

Data: 20.02.2024

Punctaj acumulat: 86p. Nota: 8

Nr.	Item	Punctaj	
ALGEBRĂ			
1.	Determinați valoarea expresiei: $\log_{\sqrt{3}} 9 - 9$. Rezolvare: $\log_{\sqrt{3}} 9 - 9 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^2 - 9 = 2 \cdot 2 \log_3 3 - 9 = 4 - 9 = -5$ Răspuns: <u>-5</u>	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
2.	Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $(3+2i)z = 20-4i$. Rezolvare: $(3+2i)z = 20-4i \Leftrightarrow z = \frac{20-4i}{3+2i} \Leftrightarrow z = \frac{(20-4i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \Leftrightarrow z = \frac{60-40i-12i+8i^2}{3^2-(2i)^2} \Leftrightarrow z = \frac{60-52i-8}{9+4} \Leftrightarrow z = \frac{52-52i}{13} \Leftrightarrow z = 4-4i$ Răspuns: <u>$z = 4-4i$</u>	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
3.	Fie $D(x) = \begin{vmatrix} 3^{2x+8} & 27 \\ 3 & 9^{x+6} \end{vmatrix}$. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $D(x) = 0$. Rezolvare: $D(x) = \begin{vmatrix} 3^{2x+8} & 27 \\ 3 & 9^{x+6} \end{vmatrix} = 3^{2x+8} \cdot 9^{x+6} - 27 \cdot 3 = 3^{2x+8} \cdot 3^{2x+12} - 3 \cdot 3 = 3^{4x+20} - 3^1 = 3^{4x+20-1} = 3^{4x+19}$ $D(x) = 0 \Rightarrow 3^{4x+19} - 3 = 0 \Leftrightarrow 3^{4x+19} = 3 \Leftrightarrow 4x+19 = 1 \Leftrightarrow 4x = -18 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{2}$ Răspuns: <u>$S = \{-\frac{9}{2}\}$</u>	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

4. Polinomul $P(X) = -X^3 - 3X^2 + (a+3)X + (2a+1)$ este divizibil prin binomul $X+1$. Determinați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X) = X-5$.

Rezolvare:

$$P(-1) = 0 \Rightarrow 1 - 3 - a - 3 + 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow P(X) = -X^3 - 3X^2 + 7X + 9$$

$$r = P(5) = -125 - 75 + 35 + 9 = -156$$

$$\begin{array}{r|l} -X^3 - 3X^2 + 7X + 9 & X-5 \\ +X^3 - 5X^2 & -X^2 - 8X - 33 \\ \hline -8X^2 + 7X + 9 & \\ +8X^2 - 40X & \\ \hline -33X + 9 & \\ +33X - 165 & \\ \hline -156 & \end{array}$$

Răspuns: -156

5. Determinați soluțiile reale ale ecuației $\sin(2x) = 1 + \cos(2x)$, care aparțin intervalului $[0; \pi]$.

Rezolvare:

$$\sin 2x = 1 + \cos 2x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\begin{cases} 2 \cos x = 0 \\ \sin x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Verificăm soluțiile în intervalul $[0; \pi]$

$$n=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [0; \pi] \quad k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0; \pi]$$

$$n=1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \notin [0; \pi]$$

Răspuns:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

GEOMETRIE

6. Latura triunghiului echilateral ABC este de 12 cm. Determinați lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC .

Rezolvare:

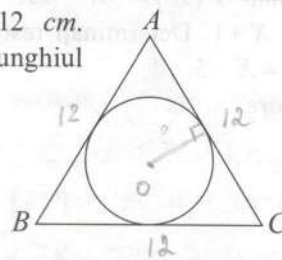
1) По формуле Герона:

$$p = \frac{3AB}{2} = \frac{3 \cdot 12}{2} = 18 \text{ (cm)}$$

$$A_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \sqrt{18 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = 6\sqrt{9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = 6 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

II) Так ΔABC равносторонний $A = \frac{AB\sqrt{3}}{4} = \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$

2) $r = \frac{A}{p} = \frac{36\sqrt{3}}{18} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$



Răspuns: $2\sqrt{3}$ cm

7. Baza unei prisme drepte este un romb cu un unghi de 120° și diagonala mică de 10 cm. Aflați lungimea diagonalei mari a prisme, dacă volumul ei este de $300\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

Rezolvare:

1) $ABCD$ - ромб, $m(\angle B) = 120^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\angle C) = 60^\circ$

ΔBCD , $m(\angle C) = 60^\circ$, $BC = CD \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\angle B) = m(\angle D) = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta BCD$ - равносторонний $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC = CD = AD = AB = 10 \text{ cm}$

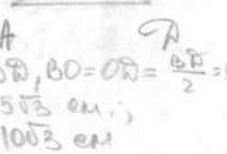
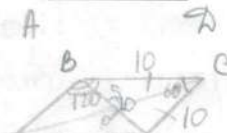
2) $A_{осн} = 2A_{\Delta BCD} = 2 \cdot \frac{BC^2 \sqrt{3}}{4} = 2 \cdot \frac{100\sqrt{3}}{4} = 50\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$

4) $AC \perp BD$, $BO = OD = \frac{BD}{2} = 5 \text{ cm}$
 $OC = 5\sqrt{3} \text{ cm}$
 $AC = 10\sqrt{3} \text{ cm}$

3) $V = A_{осн} \cdot CC_1 \Leftrightarrow 300\sqrt{3} = 50\sqrt{3} \cdot CC_1 \Rightarrow CC_1 = 6 \text{ cm}$

5) ΔACC_1 , $m(\angle C) = 90^\circ$, по т. Пифагора $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{300 + 36} = \sqrt{336} = 4\sqrt{21} \text{ (cm)}$

Răspuns: $4\sqrt{21}$ cm



8. În triunghi

AD determi
și $DC = 2$ c

Rezolvare:

1) По формуле Герона:

$\frac{BA}{AC} = \frac{B}{A}$

2) $BC = 2$

3) По формуле Герона:

$BA = 2$

$\Leftrightarrow g =$

$\Leftrightarrow 3k^2 =$

$AB = \sqrt{3}$

4) По формуле Герона:

$\frac{3}{2} = 12 +$

$\Leftrightarrow \cos(4$

Răspuns: 3

9. Studiați mă

Rezolvare:

$n = 1 \Rightarrow$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n} \right)$

$3 < (a_n)$

Răspuns: -

10. Fie funcția

a) Determinați

Rezolvare:

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$

Răspuns: -

8. În triunghiul ABC , $m(\angle A) = 60^\circ$, iar bisectoarea AD determină pe latura BC segmentele $BD = 1 \text{ cm}$ și $DC = 2 \text{ cm}$. Determinați măsura unghiului BCA .

Rezolvare:

1) *по теореме биссектрисы:*

$$\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BA}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow BA = k, AC = 2k$$

2) $BC = BD + DC = 1 + 2 = 3 \text{ (cm)}$

3) *по теореме косинусов:*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$3^2 = k^2 + 4k^2 - 2 \cdot k \cdot 2k \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow 9 = k^2 + 4k^2 - 2k^2 \Leftrightarrow 5k^2 - 2k^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3k^2 = 9 \Leftrightarrow k^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\sqrt{3} < 0 \\ k = \sqrt{3} \end{cases}$$

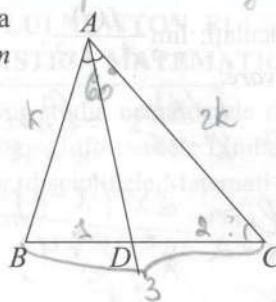
$$AB = \sqrt{3} \text{ cm}, AC = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

4) *по теореме косинусов:* $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(\angle C)$

$$\frac{3}{3} = 12 + 9 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \cos(\angle C) \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \cos(\angle C) = 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\angle C) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m(\angle C) = 30^\circ$$

Răspuns: 30°



L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiați mărimea șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{3n+5}{n+1}$.

Rezolvare:

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{3 \cdot 1 + 5}{1 + 1} = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+5}{n+1} \right) = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3$$

$$3 < (a_n)_{n \geq 1} \leq 4$$

Răspuns: *по убыванию сходятся к числу 3 и сверху 4*

L
0
1
2
3
4
5
5

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^6 - 4x^5$.

a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .

Rezolvare:

$$f'(x) = (2x^6 - 4x^5)' = 12x^5 - 20x^4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^5 - 20x^4 = 0 \Leftrightarrow 4x^4(3x - 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 = 0 \\ 3x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$$



Răspuns: $f(x)$ crește pe $[\frac{5}{3}; +\infty)$, $f(x)$ scade pe $(-\infty; \frac{5}{3}]$.

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

b) Calculați: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^4 - 4x^2}$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^4 - 4x^2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^6 - 4x^5}{x^4 - 4x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^5(x-2)}{x^2(x^2-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3}{x+2} = \frac{2 \cdot 8}{2+2} = \frac{16}{4} = 4 \end{aligned}$$

Răspuns: 4

c) Calculați: $\int_{-1}^1 |f(x)| dx$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |2x^6 - 4x^5| dx = \\ &= \int_{-1}^0 (2x^6 - 4x^5) dx - \int_0^1 (2x^6 - 4x^5) dx = \\ &= \left[\frac{2}{7} x^7 - \frac{2}{3} x^6 \right]_{-1}^0 - \left[\frac{2}{7} x^7 - \frac{2}{3} x^6 \right]_0^1 = \\ &= \frac{2}{7}(0+1) - \frac{2}{3}(0-1) - \left(\frac{2}{7}(1-0) + \frac{2}{3}(1-0) \right) = \\ &= \frac{2}{7} + \frac{2}{3} - \frac{2}{7} - \frac{2}{3} = 0 \end{aligned}$$

Răspuns: $I = 1 \frac{1}{3}$

ELEMENTE DE TEORIE

II. Elevii înscriși la discipline școlare: engleză, Cară, că, Fizică și I.

Rezolvare:

$$A = \{ \text{...} \}$$

$$n = 6!$$

$$m = \frac{1}{n}$$

$$p(A) = \frac{1}{n}$$

Răspuns: p

II. Determinați

mului $\sqrt[n]{x^2}$

Rezolvare:

$$T_{k+1} = C_k^k$$

$$T_{k+1} = \text{Me}$$

$$\Rightarrow 36$$

$$T_{k+1} = C$$

$$= \frac{63}{8}$$

Răspuns:

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Elevii înscriși la un Club de materii aprofundate vor studia următoarele 6 discipline școlare: Matematică, Fizică, Chimie, Biologie, Informatică, Limba engleză. Care este probabilitatea ca în orarul lecțiilor, disciplinele Matematică, Fizică și Informatică să nu fie toate trei consecutive?

Rezolvare:

6 учеников
 $A = \{M, F, I, \text{...}\}$
 $n = 6! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$
 $m = 6 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4$
 $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Răspuns: $p(A) = \frac{4}{5}$

12. Determinați termenul care nu depinde de x din dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^9$, $x > 0$.

Rezolvare:

$T_{k+1} = C_9^k \left(x^{\frac{2}{5}}\right)^{9-k} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^k = C_9^k x^{\frac{18-2k}{5} - \frac{k}{2}}$
 $T_{k+1} \text{ не зависит от } x \Rightarrow \frac{18-2k}{5} - \frac{k}{2} = 0 \Leftrightarrow 36 - 4k - 5k = 0 \Leftrightarrow 9k = 36 \Leftrightarrow k = 4$
 $T_{4+1} = C_9^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{9!}{4! \cdot 5!} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{16} = \frac{63}{8} = 7 \frac{7}{8}$

Răspuns: $T_5 = 7 \frac{7}{8}$

BAREM DE EVALUARE

- În cazul în care în item nu este indicată metoda de rezolvare, oricare altă metodă de rezolvare se acceptă și se apreciază corespunzător.
- Nu se cer calcule efectuate și argumentări care nu sunt specificate în condiție.
- Punctajul acordat oricărui item este un număr întreg.
- Nu se introduc puncte suplimentare la barem.

Item	Punctaj maxim	Răspuns corect	Etapele rezolvării	Punctaj acordat
1.	5 p.	-5	$\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$	3 p.
			Determinarea valorii expresiei, egală cu -5	2 p.
2.	5 p.	$4 - 4i$	Obținerea $z = \frac{20 - 4i}{3 + 2i}$	1 p.
			Obținerea $z = 4 - 4i$ (câte 2 p. pentru partea reală și pentru partea imaginară)	4 p.
3.	8 p.	$S = \{-4\}$	$3^{2x+8} \cdot 3^{2x+12} - 81 = 0$	2 p.
			$3^{4x+20} = 3^4$	2 p.
			Obținerea ecuației $4x + 20 = 4$	2 p.
			Rezolvarea ecuației $4x + 20 = 4$ și scrierea răspunsului corect	2 p.
4.	8 p.	-156	Scrierea relației $P(-1) = 0$	1 p.
			Obținerea și rezolvarea ecuației $P(-1) = 0 \Leftrightarrow a = 4$	3 p.
			$P(X) = -X^3 - 3X^2 + 7X + 9$	1 p.
			Calcularea valorii $P(5) = -156$	3 p.
5.	8 p.	$S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\}$	Obținerea $2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$	2 p.
			Obținerea $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x - \cos x = 0 \end{cases}$	2 p.
			Obținerea $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$	2 p.
			Selectarea, în condiția $x \in [0; \pi]$, a soluțiilor $x = \frac{\pi}{2}$ și $x = \frac{\pi}{4}$	2 p.

6.	5 p.	$2\sqrt{3} \text{ cm}$	Construirea și calcularea unei înălțimi a triunghiului egală cu $6\sqrt{3} \text{ cm}$	3 p.
			Obținerea că $r = 2\sqrt{3} \text{ cm}$	2 p.
7.	8 p.	$4\sqrt{21} \text{ cm}$	Construirea diagonalei mari a prisme	1 p.
			Obținerea că latura rombului este egală cu 10 cm	2 p.
			Determinarea diagonalei mari a rombului egală cu $10\sqrt{3} \text{ cm}$	2 p.
			Obținerea că înălțimea prisme este 6 cm	2 p.
			Obținerea că diagonala mare a prisme este $4\sqrt{21} \text{ cm}$	1 p.
8.	8 p.	30°	Aplicarea teoremei bisectoarei în triunghiul ABC	2 p.
			Aplicarea teoremei cosinusurilor în triunghiul ABC și obținerea $AB = \sqrt{3} \text{ cm}$, $AC = 2\sqrt{3} \text{ cm}$	3 p.
			Aplicarea teoremei sinusurilor în triunghiul ABC	2 p.
			Determinarea măsurii unghiului C	1 p.
9.	5 p.	Șirul este mărginit inferior și superior	Obținerea $a_n \leq 4, \forall n \geq 1$	2 p.
			Obținerea $a_n > 3, \forall n \geq 1$	2 p.
			Scrierea răspunsului corect	1 p.
10. a)	8 p.	f este monoton descrescătoare pe $(-\infty; \frac{5}{3}]$; f este monoton crescătoare pe $[\frac{5}{3}; +\infty)$	Aflarea derivatei funcției f	2 p.
			Rezolvarea ecuației $f'(x) = 0$	2 p.
			Curba semnelor derivatei	2 p.
			Scrierea răspunsului corect	2 p.

10. b)	8 p.		$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^6 - 4x^5}{x^4 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^5(x-2)}{x^2(x-2)(x+2)}$ (2 puncte pentru $2x^5(x-2)$; 2 puncte pentru $x^2(x-2)(x+2)$)	4p.
		4	Obținerea $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3}{x+2}$	2 p.
			Obținerea $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3}{x+2} = 4$	2 p.
10. c)	8 p.		Zerourile și semnul funcției f	2 p.
		$\frac{4}{3}$	$\int_{-1}^1 2x^6 - 4x^5 dx = \int_{-1}^0 (2x^6 - 4x^5) dx + \int_0^1 (4x^5 - 2x^6) dx$	2 p.
			Determinarea unei primitive a funcției f	2 p.
			Aplicarea formulei Newton-Leibniz și obținerea valorii integrale	2 p.
11.	8 p.		$P(A) = 1 - P(\bar{A})$	1 p.
		$\frac{4}{5}$	Determinarea $n = 6!$	2 p.
			Determinarea $m = 3!4!$	2 p.
			Determinarea $P(\bar{A}) = \frac{1}{5}$	2 p.
			Calcularea $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{4}{5}$	1 p.
12.	8 p.		Obținerea $T_{k+1} = C_9^k$	2 p.
		$T_5 = \frac{63}{8}$	Obținerea $T_{k+1} = C_9^k \cdot x^{\frac{36-9k}{10}}$	2 p.
			Obținerea ecuației $\frac{36-9k}{10} = 0$	1 p.
			Obținerea $k = 4$	1 p.
			Determinarea $T_5 = \frac{63}{8}$	2 p.
	100 p.			

Testul

Determinați valoarea

Rezolvare: -3

$$-\frac{1}{2} - \left(\frac{4}{\sqrt{6}}\right) =$$

Răspuns: -1

2. Calculați determina

Rezolvare:

$$d(t) = \frac{2+5i}{i^5} = \frac{2+5i}{i} = 2i - (5i)^2 + 3 = 2i - 25 + 3 = 2i - 22$$

Răspuns:

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ in

Rezolvare:

$$\frac{x}{x+2} \leq 2x \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} - 2x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x - 2x(x+2)}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x - 2x^2 - 4x}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 - 3x}{x+2} \leq 0$$

$$\frac{-x(2x+3)}{x+2} \leq 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Răspuns: } -\frac{3}{2}$$

4p.

Testul

2

Data: 02.03.2024 Punctaj acumulat: 76 Nota:

2 p.

Nr.	Item	Punctaj	
ALGEBRĂ			
1.	Determinați valoarea expresiei $-\frac{7}{8}-16^{-\frac{3}{4}}$. Rezolvare: $-\frac{7}{8}-\left(\sqrt[4]{16}\right)^{-3}=-\frac{7}{8}-2^{-3}=-\frac{7}{8}-\frac{1}{8}=-\frac{8}{8}=-1$ Răspuns: <u>-1</u>	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
2.	Calculați determinantul matricei $A=\begin{pmatrix}2+5i & -3 \\ i^5 & 2-5i\end{pmatrix}$, unde $i^2=-1$. Rezolvare: $\det A=\begin{vmatrix}2+5i & -3 \\ i^5 & 2-5i\end{vmatrix}=(2+5i)(2-5i)+3i^5=$ $=2^2-(5i)^2+3i=4+25+3i=29+3i$ $i^5=(i^2)^2i=(-1)^2i=i$ Răspuns: <u>$\det A=29+3i$</u>	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
3.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $\frac{x}{x+2}\leq 2x$. Rezolvare: $\frac{x}{x+2}\leq 2x \Leftrightarrow \frac{x}{x+2}-2x\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2x^2-4x}{x+2}\leq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{-2x^2-3x}{x+2}\leq 0$ Măști zero numerator $-2x^2-3x=0$ $-x(2x+3)=0$ $x=0$ $x=-\frac{3}{2}$ Măști zero denominator $x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2$ Răspuns: <u>$S=(-2;-\frac{3}{2}]\cup[0;+\infty)$</u>	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

$$P(1) = 0 \text{ și } P'(1) = 0$$

4. Descompuneți în factori ireductibili polinomul $P(X) = X^4 - 3X^3 - aX^2 + (3a+2)X - 6$, știind că $X = 1$ este o rădăcină dublă a polinomului $P(X)$.
Rezolvare:

$$P(1) = 1 - 3 - a + 3a + 2 - 6 = +2a - 6$$

$$P(1) = 0 \Rightarrow +2a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = +3$$

$$P(X) = X^4 - 3X^3 - 3X^2 + 11X - 6$$

$$\begin{array}{r} X^4 - 3X^3 - 3X^2 + 11X - 6 \\ -X^4 + 2X^3 - X^2 \\ \hline -X^3 - 4X^2 + 11X - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -X^3 - 4X^2 + 11X - 6 \\ +X^3 - 7X^2 + X \\ \hline -6X^2 + 12X - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6X^2 + 12X - 6 \\ +6X^2 - 12X + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$P(X) = (X-1)^2(X^2 - X - 6) = (X-1)^2(X-3)(X+2)$$

Răspuns: $P(X) = (X-1)^2(X-3)(X+2)$

5. Determinați valorile reale ale lui $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, pentru care $\frac{\sin x}{\sin x - \cos x \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$.
Rezolvare:

$$2 \sin x = \sin x + \cos x \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$$

$$2 \sin x - \cos x \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = 0$$

$$\sin x + \cos x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$$

$$2(\sin x - \cos x \operatorname{tg} \frac{x}{2}) = 0$$

$$\sin x + \cos x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \quad | : \cos x$$

$$\sin x - \cos x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \neq 0 \quad | : \cos x$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{1}{2}(\cos x + \cos \frac{x}{2})}$$

$$\sin \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \dots x = \frac{2}{3} \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Răspuns: $x = \frac{4\pi}{3}$

$$2 \sin x = \sin x - \cos x \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \Rightarrow \sin x \cos \frac{x}{2} + \cos x \sin \frac{x}{2} = 0$$

Punctele A și C aparțin
încât $m(\angle AOC) = 60^\circ$
lui mic AC, dacă se ști
acest cerc este egală cu

Rezolvare:

$$A = \pi r^2 = 144\pi$$

$$L = 2\pi R = 24\pi$$

$$m(\angle AOC) = 60^\circ$$

$$360^\circ - 24\pi \text{ cm}$$

$$60^\circ - x \text{ cm}$$

$$x = \frac{60^\circ \cdot 24\pi}{360^\circ}$$

$$6$$

Răspuns: $4\pi \text{ cm}$

Determinați aria totală
muchia laterală de 10

Rezolvare:

$$\Delta SOA, m(\angle SOA) = 60^\circ$$

$$A_{\text{ocul}} = 150$$

$$A_{\text{ocul}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 50$$

$$= 2500 = 2500$$

$$A_{\text{ocul}} = 150$$

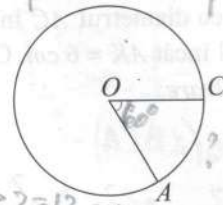
$$= 50\sqrt{3}$$

Răspuns: $50\sqrt{3}$

GEOMETRIE

центр и радиус

6. Punctele A și C aparțin unui cerc de centru O , astfel încât $m(\angle AOC) = 60^\circ$. Determinați lungimea arcului mic AC , dacă se știe că aria discului mărginit de acest cerc este egală cu $144\pi \text{ cm}^2$.



Rezolvare:

$$A = \pi r^2 = 144\pi \Rightarrow r^2 = 144 \Rightarrow \begin{cases} r = 12 \\ r = -12 < 0 \end{cases} \Rightarrow r = 12 \text{ cm}$$

$$L = 2\pi r = 24\pi \text{ (cm)}$$

$$m(\widehat{AC}) = m(\angle AOC) = 60^\circ = 60^\circ$$

$$360^\circ - 24\pi \text{ cm}$$

$$60^\circ - x \text{ cm}$$

$$x = \frac{60^\circ \cdot 24\pi}{360^\circ} = 4\pi \text{ (cm)}$$

Răspuns: $4\pi \text{ cm}$

7. Determinați aria totală a unei piramide patrulater regulate cu muchia laterală de 10 cm și înălțimea de 5 cm .

Rezolvare:

$$\triangle SOA, m(\angle SOA) = 90^\circ$$

$$A_{\text{ocul}} = 150 \text{ (cm}^2\text{)}$$

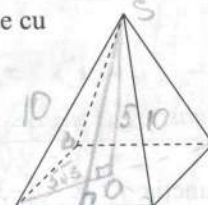
$$A_{\text{ocul}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{6} \cdot \frac{5\sqrt{10}}{8} =$$

$$= 25\sqrt{60} = 25 \cdot 2\sqrt{15} = 50\sqrt{15} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$A_{\text{total}} = 150 + 50\sqrt{15} =$$

$$= 50(\sqrt{15} + 3)$$

Răspuns: $50(\sqrt{15} + 3) \text{ cm}^2$



$$A = 5\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$10\sqrt{3}$$

$$x = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{6}}{2}$$

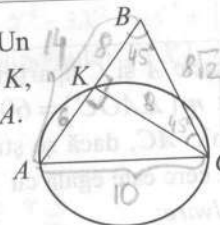
$$= 5\sqrt{6}$$

$$5\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{6} = 25 \cdot 6 = 150$$

L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

8. Fie triunghiul ABC cu $AC = 10\text{ cm}$ și $m(\angle ABC) = 45^\circ$. Un cerc cu diametrul AC intersectează latura AB în punctul K , astfel încât $AK = 6\text{ cm}$. Calculați cosinusul unghiului BCA .



Rezolvare:

$$\cos(\angle BCA) = ?$$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos(\angle BCA)$$

$$196 = 128 + 100 - 2 \cdot BC \cdot 10 \cdot \cos(\angle BCA)$$

$$+ 160 \cos(\angle BCA) = + 32$$

$$\cos(\angle BCA) = \frac{32}{160} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5}$$

Răspuns:

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiați monotonia șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{n+3}{n+2}$.

Rezolvare:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+4}{n+3} - \frac{n+3}{n+2} = \frac{(n+4)(n+2) - (n+3)^2}{(n+3)(n+2)} = \frac{n^2 + 6n + 8 - n^2 - 6n - 9}{(n+3)(n+2)} = \frac{-1}{(n+3)(n+2)}$$

$$a_{n+1} - a_n < 0 \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1} \text{ este descrescătoare}$$

Răspuns: $(a_n)_{n \geq 1}$ este descrescătoare

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^2}{x+3}$.

a) Determinați extremele locale ale funcției f . - coordonate

Rezolvare:

$$f'(x) = \frac{(3x^2)'(x+3) - 3x^2(1)}{(x+3)^2}$$

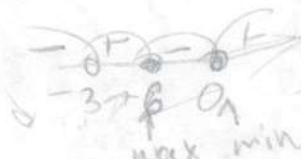
$$= \frac{6x(x+3) - 3x^2}{(x+3)^2} = \frac{6x^2 + 18x - 3x^2}{(x+3)^2} = \frac{3x^2 + 18x}{(x+3)^2}$$

$$3x^2 + 18x = 0$$

$$3x(x+6) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = -6$$



Răspuns: $A(-6; -36)$ - p. max; $A(0; 0)$ - p. min

определить локальные экстремумы $\Rightarrow$ координаты $(x; y)$

b) Determinați asimptotele

Rezolvare:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x^2} \right]$$

Răspuns: $y = 0$

c) Calculați: $\int_4^{64} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Rezolvare:

$$I = \int_4^{64} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_4^{64} = 2\sqrt{64} - 2\sqrt{4} = 16 - 4 = 12$$

Răspuns: $I = 12$

b) Determinați asimptota oblică la $+\infty$ a graficului funcției f .

Rezolvare:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 3x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2}{x+3} - 3x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 - 3x^2 - 9x}{x+3} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-9x}{x+3} \right] = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-9x}{x} \right] = -9$$

Răspuns: $y = 3x - 9$ *reprezentare grafică*

c) Calculați: $\int_4^{64} \frac{f(x)(x+3)}{x(1+\sqrt{x})} dx$.

Rezolvare:

$$I = \int_4^{64} \frac{3x^2(x+3)}{(x+3)(1+\sqrt{x})x} dx = \int_4^{64} \frac{3x}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_4^{64} \frac{3x}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} &= t \quad (t-1) \\ \sqrt{x} &= \frac{t-1}{2} \\ 1+\sqrt{x} &= t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx &= dt \\ dx &= 2(t-1)dt \\ x &= (t-1)^2 \\ x=4 &\Rightarrow t=3 \\ x=64 &\Rightarrow t=9 \end{aligned}$$

$$= 3 \int_3^9 \frac{(t^2-2t+1) \cdot 2(t-1)}{t} dt = 6 \int_3^9 \frac{t^3-2t^2+t-t^2+2t-1}{t} dt =$$

$$= 6 \int_3^9 \frac{t^3-3t^2+3t-1}{t} dt = 6 \int_3^9 \left(t^2-3t+3-\frac{1}{t} \right) dt =$$

$$= 2t^3 \Big|_3^9 - 9t^2 \Big|_3^9 + 18t \Big|_3^9 - 6 \ln t \Big|_3^9 = 1404 - 9 \cdot 72 + 18 \cdot 6 - 6 \ln 9 - \ln 3 =$$

$$= 864 - 6 \ln 3$$

Răspuns: $I = 864 - 6 \ln 3$

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE
DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. O uzină are în posesie 3 depozite pentru păstrarea utilajului produs. Probabilitatea că un utilaj din primul depozit este cu defect este egală cu $\frac{1}{10}$, probabilitatea că un utilaj din al doilea depozit este cu defect este de $\frac{1}{15}$ și probabilitatea că un utilaj din al treilea depozit este cu defect este de $\frac{3}{40}$. Se scoate din evidență câte un utilaj din fiecare depozit. Calculați probabilitatea că două dintre aceste utilaje vor fi cu defect.

Rezolvare:

$$A_i = \{N^o i \text{ e defect}\}; \bar{A}_i = \{N^o i \text{ nu e defect}\}$$

$$p(A_1) = \frac{1}{10}; p(\bar{A}_1) = 1 - p(A_1) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

$$p(A_2) = \frac{1}{15}; p(\bar{A}_2) = 1 - p(A_2) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$$

$$p(A_3) = \frac{3}{40}; p(\bar{A}_3) = 1 - p(A_3) = 1 - \frac{3}{40} = \frac{37}{40}$$

$$B = \{ \text{gla uz are 2 defecte} \}$$

$$p(B) = p(A_1)p(\bar{A}_2)p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1)p(A_2)p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2)p(A_3)$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{37}{40} + \frac{1}{10} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{37}{40} + \frac{1}{10} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{37}{40} = \frac{9 \cdot 14 \cdot 37}{10 \cdot 15 \cdot 40} + \frac{1 \cdot 14 \cdot 37}{10 \cdot 15 \cdot 40} + \frac{1 \cdot 14 \cdot 37}{10 \cdot 15 \cdot 40}$$

$$= \frac{11826}{6000} + \frac{1182}{6000} + \frac{1182}{6000} = \frac{14190}{6000} = \frac{2365}{1000}$$

Răspuns: $\frac{2365}{1000}$

12. Determinați numărul de termeni raționali în dezvoltarea la putere a binomului $(2\sqrt{5} + 4\sqrt{2})^{50}$.

Rezolvare:

$$T_{k+1} = C_{50}^k \cdot 2^{50-k} \cdot 5^{\frac{50-k}{2}} \cdot 4^k \cdot 2^{\frac{k}{3}}$$

$$k \in [0, 50], k \in \mathbb{N}$$

$$50-k : 2 \text{ și } k : 3 \Rightarrow k \in \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$$

Răspuns: 9 raționalizabile

Testul

Determinați valoarea ex

Rezolvare:

$$= 5^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{5^{\frac{2}{3}}} = 5^{\frac{2}{3}} + 5^{-\frac{2}{3}}$$

Răspuns: 5

Determinați modulul n

Rezolvare:

$$z = -49 + 42i + 9i^2$$

$$a = \operatorname{Re} z = -40$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{1681} = 41$$

$$|z| = 41$$

Răspuns: 41

$$\text{Fie } D(x) = \begin{cases} 2 & \log_3(x) \\ 1 & \log_3(x) \end{cases}$$

Rezolvare:

$$D(x) = 2 \log_3(5-x)$$

$$D(x) = 0 \Rightarrow 2 \log_3(5-x) = 0$$

$$\log_3(5-x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25 - 10x + x^2 = 1$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$x_1 = 4, x_2 = 6$$

$$S = 4 + 6 = 10$$

Răspuns: 10

Data: _____ Punctaj acumulat: _____ Nota: _____

Nr.	Item	Punctaj	
ALGEBRĂ			
1.	Determinați valoarea expresiei $\frac{\sqrt[5]{625}}{25^{-\frac{1}{10}}}$. Rezolvare: $= 5^{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}} = 5^1 = 5$ Răspuns: 5	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
2.	Determinați modulul numărului complex $z = (7+3i)^2 + 33i^7$, unde $i^2 = -1$. Rezolvare: $i^7 = (i^2)^3 i = -i$ $z = 49 + 42i + 9i^2 - 33i = 49 - 9 + 9i - 33i = 40 - 24i$ $a = \operatorname{Re} z = 40$; $b = \operatorname{Im} z = -24$ $ z = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{40^2 + (-24)^2} = \sqrt{1600 + 576} = \sqrt{2176} = 4\sqrt{136}$ $= \sqrt{16 \cdot 136} = 4\sqrt{136}$ Răspuns: $ z = 4\sqrt{136}$	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
3.	Fie $D(x) = \begin{vmatrix} 2 & \log_3(x+1) \\ 1 & \log_3(5-x) \end{vmatrix}$. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $D(x) = 0$. Rezolvare: $D(x) = 2\log_3(5-x) - \log_3(x+1) = 0$ $2\log_3(5-x) = \log_3(x+1)$ $\log_3(5-x)^2 = \log_3(x+1) \Rightarrow (5-x)^2 = x+1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 25 - 10x + x^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \Rightarrow$ $x = 3$ sau $x = 8$ Răspuns: $S = \{3, 8\}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

4. Descompuneți în factori ireductibili polinomul $P(X) = X^4 - 8X^3 + 15X^2 + 4X - 20$, știind că $X = 2$ este o rădăcină dublă a polinomului $P(X)$.

