^2$ ar fi funcție polinomială, ceea ce nu este adevărat.

• **A15.** Dacă $f: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$, atunci avem $f(\hat{0}) = a_1$, $f(\hat{1}) = a_2$, $f(\hat{2}) = a_3$. Funcția $g: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$, $g(x) = ax^2 + bx + c$, cu condițiile: $g(\hat{0}) = a_1$, $g(\hat{1}) = a_2$, $g(\hat{2}) = a_3$, este egală cu f și este polinomială. Se găsește: $c = a_1$, $b = a_3 - a_2$, $a = 2a_2 - a_1 - a_3$.

3.2. Împărțirea polinoamelor (pag. 95)

• **E3.** $g = X^2 - 3X + 7$.

• **A2. a)** $a = -\frac{7}{16}$; **b)** $a = 2$, $b = -2$; **c)** $a = -2$, $b = 0$; **d)** $a = \hat{0}$; **e)** $a = b = \hat{0}$.

• **A3.** Restul are gradul 1, deci $r = aX + b$ și $r(n) = a \cdot n + b$, care este progresie aritmetică. • **A4. a)** Avem: $f = (X - a)(X - b)q + mx + n$. Atunci $f(a) = ma + n$,

$f(b) = mb + n$ de unde $m = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$, $n = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$. • **A6.** $a = -2$, $b = 8$.

• **A7.** $a = 6$, $b = 5$. • **A8.** $f(x) = (x - a)q_1(x) + r \Rightarrow f(b) = (b - a)q_1(b) + f(a)$. Se obține că $(b - a)q_1(b) = f(b) - f(a)$. Analog $(c - b)q_2(c) = f(c) - f(b)$ și $(a - c)q_3(a) = f(a) - f(c)$ etc. • **A9.** Avem $f = (X - 1)(X + 1)(X + 4)C(X) + aX^2 + bX + c$. Se obține că: $f(1) = a + b + c$, $f(-1) = a - b + c$, $f(-4) = 16a - 4b + c$ și se are în vedere că $f(1) = 15$, $f(-1) = 7$, $f(-4) = -80$. • **A10.** Fie $R_1 = mX + n$, $R_2 = pX + q$.

Din teorema împărțirii cu rest se obține că $f = (X^2 - 1)C + mX + n$ și

$f = (X^2 + 1)C_1 + pX + q$. Rezultă că:
$$\begin{cases} m + n = f(1) = a + b + c + 4 \\ -m + n = f(-1) = -a + b - c + 4 \end{cases}$$
. Analog

$$\begin{cases} f(i) = pi + q = -ai - b + ci + 4 \\ f(-i) = -pi + q = ai - b - ci + 4 \end{cases}$$
. Se obține că: $n = b + 4$, $m = a + c$, $q = -b + 4$,

$p = -a + c$, deci $R_1 = (a + c)X + b + 4$, $R_2 = (c - a)X + 4 - b$.

Egalitatea dată se scrie: $(cX + 4)^2 - (aX + b)^2 = 5X^2 - 28X + 15$ și rezultă egalitățile: $c^2 - a^2 = 5$, $ab - 4c = 14$, $16 - b^2 = 15$ etc.

3.3. Împărțirea la $X - a$. Schema lui Horner (pag. 100)

• **E2. a)** $m = 1$; **b)** $m = -i$; **c)** $m = \hat{2}$. • **A1. a)** $m = 1$; **b)** $m \in \{-3, 3\}$; **c)** $a = -2$.

• **A6.** $a = \hat{0}$, $b = \hat{2}$. • **A7.** Avem $f(2) = -12 \Rightarrow 2^{n+1} - 3 \cdot 2^n + 4 = -12 \Rightarrow n = 4$.

• **A8.** $f(2) = 13$ și $f(4) = 81$. Se obține sistemul: $2^m + 2^n = 12$, $4^m + 4^n = 80$ cu soluțiile $m = 3$, $n = 2$ sau $m = 2$, $n = 3$.

4. Divizibilitatea polinoamelor (pag. 110)

• **E4. a)** $m = -3$; **c)** $m = \hat{2}$; **d)** $m = \hat{3}$.

- **A1. a)** $f(-a) = \hat{0} \Rightarrow a^2 = \hat{1} \Rightarrow a \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$; **b)** $f(\hat{2}) = \hat{0} \Rightarrow a = \hat{0}$; **c)** $b = a + \hat{4}$.
- **A2.** Avem: $g = (X^2 + 2X)^2 + 2(X^2 + 2X) + m = (f - m)^2 + 2(f - m) + m = f^2 - 2mf + m^2 + 2f - m$. Se pune condiția ca $m^2 - m = 0$. • **A3.** Avem $X + 1 = X^2 - g$ și rezultă cu binomul lui Newton: $f = X(X^2 - g)^{2n+1} + (m-1)X^n = M_g + X \cdot X^{4n+2} + (m-1)X^n = M_g + X^n(X^{3n+3} + m - 1)$. Este necesar ca polinomul $X^{3n+3} + m - 1$ să se dividă cu g . Avem: $X^{3n+3} + m - 1 = (X^3)^{n+1} - 1 + m = (X^3 - 1) \cdot C(X) + m$. Deoarece $X^3 - 1 = (X - 1)g$ este necesar ca $m = 0$. • **A4.** $f(1) = 0 \Rightarrow m^3 - 4m^2 + 3m = 0 \Rightarrow m(m-1)(m-3) = 0 \Rightarrow m \in \{0, 1, 3\}$. • **A5. a)** $f(1) = 0, f(-1) = 0$; **b)** $f(2) = 0, f(3) = 0$; **c)** $f(1) = 0, f(-2) = 0$; **d)** $a = 0, b = 2$; **e)** f se divide cu $X - 1$ deci $f(1) = 0$. Câtul împărțirii cu $X - 1$ este $g = X^3 + (a+1)X^2 + (a-b+1)$. Se pune condiția ca polinomul g să se dividă cu $X^2 - bx + 8$. • **A8.** Se aplică algoritmul lui Euclid.
- **A11.** $f = (X^n + g)^2 - X^n = X^{2n} + 2X^n g + g^2 - X^n = X^n(X^n - 1) + g(2X^n + g)$. Se arată că $X^n - 1 = (X - 1)g$. • **A12. a)** $f = (X + g)^{4n+1} + (g - X)^{4n+1}$. Folosind binomul lui Newton se obține: $f = M_g + X^{4n+1} + (-X)^{4n+1} = M_g$. • **A13.** $f = X^m + (X^2 - g)^m + 1 = X^m + X^{2m} + M_g + 1$. Se analizează cazurile $m \in \{3k, 3k+1, 3k+2\}$ etc.

5. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili (pag. 121)

- **E3. a)** $a = \hat{0}, x_1 = \hat{0}, x_2 = \hat{0}, x_3 = -\hat{1}$; **b)** $a = \hat{2}, x_1 = x_2 = \hat{2}, x_3 = x_4 = \hat{3}$;
c) $a = \hat{2}, b = \hat{1}, x_1 = x_2 = \hat{1}, x_3 = x_4 = \hat{2}$.
- **E5. b)** $f = (X - \varepsilon)(X - \varepsilon^2)(X - \varepsilon^3)(X - \varepsilon^4)(X - \varepsilon^5)$, unde $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ și $\varepsilon^6 = 1$.
- e)** $f = (X + \hat{1})^2$; **f)** $f = (X + \hat{6})(X^2 + \hat{5}X + \hat{5})$.
- **A1. a)** Dacă $\alpha \in \mathbb{Q}$ egalitatea $f(\alpha) = 0$ se scrie: $2\alpha^3 + 3\alpha^2 + \alpha + \sqrt{3}(\alpha^3 + 2\alpha + 3) = 0$.
 Se obține că $\begin{cases} \alpha^3 + 2\alpha + 3 = 0 \\ 2\alpha^3 + 3\alpha^2 + \alpha = 0 \end{cases}$ cu soluția $\alpha = -1$. **b)** Avem pentru $x \in \mathbb{R}$ și $f(x) = 0$: $2x^3 + 5x^2 - 3 + i(x^2 - 2x - 3) = 0$. Se obține $x^2 - 2x - 3 = 0$ și $2x^3 + 5x^2 - 3 = 0$ cu soluția $x = -1$. • **A2. a)** Soluțiile ecuației sunt $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = a$. Se obține: $a = 1$ și $a = -2$. • **A4.** $m = 3$. • **A6. a)** Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ este rădăcina dublă, împărțind polinoamele succesiv cu $x - \alpha$ se obțin resturile: $\begin{cases} \alpha^3 - 5\alpha^2 + 8\alpha + a = 0 \\ 3\alpha^2 - 10\alpha + 8 = 0 \end{cases}$. Rezultă $\alpha = 2, \alpha = \frac{4}{3}$.

• **A7. a)** Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ rădăcina triplă. Se împarte succesiv polinomul f cu $X - \alpha$, punând condiția ca resturile să fie nule. Se obține că ultimul rest este $r = 3\alpha - 6 = 0$, deci $\alpha = 2$, apoi $a = 12$, $b = -b$.

• **A8.** Polinomul $f = (X - \hat{0})(X - \hat{1})(X - \hat{2}) = X^3 + \hat{2}X$. Se obține $a = \hat{0}$. • **A9.** $n = 2$.

• **A11.** Pentru $a = \hat{0}$, $b \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$ se obțin polinoame de gradul 1. Dacă $a \neq \hat{0}$, f nu trebuie să aibă rădăcini în $\mathbb{Z}_3$, deci $f(\hat{0}) \neq \hat{0}$, $f(\hat{1}) \neq \hat{0}$, $f(\hat{2}) \neq \hat{0}$. Se obține că

$a + b = \hat{0}$ deci $a = \hat{1}$, $b = \hat{2}$ și $a = \hat{2}$, $b = \hat{1}$. • **A14. a)** $f = (X^4 - X^2 + 1) \cdot (X^2 + X + 1) \cdot$

$(X^2 - X + 1)$. **b)** $f = (X - \hat{1})^8$; **c)** $f = (X - \hat{1})^9$. • **A15.** Dacă f este reductibil peste

$\mathbb{Z}$ atunci f are o rădăcină în $\mathbb{Z}$, $\alpha = n \in \mathbb{Z}$. Obținem că: $f = (X - n)(X^2 + uX + v)$.

Identificând cele două scrieri ale lui f se obține: $a = -nv$, $b = u - n$, $c = v - nu$ și $ab + ac = -nv(n + v - n - nu)$ și se arată că $ab + ac$ nu poate fi impar.

• **A17.** $f = (X + \hat{1})^p$.

6. Relațiile lui Viète (pag. 128)

• **E2. a)** $f = (X + \hat{1})^4$; **b)** $f = (X + \hat{1})^3$; **c)** $f = (X + \hat{1})^5$; **d)** $x \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$. • **E3. a)** Din

$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{7}{3}$ se obține $z_3 = \frac{2}{3}$ etc. $z_1 = 1$, $z_2 = -4$. **b)** Din relația $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -3$

se obține $z_3 = -\frac{3}{5}$, apoi $z_1 = 1$, $z_2 = 5$. • **E4. a)** Avem $z_1 + z_2 + z_3 = 6$ și $z_1 + z_2 = z_3$.

Se obține $z_3 = 3$. Din $f(3) = 0$ rezultă $a = -5$. • **A3. a)** Din relațiile

$x_1 + x_2 + x_3 = 6$ și $x_1 + x_2 = 2x_3$ se obține: $x_3 = 2$. Prin împărțire cu $X - 2$ se

afă $m = 9$. • **A8.** Se obține: $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = (x + y + z)^2$ și astfel

$xy + zy + zx = -1$. Rezultă că x, y, z sunt soluțiile ecuației $t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$, care se scrie $(t^2 - 1)(t - 2) = 0$. Așadar, $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$ și permutări ale acestora.

7. Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (pag. 137)

• **E4. a)** $x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{3}$, $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{7}$.

• **A1.** Soluții întregi pot fi doar divizori ai lui 2. Se obține $a \in \{6, -2, 4, -3\}$.

• **A2.** Soluții pot fi doi dintre divizorii lui 2, nu neapărat distincți. • **A3. c)** Soluții

raționale pot fi elemente ale mulțimii $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\right\}$. Se folosește

schema lui Horner.

– ANALIZĂ MATEMATICĂ –

CAPITOLUL I. PRIMITIVE

3. Proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite (pag. 156)

• **E1.** Din definiția primitivei unei funcții se obține că $f(x) = F'(x)$, $x \in D$.

a) $f(x) = 6x^2 - 8x - 5$; **b)** $f(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 8x\sqrt{x} + \frac{2x^2}{\sqrt{x}}$; **c)** $f(x) = \sin x + x \cos x$;

d) $f(x) = \ln x$; **e)** $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 2}{(x+1)^2}$; **f)** $f(x) = xe^x$; **g)** $f(x) = \frac{2\lg x + 1}{\cos^2 x}$.

• **E2.** $F_1'(x) = F_3'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. • **E4.** F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

• **E5.** $\int (3x^2 + 2x) dx = x^3 + x^2 + C$. Dacă $F(x) = x^3 + x^2 + c_1$, $x \in \mathbb{R}$ este o primitivă, din condiția $F(-1) = 2$ rezultă $c_1 = 2$ și $F(x) = x^3 + x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

• **E6. a)** $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (3x - 4) = 2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (3x^2 - 5x) = f(2)$. Rezultă că f este continuă în

$x = 2$. **b)** $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sqrt{2x+9}-3}{2x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{(2x+9)-9}{2x(\sqrt{2x+9}+3)} = \frac{1}{6} = f(0+0) = f(0)$. Rezultă că

f este continuă în $x = 0$. **c)** $f(2-0) = f(2+0) = f(2) = 3$, f este continuă în $x = 2$.

• **A1. a)** $f(x) = F'(x) = \ln^2 x - 1$; **b)** $f(x) = e^{x+1}(x^2 - 2x - 4)$; **c)** $f(x) = 2x(\cos x - 1)$;

d) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$; **e)** $f(x) = \sqrt{x^2+1}$; **f)** $f(x) = x^n \ln x$. • **A2.** F_1 și F_3 . • **A3.** Func-

țiile sunt continue. **e)** $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ |x-1|, & x > 0 \end{cases}$. • **A4.** $F(x) = \begin{cases} e^{x+1} + c_1, & x \leq -1 \\ 2x + \frac{x^2}{2} + c_2, & x > -1 \end{cases}$.

F este continuă în $x = -1$, conduce la $c_1 = -\frac{5}{2} + c_2$. Din condiția $F(2) = \frac{3}{2}$ rezultă $c_2 = -\frac{9}{2}$, $c_1 = -7$.

