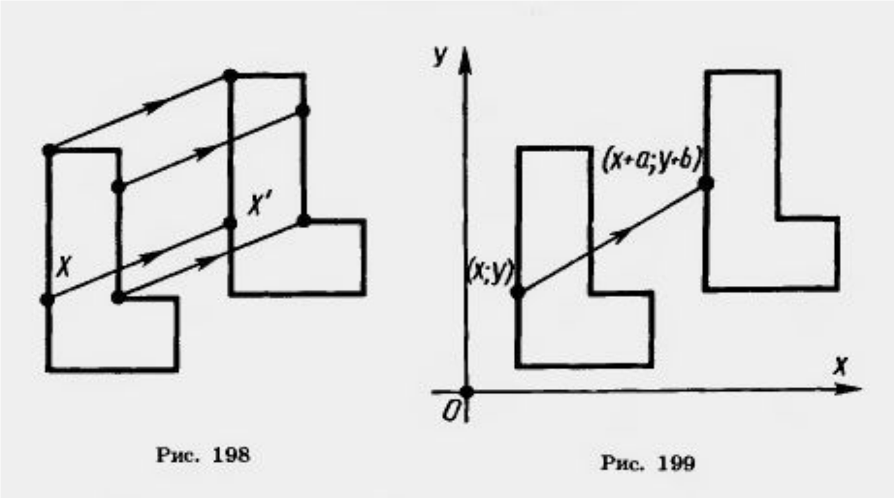
Параллельный перенос в пространстве. Свойства.

Подготовили Неживой Александр и Тудорович Влад

Что называется параллельным переносом в пространстве?

Параллельным переносом в пространстве называется такое преобразование, при котором произвольная точка (x; y; z) фигуры переходит в точку (x + a; y + b; z + c), где числа a, b, c одни и те же для всех точек (x; y; z).

Чтобы задать параллельный перенос достаточно задать направление и расстояние для одной точки, то есть задать вектор.

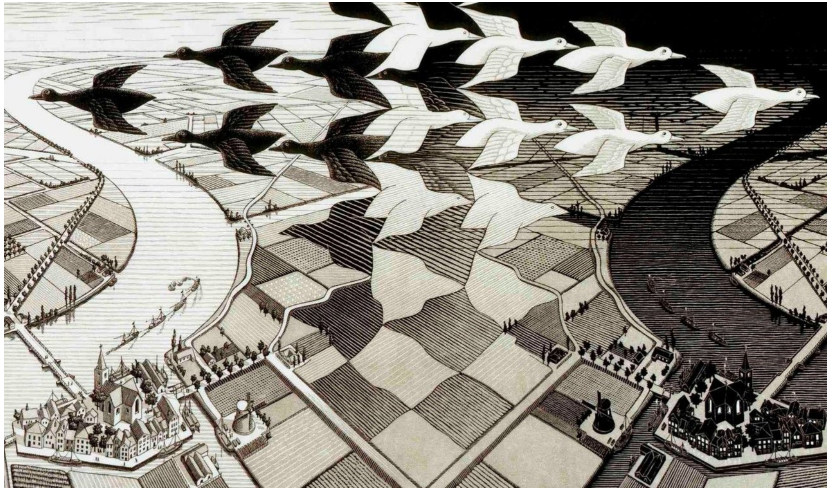


Название «параллельный перенос» оправдывается тем, что при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.

Примеры из жизни

В повседневной жизни мы с вами также сталкиваемся с примерами параллельного переноса в пространстве. Таким наглядным примером может быть, применяемая в строительной индустрии скользящая опалубка, да и следы от подошвы нам также напоминают о параллельном переносе в пространстве. Также существуют картины Нидерландского художника Маурицу Корнелису Эшеру.

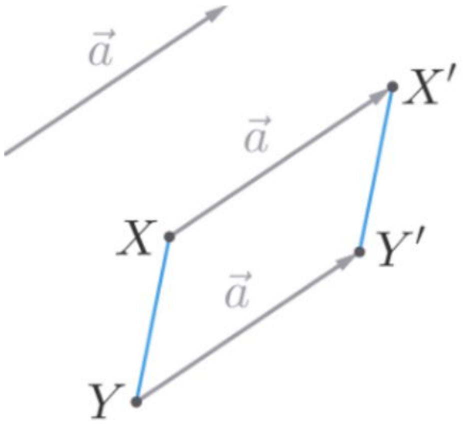




Свойства

1. <u>Параллельный перенос есть движение.</u> Доказательство:

Пусть при параллельном переносе на вектор ā произвольные точки X и Y перешли в точки X1 И Y1 соответственно. Докажем, что X1Y1 = XY.



