Библиотечка СтатГрад

Подготовка к ЕГЭ

ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

ЕГЭ 2016

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЕГЭ 2016

ФГОС

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Вариант 1

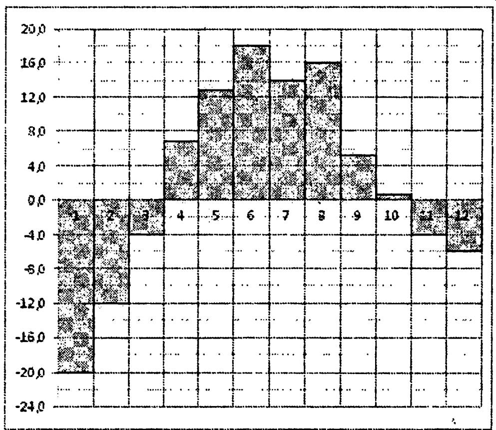
Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Больному прописано лекарство, которое нужно принимать по 0,5 г 3 раза в день в течение 21 дня. В одной упаковке 10 таблеток лекарства по 0,5 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

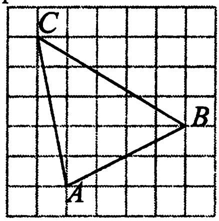
Ответ: ____________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, на сколько градусов Цельсия март был в среднем холоднее августа.



Ответ: ____________________________.

3 Найдите медиану треугольника ABC, проведённую из вершины C, если стороны квадратных клеток равны 1.



Ответ: ____________________________.

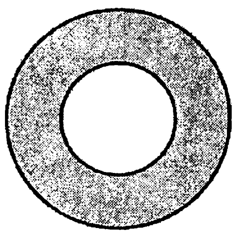
4 Какова вероятность того, что случайно выбранный телефонный номер оканчивается двумя чётными цифрами?

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} = 4^x$.

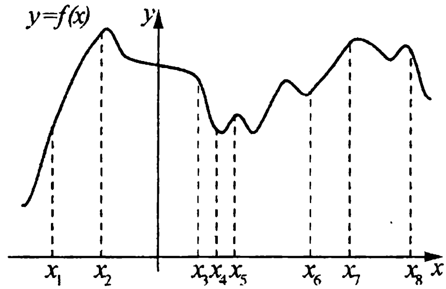
Ответ: ____________________________.

6 Найдите площадь кольца, ограниченного концентрическими окружностями, радиусы которых равны $\frac{9}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$.



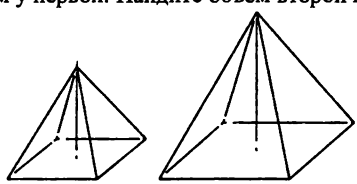
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Ответ: ___________________________.

8 Даны две правильные четырёхугольные пирамиды. Объём первой пирамиды равен 16. У второй пирамиды высота в 2 раза больше, а сторона основания в 1,5 раза больше, чем у первой. Найдите объём второй пирамиды.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{23}{\sin^2 56^\circ + \sin^2 146^\circ}$.

Ответ: ___________________________.

10 Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 600$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 700\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $g(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 500 000 руб.

Ответ: ___________________________.

11 Из одной точки кольцевой дороги, длина которой равна 12 км, одновременно в одном направлении выехали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 101 км/ч, и через 20 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=-\frac{4}{x}-x$ на отрезке $[-2{,}5;-1]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sin 2x+2\sin^2 x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E=6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=4\sqrt{2}$, $AD=12$, $AA_1=14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4:3.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

15 Решите неравенство $\frac{81^x+2\cdot 25^{x\log_5 3}-5}{(4x-1)^2}\geq 0$.

16 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC=15$, $BC=8$. Окружность радиуса 2,5 с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{4}$ длины катета AC.

б) Найдите радиус второй окружности.

17 Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10 %. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(x-1)(x+2)\le 0,\\ 8x^2+8y^2-16a(x-y)+15a^2-48y-50a+72=0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 50, а вместе солдат меньше чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат? Приведите все возможные значения.

Вариант 2

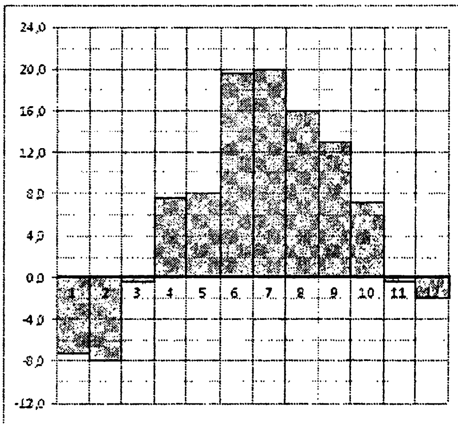
Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Больному прописано лекарство, которое нужно принимать по 0,5 г 4 раза в день в течение 16 дней. В одной упаковке 10 таблеток лекарства по 0,5 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

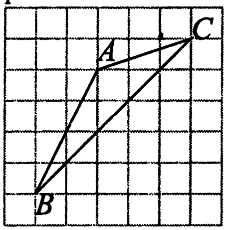
Ответ: ____________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, на сколько градусов Цельсия февраль был в среднем холоднее июля.



Ответ: ____________________________.

3 Найдите медиану треугольника ABC, проведённую из вершины C, если стороны квадратных клеток равны 1.



Ответ: ____________________________.

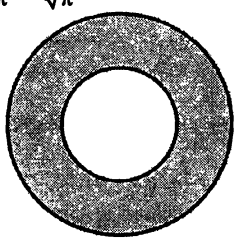
4 Какова вероятность того, что в случайно выбранном телефонном номере последняя цифра чётная, а предпоследняя — нечётная?

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} = 8^x$.

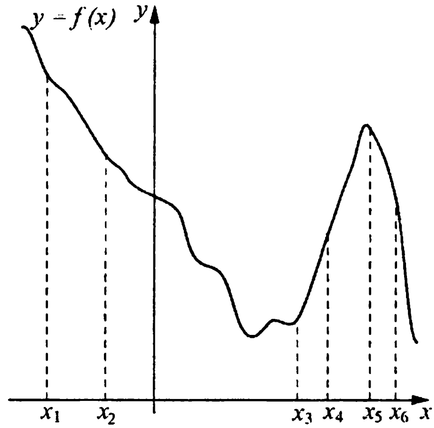
Ответ: ____________________________.

6 Найдите площадь кольца, ограниченного концентрическими окружностями, радиусы которых равны $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.



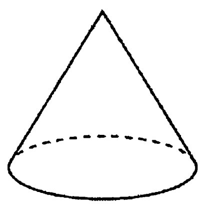
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и шесть точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_6$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Ответ: ____________________________.

8 Площадь боковой поверхности конуса в $\sqrt{2}$ раз больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{-4}{\sin^2 27° + \sin^2 117°}$.

Ответ: ____________________________.

10 Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p=400$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v=200$ руб., постоянные расходы предприятия $f=600\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $g(q)=q(p-v)-f$. Определите месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 900 000 руб.

Ответ: ___________________________.

11 Из одной точки кольцевой дороги, длина которой равна 22 км, одновременно в одном направлении выехали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 113 км/ч, и через 30 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=\dfrac{9}{x}+x$ на отрезке $[1;4{,}5]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E=4EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=3\sqrt{2}$, $AD=16$, $AA_1=20$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 3:2.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

Вариант 2

15 Решите неравенство $\dfrac{8\cdot 7^x-4^{x\log_2 7}-11}{(2x-1)^2}\geq 0$.

16 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC=12$, $BC=5$. Окружность радиуса 0,5 с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\dfrac{1}{5}$ длины катета AC.

б) Найдите радиус второй окружности.

17 Алексей приобрёл ценную бумагу за 8 тыс.рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 1 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 8 %. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через двадцать пять лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y(y+1)\leq 0, \\ 3x^2+3y^2-6a(x+y)+5a^2-6x+4a+3=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 46, а вместе солдат меньше чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат? Приведите все возможные значения.

Вариант 3

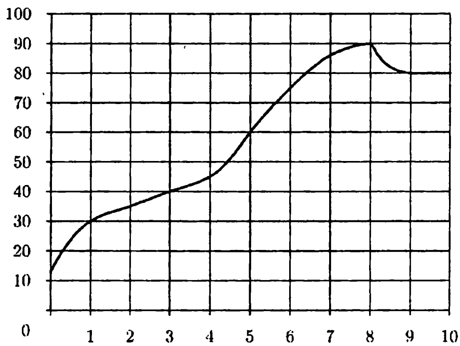
Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Шоколадка стоит 25 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за три шоколадки, покупатель получает четыре (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 230 рублей в воскресенье?

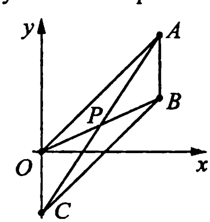
Ответ: ___________________________.

2 На графике показано изменение температуры двигателя в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, на сколько градусов нагреется двигатель с окончания третьей по окончание восьмой минут разогрева.



Ответ: ___________________________.

3 Точки $O(0;0)$, $A(13;13)$, $B(13;6)$, $C(0;-7)$ являются вершинами четырёхугольника. Найдите абсциссу точки P пересечения его диагоналей.



Ответ: ___________________________.

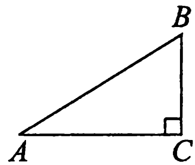
4 В чемпионате по гимнастике участвуют 25 спортсменок: 6 из Венгрии, 7 из Румынии, остальные — из Болгарии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Болгарии.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{37+7x}=4$.

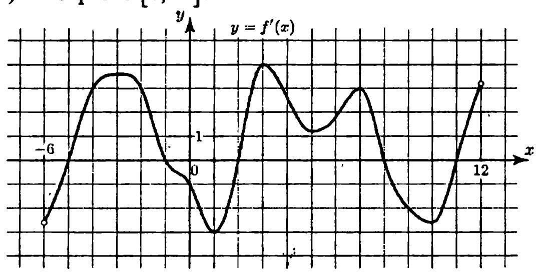
Ответ: ____________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC=12$, $BC=9$. Найдите $\operatorname{tg} A$.



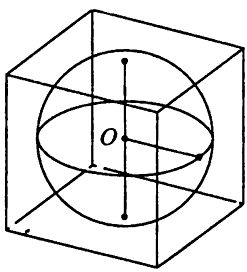
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;12)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$ на отрезке $[0;10]$.



Ответ: ____________________________.

8 Площадь поверхности куба, описанного около сферы, равна 96. Найдите радиус сферы.



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\sin 18° \cos 72° + \sin 72° \cos 18°$.

Ответ: ___________________________.

10 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1{,}6 + 12t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте более 8 метров?