• **A5.** $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 1] \\ x^2, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$, $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - 10, & x < -1 \\ x - \frac{28}{3}, & x \in [-1, 1] \\ \frac{x^3}{3} - \frac{26}{3}, & x > 1 \end{cases}$. • **A6.** $a = \frac{2}{e}$,

$b = -1$. • **A7.** Din continuitate rezultă $3a - b = -9$ și din derivabilitate se

obține $9a + 2b = -15$. Rezultă $a = -\frac{11}{5}$, $b = \frac{12}{5}$. • **A8.** $a = b = 1$. • **A9.** $a = -3$, $b = 4$. • **A10.** $a = \frac{2}{3}$, $b = -2$. • **A11.** $a = 1$, $b \in \mathbb{Q}$, $c = 0$.

4. Primitive uzuale (pag. 165)

• **E1. a)** $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + \mathcal{C}$; **c)** $\int x^{\frac{4}{5}} dx = \frac{x^{\frac{4}{5}+1}}{\frac{4}{5}+1} + \mathcal{C}$; **f)** $\int 11x \cdot \sqrt[4]{x^3} dx = 11 \int x^{\frac{7}{4}} dx = 4x^{\frac{11}{4}} +$

$+ \mathcal{C}$; **i)** $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \mathcal{C}$; **k)** $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + \mathcal{C}$; **l)** $\int \frac{1}{16 + x^2} dx = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} +$

$+ \mathcal{C}$; **n)** $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{2} + \mathcal{C}$. • **E2. f)** $\int \frac{1}{4x^2 - 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+1} \right| +$

$+ \mathcal{C}$. **i)** $\int \frac{18}{3x^2 + 27} dx = \int \frac{6}{x^2 + 9} dx = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + \mathcal{C}$; **k)** $\int \frac{dx}{\sqrt{6x^2 + 24}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 4} \right) + \mathcal{C}$. **m)** $\int \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48 - 3x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{4} + \mathcal{C}$.

• **E3. c), d), e).** Se folosesc formulele: $2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x$, $2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$,
 respectiv $2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$.

• **A1. g)** $\int \frac{(x-1)^4}{x^2} dx = \int \frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}{x^2} dx = \int \left(x^2 - 4x + 6 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx =$
 $= \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - 4 \ln |x| - \frac{1}{x} + \mathcal{C}$. **h)** $\int \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 1}{x^2 + 4} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{1}{x^2 + 4} \right) dx =$

$= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 4} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \mathcal{C}$. • **A2. a)** $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx =$
 $= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + \mathcal{C}$. **b)** Se folosește formula $\cos 2x = \cos^2 x -$

$-\sin^2 x$. **d)** $\int \frac{\sin^3 x - 8}{1 - \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^3 x - 8}{\sin^2 x} dx = \int \left(\sin x - \frac{8}{\sin^2 x} \right) dx = -\cos x + 8 \operatorname{ctg} x +$

$+ \mathcal{C}$. **f)** $\int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \int (\operatorname{tg} x)' dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}$. • **A3. a)** $\int 6x(3x^2 + 1)^7 dx = \int (3x^2 + 1)' \cdot$

$\cdot (3x^2 + 1)^7 dx = \int u'(x) \cdot u^7(x) dx = \frac{u^8(x)}{8} + \mathcal{C} = \frac{(3x^2 + 1)^8}{8} + \mathcal{C}$. **c)** $\int x^4 \sqrt[3]{x^5 + 1} dx =$

$$= \frac{1}{5} \int 5x^4 \sqrt[3]{x^5 + 1} dx = \frac{1}{5} \int (x^5 + 1)' \cdot (x^5 + 1)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{5} \int u'(x) \cdot (u(x))^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{(u(x))^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} +$$

$$+ \mathcal{C} = \dots \quad \mathbf{d)} \quad \int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx = \int \frac{(x^3 + 1)'}{\sqrt{x^3 + 1}} dx = \int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = \int u'(x) \cdot (u(x))^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \cdot$$

$$\cdot (u(x))^{\frac{1}{2}} + \mathcal{C} = 2\sqrt{x^3 + 1} + \mathcal{C}. \quad \mathbf{e)} \quad \int \frac{1}{x} \ln^4 x dx = \int (\ln x)' \cdot \ln^4 x dx = \int u'(x) \cdot u^4(x) dx =$$

$$= \frac{u^5(x)}{5} + \mathcal{C} = \frac{1}{5} \ln^5 x + \mathcal{C}. \quad \mathbf{g)} \quad \int \frac{x-1}{3x^2 - 6x + 11} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x-6}{3x^2 - 6x + 11} dx = \frac{1}{6} \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx =$$

$$= \frac{1}{6} \ln|u(x)| + \mathcal{C} = \frac{1}{6} \cdot \ln(3x^2 - 6x + 11) + \mathcal{C}. \quad \mathbf{h)} \quad \int \frac{2x}{x^4 - 1} dx = \int \frac{(x^2)'}{(x^2)^2 - 1} dx = \int \frac{u'(x)}{u^2(x) - 1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u(x) - 1}{u(x) + 1} \right| + \mathcal{C} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right| + \mathcal{C}. \quad \mathbf{k)} \quad \frac{1}{2} \arctg x^2 + \mathcal{C}. \quad \mathbf{l)} \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 25}} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{(x^3)'}{\sqrt{(x^3)^2 - 25}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) - 25}} dx = \frac{1}{3} \ln \left| u(x) + \sqrt{u^2(x) - 25} \right| + \mathcal{C} \text{ etc.};$$

$$\mathbf{n)} \quad \int \frac{x + x^3}{1 + x^4} dx = \int \frac{x}{1 + x^4} dx + \int \frac{x^3}{1 + x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + (x^2)^2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{1 + x^4} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2)'}{1 + (x^2)^2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{(1 + x^4)'}{1 + x^4} dx = \frac{1}{2} \arctg x^2 + \frac{1}{4} \ln(1 + x^4) + \mathcal{C}.$$

$$\bullet \mathbf{A4. a)} \quad \frac{1}{7} \arctg^7 x + \mathcal{C}; \quad \mathbf{b)} \quad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2} \right| + \mathcal{C}; \quad \mathbf{c)} \quad \frac{1}{6} \ln \left| \frac{\cos x - 3}{\cos x + 3} \right| + \mathcal{C}; \quad \mathbf{d)} \quad \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{\sin x}{2} \right) +$$

$$+ \mathcal{C}. \quad \mathbf{e)} \quad \frac{1}{2} \sin^2(x^2 + 1) + \mathcal{C}; \quad \mathbf{f)} \quad -\cos 2(x^2 + 1) + \mathcal{C}. \quad \mathbf{g)} \quad \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \mathcal{C}; \quad \mathbf{h)} \quad \arcsin \left(\frac{\sin x}{2} \right) +$$

$$+ \mathcal{C}; \quad \mathbf{j)} \quad -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + \mathcal{C}. \quad \bullet \mathbf{A5. a)} \quad \int x^2 \ln x dx = \int \left(\frac{x^3}{3} \right)' \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x -$$

$$- \int \frac{x^3}{3} \cdot (\ln x)' dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + \mathcal{C}. \quad \mathbf{b)} \quad \int x e^{-x} dx = \int x (-e^{-x})' dx =$$

$$= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + \mathcal{C}. \quad \mathbf{c)} \quad \int \sin^2 x dx = \int \sin x \cdot \sin x dx = \int \sin x \cdot$$

$$\cdot (-\cos x)' dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = -\sin x \cdot$$

$$\cdot \cos x + x - \int \sin^2 x dx. \text{ Rezultă că } 2 \int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x + \mathcal{C} \text{ etc.}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \int \sqrt{x^2 + 25} \, dx &= \int x' \sqrt{x^2 + 25} \, dx = x \sqrt{x^2 + 25} - \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} \, dx = x \sqrt{x^2 + 25} - \\ &- \int \frac{(x^2 + 25) - 25}{\sqrt{x^2 + 25}} \, dx = x \sqrt{x^2 + 25} - \int \sqrt{x^2 + 25} \, dx + 25 \ln(x + \sqrt{x^2 + 25}). \text{ Rezultă că} \\ \int \sqrt{x^2 + 25} \, dx &= \frac{1}{2} \left[x \sqrt{x^2 + 25} + 25 \ln(x + \sqrt{x^2 + 25}) \right] + \mathcal{C}. \quad \text{h)} \quad \int x \operatorname{arctg} x \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' \cdot \\ &\cdot \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \\ &\cdot \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Teste de evaluare (pag. 167)

