Alef$_0$

I

Analiză

Calcul diferențial, aplicații

ALEF$_0$/ANALIZĂ

ALEPH$_0$/ANALYSE

Terminale CDE
I calcul différentiel/applications

C. GAUTIER
G. GIRARD
D. GERLL
C. THIERCÉ
A. WARUSFEL

L'ensemble N des nombres entiers a été étendu à des „nombres" cardinaux transfinis, traditionnellement désignés par la lettre hébraïque aleph diversement indexée.
Aleph-zéro représente ainsi le cardinal de N lui-même. Aleph-un est le plus petit cardinal supérieur à Aleph-zéro et ainsi de suite.

CLASSIQUES HACHETTE,
79 BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS

ALEF$_0$/ANALIZĂ

I Calcul diferențial/aplicații

C. GAUTIER
G. GIRARD
D. GERLL
C. THIERCÉ
A. WARUSFEL

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ—BUCUREȘTI, 1975

TRADUCERE DIN LIMBA FRANCEZĂ:

ELISABETA IORGULESCU
ANGELICĂ IORGULESCU
AFRODITA GÂRLEANU
ECATERINA VASILESCU
NATALIA PETRIN

Confruntarea traducerii:
Prof. univ. dr. Constantin Popovici

Redactor: Avram Pop
Tehnoredactor: A. Daniel

Prefață

Părțile programei pentru clasele terminale C, care figurează în textele oficiale sub titlurile:

III Calcul diferențial
IV Calcul integral
V Exemple de funcții de o variabilă reală

constituind ceea ce s-a convenit să se numească Analiză, sînt prezentate în două volume, intitulate respectiv:

1 Calcul diferențial, aplicații
2 Calcul integral, aplicații.

Volumul 1 prezintă, natural, problemele relative la capitolul III al programei. Am fost obligați să dăm noțiunile de continuitate și de limită, clarificînd pentru aceasta noțiunile elementare de Topologie la care fac apel. În această privință, este interesant să se observe că aceleași noțiuni de Topologie se pot aplica la fel de bine studiului funcțiilor numerice de o variabilă reală, cît și aceluia al funcțiilor vectoriale de o variabilă reală.

Cinematica punctului *este prezentată ca o aplicație directă a teoriei funcțiilor vectoriale; avînd în vedere că am păstrat vocabularul tradițional, ne-am străduit să scoatem conținutul matematic al cinematicii din interpretarea fizică corespunzătoare.*

Cinematica ne dă un excelent exemplu de „matematizare" a unei probleme reale, adică a unei situații în care, pentru a studia o problemă reală, se face apel la un model matematic cu ajutorul căruia se determină soluțiile problemei, transpunînd în domeniul real soluțiile problemei matematice corespunzătoare.

În volumul 2 sînt dezvoltate noțiunile cu privire la calculul integral. Definiția integralei este dată cu ajutorul funcțiilor în scară (integrala funcțiilor reglate) și definiția integralei Riemann intervine, de sigur, în acest context. Metodele elementare de integrare (schimbarea de variabilă, integrarea prin părți) sînt ilustrate cu ajutorul a numeroase exemple și exerciții de dificultate variată. Nu am ezitat în acest capitol să folosim funcțiile circulare inverse, deja întîlnite în volumul 1, căci deschid elevilor mai buni un vast cîmp de aplicații.

Volumul 2 prezintă de asemenea, în legătură cu integrarea, funcțiile logaritmice și exponențiale, precum și alte cîteva noțiuni care figurează în programă la ecuațiile diferențiale. În ceea ce privește calculul numeric, cel de al doilea volum conține un capitol care tratează mașinile de calcul de birou a căror folosire se generalizează în prezent. În scopul de a ușura folosirea lor am prezentat în acest capitol cîteva noțiuni succinte cu privire la algoritmii de calcul și la întocmirea programelor.

Conceput într-un spirit cu desăvîrşire modern, acest curs de Analiză respectă în acelaşi timp aspectul de tranziţie al programei. El pune la îndemîna elevilor multe materiale, cu condiţia ca profesorul să ghideze şi să orienteze pe fiecare elev după posibilităţile lui. În particular, cînd este vorba de un elev mai slab, este necesar ca el să înţeleagă că esenţialul este de a cunoaşte noţiunile fundamentale date pentru toţi şi că anumite dezvoltări sînt destinate numai elevilor mai buni. În această privinţă, printre exerciţiile foarte numeroase propuse, unele permit să se prelungească noţiunile dobîndite şi să se întrevadă teorii pe care le vor întîlni aceia dintre ei care vor urma studii superioare (topologie, dezvoltări în serie, funcţii circulare şi hiperbolice inverse etc.).

Sperăm că, aşa cum au făcut-o şi pînă acum, colegii noştri vor binevoi să ne trimită observaţiile şi sugestiile lor. Le vom primi cu recunoştiinţă şi le mulţumim anticipat.

AUTORII

MATEMATICĂ/CLASE TERMINALE

PROGRAME NOI

Decretul din 14 Mai 1971

SECŢIUNEA A

PARTE OBLIGATORIE

Funcţii exponenţiale şi logaritmice

I. Recapitularea noţiunilor relative la continuitate, la limite, la derivata unei funcţii reale de o variabilă reală. Derivata unei funcţii compuse. Se va admite fără demonstraţie că dacă o funcţie numerică este derivabilă pe un interval şi dacă derivata ei este pozitivă sau nulă pe acest interval, atunci ea este crescătoare în sens larg pe acest interval şi că imaginea unui interval este tot un interval.
Interpretarea geometrică a derivatei.
Aplicaţii la studiul şi la reprezentarea grafică a cîtorva funcţii simple (numai pe exemple numerice).
Funcţia $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbf{Z})$.
(Nu se va cere candidaţilor la bacalaureat să demonstreze direct continuitatea unei funcţii sau să caute direct o limită; se va mărgini la folosirea teoremelor generale, enunţate fără demonstraţie, cu privire la limitele sumelor, produselor, cîturilor de funcţii).
II. 1. Exemple, din ştiinţele umane şi naturale, de funcţii a căror creştere pe orice interval $[x, x + l]$, pentru orice l dat, este proporţională cu valoarea funcţiei în punctul x.
2. Studiul şirurilor $n \mapsto f(n)$ astfel încît $f(n + 1) - f(n) = kf(n)$, $n \in \mathbf{N}$, calculul lui $f(n)$, monotonia lui f; limita lui f cînd n tinde spre $+\infty$.
3. Se va admite existenţa, pentru orice a real strict pozitiv, a unei unice funcţii continue şi derivabile f_a, definită pe $\mathbf{R}$ astfel încît pentru orice pereche de numere reale (x, y) să avem $f_a(x + y) = f_a(x)f_a(y)$ şi $f_a(1) = a$. Calculul lui $f_a(x)$ pentru $x \in \mathbf{Z}$ şi $x \in \mathbf{Q}$.
(Se va putea admite existenţa unei rădăcini de ordin n pentru orice număr real pozitiv şi pentru orice număr întreg pozitiv n.)
Calculul lui $f'_a(x)$ în funcţie de $f'_a(0)$.
Notaţia a^x (funcţia exponenţială de bază a), proprietăţile exponenţilor: $(a^b)^c = a^{bc}$, $(ab)^c = a^cb^c$. Semnul şi monotonia lui f_a, limita lui f_a cînd x tinde spre $\pm\infty$.
4. Numărul e. Notaţiile $\exp x$ şi e^x. Funcţia $x \mapsto \exp x$ va fi considerată printre funcţiile exponenţiale datorită faptului că derivata ei este 1 pentru $x = 0$.
Ecuaţii diferenţiale de forma $y' = ky$.
5. Funcţia inversă a funcţiei $x \mapsto a^x$. Notaţia $\mathrm{Log}\, a$. Logaritmii zecimali şi neperieni, notaţiile Log sau ln; funcţia $a^x = e^{x \,\mathrm{Log}\, a}$.
Folosirea tabelelor şi a riglei de calcul.
6. Reprezentarea grafică a funcţiilor exponenţiale şi logaritmice.
7. Studiul funcţiilor $x \mapsto \dfrac{a^x}{x^n}$ pentru $n \in N$, $a > 1$. Se va enunţa rezultatul cu privire la limita acestor funcţii cînd x tinde spre $+\infty$. (Orice demonstraţie este în afara programei.) Aplicaţie la funcţiile logaritmice.

PROGRAMA COMPLEMENTARĂ

Calculul probabilităţilor

Spaţii probabilistice finite $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), p)$. Exemple (plecînd de la măsluirea sau nu a zarurilor, a cărţilor, a urnelor,...).
Variabilă aleatoare numerică; evenimente legate de o variabilă aleatoare X (de exemplu părţile lui Ω astfel încît $X(\omega) = a$, sau $X(\omega) < a$ pentru a dat); densitate discretă; funcţia de repartiţie, creştere; speranţă matematică (sau valoarea medie) şi varianţa unei variaţii aleatoare. Probabilitatea condiţională a unui eveniment în raport cu un eveniment de probabilitate nenulă. Produs de spaţii probabilistice finite; exemple.

SECŢIUNEA B

„Rubricele programei au o ordine de enumerare. Această ordine exprimă uneori un exemplu din care profesorii s-ar putea inspira, şi nicidecum ceva obligatoriu; este, de exemplu, posibil de a permuta I.1 cu 2 (noţiunile de continuitate şi de limită) etc..."

I. Studiul funcţiilor numerice de o variabilă reală

1. Noţiunea de continuitate (într-un punct, pe un interval).
Definiţii, lămurite prin numeroase exemple şi contra-exemple. Enunţul proprietăţilor funcţii-

lor continue (se vor admite teoremele cu privire la suma, produsul, cîtul acestor funcții; se va admite că imaginea unui interval printr-o funcție continuă este un interval).
Funcția inversă a unei funcții continue strict monotone pe un interval. Exemple.
2. Noțiunea de limită.
Definiții, lămurite prin numeroase exemple și contra-exemple. Se va arăta unicitatea limitei și se vor admite teoremele cu privire la limita unei sume, produs, cît.
Cazuri particulare de șiruri.
3. Noțiunea de derivată.
Revederea programei anului I B.
Derivata într-un punct a funcției compuse din două funcții derivabile; a funcției inverse a unei funcții derivabile strict monotone.

Se va admite că dacă o funcție numerică admite o derivată pozitivă sau nulă pe un interval, ea este crescătoare (în sens larg) pe acest interval.
Studiul sensului de variație a unei funcții derivabile cu ajutorul semnului derivatei ei.

Exemple de reprezentare grafică de funcții derivabile pe intervale (se vor evita exemplele care reprezintă dificultăți tehnice).

II. Calcul integral

1. Suma Riemann a unei funcții numerice f de o variabilă reală definită pe un interval închis mărginit $[a, b]$. Se va admite că dacă f este continuă sau monotonă pe porțiuni, există un număr real unic $\int_a^b f(t)\,dt$ de care sumele lui Riemann se apropie oricît cînd lungimea celui mai mare interval de subdiviziune este suficient de mică.
2. Proprietățile de linearitate ale integralei unei funcții continue sau monotone pe porțiuni, pe un interval închis mărginit. Media unei asemenea funcții. Legătura cu derivata dacă funcția este continuă. Primitiva unei funcții continue, mulțimea primitivelor; egalitatea

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),\ f \text{ fiind continuă pe } [a, b]$$

și admițînd pe F ca primitivă. Calculul primitivelor în cazuri simple; integrarea prin părți.
3. Se vor enunța, fără demonstrație, proprietățile ariilor a căror existență este admisă (aditivitatea, unitatea de arie).

Aplicarea calculului integral la evaluarea ariei părții lui $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ definită prin $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, f fiind o funcție pozitivă, monotonă pe porțiuni, apoi o funcție pozitivă continuă.
Extensie la $b < a$ și la o funcție negativă.

III. Funcții elementare

Va fi necesar să se repartizeze diferitele rubrici ale acestui capitol în mai multe perioade ale anului, pentru a putea fi studiate în legătură cu titlurile I și II.
1. Funcțiile $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbf{Z})$; derivate, primitive, reprezentare grafică.
2. Funcțiile $x \mapsto x^r$ $(x > 0,\ r \in \mathbf{Q})$; derivate, primitive.
3. Șiruri aritmetice și geometrice. Suma primilor n termeni.
4. Funcții circulare (recapitulare); derivatele și primitivele lui $x \mapsto \cos(ax + b)$ și $x \mapsto \sin(ax + b)$.
5. Logaritmul neperian (notația Log)

$$\text{Log}\, x = \int_1^x \frac{dt}{t}\ (x > 0).$$

Limita, cînd variabila pozitivă x tinde spre infinit, a lui Log x și a lui $\frac{\text{Log}\, x}{x}$.

Limita, cînd x tinde spre 0, a lui x Log x. Reprezentarea grafică.
6. Funcția exponențială (notația exp).
Proprietăți; derivată; reprezentarea grafică; numărul e; notația e^x; limita lui $\frac{e^x}{x}$ cînd x tinde spre $+\infty$.
7. Alte funcții logaritmice și exponențiale. Relații între funcțiile exponențiale și logaritmice de bază a și acelea de bază e.

IV. Statistică și probabilități

Revederea programei anului I B.

SECȚIUNEA D

a) Paragrafele marcate cu o steluță nu pot face obiectul chestiunilor la cursuri, pentru lucrările scrise sau orale, nici nu pot fi folosite, în matematici, cu ocazia unei probleme sau exercițiu, la scris sau la oral, la bacalaureat.
b) Rubricele programei au o ordine de enumerare. Această ordine exprimă uneori un exemplu din care profesorii s-ar putea inspira, și nicidecum ceva obligatoriu; de exemplu, este la alegere de a da în I.3 o altă introducere a numerelor complexe, de a permuta pe II.1 cu 2 (noțiunea de continuitate și de limită) etc...
c) Ori de cîte ori se va ivi ocazia, se va pune în evidență, pe exemplele studiate în diferitele capitole, structurile de grup, subgrup, inel, corp, spațiu vectorial.

I. Numere reale; calcul numeric; numere complexe

1. Însuşirea (fără demonstraţie) a proprietăţilor lui **R**: este un corp comutativ total ordonat (recapitulare); orice parte nevidă majorată admite un cel mai mic majorant; orice interval din **R** care conţine mai mult de un punct conţine un număr raţional.
2. Valorile zecimale aproximative cu aproximaţie de 10^{-n}, prin lipsă şi prin adaos ale unui număr real.
Reprezentarea unui număr real printr-un şir zecimal nelimitat (studiul periodicităţii nu este în programă). Valorile aproximative ale unui număr real, încadrare, eroare absolută şi relativă.
Valorile aproximative ale unei sume, ale unei diferenţe, ale unui produs, ale unui cît de numere reale ale căror valori aproximative se cunosc.
Vor fi făcute numeroase exerciţii de calcul numeric cu ocazia studiului funcţiilor uzuale şi cu ocazia problemelor, pentru a pune în practică noţiunile de valori aproximative, de încadrare, de ordin de mărime al unui rezultat, de eroare (cf. IV. 8).
3. Adunarea şi înmulţirea matricilor 2×2 înzestrează mulţimea **C** a matricilor cu coeficienţi reali, de forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ cu o structură de corp comutativ. Identificarea lui **R** ca un subcorp al lui C prin aplicaţia $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$;
C este un spaţiu vectorial de dimensiune 2 pe **R**.
Notaţia $a + bi$; număr complex; numere complexe conjugate; modulul unui număr complex.
4. Homomorfismul θ al lui **R** pe grupul multiplicativ al numerelor complexe de modul 1 (a se revedea cursul de anul I); forma trigonometrică a unui număr complex nenul: $r(\cos x + i \sin x)$ cu $r > 0$ şi $x \in \mathbf{R}$; argumentul unui asemenea număr (clasa numerelor x sau, prin abuz de limbaj, unul din ele).
Calculul lui $\cos nx$ şi al lui $\sin nx$ ($x \in \mathbf{R}$, $n = 2, 3, 4$) şi linearitatea polinoamelor trigonometrice.
Existenţa şi reprezentarea geometrică a rădăcinilor de ordinul n ale unui număr complex ($n \leqslant 4$).
5. Rezolvarea ecuaţiilor de gradul I şi de gradul II cu coeficienţi complecşi; calculul părţilor reale şi imaginare ale rădăcinilor; cazul coeficienţilor reali.

II. Calcul diferenţial

1. Funcţii numerice de o variabilă reală: continuitate. Continuitatea „într-un punct"; continuitatea pe un interval; sumă, produs, cît de funcţii continue; continuitatea funcţiei compuse a două funcţii continue (fără demonstraţie).
Se va admite fără demonstraţie următoarea teoremă: „dacă o funcţie este continuă pe un interval, imaginea prin funcţia considerată a acestui interval este un interval." Aplicaţie la o funcţie continuă şi strict monotonă pe un interval: existenţa funcţiei inverse; monotonia şi continuitatea acestei funcţii (se va admite continuitatea).
2. Funcţii numerice de o variabilă reală: limite.
Limita unei funcţii atunci cînd variabila tinde spre un număr real dat, spre infinit. Unicitatea. Cazuri particulare de şiruri.
Limita unei sume, a unui produs, a unui cît (fără demonstraţie).
3. Funcţii numerice de o variabilă reală: derivata. Revederea programei anului I D: funcţia lineară tangentă într-un punct la o funcţie dată; notaţia diferenţială; derivata în acest punct.
Funcţia derivată; derivata unei sume, a unui produs, a unui cît de funcţii derivabile. Interpretarea geometrică a derivatei (reper cartezian); ecuaţia tangentei.
Definiţia derivatelor succesive.
Derivata într-un punct a funcţiei compuse a două funcţii derivabile.
Derivata într-un punct a inversei unei funcţii derivabile şi strict monotone.
Se va admite fără demonstraţie că dacă o funcţie numerică este derivabilă pe un interval şi dacă derivata ei este pozitivă sau nulă ea este crescătoare în sens larg pe acest interval.
Compararea a două funcţii care au aceeaşi funcţie derivată pe un interval.
Studiul sensului de variaţie al unei funcţii derivabile cu ajutorul semnului derivatei ei. Reprezentarea grafică.
4. Funcţii vectoriale de o variabilă reală.
Aplicaţia unei părţi a lui **R** într-un spaţiu vectorial euclidian de dimensiune finită.
Continuitatea într-un punct; limita unei funcţii cînd variabila tinde spre un număr real dat, spre infinit.
Derivata într-un punct; dacă spaţiul vectorial este raportat la o bază, coordonatele, în această bază, ale derivatei; funcţia derivată.
Derivata unei sume de funcţii vectoriale derivabile, a produsului unei funcţii vectoriale derivabile printr-o funcţie numerică derivabilă.
Derivata produsului scalar a două funcţii vectoriale derivabile.
Aplicaţie la determinarea tangentelor. Exemple.
5. Cinematica punctului.
Mişcarea unui punct: aplicaţia unui interval din **R** într-un spaţiu afin euclidian. Traiectorie. Vectorul viteză la un moment dat. Fiind ales un reper, coordonatele vectorului viteză în acest reper. Norma vectorului viteză.

Vectorul accelerație la un moment dat. Fiind ales un reper, coordonatele vectorului accelerație în acest reper.
Studiul mișcărilor circulare (viteza unghiulară); studiul mișcărilor helicoidale uniforme.

III. Calcul integral

1. Definiția sumelor lui Riemann ale unei funcții numerice de o variabilă reală pe un interval închis, mărginit. Existența integralei pentru o funcție monotonă; notația $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$; primele proprietăți. Se va admite că aceste proprietăți se extind la funcții continue sau monotone pe porțiuni.
Media unei asemenea funcții pe un interval închis, mărginit.
Legătura cu derivata în punctele în care funcția este continuă.
Primitive; mulțimea primitivelor; egalitatea

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

f fiind continuă pe $[a, b]$ și admițînd pe F ca primitivă.
Calcul de primitive; integrarea prin părți.
2. Se vor enunța fără demonstrație proprietățile ariilor a căror existență este admisă (aditivitatea, unitatea de arie,....).
Aplicarea calculului integral la evaluarea ariei părții lui $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ definită prin:

$$a \leqslant x \leqslant b \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x),$$

f fiind o funcție pozitivă, monotonă pe porțiuni, apoi o funcție pozitivă continuă.
Extensia la $b < a$ și la o funcție negativă.
3*. Aplicații geometrice, mecanice, fizice etc... (calcul de volume, mase, momente de inerție; viteza și distanța parcursă; intensitatea și cantitatea de electricitate; putere și energie etc...).
Valoarea eficace a unui fenomen periodic.

IV. Exemple de funcții de o variabilă reală

Anumite rezultate din acest capitol, deja cunoscute elevilor, vor putea să ilustreze capitolele precedente; va fi necesar să se repartizeze diferitele rubrici ale acestui capitol între mai multe momente ale anului.
1. Funcția $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbf{Z}$); derivată; primitivă.
2. Funcția $x \mapsto x^r (r \in \mathbf{Q};\ x > 0)$; derivată; primitivă.
3. Șiruri aritmetice și geometrice. Suma primilor n termeni.
4. Funcții circulare; derivate (recapitulare); derivate și primitive ale lui $x \mapsto \cos(ax + b)$ și $x \mapsto \sin(ax + b)$.
5. Logaritm neperian (notația Log)

$$\mathrm{Log}\, x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad (x > 0).$$

Limita lui Log x și $\frac{\mathrm{Log}\, x}{x}$, cînd variabila pozitivă x tinde spre infinit.
Limita lui x Log x cînd x tinde spre 0. Reprezentarea grafică.
6. Funcția exponențială (notația exp).
Proprietăți; derivata; reprezentarea grafică; numărul e; notația e^x; limita lui $\frac{e^x}{x}$ cînd x tinde spre $+\infty$.
7. Alte funcții logaritmice și exponențiale.
Relații între funcțiile logaritmice și exponențiale de bază a și cele de bază e.
Notația e^{ix} pentru a desemna $\cos x + i \sin x$; ω fiind o constantă reală, derivata funcției $x \mapsto e^{i\omega x}$.
Observație: Studiul de exemple de funcții compuse de tip logaritmic sau exponențial va fi strict limitat la cazurile în care apar intervalele pe care derivata păstrează un semn constant și în care nedeterminările ce trebuie înlăturate sînt numai acelea care au fost enumerate mai sus.
8. Calcul numeric.
Folosirea riglei de calcul;
Folosirea tabelelor; practica interpolării liniare. Tabele de logaritmi.
Întrebuințarea mașinilor de calcul de birou.
9*. Ecuații diferențiale.
Căutarea funcțiilor de variabilă reală x o dată sau de două ori derivabile care verifică ecuațiile:
$y' = ay$, a fiind o constantă reală,
$y'' + \omega^2 y = 0$, ω fiind o constantă reală nenulă (se va admite că soluțiile formează un spațiu vectorial de dimensiune 2).

V. Elemente de algebră liniară

1. Geometria vectorială:
a) revederea capitolului IV din anul I D.
b) se va admite că spațiul euclidian real este orientabil; produsul vectorial a doi vectori din spațiul euclidian orientat de dimensiune 3.
2. Baricentru într-un spațiu afin. Reper afin. Reducerea, în cazul euclidian, a lui

$$f(M) = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2.$$

3. Interpretarea geometrică a unei aplicaţii $z \mapsto az + b (a, b$ numere complexe, $a \neq 0)$, după identificarea planului cu corpul numerelor complexe, datorită alegerii unui reper ortonormat; grupul asemănărilor directe ale planului.

VI. Probabilităţi pe o mulţime finită; statistică

1. Spaţii probabilistice finite $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), p)$.
Aplicaţii măsurabile (sau variabile aleatoare): probabilitatea imagine; funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare reale.
Perechi de variabile aleatoare reale, legea perechii. Legi marginale. Pereche independentă. Sistem de n variabile aleatoare independente.
2. Valoarea medie a unei variabile aleatoare cu valori în **R** sau $\mathbf{R}^2$.
Valoarea medie a sumei a două variabile aleatoare reale ale unei perechi, a produsului în cazul unei perechi independente.
Dispersia, abaterea medie a unei variabile aleatoare reale.
3. Inegalitatea lui Bienaymé-Cebîşev. Experienţe repetate, legea slabă a numerelor mari.
4. Descrierea statistică a unei populaţii sau a unui eşantion (revederea programei de statistică din anul I D, titlul VII—1°; exerciţii practice din această programă: calcul de coeficienţi de corelaţie)

TERMINALA C ŞI E (PREAMBUL)

a) Paragrafele marcate cu o steluţă nu pot face obiectul la cursuri, pentru lucrările scrise sau orale, nici nu pot fi folosite, în matematici, cu ocazia unei probleme sau exerciţiu, la scris sau la oral, la bacalaureat.

SECŢIUNEA C

b) Rubricele programei au o ordine de enumerare. Această ordine este uneori un îndreptar din care profesorii s-ar putea inspira, şi nicidecum ceva obligatoriu; este la alegere, de exemplu, să se permute în I.3 cele trei alineate care privesc numerele întregi, III.1 şi 2 (noţiunile de continuitate şi de limită), să se dea în II.3 o altă introducere a numerelor complexe etc....

SECŢIUNEA E

b) Rubricile programei au o ordine de enumerare. Această ordine este uneori un îndreptar din care profesorii s-ar putea inspira, şi nicidecum ceva obligatoriu; este la alegere, de exemplu, să se dea în II. 3 o altă introducere a numerelor complexe, să se permute în III 1 cu 2 (noţiunile de continuitate şi de limită) etc.
c) Ori de cîte ori se va ivi ocazia, se va pune în evidenţă, pe baza exemplelor studiate în diferitele capitole, structurile de grup, subgrup, inel, corp, spaţiu vectorial, precum şi izomorfismele, homomorfismele (nucleu), automorfismele întîlnite.

SECŢIUNEA C

I. Numere naturale întregi aritmetice

1*. — Enunţul proprietăţilor atribuite mulţimii **N** a numerelor naturale. Raţionament prin recurenţă. Aplicaţii ale lui **N** într-o mulţime X; notaţia indicială; exemple.
2. Inelul **Z** al numerelor întregi; multiplii unui număr întreg notaţia $n\mathbf{Z}$.
Congruenţe modulo n; inelul $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$; împărţirea euclidiană în **Z**, în **N**. Principiul sistemelor de numeraţie; bază; numeraţii zecimale şi binare.
3. a) Numere prime în **Z**; dacă p este prim, $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ este un corp.
b) Descompunerea unui număr în factori primi; existenţă, unicitate.
c) Cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun; numere prime între ele; identitatea lui Bézout. (Ordinea lui a), b), c) este bine înţeles, lăsată la alegerea profesorului).

SECŢIUNEA E

I. Numere întregi naturale aritmetice

Exemple de raţionament prin recurenţă.
Exemple de folosire a notaţiei indiciale.
Principiul sistemelor de numeraţie; bază; numeraţie zecimală şi binară.

SECŢIUNEA C ŞI E

II. Numere reale. Calcul numeric. Numere complexe

1. Enumerarea (fără demonstraţie) a proprietăţilor lui **R**: **R** este un corp comutativ total ordonat (recapitulare); orice parte nevidă

majorată, admite un cel mai mic majorant; orice interval din **R** care conține mai mult de un punct conține un număr rațional.

2. Valorile zecimale cu aproximație de 10^{-n}, prin lipsă și prin adaos, ale unui număr real. Reprezentarea unui număr real printr-un șir zecimal nelimitat (studiul periodicității nu este în programă).

Valorile aproximative ale unui număr real, încadrare, eroare absolută și relativă.

Valorile aproximative ale unei sume, ale unei diferențe, ale unui produs, ale unui cît de numere reale, ale căror valori se cunosc cu aproximație.

Vor fi făcute numeroase exerciții de calcul numeric cu ocazia studiului funcțiilor uzuale și cu ocazia problemelor, pentru a pune în practică noțiunile de valori aproximative, de încadrare, de ordin de mărime al unui rezultat, de eroare (cf. V. 8).

3. Adunarea și înmulțirea matricelor 2×2 înzestrează mulțimea **C** a matricelor cu coeficienți reali, de forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ cu o structură de corp comutativ. Identificarea lui **R** cu un subcorp al lui **C** prin aplicația $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$; **C** este un spațiu vectorial de dimensiune 2 pe **R**. Notația $a + bi$; număr complex numere complexe conjugate; modulul unui număr complex.

4. Homomorfismul θ al lui **R** pe grupul multiplicativ al numerelor complexe de modul 1 (reamintire din anul I); forma trigonometrică a unui număr complex nenul: $r(\cos x + i\sin x)$ cu $r > 0$ și $x \in \mathbf{R}$; argumentul unui asemenea număr (clasa numerelor x sau, prin abuz de limbaj, unul dintre ele). Calculul lui $\cos nx$ și al lui $\sin nx (x \in \mathbf{R},\ n = 2, 3, 4)$ și liniarizarea polinoamelor trigonometrice.

Existența și reprezentarea geometrică a rădăcinilor de ordinul n ale unui număr complex.

5. Rezolvarea ecuațiilor de gradul I și de gradul II cu coeficienți complecși; calculul părților reale și imaginare ale rădăcinilor; cazul coeficienților reali.

III. Calcul diferențial

1. Funcții numerice de o variabilă reală: continuitate. Continuitatea „într-un punct"; continuitatea pe un interval; sumă, produs, cît, de funcții continue; continuitatea funcției compuse a două funcții continue (fără demonstrație).

Se va admite fără demonstrație următoarea teoremă: „dacă o funcție este continuă pe un interval, imaginea prin funcția considerată, a acestui interval, este un interval". Aplicație la o funcție continuă și strict monotonă pe un interval; existența funcției inverse; monotonia și continuitatea acestei funcții (se va admite continuitatea).

2. Funcții numerice de o variabilă reală: limite. Limita unei funcții cînd variabila tinde spre un număr real dat, spre infinit. Unicitate. Caz particular de șiruri.

Limita unei sume, a unui produs, a unui cît (fără demonstrație).

3. Funcții numerice de o variabilă reală: derivarea. Revederea programei din anul I: funcția liniară tangentă într-un punct la o funcție dată; notația diferențială; derivata în acest punct. Funcția derivată; derivata unei sume, a unui produs, a unui cît de funcții derivabile.

Interpretarea geometrică a derivatei (reper cartezian); ecuația tangentei. Definiția derivatelor succesive.

Derivata într-un punct a funcției compuse de două funcții derivabile.

Derivata într-un punct a inversei unei funcții derivabile și strict monotone.

Se va admite fără demonstrație că dacă o funcție numerică este derivabilă pe un interval și dacă derivata ei este pozitivă sau nulă, ea este crescătoare în sens larg pe acest interval. Compararea a două funcții care au aceeași funcție derivată pe un interval.

Studiul sensului de variație a unei funcții derivabile cu ajutorul semnului derivatei ei.

Reprezentarea grafică; exerciții simple de găsire a asimptotelor.

4. Funcții vectoriale de o variabilă reală.

Aplicația unei părți a lui **R** într-un spațiu vectorial euclidian de dimensiune finită.

Continuitatea într-un punct; limita unei funcții cînd variabila tinde spre un număr real dat, spre infinit.

Derivata într-un punct; dacă spațiul vectorial este raportat la o bază, coordonatele, în această bază, ale derivatei; funcția derivată. Derivata unei sume de funcții vectoriale derivabile, a produsului unei funcții vectoriale derivabile printr-o funcție numerică derivabilă.

Derivata produsului scalar a două funcții vectoriale derivabile. Aplicație la determinarea tangentelor, exemple de conice și de elice circulare.

5. Cinematica punctului.

Mișcarea unui punct: aplicația unui interval din **R** într-un spațiu afin euclidian. Traiectorie. Vectorul-viteză la un moment dat. Fiind ales un reper, coordonatele vectorului-viteză în acest reper. Norma vectorului-viteză. Vectorul-accelerație la un moment dat. Fiind ales un reper, coordonatele vectorului-accelerație în acest reper. Studiul mișcărilor circulare (viteza unghiulară); studiul mișcărilor helicoidale uniforme.

IV. Calcul integral

1. Definiția sumelor Riemann ale unei funcții numerice de o variabilă reală pe un interval închis, mărginit. Existența integralei pentru o funcție monotonă; notația $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$; primele proprietăți. Se va admite că aceste proprietăți se extind la funcții continue sau monotone pe porțiuni.
Media unei asemenea funcții pe un interval închis, mărginit.
Legătura cu derivata în punctele în care funcția este continuă.
Primitive; mulțimea primitivelor; egalitatea

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

f fiind continuă pe $[a, b]$ și admițînd pe F ca primitivă.
Calcul de primitive; integrare prin părți.
2. Se vor enunța, fără demonstrație, proprietățile ariilor a căror existență este admisă (aditivitatea, unitatea de arie,....).
Aplicarea calculului integral la evaluarea ariei părții lui $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ definită prin: $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$,
f fiind o funcție pozitivă, monotonă pe porțiuni, apoi o funcție pozitivă continuă. Extensie la $b < a$ și la o funcție negativă.

SECȚIUNEA C ȘI E

3*. Aplicații geometrice, mecanice, fizice etc... (calcul de volume, de mase, momente de inerție; viteza și distanța parcursă; intensitatea și cantitatea de electricitate; putere și energie etc...)
Valoarea eficace a unui fenomen periodic.

V. Exemple de funcții de o variabilă reală

Anumite rezultate ale acestui capitol, deja cunoscute elevilor, vor putea să ilustreze capitolele precedente; va fi cazul să se repartizeze diferitele rubrici ale acestui capitol între mai multe momente ale anului.
1. Funcția $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbf{Z})$; derivată; primitive.
2. Funcția $x \mapsto x^r$ $(r \in \mathbf{Q};\ x > 0)$; derivată; primitive.
3. Progresii aritmetice și geometrice. Suma primilor n termeni.
4. Funcții circulare; derivate (recapitulare); derivatele și primitivele lui $x \mapsto \cos(ax + b)$ și $x \mapsto \sin(ax + b)$.
5. Logaritmul neperian (notația Log și ln).
$\operatorname{Log} x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ $(x > 0)$. Limita, cînd variabila pozitivă x tinde spre infinit, a lui $\operatorname{Log} x$ și $\frac{\operatorname{Log} x}{x}$. Limita lui $x \operatorname{Log} x$ cînd x tinde spre 0.
Reprezentarea grafică.
6. Funcția exponențială (notația exp).
Proprietăți; derivată; reprezentarea grafică; notația e^x;
Limita lui $\frac{e^x}{x}$ cînd x tinde spre $+\infty$.
7. Alte funcții logaritmice și exponențiale. Relații între funcțiile logaritmice și exponențiale de bază a și acele de bază e.

SECȚIUNEA C

Definiția lui x^α unde $\alpha \in \mathbf{R}$; derivata funcției $x \mapsto x^\alpha$.

SECȚIUNILE C ȘI E

* Notația e^{ix} pentru a desemna $\cos x + i \sin x$; ω fiind o constantă reală, derivata funcției $x \mapsto e^{i\omega x}$.
Observație: Studiul funcțiilor compuse de tip logaritmic sau exponențial va fi strict limitat la cazurile în care sînt puse în evidență intervalele pe care derivata păstrează semn constant și în care nedeterminările de înlăturat sînt numai acelea enumerate mai sus.

SECȚIUNEA C

8. Calcul numeric. Folosirea riglei de calcul; folosirea tabelelor, practica interpolării liniare. Tabele de logaritmi. Folosirea mașinilor de calcul de birou.

SECȚIUNEA E

9. Calcul numeric. Revederea programelor din anul II T și anul I E.

SECȚIUNEA C ȘI E

9* Ecuații diferențiale. Studiul funcțiilor numerice, o dată sau de două ori derivabile, de variabilă x care verifică ecuațiile: $y' = ay$,

a fiind o constantă reală, $y'' + \omega^2 y = 0$, ω fiind o constantă reală nenulă (se va admite că soluţiile formează un spaţiu vectorial de dimensiune 2).

VI. Elemente de geometrie afină şi euclidiană

N.B.: În acest paragraf corpul de bază este **R** şi dimensiunea n este totdeauna egală cu 2 sau 3. O *„transformare a unei mulţimi* E" este o bijecţie a lui E pe ea însăşi; o aplicaţie f a lui E în ea însăşi este o *involuţie* dacă fof este identitate: aceasta este o transformare a lui E.

1. Suma directă a două subspaţii vectoriale; subspaţii vectoriale suplementare. Aplicaţie liniară a unui spaţiu vectorial E într-un spaţiu vectorial F; imagine şi nucleu. Adunarea şi compunerea aplicaţiilor liniare. Grup liniar. Omotetii vectoriale.

2. Baricentru într-un spaţiu afin. Reper afin. Reducerea în cazul euclidian a lui:

$$f(M) = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2.$$

3. Aplicaţie afină a unui spaţiu afin E în el însuşi, aplicaţie liniară asociată. Exemple: proiecţie paralelă pe un subspaţiu afin; involuţii afine, punctele lor fixe; translaţii şi omotetii.

4. Aplicaţii liniare ale unui spaţiu vectorial euclidian în el însuşi, păstrînd norma; transformări ortogonale (izometrii vectoriale) grup ortogonal.

Elemente fixe ale transformărilor ortogonale involutive (simetrii) în planul vectorial şi în spaţiul vectorial de dimensiune 3. Orientarea planului vectorial euclidian (recapitulare din anul I).

Studiul rotaţiilor vectoriale din spaţiul vectorial euclidian de dimensiune 3 (prin definiţie, o asemenea rotaţie este fie identitatea, fie o transformare ortogonală, care are ca singure elemente fixe cele două drepte vectoriale); grup de rotaţii vectoriale; orientarea spaţiului.

Produs vectorial în spaţiul vectorial euclidian orientat, de dimensiune 3.

5. Definiţia unei izometrii a spaţiului afin euclidian. Orice izometrie este o bijecţie afină. Grup de izometrii; subgrup de deplasări. Simetrii, translaţii, rotaţii în planul afin euclidian: orice deplasare este de unul din aceste ultime două tipuri.

Simetrii, translaţii, rotaţii, mişcări elicoidale în spaţiul afin euclidian de dimensiune 3; se va admite că orice deplasare este de unul din aceste ultime trei tipuri.

Exemple simple de grupuri de izometrii care lasă neschimbată o mulţime dată.

VII. Complemente de geometrie euclidiană plană

1. Unghiul unei perechi de semidrepte vectoriale (recapitulare din anul I).

Grupul $\mathcal{A}$ al unghiurilor de semidrepte.

Unghiul unei perechi de drepte vectoriale (mulţimea a două rotaţii vectoriale care transformă pe prima în a doua).

Grupul $\mathcal{A}'$ al unghiurilor de drepte.

Homomorfismul canonic $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}'$; nucleul lui.

Izomorfismul lui $\mathcal{A}'$ pe $\mathcal{A}$ dedus din homomorfismul $\alpha \mapsto \alpha + \alpha$ al lui $\mathcal{A}$ pe $\mathcal{A}'$.

Condiţia, în cazul unghiurilor de drepte, ca patru puncte să fie conciclice.

2. Asemănări plane (adică aplicaţii ale planului în el însuşi, păstrînd rapoartele de distanţă). Reprezentarea prin formulele $z' = az + b$ sau $z' = \overline{az} + b$ atunci cînd planul a fost identificat cu C datorită alegerii unui reper ortonormat. Punctele fixe ale asemănărilor. Grupul asemănărilor planului şi subgrupuri remarcabile.

SECŢIUNEA C

3. Studiul curbelor reprezentate, într-un reper ortonormat, prin ecuaţii de forma:

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \quad (|a| + |b| \neq 0).$$

Diferitele forme ale acestor curbe; existenţa axelor sau a centrelor de simetrie, a asimptotelor; ecuaţii reduse; existenţa tangentei. Elipsa, hiperbola, parabola definite prin proprietăţile puntelor lor care fac să intervină focarele şi directoarele (proprietăţile tangentelor la conice sînt în afara programei).

Ecuaţia hiperbolei raportată la asimptotele ei.

SECŢIUNEA E

3. Studiul curbelor reprezentate, într-un reper ortonormat, prin ecuaţii de forma:

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 (|a| + |b| \neq 0).$$

Diferite forme ale acestor curbe; existenţa axelor sau a centrelor de simetrie, a asimptotelor. Ecuaţii reduse: elipsa, hiperbola, parabola.

Existenţa tangentei. Ecuaţia hiperbolei raportată la asimptotele ei.

4. Geometrie descriptivă. Chestiunile enumerate mai jos vor fi avantajos studiate în legătură cu cursul de geometrie din această clasă şi din clasa anterioară; ele vor servi util la ilustrarea acestuia.

Rotaţia în jurul unei axe verticale sau de sprijin. Rabaterea unui plan orizontal sau frontal. Distanţa a două puncte, a unui punct la o dreaptă, a unui punct la un plan; unghiul a două drepte.

Proiecţia unui cerc: epura.

Reprezentarea unui cilindru de revoluţie, a unui con de revoluţie a cărui bază circulară este planul orizontal de proiecţie. Construcţia prin puncte şi tangente a proiecţiei orizontale (respectiv frontale) a intersecţiei unei asemenea suprafeţe printr-un plan de sprijin (respectiv vertical).

Reprezentarea elicei circulare drepte trasată pe un cilindru de revoluţie de axă verticală.

SECŢIUNEA C ŞI E

VIII. Probabilităţi pe o mulţime finită

1. Spaţii probabilistice finite (Ω, $\mathscr{B}$ (Ω), p). Aplicaţii măsurabile (sau variabile aleatoare): probabilitatea imagine, funcţia de repartiţie a unei vriabile aleatoare reale.
Pereche de variabile aleatoare reale, legea perechii. Legi marginale.
Pereche independentă. Sistem de n variabile aleatoare independente.
2. Valoarea medie a unei variabile aleatoare cu valori în $\mathbf{R}$ sau $\mathbf{R}^2$. Valoarea medie a sumei a două variabile aleatoare reale a unei perechi, a produsului în cazul unei perechi independente.
3. Inegalitatea lui Bienaymé-Cebîşev. Experienţe repetate; legea slabă a numerelor mari.

ALFABETUL GREC

Α	α	alfa	a
Β	β, ϐ	beta	b
Γ	γ	gama	g
Δ	δ	delta	d
Ε	ε	epsilon	e scurt
Ζ	ζ	zeta	z
Η	η	eta	e lung
Θ	θ	teta	th
Ι	ι	iota	i
Κ	ϰ	kappa	k
Λ	λ	lambda	l
Μ	μ	miu	m
Ν	ν	niu	n
Ξ	ξ	csi	ks
Ο	ο	omicron	o scurt
Π	π	pi	p
Ρ	ρ	ro	r
Σ	σ, ς	sigma	s
Τ	τ	tau	t
Υ	υ	ypsilon	ü
Φ	φ	fi	f
Χ	χ	hi	h
Ψ	ψ	psi	ps
Ω	ω	omega	o lung

1 FUNCȚII NUMERICE CONTINUITATE

1.1 SUBMULȚIMI ALE LUI R

1.1.1 Intervale deschise, intervale închise

Mulțimea **R** a numerelor reale, studiată de altfel (Algebră, Numere reale, calcul numeric, numere complexe, capitolul 1), este un corp comutativ total ordonat în care orice parte nevidă și majorată admite un cel mai mic majorant. O parte a lui **R** majorată și minorată se spune că este *mărginită*. În plus, aplicația d de la $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ la $\mathbf{R}^+$, definită prin:

$$d(x, y) = |y - x|,$$

este o distanță.

DEFINIȚIA / Oricare ar fi numerele reale a și b, intervalul deschis $]a,b[$ este
1 mulțimea numerelor reale cuprinse strict între a și b (în sensul relației de ordine totală definită pe R).

$$\forall_{\mathbf{R}}\, a,\ \forall_{\mathbf{R}}\, b\ \ ]a,b[= \{x;\ x \in \mathbf{R} \text{ și } a < x < b\}.$$

DEFINIȚIA / Oricare ar fi numerele reale a și b, intervalul închis $[a, b]$ este
2 mulțimea numerelor reale cuprinse între a și b (în sensul relației de ordine totală definită pe R).

$$\forall_{\mathbf{R}}\, a,\ \forall_{\mathbf{R}} b\ \ [a, b] = \{x;\ x \in \mathbf{R} \text{ și } a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Observație. — Se definește adesea mulțimea $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (a se vedea anul I Algebra, vol. I, Mulțimi, statistică, probabilități nr. 6.8.2 și nr. 2.3.1 din acest volum), astfel încît, în particular:

$$\forall_{\overline{\mathbf{R}}} x \qquad x < +\infty \qquad \text{și} \qquad x > -\infty$$

Așa că avem și următoarele notații:

$$]-\infty, +\infty[= \mathbf{R};$$

interval deschis $]-\infty, a[= \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x < a\}$;
interval închis $]-\infty, a] = \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x \leqslant a\}$;
interval deschis $]a, +\infty[= \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x > a\}$;
interval închis $[a, +\infty[= \{x; x \in \mathbf{R} \text{ și } x \geqslant a\}$.

Aceste intervale nu sînt mărginite.

DEFINIȚIA / Fie x_0 un număr real oarecare și r un număr real pozitiv. Se
3 numește interval deschis centrat în x_0 și de rază r intervalul deschis $]x_0 - r, x_0 + r[$ (se mai spune bulă deschisă de centru x_0 și de rază r).

DEFINIȚIA / Fie x_0 un număr real oarecare și r un număr real pozitiv. Se
4 numește interval închis centrat în x_0 și de rază r intervalul închis $[x_0 - r, x_0 + r]$ (se mai spune bulă închisă de centru x_0 și de rază r).

Observație. — Un interval deschis (respectiv închis) mărginit este o bulă deschisă (respectiv închisă) de centru $\frac{a+b}{2}$ și de rază $\frac{|b-a|}{2}$.

Vom studia acum mai amănunțit submulțimile lui $\mathbf{R}$ pe care le-am definit. Printre aceste mulțimi, unele se numesc *deschise* și altele *închise*. Această distincție, bazată pe diferența dintre ordinea naturală a lui $\mathbf{R}$ și ordinea strictă asociată, este cea pe care o vom studia. Să considerăm, de exemplu, intervalul închis $[a, b]$ care conține numerele reale a și b. Orice element x din acest interval este mai mare sau egal cu a și mai mic sau egal cu b; există un număr din acest interval, în acest caz este b, astfel încît nici un număr real mai mare ca b nu aparține acestui interval. Se pot face observații asemănătoare în ceea ce privește numărul a și numerele reale care sînt mai mici ca el.
Să considerăm acum intervalul deschis $]a, b[$ care, de această dată, nu conține nici numărul a nici numărul b. Pentru orice număr x_0 din acest interval deschis, există un număr x_1 cuprins strict între x_0 și b. Este suficient, de exemplu, să se ia $x_1 = \frac{x_0 + b}{2}$. Se pot face observații asemănătoare în ceea ce-l privește pe a.

1.1.2 Deschișii lui R

Intervalul $]a, b[$ se spune că-i *deschis în b* pentru că are următoarea proprietate:

$$\forall_{]a,b[}\, x_0;\ \exists_{]a,b[}\, x_1 \quad x_0 < x_1 < b.$$

Dacă se notează cu h diferenţa $x_1 - x_0$, această proprietate se poate scrie:

$$\forall_{]a,b[}\, x_0;\ \exists_{\mathbf{R}^{+*}}\, h \quad [x_0, x_0 + h[\ \subset\ ]a, b[.$$

Intervalul $]a, b[$ se spune că este *deschis* căci este deschis în a şi în b; avem deci simultan:

$$\forall_{]a,b[}\, x_0;\ \exists_{\mathbf{R}^{+}}\, h \quad [x_0, x_0 + h[\ \subset\ ]a, b[,$$

$$\forall_{]a,b[}\, x_0;\ \exists_{\mathbf{R}^{+*}}\, k \quad]x_0 - k, x_0]\ \subset\ ]a, b[.$$

sau, dacă se pune $l = \inf(h, k)$:

$$\forall_{]a,b[}\, x_0;\ \exists_{\mathbf{R}^{+*}}\, l \quad]x_0 - l, x_0 + l[\ \subset\ ]a, b[.$$

Această proprietate se generalizează dîndu-se următoarea definiţie:

DEFINIŢIE / Se numeşte deschis al lui R orice submulţime A a lui R, astfel încît pentru orice element x al lui A, există un număr real strict pozitiv h astfel încît intervalul deschis $]x - h, x + h[$ este conţinut în A.

Fie $\mathcal{O}$ mulţimea deschişilor lui **R**. Avem:

$$A \in \mathcal{O} \Leftrightarrow \forall_A x;\ \exists_{\mathbf{R}^{+*}}\, h \quad]x - h, x + h[\ \subset A.$$

Exemple. **I.** Orice interval deschis este un deschis al lui **R** (Observaţia nr. 1.1.1).
II. Mulţimea **R** este un deschis. Aceasta rezultă imediat din definiţie.
III. Să considerăm o submulţime B a lui **R**, care nu este un deschis.
Avem atunci:

$$\exists_B x_0;\ \forall_{\mathbf{R}^{+*}}\, h \quad]x - h, x + h[\ \not\subset A.$$

Fie, de exemplu, mulţimea vidă. Ea este definită prin proprietăţile

$$\forall_{\mathbf{R}}\, x \quad x \notin \emptyset$$

Deci, nu există număr real care să aparţină mulţimii vide, şi orice proprietate care începe prin „există x element al lui A, ..." este falsă pentru mulţimea vidă. Proprietatea:

$$\exists_{\emptyset} x_0;\quad \forall_{\mathbf{R}^{+*}}\, h \quad]x - h, x + h[\ \not\subset \emptyset$$

este deci falsă. Prin urmare, este fals că mulţimea vidă nu poate fi deschisă. În concluzie: ***mulţimea vidă este un deschis al lui* R.**

Proprietăţi

1 Să considerăm reuniunea U a unei familii de submulţimi deschise ale lui **R**. Pentru orice element x al acestei reuniuni, există un deschis A, al familiei pentru care U este reuniunea, care conţine pe x. Prin urmare, există un număr real pozitiv nenul h astfel încît intervalul $]x - h, x + h[$ este conţinut în A. Intervalul deschis $]x - h, x + h[$ fiind conţinut în A şi A fiind conţinut în U, intervalul deschis $]x - h, x + h[$ este inclus în U. Aceasta fiind adevărată pentru orice număr real x, element al lui U, conchidem:

P_1 Orice reuniune de mulţimi deschise ale lui R este o mulţime deschisă a lui R.

2 Fie doi deschişi A şi B ai lui **R** şi fie I intersecţia lor.
a) Dacă I este vidă, I este un deschis al lui **R**, fiindcă mulţimea vidă este un deschis al lui **R** (Exemplul III).
b) Dacă I nu este vidă, fie un element oarecare x al lui I; x este simultan element al lui A şi al lui B; prin urmare:

$$\exists_{\mathbf{R}^{+*}} h \qquad]x-h,\ x+h[\ \subset A,$$

$$\exists_{\mathbf{R}^{+*}} k \qquad]x-k,\ x+k[\ \subset B.$$

Fie l cel mai mic dintre numerele h şi k. Avem:

$$l = \inf(h, k);$$

$$]x-l,\ x+l[\ \subset\ ]x-h,\ x+h[\ \subset A,$$

$$]x-l,\ x+l[\ \subset\ ]x-k,\ x+k[\ \subset B.$$

Am găsit deci un număr l, real pozitiv nenul, astfel că intervalul deschis $]x-l,\ x+l[$ este inclus simultan în A şi în B şi deci în I. Cum aceasta este adevărată pentru orice element x al lui I, am arătat că:

$$\forall_I x; \qquad \exists_{\mathbf{R}^{+*}} l \qquad]x-l,\ x+l[\ \subset I;$$

I este deci un deschis al lui **R** şi se poate conchide:

P_2 Intersecţia a două mulţimi deschise ale lui R este o mulţime deschisă a lui R.

Exemple. **I** Reuniunea a două intervale deschise este o mulţime deschisă a lui **R**:

a) $]-1,3[\ \cup\ ]3,4[\ =\ ]-1,4[-\{3\}$ este un deschis;
b) $]-\infty,\ -1[\ \cup\ ]-2,\ +\infty[\ = \mathbf{R}$ este un deschis.

II. Reuniunea oricăror intervale deschise de forma $]n-1,\ n[$ este o mulţime deschisă a lui **R**. Această reuniune este mulţimea $\mathbf{R}-\mathbf{Z}$ care este deci un deschis al lui **R**.
III. Intersecţia a două intervale deschise este o mulţime deschisă (eventual mulţimea vidă):

$$]-1,3[\ \cap\ ]0,4[\ =\ ]0,3[.$$

Observaţii. — **1** Submulţimile lui **R** de forma $[a,\ +\infty[$ sînt în mod necesar semideschise la dreapta.
2 Intersecţia unei infinităţi de mulţimi deschise ale lui **R** nu este în mod necesar o mulţime deschisă a lui **R** (a se vedea exerciţiul nr. 1.1).

1.1.3 Închişi ai lui R

Ne vom baza studiul închişilor lui **R** pe observaţia conform căreia complementara în **R** a unui interval închis în punctul b este o mulţime deschisă în punctul b:

$$A = [a, b]; \qquad \bar{A} =]-\infty,\ a[\ \cup\ ]b,\ +\infty[.$$

DEFINIȚIE / Se numește închis al lui R orice submulțime B a lui R a cărei complementară în R este o submulțime deschisă a lui R.

Fie $\mathcal{F}$ mulțimea închișilor lui **R**. Avem:

$$B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow C_{\mathbf{R}}B \in \mathcal{O}.$$

Exemple. **I.** Orice interval închis $[a, b]$ este un închis al lui **R** căci mulțimea $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ este un deschis al lui **R**, ca reuniune de doi deschiși ai lui **R**.

II. Mulțimea vidă este deschisă (nr. 1.1.2); în consecință, mulțimea **R** este închisă.

III. Mulțimea **R** este deschisă (nr. 1.1.2); în consecință, mulțimea vidă este închisă.

IV. $\mathbf{R}-\mathbf{Z}$ fiind un deschis al lui **R**, **Z** este un închis al lui **R**.

Observații. — 1 Mulțimile **R** și $\emptyset$ sînt singurele care sînt simultan deschise și închise în **R**:

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{O} = \{\mathbf{R}, \emptyset\}.$$

2 Există submulțimi ale lui **R** care nu sînt nici închise nici deschise:

$$\mathcal{F} \cup \mathcal{O} \neq \mathcal{P}(\mathbf{R}).$$

Proprietăți

1 Complementara reuniunii a doi închiși ai lui **R** fiind intersecția a doi deschiși, rezultă că:

P_1' Reuniunea a două mulțimi închise ale lui **R** este un închis al lui **R**.

2 Complementara intersecției unei familii de închiși din **R** fiind reuniunea unei familii de deschiși din **R**, rezultă că:

P_2' Orice intersecție de mulțimi închise din **R** este un închis din **R**.

Exemple. **I.** Intersecția a două intervale închise din **R** este o mulțime închisă din **R**:

a) $[-1, 3] \cap [3, 4] = \{3\}$ este un închis al lui **R**;
b) $]-\infty, -1] \cap [-2, +\infty[= [-2, -1]$ este un închis al lui **R**;
c) $[-1, +2] \cap [+4, +\infty[= \emptyset$ este un închis al lui **R**.

II. Intersecția tuturor intervalelor închise de forma $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, unde n este un număr natural nenul, este mulțimea închisă $\{0\}$.

III. Reuniunea a două intervale închise din **R** este o mulțime închisă a lui **R**:

a) $]-\infty, +3] \cup [-2, +\infty[= \mathbf{R}$ este un închis al lui **R**;
b) $[-2, +3] \cup [-1, +5] = [-2, +5]$ este un închis al lui **R**.

Observație. — Reuniunea unei infinități de mulțimi închise ale lui **R** nu este în mod necesar o mulțime închisă a lui **R** (a se vedea exercițiul nr. 1.2). Reamintim de asemenea la această chestiune că **R** satisface axioma intervalelor închise îmbucate.

1.1.4 Topologii pe R

Există două familii importante de submulţimi de numere reale:

familia $\mathcal{O}$ a deschişilor lui **R**,

familia $\mathcal{F}$ a închişilor lui **R**;

$\mathcal{O}$ şi $\mathcal{F}$ sînt submulţimi ale lui $\mathfrak{P}(\mathbf{R})$.

$\mathcal{O}=\{A\,;A\subset\mathbf{R}$ şi A deschis al lui $\mathbf{R}\}$.	$\mathcal{F}=\{B\,;\ B\subset\mathbf{R}$ şi B închis al lui $\mathbf{R}\}$
Reuniunea elementelor din $\mathcal{O}$ este un element din $\mathcal{O}$.	Intersecţia elementelor din $\mathcal{F}$ este un element din $\mathcal{F}$.
Intersecţia a două elemente din $\mathcal{O}$ este un element din $\mathcal{O}$.	Reuniunea a două elemente din $\mathcal{F}$ este un element din $\mathcal{F}$.
$\mathcal{O}\cap\mathcal{F}=\{\mathbf{R},\varnothing\}$	

DEFINIŢIE / **Fie o mulţime E. Se spune că s-a definit o topologie τ pe E dacă s-a definit o familie Ω de părţi ale lui E astfel că:**

O_1. Orice reuniune de mulţimi care aparţin lui Ω aparţine lui Ω.

O_2 Intersecţia a două mulţimi din Ω aparţine lui Ω.

Elementele lui Ω sînt atunci deschişii topologiei τ.

(E, τ) este un spaţiu topologic şi elementele lui E se numesc puncte.

Observaţie. — Din proprietăţile $\mathbf{O_1}$ şi $\mathbf{O_2}$ ale familiei Ω rezultă că E şi mulţimea vidă sînt deschişii oricărei topologii τ pe E. Mulţimea **R** este înzestrată cu o topologie τ_0 cu ajutorul familiei $\mathcal{O}$ întîlnită în această secţiune. Această topologie se sprijină pe distanţa în **R** (definiţia unui deschis face să intervină bulele deschise) şi cu toate că se pot defini alte topologii pe **R**, nu vom vorbi de aci înainte decît de această topologie τ_0, în ceea ce priveşte topologiile pe **R**.

1.1.5 Vecinătăţile unui număr real. Definiţie

Studiul a numeroase chestiuni matematice necesită codificarea noţiunii de ***vecinătate***.

Intuitiv, o vecinătate a unui punct x_0 din **R** este o submulţime din **R** care conţine pe x_0 şi punctele vecine cu x_0. Această noţiune este precizată prin următoarea definiţie:

DEFINIŢIA 1 / **Se numeşte vecinătate a unui punct x_0 din R orice submulţime V din R care conţine o mulţime deschisă care conţine pe x_0.**

Un deschis care conţine pe x_0 conţine în mod necesar un interval deschis care conţine pe x_0 (nr. 1.1.2). Deci o vecinătate a lui x_0 conţine un interval deschis care conţine pe x_0.
Pe de altă parte, un interval deschis este o mulţime deschisă (nr. 1.1.2, Exemplul I); deci, o mulţime care conţine un interval deschis care conţine pe x_0 este o vecinătate a lui x_0.

PROPRIETATE / O submulţime V din R este o vecinătate a numărului real x_0 dacă şi numai dacă V conţine un interval deschis care conţine pe x_0.

Observaţii. — 1 O vecinătate a lui x_0 conţine pe x_0.
2 Rezultă din definiţia unui interval deschis al lui **R** că o submulţime A din **R** este deschisă dacă şi numai dacă A este vecinătate a oricăruia din punctele sale.

Exemple. I. Intervalul $[-3, 8[$ este o vecinătate a lui 4.
II. Intervalul $]-3, 4]$ nu este o vecinătate a lui 4.

Printre vecinătăţile unui punct x_0, sînt unele care pot fi definite prin indicarea unui număr h:
Intervalele deschise $]x_0 - h, x_0 + h[$ sînt, pentru orice număr real h nenul, vecinătăţi ale punctului x_0.

DEFINIŢIA 2 / Se numeşte vecinătate centrată a lui x_0, de rază h, intervalul deschis $]x_0 - h, x_0 + h[$.

Avem:
$$x \in]x_0 - h, x_0 + h[\Leftrightarrow |x - x_0| < h.$$

1.1.6 Vecinătăţile unui număr real. Proprietăţi

Vom nota cu $\mathcal{V}(x_0)$ mulţimea vecinătăţilor numărului x_0.
■ Să considerăm o vecinătate V a punctului x_0; V conţine un interval deschis $]\alpha, \beta[$ care conţine pe x_0:
$$x_0 \in]\alpha, \beta[\text{ şi }]\alpha, \beta[\subset V;$$
deci:
$$\alpha < x_0 < \beta.$$
Fie h cel mai mic dintre numerele pozitive $x_0 - \alpha$ şi $\beta - x_0$:
$$h = \inf [(x_0 - \alpha), (\beta - x_0)];$$
avem:
$$\alpha \leqslant x_0 - h < x_0 < x_0 + h \leqslant \beta$$
deci
$$]x_0 - h, x_0 + h[\subset]\alpha, \beta[\subset V.$$
În concluzie, se poate enunţa următoarea proprietate:

PROPRIETATEA 1 / Orice vecinătate a lui x_0 conţine o vecinătate centrată a lui x_0.

■ Fie două vecinătăţi V şi V' ale lui x_0:

$$\exists_{\mathfrak{L}(\mathbf{R})}]\alpha, \beta[\qquad]\alpha, \beta[\subset V,$$

$$\exists_{\mathfrak{L}(\mathbf{R})}]\gamma, \delta[\qquad]\gamma, \delta[\subset V'.$$

În consecinţă:

$$x_0 \in V \cap V'; \qquad (]\alpha, \beta[\cap]\gamma, \delta[) \subset (V \cap V').$$

Intersecţia $V \cap V'$ este deci o mulţime nevidă. Intersecţia $]\alpha, \beta[\cap]\gamma, \delta[$ conţine de asemenea pe x_0 şi este de asemenea nevidă. Intersecţia nevidă a două intervale deschise este un interval deschis.

Într-adevăr:

$$\inf(\alpha, \gamma) \leqslant \sup(\alpha, \gamma) < x_0 < \inf(\beta, \delta) \leqslant \sup(\beta, \delta)$$

$$]\alpha, \beta[\cap]\gamma, \delta[=]a, b[;$$

mai mult, orice x din intervalul $]a, b[$ este simultan element al lui V şi V'; prin urmare:

$$x_0 \in]a, b[\subset V \cap V'.$$

De aici se deduce următoarea proprietate:

PROPRIETATEA 2 / **Intersecţia a două vecinătăţi ale lui x_0 este o vecinătate a lui x_0.**

Observaţie. — Din două vecinătăţi centrate ale aceluiaşi punct, una este în mod necesar inclusă în cealaltă. Intersecţia a două vecinătăţi centrate ale lui x_0 este deci o vecinătate centrată a lui x_0.

■ Fie două vecinătăţi V şi V' ale punctului x_0. Cu aceleaşi notaţii ca mai înainte, avem:

$$(]\alpha, \beta[\cup]\gamma, \delta[) \subset (V \cup V');$$

or, intervalul: $]\alpha, \beta[\cup]\gamma, \delta[=]\inf(\alpha, \gamma), \sup[\beta, \delta)[$

este un interval deschis; de aici rezultă următoarea proprietate:

PROPRIETATEA 3 / **Reuniunea a două vecinătăţi ale lui x_0 este o vecinătate a lui x_0.**

Observaţie. — Reuniunea a două vecinătăţi centrate ale lui x_0 este o vecinătate centrată a lui x_0.

■ Fiind date două puncte distincte x_0 şi x_1 din $\mathbf{R}$, există un număr real pozitiv k astfel că, dacă se presupune x_0 inferior lui x_1, $x_0 + k$ este inferior lui $x_1 - k$ sau egal cu $x_1 - k$. Este suficient, de exemplu, să se ia:

$$k = \frac{x_1 - x_0}{2};$$

în aceste condiţii avem:

$$x_0 < x_0 + k \leqslant x_1 - k < x_1;$$

deci:

$$]x_0 - k, x_0 + k[\cap]x_1 - k, x_0 + k[= \emptyset.$$

Rezultă de aici următoarea proprietate:

PROPRIETATEA / Fiind date două numere reale distincte x_0 şi x_1, există o
4 vecinătate V_0 a lui x_0 şi o vecinătate V_1 a lui x_1 astfel că V_0 şi V_1 sînt disjuncte. (Se spune atunci că topologia lui τ este separată.)

■ Mulţimea $\mathcal{V}(x_0)$ a vecinătăţilor lui x_0 verifică următoarele proprietăţi care decurg imediat din proprietăţile vecinătăţilor:

$$\mathbf{V}_1: \forall_{\mathcal{V}(x_0)} V; \ \forall_{\mathfrak{P}(\mathbf{R})} W \quad V \subset W \Rightarrow W \in \mathcal{V}(x_0).$$

$$\mathbf{V}_2: \forall_{\mathcal{V}(x_0)} V; \ \forall_{\mathcal{V}(x_0)} W \quad V \cap W \in \mathcal{V}(x_0).$$

$$\mathbf{V}_3: \mathcal{V}_{(x_0)} \subset \mathfrak{P}(\mathbf{R}), \ \mathcal{V}(x_0) \neq \emptyset.$$

$$\mathbf{V}_4: \emptyset \notin \mathcal{V}(x_0).$$

■ Din definiţii şi din proprietatea 1 rezultă că mulţimea $\mathcal{C}(x_0)$ a vecinătăţilor deschise centrate în x_0 (bule deschise de centru x_0) este astfel că:

(B) $$V \in \mathcal{V}(x_0) \Leftrightarrow \exists_{\mathcal{C}(x_0)} C; \ C \subset V.$$

(Într-adevăr, o submulţime V din **R** este o vecinătate a lui x_0 dacă şi numai dacă conţine o bulă deschisă de centru x_0.)

Observaţii. — **1** Există şi alte familii de mulţimi care au aceeaşi proprietate ca $\mathcal{C}(x_0)$.

2 Mulţimea $\mathcal{C}(x_0)$ permite să se reconstituie mulţimea $\mathcal{V}(x_0)$ care este formată din toate submulţimile lui **R** care conţin cel puţin un element din $\mathcal{C}(x_0)$.

1.1.7 Topologie indusă pe o submulţime din R

Fie mulţimea **R** înzestrată cu topologia τ_0 definită pe mulţimea $\mathcal{O}$ a deschişilor (nr. 1.1.4).

Fie D o submulţime din **R**. Să considerăm mulţimea $\mathcal{O}_D$ definită prin:

$$\mathcal{O}_D = \{O \cap D; \ O \in \mathcal{O}\}. \ \mathcal{O}_D \subset \mathfrak{P}(D).$$

Este uşor de a verifica (exerciţiul nr. 1.10) că familia $\mathcal{O}_D$ a părţilor din D verifică proprietăţile O_1 şi O_2 (nr. 1.1.4, Definiţie) ale unei familii de mulţimi deschise.

Familia $\mathcal{O}_D$ defineşte pe D o topologie $D\ \tau_0$, numită topologie indusă pe D prin topologia τ_0 din **R**.

Observaţii. — **1** Topologia indusă pe D de τ_0 şi topologia τ_0 din **R** nu au în mod necesar aceleaşi proprietăţi.

2 O vecinătate a lui x_0 din D este intersecţia unei vecinătăţi a lui x_0 cu D (şi reciproc).

Exemple. **I.** Fie: $D =]a, b[$.

În acest caz particular, D este un deschis din **R** pentru τ_0; se deduce că orice deschis din D (pentru $D\ \tau_0$) este un deschis din **R** (pentru τ_0) ca intersecţie a doi deschişi.

II. Fie: $D =]a, b] \cup \{c\}$, cu: $c \notin [a, b]$.

În acest caz, $\{c\}$ este un închis al lui **R**, dar este un deschis al lui D. Deci $]a, b[$ este închis în D, ca complementară în D a unei mulțimi deschise.

Pe de altă parte, $]a, b[$ este deschis în D; deci, $\{c\}$ este închis în D. Se observă că în D există două submulțimi proprii (adică diferite de mulțimea vidă și de D) care sînt în același timp deschise și închise pentru topologia indusă, ceea ce nu este cazul pentru topologia τ_0. (Se spune că D nu este *conexă*).

III. Fie: $D = N$.

Orice element din D este în același timp deschis și închis pentru topologia indusă.

1.1.8 Vecinități la dreapta și vecinități la stînga

Vecinătățile unui punct x_0 al unei submulțimi D din **R** pentru topologia indusă sînt intersecțiile cu D ale vecinătăților lui x_0 pentru topologia τ_0 (se mai spune încă urmele pe D ale vecinătăților lui x_0 pentru τ_0).

Această proprietate rezultă din definiția vecinătăților și din definiția deschișilor topologiei induse.