Ответ: ___________________________.

11 Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 6 килограммов изюма, если виноград содержит 90 % воды, а изюм содержит 5 % воды?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 5^{x^2+2x+3}$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N — середина ребра A_1C_1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN.

б) Найдите периметр этого сечения.

15 Решите неравенство $\log_{x^2+x}\left(x^2 - 2x + 1\right) \le 1$.

16 Хорды AD, BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.
а) Докажите, что эти хорды равны.
б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A, B, C, D, E последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

17 Оля хочет взять в кредит 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 000 рублей?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y=\frac{a+3x-ax}{x^2+2ax+a^2+1}$ содержит отрезок $[0;1]$.

19 Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.
а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?
б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?
в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

Вариант 4

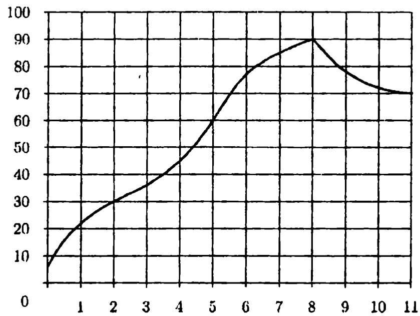
Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Шоколадка стоит 35 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за три шоколадки, покупатель получает четыре (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 290 рублей в воскресенье?

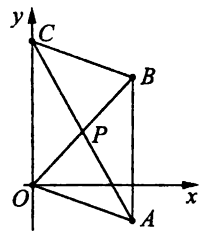
Ответ: ___________________________.

2 На графике показано изменение температуры двигателя в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, на сколько градусов нагреется двигатель с окончания второй по окончание пятой минут разогрева.



Ответ: ___________________________.

3 Точки $O(0;0)$, $A(11;-4)$, $B(11;12)$, $C(0;16)$ являются вершинами четырёхугольника. Найдите абсциссу точки P пересечения его диагоналей.



Ответ: ___________________________.

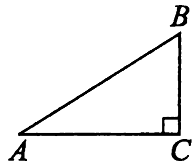
4 В чемпионате по гимнастике участвуют 25 спортсменок: 12 из России, 7 из Украины, остальные — из Белоруссии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Белоруссии.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $6^{2-4x} = 36^{3x}$.

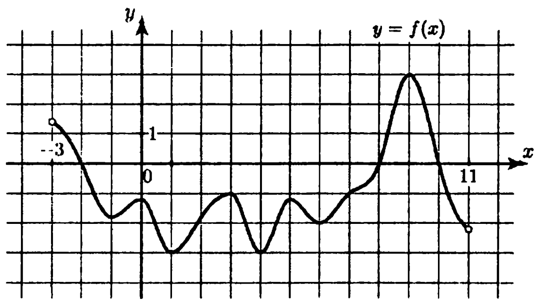
Ответ: ____________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 20$, $BC = 6$. Найдите $\operatorname{tg} A$.



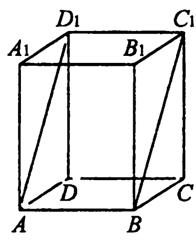
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 11)$. Найдите наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[3; 10]$.



Ответ: ____________________________.

8 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 7$, $AD = 40$, $AA_1 = 9$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.



Ответ: ____________________________.

Вариант 4

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_a\left(ab^4\right)$, если $\log_a b = 2$.

Ответ: ___________________________.

10 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 2 + 9t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте более 6 метров?

Ответ: ___________________________.

11 Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 12 килограммов изюма, если виноград содержит 90 % воды, а изюм содержит 5 % воды?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 7^{x^2 - 2x + 3}$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а атем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14 В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 8. Высота призмы равна 3. Точка N — середина ребра A_1C_1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN.

б) Найдите площадь этого сечения.

Вариант 4

15 Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-x}}{x^2-x-1}\le 0$.

16 Хорды AD, BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.
а) Докажите, что эти хорды равны.
б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A, B, C, D, E последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{14}$.

17 Оля хочет взять в кредит $1\,200\,000$ рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента $10\,\%$ годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более $320\,000$ рублей?

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y=\dfrac{5a-15x+ax}{x^2-2ax+a^2+25}$ содержит отрезок $[0;1]$.

19 Красный карандаш стоит 18 рублей, синий — 14 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 499 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на шесть.
а) Можно ли купить 30 карандашей?
б) Можно ли купить 33 карандаша?
в) Какое наибольшее число карандашей можно купить?

Вариант 5

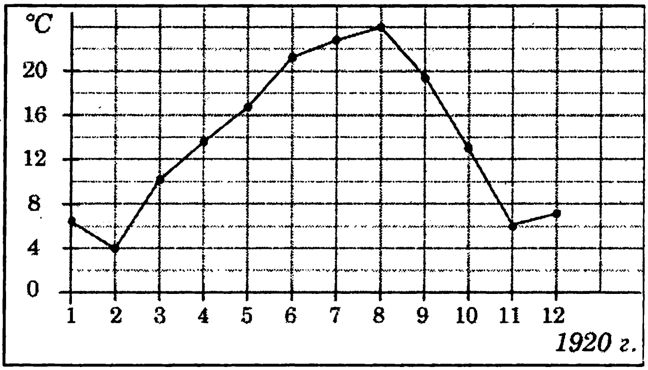
Часть 1

Ответом к каждому из заданий является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 800 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 9 недель?

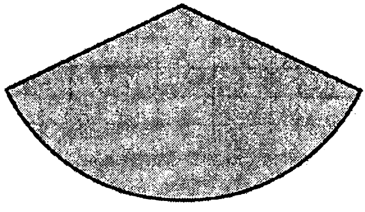
Ответ: ____________________________.

2 На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ____________________________.

3 Из круга с радиусом 7 вырезан сектор, площадь которого равна 35. Найдите длину дуги сектора.



Ответ: ____________________________.

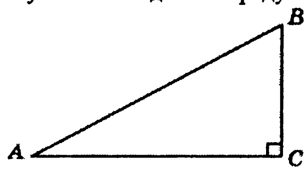
4 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такова же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру кофе останется в обоих автоматах.

Ответ: ____________________.

5 Найдите корень уравнения $(x-10)^2=(x+4)^2$.

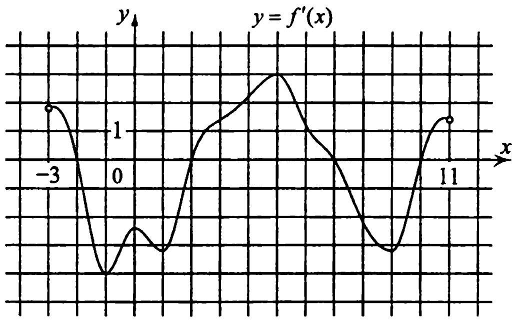
Ответ: ____________________.

6 Один острый угол прямоугольного треугольника на 6° больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.



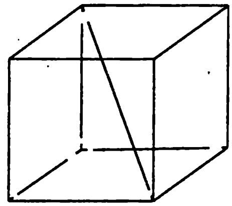
Ответ: ____________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;11)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: ____________________.

8 Диагональ куба равна 13. Найдите площадь его поверхности.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите $2\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}7$.

Ответ: ___________________________.

10 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1350$ К, $a = -7{,}5$ К/мин^2, $b = 105$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1650 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор? Ответ выразите в минутах.

Ответ: ___________________________.

11 Заказ на 180 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 3 детали больше?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 24x^2 + 11$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{\cos 2x + \sqrt{3}\sin x - 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=3:4$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=9$, $AD=6$, $AA_1=14$.

а) В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1?

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1.

15 Решите неравенство $\log_{\frac{x}{x-1}} 5 \le \log_{\frac{x}{2}} 5$.

16 Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC=3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC=12$.

17 Алексей взял кредит в банке на срок 12 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется r % этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 13 % больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите r.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4\le 0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1\ge 0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 Известно, что a, b, c, и d — попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{7}{19}$?

б) Может ли дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>6d$?

Вариант 6

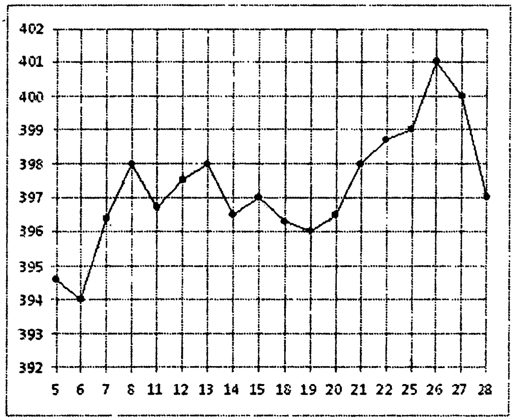
Часть 1

Ответом к каждому из заданий является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 1200 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 3 недели?

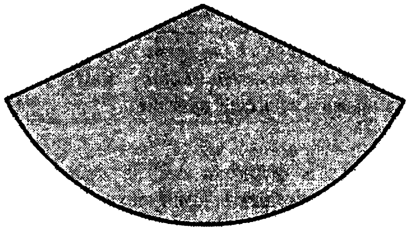
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 5 по 28 марта 1996 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой золота на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за унцию).



Ответ: ___________________________.

3 Из круга с радиусом 9 вырезан сектор, площадь которого равна 27. Найдите длину дуги сектора.



Ответ: ____________________________.

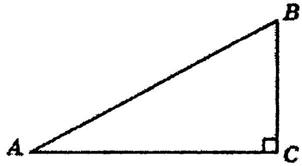
4 Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся П. верно решит больше 12 задач, равна 0,7. Вероятность того, что П. верно решит больше 11 задач, равна 0,79. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 12 задач.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $(5x-8)^2=(5x-2)^2$.

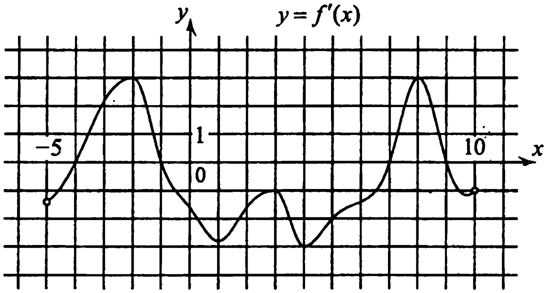
Ответ: ____________________________.

6 Один острый угол прямоугольного треугольника на 38° больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.



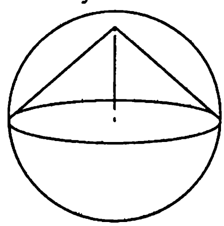
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 10)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: ___________________________.

8 Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 112. Найдите объём конуса.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите $5\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}4$.