Testul 1

$$\begin{aligned} \text{1. a)} \quad f'(x) &= (\sin x + \cos x) \cdot e^x = f(x) + g(x); \quad \text{b)} \quad g'(x) = (\cos x - \sin x) \cdot e^x = g(x) - \\ &- f(x). \quad \text{2. Din } F'(x) = f(x), \forall x \in (0, +\infty) \text{ rezultă } a = \frac{1}{3}, b = 1. \quad \text{3. a)} \quad \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \\ &- \frac{x^2}{2} + x + \mathcal{C}. \quad \text{b)} \quad \frac{1}{6} \ln \frac{3x-1}{3x+1} - \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + \mathcal{C}. \quad \text{c)} \quad e^x (x^2 - 2x + 2) + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Testul 2

$$\begin{aligned} \text{1. } F(x) &= -\frac{x^2}{2} - 3x - 9, x \leq -3; F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x, x \in (-3, 0), F(x) = x^2 + 3x, x \in [0, \infty). \\ \text{2. } f'(x) &= g(x), \text{ respectiv } \int g(x) \, dx = \int \frac{(1 + \ln x)'}{1 + \ln x} \, dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx = \ln |u(x)| + \mathcal{C} = \\ &= \ln(1 + \ln x) + \mathcal{C}. \quad \text{3. a)} \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx = \sqrt{x^2 + 1} + 2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \\ &+ \mathcal{C}. \quad \text{b)} \quad \int (x + 2) e^x \, dx = \int (x + 2) (e^x)' \, dx = (x + 2) e^x - \int e^x \, dx = (x + 1) e^x + \mathcal{C}. \\ \text{c)} \quad \int \sin x \cdot (\sin x)' \, dx &= \frac{1}{2} \sin^2 x + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Testul 3

$$\begin{aligned} \text{1. } a &= 0, b = \frac{1}{3}. \quad \text{3. b)} \quad \frac{1}{5} \arcsin \frac{5x}{2} - \frac{1}{20} \ln \left(\frac{2-5x}{2+5x} \right) + \mathcal{C}. \\ \text{c)} \quad \int \frac{1}{\cos^4 x} \, dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \right) \, dx = \operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg}^2 x \cdot (\operatorname{tg} x)' \, dx = \\ &= \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

CAPITOLUL II. INTEGRALA DEFINITĂ**1. Definirea integralei Riemann prin formula lui Leibniz-Newton (pag. 172)**

- **E1.** a) 15; b) 10; c) $-\frac{80}{7}$; d) $\frac{64}{5}$; e) $\frac{15}{64}$; f) $\frac{17}{2}$; g) $\frac{\pi}{2}$; h) $-\frac{1}{2}\ln 3$; i) $\frac{1}{10}\ln 6$.
- **E2.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $-\frac{1}{2}$; d) $\sqrt{3}-1$; e) $\sqrt{3}-1$; f) $\frac{\pi}{12}$; g) 0; h) 1; i) $1-\frac{\pi}{4}$.
- **E3.** a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\ln(\sqrt{3}+1)-\ln(2+\sqrt{2})$; c) $\ln(\sqrt{5}+3)-\ln 2$; d) $\ln 3$; e) $\frac{2}{\ln 2}$; f) 4.
- **A1.** a) $-\frac{1}{12}\ln 3$; b) $\frac{\pi}{20}$; c) $\frac{\pi}{12}$; d) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. • **A2.** $(x^2+x)\Big|_1^a = 10 \Leftrightarrow a^2 +$

$$+a-12=0, \text{ cu soluțiile } a_1=-4, a_2=3. \bullet \text{ A3. } \ln\left|\frac{n^2+n-6}{n^2+n-12}\right| = \ln\frac{7}{4}, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$\Rightarrow n=4$. • **A4.** Se obține ecuația $2a^3+2a=4$ verificată de $a=1$. • **A5.** Se obține ecuația $2a^3+3a^2+2a-7=0 \Leftrightarrow (2a^3-2)+(3a^2-3)+(2a-2)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a-1)(2a^2+5a+7)=0, \text{ cu soluția reală } a=1. \bullet \text{ A6. a) } 3x^2-4x-4 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, 2\right]. \text{ b) } \ln\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} \leq \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} \leq 1-x, x \leq 1.$$

Se ridică la pătrat ambii membri și se obține inecuația $2x+3 \leq 0$ cu soluția $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$.

2. Proprietăți ale integralei definite (179)

- **E1.** a) $\frac{4}{3}$; b) 16; c) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; d) 8; e) $1+\frac{\pi}{4}$. • **E2.** a) $\int_{-1}^3 |x-2| dx = \int_{-1}^2 (2-x) dx +$
 $+\int_2^3 (x-2) dx = \left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^2 + \left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_2^3 = 5$. b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin x| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin x) dx + \int_0^{\pi} \sin x dx =$
 $= \cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 - \cos x \Big|_0^{\pi} = 3$. c) $\int_0^{\frac{5\pi}{6}} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} (-\cos x) dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$
 $-\sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{3}{2}$. d) $\int_{-1}^2 |1-x^2| dx = \int_{-1}^1 (1-x^2) dx + \int_1^2 (-1+x^2) dx = \left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^1 +$
 $+\left(-x+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{8}{3}$. • **E3.** a) $f(1-0)=5=f(1+0)=f(1)$. Rezultă că f este conti-

nuă în $x_0=1$. Funcția este continuă și pe $[-1, 1) \cup (1, 2]$ fiind exprimată cu restricții de funcții elementare. Așadar, f este continuă pe $[-1, 2]$. $\int_{-1}^2 f(x) dx =$

$$= \int_{-1}^1 (2x+3) dx + \int_1^2 (6x^2-1) dx = \left(x^2+3x\right)\Big|_{-1}^1 + \left(2x^2-x\right)\Big|_1^2 = 13. \quad \mathbf{b)} \quad \int_{-2}^e f(x) dx = \int_{-2}^1 (4x^3-3) dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx = \left(x^4-3x\right)\Big|_{-2}^1 + \ln x \Big|_1^e = -23.$$

$$\mathbf{c)} \quad \int_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arctg x \Big|_{-1}^0 + \arcsin x \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