По определению параллельного переноса, XX1 = ā и YY1 = ā.

Значит, XX1 = YY1. Отсюда, по свойству равных векторов,

получаем, что XY = X1Y1. Таким образом, по определению

равных векторов, |XY| = |X1Y1|, то есть XY = X1Y1.

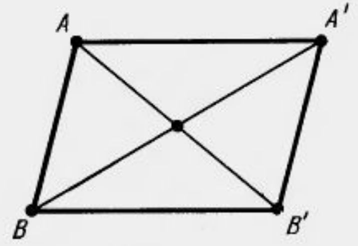


Рис. 200

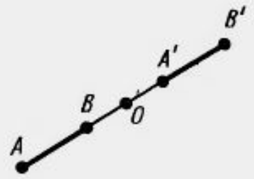


Рис. 201

2. <u>При параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние.</u>

Действительно, пусть точки A (x1; y1) и B (x2; y2) переходят в точки A1(x1+a; y1 + b) и B1 (x2 + a; y2 + b) (рис. 200). Середина отрезка AB1 имеет координаты: $x=\frac{x_1+x_2+a}{2},\ y=\frac{y_1+y_2+b}{2}.$

Те же координаты имеет и середина отрезка A1B. Отсюда следует, что диагонали четырехугольника AA1B1B пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Значит, этот четырехугольник — параллелограмм. А у параллелограмма противолежащие стороны AA1 и BB1 параллельны и равны.

Заметим, что у параллелограмма AA1B1B параллельны и две другие противолежащие стороны — AB и A1B1. Отсюда следует, что при параллельном, переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя).

Замечание. В доказательстве предполагалось, что точка B не лежит на прямой AA1. В случае, когда точка B лежит на прямой AA1, точка B1 тоже лежит на этой прямой, так как середина отрезка AB1 совпадает с серединой отрезка BA1 (рис. 201). Значит, все точки A, B, A1, B1 лежат на одной прямой. Далее,

$$AA'=\sqrt{(x_1+a-x_1)^2+(y_1+b-y_1)^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$
$$BB'=\sqrt{(x_2+a-x_2)^2+(y_2+b-y_2)^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Таким образом, в этом случае точки A и B смещаются по прямой AB на одно и то же расстояние $\sqrt{a^2+b^2}$, а прямая AB переходит в себя.

3. При параллельном переносе в пространстве сохраняются углы между плоскостями.

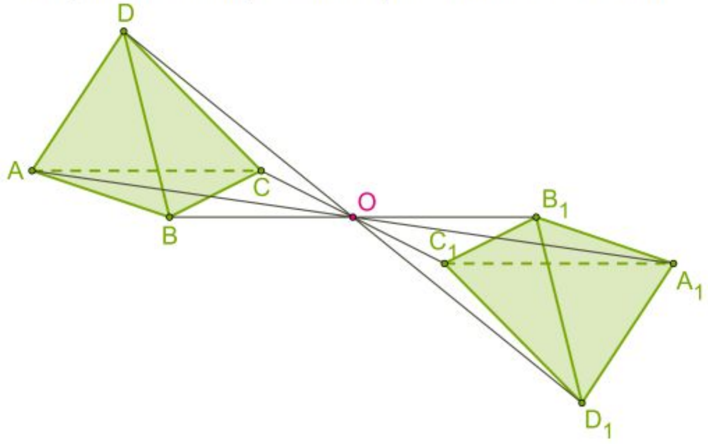
4. Каковы бы ни были точки A и A1, существует единственный параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A1.

5. При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную ей плоскость.

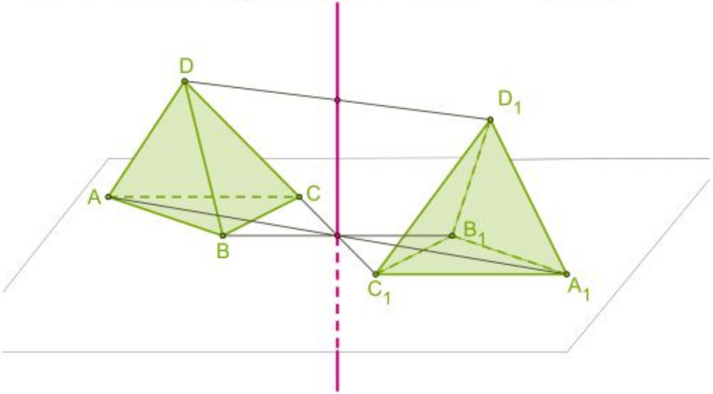
6. В пространстве две фигуры называются равными, если они совмещаются параллельным переносом.