Ответ: ___________________________.

10 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1450$ К, $a = -30\frac{\text{К}}{\text{мин}^2}$, $b = 180\frac{\text{К}}{\text{мин}}$. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор? Ответ выразите в минутах.

Ответ: ___________________________.

11 Заказ на 156 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 1 деталь больше?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 27x^2 + 15$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{\cos 2x + \sqrt{2}\cos x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=4:3$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=5$, $AD=8$, $AA_1=14$.

а) В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1?

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1.

15 Решите неравенство $\log_{\frac{x}{x-3}} 7 \le \log_{\frac{x}{3}} 7$.

16 Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC=3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC=10$.

17 Алексей взял кредит в банке на срок 17 месяцев. По договору Алексей должен возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. В конце каждого месяца к оставшейся сумме основного долга добавляется r % этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 27 % больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите r.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax^2-2(a+1)x+a+5\le 0, \\ (a+1)x^2-2(a+2)x+a+2\ge 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 Известно, что a, b, c и d — попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{3a+2c}{b+d}=\dfrac{12}{19}$?

б) Может ли дробь $\dfrac{3a+2c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\dfrac{3a}{b}+\dfrac{2c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{3a+2c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>2d$?

Ответы к заданиям

№	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
1	7	7	12	10	15	8
2	20	28	50	30	20	7
3	5	5	6,5	5,5	10	6
4	0,25	0,25	0,48	0,24	0,65	0,09
5	2	1	−3	0,2	3	1
6	56	15	0,75	0,3	48	64
7	5	2	8	3	5	3
8	72	45	2	287	338	28
9	23	−4	1	9	0,04	3,4
10	4000	7500	0,8	0,2	4	1
11	65	69	57	114	12	12
12	4	6	25	49	16	18

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом
Вариант 1

13 а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

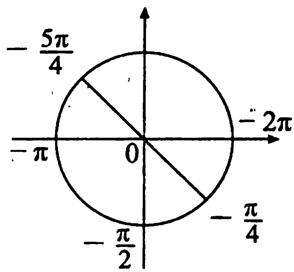
а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x(\cos x + \sin x) = 0.$$

Получаем, что $\sin x = 0$ или $\sin x = -\cos x$.

Из второго уравнения получаем $\operatorname{tg} x + 1 = 0$, поскольку $\cos x \neq 0$. Следовательно,

$x = \pi n$ или $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.



б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$, найдём, пользуясь единичной окружностью.

Получаем $x = -2\pi$, $x = -\frac{5\pi}{4}$, $x = -\pi$.

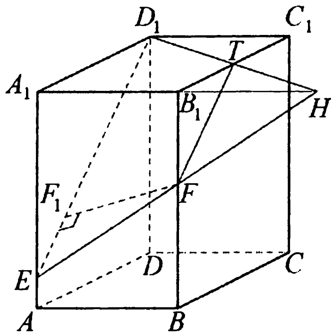
Ответ: а) πn, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) -2π, $-\frac{5\pi}{4}$, $-\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4:3.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.



Решение.

а) Проведём отрезок ED_1 и в плоскости грани BB_1C_1C проведём через точку T прямую, параллельную ED_1. Эта прямая пересечёт ребро BB_1 в точке F. Точка F лежит в плоскости ETD_1. Треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны. Следовательно,

$$\frac{B_1F}{B_1T}=\frac{A_1E}{A_1D_1}=\frac{6A_1A}{7AD}=\frac{6\cdot 14}{7\cdot 12}=1.$$

Таким образом, $B_1F=B_1T=\frac{1}{2}B_1C_1=6$.

Тогда $FB=14-6=8$ и $BF:FB_1=4:3$.

б) Четырёхугольник ED_1TF — сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1. Поскольку стороны FT и ED_1 параллельны, но не равны, ED_1TF — трапеция. Продолжим боковые стороны EF и D_1T до пересечения в точке H.

Точка T — середина B_1C_1, поэтому отрезок FT – средняя линия треугольника ED_1H. Из равенства треугольников A_1D_1H и A_1EH получаем $D_1H=EH$, откуда $D_1T=EF$, то есть трапеция ED_1TF равнобедренная.

Найдём стороны трапеции:

$$ED_1=EA_1\cdot\sqrt{2}=12\sqrt{2},\ FT=FB_1\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2},\ EF=D_1T=\sqrt{D_1C_1^2+TC_1^2}=2\sqrt{17}.$$

Высота FF_1 трапеции равна $\sqrt{\left(2\sqrt{17}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}=5\sqrt{2}$.

Площадь равна $5\sqrt{2}\cdot\frac{12\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{2}=90$.

Ответ: б) 90.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, или обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $\frac{81^x+2\cdot 25^{x\log_5 3}-5}{(4x-1)^2}\geq 0$.

Решение.

Точка $x=\frac{1}{4}$ не является решением неравенства. При $x\ne\frac{1}{4}$ получаем

$$81^x+2\cdot 9^x-5\ge 0.$$

Замена $y=9^x$ даёт $y^2+2y-5\ge 0$, откуда $y\le -1-\sqrt{6}$ или $y\ge\sqrt{6}-1$. Неравенство $9^x\le -1-\sqrt{6}$ не имеет решений, а из неравенства $9^x\ge\sqrt{6}-1$ получаем $x\ge\log_9\left(\sqrt{6}-1\right)$.

Сравним $\log_9\left(\sqrt{6}-1\right)$ и $\frac{1}{4}$:

$$\sqrt{6}-1<2{,}5-1=1{,}5<\sqrt{3}=9^{\frac{1}{4}}.$$

Следовательно, $\log_9(\sqrt{6}-1)<\frac{1}{4}$, и поэтому решением неравенства являются два промежутка: $\log_9\left(\sqrt{6}-1\right)\le x<\frac{1}{4}$ и $x>\frac{1}{4}$.

Ответ: $\left[\log_9\left(\sqrt{6}-1\right);\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$.

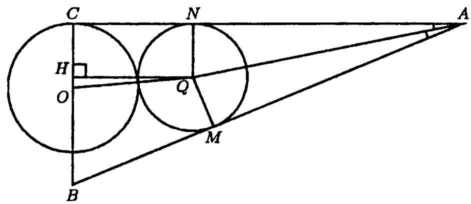
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением граничных точек. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC=15$, $BC=8$. Окружность радиуса 2,5 с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{4}$ длины катета AC.

б) Найдите радиус второй окружности.

Решение.



а) Пусть Q — центр второй окружности, M и N — её точки касания со сторонами AB и AC соответственно, а точка H — проекция точки Q на BC. Имеем

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 17,$$

следовательно,

$$\cos A = \frac{15}{17}, \quad \sin A = \frac{8}{17}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \angle NAQ = \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \frac{1}{4}.$$

Поэтому $AC > AN = 4NQ$, что требовалось доказать.

б) Пусть x — радиус второй окружности. Рассмотрим прямоугольный треугольник OHQ

$$QH = CN = 15 - 4x > 0, \quad OQ = x + 2{,}5; \quad OH = |OC - CH| = |2{,}5 - x|.$$

По теореме Пифагора $OH^2 + QH^2 = OQ^2$, откуда

$$(15 - 4x)^2 + (2{,}5 - x)^2 = (2{,}5 + x)^2; \quad 16x^2 - 130x + 225 = 0.$$

Решая это уравнение, находим $x = 2{,}5$ или $x = 5{,}625$. Условию $15 - 4x > 0$ удовлетворяет только $x = 2{,}5$. Кстати, отсюда следует, что точки O и H совпадают.

Ответ: 2,5.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

17 Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10 %. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение.
Если Алексей продаст бумагу в течение k-го года, то через тридцать лет после покупки сумма на его счёте будет равна

$$(2k+5)\cdot(1{,}1)^{30-k}.$$

Таким образом, нам нужно найти номер максимального члена последовательности $a_k=(2k+5)\cdot(1{,}1)^{30-k}$, где k пробегает целые значения от 1 до 30. Рассмотрим приращение

$$b_k=a_k-a_{k-1}=(1{,}1)^{30-k}\big(2k+5-1{,}1\cdot(2(k-1)+5)\big)=(1{,}1)^{30-k}(1{,}7-0{,}2k).$$

Отсюда $b_k>0$ при $k\le 8$ и $b_k<0$ при $k>8$. Следовательно, наибольшее значение последовательность a_k принимает при $k=8$.

Ответ: в течение восьмого года.

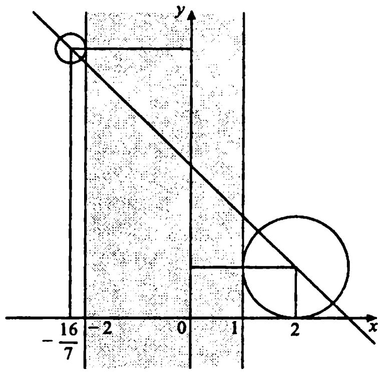
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(x-1)(x+2)\le 0,\\ 8x^2+8y^2-16a(x-y)+15a^2-48y-50a+72=0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.



Выделим в уравнении системы полные квадраты:

$$8x^2-16ax+8a^2+8y^2+16ay+8a^2-a^2-48y-50a+72=0;$$

$$8(x-a)^2+8(y+a)^2-48(y+a)+72-a^2-2a=0.$$

Ещё раз выделим полный квадрат:

$$8(x-a)^2+8(y-3+a)^2-a^2-2a=0;\quad (x-a)^2+(y-3+a)^2=\frac{a(a+2)}{8}.$$

Уравнение определяет окружность с центром $(a;3-a)$ и радиусом $\sqrt{\frac{a^2+2a}{8}}$.

Неравенство $(x-1)(x+2)\le 0$ определяет вертикальную полосу $-2\le x\le 1$.

На рисунке видно, что единственное решение получается в двух случаях.

1. Окружность касается полосы внешним образом. Это происходит тогда и только тогда, когда центр расположен вне полосы, а её радиус равен расстоянию от центра до ближайшей границы полосы:

$$\begin{cases}a<-2,\\ (a+2)^2=\frac{a^2+2a}{8}\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}a>1,\\ (a-1)^2=\frac{a^2+2a}{8},\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a<-2, \\ a+2=\dfrac{a}{8} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a>1, \\ 7a^2-18a+8=0. \end{cases}$$

Первая система имеет решение $a=-\dfrac{16}{7}$. Вторая система имеет решение $a=2$.