Rezolvare:

$$\begin{array}{r} X^4 - 8X^3 + 15X^2 + 4X - 20 \\ - (X^4 - 4X^3 + 4X^2) \\ \hline -4X^3 + 11X^2 + 4X - 20 \\ + (4X^3 - 16X^2 + 16X) \\ \hline -5X^2 + 20X - 20 \\ + (5X^2 - 20X + 20) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$P(X) = (X-2)^2(X^2-4X-5) = (X-2)^2(X+1)(X-5)$$

$$X^2 - 4X - 5 = 0$$

$$\begin{cases} X = 5 \\ X = -1 \end{cases}$$

$$P(X) = (X-2)^2(X+1)(X-5)$$

Răspuns:

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{x^2 - 6x + 9}{25^x - 6 \cdot 5^x + 5} \leq 0$.

Rezolvare:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 \geq 0 \\ 25^x - 6 \cdot 5^x + 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x \in (0; 1) \end{cases}$$

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0$$

$$(x-3)^2 \geq 0$$

$$x \in \mathbb{R}$$



$$25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

$$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

$$5^x = t, t > 0$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$\begin{cases} t = 5 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 5 \\ 5^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Răspuns:

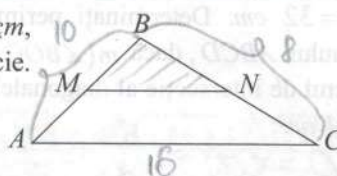
$$S = (0; 1) \cup \{3\}$$

GEOMETRIE

6. În triunghiul ABC cu laturile $AB = 10 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$, $AC = 16 \text{ cm}$, MN este linie mijlocie. Determinați perimetrul triunghiului MBN .

Rezolvare:

$$\begin{aligned} 1) MN &= \frac{AC}{2} = 8 \text{ (cm)} \\ 2) MB &= \frac{AB}{2} = 5 \text{ (cm)} \\ 3) BN &= \frac{BC}{2} = 4 \text{ (cm)} \\ 4) P &= MN + MB + BN = 8 + 5 + 4 = 17 \text{ (cm)} \end{aligned}$$



Răspuns: 17 cm

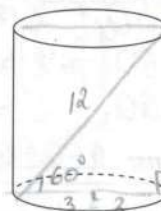
7. Determinați aria totală a unui cilindru circular drept, dacă diagonala secțiunii axiale a acestui cilindru are lungimea de 12 cm și formează cu planul bazei un unghi de 60° .

Rezolvare:

$$A_{\text{ocul}} = 9\pi \text{ cm}^2 \text{ (2000000)}$$

$$A_{\text{dook}} = 2\pi r h = 36\sqrt{3}\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$A_{\text{total}} = 18\pi + 36\sqrt{3}\pi = 18\pi(1 + 2\sqrt{3}) \text{ (cm}^2\text{)}$$

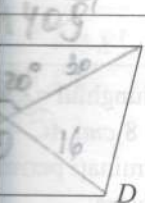


Răspuns: $18\pi(1 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

8.	Fie paralelogramul $ABCD$, în care $AB = 26$ cm, $BD = 32$ cm. Determinați perimetrul paralelogramului $ABCD$, dacă $m(\angle BOC) = 120^\circ$, O este punctul de intersecție al diagonalelor. Rezolvare: 1) $BO = OD = \frac{BD}{2} = \frac{32}{2} = 16$ (cm) 2) $m(\angle BOA) = 180^\circ - m(\angle BOC) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ 3) $\triangle BOA$, no T. cos: $AB^2 = BO^2 + OA^2 - 2BO \cdot OA \cdot \cos 60^\circ$; $676 = 156 + OA^2 - 2 \cdot 16 \cdot OA \cdot \frac{1}{2}$; $OA^2 - 16OA - 420 = 0$; $OA = 30$ cm $\Rightarrow CO = OA = 30$ cm 4) $\triangle BOC$, T. cos: $BC = 2\sqrt{409}$ cm; $AD = 2\sqrt{409}$ cm Răspuns: $4(13 + \sqrt{409})$ cm	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
----	---	--

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9.	Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_{n+1} = 5a_n + 2$, $a_1 = -1$. Determinați suma primilor patru termeni ai șirului. Rezolvare: $a_2 = 5a_1 + 2 = 5(-1) + 2 = -5 + 2 = -3$ $a_3 = 5a_2 + 2 = 5(-3) + 2 = -15 + 2 = -13$ $a_4 = 5a_3 + 2 = 5(-13) + 2 = -65 + 2 = -63$ Răspuns: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -1 - 3 - 13 - 63 = -80$	L 0 1 2 3 4 5
10.	Fie funcția $f: (0; +\infty) \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\ln x}$. a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = e^2$. Rezolvare: $f'(x) = \frac{x' \ln x - x(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ $f'(e^2) = \frac{\ln e^2 - 1}{\ln^2 e^2} = \frac{2 - 1}{4} = \frac{1}{4}$ $f(e^2) = \frac{e^2}{\ln e^2} = \frac{e^2}{2}$ $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2}e^2$ $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}e^2$ Răspuns: $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}e^2$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

	C	L	L
	0	0	0
	1	1	1
	2	2	2
	3	3	3
	4	4	4
	5	5	5
	6	6	6
	7	7	7
	8	8	8

suma primilor	L	L
	0	0
	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5

abscisă $x_0 = e^2$	L	L
	0	0
	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
	6	6
	7	7
	8	8

b) Comparați: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ și $f(e)$.

Rezolvare:

$$f(e) = \frac{e}{\ln e} = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2-4)(\sqrt{x+7}+3)}{(x+7-9)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{\sqrt{9}+3}{\sqrt{4}+2} = \frac{3+3}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} < e$$

Răspuns: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} < f(e)$

c) Fie funcția $g: (0; +\infty) \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{\sqrt{3}}{f(x)(3\ln^3 x + \ln x)}$. Determinați primitiva G a funcției g , al cărei grafic trece prin punctul $A\left(e^{\frac{1}{3}}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Rezolvare:

$$g(x) = \frac{\sqrt{3}}{f(x)(3\ln^3 x + \ln x)} = \frac{\sqrt{3}}{\ln x (3\ln^2 x + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{x(3\ln^2 x + 1)}$$

$$G(x) = \int g(x) dx = \int \frac{\sqrt{3}}{x(3\ln^2 x + 1)} dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right] = \sqrt{3} \int \frac{dt}{(\sqrt{3}t)^2 + 1} = \arctg \sqrt{3} \ln x + C$$

$$G\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} + C = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{6} + C = \frac{\pi}{3} \Rightarrow C = \frac{\pi}{6}$$

Răspuns: $G(x) = \arctg(\sqrt{3} \ln x) + \frac{\pi}{6}$

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se consideră aleator un număr de patru cifre. Determinați probabilitatea că cifrele nu se repetă și că doar prima cifră și ultima cifră ale acestui număr sunt pare.

Rezolvare:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
 $n = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$
 $A = \{ \text{cifrele nu se repetă, } 1^{st} \text{ și } 4^{th} \text{ - zeroe} \}$
 $m = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 320$
 $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{320}{9000} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 4}{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{8}{225}$

Răspuns: $\frac{8}{225}$

12. Determinați termenul care-l conține pe a^6 din dezvoltarea la putere a binomului $\left(a^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{a^3}}\right)^{10}$, $a > 0$.

Rezolvare:

$T_{k+1} = C_{10}^k (a^3)^{10-k} (a^{-\frac{3}{7}})^k$
 $30 - 3k - \frac{3k}{7} = 6$
 $210 - 21k - 3k = 42$
 $24k = 168 \Rightarrow k = 7$
 $T_8 = T_{7+1} = C_{10}^7 a^6 = 120 a^6$
 $C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7 \cdot 2 \cdot 3} = 120$

Răspuns: $T_8 = 120 a^6$

Determinați valoarea

Rezolvare: $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{\log_3 27}\right)$

Răspuns: 0

Fie numerele con este un număr n

Rezolvare:

$w = (1 + 2)^2 = 5 - 4 = 1$

Răspuns: W

Rezolvați în R

Rezolvare:

$\left(\frac{9}{2}\right)x^2 + x$

$x^2 + x \geq 14$

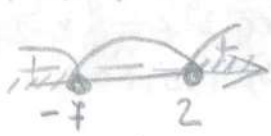
$x \leq -7$

$x \geq 2$

Răspuns: —

Data: _____

Punctaj acumulat: _____ Nota: _____

Item		Punctaj	
ALGEBRĂ			
1.	Determinați valoarea expresiei $81^{\frac{3}{4}} - \left(\frac{1}{\log_3 27}\right)^{-3}$. Rezolvare: $81^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{4} \cdot 4} = 3^3 = 27$; $\left(\frac{1}{\log_3 27}\right)^{-3} = 3^3 = 27$ $81^{\frac{3}{4}} - \left(\frac{1}{\log_3 27}\right)^{-3} = 27 - 27 = 0$ Răspuns: 0	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 1 2 3 4 5
2.	Fie numerele complexe $z_1 = 1 + 2i$ și $z_2 = 1 - i$. Arătați că numărul $w = z_1^2 + 4z_2$ este un număr natural. $i^2 = -1$ Rezolvare: $w = (1 + 2i)^2 + 4(1 - i) = 1 + 4i + 4i^2 + 4 - 4i = 5 - 4 = 1 \in \mathbb{N}$ Răspuns: $w = 1 \in \mathbb{N}$	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 1 2 3 4 5
3.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $\left(\frac{9}{2}\right)^{x^2+x} \geq \left(\frac{4}{81}\right)^{2x-7}$. Rezolvare: $\left(\frac{9}{2}\right)^{x^2+x} \geq \left(\frac{2}{81}\right)^{14-4x}$ $\frac{9}{2} > 1$, crescătoare $x^2 + x \geq 14 - 4x$; $x^2 + 5x - 14 \geq 0$; $x^2 + 5x - 14 = 0$ $\begin{cases} x \leq -7 \\ x \geq 2 \end{cases}$  $x \in (-\infty, -7] \cup [2, +\infty)$ Răspuns: $S = (-\infty, -7] \cup [2, +\infty)$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 1 2 3 4 5 6 7 8

4. Determinați valoarea expresiei $E(\alpha) = 5 \cos(2\alpha) - \frac{7}{60} \operatorname{tg}(2\alpha)$, dacă se știe că $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ și $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Rezolvare:

$$\alpha \in \text{III} \text{ verbeptb} \Rightarrow \sin \alpha < 0, \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{24}{25} : \frac{7}{25} = \frac{24}{25} \cdot \frac{25}{7} = \frac{24}{7}$$

$$E(\alpha) = 5 \cos 2\alpha - \frac{7}{60} \operatorname{tg} 2\alpha = 5 \cdot \frac{7}{25} - \frac{7}{60} \cdot \frac{24}{7} = \\ = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Răspuns: $E(\alpha) = 1$

5. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \sqrt{\log_3(x-2)} & 0,5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați valorile reale ale lui x , pentru care matricea este inversabilă.

Rezolvare:

$$\text{Caz: } \begin{cases} x-2 > 0 \\ \log_3(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow x \in [3; +\infty)$$

$$\log_3(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow \log_3(x-2) \geq \log_3 3^0 \Leftrightarrow x-2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 3$$

Matricea A oăparunua $\Rightarrow \det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} \sqrt{\log_3(x-2)} & 0,5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\log_3(x-2)} - 2$$

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \sqrt{\log_3(x-2)} - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\log_3(x-2)} \neq 2$$

$$\log_3(x-2) \neq 4 \Leftrightarrow \log_3(x-2) \neq \log_3 3^4 \Leftrightarrow x-2 \neq 81 \\ \Leftrightarrow x \neq 83 \Rightarrow x \in [3; 83) \cup (83; +\infty)$$

Răspuns: $S = [3; 83) \cup (83; +\infty)$

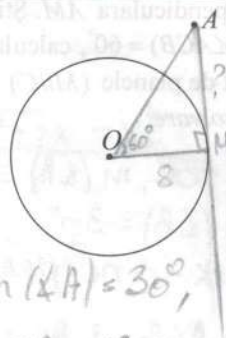
L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

GEOMETRIE

6. Din punctul A exterior cercului $C(O; r = 8 \text{ cm})$ este dusă o tangentă la acest cerc, iar M este punctul de tangență. Determinați distanța de la punctul A la punctul M , dacă $m(\angle AOM) = 60^\circ$.

Rezolvare:

- 1) AM - tangentă $\Rightarrow OM \perp AM$
- 2) $\triangle AOM$, $m(\angle M) = 90^\circ$, $m(\angle O) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle A) = 30^\circ$,
 $OM = x$, $OA = 2x$, $AM = x\sqrt{3}$, $x = 8 \Rightarrow OA = 16 \text{ cm}$,
 $AM = 8\sqrt{3} \text{ cm}$



L
0
1
2
3
4
5

Răspuns: $8\sqrt{3} \text{ cm}$

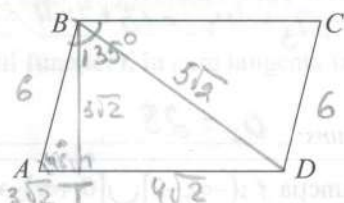
7. Fie $ABCD$ un paralelogram, în care $m(\angle ABC) = 135^\circ$ și $AB = 6 \text{ cm}$. Determinați aria paralelogramului, dacă $BD = 5\sqrt{2} \text{ cm}$.

Rezolvare:

- 1) $m(\angle A) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$
- 2) BT - înălțimea, $\triangle BTA$, $m(\angle T) = 90^\circ$, $m(\angle A) = 45^\circ$,
 $\Rightarrow m(\angle B) = 45^\circ \Rightarrow \triangle BTA$ - dreptunghișor $\Rightarrow$
 $AB = AT\sqrt{2} \Leftrightarrow 6 = AT\sqrt{2} \Leftrightarrow AT = BT = 3\sqrt{2} \text{ cm}$
- 3) $\triangle BTD$, ($m(\angle T) = 90^\circ$) - dreptunghișor $\Rightarrow TD = 4\sqrt{2} \text{ cm}$
- 4) $AD = 7\sqrt{2} \text{ cm}$
- 5) $A = BT \cdot AD = 3\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 12 \cdot 2 = 24 \cdot 2 = 48 \text{ cm}^2$

II Teorema cos

Răspuns: 48 cm^2



L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

8.	Pe planul triunghiului ABC, dreptunghic în A, se ridică perpendiculara AM. Știind că $AB = 4 \text{ cm}$, $AM = 6 \text{ cm}$ și $m(\angle ACB) = 60^\circ$, calculați sinusul unghiului diedru format de planele (MBC) și (ABC). Rezolvare: 1) $\triangle ABC$, $m(\angle A) = 90^\circ$, $m(\angle C) = 60^\circ$, $m(\angle B) = 30^\circ$ 2) MK - a doua perpendiculară $\Rightarrow MK \perp CB$, $AK \perp CB$ 3) $\triangle AKB$... $AK = 2$; $KB = 2\sqrt{2}$ 4) $\triangle AMB$, $MB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ 5) $\sin(\angle K) = \frac{AM}{MK} = \frac{6}{2\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ Răspuns: $\frac{3\sqrt{10}}{10}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
ANALIZĂ MATEMATICĂ			
9.	Determinați termenul a_7 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă $a_3 = 13$ și $a_{10} = 41$. Rezolvare: $a_{10} = a_3 + 7r$; $41 = 13 + 7r$; $28 = 7r$; $r = 4$ $a_7 = a_3 + 4r = 13 + 4 \cdot 4 = 13 + 16 = 29$ Răspuns: $a_7 = 29$	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
10.	Fie funcția $f: (-\infty; -2] \cup [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$. a) Calculați: $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 + 10}{f^2(x) - 2x + 9} dx$. Rezolvare: $\frac{f^2(x)}{x^2 + 2x} = (\sqrt{x^2 + 2x})^2 = x^2 + 2x$ $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 + 10}{x^2 + 2x - 2x + 9} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2 + 9}{x^2 + 9} + \frac{1}{x^2 + 9} \right) dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{x^2 + 9} \right) dx$ $= x \Big _0^{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} \Big _0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 0 + \frac{1}{3} (\arctg \frac{\sqrt{3}}{3} - \arctg 0)$ $= \sqrt{3} + \frac{1}{3} (\frac{\pi}{6} - 0) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{18}$ Răspuns: $\sqrt{3} + \frac{\pi}{18}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

b) Determinați asimptota orizontală la $-\infty$ a funcției

$$g: (-\infty; -2] \cup [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) + x.$$

Rezolvare:

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} + x)(\sqrt{x^2 + 2x} - x)}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{|x| - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$

$y = -1$ orizontală asimptotă

Răspuns: $y = -1$ orizontală asimptotă

c) Determinați abscisa punctului de pe graficul funcției f , în care tangenta la grafic trece prin punctul $A(4; 3\sqrt{3})$.

Rezolvare: $x_0 = ?$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

$$f'(x_0) = \frac{x_0+1}{\sqrt{x_0^2+2x_0}}; f(x_0) = \sqrt{x_0^2+2x_0}$$

$$A(4; 3\sqrt{3}) \Rightarrow \frac{x_0+1}{\sqrt{x_0^2+2x_0}}(4-x_0) + \sqrt{x_0^2+2x_0} = 3\sqrt{3}$$

$$4x_0 + 4 - x_0^2 - x_0 + x_0^2 + 2x_0 - 3\sqrt{3}\sqrt{x_0^2+2x_0} = 0$$

$$5x_0 + 4 = 3\sqrt{3}\sqrt{x_0^2+2x_0}; x_0 \geq -\frac{4}{5}$$

Răspuns:

$$5x_0 + 4 = 3\sqrt{3}\sqrt{x_0^2+2x_0} \Leftrightarrow 25x_0^2 + 40x_0 + 16 = 27x_0^2 + 54x_0$$

$$2x_0^2 + 14x_0 - 16 = 0; x_0^2 + 7x_0 - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -8 \end{cases}$$

$$\text{Et tot: } x_0 = 1$$

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu ajutorul cifrelor 1, 2, 3, 4, 5, 6 se formează un cod de 5 cifre. Aflați probabilitatea ca acest cod format conțină nu mai puțin de 3 ori cifra 2.

Rezolvare:

cod uz 5 caractere

$A = \{ \text{coduri cu } 2 \text{ în numărul } 3 \text{ sau mai mult} \}$

$$n = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$$

$$m = C_5^3 \cdot 5 \cdot 5 + C_5^4 \cdot 5 + C_5^5 = 125 + 5 + 1 = 131$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{131}{6^5} = \frac{131}{7776}$$

Răspuns: $\frac{131}{7776}$

12. Determinați termenul care-l conține pe x^8 în dezvoltarea la putere a binomului $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)^n$ ($x > 0$), știind că suma coeficienților binomiali de rang par este 512.

Rezolvare:

$$2^{n-1} = 512 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^9 \Leftrightarrow n-1 = 9 \Leftrightarrow n = 10$$

$$T_{k+1} = C_{10}^k \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{10-k} \left(x^{-2}\right)^k = C_{10}^k x^{\frac{30-3k}{2} - 2k}$$

$$\frac{30-3k}{2} - 2k = 8 \Leftrightarrow 30-3k-4k = 16 \Leftrightarrow 14 = 7k \Leftrightarrow k = 2$$

$$T_3 = T_{2+1} = C_{10}^2 x^8 = \frac{10!}{2!8!} x^8 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} x^8 = 45 x^8$$

Răspuns: $T_3 = 45 x^8$

Data: _____ Punctaj acumulat: _____ Nota: _____

Nr.	Item	Punctaj	
ALGEBRĂ			
1.	Determinați valoarea expresiei $\log_9 \sqrt{27} - 0,75$. Rezolvare: $\log_9 \sqrt{27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{3}{4}$ $\log_9 \sqrt{27} - 0,75 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$ Răspuns: 0	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
2.	Fie $\bar{z} = (3+5i)(3-5i) + 2 - 7i^3$, unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z . Determinați numărul complex z . Rezolvare: $i^2 = -1$; $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ $\bar{z} = 3^2 - (5i)^2 + 2 - 7i^3 = 9 + 25 + 2 + 7i = 36 + 7i$ $\bar{z} = 36 + 7i \Rightarrow z = 36 - 7i$ Răspuns: $z = 36 - 7i$	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
3.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{3x^2 - x} = 3 + x$. Rezolvare: D3: $3x^2 - x \geq 0$, $x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$ $3x^2 - x = 9 + 6x + x^2$; $2x^2 - 7x - 9 = 0$ $\begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ x = -1 \end{cases}$ Răspuns: $S = \{-1; \frac{9}{2}\}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

4. Calculați $D\left(\frac{\pi}{12}\right)$, dacă $D(x) = \begin{vmatrix} \sin x & 1 + \cos(2x) \\ 2\sin^2 x & 4\cos x \end{vmatrix}$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} D(x) &= \sin x \cdot 4\cos x - 2\sin^2 x \cdot (1 + \cos 2x) = \\ &= 2\sin 2x - 2\sin^2 x (1 + \cos 2x) = \\ &= 2\sin 2x - 2\sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x) = \\ &= 2\sin 2x - 4\sin^2 x \cos^2 x = \\ &= 2\sin 2x - (2\sin x \cos x)^2 = 2\sin 2x - (\sin 2x)^2 \\ D\left(\frac{\pi}{12}\right) &= 2\sin \frac{\pi}{6} - \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^2 = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Răspuns: $\frac{3}{4}$

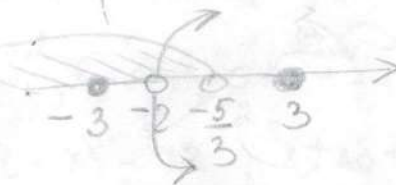
5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{|x^2 - 9|}{\log_{0.5}(3x + 6)} \geq 0$.

Rezolvare:

$$\text{D.D.} \begin{cases} 3x + 6 > 0 \\ \log_{0.5}(3x + 6) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \neq \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x^2 - 9| = 0 \\ \log_{0.5}(3x + 6) > 0 \end{cases} \xrightarrow{0 < 0.5 < 1} \begin{cases} x^2 - 9 = 0 \\ 3x + 6 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \\ x < -\frac{5}{3} \end{cases}$$



Răspuns: $S = (-2, -\frac{5}{3}) \cup \{3\}$

GEOMETRIE

6. Determinați volumul unui cub, dacă se cunoaște că aria lui totală este egală cu 96 cm^2 .

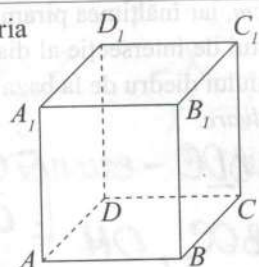
Rezolvare:

$$A_{\text{total}} = 6a^2$$

$$96 = 6a^2; a^2 = 16;$$

$$[a = 4; a = -4 < 0 \Rightarrow a = 4(\text{cm})]$$

$$V = a^3 = 4^3 = 64(\text{cm}^3)$$



Răspuns:

$$64 \text{ cm}^3$$

7. Fie dat trapezul isoscel $ABCD$ cu bazele $AB = 4 \text{ cm}$ și $CD = 16 \text{ cm}$. Dreptele suport ale laturilor laterale se intersectează într-un punct M . Determinați distanța de la punctul M până la baza mare a trapezului, dacă se știe că trapezul poate fi circumscris unui cerc.

Rezolvare:

1) Можем вписать окружность $\Rightarrow$

$$AD + BC = AB + DC$$

$$2AD = 4 + 16; 2AD = 20;$$

$$AD = BC = 10(\text{cm})$$

2) $\triangle DMC \sim \triangle BMA \Rightarrow$

MK - вписана и медиана $\Rightarrow$

$$\Rightarrow DK = KC = 8 \text{ cm}, AF = FB = 2 \text{ cm}$$

3) $\angle MA = X \Rightarrow \angle M = 10 + X$

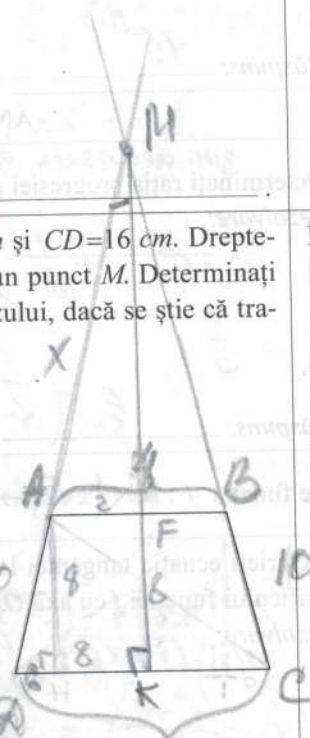
4) $\triangle MK \sim \triangle MF (yy) \Rightarrow \frac{10+X}{X} = \frac{8}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4X = 10 + X \Leftrightarrow 3X = 10 \Leftrightarrow X = \frac{10}{3}(\text{cm})$$

Răspuns:

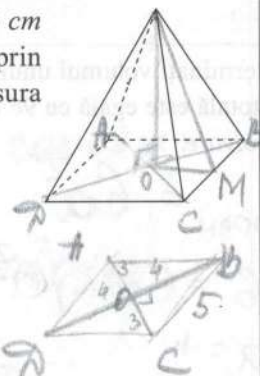
5) $\triangle MAK, m(\angle F) = 90^\circ$, по Т. Пифагора ... $MF = \frac{8}{3} \text{ cm}$

$$6) MK = \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3}(\text{cm})$$



$$V = 2,4 \text{ cm} \quad \text{baza} = \frac{\text{catet} \cdot \text{catet}}{\text{ipotenuza}} \quad \checkmark$$

8. Baza unei piramide este un romb cu diagonalele de 6 cm și 8 cm, iar înălțimea piramidei este de 2,4 cm și trece prin punctul de intersecție al diagonalelor. Determinați măsura unghiului diedru de la baza piramidei.
- Rezolvare:
- 1) $\triangle BOC$ - euntriunghi...
- 2) $\triangle BOC$, $OM = \frac{OB \cdot OC}{BC} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ (cm)}$
- 3) $OV = OM = 2,4 \text{ cm} \Rightarrow \triangle VOM - p/d$;
 $\triangle VOM$, $m(\angle O) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle VMO) = 45^\circ$
- Răspuns: 45°



ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă $b_3 = -9$ și $b_8 = -\frac{1}{27}$.
- Rezolvare:
- $b_8 = b_3 \cdot q^5$, $+\frac{1}{24} = +9 \cdot q^5$ / $\cdot \frac{1}{9} \Leftrightarrow q^5 = \frac{1}{3^5}$
- $q = \frac{1}{3}$
- Răspuns: $q = \frac{1}{3}$

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2}$.
- a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de intersecție al graficului funcției f cu axa Ox . $\Rightarrow y = 0$, i.e. $f(x) = 0$
- Rezolvare:
- $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- $f'(x) = \frac{(x^3 - 1)'}{(x^2 - 2)'} = \frac{(3x^2 - 1)(x^2 - 2) - (x^3 - 1)(2x)}{(x^2 - 2)^2}$
- $= \frac{3x^2(x^2 - 2) - 2x(x^3 - 1)}{(x^2 - 2)^2} = \frac{3x^4 - 6x^2 - 2x^4 + 2x}{(x^2 - 2)^2} = \frac{x^4 - 6x^2 + 2x}{(x^2 - 2)^2}$
- $f'(1) = \frac{1 - 6 + 2}{1} = -3$, $f(1) = 0$
- Răspuns: $y = -3x + 3$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2} = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0, x^3 = 1, |x = 1|$$

$$y = -3(x - 1) + 0 \Leftrightarrow y = -3x + 3 \text{ - y.p. cae}$$

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

b) Determinați valoarea numerică a ariei subgraficului funcției

$$g: [-1; 0] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -\frac{1}{f(x)} - \frac{2}{x^3 - 1}$$

Rezolvare:

$$g(x) = -\frac{x^2 - 2}{x^3 - 1} - \frac{2}{x^3 - 1} = \frac{-x^2 + 2 - 2}{x^3 - 1} = \frac{-x^2}{x^3 - 1}$$

$$A = -\int_{-1}^0 \frac{x^2}{x^3 - 1} dx = \left[\begin{array}{l} x^3 - 1 = t \\ 3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3} \ln|t| \Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{3} (\ln 1 - \ln 2) =$$

$$= -\frac{1}{3} (0 - \ln 2) = \frac{1}{3} \ln 2 \text{ (kb. egf.)}$$

$$\text{Răspuns: } \frac{1}{3} \ln 2 \text{ kb eg}$$

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

+

L
0
1
2
3
4
5c) Calculați: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{f(x)(x^2 - 2) + 2x^2} - x \right) =$

Rezolvare:

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x^3 - 1}{x^2 - 2}} (x^2 - 2) + 2x^2 - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 1} - x) \left((\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 1})^2 + x\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 1} + x^2 \right)}{((\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 1})^2 + x\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 1} + x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 1 - x^3}{((\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 1})^2 + x\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 1} + x^2)} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Răspuns: } \frac{2}{3}$$

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

+

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE
DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se aruncă un zar până la apariția feței cu 2 puncte de 3 ori consecutiv. Determinați probabilitatea că zarul se va arunca de 5 ori.

Rezolvare:

$A = \{\text{roșu 5 ori}\}$

$n = 6^5$

$m = 25 + 5 = 30$

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{30}{7776} = \frac{5}{1296}$

$5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

$1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

$\frac{5}{1296}$

Răspuns:

12. Determinați rangul termenului care conține x^5 în dezvoltarea la putere a binomului $\left(x^3\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)^n$ ($x > 0$), știind că coeficientul binomial al termenului al optulea este egal cu coeficientul binomial al termenului al șaselea.

Rezolvare:

$C_n^k = C_n^{n-k}$

$\frac{n!}{(n-7)!7!} = \frac{n!}{(n-5)!5!}; n!(n-7)!7! = n!(n-5)!5!;$

$(n-7)! \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 = (n-7)! \cdot (n-5)(n-5) \cdot 5!$

$n^2 - 11n + 30 - 42 = 0; n^2 - 11n - 12 = 0;$

$[n=12; n=-1] \Rightarrow n=12$

$T_{k+1} = C_{12}^k \left(x^{\frac{10}{3}}\right)^{12-k} \left(x^{-\frac{5}{2}}\right)^k$
 $\frac{120-10k}{3} - \frac{5k}{2} = 5; 240-20k-15k = 30;$

Răspuns: T_7

$35k = 210; k = 6 \Rightarrow T_{k+1} = T_7 = C_{12}^6 x^5$

Data:

10.03

Punctaj acumulat:

84

Nota:

Nr.	Item	Punctaj
ALGEBRĂ		
1.	Determinați valoarea expresiei $\sqrt{\left(\frac{1}{13}\right)^{-2} - 125^{\frac{2}{3}}}$. Rezolvare: $\left(\frac{1}{13}\right)^{-2} = 13^2 = 169, \quad 125^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{125})^2 = 5^2 = 25$ $\sqrt{\left(\frac{1}{13}\right)^{-2} - 125^{\frac{2}{3}}} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ Răspuns: 12	L 0 1 2 3 4 5 0 1 2 3 4 5
2.	Determinați restul împărțirii polinomului $P(X) = X^3 - 6X^2 - 2$ la polinomul $Q(X) = X^2 - 3$. Rezolvare: $P(X) = (X^2 - 3)(X - 6) + 3X - 20$ $R(X) = 3X - 20$ Răspuns: $R(X) = 3X - 20$	L 0 1 2 3 4 5 0 1 2 3 4 5
3.	Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $z^2 - (4 + 3i)z + 4 + 6i = 0$. ; $i^2 = -1$ Rezolvare: $\Delta = [-(4 + 3i)]^2 - 4 \cdot (4 + 6i) = 16 + 24i + 9i^2 - 16 - 24i = -9$ $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = 3i$ $X_1 = \frac{4 + 3i - 3i}{2} = 2, \quad X_2 = \frac{4 + 3i + 3i}{2} = 2 + 3i$ Răspuns: $S = \{2; 2 + 3i\}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8 0 1 2 3 4 5 6 7 8

4. Fie expresia $E(\alpha) = \frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - 1$. Calculați valoarea expresiei $E\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Rezolvare:

$$\text{UDS: } \cos \alpha \neq 0, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1+\operatorname{tg}\alpha)^2 = 1 + 2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = (1+2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha) : \frac{1}{\cos^2\alpha} =$$

$$= (1+2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha) \cdot \cos^2\alpha = \cos^2\alpha + 2 \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$= \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 1 + \sin 2\alpha$$

$$E(\alpha) = \frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - 1 = 1 + \sin 2\alpha - 1 = \sin 2\alpha$$

$$E\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

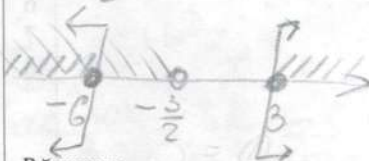
Răspuns: $E\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\sqrt{x^2+3x-18} > 2x+3$.