• **E4. a)** Funcția $f: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ este pozitivă pe $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Rezultă

că $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \geq 0$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. **b)** Se arată că $2x - x^2 \geq 0$, $\forall x \in [0, 2]$ și se

aplică proprietatea de pozitivitate a integralei. **c)** $x^3 - 3x = x(x^2 - 3) < 0$, $\forall x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$ etc. **d)** Pentru $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\sin^3 x \leq 0$ etc. • **E5. a)** Fie $f, g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = 2 - 2x$. Arătăm că $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [-1, 1]$. Avem: $f(x) - g(x) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Din tabloul de semn al acestei expresii se deduce că $f(x) - g(x) \leq 0$, $\forall x \in [-1, 1]$. Rezultă că $\int_{-1}^1 f(x) dx \leq \int_{-1}^1 g(x) dx$.

d) Se arată că $\ln x - x + 1 \leq 0$, $\forall x \in [-1, e]$. Fie $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x + 1$, $f'(x) = \frac{1-x}{x} \leq 0$, $\forall x \in [1, e]$. Rezultă că f este descrescătoare și $f(x) \leq f(1) = 0$,

deci $\ln x \leq x - 1$, $\forall x \in [1, e]$. • **E6.** Se folosește inegalitatea $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$. **a)** $m = -3$, $M = 7$; **b)** $m = 0$, $M = \frac{4}{3}$; **c)** $m = -2$, $M = -\frac{1}{2}$; **e)** $m = \frac{4}{3}$, $M = 2$;

f) $m = f(0) = \sqrt{3}$, $M = f(1) = f(-1) = 2$.

$$\bullet \mathbf{A1. a)} \quad I = \int_{-3}^{-1} x^2 dx + \int_{-1}^2 (x+2) dx = \frac{97}{6}; \quad \mathbf{b)} \quad I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \tg x dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tg^3 x dx.$$

$$\mathbf{c)} \quad I = \int_0^1 (-3x+5) dx + \int_1^2 (-x+3) dx + \int_2^3 (3x-5) dx;$$

$$\mathbf{d)} \quad I = \int_{-3}^{-2} (2x+x^2) dx + \int_{-2}^0 (-2x-x^2) dx + \int_0^3 (2x+x^2) dx.$$

$$\bullet \mathbf{A2. a)} \quad a = -1; \quad \mathbf{b)} \quad \frac{3}{\ln 4}. \quad \bullet \mathbf{A3.} \quad I = \int_0^1 e^{-x+1} dx + \int_1^2 e^{x-1} dx = 2e - 2.$$

$$\bullet \mathbf{A4.} \quad I = \int_{-2}^{-1} (-2x) dx + \int_{-1}^1 2x dx + \int_1^2 2x dx = 10. \quad \bullet \mathbf{A5.} \quad I = \int_{-1}^0 \frac{x}{1-x} dx + \int_0^2 \frac{x}{1+x} dx = -\int_{-1}^0 \frac{(x-1)+1}{x-1} dx + \int_0^2 \frac{(x+1)-1}{x+1} dx = -\int_{-1}^0 \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) dx + \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = 1 + \ln \frac{2}{3}.$$

• **A6.** $1 - \frac{1}{e} - \frac{a}{2} > -\frac{1}{e} \Rightarrow a < 2$. • **A9.** Se folosește faptul că $0 \leq \frac{x^{2n}}{x+1} \leq x^{2n}$, $\forall x \in [0, 1]$. Rezultă că $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{x+1} dx \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2n+1}$. Cu teorema cleștelui se obține limita zero. • **A10.** Din mărginirea funcției f pe $[0, 1]$, rezultă că există $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [0, 1]$. Avem $0 \leq |I_n| \leq M \int_0^1 x^n dx = \frac{M}{n+1}$. Tre-când la limită când $n \rightarrow +\infty$, se obține $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

3. Metode de calcul ale integralelor definite

3.1. Metoda de integrare prin părți (pag. 186)

- **E1. a)** $\int_0^1 x e^{2x} dx = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2} \right)' dx = \frac{x \cdot e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \Big|_0^1 = \frac{e^2 + 1}{4}$.
- b)** $\int_0^1 (2x-1)e^x dx = \int_0^1 (2x-1)(e^x)' dx = (2x-1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = e + 1 - 2e^x \Big|_0^1 = 3 - e$.
- c)** $\int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$.
- d)** $\int_1^e x^2 \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} \right)' \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9} \Big|_1^e = \frac{2e^3 + 1}{9}$.
- e)** $\int_1^{e^2} \ln^2 x dx = \int_1^{e^2} (x)' \ln^2 x dx = x \ln^2 x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = 4e^2 - 2 \int_1^{e^2} \ln x dx =$
 $= 4e^2 - 2 \left(x \ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 1 dx \right) = 2(e^2 - 1)$. **f)** $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e (\ln x)' \cdot \ln x dx = \ln^2 x \Big|_1^e -$
 $-\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$. Rezultă că $2 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x \Big|_1^e = 1$ și $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$.
- **E2. a)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)(-\cos x)' dx = -(x+1) \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2$.
- b)** $-\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \cdot (-\cos x)' dx = -\sin x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x dx =$
 $= -\frac{\sqrt{3}}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \sin^2 x) dx = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx$. Rezultă că $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \cdot$
 $\cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} \right)$. **d)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x (-\operatorname{ctg} x)' dx = -x \operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx = \frac{\pi}{4} +$

$$\begin{aligned}
 & + \ln(\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2}. \quad \bullet \text{ E3. a) } I = \int_1^{\sqrt{5}} \sqrt{x^2 + 4} \, dx = \int_1^{\sqrt{5}} x' \sqrt{x^2 + 4} \, dx = x \sqrt{x^2 + 4} \Big|_1^{\sqrt{5}} - \\
 & - \int_1^{\sqrt{5}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx = 2\sqrt{5} - \int_1^{\sqrt{5}} \frac{(x^2 + 4) - 4}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx = 2\sqrt{5} - I + 4 \int_1^{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx = 2\sqrt{5} - I + \\
 & + 4 \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 4} \right) \Big|_1^{\sqrt{5}}. \text{ Se obține } I = \sqrt{5} + 2 \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}. \quad \bullet \text{ d) } I = \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \\
 & = \int_0^1 \frac{x \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx = I_1 + \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^1 = I_1 + \sqrt{2} - 1. \quad I_1 = \\
 & = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx = \int_0^1 x^2 \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)' \, dx = x^2 \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \sqrt{2} - 2I. \text{ Se } \\
 & \text{obține în final } I = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}.
 \end{aligned}$$

• **A1. a)** $16 - 2e^2$; **b)** $\frac{5e^4 - 1}{4}$; **c)** $\frac{e^\pi + 1}{2}$; **d)** $\ln(1 + \sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2}$; **e)** $e(\sin 1 - \cos 1)$;

f) $\frac{1}{4 \ln 3}$; **g)** Integrala se scrie: $\frac{1}{2} \int_0^1 2xe^{x^2} (1 + x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{x^2})' (1 + x^2) \, dx = \dots = \frac{e}{2}$. **h)** $\frac{ne^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$; **i)** $2 \ln(\sqrt{3} + 2) - \sqrt{3}$. • **A2. a)** $\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{\pi^2 + 4}{16}$; **c)** $\frac{3\sqrt{3} - \pi}{48}$; **d)** $\frac{\pi}{4} -$

$-\ln \sqrt{2}$; **e)** π ; **f)** $\frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right)$; **g)** $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$; **h)** $I = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x \cdot \left(\frac{-1}{\sin^2 x} \right)' \, dx = \frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

• **A3. a)** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \ln(1 + \sqrt{2})$; **b)** $\frac{\pi - 2}{4}$; **c)** $\frac{2\pi}{3} + \ln(2 - \sqrt{3})$; **d)** $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2$; **e)** $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right)' \cdot$