2. Окружность превращается в точку и при этом принадлежит полосе:

$$\begin{cases} -2\le a\le 1, \\ a^2+2a=0, \end{cases} \quad \text{откуда } a=0 \text{ или } a=-2.$$

Ответ: $-\dfrac{16}{7}$; -2; 0; 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но в ответ включены также и одно-два неверных значения.	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра.	2
Задача верно сведена к исследованию совокупности трёх квадратных уравнений относительно a.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

19 В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 50, а вместе солдат меньше чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат? Приведите все возможные значения.

Решение.

Пусть в первом взводе k солдат, во втором l солдат. Тогда числа k и l имеют общий делитель, больший 7, и при этом

$$\begin{cases} 50 < k < l, \\ k + l \le 119. \end{cases}$$

а) Например, 54 и 63 солдата. Тогда всего солдат 117, их можно построить в колонну по 9 человек в ряду так, что 6 рядов будет заполнено солдатами только из первого взвода, а 7 рядов — только из второго.

б) Предположим, что общий делитель равен 11. Тогда, учитывая, что $50 < k < 60$, получаем, что $k = 55$. Наименьшее возможное значение l равно $55 + 11 = 66$, но вместе получается 121 человек, что противоречит условию.

в) Число $l - k$ больше нуля и делится на общий делитель чисел k и l, поэтому $l - k \ge 8$; $k - l \le -8$, что вместе с условием $k + l \le 119$ приводит к неравенству $2k \le 111$, то есть $k \le 55$. При этом

$$k + d \le l \le 119 - k,$$

где d — наименьший общий делитель, превосходящий 7.

Если $k = 51 = 3 \cdot 17$, то $d = 17$, $l = 68$, а в роте 119 солдат.

Если $k = 52 = 4 \cdot 13$, то $65 \le l \le 67$. Тогда $l = 65$, общий делитель 13 и $k + l = 117$.

Если $k = 53$, то $53 + 53 = 106 \le l \le 66$. Противоречие.

Если $k = 54 = 6 \cdot 9$, то $54 + 9 = 63 \le l \le 65$. Тогда $l = 63$, общий делитель равен 9 и в роте 117 солдат.

Если $k = 55 = 5 \cdot 11$, то $66 \le l \le 64$, но числа 63 и 64 взаимно просты с 55. Противоречие.

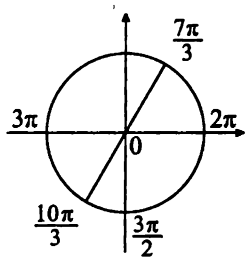
Ответ: а) например, 54 и 63; б) нет; в) 117 или 119.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ во всех пунктах.	4
Верно выполнены пункты *а* и *в* или *б* и *в*.	3
Верно выполнены пункты *а* и *б* или только пункт *в*.	2
Верно выполнен один из пунктов *а* и *б*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Вариант 2

13 а) Решите уравнение $2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.



Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)=0.$$

Получаем, что $\sin x=0$ или $\sin x=\sqrt{3}\cos x$.

Из второго уравнения находим $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$, поскольку $\cos x\neq 0$.

Следовательно,

$$x=\pi n \text{ или } x=\frac{\pi}{3}+\pi n\text{, где } n\in\mathbb{Z}.$$

Все найденные значения удовлетворяют условию $\cos x\neq 0$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$, найдём, пользуясь единичной окружностью. Получаем $x=2\pi$, $x=\frac{7\pi}{3}$, $x=3\pi$.

Ответ: а) πn, $\frac{\pi}{3}+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) 2π, $\frac{7\pi}{3}$, 3π.

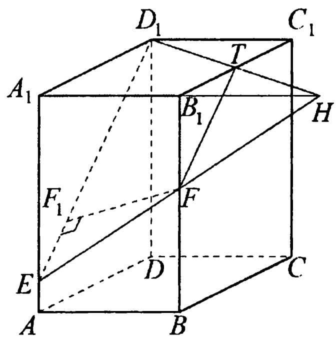
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 4EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = 16$, $AA_1 = 20$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 3:2.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

Решение.



а) Проведём отрезок ED_1 и в плоскости грани BB_1C_1C проведём через точку T прямую, параллельную ED_1. Эта прямая пересекает ребро BB_1 в точке F. Точка F лежит в плоскости ETD_1 и делит BB_1 на две части. Треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны. Следовательно,

$$\frac{B_1F}{B_1T} = \frac{A_1E}{A_1D_1} = \frac{4A_1A}{5AD} = \frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 16} = 1.$$

Таким образом, $B_1F = B_1T = \frac{B_1C_1}{2} = 8$.

Тогда $FB = 20 - 8 = 12$ и $BF : FB_1 = 3 : 2$.

б) Четырёхугольник ED_1TF — сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1. Поскольку стороны FT и ED_1 параллельны, но не равны, ED_1TF — трапеция. Продолжим боковые стороны EF и D_1T до пересечения в точке H. Точка T — середина B_1C_1, поэтому отрезок FT — средняя линия треугольника ED_1H. Из равенства треугольников A_1D_1H и A_1EH получаем $D_1H = EH$, откуда $D_1T = EF$, то есть трапеция ED_1TF равнобедренная.

Найдём стороны трапеции:

$$ED_1 = EA_1 \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2},\ FT = FB_1 \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2},$$

$$EF = D_1T = \sqrt{D_1C_1^2 + TC_1^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + 8^2} = \sqrt{82}.$$

Проведём в трапеции высоту FF_1. Имеем

$$EF_1 = \frac{ED_1 - FT}{2} = 4\sqrt{2},\ FF_1 = \sqrt{EF^2 - EF_1^2} = \sqrt{82 - \left(4\sqrt{2}\right)^2} = 5\sqrt{2}.$$

Площадь трапеции равна $5\sqrt{2} \cdot \dfrac{16\sqrt{2} + 8\sqrt{2}}{2} = 120$.

Ответ: б) 120.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б.*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* или обоснованно получен верный ответ в пункте *б.*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\dfrac{8 \cdot 7^x - 4^{x\log_2 7} - 11}{(2x-1)^2} \geq 0$.

Решение.

Точка $x = \dfrac{1}{2}$ не является решением неравенства. При $x \neq \dfrac{1}{2}$ получаем

$$8 \cdot 7^x - 49^x - 11 \geq 0.$$

Замена $y = 7^x$ даёт $y^2 - 8y + 11 \leq 0$, откуда $4 - \sqrt{5} \leq y \leq 4 + \sqrt{5}$.

Получаем $4 - \sqrt{5} \leq 7^x \leq 4 + \sqrt{5}$, откуда $\log_7\left(4 - \sqrt{5}\right) \leq x \leq \log_7\left(4 + \sqrt{5}\right)$.

Нужно сравнить границы полученного отрезка с $\dfrac{1}{2}$. Имеем

$$4 - \sqrt{5} < 2 < \sqrt{7},\ 4 + \sqrt{5} > 6 > \sqrt{7}.$$

Следовательно, $\log_7\left(4 - \sqrt{5}\right) < \dfrac{1}{2} < \log_7\left(4 + \sqrt{5}\right)$, и поэтому решением неравенства являются два промежутка

$$\log_7\left(4 - \sqrt{5}\right) \leq x < \frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{2} < x \leq \log_7\left(4 + \sqrt{5}\right).$$

Ответ: $\left[\log_7\left(4 - \sqrt{5}\right); \dfrac{1}{2}\right),\ \left(\dfrac{1}{2}; \log_7\left(4 + \sqrt{5}\right)\right]$.

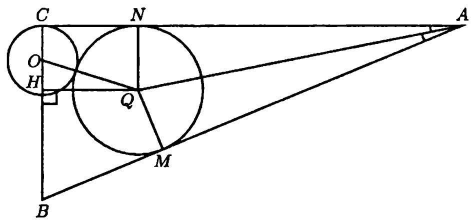
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением граничных точек. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC=12$, $BC=5$. Окружность радиуса 0,5 с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{5}$ длины катета AC.

б) Найдите радиус второй окружности.

Решение.



а) Пусть Q — центр второй окружности, M и N — её точки касания со сторонами AB и AC соответственно, а точка H — проекция точки Q на BC. Имеем

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=13,$$

следовательно,

$$\cos A=\frac{12}{13},\quad \sin A=\frac{5}{13}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\angle NAQ=\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{1}{5}.$$

Поэтому $AC>AN=5NQ$, что требовалось доказать.

б) Пусть x — радиус второй окружности. Рассмотрим прямоугольный треугольник OHQ:

$$QH = CN = 12 - 5x > 0, \quad OQ = x + 0{,}5,$$
$$OH = |OC - CH| = |0{,}5 - x|.$$

По теореме Пифагора $OH^2 + QH^2 = OQ^2$, откуда

$$(12-5x)^2 + (0{,}5-x)^2 = (0{,}5+x)^2; \quad 25x^2 - 122x + 144 = 0.$$

Решая это уравнение, находим $x = 2$ или $x = 2{,}88$. Условию $12 - 5x > 0$ удовлетворяет только $x = 2$.

Ответ: 2.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

17 Алексей приобрёл ценную бумагу за 8 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 1 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 8 %. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через двадцать пять лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение.

Если Алексей продаст бумагу в течение k-го года, то через двадцать пять лет после покупки сумма на его счёте будет равна

$$(k+7)\cdot 1{,}08^{25-k}.$$

Таким образом, нам нужно найти номер максимального члена последовательности $a_k=(k+7)\cdot 1{,}08^{25-k}$, где k пробегает целые значения от 1 до 25. Рассмотрим приращение

$$b_k=a_k-a_{k-1}=1{,}08^{25-k}\cdot\left(k+7-1{,}08\cdot\left((k-1)+7\right)\right)=1{,}08^{25-k}(0{,}52-0{,}08k).$$

Отсюда $b_k>0$ при $k\le 6$ и $b_k<0$ при $k>6$. Следовательно, наибольшее значение последовательность a_k принимает при $k=6$.

Ответ: в течение шестого года.

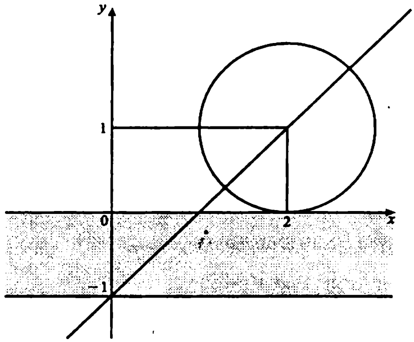
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y(y+1)\le 0, \\ 3x^2+3y^2-6a(x+y)+5a^2-6x+4a+3=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.