Rezolvare:

$$\begin{cases} 2x+3 \leq 0 \\ x^2+3x-18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ x \in (-\infty; -6] \cup [3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x^2+3x-18 > 4x^2+12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 3x^2+9x+27 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ x \in (-\infty; -6] \cup [3; +\infty) \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ x \in \emptyset \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -6]$$



Răspuns:

$$S = (-\infty; -6]$$

GEOMETRIE

6. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu aria egală cu 36 cm^2 . Determinați aria laterală a cilindrului.

Rezolvare:

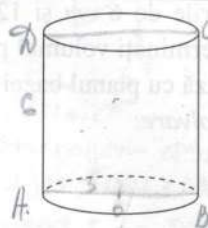
$$1) ABCD - \text{cvaadrat} \Rightarrow A = AB^2 = 36 \text{ cm}^2;$$

$$\begin{cases} AB = G \\ AB = G < 0 \end{cases} \Rightarrow AB = 6 \text{ cm}; AD = AB = G = 6 \text{ cm}.$$

$$2) AO = OB = R = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (cm)}$$

$$3) L = 2\pi R \cdot G = 6\pi \text{ (cm)}$$

$$4) A_{\text{бок}} = 2\pi R G = L \cdot G = 6\pi \cdot 6 = 36 \text{ (cm}^2\text{)}$$



Răspuns: $A_{\text{бок}} = 36 \text{ cm}^2$

7. În triunghiul ABC , dreptunghic în B , este dusă înălțimea BM . Determinați raportul dintre aria triunghiului AMB și aria triunghiului MBC , dacă $AB = 5 \text{ cm}$ și $BC = 12 \text{ cm}$.

Rezolvare:

$$1) \triangle ABC, m(\angle B) = 90^\circ, \text{ no } \pi \text{ uropaiopa } AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ (cm)}$$

$$2) AM = x \Rightarrow MC = 13 - x$$

$$3) \triangle BCA \sim \triangle MCB (44) \Rightarrow \frac{BC}{MC} = \frac{CA}{CB} = \frac{BA}{MB}$$

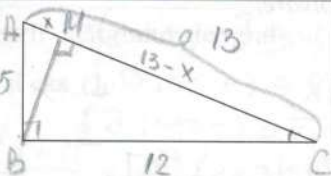
$$\frac{12}{13-x} = \frac{13}{12} = \frac{5}{MB}; 169 - 13x = 144 \Leftrightarrow 13x = 25 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{25}{13} \Rightarrow AM = \frac{25}{13} \text{ cm}; MC = 13 - \frac{25}{13} = \frac{169-25}{13} = \frac{144}{13} \text{ (cm)}$$

$$13 MB = 60 \Leftrightarrow MB = \frac{60}{13} \text{ (cm)}$$

$$4) \frac{A_{AMB}}{A_{MBC}} = \frac{\frac{1}{2} BM \cdot AM}{\frac{1}{2} BM \cdot MC} = \frac{AM}{MC} = \frac{25}{13} \cdot \frac{144}{13} = \frac{25 \cdot 13}{13 \cdot 144} = \frac{25}{144}$$

Răspuns: $\frac{A_{AMB}}{A_{MBC}} = \frac{25}{144}$



8. Baza unei prisme drepte este un paralelogram cu laturile de 6 cm și 12 cm, iar un unghi este de 60° . Determinați volumul prisme, dacă diagonala mare formează cu planul bazei un unghi de 30° .

Rezolvare: $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1) $ABCD$ - paralelogram
 $m(\angle A) = 180^\circ - m(\angle B) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

2) $\triangle ABC$, no T. Kosinusov:
 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ$
 $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$
 $AC^2 = 36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot (-\frac{1}{2})$
 $AC^2 = 180 + 72, AC^2 = 252 \Rightarrow AC = \sqrt{252} = 6\sqrt{7}$

3) $A_{oclu} = 2A_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \cdot \sin 120^\circ = 72 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$

4) $\triangle ACC_1$, $m(\angle C) = 90^\circ$, $m(\angle A) = 30^\circ \Rightarrow CC_1 = 1, AC_1 = x, AC = x\sqrt{3}, 6\sqrt{7} = x\sqrt{3}$
 $x = \frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \Rightarrow CC_1 = \frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{21} \text{ (cm)}$

Răspuns: 5) $V = CC_1 \cdot A_{oclu} = 2\sqrt{21} \cdot 36\sqrt{3} = 72\sqrt{7} \cdot 3 = 216\sqrt{7} \text{ (cm}^3\text{)}$

ANALIZĂ MATEMATICĂ $V = 216\sqrt{7} \text{ cm}^3$

9. Fie funcția $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5 - \sqrt{x}$. Determinați mulțimea $E(f)$ a valorilor funcției f .

Rezolvare:
 $\sqrt{x} \in [0; +\infty)$
 $-\sqrt{x} \in (-\infty; 0]$
 $5 - \sqrt{x} \in (-\infty; 5]$
 $E(f) = (-\infty; 5]$

Răspuns: $E(f) = (-\infty; 5]$

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{2x}(-2x^3 + x^4)$.

a) Determinați punctele de extrem local ale funcției f .

Rezolvare:
 $f'(x) = (e^{2x})'(-2x^3 + x^4) + e^{2x}(-2x^3 + x^4)' = e^{2x}(-2x^3 + x^4) + e^{2x}(-6x^2 + 4x^3)$
 $= 2e^{2x}(-2x^3 + x^4 - 3x^2 + 2x^3) = 2e^{2x}x^2(x^2 - 3)$
 $f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^{2x}x^2(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2e^{2x} = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$

Răspuns: $x = -\sqrt{3}$ este punct de extrem local maxim
 $x = \sqrt{3}$ este punct de extrem local minim

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

b) Calculați: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 + 4x - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{2x}(-2x^3 + x^4)}{x^2 + 4x - 12} = \left[\frac{0}{0} \right]$
 Rezolvare: $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot e^{2x} (x-2)}{(x-2)(x+6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot e^{2x}}{x+6} = \frac{2e^4}{8} = e^4$

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8Răspuns: e^4 L
0
1
2
3
4
5

c) Determinați valoarea numerică a ariei figurii mărginite de graficul funcției $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$, axa Ox și axa Oy .

Rezolvare: $g(x) = \frac{f(x)}{x^3} = \frac{e^{2x}(-2x^3 + x^4)}{x^3} = \frac{x^3 e^{2x} (x-2)}{x^3} = e^{2x}(x-2)$

Определение границ интегрирования:
 $g(x) = 0 \Rightarrow e^{2x}(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{2x} = 0 \\ x-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2$

Ограничение осью $Oy \Rightarrow x = 0$

Определим знак функции
 ввиду на интервал $[0; 2]$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = -e^{-1} < 0 \Rightarrow y$ отриц., при $g(x)$

$I = - \int_0^2 g(x) dx = - \int_0^2 e^{2x}(x-2) dx = \int_0^2 (2-x) e^{2x} dx$
 $u = x-2 \quad du = dx \quad dv = e^{2x} dx \quad v = \frac{e^{2x}}{2}$
 $= \left. \frac{e^{2x}(x-2)}{2} \right|_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{2x}}{2} dx = -1 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^2 = -1 - \frac{1}{4} + \frac{e^4}{4} = \frac{e^4 - 5}{4}$

Răspuns:

$$I = \frac{e^4 - 5}{4}$$

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se aruncă concomitent 3 zaruri. Determinați probabilitatea ca față cu 5 puncte să apară exact pe 2 zaruri.

Rezolvare:

3 кубика кидают.

$A = \{ \text{ровно на } 2 \times \text{ из них выпало "5"} \}$

$B_i = \{ \text{на кубике } i \text{ выпало "5"} \}; p(B_i) = \frac{1}{6}$

$\bar{B}_i = \{ \text{на кубике } i \text{ не выпало "5"} \}$

$p(\bar{B}_i) = 1 - p(B_i) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$p(A) = p(B_1) \cdot p(B_2) \cdot p(\bar{B}_3) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$

Răspuns: $\frac{5}{72}$

12. Determinați rangul termenului care-l conține pe $x^{\frac{20}{3}}$ în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\frac{x\sqrt{x}}{2} + \frac{3}{\sqrt{x^8}} \right)^n$, $x > 0$, știind că suma coeficienților binomiali ai primilor trei termeni ai dezvoltării este 121.

Rezolvare:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 121$$

$$\text{OD3: } \begin{cases} n \geq 0 \\ n \geq 1 \\ n \geq 2 \end{cases} \Rightarrow n \geq 2, n \in \mathbb{N}$$

$$1 + \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 121;$$

$$1 + \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)!} + \frac{(n-2)! \cdot (n-1)n}{2!(n-2)!} = 121; 2 + 2n + n^2 - n = 242;$$

$$n^2 + n - 240 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -16 \notin \mathbb{N} \\ n = 15 \end{cases} \Rightarrow n = 15$$

$$T_{k+3} = C_{15}^k \left(\frac{1}{2} \right)^{15-k} \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} \right)^{15-k} \cdot 3^k \left(x^{-\frac{8}{3}} \right)^k$$

$$\frac{60-4k}{3} - \frac{8k}{3} = \frac{20}{3} \Leftrightarrow 180 - 12k - 8k = 60;$$

$$20k = 120, k = 6 \Rightarrow T_{k+3} = T_{6+3} = T_9$$

Răspuns: T_9

Data: _____ Punctaj acumulat: _____ Nota: _____

Nr.	Item	Punctaj	
ALGEBRĂ			
1.	Determinați valoarea expresiei $\log_{36} 216^{\frac{1}{2}} - 2^{-2}$. Rezolvare: $\log_{36} 216^{\frac{1}{2}} - 2^{-2} = \log_{6^2} 6^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} =$ $= \frac{-3-1}{4} = \frac{-4}{4} = -1$ Răspuns: <u>-1</u>	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
2.	Fie polinomul $P(X) = 2X^3 + 3X^2 - (a+1)X + 2$. Determinați valorile reale ale lui a , pentru care polinomul $P(X)$ este divizibil prin $Q(X) = X + 1$. Rezolvare: $P(-1) = -2 + 3 + a + 1 + 2 = a + 4$ $P(-1) = 0 \Rightarrow a + 4 = 0 ; a = -4$ Răspuns: <u>a = -4</u>	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
3.	Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația: $(3-i)z^2 - (4-i)z + 2 = 0$. Rezolvare: $\Delta = (4-i)^2 - 4(3-i) \cdot 2 = 16 - 8i + i^2 - 24 + 8i =$ $= -8 - 1 = -9 ; \sqrt{\Delta} = 3i$ $\begin{cases} X_1 = \frac{4-i-3i}{2(3-i)} \\ X_2 = \frac{4-i+3i}{2(3-i)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{4-4i}{2(3-i)} \\ X_2 = \frac{4+2i}{2(3-i)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{2-2i}{3-i} \\ X_2 = \frac{2+i}{3-i} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{6-6i+2i+2}{10} \\ X_2 = \frac{6+3i+2i-1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i \\ X_2 = \frac{5}{10} + \frac{5}{10}i \end{cases}$ Răspuns: <u>$\begin{cases} X_1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i \\ X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}$</u>	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

$$S = \left\{ \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$$

4. Calculați $\operatorname{tg}(2x)$, dacă $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ și $\cos x = -\frac{3}{5}$.

Rezolvare:

$$x \in \Pi \Rightarrow \sin x > 0$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} =$$

$$= \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 =$$

$$= \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = +\frac{24}{7}$$

Răspuns:

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\log_{5-x} \frac{1}{27} \geq -3$.

Rezolvare:

$$\begin{cases} 5-x > 0 \\ 5-x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$\log_{5-x} \frac{1}{27} \geq \log_{5-x} (5-x)^{-3}$$

I $5-x > 1$, $x < 4$, знак сохраняется

$$\frac{1}{27} \geq \frac{1}{(5-x)^3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^3 \geq \left(\frac{1}{5-x}\right)^3$$

$$\frac{1}{3} \geq \frac{1}{5-x} \Rightarrow \frac{1}{5-x} - \frac{1}{3} \leq 0, \frac{3-5+x}{3(5-x)} \leq 0,$$

$$\frac{x-2}{3(5-x)} \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 2]$$



II $0 < 5-x < 1$, $-5 < x < -4$, $4 < x < 5$, знак меняется

Răspuns:

$$S = (-\infty; 2] \cup (4; 5)$$

$$x \in (4; 5)$$

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

GEOMETRIE

6. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi echilateral cu aria de $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Determinați volumul conului.

Rezolvare:

$$1) \triangle ABC - \text{pabluo cmofonuuu}$$

$$A_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, 16\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$64 = a^2, \begin{cases} a = -8 < 0 \\ a = 8 \end{cases} \Rightarrow AC = BC = 8 \text{ cm}$$

$$2) OC = AO = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (cm)}$$

$$3) \triangle ABC - \text{p/c} \Rightarrow m(\angle A) = m(\angle B) = m(\angle C) = 60^\circ$$

$$4) \triangle BOC, m(\angle O) = 90^\circ, m(\angle C) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle B) = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OC = x, BC = 2x, OB = x\sqrt{3}, x = 4 \Rightarrow OB = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{Răspuns: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{64\sqrt{3}}{3} \pi \text{ cm}^3$$

L
0
1
2
3
4
5L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

7. În trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, $[AC] \equiv [DB]$, $m(\angle B) = 60^\circ$, $BC = 6 \text{ cm}$, iar $AC \perp BC$. Calculați aria trapezului ABCD.

Rezolvare:

$$1) \triangle ABC, m(\angle C) = 90^\circ, m(\angle B) = 60^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\angle A) = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CB = a, AB = 2a, AC = a\sqrt{3};$$

$$a = 6 \Rightarrow AB = 12 \text{ cm}, AC = 6\sqrt{3} \text{ cm}, DB = AC = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$2) m(\angle DCB) = 120^\circ; \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\triangle DCB, \text{no T. cos. } DB^2 = DC^2 + CB^2 - 2 \cdot DC \cdot CB \cdot \cos 120^\circ;$$

$$108 = DC^2 + 36 - 2 \cdot DC \cdot 6 \cdot (-\frac{1}{2}); DC^2 + 6DC - 72 = 0$$

$$\Rightarrow DC = 6 \text{ cm}$$

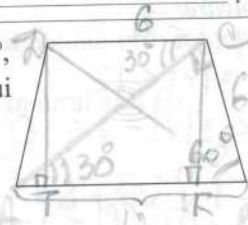
$$3) \text{Jabegen bacare } CK = AT, TK = AC = 6 \text{ cm};$$

$$AT = KB = 3 \text{ cm}$$

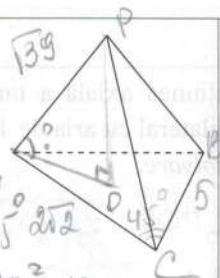
$$4) \triangle CKB, m(\angle K) = 90^\circ, m(\angle B) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle C) = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KB = 6, CB = 2B, CK = 6\sqrt{3}, B = 3 \Rightarrow CK = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{Răspuns: } 5) A = \frac{AC + AB}{2} \cdot CK = \frac{6 + 12}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{18}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 9 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

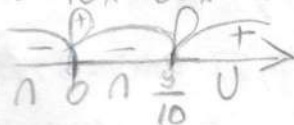
8. Baza unei piramide este un triunghi care are două laturi cu lungimile de $2\sqrt{2}$ cm și 5 cm, iar unghiul dintre ele are măsura de 45° . Aflați cosinusul unghiului format de muchia laterală cu planul bazei, dacă toate muchiile laterale au lungimea de $\sqrt{39}$ cm.
- Rezolvare:
- 1) $\triangle ABC$, no $\angle C$: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 45^\circ$
 $AB^2 = 8 + 25 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$; $AB^2 = 33 - 20$; $AB^2 = 13$;
 $AB = \sqrt{13} < 0 \Rightarrow AB = \sqrt{13}$ (cm)
- 2) $A_{\text{baza}} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 5$ (cm²)
- 3) $AO = R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4A_{\text{baza}}} = \frac{\sqrt{13} \cdot 5 \cdot 2\sqrt{2}}{4 \cdot 5} = \frac{\sqrt{26}}{2}$ (cm)
- 4) $\cos \alpha = \frac{AO}{PA} = \frac{\frac{\sqrt{26}}{2}}{\sqrt{39}} = \frac{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$
- Răspuns: $\frac{\sqrt{6}}{6}$



ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați mulțimea $E(f)$ a valorilor funcției $f: [-4; 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3|x| - 2$.
- Rezolvare:
- $0 \leq |x| \leq 4$
 $0 \leq 3|x| \leq 12$
 $-2 \leq 3|x| - 2 \leq 10$
- Răspuns: $E(f) = [-2; 10]$

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^5 - 3x^4$.
- a) Determinați intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției f .
- Rezolvare:
- $f'(x) = (2x^5 - 3x^4)' = 10x^4 - 12x^3$
 $f''(x) = (10x^4 - 12x^3)' = 40x^3 - 36x^2$
 $f''(x) = 0 \Rightarrow 40x^3 - 36x^2 = 0$; $4x^2(10x - 9) = 0$;
 $x = 0$
 $x = \frac{9}{10}$
- Răspuns: $f(x)$ convexe pe $(-\infty; \frac{9}{10})$
 $f(x)$ concav pe $(\frac{9}{10}; +\infty)$
 zămislele răspunsului



b) Calculați: $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{f(x)}{4x^2 - 9}$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2x^5 - 3x^4}{4x^2 - 9} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{x^4(2x-3)}{(2x-3)(2x+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{x^4}{2x+3} = \left(\frac{3}{2} \right)^4 : \left(2 \cdot \frac{3}{2} + 3 \right) = \\ &= \frac{3^4}{2^4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3^4}{2^4 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3^3}{2^5} = \frac{27}{32} \end{aligned}$$

Răspuns: $\frac{27}{32}$

c) Determinați valoarea numerică a volumului corpului obținut prin rotirea subgraficului funcției $g: [2; 6] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x^2} + 3$ în jurul axei Ox .

Rezolvare:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\sqrt{f(x)}}{x^2} + 3 = \frac{\sqrt{2x^5 - 3x^4}}{x^2} + 3 = \frac{x^2 \sqrt{2x-3}}{x^2} + 3 = \sqrt{2x-3} + 3 \\ V &= \pi \int_2^6 g^2(x) dx = \pi \int_2^6 (\sqrt{2x-3} + 3)^2 dx = \\ &= \pi \int_2^6 (2x-3 + 6\sqrt{2x-3} + 9) dx = \pi \int_2^6 (2x+6+6\sqrt{2x-3}) dx = \\ &= \pi \left(x^2 \Big|_2^6 + 6x \Big|_2^6 + 2(2x-3)\sqrt{2x-3} \Big|_2^6 \right) = \\ &= \pi (36-4 + 36-12 + 54-2) = \pi (42+50-14) = \\ &= 108\pi \text{ (kyd. eg)} \end{aligned}$$

Răspuns: $108\pi \text{ kyd. eg.}$

(kon-bo zpyrry) kon-bo uogori

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Pentru anul următor de studii la un liceu se formează 3 clase I: I-a A, I-a B, I-a C. Părinții a 8 copii dintr-o grupă pregătitoare a unei grădinițe au depus actele pentru admitere în acest liceu. Care este probabilitatea ca 4 copii să fie înscriși în clasa I-a A, 2 copii – în clasa a I-a B și 2 – în clasa a I-a C?

Rezolvare:

$$n = 3^8$$

$$A = \{4b, A^4; 2b, b; 2b, C^4\}$$

$$m = C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{8! \cdot 4!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{1 \cdot 4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8^2}{4! \cdot 2 \cdot 2} = 420$$

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{420}{3^8} = \frac{140}{2187}$$

Răspuns: $\frac{140}{2187}$

12. Calculați termenii raționali din dezvoltarea la putere a binomului

$$\left(\sqrt[3]{5} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{30}$$

Rezolvare:

$$T_{k+1} = C_{30}^k \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{30-k} \cdot \left(5^{-\frac{1}{3}}\right)^k = C_{30}^k \cdot 5^{10 - \frac{k}{3} - \frac{k}{3}}$$

$$k \in [0; 30], k \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{matrix} k: 3 \\ k: 7 \end{matrix} \right\} \Rightarrow k: 21 \Rightarrow k \in \{0; 21\}$$

$$T_1 = T_{0+1} = C_{30}^0 \cdot 5^{10} = 5^{10}$$

$$T_{22} = T_{21+1} = C_{30}^{21} \cdot 5^{10} \cdot 5^{-10} = C_{30}^{21}$$

Răspuns: $T_1 = 5^{10}; T_{22} = C_{30}^{21}$

ELEMENTE
ATICĂ

I-a B,	L	L
depus	0	0
să fie	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
	6	6
	7	7
	8	8

mului	L	L
	0	0
	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
	6	6
	7	7
	8	8

Testul	8
--------	---

Data: _____ Punctaj acumulat: _____ Nota: _____

Nr.	Item	Punctaj	
ALGEBRĂ			
1.	Determinați valoarea expresiei $\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^{-2} + \left(16^{\frac{3}{4}}\right)^2 \cdot 81^{\frac{1}{2}}}$. Rezolvare: $= \sqrt{100 + 2^{4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2} \cdot 3^{4 \cdot \frac{1}{2}} \cdot 3^2} = \sqrt{100 + 2^6 \cdot 3^2} =$ $= \sqrt{100 + 64 \cdot 9} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26$ Răspuns: 26	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
2.	Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $(5-i)z=13$, $i^2=-1$. Rezolvare: $z = \frac{13}{5-i}; z = \frac{65+13i}{25-i^2}; z = \frac{65+13i}{26}$ $z = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$ Răspuns: $S = \left\{ \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
3.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+4) > 0$. Rezolvare: NB: $x^2-4x+4 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+4) > \log_{\frac{1}{2}} 1$; $0 < \frac{1}{2} < 1$, funcție descrescătoare $x^2-4x+4 < 1$; $x^2-4x+3 < 0$  $x \in (1; 2) \cup (2; 3)$ Răspuns: $S = (1; 2) \cup (2; 3)$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

4. Fie $E(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$ este un număr natural.

Rezolvare:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$$

$$E(\alpha) = \cos \alpha + \cos \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 =$$

$$= 2\cos \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 =$$

$$E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{3}} - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 - 1 =$$

$$= 1 + 4 - 1 = 4 \in \mathbb{N}$$

Răspuns: $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \in \mathbb{N}$



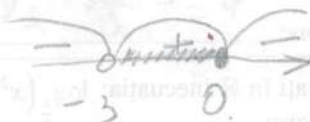
5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $\frac{x \cdot 2^{1-x} - 16x}{(x+3)^2} \geq 0$.

Rezolvare:

DR3: $x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$

$$x(2^{1-x} - 16) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 2^{1-x} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \\ x \neq -3 \end{cases}$$



Răspuns: $S = (-3, 0]$

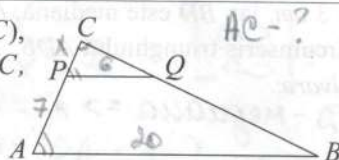
L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul ABC , în care $PQ \parallel AB, P \in (AC), Q \in (BC)$. Determinați lungimea laturii AC , dacă $AP = 7 \text{ cm}, PQ = 6 \text{ cm}, AB = 20 \text{ cm}$.

Rezolvare:



$$1) \text{ } PC = x \Rightarrow AC = 7 + x$$

$$2) \Delta PCQ \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{PC}{AC} = \frac{PQ}{AB}$$

$$\frac{x}{7+x} = \frac{6}{20} \Rightarrow 10x = 21 + 3x,$$

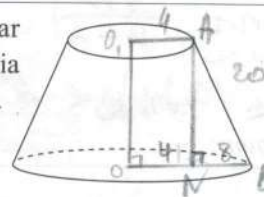
$$7x = 21; \quad x = 3 \Rightarrow PC = 3 \text{ cm}; \quad AC = 10 \text{ cm}$$

Răspuns:

$$AC = 10 \text{ cm}$$

7. Determinați volumul unui trunchi de con circular drept, cu ariile bazelor de $16\pi \text{ cm}^2$ și $144\pi \text{ cm}^2$, și aria totală de $480\pi \text{ cm}^2$.

Rezolvare:



$$1) A_{\text{bază 1}} = \pi r^2 \Rightarrow \pi r^2 = 16\pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = -4 < 0 \\ r = 4 \end{cases} \Rightarrow r = 4 \text{ (cm)}$$

$$2) A_{\text{bază 2}} = \pi R^2 \Rightarrow \pi R^2 = 144\pi \Rightarrow \begin{cases} R = -12 < 0 \\ R = 12 \end{cases} \Rightarrow R = 12 \text{ cm}$$

$$3) A_{\text{total}} = \pi g (R + r); \quad A_{\text{total}} = A_{\text{total}} - (A_{\text{bază 1}} + A_{\text{bază 2}}) = 480\pi - 160\pi = 320\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$16\pi g = 320\pi \Rightarrow g = 20 \text{ (cm)}$$

$$4) \Delta ANB, m(\angle N) = 90^\circ \text{ J. Teorema Pitagora } AN = 4\sqrt{21} \text{ (cm)}$$

$$\text{Răspuns: } 5) V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h (R^2 + Rr + r^2) = \frac{8320\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

L
0
1
2
3
4
5

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

8. Fie triunghiul ABC , în care $AB = 4 \text{ cm}$, $AC = 2 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$, iar BD este mediană. Aflați raza cercului circumscris triunghiului ADB .

Rezolvare:

1) BD - mediana $\Rightarrow AD = DC = 1 \text{ cm}$

2) Folosim $\cos$: $\begin{cases} CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \alpha \\ AB^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 = 4 + 16 - 16 \cos \alpha \\ AB^2 = 1 + 16 - 8 \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{11}{16} \\ AB = \frac{\sqrt{46}}{2} \text{ (cm)} \end{cases}$

3) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{256 - 121}{256}} = \sqrt{\frac{135}{256}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$

4) $2R = \frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{46}}{2} \cdot 16}{3\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{690}}{45} \Rightarrow R = \frac{4\sqrt{690}}{45} \text{ cm}$

Răspuns: $\frac{4\sqrt{690}}{45} \text{ cm}$

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiați mărghinirea șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{2n}{n+3}$.

Rezolvare:

$a_1 = \frac{2 \cdot 1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+3} \right) = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n} = 2$

$\frac{1}{2} \leq (a_n)_{n \geq 1} < 2$ $(a_n)_{n \geq 1}$ oțpamurena cunșy u cōcōny

Răspuns: $\frac{1}{2} \leq (a_n)_{n \geq 1} < 2$

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x + 3}$.

a) Determinați punctele de extrem local ale funcției f .

Rezolvare:

$f'(x) = \frac{(x^2 - 5)'(x + 3) - (x^2 - 5)(x + 3)'}{(x + 3)^2} = \frac{2x(x + 3) - (x^2 - 5)}{(x + 3)^2} = \frac{2x^2 + 6x - x^2 + 5}{(x + 3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 5}{(x + 3)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -5 \\ x \neq -3 \end{cases}$

Răspuns: $x = -5$ - nok max, $x = -4$ - nok min

b) Determinați asimptota oblică la $+\infty$ a graficului funcției $f: y = mx + n$

Rezolvare:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5}{x^2 + 3x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 5}{x + 3} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 5 - x^2 - 3x}{x + 3} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-3x - 5}{x + 3} \right] =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3x}{x} \right) = -3$$

$y = x - 3$ asimptotă oblică

Răspuns:

$$y = x - 3$$

c) Calculați: $\int_{\sqrt{6}}^3 \frac{f(x)(x^2 + 3x)}{\sqrt{x^2 - 5}} dx =$

Rezolvare:

$$= \int_{\sqrt{6}}^3 \frac{(x^2 - 5)x(x + 3)}{\sqrt{x^2 - 5}} dx = \int_{\sqrt{6}}^3 \frac{(x^2 - 5)x}{\sqrt{x^2 - 5}} dx =$$

$$= \int_{\sqrt{6}}^3 \frac{(x^2 - 5)x}{\sqrt{x^2 - 5}} dx = \int_{\sqrt{6}}^3 \frac{(x^2 - 5)x}{\sqrt{x^2 - 5}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{t^2 dt}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \int_1^4 t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right]_1^4 = \frac{1}{5} (4^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}}) = \frac{1}{5} (32 - 1) = \frac{31}{5}$$

Răspuns:

$$\frac{31}{5}$$

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE
DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se formează în mod aleatoriu un cod din 6 cifre care nu se repetă. Determinați probabilitatea ca în acest cod să se conțină secvența 234.

Rezolvare:

$$n = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$A = \{ \text{coduri care conțin secvența } 234 \}$$

$$\frac{234 \square \square \square}{4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}$$

$$m = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{180}$$

Răspuns: $\frac{1}{180}$

12. Determinați termenul care nu-l conține pe a în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[3]{a} \right)^{13}$, $a > 0$.

Rezolvare:

$$T_{k+1} = C_{13}^k \left(a^{-\frac{2}{3}} \right)^{13-k} \left(a^{\frac{1}{3}} \right)^k$$

$$\frac{-26+2k}{3} + \frac{k}{5} = 0, \quad -130+10k-3k=0,$$

$$13k=130 \Rightarrow k=10$$

$$T_{11} = T_{10+1} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{10! \cdot 3!} = \frac{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{10! \cdot 2 \cdot 3} = 286$$

Răspuns: $T_{11} = 286$

Data: _____

Punctaj acumulat: _____

Nota: _____

Nr.	Item	Punctaj	
ALGEBRĂ			
1.	Determinați valoarea expresiei $9^{\log_3 7} + \log_{\frac{1}{5}} 125$. = Rezolvare: $= 3^{2 \log_3 7} + \log_{5^{-1}} 5^3 = 3^{\log_3 7^2} - 3 \log_5 5 =$ $= 7^2 - 3 = 49 - 3 = 46$ Răspuns: 46	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
2.	Determinați modulul numărului complex $z = (5 - 3i)^2 - 42i^3$, unde $i^2 = -1$. Rezolvare: $z = 25 - 30i + 9i^2 - 42i^3 = 25 - 9 - 30i + 42i =$ $= 16 + 12i \Rightarrow z = 16 + 12i$ $a = \operatorname{Re} z = 16; b = \operatorname{Im} z = 12$ $ z = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} =$ $= 20$ Răspuns: $ z = 20$	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
3.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\log_3(x-3) + \log_3(x+3) = 3$. Rezolvare: $\begin{cases} x-3 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow x \in (3; +\infty)$ $\log_3((x-3)(x+3)) = 3; \log_3(x^2-9) = \log_3 27$ $x^2-9 = 27, x^2 = 36, \begin{cases} x = -6 \text{ (nu)} \\ x = 6 \end{cases}$ Răspuns: $S = \{6\}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

4. Calculați $D\left(\frac{\pi}{8}\right)$, dacă $D(x) = \begin{vmatrix} \sin x - \cos x & 4 \sin x \\ \sin x & 4 \cos x \end{vmatrix}$.

Rezolvare:

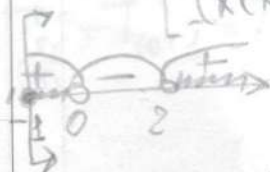
$$\begin{aligned} D(x) &= \begin{vmatrix} \sin x - \cos x & 4 \sin x \\ \sin x & 4 \cos x \end{vmatrix} = \\ &= 4 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x - 4 \sin^2 x = \\ &= 2 \cdot 2 \sin x \cos x - 4 (\cos^2 x + \sin^2 x) = \\ &= 2 \sin 2x - 4 \\ D\left(\frac{\pi}{8}\right) &= 2 \sin \frac{2\pi}{8} - 4 = 2 \sin \frac{\pi}{4} - 4 = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2} - 4 = \sqrt{2} - 4 \end{aligned}$$

Răspuns: $D\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 4$

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $\sqrt{2x^2 + 1} > x + 1$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+1 < 0 \\ 2x^2+1 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x^2+1 > (x+1)^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2+1 > x^2+2x+1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -1) \\ x \geq -1 \\ x(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -1) \\ x \in [-1, 2) \cup (2, +\infty) \end{cases} \end{aligned}$$



Răspuns: $S = (-\infty, -1) \cup [-1, 2) \cup (2, +\infty)$

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul ABC , în care $BC = 10 \text{ cm}$, $AB = 15 \text{ cm}$, $AC = 12 \text{ cm}$, iar BD este bisectoare. Determinați lungimea segmentului CD .