DEFINIȚIE / O submulțime V din R este vecinătate la dreapta (respectiv la stînga) a unui număr real x_0, dacă și numai dacă conține o submulțime de forma $[x_0, x_0 + h[$ (respectiv $]x_0 - h, x_0]$), unde h este un număr real pozitiv nenul.

Exemple. **I.** $]\alpha, x_0]$ este o vecinătate la stînga a lui $x_0 (\alpha < x_0)$.
II. $[x_0, \beta[$ este o vecinătate la dreapta a lui $x_0 (\beta > x_0)$.

Observații. — **1** O vecinătate a unui punct x_0 este simultan vecinătate la dreapta și la stînga a lui x_0. *Reciproc,* dacă o submulțime al lui **R** este vecinătate și la dreapta și la stînga a lui x_0, atunci ea este o vecinătate a lui x_0.

2 Intersecția și reuniunea a două vecinătăți la dreapta (respectiv la stînga) ale lui x_0 sînt vecinătăți la dreapta (respectiv la stînga) ale lui x_0.

3 V este o vecinătate la dreapta (respectiv la stînga) a lui x_0 dacă și numai dacă V conține o vecinătate a lui x_0 pentru topologia indusă de τ_0 pe mulțimea $D = [x_0, +\infty[$ (respectiv $]-\infty, x_0]$).

EXERCIȚII

1.1 Se consideră intervalele deschise:

$$A_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[,$$

unde n este un număr natural nenul.
Fie mulțimea:

$$I = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \bigcap_{i \in N^*} A_i.$$

1° Să se demonstreze că mulțimea I nu este vidă.
2° Să se demonstreze că nici un număr real nenul nu poate să aparțină simultan tuturor intervalelor A_i $(i \in N^*)$.

3° Să se deducă că intervalul I nu este deschis.

1.2 Se consideră intervalele închise:

$$B_n = \left[-1 + \frac{1}{n},\ 1 - \frac{1}{n}\right],$$

unde n este un număr natural nenul.

Fie mulţimea:

$$\mathcal{U} = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_n \cup \ldots = \bigcup_{i \in N^*} B_i.$$

1° Să se demonstreze că mulţimea $\mathcal{U}$ nu este vidă şi nu este egală cu **R**.
2° Să se demonstreze că $+1$ şi -1 nu aparţin lui $\mathcal{U}$.
3° Să se demonstreze că orice număr real cuprins strict între -1 şi $+1$ este element al lui $\mathcal{U}$.
4° Să se deducă de aici că $\mathcal{U}$ nu este închis.

1.3 Fie E o submulţime din **R**. Se consideră mulţimea $\mathring{E}$ a punctelor x din E astfel că există un număr real pozitiv nenul h încît $]x - h, x + h[$ este inclus în E.

1° Să se demonstreze că $\mathring{E}$ este un deschis al lui **R**.

2° Să se demonstreze că $\mathring{E}$ este inclus în E şi că nici un deschis A care conţine strict pe $\mathring{E}$ nu este inclus în E. (Pentru a demonstra că intervalul $]x - h, x + h[$ este inclus în $\mathring{E}$, se va putea raţiona prin absurd, presupunîndu-se că există un x_0 al lui $E - \mathring{E}$ inclus în intervalul $]x - h, x + h[$.)

($\mathring{E}$ este „cel mai mare" deschis inclus în E: se numeşte *interiorul* lui E.)

1.4 Fie E o submulţime din R. Se consideră mulţimea $\overline{E}$ a punctelor x din **R** astfel că, oricare ar fi numărul real pozitiv nenul h, mulţimea $]x - h, x + h[\cap E$ este nevidă.
(Se spune că un asemenea punct este *aderent* la E. Intuitiv, un punct aderent la E este un punct în aşa fel că există puncte din E „oricît vrem de aproape" de x.)

1° Să se demonstreze că $\overline{E}$ este un închis din **R**. (Se va putea demonstra că complementara lui $\overline{E}$ în **R** este un deschis din **R**, folosindu-se raţionamentul prin reducere la absurd.)

2° Să se demonstreze că $\overline{E}$ conţine pe E şi că nici un închis din **R** strict inclus în $\overline{E}$ nu conţine pe E ($\overline{E}$ este „cel mai mic" închis din **R** care conţine pe E; se numeşte *aderenţă* a lui E).

1.5 Să se demonstreze, cu definiţiile din exerciţiile cu numere 1.3 şi 1.4, că, o parte F din **R** este un deschis dacă şi numai dacă $F = \mathring{F}$. Să se demonstreze de asemenea că H este un închis dacă şi numai dacă $H = \overline{H}$.

1.6 Să se găsească o submulţime A din **R** astfel ca cele cinci mulţimi următoare să fie distincte:

$$A,\ \mathring{A},\ \overline{A},\ \overline{\mathring{A}},\ \mathring{\overline{A}}.$$

1.7 Fie mulţimea E de numere reale definită prin:

$$E = [-1, 0[\ \cup\ ]0, +1[\ \cup \{2\}\ \cup\ ([3, 4[\ \cap\ Q).$$

Să se compare:

$$E,\ \mathring{E},\ \overline{E},\ \overline{\mathring{E}},\ \mathring{\overline{E}},\ \mathring{\overline{\mathring{E}}},\ \overline{\mathring{\overline{E}}}.$$

1.8 Submulţimea Q din R este deschisă? Este închisă?

Care este mulţimea $\overline{Q}$? Care este mulţimea $\mathring{Q}$?

1.9 Să se demonstreze că intersecţia a două intervale deschise este fie vidă, fie un interval deschis.

1.10 Să se demonstreze că reuniunea a două intervale deschise a căror intersecţie este nevidă este un interval deschis.

1.11 Fie D o submulţime din **R**. Fie $\mathcal{O}$ mulţimea deschişilor din **R** şi fie $\mathcal{O}_D$ mulţimea:

$$\mathcal{O}_D = \{O \cap D;\quad O \in \mathcal{O}\}.\ \mathcal{O}_D \subset \mathcal{P}(D).$$

Să se verifice că $\mathcal{O}_D$ satisface condiţiile O_1 şi O_2 din definiţia de la nr. 1.1.4.

1.2 FUNCȚII NUMERICE DE O VARIABILĂ REALĂ

Esențialul din acest paragraf constă din recapitulări ale principalelor definiții întîlnite.

1.2.1 Domeniul de definiție

DEFINIȚIE / Fie o funcție numerică f de o variabilă reală. Mulțimea D a numerelor reale x care au o imagine $f(x)$ prin f se numește domeniu de definiție al lui f.

Observații. — 1 Fiind dată o funcție numerică f, este important să se distingă notațiile f și $f(x)$; f este o funcție, adică un procedeu, un mijloc care permite să se transforme numerele, în timp ce $f(x)$ desemnează un număr real, rezultat al acestei transformări cînd transformarea se aplică numărului real x.

„$y = f(x)$" nu este o funcție, aceasta este o egalitate de numere reale. Funcția are ca nume pe f și ea este definită (pe domeniul ei de definiție) prin egalitatea care dă $f(x)$.
Vom nota:

$$f = [x \mapsto f(x)].$$

2 Două funcții numerice f și g de o variabilă reală sînt egale (se spune de asemenea identice) dacă și numai dacă ele au același domeniu de definiție E și dacă imaginile $f(x)$ și $g(x)$ sînt egale pentru orice x, element al lui E:

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ și } g \text{ au același domeniu de definiție } \mathscr{D}. \\ \forall x \in \mathscr{D} \quad f(x) = g(x). \end{cases}$$

1.2.2 Sens de variație

DEFINIȚIA 1 / Se numește raport de creștere al unei funcții f între două valori distincte x_0 și x_1 din domeniul ei de definiție numărul:

$$\tau = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}.$$

DEFINIȚIA 2 / O funcție f este strict crescătoare pe un interval $]a, b[$ inclus în domeniul ei de definiție dacă și numai dacă:

$$\forall_{]a,b[}\ x_0,\ \forall_{]a,b[}\ x_1$$

$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1).$$

Funcţia este crescătoare pe $]a, b[$ dacă:

$$\forall_{]a,b[}\ x_0,\quad \forall_{]a,b[}\ x_1$$

$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) \leq f(x_1).$$

DEFINIŢIA / 3 **O funcţie f este strict descrescătoare pe un interval $]a, b[$ inclus în domeniul ei de definiţie dacă şi numai dacă:**

$$\forall_{]a,b[}\ x_0,\quad \forall_{]a,b[}\ x_1$$

$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) > f(x_1).$$

Funcţia este descrescătoare pe $]a, b[$ dacă:

$$\forall_{]a,b[}\ x_0,\quad \forall_{]a,b[}\ x_1$$

$$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) \geqslant f(x_1).$$

TEOREMA / 1 **O funcţie f este strict crescătoare (respectiv crescătoare) pe un interval $]a, b[$ dacă şi numai dacă oricare ar fi numerele x_0 şi x_1 din intervalul $]a, b[$ raportul de creştere corespunzător este pozitiv (respectiv pozitiv sau nul).**

TEOREMA / 2 **O funcţie f este strict descrescătoare (respectiv descrescătoare) pe un interval $]a, b[$ dacă şi numai dacă oricare ar fi numerele x_0 şi x_1 din intervalul $]a, b[$ raportul de creştere corespunzător este negativ (respectiv negativ sau nul).**

DEFINIŢIA / 4 **O funcţie f a cărei sens de variaţie este constant pe un interval $]a, b[$ se spune că este monotonă pe acest interval.**
Dacă, în plus, f nu este constantă pe nici un subinterval din $]a, b[$, i se spune strict monotonă.

1.2.3 Periodicitate. Paritate

DEFINIŢIA / 1 **O funcţie f de la R la R se spune că este periodică dacă există un număr real nenul T astfel că:**

$$\forall_D x\quad f(T + x) = f(x).$$

Se spune că T este o perioadă pentru f.

Dacă T este o perioadă pentru f, avem în particular:

$$\forall_D x\quad f(T + T + x) = f(T + x) = f(x).$$

În general, orice număr kT, în care k este un număr întreg, este o perioadă a lui f. În cazurile pe care le vom întîlni, există o cea mai mică perioadă pozitivă.

DEFINIŢIA / 2 **Perioada unei funcţii periodice f este cea mai mică perioadă pozitivă a lui f, dacă ea există.**

DEFINIŢIA / 3 **Fie o funcţie numerică f definită pe un domeniu de definiţie D astfel că, dacă un număr x aparţine lui D, atunci numărul $-x$ aparţine lui D.**

Funcţia f este pară dacă, pentru orice număr x din D:

$$f(-x) = f(x).$$

Funcţia f este impară dacă, pentru orice număr x din D:

$$f(-x) = -f(x).$$

1.2.4 Extreme

DEFINIŢIA / 1 **Fie f o funcţie numerică definită pe o submulţime D din R.**
1 **Se spune că pentru orice valoare x_0 a variabilei, funcţia f admite un maxim relativ (respectiv un minim relativ), dacă există o vecinătate V a lui x_0 în D astfel că :**

$$\forall_V x \; f(x) \leqslant f(x_0) \; (\text{respectiv: } \forall_V x \; f(x) \geqslant f(x_0)).$$

2 În aceleaşi condiţii funcţia f admite un maxim absolut (respectiv minim absolut) în D dacă şi numai dacă:

$$\forall_D x \quad f(x) < f(x_0) \; (\text{respectiv: } \forall_D x \; f(x) > f(x_0)).$$

DEFINIŢIA / O funcţie f admite un extrem absolut (respectiv relativ) pentru
2 **valoarea x_0 a variabilei dacă şi numai dacă ea admite un minim absolut (respectiv relativ) sau un maxim absolut (respectiv relativ) pentru x_0.**

Observaţie. — Fie o funcţie f definită pe un domeniu D. Fie x_0 un element din D. Să presupunem că există o vecinătate V a lui x_0 în D astfel că f admite în x_0 un extrem absolut în V.
Se spune atunci că f admite în x_0 un *extrem relativ strict.*

DEFINIŢIA / Fie o funcţie f care admite un maxim (respectiv un minim)
3 **absolut pe o mulţime E. Se spune atunci că funcţia f este majorată (respectiv minorată) pe E.**
O funcţie majorată şi minorată pe E se spune că este mărginită pe E.

Exemple. I. Fie funcţia $f = \left[x \mapsto \frac{1}{x}\right]$.
a) f este mărginită pe intervalul $[1, +\infty[$;
b) f este minorată pe $\mathbf{R}+$;
c) f nu este nici majorată nici mărginită pe $\mathbf{R}$;
d) f nu admite extreme pe $\mathbf{R}$.
II. Fie funcţia $g = [x \mapsto x^2]$.
a) f admite pe 0 ca minim absolut pe $\mathbf{R}$;
b) f este minorată pe $\mathbf{R}$, dar nemajorată pe $\mathbf{R}$;
c) f este mărginită pe orice interval I de forma:

$$I = [-r, r],$$

unde r este un număr real oarecare;
d) f este mărginită pe orice interval mărginit.

Observaţie. — Un maxim absolut este numit uneori *margine superioară;* un minim absolut este numit adesea *margine inferioară.*

1.2.5 Graficul unei funcţii. Reprezentări grafice

DEFINIŢIE / Graficul G al unei funcţii f este mulţimea perechilor de numere reale (x_0, y_0), unde x_0 aparţine domeniului de definiţie D al funcţiei f şi unde:

$$y_0 = f(x_0).$$

G este o submulţime a produsului cartezian $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
Există mai multe feluri de a materializa graficul G al unei funcţii f, după cum urmează:

$$G = \{(x_0, y_0),\quad x_0 \in D \quad \text{şi} \quad y_0 = f(x_0)\},$$
$$G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}.$$

Cea mai des întîlnită este reprezentarea grafică carteziană care constă în a reprezenta mulţimea G prin mulţimea punctelor corespunzătoare într-un plan raportat la un reper cartezian.

Observaţie. — Într-un plan raportat la un reper cartezian $\mathcal{R}$, mulţimea punctelor ale căror coordonate x şi y satisfac relaţia $f(x, y) = 0$ este numită „curba de ecuaţie $f(x, y) = 0$".

O asemenea curbă este într-adevăr o reprezentare grafică a mulţimii soluţiilor ecuaţiei definită prin:

$$(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \quad \text{şi} \quad f(x, y) = 0.$$

1.2.6 Operaţii cu funcţii

DEFINIŢIA 1 / Fie f şi g două funcţii numerice definite pe o mulţime E de numere reale. Numim $f + g$ funcţia care, oricărui element x din E, asociază numărul:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

DEFINIŢIA 2 / Fie f o funcţie numerică şi fie λ un număr real. Numim λf funcţia care, oricărui x, asociază numărul:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Observaţie. — Mulţimea $\mathcal{A}$ $(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ a aplicaţiilor de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$ este înzestrată datorită celor două legi de compoziţie definite mai sus cu o structură de spaţiu vectorial pe $\mathbf{R}$ (a se vedea exerciţiul nr. 1.41).

DEFINIŢIA 3 / Fie f şi g două funcţii numerice definite pe o mulţime E de numere reale. Numim $f \cdot g$ funcţia care, oricărui x, asociază numărul:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

DEFINIȚIA / **Fie f și g două funcții numerice definite pe o mulțime E de**
4 **numere reale. Numim $\frac{f}{g}$ funcția care asociază numărul**
$\frac{f(x)}{g(x)}$ **la orice element x al mulțimii E' a elementelor din E pentru care**
$g(x)$ nu este nul.
$E' = \{x;\ x \in E,\ g(x) \neq 0\} = E - \{x;\ x \in E,\ g(x) = 0\}.$

DEFINIȚIA / **Fie f o funcție definită pe o mulțime E de numere reale și fie g**
5 **o funcție definită pe mulțimea:**

$$f[E] = \{f(x);\ x \in E\}.$$

Se numește gof funcția care, la orice x al lui E, asociază numărul:
$(gof)(x) = g[f(x)].$

Observație. — Această compunere este o lege de compoziție asociativă, dar nu comutativă.

DEFINIȚIA / **Se numește funcție identică (sau identitate) a unei submulțimi**
6 **E din R aplicația I_E definită pe E, astfel că:**

$$\forall_E x \qquad I_E(x) = x.$$

Fie f o funcție numerică definită pe o mulțime E din **R**.
Dacă f este bijectivă de la E pe $f[E] = \{f(x);\ x \in E\}$, atunci există o aplicație de la $f[E]$ la E, notată f^{-1}, astfel că:

$$f^{-1} \circ f = I_E,$$
$$f \circ f^{-1} = I_{f[E]}.$$

DEFINIȚIA / **Fie E o submulțime din R și f o aplicație de la E la R. Aplica-**
7 **ția f^{-1}, dacă există, se numește funcția inversă lui f.**

Observație. — Reciproc, dacă f^{-1} există, f este bijectivă. Fie o funcție numerică f definită pe un domeniu E. Se întîmplă să fim conduși să cercetăm funcții numerice al căror domeniu de definiție F este strict inclus în E și care, pe F, coincid cu f. Vom da definiția următoare:

DEFINIȚIA / **Fie E o submulțime din R și fie f o aplicație de la E la R. Fie**
8 **F o submulțime din E. Vom numi restricție a lui f la F aplicația**
g de la F la R definită prin:

$$\forall_F x \qquad g(x) = f(x).$$

Observații. — **1** Se notează restricția g a funcției f la mulțimea F în felul următor: $g = f|F$.
2 Funcția $f|F$ nu este definită pe **R** $- F$.

EXERCIŢII

Să se studieze funcţiile definite mai jos din punctul de vedere al domeniului de definiţie, al perioadei, al parităţii, al graficului :

1.12 $\left[x \mapsto \frac{|x|}{x}\right]$.

1.13 $[x \mapsto x|x|]$.

1.14 $\left[x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}\right]$.

1.15 $[x \mapsto E(x)]$.

($E(x)$ este partea întreagă a lui x; $E(x)$ aparţine lui $\mathbf{Z}$ şi avem :

$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1).$$

1.16 $[x \mapsto \sqrt{\sin x}]$.

1.17 $[x \mapsto x - E(x)]$.

1.18 $[x \mapsto xE(x)]$.

1.19 $\left[x \mapsto \frac{\sin x}{\sin x}\right]$.

1.20 Să se determine dacă funcţiile definite mai jos sînt pare sau impare:

$[x \mapsto x^2 - 1 - 3\cos x]$, $[x \mapsto x^2 + 1 + \sin^2 x]$,

$[x \mapsto x^3 + x + \sin x]$, $\left[x \mapsto \frac{\sin x}{x} + \cos x\right]$,

$\left[x \mapsto \frac{\sin x + \operatorname{tg} x - x^3}{\cos x}\right]$, $\left[x \mapsto \frac{\sin^2 x + \cos 3x}{x^2}\right]$.

1.21 1° Să se demonstreze că $\frac{x^3 + x}{1 + x}$ este suma dintre o funcţie pară şi o funcţie impară.

Să se găsească aceste funcţii.

2° Să se generalizeze.

*

Să se alcătuiască şi să se compare funcţiile $f \circ g$ şi $g \circ f$ în următoarele cazuri:

1.22 $f = [x \mapsto \sin x]$; $g = [x \mapsto x^2]$.

1.23 $f = [x \mapsto 4x]$; $g = [x \mapsto 5x]$.

1.24 $f = [x \mapsto x^2]$; $g = [x \mapsto x^3]$.

1.25 $f = [x \mapsto x - 1]$; $g = \left[x \mapsto \frac{1}{x}\right]$.

*

Să se arate că următoarele mulţimi de funcţii sînt înzestrate cu o structură de grup datorită legii de compoziţie a aplicaţiilor:

1.26 $\mathcal{G} = \{e, f\}$; e şi f sînt funcţiile definite pe $D = \mathbf{R} - \{0\}$ prin:

$e = [x \mapsto x]$, $f = \left[x \mapsto \frac{1}{x}\right]$.

1.27 $\mathcal{G} = \{e, f, g, h, j, k\}$;

e, f, g, h, j, k sînt funcțiile definite pe $D = R - \{0; 1\}$ prin:

$e = [x \mapsto x]$; $\qquad f = \left[x \mapsto \frac{1}{x}\right]$;

$g = [x \mapsto 1 - x]$; $\qquad h = \left[x \mapsto \frac{1}{1-x}\right]$;

$j = \left[x \mapsto \frac{x-1}{x}\right]$; $\qquad k = \left[x \mapsto \frac{x}{x-1}\right]$.

(Se va construi tabloul legii o pe $\mathcal{G}$.)

1.28 $\mathcal{G} = \{f_\alpha;\ \alpha \in \mathbf{Q} - \{0\}\}$; f_α este funcția definită pe $\mathbf{R}$ prin:

$$f_\alpha = [x \mapsto \alpha x].$$

1.29 Se consideră funcția f:

$$f = [x \mapsto \sqrt{x}].$$

1° Care este pătratul ei f^2?

2° Să se compare f^2 cu funcția I:

$$I = [x \mapsto x].$$

1.30 Se consideră funcțiile:

$$f = [x \mapsto 6x], \qquad g = [x \mapsto 3x].$$

Să se descrie amănunțit funcția cît $\frac{f}{g}$.

1.31 Pentru y aparținînd lui $\mathbf{R}$ și pentru z aparținînd lui $\mathbf{N}^*$, operația care constă în formarea lui y^z este posibilă.
Se consideră atunci funcțiile f și g; f este oarecare, g își ia valorile pe N^*: $[x \mapsto g(x)]$ cu $g(x) \in N^*$
Să se folosească metoda generală pentru a defini: f^g.

1.32 Să se determine a astfel încît domeniul de definiție al funcției f, definită prin:

$$f(x) = \sqrt{x + a},$$

să fie intervalul $[2, +\infty[$.

1.33 Funcția numerică g, definită prin $g(x) = 2x$, este o bijecție de la $\mathbf{N}$ pe $\mathbf{N}$? de la $\mathbf{Q}$ pe $\mathbf{Q}$? de la $\mathbf{R}$ pe $\mathbf{R}$?

1.34 Funcția h, definită prin $h(x) = x^2$, este:

a) o bijecție de la $\mathbf{R}$ pe $\mathbf{R}$?

b) o bijecție de la $\mathbf{R}+$ pe $\mathbf{R}+$?

c) o bijecție de la $\mathbf{R}-$ pe $\mathbf{R}+$?

Să se justifice amănunțit răspunsurile.

1.35 Se spune că o funcție este *rațională* dacă este definită printr-o relație de tipul $f(x) = R(x)$ unde $R(x)$ este o fracție rațională.
1° Care este domeniul de definiție al funcțiilor raționale definite prin:

$$f(x) = \frac{1}{x-1};\quad g(x) = \frac{x^2-1}{x^2-1};\quad h(x) = \frac{x+3}{x(x^2+4)}?$$

2° Să se formuleze, în cazul general, rezultatul cu privire la domeniul de definiție al unei funcții raționale.

1.36 Să se studieze din punct de vedere al creşterii, descreşterii, constanţei, monotoniei, funcţiile definite de următoarele relaţii:

1° $f(x) = x^2 + x + 1$ pentru $x > 0$.

2° $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ pentru $x > 0$.

3° $h(x) = x + \sqrt{x^2}$ pentru $x \in \mathbf{R}$

4° $k(x) = \sqrt{x}$ pentru $x > 0$.

1.37 Ştiind că funcţiile f şi g sînt crescătoare pe intervalul $]a, b[$, ce se poate spune despre funcţia h definită pentru $a < x < b$ prin:

$$h(x) = f(x) + g(x)\,?$$

Aplicaţie. $y = x + \sqrt{x}$ pentru $x > 0$.

1.38 Se ştie că pe intervalul $]a, b[$, f este o funcţie pozitivă şi crescătoare şi g o funcţie *strict* pozitivă şi descrescătoare. Să se demonstreze că funcţia, definită pentru $a < x < b$ prin:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

este crescătoare.

Aplicaţie. $0 < x < 5$ şi $h(x) = \dfrac{x+1}{5-x}$.

1.39 Se consideră mulţimea $\mathfrak{L}$ a funcţiilor f_a definite prin $f_a(x) = ax$, unde a este un număr real oarecare: $\mathfrak{L} = \{f_a;\ a \in \mathbf{R}\}$.
a) Adunarea funcţiilor este o operaţie internă pe $\mathfrak{L}$?
b) Să se studieze structura conferită mulţimii $\mathfrak{L}$ de adunarea funcţiilor.

1.40 Se consideră mulţimea $\mathfrak{L}$ a funcţiilor f definite prin:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,$$

numite funcţii polinomiale, unde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt numere reale şi n un număr natural.
a) Adunarea funcţiilor este o operaţie internă pe $\mathfrak{L}$?
b) Înmulţirea funcţiilor este o operaţie internă pe $\mathfrak{L}$?
c) Să se studieze structura conferită mulţimii $\mathfrak{L}$ de adunarea şi înmulţirea funcţiilor.
d) Să se studieze structura conferită mulţimii $\mathfrak{L}$ de adunarea funcţiilor şi înmulţirea lor printr-un număr real.

1.41 Fie E o submulţime din $\mathbf{R}$. Să se studieze structura conferită mulţimii $\mathcal{A}(E, \mathbf{R})$ a aplicaţiilor de la E la $\mathbf{R}$ de adunarea funcţiilor şi înmulţirea lor printr-un număr real.

1.42 Toate funcţiile considerate au ca domeniu de definiţie mulţimea $[-1, +1]$. Să se examineze dacă familiile următoare formează sau nu un spaţiu vectorial:
1° Mulţimea P a funcţiilor pare.
2° Mulţimea I a funcţiilor impare.
3° Mulţimea A a funcţiilor f astfel că: $f(-1) = f(1) = 0$.
4° Mulţimea B a funcţiilor g astfel că: $g(-1) = g(1) = 1$.
5° Mulţimea C a funcţiilor h astfel că: $h(-1) = 3h(1)$.
6° Mulţimea funcţiilor care nu iau decît valori pozitive.

1.43 Se consideră funcţia nulă $\odot$:

$$\forall_R\, x\ \odot(x) = 0$$

şi funcţiile f şi g:

$$f = [x \to x + |x|],$$

$$g = [x \to -x + |x|].$$

1° Să se demonstreze că $fg = \odot$.
2° Să se dea exemple analoage.
3° Să se deducă că mulţimea $\mathcal{A}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, înzestrată cu adunarea şi înmulţirea funcţiilor, nu este un corp. Să se demonstreze că este vorba de un inel.

1.44 1° Să se demonstreze pe exemple că operaţia de compunere $f \circ g$ a două funcţii nu este, în general, distributivă faţă de adunare:

$$f \circ (g + h) \neq f \circ g + f \circ h.$$

2° Să se demonstreze că există distributivitate în mulţimea $\mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ a funcţiilor liniare.
3° Să se deducă că $\mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ înzestrată cu adunarea şi compunerea funcţiilor este un inel. Este unitar acest inel? Este corp?

1.3 ŞIRURI NUMERICE

1.3.1 Definiţii

DEFINIŢIA 1 / O aplicaţie de la N la R este un şir numeric.

Observaţii. — 1 O aplicaţie de la $\mathbf{N}^*$ la $\mathbf{R}$ este de asemenea numită *şir numeric.*
2 Pentru orice funcţie f de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$, astfel că $\mathbf{N}$ este inclus în domeniul de definiţie al lui f, funcţia $f/\mathbf{N}$ este un şir numeric.
■ Un şir numeric fiind, în particular, o funcţie numerică de o variabilă reală, definiţiile de la secţiunea 1.2 se aplică ori de cîte ori este posibil. La fel se definesc şirurile periodice, majorate, minorate, mărginite, pozitive, negative, crescătoare, descrescătoare, monotone.
De asemenea la fel se defineşte suma, produsul, diferenţa dintre două şiruri, ca şi raportul dintre două şiruri, dintre care cel de al doilea nu este nul şi produsul unui şir printr-un număr real.
Observaţie. — Mulţimea şirurilor reale este un spaţiu vectorial pe $\mathbf{R}$ (a se vedea exerciţiul nr. 1.45).
■ Să considerăm un şir σ. Imaginea oricărui număr întreg natural n se notează $\sigma(n)$. Se obişnuieşte să se noteze această imagine cu σ_n; şirul σ se notează atunci (σ_n). Aceste notaţii evită reamintirea de fiecare dată că mulţimea de definiţie a lui σ este N. σ_n este numit *termen de rang n* al şirului σ.

DEFINIŢIA 2 / Fie un şir σ şi fie E_n mulţimea $\{0, 1, \ldots, n - 1\}$ a primelor n numere naturale. Restricţia de la σ la E_n se numeşte şir finit cu n termeni.

Observaţii. — 1 Se consideră uneori restricţia lui σ la mulţimea $F_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Această restricţie ia de asemenea numele de *şir finit.*
2 Indicarea unui şir finit σ/E_n echivalează cu indicarea unui element al produsului cartezian $\mathbf{R}^n$.

Exemple. — I. Fie şirul $(u_n) = \left(2 + \frac{1}{n}\right)$ şi fie şirul $(v_n) = \left(3 - \frac{1}{n}\right)$. ($(u_n)$ şi (v_n)) sînt aplicaţii de la $\mathbf{N}^*$ la $\mathbf{R}$.)

Şirul $(w_n) = (u_n + v_n)$ este definit prin:

$$w_n = u_n + v_n = 5.$$

Toţi termenii şirului (w_n) sînt egali.
(Se spune că şirul (w_n) este *staţionar* începînd cu rangul 1.)

II. Fie şirul $(u_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Avem: $(\lambda u_n) = \left(\frac{\lambda}{n^2}\right)$, $\left(\frac{1}{u_n}\right) = n^2$.

III. Şirul $(u_n) = (-1)^n$ este periodic şi mărginit.

IV. Şirul $(u_n) = \frac{1}{n}$ este pozitiv şi descrescător.

1.3.2 Şiruri definite prin recurenţă

Se întîmplă adesea că, pentru un şir σ, nu se dă termenul σ_n prin expresia sa în funcţie de n, ci se dă posibilitatea de a calcula σ_n în funcţie de unii din termenii precedenţi $(\sigma_{n-1}, \ldots, \sigma_{n-k})$. În acest caz este clar că dacă se cunosc primii k termeni $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$, se poate determina din aproape în aproape orice termen σ_n. Se spune atunci că şirul (σ_n) este definit printr-o recurenţă cu k termeni.
În practică, nu se întîlnesc decît şiruri definite prin relaţii de recurenţă cu un termen sau cu doi termeni.
În paragrafele următoare vom studia exemple importante de acest fel.
Observaţie. — Să notăm că se pot defini şiruri multiple ca aplicaţii de la $\mathbf{N}^p$ la $\mathbf{R}$. Astfel de şiruri se pot de asemenea defini prin recurenţă.

Exemple. I. $u_n = nu_{n-1}$, $u_1 = 1$.
Şirul (u_n) este atunci definit prin indicarea termenului său de rang n, uşor de calculat:

$$u_n = n!.$$

II. Şirul dublu care defineşte pe C_n^p:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

satisface în plus relaţia de recurenţă:

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \quad (\text{cu } \forall_N\, n\ C_n^n = 1).$$

1.3.3 Progresii aritmetice

DEFINIŢIA 1 / Se numeşte progresie aritmetică de raţie r un şir numeric (u_n) care satisface relaţia de recurenţă:

$$u_n = u_{n-1} + r,$$

unde r este un număr real.

DEFINIȚIA / O progresie aritmetică finită este restricția la mulțimea $\{1, \ldots, k\}$
2 a unei progresii aritmetice. Termenii u_1 și u_k se numesc termeni extremi.

Observații. — **1** O progresie aritmetică poate fi numită *șir aritmetic*.
2 Pentru a da o progresie aritmetică finită (sau limitată), se poate da: primul termen, rația și numărul termenilor progresiei.
3 Fie $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ o progresie aritmetică finită de rație r.
Șirul finit $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, definit prin $v_i = u_{k-i+1}$, este de asemenea o progresie aritmetică finită, dar rația ei este $-r$.

Exemple. **I.** (1, 2, 3, 4, 5) este o progresie aritmetică finită cu cinci termeni a cărui rație este 1; (5, 4, 3, 2, 1) este o progresie aritmetică finită cu cinci termeni și cu rația -1.
II. (5, 3, 1, -1, -3, -5, -7) este o progresie aritmetică finită cu șapte termeni a cărei rație este -2.

CALCULUL TERMENULUI DE RANGUL n

Fie (u_n) o progresie aritmetică de rație r. Să evaluăm pe u_n.
Fie u_1 primul termen.
Al doilea termen, u_2, este egal, prin definiție, cu: $u_1 + r$.
Al treilea termen, u_3, este egal, prin definiție, cu: $u_2 + r$.
Avem deci:

$$u_1 = u_1,$$

$$u_2 = u_1 + r,$$

$$u_3 = u_2 + r = u_1 + r + r = u_1 + 2r.$$

La fel:

$$u_4 = u_3 + r = u_1 + 2r + r = u_1 + 3r.$$

Raționînd prin inducție completă, să admitem că avem:

$$u_p = u_1 + (p-1)r;$$

de aci se deduce:

$$u_{p+1} = u_p + r = u_1 + (p-1)r + r,$$

$$u_{p+1} = u_1 + pr.$$

Formula este generală.

Termenul de rangul n al unei progresii aritmetice de rație r este dat de formula:

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$$

Exemplu. Să se calculeze al n-lea număr impar.
Șirul numerelor impare este o progresie aritmetică de rație 2:

$$(1, 3, 5, 7, \ldots);$$

$$u_1 = 1,\ r = 2;\ \text{deci: } u_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1.$$

Al 100-lea număr impar este 199.

Observaţie. Dacă primul termen al progresiei aritmetice este u_0, avem:

$$u_n = u_0 + nr.$$

u_n este atunci al $(n+1)$-lea termen al progresiei aritmetice.

1.3.4. Proprietăţi ale progresiilor aritmetice finite

■ Să considerăm o progresie aritmetică finită $(u_1, \ldots, u_k)$ cu k termeni şi cu raţia r. Fie progresia aritmetică finită cu k termeni $(v_1, \ldots, v_k)$ definită prin:

$$v_i = u_{k-i+1},$$

$$(v_1, \ldots, v_k) = (u_k, \ldots, u_1).$$

În conformitate cu nr. 1.3.3, avem:

$$u_n = u_1 + (n-1)r.$$

Fie şirul: $(w_n) = (u_n + v_n), \quad (n \in \{1, \ldots, k\})$;

avem: $w_n = u_n + v_n = u_n + u_{k-n+1} = u_1 + (n-1)r + u_1 + (k-n+1-$

$$-1)r = u_1 + u_1 + (k-1)r = u_1 + u_k.$$

Se constată că: $n-1$ termeni ai progresiei aritmetice preced u_n;
$n-1$ termeni ai progresiei aritmetice urmează după u_{k-n+1};
termenii u_n şi u_{k-n+1} se numesc termeni *echidistanţi* de termenii extremi.
Se poate enunţa:

TEOREMA / Într-o progresie aritmetică finită suma a doi termeni echidistanţi de termenii extremi este egală cu suma termenilor extremi.

Exemplu. Fie progresia aritmetică finită de raţie 3:

$$(-5, -2, 1, 4, 7, 10, 13).$$

Avem: $-5 + 13 = -2 + 10 = 1 + 7 = 8.$

Observaţie. — Dacă o progresie aritmetică finită are un număr impar de termeni, există un termen mijlociu. Dublul acestui termen este egal cu suma termenilor extremi.

■ Teorema următoare este evidentă (Exerciţiul nr. 1.50).

TEOREMĂ / O progresie aritmetică cu termeni numere reale este un şir monoton. Ea este crescătoare dacă raţia este pozitivă. Este descrescătoare dacă raţia este negativă.

1.3.5. Suma termenilor unei progresii aritmetice finite

Fie progresia aritmetică finită de rație r:

$$(u_1, \ldots, u_k).$$

Fie şirul finit (v_i) considerat la nr. 1.3.4:

$$v_i = u_{k-i+1},$$
$$(v_1, \ldots, v_k) = (u_k, \ldots, u_1).$$

Avem evident:

$$S = \sum_{i=1}^{k} u_i = u_1 + \ldots + u_k = \sum_{i=1}^{k} v_{k-i+1} = \sum_{j=1}^{k} v_j.$$

Să considerăm şirul $(w_n) = (u_n + v_n)$.
După 1.3.4:

$$w_n = 2u_1 + (n-1)r = u_1 + u_k,$$

fie:

$$\begin{aligned}\Sigma &= w_1 + \ldots + w_k = u_1 + v_1 + \ldots + u_k + v_k = \\ &= u_1 + u_2 + \ldots + u_k + v_1 + v_2 + \ldots + v_k = \\ &= S + S = \\ &= 2S.\end{aligned}$$

Pe de altă parte, fiindcă:

$$w_1 = w_2 = \ldots = w_k = u_1 + u_k,$$

avem:

$$\Sigma = k(u_1 + u_k) = 2S.$$

Se deduce:

$$S = \frac{k}{2}(u_1 + u_k),$$

sau încă:

$$\boxed{S = \frac{k}{2}[2u_1 + (k-1)r]}$$

Exemple. **I.** *Suma primelor n numere întregi.*
Aceste n numere formează progresia aritmetică:

$$(1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1, n).$$

Avem,

$$u_1 = 1, \qquad u_n = n.$$

De unde: $S = \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$.

II. *Suma primelor n numere impare.*
Aceste n numere formează progresia aritmetică:

$$(1, 3, 5, \ldots, 2n - 3, 2n - 1).$$

Avem deci,

$$u_1 = 1, \qquad u_n = 2n - 1.$$

De unde:

$$S = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2.$$

■ SUMA PĂTRATELOR TERMENILOR UNEI PROGRESII ARITMETICE FINITE

Fie:

$$(a, b, c, \ldots., k, l)$$

o progresie aritmetică cu n termeni şi cu raţia r. Ne propunem să calculăm suma:

$$S = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + k^2 + l^2.$$

Se foloseşte relaţia: $(x + r)^3 = x^3 + 3rx^2 + 3r^2x + r^3$,
în care se înlocuieşte succesiv x prin $a, b, \ldots, l$.
Se obţine astfel:

$$\begin{aligned} (a + r)^3 &= a^3 + 3ra^2 + 3r^2a + r^3, \\ (b + r)^3 &= b^3 + 3rb^2 + 3r^2b + r^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (l + r)^3 &= l^3 + 3rl^2 + 3r^2l + r^3. \end{aligned}$$

Dacă se adună membru cu membru şi se suprimă termenii egali $(a + r)^3$ şi b^3, $(b + r)^3$ şi c^3, ..., se obţine egalitatea:

$$(l + r)^3 = a^3 + 3rS + 3r^2(a + b + \ldots + l) + nr^3.$$

Această egalitate determină pe S pentru că suma $a + b + \ldots. + l$ este cunoscută.

Exemplu. Să se calculeze suma pătratelor primelor n numere întregi pozitive.

Se foloseşte relaţia:

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1,$$

în care se înlocuieşte x, succesiv, prin $1, 2, 3, \ldots, n$.
Se obţine astfel:

$$\begin{aligned} (1 + 1)^3 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1, \\ (2 + 1)^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n + 1)^3 &= n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1. \end{aligned}$$

Dacă adunăm membru cu membru, se obţine:

$$(n + 1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + \ldots + n) + n \tag{1}$$

Să punem:

$$S = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

S-a văzut (nr. 1.3.5, Exemplul I): $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

Egalitatea (1) devine deci:

$$(n+1)^3 = n + 1 + 3S + \frac{3n(n+1)}{2},$$

sau:
$$6S = (n+1)\,[2(n+1)^2 - 3n - 2],$$
$$6S = (n+1)(2n^2 + n).$$

Se obține: $S = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.3.6. Progresii geometrice

DEFINIȚIA 1 / Se numește progresie geometrică de rație q un șir numeric (u_n) care satisface relația de recurență

$$u_n = q \cdot u_{n-1},$$

unde q este un număr real nenul.

DEFINIȚIA 2 / O progresie geometrică finită este restricția la mulțimea $\{1, \ldots, k\}$ a unei progresii geometrice. Termenii u_1 și u_k se numesc termeni extremi.

Observații. — 1 O progresie geometrică poate fi numită *șir geometric.*
2 Pentru a da o progresie geometrică finită (sau limitată), se poate da primul termen, rația și numărul termenilor progresiei.
3 Fie $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ o progresie geometrică finită de rație q.
Progresia geometrică finită $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, definită prin $v_i = u_{k-i+1}$, este de asemenea o progresie geometrică finită, dar de rație $\dfrac{1}{q}$.

Exemple. I. (5, 10, 20, 40, 80) este o progresie geometrică finită cu cinci termeni care are rația 2.
II. (— 3,9, — 27, 81) este o progresie geometrică finită cu patru termeni, cu rație — 3.
III. (81, — 27, 9, — 3, 1) este o progresie geometrică finită, cu rația $-\dfrac{1}{3}$.

■ CALCULUL TERMENULUI DE RANGUL n

Fie (u_n) o progresie geometrică de rație q. Să evaluăm pe u_n.
Fie u_1 primul termen.

Al doilea termen u_2 este egal cu: $u_1 \times q = u_1q$.
Al treilea termen u_3 este egal cu: $u_2 \times q = u_1q^2$.
La fel: $u_4 = u_3q = u_1q^3$.
Raționînd prin inducție completă, dacă: $u_n = u_1q^{n-1}$,
avem: $u_{n+1} = u_n \times q = u_1q^n$.

Formula este generală.

Termenul de rangul n al unei progresii geometrice de rație q este dat de formula:

$$\boxed{u_n = u_1 q^{n-1}}$$

Observație. — Dacă primul termen al progresiei geometrice este u_0, avem

$$u^n = u_0 q^n;$$

u_n este atunci al $(n + 1)$-lea termen al progresiei geometrice

1.3.7 Proprietățile progresiilor geometrice finite

■ Fie $(u_1, \ldots, u_k)$ o progresie geometrică finită cu k termeni și cu rația q. Fie progresia geometrică finită cu k termeni $(v_1, \ldots, v_k)$ definită prin:

$$v_i = u_{k-i+1}$$

$$(v_1, \ldots, v_k) = (u_k, \ldots, u_1).$$

După nr. 1.3.6:

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

Fie șirul: $(w_n) = (u_n v_n)$, $(n \in \{1, \ldots, k\})$;

avem: $w_n = u_n v_n = u_n u_{k-n+1} = u_1 q^{n-1} \times u_1 q^{k-n+1-1} = u_1 \times u_1 q^{k-1} = u_1 u_k$.

Ca și pentru progresiile aritmetice finite, se spune că termenii u_n și u_{k-n+1} sînt *echidistanți* de termenii extremi. Se poate enunța:

TEOREMA / Într-o progresie geometrică finită produsul a doi termeni echidistanți de termenii extremi este egal cu produsul termenilor extremi.

Exemplu. Fie progresia geometrică finită de rație 3:

$$(1, 3, 9, 27, 81, 243).$$

Avem:

$$1 \times 243 = 3 \times 81 = 9 \times 27.$$

Observație. — Dacă o progresie geometrică finită are un număr impar de termeni, există un termen mijlociu. Pătratul acestui termen este egal cu produsul termenilor extre i.

■ Teorema următoare exprimă un rezultat evident (a se vedea Exercițiul nr. 1.66):

TEOREMĂ / 1° O progresie geometrică cu termeni numere reale, cu rația pozitivă, este un șir monoton.
Ea este crescătoare dacă, termenii fiind pozitivi, rația este mai mare ca 1 sau, dacă, termenii fiind negativi, rația este mai mică decît 1. Este descrescătoare în celelalte cazuri.
2° O progresie geometrică cu termeni numere reale, cu rația negativă, nu este monotonă. Ea se numește alternantă.

Exemple.

$(1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1})$;	progresie *crescătoare*	$(q = 2)$;
$\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{3^{n-1}}\right)$;	progresie *descrescătoare*	$\left(q = \frac{1}{3}\right)$;
$(-2, -6, -18, -54, \dots, -2 \times 3^{n-1})$;	progresie *descrescătoare*	$(q = 3)$;
$\left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, -\frac{1}{2^{n-1}}\right)$;	progresie *crescătoare*	$\left(q = \frac{1}{2}\right)$;
$(1, -2, +4, -8, \dots, (-2)^{n-1})$;	progresie *alternantă*	$(q = -2)$.

1.3.8 Suma termenilor unei progresii geometrice finite

Fie o progresie geometrică finită de rație q:

$$(u_n) = (u_1, \dots, u_k).$$

Şirul (qu_n) este şirul:

$$(qu_n) = (qu_1, \dots, qu_k) = (u_2, \dots, u_k, qu_k).$$

Fie:

$$S = u_1 + \dots + u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k,$$

$$qS = qu_1 + \dots + qu_k = u_2 + \dots + u_k + qu_k.$$

Avem atunci:

$$qS - S = qu_k - u_1;$$

Dacă q este diferit de 1, se deduce:

$$S = \frac{qu_k - u_1}{q - 1}.$$

Cum $u_k = u_1 q^{k-1}$, rezultă:

$$S = \frac{u_1 q^k - u_1}{q - 1} = u_1 \frac{q^k - 1}{q - 1},$$

adică:

$$\boxed{S = u_1 \frac{q^k - 1}{q - 1}}.$$

Dacă $q = 1$, avem $u_k = u_n = u_1$ şi prin urmare:

$$S = ku_1.$$

Exemple. **I.** $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

II. $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$.

PROBLEME

1.45 Să se demonstreze că mulţimea şirurilor de numere reale este un spaţiu vectorial pe **R**.

1.46 Se consideră mulţimea E a tuturor şirurilor numerice reale care satisfac relaţia de recurenţă:

$$u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}.$$

1° Să se demonstreze că E este un spaţiu vectorial pe **R**.
2° Să se demonstreze că un şir din E este determinat prin indicarea primilor săi doi termeni

$$u_0 \text{ şi } u_1.$$

Să se deducă dimensiunea lui E.
3° Să se demonstreze că E conţine două progresii geometrice liniar independente.
4° Să se calculeze termenul general u_n al şirului din mulţimea E ai cărui primii doi termeni sînt:

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = 1.$$

1.47 Să se adapteze studiul de la exerciţiul nr. 1.46 la mulţimea F a şirurilor numerice reale care satisfac relaţia de recurenţă:

$$u_n = 4(u_{n-1} - u_{n-2}).$$

(Se va demonstra că toate progresiile geometrice din F au aceeaşi raţie q şi că şirul cu termenul general nq^{n-1} aparţine de asemenea lui F.)

1.48 Mulţimea $\mathcal{A}_r$ a progresiilor aritmetice de raţie r este un spaţiu vectorial pe **R**?

1.49 Să se studieze structura mulţimii $\mathcal{G}_q$ a progresiilor geometrice de raţie q.

1.50 Să se demonstreze că o progresie aritmetică reală este monotonă. În ce caz este: crescătoare? descrescătoare?

1.51 Problemă rezolvată. — *Suma a trei numere în progresie aritmetică este* 30; *produsul lor este egal cu* 910. *Care sînt aceste numere?*
Fie: $a - r, a, a + r$ numerele căutate.

Trebuie să avem:

$$a - r + a + a + r = 30, \tag{1}$$

$$(a - r)a(a + r) = 910, \tag{2}$$

sau:

$$3a = 30, \qquad a = 10,$$

$$10\,(100 - r^2) = 910, \quad 100 - r^2 = 91;$$

deci:

$$r^2 = 9.$$

Soluţia $r = -3$ dă aceleaşi numere ca soluţia $r = 3$, dar în ordine inversă.
Numerele sînt: 7, 10, 13.

1.52 Problemă rezolvată. — *Se dau două numere a şi b. Să se găsească n numere care, înserate între a şi b, formează o progresie aritmetică cu $n + 2$ termeni.*
Numărul b este termenul de rangul $n + 2$ al unei progresii aritmetice care începe cu a.
Dacă r este raţia necunoscută, avem deci:

$$b = a + (n + 1)r.$$

Se deduce:

$$r = \frac{b - a}{n + 1},$$

iar cunoaşterea lui r rezolvă problema.
Se spune că *s-au înserat n medii aritmetice între a şi b.*
Dacă n este 1, se găseşte:

$$r = \frac{b - a}{2},$$

şi progresia este:

$$a, \frac{a+b}{2}, b$$

$\frac{a+b}{2}$ este *media aritmetică* a numerelor a şi b.

Se consideră o progresie aritmetică cu primul termen u_1, al n-lea termen u_n, raţia r şi suma S:

1.53 Să se calculeze r şi S cunoscînd: $u_1 = 95$, $n = 19$, $u_n = 5$.

1.54 Să se calculeze r şi n cunoscînd: $u_1 = 3$, $u_n = 19$, $S = 99$.

1.55 Să se calculeze u_1 şi r cunoscînd: $u_n = 199$, $n = 100$, $S = 10^4$.

1.56 Să se calculeze u_n şi n cunoscînd: $u_1 = 6$, $r = 7$, $S = 41\,094$.

1.57 Să se calculeze u_1 şi n cunoscînd: $u_n = 18$, $r = 2$, $S = 88$.

1.58 Să se determine o progresie aritmetică cu şapte termeni, ştiind că suma lor este 77 şi că suma pătratelor lor este 959.

1.59 Să se determine o progresie aritmetică cu patru termeni, ştiind că raţia este 4 şi că produsul termenilor este 585.

1.60 Să se determine progresiile aritmetice care au raţia un număr întreg şi care conţin numerele 7, 67 şi 97.

1.61 Să se calculeze suma primilor patruzeci multipli ai lui 3.

1.62 De cîte ori sună o pendulă în 24 ore dacă ea nu sună decît la ore?

1.63 Să se scrie primii zece termeni ai şirului definit prin egalitatea:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1.$$

1.64 Să se demonstreze că şirurile:

$$\left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots\right)$$

$$(-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots)$$

sînt monotone. Să se spună dacă sînt crescătoare sau descrescătoare.

1.65 Patru numere formează o progresie aritmetică. Se notează cu S suma primelor două numere şi cu P produsul celorlalte două. Să se calculeze cei patru termeni ai progresiei aritmetice cunoscînd pe S şi P. Să se discute.

Aplicaţii: $S = 60$, $P = 75$;

$S = 20$, $P = -40$;

$S = 30$, $P = -15$.

1.66 În ce caz o progresie geometrică de raţie q este: crescătoare? descrescătoare? monotonă?

1.67 Problemă rezolvată. — *Se dau două numere pozitive a şi b. Să se găsească n numere pozitive care, înserate între a şi b, formează cu a şi b o progresie geometrică cu $n+2$ termeni.*

Numărul b este termenul de rangul $n+2$ al unei progresii geometrice care începe cu a.

Dacă q este raţia necunoscută, avem deci: $b = aq^{n+1}$.

Se deduce: $q^{n+1} = \frac{b}{a}$ şi, prin urmare: $q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$.

Se mai spune că s-au *înserat n medii geometrice între a şi b*.

Dacă n este 1, se găseşte:

$$q = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

şi progresia este:

$$a, \sqrt{ab}, b.$$

$\sqrt{ab}$ este *media geometrică* a numerelor a şi b.

1.68 Să se găsească trei numere în progresie geometrică cunoscînd suma lor 65 şi produsul lor 3 375.

1.69 Ce număr trebuie adăugat numerelor 3,24 şi 94 pentru a obţine trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice?

1.70 Se povesteşte că inventatorul jocului de şah a cerut să i se dea ca recompensă un bob de grîu pentru primul pătrăţel, două boabe pentru al doilea, patru boabe de grîu pentru al treilea şi aşa mai departe, dublînd pînă la cel de al 64-lea pătrăţel.
1° Cîte boabe de grîu trebuia să i se dea?
2° Ce suprafaţă ar fi trebuit să se însămînţeze pentru a se recolta acest grîu, ştiind că un hectar produce 25 hl şi că un hectolitru conţine aproximativ 2 milioane boabe de grîu?
(Se va lua $2^{10} \approx 1\,000$.)

Se consideră o progresie geometrică cu primul termen u_1, al n-lea termen u_n, raţia q, suma S:

1.71 Să se calculeze u_n şi S cunoscînd: $u_1 = 2$, $q = 3$, $n = 5$.

1.72 Să se calculeze q şi S cunoscînd: $u_1 = 5$, $n = 6$, $u_n = 160$.

1.73 Să se calculeze u_1 şi S cunoscînd: $q = 3$, $n = 4$, $u_n = 54$.

1.74 Să se calculeze u_1 şi u_n cunoscînd: $q = \frac{1}{2}$, $n = 6$, $S = 63$.

*

1.75 Trei numere a, b, c sînt în progresie geometrică. Se dă:

$$S = a + b + c \quad \text{şi} \quad d = c - a.$$

Să se calculeze a, b, c.

Exemplu: $S = 312$; $d = 192$.

1.76 O progresie geometrică are cinci termeni. Se dă suma S' a termenilor de rang impar şi suma S'' a termenilor de rang par. Să se determine această progresie geometrică.

Exemplu: $S' = 21$; $S'' = 10$.

1.77 Se consideră şirul definit prin:

$$u_0 = 2, \qquad 2u_n = u_{n-1} + 1.$$

1° Să se demonstreze că şirul $(u_n - 1)$ este o progresie geometrică.
2° Să se calculeze u_n în funcţie de n.
3° Să se calculeze suma:

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

1.78 Să se calculeze a, b, c ştiind că sînt în progresie aritmetică şi că:

$$a + b + c = 171,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 22\,869.$$

1.79 Să se găsească patru numere în progresie aritmetică cunoscînd suma lor S şi suma pătratelor lor c^2.

Exemplu: $S = 22$; $c^2 = 166$.

1.80 Să se calculeze suma cuburilor primelor n numere întregi, apoi suma pătratelor primelor n numere impare.

1.81 (x, y, z) fiind o progresie aritmetică, să se verifice că şi expresia de mai jos este tot o progresie aritmetică:

$$x^2 + xy + y^2;\ y^2 + yz + z^2;\ z^2 + zx + x^2.$$

1.82 Să se determine o progresie aritmetică cu primul termen a astfel că suma primilor ei n termeni este $an^2 + bn$, oricare ar fi n (a şi b sînt numere date).

1.83 Să se calculeze următoarele sume:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1);$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2);$$

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \ldots + (2n-1)(2n+1);$$

$$2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + \ldots + 2n(2n+2).$$

(Se va considera suma anumitor progresii geometrice finite, de raţie x, apoi se va deriva funcţia obţinută.)

1.84 Să se găsească numere impare consecutive de sumă dată S.
Exemplu: $S = 1\,260$.

1.85 Să se calculeze următoarele sume:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \ldots + (2n+1)(2n-1)(2n+3);$$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n(3n+1);$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}.$$

1.86 Să se demonstreze că, dacă (a, b, c) este o progresie geometrică, avem:

$$(ab + bc + ca)^3 = abc(a + b + c)^3.$$

1.87 Se scrie şirul numerelor impare în felul următor:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 5 & & \\ & 7 & & 9 & & 11 & \\ 13 & & 15 & & 17 & & 19 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

1° Să se calculeze termenii extremi de pe a n-a linie.
2° Să se deducă suma cuburilor primelor n numere întregi pozitive.

1.88 1° Să se calculeze suma: $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.
2° Aceeaşi chestiune pentru suma:

$$1 + 3x + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}.$$

(Să se observe că: $\dfrac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.)

1.89 Se consideră şirul definit prin condiţiile:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

1° Să se scrie primii zece termeni ai acestui şir.
2° Să se demonstreze că şirul este crescător şi nemajorat.
3° Să se demonstreze că avem:

$$u_n u_{n-2} - u_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}.$$

1.90 Se consideră şirul definit prin:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

1° Să se demonstreze că şirul este descrescător şi minorat.
2° Scriind:

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

să se calculeze suma:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

1.91 Fie (a, b, c, d, e) o progresie geometrică. Raţia este un număr întreg q, prim cu numărul întreg a şi mai mare ca 1. Să se determine progresia astfel ca:

$$6a^2 = e - b.$$

1.92 Se consideră o progresie geometrică de raţie x, cu termeni pozitivi. u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 sînt cinci termeni consecutivi.
1° Punîndu-se $u_3 = a$, să se calculeze în funcţie de a şi de x, sumele:

$$S = u_1 + u_5; \qquad s = u_2 + u_4.$$

2° Să se demonstreze că: $s_2 = aS + 2a^2$.
3° Să se calculeze a şi x pentru ca:

$$s = 20, \qquad S = \frac{164}{3}.$$

1.93 Se spune că numerele sînt în progresie armonică dacă inversele lor sînt în progresie aritmetică.
Ştiind că: a, b, c sînt în progresie aritmetică,
b, c, d sînt în progresie geometrică,
c, d, e sînt în progresie armonică,
ce se poate spune despre numerele a, c, e?

1.94 Trei numere sînt în progresie aritmetică şi altele trei în progresie geometrică. Adunînd termenii de acelaşi rang se obţine respectiv:

$$85, \ 76 \text{ şi } 84.$$

Suma termenilor progresiei aritmetice este 126.
Să se calculeze cele şase numere necunoscute.
1.95 1° Să se demonstreze că:

$$(1, -2, -5, -8)$$

este o progresie aritmetică şi că:

$$(1, -2, +4, -8)$$

este o progresie geometrică.
(Se va observa că 1, -2 şi -8 ocupă acelaşi rang în cele două progresii.)
2° Să se demonstreze că dacă a, b şi c sînt termeni de rangurile m, n, şi p în acelaşi timp într-o anumită progresie aritmetică şi într-o anumită progresie geometrică cu primul termen 1, atunci:

$$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = 1.$$

1.96 1° Ştiind că suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice este:

$$S_n = 3n^2 + 5n,$$

să se calculeze primul termen, raţia şi al n-lea termen.
2° Se poate alege n pentru ca:

$$400 < S_n < 500,$$

sau:

$$1\,400 < S_n < 1\,500,$$

sau:

$$1\,500 < S_n < 1\,700?$$

3° Să se calculeze suma T_n a pătratelor primilor n termeni ai progresiei aritmetice.
Se poate reconstitui o progresie aritmetică cunoscînd suma T_n a pătratelor primilor n termeni:

$$T_n = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Ce condiții trebuie să verifice pentru aceasta coeficienții a, b, c, d?
Să se verifice afirmația pe exemplul de mai sus și să se aplice pe noul exemplu:

$$T_n = \frac{4}{3}n^3 - 4n^2 + \frac{11}{3}n.$$

1.4 IMAGINI ALE SUBMULȚIMILOR DIN R

1.4.1 Definiții

Să considerăm o aplicație f de la o mulțime E la o mulțime F (care pot fi amîndouă submulțimi din $\mathbf{R}$). Fiind dată o submulțime A din E și o submulțime B din F, vom da următoarele definiții:

DEFINIȚIA 1 / **Imaginea directă prin f a submulțimii A din E este mulțimea $f[A]$ a imaginilor prin f a elementelor din A:**

$$f[A] = \{y\,;\ \exists_A x\,;\ f(x) = y\}.$$

$f[A]$ este o submulțime a mulțimii de sosire F.

DEFINIȚIA 2 / **Imaginea inversă prin f a submulțimii B din F este mulțimea $f^{-1}[B]$ a elementelor din E a căror imagine prin f este un element din B:**

$$f^{-1}[B] = \{x\,;\ f(x) \in B\}.$$

$f^{-1}[B]$ este o submulțime a mulțimii de plecare E.

Observații. — 1 $\qquad f[\emptyset] = \emptyset.$

2 Există aplicații f astfel că există o mulțime B nevidă în așa fel că:

$$f^{-1}[B] = \emptyset.$$

(De exemplu: $f = [x \mapsto \sin x]$ și $B =]2,4]$.)
3 Exercițiile cu numere de la 1.97 la 1.104 stabilesc un anumit număr de proprietăți importante ale acestor imagini directe și inverse, precum și o caracterizare posibilă, prin intermediul lor, a proprietăților esențiale ale aplicațiilor f (injecție, surjecție, bijecție).
4 Dacă f este o funcție al cărei domeniu de definiție este D, pentru o mulțime dată A de numere reale, se pune:

$$f[A] = f[A \cap D].$$

Exemple. **I.** $E = \mathbf{R}^*$, $F = \mathbf{R}$, $f = \left[x \to \dfrac{1}{x}\right]$.

$A =]0, +\infty[$, $f[A] =]0, +\infty[$;

$B = [0, +\infty[$, $f^{-1}[B] =]0, +\infty[$;

$B = \{0\}$ $f^{-1}[B] = \emptyset$;

$A = \emptyset$, $f[A] = \emptyset$

$A =]-1, 0[\cup]0, +1[$, $f[A] =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$;

$B = \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right]$, $f^{-1}[B] = \left[\dfrac{3}{2}, 3\right]$ (*fig.* 1);

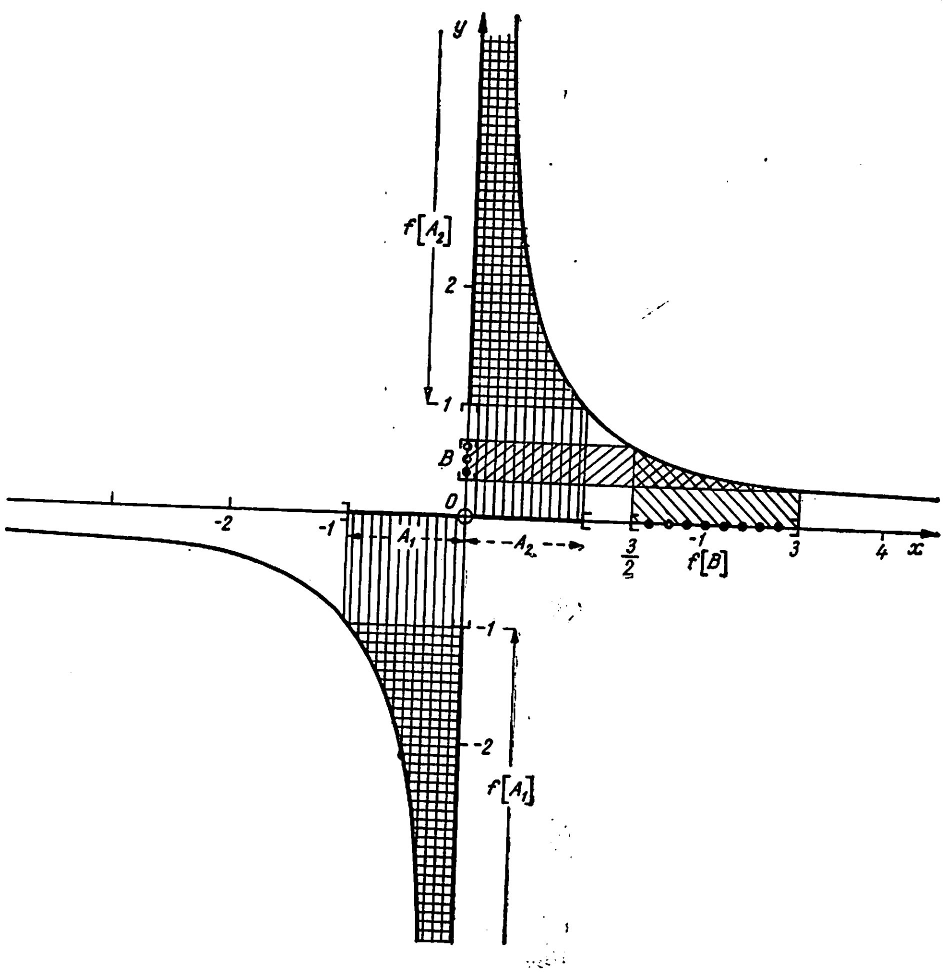


Fig. 1

II.	$f = \chi_Q$	$E = F = \mathbf{R}$.	
	$A = \{\sqrt{2}\}$,	$f[A] = \{0\}$.	
	$B = [2,5[$,	$f^{-1}[B] = \emptyset$;	
	$A =]-1,4[$,	$f[A] = \{0,1\}$;	
	$B =]0,5[$,	$f^{-1}[B] = Q$;	
	$B = \{0\}$,	$f^{-1}[B] = R - Q$;	
	$B = \mathbf{R}$,	$f^{-1}[B] = R$;	
	$B = \{0,1\}$,	$f^{-1}[B] = R$.	
III.	$f = [x \mapsto \|x\|]$,	$E = F = R$	(*fig.* 2).
	$A = [1,4[$,	$f[A] = [1,4[$;	
	$B = [1,4[$,	$f^{-1}[B] = [1,4[\cup]-4,-1] = f^{-1}[f[A]]$).	

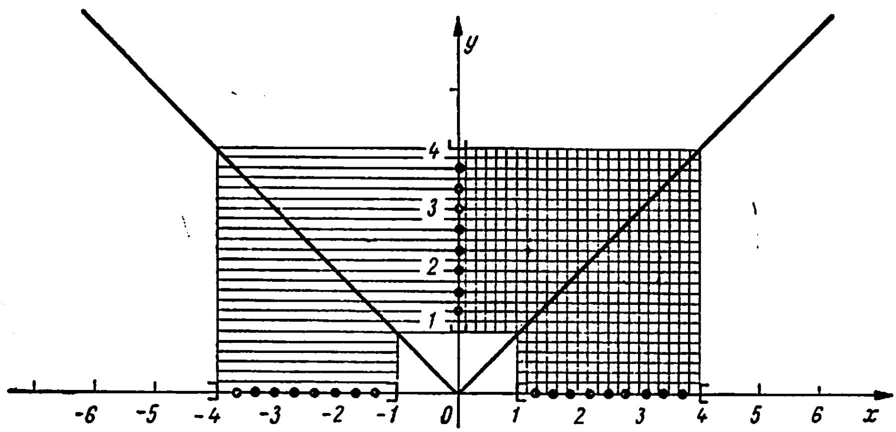


Fig. 2

1.4.2 Imagini directe şi inverse de deschişi sau de închişi

Exemplele următoare arată că multe posibilităţi se pot întîlni în cazul general.

■ $E = \mathbf{R} = F$, $f = [x \mapsto E(x)]$ (funcţie parte întreagă).

a) $A =]0,1; 0,9[$ deschis în $\mathbf{R}$; $f[A] = \{0\}$ închis în $\mathbf{R}$.
$A =]0,1; 0,9]$ nici deschis nici închis în $\mathbf{R}$;
$f[A] = \{0\}$ închis în $\mathbf{R}$.
$A = [0,1; 0,9]$ închis în $\mathbf{R}$; $f[A] = \{0\}$ închis în $\mathbf{R}$.
$A = \emptyset$ închis (şi deschis); $f[A] = \emptyset$ deschis (şi închis).

b) $B = \{0\}$ închis în $\mathbf{R}$; $f^{-1}[B] = [0,1[$ nici deschis, nici închis.
$B =]-1 ; 0,2[$ deschis în $\mathbf{R}$;
$f^{-1}[B] = [0,1[$ nici deschis, nici închis.
$B =]-1 ; 0,2]$ nici deschis, nici închis.
$f^{-1}[B] = [0,1[$ nici deschis, nici închis.

■ $E = \mathbf{R} = F, \begin{cases} f(x) = x, & x < 0 ; \\ f(0) = 2 ; & \\ f(x) = 1 - x, & x > 0. \end{cases}$

a) $A =]-2, -1[$ deschis ; $f[A] =]-2, -1[$ deschis.
$A = \left]-1, \frac{1}{2}\right[$ deschis ; $f[A] =]-1,0[\cup \{2\} \cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[$
nici deschis, nici închis.
$A = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ închis ; $f[A] = [-1, 0[\cup \{2\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right[$
nici deschis, nici închis.
$A =]0, 1]$ nici deschis, nici închis ;
$f[A] = [0, 1[$ nici deschis, nici închis.

b) $B = \{2\}$ închis ; $f^{-1}[B] = \{0\}$ închis.
$B =]1,5 ; 2,5[$ deschis ; $f^{-1}[B] = \{0\}$ închis.
$B =]0,5 ; 1[$ deschis ; $f^{-1}[B] =]0 ; 0,5[$ deschis.

În secțiunile următoare vor apare condițiile necesare și suficiente pentru ca imaginea inversă a unui deschis să fie un deschis.

EXERCIȚII

Fie f o aplicație oarecare de la mulțimea E la mulțimea F. Fie A și A' două submulțimi oarecare din E, B și B' două submulțimi oarecare din F.
Să se demonstreze proprietățile următoare :

1.97 $f[A \cup A'] = f[A] \cup f[A']$.

1.98 $f[A \cap A'] \subset f[A] \cap f[A']$.
Să se demonstreze că egalitatea are loc dacă și numai dacă f este injectivă.

1.99 $f^{-1}[B \cup B'] = f^{-1}[B] \cup f^{-1}[B']$.

1.100 $f^{-1}[B \cap B'] = f^{-1}[B] \cap f^{-1}[B']$.

1.101 $A \subset A' \Rightarrow f[A] \subset f[A']$.

1.102 $B \subset B' \Rightarrow f^{-1}[B] \subset f^{-1}[B']$.