Выделим в уравнении системы полные квадраты:

$$3x^2-6ax+3a^2+3y^2-6ay+3a^2-6x+4a+3-a^2=0;$$

$$3(x-a)^2+3(y-a)^2-6(x-a)+3-2a-a^2=0.$$

Ещё раз выделим полный квадрат:

$$3(x-a)^2-6(x-a)+3+3(y-a)^2=a^2+2a;$$

$$(x-a-1)^2+(y-a)^2=\frac{a^2+2a}{3}.$$

Уравнение определяет окружность с центром $(a+1;a)$ и радиусом $\sqrt{\dfrac{a^2+2a}{3}}$.

Неравенство $y(y+1)\le 0$ определяет горизонтальную полосу $-1\le y\le 0$. На рисунке видно, что единственное решение получается в двух случаях.

1. Окружность касается полосы внешним образом. Это происходит тогда и только тогда, когда центр расположен вне полосы, а её радиус равен расстоянию от центра до ближайшей границы полосы:

$$\begin{cases} a<-1, \\ (a+1)^2=\dfrac{a^2+2a}{3} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a>0, \\ a^2=\dfrac{a^2+2a}{3}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a<-1, \\ 2a^2+4a+3=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a>0, \\ 2a^2-2a=0. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений. Вторая система имеет решение $a = 1$.
2. Окружность превращается в точку и при этом принадлежит полосе:

$$\begin{cases} -1 \le a \le 0, \\ a^2 + 2a = 0, \end{cases} \quad \text{откуда } a = 0.$$

Ответ: 0; 1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но в ответ включены также и одно-два неверных значения.	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра.	2
Задача верно сведена к исследованию совокупности трёх квадратных уравнений относительно a.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

19 В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 46, а вместе солдат меньше чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат? Приведите все возможные значения.

Решение.

Пусть в первом взводе k солдат, во втором l солдат. Тогда числа k и l имеют общий делитель, больший 7, и при этом

$$\begin{cases} 47 \le k < l, \\ k + l \le 110. \end{cases}$$

а) Например, 50 и 60 солдат. Тогда всего солдат 110, их можно построить в колонну по 10 человек в ряду так, что 5 рядов будет заполнено солдатами только из первого взвода, а 6 рядов — только из второго.

б) Предположим, что общий делитель 13. Тогда, учитывая, что $47 \le k < 55$, получаем, что $k = 52$. Наименьшее возможное значение l равно $52 + 13 = 65$, но вместе получается 117 человек, что противоречит условию.

в) Число $l-k$ больше нуля и делится на общий делитель чисел k и l, поэтому $l-k \geq 9$; $k-l \leq -9$, что вместе с условием $k+l \leq 110$ приводит к неравенству $2k \leq 101$, то есть $k \leq 50$. При этом

$$k+d \leq l \leq 110-k,$$

где d — наименьший общий делитель, превосходящий 8.

Если $k=47$, то $d=47$, $47+47=94 \leq l \leq 110-47=63$. Противоречие.

Если $k=48$, то $d=12$, $l=60$, а в роте 108 солдат.

Если $k=49$, то $98 \leq l \leq 110-49=61$. Противоречие.

Если $k=50$, то $d=10$, $l=60$, а в роте 110 солдат.

Ответ: а) например, 50 и 60; б) нет; в) 108 или 110.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ во всех пунктах.	4
Верно выполнены пункты *а* и *в* или *б* и *в*.	3
Верно выполнены пункты *а* и *б* или только пункт *в*.	2
Верно выполнен один из пунктов *а* и *б*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Вариант 3

13 а) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg}x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

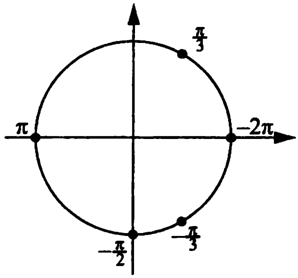
$$2\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}; \qquad \sin x\left(2-\frac{1}{\cos x}\right)=0;$$

$$\sin x=0 \text{ или } \cos x=\frac{1}{2},$$

откуда

$$x=\pi k \text{ или } x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни на промежутке $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ с помощью тригонометрической окружности.



Получаем $x=-2\pi$; $x=-\frac{5\pi}{3}$ и $x=-\pi$.

Ответ: а) πk, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) -2π, $-\frac{5\pi}{3}$, $-\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

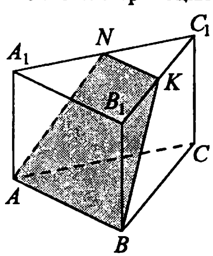
14 В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N — середина ребра A_1C_1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN.

б) Найдите периметр этого сечения.

Решение.

а) Проведём через точку N прямую, параллельную прямой AB, до пересечения с прямой B_1C_1 в точке K. Трапеция $ABKN$ — иско́мое сечение.



б) Имеем $A_1N=3$, так как точка N — середина ребра A_1C_1. Значит, $AN=\sqrt{16+9}=5$. Аналогично $BK=5$.
Далее, $NK=3$ как средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$. Следовательно, искомый периметр сечения равен $6+5+5+3=19$.
Ответ: 19.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* или обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\log_{x^2+x}\left(x^2-2x+1\right)\le 1$.

Решение.

1) Если $x^2+x>1$, то

$$\begin{cases} x^2+x-1>0, \\ 0<x^2-2x+1\le x^2+x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+x-1>0, \\ x\ne 1, \\ 3x\ge 1, \end{cases}$$

откуда $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<x<1$ или $x>1$.

2) Если $0<x^2+x<1$, то

$$\begin{cases} x^2+x>0, \\ x^2+x-1<0, \\ x^2-2x+1\ge x^2+x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x+1)>0, \\ x^2+x-1<0, \\ 3x\le 1, \end{cases}$$

откуда

$$\frac{-\sqrt{5}-1}{2}<x<-1 \text{ или } 0<x\le\frac{1}{3}$$

Объединяя найденные промежутки, получаем решение неравенства:

$$\frac{-\sqrt{5}-1}{2}<x<-1, \text{ или } 0<x\le\frac{1}{3} \text{ или } \frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<1, \text{ или } x>1.$$

Ответ: $\left(\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2};-1\right)$, $\left(0;\dfrac{1}{3}\right]$, $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right)$, $(1;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением/исключением точек граничных точек. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16 Хорды AD, BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.

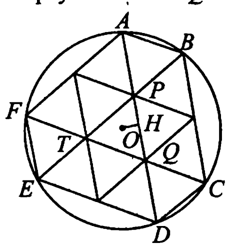
а) Докажите, что эти хорды равны.

б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A, B, C, D, E последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

Решение.

а) Пусть две хорды равны $3x$ и $3y$. По теореме о произведении пересекающихся хорд $2x \cdot x = 2y \cdot y$. Отсюда находим, что $x = y$, значит, эти хорды равны. Аналогично докажем, что третья хорда равна каждой из первых двух.

б) Равные хорды равноудалены от центра окружности, поэтому центр равностороннего треугольника с вершинами в точках попарного пересечения хорд совпадает с центром данной окружности. Пусть хорды BE и CF пересекают хорду AD в точках P и Q соответственно, хорды BE и FC пересекаются в точке T, а H — проекция центра O на хорду AD. Тогда H — общая середина отрезков AD и PQ, а OH — радиус вписанной окружности равностороннего треугольника PQT со стороной PQ.



Через точку T проведём прямую, параллельную AD, через точку P — прямую, параллельную CF, а через точку Q — прямую, параллельную BE. Эти прямые и хорды AD, BE и CF разбивают шестиугольник $ABCDEF$ на 13 одинаковых равносторонних треугольников.

Обозначим $PQ = 2a$. Тогда

$$OH = \frac{2a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad 2\sqrt{21} = OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + 9a^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда находим, что $a = 3$, значит, $PQ = 2a = 6$, $S_{PQT} = a^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

Следовательно,

$$S_{ABCDEF} = 13S_{PQT} = 13 \cdot 9\sqrt{3} = 117\sqrt{3}.$$

Ответ: $117\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

17 Оля хочет взять в кредит 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 000 рублей?

Решение.

В последний день каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент 1,1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением/исключением точек граничных точек. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16 Хорды AD, BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.

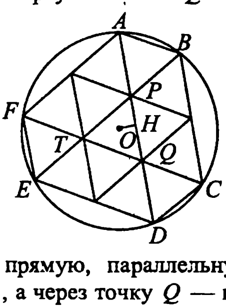
а) Докажите, что эти хорды равны.

б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A, B, C, D, E последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

Решение.

а) Пусть две хорды равны $3x$ и $3y$. По теореме о произведении пересекающихся хорд $2x \cdot x = 2y \cdot y$. Отсюда находим, что $x = y$, значит, эти хорды равны. Аналогично докажем, что третья хорда равна каждой из первых двух.

б) Равные хорды равноудалены от центра окружности, поэтому центр равностороннего треугольника с вершинами в точках попарного пересечения хорд совпадает с центром данной окружности. Пусть хорды BE и CF пересекают хорду AD в точках P и Q соответственно, хорды BE и FC пересекаются в точке T, а H — проекция центра O на хорду AD. Тогда H — общая середина отрезков AD и PQ, а OH — радиус вписанной окружности равностороннего треугольника PQT со стороной PQ.



Через точку T проведём прямую, параллельную AD, через точку P — прямую, параллельную CF, а через точку Q — прямую, параллельную BE. Эти прямые и хорды AD, BE и CF разбивают шестиугольник $ABCDEF$ на 13 одинаковых равносторонних треугольников.

Обозначим $PQ = 2a$. Тогда

$$OH = \frac{2a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad 2\sqrt{21} = OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + 9a^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда находим, что $a = 3$, значит, $PQ = 2a = 6$, $S_{PQT} = a^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

Следовательно,

$$S_{ABCDEF} = 13S_{PQT} = 13 \cdot 9\sqrt{3} = 117\sqrt{3}.$$

Ответ: $117\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

17 Оля хочет взять в кредит 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 000 рублей?

Решение.

В последний день каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент 1,1.

Составим таблицу выплат.

Год	Долг банку (руб.)	Остаток доли после выплаты (руб.)
0	100 000	–
1	110 000	86 000
2	94 600	70 600
3	77 660	53 660
4	59 026	35 026
5	38 528,6	14 528,6
6	15 981,46	0

Значит, Оля погасит кредит за 6 лет.
Ответ: 6.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y=\dfrac{a+3x-ax}{x^2+2ax+a^2+1}$ содержит отрезок $[0;1]$.

Решение.

Запишем функцию в виде $y=\dfrac{a+(3-a)x}{(x+a)^2+1}$.

Отрезок $[0;1]$ содержится в множестве значений данной функции тогда и только тогда, когда уравнения $\dfrac{a+(3-a)x}{(x+a)^2+1}=0$ и $\dfrac{a+(3-a)x}{(x+a)^2+1}=1$ имеют решения.