$\arccos x \, dx$ etc. **f)** $\frac{\pi^2}{4} - 2$. • **A4. a)** $\int_0^\pi x \sin x \, dx - \int_\pi^{2\pi} x \sin x \, dx = 4\pi$ **b)** $I = \int_{-1}^0 (x^2 - x) e^x \, dx +$

$+ \int_0^1 (x - x^2) e^x \, dx + \int_1^3 (x^2 - x) e^x \, dx$. **c)** $I = \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(-\ln x - \frac{1}{x} \right) \, dx + \int_1^e \ln x \, dx + \int_e^{e^2} \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \, dx =$

$= \frac{e^3 + 2e - 2}{e}$. • **A5. a)** $\frac{2}{3}$; **b)** $a \in \left\{ \frac{5}{3}, 2 \right\}$. • **A6. a)** $I = \int_0^1 \frac{x^2 (x^2 + 4)}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx +$

$+ 4 \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx = I_1 + 4I_2$. $I_1 = \int_0^1 x^3 \left(\sqrt{x^2 + 4} \right)' \, dx = x^3 \cdot \sqrt{x^2 + 4} \Big|_0^1 - 3I = \sqrt{5} - 3I$.

$I_2 = \int_0^1 x \left(\sqrt{x^2 + 4} \right)' \, dx = x \sqrt{x^2 + 4} \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2 + 4} \, dx = \sqrt{5} - \int_0^1 \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx = \sqrt{5} - I_2 -$

$-4 \ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) \Big|_0^1$. Se înlocuiește I_1 și I_2 în I . • **A7. a)** $4 \ln 2 - \frac{7}{4}$; **b)** $e^2 + e -$

$-2e^{-1} - 3$. • **A8. a)** Se integrează prin părți • **A9. a)** $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$, $I_2 = \frac{\pi}{4}$. **b)** Avem:

$0 \leq \cos x \leq 1$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Rezultă inegalitatea $\cos^n x \geq \cos^{n+1} x$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și

$I_n \geq I_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. **c)** $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$, $n \geq 2$, $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$.

• **A10. b)** $I_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$.

c) $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 \left[C_n^0 - C_n^1 x^2 + C_n^2 (x^2)^2 - C_n^3 (x^2)^3 + \dots + (-1)^n C_n^n (x^2)^n \right] dx =$
 $= C_n^0 - \frac{1}{3} C_n^1 + \frac{1}{5} C_n^2 - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} C_n^n$. • **A11. a)** $I_0 = 1 - \frac{1}{e}$, $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$, $I_2 = 2 - \frac{5}{e}$.

b) $I_n = \int_0^1 x^n (-e^{-x})' dx = -e^{-x} x^n \Big|_0^1 + \int_0^1 n x^{n-1} e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + n I_{n-1}$. **c)** Se demonstrează prin inducție. Pentru $n=1$ rezultă $I_1 = 1 - \frac{1}{e}$, egalitate adevărată din a).

Dacă $I_{n-1} = \frac{(n-1)!}{e} \left[e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right) \right]$, din b) rezultă: $I_n = -\frac{1}{e} + n I_{n-1} =$
 $= -\frac{1}{e} + \frac{n!}{e} \left[e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right) \right] = \frac{n!}{e} \left[e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right) \right]$.

3.2.1. Prima metodă de schimbare de variabilă (pag. 193)

• **E1. a)** $\int_1^2 (x-3)^6 dx = \int_1^2 (x-3)' (x-3)^6 dx = \int_1^2 u'(x) \cdot u^6(x) dx = \int_{u(1)}^{u(2)} t^6 dt =$
 $= \frac{t^7}{7} \Big|_{-2}^{-1} = \frac{129}{7}$. **b)** $\int_{-1}^1 6x^2 (2x^3+1)^4 dx = \int_{-1}^1 (2x^3+1)' \cdot (2x^3+1)^4 dx = \int_{-1}^1 u'(x) \cdot$

$\cdot u^4(x) dx = \int_{u(-1)}^{u(1)} t^4 dt = \frac{t^5}{5} \Big|_{-1}^3 = \frac{244}{5}$. **c)** $\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^3} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2}{(2x+1)^3} dx = \frac{1}{2} \cdot$

$\int_1^2 \frac{(2x+1)'}{(2x+1)^3} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 u'(x) \cdot u^{-3}(x) dx = \frac{1}{2} \int_{u(1)}^{u(2)} t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-4} \Big|_3^5 = \frac{4}{225}$. **e)** $\int_{-1}^0 4x^3 \cdot$

$\sqrt{x^4+1} dx = \int_{-1}^0 (x^4+1)' (x^4+1)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{-1}^0 u'(x) \cdot u^{\frac{1}{2}}(x) dx = \int_{u(-1)}^{u(0)} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} \cdot t\sqrt{t} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 =$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2(1-2\sqrt{2})}{3} \cdot \mathbf{g)} \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \\
 &\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \frac{1}{2} \int_{u(0)}^{u(\sqrt{e-1})} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln|t| \Big|_1^e = \frac{1}{2}. \mathbf{i)} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^4-1} dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{(x^2)'}{(x^2)^2-1} dx = \\
 &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{u'(x)}{u^2(x)-1} dx = \int_{u(\sqrt{2})}^{u(\sqrt{3})} \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \mathbf{k)} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4x^2+3} dx = \frac{1}{2} \cdot \\
 &\cdot \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(2x)'}{(2x)^2+3} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{u'(x)}{u^2(x)+3} dx = \frac{1}{2} \int_{u(\frac{1}{2})}^{u(\frac{3}{2})} \frac{1}{t^2+3} dt = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_1^3 = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}; \\
 \mathbf{l)} \frac{\pi}{4}. \bullet \mathbf{E2. a)} \int_0^1 x e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2)' \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 u'(x) \cdot e^{u(x)} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{u(0)}^{u(1)} e^t dt = \frac{1}{2} \cdot e^t \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}. \mathbf{b)} \int_0^1 x \cdot 3^{-2x^2} dx = -\frac{1}{4} \int_0^1 4x \cdot 3^{-2x^2} dx = -\frac{1}{4} \int_0^1 (-2x^2)' \cdot \\
 &\cdot 3^{-2x^2} dx = -\frac{1}{4} \int_0^1 u'(x) \cdot 3^{u(x)} dx = -\frac{1}{4} \int_{u(0)}^{u(1)} 3^t dt = -\frac{1}{4} \cdot \frac{3^t}{\ln 3} \Big|_0^{-2} = \frac{2}{9 \ln 3}. \mathbf{d)} \int_2^{e+1} \frac{1}{x-1} \cdot \\
 &\cdot \ln^4(x-1) dx = \int_2^{e+1} (\ln(x-1))' \cdot \ln^4(x-1) dx = \int_2^{e+1} u'(x) \cdot u^4(x) dx = \int_{u(2)}^{u(e+1)} t^4 dt = \\
 &= \frac{t^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}. \mathbf{f)} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{(x^2)'}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \\
 &= \arcsin t \Big|_{\frac{1}{2}}^0 = -\frac{\pi}{6}; \mathbf{g)} \frac{1}{3} \ln \frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}; \mathbf{h)} \frac{1}{3} \ln(1+\sqrt{2}). \bullet \mathbf{E3. a)} \text{ Se alege } u(x) = 3x, \\
 u'(x) = 3, x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right], f(t) = \frac{\cos t}{3}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \mathbf{c)} } u(x) = \sin^2 x, u'(x) = \sin 2x, x \in \\
 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ și } f(t) = \frac{1}{1+t^2}, t \in [0, 1]. \mathbf{d)} } u(x) = \operatorname{arctg} x, u'(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-1, 1] \text{ și } \\
 f(t) = t^2, t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]. \mathbf{e)} } u(x) = \frac{1}{x}, u'(x) = -\frac{1}{x^2}, x \in \left[\frac{2}{\pi}, \frac{3}{\pi}\right] \text{ și } f(t) = -\sin t, t \in \\
 \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]. \bullet \mathbf{E4.} \text{ Funcțiile de integrat sunt impare.} \\
 \bullet \mathbf{A1. a)} \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \frac{1}{3} \int_6^8 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{3} \ln t \Big|_6^8 = \frac{1}{3} \ln \frac{4}{3}. \mathbf{b)} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}} dx = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