1.103 $f^{-1}[f[A]] \supset A$.
Egalitatea are loc dacă f este injectivă. Să se dea un exemplu în care egalitatea nu are loc.

1.104 $f[f^{-1}[A]] \subset A$.
Egalitatea are loc dacă f este surjectivă. Să se dea un exemplu în care egalitatea nu are loc.

1.105 Să se demonstreze că f și g fiind două funcții numerice și B o submulțime din $\mathbf{R}$:

$$(f \circ g)^{-1}[B] = g^{-1}[f^{-1}[B]].$$

1.5 FUNCȚII CONTINUE ÎNTR-UN PUNCT

1.5.1 Definiții

În sens intuitiv, se pot distinge două tipuri de situații în care se spune că o funcție este *discontinuă*. Mai întîi, se pot lua în considerare discontinuitățile la nivelul domeniului de definiție. Dar acest tip de discontinuitate ia un caracter global și nu depinde de funcția f studiată. Această intuire a discontinuității nu se bazează decît pe proprietatea de conexiune a submulțimilor lui $\mathbf{R}$, proprietate care este legată de topologia lui $\mathbf{R}$.
A doua semnificație intuitivă a continuității este legată de o funcție f și de un punct x_0 al domeniului său de definiție, și are în vedere comportamentul valorilor $f(x)$ cînd x este apropiat de x_0.
Numai formalizarea acestui punct de vedere conduce la noțiunea matematică de continuitate.
Se spune că o funcție f este continuă într-un punct x_0 al domeniului său de definiție D dacă, x fiind un element al lui D vecin cu x_0, atunci $f(x)$ este vecin cu $f(x_0)$. Vom studia acum această noțiune intuitivă, așa cum am făcut de altfel și în Alef$_0$, Algebra, vol. II, Funcții numerice, aplicații diverse, nr. 6.4 și 6.5.

DEFINIȚIE / O funcție numerică f, definită pe o submulțime D de numere reale, este continuă într-un punct x_0, element din D, dacă și numai dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(x_0)$, există o vecinătate W a lui x_0 astfel că apartenența numărului x din D la mulțimea W implică apartenența imaginii $f(x)$ la mulțimea V.

Dacă se notează $\mathcal{V}(x_0)$, mulțimea vecinătăților lui x_0 în D și $\mathcal{V}(f(x_0))$ mulțimea vecinătăților lui $f(x_0)$, această definiție ia următoarea formă cuantificată:

O funcție f este continuă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiție D dacă și numai dacă:

$$\forall_{\mathcal{V}(f(x_0))} V;\ \exists_{\mathcal{V}(x_0)} W\ [x \in W \Rightarrow f(x) \in V].$$

Observație. — Să reamintim (nr. 1.1) că dacă u este o vecinătate a unui număr x_0 din $\mathbf{R}$, $u \cap D$ este o vecinătate a lui x_0 în D.
Dacă se ține seama de definițiile de la nr. 1.4, această definiție ia următoarea formă:

P_1 O funcție f este continuă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiție D dacă și numai dacă:

$$\boxed{\forall_{\mathcal{V}(f(x_0))} V;\ \exists_{\mathcal{V}(x_0)} W\quad f[W] \subset V}$$

■ În foarte multe cazuri este comod să se folosească vecinătăți centrate V_ε și W_η. De exemplu, dacă:

$$V_\varepsilon =]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[, \text{ cu } \varepsilon \in \mathbf{R}^{+*},$$

şi dacă: $$W_\eta =]x_0 - \eta,\ x_0 + \eta[,\ \text{cu}\ \eta \in \mathbf{R}^{+*}.$$

$$f(x) \in V_\varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

$$x \in W_\eta \Leftrightarrow |x - x_0| < \eta.$$

Ţinînd seama de relaţiile de mai sus, definiţia iniţială se enunţă în felul următor:

P_2 O funcţie numerică f este continuă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiţie D dacă şi numai dacă:

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall_{\mathbf{R}^{+*}}\ \varepsilon;\quad \exists_{\mathbf{R}^{+*}}\ \eta;\quad \forall_D\ x\\ [|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]\end{array}}$$

Să demonstrăm că definiţia iniţială şi propoziţia P_2 sînt echivalente.
Fie o funcţie f continuă într-un punct x_0 în sensul definiţiei iniţiale. Fie, pe de altă parte, *un număr real pozitiv nenul* ε şi fie vecinătatea centrată a lui $f(x_0)$:

$$V_\varepsilon =]f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon[.$$

Această vecinătate centrată este, în particular, o vecinătate V a lui $f(x_0)$; prin urmare există o vecinătate W a numărului x_0 astfel că:

$$f[W] \subset V_\varepsilon.$$

Dar orice vecinătate a lui x_0 conţine o vecinătate centrată în x_0 (nr. 1.1.6, Proprietatea 1).
Există deci un număr η, *real pozitiv nenul,* astfel că:

$$|x - x_0| < \eta \text{ antrenează: } x \in W;$$

Or: $$x \in W \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon.$$

Rezultă că numărul η este astfel că:

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Funcţia f este deci continuă în x_0 în sensul proprietăţii P_2. *Reciproc, pentru orice vecinătate* V a lui $f(x_0)$, există un număr ε, real pozitiv nenul, astfel că, dacă $V_\varepsilon =]f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon[$, avem:

$$V_\varepsilon \subset V.$$

Dacă f este continuă în x_0 în sensul proprietăţii P_2, *există un număr* η, real pozitiv nenul, astfel că:

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

adică: $$f[W_\eta] \subset V_\varepsilon \subset V.$$

Or, vecinătatea centrată W_η este, în particular, o vecinătate W a numărului x_0. Plecînd de la o vecinătate V oarecare a numărului $f(x_0)$, am găsit o vecinătate $W = W_\eta$ astfel că: $f[W] \subset V$.
Funcţia f este deci continuă în sensul definiţiei 1.

■ Să considerăm o funcţie f oarecare şi un punct x_0 din domeniul ei de definiţie D. Fie V o vecinătate a imaginei $f(x_0)$ a lui x_0 prin f.
Fie mulţimea $f^{-1}[V]$.
Avem:

$$f(x_0) \in V \Rightarrow x_0 \in f^{-1}[V],$$

$$f[f^{-1}[V]] \subset V \text{ (exerciţiul nr. 1.104).}$$

Dacă $f^{-1}[V]$ este o vecinătate a lui x_0, ea joacă rolul vecinătăţii W din definiţia iniţială; prin urmare, funcţia f este continuă în x_0. *Reciproc*, dacă f este continuă în x_0, există o vecinătate W a lui x_0 astfel că:

$$f[W] \subset V.$$

Avem deci (exerciţiul nr. 1.101):

$$f^{-1}[f[W]] \subset f^{-1}[V].$$

Dar (exerciţiul nr. 1.102):

$$W \subset f^{-1}[f[W]].$$

Prin urmare:

$$W \subset f^{-1}[V].$$

Vecinătatea W fiind o vecinătate a lui x_0, $f^{-1}[V]$ este de asemenea o vecinătate a lui x_0. Se deduce:

P_3 O funcţie numerică f este continuă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiţie D dacă şi numai dacă imaginea inversă a oricărei vecinătăţi a lui $f(x_0)$ este o vecinătate a lui x_0 în D.

Observaţie. — Noţiunea de continuitate a unei funcţii într-un punct x_0 este legată de noţiunea de vecinătate. Ca şi aceasta deci, depinde de topologia considerată.

Exemple. **I.** Fie funcţia $f = [x \mapsto 2]$, fie $x_0 = 1$, fie $\mathcal{V}(2)$ mulţimea vecinătăţilor lui 2 şi fie $\mathcal{V}(1)$ mulţimea vecinătăţilor lui 1. Avem:

$$\forall_{\mathcal{V}(2)} V \qquad 2 \in V,$$

$$[\forall_{\mathbf{R}} x \quad f(x) = 2] \Rightarrow f[V] = \mathbf{R}.$$

$$\mathbf{R} \in \mathcal{V}(1).$$

Imaginea inversă prin f a oricărei vecinătăţi a lui $2 = f(1)$ fiind o vecinătate a lui 1, funcţia f este continuă în $x_0 = 1$ (*fig.* 3).

II. Fie funcţia $g = [x \mapsto 2x]$, fie x_0 un număr real oarecare şi fie $\mathcal{V}(x_0)$ şi $\mathcal{V}(2x_0)$ mulţimile respective de vecinătăţi ale lui x_0 şi $2x_0 = g(x_0)$:

$$\forall_{\mathcal{V}(2x_0)} V; \quad \exists_R \alpha \quad \exists_R \beta \quad]\alpha, \beta[\subset V \text{ şi } 2x_0 \in]\alpha, \beta[.$$

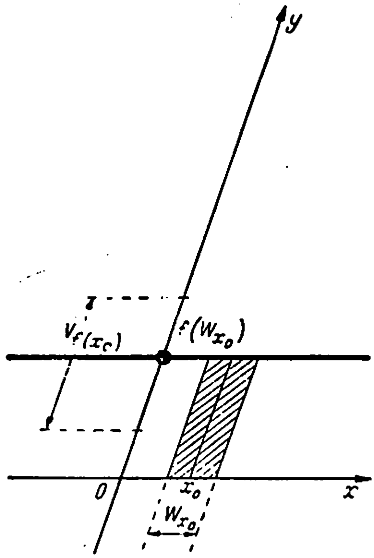


Fig. 3

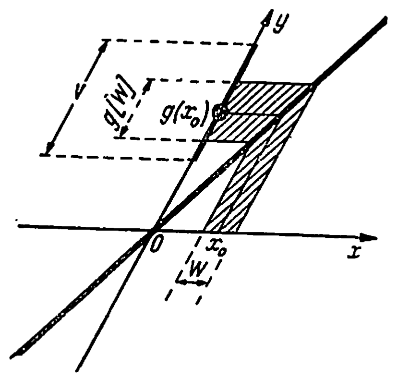


Fig. 4

Avem deci: $g^{-1}]\alpha, \beta[\subset g^{-1}[V]$;

or: $g^{-1}]\alpha, \beta[= \left]\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right[$.

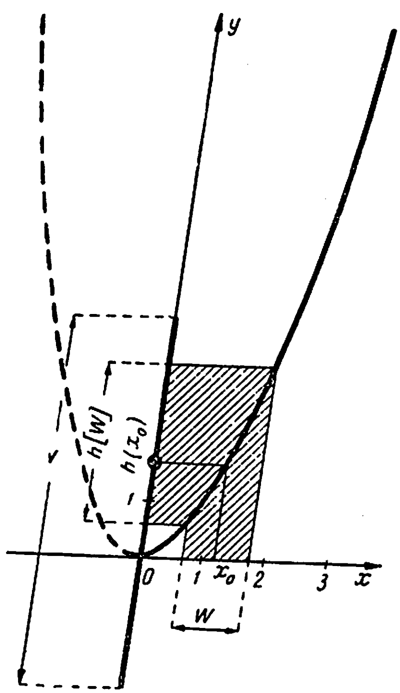


Fig. 5

şi: $2x_0 \in]\alpha, \beta[\Rightarrow x_0 \in \left]\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right[$;

deci: $g^{-1}]\alpha, \beta[\in \mathcal{V}(x_0)$;

prin urmare: $g^{-1}[V] \in \mathcal{V}(x_0)$,

şi: $\forall_{\mathcal{V}(2x_0)} V \quad g^{-1}[V] \in \mathcal{V}(x_0)$.

Funcţia g este deci continuă în orice punct x_0 (*fig.* 4).

III. Fie funcţia $h = [x \mapsto x^2]$.

Cu notaţiile analoage cu cele din exemplul II să studiem continuitatea funcţiei h în punctul x_0 din R^{+*}:

$$\forall_{\mathcal{V}(x_0^2)} V; \quad \exists_R + \alpha; \quad \exists_R + \beta \quad]\alpha, \beta[\subset V$$

$$\text{şi} \quad x_0^2 \in]\alpha, \beta[.$$

Fie: $\gamma = \sup(\alpha, \beta)$ şi $\delta = \inf(\alpha, \beta)$;

$$h^{-1}]\alpha, \beta[=]-\sqrt{\gamma}, -\sqrt{\delta}[\cup]\sqrt{\delta}, \sqrt{\gamma}[;$$

or: $h(x_0) \in]\alpha, \beta[\Rightarrow x_0 \in h^{-1}]\alpha, \beta[$;

deci: $h^{-1}]\alpha, \beta[\in \mathcal{V}(x_0)$.

Se trage concluzia că funcţia h este continuă în x_0 la fel ca în exemplul II (*fig.* 5).

1.5.2 Funcții necontinue într-un punct

O funcție f necontinuă în punctul x_0 din domeniul ei de definiție D este *discontinuă* în x_0. Păstrînd notațiile de la nr. 1.5.1, această proprietate se traduce formal prin:

$\overline{\mathrm{P}_1}$ $\quad \exists_{\mathcal{V}(f(x_0))} V;\quad \forall_{\mathcal{V}(x_0)} W \quad f[W] \not\subset V.$

$\overline{\mathrm{P}_2}$ $\quad \exists_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon;\ \forall_{\mathbf{R}^{+*}} \eta;\ \exists_D x.$

$$|x - x_0| < \eta \text{ și } |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon.$$

$\overline{\mathrm{P}_3}$ **O funcție numerică f este discontinuă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiție dacă și numai dacă există o vecinătate a lui $f(x_0)$ a cărei imagine inversă prin f nu este o vecinătate a lui x_0.**

Exemple. I. Să considerăm funcția caracteristică χ_A a mulțimii $A = [1, +\infty[$. Să studiem continuitatea ei în punctul $x_0 = 1$.
Avem:

$$\chi_A(1) = 1.$$

Dar, în orice vecinătate a lui 1, există numere care aparțin lui A, a căror imagine prin χ_A este deci numărul 1 și alte numere care nu aparțin lui A, a căror imagine prin χ_A este deci 0.
Fie vecinătatea $V = \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$ a imaginii $\chi_A(1) = 1$.
Oricare ar fi vecinătatea W a numărului 1, avem, după observația precedentă:

$$f(W) = \{0,1\}.$$

Numărul o nu aparține lui V, $f(W)$ nu este inclus în V.
Funcția χ_A nu este deci continuă în punctul $x_0 = 1$ (*fig.* 6).
■ Această demonstrație se poate pune avantajos sub forma următoare (notații evidente).
Fie:

$$V = \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[, \quad V \in \mathcal{V}(1);$$

$$f^{-1}[V] = [1, +\infty[.$$

$f^{-1}[V]$ nu este o vecinătate a lui 1 în $D = \mathbf{R}$; deci funcția f nu este continuă pentru $x_0 = 1$.

II. Fie funcția f definită prin:

$$f(x) = x \qquad \text{dacă } x < -1,$$
$$f(-1) = -2,$$
$$f(x) = 2x + 2 \qquad \text{dacă } x > -1.$$

Să studiem continuitatea funcției f în punctul $x_0 = -1$.
Fie vecinătatea lui -2, $V = \left]-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right[$. Orice vecinătate W a lui $x_0 = -1$ conține un interval deschis $]\alpha, \beta[$ care conține pe x_0:

$$\alpha < x_0 < \beta,$$

$$]\alpha, \beta[=]\alpha, -1[\cup \{-1\} \cup]-1, \beta[.$$

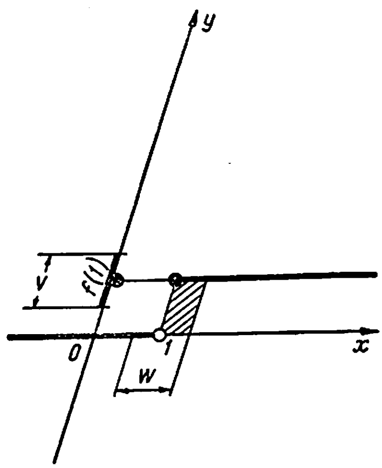


Fig. 6

Avem :

$$f[]\alpha, \beta[] =]\alpha, -1[\cup \{-2\} \cup]0, 2\beta + 2[;$$

imaginea prin f a lui $]\alpha, \beta[$, submulţime a lui W, conţine deci numere pozitive căci:

$$\beta > -1 \text{ antrenează: } 2\beta + 2 > 0;$$

prin urmare, există în W elemente ale căror imagini prin f nu sînt elemente ale lui V (*fig.* 7).

■ Această demonstraţie se poate pune avantajos sub forma următoare (notaţii evidente).

Fie :

$$V = \left]-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right[, V \in \mathcal{V}(-2),$$

$$f^{-1}[V] = \left]-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right[\cup \{-1\}.$$

$f^{-1}[V]$ nu este o vecinătate a lui -1 în $D = R$, deci funcţia f nu este continuă pentru $x_0 = -1$.

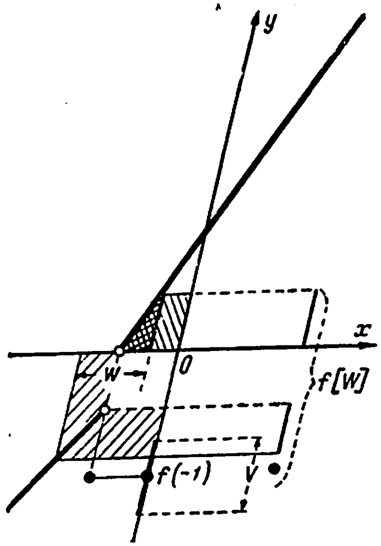


Fig. 7

Observaţie. — În exemplele precedente se observă că poziţia lui x în raport cu x_0 influenţează asupra poziţiei lui $f(x)$ în raport cu poziţia lui $f(x_0)$. Această observaţie ne conduce să dăm definiţiile următoare.

1.5.3 Continuitate la dreapta, continuitate la stînga

DEFINIŢIA 1 / O funcţie f, definită pe un domeniu de definiţie D, este continuă la dreapta (respectiv la stînga) în punctul x_0 dacă restricţia lui f la intervalul $[x_0, +\infty[$ (respectiv $]-\infty, x_0]$) este continuă în x_0.

Fie $\mathcal{V}_d(x_0)$ mulţimea vecinătăţilor la dreapta ale lui x_0 şi fie $\mathcal{V}_g(x_0)$ mulţimea vecinătăţilor la stînga ale lui x_0.
Să reamintim că o vecinătate la dreapta (respectiv la stînga) a lui x_0 este intersecţia unei vecinătăţi a lui x_0 în R cu $[x_0, +\infty[$ (respectiv $]-\infty, x_0]$).

O funcţie f este continuă la dreapta într-un punct x_0 din domeniul ei de definiţie D dacă una din proprietăţile următoare este verificată:

P_{1d}	$\forall_{\mathcal{V}(f(x_0))} V; \quad \exists_{\mathcal{V}_d(x_0)} W; \quad f[W] \subset V$
P_{2d}	$\forall_{R_+^*} \varepsilon; \quad \forall_{R_+^*} \eta; \quad \exists_D x_0$ $0 < x - x_0 < \eta \Rightarrow \lvert f(x) - f(x_0)\rvert < \varepsilon$

P_{3d} **Imaginea inversă prin f a oricărei vecinătăţi a lui $f(x_0)$ este o vecinătate la dreapta a lui x_0 în D.**

O funcţie f este continuă la stînga într-un punct x_0 din domeniul ei de definiţie D dacă una din proprietăţile următoare este verificată:

P_{1g}	$\forall_{\mathcal{V}(f(x_0))} V; \quad \exists_{\mathcal{V}_g(x_0)} W; \quad f[W] \subset V.$
P_{2g}	$\forall_{\mathbf{R}_+^*} \varepsilon; \quad \forall_{\mathbf{R}_+^*} \eta; \quad \exists_D x_0$ $0 < x_0 - x < \eta \quad \lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$

P_{3g} **Imaginea inversă prin f a oricărei vecinătăţi a lui $f(x_0)$ este o vecinătate la stînga a lui x_0 în D.**

O funcţie continuă în x_0 este continuă la dreapta şi la stînga în x_0 şi reciproc (exerciţiul nr. 1.105).
O funcţie poate să nu fie continuă nici la dreapta, nici la stînga.

Exemple. I. Funcţia χ_A considerată în exemplul I de la nr. 1.5.2 este continuă la dreapta în punctul $x_0 = 1$. Ea nu este continuă la stînga în acest punct.

II. Funcţia f considerată în exemplul II de la nr. 1.5.2 nu este continuă nici la dreapta, nici la stînga în punctul $x_0 = -1$.

EXERCIŢII

1.106 Să se demonstreze că o funcţie continuă la dreapta şi continuă la stînga într-un punct x_0 este continuă în x_0.

*

Să se studieze continuitatea funcţiilor definite prin:

1.107 $f(x) = E(x)$.

1.108 $f(x) = \dfrac{1}{E(x)}$.

1.109 $f(x) = E(3x - 1)$.

1.110 $f(x) = 3\chi_{\mathbf{Q}}$.

1.111 $f(x) = x\chi_{\mathbf{Q}}$.

1.112 $f(x) = \dfrac{1}{\chi_{\mathbf{R}-\mathbf{Z}}}$.

*

1.113 Un punct x_0 al unei submulţimi D din $\mathbf{R}$ este izolat în D dacă există o vecinătate V a lui x_0 care are cu D o intersecţie redusă la x_0.

a) Să se demonstreze că o mulţime redusă la un punct izolat este închisă şi deschisă în D.
b) Să se demonstreze că o funcţie f definită într-un punct izolat x_0 este continuă în x_0.
c) Un număr raţional este un punct izolat din $\mathbf{Q}$?
d) Funcţia $\left[x \to \dfrac{1}{x\,\chi_{\mathbf{Q}}}\right]$ este continuă în anumite puncte din $\mathbf{Q}$?
e) Aceeaşi chestiune pentru funcţia $[x \to x\chi_{\mathbf{Q}}]$

Să se studieze continuitatea funcţiilor f definite mai jos în punctele precizate:

1.114 $f = [x \to x^3 + x]$, $\quad x_0 = 0$.

1.115 $f = \left[\dfrac{-x+5}{x-3}\right]$, $\qquad x_0 = 4.$

1.116 $f = \left[x \to \dfrac{3x+1}{2x-1}\right]$, $\qquad x_0 = 4.$

1.117 $f = [x \to \sqrt{x}]$, $\qquad x_0 = 9$

1.6 OPERAȚII CU FUNCȚII CONTINUE ÎNTR-UN PUNCT

Să considerăm două funcții numerice f și g continue în punctul x_0 al intersecției domeniilor lor de definiție. Am reamintit la nr. 1.2.6 cum se definesc funcțiile sumă, produs, cît. Este vorba deci să se studieze continuitatea în punctul x_0 a acestor diverse funcții obținute cu ajutorul funcțiilor f și g.

1.6.1 Suma a două funcții continue

Fie f o funcție continuă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiție D_1. Fie g o funcție continuă în x_0, care aparține domeniului ei de definiție D_2. Să studiem, pentru orice x care aparține intersecției $D_1 \cap D_2$, valoarea absolută a diferenței $(f+g)(x) - (f+g)(x_0)$:

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| = |f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)|.$$

Valoarea absolută a unei sume este mai mică decît sau egală cu suma valorilor absolute:

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| \leqslant |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|.$$

Conform ipotezelor, este posibil de a face cei doi termeni ai acestei sume mai mici decît orice număr dat.
Fie ε un real pozitiv nenul dat. Există η_1 astfel că:

$$|x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Există de asemenea η_2 astfel că:

$$|x - x_0| < \eta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie:

$$\eta = \inf (\eta_1, \eta_2).$$

Avem:

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \eta &\Rightarrow |x - x_0| < \eta_1 \quad \text{și} \quad |x - x_0| < \eta_2 \\ &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{și} \quad |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow |(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Suma $f+g$ este deci continuă în punctul x_0.

Se poate enunța:

TEOREMA / Fie f şi g două funcții continue într-un punct x_0 în care amîndouă sînt definite: atunci, funcția $f+g$ este continuă în punctul x_0.

1.6.2 Produsul dintre o funcție continuă şi un număr real

Fie f o funcție numerică continuă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiție D.
Numărul λ fiind un real dat, să studiem valoarea absolută a diferenței

$$\lambda f(x) - \lambda f(x_0): \ |\lambda f(x) - \lambda f(x_0)| = |\lambda| \, |f(x) - f(x_0)|;$$

f fiind continuă:

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon; \quad \exists_{\mathbf{R}^{+*}} \eta'; \quad \forall_D x$$

$$\left[|x - x_0| < \eta' \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right].$$

Prin urmare:

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon; \quad \exists_{\mathbf{R}^{+*}} \eta'; \quad \forall_D x$$

$$[|x - x_0| < \eta' \Rightarrow |\lambda f(x) - \lambda f(x_0)| < \varepsilon].$$

Se poate enunța:

TEOREMA / Fie f o funcție continuă într-un punct x_0 şi fie λ un număr real: funcția λf este continuă în punctul x_0.

Observație. — Din rezultatele de la numerele 1.6.1 şi 1.6.2 se poate deduce că mulțimea $\mathcal{C}(D, \mathbf{R})$ a aplicațiilor continue ale unei submulțimi D de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$ este un subspațiu vectorial al spațiului vectorial $\mathcal{A}(D, \mathbf{R})$ al funcțiilor numerice definite pe D.

1.6.3 Produsul a două funcții continue

Pe baza aceloraşi ipoteze ca la nr. 1.6.1, să studiem, pentru orice element x al intersecției $D_1 \cap D_2$, valoarea absolută a diferenței

$f(x_0)g(x_0) - f(x)g(x)$:

$$f(x_0)g(x_0) - f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x)g(x) =$$
$$= f(x_0)[g(x_0) - g(x)] + g(x)[f(x_0) - g(x)],$$
$$|f(x_0)g(x_0) - f(x)g(x)| \leqslant |f(x_0)| \, |g(x_0) - g(x)| + |g(x)| \, |f(x_0) - g(x)|.$$

■ Funcţia g fiind continuă în x_0 avem:

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon; \quad \exists_{\mathbf{R}^{+*}} \eta_2; \quad \forall_{D_2} x$$

$$[|x - x_0| < \eta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon].$$

Se deduce că:

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon; \quad \exists_{\mathbf{R}^{+*}} \eta_2; \quad \forall_{D_2} x$$

$$[|x - x_0| < \eta_2 \Rightarrow g(x) < |g(x_0)| + \varepsilon].$$

Există deci un număr K astfel că:

$$|x - x_0| < \eta_2 \Rightarrow g(x) < K;$$

avem:

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon; \quad \mathsf{E}_{\mathbf{R}^{+*}} \eta_2'; \quad \forall_{D_2} x$$

$$\left[|x - x_0| < \eta_2' \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|K|}\right];$$

prin urmare, dacă $\eta_2'' = \inf(\eta_2, \eta_2')$;

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon; \quad \exists_{\mathbf{R}^{+*}} \eta_2''; \quad \forall_{D_2} x$$

$$\left[|x - x_0| < \eta_2'' \Rightarrow |g(x)|\,|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

■ Pe de altă parte:

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon; \quad \exists_{\mathbf{R}^{+*}} \eta_1'; \quad \forall_{D_1} x$$

$$\left[|x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2f(x_0)}\right];$$

deci:

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon; \quad \exists_{\mathbf{R}^{+*}} \eta_1'; \quad \forall_{D_1} x$$

$$\left[|x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow |f(x_0)|\,|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

■ Fie $\eta = \inf(\eta_2'', \eta_1')$; avem simultan:

$$\forall_{D_1} x \left[|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x_0)|\,|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

şi

$$\forall_{D_2} x \left[|x - x_0| < \eta \Rightarrow |g(x)|\,|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right];$$

prin urmare, pentru că:

$$|[fg](x_0) - [fg](x)| \leqslant |f(x_0)|\,|g(x_0) - g(x)| + |g(x)|\,|f(x_0) - f(x)|,$$

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon; \quad \exists_{\mathbf{R}^{+*}} \eta; \quad \forall_{D_1 \cap D_2} x$$

$$[|x - x_0| < \eta \Rightarrow |[fg](x_0) - [fg](x)| < \varepsilon].$$

Se poate deci enunţa:

TEOREMA / Fie f şi g două funcţii continue într-un punct x_0 din intersecţia domeniilor lor de definiţie: funcţia fg este continuă în x_0.

1.6.4 Inversa unei funcții continue

Fie g o funcție continuă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiție D astfel că, în plus, $g(x_0)$ este diferit de zero.

Să studiem valoarea absolută a diferenței $\left[\frac{1}{g}\right](x) - \left[\frac{1}{g}\right](x_0)$:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| = \frac{|g(x_0) - g(x)|}{|g(x)|\,|g(x_0)|}.$$

Funcția g fiind continuă în x_0 și $g(x_0)$ fiind nenul, există un număr pozitiv k și un număr pozitiv η astfel că:

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |g(x)| > k.$$

Avem deci:

$$\forall_{R^{+*}}\, \varepsilon;\quad \exists_{R^{+*}}\, \eta';\quad \forall_D x$$

$$[|x - x_0| < \eta' \Rightarrow |g(x_0) - g(x)| < k|g(x_0)|\varepsilon]$$

$$\left[|x - x_0| < \eta' \Rightarrow \frac{|g(x_0) - g(x)|}{|g(x)g(x_0)|} < \frac{k}{|g(x)|}\,\varepsilon\right].$$

Dar: $\frac{k}{|g(x)|} < 1$; deci:

$$\forall_{R^{+*}}\, \varepsilon;\quad \exists_{R^{+*}}\, \eta';\quad \forall_D\, x$$

$$\left[|x - x_0| < \eta' \Rightarrow \left|\left[\frac{1}{g}\right](x) - \left[\frac{1}{g}\right](x_0)\right| < \varepsilon\right].$$

Se poate enunța:

TEOREMA / Fie g o funcție continuă într-un punct x_0 astfel că $g(x_0)$ este diferit de zero: funcția $\frac{1}{g}$ este continuă în x_0.

1.6.5 Consecințe

Teoremele pe care le-am enunțat cît și continuitatea funcției constante și a funcției identice antrenează următoarele corolare:

COROLARUL / Fie f și g două funcții continue în x_0 astfel că $g(x_0)$ este
1 diferit de zero: funcția $\frac{f}{g}$ este continuă în x_0.

Fie n numere reale $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Se numește *funcție polinomială* orice funcție P care, lui x, face să-i corespundă:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}\, x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, x^i.$$

COROLARUL 2 / Orice funcţie polinomială este continuă în orice punct din domeniul ei de definiţie.

COROLARUL 3 / Funcţia f, definită prin $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, este continuă în orice punct din domeniul ei de definiţie (adică în orice punct x_0 astfel că $Q(x_0)$ să fie diferit de zero).

1.6.6 Funcţia compusă

Fie două funcţii f şi g. Se presupune că g este continuă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiţie şi că f este definită şi continuă în $g(x_0)$. Să studiem continuitatea funcţiei $f \circ g$.

Fie B o submulţime oarecare a mulţimii de sosire. Avem:

$$\begin{aligned}[f \circ g]^{-1}[B] &= \{x;\ [f \circ g](x) \in B\} = \\ &= \{x; f(g(x)) \in B\} = \\ &= \{x; g(x) \in f^{-1}[B]\} = \\ &= \{x;\ x \in g^{-1}[f^{-1}[B]]\}.\end{aligned}$$

Să presupunem că V este o vecinătate a lui $[f \circ g](x_0)$. Funcţia f fiind continuă în $g(x_0)$, rezultă că:

$$u = f^{-1}[V] \text{ este o vecinătate a lui } g(x_0).$$

Funcţia g fiind continuă în x_0 rezultă că:

$$g^{-1}[u] = g^{-1}[f^{-1}[V]]$$

este o vecinătate a lui x_0. Dar:

$$g^{-1}[f^{-1}[V]] = [f \circ g]^{-1}[V].$$

Imaginea inversă prin $f \circ g$ a unei vecinătăţi oarecare a lui $[f \circ g](x_0)$ este deci o vecinătate a lui x_0. Se poate enunţa:

TEOREMA / Fie o funcţie g, continuă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiţie şi fie f o funcţie definită şi continuă în $g(x_0)$. Funcţia $f \circ g$ este atunci continuă în x_0.

EXERCIŢII

1.118 Care este domeniul de definiţie al funcţiei f definită prin:

$$f(x) = \frac{6x-2}{3x-1}?$$

Este această funcţie continuă pentru $x = \frac{1}{3}$?

*

Să se studieze continuitatea funcţiei f în punctul x_0 în următoarele cazuri:

1.119 $f(x) = x^2 + x$; $\quad x_0 = 1$.

1.120 $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $x_0 = 1$.

1.121 $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$; $x_0 = 4$.

1.122 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $x_0 = 9$.

1.123 1° Se reamintește că $E(x)$ înseamnă cel mai mare număr întreg inferior decît sau egal cu x. Să se calculeze: $E(2)$; $E(2, 01)$; $E(1, 99)$; $E(-3, 2)$; $E(-4, 001)$.

2° Să se calculeze $f(x) = x - E(x)$: pentru $x = 2$, pentru $x = 2 + h$ $(0 < h < 1)$, pentru $x = 2 - h (0 < h < 1)$.

3° Funcția f este continuă: pentru $x = 2$? pentru $x = 2,5$?

4° Să se traseze graficul acestei funcții pentru $0 \leqslant x \leqslant 4$.

Să se studieze continuitatea funcțiilor f definite mai jos prin:

1.124 $f(x) = 4x^6 + 5x^4 + 3x^3 - 4x + 12$.

1.125 $f(x) = (3\sqrt{x} - 5)^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}$.

1.126 $f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 3}{x\sqrt{x}}$.

1.127 $f(x) = \frac{3x^4 - 7x^2 + 3}{x^2\sqrt{x} - 2} + \frac{5x}{3x^3 - 5x}$.

1.128 $f(x) = \frac{1}{(3\sqrt{x} - 5)^2 + 3}$.

1.129 Se consideră funcția caracteristică χ_Q a mulțimii numerelor raționale:

$$\chi_Q(x) = 1 \Leftrightarrow x \in Q,$$

$$\chi_Q(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin Q.$$

1° Fie x_0 un număr rațional. Care este imaginea prin χ_Q a unei vecinătăți V_{x_0} a numărului x_0? Să se deducă că χ_Q nu este continuă în x_0.

2° Fie x_1 un număr real nerațional. Care este imaginea prin χ_Q a unei vecinătăți V_{x_1} a numărului x_1? Să se deducă că χ_Q nu este continuă în x_1.

3° Există un număr x astfel că χ_Q să fie continuă în x?

1.7 CONTINUITATEA PE O SUBMULȚIME

1.7.1 Definiție. Primele consecințe

Există funcții care nu sînt continue în nici un punct din domeniul lor de definiție (a se vedea exercițiul nr. 1.129).

Invers, există funcții care sînt continue în orice punct dintr-un anumit domeniu, submulțime a domeniului lor de definiție.

DEFINIȚIE / O funcție f continuă în orice punct x_0 al unei mulțimi U de numere reale este continuă pe U.

Fie $f, g, h, \ldots$ funcții continue pe o aceeași submulțime U din $\mathbf{R}$. În fiecare punct din U se aplică teoremele de la nr. 1.6. Prin urmare, oricare ar fi numerele reale $\lambda, \mu, \nu, \ldots,$ funcțiile $\lambda f + \mu g + \nu h + \ldots$ și $fgh \ldots$ sînt continue pe U. De asemenea, dacă U' este mulțimea elementelor din U astfel că $g(x)$ este nenul, funcția $\frac{f}{g}$ este continuă pe U'. Se deduc următoarele rezultate:

1° Orice funcție polinomială este continuă pe $\mathbf{R}$.

2° Orice funcție rațională este continuă pe domeniul ei de definiție.

3° Mulțimea funcțiilor continue pe o aceeași mulțime U de numere reale este un subspațiu vectorial al spațiului vectorial al funcțiilor continue numerice definite pe U.

Teoremele de la secțiunea 1.6 permit pe deasupra să se enunțe următorul rezultat:

Fie o funcție g continuă pe o mulțime U și fie o funcție f definită și continuă pe $g[U]$. Atunci funcția compusă $h = f \circ g$ este continuă pe U.

Acest rezultat se extinde fără dificultate la compunerea mai multor funcții.

Exemple. I. Funcția $f = \left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right]$ este continuă pe $\mathbf{R}$.

II. Funcția $g = \left[x \mapsto \sin \frac{1}{x-2}\right]$ este continuă pe $\mathbf{R} - \{2\}$.

III. Funcția $h = \left[x \mapsto \sqrt{\cos \sqrt{x^2 - 3x + 4}}\right]$ este continuă pe domeniul ei de definiție.

1.7.2 Proprietate fundamentală

Fie o funcție f continuă pe o mulțime D. Să reamintim că deschișii lui D sînt intersecțiile cu D ale deschișilor din $\mathbf{R}$ (nr. 1.1.7) și că orice deschis este vecinătate a fiecăruia din punctele lui (nr. 1.1.5). Fie O un deschis din $\mathbf{R}$. Funcția f fiind continuă pe D și O fiind vecinătate a fiecăruia din punctele ei $f^{-1}[O]$ este de asemenea vecinătate a fiecăruia din punctele ei; $f^{-1}[O]$ este deci un deschis din D. *Reciproc,* fie o funcție f definită pe D astfel că imaginea inversă prin f a oricărui deschis din $\mathbf{R}$ este un deschis din D. Fie un element x_0 din D; $f(x_0)$ este un număr real și admite o vecinătate deschisă V în $\mathbf{R}$. Prin ipoteză, imaginea inversă prin f a lui V este un deschis din D care conține pe x_0; aceasta este deci o vecinătate a lui x_0 în D; f este deci continuă în x_0. Acest fapt fiind adevărat pentru orice element x_0 din D, funcţia f este continuă pe D. Se poate deci enunţa:

TEOREMĂ / O funcţie numerică f definită pe o mulţime D este continuă pe D dacă şi numai dacă imaginea inversă prin f a oricărui deschis din R este un deschis din D.

1.7.3 Funţii continue pe un interval

Fie o funcţie f continuă pe un interval I. Se poate demonstra următoarea teoremă fundamentală pe care o vom accepta fără demonstraţie:

TEOREMA 1 / Dacă o funcţie f este definită şi continuă pe un interval I, imaginea directă $f[I]$ este un interval J.

Exemple. Fie funcţia:

$$f = [x \mapsto \sin x]$$

definită şi continuă pe **R**.

a) Fie $I = \mathbf{R}$: $\quad f[I] = [-1, +1]$.
b) Fie $I = [\alpha, +\infty[$: $\quad f[I] = [-1, +1]$.
c) Fie $I =]\alpha, -\infty[$: $\quad f[I] = [-1, +1]$.
d) Fie $I = [0, 2\pi[$: $\quad f[I] = [-1, +1]$.
e) Fie $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $\quad f[I] =]0, 1[$.
f) Fie $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\quad f[I] = [0, 1]$.

Exemplele de mai sus arată că intervalele I şi J nu sînt în mod necesar de aceeaşi natură.
Totodată, cînd intervalul I este închis şi mărginit:

$$I = [a, b], \quad a \in \mathbf{R}, \quad b \in \mathbf{R},$$

se poate demonstra următoarea teoremă pe care o vom accepta fără demonstraţie:

TEOREMA 2 / Dacă o funcţie f este definită şi continuă pe un interval I închis şi mărginit, intervalul $J = f[I]$ este de asemenea închis şi mărginit.

Din cele două teoreme pe care le-am enunţat se scot următoarele consecinţe.
Consecinţa 1. — Prin definiţia lui $f[I]$, orice element din $f[I]$ este imaginea prin f a cel puţin unui element din I. Se poate deci enunţa:

TEOREMA 3 / O funcţie f continuă pe un interval I este o aplicaţie surjectivă a intervalului I pe intervalul $J = f[I]$.

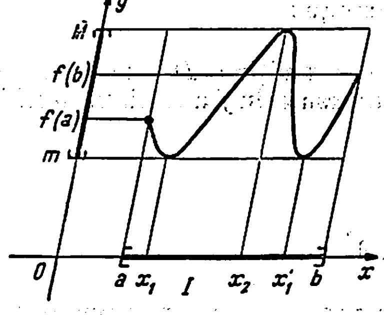


Fig. 8

Consecința 2. — Fie f o funcție continuă pe intervalul închis și mărginit $[a, b]$; $f[I]$ este atunci un interval închis și mărginit (Teorema 2) pe care-l desemnăm prin:

$$J = f[I] = [m, M],$$

m fiind cea mai mică dintre valorile luate de f pe intervalul I.

Aplicația f de la I la J fiind surjectivă, există cel puțin un număr x_1 care aparține lui I și astfel că: $f(x_1) = m$, m fiind marginea inferioară a funcției f pe intervalul I.

De asemenea, M este marginea superioară a funcției f pe intervalul I și există cel puțin un număr x_2 care aparține intervalului I și astfel că:

$$f(x_2) = M.$$

Se poate deci enunța (*fig.* 8):

TEOREMA 4 / O funcție f definită și continuă pe un interval închis și mărginit I este mărginită pe I și-și atinge marginile.

Consecința 3. — Fie f o funcție definită și continuă pe un interval închis mărginit $I = [a, b]$. Fie $J = f[I] = [m, M]$; f fiind o surjecție a lui I pe J, se poate enunța:

TEOREMA 5 / O funcție f definită și continuă pe un interval închis mărginit $[a, b]$ ia cel puțin odată pe $[a, b]$ orice valoare cuprinsă între marginele ei.

$$f[[a, b]] = [m, M],$$

$$\forall_{[m,M]}\lambda; \quad \exists_{[a,b]}c; \quad f(c) = \lambda.$$

Unicitatea numărului c nu este adevărată în general (*fig.* 9). Reciproca acestei teoreme nu este adevărată. O funcție f definită pe un interval închis mărginit $[a, b]$, care ia toate valorile cuprinse între marginea superioară M și marginea inferioară m a lui f pe $[a, b]$, nu este în mod necesar continuă pe $[a, b]$.

Exemplu. Fie funcția f definită pe intervalul $[-2, +2]$ prin:

$$f(x) = -2x - 2, \qquad x \in [-2, -1[;$$

$$f(x) = 2x, \qquad x \in [-1, +1];$$

$$f(x) = -2x + 2, \qquad x \in]+1, +2].$$

Reprezentarea grafică (*fig.* 10) a acestei funcții discontinue pune în evidență faptul că funcția ia cel puțin odată orice valoare din intervalul $f[[-2, +2]]$.

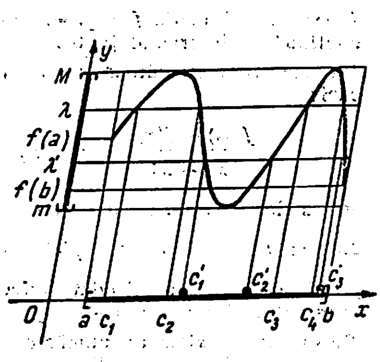


Fig. 9

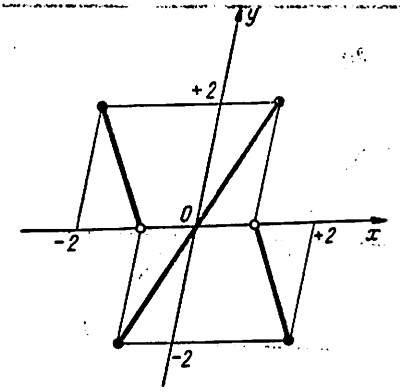


Fig. 10

Avem: $\{a, b\} \subset [a, b]$.

Se deduce că $f(a)$ aparţine intervalului $[m, M]$ şi că $f(b)$ aparţine intervalului $[m, M]$. Se poate deci enunţa un corolar imediat al teoremei 5 (*fig.* 9):

TEOREMA 5′ / **O funcţie f definită şi continuă pe un interval închis mărginit $[a, b]$ ia cel puţin odată, pe acest interval, orice valoare cuprinsă între $f(a)$ şi $f(b)$.**

Consecinţa 4. — Să citām în fine ca o consecinţă imediată a teoremei 5 următoarea teoremă numită uneori teorema lui Cauchy:

TEOREMA 6 / **Dacă o funcţie f este continuă pe un interval închis mărginit $[a, b]$ şi dacă este astfel că:**

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

atunci există un număr c din intervalul deschis $]a, b[$ astfel că $f(c) = 0$.

1.7.4 Funcţii continue şi strict monotone pe un interval

Fie f o funcţie continuă pe un interval I. Mai mult, să presupunem că f este strict monotonă pe I. Ipoteza de strictă monotonie implică:

$$\forall_I x_1, \ \forall_I x_2 \quad [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)].$$

Funcţia f este deci injectivă.
Ţinînd seama de teorema 3 de la nr. 1.7.3, se poate enunţa:

TEOREMĂ / **O funcţie f continuă şi strict monotonă pe un interval I este o bijecţie a lui I pe $J = f[I]$.**

O funcţie f continuă şi strict monotonă pe un interval închis $I = [a, b]$ ia odată şi numai odată orice valoare cuprinsă între $f(a)$ şi $f(b)$.

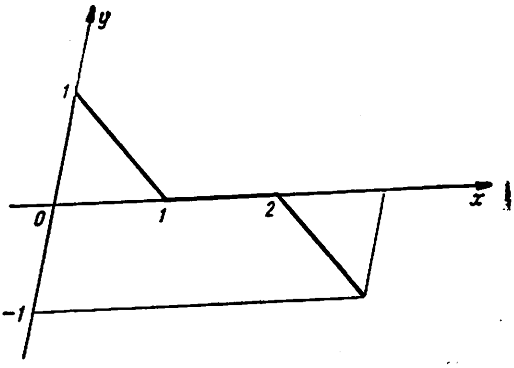


Fig. 11

Exemple. **I.** Funcția $f = [x \mapsto x^2 - 3]$ este continuă pe intervalul $[0, 3]$.

Ea este strict crescătoare pe acest interval căci:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$$

este strict pozitivă pe intervalul $[0, 3]$.

Avem: $f(0) = -3$ și $f(3) = 6$;

$f(x)$ ia odată și numai odată orice valoare cuprinsă în intervalul $[-3, 6]$.

De exemplu, există un număr c unic astfel că $f(c) = 0$ $\left(\text{avem } c = \sqrt{3}\right)$.

II. Pe intervalul $[0, 3]$, funcția g este definită prin:

$x \in [0, 1]$, $\quad g(x) = 1 - x$;

$x \in]1, 2[$, $\quad g(x) = 0$;

$x \in [2, 3]$, $\quad g(x) = 2 - x$.

Se verifică fără dificultate că această funcție este continuă și descrescătoare pe intervalul $[0,3]$. Dar g nu este strict descrescătoare (*fig.* 11).
Funcția g nu este o bijecție a intervalului $[0, 3]$ pe $[g(0), g(3)]$.
Valoarea zero este obținută pentru orice număr din intervalul $]1, 2[$.

1.7.5 Funcții monotone pe un interval închis $[a, b]$ și care iau toate valorile cuprinse între $f(a)$ și $f(b)$

Fie f o funcție definită și monotonă pe intervalul închis $I = [a, b]$ și care ia toate valorile cuprinse între $f(a)$ și $f(b)$. Pentru a preciza, se presupune funcția f crescătoare pe I.

Fie x_0 un număr care aparține intervalului deschis $]a, b[$. Dacă $f(a) = f(x_0)$, datorită monotoniei, funcția f este constantă pe intervalul $[a, x_0]$; studiul este redus la acela al intervalului $[x_0, b]$.

Analog se întîmplă în cazul în care $f(x_0) = f(b)$.

Să presupunem deci:

$$f(a) < f(x_0) < f(b).$$

Să studiem continuitatea funcției f în punctul x_0.

Fie V o vecinătate a lui $f(x_0)$ în intervalul $[f(a), f(b)]$; $f(x_0)$ fiind un element din intervalul $]f(a), f(b)[$, există două numere reale pozitive nenule ε_1 și ε_2 astfel că V conține un interval deschis V_1 de forma:

$$V_1 =]f(x_0) - \varepsilon_1, f(x_0) + \varepsilon_2[.$$

Funcţia f fiind o surjecţie de la $[a, b]$ la $f[[a, b]]$, există un număr x_1 şi un număr x_2 din intervalul $[a, b]$ astfel că:

$$f(x_1) = f(x_0) - \varepsilon_1,$$

$$f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon_2.$$

Avem deci: $f(x_1) < f(x_0)$ şi $f(x_0) < f(x_2)$.
Prin urmare, conform monotoniei lui f (aici crescătoare):

$$x_1 < x_0 \quad \text{şi} \quad x_0 < x_2,$$

$$x_0 \in]x_1, x_2[.$$

Pe de altă parte, orice număr din V_1 este imaginea unui element x din $[a, b]$, care, conform monotoniei lui f, aparţine lui $]x_1, x_2[$. Imaginea inversă a lui V_1 prin f este deci intervalul deschis $]x_1, x_2[$; prin urmare imaginea inversă prin f a vecinătăţii V a lui $f(x_0)$ este o vecinătate a lui x_0. Funcţia f este deci continuă în punctul x_0.

TEOREMĂ / O funcţie definită pe un interval închis $[a, b]$, monotonă pe acest interval şi care ia toate valorile cuprinse între $f(a)$ şi $f(b)$, este continuă pe intervalul $[a, b]$.

Cazul în care funcţia f este descrescătoare se tratează în mod analog.

EXERCIŢII

1.130 Funcţia $f = [x \to |x + 2| + |x| + |x - 1|]$ este definită pe **R**. Este continuă pe **R**?

1.131 Acelaşi exerciţiu ca precedentul cu funcţia f definită prin:

$$x \neq -3 \text{ şi } x \neq 0, \ f(x) = |x + 3| - |x|, \ f(-3) = 0, \ f(0) = 3.$$

1.132 Fie funcţia f definită pe intervalul $[0, 2]$ prin:

$$0 \leqslant x \leqslant 1: \qquad f(x) = x^2,$$

$$1 < x \leqslant 2: \qquad f(x) = 2x - 1.$$

Această funcţie este continuă pe intervalul $[0, 2]$?
1.133 Acelaşi exerciţiu ca precedentul cu funcţia f definită prin:

$$x \neq 0: \qquad f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x},$$

$$x = 0: \qquad f(0) = 1.$$

1.134 Acelaşi exerciţiu ca precedentul cu funcţia f definită pe intervalul $[0, 1]$ prin:

$$f(x) = \sqrt{x} - E(\sqrt{x}).$$

E înseamnă funcţia „parte întreagă".
1.135 Se dă pe intervalul $I = [0, 3]$, funcţia:

$$f = [x \mapsto -x^2 + 4x].$$

1° Să se demonstreze că ea este continuă pe intervalul $[0, 3]$.
2° Să se studieze sensul ei de variaţie.
3° Să se determine amănunţit $f[I]$ şi să se studieze aplicaţia f de la I la $f[I]$.

1.136 Se dă funcția $f = [x \mapsto |x^2 - 2x|]$, definită pe intervalul $[0, 3]$.
1° Să se demonstreze că funcția este strict crescătoare pe intervalul $[0, 1]$, strict descrescătoare pe intervalul $[1, 2]$ și strict crescătoare pe intervalul $[2, 3]$.
2° Să se calculeze $f(0)$ și $f(3)$. Fie λ un număr cuprins între $f(0)$ și $f(3)$. Cîte numere există astfel ca $f(c) = \lambda$? Să se discute după valorile lui λ.

1.137 O funcție f este definită pe intervalul $[0, 1[$ în felul următor:

pentru $0 \leqslant x < 0{,}9$: $\quad f(x) = 1$,

pentru $0{,}9 \leqslant x < 0{,}99$: $\quad f(x) = \frac{1}{2}$,

pentru $0{,}99 \leqslant x < 0{,}999$: $\quad f(x) = \frac{1}{3}$,

pentru $0{,}999 \leqslant x < 0{,}999\,9$: $\quad f(x) = \frac{1}{4}$, etc.

$f(1)$ nu este încă precizată.

1° Care este valoarea luată de $f(x)$ pentru:

$$x_0 = 0{,}918; \quad x_1 = 0{,}991\,8; \quad x_2 = 0{,}999\,999\,18\,?$$

2° Ce valoare trebuie să i se atribuie lui $f(1)$ pentru ca funcția să fie continuă pentru $x = 1$?

1.138 E însemnînd funcția „parte întreagă", să se studieze continuitatea funcțiilor:

$$f = [x \mapsto x - E(x)];$$

$$g = [x \mapsto E(x) + (x - E(x))^2].$$

1.8 FUNCȚIA INVERSĂ A UNEI FUNCȚII CONTINUE ȘI STRICT MONOTONE PE UN INTERVAL

1.8.1 Definiție

Fie o funcție f, continuă pe un interval I și strict monotonă pe I. Știm (nr. 1.7.4) că f este o bijecție a lui I pe $f[I]$.
Aplicația inversă (nr. 1.2.6) a lui f, notată f^{-1} este o aplicație de la $J = f[I]$ la I. Avem următoarea echivalență fundamentală:

$$\boxed{\forall_I x, \quad \forall_J y \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)}$$

Fie i identitatea pe I și j identitatea pe J:

$$\forall_I x \quad i(x) = x; \quad \forall_J x \quad j(x) = x;$$

avem atunci:

$$f^{-1} \circ f = i,$$

$$f \circ f^{-1} = j.$$

Exemplu. Fie funcţia : $f = [x \mapsto x^2]$, definită pe intervalul $[0, +\infty[$ f este o funcţie polinomială continuă pe $\mathbf{R}$, deci continuă pe intervalul $[0, +\infty[$. Fie x_1 şi x_2 distincte şi care aparţin intervalului $[0, +\infty[$; avem :

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2.$$

Oricare ar fi x_1 şi x_2, care aparţin intervalului considerat, acest raport de creştere este strict pozitiv; funcţia f este deci strict crescătoare.
Pe de altă parte:

$$f[[0, +\infty[] = [0, +\infty[.$$

Funcţia f este o aplicaţie bijectivă a intervalului $[0, +\infty[$ pe el însuşi.

Se ştie că funcţia inversă este notată $\sqrt{}$ (rădăcină pătrată).

Se poate spune că oricărui număr real pozitiv X îi corespunde un număr real pozitiv Y unic astfel că $X = Y^2$; se notează :

$$Y = \sqrt{X}.$$

Este absolut fundamental să se remarce că:

$$\forall_R + X \qquad \sqrt{X} \in R+;$$

de exemplu:

$$\forall_R x \qquad \sqrt{x^2} = |x|.$$

1.8.2 Monotonia funcţiei inverse

Fie f o funcţie continuă, strict crescătoare pe un interval I şi fie f^{-1} funcţia inversă.
Prin ipoteză :

$$\forall_I x_1, \ \forall_I x_2 \left[x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \right].$$

Fie y_1 şi y_2 două numere oarecare din $f[I] = J$. Să studiem semnul, pentru y_1 diferit de y_2, al raportului :

$$\tau' = \frac{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)}{y_1 - y_2}.$$

Numerele y_1 şi y_2 fiind elemente din $J = f[I]$, există x_1 şi x_2 în I astfel că :

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{şi} \quad f(x_2) = y_2.$$

Avem deci :

$$\tau' = \frac{f^{-1}(f(x_1)) - f^{-1}(f(x_2))}{f(x_1) - f(x_2)},$$

adică :

$$\tau' = \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} = \frac{1}{\tau},$$

dacă:

$$\tau = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Dar: $\tau > 0$; deci: $\tau' > 0$, şi:

$$\forall_I y_1, \ \forall_J y_2 \left[y_1 \neq y_2 \Rightarrow \frac{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)}{y_1 - y_2} > 0 \right].$$

Rezultă că f^{-1} este crescătoare pe J.

Cazul funcţiei f descrescătoare se tratează în mod analog. Se poate deci enunţa:

TEOREMĂ / Funcţia inversă f^{-1} a unei funcţii f continue şi strict monotone pe un interval I este strict monotonă pe $f[I] = J$. Mai mult, f^{-1} şi f au acelaşi sens de variaţie.

1.8.3 Continuitatea funcţiei inverse

Funcţia inversă f^{-1} a funcţiei f continue şi monotone pe I este o bijecţie a lui $J = f[I]$ pe I; f^{-1} ia deci o dată şi numai o dată, orice valoare a lui $f[I]$. Mai mult, f^{-1} este strict monotonă pe J. Deci, ea este continuă pe orice interval închis inclus în J (nr. 1.7.5).

Aşadar, pentru orice element x_0 al lui J, există un interval închis conţinînd pe x_0 şi inclus în J.

Deci, funcţia f este continuă pe J.

TEOREMĂ / Funcţia inversă a unei funcţii f continue şi strict monotone pe un interval I este continuă şi strict monotonă pe $J = f[I]$.

1.8.4 Graficul şi reprezentarea grafică a funcţiei

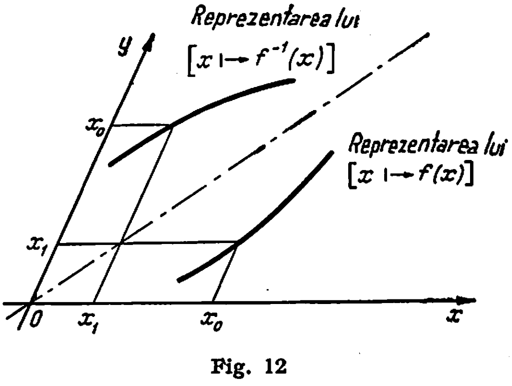


Fig. 12

Fie $\mathcal{G} = \{(x, f(x))\,;\ x \in I\}$ graficul funcţiei f, definite, continue şi strict monotone pe intervalul I.

Fie $\mathcal{G}' = \{(y, f^{-1}(y))\,;\ y \in J\}$ graficul funcţiei inverse f^{-1}, definite, continue şi strict monotone pe intervalul I.

Conform cu echivalenţa fundamentală de la nr. 1.8.1, avem:

$$(x_0, x_1) \in \mathcal{G} \Leftrightarrow (x_0, x_1) \in \mathcal{G}'.$$

Această proprietate se traduce pe o reprezentare grafică carteziană printr-o simetrie în raport cu dreapta de ecuaţie $y = x$ (*fig.* 12).

1.8.5 Funcții circulare inverse

Fie funcția f definită pe intervalul închis $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = I$ prin:

$$f(x) = \sin x.$$

Această funcție este continuă (cursul de anul I) și monotonă pe I. Funcția f^{-1} este definită pe intervalul $J = [-1, +1]$ și este numită funcție „Arc sinus".
[Arcsinus] (x) se notează Arcsin x. Avem așadar echivalența fundamentală:

$$\boxed{\begin{gathered}[x \in [-1, +1] \text{ și } y = \text{Arcsin } x] \\ \Leftrightarrow \left[y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ și } \sin y = x\right]\end{gathered}}$$

Funcția Arcsinus este continuă și crescătoare pe intervalul închis $[-1, +1]$. Această funcție este reprezentată grafic în *figura* 13. Se pot de asemenea defini funcțiile Arccosinus (Arccos), Arctangentă (Arctg) și Arccotangentă (Arcctg) (a se vedea exercițiile 1.139—1.142).

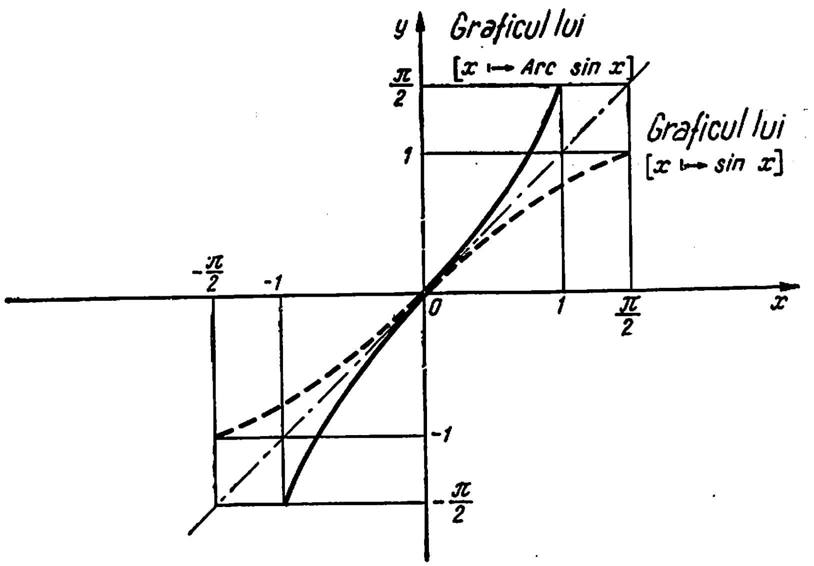


Fig. 13

1.139 Să se studieze funcţia inversă a funcţiei f definită pe intervalul $[0, \pi]$ prin $f(x) = \cos x$. Această funcţie inversă este funcţia „Arccosinus".

1.140 a) Să se studieze funcţia inversă a funcţiei f definită pe intervalul $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ prin $f(x) = \operatorname{tg} x$. Această funcţie inversă este funcţia „Arctangentă".
b) Să se studieze funcţia inversă a funcţiei f definită pe intervalul $]0, \pi[$ prin $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Această funcţie inversă este funcţia „Arccotangentă".

1.141 Să se demonstreze următoarele proprietăţi:

a) $\forall_{[-1, 1]} x \quad \operatorname{Arcsin}(-x) = -\operatorname{Arcsin} x$.

b) $\forall_{[-1, 1]} x \quad \operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos} x$.

c) $\forall_{\mathbf{R}} x \quad \operatorname{Arctg}(-x) = -\operatorname{Arctg} x$.

d) $\forall_{\mathbf{R}} x \quad \operatorname{Arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{Arcctg} x$.

1.142 Să se demonstreze următoarele proprietăţi:

a) $\forall_{[-1, +1]} x \quad \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$.

b) $\forall_{\mathbf{R}} x \quad \operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

c) $\forall_{\mathbf{R}^{+*}} x \quad \operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

d) $\forall_{\mathbf{R}^{-*}} x \quad \operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

1.143 Să se studieze, pe intervalul $[0, 1]$, funcţia $f = [x \mapsto x^4 - 2x^2]$ şi funcţia inversă f^{-1}.

1.144 Să se studieze, pe intervalul $[0, 1]$, funcţia $f = \left[x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}\right]$ şi funcţia inversă f^{-1}.

1.9 APLICAŢII LA FUNCŢIILE RADICALI. EXPONENŢI RAŢIONALI

1.9.1 Studiul funcţiilor $[x \to \sqrt[n]{x}]$.

■ Fie f_n funcţia $[x \mapsto x^n]$ unde n este un număr întreg pozitiv nenul; studiem această funcţie pe intervalul $I = [0, +\infty[$.

a) Funcţia f_n este o funcţie continuă pe I.

b) Fie x_1 şi x_2 două elemente diferite din I. Raportul de creştere a funcţiei f_n între x_1 şi x_2 este:

$$\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x_2 + \ldots + x_1 x_2^{n-2} + x_2^{n-1}.$$

Acest raport de creştere fiind strict pozitiv, funcţia f_n este strict crescătoare pe I.

c) Pentru orice n element din N^*, avem:

$$x \geqslant 1 \Rightarrow x^n \geqslant x.$$

Rezultă de aici că, pentru ca $f_n(x)$ să fie superioară unui număr arbitrar A, este suficient ca x să fie superior numărului A. Se poate conchide:

$$f_n[I] = [0, +\infty[.$$

■ Funcţia f_n, continuă şi strict crescătoare pe intervalul $I = [0, +\infty[$, admite o aplicaţie inversă f_n^{-1} a lui $f[I] = I$ pe I, continuă şi strict crescătoare pe I. Această aplicaţie inversă este notată:

$$f_n^{-1} = [x \mapsto \sqrt[n]{x}].$$

Este fundamental să se observe că:

a) $\sqrt[n]{x}$ nu este definită decît pentru x pozitiv;

b) $\sqrt[n]{x}$ este totdeauna un număr pozitiv.

■ Fie a şi b două numere reale pozitive şi fie:

$$y_1 = \sqrt[n]{a} \quad \text{şi} \quad y_2 = \sqrt[n]{b}.$$

Avem:

$$a = y_1^n \quad \text{şi} \quad b = y_2^n;$$

deci:

$$ab = y_1^n y_2^n = (y_1 y_2)^n;$$

rezultă:

$$y_1 y_2 = \sqrt[n]{ab}.$$

Avem deci formula fundamentală:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}}$$

Această formulă se extinde fără dificultate la mai mulţi factori, în particular atunci cînd p factori sînt egali cu $\sqrt[n]{a}$; se obţine:

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}}$$

Observaţie. — Fie: $\sqrt[n]{x} = f_n^{-1}(x)$ şi $X^p = f_p(X)$.

Ultima formulă se interpretează folosind compunerea funcţiilor:

$$f_p \circ f_n^{-1} = f_n^{-1} \circ f_p.$$

Funcţiile f_p şi f_n^{-1} se comută la compunerea funcţiilor.

1.9.2. Funcțiile $x \to \sqrt[n]{x^p}$

Rezultă de la nr. 1.9.1, din teorema 5 de la nr. 1.6.6 și din faptul că funcția compusă a două funcții crescătoare este ea însăși crescătoare că funcțiile $[x \mapsto \sqrt[n]{x^p}]$ sînt funcții continue și strict crescătoare pe intervalul $I = [0, +\infty[$. Funcția $x \mapsto \sqrt[n]{x^p}$ ia o dată și numai o dată orice valoare care aparține intervalului $[0, +\infty[$; rezultă că pentru orice numere reale a, b și pentru orice numere întregi n, p:

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{b^p} \Leftrightarrow a = b.$$

Se convine să se noteze funcția $x \mapsto \sqrt[n]{x^p}$ sub forma $x \mapsto x^{\frac{p}{n}}$.
În paragrafele care urmează vom justifica această notație și o vom extinde la exponenții raționali oarecare.
Să reamintim mai întîi formulele fundamentale care permit calculul cu exponenți întregi și pozitivi:

$$\boxed{\begin{aligned} & a^m \cdot a^p = a^{m+p} \\ & (a^m)^p = a^{mp} = (a^p)^m \\ & (ab)^m = a^m\, b^m \end{aligned}}$$

1.9.3. Exponenți fracționari

■ $\frac{m}{p}$ și $\frac{m'}{p'}$ fiind două fracții, să studiem egalitatea:

$$a^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{m'}{p'}},$$

unde a este un număr real pozitiv oarecare.
Această egalitate este, prin definiție, echivalentă cu:

$$\sqrt[p]{a^m} = \sqrt[p']{a^{m'}}.$$

Să ridicăm cei doi membri ai acestei egalități la puterea pp'. Avem:

$$[(\sqrt[p]{a^m})^p]^{p'} = [(\sqrt[p']{a^{m'}})^{p'}]^p,$$

sau:

$$(a^m)^{p'} = (a^{m'})^p,$$

adică:

$$a^{mp'} = a^{m'p}.$$

În sfîrșit, $a^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{m'}{p'}}$ pentru orice număr real pozitiv a dacă și numai dacă

$$mp' = m'p.$$

Se ştie că această ultimă condiţie arată că fracţiile $\frac{m}{p}$ şi $\frac{m'}{p'}$ reprezintă acelaşi număr raţional.

Calcule analoage permit să se compare numere scrise sub forma:

$$a^{\frac{m}{p}} \quad \text{şi} \quad b^{\frac{m'}{p'}}$$

Exemplu. Să se aşeze în ordine crescătoare numerele:

$$\sqrt[4]{3},\ \sqrt[5]{4},\ \sqrt[10]{15}.$$

Avem:

$$\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{5}{20}} = \sqrt[20]{243};$$

$$\sqrt[5]{4} = 4^{\frac{1}{5}} = 4^{\frac{4}{20}} = \sqrt[20]{256};$$

$$\sqrt[10]{15} = 15^{\frac{1}{10}} = 15^{\frac{2}{20}} = \sqrt[20]{225}.$$

Se conchide:

$$\sqrt[10]{15} < \sqrt[4]{3} < \sqrt[5]{4}.$$

■ Să calculăm numărul:

$$b = a^{\frac{m}{p}} \cdot a^{\frac{m'}{p'}};$$

avem:

$$b^{pp'} = \left(a^{\frac{m}{p}}\right)^{pp'} \cdot \left(a^{\frac{m'}{p'}}\right)^{pp'} = a^{mp'} \cdot a^{m'p},$$

deci:

$$b^{pp'} = a^{mp'+m'p}$$

sau:

$$b = a^{\frac{mp'+m'p}{pp'}} = a^{\frac{m}{p}+\frac{m'}{p'}}.$$

De unde prima formulă, valabilă pentru orice număr real pozitiv a şi pentru orice cvadruplet (m, p, m', p') de numere întregi nenule:

$$\boxed{a^{\frac{m}{p}} \cdot a^{\frac{m'}{p'}} = a^{\frac{m}{p}+\frac{m'}{p'}}.}$$

Exemplu. Să se calculeze numărul:

$x = \sqrt{a^2}\,\sqrt[4]{a^3}\,\sqrt[5]{a^4}\,\sqrt{a^5}$, *unde a este un uumăr real pozitiv.*

Avem: $x = a \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{4}{5}} \cdot a^{\frac{5}{2}}$;

de unde:

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{2} = \frac{101}{20} = 5 + \frac{1}{20}.$$

Rezultă:

$$x = a^5 \sqrt[20]{a}.$$

■ Să calculăm numărul: $b = \left(a^{\frac{m}{p}}\right)^{\frac{r}{s}}$.