Решим первое уравнение. Уравнение $(a-3)x=a$ имеет решение при любом $a\neq 3$.

Решим второе уравнение. Уравнение $x^2+3(a-1)x+a^2-a+1=0$ имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D=9(a-1)^2-4\left(a^2-a+1\right)\ge 0;\ 5a^2-14a+5\ge 0;$$

$$\left(a-\frac{7-2\sqrt{6}}{5}\right)\left(a-\frac{7+2\sqrt{6}}{5}\right)\ge 0,$$

откуда $a\le\frac{7-2\sqrt{6}}{5}$ или $a\ge\frac{7+2\sqrt{6}}{5}$. Следовательно,

$$a\le\frac{7-2\sqrt{6}}{5},\ \frac{7+2\sqrt{6}}{5}\le a<3 \text{ или } a>3.$$

Ответ: $a\le\frac{7-2\sqrt{6}}{5}$, $\frac{7+2\sqrt{6}}{5}\le a<3$, $a>3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением граничных точек	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a: $\left(-\infty;\frac{7-2\sqrt{6}}{5}\right]$, $\left[\frac{7-2\sqrt{6}}{5};3\right)$, $(3;+\infty)$, возможно с включением/исключением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию системы двух уравнений относительно x	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

Решение.

а) Например, можно купить 14 красных и 18 синих карандашей:

$$14\cdot 17+18\cdot 13=472 \text{ (руб.)}.$$

б) Дешевле всего 35 карандашей будут стоить, если купить наибольшее возможное число синих карандашей и наименьшее возможное число красных, то есть если купить 15 красных и 20 синих, поскольку если красных меньше 15, то синих больше 20, и в этом случае разность между числом красных и синих больше чем 5. Но тогда стоимость покупки

$$15\cdot17+20\cdot13=515 \text{ (руб.)},$$

что больше, чем имеющаяся сумма 495 рублей.

в) Пусть n и m — число синих и красных карандашей соответственно. Тогда

$$\begin{cases}17m+13n\le495,\\ |m-n|\le5,\\ m,n=0,1,2,\ldots\end{cases}$$

Положим $s=n+m$, тогда

$$\begin{cases}4m+13s\le495,\\ -5\le2m-s\le5,\\ m=0,1,\ldots,s;\end{cases}\qquad\begin{cases}m\le\dfrac{495-13s}{4},\\ \dfrac{s-5}{2}\le m\le\dfrac{s+5}{2},\\ m=0,1,\ldots,s.\end{cases}$$

Следовательно, $\dfrac{s-5}{2}\le\dfrac{495-13s}{4}$, откуда $s\le33\dfrac{2}{3}$.

Можно купить не больше 33 карандашей. Осталось проверить, возможен ли случай, когда $s=33$. При $m=14$, $n=19$ получаем

$$14\cdot17+19\cdot13=485<495.$$

Значит, наибольшее возможное число карандашей 33.

Ответ: а) да; б) нет; в) 33.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. *а*, – обоснованное решение в п. *б*, – искомая оценка в п. *в*, – пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 4

13 а) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

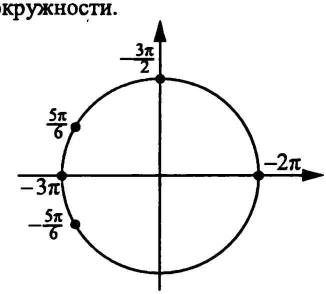
$$-2\sin x=\frac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x};\qquad \sin x\left(2+\frac{\sqrt{3}}{\cos x}\right)=0;$$

$$\sin x=0 \text{ или } \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$x=\pi k \text{ или } x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни на промежутке $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$ с помощью тригонометрической окружности.



Получаем $x=-3\pi$; $x=-\frac{17\pi}{6}$ и $x=-2\pi$.

Ответ: а) πk, $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) -3π, $-\frac{17\pi}{6}$, -2π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

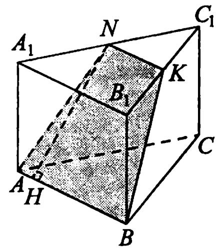
14 В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 8. Высота призмы равна 3. Точка N — середина ребра A_1C_1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN.

б) Найдите площадь этого сечения.

Решение.

а) Проведём через точку N прямую, параллельную прямой AB, до пересечения с прямой B_1C_1 в точке K. Трапеция $ABKN$ — искомое сечение.



б) Имеем $A_1N = 4$, так как точка N — середина ребра A_1C_1. Значит,

$$AN = \sqrt{16+9} = 5.$$

Далее, $NK = 4$ как средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$.

Опустим из точки N высоту NH на сторону AB. Имеем $AH = \dfrac{AB - NK}{2} = 2$.

Высота NH равна $\sqrt{AN^2 - AH^2} = \sqrt{21}$. Следовательно, искомая площадь сечения равна $\dfrac{AB+NK}{2} \cdot NH = \dfrac{8+4}{2} \cdot \sqrt{21} = 6\sqrt{21}$.

Ответ: $6\sqrt{21}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, или обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Вариант 4

15 Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-x}}{x^2-x-1} \le 0$.

Решение.

Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} x^2-x \ge 0, \\ x^2+4x+4 \ge 0, \\ \frac{\left(x^2+4x+4\right)-\left(x^2-x\right)}{x^2-x-1} \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-1) \ge 0, \\ (x+2)^2 \ge 0, \\ \frac{5x+4}{x^2-x-1} \le 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства получаем $x \le 0$ или $x \ge 1$.

Второе неравенство выполняется при всех x.

Из третьего неравенства получаем $x \le -\frac{4}{5}$ или $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Решение данного неравенства: $x \le -\frac{4}{5}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x \le 0$ или $1 \le x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{4}{5}\right]$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right]$, $\left[1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением/исключением граничных точек. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16 Хорды AD, BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.

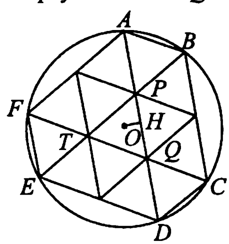
а) Докажите, что эти хорды равны.

б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A, B, C, D, E последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{14}$.

Решение.

а) Пусть две хорды равны $3x$ и $3y$. По теореме о произведении пересекающихся хорд $2x \cdot x = 2y \cdot y$. Отсюда находим, что $x = y$, значит, эти хорды равны. Аналогично докажем, что третья хорда равна каждой из первых двух.

б) Равные хорды равноудалены от центра окружности, поэтому центр равностороннего треугольника с вершинами в точках попарного пересечения хорд совпадает с центром данной окружности. Пусть хорды BE и CF пересекают хорду AD в точках P и Q соответственно, хорды BE и FC пересекаются в точке T, а H — проекция центра O на хорду AD. Тогда H — общая середина отрезков AD и PQ, а OH — радиус вписанной окружности равностороннего треугольника PQT со стороной PQ.



Через точку T проведём прямую, параллельную AD, через точку P — прямую, параллельную CF, а через точку Q — прямую, параллельную BE. Эти прямые и хорды AD, BE и CF разбивают шестиугольник $ABCDEF$ на 13 одинаковых равносторонних треугольников.

Обозначим $PQ = 2a$. Тогда

$$OH = \frac{2a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ 2\sqrt{14} = OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + 9a^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда находим, что $a = \sqrt{6}$, значит, $PQ = 2a = 2\sqrt{6}$, $S_{PQT} = a^2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Следовательно,

$$S_{ABCDEF} = 13S_{PQT} = 13 \cdot 6\sqrt{3} = 78\sqrt{3}.$$

Ответ: $78\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

17 Оля хочет взять в кредит 1 200 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 000 рублей?

Решение.
В последний день каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент 1,1.
Составим таблицу выплат.

Год	Долг банку (руб.)	Остаток доли после выплаты (руб.)
0	1 200 000	–
1	1 320 000	1 000 000
2	1 100 000	780 000
3	858 000	538 000
4	591 800	271 800
5	298 980	0

Значит, Оля погасит кредит за 5 лет.
Ответ: 5.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y=\dfrac{5a-15x+ax}{x^2-2ax+a^2+25}$ содержит отрезок $[0;1]$.

Решение.

Запишем функцию в виде $y=\dfrac{5a+(a-15)x}{(x-a)^2+25}$.

Отрезок $[0;1]$ содержится в множестве значений данной функции тогда и только тогда, когда уравнения $\dfrac{5a+(a-15)x}{(x-a)^2+25}=0$ и $\dfrac{5a+(a-15)x}{(x-a)^2+25}=1$ имеют решения.

Решим первое уравнение. Уравнение $(15-a)x=5a$ имеет решение при любом $a\neq 15$.

Решим второе уравнение. Уравнение $x^2+3(5-a)x+a^2-5a+25=0$ имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D=9(5-a)^2-4\left(a^2-5a+25\right)\geq 0;\quad a^2-14a+25\geq 0;$$

$$\left(a-7+2\sqrt{6}\right)\left(a-7-2\sqrt{6}\right)\geq 0,$$

откуда $a\leq 7-2\sqrt{6}$ или $a\geq 7+2\sqrt{6}$.

Следовательно,

$$a\leq 7-2\sqrt{6},\ 7+2\sqrt{6}\leq a<15 \text{ или } a>15.$$

Ответ: $a\leq 7-2\sqrt{6}$, $7+2\sqrt{6}\leq a<15$, $a>15$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением граничных точек.	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a: $\left(-\infty; 7-2\sqrt{6}\right]$, $\left[7+2\sqrt{6}; 15\right)$, $(15; +\infty)$, возможно с включением/исключением граничных точек.	2
Задача верно сведена к исследованию системы двух уравнений относительно x.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

19 Красный карандаш стоит 18 рублей, синий — 14 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 499 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на шесть.

а) Можно ли купить 30 карандашей?

б) Можно ли купить 33 карандаша?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить?

Решение.

а) Например, можно купить 12 красных и 18 синих карандашей:

$$12\cdot 18+18\cdot 14=468 \text{ (руб.)}.$$

б) Дешевле всего 33 карандаша будут стоить, если купить наибольшее возможное число синих карандашей и наименьшее возможное число красных, то есть если купить 14 красных и 19 синих, поскольку если красных меньше 14, то синих больше 19, и в этом случае разность между числом красных и синих больше чем 6. Но тогда стоимость покупки

$$14\cdot 18+19\cdot 14=518 \text{ (руб.)},$$

что больше, чем имеющаяся сумма 499 рублей.