Rezolvare:

$$1) \angle CAD = x \Rightarrow AD = 12 - x$$

2) $\frac{CB}{BA} = \frac{CD}{AD}$ (Teorema bisectoarei)

$$\frac{10}{15} = \frac{x}{12-x} \Rightarrow 10(12-x) = 15x \Rightarrow 120 - 10x = 15x \Rightarrow 120 = 25x \Rightarrow x = \frac{120}{25} = 4,8$$

$$5x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{5} = 4,8$$

$$\Rightarrow CD = 4,8 \text{ cm}$$

Răspuns:

4,8 cm

7. Aria totală a unei prisme patrulater regulate este egală cu 48 cm^2 . Aflați volumul prisme, dacă lungimea laturii bazei este de două ori mai mare decât lungimea muchiei laterale.

Rezolvare:

$$1) \angle AA_1 = x \Rightarrow AB = 2x$$

2) $\text{Prisma patrulater regulată} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_{\text{baza}} = (2x)^2 = 4x^2$$

$$A_{\text{baza}} = 4x^2 = 2x^2 = 8x^2$$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{baza}} + 2A_{\text{lateral}} = 8x^2 + 8x^2 = 16x^2$$

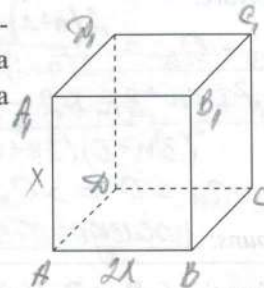
$$A_{\text{total}} = 48 \Rightarrow 16x^2 = 48 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow AA_1 = h = \sqrt{3} \text{ cm}; A_{\text{baza}} = 12 \text{ cm}^2$$

$$3) V = A_{\text{baza}} \cdot h = 12\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

Răspuns:

$V = 12\sqrt{3} \text{ cm}^3$



A_{ABC}?

8. Punctele A, B, C aparțin unui cerc cu raza de 7 cm, astfel încât $m(\angle ABC) = 60^\circ$ și $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{3}$. Determinați aria triunghiului ABC.

Rezolvare:

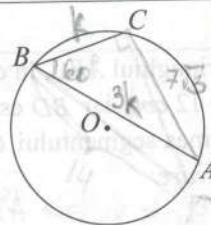
1) $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow BC = k; AB = 3k$

2) $2R = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow 14 = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AC = 7\sqrt{3} \text{ (cm)}$

3) $\cos 60^\circ: AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC \cdot AB \cdot \cos 60^\circ$
 $147 = k^2 + 9k^2 - 2 \cdot k \cdot 3k \cdot \frac{1}{2}; 10k^2 - 3k^2 = 147;$
 $7k^2 = 147; k^2 = 21 \Rightarrow k = \sqrt{21} \Rightarrow CB = \sqrt{21} \text{ cm}; AB = 3\sqrt{21} \text{ cm}$

4) $R = \frac{CB \cdot AB \cdot AC}{4A_{\text{ABC}}} \Rightarrow A_{\text{ABC}} = \frac{CB \cdot AB \cdot AC}{4R} = \frac{\sqrt{21} \cdot 3\sqrt{21} \cdot 7\sqrt{3}}{4 \cdot 7} = \frac{63\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$

Răspuns:



ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiați monotonia șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{2n-1}{3n+2}$.

Rezolvare:

$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{3(n+1)+2} - \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2n+1}{3n+5} - \frac{2n-1}{3n+2}$
 $= \frac{6n^2 + 4n + 3n + 2 - 6n^2 - 10n + 3n + 5}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{7}{(3n+5)(3n+2)} > 0$

$a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$ $\forall n, n \geq 1$
 Răspuns: *последовательность $(a_n)_{n \geq 1}$ возрастает*

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 9x^2$.

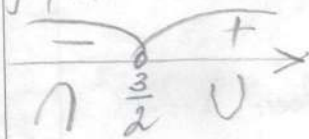
a) Determinați intervalele de convexitate ale funcției f.

Rezolvare:

$f'(x) = (2x^3 - 9x^2)' = 6x^2 - 18x$

$f''(x) = (6x^2 - 18x)' = 12x - 18$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 18 = 0 \Rightarrow 2x = 3; x = \frac{3}{2}$



Răspuns: $f(x)$ *выпукла вверх* на $(-\infty; \frac{3}{2})$ и $f(x)$ *выпукла вниз* на $(\frac{3}{2}; +\infty)$

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

L
0
1
2
3
4
5

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

b) Calculați: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - x^2}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^3 - 9x^2 - x^2}{x^2 - 25} =$

Rezolvare:

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^3 - 10x^2}{x^2 - 25} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2}{x+5} =$$

$$= \frac{2 \cdot 25}{5+5} = \frac{50}{10} = 5$$

Răspuns:

5

c) Calculați: $\int_1^5 |f(x) + x^2| dx = \int_1^5 |2x^3 - 9x^2 + x^2| dx =$

Rezolvare:

$$= \int_1^5 |2x^3 - 8x^2| dx = I$$

$$2x^3 - 8x^2 = 0 ; 2x^2(x-4) = 0 ; \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$



$$I = \int_1^4 (8x^2 - 2x^3) dx + \int_4^5 (2x^3 - 8x^2) dx =$$

$$= \left[\frac{8}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right]_1^4 + \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^3 \right]_4^5 =$$

$$= \frac{512}{3} - \frac{8}{3} - 128 + \frac{1}{2} + \frac{625}{2} - 128 - \frac{1000}{3} + \frac{512}{3} =$$

Răspuns:

$$= \frac{16}{3} + 343 - 256 = \frac{16}{3} + 87 = \frac{16+261}{3} = \frac{277}{3}$$

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

+

+

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. În ascensorul unui bloc cu 9 etaje, la primul etaj au urcat 4 persoane. Fiecare dintre ele poate ieși din ascensor aleatoriu la orice etaj, începând cu al doilea. Determinați probabilitatea ca la etajul 5 să coboare 2 persoane.

Rezolvare:

$A = \{ \text{на } 5^{\text{ом}} \text{ этаже вышли } 2 \text{ человека} \}$

$n = 8^4$

$m = C_4^2 \cdot 7^2$

могут выйти
разные люди

$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 7}{2 \cdot 8 \cdot 8^3} = \frac{147}{2048}$

Răspuns: $\frac{147}{2048}$

$\square \square \square \square$
 $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$

$\square \square \square \square$
 $1 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 7$

любой этаж,
кроме 5-го

12. În dezvoltarea la putere a binomului $\left(2x^3 - \frac{1}{2x}\right)^n$, $x \neq 0$ suma coeficienților binomiali este egală cu 1024. Determinați termenul de mijloc al dezvoltării.

Rezolvare:

$2^n = 1024 \Rightarrow 2^n = 2^{10} \Rightarrow n = 10$

$n = 2k \Rightarrow 10 = 2k \Rightarrow k = 5 \Rightarrow T_6 - \text{ср. член}$

$T_6 = T_{5+1} = C_{10}^5 \cdot 2^5 \cdot x^{3 \cdot 5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot x^{-1 \cdot 5} =$

$= 252 \cdot 32 \cdot x^{15} \cdot \left(-\frac{1}{32}\right) \cdot x^{-5} = -252 x^{10}$

$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5} = 252$

Răspuns: $T_6 = -252x^{10}$

Data: _____ Punctaj acumulat: _____ Nota: _____

Nr.	Item	Punctaj	
ALGEBRĂ			
1.	Determinați valoarea expresiei $\sqrt{64^{\frac{1}{3}} + \log_2 \frac{1}{16}}$. Rezolvare: $64^{\frac{1}{3}} = 4$; $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ Răspuns: 0	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
2.	Determinați conjugatul numărului complex $z = \begin{vmatrix} 3-2i & i \\ 5 & 3+2i \end{vmatrix}$, unde $i^2 = -1$. Rezolvare: $z = (3-2i)(3+2i) - 5i = 9 - (2i)^2 - 5i = 9 + 4 - 5i = 13 - 5i$ $\bar{z} = 13 + 5i$ Răspuns: $\bar{z} = 13 + 5i$	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
3.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $\sqrt{x-1} < x-1$. Rezolvare: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 < x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-3x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 1 \text{ sau } x > 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 2 \end{cases}$ Răspuns: $S = (2; +\infty)$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

+

4. Determinați valoarea expresiei $E(x) = \frac{\sqrt{2}}{7} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, dacă se știe că $\cos x = -\frac{5}{13}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Rezolvare:

1) $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \sin x > 0$ (în rezolvare)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$

3) $E(x) = \frac{\sqrt{2}}{7} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{7} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x) = \frac{1}{7} \left(\frac{12}{13} - \frac{5}{13}\right) = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{13} = \frac{1}{13}$

Răspuns: $\frac{1}{13}$

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\log_3 \frac{x^2}{3} - 2 \log_3 (3x^2) = -4$.

Rezolvare:

cond: $x \neq 0$

$$\log_3 x^2 - \log_3 3 - 2 \log_3 3 - 2 \log_3 x^2 = -4$$

$$-\log_3 x^2 = -4 + 3$$

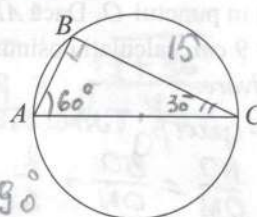
$$\log_3 x^2 = 1$$

$$x^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Răspuns: $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

GEOMETRIE

6. În desenul alăturat, triunghiul ABC cu $BC=15\text{ cm}$ și $m(\angle BAC)=60^\circ$ este înscris în cercul cu diametrul AC . Determinați aria discului mărginit de acest cerc.

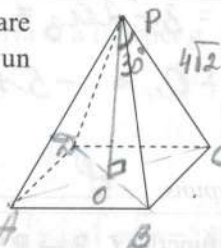


Rezolvare:

- 1) AC - diametrul $\Rightarrow m(\angle ABC) = 90^\circ$
- 2) $\triangle ABC$, $m(\angle B) = 90^\circ$, $m(\angle A) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle C) = 30^\circ$;
 $AB = a$, $AC = 2a$, $BC = a\sqrt{3}$; $a\sqrt{3} = 15$;
 $a = 5\sqrt{3} \Rightarrow AC = 10\sqrt{3}\text{ (cm)}$
- 3) $AC = 2r \Rightarrow 10\sqrt{3} = 2r \Rightarrow r = 5\sqrt{3}\text{ (cm)}$
- 4) $A = \pi r^2 = (5\sqrt{3})^2 \pi = 75\pi\text{ (cm}^2\text{)}$

Răspuns: $75\pi\text{ cm}^2$

7. Muchia laterală a unei piramide patrulatere regulate are lungimea de $4\sqrt{2}\text{ cm}$ și formează cu înălțimea piramidei un unghi de 30° . Determinați volumul piramidei.



Rezolvare:

- 1) $\triangle POC$, $m(\angle O) = 90^\circ$, $m(\angle P) = 30^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow OC = a$, $PC = 2a$, $PO = a\sqrt{3}$;
 $4\sqrt{2} = 2a$, $a = 2\sqrt{2} \Rightarrow OC = 2\sqrt{2}\text{ cm}$, $PO = 2\sqrt{6}\text{ cm}$
- 2) Suprafața bazei este un pătrat $\Rightarrow ABCD$ - pătrat,
 $AC = 2OC = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = \frac{2OC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2} =$
 $= 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4\text{ (cm)}$
- 3) $A_{\text{baza}} = AB^2 = 4^2 = 16\text{ (cm}^2\text{)}$
- 4) $V = \frac{1}{3} A_{\text{baza}} \cdot PO = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{6} = \frac{32\sqrt{6}}{3}\text{ (cm}^3\text{)}$

Răspuns: $\frac{32\sqrt{6}}{3}\text{ cm}^3$

5) $\cos \alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{100 + 144 - 169}{2 \cdot 10 \cdot 12} = \frac{75}{120} = \frac{5}{8}$
 $100 = 128 + 144 - 169 \cos \alpha \dots \cos \alpha = \frac{75}{120}$

8.	În triunghiul ABC medianele AM și BN se intersectează în punctul O. Dacă $AB = 10$ cm, $AM = 12$ cm, $BN = 9$ cm, calculați cosinusul unghiului BCA. Rezolvare: 1) O - centrul de greutate $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{AO}{OM} = \frac{BO}{ON} = \frac{2}{1} \Rightarrow AO = 2a, OM = a, AM = 3a$ $BO = 2b, ON = b, BN = 3b$ $12 = 3a \Rightarrow a = 4 \Rightarrow AO = 8$ cm; $OM = 4$ cm $9 = 3b \Rightarrow b = 3 \Rightarrow BO = 6$ cm; $ON = 3$ cm 2) $\triangle BOA$, $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2 \Rightarrow BO^2 + OA^2 = AB^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle BOA$ - triunghi dreptunghic ($m(\angle O) = 90^\circ$) Răspuns: 3) $\triangle AON$, $m(\angle O) = 90^\circ$, $AO = 8$, $ON = 3 \Rightarrow AN = \sqrt{73} \Rightarrow AC = 2\sqrt{73}$ cm 4) $\triangle BOM$, $BM = 2\sqrt{13}$ cm	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
9.	Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_{n+1} = 3 - 2a_n$, $a_1 = -0,5$. Determinați suma $a_3 + a_4$. Rezolvare: $a_2 = 3 - 2a_1 = 3 - 2(-0,5) = 3 + 1 = 4$ $a_3 = 3 - 2a_2 = 3 - 2 \cdot 4 = 3 - 8 = -5$ $a_4 = 3 - 2a_3 = 3 - 2(-5) = 3 + 10 = 13$ $a_3 + a_4 = -5 + 13 = 8$ Răspuns: 8	L 0 1 2 3 4 5
10.	Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$. a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 4$. Rezolvare: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ $f(4) = f(4) = \sqrt{4^2 + 9} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ $f'(x) = (\sqrt{x^2 + 9})' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$ $f'(x_0) = f'(4) = \frac{4}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$ $y = \frac{4}{5}(x - 4) + 5$; $y = \frac{4}{5}x - \frac{16}{5} + 5$; $y = \frac{4}{5}x + \frac{9}{5}$ уравнение касательной Răspuns: $y = \frac{4}{5}x + \frac{9}{5}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

L
0
1
2
3
4
5

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

b) Comparați numerele $a = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-5}{2x-8}$ și $b = f\left(\frac{1}{2}\right)$.
Rezolvare:

$$b = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9} = \sqrt{\frac{1}{4} + 9} = \sqrt{\frac{1+36}{4}} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-5}{2x-8} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{2x-8} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x|}{2x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{37}}{2} \Rightarrow a < b$$

Răspuns: $a < b$

c) Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x+3}{f(x)}$. Determinați primitiva G a funcției g , care trece prin originea de coordonate. $\Rightarrow G(0) = 0$

Rezolvare:

$$g(x) = \frac{x+3}{f(x)} = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$G(x) = \int g(x) dx = \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+9}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx + 3 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} dx =$$

$$= I_1 + 3I_2 = \sqrt{x^2+9} + 3 \ln|x + \sqrt{x^2+9}| + C$$

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx = \left[\begin{matrix} x^2+9 = t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \dots = \sqrt{x^2+9} + C$$

$$I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+9}| + C$$

$$G(0) = 0 \Rightarrow \sqrt{9} + 3 \ln|\sqrt{9}| + C = 0;$$

$$3 + 3 \ln 3 + C = 0; C = -3 - 3 \ln 3$$

Răspuns: $G(x) = \sqrt{x^2+9} + 3 \ln|x + \sqrt{x^2+9}| - 3 - 3 \ln 3$

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

$n = (\text{кон-во сторон}) \cdot \text{кон-во костей}$

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se aruncă concomitent patru zaruri. Determinați probabilitatea ca fața cu 5 puncte să apară pe cel puțin un zar.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{появится "5" минимум на 1-ом из 4-х}\} \\ \bar{A} &= \{\text{не появится "5" ни на одной из 4-х}\} \\ B &= \{\text{появится "5" на 1-ом}\}; p(B) = \frac{1}{6} \\ \bar{B} &= \{\text{не появится "5" на 1-ом}\}; p(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \\ p(\bar{A}) &= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1296} \\ p(A) &= 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{1296 - 625}{1296} = \frac{671}{1296} \end{aligned}$$

Răspuns:

12. Determinați rangul termenului ce conține x^2 în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{3\sqrt{x}}\right)^n$, $x > 0$, dacă coeficientul binomial al termenului al treilea este cu 27 mai mare decât coeficientul binomial al termenului al doilea.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} C_n^2 &= C_n^1 + 27 \\ \frac{n!}{(n-2)!2!} &= \frac{n!}{(n-1)!1!} + 27 \\ \frac{(n-2)! \cdot n \cdot (n-1)}{(n-2)! \cdot 2} &= \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)!} + 27 \\ n^2 - n - 2n - 54 &= 0 \\ n^2 - 3n - 54 &= 0; \begin{cases} n = 9 \\ n = -6 \end{cases} \Rightarrow n = 9 \\ T_{k+1} &= C_n^k \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{2}{3\sqrt{x}}\right)^k = C_9^k \left(\frac{1}{2}\right)^{9-k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot (x^{\frac{1}{2}})^{9-k} \cdot (x^{-\frac{1}{2}})^k \\ \frac{9-k}{2} - \frac{k}{2} - \frac{k}{3} &= 2; 27 - 3k - 2k = 12; 5k = 15; \\ k &= 3 \Rightarrow T_{3+1} = T_4 \end{aligned}$$

Răspuns:

Data: _____

Punctaj acumulat: _____ Nota: _____

Nr.	Item	Punctaj	
ALGEBRĂ			
1.	Determinați valoarea expresiei $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} - \sqrt{27} + 1$. Rezolvare: $= \sqrt{3} - 1 - 3\sqrt{3} + 1 = \sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$ Răspuns: $-2\sqrt{3}$	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
2.	Fie $z = \frac{15+20i}{2+i}$. Determinați numărul $w = \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z}$. Rezolvare: $z = \frac{(15+20i)(2-i)}{2^2 - i^2} = \frac{30+40i-15i-20i^2}{4+1} = \frac{30+20+25i}{5} = \frac{50+25i}{5} = 10+5i$ $w = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ Răspuns: $w = \frac{1}{2}$	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
3.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\begin{vmatrix} 2^x+16 & 2^x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Rezolvare: $2^x+16-2 \cdot 2^x = 0$, $2^x-2 \cdot 2^x = -16$, $2^x(1-2) = -16$, $-2^x = -16$; $2^x = 16$; $2^x = 2^4$, $x = 4$ Răspuns: $S = \{4\}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

4. Fie expresia $E(\alpha) = \frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{2 \sin^2 \alpha}$. Calculați valoarea expresiei $E\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Rezolvare:

NB: $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -(\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) = -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = -\cos 2\alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$E(\alpha) = \frac{-\cos 2\alpha}{2 \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{-\cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$$

$$E\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-\cos \frac{\pi}{6}}{1 - \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} \cdot (2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{-2\sqrt{3} - 3}{4 - 3} = -3 - 2\sqrt{3}$$

Răspuns: $E\left(\frac{\pi}{12}\right) = -3 - 2\sqrt{3}$

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\frac{\log_2^2 x + \log_2 x^2}{|x-3|} \leq 0$.

Rezolvare:

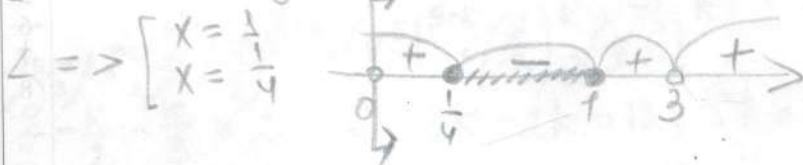
Nu se zădărnicește

$$\log_2^2 x + \log_2 x^2 = 0$$

$$(\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x = 0$$

$$[\log_2 x = t \Rightarrow t^2 + 2t = 0; t(t+2) = 0;$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \log_2 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$



Răspuns: $S = \left[\frac{1}{4}, 1\right]$

NB: $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; +\infty)$

GEOMETRIE

6. În desenul alăturat, triunghiul ABC cu $m(\angle ACB) = 60^\circ$ este înscris în cercul de centru O și raza de 6 cm . Determinați lungimea coardei AB .

Rezolvare:

$$1) m(\angle AOB) = 2m(\angle ACB) = 120^\circ$$

$$3) \text{ Din } \triangle \cos: \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos 120^\circ$$

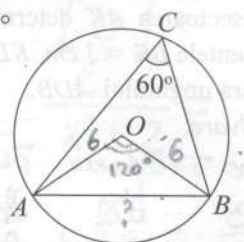
$$AB^2 = 36 + 36 - 2 \cdot 36 \cdot (-\frac{1}{2})$$

$$AB^2 = 72 + 36; AB^2 = 108; \begin{cases} AB = -6\sqrt{3} < 0 \\ AB = 6\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 6\sqrt{3}\text{ cm}$$

Răspuns:

$$AB = 6\sqrt{3}\text{ cm}$$



7. Baza unei prisme drepte este un trapez isoscel cu baza mare de 25 cm și baza mică de 7 cm . Determinați lungimea diagonalei prisme, dacă se cunoaște că fețele laterale ale prisme sunt pătrate cu aria de 225 cm^2 .

Rezolvare:

$$1) \text{ } AB = x \Rightarrow CD = x$$

$$2) \text{ } CC_1D_1D - \text{квадрат};$$

$$x^2 = 225 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = CD = CC_1 = 15\text{ cm}$$

$$3) \text{ Трапеция высот}$$

$$BT = CK, BC = TK = 7\text{ cm};$$

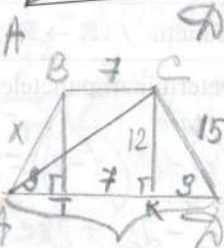
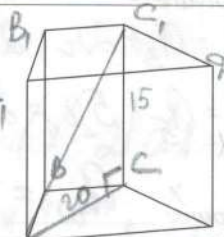
$$AT = KD = 9\text{ cm}; AK = AT + TK = 9 + 7 = 16\text{ (cm)}$$

$$4) \triangle CKD, m(\angle K) = 90^\circ, \text{ по т. Пифагора}$$

$$CD^2 = CK^2 + KD^2; CK = \sqrt{CD^2 - KD^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12\text{ (cm)}$$

$$5) \triangle ACK - \text{прямоугольный, египетский} \Rightarrow AC = 20\text{ cm}$$

$$\text{Răspuns: } \triangle AGC - \text{прямоугольный, египетский} \Rightarrow AC_1 = 25\text{ cm}$$



8. Fie paralelogramul $ABCD$, în care $m(\angle A) = 60^\circ$, iar bisectoarea AK determină pe diagonala BD segmentele $BK = 3 \text{ cm}$, $KD = 6 \text{ cm}$. Determinați măsura unghiului ADB .

Rezolvare:

1) $\frac{AB}{BK} = \frac{AD}{KD}$ (teorema lui Menelaus)

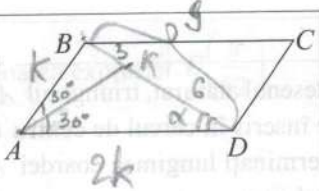
$$\frac{AB}{3} = \frac{AD}{6} \Rightarrow AB = \frac{AD}{2} \Rightarrow AD = 2AB$$

2) $BD = BK + KD = 3 + 6 = 9 \text{ cm}$

3) $\cos 60^\circ = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD}$
 $\frac{1}{2} = \frac{k^2 + (2k)^2 - 9^2}{2 \cdot k \cdot 2k}$
 $\frac{1}{2} = \frac{k^2 + 4k^2 - 81}{4k^2}$
 $\frac{1}{2} = \frac{5k^2 - 81}{4k^2}$
 $2k^2 = 5k^2 - 81$
 $3k^2 = 81$
 $k^2 = 27$
 $k = 3\sqrt{3}$
 $AD = 6\sqrt{3}$

4) $(3\sqrt{3})^2 + 9^2 = 27 + 81 = 108 = (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow \triangle ABD$ - dreptunghi
 $m(\angle B) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle D) = 30^\circ$

Răspuns: 30°



ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați termenul a_{10} al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă $a_3 = 7$ și $a_5 = 23$.

Rezolvare:

$$a_5 = a_3 + 2r; 23 = 7 + 2r; 2r = 16; r = 8$$

$$a_{10} = a_5 + 5r = 23 + 5 \cdot 8 = 23 + 40 = 63$$

Răspuns: $a_{10} = 63$

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x(x^2 - 2)$.

a) Determinați punctele de inflexiune ale funcției f .

Rezolvare:

$$f'(x) = (e^x(x^2 - 2))' = (e^x)'(x^2 - 2) + e^x(x^2 - 2)' = e^x(x^2 - 2) + 2xe^x$$

$$= x^2e^x - 2e^x + 2xe^x = e^x(x^2 - 2 + 2x)$$

$$f''(x) = [e^x(x^2 + 2x - 2)]' = (e^x)'(x^2 + 2x - 2) + e^x(x^2 + 2x - 2)'$$

$$= e^x(x^2 + 2x - 2) + e^x(2x + 2) = e^x(x^2 + 2x - 2 + 2x + 2)$$

$$= e^x(x^2 + 4x)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x = 0; x(x + 4) = 0; \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

Răspuns: $x = -4$ și $x = 0$



L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

HRU

L
0
1
2
3
4
5

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

b) Calculați: $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{f(x)}{x^4 - 4} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{e^x(x^2 - 2)}{x^4 - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] =$
 Rezolvare:

$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{e^x(x^2 - 2)}{(x^2 - 2)(x^2 + 2)} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{e^x}{x^2 + 2} =$$

$$= \frac{e^{\sqrt{2}}}{2 + 2} = \frac{e^{\sqrt{2}}}{4}$$

Răspuns: $\frac{e^{\sqrt{2}}}{4}$

c) Determinați valoarea numerică a ariei figurii mărginite de graficul funcției f , de dreptele $x = 2$, $x = 4$ și de axa Ox .

Rezolvare:

$$A_{\text{figură}} = \int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 e^x(x^2 - 2) dx =$$

$$= \left[u = x^2 - 2 \quad dv = e^x dx \right] = (x^2 - 2)e^x \Big|_2^4 - \int_2^4 2xe^x dx =$$

$$= \left[u = x \quad dv = e^x dx \right] = (x^2 - 2)e^x \Big|_2^4 - 2xe^x \Big|_2^4 + 2 \int_2^4 e^x dx =$$

$$= 14e^4 - 2e^2 - 8e^4 + 4e^2 + 2e^4 \Big|_2^4 =$$

$$= 6e^4 + 2e^2 + 2e^4 - 2e^2 = 8e^4 \text{ (kb eg)}$$

Răspuns: $A_{\text{figură}} = 8e^4 \text{ kb. eg}$

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Un grup din 12 elevi, printre care Mihai, Ion și Doina, au venit la un cinematograf în aer liber. Într-un rând, sunt 10 scaune – unicele libere. Care este probabilitatea ca elevii să ocupe aceste scaune, astfel încât Mihai, Ion și Doina să se așeze alături?

Rezolvare:

$$n = A_{12}^{10}$$

$$m = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2}{55}$$

$$A = \{M, I, D \text{ cunoscute persoane}\}$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2}{55}$$

$$\text{Răspuns: } \frac{2}{55}$$

12. Determinați numărul de termeni raționali ai dezvoltării la putere a binomului $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5})^{80}$.

Rezolvare:

$$T_{k+1} = C_{80}^k (2^{\frac{1}{2}})^{80-k} (5^{\frac{1}{3}})^k = C_{80}^k \cdot 2^{40 - \frac{k}{2}} \cdot 5^{\frac{k}{3}}$$

$$k \in [0, 80], k \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{array}{l} k:2 \\ k:3 \end{array} \right\} \Rightarrow k:6 \Rightarrow k \in \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78\}$$

14 рациональных членов

$$\text{Răspuns: } 14 \text{ рациональных членов}$$

Data: _____ Punctaj acumulat: _____ Nota: _____

Nr.	Item	Punctaj	
ALGEBRĂ			
1.	Determinați valoarea expresiei $\sqrt[3]{2^{(\sqrt{2}-1)^2} \cdot 4^{\sqrt{2}}}$. Rezolvare: $\sqrt[3]{(2^{\sqrt{2}-1})^2 \cdot 2^{2\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{2^{2\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{2^{4\sqrt{2}-2}} = \sqrt[3]{2^{2(2\sqrt{2}-1)}} = 2^{\frac{2\sqrt{2}-1}{3} \cdot 3} = 2^{2\sqrt{2}-1} = 2^{2\sqrt{2}} \cdot 2^{-1} = \frac{2^{2\sqrt{2}}}{2} = 2^{2\sqrt{2}-1} = 2^3 = 8$ $\sqrt[3]{2^{(\sqrt{2}-1)^2} \cdot 4^{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{2^{(\sqrt{2}-1)^2 + 2\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{2^{2\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{2^{4\sqrt{2}-2}} = \sqrt[3]{2^{2(2\sqrt{2}-1)}} = 2^{\frac{2\sqrt{2}-1}{3} \cdot 3} = 2^{2\sqrt{2}-1} = 2^{2\sqrt{2}} \cdot 2^{-1} = \frac{2^{2\sqrt{2}}}{2} = 2^{2\sqrt{2}-1} = 2^3 = 8$ Răspuns: 2	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
2.	Determinați restul împărțirii polinomului $P(X) = 5X^3 - X^2 - 12X + 10$ la binomul $X + 2$. Rezolvare: $r = P(-2) = -40 - 4 + 24 + 10 = -10$ Răspuns: $r = -10$	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
3.	Fie $D(x) = \begin{vmatrix} 3^{3x-1} & 3 \\ 27 & 9^x \end{vmatrix}$. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $D(x) = 0$. Rezolvare: $D(x) = 3^{3x-1} \cdot 3 - 3 \cdot 3^2 = 3^{3x-1} - 81$ $3^{3x-1} = 81; 3^{3x-1} = 3^4; 3x-1 = 4;$ $3x = 5; x = \frac{5}{3}$ Răspuns: $S = \{\frac{5}{3}\}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Determinați numerele reale x ∈ [π/2; π], care verifică ecuația cos(2x) = cos x.

4. Determinați numărul complex $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$, pentru care

$$\frac{2\bar{z}}{z+5} = 3i, \text{ unde } \bar{z} \text{ este conjugatul lui } z.$$

Rezolvare: $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$

$$2\bar{z} = 3i(z+5)$$

$$2(a - bi) = 3i(a + bi + 5)$$

$$2a - 2bi = 3ai + 3bi^2 + 15i$$

$$2a - 2bi = -3b + (15 + 3a)i$$

$$\begin{cases} 2a = -3b \\ -2b = 15 + 3a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -15 + b \\ -2b = 15 + 3(-15 + b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -15 + b \\ -2b = 15 - 45 + 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -15 + b \\ 5b = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -15 + 6 \\ 5b = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 6 \end{cases}$$

$$z = -9 + 6i$$

$$z = -9 + 6i$$

Răspuns:

5. Determinați numerele reale $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, care verifică ecuația $\cos(2x) = \cos x$.

Rezolvare:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos x, \cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0,$$

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x - \cos x = 0; 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0;$$

$$[\cos x = t, t \in [-1; 1]$$

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2\pi n, n \in \mathbb{N} \\ x = 2\pi k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

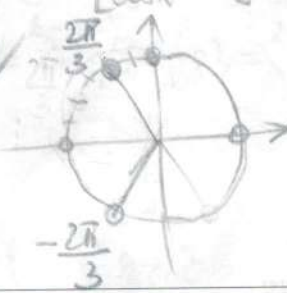
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{N} \\ x = 2\pi k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{N} \\ x = 2\pi k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Răspuns:

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3} \right\}$$

$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{2\pi}{3} \notin [\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases} \quad k=1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \notin I \\ x = \frac{4\pi}{3} \notin I \end{cases} \dots$



L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

GEOMETRIE

6. Aria totală a cubului din desenul alăturat este de 972 cm^2 .
Calculați lungimea diagonalei acestui cub.

Rezolvare:

$$1) A_{\text{total}} = 6a^2$$

$$6a^2 = 972; a^2 = 162;$$

$$a = 9\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$2) DB = a\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 9 \cdot 2 = 18 \text{ (cm)}$$

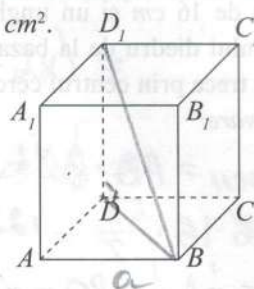
$$3) \triangle DAB, m(\angle D) = 90^\circ, \text{ no } \nabla \text{ Teorema Pitagora}$$

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{AD^2 + DB^2} =$$

$$= \sqrt{(9\sqrt{2})^2 + 18^2} = \sqrt{162 + 324} = \sqrt{486} = 9\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

$$\textcircled{II} DB = a\sqrt{3} = 9\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

Răspuns: $9\sqrt{6} \text{ cm}$



7. Fie cercul $C(O, R)$ și punctele $A, B, C \in C(O, R)$, astfel încât AC este diametrul cercului. În triunghiul ABC , $BD \perp AC$, $D \in [AC]$, $BD = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ și $DC = 2AD$. Determinați aria discului mărginit de cerc.