Виды движения в пространстве

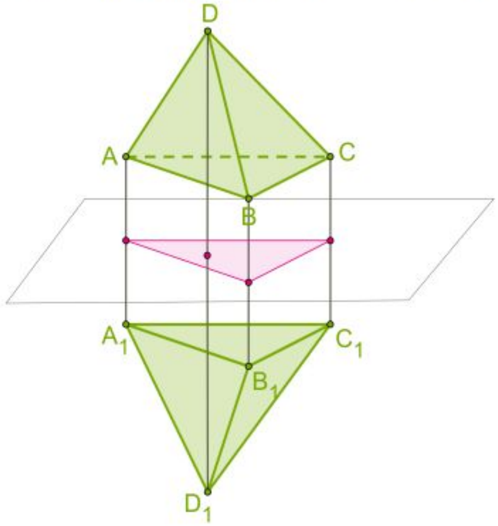
1. Центральная симметрия (симметрия относительно точки).



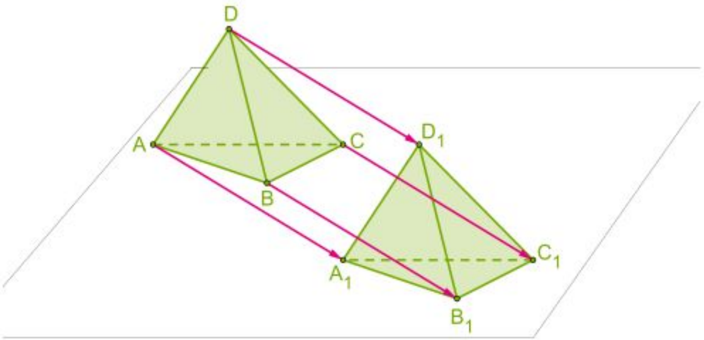
2. Осевая симметрия (симметрия относительно прямой).



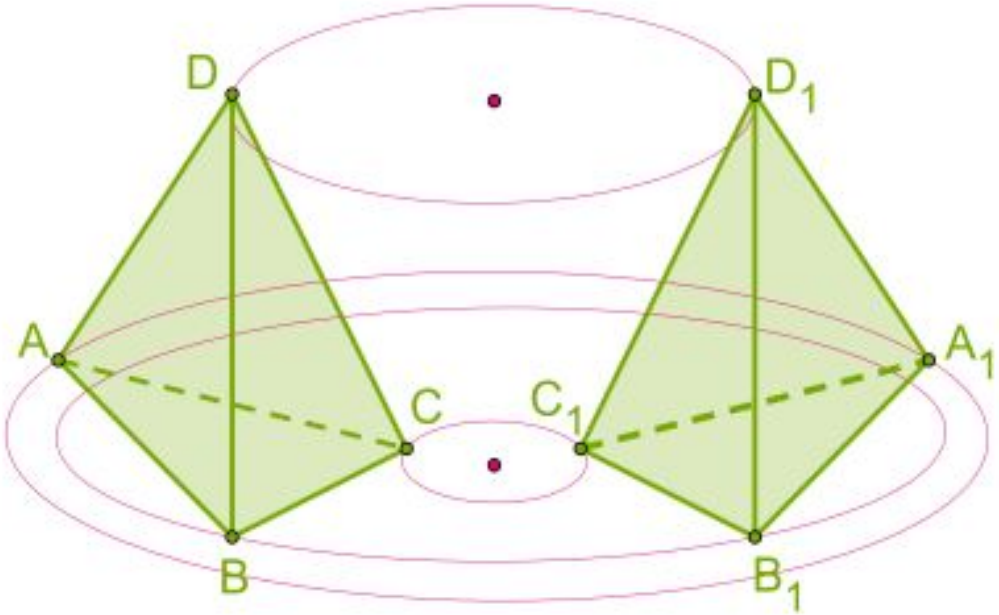
3. Зеркальная симметрия (симметрия относительно плоскости).



4. Параллельный перенос (точки переносятся на данный вектор).