в) Пусть n и m — число синих и красных карандашей соответственно. Тогда

$$\begin{cases} 18m+14n\le 499, \\ |m-n|\le 6, \\ m,n=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Положим $s = n + m$, тогда

$$\begin{cases} 4m + 14s \le 499, \\ -6 \le 2m - s \le 6, \\ m = 0, 1, \ldots, s; \end{cases} \qquad \begin{cases} m \le \dfrac{499 - 14s}{4}, \\ \dfrac{s-6}{2} \le m \le \dfrac{s+6}{2}, \\ m = 0, 1, \ldots, s. \end{cases}$$

Следовательно, $\dfrac{s-6}{2} \le \dfrac{499-14s}{4}$, откуда $s \le 31\dfrac{15}{16}$.

Можно купить не более 31 карандаша. Осталось проверить, возможен ли случай, когда $s = 31$. При $m = 13$, $n = 18$ получаем

$$13 \cdot 18 + 18 \cdot 14 = 486 < 499.$$

Значит, наибольшее возможное число карандашей 31.

Ответ: а) да; б) нет; в) 31.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. *а*, – обоснованное решение в п. *б*, – искомая оценка в п. *в*, – пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Вариант 5

13 а) Решите уравнение $\frac{\cos 2x+\sqrt{3}\sin x-1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

Перейдём к системе

$$\begin{cases}\cos 2x+\sqrt{3}\sin x-1=0,\\ \operatorname{tg} x-\sqrt{3}\neq 0.\end{cases}$$

Преобразуем уравнение:

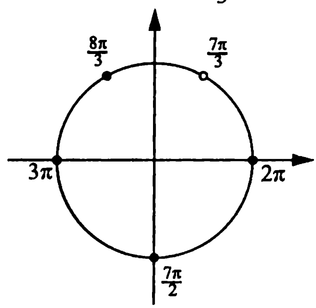
$$1-2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-1=0;\ \ \sin x\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0.$$

Получаем $\sin x=0$ или $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$ или $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

Условию $\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\neq 0$ удовлетворяют только решения $x=\pi n$ и $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$.

б) На отрезке $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности.

Получаем $x=2\pi$, $x=\frac{8\pi}{3}$ и $x=3\pi$.



Ответ: а) πn, $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) 2π, $\frac{8\pi}{3}$, 3π.

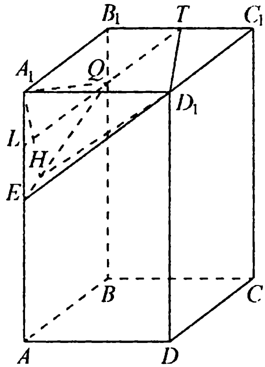
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=3:4$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=9$, $AD=6$, $AA_1=14$.

а) В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1?

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1.

Решение.



а) Так как $A_1E:EA=3:4$ и $AA_1=14$, находим $AE=8$ и $EA_1=6$. Плоскость сечения пересекает параллельные плоскости DAA_1 и BCC_1 по параллельным прямым, поэтому она пересекает ребро BB_1 в такой точке Q, что прямая TQ параллельна прямой ED_1. Значит, треугольники EA_1D_1 и QB_1T подобны, а поскольку $EA_1=A_1D_1=6$, находим $QB_1=B_1T=3$. Значит, $QB=11$ и $QB_1:QB=3:11$.

б) Так как прямая A_1D_1 перпендикулярна плоскости AA_1B_1, опустим перпендикуляр A_1H из точки A_1 на прямую EQ пересечения этих плоскостей. Угол A_1HD_1 будет искомым. Найдём A_1H. Для этого проведём в трапеции EA_1B_1Q высоту $QL=9$ (очевидно, L — середина EA_1). Теперь, вычисляя двумя способами площадь треугольника EQA_1, получим $A_1H\cdot EQ=A_1E\cdot QL$, то есть $A_1H=\dfrac{QL\cdot A_1E}{QE}=\dfrac{9\cdot 6}{\sqrt{9^2+3^2}}=\dfrac{18}{\sqrt{10}}$. Тогда тангенс искомого угла равен $6:\dfrac{18}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Ответы: а) $3:11$; б) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах.	2
Обоснованно найдено сечение в пункте *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\log_{\frac{x}{x-1}} 5 \le \log_{\frac{x}{2}} 5$.

Решение.

Неравенство имеет смысл при $x > 0$ и $\dfrac{x}{x-1} > 0$.

Отсюда следует, что $x-1>0$, то есть $x>1$. При этом условии $\dfrac{x}{x-1}>1$, значит, $\log_{\frac{x}{x-1}} 5 > 0$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_5 \frac{x}{x-1} \ge \log_5 \frac{x}{2} > 0, \text{ откуда } \frac{x}{x-1} \ge \frac{x}{2} > 1.$$

Следовательно, $x > 2$ и $x-1 \le 2$, то есть $x \le 3$.

Ответ: $(2;3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16 Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 12$.

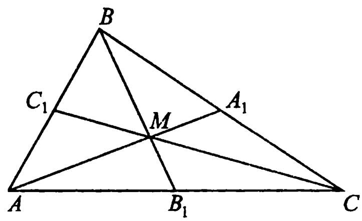
Решение.

а) Известно, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины. Значит,

$$BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$$

Поэтому треугольники AB_1B и CB_1B равнобедренные, причём $\angle B_1AB = \angle ABB_1$ и $\angle B_1CB = \angle CBB_1$. Сумма всех этих четырёх углов равна $180°$.

Тогда $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = 90°$. Отсюда следует, что треугольник ABC прямоугольный.



б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Аналогично из прямоугольного треугольника C_1BC находим

$$CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2.$$

Сложим полученные равенства:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}\left(AB^2 + BC^2\right) = \frac{5}{4}AC^2 = 180.$$

Ответ: 180.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

17 Алексей взял кредит в банке на срок 12 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется r % этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 13 % больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите r.

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг Алексея должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{11S}{12},\ \ldots,\ \frac{2S}{12},\ \frac{S}{12},\ 0.$$

К концу каждого месяца к сумме долга добавляется $r\,\%$. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$.

Тогда последовательность сумм долга вместе с процентами такова:

$$kS,\ \frac{11kS}{12},\ \ldots,\ \frac{2kS}{12},\ \frac{kS}{12}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{12},\ \frac{11(k-1)S+S}{12},\ \ldots,\ \frac{2(k-1)S+S}{12},\ \frac{(k-1)S+S}{12}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S(k-1)\left(1+\frac{11}{12}+\ldots+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}\right)=S\left(1+\frac{13(k-1)}{2}\right).$$

Общая сумма выплат оказалась на 13 % больше суммы, взятой в кредит, поэтому $13(k-1)=0{,}26$; $k=1{,}02$; $r=2$.

Ответ: 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Получено верное выражение для суммы платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу.	2
Получено выражение для ежегодной выплаты, но уравнение не составлено. ИЛИ Верный ответ найден подбором.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4\le 0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1\ge 0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Решение системы может быть единственным в двух случаях.

Первый случай. Единственное решение является граничной точкой для множества решений каждого из двух неравенств. В этом случае это единственное решение должно удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4=0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1=0.\end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$$x^2+2x-3=0,\ \text{откуда}\ x=1\ \ \text{или}\ \ x=-3.$$

Если $x=1$, то $a+2(a+1)+a+1=0$, а значит, $a=-\frac{3}{4}$. При этом значении a система принимает вид

$$\begin{cases}-7x^2-6x+13\le 0,\\ -3x^2+2x+1\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x\le -\frac{13}{7}\ \text{или}\ x\ge 1,\\ -\frac{1}{3}\le x\le 1.\end{cases}$$

Единственное решение $x=1$.

Если $x=-3$, то $9a-6(a+1)+a+1=0$ и $a=\frac{5}{4}$. Система принимает вид

$$\begin{cases}x^2+10x+21\le 0,\\ 5x^2+18x+9\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases}-7\le x\le -3,\\ x\le -3\ \text{или}\ x\ge -\frac{3}{5};\end{cases}\quad -7\le x\le -3.$$

При этом значении a система имеет бесконечно много решений.

Второй случай. Одно из неравенств имеет единственное решение, удовлетворяющее другому неравенству.

Первое неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases}a^2-(a-1)(a+4)=0,\\ a>1,\end{cases}\quad \text{откуда}\ \ a=\frac{4}{3}.$$

Первое неравенство имеет единственное решение $x=-4$, которое удовлетворяет второму неравенству.

Второе неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases}(a+1)^2-a(a+1)=0,\\ a<0,\end{cases}\quad \text{откуда}\ a=-1.$$

Второе неравенство имеет единственное решение $x=0$, которое не удовлетворяет первому неравенству.

Ответ: $a=-\frac{3}{4}$, $a=\frac{4}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены оба значения a,но ответ содержит лишнее значение.	3
С помощью верного рассуждения получено одно из значений a.	2
Задача верно сведена к исследованию системы уравнений.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

19 Известно, что $a, b, c,$ и d — попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{7}{19}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>6d$?

Решение.

а) Пусть $a=10$, $b=20$, $c=11$ и $d=37$. Тогда $\frac{a+c}{b+d}=\frac{21}{57}=\frac{7}{19}$.

б) Предположим, что $11\cdot\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$. Тогда

$$11\cdot(a+c)bd=(b+d)(ad+bc),$$

$$11abd+11bcd=abd+bcd+ad^2+b^2c,$$

$$10abd-ad^2=b^2c-10bcd \text{ и } ad(10b-d)=bc(b-10d).$$

С другой стороны, имеем $10b-d\geq 10\cdot 10-99>0>99-10\cdot 10\geq b-10d$. Следовательно, числа $ad(10b-d)$ и $bc(b-10d)$ имеют разные знаки и не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99\geq a\geq 3b+1$ и $c\geq 6d+1$. Значит, $b\leq\frac{98}{3}<33$. Отсюда, учитывая, что число b целое, получаем, что $b\leq 32$.

Используя неравенства $a\geq 3b+1$, $c\geq 6d+1$, $b\leq 32$ и $d\geq 10$, получаем

$$\frac{a+c}{b+d}\geq\frac{3b+6d+2}{b+d}=3+\frac{3d+2}{b+d}\geq 3+\frac{3d+2}{d+32}=6-\frac{94}{d+32}\geq 6-\frac{94}{42}=\frac{79}{21}.$$

Пусть $a=97$, $b=32$, $c=61$ и $d=10$. Тогда $\frac{a+c}{b+d}=\frac{158}{42}=\frac{79}{21}$.

Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\frac{a+c}{b+d}$ равно $\frac{79}{21}$.