Rezolvare:

$$1) AC \text{ - diametrul } \Rightarrow m(\angle ABC) = 90^\circ$$

$$2) \angle AD = x \Rightarrow DC = 2x; AC = 3x$$

$$3) \text{ no Teorema lui Euler: } BD^2 = AD \cdot DC;$$

$$(2\sqrt{3})^2 = x \cdot 2x; 12 = 2x^2; x^2 = 6; x = \sqrt{6} \Rightarrow$$

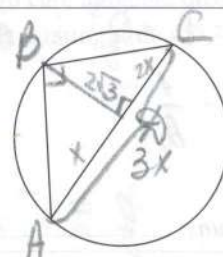
$$\Rightarrow AC = 3\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$4) AC = 2r = 3\sqrt{6} \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{6}}{2} \text{ (cm)}$$

$$4) A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} \right)^2 = \pi \cdot \frac{9 \cdot 6}{4} = \frac{24\pi}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\frac{24\pi}{2} \text{ cm}^2$$

Răspuns:



$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

8. Baza unei piramide cu volumul de 512 cm^3 este un romb cu latura de 16 cm și un unghi de 120° . Determinați măsura unghiului diedru de la baza piramidei, dacă înălțimea piramidei trece prin centrul cercului înscris în bază.

Rezolvare:

$$1) A_{\text{romb}} = AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ = 16 \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 128\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$2) V = \frac{1}{3} A_{\text{romb}} \cdot PO \Rightarrow 512 = \frac{1}{3} \cdot 128\sqrt{3} \cdot PO,$$

$$PO = \frac{512 \cdot 3}{128\sqrt{3}} = \frac{256 \cdot 3\sqrt{3}}{64 \cdot 3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$3) \triangle COB, m(\angle O) = 90^\circ, m(\angle B) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle C) = 30^\circ \Rightarrow OB = a, CB = 2a, OC = a\sqrt{3}, 16 = 2a \Rightarrow a = 8 \Rightarrow OB = 8 \text{ cm}, OC = 8\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$4) OK \perp CB \text{ în } \triangle COB \Rightarrow OK = ? , OK \perp CB$$

Răspuns:

$$5) \triangle COB \dots OK = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă $b_2 = -\frac{1}{2}$ și $b_7 = \frac{1}{64}$.

Rezolvare:

$$b_7 = b_2 \cdot q^5; \frac{1}{64} = (-\frac{1}{2})q^5; q^5 = -\frac{1}{32};$$

$$q = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Răspuns: } q = -\frac{1}{2}$$

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{4x^2 + 8} + 2x$.

a) Calculați: $\int_{-1}^0 x(f(x) - 2x) dx$.

Rezolvare:

$$f(x) - 2x = \sqrt{4x^2 + 8} + 2x - 2x = \sqrt{4x^2 + 8}$$

$$\int_{-1}^0 x(f(x) - 2x) dx = \int_{-1}^0 x\sqrt{4x^2 + 8} dx = \int_{-1}^0 x\sqrt{4x^2 + 8} dx$$

$$\begin{cases} 4x^2 + 8 = t \\ 8x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{8} dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = 12 \\ x = 0 \Rightarrow t = 8 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{8} \int_{12}^8 \sqrt{t} dt = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_{12}^8 = \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{2} - \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3} =$$

$$\text{Răspuns: } = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{2} - 6\sqrt{3}}{3}$$

b) Determinați

Rezolvare:

$$f = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$= [\infty -$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty}$$

$$y = 0$$

Răspuns:

c) Determinați

la graficul fun

Rezolvare:

$$k = f'(x_0)$$

$$f'(x) =$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 8}}$$

$$f(x_0) = \sqrt{4x_0^2 + 8}$$

$$f'(x_0) =$$

$$4x_0 + \sqrt{4x_0^2 + 8}$$

$$\sqrt{4x_0^2 + 8}$$

$$\Delta \Rightarrow \begin{cases} 10 \\ \end{cases}$$

Răspuns:

L	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

L	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

L	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

b) Determinați asimptota orizontală la $-\infty$ a graficului funcției f .

Rezolvare:

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 8} + 2x) =$$

$$= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2|x| + 2x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 2x) = 0$$

$y = 0$ orizontala asimptotă

Răspuns: $y = 0$

c) Determinați abscisa punctului de pe graficul funcției f în care tangenta dusă la graficul funcției formează cu direcția pozitivă a axei Ox un unghi de 45° .

Rezolvare:

$$1) k = f'(x_0) = \tan 45^\circ = 1$$

$$2) f'(x) = (\sqrt{4x^2 + 8} + 2x)' = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 8}} + 2 =$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 8}} + 2$$

$$3) f'(x_0) = \frac{4x_0}{\sqrt{4x_0^2 + 8}} + 2$$

$$4) f'(x_0) = 1 \Rightarrow \frac{4x_0}{\sqrt{4x_0^2 + 8}} + 2 = 1; \frac{4x_0}{\sqrt{4x_0^2 + 8}} = -1;$$

$$\frac{4x_0 + \sqrt{4x_0^2 + 8}}{\sqrt{4x_0^2 + 8}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4x_0^2 + 8} = -4x_0 \\ 4x_0^2 \in \mathbb{R}_- \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x_0^2 - 4x_0^2 - 8 = 0 \\ x_0^2 \in \mathbb{R}_- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ x_0 = -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Rightarrow x_0 = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Răspuns:

$x \in \mathbb{R}_-$

L	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

L	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11.	În timpul unei victorine televizate, participanților li se propune să aleagă aleatoriu întrebări din trei domenii: Artă, Istorie, Științe. Probabilitatea ca un participant să aleagă o întrebare din domeniul Arte este de 0,3, din Istorie – de 0,2, iar din Științe – 0,5. Care este probabilitatea ca în trei runde un participant să extragă întrebări doar din două domenii? <i>Три раунда</i>	L	L
	Rezolvare:	0	0
	$B_i = \{\text{вопрос про } A_i\}; p(B_i) = 0,3$	1	1
	$C_i = \{\text{вопрос про } I_i\}; p(C_i) = 0,2$	2	2
	$A_i = \{\text{вопрос про } S_i\}; p(A_i) = 0,5$	3	3
	$A = \{\text{вопросы из 2х областей}\}$	4	4
	$p(A) = 0,3^2(0,2+0,5) + 0,2^2(0,3+0,5) + 0,5^2(0,3+0,2) =$	5	5
	$= 0,09 \cdot 0,7 + 0,04 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,5 =$	6	6
	$= 0,063 + 0,032 + 0,125 = 0,22$	7	7
	Răspuns: <u>0,22</u>	8	8
12.	Determinați numărul de termeni iraționali ai dezvoltării la putere a binomului $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[5]{7})^{100}$.	L	L
	Rezolvare:	0	0
	$T_{k+1} = C_{100}^k (3^{\frac{1}{4}})^{100-k} (7^{\frac{1}{5}})^k = C_{100}^k \cdot 3^{\frac{100-k}{4}} \cdot 7^{\frac{k}{5}}$	1	1
	$k \in [0; 100], k \in \mathbb{N}$	2	2
	$\left. \begin{matrix} (100-k):4 \\ k:5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow k \in \{0; 20; 40; 60; 80; 100\}$	3	3
	6 рациональных членов	4	4
	$n = 100 \Rightarrow$ Всего 101 член	5	5
	$101 - 6 = 95$ (иррациональных членов)	6	6
	Răspuns: <u>95 иррациональных членов</u>	7	7
		8	8

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Data: _____ Punctaj acumulat: _____ Nota: _____

Nr.	Item	Punctaj	
ALGEBRĂ			
1.	Determinați valoarea expresiei $3^{\log_{\sqrt{3}} \lg 60^\circ}$. Rezolvare: $3^{\log_{\sqrt{3}} \lg 60^\circ} = 3^{\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{2}} = 3^{2 \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}} = 3^{\log_{\sqrt{3}} 3} = (\sqrt{3})^2 = 3$ Răspuns: 3	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
2.	Determinați valorile reale ale lui a pentru care $X = -3$ este rădăcină a polinomului $P(X) = X^3 + (a-1)X^2 - 5X + 3$. Rezolvare: $P(-3) = 0 \Rightarrow -27 + 9a - 9 + 15 + 3 = 0$ $9a = 18; a = 2$ Răspuns: $a = 2$	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
3.	Rezolvați în $\mathbb{N}$ inecuația $\left(\frac{1}{8}\right)^{3-x} < 0,25$. Rezolvare: $2^{-3(3-x)} < 2^{-2}; 2^{3x-9} < 2^{-2}; 2^{3x-9} < 2^{-2}$ $3x-9 < -2; 3x < 7; x < \frac{7}{3}$ $x \in (-\infty, \frac{7}{3}); x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2\}$ Răspuns: $S = \{0, 1, 2\}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

4.	Determinați numerele complexe $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$, pentru care	L	L
	$\begin{vmatrix} z+2i & 3-i \\ \bar{z} & 2 \end{vmatrix} = -6-20i$	0	0
	Rezolvare: $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$	1	1
	$z(a+bi) + 4i - 3(a-bi) + (a-bi)i =$	2	2
	$= 2a + 2bi + 4i - 3a + 3bi + ai - bi^2 =$	3	3
	$= -a + 5bi + b + 4i + ai - b - a + ai + 5bi + 4i$	4	4
	$(b-a) + (a+5b+4)i = -6-20i$	5	5
	$\begin{cases} b-a = -6 \\ a+5b+4 = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b+6 \\ b+6+5b+4 = -20 \end{cases} \Leftrightarrow$	6	6
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b+6 \\ 6b = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases}$	7	7
	$z = 1 - 5i$	8	8
	Răspuns: $z = 1 - 5i$		
5.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{4-x^2}} = 0$.	L	L
	Rezolvare:	0	0
	CB: $4-x^2 > 0; x^2 < 4; x \in (-2, 2)$	1	1
	$\sin x - \cos x = 0 \quad : \cos x, \cos x \neq 0$	2	2
	$\tan x = 1$	3	3
	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{N}$	4	4
	Выводим решение из промежутка $(-2, 2)$	5	5
	$n = -1 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{4} \notin (-2, 2)$	6	6
	$n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$	7	7
	$n = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \notin (-2, 2)$	8	8
	Răspuns: $S = \{\frac{\pi}{4}\}$		

6. Secțiunea axi
cu diagonala
lindrului.

Rezolvare:

1) $ABCD - O$

$AB = a$

$a = \frac{6\sqrt{2}}{2}$

$AB = AD$

2) $AO = OD$

3) $AO = OD$

4) $AO = OD$

$= 10\sqrt{2}$

5) $AO = OD$

Răspuns: —

7. Fie triunghiul

$m(\angle B) = 90^\circ$, i

lungimea bisec

$BC = 3 \text{ cm}$ și A

Rezolvare:

1) $\triangle ABC$

2) $AM = X$

3) $\triangle OBC$

$\frac{BC}{CA} = \frac{B}{M}$

$8x = 20;$

4) $\triangle MBC, m$

$MC^2 = MB^2$

$= \sqrt{\frac{9+36}{4}} =$

Răspuns: —

L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

GEOMETRIE

6. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu diagonala de $6\sqrt{6}$ cm. Determinați suprafața totală a cilindrului.

Rezolvare:

$$1) \triangle ABC - \text{echilateral}; AC = a\sqrt{2};$$

$$AB = a, 6\sqrt{6} = a\sqrt{2};$$

$$a = \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{12}}{2} = 3\sqrt{12} = 6\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$AB = AD = AC = CB = 6\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

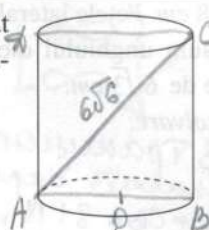
$$2) AO = OB = r = \frac{AB}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$3) A_{\text{cui}} = \pi r^2 = 27\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$4) A_{\text{ook}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot AO \cdot CB = 2\pi \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 108\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$5) A_{\text{total}} = A_{\text{ook}} + 2A_{\text{cui}} = 108\pi + 54\pi = 162\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Răspuns: $162\pi \text{ cm}^2$



7. Fie triunghiul dreptunghic ABC în care $m(\angle B) = 90^\circ$, iar CM este bisectoare. Determinați lungimea bisectoarei CM, dacă se cunoaște că $BC = 3$ cm și $AC = 5$ cm.

Rezolvare:

$$1) \triangle ABC - \text{прямоугольный, катеты} \Rightarrow AB = 4 \text{ cm}$$

$$2) AM = x \Rightarrow MB = 4 - x$$

$$3) \text{ по теореме биссектрисы}$$

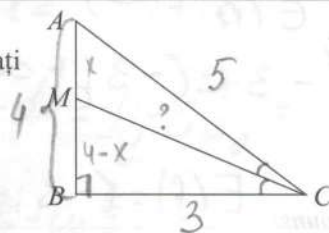
$$\frac{BC}{CA} = \frac{BM}{MA} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{4-x}{x} \Rightarrow 20 - 5x = 3x,$$

$$8x = 20; x = \frac{5}{2} \Rightarrow AM = \frac{5}{2} \text{ cm}; MB = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

$$4) \triangle MBC, m(\angle B) = 90^\circ, \text{ по т. Пифагора}$$

$$MC^2 = MB^2 + BC^2; MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 9} = \sqrt{\frac{36 + 9}{4}} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ (cm)}$$

Răspuns:



L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

moreno bnuat exp

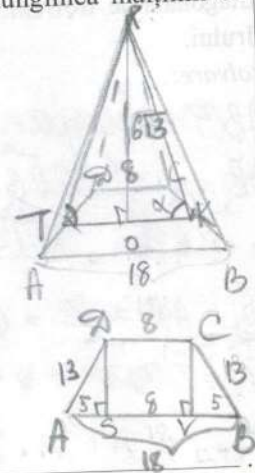
8. Baza unei piramide este un trapez isoscel circumscriptibil cu bazele de 8 cm și 18 cm. Fețele laterale formează cu planul bazei unghiuri congruente. Aflați măsura unghiului diedru de la baza piramidei, dacă lungimea înălțimii ei este de $6\sqrt{3}$ cm.

Rezolvare:

- 1) В трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AD = 8$, $BC = 18$, $AB = CD$, $AS = CV$, $AC = SV = 8$ cm, $AS = VB = 5$ cm
 2) $ABCD$... $CV = 12$ cm
 3) $z = \frac{1}{2} CV = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (cm); $OK = z = 6$ cm
 4) $z = \frac{1}{2} CV = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (cm); $OK = z = 6$ cm
 5) $\triangle POK$, $\tan \alpha = \frac{PO}{OK} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\angle \alpha) = 60^\circ$

Răspuns:

60°



ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - 3$. Determinați mulțimea $E(f)$ a valorilor funcției f .

Rezolvare:

$$2^x \in (0; +\infty)$$

$$2^x - 3 \in (-3; +\infty)$$

$$E(f) = (-3; +\infty)$$

Răspuns:

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 2}$.

a) Determinați intervalele de concavitate ale funcției f .

Rezolvare:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 5)'(x - 2) - (x^2 - 5)(x - 2)'}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 5}{(x - 2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 5}{(x - 2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)'(x - 2)^2 - (x^2 - 4x + 5)[(x - 2)^2]'}{(x - 2)^4} =$$

$$= \frac{(2x - 4)(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 4x + 5) \cdot 2(x - 2)}{(x - 2)^4} = \frac{2x^2 - 4x - 8x^2 + 16x + 8x - 16 - 2x^2 + 8x + 10x - 20}{(x - 2)^4} =$$

$$= \frac{-8x^2 + 28x - 28}{(x - 2)^4}; f''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4x^2 + 14x - 13 = 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Răspuns:

$f(x)$ este concavă în sus pe $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

b) Determinați asimptota oblică la $+\infty$ a graficului funcției f .

Rezolvare:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 5}{x - 2} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 5 - x^2 + 2x}{x - 2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x - 5}{x - 2} \right] =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$y = mx + n$; $y = x + 2$ *asimptotă oblică*

Răspuns: $y = x + 2$

c) Calculați: $\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{x^2 - 5}{x - 2} dx =$

Rezolvare:

$$= \int_{-1}^0 \frac{x^2}{x - 2} dx - 5 \int_{-1}^0 \frac{1}{x - 2} dx = I_1 - 5I_2 =$$

$$= \frac{3}{2} + 4 \ln \frac{2}{3} - 5 \ln \frac{2}{3} = \frac{3}{2} - \ln \frac{2}{3} = \frac{3}{2} + \ln \frac{3}{2}$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 \frac{x^2}{x - 2} dx = \left[\begin{array}{l} x - 2 = t \\ x^2 dx = dt \\ x = -1 \Rightarrow t = -3 \\ x = 0 \Rightarrow t = -2 \end{array} \right] = \int_{-3}^{-2} \frac{t^2 + 4t + 4}{t} dt =$$

$$= \int_{-3}^{-2} \left(t + 4 + \frac{4}{t} \right) dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_{-3}^{-2} + 4t \Big|_{-3}^{-2} + 4 \ln |t| \Big|_{-3}^{-2} =$$

$$= \frac{1}{2} (4 - 9) + 4(-2 + 3) + 4(\ln 2 - \ln 3) = -\frac{5}{2} + 4 + 4 \ln \frac{2}{3} = \frac{3}{2} + 4 \ln \frac{2}{3}$$

$$I_2 = \int_{-1}^0 \frac{1}{x - 2} dx = \ln |x - 2| \Big|_{-1}^0 = \ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{2}{3}$$

Răspuns: $\frac{3}{2} + \ln \frac{3}{2}$

Exerciu Berouyanu $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11.	Un automobil cu 4 locuri pentru pasageri transportă spre serviciu 4 persoane. Pe parcursul unei săptămâni un lucrător merge la serviciu cu acest automobil de 5 ori. Care este probabilitatea ca cel puțin de 2 ori el să ocupe locul de lângă șofer, dacă persoanele urcă în automobil în mod aleatoriu și nicio persoană nu a lipsit?	L	L
	Rezolvare: $n = 5$ (guri) $p = \frac{1}{4}$ (pasager e ș) $q = \frac{3}{4}$ (ne pasageri) K -câteva pasageri pe lângă șofer $p(A) = C_5^2 p^2 q^3 + C_5^3 p^3 q^2 + C_5^4 p^4 q + C_5^5 p^5 = \dots$ $= \frac{10 \cdot 27}{1024} + \frac{10 \cdot 9}{1024} + \frac{5 \cdot 3}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{376}{1024} = \frac{47}{128}$ Răspuns: $\frac{47}{128}$	0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8
12.	În dezvoltarea la putere a binomului $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, $x > 0$, raportul dintre coeficientul binomial al termenului al cincilea și coeficientul binomial al termenului al treilea este egal cu 3,5. Determinați termenul al optulea al acestei dezvoltări. T_8 ?	L	L
	Rezolvare: $\frac{C_n^4}{C_n^2} = 3,5$ $\frac{n!}{4!(n-4)!} \cdot \frac{2!}{n!(n-2)!} = 3,5$ $\frac{2}{4 \cdot (n-4)! \cdot n!} = 3,5$ $n^2 - 5n + 6 = 42$, $n^2 - 5n - 36 = 0$; $\begin{cases} n=9 \\ n=-4 \end{cases}$ $\Rightarrow n=9$ $T_8 = T_{n+1} = C_9^7 \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^7 = \frac{9!}{7!2!} x^{3-\frac{7}{2}} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{2} x^{\frac{15-7}{2}} = 36 x^4 = 36 x^4$ Răspuns: $T_8 = 36 x^4$	0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8

Data: _____

Nr. _____

1. Determinați
Rezolvare:

$$\log_2 5$$

$$= 2 \log_2 5$$

Răspuns: _____

2. Determinați
mul $Q(X)$
Rezolvare:

$$2x^3 + \dots$$

$$-2x^3 - 4 \dots$$

$$x^2 - \dots$$

$$-x^2 - \dots$$

Răspuns: _____

3. Rezolvați
Rezolvare:

$$x - 2x - \dots$$

$$x + \dots$$

$$Myau$$

$$x - \dots$$

$$x = \dots$$

Răspuns: _____

Data:

Punctaj acumulat:

Nota:

Nr.	Item	Punctaj	
ALGEBRĂ			
1.	Determinați valoarea expresiei $8^{\frac{1}{\log_2 4} + 1}$. Rezolvare: $8^{\log_2 5} \cdot 8 = 2^{3 \log_2 5} \cdot 8 = 2^{\frac{3}{2} \log_2 5} \cdot 8 =$ $= 2^{\log_2 5} \cdot 8 = 5\sqrt{5} \cdot 8 = 40\sqrt{5}$ Răspuns: <u>40√5</u>	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
2.	Determinați restul împărțirii polinomului $P(X) = 2X^3 + X^2 - 2$ la polinomul $Q(X) = X^2 + 2$. Rezolvare: $\begin{array}{r} 2X^3 + X^2 - 2 \quad \quad X^2 + 2 \\ -2X^3 - 4X \quad \quad 2X + 4 \\ \hline X^2 - 4X - 2 \\ -X^2 - 2 \\ \hline -4X - 4 \end{array}$ Răspuns: <u>r = -4X - 4</u>	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
3.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{x}{x+1} \geq 2$. Rezolvare: $\frac{x-2x-2}{x+1} \geq 0, \frac{-x-2}{x+1} \geq 0$ Nu au semnificație $x-2=0$ $x=-2$ Nu au semnificație $x+1 \neq 0$ $x \neq -1$ Nu au semnificație $x+1 > 0$ $x > -1$ $x < -1$ Răspuns: <u>S = [-2; +∞)</u>	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

4.	Fie numerele complexe $z_1 = 1 - 2i$ și $z_2 = 3 - i$. Determinați valorile reale ale lui a , pentru care numărul $w = a^2 z_1^2 + 4a \bar{z}_2$ este un număr real nenul, unde $\bar{z}_2$ este conjugatul lui z_2 .	L	L
	<i>Rezolvare:</i>	0	0
	$\bar{z}_2 = 3 - i \Rightarrow \bar{z}_2 = 3 + i$	1	1
	$w = a^2(1 - 2i)^2 + 4a(3 + i) = a^2(1 - 4i + 4i^2) + 12a + 4ai =$	2	2
	$= a^2(1 - 4i - 4) + 12a + 4ai = a^2(-3 - 4i) + 12a + 4ai =$	3	3
	$= -3a^2 - 4a^2i + 12a + 4ai = (-3a^2 + 12a) + (4a - 4a^2)i$	4	4
	$\operatorname{Re} w = -3a^2 + 12a; \operatorname{Im} w = 4a - 4a^2$	5	5
	$w - \text{genitivitatea nenulului} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} w \neq 0 \\ \operatorname{Im} w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$	6	6
	$w \in \mathbb{R}^*$	7	7
	$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a^2 + 12a \neq 0 \\ 4a - 4a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + 4a \neq 0 \\ -a^2 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a(a - 4) \neq 0 \\ -a(a - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$	8	8
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 4 \\ a = 1 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 1$		
	<i>Răspuns:</i> $a = 1$		
5.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2 \log_2 x^2 + \log_2^2(-x) = 12$.	L	L
	<i>Rezolvare:</i>	0	0
	$\begin{cases} x^2 > 0 \\ -x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$	1	1
	$2 \log_2 x^2 + \log_2^2(-x) = 12; 2 \log_2(-x)^2 + \log_2^2(-x) = 12;$	2	2
	$\log_2^2(-x) + 4 \log_2(-x) - 12 = 0;$	3	3
	$\log_2(-x) = t \Rightarrow t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow$	4	4
	$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(-x) = 2 \\ \log_2(-x) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$	5	5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = 2^2 \\ -x = 2^{-6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 4 \\ -x = \frac{1}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -\frac{1}{64} \end{cases}$	6	6
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -\frac{1}{64} \end{cases}$	7	7
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -\frac{1}{64} \end{cases}$	8	8
	<i>Răspuns:</i> $S = \{-4; -\frac{1}{64}\}$		

6.	Aflați vo de 12 cm Rezolvare:		
	1) $\triangle POB$		
	$PB^2 = P$		
	$= \sqrt{15^2 - 1}$		
	2) $\triangle PAB$		
	$AB =$		
	$AB =$		
	$\Rightarrow AB =$		
	3) $\triangle AOC$		
	4) $V = \frac{1}{3}$		
	<i>Răspuns:</i>		
7.	Determin unghiul dreptun și 40 cm. Rezolvare:		
	1) $\triangle ABC$		
	$BC^2 =$		
	$= \sqrt{10^2}$		
	2) $\triangle B$		
	3) $\triangle 7$		
	$4x = 1$		
	4) $AE = 5$		
	5) $\triangle BAF$		
	<i>Răspuns:</i>		

1) $\triangle EAC$

GEOMETRIE

6. Aflați volumul unei piramide patrulateră regulată cu înălțimea de 12 cm și muchia laterală de 13 cm.

Rezolvare:

1) $\triangle POB$, $m(\angle O) = 90^\circ$, no τ Pitagora

$$PB^2 = PO^2 + OB^2 \Rightarrow OB = \sqrt{PB^2 - PO^2} =$$

$$= \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5 \text{ (cm)}$$

2) Piramida regulată $\Rightarrow ABCD$ - pătrat;
 $OB = 2 \cdot 5 = 10 \text{ (cm)}$;

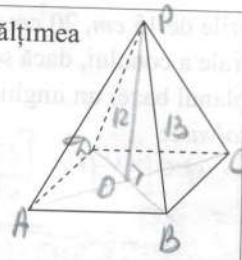
$$AB = a\sqrt{2}; AB = a; 10 = a\sqrt{2}; a = 5\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$3) A_{\text{scu}} = AB^2 = (5\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 = 50 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$4) V = \frac{1}{3} A_{\text{scu}} \cdot PO = \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 12 = 200 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Răspuns: 200 cm³



7. Determinați lungimea bisectoarei unghiului drept al unui triunghi dreptunghic cu catetele de 10 cm și 40 cm.

Rezolvare:

1) $\triangle ABC$, $m(\angle A) = 90^\circ$, no τ Pitagora

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} =$$

$$= \sqrt{10^2 + 40^2} = \sqrt{100 + 1600} = \sqrt{1700} = 10\sqrt{17} \text{ (cm)}$$

$$2) BE = x \Rightarrow EC = 10\sqrt{17} - x$$

$$3) \text{No } \tau \text{ bisectoare: } \frac{CA}{AB} = \frac{CE}{EB}, \frac{40}{10} = \frac{10\sqrt{17} - x}{x},$$

$$4x = 10\sqrt{17} - x, x = 2\sqrt{17} \Rightarrow BE = 2\sqrt{17} \text{ cm}$$

4) AE - bisectoare $\Rightarrow m(\angle BAE) = m(\angle CAE) = 45^\circ$

$$5) \triangle BAE, \text{ no } \tau \text{ cosinus: } BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2 \cdot AB \cdot AE \cdot \cos 45^\circ$$

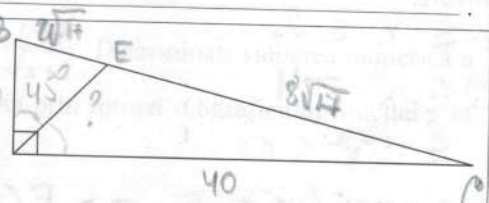
$$BE^2 = 100 + AE^2 - 2 \cdot 10 \cdot AE \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AE^2 - 10\sqrt{2}AE + 32 = 0$$

$$\begin{cases} AE = 2\sqrt{2} \text{ cm} \\ AE = 8\sqrt{2} \text{ cm} \end{cases}$$

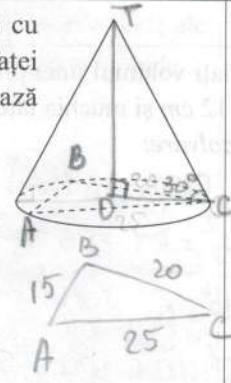
$$6) \triangle EAC, \text{ no } \tau \text{ cosinus... } \begin{cases} AE = 8\sqrt{2} \text{ cm} \\ AE = 32\sqrt{2} \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{Orbitor: } AE = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$



Апока?
+

8.	În baza unui con circular drept este înscris un triunghi cu laturile de 15 cm, 20 cm și 25 cm. Determinați aria suprafeței laterale a conului, dacă se cunoaște că generatoarea formează cu planul bazei un unghi de 30°.	L	L
	Rezolvare:	0	0
	1) $P = 30$	1	1
	2) $A = \sqrt{30 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 15} = \sqrt{10 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5} = 10 \cdot 3 \cdot 5 = 150 \text{ (cm}^2\text{)}$	2	2
	3) $R = \frac{15 \cdot 20 \cdot 25}{4 \cdot 150} = \frac{25}{2} \text{ (cm)} = 12.5$	3	3
	4) $OC = a\sqrt{3}; TC = 2a; a\sqrt{3} = \frac{25}{2}; a = \frac{25\sqrt{3}}{6}$	4	4
	5) $A_{\text{бок}} = \pi R G = \pi \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{25\sqrt{3}}{3} = \frac{625\sqrt{3}}{6} \pi \text{ (cm}^2\text{)}$	5	5
	Răspuns:	6	6



ANALIZĂ MATEMATICĂ

+

9.	Determinați mulțimea $E(f)$ a valorilor funcției $f: [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + 5$.	L	L
	Rezolvare:	0	0
	$-2 \leq x \leq 2$	1	1
	$0 \leq x^2 \leq 4$	2	2
	$-8 \leq -2x^2 \leq 0$	3	3
	$-3 \leq -2x^2 + 5 \leq 5 \Rightarrow E(f) = [-3; 5]$	4	4
	Răspuns: $E(f) = [-3; 5]$	5	5

+

10.	Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 4}$.	L	L
	a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .	0	0
	Rezolvare:	1	1
	$f'(x) = \frac{6x+2}{2\sqrt{3x^2+2x+4}} = \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+4}}$	2	2
	$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x+1=0 \\ 3x^2+2x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$	3	3
		4	4
	Răspuns: $f(x)$ scade pe $(-\infty; -\frac{1}{3}]$; $f(x)$ crește pe $[-\frac{1}{3}; +\infty)$	5	5
	! <u>monotonie</u>	6	6
		7	7
		8	8

b) Comp
Rezolvare
 $\lim_{x \rightarrow \infty}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty}$
 $f(2)$
 $-\frac{1}{4}f(1)$
 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Răspuns:
c) Fie fun
volumulu
jurul axei
Rezolvare
 $g(x) =$
 $V = \pi \int_0^4$
 $= \pi \int_0^4$
 $= \pi \int_0^4$
 $I_2 = \int_0^4$
 $I_2 = \int_0^4$
Răspuns:
 $3x^2 + 2$
 $-3x^2 - 3$
 $-x$
 $+x$

L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

b) Comparați: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x+2}$ și $-\frac{1}{4}f(2)$.
Rezolvare:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2+2x+4}}{2x+2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|\sqrt{3}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x\sqrt{3}}{2x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(2) = \sqrt{12+4+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$-\frac{1}{4}f(2) = -\frac{2\sqrt{5}}{4} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} > -\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x+2} > -\frac{1}{4}f(2)$$

Răspuns: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x+2} > -\frac{1}{4}f(2)$

c) Fie funcția $g: [0;4] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}$. Determinați valoarea numerică a volumului corpului de rotație obținut prin rotirea subgraficului funcției g în jurul axei Ox .

Rezolvare: $g(x) = \frac{\sqrt{3x^2+2x+4}}{\sqrt{x+1}}$

$$V = \pi \int_0^4 g^2(x) dx = \pi \int_0^4 \frac{3x^2+2x+4}{x+1} dx =$$

$$= \pi \left(\int_0^4 (3x-1) dx + 5 \int_0^4 \frac{1}{x+1} dx \right) = \pi (I_1 + 5I_2) =$$

$$= \pi (20 + 5 \ln 5) = 5\pi (4 + \ln 5) \text{ (kyd. eg)}$$

$$I_1 = \int_0^4 (3x-1) dx = \frac{3}{2}x^2 \Big|_0^4 - x \Big|_0^4 = 24 - 4 = 20$$

$$I_2 = \int_0^4 \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| \Big|_0^4 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$$

Răspuns: $V = 5\pi (4 + \ln 5) \text{ (kyd. eg)}$

$$\begin{array}{r} 3x^2+2x+4 \quad | \quad x+1 \\ -3x^2-3x \quad | \\ \hline -x+4 \quad | \\ +x+1 \quad | \\ \hline 5 \end{array} \quad ; \quad 3x-1 + \frac{5}{x+1}$$

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. La un concurs de talente, dintre 6 actori, 5 cântăreți și un dansator, urmează să fie aleasă o echipă din 5 jurați. Care este probabilitatea ca în echipa formată să fie cel puțin un actor, un cântăreț și un dansator?

Rezolvare:

Выбор 5 участников.