$$\cdot \int_0^1 \frac{6x}{\sqrt{3x^2+1}} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = \frac{1}{6} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{3}. \quad \text{c)} \int_1^4 \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 3^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= 2 \int_1^4 u'(x) \cdot 3^{u(x)} dx = 2 \int_1^2 3^t dt = \frac{12}{\ln 3}. \quad \text{d)} } \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}; \quad \text{e)} } \frac{1}{8} (\pi + \ln 4); \quad \text{g)} } \frac{33}{5};$$

$$\text{h)} } 4(\sqrt{3}-1); \quad \text{i)} } \ln \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \quad \text{j)} } I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{1}{x^2 \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} dx = - \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} dx = - \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt =$$

$$= -\arcsin t \Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}. \quad \text{k)} } I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^3 \sqrt{1-\frac{1}{x^4}}} dx = -\frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}} dx = -\frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{1}{2} \arcsin t \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{24}. \quad \text{l)} } I = -\frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}} dx = -\frac{1}{2} \int_4^1 \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_4^1 \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = -\frac{1}{2} \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dv}{\sqrt{v^2 + \frac{3}{4}}} = -\frac{1}{2} \ln \left(v + \sqrt{v^2 + \frac{3}{4}} \right) \Big|_{\frac{9}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{9+2\sqrt{21}}{3+2\sqrt{3}}.$$

$$\text{m)} } I = \int_{-1}^1 \sqrt{(x+3)^2+1} dx = \int_{-1}^1 u'(x) \sqrt{u^2(x)+1} = \int_2^4 \sqrt{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \left(t\sqrt{t^2+1} + \right.$$

$$\left. + \ln(t + \sqrt{t^2+1}) \right) \Big|_2^4. \quad \text{n)} } 3 + \frac{25}{4} \arcsin \frac{3}{5}.$$

$$\bullet \text{ A2. a)} } 1 + 2 \ln \frac{2}{3}; \quad \text{b)} } \frac{\pi}{6}; \quad \text{c)} } I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx = \int_0^1 \frac{-(e^{-x}+1)'}{e^{-x}+1} dx = - \int_2^{1+\frac{1}{e}} \frac{1}{t} dt =$$

$$= -\ln t \Big|_2^{1+\frac{1}{e}} = \ln \frac{2e}{e+1}; \quad \text{d)} } \ln \frac{e+1}{e}; \quad \text{e)} } \text{Se scrie } \frac{e^{2x}}{e^x-1} = \frac{(e^{2x}-1)+1}{e^x-1} = e^x + 1 + \frac{1}{e^x-1}$$

$$\text{și se integrează. f)} } \text{Se scrie } \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} = \frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} - \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} -$$

$$-\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \text{ și se integrează. } \bullet \text{ A3. a)} } \frac{1}{4} \ln \frac{1}{3}; \quad \text{b)} } \frac{\pi}{6\sqrt{3}}; \quad \text{c)} } \ln \sqrt{2}; \quad \text{d)} } \frac{1}{8}; \quad \text{e)} } \frac{1}{3};$$

$$\text{f)} } 1 - \ln \sqrt{2}; \quad \text{g)} } \frac{\pi}{6}; \quad \text{h)} } \ln(1+\sqrt{2}); \quad \text{i)} } -\frac{\pi}{6} + \ln(2+\sqrt{3}); \quad \text{j)} } \frac{\pi}{4}. \quad \bullet \text{ A4. Se folosesc}$$

formulele trigonometrice: $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$, $2 \sin a \sin b =$

$= \cos(a - b) - \cos(a + b)$. $2 \cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$. • **A5. a)** Se folo-

sește formula $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ și integrala se scrie $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)'}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx =$

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} dt = \ln \sqrt{3}$. **b)** $2\sqrt{3}$; **c)** $\frac{4}{3}$; **d)** $\frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$; **e)** $\frac{-\pi}{6\sqrt{2}}$. • **A6. a), b), c)** Se pot

folosi formulele: $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$. **d)** Se folosește că $\sin x =$

$$= \frac{\operatorname{tg} x}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \cos x = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}.$$

3.2.2. A doua metodă de schimbare de variabilă (pag. 197)

• **E1. a)** Se alege $u: \left[\frac{1}{4}, 1 \right] \rightarrow \left[\frac{3}{2}, 2 \right]$, $u(x) = 1 + \sqrt{x}$, bijectivă, derivabilă, $u^{-1}: \left[\frac{3}{2}, 2 \right] \rightarrow \left[\frac{1}{4}, 1 \right]$, $u^{-1}(t) = (t - 1)^2$ și $(u^{-1})'(t) = 2(t - 1)$; $f: \left[\frac{3}{2}, 2 \right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$.

Se obține $I = \int_{\frac{3}{2}}^2 t^5 \cdot 2(t - 1) dt = 2 \left(\frac{t^5}{7} - \frac{t^6}{6} \right) \Big|_{\frac{3}{2}}^2$ etc. **c)** $2 - \pi + 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$; **d)** $2(1 + 2 \ln \frac{4}{5})$. • **E2. a)** $3 \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{3}{2} \right)$; **b)** $\ln \frac{3}{2}$.

• **A1. a)** $u(x) = \sqrt[6]{x}$; **b)** $u(x) = e^x$; **c)** $u(x) = \sqrt{1 + 3x}$; **d)** $u(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.

• **A2. a)** $u(x) = \sqrt{e^x - 1}$; **b)** $u(x) = \sqrt[6]{x}$; **c)** $u(x) = \sqrt{x}$; **d)** $u(x) = \sqrt{x + 1}$.

• **A3. a)** $u(x) = -x$; **b)** $u(x) = -x$; **c)** $u(x) = \frac{\pi}{4} - x$.

CAPITOLUL 3. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE

1. Aria unei suprafețe plane (pag. 228)

• **E1. a)** $\frac{7}{2}$; **b)** $\frac{45}{4}$; **c)** $\frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}$; **d)** 1; **e)** $\frac{\pi}{4}$; **f)** $\ln 3$; **g)** 1; **h)** 1. • **E2. a)** $\frac{16}{3}$; **b)** $\frac{39}{8}$;

c) $\frac{16}{3}$; **d)** $\frac{(e-1)^2}{2}$. • **E3. a)** $\mathcal{A} = \int_{-2}^2 -f(x) dx = \frac{64}{3}$. **b)** $\mathcal{A} = \int_{-4}^{-3} -f(x) dx + \int_{-3}^3 f(x) dx + \int_3^4 -f(x) dx = \frac{128}{3}$. **c)** $\mathcal{A} = \int_{-1}^0 -f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 -f(x) dx = 4$. **d)** $\mathcal{A} = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx = 4$. **e)** $\mathcal{A} = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (-1 + x) dx = \frac{11}{6}$.