Ответ: а) да, например, если $a=10$, $b=20$, $c=11$ и $d=37$; б) нет; в) $\frac{79}{21}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — в пункте *в* приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Варинат 6

13

а) Решите уравнение $\frac{\cos 2x+\sqrt{2}\cos x+1}{\operatorname{tg} x-1}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.
Перейдём к системе

$$\begin{cases}\cos 2x+\sqrt{2}\cos x+1=0,\\ \operatorname{tg} x-1\neq 0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases}$$

Преобразуем уравнение:

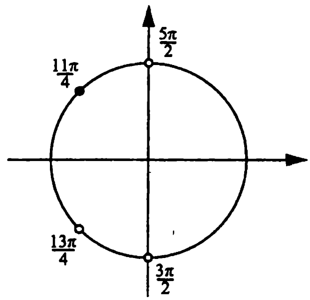
$$2\cos^2 x-1+\sqrt{2}\cos x+1=0;\ \cos x\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)=0.$$

Поскольку $\cos x\neq 0$, получаем $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда

$$x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n \text{ или } x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n, \text{ где } n\in\mathbb{Z}.$$

Условию $\operatorname{tg} x-1\neq 0$ удовлетворяют только числа $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$.

б) На отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности. Получаем единственный корень $x=\frac{11\pi}{4}$.



Ответ: а) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

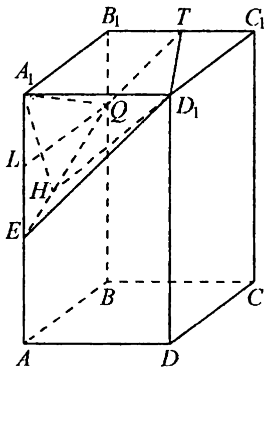
14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=4:3$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=5$, $AD=8$, $AA_1=14$.

а) В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1?

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1.

Решение.

а) Так как $A_1E:EA=3:4$ и $AA_1=14$, находим $AE=6$ и $EA_1=8$. Плоскость сечения пересекает параллельные плоскости DAA_1 и BCC_1 по параллельным прямым, поэтому она пересекает ребро BB_1 в такой точке Q, что прямая TQ параллельна прямой ED_1. Значит, треугольники EA_1D_1 и QB_1T подобны, а поскольку $EA_1=A_1D_1=8$, также получаем, что $QB_1=B_1T=4$. Значит, $QB=10$ и $QB_1:QB=2:5$.



б) Так как прямая A_1D_1 перпендикулярна плоскости AA_1B_1, опустим перпендикуляр A_1H из точки A_1 на прямую EQ пересечения этих плоскостей. Угол A_1HD_1 будет искомым. Найдём A_1H. Для этого проведём в трапеции EA_1B_1Q высоту $QL=5$ (очевидно, L — середина EA_1). Теперь, вычисляя двумя способами площадь треугольника EQA_1, получаем $A_1H \cdot EQ = A_1E \cdot QL$, то есть

$$A_1H = \frac{QL \cdot A_1E}{QE} = \frac{5 \cdot 8}{\sqrt{5^2+4^2}} = \frac{40}{\sqrt{41}}.$$

Тогда тангенс искомого угла равен $8 : \frac{40}{\sqrt{41}} = \frac{\sqrt{41}}{5}$.

Ответ: а) $2:5$; б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{41}}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах.	2
Обоснованно найдено сечение в пункте *а*, ИЛИ верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\log_{\frac{x}{x-3}} 7 \le \log_{\frac{x}{3}} 7$.

Решение.

Неравенство имеет смысл при $x>0$ и $\frac{x}{x-3}>0$.

Отсюда следует, что $x-3>0$, то есть $x>3$. При этом условии $\frac{x}{x-3}>1$, значит, $\log_{\frac{x}{x-3}} 7>0$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_7 \frac{x}{x-3} \ge \log_7 \frac{x}{3} > 0, \text{ откуда } \frac{x}{x-3} \ge \frac{x}{3} > 1.$$

Следовательно, $x>3$ и $x-3 \le 3$, то есть $x \le 6$.

Ответ: $(3;6]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16 Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

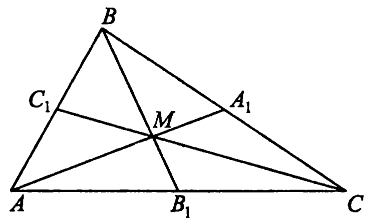
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 10$.

Решение.

а) Известно, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины. Значит,

$$BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$$



Поэтому треугольники AB_1B и CB_1B равнобедренные, причём $\angle B_1AB = \angle ABB_1$ и $\angle B_1CB = \angle CBB_1$. Сумма всех этих четырёх углов равна $180°$.

Тогда $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = 90°$. Отсюда следует, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Аналогично из прямоугольного треугольника C_1BC находим

$$CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2.$$

Сложим полученные равенства:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}\left(AB^2 + BC^2\right) = \frac{5}{4}AC^2 = 125.$$

Ответ: 125.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

17 Алексей взял кредит в банке на срок 17 месяцев. По договору Алексей должен возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. В конце каждого месяца к оставшейся сумме основного долга добавляется r % этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 27 % больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите r.

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг Алексея должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{16S}{17},\ \ldots,\ \frac{2S}{17},\ \frac{S}{17},\ 0.$$

К концу каждого месяца к основной сумме добавляется $r\%$. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$. Тогда последовательность сумм долга вместе с процентами такова:

$$kS,\ \frac{16kS}{17},\ \ldots,\ \frac{2kS}{17},\ \frac{kS}{17}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{17},\ \frac{16(k-1)S+S}{17},\ \ldots,\ \frac{2(k-1)S+S}{17},\ \frac{(k-1)S+S}{17}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S(k-1)\left(1+\frac{16}{17}+\ldots+\frac{2}{17}+\frac{1}{17}\right)=S\left(1+\frac{18(k-1)}{2}\right).$$

Общая сумма выплат оказалась на 27 % больше суммы, взятой в кредит, поэтому $9(k-1)=0{,}27$; $k=1{,}03$; $r=3$.

Ответ: 3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Получено верное выражение для суммы платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу.	2
Получено выражение для ежегодной выплаты, но уравнение не составлено, ИЛИ верный ответ найден подбором.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax^2-2(a+1)x+a+5\le 0, \\ (a+1)x^2-2(a+2)x+a+2\ge 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Решение системы может быть единственным в двух случаях.

Первый случай. Единственное решение является граничной точкой для множества решений каждого из двух неравенств. В этом случае это единственное решение должно удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} ax^2-2(a+1)x+a+5=0, \\ (a+1)x^2-2(a+2)x+a+2=0. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$x^2-2x-3=0,\ \text{откуда}\ x=-1\ \text{или}\ x=3.$$

Если $x=-1$, то $a+1+2(a+2)+a+2=0$, а значит, $a=-\frac{7}{4}$. При этом значении a система принимает вид

$$\begin{cases} -7x^2+6x+13\le 0, \\ -3x^2-2x+1\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\le -1 \text{ или } x\ge \frac{13}{7}, \\ -1\le x\le \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Единственное решение $x=-1$.

Если $x=3$, то $9(a+1)-6(a+2)+a+2=0$, откуда $a=\frac{1}{4}$. Получаем

$$\begin{cases} x^2-10x+21\le 0, \\ 5x^2-18x+9\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3\le x\le 7, \\ x\le \frac{3}{5} \text{ или } x\ge 3; \end{cases} \quad 3\le x\le 7.$$

При этом значении a система имеет бесконечно много решений.

Второй случай. Одно из неравенств имеет единственное решение, удовлетворяющее другому неравенству.

Первое неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases} (a+1)^2-a(a+5)=0, \\ a>0, \end{cases} \quad \text{откуда } a=\frac{1}{3}.$$

Первое неравенство имеет единственное решение $x=4$, которое удовлетворяет второму неравенству.

Второе неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases} (a+2)^2-(a+1)(a+2)=0, \\ a<-1, \end{cases} \quad \text{откуда } a=-2.$$

Второе неравенство имеет единственное решение $x=0$, которое не удовлетворяет первому неравенству.

Ответ: $a=-\frac{7}{4}$, $a=\frac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены оба значения a, но ответ содержит лишнее значение.	3
С помощью верного рассуждения получено одно из значений a.	2
Задача верно сведена к исследованию системы уравнений.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

19 Известно, что a, b, c и d — попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{3a+2c}{b+d}=\frac{12}{19}$?

б) Может ли дробь $\frac{3a+2c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{3a}{b}+\frac{2c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{3a+2c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>2d$?

Вариант 6

Решение.

а) Пусть $a=10,\ b=50,\ c=15$ и $d=45$. Тогда $\frac{3a+2c}{b+d}=\frac{60}{95}=\frac{12}{19}$.

б) Предположим, что $11\cdot\frac{3a+2c}{b+d}=\frac{3a}{b}+\frac{2c}{d}$. Тогда

$$11\cdot(3a+2c)bd=(b+d)(3ad+2bc),$$

$$33abd+22bcd=3abd+2bcd+3ad^2+2b^2c,$$

$$30abd-3ad^2=2b^2c-20bcd \text{ и } 3ad(10b-d)=2bc(b-10d).$$

С другой стороны, имеем $10b-d\ge 10\cdot 10-99>0>99-10\cdot 10\ge b-10d$. Следовательно, числа $ad(10b-d)$ и $bc(b-10d)$ имеют разные знаки и не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99\ge c\ge 2d+1$ и $a\ge 3b+1$. Значит, $d\le\frac{98}{2}=49$.

Используя неравенства $a\ge 3b+1,\ c\ge 2d+1,\ d\le 49$ и $b\ge 10$, получаем

$$\frac{3a+2c}{b+d}\ge\frac{9b+4d+5}{b+d}=4+\frac{5b+5}{b+d}\ge 4+\frac{5b+5}{b+49}=9-\frac{240}{b+49}\ge 9-\frac{240}{59}=\frac{291}{59}.$$

Пусть $a=31,\ b=10,\ c=99$ и $d=49$. Тогда $\frac{3a+2c}{b+d}=\frac{291}{59}$. Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\frac{3a+2c}{b+d}$ равно $\frac{291}{59}$.

Ответ: а) да, например, если $a=10,\ b=50,\ c=15$ и $d=45$; б) нет; в) $\frac{291}{59}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — в пункте *в* приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Оглавление

ОПТОВЫЕ И РОЗНИЧНЫЕ ЗАКАЗЫ В МОСКВЕ И РЕГИОНАХ – В МАГАЗИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КНИГА»
в здании Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО)

ОПТОВЫЕ И РОЗНИЧНЫЕ ЗАКАЗЫ В РЕГИОНАХ – КНИГОТОРГОВАЯ КОМПАНИЯ «АБРИС»

12+

ISBN 978-5-4439-0855-7
9 785443 908557