$A = \{ \text{минимум 1 актер; 1 певец; 1 танцор} \}$

$$m = C_6^1 C_5^3 C_1^1 + C_6^2 C_5^2 C_1^1 + C_6^3 C_5^1 C_1^1 = 92$$

$$= 6 \cdot \frac{5!}{3!2!} + \frac{6!5!}{4!2!2!3!} + \frac{6!5!}{3!3!1!} = 2$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{4! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3!} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5}{3! \cdot 3! \cdot 1!} = 2$$

$$= 60 + 150 + 100 = 310$$

$$n = C_{12}^5 = \frac{12!}{5!7!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792$$

Răspuns: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{310}{792} = \frac{155}{396}$

12. Determinați termenul din dezvoltarea la putere a binomului $\left(\frac{b}{\sqrt[3]{a}} + \frac{a}{\sqrt{b}}\right)^9$, $a > 0, b > 0$ în care a și b au puteri egale.

Rezolvare:

$$T_{k+1} = C_9^k \cdot \left(\frac{b}{\sqrt[3]{a}}\right)^{9-k} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)^k =$$

$$= C_9^k \cdot \frac{b^{\frac{9-k}{3}}}{a^{\frac{9-k}{3}}} \cdot \frac{a^k}{b^{\frac{k}{2}}} =$$

$$= C_9^k \cdot \frac{b^{\frac{9-k}{3} - \frac{k}{2}}}{a^{\frac{9-k}{3} - k}} = C_9^k \cdot \frac{b^{\frac{2(9-k) - 3k}{6}}}{a^{\frac{2(9-k) - 3k}{6}}} = C_9^k \cdot \frac{b^{\frac{18-2k-3k}{6}}}{a^{\frac{18-5k}{6}}} = C_9^k \cdot \frac{b^{\frac{18-5k}{6}}}{a^{\frac{18-5k}{6}}}$$

$$27k = 108; k = 4$$

$$T_5 = T_{4+1} = C_9^4 \cdot a^{\frac{18-5 \cdot 4}{6}} \cdot b^{\frac{18-5 \cdot 4}{6}} =$$

$$= \frac{9!}{5!4!} \cdot a^3 \cdot b^3 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot a^3 \cdot b^3 = 126 a^3 b^3$$

Răspuns: $T_5 = 126 a^3 b^3$

L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

-5*

Testul	15
--------	----

Data: 20.03

Punctaj acumulat: Nota:

Nr.	Item	Punctaj																				
ALGEBRĂ																						
1.	Determinați valoarea expresiei $(\sqrt[3]{81})^{\frac{3}{2}} + (\sqrt[3]{4})^{\frac{9}{2}}$. Rezolvare: $(\sqrt[3]{81})^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}} = 3^2 = 9; (\sqrt[3]{4})^{\frac{9}{2}} = 2^{\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}} = 2^3 = 8$ $(\sqrt[3]{81})^{\frac{3}{2}} + (\sqrt[3]{4})^{\frac{9}{2}} = 9 + 8 = 17$ Răspuns: 17	<table><tr><td>L</td><td>L</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td></tr></table>	L	L	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5						
L	L																					
0	0																					
1	1																					
2	2																					
3	3																					
4	4																					
5	5																					
2.	Fie polinomul $P(X) = 3X^3 + (a+3)X^2 - a^2X - 5$. Determinați valorile reale ale lui a, știind că restul împărțirii polinomului la binomul $Q(X) = X + 2$ este 13. Rezolvare: $P(-2) = 13; -24 + 4a + 12 + 2a^2 - 5 = 13;$ $2a^2 + 4a - 30 = 0; a^2 + 2a - 15 = 0;$ $\begin{cases} a = 3 \\ a = -5 \end{cases}$ Răspuns: $a \in \{-5; 3\}$	<table><tr><td>L</td><td>L</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td></tr></table>	L	L	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5						
L	L																					
0	0																					
1	1																					
2	2																					
3	3																					
4	4																					
5	5																					
3.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) - 2 \geq 0$. Rezolvare: $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \geq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, $\log_{\alpha}$ descrescătoare $2x-1 \leq \frac{1}{4}; 2x \leq \frac{5}{4}; x \leq \frac{5}{8}$ OR 3: $2x-1 > 0$ $x > \frac{1}{2}$ $x \in (\frac{1}{2}; +\infty)$ Răspuns: $S = (\frac{1}{2}; \frac{5}{8}]$	<table><tr><td>L</td><td>L</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>7</td><td>7</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td></tr></table>	L	L	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8
L	L																					
0	0																					
1	1																					
2	2																					
3	3																					
4	4																					
5	5																					
6	6																					
7	7																					
8	8																					

+

4. Determinați numerele complexe $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$, pentru care

$$\begin{vmatrix} z+i & 1-2i \\ \bar{z} & 5 \end{vmatrix} = 10 + 20i; \quad z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} 5(a+bi) + 5i - (a-bi) + 2i(a-bi) &= \\ = 5a + 5bi + 5i - a + bi + 2ai + 2b &= \\ = 4a + 2b + 2ai + 6bi + 5i &= \end{aligned}$$

$$(4a + 2b) + (2a + 6b + 5)i = 10 + 20i$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ 2a + 6b + 5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ 2a + 6b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5-b}{2} \\ 5b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1,5 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow z = 1,5 + 2i$$

Răspuns: $z = 1,5 + 2i$

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\sqrt{x-1} \geq x-3$.

Rezolvare:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 \geq x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-7x+10 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \in [2, 5] \end{cases} \Rightarrow x \in [2, 5]$$



Răspuns: $S = [2, 5]$

$\sqrt{f(x)} > g(x)$
две системы
и совокупность

6. Un con are înălțimea h și raza bazei r . Calculați aria sa laterală.

Rezolvare:

1) $AC = \sqrt{r^2 + h^2}$

2) $l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

3) $A_l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

4) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

5) $A_b = \pi r^2$

6) $A_t = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

7) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

8) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

9) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

10) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

11) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

12) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

13) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

14) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

15) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

16) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

17) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

18) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

19) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

20) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

21) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

22) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

23) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

24) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

25) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

26) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

27) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

28) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

29) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

30) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

31) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

32) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

33) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

34) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

35) $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

GEOMETRIE

6. Un con circular drept are secțiunea axială un triunghi echilateral cu perimetrul egal cu 36 cm. Aflați volumul conului.

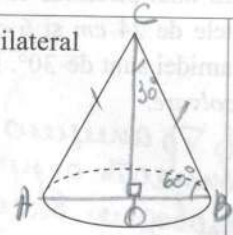
Rezolvare:

$$1) AC = CB = AB = 12 \text{ cm}$$

$$2) r = 6 \text{ cm}$$

$$3) H = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$4) V = \frac{1}{3} \pi \cdot 36 \cdot 6\sqrt{3} = 72\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$$



Răspuns:

$$72\sqrt{3} \pi \text{ cm}^3$$

7. Fie ABCD un paralelogram, în care $m(\angle BAD) = 60^\circ$, înălțimea $BT = 5\sqrt{3} \text{ cm}$, $T \in (AD)$ și diagonala $BD = 14 \text{ cm}$. Determinați aria paralelogramului ABCD.

Rezolvare:

$$1) \triangle BAT, m(\angle T) = 90^\circ, m(\angle A) = 60^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow m(\angle B) = 30^\circ; AT = x, AB = 2x, BT = x\sqrt{3}; \\ 5\sqrt{3} = x\sqrt{3} \Rightarrow x = 5 \Rightarrow AT = 5 \text{ cm}; AB = 10 \text{ cm}.$$

$$2) \triangle TBD, m(\angle T) = 90^\circ, \text{ no 7. Teorema lui Pitagora } BD^2 = BT^2 + TD^2; \\ TD = \sqrt{BD^2 - BT^2} = \sqrt{14^2 - (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{196 - 75} = \sqrt{121} = 11 \text{ cm}$$

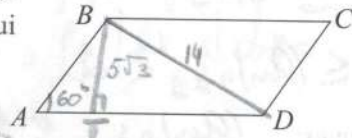
$$3) AD = AT + TD = 5 + 11 = 16 \text{ cm}$$

$$4) A_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot BT \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 16 = 40\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

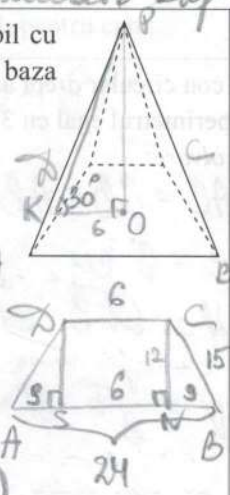
$$5) A_{ABCD} = 2 \cdot A_{\triangle ABD} = 2 \cdot 40\sqrt{3} = 80\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Răspuns:

$$80\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



8.	Baza unei piramide este un trapez isoscel circumscriptibil cu bazele de 24 cm și 6 cm. Toate unghiurile diedre de la baza piramidei sunt de 30°. Determinați volumul piramidei. Rezolvare: 1) В трапеции можно вписать окружность... $AD=CB=15$ cm 2) Проведем высоту $DN=SN$... 3) $\triangle CNB$ - прав, елиптичний $\Rightarrow CN=12$ cm 4) $OK=r=\frac{1}{2}CN=6$ cm 5) $\triangle PDK$, $\angle KOP=90^\circ$, $\angle PKO=30^\circ$... $PO=2\sqrt{3}$ cm 6) $A_{\text{осн}} = \frac{AB+BC}{2} \cdot CN = 180$ (cm²) 7) $V = \frac{1}{3} A_{\text{осн}} \cdot PO = \frac{1}{3} \cdot 180 \cdot 2\sqrt{3} = 120\sqrt{3}$ (cm³) Răspuns: $120\sqrt{3}$ cm³	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
----	--	--	--



ANALIZĂ MATEMATICĂ			
9.	Studiați mărghinirea șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{2n-2}{n+1}$. Rezolvare: $a_1 = \frac{2-2}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-2}{n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n} = 2$ $0 \leq (a_n)_{n \geq 1} < 2$ Răspuns: $(a_n)_{n \geq 1}$ ограничена снизу и сверху	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
10.	Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
a)	Aflați intervalele de monotonie ale funcției f. Rezolvare: $f'(x) = \frac{(x^2)'(2x-1) - x^2(2x-1)'}{(2x-1)^2} =$ $= \frac{2x(2x-1) - x^2 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2 - 2x - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow \dots \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ Răspuns: $f(x)$ монотонно возрастает на $(-\infty; 0]$ и на $[1; +\infty)$ и на $(\frac{1}{2}; +\infty)$ $f(x)$ монотонно убывает на $[0; \frac{1}{2})$ и на $(\frac{1}{2}; 1]$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

b) Calculați asimptota oblică la $+\infty$ a funcției f .

Rezolvare:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2 - x} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x - 1} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2x - 1} - \frac{x}{2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 2x^2 + x}{4x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4x - 2} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$$

$$y = mx + n; y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \text{ marea asimptotă}$$

$$\text{Răspuns: } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

c) Calculați $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x^2}{f(x)} dx$.

Rezolvare:

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x^2}{f(x)} dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x^2(2x-1)}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 (2x-1) dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (1-2x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1) dx =$$

$$= x \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} - x^2 \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} + x^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - x \Big|_{\frac{1}{2}}^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 1 - \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} =$$

$$= 1 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{9} + 1 = \frac{-9-4+18}{18} = \frac{5}{18}$$

$$\text{Răspuns: } \frac{5}{18}$$

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11.	Alexandra și Vlad au decis să meargă la un concert împreună cu alți 8 colegi. După ce au cumpărat bilete într-un rând cu 10 locuri libere, locurile au fost alese prin tragere la sorți. Determinați probabilitatea ca Alexandra și Vlad să nu stea alături la concert. Rezolvare: Саша и Влад (+ 8 учеников) $A = \{ \text{Влад и Саша не сидят вместе} \}$ $\bar{A} = \{ \text{сидят вместе} \}$ $n = 10$ $m_A = 2 \cdot 8!$ $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{2 \cdot 8!}{10!} = \frac{2 \cdot 8!}{9! \cdot 10} = \frac{2}{5}$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5}$ Răspuns: $\frac{3}{5}$	L	L
		0	0
		1	1
		2	2
		3	3
		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
12.	Aflați termenul de mijloc al dezvoltării la putere a binomului $\left(\sqrt{3^x} + \frac{1}{\sqrt{3^{x-1}}}\right)^n$, dacă suma coeficienților binomiali ai ultimilor trei termeni este egală cu 22. Rezolvare: $C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 22$ $\frac{n!}{(n-2)!2!} + \frac{n!}{(n-1)!1!} + 1 = 22$ $\frac{(n-2)! \cdot n}{(n-2)! \cdot 2} + \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)! \cdot 1} = 21$ $\frac{n^2 - n}{2} + n = 21$ $n^2 - n + 2n = 42$, $n^2 + n - 42 = 0$ $\begin{cases} n = 6 \\ n = -7 \end{cases} \nrightarrow n = 6$ $n = 2k = 6$, $k = 3 \Rightarrow T_4$ - средним член $T_4 = T_{3+1} = C_6^3 \left(3^{\frac{x}{2}}\right)^3 \left(3^{-\frac{x-1}{2}}\right)^3 =$ $= \frac{6!}{3!3!} 3^{\frac{3x-3x+3}{2}} = \frac{3!4 \cdot 5 \cdot 6}{3!2 \cdot 3} 3^{\frac{3}{2}} = 20 \cdot 3\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$ Răspuns: $T_4 = 60\sqrt{3}$	L	L
		0	0
		1	1
		2	2
		3	3
		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8

Data: 18.

Nr.

1. Determinați
Rezolvare:

Răspuns:

2. Determinați
Rezolvare:

$$z = \frac{(3+...)}{...}$$

$$= \frac{10+...}{5}$$

$$|z| = \sqrt{...}$$

Răspuns:

3. Rezolvați
Rezolvare:

$$\begin{cases} 1-x \\ x^2+y \\ 1-x \end{cases}$$

$$-9$$

Răspuns:

L L
0 0
1 1
2 2
3 3
4 4
5 5
6 6
7 7
8 8

L L
0 0
1 1
2 2
3 3
4 4
5 5
6 6
7 7
8 8

Data:

18. 03

Punctaj acumulat:

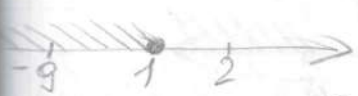
100

Nota:

Nr.	Item	Punctaj
ALGEBRĂ		
1.	Determinați valoarea expresiei $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} - 125^{\frac{2}{3}}$. = $25 - 25 = 0$ Rezolvare: Răspuns: 0	L L 0 0 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5
2.	Determinați modulul numărului complex $z = \frac{3+4i}{2+i}$, unde $i^2 = -1$. Rezolvare: $z = \frac{(3+4i)(2-i)}{4-i^2} = \frac{6+8i-3i-4i^2}{4+1} = \frac{6+5i+4}{5} = \frac{10+5i}{5} = 2+i$ $z = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ Răspuns: $z = \sqrt{5}$	L L 0 0 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5
3.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{1-x}(x^2+7x-18)=0$. Rezolvare: $\begin{cases} 1-x=0 \\ x^2+7x-18=0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=-9 \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-9 \\ x=1 \end{cases}$  Răspuns: $S = [-9, 1]$	L L 0 0 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6 7 7 8 8

18. 03

Punctaj acumulat: 100 Nota:

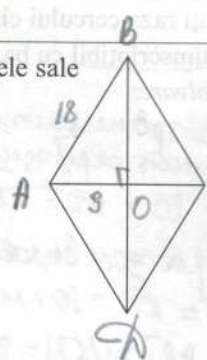
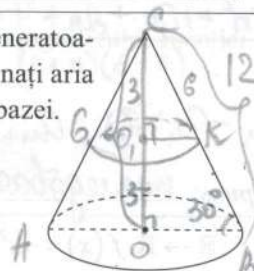
Item	Punctaj	
ALGEBRĂ		
Determinați valoarea expresiei $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} - 125^{\frac{2}{3}} = 25 - 25 = 0$ Rezolvare:	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
Răspuns: 0		
Determinați modulul numărului complex $z = \frac{3+4i}{2+i}$, unde $i^2 = -1$. Rezolvare:	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
$z = \frac{(3+4i)(2-i)}{4-i^2} = \frac{6+8i-3i-4i^2}{4+1} = \frac{6+5i+4}{5} = \frac{10+5i}{5} = 2+i$ $ z = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$		
Răspuns: $\sqrt{5}$		
Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{1-x}(x^2+7x-18)=0$. Rezolvare:	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
$\begin{cases} 1-x=0 \\ x^2+7x-18=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-9 \\ x=1 \end{cases}$ $1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$  $S = \{-9, 1\}$		
Răspuns: $S = \{-9, 1\}$		

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} ; \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

4.	Fie expresia $E(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$. Calculați valoarea expresiei $E\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Rezolvare:	L	L
	$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} ; \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{2}{1 - \cos 2x}$	0	0
	$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} ; \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{1 + \cos 2x}$	1	1
	$E(x) = \frac{2}{1 + \cos 2x} + \frac{2}{1 - \cos 2x} =$	2	2
	$= \frac{1 - \cos 2x + 1 + \cos 2x}{1 - \cos^2 2x} = \frac{2}{1 - \cos^2 2x}$	3	3
	$E\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2}{1 - \cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{2}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\frac{4-2}{4}} =$	4	4
	$= 4 : \frac{2}{4} = 4 \cdot 2 = 8$	5	5
	Răspuns: 8	6	6
5.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\log_{6-x} \frac{1}{16} \leq 2$. Rezolvare:	7	7
	$\log_{6-x} \frac{1}{16} \leq \log_{6-x} (6-x)^2$ $\Rightarrow \begin{cases} 6-x > 0 \\ 6-x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 6 \\ x \neq 5 \end{cases}$	8	8
	$\log_{6-x} \frac{1}{16} \leq \log_{6-x} (36 - 12x + x^2)$ $x \in (-\infty, 5) \cup (5, 6)$		
	$\frac{1}{16} \geq 36 - 12x + x^2 ; x^2 - 12x + 36 - \frac{1}{16} \leq 0$		
	$x^2 - 12x + \frac{575}{16} \leq 0$		
	$x \in \left[\frac{23}{4}, \frac{25}{4}\right)$		
	2) $6-x > 1 ; x < 5$, знак сохраняется		
	$x^2 - 12x + \frac{575}{16} \geq 0$		
	$x \in (-\infty, 5) \cup \left[\frac{25}{4}, 6\right)$		
	Răspuns: $S = (-\infty, 5) \cup \left[\frac{23}{4}, 6\right)$		

6.	Perimetrul rombului are lungimea a rombului. Rezolvare:	L	L
	1) $ABCD = m$	0	0
	2) $AC = 18$	1	1
	3) $\sin(\angle A) =$	2	2
	$\Rightarrow m(\angle A) =$	3	3
	$= 2m(\angle A) =$	4	4
	4) $m(\angle B) =$	5	5
	Răspuns: 6	6	6
7.	Într-un con circular drept, raza bazei este egală cu înălțimea. Se cere să se determine aria laterală a conului.	7	7
	Rezolvare:	8	8
	$Q_k = 3\sqrt{3}$		
	$A = \pi r^2$		
	Răspuns: 3		

L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

GEOMETRIE			L	L
6.	Perimetrul rombului este de 72 cm, iar una dintre diagonalele sale are lungimea de 18 cm. Determinați măsurile unghiurilor rombului. Rezolvare: 1) $ABCD$ - romb; $AB = \frac{72}{4} = 18 \text{ (cm)}$ 2) $AC = 18 \text{ cm} \Rightarrow AO = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9 \text{ (cm)}$ 3) $\sin(\angle ABO) = \frac{AO}{AB} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\angle ABO) = 30^\circ, m(\angle ABC) = m(\angle ADC) =$ $= 2m(\angle ABO) = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ 4) $m(\angle BAD) = m(\angle BCD) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ Răspuns: 60° și 120°		L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
7.	Într-un con circular drept înălțimea este de 6 cm, iar generatoarea formează cu planul bazei un unghi de 30°. Determinați aria secțiunii duse prin mijlocul înălțimii paralel cu planul bazei. Rezolvare: $OK = 3\sqrt{3}$ $A = \pi r^2 = 24\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ Răspuns: $24\pi \text{ cm}^2$		L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

описанный; + можно и вписать

8. Aflați raza cercului circumscris unui trapez isoscel circumscribit cu bazele de 16 cm și 36 cm.

Rezolvare:

1) В трапеции можно вписать окружность $\Rightarrow$

$$\Rightarrow BC + AD = 2AB; 52 = 2AB; AB = 26 \text{ cm}$$

2) Проведен высоты BT и CK, TK = 16 cm,

$$AT = KD = 10 \text{ cm}, TD = 26 \text{ cm}$$

3) $\triangle ABT$, $\angle(AT) = 90^\circ$, по Т. Пифагора $AB^2 = AT^2 + BT^2$;

$$BT = \sqrt{AB^2 - AT^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{546} = 24 \text{ (cm)}$$

4) $\triangle BTD$, $\angle(AT) = 90^\circ$, по Т. Пифагора $BD^2 = BT^2 + TD^2$;

$$BD = \sqrt{BT^2 + TD^2} = \sqrt{24^2 + 26^2} = \sqrt{1252} = 2\sqrt{313} \text{ (cm)}$$

$$\text{Răspuns: } 5) R = \frac{AB \cdot CD}{4h} = \frac{13 \cdot \sqrt{313}}{12} \text{ (cm)}$$

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiați monotonia șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{5n-3}{n+2}$.

Rezolvare:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5(n+1)-3}{n+1+2} - \frac{5n-3}{n+2} = \frac{5n+2}{n+3} - \frac{5n-3}{n+2} = \frac{5n^2+10n+2n+4-5n^2-15n+3n+9}{(n+3)(n+2)} = \frac{13}{(n+3)(n+2)} > 0$$

$$a_{n+1} - a_n > 0, a_{n+1} > a_n \text{ } \forall n, n \geq 1$$

Răspuns: последовательность возрастает

10. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4x$.

a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de intersecție al graficului funcției f cu axa Oy. $\Rightarrow x_0 = 0$

Rezolvare:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f(x_0) = f(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 = 0$$

$$f'(x) = (-x^2 + 4x)' = -2x + 4$$

$$f'(x_0) = f'(0) = -2 \cdot 0 + 4 = 4$$

$$y = 4(x - 0) + 0; y = 4x \text{ уравнение касательной}$$

$$\text{Răspuns: } y = 4x$$

- b) Comparați $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f}{x}$

Rezolvare:

$$f(e) = -e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 1}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} (-$$

$$-4 < e$$

Răspuns: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f}{x}$

- c) Fie funcția $g: [0, \dots]$ că a volumului cor
g în jurul axei Ox.

Rezolvare:

$$g(x) = e^{\frac{x}{2}}$$

$$= e^{\frac{x}{2}} \sqrt{\frac{x(4-x)}{4-x}}$$

$$V = \pi \int_0^2 g^2$$

$$= \pi \int_0^2 e^x |x|$$

$$= \left[u = x \right. \\ \left. du = dx \right]$$

$$= \pi (x e^x |^2 - e$$

Răspuns: $V = \pi$

b) Comparați $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x-4}$ cu $f(e)$.

Rezolvare:

$$f(e) = -e^2 + 4e = e(4-e)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 4x}{x-4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x(x-4)}{x-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} (-x) = -4$$

$$-4 < e(4-e); \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x-4} < f(e)$$

Răspuns: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x-4} < f(e)$

c) Fie funcția $g: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{\frac{f(x)}{4-x}}$. Determinați valoarea numerică a volumului corpului de rotație obținut prin rotirea subgraficului funcției g în jurul axei Ox .

Rezolvare:

$$g(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{\frac{f(x)}{4-x}} = e^{\frac{x}{2}} \sqrt{\frac{-x^2 + 4x}{4-x}} =$$

$$= e^{\frac{x}{2}} \sqrt{\frac{x(4-x)}{4-x}} = e^{\frac{x}{2}} \sqrt{x}$$

$$V = \pi \int_0^2 g^2(x) dx = \pi \int_0^2 (e^{\frac{x}{2}} \sqrt{x})^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^2 e^x |x| dx = \pi \int_0^2 x e^x dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right] = \pi \left(x e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx \right) =$$

$$= \pi \left(x e^x \Big|_0^2 - e^x \Big|_0^2 \right) = \pi (2e^2 - e^2 + 1) = \pi (e^2 + 1) \text{ (kyb. eg.)}$$

Răspuns: $V = \pi (e^2 + 1) \text{ kyb. eg.}$

L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
X = 0	
-	+
0	2

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11.	Pe 8 fișe sunt scrise literele B,O,M,B,O,A,N,E. Fișele se amestecă, apoi se extrag consecutiv 3 fișe. Care este probabilitatea că se va forma cuvântul BAN?	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
	Rezolvare: $A = \{ \text{"BAN"} \}$ $n = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ $m = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{336} = \frac{1}{168}$ Răspuns: $\frac{1}{168}$		
12.	Determinați termenul al cincilea din dezvoltarea la putere a binomului $\left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)^n$, $x > 0, y > 0$, dacă coeficientul binomial al termenului al treilea este 45. Rezolvare: $C_n^2 = 45$ $\frac{n!}{(n-2)!2!} = 45 \Rightarrow \frac{(n-2)(n-1)n}{2} = 45$ $n^2 - n = 90; n^2 - n - 90 = 0; \begin{cases} n = -9 \notin \mathbb{N} \\ n = 10 \end{cases} \Rightarrow n = 10$ $T_5 = T_{4+1} = C_{10}^4 \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^6 \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4 = C_{10}^4 y^3 x^2 = 210 x^2 y^3$ $C_{10}^4 = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$ Răspuns: $T_5 = 210 x^2 y^3$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Data: 05.04

Nr.

1. Determinați
Rezolvare:

$$\sqrt{27+9}$$

Răspuns:

2. Fie polinom
este rădăcină
Rezolvare:

$$P(2) = 0$$

$$3a = 16$$

Răspuns:

3. Rezolvați în
Rezolvare:

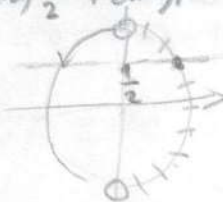
$$\begin{cases} -1-x \\ 2x+x \\ 2x+x^2 \end{cases}$$

Răspuns:

05.04

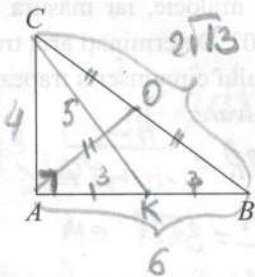
Punctaj acumulat: _____ Nota: _____

Item	Punctaj	
ALGEBRĂ		
Determinați valoarea expresiei $\sqrt{81^{\frac{3}{4}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}$.	L	L
Rezolvare:	0	0
$\sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6$	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
Răspuns: 6		
Fie polinomul $P(X) = X^3 - aX^2 + X + a$. Aflați numărul real a , dacă $X = 2$ este rădăcină a polinomului $P(X)$.	L	L
Rezolvare:	0	0
$P(2) = 0; 8 - 4a + 2 + a = 0;$	1	1
$3a = 10; a = \frac{10}{3}$	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
Răspuns: $a = \frac{10}{3}$		
Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\sqrt{2x+x^2} \leq 1-x$.	L	L
Rezolvare:	0	0
$1-x \geq 0$	1	1
$2x+x^2 \geq 0$	2	2
$2x+x^2 \leq 1-2x+x^2$	3	3
$4x \leq 1$	4	4
$x \leq \frac{1}{4}$	5	5
$x \leq 1$	6	6
$x \in (-\infty, -2] \cup [0; +\infty)$	7	7
$S = (-\infty; -2] \cup [0; \frac{1}{4}]$	8	8
Răspuns:		

4.	Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $2z + z = 1 + 2i$. Rezolvare: $ z = 1 + 2i - 2z$; $z = a + bi$ $\sqrt{a^2 + b^2} = 1 + 2i - 2a - 2bi$ $\sqrt{a^2 + b^2} = (1 - 2a) + (2 - 2b)i$ $\begin{cases} 1 - 2a \geq 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 1 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \leq 1 \\ a^2 + b^2 = 1 - 4a + 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \leq 1 \\ 2b = 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{1}{2} \\ 3a^2 + 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{1}{2} \\ a(a + \frac{4}{3}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ $3a^2 - 4a = 0$ $a(3a - 4) = 0$ $\begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{4}{3} \end{cases}$ $S = \{i\}$ Răspuns:	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	
5.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{\cos(2x) + 5\sin x - 3}{\sqrt{\cos x}} = 0$. OR3: $\cos x > 0$ Rezolvare: $\cos^2 x - \sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ $1 - \sin^2 x - \sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ $-2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$ $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$ $[\sin x = t, t \in [-1, 1]]$ $2t^2 - 5t + 2 = 0$ $\begin{cases} t = 2 \notin [-1, 1] \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ $x = (-1)^k \cdot \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ Выводим решение из OR3: $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ Răspuns:	 OR3: $\cos x > 0$ $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$ $k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \in \text{OR3}$ $k=1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \notin \text{OR3}$ $k=2 \Rightarrow x = \frac{13\pi}{6} \in \text{OR3}$ $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

GEOMETRIE

O catetă a unui triunghi dreptunghic are lungimea de 6 cm, iar lungimea medianei corespunzătoare acestei catete este de 5 cm. Aflați lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei.



L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

Rezolvare:

1) CK - mediana $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AK = KB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ (cm)}$$

2) $\triangle ACK$ - dreptunghic, enunțat $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AC = 4 \text{ cm}$$

3) $\triangle CAB$, $m(\angle A) = 90^\circ$, no π . Teorema

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow CB = \sqrt{AC^2 + AB^2} =$$

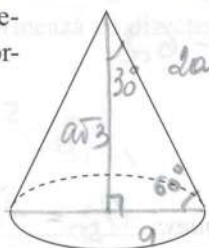
$$= \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13} \text{ (cm)}$$

4) O - centrul descrisului circumscris

$$AO = CO = OB = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} = \sqrt{13} \text{ (cm)}$$

Răspuns: $\sqrt{13} \text{ cm}$

Aria totală a unui con circular drept este de $243\pi \text{ cm}^2$. Determinați volumul conului, știind că generatoarea lui formează cu planul bazei un unghi de 60° .



Rezolvare:

$$A_{\text{total}} = A_{\text{baza}} + A_{\text{latura}} = \pi R^2 + \pi R L =$$

$$= \pi R (R + L)$$

$$243\pi = \pi \cdot a \cdot (a + 2a)$$

$$3a^2 = 243; a^2 = 81; a = 9$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi \cdot 81 \cdot 9\sqrt{3} = 243\sqrt{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Răspuns: $243\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$

L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

V-?

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

$$AB = CD = MN; R = 3\sqrt{7} \text{ cm}; A_{ABCD} = ?$$

8. Într-un trapez isoscel latura laterală este congruentă cu linia mijlocie, iar măsura unghiului ascuțit este egală cu 60° . Determinați aria trapezului, dacă se știe că raza cercului circumscris trapezului este de $3\sqrt{7} \text{ cm}$.

Rezolvare:

$$1) 2R = \frac{AC}{\sin(120^\circ)}, 6\sqrt{7} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$AC = 3\sqrt{21} \text{ cm}$$

$$2) \text{ Triunghiul } ABC \text{ are } BK = CZ, BC = KZ; AK = 2R$$

$$3) \triangle CZA, m(\angle Z) = 90^\circ, m(\angle A) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle C) = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AZ}{\sin(30^\circ)} = \frac{AC}{\sin(60^\circ)}, CZ = 2a, CZ = a\sqrt{3} \Rightarrow CA = 2a = X \Rightarrow$$

$$a = \frac{X}{2} \Rightarrow XZ = \frac{X}{2}, CZ = \frac{X\sqrt{3}}{2}$$

$$4) MN = \frac{AD + BC}{2}, X = \frac{X + \frac{X\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow \dots BC = \frac{X}{2}$$

Răspuns:

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați termenul a_{50} al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă $a_6 = 26$ și $r = -2$.

Rezolvare:

$$a_{50} = a_6 + 44r = 26 + 44(-2) = 26 - 88 =$$

$$= -62$$

$$\text{Răspuns: } a_{50} = -62$$

10. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 6x$.

- a) Determinați punctele de extrem local ale funcției f .

Rezolvare:

$$f'(x) = (x^3 - 6x)' = 3x^2 - 6$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$



$$\text{Răspuns: } x = -\sqrt{2} \text{ - nok. max; } x = \sqrt{2} \text{ - nok. min}$$

- b) Determinați funcția f , axa

Rezolvare:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4$$

$$= \frac{1}{4}x^4$$

$$= \frac{1}{4}(5 -$$

$$= -2 +$$

Răspuns:

- c) Fie funcția

fiul funcției pozitivă a axei

Rezolvare:

$$h(x) = \frac{1}{4}x^4$$

$$h'(x) = x^3$$

$$h'(x) = x^3$$

$$h'(x) = x^3$$

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

$$h(x_0) =$$

$$y = h$$

$$y = 5$$

Răspuns:

b) Determinați valoarea numerică a ariei figurii plane mărginite de graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x=1$, $x=\sqrt{3}$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} A_{\text{figura}} &= - \int_1^{\sqrt{3}} (x^3 - 6x) dx = \int_{\sqrt{3}}^1 (x^3 - 6x) dx = \\ &= \left. \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 \right|_{\sqrt{3}}^1 = \\ &= \frac{1}{4} (1 - 9) - 3(1 - 3) = -\frac{8}{4} - 3(-2) = \\ &= -2 + 6 = 4 \text{ (kb. eg)} \end{aligned}$$

Răspuns: $A_{\text{figura}} = 4 \text{ kb. eg}$

c) Fie funcția $h: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{f(x)}{x}$. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției h , dacă tangenta dusă la graficul funcției formează cu direcția pozitivă a axei Ox un unghi de 45° .