Avem: $b^s = \left[\sqrt[s]{\left(a^{\frac{m}{p}}\right)^r}\right]^s = \left(a^{\frac{m}{p}}\right)^r$,

apoi: $b^{ps} = (b^s)^p = \left[\left(a^{\frac{m}{p}}\right)^r\right]^p = \left[\left(a^{\frac{m}{p}}\right)^p\right]^r = (a^m)^r = a^{mr}$.

Rezultă: $b = a^{\frac{mr}{ps}}$.

De unde a doua formulă, valabilă pentru orice număr real pozitiv a şi pentru orice cvadruplet (m, p, r, s) de numere întregi nenule:

$$\boxed{\left(a^{\frac{m}{p}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{mr}{ps}}}$$

Exemplu. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{32}} = \left(32^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = 32^{\frac{1}{15}} = (2^5)^{\frac{1}{15}} = 2^{\frac{5}{15}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}.$

Formula pe care am stabilit-o dă legea de compoziţie a funcţiilor:

$$x \mapsto \sqrt[p]{x^m}.$$

Dacă se notează cu $f_{(m,p)}$ o asemenea funcţie, avem:

$$f_{(r,s)} \circ f_{(m,p)} = f_{(m,p)} \circ f_{(r,s)} = f_{(mr,\, ps)}.$$

Se mai remarcă existenţa comutativităţii pentru compunere.

■ Să calculăm numărul:

$$x = (ab)^{\frac{m}{p}}.$$

Avem imediat:

$$x^p = (ab)^m = a^m b^m,$$

deci:

$$x = \sqrt[p]{a^m b^m} = \sqrt[p]{a^m}\,\sqrt[p]{b^m} = a^{\frac{m}{p}} b^{\frac{m}{p}}.$$

De unde a treia formulă, valabilă pentru orice triplet (a, b, c), de numere reale pozitive şi orice pereche (m, p) de numere întregi nenule.

$$\boxed{(ab)^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{m}{p}} b^{\frac{m}{p}}}$$

Această formulă se extinde fără dificultate la un număr oarecare de factori.

Exemplu. $(3 \times 8)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{3}.$

Observație importantă. — Nu trebuie să se uite niciodată că toate proprietățile care au fost stabilite au fost stabilite pentru *numere pozitive.* Uitîndu-se această observație, se riscă să se comită greșeli serioase.

Exemplu. Se scrie cîteodată, prin abuz de scriere, că $\sqrt[3]{-8}$ este numărul real -2, al cărui cub este -8; această scriere ar conduce la:

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64},$$

ceea ce este fals pentru că primul număr este egal cu -2 și ultimul cu $+2$. Trebuie deci să se scrie:

$$-2 = -\sqrt[3]{8}.$$

1.9.4. Exponenți raționali

Ne propunem să extindem rezultatele precedente la exponenții raționali pozitivi și negativi. Pentru aceasta, vom adopta următoarele convenții, valabile pentru orice număr real strict pozitiv a:

$$a^0 = 1;$$

$$\forall_Q \alpha \qquad a^\alpha = a^{\frac{m}{p}},$$

unde $\frac{m}{p}$ este un reprezentant fracționar al lui α (nr. 1.9.3);

$$\forall_Q \alpha \qquad a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}.$$

Aceste convenții vor fi justificate imediat.

■ Să se calculeze, pentru numere raționale oarecare α și β, numărul:

$$x = a^\alpha \cdot a^\beta.$$

1° $\alpha > 0$, $\beta > 0$: $x = a^{\alpha+\beta}$, formulă demonstrată la nr. 1.9.3.

2° $\alpha > 0$, $\beta < 0$: $x = a^\alpha \dfrac{1}{a^{-\beta}}$.

a) $\alpha > -\beta$; să punem: $\alpha = -\beta + \gamma$; se obține:

$$x = \frac{a^{-\beta+\gamma}}{a^{-\beta}} = \frac{a^{-\beta}a^\gamma}{a^{-\beta}} = a^\gamma = a^{\alpha+\beta}.$$

b) $\alpha = -\beta$; $x = 1 = a^0 = a^{\alpha+\beta}$.

c) $\alpha < -\beta$; să punem: $-\beta = \alpha + \gamma$; se obține:

$$x = \frac{a^\alpha}{a^{\gamma+\alpha}} = \frac{a^\alpha}{a^\gamma a^\alpha} = \frac{1}{a^\gamma} = a^{-\gamma} = a^{\alpha+\beta}.$$

3° $\alpha < 0$ $\beta < 0$: $x = \dfrac{1}{a^{-\alpha}} \cdot \dfrac{1}{a^{-\beta}} = \dfrac{1}{a^{-\alpha-\beta}} = a^{\alpha+\beta}$.

Avem deci:

$$\boxed{\forall_{Q^2}(\alpha, \beta)\ \forall_{R_+}\ a \quad a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}}$$

Observație. — Pentru α și β numere raționale oarecare, avem:

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^\alpha \cdot a^{-\beta} = a^{\alpha-\beta};$$

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}.$$

■ Să se calculeze numărul: $x = (a^\alpha)^\beta$.

1° $\alpha > 0,\ \beta > 0$: $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$ (nr. 1.9.3).

2° $\alpha > 0,\ \beta < 0$: $x = \frac{1}{(a^\alpha)^{-\beta}} = \frac{1}{a^{-\alpha\beta}} = a^{\alpha\beta}$.

3° $\alpha < 0,\ \beta > 0$: $x = \left(\frac{1}{a^{-\alpha}}\right)^\beta = \frac{1}{(a^{-\alpha})^\beta} = \frac{1}{a^{-\alpha\beta}} = a^{\alpha\beta}$.

4° $\alpha < 0,\ \beta < 0$: $x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{-\alpha}}\right)^{-\beta}} = \frac{1}{\frac{1}{(a^{-\alpha})^{-\beta}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{\alpha\beta}}} = a^{\alpha\beta}$.

Avem deci:

$$\boxed{\forall_{Q^2}(\alpha, \beta),\ \forall_{R_+}\ a \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}.}$$

■ Să se calculeze numărul:

$$x = (ab)^\alpha.$$

1° $\alpha > 0$: $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$ (nr. 1.9.3).

2° $\alpha < 0$: $x = \frac{1}{(ab)^{-\alpha}} = \frac{1}{a^{-\alpha} b^{-\alpha}} = a^\alpha b^\alpha$.

Avem deci:

$$\boxed{\forall_Q \alpha,\ \forall_{R_+}(a, b) \quad (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha}$$

Observație. — În toate demonstrațiile s-a presupus implicit că exponenții α, β sînt nenuli. Se verifică fără dificultate validitatea formulelor fundamentale cînd α sau β este nul.

EXERCIȚII

1.145 Fie funcțiile:

$$f = [x \mapsto \sqrt[q]{x^p}],$$

$$g = [x \mapsto \sqrt[p]{x^q}],$$

unde p și q sînt numere întregi nenule.

Să se verifice că:

$$f = g^{-1}.$$

1.146 Să se aşeze în ordine crescătoare următoarele numere:

$$\sqrt[3]{28},\quad \sqrt[4]{15},\quad \sqrt{13},\quad \sqrt[9]{80},\quad \sqrt[12]{100}.$$

1.147 Folosindu-se identitatea $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, să se transforme fracţia $A = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}}$ într-o fracţie echivalentă cu numitorul întreg.

1.148 Să se simplifice expresia:

$$\frac{a^3 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}} + 2b^{\frac{13}{12}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}}.$$

1.149 Să se determine mulţimea:

$$E = \{x;\ x \in Q^+ \quad \text{şi} \quad 2^{3x+1} = 8^{5x-3}\}.$$

1.150 Să se determine mulţimea:

$$E = \left\{x;\ x \in Q^+ \quad \text{şi} \quad 3^{4x} = 9^{\frac{8x-5}{8x-8}}\right\}$$

1.151 Să se demonstreze că relaţia $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = z^{\frac{2}{3}}$ implică relaţia:

$$(x^2 + y^2 - z^2)^3 + 27x^2y^2z^2 = 0.$$

1.152 Să se calculeze numerele:

a) $x = \dfrac{\sqrt[5]{4}\sqrt{8}\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt{2}}}$. b) $x = \dfrac{\sqrt[3]{9}\sqrt{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[5]{27}\sqrt{6}}$.

c) $x = \dfrac{\sqrt{4}\sqrt{8}\left(\sqrt[3]{\sqrt{4}}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$. d) $x = \dfrac{\sqrt[15]{3}\sqrt[3]{9}\left(\sqrt{9}\right)^3}{\sqrt[3]{27}\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^2}$.

1.153 Pentru $x = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{6-a}{a}}$, să se calculeze valoarea numerică a expresiei:

$$y = \frac{1-3x}{1+3x}\sqrt{\frac{1+ax}{1-ax}}.$$

1.154 Să se determine mulţimea:

$$E = \left\{(x;y);\quad (x, y) \in Q^2 \quad \text{şi} \quad \begin{vmatrix} 32^{(1-x)(y-1)} = 2 \\ 81^{xy+1} = 3^{5(x+y)} \end{vmatrix}\right\}.$$

Să se efectueze operaţiile indicate:

1.155 $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6}$; $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{32}$.

1.156 $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$.

1.157 $12\sqrt{8} + 5\sqrt{72} - 7\sqrt{32} - \sqrt{50}$.

1.158 $\dfrac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

1.159 $5\sqrt[3]{6}\times 3\sqrt[3]{4}$; $\sqrt{125}:\sqrt[8]{25}$; $2\sqrt[6]{27}:\sqrt[4]{9}$.

1.160 $(2\sqrt{32}+3\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}):\sqrt{8}$; $(\sqrt[3]{12}+\sqrt{2}):2\sqrt{2}$.

1.161 Exercițiu rezolvat. — *Să se transforme numărul:*

$$A=\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}$$

într-o fracție echivalentă, dar cu numitor întreg.
Se folosește identitatea:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

punînd: $a=\sqrt[3]{4},\quad b=\sqrt[3]{3}.$

avem: $a^2=\sqrt[3]{16},\quad b^2=\sqrt[3]{9},\quad ab=\sqrt[3]{12},$

de unde egalitatea:

$$4-3=(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}).$$

Se conchide:

$$A=\frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}}{4-3}=\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}.$$

*

Să se transforme următoarele expresii astfel ca să nu mai figureze radicali la numitor:

1.162 $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

1.163 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; $\dfrac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$.

1.164 $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{4}}$; $\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}-1}$.

1.165 $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$.

PROBLEME

1.166 Pentru orice x real, se notează prin $E(x)$ cel mai mare număr întreg inferior lui sau egal cu x.

1° Se pune: $z(x)=E(x)+E(-x).$

Să se calculeze $z(x)$ pentru x număr întreg, apoi pentru x neîntreg. Să se deducă că funcția $[x\mapsto z(x)]$ nu este continuă pe $\mathbf{R}$.
2° Să se determine domeniul de definiție al funcțiilor:

$$z_1=[x\mapsto\sqrt{z(x)}],\quad z_2=\left[x\mapsto\frac{1}{z(x)}\right],\quad z_3=z_1+z_2.$$

3° Să se studieze din punctul de vedere al continuității funcțiile:

$$u = [x \mapsto x^2(1 + z(x))], \quad v = [x \mapsto -x^2 z(x)].$$

4° Să se reia chestiunea de la nr. 3° pentru funcțiile:

$$y = [x \mapsto u(x) + v(x)], \ y_1 = [x \mapsto [1 + u(x)][1 + v(x)]].$$

1.167 Se consideră funcția z de la nr. 1.166 definită prin:

$$z(x) = E(x) - E(-x).$$

1° Să se studieze: $z \circ z$.

2° Fie funcția $t = [x \mapsto t(x) = z(x) \sin kx]$.

Se poate alege un k pentru ca funcția t să fie continuă?
1.168 Fie f o funcție de la $\mathbf{R}+$ la $\mathbf{R}+$. Fie g funcția definită prin:

$$g(x) = E[f(x)],$$

unde E este funcția parte întreagă.
1° Pentru $f(x) = \sqrt{x}$, să se determine $f(x_0)$ pentru:

$$x_0 = 2, \ x_0 = \pi, \ x_0 = 4, \ x_0 = \frac{19}{2}.$$

2° Să se studieze g cînd:

$$f = [x \mapsto x^2] \text{ și } x \in [0, 3].$$

3° Aceeași chestiune pentru:

$$f = [x \mapsto 3x] \text{ și } x \in [0, 3].$$

Să se studieze punctele comune graficelor acestor ultime două funcții.
1.169 Fie f și g două aplicații continue de la R la R.
Fie A mulțimea numerelor reale a astfel că $f(a) = g(a)$; A este mulțimea soluțiilor ecuației definită pe $\mathbf{R}$ prin $f(x) = g(x)$:

$$A = \{a;\ a \in \mathbf{R} \text{ și } f(a) = g(a)\}.$$

1° Fie un element x_0 oarecare al complementarei lui A în R. Avem deci:

$$g(x_0) \neq f(x_0).$$

Punînd $|g(x_0) - f(x_0)| = 2\varepsilon$, să se demonstreze că există o vecinătate V a lui x_0 astfel că:

$$\forall_V x \quad f(x) \neq g(x).$$

(Se va folosi continuitatea lui f și a lui g.)
2° Să se deducă că mulțimea A este închisă.
3° Se presupune că există o mulțime A_0 a lui A, „densă" în $\mathbf{R}(\bar{A}_0 = \mathbf{R})$.
Ce se poate deduce pentru funcțiile f și g ($\bar{A}_0$ este aderența lui A_0, ex. nr. 1.4)?
1.170. Fie f și g două aplicații continue de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$.
Inspirîndu-ne din enunțul exercițiului nr. 1.169, să se demonstreze că mulțimea:

$$B = \{b;\ b \in \mathbf{R} \text{ și } f(b) \leqslant g(b)\} \text{ este închisă.}$$

Să se deducă că dacă f și g sînt două aplicații de la D la $\mathbf{R}$ astfel că există o submulțime $\bar{B}_0$ a lui B, astfel că $\bar{B}_0 = D$, avem:

$$\forall_D x \quad f(x) \leqslant g(x).$$

2 LIMITE

2.1. LIMITA UNEI FUNCŢII ÎNTR-UN PUNCT

2.1.1. Punerea problemei

Studiul continuităţii funcţiilor permite să se examineze comportarea unei funcţii numerice în vecinătatea unui punct x_0 a cărui vecinătate este inclusă în domeniul de definiţie D.
Dar se poate întîmpla ca o funcţie numerică f să fie definită în puncte vecine cu x_0 fără a fi totuşi definită în x_0.
Este cazul, de exemplu, în care domeniul de definiţie D al funcţiei f este un interval deschis de extremitate x_0:

$$D =]x_0, a[.$$

Funcţia f nu este definită în x_0, dar este definită în puncte „vecine la dreapta" (în acest exemplu) lui x_0. Într-adevăr, oricare ar fi numărul real pozitiv nenul ε, există un punct x din domeniul de definiţie D astfel că $x - x_0$ este, în valoare absolută, inferior lui ε.
Această proprietate a punctului x_0 se poate exprima, dacă $\mathcal{V}(x_0)$ este mulţimea vecinătăţilor lui x_0, prin

$$\forall_{\mathcal{V}(x_0)} V \qquad D \cap [V - \{x_0\}] \neq \emptyset.$$

Observaţie. — Punctele care aparţin lui D şi care nu au această proprietate se numesc puncte *izolate.*

2.1.2 Puncte de acumulare ale unei mulţimi

DEFINIŢIE / Un număr real x_0 este un punct de acumulare al unei mulţimi E de numere reale dacă şi numai dacă orice vecinătate a lui x_0 în R are cu E o intersecţie care nu se reduce la $\{x_0\}$.

Observaţii. — **1** x_0 este un punct de acumulare al lui E dacă şi numai dacă nici o vecinătate a lui x_0 în E nu este redusă la $\{x_0\}$.

2 Punctele din E care nu sînt izolate sînt puncte de acumulare ale mulțimii E.
3 Un punct de acumulare din E nu aparține în mod necesar lui E.
4 Vom nota cu E' mulțimea punctelor de acumulare ale unei mulțimi E. O vom numi *domeniul asociat*.

Exemple.

I.	$E = \mathbf{R}$,	$E' = \mathbf{R}$.
II.	$E =]-1, 3[$,	$E' = [1, 3]$.
III.	$E =]0, 1[\cup \{2\}$,	$E' = [0, 1]$.
IV.	$E =]0, 1[\cup]1, 2[$,	$E' = [0, 2]$.
V.	$E = \left\{\frac{1}{n};\ n \in Z\right\}$,	$E' = \{0\}$.

În acest exemplu, nici un element din E nu este punct de acumulare al lui E în $\mathbf{R}$. Într-adevăr, în intervalul deschis $\left]\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}\right[$ nu există nici un alt element din E în afară de $\frac{1}{n}\cdot$

VI.	$E = \mathbf{N}$,	$E' = \emptyset$.

Să notăm totodată că în $\overline{\mathbf{R}}$, dreapta închisă (nr. 2.3.1), E admite elementul $+\infty$ ca punct de acumulare, orice interval de forma $]A, +\infty[$ conținînd efectiv o infinitate de elemente din $\mathbf{N}$ și aceasta oricare ar fi numărul real A.

VII.	$E = \mathbf{Q}$,	$E' = \mathbf{R}$.

---

5 Mulțimea E' a punctelor de acumulare în $\mathbf{R}$ a unei mulțimi E este complementara în aderența $\bar{E}$ a lui E a mulțimii punctelor izolate din E (exercițiul nr. 2.8).
Trebuie notat că noțiunea de limită a unei funcții într-un punct de acumulare din domeniul ei de definiție se va putea extinde fără modificare la un punct izolat din E, cu toate că atunci aceasta nu mai prezintă interes pentru studiul funcției f, despre care se știe totul în vecinătatea unui punct izolat x_0 de îndată ce se cunoaște $f(x_0)$.

2.1.3 Limite de funcții într-un punct de acumulare din domeniul lor de definiție

DEFINIȚIE / **Fie f o funcție numerică definită pe un domeniu D. Fie x_0 un punct al mulțimii asociate D'. Se spune că funcția f admite numărul real l ca limită în punctul x_0 dacă funcția F definită prin:**

$$\begin{cases} F(x) = f(x) \Leftrightarrow x \in D - \{x_0\} \\ F(x_0) = l, \end{cases}$$

este continuă în x_0.

Se notează:
$$\lim_{x_0} f = l,$$
sau încă:
$$\lim_{x_0} [x \mapsto f(x)] = l\ [1].$$

Această definiție se poate exprima în diferite feluri. Fie $\mathcal{V}(l)$ mulțimea vecinătăților lui l în **R**. Fie $\mathcal{V}(x_0)$ mulțimea vecinătăților lui x_0 în R.
Fie V aparținînd lui $\mathcal{V}(x_0)$; se notează $V^* = V - \{x_0\}$ și $\mathcal{V}^*(x_0)$ mulțimea vecinătăților lui x_0 fără punctul x_0. Se notează de asemenea D^* mulțimea $D - \{x_0\}$ (eventual egală cu D dacă x_0 nu este element din D). Avem atunci:

$$\boxed{\lim_{x_0} f = l \Leftrightarrow \forall_{\mathcal{V}(l)} V;\ \exists_{\mathcal{V}^*(x_0)} W^*\quad f[W^* \cap D] \subset V}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim_{x_0} f = l \Leftrightarrow \forall_{R^{+*}} \varepsilon,\ \exists_{R^{+*}} \eta,\ \forall_{D^*} x\\ [|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon]\end{array}}$$

Observație. — Dacă funcția f definită mai înainte este continuă la dreapta (respectiv la stînga) punctului x_0, se spune că l este *limita la dreapta* (respectiv *la stînga*) a funcției f în punctul x_0. Se notează:
$$\lim_{x_0^+} f = l \qquad \text{(respectiv } \lim_{x_0^-} f = l).$$

Exemple. **I.** Să considerăm funcția f definită prin:
$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}.$$
Domeniul de definiție D al acestei funcții este:
$$D = R - \{1\}.$$
În D, avem:
$$f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{x-1} = x - 2.$$
Funcția F definită prin:
$$\begin{cases} F(x) = f(x) \Leftrightarrow x \in D \\ F(1) = -1, \end{cases}$$
se mai poate defini pentru orice număr real x prin:
$$F(x) = x - 2.$$
Într-adevăr:
$$F(1) = 1 - 2 = -1$$
și: $F(x) = f(x)$ pentru orice x care aparține lui D.

---

[1] Se găsesc adesea notațiile: $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$ sau: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Conform cu studiul continuității, funcția F este continuă în orice punct din $\mathbf{R}$ și, în particular, pentru $x_0 = 1$.
Prin urmare:

$$\lim_{1} \left[x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}\right] = -1.$$

II. Fie funcția f definită prin:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2} - 1}{x^2 - 1}.$$

Domeniul de definiție al lui f este:

$$D = \mathbf{R} - \{-1, +1\}.$$

Să studiem funcția f în vecinătatea lui $x_0 = 1$.

În $\mathbf{R}^+ - \{1\}: \sqrt{x^2} = x;$

prin urmare:

$$x \in \mathbf{R}^+ - \{1\} \Rightarrow f(x) = \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{x + 1}.$$

Fie F_1 funcția definită pe $\mathbf{R}+$ prin:

$$F_1(x) = \frac{1}{x + 1};$$

ea satisface proprietățile:

$$\begin{cases} F_1(x) = f(x) \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}+ - \{1\} \\ F_1(1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Funcția F_1 este continuă în punctul $x = 1$.
Deci funcția F, definită prin:

$$\begin{cases} F(x) = F_1(x) \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}+ \\ F(x) = f(x) \Leftrightarrow x \notin \mathbf{R}+, \end{cases}$$

este continuă în punctul $x_0 = 1$; prin urmare:

$$\lim_{1} \left[x \mapsto \frac{\sqrt{x^2} - 1}{x^2 - 1}\right] = \frac{1}{2}.$$

Să studiem, de asemenea, funcția f în vecinătatea lui $x_1 = -1$.

În $\mathbf{R}^- - \{-1\}: \quad \sqrt{x^2} = -x;$

prin urmare: $x \in \mathbf{R}^- - \{-1\} \Rightarrow f(x) = \dfrac{-x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \dfrac{1}{1 - x}.$

Fie F_2 funcția definită pe $\mathbf{R}^-$ prin: $F_2(x) = \dfrac{1}{1 - x};$

ea satisface condițiile:

$$\begin{cases} F_2(x) = f(x) \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}^- - \{-1\}. \\ F_2(-1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Deci funcţia F_0, definită prin:

$$\begin{cases} F_0(x) = F_2(x) \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}^- \\ F_0(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow x \notin \mathbf{R}^-, \end{cases}$$

adică prin:

$$\begin{cases} F_0(x) = f(x) \Leftrightarrow x \in D \\ F_0(-1) = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

este continuă în punctul $x_1 = -1$; prin urmare:

$$\lim_{-1} \left[x \mapsto \frac{\sqrt{x^2} - 1}{x^2 - 1} \right] = \frac{1}{2}.$$

III. Funcţia f, definită prin:

$f(x) = \dfrac{(\sqrt{x})^2}{x} + 2x + |x|$, are ca domeniu de definiţie mulţimea $D = \mathbf{R}^{+*}$. Pe domeniul ei de definiţie:

$$f(x) = 1 + 2x + |x| = 1 + 3x.$$

Funcţia F, definită prin:

$$\begin{cases} F(x) = f(x) \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}^{+*} \\ F(0) = 1, \end{cases}$$

este continuă la dreapta în punctul 0. Deci:

$$\lim_{0^+} f = \lim_{0^+} \left[x \mapsto \frac{(\sqrt{x})^2}{x} + 2x + |x| \right] = 1.$$

Observaţii. — **1** Dacă l este limita în punctul x_0 a unei funcţii f, l *este un număr real*: $\lim_{x_0} f = l \Rightarrow l \in R$; l nu este în nici un caz o expresie care conţine variabile.

2 Enunţul „l este limita funcţiei f" nu are nici un sens dacă nu se precizează condiţia „în punctul x_0".

3 Enunţul „l este limita funcţiei f în punctul x_0" este o propoziţie care cere totdeauna demonstraţie.

4 Limita funcţiei f în punctul x_0 depinde de mulţimea valorilor $f(x)$ într-o vecinătate a lui x_0. Ea nu depinde nici de existenţa, nici de eventuala valoare a lui $f(x_0)$.

EXERCIŢII

În următoarele cazuri, să se demonstreze că funcţia f admite ca limită pe l în punctul x_0:

2.1 $f = [x \mapsto x^2 + 2x + 3]$, $\quad x_0 = 1$, $\quad l = 6$.

2.2 $f = [x \mapsto x^3 - 3x + 2]$, $\quad x_0 = 1$, $\quad l = 0$.

2.3 $f = \left[x \mapsto \dfrac{x + 3}{x + 2}\right]$, $\quad x_0 = 2$, $\quad l = \dfrac{5}{4}$.

2.4 $f = \left[x \mapsto x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2}}\right]$, $\quad x_0 = 0, \quad l = 0.$

2.5 $f = \left[x \mapsto \frac{4x}{x}\right]$, $\quad x_0 = 0, \quad l = 4$

2.6 $f = \left[x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}\right]$, $\quad x_0 = 1, \quad l = -1.$

2.7 $f = \left[x \mapsto \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}\right]$, $\quad x_0 = -3, \quad l = -\frac{1}{2}.$

2.8 Fie P o parte a unui spaţiu topologic T. Se spune că un element x care aparţine lui T este *aderent* la P dacă orice vecinătate a lui x, are cu P, o intersecţie nevidă. Mulţimea punctelor aderente la P este *aderenţa* lui P. Fie E o submulţime din R.

a) Să se demonstreze că aderenţa lui E este de asemenea cel mai mic închis $\overline{E}$ care conţine pe E (exerciţiul nr. 1.4).

b) Să se demonstreze că un punct izolat al lui E nu este un punct de acumulare al lui E.

c) Să se demonstreze că orice punct al aderenţei lui E, care nu este izolat, este un punct de acumulare al lui E.

d) Să se deducă că mulţimea punctelor de acumulare ale lui E este $\overset{0}{E}$.

e) Se defineşte limita unei funcţii într-un punct izolat x_0 din domeniul ei de definiţie D prin: $\lim_{x_0} f = f(x_0)$. Să se demonstreze că se extinde astfel noţiunea de limită la orice punct de aderenţă al domeniului de definiţie D.

2.2 PROPRIETĂŢILE LIMITELOR

2.2.1 Unicitatea limitelor

Să presupunem că, pentru o funcţie f şi un punct de acumulare x_0 din domeniul ei de definiţie, avem simultan:

$$\lim_{x_0} f = l \quad \text{şi} \quad \lim_{x_0} f = l'.$$

Să presupunem: $l \neq l'$.

l şi l' fiind diferite, există o vecinătate V a lui l şi o vecinătate V' a lui l', astfel că aceste două vecinătăţi V şi V' sînt disjuncte (nr. 1.1.6, proprietatea 4).

Funcţia F, definită prin:

$$\begin{cases} F(x) = f(x) \Leftrightarrow x \neq x_0 \\ F(x_0) = l, \end{cases}$$

este continuă în x_0; există deci o vecinătate W a lui x_0 astfel că:

$$F[W] \subset V.$$

De asemenea, funcţia G, definită prin:

$$\begin{cases} G(x) = f(x) \Leftrightarrow x \neq x_0 \\ G(x_0) = l', \end{cases}$$

este continuă în x_0; există deci o vecinătate W' a lui x_0 astfel că:

$$G[W'] \subset V.$$

W şi W' sînt două vecinătăţi ale lui x_0 care nu este un punct izolat. Mulţimea $W \cap W' - \{x_0\}$ nu este deci vidă şi, dacă x_1 este un element al acestei mulţimi, avem simultan:

$$F(x_1) = f(x_1) \quad \text{este element din } V,$$

$$G(x_1) = f(x_1) \quad \text{este element din } V'.$$

Această concluzie este incompatibilă cu $V \cap V' = \emptyset$ şi prin urmare cu $l \neq l'$.

Rezultă:
$$l = l'.$$

TEOREMĂ / Dacă o funcţie f admite o limită într-un punct x_0, această limită este unică.

Vom vorbi de aci înainte de limita funcţiei f în punctul x_0, cînd această limită există.

2.2.2 Limită şi continuitate

Fie f o funcţie definită pe o mulţime D care conţine pe x_0. Funcţia F, definită prin:

$$\begin{cases} F(x) = f(x) \Leftrightarrow x \in D - \{x_0\}, \\ F(x_0) = f(x_0), \end{cases}$$

este egală cu funcţia f.
Prin urmare, continuitatea funcţiei f în x_0 este echivalentă cu continuitatea funcţiei F în x_0. Se poate deci enunţa:

TEOREMĂ / O funcţie f este continuă într-un punct x_0 neizolat din domeniul ei de definiţie dacă şi numai dacă:

$$\lim_{x_0} f = f(x_0).$$

Această teoremă va fi adesea folosită în continuare.

2.2.3 Limita la dreapta, limita la stînga şi limita

O funcţie este continuă într-un punct x_0 dacă şi numai dacă este continuă la dreapta şi la stînga în x_0. Se deduce că:

dacă:
$$\lim_{x_0} f = l,$$

atunci:
$$\lim_{x_0^-} f = \lim_{x_0^+} f = l.$$

Reciproc, dacă:

$$\lim_{x_0^-} f = \lim_{x_0^+} f = l,$$

atunci:

$$\lim_{x_0} f = l.$$

***Exemplu.* Funcţia f, definită prin:**

$$f(x) = 1 + x + |x|,$$

este continuă pentru $x_0 = 0$. Funcţia ia valoarea 1 în $x_0 = 0$ şi admite pe 1 ca limită în punctul $x_0 = 0$.
Pentru x aparţinînd lui $\mathbf{R}^+$: $f(x) = 1 + 2x$.
Funcţia g, definită prin: $g(x) = 1 + 2x$,
este continuă la dreapta în $x_0 = 0$.
Deci, funcţia f este continuă la dreapta în x_0 şi:

$$\lim_{0^+} f = l = \lim\,[x \mapsto 1 + x + |x|].$$

Pentru x aparţinînd lui R^-: $f(x) = 1$.
Această funcţie constantă este continuă la stînga în orice punct şi, în particular, în $x_0 = 0$ şi:

$$\lim_{0^-} f = 1 = \lim\,[x \mapsto 1 + x + |x|].$$

Funcţia f este deci continuă în $x_0 = 0$ şi: $\lim\limits_{0} f = 1$.

Funcţia h, definită prin:

$$h(x) = \frac{x}{x} + x + |x|,$$

nu este definită pentru $x_0 = 0$ şi admite pe 1 ca limită în $x_0 = 0$.

2.2.4 Teoreme cu privire la limite

Teoremele cu privire la funcţiile continue (secţiunea 1.6) au drept consecinţe teoreme asupra limitelor de funcţii.
Înainte de a le enunţa, vom face următoarea observaţie.
Fie două funcţii f şi g ale căror domenii de definiţie respective sînt D_1 şi D_2.
Fie D_1' şi D_2' domeniile asociate respectiv lui D_1 şi D_2.

Dacă avem: $\lim\limits_{x_0} f = a$ şi $\lim\limits_{x_0} g = b$,

se ştie că: $x_0 \in D_1'$ şi $x_0 \in D_2'$,

deci că: $x_0 \in D_1' \cap D_2'$.

Orice operaţie efectuată asupra funcţiilor f şi g este, în general, definită pe intersecţia $D_1 \cap D_2$, dar nimic nu ne permite să afirmăm că:

$$D_1' \cap D_2' = (D_1 \cap D_2)'.$$

Exemplu. Fie funcţiile:

$$f = [x \mapsto \sqrt{x}], \quad g = [x \mapsto \sqrt{-x}];$$

avem:

$$D_1 = \mathbf{R}+, \quad D_1' = \mathbf{R}+,$$

$$D_2 = \mathbf{R}-, \quad D_2' = \mathbf{R}-;$$

deci:

$$D_1' \cap D_2' = \{0\},$$

şi:

$$D_1 \cap D_2 = \{0\};$$

rezultă:

$$(D_1 \cap D_2)' = \emptyset.$$

TEOREMA 1 / **Dacă $\lim\limits_{x_0} f = a$, atunci, pentru orice număr real λ:**

$$\lim_{x_0} \lambda f = \lambda a.$$

Exemplu. Să studiem funcţia $f = [x \mapsto x^2]$ în punctul x_0.
Funcţia f este continuă pe $\mathbf{R}$, deci în punctul x_0; în consecinţă:

$$\lim_{x_0} f = x_0^2.$$

Pentru orice număr real λ, avem:

$$\lim_{x_0} \lambda f = \lambda_0^2$$

TEOREMA 2 / **Dacă $\lim\limits_{x_0} f = a$, $\lim\limits_{x_0} g = b$ şi numărul x_0 este un punct de acumulare al domeniului de definiţie comun al lui f şi g, atunci:**

$$\lim_{x_0} (f + g) = a + b.$$

Exemple. **I.** Fie funcţiile f şi g:

$$f = [x \mapsto \sqrt{x}],$$

$$g = [x \mapsto \sqrt{-x}].$$

Avem:

$$\lim_{0} f = 0, \quad \lim_{0} g = 0.$$

Dar funcţia $(f + g)$ nu este definită decît pentru $x = 0$.

Mulţimea punctelor de acumulare ale lui $(f + g)$ este vidă. Nu este cazul să se studieze limita lui $(f + g)$ în acest punct. De altfel, se cunoaşte totul despre $(f + g)$, de îndată ce se cunoaşte valoarea ei pentru $x = 0$, pentru că nu este definită în nici un alt punct.

II. Fie funcţiile f şi g:

$$f = [x \mapsto x^2 + 1],$$

$$g = \left[x \mapsto \frac{1}{x - 2}\right]$$

Pentru $x_0 = 1$, aceste două funcţii sînt continue; deci:

$$\lim_1 f = 2, \quad \lim_1 g = -1;$$

Rezultă:

$$\lim_1 \left[x \mapsto x^2 + 1 + \frac{1}{x-2}\right] = 1.$$

Teorema se extinde fără dificultate la o sumă de mai multe funcţii.

TEOREMA 3 / Dacă $\lim_{x_0} f = a$, dacă $\lim_{x_0} g = b$ şi dacă numărul x_0 este un punct de acumulare al domeniului comun de definiţie al lui f şi g, atunci:

$$\lim_{x_0} fg = ab.$$

Exemplu. Fie funcţiile f şi g:

$$f = [x \mapsto x^3] \qquad D_1 = \mathbf{R},$$

$$g = \left[x \mapsto \frac{x+2}{x^2(x+1)}\right], \quad D_2 = \mathbf{R} - \{-1, 0\}.$$

Punctul $x_0 = 2$ este un punct de acumulare al lui:

$$D_1 \cap D_2 = \mathbf{R} - \{-1, 0\}.$$

Avem:

$$\lim_2 f = 8, \qquad \lim_2 g = \frac{1}{3};$$

deci:

$$\lim_2 fg = \lim_2 \left[x \mapsto x^3 \frac{x+2}{x^2(x+1)}\right] = \frac{8}{3}$$

TEOREMA 4 / Dacă $\lim_{x_0} f = a$ şi dacă a este diferit de zero, atunci:

$$\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{a}.$$

Exemplu. Fie funcţia f definită prin:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+3}, \quad D = \mathbf{R} - \{-3\}.$$

Avem:

$$\lim_0 f = -\frac{1}{3},$$

deci:

$$\lim_0 \left[x \mapsto \frac{x+3}{x-1}\right] = -3.$$

Dar:

$$\lim_1 f = 0.$$

Nu se poate spune nimic despre comportarea funcţiei $\frac{1}{f}$ în vecinătatea punctului $x_0 = 1$. Aceasta este problema care ne va preocupa (între altele) în următorul capitol.

Din teoreme decurg următoarele corolare:

COROLARUL 1 / **Fie f şi g două funcţii astfel că:**

$$\lim_{x_0} f = a, \quad \lim_{x_0} g = b.$$

Presupunînd în plus că x_0 este un punct de acumulare al domeniului comun de definiţie al lui f şi g, avem atunci, oricare ar fi numerele reale λ şi μ:

$$\lim_{x_0} (\lambda f + \mu g) = \lambda a + \mu b.$$

COROLARUL 2 / **Cu aceleaşi ipoteze ca cele din corolarul 1 şi presupunînd în plus că b nu este nul:**

$$\lim_{x_0} \frac{f}{g} = \frac{a}{b}.$$

2.2.5 Recapitularea cîtorva rezultate din anul I

I. *Cîteva rezultate cu privire la funcţiile circulare.*

1° Funcţiile circulare sînt continue în 0.

2°
$$\lim_{0} \left[x \mapsto \frac{\sin x}{x}\right] = 1.$$

Se va observa că $D = \mathbf{R}^*$ şi că 0 este punct de acumulare al lui $\mathbf{R}^*$.

3°
$$\lim_{0} \left[x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x}\right] = 0.$$

4°
$$\lim_{0} \left[x \mapsto \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right] = 1.$$

II. *Tabloul formulelor indispensabile din trigonometrie.*

■ RELAŢII FUNDAMENTALE

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ &1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ &1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}}$$

NUMERE ASOCIATE

$$\sin(-x) = -\sin x;\quad \sin(\pi - x) = \sin x;\quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x;\quad \cos(\pi - x) = -\cos x;\quad \cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x;\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

FORMULE DE ADUNARE ŞI CONSECINŢE

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$
$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$
$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$
$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

EXERCIŢII

In cazurile următoare, să se demonstreze că, în punctul x_0, funcţia f are o limită l care să fie determinată:

2.9 $f = \left[x \mapsto \dfrac{1 - \cos x}{x^2}\right]$, $\quad x_0 = 0.$

2.10 $f = \left[x \mapsto \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}\right]$, $\quad x_0 = 0.$

2.11 $f = \left[x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}\right]$, $\quad x_0 = 0.$

2.12 $f = \left[x \mapsto \dfrac{\sin^2 x + 1 - \cos x}{x^2}\right]$, $\quad x_0 = 0.$

2.13 $f = \left[x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 2x}\right]$, $\quad x_0 = 0.$

Să se determine limita l a funcției f în punctul x_0 în următoarele cazuri:

2.14 $f = \left[x \mapsto \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}\right]$, $\quad x_0 = 1.$

(Se va pune $\sqrt{x} = t$)

2.15 $f = \left[x \mapsto \dfrac{x^2 - 1 - (\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1,}\right]$ $\quad x_0 = 1.$

2.16 $f = \left[x \mapsto \dfrac{x - 1}{|x - 1|}\right]$, $\quad x_0 = 1.$

2.17 $f = \left[x \mapsto \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x - 1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right]$, $\quad x_0 = 1.$

Să se determine următoarele limite:

2.18 $\lim\limits_{0} \left[v \mapsto \dfrac{\sin v \text{ gr}}{v}\right]$.

2.19 $\lim\limits_{0} \left[v \mapsto \dfrac{\operatorname{tg} v_0}{v}\right]$.

2.20 $\lim\limits_{0} \left[\alpha \mapsto \dfrac{\sin 2\alpha}{\alpha}\right]$.

2.21 $\lim\limits_{0} \left[\alpha \mapsto \dfrac{\sin^2 \alpha}{\alpha}\right]$

2.22 $\lim\limits_{0} \left[x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{5x}\right]$

2.23 $\lim\limits_{0} \left[x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}\right]$.

2.24 $\lim\limits_{0} \left[x \mapsto \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}\right]$.

2.25 $\lim\limits_{0} \left[x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x}\right]$.

2.26 $\lim\limits_{0} \left[x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{\sin 2x}\right]$.

2.27 $\lim\limits_{0} \left[x \mapsto \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}\right]$.

2.3 EXTENSII ALE NOȚIUNII DE LIMITĂ

2.3.1 Dreapta numerică închisă

Mulțimea **N** nu are puncte de acumulare în **R**. În același timp, mulțimea intervalelor de forma $]x, +\infty[$ conține, pentru orice număr real x, o infinitate de numere întregi. Această observație conduce la introducerea unui element notat $+\infty$ (plus infinit) şi a unui element notat $-\infty$ (minus infinit), astfel că: $+\infty \notin \mathbf{R}$, $-\infty \notin \mathbf{R}$.

$$\forall_{\mathbf{R}} x \qquad x < +\infty \quad \text{şi} \quad -\infty < x;$$

$$\forall_{\mathbf{R}} x \qquad x + \infty = +\infty + x = +\infty;$$

$$\forall_{\mathbf{R}} x \qquad x - \infty = -\infty + x = -\infty;$$

$$\forall_{\mathbf{R}^*} x \qquad |x| \times (+\infty) = +\infty \times |x| = +\infty;$$

$$\forall_{\mathbf{R}} x \qquad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0;$$

$$\forall_{\mathbf{R}^*} x \qquad \frac{x}{0} = +\infty;$$

$$(-1) \times (+\infty) = -\infty;$$

$$(-1) \times (-\infty) = +\infty;$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty;$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty;$$

$$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty;$$

Aceste reguli de calcul sînt stabilite în concordanţă cu noţiunea intuitivă de număr mai mare decît toate celelalte numere.

DEFINIŢIE / **Se numeşte dreaptă închisă mulţimea:**

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

înzestrată cu legile de compoziţie internă şi relaţiile binare uzuale din R, completate prin condiţiile care definesc calculul cu elementele infinite.

Observaţie importantă. $\overline{\mathbf{R}}$ nu este grup pentru adunare. Nu am definit suma elementelor $+\infty$ şi $-\infty$. De asemenea, nu am definit raportul a două elemente infinite, nici produsul dintre zero şi un element infinit, nici raportul dintre zero şi zero.

În schimb, în această nouă mulţime şi pentru orice x real nenul:

$$\forall x \in \overline{\mathbf{R}}^* \quad \frac{|x|}{0} = +\infty.$$

Să insistăm asupra faptului că următoarele elemente nu sînt definite în $\overline{\mathbf{R}}$:

$$\infty - \infty; \frac{0}{0}; 0 \times \infty; \frac{\infty}{\infty}.$$

Observaţie. $+\infty$ şi $-\infty$ sînt puncte de acumulare ale lui $\mathbf{R}$ în $\overline{\mathbf{R}}$.

2.3.2 Vecinătăți în $\bar{\mathbf{R}}$

Fiind dat un punct x_0 din $\mathbf{R}$, o submulțime din $\bar{\mathbf{R}}$ este o vecinătate a lui x_0 dacă conține o vecinătate a lui x_0 în $\mathbf{R}$. În ceea ce privește elementele $+\infty$ și $-\infty$, se dă următoarea definiție:

DEFINIȚIE / O vecinătate în $\bar{\mathbf{R}}$ a lui $+\infty$ (reaspectiv $-\infty$) este o submulțime V din $\bar{\mathbf{R}}$ astfel încît există un număr real N astfel că:

$$]N, +\infty[\cup \{+\infty\} \subset V$$

(respectiv $]-\infty, N[\cup \{-\infty\} \subset V$).

Observații. — **1** În practică este adesea comod să se definească o vecinătate a infinitului care conține un interval de forma

$$]N, +\infty], \quad (N \in \mathbf{R}^{+*}).$$

(O vecinătate a lui $-\infty$ conține atunci o mulțime de forma

$$[-\infty, -N[, \quad N \in \mathbf{R}^{+*}).$$

2 Totdeauna în practică, se înlocuiește adesea topologia indusă pe $\mathbf{R}$, prin aceea pe care am definit-o pe $\bar{\mathbf{R}}$, ceea ce conduce la a numi, impropriu, vecinătate a infinitului în $\mathbf{R}$ orice submulțime din $\mathbf{R}$ care conține un interval de forma:

$$]N, +\infty[, \quad N \in \mathbf{R}.$$

($]-\infty, N[$ pentru o vecinătate a lui $-\infty$.)
3 Intervalele de forma $]N, +\infty]$ sau $[-\infty, -N[$ sînt vecinătăți ale lui $+\infty$ (respectiv $-\infty$) care se pot defini prin singura indicare a numărului N:

$$x \in]N, +\infty] \Leftrightarrow x \in \bar{\mathbf{R}} \quad \text{și} \quad x > N;$$

$$[x \in [-\infty, -N[\Leftrightarrow x \in \bar{\mathbf{R}} \quad \text{și} \quad x < -N.$$

4 $\bar{\mathbf{R}}$ ca și $\mathbf{R}$ este separat (nr. 1.1.6).

2.3.3 Extensii ale noțiunii de limită

Prin definițiile de la numerele 2.3.1 și 2.3.2, tot ce s-a spus în secțiunile nr. 2.1 și nr. 2.2 asupra limitelor rămîne valabil.
Vom da următoarea definiție, unde $\mathcal{V}(x_0)$ și $\mathcal{V}(L)$ desemnează respectiv mulțimea vecinătăților în $\bar{\mathbf{R}}$ ale lui x_0 și ale lui L și $\mathcal{V}^*(x_0)$ mulțimea vecinătăților lui x_0 fără x_0. (Să observăm că, dacă N este un număr real, $]N, +\infty[$ aparține lui $\mathcal{V}^*(+\infty)$.)

DEFINIȚIE / **Fie f o funcție numerică definită pe o submulțime D din $\mathbf{R}$ și fie x_0 un punct de acumulare al lui D.**

Un element L din $\overline{\mathbf{R}}$ este limita funcției f în punctul x_0 dacă, pentru orice vecinătate V a lui L, există o vecinătate W a lui x_0 astfel că, pentru orice x din W, diferit de x_0, astfel ca $f(x)$ să fie definit, $f(x)$ este element din V:

$$\boxed{\forall_{\mathcal{V}(L)} V;\ \exists_{\mathcal{V}^*(x_0)} W^* \quad f[W^* \cap D] \subset V}$$

Observații. — 1 În același fel se definesc limitele la dreapta și la stînga (nr. 2.2.3). Este de notat că o limită pentru un element infinit este totdeauna o limită la dreapta (pentru $-\infty$) sau la stînga (pentru $+\infty$).

În practică, această definiție se prezintă prin cazurile particulare pe care le vom enumera dînd forma pe care o ia în fiecare caz.

2 În cazul valorilor infinite, se spune, de exemplu, adesea că „x tinde către infinit", cînd de fapt, în practică, ne plasăm în $\mathbf{R}$ și nu în $\overline{\mathbf{R}}$ și această distincție are meritul de a reaminti în orice moment că valorile $+\infty$ și $-\infty$ din $\overline{\mathbf{R}}$ nu sînt numere reale.

Să cercetăm diversele cazuri particulare ce se pot prezenta fiind dată o funcție f definită într-o submulțime D din $\mathbf{R}$ și să reamintim că D^* desemnează pe D eventual fără x_0.

■ $$x_0 \in \mathbf{R}, \quad L \in \mathbf{R}.$$

Limita lui f în x_0 este L:

$$\lim_{x_0} f = L;$$

$$\forall_{\mathbf{R}_+^*} \varepsilon;\ \exists_{\mathbf{R}_+^*} \eta;\ \forall_{D^*} x \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Exemplu. Fie funcția f definită prin: $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Funcția f este continuă în orice punct din $\mathbf{R}^*$. Avem deci:

$$\lim_{2}\left[x \mapsto \frac{1}{x}\right] = \frac{1}{2}.$$

■ $$x_0 \in \mathbf{R},\ L = +\infty.$$

Limita lui f în x_0 este $+\infty$.

Se spune adesea că $f(x)$ tinde spre $+\infty$ cînd x tinde spre x_0:

$$\lim_{x_0}{}' f = +\infty;$$

$$\forall_{\mathbf{R}_+^*} N;\ \exists_{\mathbf{R}_+^*} \eta;\ \forall_{D^*} x \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > N.$$

Exemplu. Fie funcţia f definită prin: $f(x) = \frac{1}{|x|}$.

După nr. 2.3.1, avem:

$$\lim_{0} f = +\infty.$$

■ $$x_0 \in \mathbf{R},\ L = -\infty.$$

Limita lui f în x_0 este $-\infty$.
Se spune adesea că $f(x)$ tinde către $-\infty$ cînd x tinde către x_0:

$$\lim_{x_0} f = -\infty;$$

$$\forall_{\mathbf{R}_+^*} N;\quad \exists_{\mathbf{R}_+^*} \eta;\quad \forall_{D^*} x \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < -N.$$

Exemplu. Fie funcţia f definită prin: $f(x) = -\frac{1}{|x|}$.

Avem atunci: $\lim\limits_{0} f = -\infty$.

Observaţie. — Se poate întîmpla ca limitele la dreapta şi la stînga în x_0 să nu fie egale.
Astfel, de exemplu:

$$\lim_{0^+}\left[x \mapsto \frac{1}{x}\right] = +\infty,$$

$$\lim_{0^-}\left[x \mapsto \frac{1}{x}\right] = -\infty.$$

■ $x_0 = +\infty,\ L \in \mathbf{R}$.

Limita lui f în $+\infty$ este L:

$$\lim_{+\infty} f = L;$$

$$\forall_{\mathbf{R}_+^*} \varepsilon;\quad \exists_{\mathbf{R}_+^*} M;\quad \forall_D x \quad x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Exemplu. Fie funcţia f definită prin: $f(x) = \frac{1}{x}$.

Avem atunci (nr. 2.3.1): $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

■ $x_0 = +\infty,\ L = +\infty$.

Limita lui f în $+\infty$ este $+\infty$:

$$\lim_{+\infty} f = +\infty;$$

$$\forall_{\mathbf{R}_+^*} N;\quad \exists_{\mathbf{R}_+^*} M;\quad \forall_D x \quad x > M \Rightarrow f(x) > N.$$

Exemplu. Fie funcţia f definită prin: $f(x) = x$.

Avem: $$\lim_{+\infty} f = +\infty.$$

În acest caz, avem evident: $M = N(x > M \quad f(x) > M)$.

■ $x_0 = +\infty,\ L = -\infty$:

Limita lui f în $+\infty$ este $-\infty$:

$$\lim_{+\infty} f = -\infty;$$

$$\forall_{\mathbf{R}_+^*} N;\quad \exists_{\mathbf{R}_+^*} M;\quad \forall_D x \quad x > M \Rightarrow f(x) < -N.$$

Exemplu. Fie funcţia f definită prin: $f(x) = -x$.

Avem: $$\lim_{+\infty} f = -\infty.$$

■ $x_0 = -\infty,\ L \in \mathbf{R}$.

Limita lui f în $-\infty$ este L:

$$\lim_{-\infty} f = L;$$

$$\forall_{\mathbf{R}_+^*} \varepsilon;\quad \exists_{\mathbf{R}_+^*} M;\quad \forall_D x \quad x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Exemplu. Fie funcţia f definită prin: $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Avem: $$\lim_{-\infty} f = 0.$$

■ $x_0 = -\infty,\ L = +\infty$.

Limita lui f în $-\infty$ este $+\infty$:

$$\lim_{-\infty} f = +\infty;$$

$$\forall_{\mathbf{R}_+^*} N;\quad \exists_{\mathbf{R}_+^*} M;\quad \forall_D x \quad x < -M \Rightarrow f(x) > N.$$

Exemplu. Fie funcţia f definită prin: $f(x) = -x$.

Avem: $$\lim_{-\infty} f = +\infty.$$

■ $x_0 = -\infty,\ L = -\infty$.

Limita lui f în $-\infty$ este $-\infty$:

$$\lim_{-\infty} f = -\infty;$$

$$\forall_{\mathbf{R}_+^*} N;\quad \exists_{\mathbf{R}_+^*} M;\quad \forall_D x \quad x < -M \Rightarrow f(x) < -N.$$

Exemplu. Fie funcţia f definită prin: $f(x) = x$.

Avem:
$$\lim_{-\infty} f = -\infty.$$

Observaţie. — Notaţia „$f(x)$ tinde spre L cînd x tinde spre x_0" este folosită adesea chiar cînd x_0 sau L sînt numere reale. În nici un caz nu trebuie să se disocieze această expresie care formează un tot. Cînd vom voi să vorbim de valori vecine numărului x_0, ne vom plasa „în vecinătatea lui x_0" (şi nu vom spune „cînd x tinde către x_0").

2.3.4 Extensie a teoremelor asupra limitelor

■ $\overline{\mathbf{R}}$ fiind separat, demonstraţia de la nr. 2.2.1 rămîne valabilă şi deci:

Dacă o funcţie f admite o limită într-un punct x_0, această limită este unică.

■ Vom admite, ţinînd seama de operaţiile din $\overline{\mathbf{R}}$, că teoremele asupra limitelor sînt valabile.
Ori de cîte ori rezultatul unei operaţii asupra limitelor apare sub una din următoarele forme: $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, se spune că este vorba de o formă nedeterminată şi, teoremele neaplicîndu-se, pentru că aceste operaţii nu sînt definite în $\overline{\mathbf{R}}$, trebuie făcut un studiu particular.

TEOREMA 1 / **Fie două funcţii f şi g care au respectiv ca limite în $\overline{\mathbf{R}}$ numerele L şi L', în punctul x_0 din $\overline{\mathbf{R}}$. Atunci, dacă orice vecinătate a lui x_0 întîlneşte domeniul de definiţie al lui $(f+g)$ în puncte diferite de x_0, suma $(f+g)$ are ca limită elementul $L + L'$ din $\overline{\mathbf{R}}$, în punctul x_0 din $\overline{\mathbf{R}}$, afară de cazurile dacă $L = +\infty$ şi $L' = -\infty$, cazuri care trebuie studiate direct.**

TEOREMA 2 / **Cu aceleaşi ipoteze ca la teorema 1, produsul fg are ca limită elementul LL' din $\overline{\mathbf{R}}$, în punctul x_0 din $\overline{\mathbf{R}}$, afară de cazul în care $L = 0$ şi $|L'| = +\infty$, caz care trebuie studiat direct.**

TEOREMA 3 / **Fie f o funcţie care are ca limită numărul L din $\overline{\mathbf{R}}$, în punctul x_0 din $\overline{\mathbf{R}}$. Oricare ar fi numărul real λ, limita funcţiei λf în punctul x_0 este elementul λL din $\overline{\mathbf{R}}$, afară de cazul în care $\lambda = 0$ şi $|L| = +\infty$, caz care trebuie studiat direct.**

TEOREMA 4 / **Cu aceleaşi ipoteze ca la teorema 3, funcţia $\frac{1}{f}$ are ca limită în punctul x_0, din $\overline{\mathbf{R}}$, elementul $\frac{1}{L}$.**

Observație. — În cazul teoremei 4, dacă $L| = 0$, limita lui $\frac{1}{f}$ este infinită ceea ce se poate exprima în $\bar{\mathbf{R}}$ prin raportul „unu pe zero" (nr. 2.3.1).

Exemple. **I.** $f(x) = x^2 + x;$
$g(x) = x^3.$

Avem: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{+\infty} f = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} g = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} (f+g) = +\infty;$

Într-adevăr: $[f+g](x) = x^3 + x^2 + x.$

II. $f(x) = x^2 + x;\quad g(x) = \frac{1}{x}.$

Avem: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{-\infty} f = +\infty \\ \lim\limits_{-\infty} g = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{-\infty} (f+g) = +\infty;$

Într-adevăr: $[f+g](x) = x^2 + x + \frac{1}{x}.$

III. $f(x) = x^2 + x;\qquad g(x) = \frac{1}{|x-1|}.$

Avem: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{1} f = 2 \\ \lim\limits_{1} g = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{1} (f+g) = +\infty.$

IV. $f(x) = \frac{3x+1}{x};\qquad g(x) = 4.$

Avem: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{+\infty} f = 3 \\ \lim\limits_{+\infty} g = 4\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} (f+g) = 7$ şi $\lim\limits_{+\infty} fg = 12.$

V. $f(x) = \frac{3x+1}{x}.$

Avem: $\lim\limits_{+\infty} f = 3 \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} 3f = 9$ şi $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{f} = \frac{1}{3}.$

Să dăm acum cîteva exemple de studiu de forme nedeterminate. Să notăm că aceeaşi formă permite, după caz, să se ajungă la rezultate foarte diferite. Din această cauză se şi numesc nedeterminate.

Exemple. **I.** $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{x};\quad g(x) = -x.$

Avem: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{+\infty} f = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} g = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} (fg) = -\infty;$

dar, în vecinătatea infinitului, $f+g$ este de formă nedeterminată „infinit minus infinit"; se studiază direct problema:

$$[f+g]\,(x) = x^2 + x + \frac{1}{x} - x = x^2 + \frac{1}{x};$$

deci:

$$\lim_{+\infty} (f+g) = +\infty.$$

II.

$$f(x) = x^2 + x + \frac{1}{x}; \quad g(x) = -x^2 - x.$$

Avem, de asemenea, în vecinătatea lui $+\infty$, forma nedeterminată „infinit minus infinit":

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{x};$$

deci:

$$\lim_{+\infty} (f+g) = 0.$$

III.

$$f(x) = x^2 + x + \frac{1}{x}; \quad g(x) = -x^2 - x + 3.$$

Şi funcţia $f+g$ ia, în vecinătatea infinitului, forma nedeterminată „infinit minus infinit". Avem în acest caz:

$$f(x) + g(x) = 3 + \frac{1}{x}; \quad \text{deci: } \lim_{+\infty} (f+g) = 3.$$

IV.

$$f(x) = x^2; \quad g(x) = x.$$

Funcţia $\frac{f}{g}$ ia, în vecinătatea infinitului, forma nedeterminată „infinit pe infinit". Avem, în acest caz:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x} = x;$$

deci:

$$\lim_{+\infty} \frac{f}{g} = +\infty.$$

V.

$$f(x) = x^2; \quad g(x) = x^2.$$

De asemenea, funcţia $\frac{f}{g}$ ia, în vecinătatea infinitului, forma nedeterminată „infinit pe infinit". Dar aici, avem:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^2} = 1; \quad \text{deci: } \lim_{+\infty} \frac{f}{g} = 1.$$

VI.

$$f(x) = x; \quad g(x) = x^2.$$

Funcţia $\frac{f}{g}$ ia forma nedeterminată $\frac{\infty}{\infty}$.

Dar:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}, \quad \text{deci: } \lim_{+\infty} \frac{f}{g} = 0.$$

Avem adesea de studiat funcţii raţionale f care se prezintă sub forma:

$$f = \left[x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}\right],$$

unde P şi Q sînt funcţii polinomiale.

Se întîmplă, cu ocazia studiului unei limite de forma:

$$\lim_{x_0} \left[x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}\right],$$

să se întîlnească o formă nedeterminată de forma „$\frac{0}{0}$". Se trage concluzia că x_0 este rădăcină a lui P şi a lui Q.
$P(x)$ se pune atunci sub forma: $P(x) = (x - x_0)P'(x)$,
şi $Q(x)$ sub forma:

$$Q(x) = (x - x_0)Q'(x),$$

unde P' şi Q' sînt funcţii polinomiale.
Avem atunci:

$$f(x) = \frac{(x - x_0)P'(x)}{(x - x_0)Q'(x)},$$

fie:

$$g(x) = \frac{P'(x)}{Q'(x)}.$$

Pentru orice x diferit de x_0, avem $f(x) = g(x)$. Deci:

$$\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} g.$$

Dacă în cursul studiului limitei lui g se întîlneşte aceeaşi dificultate, se reia raţionamentul.

Exemplu. Să se studieze:

$$L = \lim_{2}\left[x \mapsto \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^2 - 4x + 4}\right]$$

Avem:

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x - 2)^2(x + 3);$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2;$$

$$L = \lim_{2}\,[x \mapsto x + 3] = 5.$$

2.3.5 Cîteva exemple importante

■ 1° Fie mai întîi funcţia identică:

$$i = [x \mapsto x].$$

Este evident că, N fiind dat, se ia $N = M$;

atunci: $$x > M \Rightarrow i(x) > N,$$

deci: $$\lim_{+\infty}\,[x \mapsto x] = +\infty.$$

Prin înmulțire și aplicarea regulei:

$$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty,$$

avem:

$$\forall_{N^*} n \quad \lim_{+\infty} [x \mapsto x^n] = +\infty;$$

λ fiind un număr real oarecare, rezultă:

a) $$\lambda > 0: \lim_{+\infty} [x \mapsto \lambda x^n] = +\infty;$$

b) $$\lambda < 0: \lim_{+\infty} [x \mapsto \lambda x^n] = -\infty.$$

Fie acum funcția $$\left[x \mapsto \frac{\lambda}{x^n}\right].$$

Aplicînd regula $\frac{1}{\infty} = 0$, se obține:

$$\lim_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{\lambda}{x^n}\right] = 0.$$

2° Avem acum:

$$\lim_{-\infty} [x \mapsto x] = -\infty,$$

apoi:

$$n \text{ par}: \quad \lim_{-\infty} [x \mapsto x^n] = +\infty,$$

$$n \text{ impar}: \lim_{-\infty} [x \mapsto x^n] = -\infty,$$

și:

$$\lim_{-\infty} \left[x \mapsto \frac{1}{x^n}\right] = 0.$$

Să rezumăm aceste rezultate cu privire la funcția $[x \mapsto \lambda x^n]$ $(n \in N^*)$.
Avem:

a) $$\lambda > 0: \begin{cases} n \text{ par}, & \lim_{-\infty} [x \mapsto \lambda x^n] = +\infty, \\ n \text{ impar}, & \lim_{-\infty} [x \mapsto \lambda x^n] = -\infty; \end{cases}$$

b) $$\lambda < 0: \begin{cases} n \text{ par}, & \lim_{-\infty} [x \mapsto \lambda x^n] = -\infty, \\ n \text{ impar}, & \lim_{-\infty} [x \mapsto \lambda x^n] = +\infty. \end{cases}$$

De unde:

$$\lim_{-\infty} \left[x \mapsto \frac{\lambda}{x^n}\right[= 0.$$

3° Fie atunci funcția polinomială definită prin:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Se presupune a_n diferit de zero; se poate scrie:

$$P(x) = a_n x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n}\right].$$

Din proprietățile precedente rezultă că:

$$\lim_{\infty}\left[x \mapsto \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)\right] = 1.$$

Prin urmare, limita funcției P în plus infinit (respectiv minus infinit) este aceeași ca aceea a funcției: $x \mapsto a_n x^n$.
Se exprimă acest rezultat enunțînd:

TEOREMĂ / În vecinătatea infinitului, o funcție polinomială se comportă ca termenul ei de gradul cel mai înalt.

Exemple. Avem imediat:

$$\lim_{+\infty}\,[x \mapsto -3x^3 + 2x + 5] = -\infty;$$
$$\lim_{-\infty}\,[x \mapsto x^3 - 3x + 2] = -\infty;$$
$$\lim_{+\infty}\,[x \mapsto x^2 - 10x + 1] = +\infty;$$
$$\lim_{+\infty}\,[x \mapsto -2x^4 + 3x^2 - 4] = -\infty.$$

■ Fie acum o funcție rațională f definită prin:

$$f = \left[x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}\right],$$

unde:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$
$$Q(x) = b_p x^p + b_{p-1}\,x^{p-1} + \ldots + b_0, \qquad b_p \neq 0.$$

Se poate scrie:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n\,x^n\left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right]}{b_p\,x^p\left[1 + \frac{b_{p-1}}{b_p}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{b_0}{b_p}\frac{1}{x^p}\right]}.$$

Cum:

$$\lim_{\infty}\left[x \mapsto \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)\right] = 1,$$

și:

$$\lim_{\infty}\left[x \mapsto \left(1 + \frac{b_{p-1}}{b_p}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{b_0}{b_p}\frac{1}{x^p}\right)\right] = 1,$$

se poate conchide sub următoarea formă:

TEOREMĂ / În vecinătatea infinitului, o funcție rațională se comportă ca raportul termenilor de gradul cel mai mare al numărătorului și numitorului.

Exemple.

I. $$\lim_{+\infty}\left[[x \mapsto \frac{x^4+1}{x^2+1}\right] = +\infty.$$

II. $$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{-x^3+2x}{2x+1}\right] = -\infty.$$

III. $$\lim_{-\infty}\left[x \mapsto \frac{x^4+1}{2-x}\right] = +\infty.$$

IV. $$\lim_{-\infty}\left[x \mapsto \frac{x^2-4}{3x^2-2x+1}\right] = \frac{1}{3}\cdot$$

V. $$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{1-x}{3-x}\right] = 1.$$

VI. $$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{2x-1}{x^2+1}\right] = 0.$$

VII. $$\lim_{-\infty}\left[x \mapsto \frac{-3x^2+x}{x^3+1}\right] = 0.$$

■ Fie un polinom $P(x)$ de gradul n al cărui coeficient a_n al termenului de gradul n este strict pozitiv. Se ştie că:

$$\lim_{+\infty}[x \mapsto P(x)] = +\infty;$$

prin urmare, în vecinătatea infinitului, funcţia $[x \mapsto \sqrt{P(x)}]$ este definită. Să căutăm limita ei în plus infinit.
Pentru că: $\lim\limits_{+\infty} [x \mapsto P(x)] = +\infty$, pentru N dat, există M astfel că:

$$x > M \Rightarrow P(x) > N^2 \Rightarrow \sqrt{P(x)} > N;$$

rezultă: $\lim\limits_{+\infty} [x \to \sqrt{P(x)}] = +\infty.$
Se demonstrează de asemenea următoarele rezultate:

a) $a_0 > 0$, n par: $\lim\limits_{-\infty}[x \mapsto \sqrt{P(x)}] = +\infty$;

b) $a_0 < 0$, n impar: $\lim\limits_{-\infty}[x \mapsto \sqrt{P(x)}] = +\infty.$

Exemple. I. $\lim\limits_{+\infty}[x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}] = +\infty.$

II. $\lim\limits_{-\infty}[x \mapsto \sqrt{3x^4-1}] = +\infty.$

III. $\lim\limits_{-\infty}[x \mapsto \sqrt{1-2x^3}] = +\infty.$

EXERCIȚII

2.28 Exercițiu rezolvat. — *Fie funcțiile:*

$$f = \left[x \mapsto x^2 + x + \frac{1}{x}\right], \quad g = [x \mapsto -x^2 - x].$$

Să se studieze limita lui $f + g$ în plus infinit.

Avem:
$$f = [x \mapsto x^2 + x] + \left[x \mapsto \frac{1}{x}\right],$$

deci:
$$\lim_{+\infty} f = +\infty + 0 = +\infty, \quad \lim_{+\infty} g = -\infty.$$

Se obține deci pentru $f + g$ forma nedeterminată „$\infty - \infty$".
Avem atunci:

$$f + g = \left[x \mapsto \left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right) + (-x^2 - x)\right] = \left[x \mapsto \frac{1}{x}\right].$$

Rezultă:
$$\lim_{+\infty} (f + g) = 0.$$

2.29 *Exercițiu rezolvat.* — *Fie funcția:*

$$f = [x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x].$$

Să se determine:

$$\lim_{+\infty} f.$$

Avem:
$$\lim_{+\infty} [x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}] = +\infty$$
$$\lim_{+\infty} [x \mapsto -x] = -\infty.$$

Se obține pentru f forma nedeterminată „$\infty - \infty$".
Folosind egalitatea $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, valabilă pentru orice pereche (a, b) de numere reale, se obține:

$$\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right) = (x^2 + 1) - x^2 = 1.$$

Pentru că $\sqrt{x^2 + 1} + x$ este nenul pentru orice număr real x, se deduce:

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x},$$

de unde:
$$f = \left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right];$$

or avem:
$$\lim_{+\infty} [x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}] = +\infty,$$
$$\lim_{+\infty} [x \to x] = +\infty;$$

deci:
$$\lim_{+\infty} [x \to \sqrt{x^2 + 1} + x] = +\infty.$$

Folosind regula $\frac{1}{+\infty} = 0$, rezultă: $\lim_{+\infty} f = 0.$

2.30 Exercițiu rezolvat. — *Fie funcția:*

$$f = [x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1} + x].$$

Să se determine:

$$\lim_{-\infty} f.$$

Avem:

$$\lim_{-\infty} [x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}] = +\infty,$$

$$\lim_{-\infty} [x \mapsto x] = -\infty.$$

Se obține pentru f forma nedeterminată „$\infty - \infty$". Se scrie:

$$f(x) = \frac{(x^2 + x + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}.$$

Observînd că $\sqrt{x^2} = |x|$ și că x fiind negativ avem $|x| = -x$, se obține:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Rezultă:

$$f(x) = \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left[-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right]} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1}.$$

Cum:

$$\lim_{-\infty}\left[x \mapsto \frac{1}{x}\right] = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{-\infty}\left[x \mapsto \frac{1}{x^2}\right] = 0$$

se obține în final:

$$\lim_{-\infty} [x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1} + x] = -\frac{1}{2}.$$

Să se determine următoarele limite:

2.31 $\lim_{-\infty}\left[x \mapsto \frac{x^5 - 3x^2}{-5x^3 + 1}\right].$

2.32 $\lim_{3}\left[x \mapsto \frac{x^2 + x + 1}{x - 3}\right].$

2.33 $\lim_{2}\left[x \mapsto \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 2}\right].$

2.34 $\lim_{-\infty} [x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} + x].$

2.35 $\lim [x \mapsto \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}].$

2.36 $\lim_{+\infty} [x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1} - 2x].$

2.37 $\lim_{+\infty} [x \mapsto \sqrt{x^4 + x - 2} - (x^2 - 1)].$

2.38 $f = \left[x \mapsto \dfrac{x^4 + 3x^2 - 5x + 4}{x^3 - 5x + 3}\right]$; $\lim\limits_{+\infty} f$; $\lim\limits_{-\infty} f$.