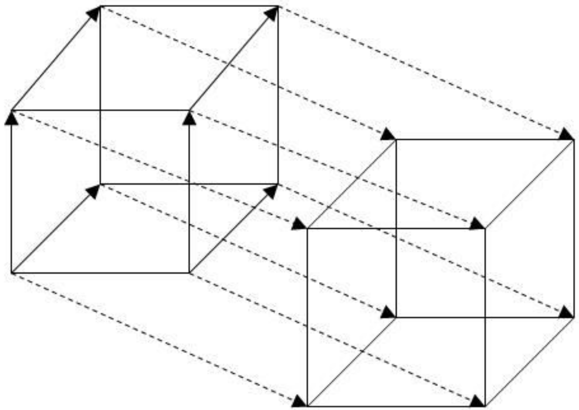


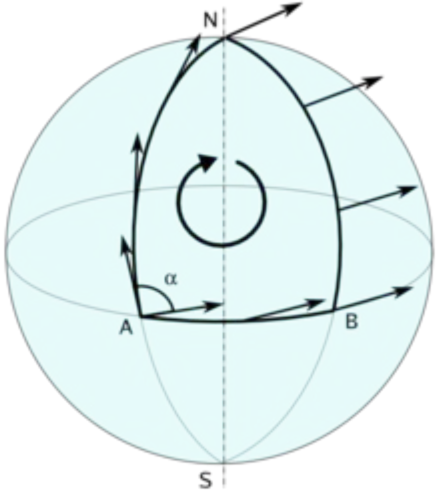
5. Поворот на данный угол вокруг данной точки.



Применение

- Кто открыл неизвестно.
- Применяется при преобразовании графиков функций в высшей математике. Также поступательное движении в физике представляет собой параллельный перенос.
- Кристаллография.



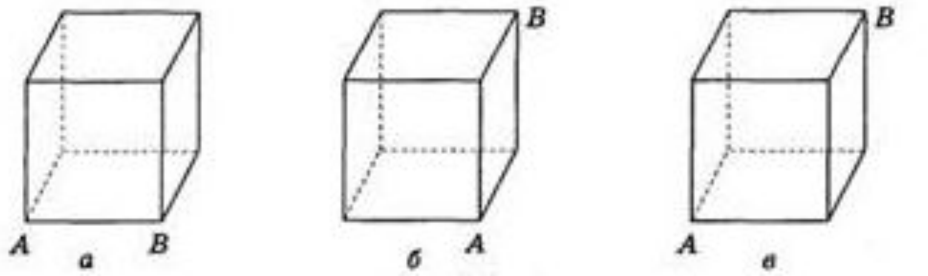


Ученые, внесшие свой вклад в Параллельный перенос

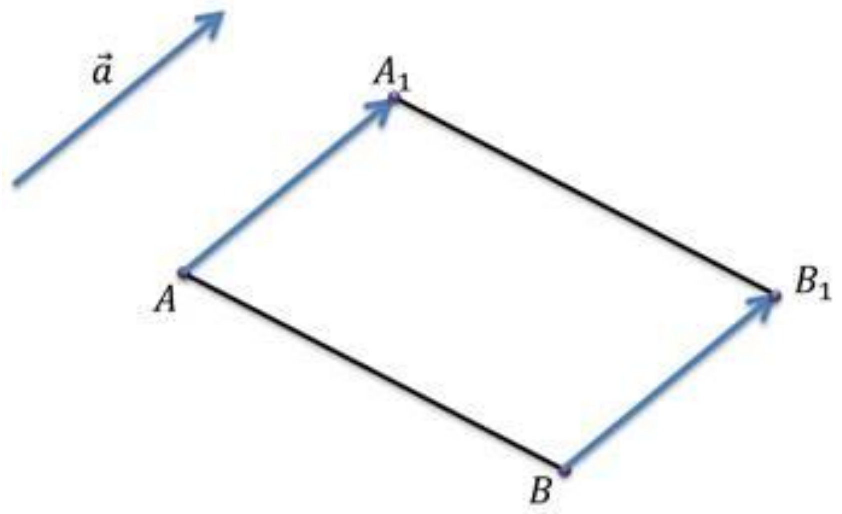
1. Феликс Клейн (1849-1925) - немецкий математик, который сделал значительный вклад в различные области математики, включая геометрию. Он разработал концепцию проективной геометрии, которая имеет отношение к параллельным переносам.
2. Джордж Дэвид Биркхофф (1884-1944) - американский математик, внёсший вклад в алгебру и теорию групп. Он изучал свойства параллельного переноса и его связь с групповыми операциями.
3. Давид Хилберт (1862-1943) - немецкий математик, известный своими работами в области геометрии и математической логики. Он исследовал геометрию, в которой рассматривалось понятие параллельного переноса.
4. Георг Фридрих Бернхард Риман (1826-1866) - немецкий математик, который внес значительный вклад в геометрию и анализ. Его работы коснулись геометрии, включая теорию параллельного переноса.
5. Эмиль Артин (1898-1962) - австрийский математик, известный своими работами в области абстрактной алгебры. Он исследовал алгебраические структуры, включая группы, их свойства и операции, связанные с параллельным переносом.