Rezolvare:

$$h(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - 6x}{x} = x(x^2 - 6) = x^2 - 6$$

$$h'(x_0) = \tan 45^\circ = 1$$

$$h'(x) = (x^2 - 6)' = 2x$$

$$h'(x_0) = 2x_0; h(x_0) = 1 \Rightarrow 2x_0 = 1;$$

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

$$h(x_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 = \frac{1}{4} - 6 = -\frac{23}{4}$$

$$y = h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0)$$

$$y = 1\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{23}{4}; y = x - \frac{1}{2} - \frac{23}{4} \quad (y = x - \frac{25}{4} \text{ yf. cor})$$

Răspuns:

$$y = x - \frac{25}{4}$$

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11.	O monedă de 25 de bani se aruncă de 6 ori. Care este probabilitatea ca stema de pe monedă să apară exact de 4 ori? Rezolvare: $A = \{ \text{pestea 4 paze uz 6} \}$ $B = \{ \text{vinona peuska} \}; p(B) = \frac{1}{2}$ $\bar{B} = \{ \text{ne vinona peuska} \}$ $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $p(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot C_6^4 = \frac{15}{64}$ Răspuns: $p(A) = \frac{15}{64}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
12.	Determinați termenul care conține a^3 din dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}})^n$, $a > 0$, dacă suma coeficienților binomiali ai termenilor de rang impar este 2048. Rezolvare: $2^{n-1} = 2048$ $2^{n-1} = 2^{11}$ $n-1 = 11$ $n = 12$ $T_{k+1} = C_{12}^k (a^{\frac{1}{2}})^{12-k} \cdot (a^{-\frac{1}{2}})^k$ $\frac{12-k}{2} - \frac{k}{2} = 3$ $12 - 2k - k = 12$ $3k = 12$ $k = 4$ $T_5 = T_{4+1} = C_{12}^4 a^{\frac{3}{2}} = \frac{12!}{8!4!} a^{\frac{3}{2}} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{16 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4} a^{\frac{3}{2}} = \frac{495}{16} a^{\frac{3}{2}}$ Răspuns: $T_5 = \frac{495}{16} a^{\frac{3}{2}}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Testul

Data: 31.03

Nr.

1. Arătați că valoarea e
Rezolvare:

$$25^{1+\log_5 2} = 25$$

$$= 25 \cdot 5^{\log_5 4} = 100$$

Răspuns: 100

2. Determinați partea
 $i^2 = -1$
Rezolvare:

$$z = 10i - 4i^2 +$$

$$\operatorname{Re} z = 13$$

Răspuns: 13

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecu
Rezolvare:

$$\left(\frac{625}{100}\right)^{x+3} < \left(\frac{625}{100}\right)^{2x+6}$$

$$\left(\frac{625}{100}\right)^{2x+6} < \left(\frac{625}{100}\right)^{5x}$$

$$2x+6 < 5x$$

Răspuns: 5

31.03

Punctaj acumulat: 92 Nota:

Item

Punctaj

ALGEBRĂ

Arătați că valoarea expresiei $25^{1+\log_5 2}$ este un pătrat perfect.

Rezolvare:

$$25^{1+\log_5 2} = 25 \cdot 25^{\log_5 2} = 25 \cdot 5^{2\log_5 2} = 25 \cdot 5^{\log_5 4} = 25 \cdot 4 = 100 = 10^2$$

Răspuns: 100

Determinați partea reală a numărului complex z , unde $z = \begin{vmatrix} 2i & 2i-3 \\ 2i+3 & 5 \end{vmatrix}$ și $i^2 = -1$.

Rezolvare:

$$z = 10i - 4i^2 + 9 = 9 + 4 + 10i = 13 + 10i$$

Răspuns: 13

Răspuns: 13

Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $(6,25)^{x+3} < (0,4)^{9-5x}$.

Rezolvare:

$$\left(\frac{625}{100}\right)^{x+3} < \left(\frac{4}{10}\right)^{9-5x}, \quad \left(\frac{25}{10}\right)^{2x+6} < \left(\frac{10}{4}\right)^{5x-9}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x+6} < \left(\frac{5}{2}\right)^{5x-9}; \quad 2,5 > 1, \text{ zicem corectăm}$$

$$2x+6 < 5x-9; \quad 3x > 15; \quad x > 5$$

Răspuns: $S = (5; +\infty)$ L
0
1
2
3
4
5L
0
1
2
3
4
5L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$x \in I \text{ unde } \sin x > 0, \cos x < 0 \Rightarrow \sin x > 0, \cos x < 0$$

4. Determinați valoarea expresiei: $\frac{3}{5+2\sin(2x)}$, dacă $\operatorname{tg} x = 0,2$.

Rezolvare:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin x = k; \cos x = 5k$$

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{25}} = \frac{2}{5} : \frac{26}{25} = \frac{2}{5} \cdot \frac{25}{26} = \frac{5}{13}$$

$$\frac{3}{5+2\sin 2x} = \frac{3}{5 + \frac{10}{13}} = 3 : \frac{75}{13} = 3 \cdot \frac{13}{75} = \frac{13}{25}$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1/\cos^2 x$
 $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
 $1 + 0,04 = \frac{1}{\cos^2 x}$
 $\cos^2 x = \frac{1}{1,04} = \frac{100}{104}$
 $\cos x = \frac{5}{\sqrt{26}}$
 $\sin x = \frac{1}{\sqrt{26}}$
 $\sin 2x = \frac{2 \sin x \cos x}{1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \frac{5}{\sqrt{26}}}{1} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$

Răspuns: $\frac{13}{25}$

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 2) + 2} \geq 0$.

Rezolvare:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 2) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 2) \geq -2$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 2) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [-1, 2]$$

$x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 3 \Leftrightarrow x < -\sqrt{3} \text{ sau } x > \sqrt{3}$

Răspuns: $S = [-1, 2] \cup (\sqrt{3}, 2]$

6. Fie cercul $C(O; R)$ și un punct A din exteriorul lui, astfel încât $AO = R$. Calculați aria triunghiului ABC , unde $m(\angle COD) = 60^\circ$.

Rezolvare:

1) $OC = OA = R$

2) $m(\angle AOC) = 120^\circ$

3) $AO = OC = R$

4) $\triangle ABC$, $m(\angle A) = 120^\circ$, $AB = AC = R$

5) $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2$

Răspuns: $\frac{\sqrt{3}}{4} R^2$

7. Baza unei prisme este un romb cu diagonalele $AC = 30$ cm și $BD = 40$ cm. Determinați aria laterală a prismei, dacă înălțimea prismei este egală cu lungimea diagonalei AC .

Rezolvare:

1) $BO = DO = 20$ cm, $AO = CO = 15$ cm

2) $\triangle KBO$ este dreptunghi

3) $\triangle ABO$, $AO = 15$ cm, $BO = 20$ cm, $AB = 25$ cm

4) $AB = AC = 25$ cm

5) $\triangle ACO$, $AO = 15$ cm, $CO = 15$ cm, $AC = 30$ cm

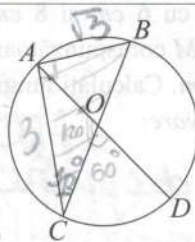
6) $AO = 15$ cm

Răspuns: 400 cm²

GEOMETRIE

Fie cercul $C(O; R)$. Punctele A, B, C, D aparțin cercului, astfel încât BC și AD sunt diametre ale cercului. Calculați aria triunghiului ABC , știind că $AC = 3 \text{ cm}$ și $m(\angle COD) = 60^\circ$.

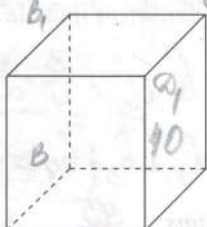
Rezolvare:



- 1) BC - diametru $\Rightarrow m(\angle CAB) = 90^\circ$
- 2) $m(\angle AOC) = 180^\circ - m(\angle COD) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
- 3) $AO = OC = r \Rightarrow \triangle AOC$ - triunghi isoscel $\Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\angle OAC) = m(\angle OCA) = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$
- 4) $\triangle ABC$, $m(\angle A) = 90^\circ$, $m(\angle C) = 30^\circ \Rightarrow$
 $AB = a$, $BC = 2a$, $AC = a\sqrt{3}$, $3 = a\sqrt{3} \Rightarrow$
 $a = \sqrt{3} \Rightarrow AB = \sqrt{3} \text{ cm}$, $BC = 2\sqrt{3} \text{ cm}$
- 5) $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$

Răspuns: $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$

Baza unei prisme drepte este un romb cu diagonala mică de 30 cm și distanța de la punctul de intersecție al diagonalelor la latura rombului egală cu 12 cm . Determinați aria laterală a prisme, dacă se cunoaște că înălțimea prisme este congruentă cu diagonala mare a rombului din bază.



Rezolvare:

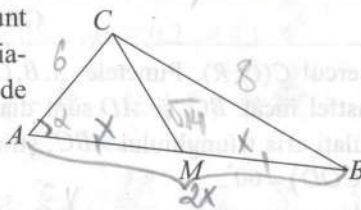
- 1) $BO = OD = \frac{BD}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ (cm)}$
- 2) $\triangle KBO$ - triunghi dreptunghiular $\Rightarrow KB = 9 \text{ cm}$
- 3) $\triangle ABO$, no t. înălțime: $OK^2 = BK \cdot KA$,
 $144 = 9 \cdot AK \Rightarrow AK = 16 \text{ (cm)}$
- 4) $AB = AK - BK + AK = 9 + 16 = 25 \text{ (cm)}$
- 5) $\triangle AOC$ - dreptunghiular, isoscel $\Rightarrow$
 $\Rightarrow AO = 20 \text{ cm} \Rightarrow AC = AA_1 = 40 \text{ cm}$
- 6) $A_{\text{lateral}} = 4 \cdot AB \cdot AA_1 = 4 \cdot 25 \cdot 40 = 4000 \text{ (cm}^2\text{)}$

Răspuns: 4000 cm^2

$$AB = ? \quad CM^2 = \frac{1}{4}(2AC^2 + 2CB^2 - AB^2)$$

8. În triunghiul ABC lungimile a două laturi sunt egale cu 6 cm și 8 cm, iar lungimea mediei CM corespunzătoare laturii a treia este de $\sqrt{14}$ cm. Calculați lungimea laturii a treia.

Rezolvare:



Ⓘ по формуле нахождения длины медианы:

$$\begin{cases} 14 = 36 + x^2 - 12x \cos \alpha \\ 64 = 36 + 4x^2 - 24x \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50 = 3x^2 - 12x \cos \alpha \\ 14 = 36 + x^2 - 12x \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36 = 2x^2 - 36 \Rightarrow \dots x = 6 \text{ cm} \Rightarrow AB = 12 \text{ cm}$$

Răspuns: 12 cm

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați suma primilor 4 termeni ai progresiei geometrice: $\frac{3}{8}; \frac{3}{4}; \dots$

Rezolvare:

$$b_2 = b_1 \cdot q, \quad \frac{3}{4} = \frac{3}{8} q \quad | \cdot \frac{8}{3} \Leftrightarrow q = 2$$

$$b_3 = b_2 q = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}; \quad b_4 = b_3 q = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = \frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 3 = \frac{3+6+12+24}{8} = \frac{45}{8}$$

Răspuns: $\frac{45}{8}$

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+3}$.

a) Aflați intervalele de monotonie ale funcției f .

Rezolvare:

$$f'(x) = \frac{(e^x)'(x+3) - e^x(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{e^x \cdot x + 3e^x - e^x}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{e^x(x+2)}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x(x+2) = 0 \\ (x+3)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x > 0 \\ x+2 = 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

Răspuns:

$f(x)$ убывает на $(-\infty; -3)$ и на $(-3; -2]$
 $f(x)$ возрастает на $[-2; +\infty)$
 монотонно

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

Rezolvare:

$$f(x) - \frac{1}{3} =$$

$$f(x) - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{e^x - 1}{x(x+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(x+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Răspuns: $\frac{1}{3}$

c) Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

a funcției g , dacă $G(x) = \int_0^x g(t) dt$

Rezolvare:

$$g(x) = (x^2 + 3x)$$

$$G(x) = \int_0^x (t^2 + 3t) dt$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

$$G(0) = 0$$

$$G(1) = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6}$$

$$G(2) = \frac{8}{3} + 6 = \frac{26}{3}$$

$$G(3) = 9 + \frac{27}{2} = \frac{45}{2}$$

$$G(4) = \frac{64}{3} + 24 = \frac{112}{3}$$

$$G(5) = \frac{125}{3} + \frac{45}{2} = \frac{295}{6}$$

$$G(6) = \frac{216}{3} + 54 = 126$$

$$G(7) = \frac{343}{3} + \frac{147}{2} = \frac{1021}{6}$$

$$G(8) = \frac{512}{3} + 96 = \frac{704}{3}$$

$$G(9) = \frac{729}{3} + 135 = 378$$

$$G(10) = \frac{1000}{3} + 180 = \frac{1480}{3}$$

$$G(11) = \frac{1331}{3} + 231 = \frac{1999}{3}$$

$$G(12) = \frac{1728}{3} + 288 = 864$$

$$G(13) = \frac{2197}{3} + 351 = \frac{2999}{3}$$

$$G(14) = \frac{2744}{3} + 420 = \frac{3808}{3}$$

$$G(15) = \frac{3375}{3} + 500 = 1625$$

$$G(16) = \frac{4096}{3} + 576 = \frac{5280}{3}$$

$$G(17) = \frac{4913}{3} + 660 = \frac{6247}{3}$$

$$G(18) = \frac{5832}{3} + 756 = 2016$$

$$G(19) = \frac{6859}{3} + 855 = \frac{8149}{3}$$

$$G(20) = \frac{8000}{3} + 960 = \frac{9920}{3}$$

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{1}{3}}{x}$.

Rezolvare:

$$f(x) - \frac{1}{3} = \frac{e^x}{x+3} - \frac{1}{3} = \frac{3e^x - x - 3}{3(x+3)}$$

$$\frac{f(x) - \frac{1}{3}}{x} = \frac{3e^x - x - 3}{3x(x+3)} = \frac{3(e^x - 1) - x}{3x(x+3)}$$

$$= \frac{e^x - 1}{x(x+3)} - \frac{1}{3x+9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x(x+3)} - \frac{1}{3x+9} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3x+9} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

Răspuns: $\frac{2}{9}$

c) Fie funcția $g: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (x^2 + 3x) \cdot f(x)$. Calculați primitiva G a funcției g , dacă $G(0) = 2$.

Rezolvare:

$$g(x) = (x^2 + 3x) \cdot \frac{e^x}{x+3} = x(x+3) \cdot \frac{e^x}{x+3} = xe^x$$

$$G(x) = \int xe^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right] =$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

$$G(0) = 2 \Rightarrow 0 \cdot e^0 - e^0 + C = 2$$

$$-1 + C = 2$$

$$C = 3$$

$$G(x) = e^x(x-1) + 3$$

$$G(x) = e^x(x-1) + 3$$

Răspuns: $G(x) = e^x(x-1) + 3$

**ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE
DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ**

11.	Pe 16 fișe sunt scrise numerele naturale de la 1 la 16. Se extrag la întâmplare 2 fișe. Care este probabilitatea ca suma numerelor apărute pe aceste 2 fișe să fie egală cu 14? Rezolvare: $n = 16 \cdot 15 = 240$ $A = \{(1,13); (13,1); (2,12); (12,2); (3,11); (11,3); (4,10); (10,4); (5,9); (9,5); (6,8); (8,6)\}$ $m = 12$ $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{240} = \frac{1}{20}$ Răspuns: $\frac{1}{20}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
12.	Determinați termenii raționali din dezvoltarea binomului la putere $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^{16}$. Rezolvare: $T_{k+1} = C_{16}^k (3^{\frac{1}{2}})^{16-k} (2^{\frac{1}{3}})^k = C_{16}^k \cdot 3^8 - \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{3}$ $k \in [0; 16], k \in \mathbb{N}$ $k:2 \}$ $k:3 \} \Rightarrow k:6 \Rightarrow k \in \{0, 6, 12\}$ $T_1 = T_{0+1} = C_{16}^0 \cdot 3^8 \cdot 2^0 = 3^8 = 6561$ $T_7 = T_{6+1} = C_{16}^6 \cdot 3^5 \cdot 2^2 = 8008 \cdot 4 \cdot 243 = 7783776$ $T_{13} = T_{12+1} = C_{16}^{12} \cdot 3^2 \cdot 2^4 = 1820 \cdot 9 \cdot 16 = 262080$ $C_{16}^6 = \frac{16!}{10!6!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16^4}{12 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 8008$ Răspuns: $T_1 = 3^8$; $T_7 = 8008 \cdot 3^5 \cdot 2^2$; $T_{13} = 1820 \cdot 3^2 \cdot 2^4$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Testul

Data: 13 03

Nr.	
1.	Calculați media aritmetică a termenilor din dezvoltarea binomului $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^{16}$. Rezolvare: $\log_2(6 - 2 \cdot 15) + \log_2(6 - 2 \cdot 15)$ $= \log_2(36 - 30)$ Răspuns: 2
2.	Fie polinomul $P(X)$ al cărui termen constant este egal cu 3. Calculați valoarea lui $P(-1)$. Rezolvare: $P(-1) = 3$ Răspuns: 3
3.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\log_5(1-2x) \geq \log_5 \frac{16}{25}$. Rezolvare: $1-2x \leq \frac{16}{25}$ $x \geq \frac{9}{50}$ Răspuns: $x \geq \frac{9}{50}$

13 03

Punctaj acumulat:

Nota:

Item

Punctaj

ALGEBRĂ

Calculați media aritmetică a numerelor $a = \log_2(6 - 2\sqrt{5})$ și $b = \log_2(6 + 2\sqrt{5})$.

Rezolvare:

$$\log_2(6 - 2\sqrt{5}) + \log_2(6 + 2\sqrt{5}) = \log_2 \frac{(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})}{2} =$$

$$= \log_2 \frac{36 - 20}{2} = \log_2 \frac{16}{2} = \log_2 8 = 3$$

Răspuns: 3

L
0
1
2
3
4
5

L
0
1
2
3
4
5

Fie polinomul $P(X) = 7X^3 - 6X^2 + bX + 1$. Știind că restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X + 1$ este 3, aflați numărul real b .

Rezolvare:

$$P(-1) = 3; -7 - 6 - b + 1 = 3; b = -15$$

Răspuns: $b = -15$

L
0
1
2
3
4
5

L
0
1
2
3
4
5

Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\log_5(1 - 2x) - 2 \geq 0$.

Rezolvare:

$$\log_5(1 - 2x) \geq \log_5 \frac{16}{25}; 0 < \frac{1 - 2x}{16} < 1$$

$$1 - 2x \leq \frac{16}{25}; 2x \geq 1 - \frac{16}{25}; 2x \geq \frac{9}{25} \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$x \geq \frac{9}{50}$$

$$x \in [\frac{9}{50}; \frac{1}{2})$$

Răspuns:

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

$$S = [\frac{9}{50}; \frac{1}{2})$$

GEOMETRIE

Baza unui paralelipiped dreptunghic cu diagonala de 12 cm este un pătrat cu latura de 3 cm. Aflați volumul paralelipipedului dreptunghic.

Rezolvare:

$$1) A_{\text{ocul}} = a^2 = 3^2 = 9 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$2) AC = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

3) $\triangle ACC_1$, $m(\angle C) = 90^\circ$, $\text{no } \tau. \text{Thagoras}$

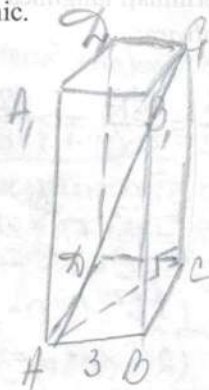
$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 \Rightarrow CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} =$$

$$= \sqrt{12^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{144 - 18} = \sqrt{126} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot 14} = 3\sqrt{14} \text{ (cm)}$$

$$4) V = A_{\text{ocul}} \cdot CC_1 = 9 \cdot 3\sqrt{14} = 27\sqrt{14} \text{ (cm}^3\text{)}$$

Răspuns: $V = 27\sqrt{14} \text{ cm}^3$



L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

Fie triunghiul ABC cu $m(\angle C) = 90^\circ$, $m(\angle A) = 60^\circ$ și $AC = 18 \text{ cm}$. Din punctul C pe planul triunghiului ABC este dusă perpendiculara MC cu lungimea de 12 cm. Aflați distanța de la punctul M la dreapta AB.

Rezolvare:

$$1) \triangle ABC, m(\angle C) = 90^\circ, m(\angle A) = 60^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\angle B) = 30^\circ \Rightarrow AC = a, AB = 2a, BC = a\sqrt{3};$$

$$a = 18 \Rightarrow AB = 36 \text{ cm}, BC = 18\sqrt{3} \text{ cm}$$

2) MK - înălțimea, CK - mijlocul, $MC \perp (ABC)$

$$MK \perp AB \xrightarrow{\text{TH}} CK \perp AB$$

$$3) A_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 18\sqrt{3} = 162\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

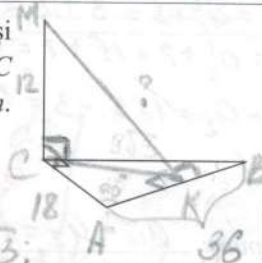
$$A_{ABC} = \frac{1}{2} CK \cdot AB \Rightarrow 162\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot CK \cdot 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 162\sqrt{3} = 18CK \Leftrightarrow CK = 9\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

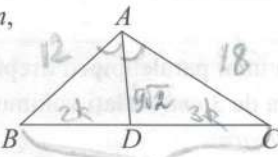
3) $\triangle MCK$, $m(\angle MKC) = 90^\circ$, $\text{no } \tau. \text{Thagoras}$

$$MK^2 = CK^2 + CM^2; MK = \sqrt{CK^2 + CM^2} = \sqrt{243 + 144} = \sqrt{387} \text{ (cm)}$$

Răspuns: $MK = \sqrt{387} \text{ cm}$



L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

8.	Fie triunghiul ABC , în care $AB = 12$ cm, $AC = 18$ cm, iar AD este bisectoare cu lungimea de $9\sqrt{2}$ cm. Determinați lungimea laturii BC .	L	L
	Rezolvare:	0	0
		1	1
	$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{12}{18} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow BD = 2k, DC = 3k, BC = 5k$	2	2
	$BC = 5k$	3	3
	$4k^2 = 144 + 162 - 216\sqrt{2}\cos\alpha$	4	4
	$9k^2 = 324 + 162 - 324\sqrt{2}\cos\alpha$	5	5
	$5k^2 = 180 - 108\cos\alpha$	6	6
	$216\cos\alpha = 306 - 4k^2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{4}$	7	7
	$k = 2$	8	8
	Răspuns: 3) $BC = 10$ cm		

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9.	Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2$, $a_1 = 1$. Determinați diferența $a_4 - a_2$.	L	L
	Rezolvare:	0	0
	$a_2 = a_1^2 + 2 = 1^2 + 2 = 3$	1	1
	$a_3 = a_2^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11$	2	2
	$a_4 = a_3^2 + 2 = 11^2 + 2 = 123$	3	3
	$a_4 - a_2 = 123 - 3 = 120$	4	4
	Răspuns: $a_4 - a_2 = 120$	5	5

10.	Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 4)$.	L	L
	a) Aflați punctele de inflexiune ale funcției f .	0	0
	Rezolvare:	1	1
	$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$	2	2
	$f''(x) = \frac{(2x)'(x^2 + 4) - 2x(x^2 + 4)'}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2}$	3	3
	$f''(x) = 0 \Rightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$	4	4
	$x = -1$ și $x = 1$ sunt punctele de inflexiune.	5	5
	Răspuns: $x = -1$ și $x = 1$	6	6
	$x = -2$ și $x = 2$	7	7
	$x = -2$ și $x = 2$	8	8

b) Fie funcția $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Calculați asimptota orizontală la $+\infty$ a funcției g .

Rezolvare:

$$g(x) = \frac{\ln(x^2+4)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+4)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x^2+4))'}{x'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2+4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y=0$ reprezintă asimptota orizontală

Răspuns: $y=0$

c) Calculați $\int_0^2 f(x) dx$.

Rezolvare:

$$\int_0^2 \ln(x^2+4) dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(x^2+4) \quad dv = dx \\ du = \frac{2x}{x^2+4} dx \quad v = x \end{array} \right] =$$

$$= x \ln(x^2+4) \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 \frac{x^2}{x^2+4} dx = x \ln(x^2+4) \Big|_0^2 - 2I_1 =$$

$$= \ln 5 - 2 + 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

$$I_1 = \int_0^2 \frac{x^2}{x^2+4} dx = \int_0^2 \left(\frac{x^2+4}{x^2+4} - \frac{4}{x^2+4} \right) dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{x^2+4} \right) dx =$$

$$= x \Big|_0^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_0^2 = 2 - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

Răspuns: $\ln 5 - 2 + 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

$$n = (201 - 60 \text{ cm})^{paz}$$

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11.	Se aruncă un zar de 5 ori. Care este probabilitatea ca la 5 aruncări exact de 2 ori să apară fața cu 2 puncte? Rezolvare: $A = \{\text{probno 2 paza 5-ori}\}$ $n = 6^5 = 7776$ $m = 5^2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \frac{5! \cdot 125}{3!2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 125}{2} = 1250$ $P(A) = \frac{1250}{7776} = \frac{625}{3888}$ Răspuns: $\frac{625}{3888}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
12.	Pentru ce valori ale lui a suma termenilor al treilea și al cincilea din dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt{2^a} + \frac{1}{\sqrt{2^{a-1}}}\right)^6$ este egală cu 135? Rezolvare: $T_3 + T_5 = 135$ $T_3 = C_6^2 (2^{\frac{a}{2}})^2 (2^{-\frac{a-1}{2}})^2 = 15 \cdot 2^{2a-a+2} = 15 \cdot 2^{a+2}$ $T_5 = C_6^4 (2^{\frac{a}{2}})^4 (2^{-\frac{a-1}{2}})^4 = 15 \cdot 2^{4a-2a+2} = 15 \cdot 2^{2a+2}$ $15 \cdot 2^{a+2} + 15 \cdot 2^{2a+2} = 135$ $30(2^a + 2^{2a}) = 135$ $2^a + 2^{2a} = \frac{9}{2}$ $2t^2 - 9t + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^a = \frac{1}{2} \\ 2^a = 2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$ Răspuns: $a = -1$ sau $a = 2$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Data: 10.0

Nr.

1. Calculați
Rezolvare:

$$\log_6 27 = \frac{\log 27}{\log 6} = \frac{\log 3^3}{\log 2 \cdot 3} = \frac{3 \log 3}{\log 2 + \log 3}$$

Răspuns:

2. Fie polinomul
Rezolvare:

$$P(-2) = -5$$

Răspuns:

3. Rezolvați
Rezolvare:

$$\begin{cases} 6+5 \\ 6+5x \\ 3+2x \end{cases}$$

Răspuns:

Data: 10.03

Punctaj acumulat: 90 Nota:

Nr.	Item	Punctaj	
ALGEBRA			
1.	Calculați valoarea expresiei $6^{\log_{36} 49} + \log_3 27$. Rezolvare: $6^{\log_{36} 49} = 6^{\log_{2 \cdot 3} 7^2} = 6^{\log_2 7} = 7$ $\log_3 27 = 3$ $6^{\log_{36} 49} + \log_3 27 = 7 + 3 = 10$ Răspuns: 10	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
2.	Fie polinomul $P(X) = 5X^3 - 2X^2 + X - 4$. Determinați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X + 2$. Rezolvare: $P(-2) = 5 \cdot (-8) - 2 \cdot 4 - 2 - 4 = -40 - 8 - 6 = -54$ $R(X) = P(-2)$ Răspuns: -54	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
3.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\sqrt{6+5x} \leq 3+2x$. Rezolvare: $\begin{cases} 6+5x \geq 0 \\ 6+5x \leq 9+12x+4x^2 \\ 3+2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{6}{5} \\ 4x^2+7x+3 \geq 0 \\ x \geq -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{6}{5} \\ x \leq -1 \text{ sau } x \geq -\frac{3}{4} \\ x \geq -\frac{3}{2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{6}{5} \\ x \leq -1 \\ x \geq -\frac{3}{4} \end{cases}$ Răspuns: $S = [-\frac{6}{5}, -1] \cup [-\frac{3}{4}, +\infty)$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

4.	Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația: $z^2 - z(2+5i) - 5+5i = 0$; $i^2 = -1$ Rezolvare: $\Delta = 4 + 20i + 25i^2 - 4(-5+5i) = 4 - 25 + 20i + 20 - 20i = -1$ $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-1} = i$ $\begin{cases} X_1 = \frac{2+5i-i}{2} \\ X_2 = \frac{2+5i+i}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{2+4i}{2} \\ X_2 = \frac{2+6i}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1+2i \\ X = 1+3i \end{cases}$ Răspuns: $S = \{1+2i, 1+3i\}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
5.	Determinați valorile reale ale lui x , pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5-3^x} & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{5+3^x} \end{pmatrix}$ este inversabilă. Rezolvare: Matrice A inversabilă $\Rightarrow \det A \neq 0$ $\begin{cases} 5-3^x \geq 0 \\ 5+3^x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \leq 5 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; \log_3 5]$ $3^x \leq 5; x \leq \log_3 5$ ($3 > 1$, crescătoare) $\det A = \begin{vmatrix} \sqrt{5-3^x} & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{5+3^x} \end{vmatrix} = \sqrt{(5-3^x)(5+3^x)} - \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} =$ $= \sqrt{5^2 - 3^{2x}} - 2 \cdot 2 = \sqrt{25 - 3^{2x}} - 4$ $\det A \neq 0 \Rightarrow \sqrt{25 - 3^{2x}} - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{25 - 3^{2x}} \neq 4$ $\begin{cases} 25 - 3^{2x} \geq 0 \\ 25 - 3^{2x} \neq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x} \leq 25 \\ 3^{2x} \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq \log_3 25 \\ 3^{2x} \neq 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq \log_3 25 \\ 2x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \log_3 5 \\ x \neq 1 \end{cases}$ Răspuns: $x \in (-\infty; 1) \cup (1, \log_3 5]$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

6.	Fie trapezul Aflați perim $CE = EB = 8$ Rezolvare: 1) $AB \parallel CD$ $AK = \frac{1}{2} CD$ 2) $AB = 10$ 3) $\triangle CEB$ $CB = 10$ $AB \parallel CD$ 4) $p = 2A$ $= 4(40)$ Răspuns:	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
7.	Baza piram ABC cu m $KC = 27$ cm, ră pe planul diana triungi volumul pira Rezolvare: 1) $AC = AK$ 2) $\triangle ABC$ $BK^2 = AK$ $= \sqrt{3} \cdot 27 =$ 3) $Aoch =$ 4) $BT =$ 5) $KT =$ 6) $\triangle BKT$ $BT = \sqrt{3}$ $VB = BT$ 7) $V = \frac{1}{3} V$ Răspuns:	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

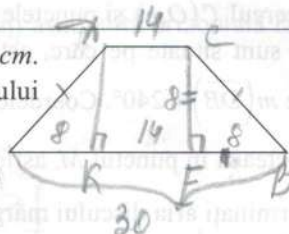
GEOMETRIE

6. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mică $DC = 14$ cm. Aflați perimetrul trapezului, dacă înălțimea trapezului $CE = EB = 8$ cm, $E \in [AB]$.

Rezolvare:

1) Trapezul isoscel $ABCD$,
 $AK = CE = 8$ cm; $KE = DC = 14$ cm;
 $AK = EB = 8$ cm
 2) $AB = AK + KE = 2 \cdot 8 + 14 = 16 + 14 = 30$ (cm)
 3) $\triangle CEB$, $m(\angle E) = 90^\circ$, $CE = EB \Rightarrow \triangle CEB - p/5$
 $CB = EB\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ (cm)
 $ABCD - p/5$ trapez isoscel $\Rightarrow AD = CB = 8\sqrt{2}$ (cm)
 4) $p = 2AD + DC + AB = 2 \cdot 8\sqrt{2} + 14 + 30 = 16\sqrt{2} + 44 =$
 $= 4(4\sqrt{2} + 11)$ (cm)

Răspuns: $4(4\sqrt{2} + 11)$ cm



L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

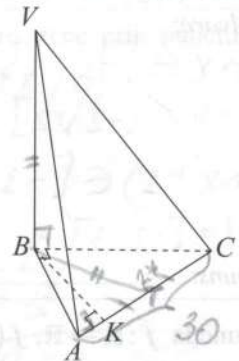
p-?