2.39 $f = \left[x \mapsto \dfrac{3x^2 - 7x + 3}{2x^2 - 4x + 1}\right]$; $\lim\limits_{+\infty} f$; $\lim\limits_{-\infty} f$.

2.40 $f = \left[x \mapsto \dfrac{x^2 + 7}{x^3 - 5x + 1}\right]$; $\lim\limits_{+\infty} f$; $\lim\limits_{-\infty} f$.

2.41 $f = \left[x \mapsto \dfrac{x - 3}{x^2 - 3x}\right]$; $\lim\limits_{+\infty} f$; $\lim\limits_{-\infty} f$; $\lim\limits_{3} f$.

2.42 $f = \left[x \mapsto \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - 1}\right]$; $\lim\limits_{+\infty} f$; $\lim\limits_{-\infty} f$.

2.43 $f = \left[x \mapsto \dfrac{2x^3 - 7x + 1}{x - 4}\right]$; $\lim\limits_{+\infty} f$; $\lim\limits_{-\infty} f$.

2.44 $\lim\limits_{1} \left[x \mapsto \dfrac{x + 3}{x - 1}\right]$; $\lim\limits_{1+} \left[x \mapsto \dfrac{x + 3}{x - 1}\right]$.

2.45 $\lim\limits_{1} \left[x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}\right]$; $\lim\limits_{1^-} \left[x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}\right]$.

2.46 $\lim\limits_{1} \left[x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}\right]$.

2.47 $f = \left[x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x - 1}{x - 1}\right]$; $\lim\limits_{1} f$; $\lim\limits_{1+} f$; $\lim\limits_{1^-} f$.

2.48 $f = \left[x \mapsto \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{x - 1}\right]$; $\lim\limits_{1} f$; $\lim\limits_{1+} f$; $\lim\limits_{1^-} f$.

2.49 $f = \left[x \mapsto \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}\right]$; $\lim\limits_{1} f$; $\lim\limits_{1+} f$; $\lim\limits_{1^-} f$.

2.50 $f = \left[x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}\right]$; $\lim\limits_{1} f$; $\lim\limits_{1+} f$; $\lim\limits_{1^-} f$.

2.51 $f = \left[x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{3x^2 - 5x + 2}\right]$; $\lim\limits_{1} f$; $\lim\limits_{1+} f$; $\lim\limits_{1^-} f$.

2.52 $f = \left[x \mapsto \dfrac{2x^3 - x - 1}{3x^2 - 5x + 2}\right]$; $\lim\limits_{1} f$; $\lim\limits_{1+} f$; $\lim\limits_{1^-} f$.

2.53 $\lim\limits_{1/4} \left[x \mapsto \dfrac{12x - 3}{4x - 1}\right]$.

2.54 $\lim\limits_{1} \left[x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}\right]$; $\lim\limits_{1} \left[x \mapsto \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}\right]$.

2.55 $\lim\limits_{2} \left[x \mapsto \dfrac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4}\right]$. $\lim\limits_{2} \left[x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}\right]$.

2.56 $\lim\limits_{0} \left[x \mapsto \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}\right]$.

2.57 $\lim\limits_{0}\left[x \mapsto \dfrac{\sin^2 x + 1 - \cos x}{x^2}\right].$

2.58 $\lim\limits_{0}\left[x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}\right].$

2.59 $\lim\limits_{0}\left[x \mapsto \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}\right].$

2.60 $\lim\limits_{0}\left[x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 2x}\right].$

2.61 $\lim\limits_{0}\left[x \mapsto \dfrac{1 - \cos x}{\sin \pi x}\right].$

2.62 $\lim\limits_{0}\left[x \mapsto \dfrac{1 - \cos \pi x}{\sin^2 x}\right].$

2.63 $\lim\limits_{\pi/3}\left[x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{1 - 2\cos x}\right]$ $\left(\text{Să se pună: } x = \dfrac{\pi}{3} + t\right)$

2.64 $\lim\limits_{1}\left[x \mapsto \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}\right].$

2.65 $\lim\limits_{4}\left[x \mapsto \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}\right].$

2.66 $\lim\limits_{0}\left[x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}\right].$

2.67 $\lim\limits_{0}\left[x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}\right].$

2.68 $\lim\limits_{0}\left[x \mapsto \dfrac{1}{x(x + 1)} - \dfrac{1}{x}\right].$

2.69 $\lim\limits_{0}\left[x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2} - 1}\right].$

2.70 $\lim\limits_{4}\left[x \mapsto \dfrac{\sqrt{x + 5} - 3}{x - 4}\right].$

2.71 $\lim\limits_{2}\left[x \mapsto \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}\right].$

2.72 $\lim\limits_{8}\left[x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x + 19} - 3}\right].$

2.73 $\lim\limits_{0}\left[x \mapsto \dfrac{\sqrt{x + 4} - \sqrt{3x + 4}}{\sqrt{x + 1} - 1}\right].$

2.74 $\lim\limits_{1}\left[x \mapsto \dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x - 1}\right].$

2.75 $\lim\limits_{2}\left[x \mapsto \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}\right].$

2.76 $f=\left[x \mapsto \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}}\right];\quad \lim\limits_{+\infty} f;\quad \lim\limits_{-\infty} f.$

2.77 $f=\left[x \mapsto \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^4+1}}\right];\quad \lim\limits_{+\infty} f;\quad \lim\limits_{-\infty} f.$

2.78 $f=\left[x \mapsto \dfrac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}\right];$

$\lim\limits_{+\infty} f;\quad \lim\limits_{-\infty} f.$

2.79 $f=\left[x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}\right];$

$\lim\limits_{+\infty} f;\quad \lim\limits_{-\infty} f.$

2.80 $f=\left[x \mapsto \sqrt{x^4+x-2}-(x^2-1)\right];$

$\lim\limits_{+\infty} f;\quad \lim\limits_{-\infty} f.$

2.81 $\lim\limits_{1}\left[x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}}{1-\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{1}{3-2x}}}}\right].$

2.82 Fie o funcţie f astfel că: $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$.

a) Să se demonstreze că: $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{f}=+\infty$.

b) Să se demonstreze că pentru orice n: $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[n]{f}=+\infty$.

2.83 Fie o funcţie f astfel că: $\lim\limits_{x_0} f=L$; $(x_0 \in \overline{\mathbf{R}},\ L \in \overline{\mathbf{R}}+)$.

Să se demonstreze că: $\lim\limits_{x_0} \sqrt{f}=\sqrt{L}$.

2.84 Fie o funcţie f astfel că: $\lim\limits_{x_0} f=L$; $(x_0 \in \overline{\mathbf{R}},\ L \in \overline{\mathbf{R}})$.

Să se demonstreze că: $\lim\limits_{x_0} |f|=|L|$.

2.85 Fie f şi g două funcţii care admit o limită pentru un element x_0 din $\overline{\mathbf{R}}$:

$$\lim_{x_0} f=L, \qquad (L \in \overline{\mathbf{R}});$$

$$\lim_{x_0} g=L', \qquad (L' \in \overline{\mathbf{R}}).$$

1° Să se demonstreze că, dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel că:

$$\forall_V x \quad f(x)<g(x),$$

atunci:

$$\lim_{x_0} f \leqslant \lim_{x_0} g.$$

2° Să se dea un exemplu în care $f(x)$ este totdeauna strict inferioară lui $g(x)$ şi în care limitele sînt egale.

2.4 CONVERGENȚA ȘIRURILOR

2.4.1 Definiții

Prin definiție (secțiunea 1.3), un șir numeric este o funcție numerică al cărei domeniu de definiție este **N**.
Or, mulțimea punctelor de acumulare din **N** în **R** este vidă. Nu este deci cazul să se studieze limita unui șir pentru un număr real. Din contră, în $\overline{\mathbf{R}}$, **N** admite $+\infty$ ca punct de acumulare. Se va studia deci limita unui șir pentru $+\infty$. Un șir fiind o funcție particulară, toate rezultatele de la secțiunea 2.3 sînt valabile în cazul limitelor de șiruri și, în particular, teoremele de la nr. 2.3.4.

DEFINIȚIA 1 / **Dacă șirul σ de termen general $\sigma(n) = \sigma_n$ este în așa fel că există un număr real L astfel că:**

$$\lim_{+\infty} \sigma = L,$$

se spune că σ este convergent.

DEFINIȚIA 2 / **Un șir neconvergent este divergent.**

Observații. — **1** Un șir este convergent dacă și numai dacă admite o limită pentru $+\infty$ și această limită este finită.
2 Un șir poate fi divergent neadmițînd limită sau admițînd o limită infinită.
3 Limita unui șir, cînd există este unică (secțiunea 2.3).
4 Dacă există o aplicație f de la **R** la **R** astfel că, pentru orice întreg n avem: $u_n = f(n)$, atunci:

$$\lim_{+\infty} (u_n) = \lim_{+\infty} f.$$

Să dăm definiția unui șir convergent în felul următor:

Șirul $\sigma = (\sigma_n)$ este convergent și are ca limită numărul real L dacă și numai dacă:

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon;\ \exists_{\mathbf{R}^{+*}} N;\ \forall_{\mathbf{N}} n$$
$$n > N \Rightarrow |\sigma_n - L| < \varepsilon.$$

Exemple. **I.** Șirul $(u_n) = \dfrac{1}{n}$ este convergent și de limită 0.

II. Șirul $(u_n) = (n^2 + 1)$ este divergent: $\lim_{+\infty} (u_n) = +\infty$.

III. Șirul $(u_n) = ((-1)^n)$ este divergent căci acest șir nu are limită pentru $+\infty$.

Teoremele de la nr. 2.3.4 arată că suma, produsul a două șiruri convergente sînt șiruri convergente, de asemenea cîtul a două șiruri convergente în care șirul de la numitor nu are limita zero. Se întîlnesc, de altfel, aceleași forme nedeterminate ca la secțiunea 2.3.

2.4.2 Cazul progresiilor aritmetice

Fie (u_n) o progresie aritmetică de rație r.

Avem:
$$u_n = u + nr.$$

Prin urmare, $\mathbf{R}$ fiind arhimedian:

$$r > 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} (u_n) = +\infty;$$
$$r = 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} (u_n) = u_0;$$
$$r < 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} (u_n) = -\infty.$$

O progresie aritmetică de rație nenulă este divergentă.
O progresie aritmetică de rație nulă este *constantă*.

2.4.3 Cazul progresiilor geometrice

■ Fie $u = (u_n)$ o progresie geometrică de rație q. Avem:

$$u_n = u_0 q^n.$$

1° Dacă $q = 0$: $u_n = 0$ și $\lim\limits_{+\infty} u = 0$.

Progresia u este atunci constantă.

2° Dacă $q = 1$: $u_n = u_0$ și $\lim\limits_{+\infty} u = u_0$.

Progresia u este constantă.

3° Dacă $q = -1$: $u_n = (-1)^n u_0$.

Progresia u nu admite limită în $+\infty$; ea este periodică, de perioadă 2; este o progresie divergentă.

4° Dacă $|q|$ este mai mare ca 1, se poate pune:

$$|q| = 1 + p, \text{ unde } p \text{ este pozitiv.}$$

Avem deci: $u_n = u_0 q^n$

și:
$$|u_n| = |u_0||q|^n = |u_0|(1+p)^n =$$
$$= |u_0|\left(1 + np + \frac{n(n-1)}{2}p^2 + \ldots + p^n\right);$$

p fiind pozitiv toți termenii dezvoltării lui $(1+p)^n$ sînt pozitivi. De unde:

$$|u_n| > |u_0|(np),$$
$$|u_n| > n[p|u_0|];$$

$p|u_0|$ fiind un număr pozitiv şi $\mathbf{R}$ fiind arhimedian, pentru orice număr real A, există N astfel că pentru orice număr întreg n mai mare ca N, $n[p|u_0|]$ este mai mare ca A ; este suficient să se ia $N = E\left[\frac{A}{p|u_0|}\right]$:

$$\forall_{\mathbf{R}_+^*} A\ ;\quad \exists_{\mathbf{R}_+^*} N\ ;\quad \forall_{\mathbf{N}}\, n \qquad n > N \Rightarrow |u_n| > A.$$

Prin urmare: $\lim\limits_{+\infty} (|u_n|) = +\infty.$

Progresia u este divergentă.

5° Dacă $|q|$ este mai mic ca 1 ($|q| \neq 0$), progresia $v = \left(\frac{1}{u_0 q^n}\right)$ este o progresie geometrică de rație $\frac{1}{q}$ mai mare ca 1 în valoare absolută. Avem deci:

$$\lim_{+\infty} (|v_n|) = +\infty = |\lim_{+\infty} (v_n)| \text{ (exercițiul nr. 2.84)};$$

or:

$$u = \frac{1}{v};$$

se deduce că:

$$\lim_{+\infty} (|u_n|) = \frac{1}{\lim\limits_{+\infty} (|v_n|)} = 0.$$

Progresia u este convergentă de limită 0.

În rezumat:

Fie u o progresie geometrică de rație q.

Dacă $|q| < 1$: u este convergentă,

$$\lim_{+\infty} u = 0.$$

Dacă $|q| > 1$: u este divergentă,

$$|\lim_{+\infty} u| = +\infty.$$

Dacă $q = 1$: u este convergentă,

$$\lim_{+\infty} u = u_0.$$

Dacă $q = -1$: u este divergentă,

nu avem limită.

Dacă $q = 0$: u este convergentă,

$$\lim_{+\infty} u = 0.$$

■ Fie $u = (u_n)$ o progresie geometrică de rație q.

Să considerăm şirul u definit astfel:

$$u = (v_n), \qquad v_0 = 0$$

$$v_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}.$$

Se ştie că (nr. 1.3.8):

$$v_n = nu_0 \quad \text{dacă } q = 1; \qquad v_n = u_0 \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{dacă } q \neq 1.$$

Pentru orice n, avem:

$$v_n = \frac{u_0}{q-1}(q^n - 1),$$

$$v_n = w_n + w'_n,$$

cu:

$$w_n = \frac{u_0}{q-1} q^n \quad \text{şi} \quad w'_n = -\frac{u_0}{q-1}.$$

Şirul v este deci suma şirurilor w şi w'. Avem deci:

$$\lim_{+\infty} v = \lim_{+\infty} w + \lim_{+\infty} w'.$$

w' este un şir constant:

$$\lim_{+\infty} w' = \frac{u_0}{1-q}.$$

w este o progresie geometrică de raţie $q \left(\text{primul termen: } \frac{u_0}{q-1}\right)$, cu q diferit de 1.

În consecinţă:

a) dacă $|q|$ este mai mic ca 1:

$$\lim_{+\infty} w = 0;$$

b) dacă $|q|$ este mai mare ca 1:

$$w \text{ divergentă,} \qquad |\lim_{+\infty} w| = +\infty.$$

c) dacă $q = -1$:

$$w \text{ divergentă.}$$

Se deduc următoarele rezultate cu privire la suma termenilor unei progresii geometrice v de raţie q şi cu primul termen u_0:

$\lvert q\rvert < 1$:	$\lim_{+\infty} v = \frac{u_0}{1-q}$
$\lvert q\rvert > 1$:	v divergentă
$q = 1$:	v divergentă
$q = -1$:	v divergentă

Observaţie. — Pentru $q = 0$, avem:

$$\lim_{+\infty} v = u_0.$$

Acest rezultat este inclus în cazurile cercetate mai sus.

2.4.4 Cazul general al şirurilor recurente

Fie $u = (u_n)$ un şir definit prin indicarea primilor k termeni ai săi şi prin indicarea unei relaţii de recurenţă care permite să se calculeze termenul u_n funcţie de k termeni precedenţi:

$$u_n = \psi(u_{n-1}, \ldots, u_{n-k}).$$

Dacă şirul (u_n) este convergent, avem:

$$\lim_{+\infty} (u_n) = l \quad (l \in \mathbf{R});$$

dar avem de asemenea pentru orice număr întreg i:

$$\lim_{+\infty} (u_{n-i}) = l,$$

unde (u_{n-i}) este şirul obţinut făcînd să-i corespundă oricărui număr întreg n termenul u_{n-i} în care i este un număr întreg dat fix.
Deci, dacă şirul (u_n) este convergent, limita l satisface în mod necesar relaţia:

$$l = \psi(l, \ldots, l).$$

Aceasta permite să se găsească eventuala limită, dar rămîne să se verifice dacă (u_n) este efectiv convergent sau nu.

Exemplu. Fie (u_n) o progresie geometrică de raţie q nenulă, definită prin relaţia de recurenţă: $u_n = qu_{n-1}$.
Dacă (u_n) este convergentă, limita ei este în aşa fel că:

$$l = ql,$$

adică avem în mod necesar $l = 0$. Rămîne să se determine în ce condiţii şirul (u_n) converge efectiv. Dacă el converge, va converge spre $l = 0$.

2.4.5 Compararea unui şir cu o progresie geometrică

Fie un şir $u = (u_n)$ ai cărui termeni sînt pozitivi.
■ Să presupunem că există un număr întreg N astfel că, pentru orice întreg n mai mare ca N, raportul a doi termeni consecutivi u_{n+1} şi u_n este mai mare decît un număr q strict mai mare ca 1:

$$\exists_{\mathbf{R}} q; \qquad \exists_{\mathbf{N}} N; \qquad \forall_{\mathbf{N}} n \qquad n > N \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > q > 1.$$

Şirul (u_n) este deci crescător începînd cu u_N. Se poate scrie succesiv:

$$\begin{array}{ll} u_N & u_N \\ \dfrac{u_{N+1}}{u_N} > q & u_{N+1} > qu_N \\ \dfrac{u_{N+2}}{u_{N+1}} > q & u_{N+2} > q^2u_N \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{u_{N+k}}{u_{N+k-1}} > q & u_{N+k} > q^ku_N \end{array}$$

Termenii şirului (u_n) sînt deci, pentru n mai mare ca N, minoraţi prin termenii unei progresii geometrice de raţie q mai mare ca 1, deci progresie divergentă. Şirul (u_n) este deci divergent:

$$(f < g \Rightarrow \lim_{+\infty} f \leqslant \lim_{+\infty} g)$$

(a se vedea exerciţiul nr. 2.85).

■ Să presupunem că există un număr întreg N în aşa fel că, pentru orice număr întreg n mai mare ca N, raportul a doi termeni consecutivi u_{n+1} şi u_n este mai mic ca un număr p strict mai mic ca 1:

$$\exists_{\mathbf{R}} p; \qquad \exists_{\mathbf{N}} N; \qquad \forall_{\mathbf{N}} n \qquad n > N \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < p < 1.$$

Şirul (u_n) este deci descrescător, cu începere de la u_N. Se poate scrie succesiv:

$$\begin{array}{ll} u_N & u_N \\ \dfrac{u_{N+1}}{u_N} < p & u_{N+1} < pu_N \\ \dfrac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < p & u_{N+2} < p^2u_N \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{u_{N+k}}{u_{N+k-1}} < p & u_{N+k} < q^ku_N. \end{array}$$

Termenii şirului (u_n) sînt deci, pentru n mai mare ca N, majoraţi prin termenii unei progresii geometrice de raţie q mai mică ca 1, deci convergentă. Şirul (u_n) este deci convergent şi de limită 0:

$$(f < g \Rightarrow \lim_{+\infty} f \leqslant \lim_{+\infty} g)$$

(a se vedea exerciţiul nr. 2.85)

■ **OBSERVAŢIE IMPORTANTĂ**

Nu este suficient, pentru a se trage o concluzie, să se demonstreze că $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ este mai mare (sau mai mic) ca 1, cum arată exemplul II de mai jos.

Exemple. **I.** Fie şirul $u = \left(\frac{2^n}{n^2}\right)$.

Avem:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{2^n} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2},$$

$$n > 3 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < \frac{16}{9},$$

deci:

$$n > 3 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{9}{8}.$$

Pentru orice număr întreg n mai mare ca 3:

$$u_n > \left(\frac{9}{8}\right)^{n-4}.$$

Şirul u este deci un şir divergent.

II. Fie şirul $u = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Avem:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \times \frac{n}{n-1} = \frac{n^2}{n^2 - 1} > 1.$$

Or:

$$\lim_{+\infty} u = 1.$$

EXERCIŢII

2.86 Fie şirul $u = (n)$ şi $v = \left(\frac{1 + \sin n}{n}\right)$.

Să se studieze limitele, pentru $+\infty$, ale şirurilor u, v, uv.

2.87 1° α însemnînd un număr real pozitiv, să se demonstreze inegalitatea:

$$(1 + \alpha)^n > n(n-1)\frac{\alpha^2}{2},$$

pentru orice număr întreg n mai mare decît sau egal cu 2 (să se folosească formula binomului).

2° Să se deducă că, dacă a este mai mare ca 1, şirul de termen general $u_n = \frac{a^n}{n}$ are o limită infinită în $+\infty$.

2.88 1° ε fiind un număr real pozitiv dat, să se demonstreze că se poate alege n astfel ca: $(n-1)\varepsilon^2 > 2$.

2° Să se deducă că, pentru aceste valori ale lui n, avem: $(1 + \varepsilon)^n > n$ şi că şirul de termen general $u_n = \sqrt[n]{n}$ este convergent şi de limită 1 (să se folosească exerciţiul precedent).

2.89 1° Se pune:

$$u_n = \frac{1! + 2! + \ldots + (n-1)! + n!}{n!}.$$

Scriind:

$$u_n = 1 + \frac{1! + 2! + \ldots + (n-2)! + (n-1)!}{n!},$$

să se demonstreze că:

$$u_n < 1 + \frac{(n-2)(n-2)! + (n-1)!}{n!},$$

$$u_n < 1 + \frac{2n-3}{n(n-1)}.$$

2° Să se deducă: $\lim\limits_{+\infty} (u_n) = 1.$

2.90 Folosindu-se faptul că orice mulţime majorată, de numere reale, admite un cel mai mic majorant, să se demonstreze că un şir crescător este majorat şi convergent.

2.91 1° Să se calculeze: $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.

Dacă: $0 < x < 1$, să se studieze:

$$\lim_{+\infty} (S_n).$$

[Se va observa că:

$$S_n = (1 + x + \ldots + x^{n-1}) + (x + \ldots + x^{n-1}) + \ldots + (x^{n-1})].$$

2° Acelaşi exerciţiu pentru:

$$S_n = 1 + 3x + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}.$$

(Se va observa că: $\dfrac{n(n+1)}{2} = 1 + \ldots + n$.)

2.92 Se consideră şirul $u = (u_n)$ definit prin:

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = 1,$$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

1° Să se scrie primii zece termeni ai şirului.
2° Să se demonstreze că şirul este crescător şi divergent.
3° Să se demonstreze că, pentru orice număr întreg n, avem:

$$u_n u_{n-2} - u_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}.$$

2.93 Fie şirul $u = (u_n)$ definit prin:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

1° Să se demonstreze că: $\lim\limits_{+\infty} (u_n) = 0.$

2° Să se calculeze:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Să se studieze:

$$\lim_{+\infty} (S_n).$$

$\left(\text{Se va observa că: } u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

2.94 Să se calculeze următoarele sume:

a) $8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots.$

b) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots.$

c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ldots.$

2.95 Se consideră şirul (u_n) definit prin: $u_0 = 2$ şi $2u_n = u_{n-1} + 1$.

1° Să se demonstreze că şirul (v_n) definit prin:

$$v_n = u_n - 1,$$

este o progresie geometrică.

2° Să se calculeze u_n în funcţie de n.

3° Să se studieze: $\lim\limits_{+\infty} (u_n)$.

4° Să se calculeze suma:

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

*

Să se studieze şirurile de termeni generali respectiv:

2.96 $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$.

2.97 $u^n = n\left[1 + n \sin \frac{n\pi}{2}\right]$.

2.98 $u_n = \frac{1! + 2! + \ldots + 3! + \ldots + n!}{(n+1)!}$

2.99 Fie un şir $u = (u_n)$ astfel că există o progresie geometrică $v = (v_n)$ de raţie q mai mică ca 1 în valoare absolută.

Ce se poate spune despre şirul $w = (w_n)$ definit prin:

$$w_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}?$$

3. DIFERENŢIALE. DERIVATE

3.1 FUNCŢII TANGENTE ÎNTR-UN PUNCT

3.1.1 Definiţie

Fie f şi g două funcţii numerice definite într-o vecinătate a numărului x_0. Funcţiile f şi g sînt tangente în x_0 dacă şi numai dacă:

$$f(x_0) = g(x_0) \text{ şi } \lim_{x_0}\left[x \to \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0}\right] = 0.$$

Exemple. I. Funcţiile $f = [x \mapsto x^2]$ şi $g = [x \mapsto x^7]$ sînt tangente în $x_0 = 0$.

Într-adevăr: $0^2 = 0^7$ şi, în $\mathbf{R}^*$, avem:

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - 0} = \frac{x^2 - x^7}{x} = x - x^6;$$

prin urmare: $\lim\limits_{0}\left[x \mapsto \dfrac{f(x) - g(x)}{x - 0}\right] = \lim\limits_{0}\,[x \mapsto x - x^6] = 0.$

II. Funcţiile $f = [x \mapsto \sin x]$ şi $g = [x \mapsto \operatorname{tg} x]$ sînt tangente în $x_0 = 0$.

Într-adevăr: $\sin 0 = \operatorname{tg} 0 = 0$ şi, în $\mathbf{R}^*$, avem:

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - 0} = \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x}\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right);$$

prin urmare:

$$\lim_{0}\left[x \mapsto \frac{f(x) - g(x)}{x - 0}\right] = \lim_{0}\left[x \mapsto \frac{\sin x}{x}\right] \times \lim_{0}\left[x \mapsto 1 - \frac{1}{\cos x}\right],$$

adică:

$$\lim_0 \left[x \mapsto \frac{f(x) - g(x)}{x - 0}\right] = 1 \times 0 = 0.$$

III. Funcţiile $f = [x \mapsto \cos^2 x]$ şi $g = \left[x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}\right]$ sînt tangente în $x_0 = 0$.

Într-adevăr: $\cos^2 0 = 1 - 0 = 1$ şi, în $\mathbf{R}^*$, avem:

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - 0} = \frac{\cos^2 x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{x} = \frac{-\sin^2 x}{x} + \frac{x}{2};$$

prin urmare:

$$\lim_0 \left[x \mapsto \frac{f(x) - g(x)}{x - 0}\right] = \lim_0 \left[x \mapsto -\frac{\sin^2 x}{x}\right] + \lim_0 \left[x \mapsto \frac{x}{2}\right].$$

Or:

$$\lim_0 \left[x \mapsto -\frac{\sin^2 x}{x}\right] = \lim_0 \left[x \mapsto \frac{\sin x}{x}\right] \times \lim_0 [x \mapsto -\sin x],$$

adică:

$$\lim_0 \left[x \mapsto -\frac{\sin^2 x}{x}\right] = 1 \times 0 = 0;$$

rezultă:

$$\lim_0 \left[x \mapsto \frac{f(x) - g(x)}{x - 0}\right] = 0.$$

3.1.2 Consecinţe

■ Fie f şi g două funcţii tangente într-un punct x_0. Să punem:

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = \varepsilon(x).$$

Funcţia ε este definită într-o vecinătate a lui x_0 şi este astfel că:

$$\lim_{x_0} \varepsilon = 0.$$

Pentru ca f şi g să fie tangente în x_0, este necesar şi suficient să existe o funcţie ε astfel că:

$$f(x) - g(x) = \varepsilon(x) \cdot (x - x_0) \quad \text{şi} \quad \lim_{x_0} \varepsilon = 0.$$

■ Orice funcţie f definită într-o vecinătate a lui x_0 este tangentă la ea însăşi. Într-adevăr:

$$\forall_{\mathbf{R} - \{x_0\}} x \quad \frac{f(x) - f(x)}{x - x_0} = 0,$$

şi:

$$\lim_{x_0} [x \mapsto 0] = 0.$$

■ Dacă funcţia f este tangentă funcţiei g în x_0, g este tangentă funcţiei f în x_0.
■ Dacă funcţia f este tangentă funcţiei g în x_0 şi dacă g este tangentă funcţiei h în x_0, avem atunci:

$$f(x_0) = g(x_0) = h(x_0);$$

pe de altă parte:

$$\frac{f(x) - h(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - g(x) + g(x) - h(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} + \frac{g(x) - h(x)}{x - x_0};$$

deci:

$$\lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{f(x) - h(x)}{x - x_0}\right] = \lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0}\right] + \lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{g(x) - h(x)}{x - x_0}\right] = 0.$$

Rezultă că funcţiile f şi h sînt tangente în x_0.
Se poate trage deci concluzia că relaţia „a fi tangente în x_0" este o relaţie de echivalenţă în mulţimea funcţiilor definite într-o vecinătate a lui x_0.
■ Fie f şi g două funcţii tangente într-un punct x_0. Să presupunem, în afară de aceasta, că f este continuă în x_0. Avem atunci simultan:

$$\begin{cases} \lim_{x_0} f = f(x_0); \\ \lim_{x_0} (f - g) = 0; \\ g(x_0) = f(x_0). \end{cases}$$

Se obţine deci:

$$\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} g = f(x_0) = g(x_0);$$

prin urmare, funcţia g este continuă în x_0.
Se poate deci enunţa:

TEOREMĂ / Dacă o funcţie g este tangentă în x_0 la o funcţie f, continuă în x_0, atunci g este continuă în x_0.

3.1.3 Funcţie afină tangentă

Să reamintim că:
a) o funcţie liniară α de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$ fiind dată, există un număr real a astfel că pentru orice x: $\alpha(x) = ax$;
b) o funcţie afină γ de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$ fiind dată, există două numere reale a şi b astfel că pentru orice x: $\gamma(x) = ax + b$;
c) o funcţie liniară este o funcţie afină care se anulează pentru zero.
Fie f o funcţie numerică definită într-o vecinătate a unui număr real x_0. Printre funcţiile care sînt tangente funcţiei f în x_0, să presupunem că există funcţii afine. Fie φ o asemenea funcţie. Avem atunci pentru orice x:

$$\varphi(x) = f(x_0) + u(x - x_0),$$

unde u este o funcţie afină de variabilă $(x - x_0)$ care se anulează pentru $x = x_0$ (pentru că $\varphi(x_0) = f(x_0)$), adică pentru $x - x_0 = 0$; u este deci o funcţie liniară.
Să presupunem că φ_1 şi φ_2 sînt două funcţii afine tangente funcţiei f în x_0; φ_1 şi φ_2 sînt deci tangente între ele şi, dacă se pune:

$$\varphi_1(x) = f(x_0) + u_1(x - x_0),$$

$$\varphi_2(x) = f(x_0) + u_2(x - x_0),$$

avem: $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = u_1(x - x_0) - u_2(x - x_0) = [u_1 - u_2](x - x_0)$,

şi:

$$\lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{x - x_0}\right] = 0;$$

$$\lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{[u_1 - u_2](x - x_0)}{x - x_0}\right] = 0.$$

Funcţia $v = u_1 - u_2$ este o funcţie liniară de la R la R.
Prin urmare, există un număr real a astfel că, pentru orice număr real h, avem:

$$v(h) = ah;$$

avem deci:

$$v(x - x_0) = a(x - x_0);$$

apoi:

$$\frac{v(x - x_0)}{x - x_0} = a;$$

rezultă:

$$\lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{v(x - x_0)}{x - x_0}\right] = a,$$

şi prin urmare: $a = 0$.
Se deduce că:

$$u_1 = u_2,$$

şi în consecinţă:

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

Se poate deci trage concluzia:

TEOREMĂ / O funcţie f admite cel mult o funcţie afină tangentă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiţie.

Observaţie. — Acest rezultat important permite să se tragă concluzia că, dacă o funcţie f admite în punctul x_0 o aplicaţie afină tangentă φ, toate funcţiile care sînt tangente funcţiei f în x_0 admit pe φ ca aplicaţie afină tangentă unică.

EXERCIŢII

3.1 Fie funcţiile:

$$f = [x \mapsto 2x^3 - 4], \quad g = [x \mapsto \text{tg } x].$$

Funcțiile f și g sînt tangente în $x_0 = 0$?
Fie funcția:

$$h = [x \mapsto 2x^3 + x].$$

Funcțiile h și g sînt tangente în $x_0 = 0$?

3.2 Funcțiile $f = [x \mapsto x^2]$ și $g = [x \mapsto x^3]$ sînt tangente în $x_0 = 0$?
Funcția $h = [x \mapsto 2x]$ este tangentă la f în x_0?
Să se găsească o funcție afină tangentă funcției f în $x_0 = 0$.

3.3 Funcțiile $f = [x \mapsto x^2]$ și $g = [x \mapsto |x^3|]$ sînt tangente în $x_0 = 0$?
Să se găsească o funcție afină tangentă la f în $x_0 = 0$.

3.4 Funcțiile $f = [x \mapsto \cos x]$ și $g = [x \mapsto x^2 + 1]$ sînt tangente în $x_0 = 0$?
Să se găsească o funcție afină tangentă funcției f în $x_0 = 0$.

3.5 Funcțiile $f = [x \mapsto x^3 + x)$, $g = [x \mapsto \sin x]$ și $h = [x \mapsto \operatorname{tg} x]$ sînt tangente în $x_0 = 0$?
Să se găsească o funcție afină tangentă la f în $x_0 = 0$.

3.6 Funcțiile $f = [x \mapsto |x|]$, $g = [x \mapsto \sin x]$ sînt tangente în $x_0 = 0$?
Se poate găsi o funcție liniară tangentă la f în $x_0 = 0$?

3.7 Să se determine p și q astfel ca funcțiile:

$$f = [x \mapsto \sqrt{x}] \quad \text{și} \quad g = [x \mapsto x^2 + px + q]$$

să fie tangente în $x_0 = 1$.
Să se găsească atunci funcția afină tangentă la f și g în $x_0 = 1$.

3.8 Să se determine p și q pentru ca funcțiile:

$$f = [x \mapsto x^2] \text{ și } g = [x \mapsto x^3 + px + q]$$

să fie tangente în $x_0 = 1$.
Să se găsească atunci funcția afină tangentă la f și g în $x_0 = 1$.

3.9 Să se determine a și b pentru ca funcțiile:

$$f = [x \mapsto |ax + b|] \text{ și } g = [x \mapsto |x^2 - 4|] \text{ să fie tangente în } x_0 = -2.$$

Se poate găsi în acest caz o funcție afină tangentă la f și g în $x_0 = -2$?

3.10 Se poate găsi a pentru ca funcțiile:

$$f = [x \mapsto |x|] \text{ și } g = [x \mapsto ax^2] \text{ să fie tangente în } x_0 = 0?$$

3.2 DIFERENȚIALĂ. DERIVATA ÎNTR-UN PUNCT

3.2.1 Diferențială

DEFINIȚIA 1 / **O funcție f este diferențiabilă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiție dacă și numai dacă admite în x_0 o aplicație afină tangentă.**

Așa cum am văzut în secțiunea 3.1, o aplicație afină φ astfel că $\varphi(x_0) = f(x_0)$ este în mod necesar de forma:

$$\varphi(x) = f(x_0) + u(x - x_0),$$

unde u este o aplicație liniară.

DEFINIȚIA 2 / **Fie o funcție f definită într-o vecinătate a lui x_0. Să presupunem că f este diferențiabilă în x_0. Fie φ aplicația afină tangentă la f în x_0. Există o aplicație liniară u de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$ astfel că:**

$$\varphi(x) = f(x_0) + u(x - x_0).$$

Aplicația liniară u este diferențiala lui f în x_0.
Se notează:

$$u = D(f, x_0),$$

sau încă:

$$u = d_{x_0}f.$$

Observație. — O funcție f este diferențiabilă într-un punct x_0 dacă și numai dacă există o aplicație liniară u și o funcție ε definită într-o vecinătate a lui x_0 astfel că:

$$f(x) - f(x_0) = u(x - x_0) + \varepsilon(x)\cdot(x - x_0),$$

cu:

$$\lim_{x_0} \varepsilon = 0.$$

Aplicația u este atunci unică: ea este diferențiala lui f în x_0.

3.2.2 Derivata unei funcții într-un punct

Dacă o funcție f este diferențiabilă în x_0, diferențiala $D(f, x_0)$ este o aplicație liniară de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$; ea este deci în mod necesar de forma:

$$D(f, x_0)(h) = l_0 h$$

Diferențiala lui f în x_0, dacă există, este deci perfect determinată prin numărul real l_0.
Dacă f este diferențiabilă în x_0, f este tangentă în x_0 la funcția afină φ definită prin:

$$\varphi(x) = f(x_0) + l_0(x - x_0),$$

adică avem:

$$\lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{f(x) - \varphi(x)}{x - x_0}\right] = 0;$$

dar:

$$\frac{f(x) - \varphi(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l_0;$$

prin urmare:

$$\lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right] - l_0 = 0.$$

Dacă f este diferențiabilă, numărul l_0 este deci dat prin:

$$l_0 = \lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]$$

Această limită există conform ipotezei de diferențiabilitate.

Reciproc, să presupunem că funcţia $\left[x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]$ admite o limită l_0 în $x_0 (l_0 \in \mathbf{R})$.

Să considerăm funcţia afină φ definită prin:

$$\varphi(x) = f(x_0) + l_0(x - x_0).$$

Avem:
$$\frac{f(x) - \varphi(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l_0;$$

prin urmare:

$$\lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{f(x) - \varphi(x)}{x - x_0}\right] = \lim\left[x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right] - l_0 = 0.$$

Funcţia f este deci diferenţiabilă în x_0 şi diferenţiala ei în x_0 este aplicaţia care face ca oricărui h să-i corespundă numărul $l_0 h$.

DEFINIŢIA 1 / Fie o funcţie f definită într-o vecinătate a numărului x_0. Numărul real $l_0 = \lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]$, dacă există, se numeşte derivata funcţiei f în punctul x_0.

DEFINIŢIA 2 / O funcţie f este derivabilă în x_0 dacă şi numai dacă admite derivată în punctul x_0.

Observaţii. — **1** Dacă:

$$\lim_{x_0}\left[x \mapsto \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right|\right] = +\infty;$$

funcţia f nu este derivabilă în x_0 (într-adevăr: $+\infty \notin \mathbf{R}$).

2 O funcţie numerică f de o variabilă reală este diferenţiabilă în x_0 dacă şi numai dacă este derivabilă în x_0.

3 Noţiunea de diferenţială este foarte simplă aici pentru că, în cazul funcţiilor de la **R** la **R**, aplicaţia diferenţială în x_0 fiind liniară, este perfect definită prin indicarea unui număr real unic.

Există aici un izomorfism i de la **R** la mulţimea $\mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ a aplicaţiilor liniare de la **R** la **R** care permite să se raţioneze plecînd de la raţionamente asupra derivatelor şi reciproc.

4 Noţiunea de diferenţială nu se mai poate reduce la o noţiune numerică în cazul, de exemplu, în care se studiază aplicaţii F de la $\mathbf{R}^n$ la $\mathbf{R}^p$, cu (n, p) diferit de $(1, 1)$.

5 Să considerăm funcţia $\eta = \left[x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]$.

Se poate face ca η să nu admită limită finită în x_0, dar să admită o limită finită la dreapta sau la stînga.

În acest caz:

a) $l_s = \lim_{x_0^-} \eta$ este numită *derivata la stînga* a lui f în x_0;

b) $l_d = \lim_{x_0^+} \eta$ este numită *derivata la dreapta* a lui f în x_0.

Exemple. **I.** Fie C un număr real. Considerăm funcţia f definită prin $f(x) = C$ şi fie un număr real x_0. Avem:

$$\forall_{\mathbf{R}} x \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0;$$

deci:

$$\lim_{x_0} \left[x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = 0 = l_0.$$

Derivata în x_0 a unei funcţii constante este nulă.
Funcţia: $\varphi = [x \mapsto C + 0(x - x_0) = C]$ este funcţia afină tangentă la f în x_0.
Se vede aici că:

$$\varphi = f.$$

Diferenţiala lui f în x_0 este definită prin:

$$D(f, x_0)(h) = 0 \cdot h = 0.$$

Este deci aplicaţia nulă.
II. Fie a un număr real nenul şi fie funcţia f definită prin $f(x) = ax$. Fie un număr real x_0. Avem:

$$\forall_{\mathbf{R}} x \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{ax - ax_0}{x - x_0},$$

$$\forall_{\mathbf{R}-\{x_0\}} x \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a;$$

deci:

$$\lim_{x_0} \left[x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = a = l_0.$$

Derivata în x_0 a unei funcţii liniare, definite prin

$$f(x) = [x \mapsto ax],$$

este numărul a.
Funcţia $[x \mapsto ax_0 + a(x - x_0) = ax]$ este aplicaţia afină tangentă care, în acest caz, coincide cu funcţia liniară dată.
Diferenţiala lui f în x_0 este definită prin:

$$D(f, x_0)(h) = ah.$$

În acest caz, diferenţiala lui f în x_0 coincide cu f:

$$\forall_{\mathbf{R}} h \quad D(f, x_0)(h) = f(h) = ah.$$

Aceasta provine din faptul că f este afină, dar de asemenea liniară, şi coincide cu funcţia ei afină tangentă în x_0 şi cu funcţia ei liniară tangentă în x_0.
III. Să considerăm funcţia $f = [x \mapsto x^2]$ şi un punct x_0 din domeniul ei de definiţie $\mathbf{R}$. Avem:

$$\forall_{\mathbf{R}} x \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0},$$

$$\forall_{\mathbf{R}-\{x_0\}} x \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x + x_0;$$

deci:

$$\lim_{x_0} \left[x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \lim_{x_0} [x \mapsto x + x_0] = 2x_0 = l_0.$$

Derivata în x_0 a funcţiei ridicate la pătrat există totdeauna şi este egală cu $2x_0$.

Funcția $[x \mapsto x_0^2 + 2x_0(x - x_0)]$ este funcția afină tangentă.
Diferențiala lui f în x_0 este definită prin:

$$D(f, x_0)(h) = 2x_0h.$$

IV. Fie funcția $f = [x \mapsto |x|]$. Să-i studiem derivabilitatea în $x_0 = 0$. Avem:
a) pentru $x > 0$:

$$f(x) = x, \quad \text{deci:} \quad \theta(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1,$$

$$\lim_{0+} \theta = +1;$$

b) pentru $x < 0$:

$$f(x) = -x, \quad \text{deci:} \quad \theta(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1,$$

$$\lim_{0^-} \theta = -1.$$

Funcția θ nu admite limită în 0; funcția f nu este derivabilă în 0.
Din contră, este derivabilă la dreapta și la stînga în 0, derivatele la dreapta și la stînga în 0 nefiind egale.

V. Fie funcția $f = [x \mapsto \sqrt{x}]$. Să-i studiem derivabilitatea în $x_0 = 0$.

Avem: $$\theta(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (\text{în } \mathbf{R}_+^*);$$

deci: $$\lim_{0+0} = +\infty.$$

Funcția f nu este derivabilă în $x_0 = 0$.

3.2.3 Derivabilitate și continuitate

Fie o funcție f derivabilă într-un punct x_0 și fie l_0 derivata ei în x_0. Aplicația afină φ, definită prin:

$$\varphi(x) = f(x_0) + l_0(x - x_0),$$

este tangentă la f în x_0.
Pe de altă parte, φ este (în particular) o aplicație continuă în x_0. Deci, conform cu nr. 3.1.2, funcția f este continuă în x_0.

TEOREMĂ Dacă o funcție numerică f de o variabilă reală este derivabilă (sau diferențiabilă) într-un punct x_0 din domeniul ei de definiție, atunci ea este continuă în x_0.

Observație. — Este important să se rețină că *reciproca acestei teoreme este falsă.*
Într-adevăr, dacă sîntem siguri că, dacă o funcție f admite o aplicație afină tangentă în punctul x_0, atunci f este continuă în x_0, nu ne putem permite să afirmăm că, reciproc, dacă f este continuă în x_0, ea admite o aplicație afină tangentă în x_0.

Exemple. **I.** Funcţia $f = [x \mapsto |x|]$ este continuă în $x_0 = 0$. Dar f nu este derivabilă în 0 (nr. 3.2.2, Exemplul IV).

II. Fie funcţia f definită prin:

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

Fie: $x_0 = 0$; funcţia f este continuă în $x_0 = 0$.
Dar, pentru x pozitiv:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{f(x)}{x},$$

şi pentru x negativ:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{\sqrt{|x|}} = \frac{f(x)}{x};$$

prin urmare:

$$\lim_{x_0^+}\left[x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right] = +\infty;$$

$$\lim_{x_0^-}\left[x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right] = -\infty.$$

Aceste limite la dreapta şi la stînga nu sînt numere reale. Funcţia f nu este derivabilă în $x_0 = 0$, cu toate că este continuă în $x_0 = 0$.

III. Fie funcţia f definită pe $\mathbf{R}$ prin:

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\sqrt[3]{|x|} \quad \text{şi} \quad f(0) = 0.$$

$f(x)$ este numărul real al cărui cub este x. De exemplu:

$$f(-8) = -2; \quad f(27) = 3; \quad f(0) = 0.$$

Pentru orice număr real nenul şi pentru $x_0 = 0$, avem:

$$\theta(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)}{x},$$

adică:

$$\theta(x) = \frac{x\sqrt[3]{|x|}}{|x|\,x} = \frac{\sqrt[3]{|x|}}{|x|} = \frac{1}{\sqrt[3]{|x|^2}}.$$

Rezultă:

$$\lim_{0} \theta = +\infty.$$

Această limită nu este un număr real. Funcţia f, care este continuă în $x_0 = 0$, ca funcţie inversă a unei funcţii continue, nu este derivabilă în $x_0 = 0$.

EXERCIŢII

În fiecare din cazurile următoare să se spună dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul x_0 din domeniul ei de definiţie. În caz afirmativ, să se calculeze derivata sa şi să se scrie funcţia afină tangentă în x_0 la f. În caz contrar, să se studieze derivabilitatea la dreapta şi la stînga.

3.11 $f(x) = |x - 1|$, $\quad x_0 = 1$.

3.12 $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$, $\qquad x_0 = -1.$

3.13 $f(x) = -\dfrac{1}{x}$, $\qquad x_0 = 1.$

3.14 $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ $\qquad x_0 = 1.$

3.15 $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $\qquad x_0 = 0.$

3.16 $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$, $\qquad x_0 = 1.$

3.17 $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$, $\qquad x_0 = -1.$

3.18 $f(x) = \dfrac{x - 2}{x}$, $\qquad x_0 = 1.$

3.19 $f(x) = (x - 1)\sqrt{x + 2}$, $\qquad x_0 = 1.$

3.20 $f(x) = \dfrac{(ax - 1)}{x^4 + 1}$, $\qquad x_0 = 1.$

3.21 $f(x) = \dfrac{6x - 13}{x}$, $\qquad x_0 = 1.$

3.22 $f(x) = \dfrac{3 - x}{x + 2}$, $\qquad x_0 = -2.$

3.23 $f(x) = 2x^2 - 5x + 7$, $\qquad x_0 = -2.$

3.24 $f(x) = x^3$, $\qquad x_0 = 1{,}1.$

3.25 $f(x) = x^4$, $\qquad x_0 = 1{,}1.$

3.26 $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$, $\qquad x_0 = 0.$

3.27 $f(x) = x^2 + |x|$, $\qquad x_0 = 0.$

3.3 INTERPRETARE GEOMETRICĂ

3.3.1 Reprezentare grafică

Să reamintim că, într-un reper afin $\mathcal{R}$ al planului π, graficul Γ al unei funcţii f este mulţimea punctelor M care au drept coordonate în reperul $\mathcal{R}$ numerele x şi y $\left(\text{vom scrie: } M\,|\,\mathcal{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$, astfel că $y = f(x)$:

$$\Gamma = \left\{M \in \pi;\ M\,|\,\mathcal{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};\ y = f(x)\right\}.$$

Ţinînd seama de definiţia ecuaţiilor (cursul de anul II, Algebră, nr. 4.4.2 şi nr. 4.4.3), aceasta este definiţia în sensul mulţimii care constituie ecuaţia curbei Γ.
Cînd nu va exista nici un dubiu, vom spune (abuziv) că relaţia $y = f(x)$ defineşte ecuaţia curbei Γ.
Nu orice curbă Γ este susceptibilă a fi definită printr-o ecuaţie de această formă. În general, o curbă Γ' este o mulţime de puncte definite în reperul $\mathfrak{R}$ printr-o condiţie care leagă coordonatele lor, această condiţie nefiind în mod necesar de forma $y = f(x)$:

$$\Gamma' = \left\{M \in \pi;\quad M|\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};\quad \varphi(x, y) = 0\right\}.$$

În aceste condiţii şi relativ la reperul dat, ecuaţia unei drepte D este definită printr-o relaţie de forma:

$$ax + by + c = 0,$$

care nu se poate pune sub forma:

$$y = f(x)$$

decît dacă b este nenul, adică dacă D nu este paralelă cu axa ordonatelor reperului $\mathfrak{R}$.
O dreaptă Δ, definită într-un reper $\mathfrak{R}$ prin două puncte M_0 şi M_1 distincte $\left(M_0|\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix};\ M_1|\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$, are o ecuaţie definită prin:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

3.3.2 Interpolare liniară

Fie un reper afin $\mathfrak{R}$ şi fie o funcţie f a cărei curbă reprezentativă în reperul $\mathfrak{R}$ este Γ. Funcţia afină θ, definită prin:

$$\theta(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

are ca reprezentare grafică o dreaptă Δ a cărei ecuaţie este definită prin: $y = \theta(x)$,
adică:

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Aceasta arată că Δ este definită de punctele M_0 şi M_1 ale curbei Γ, aceste puncte fiind definite prin:

$$M_0|\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix};\qquad M_1|\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} x_1 \\ f(x_1) \end{pmatrix}.$$

Dreapta Δ este o secantă la Γ şi raportul de creştere a funcţiei f, între valorile x_0 şi x_1 ale variabilei, este coeficientul director al lui Δ (*fig.* 1).

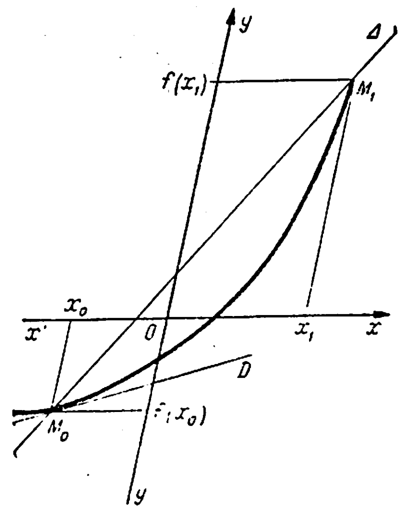


Fig. 1

3.3.3 Funcţia afină tangentă

DEFINIŢIA 1 / Fie M_0 un punct al planului afin P. Fie M o aplicaţie de o submulţime D a lui $\mathbf{R}$ la P. Se spune că punctul $M(x)$ admite pe M_0 ca poziţie limită în x_0 dacă există un reper $\mathcal{R}$ din P în care toate componentele vectorului $\overrightarrow{M_0M(x)}$ au pe 0 ca limită în x_0.

Se demonstrează (capitolul 5) că acest fapt este adevărat pentru orice reper din P.
Fiind dat un reper $\mathcal{R}$ al planului P, orice dreaptă din P, definită printr-o ecuaţie de tipul $y = ax + b$, este definită prin *coeficienţii* ei a şi b:

DEFINIŢIA 2 / Fie T o dreaptă a planului afin P. Fie Δ o aplicaţie de o submulţime D a lui $\mathbf{R}$ la mulţimea $\mathcal{D}$ a dreptelor din P. Se spune că dreapta $\Delta(x)$ admite pe T ca poziţie limită în x_0 dacă există un reper $\mathcal{R}$ din P în care coeficienţii dreptei $\Delta(x)$ au respectiv ca limită în x_0 coeficienţii dreptei T.

Se demonstrează că acest fapt este adevărat pentru orice reper din P pentru care axa ordonatelor nu este paralelă cu T.

Fie: $$\theta_t = \left[x \mapsto f(x_0) + \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}(x - x_0)\right].$$

Fie: $$\varphi = [x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)].$$

Fie Δ_t dreapta reprezentativă a funcţiei afine θ_t.
Fie T dreapta reprezentativă a funcţiei afine φ.
(Δ_t şi T se taie în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$.)
Să presupunem acum că funcţia f este derivabilă în punctul x_0.

Avem atunci: $$\lim_{x_0}\left[t \mapsto \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}\right] = f'(x_0).$$

Coeficienţii dreptei Δ_t au respectiv ca limită în x_0 coeficienţii dreptei T şi, prin urmare, dreapta Δ_t admite pe T ca poziţie limită în x_0.
Pe de altă parte, Δ_t este secantă la curba Γ care conţine punctele M_0 şi $M(t, f(t))$.

Funcţia f, derivabilă în x_0, este continuă în x_0 şi poziţia limită a lui M în x_0 este punctul M_0. T apare deci ca poziţie limită a secantei M_0M la Γ atunci cînd M tinde spre M_0. Se spune că dreapta T este tangentă la curba Γ în punctul x_0.
Conform cu cele ce preced, se poate enunţa următoarea teoremă:

TEOREMĂ / Dacă funcţia f este derivabilă pentru valoarea x_0 a variabilei, atunci:

Graficul Γ al funcţiei f admite o tangentă T în punctul M_0 de abscisă x_0. Ecuaţia lui T este definită prin:

$$y = f(x_0) + l_0(x - x_0),$$

unde coeficientul director l_0 este derivata lui f în x_0.

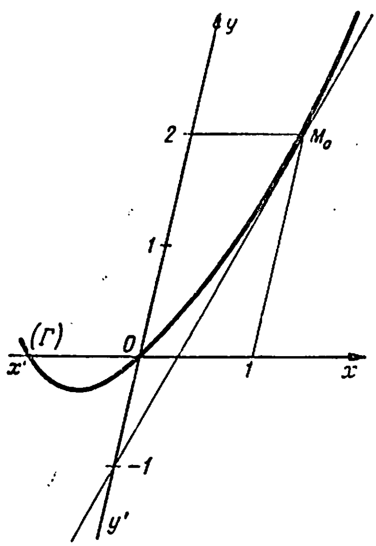


Fig. 2

Exemplu. Fie funcţia f definită prin: $f(x) = x^2 + x$. Fie Γ curba reprezentativă a acestei funcţii într-un reper $\mathcal{R}$, fie M_0 punctul care aparţine lui Γ şi este definit prin $M_0/\mathcal{R} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ şi fie punctul M_1 care aparţine lui Γ, de abscisă $x_1 = 1 + h$.

Avem: $f(x_1) = y_1 = (1 + h)^2 + 1 + h = h^2 + 3h + 2$,

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{h^2 + 3h}{h} = h + 3,$$

$$\lim_0 \left[x_1 \mapsto \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right] = 3.$$

Tangenta la curba Γ în punctul M_0 are ca ecuaţie: $y - 2 = 3(x - 1)$ sau:

$$y = 3x - 1 \quad (\textit{fig. } 2).$$

3.3.4 Curbe care admit o tangentă în punctul M_0.

Să studiem acum problema inversă celei precedente.
Să presupunem că curba Γ, reprezentativă a funcţiei f într-un reper $\mathcal{R}$, admite pentru $x = x_0$ o tangetă T în punctul $M_0\left(M_0|\mathcal{R} = \begin{pmatrix}x_0\\f(x_0)\end{pmatrix}\right)$. În cazul general, această tangentă are un coeficient director finit t_0; dar, dacă tangenta este paralelă cu axa ordonatelor reperului $\mathcal{R}$, nu are coeficient director.

Rezultă din definiţia tangentei la o curbă într-un punct M_0 şi din proprietăţile precedente, următoarea:

TEOREMĂ / Dacă graficul Γ al unei funcţii f admite o tangentă în punctul $M_0\left(M_0/\mathcal{R} = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}\right)$ şi dacă această tangentă nu este paralelă cu axa ordonatelor reperului $\mathcal{R}$, atunci:
1° f este derivabilă în x_0.
2° Derivata este egală cu coeficientul director în $\mathcal{R}$ al tangentei în M_0 la Γ.

■ *Cazul în care tangenta este paralelă cu axa ordonatelor.*

Atunci coeficientul director al tangentei este infinit şi corespunde cazului în care:

$$\lim_{x_0}\left[x_1 \mapsto \left|\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}\right|\right] = +\infty.$$

Dar, în acest caz funcţia f nu este derivabilă în x_0; într-adevăr nu se poate defini funcţia afină tangentă, nici diferenţiala. Or, noţiunea de diferenţială este primordială şi se studiază cu ajutorul derivatelor (şi al izomorfismului i definit la nr. 3.2.2, observaţia 3).
Cu toate acestea, se pot trage adesea numeroase învăţăminte dintr-o *derivată infinită*, cu condiţia de a se proceda cu circumspecţie.
Observaţie. — S-ar putea face ca o funcţie f nediferenţiabilă în x_0 să admită totuşi în acest punct derivate la dreapta (l_d) sau la stînga (l_s); l_d şi l_s apar atunci drept coeficienţii directori ai semitangentelor la curbă în punctul M_0.

Exemplu. Fie funcţia $f = [x \mapsto |x^2 - x|]$.
a) Pentru x mai mic ca zero, avem: $f(x) = x^2 - x$.
Se obţine atunci:

$$\eta(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - x}{x} = x - 1$$

şi:

$$\lim_{0^-} \eta = -1.$$

-1 este derivata la stînga a lui f în 0.
b) Pentru: $0 < x < 1$, avem:

$$f(x) = x - x^2,$$

avem deci: $$\eta(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - x^2}{x} = 1 - x$$

şi: $$\lim_{0^+} \eta = +1.$$

$+1$ este derivata la dreapta a lui f în 0.
■ f nu este diferenţiabilă în 0. Curba reprezentativă Γ nu admite tangentă în acest punct.
Dar f este derivabilă la dreapta şi la stînga în 0; Γ admite deci două semitangente în acest punct, ai căror coeficienţi directori sînt respectiv -1 şi $+1$ (*fig.* 3).

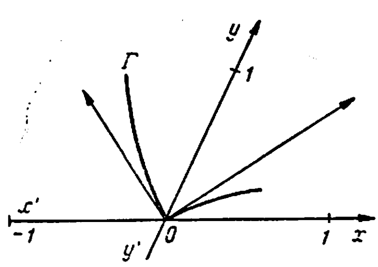


Fig. 3

3.3.5 Diferențială și aproximație

Valoarea diferențialei funcției f în punctul x_0, pentru un număr real h, este creșterea funcției liniare tangente la f în x_0 între x_0 și $x_0 + h$ (*fig.* 4). Eroarea comisă înlocuind $f(x_0 + h) - f(x_0)$ prin valoarea luată de diferențiala lui f în x_0 pentru h este, în valoare absolută, reprezentată prin lungimea Mm. Fie deci o funcție f derivabilă în punctul x_0, derivată fiind l_0. Se știe că:

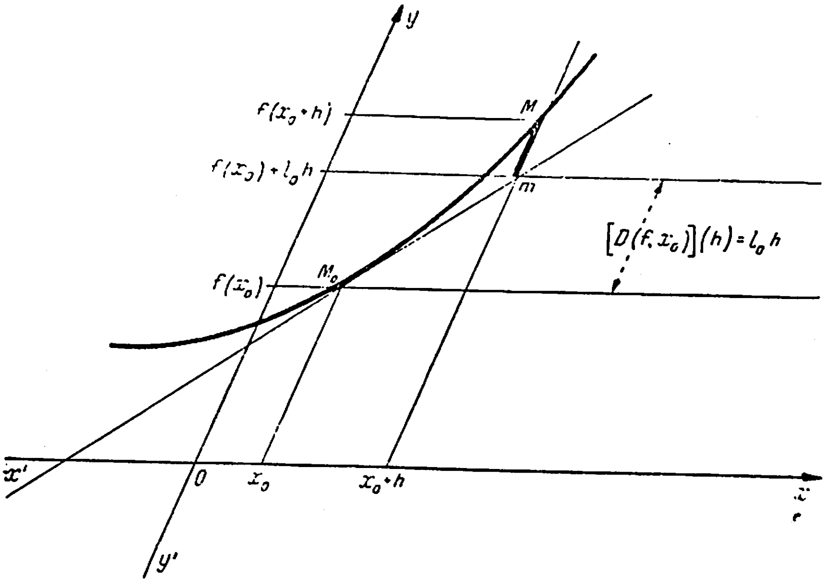


Fig. 4

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + l_0 h + h\varepsilon(h),$$

cu:

$$\lim_{0} \varepsilon = 0.$$

Numărul $f(x_0) + l_0 h$ este o valoare aproximativă a lui $f(x_0 + h)$ în vecinătatea lui x_0. Această aproximație este cu atît mai bună cu cît h este mic, pentru că $\lim_{0} \varepsilon = 0$.

Exemplu. Fie funcția $f = \left[x \mapsto \frac{x}{x-1}\right]$.

În punctul $x_0 = 0$, avem:

$$f(x_0 + h) = \frac{h}{h-1}, \ f(x_0) = 0,$$

$$\theta(h) = \frac{h}{h(h-1)} = \frac{1}{h-1};$$

deci:

$$d_0 = \lim_{0} \theta = -1.$$

Să luăm $h = 0{,}01$; se obţine:

$$f(x_0 + h) = \frac{0{,}01}{0{,}01 - 1} = -\frac{1}{99}$$

şi:

$$d_0h = -\frac{1}{100};$$

rezultă:

$$h\varepsilon(h) = -\frac{1}{99} + \frac{1}{100} = -\frac{1}{9\,900}.$$

EXERCIŢII

Se consideră funcţia numerică $f = [x \mapsto f(x)]$ care admite o diferenţială într-un punct x_0 din domeniul ei de definiţie. In fiecare caz, se cere să se calculeze derivata, să se scrie funcţia afină tangentă la f în x_0, să se calculeze $f(x_0 + h) - f(x_0)$ şi să se compare cu valoarea diferenţialei pentru numărul h.
(Se va lua mai întîi $h = 0{,}1$, apoi $h = 0{,}01$.)

3.28 $f(x) = 3x^2 - x$, a) $x_0 = 0$. b) $x_0 = 1$.

3.29 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $x_0 = 0$.

3.30 $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$.

3.31 $f(x) = x^4$, $x_0 = 1$.

3.32 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$.

Să se studieze curba reprezentativă a funcţiei f în vecinătatea punctului x_0 în următoarele cazuri (se vor studia tangentele sau eventual semitangentele):

*

3.33 $f(x) = x^5 + x$, $x_0 = 0$.

3.34 $f(x) = |x^5 + x|$, $x_0 = 0$.

3.35 $f(x) = \dfrac{(x-1)(x^2+4)}{x^2+x+1}$, $x_0 = 1$.

3.36 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$, $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

3.37 $f(x) = |x(x-1)(x-2)(x-3)|$, $x_0 = 0$; $x^2 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

3.38 $f(x) = x^2 + |x|$, $x_0 = 0$.

*

Să se găsească ecuaţia tangentei în punctul M_0 la curba Γ a cărei ecuaţie este definită de relaţia $y = f(x)$ şi să se construiască această tangentă în următoarele cazuri:

3.39 $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$.

3.40 $f(x) = x^2 - 3x$, $x_0 = -1$.

3.41 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, $x_0 = 0$.

3.42 $f(x) = x^2 + x$, $x_0 = 0$.

3.43 $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 2$.

3.44 $f(x) = \dfrac{x+3}{x+4}$, $x_0 = -1$.

3.45 1° Să se construiască, într-un reper $\mathcal{R}$, curba Γ, a cărei ecuaţie este definită de relaţia $y = x^2 - 1$ şi tangenta în punctul M_0 a lui Γ care are abscisa 1.
2° Să se construiască apoi, în acelaşi reper $\mathcal{R}$, curba Γ' a cărei ecuaţie este definită de relaţia $y = |x^2 - 1|$. Să se studieze amănunţit Γ' în vecinătatea lui $x_0 = 1$.

3° Fie:

$$f(x) = |x^2 - 1|.$$

Să se studieze:

$$\lim_{1+}\left[x \mapsto \frac{f(1)-f(x)}{1-x}\right] \text{și}$$

$$\lim_{1-}\left[x \mapsto \frac{f(1)-f(x)}{1-x}\right];$$

cum se traduce rezultatul pe reprezentarea grafică?

3.4 REGULI DE DIFERENȚIERE

3.4.1 Diferențiala unei sume

Fie f și g două funcții diferențiabile într-un punct x_0. Să reamintim că atunci există două funcții liniare u și v și două funcții ε și η astfel că:

a)
$$f(x) = f(x_0) + u(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0),$$
$$\lim_{x_0} \varepsilon = 0,$$
$$u = \mathrm{D}(f, x_0); \ \forall_{\mathbf{R}} h \quad u(h) = l_0 h,$$

(l_0 este derivata lui f în x_0);

b)
$$g(x) = g(x_0) + v(x - x_0) + \eta(x)\cdot(x - x_0),$$
$$\lim_{x_0} \eta = 0,$$
$$v = \mathrm{D}(g, x_0); \quad \forall_{\mathbf{R}} h \qquad v(h) = k_0 h,$$

(k_0 este derivata lui g în x_0).
Rezultă că:

$$f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0) + u\,(x - x_0) + v(x - x_0) + [\varepsilon(x) + \eta(x)](x - x_0),$$

adică:

$$[f + g](x) = [f + g](x_0) + [u + v](x - x_0) + [\varepsilon(x) + \eta(x)](x - x_0);$$

or:
$$\forall_{\mathbf{R}} h \ \ [u + v](h) = (l_0 + k_0)h;$$

funcția $w = u + v$ este liniară și:

$$\lim_{x_0} [\varepsilon + \eta] = \lim_{x_0} \varepsilon + \lim_{x_0} \eta = 0.$$

Am găsit deci o aplicație liniară w și o funcție ξ definită în vecinătatea lui x_0, astfel că:

$$[f + g](x) = [f + g](x_0) + w(x - x_0) + (x)\cdot(x - x_0),$$
$$\lim_{x_0} \xi = 0,$$
$$w = \mathrm{D}([f + g], x_0) = u + v.$$

Se poate deci enunța:

TEOREMĂ / Suma $f+g$ a două funcții diferențiabile în x_0 este diferențiabilă în x_0 și diferențiala sumei $f+g$ în x_0 este suma diferențialelor în x_0 a funcțiilor f și g.

$$D(f+g, x_0) = D(f, x_0) + D(g, x_0).$$

În ceea ce privește derivatele, avem următorul rezultat care decurge imediat din teorema precedentă și din izomorfismul i (nr. 3.2.2):

COROLAR / Suma $f+g$ a două funcții derivabile în x_0 este derivabilă în x_0 și derivata sumei $f+g$ în x_0 este suma derivatelor în x_0 a funcțiilor f și g.

Exemplu. Fie funcțiile $f = [x \mapsto ax]$ și $g = [x \mapsto b]$.

Avem: $$f+g = [x \mapsto ax + b].$$

Derivata lui f în x_0 este a.
Derivata lui g în x_0 este 0.
Deci, derivata lui $f+g$ în x_0 este: $a + 0 = a$.

3.4.2 Diferențiala funcției kf pentru k real

Fie f o funcție diferențiabilă în x_0. Avem (notațiile de la nr. 3.4.1):

$$f(x) = f(x_0) + u(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0),$$

$$\lim_{x_0} \varepsilon = 0,$$

$$u = \mathrm{D}(f, x_0); \quad \forall_{\mathbf{R}}\, h \quad u(h) = l_0 h.$$

Rezultă că, pentru orice număr real k:

$$kf(x) = kf(x_0) + k \cdot u(x - x_0) + k \cdot \varepsilon(x) \cdot (x - x_0).$$

Or, funcția $k \cdot u$ este liniară:

$$\forall_{\mathbf{R}}\, k \quad ku(h) = kl_0 h,$$

și:

$$\lim_{x_0} [x \mapsto k\varepsilon(x)] = \lim_{x_0} [x \mapsto k] . \lim_{x_0} \varepsilon = k \times 0 = 0.$$

Se poate deci enunța:

TEOREMA / Produsul kf dintre o funcție f, diferențiabilă în x_0 și un număr real k, este diferențiabil în x_0; diferențiala funcției kf în x_0 este produsul prin k al diferențialei în x_0 a funcției f:

$$D(kf, x_0) = kD(f, x_0).$$

În ceea ce privește derivatele, avem următorul rezultat ce decurge imediat din teorema precedentă și din izomorfismul i (nr. 3.2.2).