Примеры и задания

1. Постройте фигуру, в которую переходит куб при параллельном переносе, при котором точка А переходит в точку В (рис. 269).

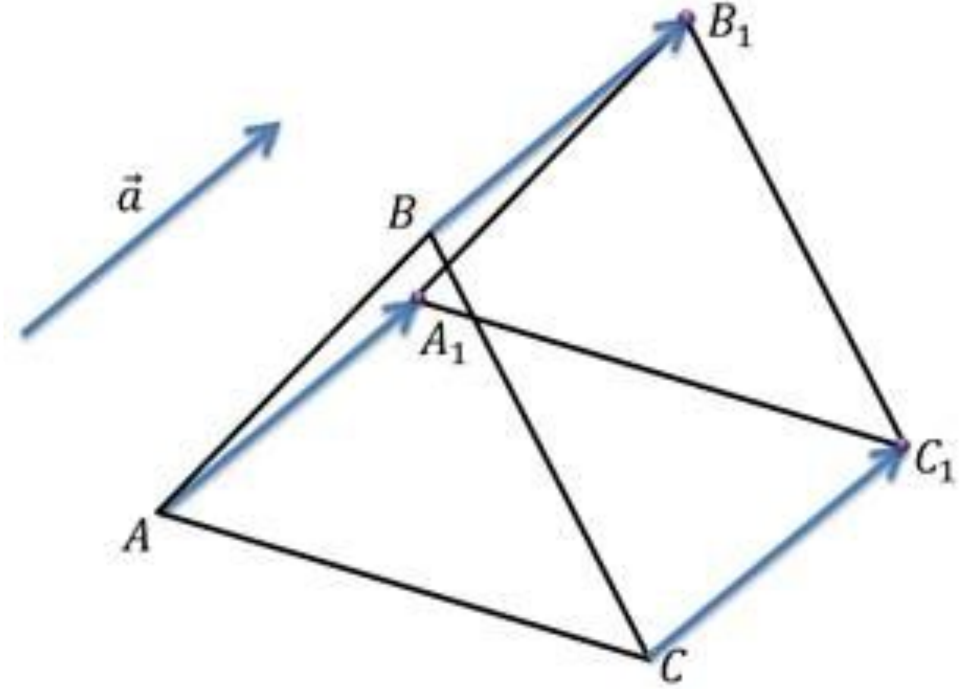


Задача: начертить отрезок AB и вектор a. Построить отрезок A1B1, который получится из отрезка AB параллельным переносом на вектор a.



Решение: для того, чтобы построить отрезок A1B1, отобразим точку А в точку А1 с помощью произвольного вектора ā, точку В в точку В1 с помощью параллельного переноса. Тогда соединив точки А1, В1 мы получим отрезок А1В1.

Задача: начертить треугольник ABC и вектор ā. Построить треугольник A1B1C1, который получится из ABC параллельным переносом на вектор ā.



Условие: При параллельном переносе точка A(2; 1: -1) переходит в точку A1(1; -1; 0). В какую точку переходит начало координат?

Решение: По формуле параллельного переноса x1 = (x + a), y1 = (y + b), z1 = (z + c). Точка A(2; 1; -1) ➔ A1(1; -1; 0).

Тогда выражаем a = (x1 - x), b = (y1 - y), c = (z1 - z).

Подставляем α = (1 - 2) = -1, b = (-1 - 1) = -2, c = (0 - (-1)) = 1. Начало координат (2; 1; -1) переходит в точку: A = (x + a; y + b; z + c) = A1(-1; -2; 1).

Условие:

Параллельный перенос в пространстве задан формулами:

$$x1 = (x + 2),\ y1 = (y - 1),\ z1 = (z - 3).$$

1) В какую точку при параллельном переносе переходит точка A1(1; 0; -2)?

2) Какая точка при таком переносе переходит в точку B1(3; 4; -5)?

Решение:

1)A1 = (1 + 2; 0 - 1; -2 - 3) = (3; -1; -5)

2)B1 = (3; 4; -5) = (x + 2; y - 1; z - 3) => x = (3 - 2); y = (4 + 1); z = (-5 + 3) ⇔ (1; 5; -2) - изначальная точка.


Спасибо за
внимание