7. Baza piramidei $VABC$ este triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle ABC) = 90^\circ$ și înălțimea BK , astfel încât $KC = 27$ cm, $AK = 3$ cm. Muchia VB este perpendiculară pe planul bazei piramidei și este congruentă cu mediana triunghiului ABC dusă din vârful B . Determinați volumul piramidei $VABC$.

Rezolvare:

1) $AC = AK + KC = 3 + 27 = 30$ (cm)
 2) $\triangle ABC$, no teorema lui Pitagora
 $BK^2 = AK \cdot KC \Rightarrow BK = \sqrt{AK \cdot KC} =$
 $= \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 9} = 3 \cdot 3 = 9$ (cm)
 3) $S_{buc} = \frac{1}{2} BK \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 30 = 135$ (cm²)
 4) BT - mediana $\Rightarrow AT = TC = 15$ cm
 5) $KT = AT - AK = 15 - 3 = 12$ (cm)
 6) $\triangle BKT$, $m(\angle K) = 90^\circ$, no 7. Teorema lui Pitagora $BT^2 = BK^2 + KT^2$
 $BT = \sqrt{BK^2 + KT^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$ (cm)
 $VB = BT = 15$ cm
 7) $V = \frac{1}{3} VB \cdot S_{buc} = \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot 135 = 675$ (cm³)

Răspuns:



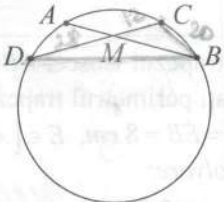
L	L
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8

V-?

675 cm³

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}; \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

8.	Fie cercul $C(O, r)$ și punctele A, C, B, D în această ordine sunt situate pe cerc, astfel încât măsura arcului mare $m(\widehat{DB}) = 240^\circ$. Coardele $AB = CD = 40$ cm se intersectează în punctul M , astfel încât $\frac{CM}{MD} = \frac{AM}{MB} = \frac{3}{7}$. Determinați aria discului mărginit de acest cerc.		L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
Rezolvare: 1) $m(\widehat{DB}) = 240^\circ$; $\angle DCB = \frac{1}{2}m(\widehat{DB}) = 120^\circ$ 2) $\frac{CM}{MD} = \frac{AM}{MB} = \frac{3}{7} \Rightarrow CM = AM = 3k, MD = MB = 7k, AB = 10k$ $40 = 10k \Rightarrow k = 4 \Rightarrow CM = AM = 12$ cm; $MD = MB = 28$ cm 3) $\triangle CMB$, no T. Kosinusov, $MB^2 = MC^2 + CB^2 - 2MC \cdot CB \cdot \cos 120^\circ$ $28^2 = 12^2 + CB^2 - 2 \cdot 12 \cdot CB \cdot (-\frac{1}{2})$ $784 = 144 + CB^2 + 12CB$ $CB^2 + 12CB - 640 = 0$; $CB = 20$ cm 4) $\triangle DCB$, no T. Kosinusov, $DB^2 = DC^2 + CB^2 - 2DC \cdot CB \cdot \cos 120^\circ$ $40^2 = 20^2 + CB^2 - 2 \cdot 20 \cdot CB \cdot (-\frac{1}{2})$ $1600 = 400 + CB^2 + 20CB$ $CB^2 + 20CB - 1200 = 0$; $CB = 20$ cm 5) $\triangle OMB$, no T. Sin: $2R \cdot \sin 120^\circ = \frac{MB}{\sin 30^\circ} = \frac{28}{\frac{1}{2}} = 56$ $2R = \frac{56}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{112}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{56\sqrt{3}}{3}$ cm Răspuns: $\frac{64}{3}\pi R^2 = \frac{28000\pi}{3}$ cm ²				
ANALIZĂ MATEMATICĂ				
9.	Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\sin x + 1$. Determinați mulțimea $E(f)$ a valorilor funcției f .		L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
Rezolvare: $\sin x \in [-1, 1]$ $2\sin x \in [-2, 2]$ $(2\sin x + 1) \in [-1, 3]$ $f(f) = [-1, 3]$ Răspuns: $E(f) = [-1, 3]$				
10.	Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.		L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
a) Calculați $\int_0^1 x f(x) dx$. Rezolvare: $\int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx = \int_1^2 \frac{1}{2} t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} \Big _1^2 = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1)$ Răspuns: $\frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$				

$E(f)$ — множество значений функции, отвечающее за y

b) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$.
Rezolvare:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$$

Răspuns:

c) Scrieți mulțimea $M(1; 1)$.

Rezolvare:

$$y = f(x)$$

$$1 = f(x)$$

$$f'(x)$$

$$f'(x_0)$$

$$1 = \frac{1}{x}$$

$$x_0 - x_0^2$$

$$\sqrt{x_0^2}$$

$$f(x_0)$$

Răspuns:

b) Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + f(x)$. Calculați asimptota orizontală la $-\infty$ a funcției g .

Rezolvare:

$$g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1}) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 - 1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{-\infty} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 0$ reprezintă asimptota orizontală

Răspuns: $y = 0$ ref. ac

c) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f , care trece prin punctul $M(1;1)$.

Rezolvare:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$1 = f'(x_0)(1 - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}}, \quad f(x_0) = \sqrt{x_0^2 + 1}$$

$$1 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}}(1 - x_0) + \sqrt{x_0^2 + 1}$$

$$\frac{x_0 - x_0^2 + x_0^2 + 1}{\sqrt{x_0^2 + 1}} = 1, \quad x_0 + 1 = 1; \quad x_0 = 0$$

$$f(x_0) = 1; \quad f'(x_0) = 0; \quad y = 1 \text{ yf. kac.}$$

Răspuns: $y = 1$ yf. kac

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11.	9 cărți sunt repartizate în 3 sertare de trei culori diferite. Care este probabilitatea ca în sertarul roșu să fie 4 cărți, în sertarul galben să fie 3 cărți și în sertarul albastru să fie 2 cărți?	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
Rezolvare: $n = 9$ $m = C_9^4 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{9! \cdot 5!}{4! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot 1 = \frac{4! \cdot 5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{4! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 9$ $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 9}{3^7} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 4}{3^7} = \frac{140}{2187}$ Răspuns: $\frac{140}{2187}$			
12.	Determinați termenul care nu îl conține pe b din dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt{b} - \frac{1}{3\sqrt[3]{b}}\right)^{12}$, $b > 0$.	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
Rezolvare: $T_{k+1} = C_{12}^k \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{12-k} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(b^{-\frac{1}{3}}\right)^k$ $\frac{12-k}{2} - \frac{k}{3} = 0; 24 - 2k - k = 0; 3k = 24; k = 8$ $T_9 = T_{8+1} = C_{12}^8 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{12!}{8! \cdot 4!} \cdot 3^{-8} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{8! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{55}{429}$ Răspuns: $T_9 = \frac{55}{429}$			

Data: 05.03

Nr.

1. Arătați că n
Rezolvare:

$$a = \log_{\frac{1}{2}} 8$$

$$= \frac{3}{2} \log_{\frac{1}{2}} 2$$

Răspuns:

2. Fie polino
le ale lui a,
este 4.

Rezolvare:

$$P(2) = 4$$

$$2a = 14$$

Răspuns:

3. Rezolvați
Rezolvare:

$$0.75x$$

$$205 - x$$

$$x > 24$$

$$x = -4$$

$$x = -9$$

Răspuns:

Data:

05.03

Punctaj acumulat:

74

Nota:

Nr.	Item	Punctaj	
ALGEBRĂ			
1.	Arătați că numărul $a = \log_{16} 64 + 8^{-\frac{1}{3}}$ este întreg. Rezolvare: $a = \log_{16} 64 + 8^{-\frac{1}{3}} = \log_{4^2} 4^3 + 2^{-\frac{1}{3} \cdot 3} = \log_{4^2} 4^3 + 2^{-1} = \frac{3}{2} \log_4 4 + 2^{-1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ Răspuns: 2	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
2.	Fie polinomul $P(X) = 2X^3 + (a-2)X^2 - 3aX + 10$. Determinați valorile reale ale lui a , știind că restul împărțirii polinomului la binomul $Q(X) = X-2$ este 4. Rezolvare: $P(2) = 4 \Rightarrow 16 + 4a - 6a + 10 = 4 \Leftrightarrow 2a = 14 \Leftrightarrow a = 7$ Răspuns: $a = 7$	L 0 1 2 3 4 5	L 0 1 2 3 4 5
3.	Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2\sqrt{5-x} - 3(x+2) = 0$. Rezolvare: $\begin{aligned} \text{Caz: } 5-x \geq 0 &\Leftrightarrow x \leq 5; x \in (-\infty; 5] \\ 2\sqrt{5-x} - 3(x+2) &= 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{5-x} = 3x+6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 20 - 4x &= 9x^2 + 36x + 36 \Leftrightarrow 9x^2 + 40x + 16 = 0 \\ [x = -\frac{4}{9}] &\Rightarrow x = -\frac{4}{9} \end{aligned}$  Răspuns: $S = \{-\frac{4}{9}\}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

$$3x + 6 \geq 0$$

$$x \geq -2$$

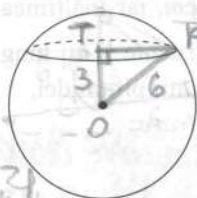
4.	Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $2iz^2 + (4-i)z - 1 - 3i = 0$. $i^2 = -1$ Rezolvare: $\Delta = (4-i)^2 - 4 \cdot 2i(-1-3i) = 16 - 8i + i^2 + 8i + 24i^2 = 16 - 1 - 24 = -9$ $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = 3i$ $\begin{cases} x_1 = \frac{-4+i-3i}{4i} \\ x_2 = \frac{-4+i+3i}{4i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4-2i}{4i} \\ x_2 = \frac{-4+4i}{4i} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4i-2i^2}{4i^2} \\ x_2 = \frac{-4i+4i^2}{4i^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2-4i}{-4} \\ x_2 = \frac{-4-4i}{-4} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + i \\ x_2 = 1 + i \end{cases} \quad S = -\frac{1}{2} + i; 1 + i$ Răspuns:	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
5.	Fie matricea $M(x) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & x-1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 4 & x+2 & 2 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Determinați numerele reale x , astfel încât $M(x)$ să fie inversabilă. Rezolvare: Matricea $M(x)$ inversabilă $\Rightarrow \det M \neq 0$ $\det M = \begin{vmatrix} 6 & 3 & x-1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 4 & x+2 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 2x(x+2)(x-1) - 4x + 4 - 12x =$ $= 16 - 16x + 2x(x^2 + x - 1) = 16 - 16x + 2x^3 + 2x^2 - 2x =$ $= 2x^3 + 2x^2 - 20x + 16$ $2x^3 + 2x^2 - 20x + 16 = 0$ $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$; $\Delta_1 = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$ $x=1 \Rightarrow 1+1-10+8=0 \Rightarrow x=1$ - rădăcină $\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 10x + 8 \\ -x^3 - x^2 \\ \hline -10x + 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x-1)(x^2 + 2x - 8) \\ x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-4 \end{cases} \\ x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x-1)(x-2)(x+4) \end{array}$ Răspuns: $x=1, 2, -4$ $\det M \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq -4 \end{cases}$ Orb: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, -4\}$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

GEOMETRIE

6. O sferă cu raza de 6 cm se sectionează cu un plan, la o distanță de 3 cm de la centrul ei. Aflați aria secțiunii.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} 1) \triangle OKT, m(\angle T) &= 90^\circ, TK = 3\sqrt{3} \\ 2) A &= \pi r^2 = \pi (3\sqrt{3})^2 = 3 \cdot 9\pi = 27\pi \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

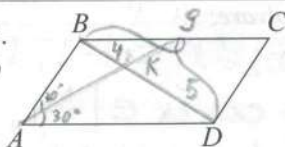


L
0
1
2
3
4
5

Răspuns:

$$27\pi \text{ cm}^2$$

7. Fie paralelogramul ABCD, în care $m(\angle BAD) = 60^\circ$. Bisectoarea unghiului A intersectează diagonala BD în punctul K, astfel încât $BK = 4 \text{ cm}$ și $KD = 5 \text{ cm}$. Determinați aria paralelogramului ABCD.



Rezolvare:

$$1) BK - \text{bisectoarea} \Rightarrow m(\angle BAK) = m(\angle DAK) = 30^\circ$$

$$BD = BK + KD = 4 + 5 = 9 \text{ (cm)}$$

$$2) \triangle ABK, \text{no teorema sinusurilor} \quad \frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{BK}{\sin 30^\circ}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{4}{5} \Rightarrow AB = 4k, AD = 5k$$

$$3) \triangle ABD, \text{no teorema cosinusurilor: } BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ$$

$$81 = 16k^2 + 25k^2 - 2 \cdot 4k \cdot 5k \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow 81 = 41k^2 - 20k^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 21k^2 = 81 \quad | : 3 \Leftrightarrow 7k^2 = 27 \Leftrightarrow k = \sqrt{\frac{27}{7}} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{7} \Rightarrow AB = \frac{12\sqrt{21}}{7} \text{ cm; } AD = \frac{15\sqrt{21}}{7} \text{ cm}$$

$$4) A_{ABCD} = 2 A_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{12\sqrt{21} \cdot 15\sqrt{21}}{7 \cdot 7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{90 \cdot 21\sqrt{3}}{7 \cdot 7} = \frac{270\sqrt{3}}{7} \text{ (cm}^2\text{)}$$

Răspuns:

$$\frac{270\sqrt{3}}{7} \text{ cm}^2$$

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Около п/о трапеции можно описать окружность

8. Baza unei piramide este un trapez isoscel cu bazele de 21 cm și 9 cm, iar înălțimea de 8 cm. Toate muchiile laterale sunt congruente și au lungimea de $\frac{85}{8}\sqrt{5}$. Determinați lungimea înălțimii piramidei.

Rezolvare:

1) $ABCD$ - trapez isoscel, AK, CT ;
 $KT = BC = 9$ cm; $AK = CT = 8$ cm

2) $\triangle KTD$ - dreptunghi

3) $\triangle KTD$, $BD = 17$ cm

4) $\triangle ABD$, no φ - teorema : $p = 24$
 $A = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 7} = \sqrt{7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4} = 7 \cdot 2 = 14$
 $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4A} = \frac{10 \cdot 21 \cdot 17}{84 \cdot 4} = \frac{85}{8}$ (cm); $AD = \frac{85}{8}$ cm

5) $\triangle PDA$, no $\angle$ - teorema : $PO = \frac{85}{4} = 21 \frac{1}{4}$ (cm)

Răspuns: $21 \frac{1}{4}$ cm

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos(2x)$. Determinați mulțimea $E(f)$ a valorilor funcției f .

Rezolvare:

$\cos 2x \in [-1, 1]$
 $-\frac{1}{2} \cos 2x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
 $1 - \frac{1}{2} \cos 2x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$
 $E(f) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

Răspuns: $E(f) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$.

a) Determinați intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției f .

Rezolvare:

$f'(x) = \frac{2(x-2) - (2x-1)}{(x-2)^2} = \frac{2x-4-2x+1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2}$

$f''(x) = -3 \cdot (x-2)^{-2} = -3 \cdot (-2) \cdot (x-2)^{-3} = \frac{6}{(x-2)^3}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{6}{(x-2)^3} = 0 \Rightarrow x-2 \neq 0, x \neq 2$

Răspuns: $f(x)$ convexă pe $(-\infty, 2)$
 $f(x)$ concavă pe $(2, +\infty)$

b) Calculați

Rezolvare:

$$f(4) = \frac{8}{4} = 2$$

$$f(x) = f(4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 2}{x - 4}$$

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$.

Rezolvare:

$$f(4) = \frac{8-1}{4-2} = \frac{7}{2}$$

$$f(x) - f(4) = \frac{2x-1}{x-2} - \frac{7}{2} = \frac{4x-2-7x+14}{2(x-2)} = \frac{12-3x}{2(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{12-3x}{2(x-2)(x-4)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-3(x-4)}{2(x-2)(x-4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-3}{2(x-2)} = \frac{-3}{(4-2) \cdot 2} = -\frac{3}{4}$$

Răspuns:

$$-\frac{3}{4}$$

c) Calculați $\int_3^5 f(x) dx$.

Rezolvare:

$$\int_3^5 \frac{2x-1}{x-2} dx = \int_3^5 \left(\frac{2x-4}{x-2} + \frac{3}{x-2} \right) dx =$$

$$= \int_3^5 \left(2 + \frac{3}{x-2} \right) dx = 2x \Big|_3^5 + 3 \ln|x-2| \Big|_3^5 =$$

$$= 2(5-3) + 3(\ln 3 - \ln 1) = 4 + 3 \ln 3$$

Răspuns:

$$I = 4 + 3 \ln 3$$

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

L
0
1
2
3
4
5
6
7
8

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11.	Pentru a ajunge în etapa finală a unui concurs de muzică, un candidat are de susținut cel puțin 2 probe din trei propuse. Probabilitatea susținerii unei probe este de 0,6. Care este probabilitatea că respectivul candidat să treacă în etapa finală a concursului? <i>Rezolvare:</i> $A_i = \{ \text{când probele } N^{\circ} i \}, p(A_i) = 0,6$ $\bar{A}_i = \{ \text{ne când probele } N^{\circ} i \}, p(\bar{A}_i) = 1 - p(A_i) = 1 - 0,6 = 0,4$ $B = \{ \text{proșterea în finală} \}$ $p(B) = 3p(A_1)p(A_2)p(\bar{A}_3) + p^3(A_3) =$ $= 3 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,6^3 = 0,432 + 0,216 = 0,648$ <i>Răspuns:</i> 0,648	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8
12.	Determinați termenul de mijloc al dezvoltării la putere a binomului $\left(2\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$, dacă suma coeficienților binomiali ai dezvoltării binomului la putere este 128. <i>Rezolvare:</i> $2^n = 128; 2^n = 2^7, n = 7$ ✓ T_4 și T_5 - termenii mijloci ✓ $T_4 = T_{3+1} = C_7^3 \cdot (2\sqrt{3})^4 \cdot X^4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{7-4} =$ $= \frac{35 \cdot 16 \cdot 3^2 \cdot X^4}{3^{3/2}} = 560\sqrt{3} X^4$ $C_7^3 = C_7^4 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ ✓ $T_5 = T_{4+1} = C_7^4 \cdot (2\sqrt{3})^3 \cdot X^3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{7-3} = \frac{35 \cdot 8 \cdot 3\sqrt{3} X^3}{3^{2/2}} =$ $= \frac{280\sqrt{3}}{3} X^3$ <i>Răspuns:</i> $T_4 = 560\sqrt{3} X^4; T_5 = \frac{280\sqrt{3}}{3} X^3$	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8	L 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Testul 2: 1) -1 ; 2) $\det A = 29 + 3i$; 3) $S = (-2; -\frac{3}{2}] \cup [0; +\infty)$; 4) $P(X) = (X-1)^2(X+2)(X-3)$;

5) $x = \frac{4\pi}{3}$; 6) $4\pi \text{ cm}$; 7) $50(\sqrt{15} + 3) \text{ cm}^2$; 8) $\cos(\angle BCA) = \frac{\sqrt{2}}{10}$; 9) Șirul este descrescător;

10) a) $f_{\max} = f(-6) = -36$; $f_{\min} = f(0) = 0$; b) $y = 3x - 9$; c) $864 - 6\ln 3$; 11) $\frac{53}{3000}$;

12) 9 termeni.

Testul 3: 1) 5; 2) $|z| = 41$; 3) $S = \{3\}$; 4) $P(X) = (X-2)^2(X+1)(X-5)$; 5) $S = (0; 1) \cup \{3\}$;

6) $P = 17 \text{ cm}$; 7) $18\pi(2\sqrt{3} + 1) \text{ cm}^2$; 8) $(52 + 4\sqrt{409}) \text{ cm}$; 9) -80 ; 10) a) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}e^2$; b) $<$;

c) $G(x) = \arctg(\sqrt{3}\ln x) + \frac{\pi}{6}$; 11) $\frac{8}{225}$; 12) $T_8 = 120a^6$.

Testul 4: 1) 0; 2) $w = 1$; 3) $S = (-\infty; -7] \cup [2; +\infty)$; 4) $E(\alpha) = 1$; 5) $x \in [3; 83) \cup (83; +\infty)$;

6) $8\sqrt{3} \text{ cm}$; 7) 42 cm^2 ; 8) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$; 9) $a_7 = 29$; 10) a) $\sqrt{3} + \frac{\pi}{18}$; b) $y = -1$; c) $x_0 = 1$; 11) $\frac{23}{648}$;

12) $T_3 = 45x^8$.

Testul 5: 1) 0; 2) $z = 36 - 7i$; 3) $S = \{-1; \frac{9}{2}\}$; 4) $D(\frac{\pi}{12}) = \frac{3}{4}$; 5) $S = (-2; -\frac{5}{3}) \cup \{3\}$;

6) 64 cm^3 ; 7) $\frac{32}{3} \text{ cm}$; 8) 45° ; 9) $q = \frac{1}{3}$; 10) a) $y = -3x + 3$; b) $\frac{1}{3}\ln 2$; c) $\frac{2}{3}$; 11) $\frac{5}{1296}$; 12) T_7 .

Testul 6: 1) 12; 2) $R(X) = 3X - 20$; 3) $S = \{2; 2 + 3i\}$; 4) $E(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $S = (-\infty; -6]$;

6) $A_{\text{lat}} = 36\pi \text{ cm}^2$; 7) $\frac{25}{144}$; 8) $216\sqrt{7} \text{ cm}^3$; 9) $E(f) = (-\infty; 5]$; 10) a) $x = -\sqrt{3}$ - punct de maxim

local, $x = \sqrt{3}$ - punct de minim local; b) e^4 ; c) $\frac{e^4 - 5}{4}$; 11) $\frac{5}{72}$; 12) T_7 .

Testul 7: 1) -1 ; 2) $a = -4$; 3) $S = \{0, 8 - 0, 4i; 0, 5 + 0, 5i\}$; 4) $\lg 2x = \frac{24}{7}$; 5) $S = (-\infty; 2] \cup (4; 5)$;

6) $\frac{64\pi}{3} \text{ cm}^3$; 7) $27\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 8) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; 9) $E(f) = [-2; 10]$; 10) a) f este convexă pe $(\frac{9}{10}; +\infty)$;

f este concavă pe $(-\infty; \frac{9}{10})$; b) $\frac{27}{32}$; c) 108π ; 11) $\frac{140}{2187}$; 12) $T_1 = 5^{10}, T_{22} = C_{30}^{21}$.

Testul 8: 1) 26; 2) $z = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$; 3) $S = (1; 2) \cup (2; 3)$; 4) $E(\frac{\pi}{3}) = 4 \in \mathbb{N}$; 5) $S = (-3; 0]$; 6) 10 cm ;

7) $\frac{832\sqrt{21}}{3} \pi \text{ cm}^3$; 8) $\frac{4\sqrt{690}}{45}$; 9) $0,5 \leq a_n < 2$, deci șir mărginit; 10) a) $x = -5$ punct de maxim

local, $x = -1$ punct de minim local; b) $y = x - 3$; c) $\frac{7}{3}$; 11) $\frac{1}{180}$; 12) $T_{11} = 286$.

Testul 9: 1) 46; 2) $|z| = 20$; 3) $S = \{6\}$; 4) $D\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 4$; 5) $S = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; 6) 4,8 cm;
 7) $12\sqrt{3} \text{ cm}^3$; 8) $\frac{63\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$; 9) Șirul este crescător; 10) a) funcția f este convexă pe $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$;
 b) 5; c) $\frac{187}{3}$; 11) $\frac{147}{2048}$; 12) $T_6 = -252x^{10}$.

Testul 10: 1) 0; 2) $\bar{z} = 13 + 5i$; 3) $S = (2; +\infty)$; 4) $\frac{1}{13}$; 5) $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$; 6) $75\pi \text{ cm}^2$;
 7) $\frac{32\sqrt{6}}{3} \text{ cm}^3$; 8) $\frac{25\sqrt{949}}{949}$; 9) 8; 10) a) $y = \frac{4}{5}x + \frac{9}{5}$; b) $a < b$;
 c) $G(x) = \sqrt{x^2 + 9} + 3\ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) - 3 - 3\ln 3$; 11) $\frac{671}{1296}$; 12) T_4 .

Testul 11: 1) $-2\sqrt{3}$; 2) $w = \frac{1}{2}$; 3) $S = \{4\}$; 4) $E\left(\frac{\pi}{12}\right) = -3 - 2\sqrt{3}$; 5) $S = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$; 6) $6\sqrt{3} \text{ cm}$;
 7) 25 cm; 8) 30° ; 9) $a_{10} = 63$; 10) a) $x = -4$ și $x = 0$; b) $\frac{e^{\sqrt{2}}}{4}$; c) $8e^4$; 11) $\frac{2}{55}$; 12) 14 termeni.

Testul 12: 1) 2; 2) $r = -10$; 3) $S = \{1\}$; 4) $z = -9 + 6i$; 5) $\left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$; 6) $9\sqrt{6} \text{ cm}$; 7) $\frac{27\pi}{2} \text{ cm}^2$;
 8) 45° ; 9) $q = -\frac{1}{2}$; 10) a) $\frac{4\sqrt{2} - 6\sqrt{3}}{3}$; b) $y = 0$; c) $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$; 11) 0,22; 12) 95 de termeni iraționali.

Testul 13: 1) 3; 2) $a = 2$; 3) $S = \{0, 1, 2\}$; 4) $z = 1 - 5i$; 5) $S = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$; 6) $162\pi \text{ cm}^2$; 7) $\frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$;
 8) 60° ; 9) $E(f) = (-3; +\infty)$; 10) a) funcția f este concavă pe $(2; +\infty)$; b) $y = x + 2$; c) $\ln \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$;
 11) $\frac{47}{128}$; 12) $T_8 = 36x\sqrt[3]{x^3}$.

Testul 14: 1) $40\sqrt{5}$; 2) $R(X) = -4X - 4$; 3) $S = [-2; -1]$; 4) $a = 1$; 5) $S = \left\{-4; -\frac{1}{64}\right\}$; 6) 200 cm^3 ;
 7) $8\sqrt{2} \text{ cm}$; 8) $\frac{625\pi\sqrt{3}}{6} \text{ cm}^2$; 9) $E(f) = [-3; 5]$; 10) a) f este monoton descrescătoare pe $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$, f este monoton crescătoare pe $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; b) $>$; c) $5\pi(4 + \ln 5)$; 11) $\frac{155}{396}$; 12) $T_5 = 126a^3b^3$.

Testul 15: 1) 17; 2) $a \in \{-5; 3\}$; 3) $S = \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right]$; 4) $z = 1,5 + 2i$; 5) $S = [1; 5]$; 6) $72\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$;
 7) $80\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 8) $120\sqrt{3} \text{ cm}^3$; 9) $0 \leq a_n < 2$, șirul este mărginit; 10) a) f monoton crescătoare pe $(-\infty; 0]$ și $[1; +\infty)$; f monoton descrescătoare pe $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ și $\left(\frac{1}{2}; 1\right]$; b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$; c) $\frac{5}{18}$; 11) $\frac{4}{5}$;
 12) $T_4 = 60\sqrt{3}$.

Testul 16: 1) 0; 2) $|z| = \sqrt{5}$;
 7) $27\pi \text{ cm}^2$; 8) $\frac{13\sqrt{313}}{12} \text{ cm}$;
 12) $T_5 = 210y^3x^2$.

Testul 17: 1) 6; 2) $a = \frac{10}{3}$;
 7) $243\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$; 8) $54\sqrt{3} \text{ cm}$;
 de maxim local; b) 4; c) y

Testul 18: 1) 100; 2) $\text{Rez} =$
 7) 4000 cm^2 ; 8) 12 cm; 9) $\frac{4}{8}$
 descrescătoare pe $(-\infty; -3]$;
 12) $T_1 = 3^8, T_7 = 8008 \cdot 3^5 \cdot 2^2$.

Testul 19: 1) 2; 2) $b = -15$;
 6) $27\sqrt{14} \text{ cm}^3$; 7) $\sqrt{387} \text{ cm}$;
 de inflexiune; b) $y = 0$; c) 1

Testul 20: 1) 10; 2) $R(X) =$
 5) $x \in (-\infty; \log_3 5] \setminus \{1\}$; 6)
 10) a) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$; b) $y = 0$; c)

Testul 21: 1) 2; 2) $a = 7$; 3)
 6) $27\pi \text{ cm}^2$; 7) $\frac{270}{7}\sqrt{3} \text{ cm}^2$
 și f convexă pe $(2; +\infty)$;

Testul 16: 1) 0; 2) $|z| = \sqrt{5}$; 3) $S = \{-9; 1\}$; 4) $E\left(\frac{\pi}{8}\right) = 8$; 5) $S = (-\infty; 5) \cup \left[\frac{23}{4}; 6\right)$; 6) $60^\circ, 120^\circ$;
 7) $27\pi \text{ cm}^2$; 8) $\frac{13\sqrt{313}}{12} \text{ cm}$; 9) Șirul este crescător; 10) a) $y = 4x$; b) $<$; c) $\pi(e^2 + 1)$; 11) $\frac{1}{168}$;
 12) $T_5 = 210y^3x^2$.

Testul 17: 1) 6; 2) $a = \frac{10}{3}$; 3) $S = (-\infty; -2] \cup \left[0; \frac{1}{4}\right]$; 4) $a = 0, b = 1$; 5) $S = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$; 6) $\sqrt{13} \text{ cm}$;
 7) $243\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$; 8) $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 9) $a_{50} = -62$; 10) a) $x = \sqrt{2}$ punct de minim local, $x = -\sqrt{2}$ punct
 de maxim local; b) 4; c) $y = x - \frac{25}{4}$; 11) $\frac{15}{64}$; 12) $T_5 = \frac{495}{16}a^3$.

Testul 18: 1) 100; 2) $\text{Rez} = 13$; 3) $S = (5; +\infty)$; 4) $\frac{13}{25}$; 5) $S = \{-1\} \cup (\sqrt{3}; 2]$; 6) $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$;
 7) 4000 cm^2 ; 8) 12 cm ; 9) $\frac{45}{8}$; 10) a) f monoton crescătoare pe $[2; +\infty)$; f monoton
 descrescătoare pe $(-\infty; -3]$ și $(-3; 2]$; b) $\frac{2}{9}$; c) $G(x) = xe^x - e^x + 3$; 11) $\frac{1}{20}$;
 12) $T_1 = 3^8, T_7 = 8008 \cdot 3^5 \cdot 2^2, T_{13} = 1820 \cdot 3^2 \cdot 2^4$.

Testul 19: 1) 2; 2) $b = -15$; 3) $S = \left[\frac{9}{50}; \frac{1}{2}\right)$; 4) $x = 2; y = 1$; 5) $S = \left\{\frac{\pi}{4}; \pi; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$;
 6) $27\sqrt{14} \text{ cm}^3$; 7) $\sqrt{387} \text{ cm}$; 8) 15 cm ; 9) $a_4 - a_2 = 120$; 10) a) $x = -2$ și $x = 2$ puncte
 de inflexiune; b) $y = 0$; c) $\ln 5 + 4 \arctg \frac{1}{2} - 2$; 11) $\frac{625}{3888}$; 12) $a \in \{-1, 2\}$.

Testul 20: 1) 10; 2) $R(X) = P(-2) = -54$; 3) $S = \left[-\frac{6}{5}; -1\right] \cup \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$; 4) $S = \{1 + 3i; 1 + 2i\}$;
 5) $x \in (-\infty; \log_3 5] \setminus \{1\}$; 6) $(44 + 16\sqrt{2}) \text{ cm}$; 7) 675 cm^3 ; 8) $\frac{2800\pi}{3} \text{ cm}^2$; 9) $E(f) = [-1; 3]$;
 10) a) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$; b) $y = 0$; c) $y = 1$; 11) $\frac{140}{2187}$; 12) $T_9 = \frac{55}{729}$.

Testul 21: 1) 2; 2) $a = 7$; 3) $S = \left\{-\frac{4}{9}\right\}$; 4) $S = \left\{-\frac{1}{2} + i; 1 + i\right\}$; 5) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 1; 2\}$;
 6) $27\pi \text{ cm}^2$; 7) $\frac{270}{7}\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 8) $21\frac{1}{4} \text{ cm}$; 9) $E(f) = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$; 10) a) *forma* f concavă pe $(-\infty; 2)$
 și f convexă pe $(2; +\infty)$; b) $-\frac{3}{4}$; c) $4 + 3\ln 3$; 11) 0,648; 12) $T_4 = 560\sqrt{3}x^4$ și $T_5 = \frac{280}{3}\sqrt{3}x^3$.