COROLAR / Produsul kf dintre o funcție f derivabilă în x_0 și un număr real k este derivabil în x_0; derivata în x_0 a funcției kf este produsul prin k a derivatei în x_0 a funcției f.

Exemplu. Fie funcția $f = [x \mapsto x^2]$

Se știe (nr. 3.2.2., Exemplul III) că derivata lui f în x_0 este numărul $2x_0$.

Fie funcția $g = af = [x \mapsto ax^2]$, unde a este un număr real oarecare. Derivata lui g în x_0 este numărul $2ax_0$.

3.4.3 Liniaritatea diferențierii

Fie $\mathfrak{D}_{x_0}$ (**R**, **R**) mulțimea funcțiilor de la **R** la **R** diferențiabile în punctul x_0 și fie $\mathfrak{L}$(**R**, **R**) mulțimea aplicațiilor liniare de la **R** la **R**.
$\mathfrak{L}$(**R**, **R**) este un spațiu vectorial pe **R**.
Rezultatele de la numerele 3.4.1 și 3.4.2 permit să se tragă concluzia că $\mathfrak{D}_{x_0}$(**R**, **R**) este un subspațiu vectorial al mulțimii $\mathfrak{F}$ (**R**, **R**) a funcțiilor de la **R** la **R** și că, mai mult, aplicația Φ, care face ca oricărei funcții diferențiabile în x_0 să-i corespundă diferențiala ei în x_0, este o aplicație liniară de la $\mathfrak{D}_{x_0}$(**R**, **R**) la $\mathfrak{L}$(**R**, **R**). La fel pentru aplicația de la $\mathfrak{D}_{x_0}$(**R**, **R**) la **R** care face ca oricărei funcții f diferențiabile în x_0 să-i corespundă derivata ei în x_0.

3.4.4 Diferențiala produsului

Fie f și g două funcții diferențiabile în punctul x_0.
Reluînd notațiile de la nr. 3.4.1, avem:

a)
$$f(x) = f(x_0) + u(x - x_0) + \varepsilon(x)\cdot(x - x_0),$$
$$\lim_{x_0} \varepsilon = 0,$$
$$u = \mathrm{D}(f, x_0)\,; \quad \forall_{\mathbf{R}}\, h \quad u(h) = l_0 h,$$

(l_0 este derivata lui f în x_0);

b)
$$g(x) = g(x_0) + v(x - x_0) + \eta(x)\cdot(x - x_0),$$
$$\lim_{x_0} \eta = 0,$$
$$v = \mathrm{D}(g, x_0)\,; \; \forall_{\mathbf{R}}\, h \quad v(h) = k_0 h.$$

(k_0 este derivata lui g în x_0).

Rezultă că, pentru orice x:

$$f(x)\cdot g(x) = [f(x_0) + u(x - x_0) + \varepsilon(x)\cdot(x - x_0)] \times \\ \times [g(x_0) + v(x - x_0) + \eta(x)\cdot(x - x_0)].$$

Adică, dezvoltînd:

$$[f\cdot g](x) = f(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot v(x - x_0) + f(x_0)\cdot\eta(x)\cdot(x - x_0) + \\ + g(x_0)\cdot u(x - x_0) + u(x - x_0)\cdot v(x - x_0) + \\ + u(x - x_0)\cdot\eta(x)\cdot(x - x_0) + \varepsilon(x)\cdot\eta(x)\cdot(x - x_0)^2 + \\ + g(x_0)\cdot\varepsilon(x)(x - x_0) + v(x - x_0)\cdot\varepsilon(x)\cdot(x - x_0),$$

$$[f\cdot g](x) = [f\cdot g](x_0) + [f(x_0)\cdot v + g(x_0)u](x - x_0) + \psi(x),$$

cu:

$$\psi(x) = u(x - x_0)\cdot v(x - x_0) + (x - x_0)\times \\ \times [f(x_0)\cdot\eta(x) + g(x_0)\varepsilon(x) + u(x - x_0)\eta(x) + v(x - x_0)\varepsilon(x)] + \\ + \varepsilon(x)\cdot\eta(x)\cdot(x - x_0)^2.$$

Din ipotezele:

$$\lim_{x_0} \varepsilon = \lim_{x_0} \eta = 0,$$

u şi v continue în 0,

$$u(x_0 - x_0) = v(x_0 - x_0) = 0,$$

$$f(x_0) \in \mathbf{R} \quad g(x_0) \in \mathbf{R},$$

şi din teoremele asupra limitelor, se poate trage concluzia:

$$\lim_{x_0} \psi = 0.$$

Pe de altă parte, funcţia $w = f(x_0)v + g(x_0)u$ este o aplicaţie liniară, ca o combinaţie liniară de aplicaţii liniare.
S-a găsit deci o aplicaţie liniară w şi o funcţie ψ definită într-o vecinătate a lui x_0, astfel că:

$$[f\cdot g](x) = [f\cdot g](x_0) + w(x - x_0) + \psi(x)$$

$$\lim_{x_0} \psi = 0,$$

$$w = D(f\cdot g, x_0) = f(x_0)v + g(x_0)u.$$

Se poate deci enunţa:

TEOREMĂ / Produsul fg a două funcţii diferenţiabile în x_0 este diferenţiabil în x_0 şi diferenţiala produsului fg în x_0 este dată de:

$$D(fg, x_0) = f(x_0) \cdot D(g, x_0) + g(x_0) \cdot D(f, x_0).$$

În ceea ce priveşte derivatele, avem următorul rezultat care decurge imediat din teorema precedentă şi din izomorfismul i (nr. 3.2.2):

COROLAR / Produsul fg a două funcţii derivabile în x_0 este derivabil în x_0. Fie l_0 derivata lui f în x_0 şi k_0 derivata lui g în x_0; derivata lui $f \cdot g$ în x_0 este dată prin:

$$h_0 = f(x_0)k_0 + g(x_0)l_0.$$

Exemplu. Fie funcţia $f = [x \mapsto x^2]$ şi $g = [x \mapsto x]$.
Derivata lui f în x_0 este $2\,x_0$.
Derivata lui g în x_0 este 1.
Derivata lui $h = fg = [x \mapsto x^3]$ este deci:

$$f(x_0) \times 1 + g(x_0) \times 2x_0 = x_0^2 + 2x_0^2 = 3x_0^2.$$

Să demonstrăm prin inducţie completă că derivata în punctul x_0 a funcţiei $f_n = [x \mapsto x^n]$ este numărul nx_0^{n-1}.
Să presupunem că derivata în x_0 a lui f_{n-1} este $(n-1)\,x_0^{n-2}$.
Avem:

$$f_n = f_{n-1} \times g.$$

Derivata în x_0 a lui f_n este deci dată prin:

$$f_{n-1}(x_0) \times 1 + g(x_0) \times (n-1)x_0^{n-2} = x_0^{n-1} + (n-1)x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}.$$

Rezultatul, valabil pentru exponentul $n - 1$, este deci valabil pentru exponentul n şi, pentru că este adevărat pentru exponentul 2, este adevărat pentru orice exponent întreg.
Prin combinarea diferitelor rezultate obţinute în această secţiune, se poate găsi derivata în punctul x_0 a oricărei funcţii polinomiale. De exemplu, derivata în punctul x_0 a funcţiei:

$$P = [x \mapsto 2x^5 - 3x^4 + 5x^2 + x]$$

este numărul:

$$10\,x_0^4 - 12\,x_0^3 + 10\,x_0 + 1.$$

3.4.5 Diferenţiala unei funcţii inverse

Fie f o funcţie diferenţiabilă în x_0, care nu se anulează pentru x_0.
Avem (notaţiile de la nr. 3.4.1):

$$f(x) = f'(x_0) + u(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0),$$

$$\lim_{x_0} \varepsilon = 0,$$

$$u = \mathrm{D}(f, x_0); \quad \forall_{\mathbf{R}} x \quad u(x) = l_0 x.$$

(l_0 este derivata lui f în x_0).

Să presupunem că $\frac{1}{f}$ este diferenţiabilă în x_0. Fie v diferenţiala ei.

Produsul $f \cdot \frac{1}{f} = 1$ este diferenţiabil în x_0 şi diferenţiala lui este aplicaţia identică nulă (nr. 3.2.2, Exemplul I).

Pe de altă parte, conform cu numărul 3.4.4, diferenţiala în x_0 a acestui produs este:

$$w = f(x_0) \cdot v + \frac{1}{f(x_0)} \cdot u.$$

Avem deci:

$$0 = f(x_0) \cdot v + \frac{1}{f(x_0)} \cdot u.$$

Se deduce că, dacă $\frac{1}{f}$ este diferenţiabilă în x_0, diferenţiala ei v este definită în mod necesar, plecînd de la diferenţiala u a lui f în x_0, prin:

$$v = -\frac{u}{f^2(x_0)}.$$

Reciproc, să considerăm aplicaţia afină φ definită prin:

$$\varphi(x) = \left[\frac{1}{f}\right](x_0) - \frac{u(x - x_0)}{f^2(x_0)} = \left[\frac{1}{f}\right](x_0) - \frac{l_0(x - x_0)}{f^2(x_0)}.$$

Fie:

$$\varepsilon(x) = \frac{\frac{1}{f(x)} - \varphi(x)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)} + \frac{l_0(x - x_0)}{f^2(x_0)}}{x - x_0},$$

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x_0) - f(x)}{(x - x_0)f(x) \cdot f(x_0)} + \frac{l_0}{f^2(x_0)}.$$

Or:

$$\lim_{x_0} \left[x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right[= l_0,$$

$$\lim_{x_0} f = f(x_0),$$

căci f, fiind derivabilă este continuă.
Prin urmare:

$$\lim_{x_0} \varepsilon = -\frac{l_0}{f^2(x_0)} + \frac{l_0}{f^2(x_0)} = 0;$$

v este deci diferenţiala lui $\frac{1}{f}$ în x_0.
Se poate deci trage concluzia:

TEOREMĂ / Inversa $\frac{1}{f}$ a unei funcţii diferenţiabile în x_0, astfel că $f(x_0)$ este diferit de zero, este diferenţiabilă în x_0 şi diferenţiala ei în x_0 este dată de:

$$\mathrm{D}\left(\frac{1}{f}, x_0\right) = -\frac{D(f, x_0)}{f^2(x_0)}.$$

În ceea ce priveşte derivatele, avem următorul rezultat care decurge imediat din teorema precedentă şi din izomorfismul i (nr. 3.2.2):

COROLARUL / Inversa $\frac{1}{f}$ a unei funcţii f, derivabile într-un punct x_0, astfel
1 că $f(x_0)$ este diferit de zero, este derivabilă în x_0.
Fie l_0 derivata lui f în x_0. Derivata k_0 a lui $\frac{1}{f}$ în x_0 este dată prin:

$$k_0 = -\frac{l_0}{f^2(x_0)}.$$

Rezultatul următor decurge imediat din teoremele de la numerele 3.4.4 şi 3.4.5:

COROLARUL / Cîtul $\frac{f}{g}$ a două funcţii f şi g, derivabile într-un punct x_0 astfel
2 că $g(x_0)$ este diferit de zero, este derivabil în x_0. Numărul h_0, derivata lui $\frac{f}{g}$ în x_0, este dat în funcţie de l_0 şi de k_0, respectiv derivatele lui f şi g în x_0, prin:

$$h_0 = \frac{l_0 g(x_0) - k_0 f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Într-adevăr:
$$h_0 = l_0 \cdot \frac{1}{g(x_0)} - \frac{k_0}{g^2(x_0)} f(x_0).$$

Exemple. I. Derivata în x_0 a funcţiei inverse $f = \left[x \mapsto \frac{1}{x}\right]$ este numărul $-\frac{1}{x_0^2}$.

II. Derivata l_0 în x_0 a funcţiei f, definită prin:

$$f = \left[x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}\right],$$

este dată prin:

$$l_0 = \frac{2x_0(x_0^2+1) - 2x_0(x_0^2-1)}{(x_0^2+1)^2} = \frac{4x_0}{(x_0^2+1)^2}.$$

3.4.6 Diferenţiala unei funcţii compuse

Fie f o funcţie definită şi diferenţiabilă în x_0. Avem (notaţiile de la nr. 3.4.1):

$$f(x) = f(x_0) + u(x - x_0) + \varepsilon(x) \cdot (x - x_0),$$
$$\lim_{x_0} \varepsilon = 0,$$
$$u = \mathrm{D}(f, x_0)\,; \quad \forall_{\mathbf{R}} h \quad u(h) = l_0 h.$$

(l_0 este derivata lui f în x_0).

Fie g o funcție definită și diferențiabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$.
Avem (notații analoage cu cele de la nr. 3.4.1):

$$g(y) = g(y_0) + v(y - y_0) + \eta(y) \cdot (y - y_0),$$

$$\lim_{y_0} \eta = 0,$$

$$v = \mathrm{D}(g, f(x_0)); \quad \forall_{\mathbf{R}} h \quad v(h) = k_0 h,$$

(k_0 este derivata lui g în $y_0 = f(x_0)$).
Avem atunci:

$$g[f(x)] = g[f(x_0)] + v[f(x) - f(x_0)] + \eta[f(x) \cdot [f(x) - f(x_0)],$$

cu:

$$f(x) - f(x_0) = u(x - x_0) + \varepsilon(x) \cdot (x - x_0);$$

$$g[f(x)] = g[f(x_0)] + v[u(x - x_0)] + v[\varepsilon(x) \cdot (x - x_0)] +$$
$$+ \eta(f(x)[u(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)],$$
$$[g \circ f](x) = [g \circ f](x_0) + [v \circ u](x - x_0) + \rho(x).$$

Ținînd seama de ipotezele:

$$\lim_{x_0} \varepsilon = 0,$$

$$\lim_{0} v = 0 \quad (v \text{ este liniară, deci continuă în } 0),$$

$$\lim_{0} f = f(x_0) \; (f \text{ este derivabilă, deci continuă în } x_0)$$

$$\lim_{y_0} \eta = 0,$$

$$\lim_{0} u = 0$$

și de teoremele asupra limitelor, se deduce că:

$$\lim_{x_0} \rho = 0.$$

Pe de altă parte, funcția compusă $v \circ u$ a două funcții liniare este o funcție liniară.
Se poate deci trage concluzia:

TEOREMĂ / Funcția compusă $g \circ f$ a unei funcții f, diferențiabilă în x_0 și a unei funcții g, diferențiabilă în $f(x_0) = y_0$, este diferențiabilă în x_0.

Diferențiala în x_0 a lui $g \circ f$ este compunerea $v \circ u$ a diferențialelor v și u ale lui g și f (respectiv) în x_0:

$$D(g \circ f, x_0) = D(g, f(x_0)) \circ D(f, x_0).$$

În ceea ce privește derivatele, avem:

$$\forall_{\mathbf{R}} h \quad v \circ u(h) = v[u(h)] = k_0 l_0 h.$$

COROLAR / Funcția compusă $g \circ f$ a unei funcții f, derivabilă în x_0 și a unei funcții g, derivabilă în $f(x_0) = y_0$, este derivabilă în x_0. Derivata lui $g \circ f$ în x_0 este produsul dintre derivata lui f în x_0 și derivata lui g în $f(x_0)$.

Exemplu. Fie funcțiile: $f = [x \mapsto x^3]$, $g = [y \mapsto y^4]$. Avem atunci: $h = g \circ f = [x \mapsto (x^3)^4] = [x \mapsto x^{12}]$. Derivata lui f în x_0 este $3x_0^2$, a lui g în y_0 este $4y_0^3$, al lui h în x_0 este deci: $3x_0^2 \cdot 4y_0^3 = 12\, x_0^{11}$, căci $y_0 = f(x_0) = x_0^3$.

3.4.7 Diferențiala unei funcții inverse

Fie f o funcție care admite pe un interval I o funcție inversă f^{-1}, diferențiabilă într-un punct x_0 al intervalului I.
Să studiem diferențiabilitatea lui f^{-1} în $y_0 = f(x_0)$, presupunînd că diferențiala lui f în x_0 nu este aplicația nulă.
Să notăm I_d funcția identică pe I (adică aplicația de la I la I definită prin: $\forall_I x \quad I_d(x) = x$.)
Derivata funcției identice în x_0 este 1 (I_d este propria ei diferențială).
Să presupunem că f^{-1} este diferențiabilă în x_0.
Funcțiile f și f^{-1} sînt astfel că:

$$f^{-1} \circ f = I_d.$$

După nr. 3.4.6, avem:

$$D(I_d, x_0) = I_d = D(f^{-1}, f(x_0)) \circ D(f, x_0).$$

Diferențiala lui f^{-1} în punctul $f(x_0)$ apare deci, dacă există, ca inversa diferențialei lui f în punctul x_0.
Fie l_0 derivata lui f în x_0 și fie $u = D(f, x_0)$.

Avem: $$\forall_{\mathbf{R}} h \quad u(h) = l_0 h,$$

deci: $$\forall_{\mathbf{R}} h \quad u^{-1}(h) = \frac{1}{l_0} h.$$

Reciproc, să considerăm aplicația afină φ definită prin:

$$\varphi(y) = f^{-1}(y_0) + u^{-1}(y - y_0).$$

Să studiem funcția ε definită prin:

$$\varepsilon(y) = \frac{f^{-1}(y) - \varphi(y)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) - u^{-1}(y - y_0)}{y - y_0},$$

$$\varepsilon(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} - \frac{1(y - y_0)}{l_0(y - y_0)}$$

y fiind element din $J = f[I]$, există un x astfel că:

$$y = f(x).$$

Pe de altă parte:

$$y_0 = f(x_0);$$

avem deci:

$$\varepsilon(y) = \eta(x) = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{l_0};$$

or:
$$\lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right] = l_0;$$

deci, dacă l_0 este diferit de zero:

$$\lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}\right] = \frac{1}{l_0}.$$

Prin urmare: $\lim\limits_{x_0} \eta = 0$.

Deci f^{-1} este diferențiabilă și se poate trage concluzia:

TEOREMĂ / Funcția f^{-1}, inversa unei funcții f, diferențiabile într-un punct x_0, este diferențiabilă în punctul $f(x_0) = y_0$ dacă diferențiala lui f în x_0 nu este identic nulă.
Diferențiala în y_0 a lui f^{-1} este inversa diferențialei în x_0 a lui f.

Observații. — **1** Această inversă există dacă se presupune că diferențiala lui f în x_0 nu este identic nulă.
2 Acest rezultat se interpretează geometric prin faptul că, curbele reprezentative ale lui f și f^{-1}, fiind simetrice în raport cu dreapta D de ecuație $y - x = 0$, tangentele în punctele $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0)\end{pmatrix}$ și $M'_0\begin{pmatrix} y_0 = f(x_0) \\ f^{-1}(y_0) = x_0\end{pmatrix}$ simetrice în raport cu D sînt de asemenea simetrice în raport cu D și reprezintă astfel funcții afine inverse.
În ceea ce privește derivatele, se poate trage concluzia:

COROLAR / Funcția inversă f^{-1} a unei funcții f, derivabile în x_0, astfel că derivata lui f în x_0 este nenulă,este derivabilă în $f(x_0) = y_0$. Derivata lui f^{-1} în y_0 este inversă derivatei lui f în x_0.

Exemplu. Fie funcția $f = [x \mapsto x^2]$ definită pe $\mathbf{R}^+$.
Pe $\mathbf{R}^+ : f^{-1} = [y \mapsto \sqrt{y}]$.
Derivata lui f^{-1} în $y_0 = x_0^2$ este egală cu $\frac{1}{2x_0}$, adică cu $\frac{1}{2y_0}$.

EXERCIȚII

Să se calculeze derivatele în punctul x_0 ale funcțiilor f definite prin:

3.46 $f(x) = \cos(ax + b)$, $\quad x_0 = 0$.

3.47 $f(x) = \cos(ax^2 + bx + c)$, $\quad x_0 = 0$.

3.48 $f(x) = \sin(\cos x)$, $\quad x_0 = 0$.

3.49 $f(x) = \cos^2 x + 3\cos x - 5 + \dfrac{2}{\cos x}$, $\quad x_0 = 0$.

3.50 $f(x) = \dfrac{5\cos^2 x - 3\cos x + 1}{2\sin^2 x - 4}$, $\quad x_0 = 0$.

3.51 $f(x) = \operatorname{tg}(2x^2 - 4x + 1)$

*

3.52 Fie funcția $k = f \circ g \circ h$. Să se calculeze derivata lui k în punctul x_0 cu ajutorul derivatelor în x_0 ale funcțiilor f, g și h.

3.5 FUNCȚIE DERIVATĂ

3.5.1 Definiție

Să considerăm o funcție numerică f de o variabilă reală, definită pe un domeniu D. La anumite elemente x_0 din D, putem face să corespundă, fiecăruia cînd există, derivata l_0 a funcției f în punctul x_0. Se definește astfel o funcție numerică de o variabilă reală, definită pe o submulțime D' din D:

DEFINIȚIE / Fie o funcție numerică f de o variabilă reală. Funcția, care face ca oricărui x_0 din D' să-i corespundă derivata lui f în x_0 (dacă există), se numește funcția derivată a lui f sau mai simplu, derivata lui f.

Funcția derivată a unei funcții f se notează f'. Derivata lui f în punctul x_0 se notează deci $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right].$$

Fie D domeniul de definiție al funcției f și fie D' domeniul de definiție al funcției derivate f'. Avem:

$$D' \subset D.$$

Se spune că f este derivabilă pe D'.

Exemple. Referindu-ne la exemplele de la nr. 3.2.2, se deduc următoarele trei exemple:

I. Dacă: $f = [x \mapsto C]$, unde C este o constantă reală, atunci:

$$f' = [x \mapsto 0].$$

II. Dacă: $f = [x \mapsto ax]$, atunci:

$$f' = [x \mapsto a].$$

III. Dacă: $f = [x \mapsto x^2]$, atunci:

$$f' = [x \mapsto 2x].$$

Observaţie. — Cu ajutorul teoremelor de la secţiunea 3.4, vom exprima funcţiile derivate ale funcţiilor obţinute, plecînd de la două funcţii f şi g.

3.5.2 Reguli de derivare

Din teoremele cu privire la derivatele într-un punct (secţiunea 3.4), se deduc imediat următoarele teoreme cu privire la funcţiile derivabile pe un interval deschis (care este o vecinătate a fiecăruia din punctele sale).

■ DERIVATA FUNCŢIEI SUMĂ

TEOREMA 1 / **Funcţia sumă a două funcţii derivabile pe un interval deschis este derivabilă pe acest interval şi avem:**

$$(f+g)' = f' + g'.$$

Teorema se extinde imediat la o sumă de mai multe funcţii.

Exemplu. Fie funcţiile: $f = [x \mapsto ax]$, $g = [x \mapsto b]$.

Avem:

$$f + g = [x \mapsto ax + b];$$

se ştie că:

$$f' = [x \mapsto a], \quad g' = [x \mapsto 0];$$

deci:

$$(f+g)' = a.$$

Rezultă că derivata unei funcţii afine $s = [x \mapsto ax + b]$ este:

$$s' = [x \mapsto a].$$

■ DERIVATA FUNCŢIEI kf PENTRU k CONSTANT

TEOREMA 2 / **Dacă f este o funcţie derivabilă pe un interval deschis, şi dacă k este o constantă, funcţia kf este derivabilă pe acelaşi interval şi avem:**

$$(kf)' = kf'.$$

Exemplu. Fie funcţia $f = [x \mapsto x^2]$; avem (nr. 3.2.2, Exemplul III)

$$f' = [x \mapsto 2x].$$

Fie funcţia $g = [x \mapsto ax^2)$; avem:

$$g' = [x \mapsto 2ax].$$

■ LINIARITATEA DERIVĂRII

Fie $\mathcal{D}$ $(I, \mathbf{R})$ mulţimea funcţiilor derivabile pe un interval I şi $\mathcal{F}$ $(I, \mathbf{R})$ mulţimea funcţiilor definite pe I şi cu valori în $\mathbf{R}$.
Aplicaţia δ care face ca oricărui element din $\mathcal{D}$ $(I, \mathbf{R})$ să-i corespundă derivata ei, element din $\mathcal{F}(I, \mathbf{R})$, este o aplicaţie liniară.

■ DERIVATA UNUI PRODUS DE FUNCŢII

TEOREMA 3 / **Funcţia produs a două funcţii f şi g derivabile pe un interva deschis este derivabilă pe acest interval şi avem:**

$$(fg)' = fg' + gf'.$$

Teorema se extinde fără dificultate la un produs de mai multe funcţii.
Cînd $f = g$, avem imediat:

$$(f^2)' = 2f \cdot f'.$$

Exemplu. Fie funcţiile:

$$f = [x \mapsto x^2] \quad \text{şi} \quad g = [x \mapsto x].$$

Avem:

$$(x^3)' = x^2 \cdot 1 + 2x \cdot x = 3x^2.$$

Acest rezultat lasă să se prevadă că, pentru n întreg pozitiv, derivata lui x^n este nx^{n-1}.
Să presupunem că pentru funcţia $f = [x \mapsto x^n]$ avem:

$$f' = nx^{n-1}.$$

Fie:

$$g = [x \mapsto x^{n+1}];$$

avem:

$$g(x) = xf(x),$$

deci:

$$g'(x) = f(x) + xf'(x) = x^n + nx \cdot x^{n-1} = (n+1)x^n.$$

Rezultatul, valabil pentru exponentul n, este deci valabil pentru exponentul $n + 1$. Rezultă de aici că oricare ar fi n întreg pozitiv:

$$\text{dacă } f(x) = x^n, \text{ atunci } f'(x) = nx^{n-1}.$$

Prin combinarea acestui rezultat şi a teoremelor 1 şi 2 de la nr. 3.5.2, ştim să calculăm derivata unei funcţii polinomiale oarecare. De exemplu, fie funcţia f definită prin:

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5x^2 + x;$$

funcţia derivată f' este definită prin:

$$f'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 10x + 1.$$

■ DERIVATA INVERSEI UNEI FUNCŢII ŞI A FUNCŢIEI CÎT

TEOREMA / 4 **Inversa unei funcţii f derivabile pe un interval deschis este derivabilă în orice punct din acest interval în care este definită şi avem:**

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Fie acum două funcţii f şi g derivabile pe intervalul I.
Pentru orice punct în care $g(x)$ nu este nulă, funcţia cît este definită prin:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}.$$

Teorema pe care am demonstrat-o şi teorema cu privire la funcţia produs permit să se calculeze derivata funcţiei cît:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} - f\frac{g'}{g^2},$$

adică:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}.}$$

Exemple. I. Fie funcţia $f = \left[x \mapsto \frac{1}{x^n}\right]$. Pentru n întreg pozitiv, avem imediat:

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

Folosind exponenţii negativi, se vede că derivata funcţiei:

$$f = [x \mapsto x^{-n}]$$

este:

$$f' = [x \mapsto -nx^{-n-1}],$$

(adică aceeaşi formulă ca în cazul unui exponent pozitiv.

II. Ştiind să derivăm funcţiile polinomiale, se pot calcula acum derivatele funcţiilor raţionale. De exemplu, fie funcţia:

$$f = \left[x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right];$$

derivata ei f' este definită prin:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

DERIVATA UNEI FUNCŢII COMPUSE

TEOREMĂ / Fie o funcţie g derivabilă pe un interval deschis I astfel că $g[I]$ este un interval deschis.
Fie f o funcţie definită şi derivabilă pe intervalul deschis $g[I]$. Funcţia compusă $f \circ g$ este atunci derivabilă pe I şi derivata h' este dată prin:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x).$$

Avem deci:
$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

Exemple. Fie funcţiile:

$$f = [x \mapsto x^n] \text{ şi } g = [x \mapsto g(x)].$$

Avem:
$$h = f \circ g = [x \mapsto [g(x)]^n];$$

prin urmare:
$$h' = g' \cdot (f' \circ g),$$
$$h'(x) = g'(x) \cdot n[g(x)]^{n-1}.$$

Această formulă permite calcularea mai rapidă o anumitor derivate. Fie, de exemplu, funcţia:

$$h = [x \mapsto (x^2 + 1)^5],$$

şi fie funcţiile:

$$f = [x \mapsto x^5] \quad \text{şi} \quad g = [x \mapsto x^2 + 1];$$

avem:
$$h = f \circ g$$

şi:
$$h'(x) = g'(x) \cdot n[g(x)]^{n-1} = 2x \cdot 5(x^2 + 1)^4.$$

DERIVATA UNEI FUNCŢII INVERSE

Fie f o funcţie derivabilă pe un interval deschis I care admite pe I o funcţie inversă f^{-1}. Se demonstrează atunci că $f[I]$ este un interval deschis. Funcţia f^{-1} este atunci derivabilă în orice punct din $f[I]$ (nr. 3.4.7). Avem:

$$[f^{-1}]'(y) = [f^{-1}]'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(f(x))]} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

TEOREMĂ / Fie o funcţie f derivabilă pe un interval deschis I şi care admite pe I o funcţie inversă f^{-1}. Această funcţie inversă este derivabilă şi avem:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Exemple. **I.** Fie funcția: $f^{-1} = [x \mapsto y = \sqrt{x}]$.

Avem: $$f(y) = y^2, \text{ deci: } f'(y) = 2y;$$

rezultă: $$(f^{-1})(x) = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot$$

II. Mai general, fie funcția:

$$f^{-1} = [x \longrightarrow y = \sqrt[n]{x}].$$

Avem: $$f(y) = y^n,\ f'(y) = ny^{n-1},$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Rezultă că formula de derivare pentru exponentul $\frac{1}{n}$ este aceeași ca în cazul exponentului întreg n.

III. Fie acum pentru α rațional funcția $f = [x \mapsto x^\alpha]$.

Să punem $\alpha = \frac{p}{q}$, unde p și q sînt numere întregi.

Avem: $$y = x^\alpha = x^{\frac{p}{q}} \doteq \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

Punînd $u = x^{\frac{1}{q}}$, se obține o funcție compusă; pentru că $y = u^p$, obținem:

$$f' = \left[x \mapsto pu^{p-1}\cdot\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}\right],$$

$$\frac{p}{q}u^{p-1}x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p-1}{q}}x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

În sfîrșit: $f' = [x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}]$.
Se generalizează astfel la exponenții raționali formula obținută pentru exponenții întregi.

IV. Fie funcția: $f = [x \mapsto \sin x]$ definită și derivabilă pe intervalul $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[= I$ (Algebră, Anul I—CDE nr. 9.8).

Avem: $$f^{-1} = [x \mapsto \text{Arc}\sin x] \text{ (nr. 1.8.5)},$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{\cos(\text{Arc}\sin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$$

În același fel se găsesc derivatele altor funcții circulare inverse (nr. 1.8.5) (exercițiile cu numerele de la 3.115 la 3.117).

3.5.3 Rezumatul principalelor rezultate

Funcții	Derivate	Observații
1° Formule referitoare la funcțiile derivabile $f, g, \ldots$:		
$f+g$	$f'+g'$	
αf	$\alpha f'$	$\alpha \in \mathbf{R}$ (constantă)
fg	$fg'+f'g$	
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$	
$\frac{f}{g}$	$\frac{gf'-g'f}{g^2}$	
$f \circ g$	$(f' \circ g) \cdot g'$	
f^{-1}	$\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$	
2° Rezultate referitoare la funcții particulare:		
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$a \in \mathbf{R}$ (constantă)
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	
$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$f'(x) = 1 + \mathrm{tg}^2 x$	
$f(x) = x^q$	$f'(x) = qx^{q-1}$	$\forall_{\mathbf{Q}}\, q$

3.5.4 Notație diferențială

Fie f o funcție numerică definită pe o mulțime D și derivabilă pe o submulțime D' din D.
Oricărui număr real x din D', putem face să-i corespundă aplicația diferențială a lui f în punctul x. Această aplicație de la $\mathbf{R}$ la mulțimea $\mathcal{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ a aplicațiilor liniare de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$ se notează df:

$$df = [x \mapsto \mathrm{D}(f, x)] = [x \mapsto [h \mapsto f'(x) \cdot h]].$$

Avem deci:

$$(df)(x) = [h \mapsto f'(x) \cdot h].$$

Fie aplicația identică $I = [x \mapsto x]$. Avem pentru orice x real: $I'(x) = 1$.
Avem deci pentru orice x: $(dI)(x) = [h \mapsto h] = I$;
prin urmare:

$$(df)(x) = (df)(x) \circ (dI)(x) = [h \mapsto f'(x) \cdot [(dI)(x)]h]. \quad (1)$$

Plecînd de la această expresie a lui df, vom da o notaţie tradiţională, care este foarte utilă în practică, dar care este incorectă căci se datoreşte confundării diferitelor aplicaţii f cu imaginea $f(x)$, prin funcţia f, a unui element oarecare din spaţiul de plecare. Interesul practic (şi istoric) al notaţiei explică această necorectitudine.
Vom confunda succesiv:

1° $[(\mathrm{d}f)(x)](h)$ cu $(\mathrm{d}f)(x)$ şi $[\mathrm{d}I(x)](h)$ cu $(\mathrm{d}I)(x)$;

atunci egalitatea (1) devine

$$(\mathrm{d}f)(x) = f'(x) \cdot (\mathrm{d}I)(x). \tag{2}$$

2° $(\mathrm{d}I)(x)$ cu $\mathrm{d}I$,
$(\mathrm{d}f)(x)$ cu $\mathrm{d}f$;

atunci egalitatea (2) devine:

$$\mathrm{d}f = f'(x) \cdot \mathrm{d}I. \tag{3}$$

3° I cu $I(x) = x$;
avem atunci:

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}(I(x)) = \mathrm{d}x;$$

atunci egalitatea (3) devine:

$$\mathrm{d}f = f'(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

Se confundă de asemenea cîte o dată f cu $f(x) = y$ şi se scrie:

$$y = f(x), \quad \mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

Observaţie. — Această notaţie este extrem de folosită în fizică şi, pentru un x dat, dx ia semnificaţia unei creşteri infinitezimale a variabilei; dy este atunci creşterea corespunzătoare a funcţiei diferenţiale, care este o valoare aproximativă a creşterii lui f între x şi $x + \mathrm{d}x$, cu atît mai bună cu cît este mai mic dx.
Cu această notaţie derivata funcţiei f se notează:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x) \left(= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \text{ dacă } y = f(x) \right).$$

Aceasta este notaţia lui *Leibniz*.

3.5.5 Proprietăţi ale notaţiei diferenţiale

■ Aceste proprietăţi rezultă imediat din proprietăţile derivatelor. Dacă se notează prin f şi g funcţiile derivabile pe un acelaşi domeniu D', avem:

$$\mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g,$$
$$\mathrm{d}(kf) = k\mathrm{d}f \qquad (k \text{ constant}),$$
$$\mathrm{d}(fg) = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f,$$
$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\mathrm{d}f - f\mathrm{d}g}{g^2}.$$

DIFERENŢIALA UNEI FUNCŢII COMPUSE

Fie $h(x) = g[f(x)]$ o funcţie compusă plecînd de la g prin intermediul lui f. Se ştie că:

$$h'(x) = g'[f(x)]f'(x).$$

Rezultă:

$$dh = g'[f(x)] \cdot f'(x)dx.$$

Observînd că $f'(x)dx$ este diferenţiala lui f, avem:

$$dh = g'[f(x)]\, df;$$

prin urmare:

$$\frac{dh}{df} = g'[f(x)].$$

Avem atunci: $\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{df} \times \frac{df}{dx}$.

Notaţia $\frac{df}{dx}$ trebuie să fie considerată ca un veritabil raport şi folosită astfel în toate calculele.

DIFERENŢIALA FUNCŢIEI INVERSE A UNEI FUNCŢII

Fie relaţia $y = f^{-1}(x)$ care defineşte funcţia inversă a funcţiei f:

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y).$$

Se ştie că:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)},$$

ceea ce conduce la a scrie:

$$dy = \frac{dx}{f'(y)} \quad \text{sau} \quad dx = f'(y)\, dy.$$

Acest rezultat se găseşte imediat plecînd de la echivalenţa:

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y).$$

Observaţie. — Ultimele rezultate pun în evidenţă interesul notaţiei diferenţiale. Într-o diferenţiere nu este nevoie să se ştie care este variabila.

Exemplu. Fie:

$$y = x^{\frac{p}{q}} \quad (p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}.$$

Avem:

$$y = x^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow y^q = x^p,$$

sau, diferenţiind:

$$qy^{q-1}\,\mathrm{d}y = px^{p-1}\,\mathrm{d}x,$$

adică:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p}{q}x^{p-1}y^{1-q} = \frac{p}{q}x^{p-1}x^{\frac{(1-q)p}{q}} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Se regăseşte astfel formula de derivare pentru exponenţii raţionali.

3.5.6 Derivate succesive

Să considerăm o funcţie f derivabilă pe un interval deschis $I =]\alpha, \beta[$. Funcţia derivată f' este definită pe I şi poate fi ea însăşi derivabilă.
De exemplu, fie:

$$f(x) = x^5 - 3x^2 + 7;$$

avem:

$$f'(x) = 5x^4 - 6x.$$

Funcţia f' este ea însăşi derivabilă pe $\mathbf{R}$ şi avem:

$$(f')'(x) = 20x^3 - 6.$$

DEFINIŢIE / Dacă derivata f' a unei funcţii f este derivabilă pe o submulţime din R, se spune că derivata funcţiei f' este derivata a doua a funcţiei f şi se notează cu f''.

Se poate întîmpla ca f'' să admită ea însăşi o derivată. Această derivată se notează f''' şi se numeşte „derivata a treia a lui f". Continuînd procesul, se definesc, dacă există, derivatele succesive ale funcţiei f, care se notează:

$$f', f'', f''', f^{(IV)}, f^{(V)}, \ldots, f^{(n)}, \ldots$$

Exemple. I.

$$\begin{array}{rcrrrrrr}
f(x) & = & 4x^5 - & 3x^4 + & x^3 - & 6x^2 + & 7x - & 20; \\
f'(x) & = & & 20x^4 - & 12x^3 + & 3x^2 - & 12x + & 7; \\
f''(x) & = & & & 80x^3 - & 36x^2 + & 6x - & 12; \\
f'''(x) & = & & & & 240x^2 - & 72x + & 6; \\
f^{(IV)}(x) & = & & & & & 480x - & 72; \\
f^{(V)}(x) & = & & & & & & 480; \\
f^{(VI)}(x) & = & & & & & & 0.
\end{array}$$

Începind de la $f^{(VI)}$, mai există, derivate succesive şi sînt toate identic nule.
II. Fie funcţia f definită prin:

$$f(x) = \sin x.$$

Avem:

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi),$$

$$f'''(x) = \cos(x + \pi) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

III. Se arată la fel că, pentru $f(x) = \cos x$:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

DERIVATA A n-A A UNUI PRODUS

Fie u şi v două funcţii de variabilă x; presupunem că sînt definite pe un domeniu comun şi că admit derivate pînă la ordinul n.
Punînd:

$$y = uv,$$

avem:

$$y' = uv' + vu',$$

apoi:

$$y'' = uv'' + u'v' + u'v' + u''v,$$

deci:

$$y'' = uv'' + 2u'v' + u''v.$$

Într-un mod general, cînd se trece de la o derivată la următoarea, se iau produsele succesive, derivînd o funcţie de tipul u fără să se deriveze cea de tipul v sau invers.
Ajunşi la $y^{(n)}$, vom avea deci o sumă de produse de tipul:

$$u^{(n-p)}v^{(p)},$$

înmulţite prin coeficienţi numerici, independenţi de alegerea funcţiilor u şi v:

$$y^{(n)} = A_0uv^{(n)} + A_1u'v^{(n-1)} + \ldots + A_pu^{(p)}v^{(n-p)} + \ldots + A_nu^{(n)}v.$$

Pentru a determina coeficienţii A ne plasăm într-un caz particular în care calculele directe se fac simplu.
Să alegem:

$$u(x) = x^p;\ v(x) = x^{n-p};\ y(x) = x^n.$$

Avem:

$u^{(p)}(x) = p!$ derivatele următoare fiind nule;

$v^{(n-p)}(x) = (n-p)!$ derivatele următoare fiind nule;

$y^{(n)}(x) = n!$

Se deduce că funcțiile care sînt înmulțite cu $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ sînt nule pentru că:

$$k > n - p \Rightarrow v^{(k)} = 0.$$

De asemenea, funcțiile de coeficienți $A_{p+1}, A_{p+2}, \ldots, A_n$ sînt nule pentru că:

$$k > p \Rightarrow u^{(k)} = 0.$$

Rămîne:

$$n! = A_p p!(n-p)!,$$

de unde:

$$A_p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p.$$

Se deduce de aci formula lui Leibniz:

TEOREMĂ / Derivata a n-a a produsului a două funcții u și v, de n ori derivabile, este:

$$(uv)^{(n)} = uv^{(n)} + C_n^1 u' v^{(n-1)} + C_n^2 u'' v^{(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + C_n^p u^{(p)} v^{(n-p)} + \ldots + u^{(n)} v.$$

EXERCIȚII

Să se calculeze funcțiile derivate ale funcțiilor definite prin:

3.53 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x + 2.$

3.54 $f(x) = x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 4x + 1.$

3.55 $f(x) = 6x^5 - 8x^4 + 3x - 2.$

3.56 $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1.$

3.57 $f(x) = (x+1)^2(x+2)^3.$

3.58 $f(x) = x^2(x+1)^3(x-2)^4.$

3.59 $f(x) = x^5(x-2)^3(x+3)^4.$

3.60 $f(x) = (x^2+1)^3(x^3+1)^2.$

3.61 $f(x) = (x^2+x-1)^2(x^3-x^2+1)^3.$

3.62 $f(x) = (x-1)^3(x^2+x+1)^2.$

3.63 $f(x) = (x+1)^3(x-1)^3(x^2+1).$

3.64 $f(x) = x(x-1)^2.$

3.65 $f(x) = x^2(1+x)^3(2-x)^2.$

3.66 $f(x) = \frac{x^3}{(x^2+1)^2}.$

3.67 $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}.$

3.68 $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

3.69 $f(x) = \dfrac{x^5+1}{x^5-1}$.

3.70 $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

3.71 $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}$.

3.72 $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2$.

3.73 $f(x) = \left(\dfrac{a-x}{x}\right)^2$

3.74 $f(x) = \left(\dfrac{3+x}{2x+1}\right)^4$.

3.75 $f(x) = \dfrac{(x+1)^2(x-1)}{(x+2)^3(x-2)^3}$.

3.76 $f(x) = \dfrac{(x^2+x+1)^2}{(x^3-1)^3}$.

3.77 $f(x) = \dfrac{(x^2-x+1)^3}{(x^2+1)^2}$.

3.78 $f(x) = \dfrac{5x^{10}+7}{2x^{10}+3}$.

3.79 $f(x) = (x^4+x^2+1)^5$.

3.80 $f(x) = \sqrt{|x|}$.

3.81 $f(x) = |x^3-3x+2|$.

3.82 $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

3.83 $f(x) = \sin^2 x$.

3.84 $f(x) = \sin^n x \cos^m x,\ n \in \mathbf{N},\ m \in \mathbf{N}$.

3.85 $f(x) = \dfrac{2}{1+\cos x}$.

3.86 $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\operatorname{tg} 2x}$.

3.87 $f(x) = x \sin x$.

3.88 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

3.89 $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$.

3.90 $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + 2 \operatorname{ctg} x$.

3.91 $f(x) = \left(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right) \cos x$.

(Să se explice rezultatul.)

3.92 $f(x) = \dfrac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$.

3.93 $f(x) = \dfrac{\cos x + x \sin x}{\sin x - x \cos x}$.

3.94 $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + 2 \operatorname{ctg} x$.

3.95 $f(x) = 2x \cos x + (x^2 - 2)\sin x$.

3.96 $f(x) = \dfrac{(1 + \sin x)^2}{\sin x (1 - \sin x)}$.

3.97 $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$.

3.98 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}}$

3.99 $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

3.100 Fie $u, v, w, u_1, u_2, \ldots, u_n$ funcții derivabile pe un interval deschis I.

1° Pentru $y = uv$, să se calculeze $\dfrac{y'}{y}$

2° Pentru $z = uvw$, să se calculeze $\dfrac{z'}{z}$.

3° Să se generalizeze pentru n funcții: $y = u_1 u_2 u_3 \ldots u_n$.

4° Să se deducă din rezultatul de la 3° că derivata lui $u^{(n)}$ este $nu^{(n-1)} u'$.

*

Să se examineze dacă curbele Γ, *ale căror ecuații sînt definite de relațiile următoare, admit o tangentă care are ca coeficient director numărul dat* m:

3.101 $y = \dfrac{x^2}{4} - 2x - 5$ și $m = 1$.

3.102 $y = -x^3 + 7x^2 + x - 10$ și $m = -4$.

3.103 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ și $m = -1$.

3.104 $y = 2x^4 - x$ și $m = 0$.

3.105 $y = x^4 - 2x^2 + 5$ și $m = 0$.

*

Să se calculeze derivatele f', f'', f''' şi $f^{(IV)}$ în următoarele cazuri:

3.106 $f(x) = 3x^3 - 6x + 1.$

3.107 $f(x) = (x^2 + 1)^2.$

3.108 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}\cdot$

3.109 $f(x) = \operatorname{tg} x.$

*

3.110 Să se demonstreze formula lui Leibniz prin inducţie completă.

3.111 Fie funcţia: $f = [x \mapsto \sin^2 x]$.

1° Să se calculeze f' şi f''.

2° Să se stabilească între f şi f'' o relaţie independentă de x.

3° Aceeaşi chestiune pentru funcţia:

$$g = [x \mapsto \cos^2 x].$$

3.112 Să se calculeze derivata a doua a funcţiei f:

$$f = [x \mapsto 3\cos(2x - 1) + 5\sin(3x + 7)].$$

3.113 Să se calculeze derivata de ordinul 10 a funcţiei f:

$$f = [x \mapsto \sin 2x].$$

3.114 Să se calculeze derivata de ordinul 49 a funcţiei f:

$$f = \left[x \mapsto \sin\frac{x}{3}\right].$$

3.115 Să se calculeze derivata funcţiei Arccosinus (nr. 3.5.2).

3.116 Să se calculeze derivata funcţiei Arctangentă (nr. 3.5.2).

3.117 Să se calculeze derivata funcţiei Arccotangentă (nr. 3.5.2).

3.118 Să se demonstreze că derivata unei funcţii pare este o funcţie impară şi invers.

3.119 Să se demonstreze că derivata unei funcţii periodice este o funcţie periodică de aceeaşi perioadă.

3.120 Fie funcţia f definită prin $f(x) = x^2$.

Să se demonstreze egalitatea:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

Să se dea şi interpretarea geometrică.

3.121 Să se găsească un polinom $P(x)$ care să fie identic cu produsul printr-un număr A a pătratului derivatei sale. (Să se determine mai întîi gradul lui $P(x)$.)

PROBLEME

3.122 1° $P(x)$ însemnînd un polinom de gradul n, care este gradul derivatei lui de ordinul $p - 1$ $(2 \leqslant p \leqslant n + 1)$?

Această derivată o numim $Q(x)$.

2° Să se determine p în funcţie de n ca să avem egalitatea:

$$P(x) = A[Q(x)]^p, \tag{1}$$

A fiind o constantă.

3° Să se deducă forma polinomului $P(x)$ care verifică relaţia (1).

3.123 Se pune:

$$P(x) = 5x^3 + ax^2 + bx + c.$$

1° Să se determine constanta K pentru a avea:

$$P(x) + K(x - 1)P'(x) + (x^2 - 1)P''(x) = 0.$$

2° Să se calculeze coeficienţii a, b, c.
3° Să se demonstreze că $P(x)$ este divizibil prin $x - 1$ şi să se calculeze cîtul.

3.124 Fie funcţia: $f = \left[x \mapsto \dfrac{1 - x^5}{1 - x}\right]$.

1° Să se calculeze derivata sa în $\mathbf{R} - \{1\}$.
2° Să se deducă egalitatea:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = \frac{1 - 5x^4 + 4x^5}{(1 - x)^2}.$$

3° Să se generalizeze rezultatul precedent la:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1},$$

apoi la:

$$2 + 6x + 12x^2 + \ldots + n(n + 1)x^{n-1}.$$

3.125 Fie funcţia f definită prin:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Să se calculeze:

$$f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ f'''(0).$$

Să se deducă $f(x)$ cunoscînd $f(0) = \alpha$, $f'(0) = \beta$, $f''(0) = \gamma$ şi $f'''(0) = \varepsilon$.

3.126 Fie funcţia f definită prin:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

1° Să se demonstreze egalitatea:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x).$$

2° Se dă: $f(x) = x^3 + 5x^2 - 6x + 3$. Să se calculeze $f(1)$ şi să se folosească egalitatea de mai sus pentru a se obţine o valoare cu aproximaţie de $\dfrac{1}{10^3}$ a lui $f(1{,}002)$.

3.127 1° Fie f funcţia: $\left[x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}\right]$.

Să se calculeze prima ei derivată f' şi să se verifice relaţia:

$$2f'(x)\sqrt{1 + x^2} = f(x).$$

2° Să se deducă că derivata a doua f'' verifică relaţia:

$$4f''(x)(1 + x^2) + 4xf'(x) - f(x) = 0.$$

3.128 1° Se pune $f(x) = (x^2 - 1)^n$, n întreg pozitiv.
Să se demonstreze că avem:

$$f'(x)(x^2 - 1) = 2nxf(x). \tag{1}$$

2° Derivînd de $n + 1$ ori cei doi membri ai acestei relații, prin formula lui Leibniz, să se demonstreze că, dacă notăm cu g derivata a n-a a lui f, avem:

$$g''(x)(x^2 - 1) + 2xg'(x) - n(n + 1) = 0. \tag{2}$$

Aplicație
Să se deducă g pentru $n = 2$ și $n = 3$ și să se verifice relația (2) pentru aceste valori ale lui n.

3.129 1° Fie funcția:

$$f = \left[x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}\right].$$

Să se calculeze f' și $f''(x)$.
Să se demonstreze prin inducție completă că derivata a n-a este dată de:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^{n+1}},$$

unde $P_n(x)$ este un polinom de gradul n.
Să se demonstreze că:

$$P_{(n+1)}(x) = (1 + x^2)P_n'(x) - (2n + 2)xP_n(x). \tag{1}$$

Să se deducă:

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4.$$

2° Derivînd de n ori produsul $f(x)(1 + x^2)$ cu ajutorul formulei lui Leibniz, să se stabilească formula (2):

$$P_n(x) + 2nxP_{n-1}(x) + n(n - 1)(1 + x^2)P_{n-2}(x) = 0$$

Mărind n cu o unitate în (2) și ținînd seama de (1), să se demonstreze că:

$$P_n' + n(n + 1)P_n = 0. \tag{3}$$

3° Folosind relațiile obținute, să se demonstreze că:

$$(1 + x^2)P_n'' - 2nxP_n' + n(n + 1)P_n = 0. \tag{4}$$

Să se verifice relațiile (2), (3) și (4) pentru $n = 3$ și pentru $n = 4$.

3.130 1° Să se scrie formula care dă dezvoltarea lui $x(1 + x)^n$.
2° Să se deriveze cei doi membri în raport cu x și să se înlocuiască în rezultat x prin 1.
3° Să se deducă: $1 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n + 1)C_n^n = 2^{n-1}(n + 2)$.

3.131 Să se găsească un polinom de gradul n astfel ca:

$$P(x) + P'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

3.132 1° Să se calculeze derivata a n-a a lui:

$$f = [x \mapsto (x - a)^n(x - b)^n],$$

folosind formula lui Leibniz.
2° Să se facă $b = a$ în rezultatul obținut și să se compare cu calculul direct al derivatei a n-a a lui $(x - a)^{2n}$.
3° Să se deducă:

$$1 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = \frac{2n(2n - 1)\ldots(n + 1)}{n!} = C_{2n}^n.$$

3.133 1° Să se calculeze derivata a n-a a lui :

$$\frac{1}{x+1} \quad \text{şi} \quad \frac{1}{x-1}.$$

2° Să se deducă derivata a n—a a lui $\frac{2x}{x^2-1}$.

3.134 1° Se pune:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

Să se demonstreze că avem:

$$(1+x^2)f'(x) = xf(x).$$

2° Să se calculeze derivatele a $(n+1)$-a ale celor doi membri cu formula lui Leibniz şi să se deducă:

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + (n^2-1)f^{(n)}(x) = 0.$$

Să se demonstreze că toate derivatele de ordin impar sînt nule pentru $x = 0$.

4 APLICAŢII ALE DERIVATELOR LA STUDIUL FUNCŢIILOR

4.1 DERIVATA ŞI SENSUL DE VARIAŢIE ALE UNEI FUNCŢII

4.1.1 Derivata unei funcţii strict monotone

Să reamintim teorema următoare pe care o vom admite fără demonstraţie (a se vedea Algebra anul I CDE, secţiunea 8.1):

TEOREMĂ / Dacă o funcţie f strict monotonă pe un interval admite o derivată pe acest interval, această derivată este de valori:

a) pozitive sau nule, în cazul în care f este strict crescătoare;
b) negative sau nule, în cazul în care f este strict descrescătoare;
c) nule, în cazul în care f este constantă.

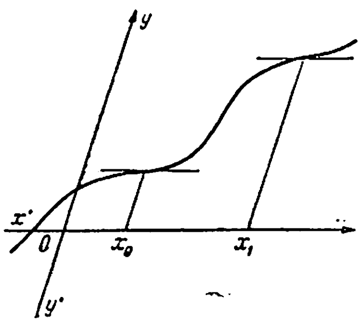


Fig. 1

Observaţie. — Chiar în cazul unei funcţii f strict monotone, se poate întîmpla ca derivata să se anuleze în anumite puncte pentru care tangenta la reprezentarea grafică este paralelă cu axa absciselor reperului (*fig.* 1), aceste puncte fiind izolate.

4.1.2 Semnul derivatei şi sensul de variaţie

De asemenea se demonstrează, ceea ce vom admite, următoarea teoremă fundamentală care permite să se determine sensul de variaţie al unei funcţii plecînd de la semnul derivatei:

TEOREMĂ / Fie o funcţie numerică f, definită pe un interval închis $[a, b]$, care satisface următoarele condiţii:

a) funcţia f este continuă în punctele $x = a$ şi $x = b$;

b) funcţia f este derivabilă pe intervalul deschis $]a, b[$.

1° Dacă funcţia derivată f' nu ia pe intervalul deschis $]a, b[$ decît valori strict pozitive, funcţia f este strict crescătoare pe intervalul închis $[a, b]$.

2° Dacă funcţia derivată f' nu ia pe intervalul deschis $]a, b[$ decît valori strict negative, funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul închis $[a, b]$.

3° Dacă funcţia derivată f' nu ia pe intervalul deschis $]a, b[$ decît valoarea 0, funcţia f este constantă pe intervalul închis $[a, b]$.

Observaţii. — **1** Teorema fundamentală pe care am enunţat-o nu este o reciprocă a teoremei de la nr. 4.1.1, căci condiţiile pentru funcţia derivată se dau aici prin inegalităţi stricte.

2 Din faptul că orice funcţie numerică derivabilă este continuă, rezultă că o funcţie f care satisface ipotezele teoremei fundamentale este continuă pe intervalul închis $[a, b]$.

3 Existenţa derivatei la extremităţi nu este necesară, aşa cum arată reprezentarea grafică din figura 2.

4 Ipoteza continuităţii la extremităţile a şi b este indispensabilă, cum o arată exemplul II de mai jos.

Exemple. **I.** Funcţia f, definită de: $f(x) = x^3$, este definită pe $[a, b]$ oricare ar fi a şi b. Ea admite o derivată f', definită pe $[a,b]$ şi prin urmare pe $]a, b[$ prin: $f'(x) = 3x^2$. Derivabilitatea în a şi b asigură continuitatea în aceste puncte. Funcţia verifică primele ipoteze ale teoremei fundamentale. Derivata nu se anulează decît pentru $x = 0$. În virtutea teoremei fundamentale, f este crescătoare pe orice interval închis $[a, b]$ care nu conţine pe 0. Se deduce cu uşurinţă că funcţia este crescătoare pe orice interval închis $[a, b]$.

II. Să considerăm funcţia g a cărei mulţime de existenţă este intervalul $[0, 1]$ şi care este definită prin următoarele condiţii:

$$g(0) = 15;$$

pentru $x \in]0, 1[$:

$$g(x) = 3x + 1;$$

$$g(1) = 0.$$

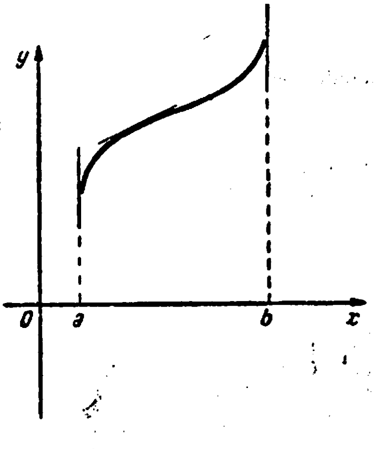


Fig. 2

Această funcție este derivabilă pe intervalul $]0,1[$, derivata ei g' luînd mereu valoarea 3. Dar g nu este continuă la extremitățile intervalului $[0, 1]$; se vede într-adevăr că $g(x)$ tinde spre 1 cînd x tinde spre 0 și spre 4 cînd x tinde spre 1 în timp ce avem: $g(0) \neq 1$, $g(1) \neq 4$. În consecință, g nu verifică primele ipoteze ale teoremei fundamentale și această teoremă nu se aplică. De altfel, este clar că g nu este crescătoare pe intervalul $[0, 1]$ căci:

$$g(0) = 15, \qquad g\left(\frac{1}{3}\right) = 2, \qquad g(1) = 0.$$

Totuși se poate afirma că g este crescătoare pe orice interval $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ori cît ar fi de mic numărul real ε cuprins între 0 și 1.

4.1.3 Consecințe ale teoremei fundamentale

În practică, vom avea adesea ocazia să raționăm așa cum am făcut-o la sfîrșitul exemplului precedent, adică folosind următorul corolar care decurge imediat din teorema fundamentală.

COROLARUL 1 / Dacă o funcție f definită pe un interval închis $[a, b]$ admite pe acest interval $[a, b]$ o derivată f' și dacă valorile luate de f' pe intervalul deschis $]a, b[$ păstrează un semn constant pe acest interval deschis, funcția f este strict crescătoare, descrescătoare, constantă pe intervalul $[a, b]$ după cum f' ia valori strict pozitive, strict negative sau nule.

Într-adevăr, derivabilitatea în a și b implică atunci continuitatea în a și b, restabilind astfel primele ipoteze ale teoremei fundamentale.

Exemplu. Funcția g, definită pe intervalul închis $[0, 1]$ prin:

$$g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3},$$

admite pe acest interval o derivată g' definită prin:

$$g'(x) = x - x^2 = x(1 - x).$$

Această derivată este strict pozitivă pe intervalul deschis $]0,1[$; deci g este strict crescătoare pe intervalul închis $[0, 1]$.

■ CAZUL UNUI INTERVAL INFINIT

Să considerăm o funcție f a cărei mulțime de existență cuprinde intervalul $[a, +\infty[$ și care admite pe acest interval o derivată f' cu valori strict pozitive. Pentru orice b mai mare ca a, oricît de mare ar fi b, corolarul 1 se aplică pe intervalul $[a, b]$. Vom înțelege prin aceasta că funcția este strict crescătoare pe intervalul $[a, +\infty[$.

COROLARUL / Dacă o funcţie f este derivabilă pe un interval $[a, +\infty[$
2 şi dacă valorile luate de derivata sa f' păstrează un semn constant pe acest interval, funcţia f este strict crescătoare, descrescătoare sau constantă după cum f' ia valori strict pozitive, strict negative sau nule.

Se obţine un enunţ analog pentru un interval $]-\infty, a]$.

Exemplu. Să considerăm funcţia f:

$$f = \left[x \mapsto \frac{1}{x}\right],$$

şi să studiem sensul de variaţie a lui f pe intervalul $[1, +\infty[$.
Pe acest domeniu, funcţia f admite o derivată f' definită prin:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

şi, în consecinţă, cu valori strict negative. Corolarul 2 se aplică: f descreşte mereu pe intervalul $[1, +\infty[$.

CAZUL ÎN CARE FUNCŢIA ÎNCETEAZĂ DE A MAI EXISTA ÎNTR-UN PUNCT

Să considerăm o funcţie f definită pe un interval $]a, b]$. Un asemenea caz se produce frecvent, de exemplu dacă $\lim\limits_{a} f = \infty$ sau dacă funcţia nu este definită în a.

Să presupunem, mai mult, că valorile luate de derivata f' păstrează un semn constant pe acelaşi interval semideschis.

Oricare ar fi numărul real pozitiv ε, corolarul 1 se aplică pe intervalul închis $[a + \varepsilon, b]$.

Vom spune atunci că funcţia f este strict monotonă pe intervalul semideschis $]a, b]$.

Am avea o concluzie identică dacă am fi presupus pe f derivabilă şi valorile luate de f' de semn constant pe un interval semideschis la dreapta $[a, b[$.
În fine, am fi ajuns la aceeaşi concluzie presupunînd f derivabilă şi valorile luate de f' de semn constant pe un interval deschis $]a, b[$. Corolarul 1 se aplică, într-adevăr, pentru orice număr real pozitiv arbitrar mic ε, intervalului deschis $]a + \varepsilon, b - \varepsilon[$.

COROLARUL / Dacă o funcţie f este derivabilă pe un interval semideschis
3 sau pe un interval deschis şi dacă valorile luate de derivata f' păstrează un semn constant pe acelaşi interval, funcţia f este strict crescătoare, descrescătoare sau constantă pe acest interval, după cum derivata f' este de valori strict pozitive, strict negative sau nule.

Exemplu. Să considerăm din nou funcția f:

$$f = \left[x \mapsto \frac{1}{x}\right],$$

căreia îi studiem comportarea pe intervalul semideschis la stînga $]0, 1]$.
Derivata f', definită prin:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

este de valori negative; funcția descrește deci mereu.

Observație. — Se pot aplica simultan corolarele 2 și 3 ori de cîte ori este vorba de o funcție f derivabilă pe un interval infinit de tipul $]a, +\infty[$ (sau $]-\infty, b[$), derivata f' păstrînd un semn constant pe acest interval. Considerînd drept auxiliar un număr α cu: $a < \alpha$ (sau $b > \alpha$), se aplică corolarul 3 pe intervalul $]a, \alpha]$ (sau pe intervalul $[\alpha, b[$) și corolarul 2 pe intervalul $[\alpha, +\infty[$ (sau pe intervalul $]-\infty, \alpha]$).
Se deduce de aci stricta monotonie a funcției pe semidreaptă și sensul de variație.

Exemplu. Fie funcția f:

$$f = \left[x \mapsto \frac{1}{x}\right].$$

Această funcție este definită, în particular, pe intervalul deschis $]0, +\infty[$. Ea este descrescătoare pe intervalul $[1, +\infty[$ (corolarul 2); este descrescătoare pe intervalul $]0, 1]$ (corolarul 3). În definitiv, funcția este descrescătoare pe intervalul $]0, +\infty[$.

4.1.4 Concluzie: studiul sensului de variație al unei funcții

Pentru a studia sensul de variație al unei funcții f cu ajutorul derivatei, se studiază semnul valorilor luate de derivata f' și se separă domeniul de definiție al lui f' (care este inclus în acela al lui f) în intervale în care funcția f este monotonă, $f'(x)$ păstrînd un semn constant.

Este comod adesea să se treacă rezultatele într-un tablou.

Exemple. I. Fie funcția f definită prin:

$$f(x) = x^3 - x^2 + 1.$$

Pentru orice număr real x avem:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2).$$

Studiul semnului lui $f'(x)$ în funcție de x, cît și concluziile cu privire la sensul de variație al lui f, sînt rezumate în următorul tablou:

x		0		$\frac{2}{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

II. Fie funcția g definită prin:

$$g(x) = x + 1 + \frac{4}{x^2}.$$

Pentru orice x nenul, avem derivata g' definită prin:

$$g'(x) = 1 + 0 - 4\frac{2x}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x(x^3 - 8)}{x^4}.$$

Această derivată are semnul numărătorului. Studiul este rezumat în următorul tablou:

x		0		2	
$g'(x)$	$+$	‖	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	‖	↘		↗

Observație. — Dubla bară sub zero simbolizează faptul că, pentru zero, nu sînt definite nici g nici g'.

4.1.5 Aplicație la extreme

Studiul sensului de variație al unei funcții cu ajutorul semnului derivatei pune în evidență anumite valori pentru care derivata schimbă semnul.
Să observăm că o condiție suficientă ca f să prezinte un maxim relativ în x_0 este să se poată găsi un număr pozitiv α astfel ca:

a) $f(x)$ să existe și f să fie crescătoare pe intervalul $]x_0 - \alpha, x_0]$;
b) $f(x)$ să existe și f să fie descrescătoare pe intervalul $[x_0, x_0 + \alpha[$.

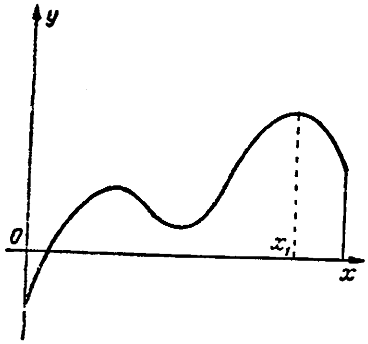


Fig. 3a

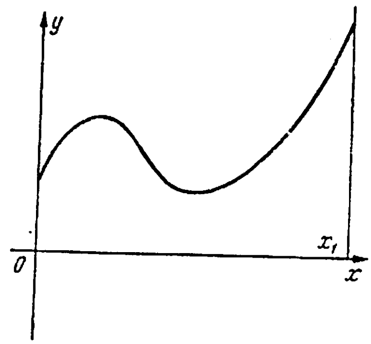


Fig. 3b

În fine, o condiție suficientă pentru ca cele ce preced să fie realizate este ca $f(x_0)$ să existe și să se poată găsi un număr α astfel ca:

a) $x - \alpha < x < x_0 \Rightarrow f'(x)$ există și $f'(x) > 0$;
b) $x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow f'(x)$ există și $f'(x) < 0$.

Această ultimă condiție este foarte utilă pentru funcțiile uzuale pe care le vom întîlni.
Pentru un minim, avem condiții analoage.
În particular, dacă funcția f' este continuă în x_0, ea nu schimbă semnul fără să se anuleze. Se va căuta atunci printre numerele care au ca imagine pe 0 prin f', acelea care corespund la o schimbare de semn a lui $f'(x)$. Dar condiția de anulare a lui f' nu este nici necesară, nici suficientă pentru existența unui extrem pentru f.
Observație. — Fie f o funcție al cărei domeniu de definiție este D. Dacă există un număr x_1 astfel ca să avem:

$$\forall_D x \qquad f(x) \leqslant f(x_1),$$

atunci f admite și atinge o margine superioară pentru $x = x_1$.
Marginea superioară poate fi (fig. 3):
a) cel mai mare dintre maximi;
b) valoarea luată de funcție într-o extremitate a unuia din intervalele închise pe care ea este definită.
Observație analoagă pentru marginea inferioară.

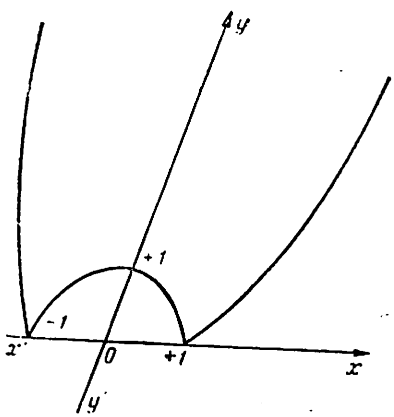


Fig. 4

Exemplu. Fie funcția f definită prin: $f(x) = |x^2 - 1|$. Această funcție poate fi definită în alt fel:

$x \in]-\infty, -1]$ $\quad f(x) = x^2 - 1$;

$x \in [-1, +1]$ $\quad f(x) = -x^2 + 1$;

$x \in [+1, +\infty[$ $\quad f(x) = x^2 - 1$.