• **A1. a)** $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$; **c)** $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$; **d)** $\mathcal{A} = \int_{-1}^2 (2-x) dx + \int_2^4 (x-2) dx = \frac{13}{2}$.

e) $A = \int_{-4}^{-3} (x^2 - 9) dx + \int_{-3}^3 (-x^2 + 9) dx + \int_3^5 (x^2 - 9) dx$.

• **A2. a)** $\int_{-2}^2 [(8-x^2)-x^2] dx$; **b)** $\int_1^4 [(x-4)-(x^2-4x)] dx$; **c)** $\int_{-1}^0 [(4-x^2)-(x+4)] dx$.

• **A3.** $\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \left(x - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$. • **A4.** $\mathcal{A} = \int_4^5 -f(x) dx$.

• **A5.** $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x^2 + x) dx$. • **A6.** $\mathcal{A} = \int_0^1 (e^x - ex) dx = \frac{e-2}{2}$.

• **A8.** $\mathcal{A}_{(\Gamma_f)} = \frac{4}{3}$. $\mathcal{A}_{(\Gamma_{f,g})} = \int_0^{2-m} (2x - x^2 - mx) dx = \frac{(2-m)^3}{6}$. Din $\mathcal{A}_{(\Gamma_{f,g})} = \frac{\mathcal{A}_{(\Gamma_f)}}{2}$

se obține $m = 2 - \sqrt[3]{4}$. • **A9.** $\mathcal{A}(u) = \frac{1}{e} - \frac{u}{e^u}$ și limita este $\frac{1}{e}$.

• **A10. a)** $\mathcal{A}(m) = \frac{5m^2 - 3m + 9}{6}$; **b)** $m \in \left\{0, \frac{3}{5}\right\}$; **c)** $m = \frac{3}{10}$.

2. Volumul corpurilor de rotație (pag. 231)

• **E1. a)** $\frac{256\pi}{15}$; **b)** $\frac{\pi^2}{2}$; **c)** $\frac{\pi^2}{2}$; **d)** 6π ; **e)** $\pi\left(1 + 2\ln\frac{2}{3}\right)$; **f)** $\frac{35\pi}{3}$; **g)** $\frac{3\pi}{2}$;

h) $\frac{(a+1)^3(3-a)+a^4}{12} \cdot \pi$; **i)** $\left(\frac{10}{3} + 2\ln 3\right)\pi$. • **E2. a)** $\frac{\pi^2}{4}$; **b)** $\frac{\pi}{4}\ln\frac{3}{2}$; **d)** $\frac{8\pi}{3}$.

• **A6.** 117π .

Cuprins

Prefață	3
---------------	---

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

Capitolul I. GRUPURI	5
1. Legi de compoziție pe o mulțime	5
1.1. Definiții și exemple	5
1.2. Adunarea și înmulțirea modulo n	6
1.3. Adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo n	7
1.4. Parte stabilă. Lege de compoziție indusă	8
1.5. Tabla unei legi de compoziție	10
2. Proprietăți ale legilor de compoziție	14
2.1. Proprietatea de comutativitate	14
2.2. Proprietatea de asociativitate	15
2.3. Element neutru	21
2.4. Elemente simetrizabile	23
3. Noțiunea de grup. Exemple	30
3.1. Grupul aditiv al resturilor modulo n	32
3.2. Grupul claselor de resturi modulo n	33
3.3. Grupul permutărilor unei mulțimi	36
3.4. Grupul simetric S_n	37
3.5. Grupuri de matrice	39
4. Reguli de calcul într-un grup	44
4.1. Puterea unui element într-un grup	44
4.2. Legi de simplificare	45
5. Morfisme de grupuri	50
 Capitolul II. INELE ȘI CORPURI	60
1. Definiții și exemple	60
1.1. Inelul claselor de resturi modulo n	61
1.2. Inele de matrice pătratice	62
1.3. Inele de funcții reale	65
2. Reguli de calcul într-un inel	69
3. Corpuri	75
 Capitolul III. INELE DE POLINOAME	81
1. Mulțimea polinoamelor cu coeficienți într-un corp comutativ	81
1.1. Șiruri finite de elemente din corpul K	81
1.2. Operații cu șiruri de elemente din corpul K	81
2. Forma algebrică a polinoamelor	83
2.1. Polinoame constante	83
2.2. Forma algebrică a unui polinom	84
2.3. Valoarea unui polinom. Funcții polinomiale	86

3. Operații cu polinoame scrise sub formă algebrică	88
3.1. Adunarea și înmulțirea polinoamelor scrise sub formă algebrică	88
3.2. Împărțirea polinoamelor	92
3.3. Împărțirea la X – a Schema lui Horner	97
4. Divizibilitatea polinoamelor	102
4.1. Relația de divizibilitate pe mulțimea $K[X]$	102
4.2. Proprietăți ale relației de divizibilitate	102
4.3. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor	105
5. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili	112
5.1. Rădăcini ale polinoamelor	112
5.2. Rădăcini multiple ale unui polinom	114
5.3. Ecuații algebrice	115
5.4. Polinoame ireductibile în $K[X]$	117
5.5. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili	118
6. Relațiile lui Viète	124
7. Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	130
7.1. Ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$	130
7.2. Ecuații algebrice cu coeficienți raționali	134
7.3. Ecuații algebrice cu coeficienți reali	136
8. Rezolvarea unor ecuații algebrice de grad superior cu coeficienți în $\mathbb{C}$	139
8.1. Ecuații bipătrate	139
8.2. Ecuații binome	140
8.3. Ecuații reciproce	141

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Capitolul I. Primitive	148
1. Probleme care conduc la noțiunea de integrală	148
2. Primitivele unei funcții. Integrala nedefinită a unei funcții continue	150
3. Proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite	153
4. Primitive uzuale	159
4.1. Primitive deduse din derivatele funcțiilor elementare	159
4.2. Primitive deduse din derivarea funcțiilor compuse	162
4.3. Primitive deduse din formula de derivare a produsului a două funcții	164
Capitolul II. Integrala definită	169
1. Definirea integralei Riemann a unei funcții continue prin formula lui Leibniz-Newton	169
2. Proprietăți ale integralei definite	173
2.1. Proprietatea de liniaritate a integralei definite	173
2.2. Proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare	174
2.3. Proprietatea de monotonie a integralei definite	176
3. Metode de calcul al integralelor definite	182
3.1. Metoda de integrare prin părți	182
3.2. Metode de integrare prin schimbare de variabilă	188
3.2.1. Prima metodă de schimbare de variabilă	188
3.2.2. A doua metodă de schimbare de variabilă	196

4. Calculul integralelor de forma $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, $\text{grad}(Q) \leq 4$ prin metoda	
descompunerii în funcții raționale simple	200
4.1. Calculul integralei definite a unei funcții raționale simple	201
4.2. Calculul integralei definite a unei funcții raționale oarecare	212
Capitolul III. Aplicații ale integralei definite	221
1. Aria unei suprafețe plane	221
1.1. Aria subgraficului unei funcții	221
1.2. Calculul ariei mulțimii Γ_f cu ajutorul integralei definite	222
1.3. Aria suprafețelor plane cuprinse între două curbe	225
2. Volumul unui corp de rotație	229
TEME DE SINTEZĂ	234
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	250