Derivata ei f' poate deci fi definită prin:

$$x \in]-\infty, -1[\qquad f'(x) = 2x;$$
$$x \in]-1, +1[\qquad f'(x) = -2x;$$
$$x \in]+1, +\infty[\qquad f'(x) = 2x.$$

Rezultă studiul, într-un tablou, al sensului de variație al lui f:

x		-1		0		$+1$	
$f'(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$-$	$\Vert$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

În concluzie, pentru $x_0 = 0$, f admite un maxim egal cu 1; f admite în afară de acesta două minime egale cu zero pentru $x_1 = 1$ şi $x_2 = -1$. Zero este o margine inferioară pentru $f(x)$, care este atinsă pentru x_1 şi x_2. Nu există margine superioară (fig. 4).

4.1.6 Funcții care au aceeaşi derivată pe un interval

Fie două funcții f şi g definite pe un interval I. Presupunem mai mult că f şi g sînt derivabile pe I şi că, în plus: $f' = g'$.

(Adică: $\qquad \forall_I x \quad f'(x) = g'(x)$.)

Avem atunci: $\qquad f' - g' = 0.$

Or, după regulile de derivare:

$$f' - g' = (f - g)'.$$

Funcția $(f - g)$ are deci o derivată nulă pe I. După nr. 4.1.2, funcția $(f - g)$ este constantă, adică există un număr real C astfel că:

$$\forall_I x \qquad f(x) - g(x) = C.$$

Se poate deci enunța:

TEOREMĂ / Dacă două funcții f şi g definite pe un interval I admit pe I derivate egale, cele două funcții f şi g diferă printr-o constantă:

$$\forall_I x \quad f'(x) = g'(x) \Rightarrow \exists_{\mathbf{R}} C;\ \forall_I x \quad f(x) = g(x) + C$$

Observație. — Fie D o submulțime din $\mathbf{R}$; se spune că D este neconexă dacă şi numai dacă:

$$\exists_{\mathbf{R}-D} x_0;\ \exists_D x_1;\ \exists_D x_2 \quad x_1 < x_0 < x_2.$$

Proprietățile de mai sus nu-s valabile dacă f şi g sînt definite pe un domeniu neconex.

Fie, de exemplu, funcțiile f și g definite pe $\mathbf{R}^*$ (neconex) prin:

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = 1 \quad \text{și} \quad g(x) = -1$$
$$x > 0 \Rightarrow f(x) = -1 \quad \text{și} \quad g(x) = 1;$$

avem deci:

$$\forall_{\mathbf{R}^*} x \qquad f'(x) = g'(x) = 0,$$

dar nu există nici o constantă C astfel ca:

$$\forall_{\mathbf{R}^*} x \qquad f(x) - g(x) = C.$$

Exemplu. Fie funcțiile:

$$f = [x \mapsto \cos^2 x],$$
$$g = [x \mapsto -\sin^2 x].$$

Avem:

$$f' = [x \mapsto -2 \sin x \cos x],$$
$$g' = [x \mapsto -2 \sin x \cos x].$$

De unde: $f' = g'$.
Deci, f și g diferă printr-o constantă. Avem într-adevăr:

$$\forall_{\mathbf{R}} x \quad f(x) - g(x) = 1.$$

EXERCIȚII

4.1 Se știe că funcția $f = [x \mapsto \sqrt{1 - x^2}]$, definită pe intervalul $[-1, 1]$, este reprezentată printr-un semicerc într-un reper ortonormat.
Să se studieze funcția f și derivata ei f', din punctul de vedere al teoremei fundamentale, pe intervalele închise $[-1, 0]$ și $[0, 1]$, apoi pe intervalele deschise $]-1, 0[$ și $]0, 1[$.

4.2 Să se studieze, din punctul de vedere al teoremei fundamentale, funcțiile definite prin:

a) $x \neq 1,\ f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-1}$,

b) $x \neq 1,\ g(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-1}, \quad g(1) = 0.$

c) $x \neq 1,\ h(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-1}, \quad h(1) = 2.$

Să se studieze sensul de variație, apoi maximele și minimele funcțiilor definite de următoarele relații. Să se spună de asemenea dacă aceste funcții au margini și dacă ele le ating.

4.3 $f(x) = |x|$.

4.4 $f(x) = |x^3|$.

4.5 $f(x) = x^3 + x + 4$.

4.6 $f(x) = x^4 + x^2 - 2$.

4.7 $f(x) = |x^3 - x|$.

4.8 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

4.9 $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$.

4.10 $f(x) = 2x^3 + 2x - \frac{1}{x}$.

4.11 $f(x) = x^3 + 3x + \frac{6}{x}$.

4.12 $f(x) = x^3 - 15x - \frac{12}{x}$.

4.13 $f(x) = |x + 1| - 2x + 3 - \left|\frac{1}{x}\right|$.

4.14 $f(x) = |x^2 - 16| + 4x$.

4.15 $f(x) = |x^2 + 4x - 16|$.

*

Pe domeniul indicat D, să se studieze sensul de variație al următoarelor funcții :

4.16 $D = [1, +\infty[$; $f = [x \mapsto x^2 + 3x - 4]$.

4.17 $D = [-4, +4]$; $f = \left[x \mapsto \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 1\right]$.

4.18 $D =]-\infty, -3]$; $f = \left[x \mapsto \frac{x+3}{x-2}\right]$.

4.19 $D =]3, +\infty[$; $f = [x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}]$.

*

4.20 1° Să se dea exemple de mulțimi neconexe din **R**.
2° Care sînt singurele submulțimi conexe din **R**?
3° Să se dea exemple de funcții de la **R** la **R** care admit aceeași funcție derivată, dar care nu diferă printr-o constantă.
4° Să se dea exemple de funcții de la **R** la **R**, definite pe un domeniu conex din **R**, care admit aceeași funcție derivată, dar nu diferă printr-o constantă. (Să se precizeze care din ipotezele teoremei de la nr. 4.1.6 nu este satisfăcută).

4.2 STUDIUL UNEI FUNCȚII

4.2.1 Plan de studiu

Pentru a studia o funcție numerică f de o variabilă reală, se studiază următoarele puncte.

1 Domeniul de definiție

2 Paritatea, perioada

Studiul parității sau periodicității funcției f permite să se reducă intervalul de studiu, deducîndu-se comportarea funcției în anumite intervale din comportamentul funcției în alte intervale.

Dacă f este pară (sau impară), se studiază restricţia lui f la $\mathbf{R}^+$ (sau $\mathbf{R}^-$), apoi se completează studiul ţinîndu-se seamă de proprietatea $(f-x) = f(x)$ (respectiv $f(-x) = -f(x)$).
Dacă f este periodică, de perioadă T, se studiază restricţia lui f la un interval $[\alpha, \alpha + T]$ apoi se extinde, folosind proprietatea $f(x + kT) = f(x)$, pentru orice număr întreg k.

3 Continuitate

4 Sens de variaţie

Studiul sensului de variaţie a funcţiei f se poate face în diferite feluri.
Cînd studiul direct nu este uşor, se aplică rezultatul de la nr. 4.1.4. Se împarte deci intervalul de studiu în subintervale pe care derivata este de semn constant. Se deduce, prin aplicarea rezultatelor de la nr. 4.1.3, sensul de variaţie al lui f pe aceste intervale.

5 Studiu la extremităţi

Fie I intervalul de studiu care rezultă din examinarea punctelor precedente şi fie D domeniul de definiţie al funcţiei f. Studiul de la punctul 3 a permis să se partajeze intersecţia $I \cap D$ în intervale pe care funcţia este continuă. Extremităţile acestor intervale sînt în $\overline{\mathbf{R}}$.
Acest studiu începe adesea prin studiul „ramurilor infinite" şi va fi cercetat sistematic în secţiunea 4.3.

6 Puncte remarcabile. Concavitate

Există diferite feluri de puncte remarcabile, dintre care principalele vor fi studiate în secţiunea 4.4. Anumite puncte remarcabile sînt legate de „concavitate", pentru care nu vom face un studiu sistematic, dar care este uneori util să se ia în considerare.

7 Tablou de variaţie

Toate rezultatele studiului precedent sînt consemnate într-un tablou, de îndată ce le obţinem.

8 Reprezentare grafică

Se rezumă studiul funcţiei f construind într-un reper $\mathcal{R}$ reprezentarea sa grafică Γ. Se precizează graficul prin puncte şi tangente remarcabile întîlnite în timpul studiului şi de asemenea, eventual, prin cîteva alte puncte particulare ale căror coordonate sînt uşor de calculat, nepierzîndu-se din vedere faptul că trebuie făcută o reprezentare referitoare nu numai la I ci la D luat în întregime.

Observaţie. — Ordinea de studiu a punctelor 4, 5 şi 6 are puţină importanţă şi depinde adesea de exemplul studiat. Punctele 7 şi 8 sînt tratate în paralel cu studiul altor puncte.

Exemplu. Să se studieze funcţia f definită prin: $f(x) = E(x) - x$, unde E este funcţia parte întreagă (nr. 6.1.6) a cărei definiţie o reamintim:

$$\forall_{\mathbf{R}} x,\ \exists_{\mathbf{Z}} n \qquad n \leqslant x < n + 1;$$

$$\forall_{\mathbf{R}} x \quad E(x) = n,\ n \in \mathbf{Z} \quad \text{şi} \quad n \leqslant x < n + 1.$$

1 Domeniul de definiţie al lui f este $\mathbf{R}$.
2 Funcţia f nu este nici pară nici impară. Din contră, admite o perioadă:

$$\begin{aligned} f(x + 1) &= E(x + 1) - (x + 1) = \\ &= E(x) + 1 - x - 1 = \\ &= E(x) - x = f(x). \end{aligned}$$

Studiem pe f pe intervalul $I = [0,\ 1]$.
3 Funcţia f este continuă pe intervalul $[0,\ 1[$. Pentru $x = 1$, avem:

$$f(1) = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{1^-} f = 1.$$

Funcţia f este deci discontinuă în 1 şi, prin urmare, în orice punct de coordonate întregi.
4 Pe intervalul I:

$$f(x) = x \qquad (\text{căci } E(x) = 0);$$

avem deci:

$$\lim_{0^+} f = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{1^-} f = 1.$$

(Impreună cu faptul că funcţia f este de perioadă 1, acest rezultat dă o verificare a studiului continuităţii.)
5 Pe intervalul I, avem: $f(x) = x$; funcţia f este deci crescătoare pe I.
6 Pe intervalul I, funcţia f admite o margine inferioară 0, care este atinsă pentru $x = 0$ şi o margine superioară 1, care nu este atinsă (căci $f(1) = 0$).
7

x	0			1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\to 1$	0

Studiul funcţiei f pe domeniul ei de definiţie se deduce din acest tablou, folosindu-se faptul că f admite pe 1 ca perioadă.
8 Vezi figura 5.

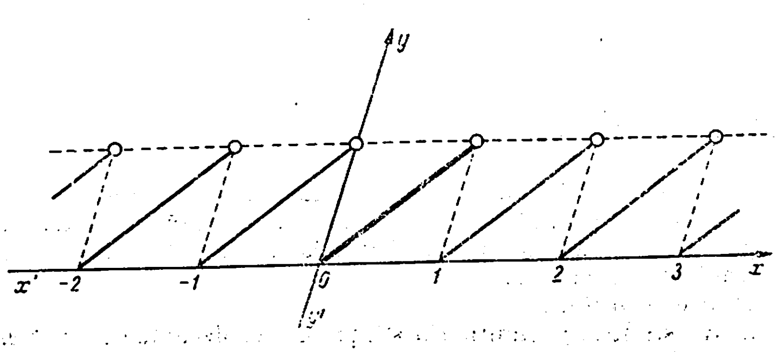


Fig. 5

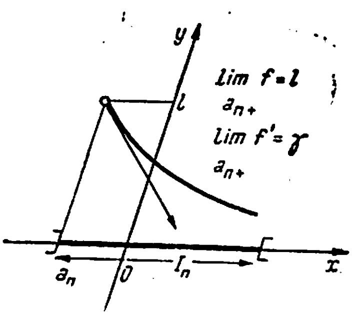


Fig. 6

4.3 STUDIU LA MARGINI. ASIMPTOTE

4.3.1 Cazuri posibile

Fie o funcție f definită pe o mulțime D de numere reale.

Să presupunem că intervalul de studiu $I \cap D$, definit după simplificările obținute prin paritate sau periodicitate a fost împărțit în intervale I_n în care f este continuă.

Fiecare din intervalele I_n au două margini (eventual infinite) și studiul lui f în vecinătatea acestor diferite margini este numit studiu la margini al lui f. Să distingem mai întîi două cazuri după cum marginea a_n cercetată (a_n este o margine a intervalului I_n) aparține sau nu intervalului I_n.

■ Dacă marginea a_n aparține intervalului I_n, a_n este atunci un număr real care aparține domeniului de definiție al funcției f și studiul este acela al unui punct remarcabil (secțiunea 4.4).

■ Dacă marginea a_n nu aparține intervalului I_n, se prezintă două cazuri, după cum a_n este finită sau infinită.

1° a_n **este finită.**

Se studiază atunci funcția f în vecinătatea lui a_n. Pentru aceasta, se studiază limita la dreapta sau limita la stînga a lui f în a_n.
Atunci:

a) Dacă nici una din aceste limite nu există, se caută care este motivul în acest caz particular, pe care-l exprimăm, dacă-i posibil pe grafic.

b) Dacă această limită (limita la dreapta sau la stînga) este finită, se indică convențional acest rezultat pe grafic (fig. 6). Studiul în vecinătatea lui a_n se îmbunătățește studiindu-se limita (limita la dreapta sau la stînga) a lui f' în a_n.

c) Dacă această limită (limita la dreapta sau la stînga) este infinită, atunci studiul este acela al unei *ramuri infinite* (numerele 4.3.2 la 4.3.4).

2° a_n **este infinită.**

Studiul este atunci acela al unei *ramuri infinite* (numerele 4.3.2 la 4.3.4).

4.3.2 Ramuri infinite

DEFINIȚIA 1 / **Se spune că o funcție f (și prin extensie graficul său și reprezentarea sa grafică) admite o ramură infinită în vecinătatea unui punct de acumulare a, din domeniul ei de definiție D, în unul din următoarele cazuri:**

1° a este infinit.

2° a este finit și limita (la stînga sau la dreapta) a lui f în a este infinită.

Observații. — **1** Dacă M este punctul de coordonate $(x, f(x))$, într-un reper cartezian ortonormat $\mathcal{R}$ de origine O, distanța $d(O, M)$ este egală cu:

$$d(O, M) = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}.$$

Prin urmare, f admite o ramură infinită în vecinătatea lui a dacă limita (la stînga sau la dreapta) în a a funcției, care face ca oricărui x să-i corespundă distanța $d(O, M)$, este infinită.

2 Funcția f admite o ramură infinită dacă și numai dacă un element infinit este punct de acumulare din D sau din $f[D]$, D fiind domeniul de definiție al lui f.

3 Există alte cazuri decît acelea din definiția 1 în care funcția f admite o ramură infinită. De exemplu, în vecinătatea unui număr real a, se poate întîmpla ca $\lim\limits_{a} f$ să nu existe (nici $\lim\limits_{a^+} f$ nici $\lim\limits_{a^-} f$) și totuși, pentru orice număr real A, să existe o vecinătate V a lui a care să conțină numere reale x astfel că: $f(x) > A$. De exemplu, funcția $\left[x \mapsto \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\right]$ poate fi considerată ca avînd în vecinătatea lui zero, o ramură infinită.

4.3.3 Asimptote

Pentru a preciza studiul unei funcții f într-o ramură infinită, se caută funcții simple care permit să se aproximeze f pentru această ramură infinită. În consecință, se consideră în principal funcțiile afine.

■ Să considerăm, de exemplu, o funcție f definită pe un domeniu D care admite $+\infty$ ca punct de acumulare. Să presupunem că există o funcție afină φ astfel că:

$$\varphi = [x \mapsto \alpha x + \beta],$$

$$f(x) = \varphi(x) + \varepsilon(x) \text{ și } \lim_{+\infty} \varepsilon = 0.$$

În vecinătatea lui $+\infty$, funcțiile f și φ sînt prea puțin diferite.

Fie un reper $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ al planului afin, fie A dreapta care reprezintă pe φ în $\mathcal{R}$, fie Γ curba care reprezintă pe f în $\mathcal{R}$ și fie M punctul de coordonate $(x, f(x))$ care aparține lui Γ.

Fie, pe de altă parte, punctul μ de pe A de coordonate $(x, \alpha x + \beta)$;

$$\overrightarrow{\mu M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O\mu} = [f(x) - \varphi(x)]\vec{j}.$$

Or: $$\lim_{+\infty} f - \varphi = 0 \text{ (prin ipoteză)}.$$

Fiind dată o funcție F de la $\mathbf{R}$ la un spațiu vectorial $\vec{E}$, se spune că limita lui F în $+\infty$ este vectorul $\vec{0}$ dacă și numai dacă există o bază $\mathcal{B}$ din E

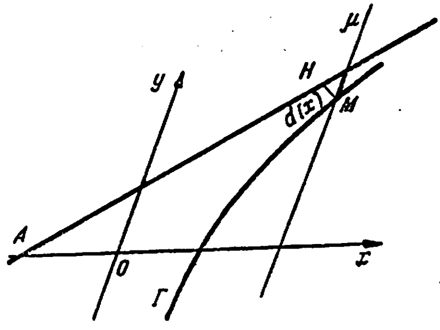


Fig. 7

astfel că funcțiile componente din $\mathscr{R}$ ale lui $\overrightarrow{F(x)}$ au toate o limită nulă în $+\infty$ (a se vedea capitolul 5). Aplicația F, care face ca oricărui x din D să-i corespundă vectorul $(O, f(x) - \varphi(x))$ din $\mathbf{R}^2$, este astfel că:

$$\overrightarrow{\mu M} = \overrightarrow{F(x)} \quad \text{și} \quad \lim_{+\infty} F = \vec{0}.$$

Se spune atunci că dreapta A este *asimptotă* la Γ în vecinătatea lui $+\infty$ (*fig.* 7). Funcțiile f și φ se numesc de asemenea *asimptote*.

Mai general, se enunță:

DEFINIȚIE / **Fie o curbă Γ și o dreaptă A. Fie M un punct al unei ramuri infinite B a lui Γ și fie μ o proiecție a lui M pe A. Dreapta A este o asimptotă la ramura infinită B a lui Γ dacă există un element a din $\overline{\mathbf{R}}$ astfel că, dacă σ este o bijecție de la A pe $\mathbf{R}$, avem simultan:**

$$\begin{cases} \lim\limits_{a} \, [x \mapsto \sigma(\mu) - \sigma(0)] = +\infty, \\ \\ \lim\limits_{a} \, [x \mapsto \overrightarrow{\mu M}] = \vec{0}. \end{cases}$$

Observație. — Într-un plan afin euclidian, această definiție este mult simplificată prin folosirea noțiunii de distanță.

■ Fie o funcție f care admite o ramură infinită pentru $x = a$ element din $\mathbf{R}$ (avem atunci $\lim\limits_{a} |f| = +\infty$). Fie A dreapta a cărei ecuație într-un reper $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ este:

$$x - a = 0.$$

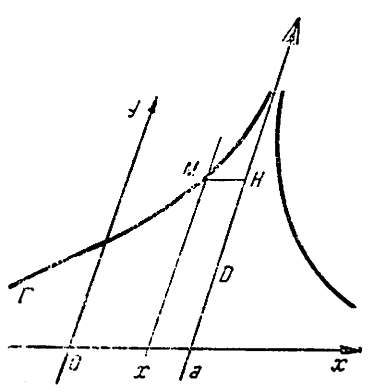


Fig. 8

Fie Γ curba reprezentativă a lui f în $\mathscr{R}$ și fie M punctul ale cărui coordonate în $\mathscr{R}$ sînt $(x, f(x))$. Fie μ proiecția lui M pe A paralel cu axa absciselor din $\mathscr{R}$.

Fie σ bijecția de la A pe $\mathbf{R}$ care face ca oricărui punct al lui A să-i corespundă ordonata sa în $\mathscr{R}$; σ este o bijecție astfel că:

$$\sigma(\mu) = f(x) \quad \text{și} \quad \sigma(0) = 0.$$

Deci:

$$\lim_{a} \, [x \mapsto |\sigma(\mu) - \sigma(0)|] = \lim_{a} \, [x \mapsto |f(x)|] = +\infty.$$

Pe de altă parte:

$$\overrightarrow{\mu M} = (x - a)\vec{i};$$

deci:

$$\lim_{a} [x \mapsto \overrightarrow{\mu M}] = \vec{0}.$$

Dreapta A este deci asimptotă la curba Γ (*fig.* 8).

4.3.4 Determinarea asimptotelor

1 Dacă funcţia f admite o ramură infinită pentru un număr real a, astfel că $\lim_{a} |f| = +\infty$, curba Γ admite dreapta de ecuaţie $x - a = 0$ ca asimptotă în vecinătatea lui a (nr. 4.3.3).

2 Dacă funcţia f admite o ramură infinită în vecinătatea infinitului (pentru fixarea ideilor, vom lua $+\infty$) şi dacă există două numere reale α şi β (eventual nule) astfel că funcţia:

$$\varphi = [x \mapsto \alpha x + \beta]$$

şi funcţia f sînt asimptote în vecinătatea infinitului, avem atunci:

$$f(x) = \alpha x + \beta + \varepsilon(x) \quad \text{şi} \quad \lim_{+\infty} \varepsilon = 0.$$

Reciproc, dacă f admite o funcţie afină asimptotă în vecinătatea lui $+\infty$, se pot determina numerele reale α şi β care să satisfacă aceste condiţii.

■ Avem:

$$\frac{f(x)}{x} = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x};$$

prin urmare:

$$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right] = \alpha + \lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{\beta}{x}\right] + \lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{\varepsilon(x)}{x}\right],$$

sau, aplicînd teoremele asupra limitelor:

$$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right] = \alpha + 0 + 0 = \alpha.$$

Reciproc, să presupunem că:

$$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right] = \alpha \ (\alpha \in \mathbf{R}).$$

Numărul $\frac{f(x)}{x}$ este coeficientul director al dreptei OM, unde M este punctul de coordonate $(x, f(x))$.

Dreapta Δ de ecuaţie $y = \alpha x$ este poziţia limită a dreptei OM cînd abscisa lui M este infinită. Se spune atunci că curba Γ reprezentativă a funcţiei f admite o *direcţie asimptotică* de coeficient director α (α determină într-adevăr direcţia eventualei asimptote).

Să observăm că, dacă:

$$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right] = +\infty,$$

Γ admite ca direcție asimptotică direcția axei ordonatelor.

■ Să presupunem că:

$$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right] = \alpha \quad (\alpha \in \mathbf{R}).$$

Dacă funcția $\varphi = [x \mapsto \alpha x + \beta]$ este asimptotă la f în vecinătatea lui $+\infty$, atunci avem:

$$\lim_{+\infty} [x \mapsto f(x) - \alpha x] = \beta.$$

Reciproc, dacă:

$$\lim_{+\infty} [x \mapsto f(x) - \alpha x] = \beta \quad (\beta \in \mathbf{R}),$$

avem:

$$\lim_{+\infty} [x \mapsto f(x) - \alpha x - \beta] = 0.$$

Prin urmare, funcția $\varphi = [\alpha x + \beta]$ este asimptotă la funcția f în vecinătatea lui $+\infty$.

Se poate întîmpla ca în cursul studiului, anumite limite să nu existe sau să fie infinite. Am considerat, de exemplu, cazul în care:

$$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right]$$

era infinită (direcția simptotică paralelă cu axa ordonatelor).

Dacă:

$$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right] = \alpha \quad (\alpha \in \mathbf{R}),$$

și dacă:

$$\lim_{+\infty} [x \mapsto f(x) - \alpha x] = +\infty,$$

se spune că există o *ramură parabolică* în direcția dreptei Δ de ecuație $y = \alpha x$. Avem o direcție asimptotică, dar nu asimptotă. Dar s-ar putea să avem o direcție asimptotică fără asimptotă, fără ca totuși să avem o ramură parabolică. Studiul unei ramuri infinite în vecinătatea lui $+\infty$ este rezumat în tabloul următor (studiul unei ramuri infinite în vecinătatea lui $-\infty$ se tratează, evident, în mod analog).

1 $\lim\limits_{+\infty}\left[x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}\right] = \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}$:

direcție asimptotică paralelă la Δ ($y = \alpha x$).

a) $\lim\limits_{+\infty} [x \mapsto f(x) - \alpha x] = \beta, \quad \beta \in \mathbf{R}$:

asimptotă A **de ecuație** $y = \alpha x + \beta$.

b) $\left|\lim\limits_{+\infty} [x \mapsto f(x) - \alpha x]\right| = +\infty$:

ramură parabolică de direcție Δ.

c) $\lim\limits_{+\infty} [x \mapsto f(x) - \alpha x]$ **nu există:**

direcție asimptotică (Δ);
nu există nici asimptotă nici ramură parabolică.

2 $\lim\limits_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right] = +\infty$:

direcție asimptotică paralelă cu axa ordonatelor;
ramură parabolică.
Să observăm că avem o asimptotă paralelă cu axa ordonatelor dacă și numai dacă există un număr real a astfel că:

$$\left|\lim_{a} f(x)\right| = +\infty$$

$$\left(\text{sau } \left|\lim_{a+} f(x)\right| = +\infty, \text{ sau } \left|\lim_{a-} f(x)\right| = +\infty\right).$$

3 $\lim\limits_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right]$ **nu există:**

nu există direcție asimptotică;
nu există asimptotă.

Observații. — 1 Fie f o funcție a cărei curbă reprezentativă admite o direcție asimptotică δ (dreapta Δ de ecuație $y = \alpha x$ aparține acestei direcții). Fie M punctul lui Γ de coordonate $(x, f(x))$. Fie Δ_x dreapta care trece prin M și aparține lui δ. Ecuația lui Δ_x este de forma:

$$y = \alpha x + m(x).$$

Fie μ proiecția lui M pe Δ paralel cu axa ordonatelor.

Avem: $\overrightarrow{\mu M} = [f(x) - \alpha x]\vec{j}$

Condiția: $\lim\limits_{+\infty} [x \mapsto f(x) - \alpha x] = \beta$

arată faptul că dreapta Δ_x are o poziție limită pentru x infinit, $\Delta_{+\infty}$ care este asimptotă la Δ în vecinătatea lui $+\infty$ (*fig.* 9).

Condiția:

$\lim\limits_{+\infty} [x \mapsto f(x) - \alpha x] = +\infty$ (sau $-\infty$)

spune că dreapta Δ_x este „aruncată la infinit" pentru x infinit. O ramură parabolică trebuie să fie considerată ca un „caz limită" de asimptotă cînd aceasta este „aruncată la infinit".

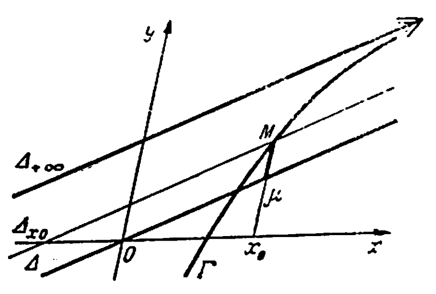


Fig. 9

Aceasta justifică faptul că, în cazul 2 din tabloul de mai sus, se spune de asemenea că sîntem în prezența unei ramuri parabolice. Într-adevăr, în acest caz, dreapta Δ_{x_0} are o ecuație de forma $x - x_0 = 0$, care conține punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ și această dreaptă Δ_{x_0} este „aruncată la infinit" cînd, M_0 aparținînd ramurii infinite studiate x_0 este infinit.

2 Dacă: $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \beta$, avem evident:

$$f(x) = \beta + \varepsilon(x), \text{ cu } \lim_{+\infty} \varepsilon = 0.$$

Funcția afină φ, asimptotă la f în vecinătatea infinitului, este deci funcția constantă $\varphi = [x \mapsto \beta]$ și se trage concluzia, fără un raționament suplimentar că dreapta A de ecuație $y = \beta$ este asimptotă la curba Γ. Dar acest caz nu este un caz particular. Avem într-adevăr:

$$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right] = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{+\infty}\,[x \mapsto f(x) - 0] = \beta.$$

3 Studiul asimptotelor este completat avantajos prin studiul poziției curbei Γ în raport cu eventualele ei asimptote. Pentru a studia această poziție, se studiază funcția $\varepsilon = [x \mapsto f(x) - \alpha x - \beta]$ pentru orice asimptotă de ecuație $y = \alpha x + \beta$. Semnul lui $\varepsilon(x)$ dă poziția punctelor corespunzătoare ale lui Γ în raport cu asimptota cercetată. Punctele x astfel că $\varepsilon(x) = 0$ dau punctele comune curbei Γ și asimptotei studiate.

4 Fie f și g două funcții definite pe o vecinătate a lui $+\infty$; f și g sînt asimptote în vecinătatea lui $+\infty$ dacă și numai dacă:

$$\lim_{+\infty}\,(f - g) = 0.$$

O asimptotă la curba Γ (de ecuație $y = f(x)$) apare atunci ca reprezentare grafică a unei funcții afine φ, asimptotă la f în vecinătatea lui $+\infty$. Se generalizează astfel noțiunea de funcții tangente și noțiunea de asimptotă apare ca o extensie a noțiunii de tangentă.

Exemple. **I.** Fie funcția:

$$f = \left[x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 1}{x}\right].$$

Avem:

$$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right] = 1;$$

$$\lim_{+\infty}\,[x \mapsto f(x) - x] = 2.$$

Dreapta A de ecuație $y = x + 2$ este asimptotă la curba Γ reprezentativă a lui f.

$\left(\text{Se va observa de altfel că: } f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x}\cdot\right)$

II. Fie funcția: $f = [x \mapsto x + \sqrt{x}]$.

Avem:

$$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right] = 1;$$

$$\lim_{+\infty}\,[x \mapsto f(x) - x] = +\infty.$$

Se obține o ramură parabolică a cărei direcție este cea a dreptei de ecuație $y = x$.

III. Fie funcţia: $f = [x \mapsto x + \sin x]$.

Avem: $\lim\limits_{+\infty} \left[[x \mapsto \frac{f(x)}{x} \right] = 1$;

$\lim\limits_{+\infty} [x \mapsto f(x) - x]$ nu există.

Avem o direcţie asimptotică ($y = x$), dar nu asimptotă nici ramură parabolică.

IV. Fie funcţia: $f = [x \mapsto x^2]$

Avem: $\lim\limits_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{f(x)}{x} \right] = +\infty$.

Se obţine o ramură parabolică a cărei direcţie este aceea a axei ordonatelor.

V. Fie funcţia: $f = \left[x \mapsto \frac{1}{x} \right]$

Avem: $\lim\limits_{0+} \left[x \mapsto \frac{f(x)}{x} \right] = +\infty$;

$\lim\limits_{0-} \left[x \mapsto \frac{f(x)}{x} \right] = -\infty$.

Axa ordonatelor este asimptotă la curbă în vecinătatea lui 0:

$$\lim_{+\infty} f = 0 = \lim_{-\infty} f.$$

Axa absciselor este asimptotă la curbă în vecinătatea lui $+\infty$ şi $-\infty$ (vezi observaţia 2).

VI. Fie funcţia: $f = [x \mapsto x \sin x]$.

Avem: $\lim\limits_{+\infty} \left[x \mapsto \frac{f(x)}{x} \right]$ nu există.

Deci, nu există direcţie asimptotică.

4.4 PUNCTE REMARCABILE

Fie o funcţie f definită pe o submulţime D din **R** şi să presupunem că acest domeniu de definiţie este împărţit în intervale I_n în care f este continuă. Punctele care reprezintă elementele graficului lui f pot fi remarcabile:

a) fiind margini de intervale de continuitate I_n (eventual margini din D) (acest studiu a fost deja abordat în secţiunea 4.3);

b) sau fiind puncte în care derivata f' a lui f prezintă particularităţi (ne vom mărgini la studiul de funcţii care au derivata definită pe orice interval inclus în D, cu excepţia poate a unei mulţimi finite de puncte);

c) sau conferind lui f o valoare remarcabilă ($f(x) = 0$ sau încă $f(x) = \alpha x + \beta$, dacă $y = \alpha x + \beta$ este o asimptotă).

4.4.1 Puncte de oprire, puncte limită

Fie I_n un interval în care funcţia f este continuă şi fie a o margine din I_n. Să presupunem că:

$$a \in I_n.$$

Se spune atunci că punctul $A(a, f(a))$ este un *punct de oprire* (*fig.* 10*a*). Dacă, dimpotrivă:

$$a \notin I_n,$$

şi:

$$\lim_a f = l \quad (l \in \mathbf{R}),$$

punctul $L(a, l)$ este un *punct limită* (*fig.* 10*b*).

Şi într-un caz şi în altul, dacă $\lim\limits_a f' = \gamma$, γ este coeficientul director al semitangentei la curbă în punctul de oprire (sau punctul limită) (*fig.* 10). Dacă $|\lim\limits_a f'| = +\infty$, semitangenta este paralelă cu axa ordonatelor (*fig.* 11a şi 11b).

Pe *figura* 11 avem:

$$\lim_a f' = -\infty \quad \text{şi} \quad \lim_b f' = +\infty.$$

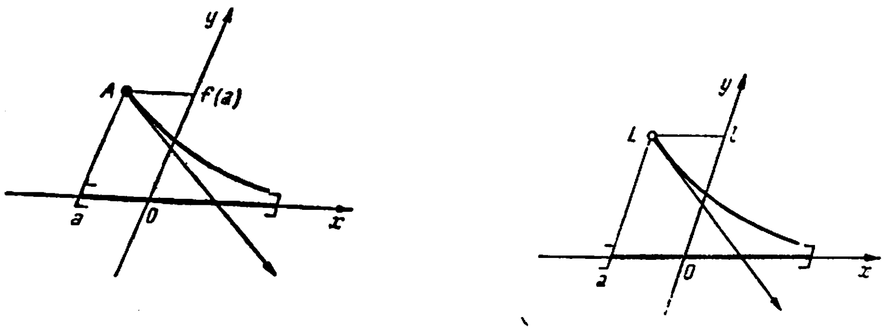


Fig. 10 *a*, *b*

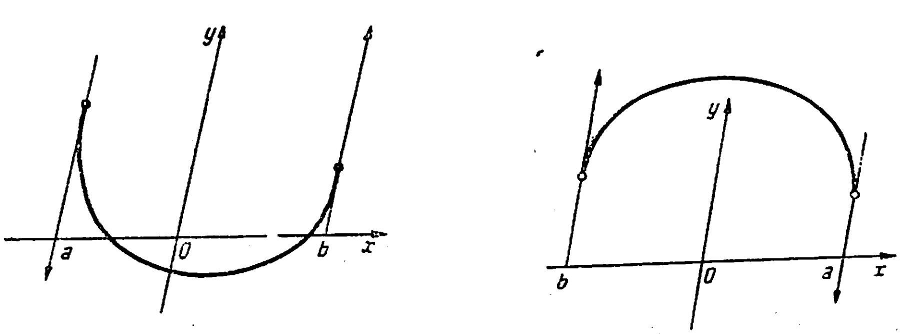
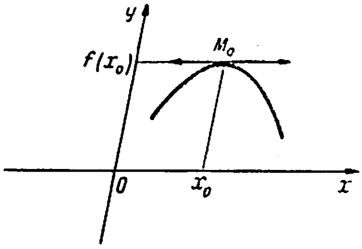


Fig. 11 *a*, *b*



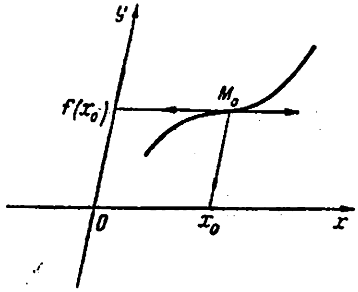


Fig. 12 *a*, *b*

4.4.2 Puncte în care derivata se anulează

Fie Γ curba reprezentativă a unei funcţii f astfel că există un număr real x_0 încît $f'(x_0) = 0$. În punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, tangenta la Γ este deci paralelă cu axa Ox (nr. 3.3.4).

a) Să presupunem că derivata f' se anulează în x_0, schimbînd semnul; f admite atunci un *extrem* în x_0 (nr. 4.1.5) (*fig.* 12*a*).

Să notăm o dată că anularea derivatei nu este nici condiţie necesară, nici condiţie suficientă pentru existenţa unui extrem.

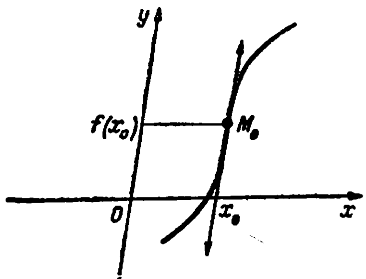
b) Dacă derivata f' se anulează fără să schimbe semnul în x_0, curba Γ traversează în x_0 tangenta ei (paralelă cu axa Ox); avem un *punct de inflexiune* (*fig.* 12*b*).

4.4.3 Puncte în care derivata nu există

Sînt multe cazuri cînd derivata f' a lui f nu există în x_0.

1° Dacă: $|\lim\limits_{x_0} f'| = +\infty$, funcţia f nu este derivabilă în x_0. Avem atunci un *punct de inflexiune* cu tangentă paralelă la axa ordonatelor (un asemenea punct este în mod necesar de inflexiune dacă:

$$\lim_{x_0^+} f' = \lim_{x_0^-} f').$$



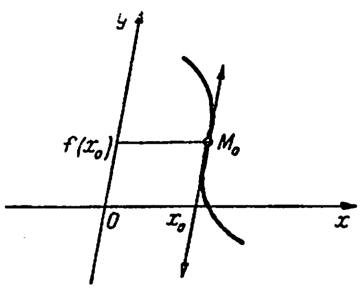


Fig. 13 *a*, *b*

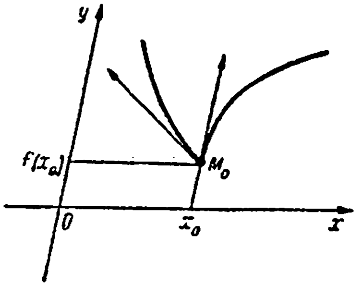


Fig. 14

Se observă:

a) pe *figura* 13*a*: $\lim\limits_{x_0} f' = +\infty$;

b) pe *figura* 13*b*: $\lim\limits_{x_0} f' = -\infty$.

2° Dacă: $\lim\limits_{x_0^+} f' \neq \lim\limits_{x_0^-} f'$, funcția f nu este derivabilă în x_0.

Să punem:

$$\lim_{x_0^-} f' = \gamma \text{ și } \lim_{x_0^+} f' = \delta;\ (\gamma, \delta) \in \overline{\mathbf{R}}^2,$$

$$\gamma \neq \delta \quad (\gamma \in \overline{\mathbf{R}},\ \delta \in \overline{\mathbf{R}}).$$

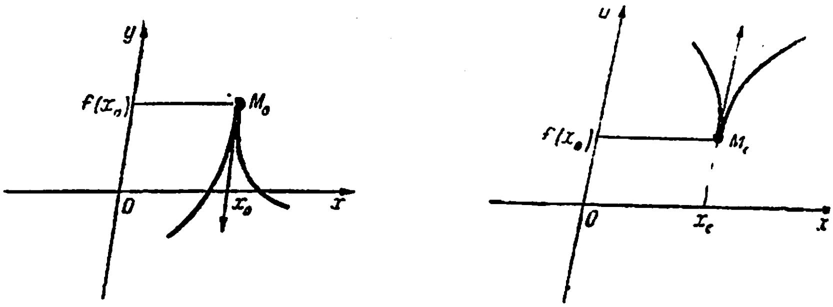


Fig. 15 *a*, *b*

Dacă γ și δ nu sînt simultan infinite: avem atunci un *punct unghiular* (*fig.* 14).

Dacă: $\gamma = +\infty$ și $\delta = -\infty$ (*fig.* 15*a*),

sau: $\gamma = -\infty$ și $\delta = +\infty$ (*fig.* 15*b*)

avem un *punct de întoarcere* cu tangentă paralelă la axa ordonatelor.

4.4.4 Puncte în care derivata admite un extrem

Prin definiție, dacă derivata f' a funcției f admite în x_0 un extrem, curba Γ admite în $M_0(x_0, f(x_0))$ un *punct de inflexiune* (*fig.* 16).

Observație. — Vom admite următoarele rezultate:

a) Studiul derivatei a doua permite de a descoperi punctele de inflexiune, dar anularea derivatei a doua f'' nu este o condiție nici necesară nici suficientă pentru existența unei inflexiuni.

b) Curba Γ traversează tangenta ei într-un punct de inflexiune.

c) În orice interval în care $f''(x)$ este pozitivă „concavitatea" lui Γ este întoarsă spre ordonatele pozitive; în orice interval în care $f''(x)$ este negativă, „concavitatea" lui Γ este întoarsă spre ordonatele negative (*fig.* 16).

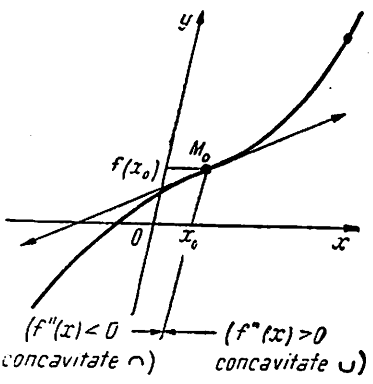


Fig. 16

4.4.5 Alte puncte

Se poate întîmpla, în fiecare caz particular, ca studiul unui punct remarcabil să fie necesar sau să dorim să studiem un anumit număr de puncte simple pentru a preciza traseul curbei. În acest caz e bine să se studieze derivata în punctul considerat pentru a se putea trasa tangenta sau eventualele semitangente în punctul considerat.
Să remarcăm că este totdeauna interesant să se studieze poziția curbei în raport cu tangenta sa într-un punct (și în vecinătatea acestui punct).

4.5 EXEMPLE DE STUDIU DE FUNCȚII

4.5.1 Funcția $f_\alpha = [x \to x^\alpha]$; $\alpha \in \mathbf{Q}$.

■ **DOMENIUL DE DEFINIȚIE**

Chiar de la definiția funcțiilor f_α, avem de considerat trei eventualități.

1° $\alpha > 0.$

Avem: $\alpha = \frac{p}{q}.$

Funcția f_α este compusa funcției $[x \mapsto x^p]$ cu funcția $[x \mapsto \sqrt[q]{x}]$. Rezultă că f_α este definită pe intervalul închis $[0, +\infty[$.
Observație. — Pentru n întreg pozitiv, funcția $[x \mapsto x^n]$ este definită pentru orice număr real x. Pentru orice α, rațional pozitiv, vom considera că funcția $[x \mapsto x^\alpha]$ nu este definită decît pe $\mathbf{R}^+$, chiar dacă se poate extinde cu ușurință domeniul de definiție într-un fel sau altul.

2° $\alpha = 0.$

Funcția $[x \mapsto x^0]$ este o funcție constantă ($x^0 = 1$, pentru orice x nenul). Totodată, vom vedea că 0^0 nu are sens. Vom studia funcția f_0 ca fiind definită pe intervalul deschis $]0, +\infty[$.

3° $\alpha < 0.$

Funcția f_α este definită pe $\mathbf{R}^{*+} =]0, +\infty[$.

■ PARITATE. PERIOADĂ

Domeniul de definiţie al funcţiei f_α fiind inclus în $\mathbf{R}^+$, funcţia f_α, pentru orice α raţional, nu poate fi nici pară nici impară; f_α nu este periodică.

■ CONTINUITATE

Funcţia f_α este continuă pentru orice α raţional, în orice punct din domeniul ei de definiţie, ca funcţie compusă de funcţii continue.

■ SENS DE VARIAŢIE

Fie: $\alpha \neq 0$ (f_0 este constantă pe $\mathbf{R}^{+*}$).
Avem (nr. 3.5.3):

$$f'_\alpha = [x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}].$$

Pe domeniul de definiţie, avem:

$$x^{\alpha-1} \geqslant 0.$$

Semnul lui $f'_\alpha(x)$ este semnul lui α, oricare ar fi x.

■ STUDIUL LA MARGINI

Fie: $\alpha \neq 0$ (f_0 este constantă pe domeniul său de definiţie D).

1° $$\alpha < 0.$$

Avem: $$D =]0, +\infty[,$$

şi: $$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^{-\alpha}}, \text{ unde } -\alpha \text{ este pozitiv.}$$

a) $$\lim_0 [x \mapsto x^{-\alpha}] = 0.$$

Avem: $$\lim_0 f_\alpha = +\infty.$$

Dreapta de ecuaţie $x = 0$ este deci asimptotă la curba reprezentativă (nr. 4.3.4).

b) $$\lim_{+\infty} [x \mapsto x^{-\alpha}] = +\infty.$$

Avem: $$\lim_{+\infty} f_\alpha = 0.$$

Dreapta de ecuaţie $y = 0$ este deci asimptotă la curba reprezentativă (nr. 4.3.4).

2° $$\alpha > 0.$$

Avem: $$D = [0, +\infty[,$$

şi: $$\lim_{+\infty} f_\alpha = +\infty.$$

Să studiem ramura infinită:

$$\frac{f_\alpha(x)}{x} = x^{\alpha-1}.$$

a) $\qquad 0 < \alpha < 1, \qquad \alpha - 1 < 0:$

$$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{f_\alpha(x)}{x}\right] = 0 \text{ şi } \lim_{+\infty} f_\alpha = +\infty;$$

ramură parabolică în direcţia axei absciselor.

b) $\qquad \alpha = 1, \qquad f_\alpha(x) = x:$

curba reprezentativă este dreapta de ecuaţie $y = x$.

c) $\qquad \alpha > 1, \qquad \alpha - 1 > 0:$

$$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{f_\alpha(x)}{x}\right] = +\infty;$$

ramură parabolică în direcţia axei ordonatelor.

■ **PUNCTE REMARCABILE**

1° $\qquad \alpha > 0.$

Avem: $\qquad f_\alpha(0) = 0.$

a) $\qquad 0 < \alpha < 1: \lim_0 f'_\alpha = +\infty;$

punct de oprire cu tangentă paralelă la axa ordonatelor.

b) $\qquad \alpha = 1: \qquad f'_1(0) = 1 = \lim_0 f'_1;$

punct de oprire cu tangentă paralelă la dreapta de ecuaţie $y = x$.

c) $\qquad \alpha > 1: \qquad \lim_0 f'_\alpha = 0 = f'_\alpha(0);$

punct de oprire cu tangentă paralelă la axa absciselor.

2° $\qquad \alpha = 0.$

Avem: $\qquad f_0(x) = 1 \qquad$ pentru orice x din $\mathbf{R}^{+*}$,

$$f'_0(x) = 0,$$

$$\lim_0 f_0 = 1,$$

$$\lim_0 f'_0 = 0;$$

punct limită de coordonate (0,1).

°3 $\qquad \alpha < 0.$

Nu există puncte în mod deosebit remarcabile:

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \qquad f_\alpha(x) > 0.$$

Se deduce de aici poziția curbei în raport cu asimptota sa.
Să notăm totuși că, pentru orice α rațional, tangenta la curba reprezentativă în punctul (1,1) are pe α drept coeficient director.

TABLOU DE VARIAȚIE

Observăm că, oricare ar fi $\alpha : f_\alpha(1) = 1$.
Se rezumă rezultatele obținute în următoarele tablouri:

$\alpha < 0$

x	0		1		$+\infty$
$f_\alpha(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

$0 < \alpha < 1$

x	0		1		$+\infty$
$f_\alpha(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\alpha > 1$

x	0		1		$+\infty$
$f_\alpha(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

REPREZENTARE GRAFICĂ

Figura 17 arată diferitele forme ale curbei:

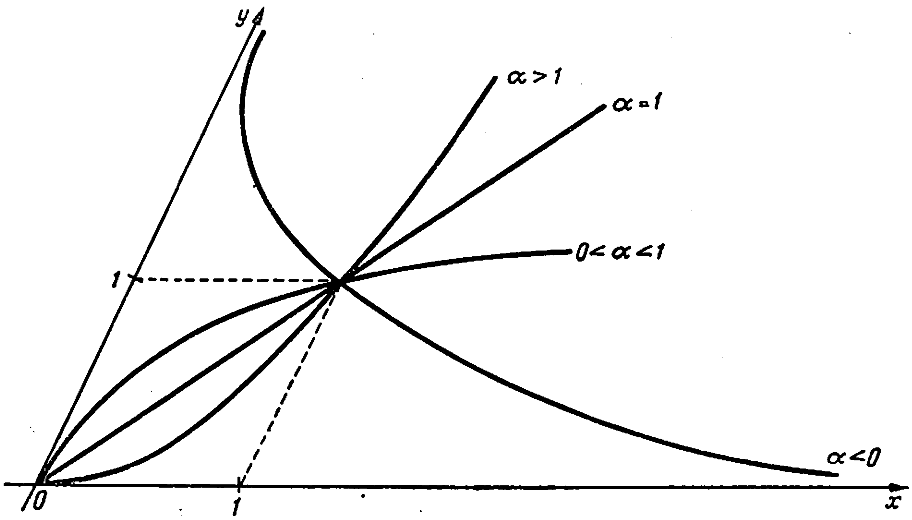


Fig. 17

4.5.2 Studiul funcţiei

$$f = [x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{4 - 2x}].$$

Funcţia f este definită şi continuă pe intervalul închis $[0,2]$.
Funcţia derivată f' este definită pe intervalul $]0,2[$ prin:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-2}{2\sqrt{4-2x}} = \frac{\sqrt{4-2x} - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\,\sqrt{4-2x}}.$$

Avem două puncte de oprire: $A(0,2)$ şi $B(2, \sqrt{2})$.
Semitangentele în aceste puncte de oprire au drept coeficienţi directori:

în A: $\lim\limits_{0} f' = +\infty$; în B: $\lim\limits_{0} f' = -\infty$.

Aceste semitangente sînt deci paralele cu axa ordonatelor.
Derivata f' are semnul expresiei $\sqrt{4-2x} - 2\sqrt{x}$; cele două numere $\sqrt{4-2x}$ şi $2\sqrt{x}$ fiind pozitive, semnul diferenţei lor este identic cu semnul diferenţei pătratelor lor, adică:

$$(4 - 2x) - 4x = 2(2 - 3x).$$

Derivata f' se anulează schimbînd semnul pentru $x_0 = \frac{2}{3}$.

Funcţia f prezintă deci un extrem pentru $x_0 = \frac{2}{3}$. Avem:

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(1 + 2) = \sqrt{6}.$$

Studiul este rezumat în următorul tablou:

x	0		$\frac{2}{3}$		2
$f'(x)$	$(+\infty)$	$+$	0	$-$	$(-\infty)$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$\sqrt{6}$	$\searrow$	$\sqrt{2}$

Curba a fost trasată în *figura* 18.

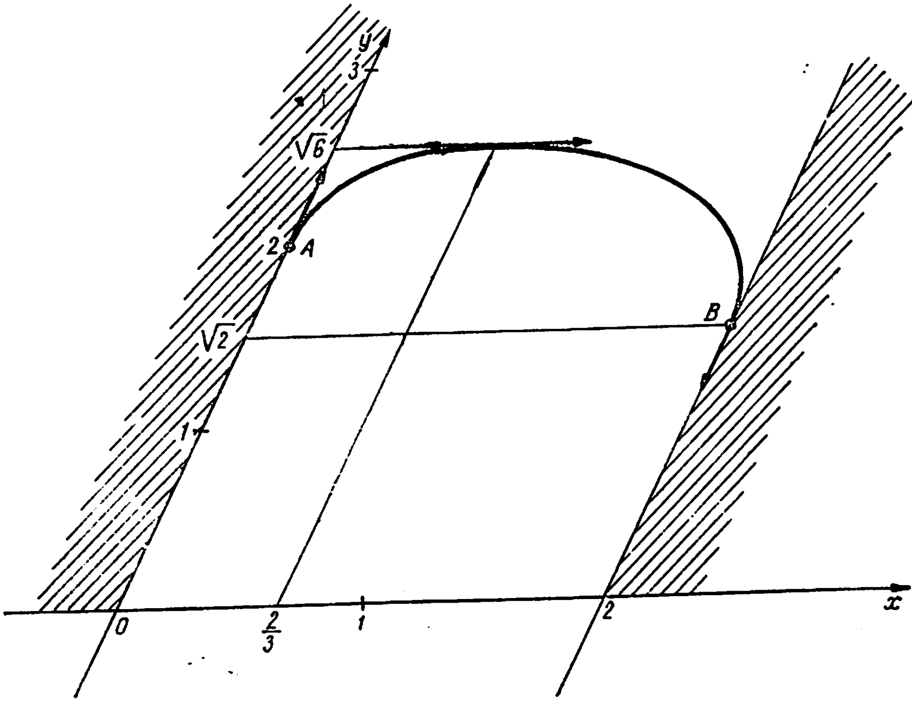


Fig. 18

4.5.3 Studiul funcției

$$f = \left[x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right].$$

■ Funcția f este definită și continuă pe D:

$$D =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[.$$

Avem:

a) $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$;

b) $\lim\limits_{-1} f = -\infty$;

c) $f(1) = 0$;

d) $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Curba reprezentativă Γ prezintă trei ramuri infinite.
În vecinătatea lui -1, dreapta de ecuație $x = -1$ este asimptotă la

$$\Gamma \ (\lim_{-1} f = -\infty).$$

În vecinătățile lui $-\infty$ și $+\infty$, avem:

$$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{-\infty}\left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{+\infty}\left[x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right] = 1.$$

Există deci în aceste două cazuri o direcție asimptotică care este aceea a dreptei de ecuație $y = x$.

Avem: $f(x) - x = x\left[\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - 1\right] = x\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1} - 1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + 1}$, $f(x) - x = \dfrac{\dfrac{-2x}{x+1}}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + 1}$;

Or:
$$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right] = \lim_{-\infty}\left[x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right] = 1;$$

prin urmare:

$$\lim_{+\infty}\,[x \mapsto f(x) - x] = -1.$$

Ramurile infinite ale lui Γ în vecinătățile lui $+\infty$ și $-\infty$ admit deci aceeași asimptotă care este dreapta de ecuație $y = x - 1$.

■ Pentru a studia semnul derivatei, să punem:

$$F(x) = f^2(x) = \frac{x^2(x-1)}{x+1};$$

rezultă:

$$F'(x) = 2f(x)\cdot f'(x) = \frac{(x+1)(3x^2-2x) - x^2(x-1)}{(x+1)^2},$$

$$2f(x)\cdot f'(x) = \frac{2x(x^2+x-1)}{(x+1)^2}.$$

Cum $f(x)$ are același semn ca x, se vede că $f'(x)$ are semnul lui

$$\varphi(x) = x^2 + x - 1.$$

Rădăcinile polinomului $x^2 + x - 1$ sînt:

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Numai numărul $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ aparține domeniului de definiție al lui f. Acest număr corespunde unei anulări a derivatei, cu schimbare de semn și, prin urmare, la un extrem pentru funcția f.

De unde:
$$M = f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = f(\alpha).$$

Avem:
$$M = \alpha\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}, \quad M \text{ este negativ.}$$

Să calculăm:

$$M^2 = \frac{\alpha^2(\alpha - 1)}{\alpha + 1}.$$

Pentru că α verifică relaţia $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$, avem:

$$\alpha(\alpha + 1) = 1, \quad \text{deci:} \quad \frac{1}{\alpha + 1} = \alpha;$$

rezultă:

$$M^2 = \alpha^3(\alpha - 1) = \alpha^2(\alpha^2 - \alpha);$$

or:

$$\alpha^2 = 1 - \alpha,$$

deci:

$$M^2 = (1 - \alpha)(1 - 2\alpha) = 1 - 3\alpha + 2\alpha^2,$$

$$M^2 = 1 - 3\alpha + 2 - 2\alpha = 3 - 5\alpha,$$

$$M^2 = 3 + \frac{5}{2}(1 + \sqrt{5}) = \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2};$$

$$M = -\frac{\sqrt{22 + 10\sqrt{5}}}{2},$$

$$M \approx -3{,}33 \quad \text{cu:} \quad \alpha \approx -1{,}62.$$

Studiul este rezumat în tabloul de mai jos:

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			$(+\infty)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	M	↘	$-\infty$		0	↗	$+\infty$

Punctul A de coordonate $(1,0)$ este un punct de oprire pentru curba Γ. Semitangenta la Γ în acest punct de oprire este paralelă cu axa ordonatelor, căci avem:

$$\lim_{1} f' = +\infty.$$

În loc de a studia direct derivata f', este mai simplu să se studieze limita în 1 a funcţiei care face ca oricărui x să-i corespundă numărul $\frac{f(x) - 0}{x - 1}$, acest număr fiind coeficientul director al secantei AM, unde M este punctul de coordonate $(x, f(x))$.

Avem:
$$\frac{f(x)-0}{x-1} = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \times \frac{1}{x-1} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

și:
$$\lim_{1}\left[x \mapsto \frac{f(x)-0}{x-1}\right] = +\infty.$$

Să notăm că această metodă poate aduce numeroase servicii atunci cînd derivata f' este mai greu de studiat.

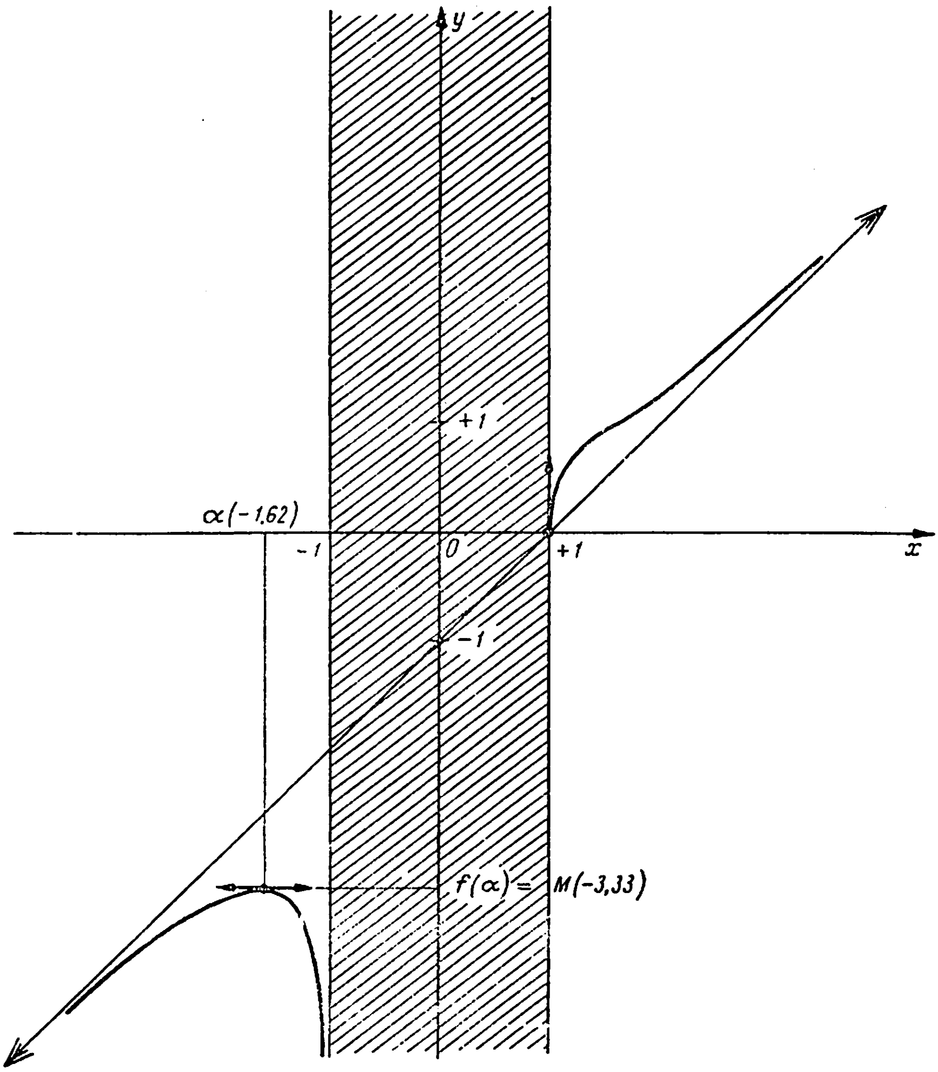


Fig. 19

■ Poate fi interesant de studiat punctele comune curbei şi asimptotei ei. Abscisele acestor puncte, eventual comune, sînt rădăcinile ecuaţiei definite prin:

$$x - 1 = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Ele sînt de asemenea printre rădăcinile ecuaţiei definite prin:

$$(x-1)^2 = x^2\frac{x-1}{x+1},$$

adică prin:

$$(x-1)^2(x+1) - x^2(x-1) = 0$$

sau:

$$(x-1)[(x-1)(x+1) - x^2] = -(x-1) = 0.$$

Singura soluţie eventuală este $x = 1$ care corespunde punctului A; acesta este de sigur pe dreapta de ecuaţie $y - x + 1 = 0$. Rezultă că fiecare din ramurile curbei este în întregime de o anumită parte a asimptotei.
Curba reprezentativă a fost trasată în *figura* 19.

4.5.4 Studiul funcţiei

$$f = [x \mapsto \sin^2 x \cos 2x]$$

Funcţia f este definită şi continuă pe **R**, este o funcţie pară de perioadă π.
O vom studia pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi vom deduce de aici studiul pe **R**.
Să studiem derivata f' definită prin:

$$f'(x) = 2\sin x\cos x\cos 2x - 2\sin^2 x\sin 2x =$$
$$= 2\sin x\cos x\,(1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x).$$

Pe intervalul $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, această derivată are semnul lui:

$$1 - 2\sin x.$$

Ea se anulează schimbînd semnul.
Avem:
a) pentru $x = 0$:

extrem de coordonate $(0,0)$;

b) pentru $x = \frac{\pi}{6}$:

extrem de coordonate $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{8}\right)$;

c) pentru $x = \frac{\pi}{2}$:

extrem de coordonate $\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$.

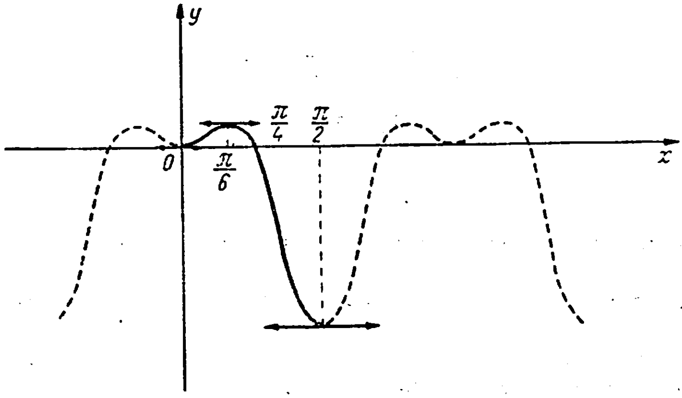


Fig. 20

Tabloul de variaţie în intervalul de studiu este deci următorul:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	-1

Graficul este reprezentat în *figura* 20.
Curba Γ se obţine pornind de la porţiunea studiată, completînd prin simetrie în raport cu axa ordonatelor şi prin translaţii de amplitudine π paralel cu axa absciselor. Se constată din cele obţinute că *perioada* funcţiei f este π.

4.5.5 Studiul funcţiei

$$f = \left[x \mapsto \frac{x^3 + 2}{2x}\right]$$

Funcţia f este definită şi continuă pe $\mathbf{R}^*$.

Avem: $$f'(x) = \frac{3x^2(2x) - 2(x^3 + 2)}{4x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2}.$$

$f'(x)$ are semnul lui $x - 1$. Derivata f' se anulează, schimbînd semnul, pentru $x = 1$ care corespunde deci la un extrem (egal cu 2) cu tangentă paralelă la axa absciselor.

Avem:
$$\lim_{-\infty} f = +\infty,$$
$$\lim_{0-} f = -\infty,$$
$$\lim_{0+} f = +\infty,$$
$$\lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Funcția f prezintă deci patru ramuri infinite pe care le vom studia succesiv.
a) În vecinătatea lui zero:
α) la stînga, dreapta de ecuație $x = 0$ este asimptotă la curba Γ, $f(x)$ fiind negativ;
β) la dreapta, dreapta de ecuație $x = 0$ este asimptotă la Γ, $f(x)$ fiind pozitiv.
b) În vecinătatea infinitului, pentru x nenul, avem:
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 + 2}{2x^2},$$
$$\lim_{-\infty}\left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right] = -\infty,$$
$$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{f(x)}{x}\right] = +\infty.$$

În cele două cazuri, avem deci o ramură parabolică de direcție Oy.

De altfel:
$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x},$$
și:
$$\lim_{+\infty}\left[x \mapsto \frac{1}{x}\right] = 0 = \lim_{-\infty}\left[x \mapsto \frac{1}{x}\right],$$
și funcția $g = \left[x \mapsto \frac{x^2}{2}\right]$ este asimptotă la funcția f în vecinătatea lui $+\infty$ și $-\infty$. Curba Γ admite deci ca asimptotă o parabolă P.
Pe R^{+*}, $f(x)$ este mai mare ca $g(x)$; pe R^{-*}, $f(x)$ este mai mică ca $g(x)$, ceea ce permite să plasăm pe Γ în raport cu P.

Avem:
$$f'(x) = x - \frac{1}{x^2};$$
prin urmare:
$$f''(x) = 1 + \frac{2}{x^3} = \frac{x^3 + 2}{x^3}.$$

$f''(x)$ se anulează schimbînd semnul pentru $x_0 = -\sqrt[3]{2} = -2^{\frac{1}{3}}$, care corespunde la un punct I de inflexiune.

Punctul I are coordonate $\left(-2^{\frac{1}{3}}, \beta\right)$ cu:
$$\beta = f\left(-2^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{-2+2}{2\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)} = 0.$$

Tangenta în I are $f'(\alpha)$ drept coeficient director:

$$f'(\alpha) = \frac{-2-1}{\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{-3}{4^{\frac{1}{3}}} \approx -\frac{3}{1,6} \approx -1,9.$$

Tabloul de variație este următorul:

x	$-\infty$		α		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \ \| \ +\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Curba este reprezentată în *figura* 21.

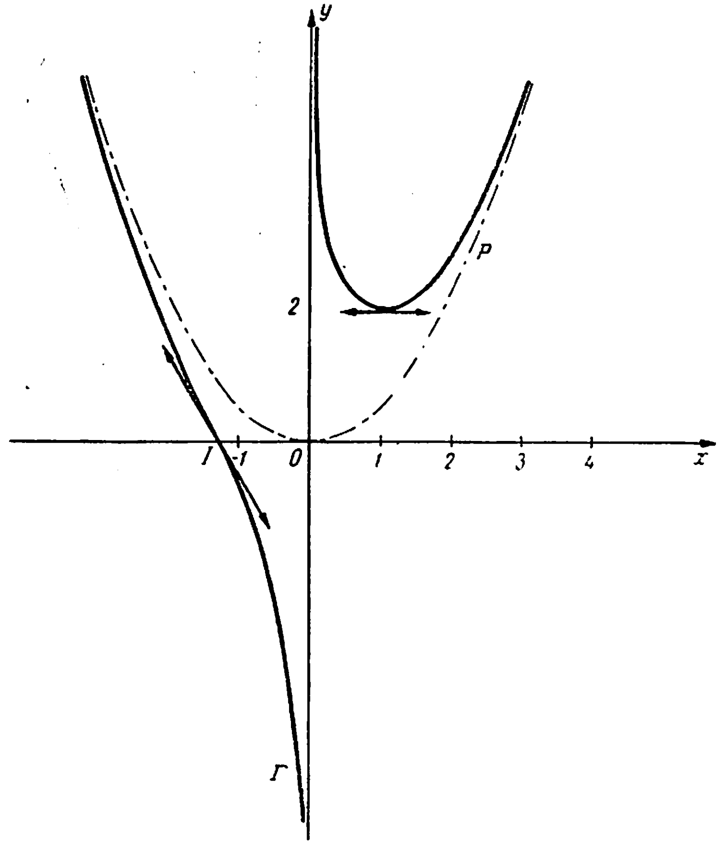


Fig. 21

Observație. — Curbele sînt totdeauna reprezentate aproximativ. Aceste reprezentări grafice sînt cu atît mai desăvîrșite cu cît se precizează mai multe puncte particulare (remarcabile sau nu) și tangentele lor.

EXERCIȚII

Să se studieze și să se reprezinte grafic funcțiile definite prin:

4.21 $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x^2}$; $g(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2}$.

4.22 $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x}$.

4.23 $f(x) = \sqrt{x^6} - \sqrt{x^2}$.

4.24 $f(x) = x^3 + \sqrt{x^2}$; $g(x) = x^3 - \sqrt{x^2}$.

4.25 $f(x) = x + \sqrt{x}.^{6}$

4.26 $f(x) = x^2 - 3x + 2$; $g(x) = |x^2 - 3x + 2|$;
$h(x) = |x^2 - 3x| + 2$.

4.27 $f(x) = \sqrt{(x^2 + 2x)^2} - x^2 + 3$.

4.28 $\begin{cases} x \leqslant 3 & f(x) = \dfrac{x - 3}{x - 1}; \\ x > 3 & f(x) = (x - 3)(x - 5). \end{cases}$

4.29 $\begin{cases} x \leqslant 0 & f(x) = x^2 + x; \\ x > 0 & f(x) = x^2 - x. \end{cases}$

4.30 $\begin{cases} x \leqslant 2 & f(x) = (x + 1)(x - 2); \\ x > 2 & f(x) = \dfrac{x - 2}{x}. \end{cases}$

4.31 $f(x) = \dfrac{1}{2}[|x| + x + |x - 1| + x - 1]$.

4.32 $f(x) = [E(x)]^2 - x$.

4.33 $f(x) = \dfrac{1}{E(x)}$.

4.34 $f(x) = E(3x + 5)$.

4.35 $f(x) = E(x^2)$.

4.36 $f(x) = \dfrac{x}{E(x)}$.

4.37 $f(x) = \dfrac{E(x)}{x}$.

4.38 $f(x) = 1 - xE(x)$.

4.39 $f(x) = 1 - xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

4.40 $f(x) = \left| \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{64} \right|$.

4.41 $f(x) = E(x^3 - 3x)$.

4.42 $f(x) = \frac{16x^3}{27(1-x)^2}$, $x \in]-3,3[$.

4.43 $f(x) = [2E(x) + 1]x - [E(x)][E(x) - 1]$.

4.44 $f(x) = |x^3 - |x + 1||$.

4.45 $f(x) = \frac{x^2 + |x - 1|}{|x^2 + x| - 1}$.

4.46 $f(x) = |x - 2|^3 - |2 - x|$.

4.47 $f(x) = E(2x) - x$.

4.48 $f(x) = E(x) - 2x$.

4.49 $f(x) = E(x^4 - 4x^2)$.

4.50 $\begin{cases} x < -1 & f(x) = -(x+1)^2; \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 & f(x) = 0; \\ 1 < x & f(x) = (x-1)^2. \end{cases}$

4.51 $\begin{cases} x \leqslant 3 & f(x) = \frac{x-3}{x-1}; \\ x > 3 & f(x) = 2(x-3) \end{cases}$

4.52 $\begin{cases} x \leqslant 0 & f(x) = x^2 + 2x; \\ x > 0 & f(x) = -x^2 + 5x. \end{cases}$

4.53 $\begin{cases} x \leqslant 2 & f(x) = (x+1)(x-2); \\ x > 2 & f(x) = \frac{x-2}{x-1}. \end{cases}$

4.54 $f(x) = \frac{x-3}{x}$; $\quad g(x) = \frac{x+3}{x}$;

$h(x) = \frac{-x+3}{x}$; $\quad k(x) = \frac{-3-x}{x}$.

4.55 $f(x) = \left| \frac{-3x+1}{x-2} \right|$.

4.56 $f(x) = |x + 2|(x + 1)(x - 1)$.

$g(x) = |x + 2|\,|x + 1|(x - 1)$;

$h(x) = (x + 2)|x^2 - 1|$;

$k(x) = |(x + 2)(x + 1)(x - 1)|$.

4.57 $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 4|$;

$g(x) = x^3 + |3x^2 - 4|$;

$h(x) = |x^3| + |3x^2 - 4|$.

4.58 $f(x) = \left|\dfrac{x^4 - 16x^2}{64}\right| - \left|\dfrac{x^4 - 9x^2}{20}\right|.$

4.59 $f(x) = (x + \sqrt{x^2})^2 + x^2\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}.$

4.60 $f(x) = x^6 - 2x^3 + 1.$

4.61 $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 + x + 1}$; $\quad g(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2x + 3}.$

4.62 $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 + x + 3}.$

(Să se calculeze rădăcinile derivatei a doua. Să se demonstreze că punctele corespunzătoare sînt coliniare.)

4.63 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x + 1}$; $\quad g(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 5x + 5}.$

4.64 $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 2x + 2}.$

4.65 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$; $\quad g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}.$

4.66 $f(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^2$; $\quad g(x) = \dfrac{1}{-x^2 + 2x - 1}.$

4.67 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$; $\quad g(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 8}{x^2 - 4x + 3}.$

4.68 $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + x - 2}$; $\quad g(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 4x + 3}.$

4.69 $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x}$

4.70 $f(x) = \dfrac{x - 3}{2x^2 + x - 3}$; $\quad g(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 2}{x^2 - 4x + 4}$; $\quad h(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 3}.$

4.71 $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 7}{x^2 + x - 2}$; $\quad g(x) = \dfrac{5x^2 - 14x + 17}{x^2 - x - 2}.$

4.72 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 2x}$; $\quad g(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 4x + 3}.$

4.73 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 6x + 9}$; $\quad g(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + x + 4}.$

4.74 $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 4x + 5}$; $\quad g(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 4x + 1}.$

4.75 $f(x) = \dfrac{(x + 1)^2}{x^2 + 1}$; $\quad g(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - x}.$

4.76 $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 2}$; $\quad g(x) = \dfrac{2x^2 + 4x + 5}{x + 1}.$

4.77 $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 3}$; $\quad g(x) = 2^x + \dfrac{4}{x - 5}$.

4.78 $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x + 1}$ şi derivata sa.

4.79 $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x - 1)}$.

4.80 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

4.81 $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$; $\quad g(x) = x\sqrt{2x - 1}$.

4.82 $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{\sqrt{x^4 - x^2}}$; $\quad g(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 + x}{x^2 - 4}}$.

4.83 $f(x) = \dfrac{x^3}{x - 1}$; $\quad g(x) = 2x - \sqrt{x + 1}$.

4.84 $f(x) = \sqrt{x^4 - 10x^2 + 9}$; $\quad g(x) = \sqrt{-x^4 + 5x^2 - 4}$.

4.85 $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$; $\quad g(x) = x\sqrt{2x^2 + 1}$.

4.86 $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 - x^2}(x^2 + 4)}{3}$; $\quad g(x) = \dfrac{x(3 + 2x^2)}{3\sqrt{(1 + x^2)^3}}$.

4.87 $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$; $\quad g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x + 1}$.

4.88 $f(x) = \sqrt{x^3 + x + 1}$; $\quad g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$.

4.89 $f(x) = \dfrac{x^3 + 9}{x^2 - 1}$; $\quad g(x) = \dfrac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}$.

4.90 $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x - 1}}$; $\quad g(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

4.91 $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{(x - 1)(2x + 1)}$; $\quad g(x) = x + \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$.

4.92 $f(x) = x\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^2$; $\quad g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

4.93 $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

(Se va folosi identitatea $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ pentru determinarea asimptotei.)

4.94 $f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2 + x + 1}$.

4.95 $f(x) = 2x - 1 + \sqrt{x - 4}$.

4.96 $f(x) = \sqrt[5]{x^3(x^2 - 1)}$ (intersecţie dintre curbă şi asimptotă.)

4.97 $f(x) = x^2(x - 1)^3$; $\quad g(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}}$; $\quad h(x) = x\sqrt{(x - 1)(x - 3)}$.

4.98 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^3 - x}}$; $\quad g(x) = -\sqrt{\dfrac{x}{x^2 + 1}}$; $\quad h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$.

4.99 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$; $\quad g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$; $\quad h(x)=\sqrt{8x-4x^2}$.

4.100 $f(x)=\sqrt{x^2+2|x|+3}$; $\quad g(x)=\sqrt{2x+|x^2-3|}$.

4.101 $f(x)=\sin^2 x+\cos^3 x$; $\quad g(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$.

4.102 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$; $\quad g(x)=\operatorname{tg} x+\cos x$.

4.103 $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sin x}$; $\quad g(x)=\dfrac{1-\cos x}{2+\cos x}$.

4.104 $f(x)=\cos x+\cos\dfrac{x}{2}$; $\quad g(x)=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\sin x$.

4.105 $f(x)=2\sin x-\operatorname{tg} x$; $\quad g(x)=\sin^2 x+\sin 2x$.

4.106 $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg}^2 x}$; $\quad g(x)=\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg}^3 x}$.

4.107 $f(x)=\dfrac{(1+\sin x)^2}{\sin x(1-\sin x)}$; $\quad g(x)=\dfrac{\cos 3x}{1+\cos 2x}$.

4.108 $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos 2x}$; $\quad g(x)=\dfrac{3\sin x}{2\sin x-1}$.

4.109 $f(x)=6\sin x-3\cos 2x+2\sin 3x$.

4.110 $f(x)=\sin^2 x-2\sin x$.

4.111 $f(x)=\left(\dfrac{1-2\sin x}{1+2\sin x}\right)^2$.

4.112 $f(x)=2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x$.

4.113 $f(x)=\sin\pi(1+x^2)$.

4.114 $f(x)=\cos\dfrac{1-x}{1+x}$.

4.115 $f(x)=\operatorname{tg} x+3\operatorname{ctg} x$.

4.116 $f(x)=\dfrac{4\sin x-3\cos x}{3\sin x+4\cos x}$; $\quad g(x)=\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-2\cos x}$.

4.117 $f(x)=\dfrac{3+\sin x}{1+\sin x}$ $\quad g(x)=\dfrac{3\sin x}{2\sin x-1}$.

4.118 $f(x)=\sin x+\cos x+\sin x\cos x$; $\quad g(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}$.

4.119 $f(x)=\sin x+4\cos x$; $\quad g(x)=\dfrac{1+2\sin x}{1-\cos x}$.

4.120 $f(x)=\cos 2x-\cos x$; $\quad g(x)=\sin^2 x-2\cos x$.

4.121 Fie C_a reprezentarea grafică a funcţiei $f_a = \left[x \mapsto ax + 2 + \frac{4}{x}\right]$, unde a este un parametru.
1° Să se indice, după valorile lui a, diferitele forme ale curbei C_a.
2° Să se construiască curba C_1. Să se folosească această curbă pentru a studia ecuaţia definită prin:

$$\sin z + 2 + \frac{4}{\sin z} - m = 0.$$

(Se va indica, după valorile lui m, numărul de soluţii cuprinse între $-\frac{\pi}{2}$ şi $+\frac{\pi}{2}$.)

4.122 1° Să se studieze funcţia f definită prin:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x(x + 4)}.$$

Să se traseze reprezentarea sa grafică C.
2° Fie funcţia g definită prin:

$$g(x) = \frac{3x^2 + 2}{x(\alpha x + \beta)},$$

unde α şi β sînt constante.

Să se determine α şi β astfel încît reprezentarea grafică a funcţiei g să conţină punctul $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ şi să aibă în acest punct o tangentă paralelă cu dreapta absciselor.
3° α şi β fiind valori oarecare dintre care nici una nu este nulă, să se demonstreze că se pot determina constantele a, b, c astfel că:

$$g(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{\alpha x + \beta}.$$

Să se calculeze a, b şi c şi să se deducă o expresie a valorii $g'(x)$ a derivatei.
Care este relaţia, independentă de α şi β, care leagă rădăcinile ecuaţiei definite prin:

$$g'(x) = 0?$$

4.123 Relaţia $ax^2 + bx + c = 0$ se poate scrie succesiv, pentru x nenul:

$$ax + b = -\frac{c}{x} \quad \text{şi} \quad \frac{ax + b}{-c} = \frac{1}{x} \quad (c \neq 0).$$

Să se folosească acest artificiu pentru a rezolva grafic ecuaţiile definite pe $\mathbf{R}$ prin:

$x^2 - 5x + 4 = 0$; $\quad x^2 + 3x - 4 = 0$; $\quad x^2 + 8x - 20 = 0$;

$2x^2 - 5x + 3 = 0$; $\quad 3x^2 - 7x + 2 = 0$; $\quad x^2 - 4x + 4 = 0$;

4.124 Relaţia $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ se poate scrie, pentru x nenul:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{-d} = \frac{1}{x} \quad (d \neq 0),$$

sau încă, pentru x diferit de $-\frac{b}{a}$:

$$x^2 = -\frac{cx + d}{ax + b}.$$

Să se folosească unul sau altul din aceste artificii pentru a rezolva grafic ecuațiile definite pe **R** prin:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0; \qquad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0;$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0; \qquad x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0.$$

4.125 Să se rezolve și discute grafic ecuațiile definite pe **R** prin:

1° $x^3 + ax + 1 = 0, \qquad 1 < x < 2.$

2° $x^3 - ax^2 - 4 = 0.$

3° $a(x-3)^2 = x^2 - 7x + 10.$

4.126 Să se rezolve grafic ecuațiile definite pe **R** prin:

1° $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = \sqrt{3 - x} + 2.$

2° $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = \sqrt{3 - x} - 2.$

3° $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = -\sqrt{3 - x} - 2.$

4.127 Se consideră funcția f:

$$f = [x \mapsto \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+1)}).$$

1° Să se compare: $f(x)$ și $f(-x)$.
2° Să se demonstreze că funcțiile:

$$\left[x \mapsto \sqrt{x(x-1)} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] \quad \text{și} \quad \left[x \mapsto \sqrt{x(x+1)} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$$

au o limită nulă în $+\infty$.
Să se deducă limita lui $[x \mapsto f(x) - 2x]$ în $+\infty$.
3° Să se traseze graficul funcției f.
4° Să se determine grafic valori aproximative ale rădăcinilor ecuației definite pe **R** prin:

$$\sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+1)} = 3 + x.$$

4.128 1° Într-un reper ortonormat, se dă punctul $A(1, 1)$. Să se scrie ecuația cercului de centru A și de rază 3.
2° Să se traseze graficul funcției $f = [x \mapsto x^2]$.
3° Să se deducă valori cu aproximație ale rădăcinilor ecuației definite prin:

$$x \in \mathbf{R} \quad \text{și} \quad x^4 - x^2 - 2x - 7 = 0.$$

4.129 Se consideră funcția f_n : $f_n = [x \mapsto (x+1)^{2n} - 2x - 1]$ (n întreg mai mare sau egal cu 2).

1° Să se calculeze: $\qquad f'_n(x), f''_n(x).$

2° Să se studieze semnul lui $f'_n(x)$ în funcție de x. Să se deducă aliura generală a curbei reprezentative Γ_n a funcției f_n într-un reper dat.
Să se discute ecuația definită prin:

$$x \in \mathbf{R} \quad \text{și} \quad f_n(x) = 0.$$

3° Să se demonstreze că Γ_n admite un centru de simetrie.

4.130 1° Să se studieze funcția $f = [x \mapsto x + \sqrt{|x^2 - 1|}$. Să se traseze curba sa reprezentativă Γ într-un reper cartezian. Să se precizeze asimptotele și tangentele la Γ în punctele A, B, C de abscise respectiv $-1, 0, +1$.
2° Fie D dreapta de coeficient director $m + 1$ care trece prin punctul C. Să se discute, după valorile lui m, numărul de puncte comune lui D și Γ. Să se calculeze abscisele lor în funcție de m.
3° În această chestiune, se presupune că există două numere M și N astfel că:

$$D \cap \Gamma = \{C, M, N\}.$$

Fie E „conjugatul armonic" al lui C în raport cu M şi N. Care este mulţimea punctelor E?
(E este conjugatul armonic al lui C în raport cu M şi N dacă şi numai dacă:

$$\left.\frac{\overline{EM}}{\overline{EN}} = -\frac{\overline{CM}}{\overline{CN}}\right).$$

4.131 1° Fie polinomul:

$$P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1.$$

Să se determine constantele a, b, c, d, pentru a avea oricare ar fi x:

$$P(x) = (12x^2 - 4x - 3)(ax + b) + cx + d.$$

2° Să se demonstreze că $P(x)$ admite un maxim şi un minim ale căror valori m sînt legate de valorile corespunzătoare ale lui x prin:

$$m = -\frac{20}{9}x + \frac{5}{6}\cdot$$

3° Să se traseze graficul funcţiei $[x \mapsto P(x)] = P$ (unitatea grafică 6 cm).
4° Se dă ecuaţia definită prin:

$$\theta \in \mathbf{R} \quad \text{şi} \quad \cos 3\theta = \cos 2\theta.$$

Să se determine rădăcinile care aparţin intervalului $[0, 2\pi]$.
Se pune $\cos\theta = x$. Să se formeze ecuaţia care dă pe x şi să se rezolve acestă ecuaţie.
Să se deducă:

$$\cos\frac{2\pi}{5},\ \cos\frac{4\pi}{5},\ \cos\frac{\pi}{5},\ \cos\frac{3\pi}{5},\ \sin\frac{\pi}{10},\ \sin\frac{3\pi}{10}\cdot$$

5. FUNCȚII VECTORIALE DE O VARIABILĂ REALĂ

5.1. SPAȚII VECTORIALE EUCLIDIENE

5.1.1 Recapitulări. Definiții

Să reamintim că un spațiu vectorial $\vec{E}$ pe corpul **R** este euclidian dacă este înzestrat cu un produs scalar (Geometrie Anul I—CDE, secțiunea 8.1). Fiind dat un asemenea spațiu vectorial $\vec{E}$, norma unui vector $\vec{u}$ din $\vec{E}$ este numărul real notat $\|\vec{u}\|$ și definit prin:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u})^2} \quad \text{(Geometrie Anul I—CDE, nr. 8.1.4).}$$

Norma pe spațiul vectorial $\vec{E}$ satisface următoarele proprietăți:

$$\forall_{\vec{E}}\vec{u}, \quad \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0},$$

$$\forall_{\vec{E}}\vec{u}, \ \forall_{\mathbf{R}}\lambda \quad \|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\,\|\vec{u}\|,$$

$$\forall_{\vec{E}}\vec{u}, \ \forall_{\vec{E}}\vec{v} \quad \|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

Se demonstrează cu ușurință, plecînd de la aceste proprietăți fundamentale, următoarele proprietăți:

$$\forall_{\vec{E}}\vec{u} \qquad \|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|,$$

$$\forall_{\vec{E}}\vec{u} \qquad \|\vec{u}\| \geqslant 0,$$

$$\forall_{\vec{E}}\vec{u}, \quad \forall_{\vec{E}}\vec{v} \qquad \big|\,\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\,\big| \leqslant \|\vec{u}-\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

Dacă $\vec{E}$ este de dimensiune 2, norma unui vector $\vec{u}$ de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ este: $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Aplicația d de la $\vec{E} \times \vec{E}$ la $\mathbf{R}$, care face ca oricărei perechi $(\vec{u}, \vec{v})$ de vectori din $\vec{E}$ să-i corespundă norma diferenței $\vec{u} - \vec{v}$, are următoarele proprietăți:

$$\forall_{\vec{E}\times\vec{E}}(\vec{u}, \vec{v}) \qquad d(\vec{u}, \vec{v}) = d(\vec{v}, \vec{u}),$$

$$\forall_{\vec{E}\times\vec{E}}(\vec{u}, \vec{v}) \qquad d(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v},$$

$$\forall_{\vec{E}\times\vec{E}\times\vec{E}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \qquad d(\vec{u}, \vec{w}) \leqslant d(\vec{u}, \vec{v}) + d(\vec{v}, \vec{w}).$$

Aplicația d este o distanță: $d(\vec{u}, \vec{v}) = ||\vec{u} - \vec{v}||$.

Dacă $\vec{E}$ este de dimensiune 2, dacă coordonatele lui $\vec{u}$ într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ sînt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ și acelea ale lui $\vec{v}$ sînt $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, atunci avem:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

5.1.2 Bule deschise. Bule închise

Fie $\vec{E}$ un spațiu vectorial pe $\mathbf{R}$. Avem următoarele definiții:

DEFINIȚIA 1 / **Se numește bulă deschisă de centru $\vec{u}_0$ și de rază r, unde r este un număr real pozitiv, mulțimea elementelor din $\vec{E}$ a căror distanță la $\vec{u}_0$ este strict mai mică decît r:**

$$\mathscr{B} = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in \vec{E} \text{ și } d(\vec{x}, \vec{u}_0) < r\}.$$

DEFINIȚIA 2 / **Se numește bulă închisă de centru $\vec{u}_0$ și de rază r, unde r este un număr real pozitiv, mulțimea elementelor din $\vec{E}$ a căror distanță la $\vec{u}_0$ este mai mică decît sau egală cu r:**

$$\mathscr{B}' = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in \vec{E} \text{ și } d(\vec{x}, \vec{u}_0) \leqslant r\}.$$

Observații. — **1** $\mathbf{R}$ este un spațiu vectorial eculidian. Avem:

$$\forall_{\mathbf{R}} x \quad ||\vec{x}|| = |x|,$$

$$\forall_{\mathbf{R}^2}(x, y) \quad d(x, y) = |x - y|.$$

Bula deschisă de centru x_0 și de rază r este, în $\mathbf{R}$, intervalul deschis:

$$]x_0 - r, x_0 + r[.$$

Bula închisă de centru x_0 şi de rază r este, de asemenea, intervalul închis:

$$[x_0 - r, x_0 + r].$$

2 Spaţiul afin $\mathcal{E}$ cu trei dimensiuni, înzestrat cu un punct O, este izomorf cu spaţiul vectorial $\mathbf{R}^3$. Extremităţile bipunctelor care reprezintă vectorii unei bule de centru $\vec{u}_0$ sînt punctele unei sfere de centru M_0, $(O, M_0) \in \vec{u}_0$, ceea ce justifică numele de bulă dat acestor mulţimi.

5.1.3 Deschişi şi închişi în $\vec{E}$

DEFINIŢIA 1 / O submulţime O din $\vec{E}$ este un deschis din $\vec{E}$ dacă şi numai dacă O este o reuniune de bule deschise.

DEFINIŢIA 2 / O submulţime F din $\vec{E}$ este un închis din $\vec{E}$ dacă şi numai dacă complementara lui F în $\vec{E}$ este un deschis.

Aceste definiţii sînt bazate pe acelea pe care le-am dat cu privire la mulţimea $\mathbf{R}$ (nr. 1.1).

Exemple. **I.** Fie $\vec{u}_0$ un element al unui spaţiu vectorial $\vec{E}$ pe $\mathbf{R}$. Să considerăm mulţimea $\{\vec{u}_0\}$ Orice vector $\vec{u}$ diferit de $\vec{u}_0$ este astfel că:

$$\|\vec{u}_0 - \vec{u}\| > 0.$$

Să punem:

$$\|\vec{u}_0 - \vec{u}\| = \delta \quad (\delta \neq 0).$$

Bula deschisă de centru $\vec{u}$ şi de rază δ este inclusă în complementara din $\vec{E}$ a lui $\{\vec{u}_0\}$.
Reciproc, să considerăm reuniunea O a tuturor bulelor deschise ale căror centre sînt elementele $\vec{u}_0$ din $\vec{E}$, diferite de $\vec{u}_0$ şi care au razele $d(\vec{u}, \vec{u}_0)$.
Nici una din aceste bule deschise nu conţine pe $\vec{u}_0$.
Orice element $\vec{u}$ din $\vec{E}$, cu $\vec{u} \neq \vec{u}_0$, aparţine lui O.
Deci $O = \vec{E} - \{\vec{u}_0\}$, şi O este un deschis.
Prin urmare: $\{\vec{u}_0\}$ este un închis.
Acest fapt fiind adevărat pentru orice element $\vec{u}_0$ din $\vec{E}$, orice mulţime redusă la un element din $\vec{E}$ este un închis din $\vec{E}$.
II. Se demonstrează de asemenea că orice bulă închisă este un închis din $\vec{E}$.

5.1.4 Vecinătăţi ale unui vector

DEFINIŢIE / Se numeşte vecinătate a unui vector $\vec{u}_0$ din $\vec{E}$ orice submulţime V din $\vec{E}$ care conţine o bulă deschisă care conţine pe $\vec{u}_0$.

Proprietăţile vecinătăţilor în spaţiul vectorial euclidian $\vec{E}$ sînt identice cu proprietăţile vecinătăţilor în $\mathbf{R}$, dezvoltate la nr. 1.1.6.

În particular, orice deschis din $\vec{E}$ este vecinătate a fiecăruia din punctele lui (exercițiul nr. 5.1).
Prin indicarea unei mulțimi de deschiși din $\vec{E}$ se definește o topologie pe $\vec{E}$. Elementele din $\vec{E}$ sînt numite adesea *puncte.*

5.1.5 Topologia indusă pe o submulțime din $\vec{E}$

Fie D o submulțime din $\vec{E}$. Topologia lui $\vec{E}$ induce o topologie pe D la fel ca la nr. 1.1.7. De aceea o submulțime Ω din D este un deschis din D dacă există un deschis O din $\vec{E}$ astfel că:

$$\Omega = O \cap D.$$

O submulțime V' din D este o vecinătate a lui $\vec{u}_0$ în D ($\vec{u}_0$ aparținînd lui D), dacă există o vecinătate V a lui $\vec{u}_0$ astfel ca:

$$V' = V \cap D.$$

Să observăm totuși că nu știm să definim în $\vec{E}$ nici vecinătăți la dreapta, nici vecinătăți la stînga. Aceste noțiuni nu există în $\mathbf{R}$ decît pentru că $\mathbf{R}$ este înzestrată cu o ordine totală compatibilă cu structura ei, ceea ce nu este cazul lui $\vec{E}$.

EXERCIȚII

5.1 Să se demonstreze că un deschis este vecinătate a fiecăruia din punctele lui.
5.2 Să se demonstreze că intersecția unui număr infinit de deschiși nu este în mod necesar un deschis (a se vedea exercițiul nr. 1.1).
5.3 Să se demonstreze că reuniunea unui număr infinit de închiși nu este în mod necesar un închis.
5.4 Să se demonstreze că intersecția și reuniunea a două vecinătăți ale unui vector $\vec{u}_0$ al unui spațiu vectorial $\vec{E}$ este o vecinătate a lui $\vec{u}_0$.
5.5 $\vec{E}$ fiind un spațiu vectorial pe $\mathbf{R}$, să se demonstreze că, dacă $\vec{u}_1$ și $\vec{u}_2$ sînt doi vectori distincți din $\vec{E}$, există o vecinătate V_1 a lui $\vec{u}_1$ și o vecinătate V_2 a lui $\vec{u}_2$ astfel că V_1 și V_2 sînt disjuncte.
5.6 Fie $\mathcal{B}_0$ o bulă deschisă care conține vectorul $\vec{u}_0$. Să se demonstreze că există o bulă deschisă $\mathcal{B}_0'$ de centru $\vec{u}_0$ inclusă în $\mathcal{B}_0$.

5.2 FUNCȚII VECTORIALE DE O VARIABILĂ REALĂ

5.2.1 Definiție

DEFINIȚIE / Fie $\vec{E}$ un spațiu vectorial. O funcție vectorială de o variabilă reală este o aplicație a unei submulțimi D de la $\mathbf{R}$ la $\vec{E}$.

În practică, ne vom mărgini la cazul în care $\vec{E}$ este un spațiu vectorial euclidian pe $\mathbf{R}$, de dimensiune finită (cel mai adesea 1, 2 sau 3 în exemple). Cînd vom vorbi de funcții vectoriale de o variabilă reală, ne vom referi implicit numai la această situație precisă.

Să observăm că, dacă φ este o aplicaţie liniară de la **R** la $\vec{E}$, există un vector $\vec{u}$ din $\vec{E}$ astfel că, pentru orice număr real x:

$$\varphi(x) = x\vec{u}.$$

Să notăm cu $\lambda_{\vec{u}}$ această aplicaţie liniară. Aplicaţia i, care face ca oricărui vector $\vec{u}$ din $\vec{E}$ să-i corespundă aplicaţia liniară $\lambda_{\vec{u}}$, este un izomorfism dintre spaţiile vectoriale $\vec{E}$ şi $\mathfrak{L}(\mathbf{R}, \vec{E})$ unde $\mathfrak{L}(\mathbf{R}, \vec{E})$ este mulţimea aplicaţiilor liniare de la **R** la $\vec{E}$ (vezi nr. 3.2.2).

O aplicaţie α de la **R** la $\vec{E}$ este afină dacă şi numai dacă există doi vectori $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ din $\vec{E}$ astfel că, pentru orice număr real x:

$$\alpha(x) = x\vec{u} + \vec{v}.$$

Exemplu. **C** este un spaţiu vectorial pe **R**. Orice aplicaţie de la **R** la **C** este o funcţie vectorială de o variabilă reală.

5.2.2 Funcţii numerice asociate

■ Fie F o funcţie vectorială de o variabilă reală; F este o aplicaţie a unei submulţimi D de la **R** la un spaţiu vectorial euclidian $\vec{E}$ pe **R**, pe care-l vom presupune de dimensiune finită. Se poate asocia lui F o funcţie numerică f, definită în modul următor:

$$\forall_{\mathbf{R}} x \qquad f(x) = ||\overrightarrow{F(x)}||.$$

Studiul acestei funcţii este uneori interesant căci anulările sale coincid cu anulările funcţiei F.

■ Fie F o funcţie de la **R** la $\vec{E}$ şi fie $\mathfrak{B}$ o bază a lui $\vec{E}$, astfel că:

$$\mathfrak{B} = (\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_{n-1}, \vec{i}_n).$$

$\overrightarrow{F(x)}$, pentru orice x al unei submulţimi D din **R**, fiind un element din $\vec{E}$, există funcţii numerice $f_1, \ldots, f_n$, astfel că:

$$\overrightarrow{F(x)} = f_1(x)\vec{i}_1 + f_2(x)\vec{i}_2 + \ldots + f_n(x)\vec{i}_n.$$

Funcţiile f_i, i aparţinînd mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, sînt numite *funcţii componente* în $\mathfrak{B}$ ale funcţiei F. Să notăm că aceste funcţii componente depind nu numai de F, ci de asemenea de $\mathfrak{B}$, aşa încît, cînd este vorba (frecvent) să se determine o funcţie vectorială prin funcţiile ei componente, este absolut indispensabil să se precizeze în ce bază sînt date aceste componente.

Exemple. I. Pentru o bază dată $\mathfrak{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, funcţia:

$$F = [t \mapsto \sqrt{t}\,\vec{i} + \sqrt{1-t}\,\vec{j} + t\vec{k}]$$

este o funcţie vectorială.

Funcțiile componente ale lui F în $\mathcal{B}$ sînt:

$$f_1 = [t \mapsto \sqrt{t}],\ f_2 = [t \mapsto \sqrt{1 - t}],\ f_3 = [t \mapsto t].$$

II. Fie $\mathcal{B}$ o bază ortonormată din $\vec{E}$. O funcție vectorială pe care vom avea ocazia s-o regăsim este funcția F:

$$F = [t \mapsto \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \alpha\, t\vec{k}] \quad (\alpha \in \mathbf{R}).$$

5.2.3 Denumirile unei funcții vectoriale

Fiind dată o funcție vectorială F de la $\mathbf{R}$ la $\vec{E}$, domeniul ei de definiție D este mulțimea numerelor reale x care au o imagine prin F. Funcția F este periodică dacă și numai dacă există un număr real t astfel că:

$$\forall_D\, x \qquad \overrightarrow{F(x + t)} = \overrightarrow{F(x)}.$$

Funcția F este pară (respectiv impară) dacă și numai dacă:

$$\forall_D\, x \quad -x \in D \quad \text{și} \quad \overrightarrow{F(-x)} = \overrightarrow{F(x)}$$

(respectiv $\overrightarrow{F(-x)} = -\overrightarrow{F(x)}$).
Funcția F este mărginită dacă și numai dacă funcția f, definită prin:

$$\forall_D\, x \qquad f(x) = \|\overrightarrow{F(x)}\|,$$

este mărginită.
Să notăm că domeniul de definiție al lui D este intersecția domeniilor de definiție ale funcțiilor componente într-o bază $\mathcal{B}$.
Să observăm, în afară de aceasta, că funcția F este periodică, pară, impară sau mărginită, dacă și numai dacă fiecare din funcțiile sale componente, într-o bază $\mathcal{B}$, este și ea de acest fel, prin urmare, componentele ei într-o bază oarecare $\mathcal{B}'$ sînt și ele de acest fel.
O funcție vectorială de o variabilă reală F, definită pe un interval $I = [a, b]$, este în scară, dacă și numai dacă există un șir finit crescător σ de n elemente din I:

$$\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ a_1 = a,\ a_n = b,$$

astfel că funcția F este constantă pe orice interval deschis $]a_i, a_{i+1}[$.

5.2.4 Reprezentări grafice

Să reamintim că un spațiu afin euclidian $\mathcal{E}_n$ de dimensiune n pe $\mathbf{R}$, înzestrat cu un punct O (origine), este izomorf cu spațiul vectorial euclidian $\mathbf{R}^n$. În practică, n ia valorile 1, 2 sau 3.
Un vector $\vec{V}$ din $\mathbf{R}^n$ poate fi reprezentat în spațiul afin $\mathcal{E}_n$ prin punctul M, astfel că bipunctul (O, M) reprezintă vectorul $\vec{V}$.

Fie F o funcţie vectorială de la $\mathbf{R}$ la un spaţiu vectorial euclidian $\vec{E}$ de dimensiune n. Graficul lui $\mathcal{G}$ este mulţimea:

$$\mathcal{G} = \{(x, \overrightarrow{F(x)}), \qquad x \in \mathbf{R}\}.$$

$\mathcal{G}$ poate fi considerat ca o mulţime de vectori din $\mathbf{R}^{n+1}$, spaţiu vectorial de dimensiune $n + 1$ pe $\mathbf{R}$ şi reprezentat ca atare. Astfel se reprezintă într-un plan afin (cu două dimensiuni) graficul unei funcţii numerice de o variabilă reală (caz în care dimensiunea spaţiului de sosire este 1).

Fie $\mathcal{B}$ o bază din $\vec{E}$. Fie $\mathcal{E}_n$ spaţiul afin pe $\mathbf{R}$ a cărui dimensiune este identică cu aceea a lui $\vec{E}$. Fie O o origine a lui $\mathcal{E}_n$. Orice vector din $\vec{E}$ poate fi reprezentat în $\mathcal{E}_n$ printr-un punct M. Mulţimea $F[D]$ a imaginilor prin F a elementelor din D este reprezentată în $\mathcal{E}_n$ printr-o mulţime de puncte pe care o numim *indicatoarea* Γ a funcţiei vectoriale F.

Γ este o curbă din $\mathcal{E}_n$ şi o asemenea curbă poate fi studiată cu ajutorul funcţiei asociate F. Dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt funcţii numerice componente ale funcţiei vectoriale $\vec{F}$ într-o bază $\mathcal{B}$, se spune că relaţiile care dau pe $f_i(x)$ în funcţie de x definesc ecuaţiile parametrice ale curbei Γ în baza $\mathcal{B}$.

Exemplu. Pentru funcţia F din exemplul II de la nr. 5.2.2 (şi pentru o bază ortonormată), indicatoarea este curba ale cărei ecuaţii parametrice în baza ortonormată dată sînt: $f_1(t) = \cos t$,

$$f_2(t) = \sin t, \qquad f_3(t) = \alpha t.$$

Avem:

$$[f_1(t)]^2 + [f_2(t)]^2 = 1.$$

Prin urmare curba este trasată pe suprafaţa cilindrică de revoluţie de axă Oz şi de rază 1. Această curbă este o *elice circulară.*

5.2.5 Operaţii asupra funcţiilor vectoriale

SUMA A DOUĂ FUNCŢII VECTORIALE

Fie F şi G două funcţii vectoriale definite pe o aceeaşi submulţime D din $\mathbf{R}$. Suma $F + G$ a acestor funcţii vectoriale este definită prin:

$$\overrightarrow{[F + G](x)} = \overrightarrow{F(x)} + \overrightarrow{G(x)}.$$

Fie $\mathcal{B}$ o bază din $\vec{E}$, fie $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funcţiile componente în $\mathcal{B}$ ale lui F şi fie $g_1, \ldots, g_n$ funcţiile componente în $\mathcal{B}$ ale lui G. Funcţiile componente în $\mathcal{B}$ ale lui $F + G$ sînt $f_1 + g_1, \ldots, f_n + g_n$ (conform proprietăţilor proiecţiilor).

PRODUSUL PRINTR-UN NUMĂR REAL

Fie F o funcţie vectorială definită pe o submulţime D din R şi fie λ un număr real. Funcţia λF este definită prin:

$$\overrightarrow{[\lambda F](x)} = \lambda \cdot \overrightarrow{F(x)}.$$

Fie $\mathcal{B}$ o bază a lui $\vec{E}$ şi fie $f_1, \ldots, f_n$ funcţiile componente în $\mathcal{B}$ ale lui F. Funcţiile componente ale lui λF în $\mathcal{B}$ sînt $\lambda f_1, \ldots, \lambda f_n$.

■ STRUCTURA MULŢIMII $\mathcal{F}(D, \vec{E})$

Fie $\mathcal{F}(D, \vec{E})$ mulţimea aplicaţiilor unei submulţimi D de la $\mathbf{R}$ la spaţiul vectorial $\vec{E}$. Conform proprietăţilor adunării şi produsului printr-un număr real în $\vec{E}$ şi ale definiţiilor operaţiilor din $\mathcal{F}(D, \vec{E})$, se trage concluzia că $\mathcal{F}(D, \vec{E})$ este înzestrată de adunare şi înmulţirea printr-un număr real cu o structură de spaţiu vectorial pe $\mathbf{R}$ (exerciţiul nr. 5.10).

■ PRODUSUL PRINTR-O FUNCŢIE NUMERICĂ

Fie F o funcţie vectorială şi fie f o funcţie numerică. Oricărui număr real x din domeniul comun de definiţie al funcţiilor F şi f, funcţia $f \cdot F$ face să corespundă vectorul:

$$\overrightarrow{[f \cdot F](x)} = f(x) \cdot \overrightarrow{F(x)}.$$

Funcţia $f \cdot F$ este deci o funcţie vectorială.
Studiul anumitor proprietăţi ale acestei operaţii este propus în exerciţiul nr. 5.8.
Fiind dată o bază $\mathcal{B}$ a lui $\vec{E}$, dacă $f_1, \ldots, f_n$ sînt funcţiile componente ale lui F în $\mathcal{B}$, funcţiile numerice componente în $\mathcal{B}$ ale lui $f \cdot F$ sînt

$$f \cdot f_1, f \cdot f_2, \ldots, f \cdot f_n.$$

■ FUNCŢIA COMPUSĂ

Funcţia compusă $F \circ f$ a unei funcţii numerice f, definită pe o submulţime D din $\mathbf{R}$ printr-o funcţie vectorială F, definită pe $f[D]$, este funcţia vectorială definită prin:

$$\overrightarrow{[F \circ f](x)} = \overrightarrow{F(f(x))}.$$

Fie $\mathcal{B}$ o bază a lui E şi fie $f_1, \ldots, f_n$ funcţiile numerice componente ale funcţiei F în $\mathcal{B}$. Funcţiile componente ale funcţiei compuse $F \circ f$ în $\mathcal{B}$ sînt $f_1 \circ f, f_2 \circ f, \ldots, f_n \circ f$.

Exemple. Fie $\mathcal{B}$ o bază a lui $\vec{E}$, spaţiu vectorial pe R de dimensiune 3, astfel că:

$$\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}.$$

I. Fie F funcţia vectorială definită prin:

$$\overrightarrow{F(x)} = \cos^2 x\vec{i} + \sin x\vec{j} + \alpha x\vec{k}.$$

Fie G funcţia vectorială definită prin:

$$\overrightarrow{G(x)} = \sin^2 x\vec{i} - \sin x\vec{j} - \beta x\vec{k}.$$

Avem:

$$\overrightarrow{[F + G](x)} = \vec{i} + (\alpha - \beta)x\vec{k}.$$

II. Fie F funcţia vectorială definită prin:

$$\overrightarrow{F(x)} = \operatorname{ctg} x\vec{i} + \vec{j} + \operatorname{tg} x\vec{k}.$$

Fie f funcţia numerică definită prin:

$$f(x) = \operatorname{tg} x.$$

Avem:

$$\overrightarrow{[f \cdot F](x)} = \vec{i} + \operatorname{tg} x\vec{j} + \operatorname{tg}^2 x\vec{k}.$$

III. Fie F funcţia vectorială definită prin:

$$\overrightarrow{F(x)} = x\vec{i} + x^2\vec{j} + x^3\vec{k}.$$

Fie f funcţia numerică definită prin:

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Se obţine funcţia $G = F \circ f$ definită prin:

$$\overrightarrow{G(x)} = \sqrt{x}\,\vec{i} + x\,\vec{j} + x\sqrt{x}\,\vec{k}.$$

■ FUNCŢIE NUMERICĂ DEFINITĂ PRINTR-UN PRODUS SCALAR

Fie F şi G două funcţii vectoriale de o variabilă reală x, definite pe o submulţime D din $\mathbf{R}$. Se defineşte o funcţie numerică f pe mulţimea D prin:

$$f(x) = \overrightarrow{F(x)} \cdot \overrightarrow{G(x)}.$$

Se scrie: $f = F \cdot G$.

Fie $\mathcal{B}_0$ o bază *ortonormată* a lui $\vec{E}$ şi fie respectiv $f_1, \ldots, f_n$ şi $g_1, \ldots, g_n$ funcţiile componente ale lui F şi G în $\mathcal{B}_0$.

Avem atunci:

$$\overrightarrow{F(x)} \cdot \overrightarrow{G(x)} = f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + \ldots + f_n(x)g_n(x),$$

$$F \cdot G = f_1g_1 + \ldots + f_ng_n.$$

Exemplu. Dacă baza $\mathcal{B}_0$ este ortonormată ($\mathcal{B}_0 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$), dacă F este definită prin:

$$\overrightarrow{F(x)} = x\vec{i} + x^2\vec{j} + x^3\vec{k},$$

şi dacă G este definită prin:

$$\overrightarrow{G(x)} = x^3\vec{i} + x^2\vec{j} + x\vec{k},$$

avem:

$$f(x) = \overrightarrow{F(x)} \cdot \overrightarrow{G(x)} = 3x^4.$$

EXERCIŢII

5.7 Să se demonstreze că aplicaţia care oricărui vector $\vec{u}$ al unui spaţiu vectorial $\vec{E}$ face să-i corespundă aplicaţia liniară $\lambda\vec{u}$ astfel că:

$$\lambda\vec{u} = [x \mapsto x\vec{u}],$$

este un izomorfism dintre spaţiile vectoriale $\vec{E}$ şi $\mathcal{L}(\mathbf{R}, \vec{E})$.

5.8 Fie F şi G două funcţii vectoriale şi fie f şi g două funcţii numerice.
Să se demonstreze că:

$$f(gF) = (fg)F$$

$$(f + g)F = fF + gF$$

$$f(F + G) = fF + fG.$$

Dacă u este funcţia numerică $u = [x \mapsto 1]$, să se demonstreze că:

$$uF = F.$$

5.9 Fie F şi G două funcţii vectoriale de o variabilă reală.
Să se studieze structura mulţimii:

$$\{K \mid \exists_{\mathbf{R}}\alpha;\ \exists_{\mathbf{R}}\beta;\ K = \alpha F + \beta G\}.$$

5.10 Să se demonstreze că mulţimea funcţiilor vectoriale, definite pe o aceeaşi mulţime D, este un spaţiu vectorial pe **R**.

5.11 Să se studieze structura mulţimii $\mathcal{A}(\mathbf{R}, \vec{E})$ a funcţiilor afine de la **R** la $\vec{E}$.

5.12 Fie $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ o bază a unui spaţiu vectorial $\vec{E}$ de dimensiune 2. Fie funcţiile:

$$F = \left[x \mapsto \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\vec{i} + \frac{2x}{1 + x^2}\vec{j}\right],$$

$$f = \left[x \mapsto \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right], \quad g = [x \mapsto 1 + x^2].$$

Să se determine funcţiile: $F \circ f$, $g \cdot F$, $g[F \circ f]$, $[g \cdot F] \circ f$.

Să se compare ultimele două rezultate.

5.13 Fie F şi G două funcţii vectoriale şi f şi g două funcţii numerice.

Să se compare:

a) $$[g \cdot F] \circ f \quad \text{şi} \quad g \cdot [F \circ f];$$

b) $$[F + G] \circ f \quad \text{şi} \quad F \circ f + G \circ f.$$

5.3 CONTINUITATE

5.3.1 Definiţii

Fie F o funcţie vectorială de o variabilă numerică. Fiind dată o submulţime D a lui **R**, vom defini, ca la nr. 1.4.1, imaginea directă a lui D prin F:

$$F[D] = \{\overrightarrow{F(x)},\ x \in D\}.$$

Fiind dată o submulţime B a lui $\vec{E}$, vom defini, ca la nr. 1.4.1, imaginea inversă a lui B prin F:

$$\overset{-1}{F}[B] = \{x \mid \overrightarrow{F(x)} \in B\};$$

$$\forall_{\mathfrak{P}(R)} D \quad F[D] \subset \vec{E};$$

$$\forall_{\mathfrak{P}(\vec{E})} B \quad \overset{-1}{F}[B] \subset \mathbf{R}.$$

Ţinînd seama de aceste definiţii şi prin analogie cu ceea ce am făcut referitor la funcţiile numerice, vom studia mai precis funcţiile vectoriale F de o variabilă reală care satisfac următoarea proprietate $\mathbf{P}_1$, pentru un punct x_0 din domeniul lor de definiţie D:

$\mathbf{P}_1$ Pentru orice vecinătate V a lui $\overrightarrow{F(x_0)}$ în $\vec{E}$, există o vecinătate W a lui x_0 în D astfel că:

$$f[W] \subset V.$$

Orice vecinătate V a lui $\overrightarrow{F(x_0)}$ în $\vec{E}$ conţine o bulă deschisă $\mathcal{B}$ care conţine pe $\overrightarrow{F(x_0)}$ şi prin urmare (exerciţiul nr. 5.6) o bulă deschisă de centru $\overrightarrow{F(x_0)}$ (şi de rază η ($\eta \in \mathbf{R}^{+*}$)).

Orice vecinătate W a lui x_0 în D este intersecţia cu D a unei vecinătăţi W' a lui x_0 în $\mathbf{R}$; W' conţine un interval deschis centrat în x_0:

$$]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\qquad (\varepsilon \in \mathbf{R}^{+*})$$

(bulă deschisă de centru x_0 în $\mathbf{R}$).
Ţinînd seama de aceste proprietăţi, este uşor de demonstrat (exerciţiul nr. 5.14) că proprietatea $\mathbf{P}_1$ echivalează cu proprietatea următoare $\mathbf{P}_2$:

$\mathbf{P}_2$

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon, \quad \exists_{\mathbf{R}^{+*}} \eta, \quad \forall_D x$$

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow ||\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}|| < \varepsilon$$

Este de asemenea uşor de demonstrat (exerciţiul nr. 5.14) că proprietatea $\mathbf{P}_1$ este echivalentă cu proprietatea $\mathbf{P}_3$ următoare:

$\mathbf{P}_3$ Imaginea inversă prin F a oricărei vecinătăţi în E a lui $\overrightarrow{F(x_0)}$ este o vecinătate a lui x_0.

DEFINIŢIA 1 / O funcţie vectorială F de o variabilă numerică este continuă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiţie dacă şi numai dacă una din proprietăţile P_1, P_2 sau P_3 este verificată.

Se observă profunda analogie care există între continuitatea funcţiilor vectoriale de o variabilă reală şi aceea a funcţiilor numerice (despre care am notat de altfel că ar putea fi considerate ca un caz particular al funcţiilor vectoriale).
Se definesc, la fel ca la nr. 1.5.3, noţiunile de continuitate la dreapta şi de continuitate la stînga pentru o funcţie vectorială de o variabilă reală. Lăsăm cititorului grija de a formula aceste definiţii (exerciţiul nr. 5.15).

Exemple. **I.** Fie funcţia F de la $\mathbf{R}$ la $\vec{E}$ definită prin:

$$\overrightarrow{F(x)} = \vec{u} \text{ (unde } \vec{u} \text{ este un vector din } \vec{E}\text{)}.$$

Orice vecinătate a lui $\vec{u}$ în $\vec{E}$ conţine $\vec{u}$. Imaginea inversă prin F a unei asemenea vecinătăţi este $\mathbf{R}$ în întregime, care este, evident, o vecinătate a oricărui număr real x_0.
O funcţie vectorială constantă este deci continuă pentru orice număr real x_0.
II. $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ fiind doi vectori din $\vec{E}$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$, să considerăm funcţia:

$$F = [x \mapsto x\vec{u} + \vec{v}].$$

Fie x_0 un număr real oarecare.
Pentru orice număr real x, avem:

$$\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)} = x\vec{u} + \vec{v} - x_0\vec{u} - \vec{v} = (x - x_0)\vec{u};$$

prin urmare:

$$||\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}|| = |x - x_0| \, ||\vec{u}||.$$

Se deduce că:

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon, \forall_{\mathbf{R}} x \quad |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{||\vec{u}||} \Rightarrow ||\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}|| < \varepsilon.$$

Oricare ar fi numărul real ε pozitiv nenul, am găsit deci un număr pozitiv nenul $\eta = \frac{\varepsilon}{||\vec{u}||}$ astfel că proprietatea P_2 este satisfăcută.
Funcția F este deci continuă în orice punct x_0.
Să observăm că, pentru $\vec{u} = \vec{0}$, sîntem aduși la exemplul I. Se poate deci trage concluzia că orice funcție afină este continuă în orice punct.

5.3.2 Continuitatea funcțiilor numerice asociate

NORMA

Fie F o funcție vectorială de o variabilă reală, continuă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiție D:

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon, \quad \exists_{\mathbf{R}^{+*}} \eta, \quad \forall_D x \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow ||\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}|| < \varepsilon.$$

Din următoarea inegalitate, valabilă pentru orice pereche de vectori $(\vec{u}, \vec{v})$ din $\vec{E}^2$ (nr. 5.1.1):

$$|\,||\vec{u}|| - ||\vec{v}||\,| \leqslant ||\vec{u} - \vec{v}||,$$

se deduce că:

$$|\,||\overrightarrow{F(x)}|| - ||\overrightarrow{F(x_0)}||\,| \leqslant ||\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}||,$$

și că, prin urmare:

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon, \quad \exists_{\mathbf{R}^{+*}} \eta, \quad \forall_D x$$
$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |\,||\overrightarrow{F(x)}|| - ||\overrightarrow{F(x_0)}||\,| < \varepsilon.$$

Se deduce următorul rezultat:

TEOREMĂ / Dacă o funcție vectorială F este continuă într-un punct x_0 din domeniul său de definiție, atunci funcția $f = [x \mapsto ||\overrightarrow{F(x)}||]$ este o funcție numerică continuă în x_0.

Să observăm că reciproca acestei teoreme este falsă. Fie într-adevăr funcția vectorială definită prin:

$$x \in]-\infty, 0] \Leftrightarrow \overrightarrow{F(x)} = \vec{u} \quad (\vec{u} \in \vec{E} \text{ și } \vec{u} \neq \vec{0});$$
$$x \in [0, +\infty[\Leftrightarrow \overrightarrow{F(x)} = -\vec{u}.$$

Avem atunci, pentru orice număr real x: $||\overrightarrow{F(x)}|| = ||\vec{u}||$.
Funcția $f = [x \mapsto ||\overrightarrow{F(x)}||]$ este constantă, deci continuă pentru orice număr real. Din contră funcția vectorială F este vizibil discontinuă în $x_0 = 0$ (căci $\vec{u} \neq \vec{0}$).

FUNCȚII COMPONENTE

Fie F o funcție vectorială definită pe D și fie $\mathscr{B}_0$ o bază ortonormată a spațiului vectorial euclidian $\vec{E}$, astfel că:

$$\mathscr{B}_0 = \{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}.$$

Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funcţiile numerice componente ale funcţiei F în $\mathscr{B}_0$:

$$\forall_D x \quad \overrightarrow{F(x)} = f_1(x)\vec{i}_1 + f_2(x)\vec{i}_2 + \ldots + f_n(x)\vec{i}_n.$$

Să reamintim că, într-o bază ortonormată, dacă:

$$\vec{V} = \alpha_1\vec{i}_1 + \alpha_2\vec{i}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{i}_n,$$

avem:

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2},$$

şi prin urmare oricare ar fi numărul întreg i cuprins între 1 şi n:

$$\|\vec{V}\| \geqslant \sqrt{\alpha_i^2}$$

adică:

$$\|\vec{V}\| \geqslant |\alpha_i|.$$

Să presupunem că F este continuă într-un punct x_0 din D. Avem atunci:

$$\forall_{\mathbf{R}_+^*} \varepsilon, \quad \exists_{\mathbf{R}_+^*} \eta, \quad \forall_D x \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow \|\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}\| < \varepsilon$$

Se obţine:

$$\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)} = (f_1(x) - f_1(x_0))\vec{i}_1 + \ldots + (f_n(x) - f_n(x_0))\vec{i}_n.$$

Prin urmare, conform proprietăţilor pe care le-am reamintit, avem, pentru orice j întreg cuprins între 1 şi n:

$$|f_j(x) - f_j(x_0)| \leqslant \|\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}\|.$$

Se poate deci trage concluzia:

$$\forall_{\mathbf{R}_+^*} \varepsilon, \quad \exists_{\mathbf{R}_+^*} \eta, \quad \forall_D x \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon,$$

ceea ce dovedeşte continuitatea funcţiei componente f_j, în punctul x_0.

Toate funcţiile componente într-o bază ortonormată $\mathscr{B}_0$ ale unei funcţii vectoriale F, continue în x_0, sînt continue în x_0.

Fie acum $\mathscr{B}$ o bază oarecare a lui $\vec{E}$ şi fie $\mathscr{B}_0$ o bază ortonormată (există cel puţin una, Geometrie Anul I—CDE, numerele 8.3.2 şi 8.3.3).

Fie $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ funcţiile componente ale lui F în $\mathscr{B}$ şi fie $f_1, \ldots, f_n$ funcţiile componente ale lui F în $\mathscr{B}_0$.

Vom admite atunci că există numere reale α_i^j astfel că:

$$i \in \{1, \ldots, n\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\varphi_i = \alpha_i^1 f_1 + \alpha_i^2 f_2 + \ldots + \alpha_i^n f_n.$$

Funcţiile f_j fiind continue în x_0 pentru orice i şi orice combinaţie de funcţii continue fiind continuă (nr. 1.6.2), se deduce că funcţiile φ_i sînt continue în x_0. Se poate deci trage concluzia: Dacă F este o funcţie vectorială continuă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiţie D, şi dacă $\mathscr{B}$ este o bază oarecare a lui $\vec{F}$, funcţiile componente ale lui F în $\mathscr{B}$ sînt atunci continue

în x_0. *Reciproc,* să presupunem că funcțiile numerice componente $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ale lui F într-o bază $\mathcal{B}$ sînt continue în x_0.
Avem atunci, pentru orice indice j cuprins între 1 și n:

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon_j, \quad \exists_{\mathbf{R}^{+*}} \eta_j, \quad \forall_D x \ |x - x_0| < \eta_j \Rightarrow |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon_j$$

Pe de altă parte și conform proprietății (nr. 5.1.1):

$$\forall_{\vec{E}} \vec{u}, \quad \forall_{\vec{E}} \vec{v} \quad ||\vec{u} + \vec{v}|| \leqslant ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||,$$

avem:

$$||\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}|| \leqslant |f_1(x) - f_1(x_0)| \, ||\vec{i}_1|| + \ldots + |f_n(x) - f_n(x_0)| \, ||\vec{i}_n||.$$

Fie ε un număr real pozitiv dat.

Să punem: $\varepsilon_j = \dfrac{\varepsilon}{n \, ||\vec{i}_j||}$.

Există atunci, pentru orice indice j cuprins între 1 și n, un număr real pozitiv nenul η_j, astfel că:

$$|x - x_0| < \eta_j \Rightarrow |f_j(x) - f_j(x_0)| < \frac{\varepsilon}{n \, ||\vec{i}_j||};$$

prin urmare: $|x - x_0| < \eta_j \Rightarrow |f_j(x) - f_j(x_0)| \, ||\vec{i}_j|| < \dfrac{\varepsilon}{n}$.

Dacă se pune: $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$,

se deduce:

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow \forall_{\{1, \ldots, n\}} j \quad |f_j(x) - f_j(x_0)| \, ||\vec{i}_j|| < \frac{\varepsilon}{n},$$

dacă: $|x - x_0| < \eta$, rezultă:

$$||\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}|| \leqslant \varepsilon_1 ||\vec{i}_1|| + \ldots + \varepsilon_n ||\vec{i}_n||,$$

deci:

$$||\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}|| \leqslant n \frac{\varepsilon}{n}.$$

Se poate trage concluzia:

$$\forall_{\mathbf{R}^{+*}} \varepsilon, \quad \exists_{\mathbf{R}^{+*}} \eta, \quad \forall_D x \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow ||\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}|| < \varepsilon$$

Funcția F este continuă în x_0.
Se poate deci enunța următorul rezultat fundamental:

TEOREMĂ / O funcție vectorială F este continuă într-un punct x_0 din domeniul său de definiție, dacă și numai dacă există o bază $\mathcal{B}_1$ a lui $\vec{E}$ în care toate funcțiile numerice componente ale lui F sînt continue în x_0.

Funcțiile componente ale lui F într-o bază oarecare $\mathcal{B}$ a lui $\vec{E}$ sînt atunci continue în x_0.

O funcție vectorială F este discontinuă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiție, dacă și numai dacă există o bază $\mathscr{B}$ a lui $\vec{E}$ în care există o componentă a lui F necontinuă în x_0. Acesta este atunci cazul pentru orice bază a lui $\vec{E}$.

Să observăm că anumite componente ale lui F într-o bază $\mathscr{B}$ pot fi continue în x_0, dar că, dacă F este discontinuă, una cel puțin din aceste funcții componente este discontinuă în x_0.

Exemple. I. Fie funcția vectorială:

$$F = [x \mapsto x\vec{u} + |x|\vec{v}],$$

unde $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt doi vectori independenți din $\vec{E}$.

În orice bază $\mathscr{B}$ care conține pe $\vec{u}$ și $\vec{v}$ (există o asemenea bază), funcțiile componente sînt toate continue. Acestea sînt:

$$[x \mapsto x],\ [x \mapsto |x|] \text{ și } [x \mapsto 0] \text{ (cu vectorii bazei diferiți de } \vec{u} \text{ și } \vec{v}).$$

II. În aceleași condiții, funcția $G = [x \mapsto E(x)\vec{u} + x\vec{v}]$ este discontinuă pentru orice număr întreg (componenta ei pe vectorul $\vec{u}$ este discontinuă). Toate componentele funcției G pe ceilalți vectori ai bazei $\mathscr{B}$ sînt continue.

5.3.3 Teoreme asupra funcțiilor continue

Din teorema fundamentală de la nr. 5.3.2 și din proprietățile funcțiilor numerice continue (nr. 1.1.6), se pot deduce următoarele rezultate:

TEOREMĂ / Fie F și G două funcții vectoriale continue într-un punct x_0 din domeniul lor comun de definiție D. Atunci:

1 Suma $F + G$ este continuă în x_0.

2 Pentru orice număr real λ, funcția λF este continuă în x_0.

3 Pentru orice funcție numerică f, continuă în x_0, funcția $f \cdot F$ este continuă în x_0.

4 Pentru orice funcție numerică f, continuă în x_0, funcția $F \circ f$ este continuă în x_0.

5 Funcția numerică $F \cdot G$, astfel că:

$$F \cdot G = [x \mapsto \overrightarrow{F(x)} \cdot \overrightarrow{G(x)}],$$

este continuă în x_0.

EXERCIŢII

5.14 Fie F o funcţie vectorială şi x_0 un punct din domeniul ei de definiţie. Să se demonstreze că următoarele proprietăţi sînt echivalente (nr. 5.3.1).

P_1 Pentru orice vecinătate V a lui $\overrightarrow{F(x_0)}$ în $\vec{E}$, există o vecinătate W a lui x_0 în D astfel că:

$$f[W] \subset V.$$

$$P_2 \; \forall_{\mathbf{R}_+^*} \cdot \varepsilon, \quad \exists_{\mathbf{R}_+^*} \cdot \eta, \quad \forall_D x \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow \|\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}\| < \varepsilon$$

P_3 Imaginea inversă prin F a oricărei vecinătăţi a lui $\overrightarrow{F(x_0)}$ în $\vec{E}$ este o vecinătate a lui x_0.

5.15 Să se exprime diversele definiţii (echivalente) ce se pot da pentru continuitatea la dreapta (şi la stînga) a unei funcţii vectoriale F într-un punct x_0 din domeniul ei de definiţie.
Să se demonstreze că o funcţie F, continuă la dreapta şi la stînga într-un punct x_0, este continuă în x_0.

5.16 Să se dea exemple de funcţii vectoriale discontinue într-un punct x_0, pentru care funcţia „normă" asociată este continuă în x_0.

Fie $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bază a unui spaţiu vectorial $\vec{E}$ pe **R**, *cu trei dimensiuni. Să se studieze continuitatea următoarelor funcţii vectoriale în punctul x_0 precizat:*

5.17 $F = [x \mapsto \cos x\, \vec{i} + \sin x\, \vec{j} + x\, \vec{k}]$; $x_0 = 2\pi$.

5.18 $F = [x \mapsto x\, \vec{i} + |x^3|\, \vec{j} + E(x)\, \vec{k}]$; $x_0 = 0$.

(Se reaminteşte că $E(x)$ înseamnă partea întreagă a lui x, adică cel mai mare număr întreg mai mic decît sau egal cu x.)

5.19 $F = \left[x \mapsto \dfrac{x}{1 - x}\, \vec{i} + \cos x\, \vec{j} + \sin x\, \vec{k}\right]$, cu $\overrightarrow{F(1)} = \vec{0}$; $x_0 = 1$.

5.20 Să se găsească două funcţii vectoriale de la **R** la un spaţiu vectorial $\vec{E}$ de dimensiune 2 pe **R**, astfel ca funcţia numerică f, definită mai jos, să fie definită pe produsul scalar al lui F şi G:

$$f(x) = 2\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + |x|}} + \frac{\sqrt{|1 - |x||}}{\operatorname{tg} x}\sqrt{3} - 1 - \sqrt{\frac{|1 - |x||}{1 + |x|}}.$$

(Se va putea începe determinîndu-se baza lui $\vec{E}$ în care se va lucra.)

5.4 LIMITE DE FUNCŢII VECTORIALE

5.4.1 Definiţie

Fie F o aplicaţie a unei submulţimi D a lui **R** la un spaţiu vectorial euclidian $\vec{E}$. Fie x_0 un punct de acumulare în $\overline{\mathbf{R}}$ al mulţimii D (nr. 2.1.2). Vom studia, cum am făcut-o pentru funcţiile numerice (capitolul 2), limita lui F în punctul x_0. Vom da imediat definiţia referitoare la un element x_0 din $\overline{\mathbf{R}}$, adică la un element eventual infinit (nereal).

DEFINIȚIE / **Fie F o funcție definită pe o submulțime D de numere reale și fie x_0 un punct de acumulare al lui D în $\bar{\mathbf{R}}$. Un element $\vec{V}$ al lui $\vec{E}$ este limita funcției F în x_0, dacă și numai dacă imaginea inversă prin F a oricărei vecinătăți a lui $\vec{V}$ este o vecinătate în $\bar{\mathbf{R}}$ a lui x_0, eventual fără x_0.**

Observații. — 1 Fie F o funcție vectorială astfel că: $\lim\limits_{x_0} F = \vec{V}$. Dacă x_0 este real, funcția vectorială F_1, definită prin:

$$x \in [D - \{x_0\}] \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{F_1(x)} = \overrightarrow{F(x)}, \\ \overrightarrow{F_1(x_0)} = \vec{V}, \end{cases}$$

este continuă în x_0.
Aceasta este observația care servise drept suport la introducerea noțiunii de limită în cazul funcțiilor numerice (nr. 2.1.3).
2 În mulțimea punctelor de acumulare ale lui $\vec{E}$, elementele infinite nu pot fi privilegiate spre deosebire de numerele reale.
3 Se definesc, la fel ca la nr. 2.1.3, noțiunile de limită la stînga și de limită la dreapta pentru o funcție vectorială într-un punct x_0.

5.4.2 Limite de funcții numerice asociate

Fie F o funcție vectorială definită pe o mulțime D de numere reale. Fie x_0 un punct de acumulare din D.
Să presupunem că limita lui F în x_0 este un vector $\vec{V}$:

$$\lim_{x_0} F = \vec{V}.$$

în aceste condiții, să studiem limita funcțiilor numerice asociate.

■ FUNCȚIE NORMĂ

După observația 1 de la nr. 5.4.1 și teoremelor asupra funcțiilor continue, avem, dacă x_0 este un număr real:

$$\lim_{x_0} \|F\| = \|\vec{V}\|.$$

Această proprietate se extinde imediat la un element x_0 infinit (exercițiul nr. 5.21).

TEOREMA / **Fie F o funcție vectorială și x_0 un punct de acumulare din**
1 **domeniul ei de definiție.**

Dacă: $\lim\limits_{x_0} F = \vec{V}$,

atunci: $\lim\limits_{x_0} [x \to \|\overrightarrow{F(x)}\|] = \vec{V}$.

Observație importantă. — Reciproca acestei teoreme este falsă. Într-adevăr, putem avea simultan:

$$\lim_{x_0} [x \mapsto \|\overrightarrow{F(x)}\|] = \vec{V},$$

și:

$$\lim_{x_0} F = \vec{W}$$

(cu: $\vec{W} \neq \vec{V}$ și $\|\vec{V}\| = \|\vec{W}\|$).

Totuși, vectorul $\vec{0}$ fiind singurul de normă 0, dacă $\vec{V} = \vec{0}$, reciproca teoremei este adevărată și ne vom servi adesea de această observație:

TEOREMA 2 / Fie F o funcție vectorială și x_0 un punct de acumulare din domeniul ei de definiție. Avem atunci:

$$\lim_{x_0} F = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{x_0} [x \to \|\overrightarrow{F(x)}\|] = 0.$$

■ FUNCȚII COMPONENTE ÎNTR-O BAZĂ $\mathcal{B}$

Fie $\mathcal{B}$ o bază a lui $\vec{E}$ și fie $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funcțiile numerice componente ale lui F în baza $\mathcal{B}$.

Fie, pe de altă parte, $l_1, l_2, \ldots, l_n$ componentele în $\mathcal{B}$ ale vectorului limită $\vec{V}$. Conform observației 1 de la nr. 5.4.1 și proprietăților referitoare la funcțiile numerice asociate unei funcții vectoriale continue (nr. 5.3.2), se poate trage concluzia, dacă x_0 este un număr real că:

$$\lim_{x_0} f_1 = l_1,$$
$$\vdots$$
$$\lim_{x_0} f_n = l_n.$$

Reciproc, dacă toate funcțiile componente ale lui F într-o bază $\mathcal{B}$ admit limite reale (finite) $l_1, \ldots, l_n$, funcțiile φ_i definite prin:

$$\varphi_i(x) = f_i(x) \Leftrightarrow x \neq x_0,$$
$$\varphi_i(x_0) = l_i,$$

sînt continue în x_0; prin urmare (nr. 5.3.2), funcția F_1, ale cărei componente în $\mathcal{B}$ sînt funcțiile φ_i, este continuă în x_0. Or, funcția F_1 este definită prin:

$$\overrightarrow{F_1(x)} = \overrightarrow{F(x)} \Leftrightarrow x \neq x_0,$$
$$\overrightarrow{F_1(x_0)} = \vec{V}.$$

Avem deci (Observația 1 de la nr. 5.4.1):

$$\lim_{x_0} F = \vec{V}.$$

Această proprietate se extinde cu uşurinţă la un element x_0 infinit (exerciţiul nr. 5.22). Se poate enunţa:

TEOREMA 3 **O funcţie vectorială F admite ca limită în punctul x_0 vectorul $\vec{V}$, dacă şi numai dacă funcţiile componente ale lui F într-o bază $\mathcal{B}$ admit respectiv ca limite în x_0 componentele lui $\vec{V}$ în $\mathcal{B}$.**

Observaţii. — 1 Această proprietate este adevărată simultan pentru toate bazele lui $\vec{E}$ (nr. 5.3.2).
2 Pentru ca o funcţie vectorială F să nu admită limită în x_0, este suficient ca una din funcţiile componente ale lui F într-o bază $\mathcal{B}$ din $\vec{E}$ să nu admită limită în x_0 sau să admită în x_0 o limită infinită care nu poate fi o componentă în $\mathcal{B}$ a unui vector $\vec{V}$ din $\vec{E}$.

Exemple. I. Fie $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bază a unui spaţiu vectorial euclidian de dimensiune 3 şi fie F funcţia definită prin:

$$\overrightarrow{F(x)} = (1 - x)\vec{i} + (1 - x^2)\vec{j} + (1 - x^3)\vec{k}.$$

Avem:

$$\lim_{0} F = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

II. Fie $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bază a unui spaţiu vectorial euclidian de dimensiune 3 şi fie F funcţia definită prin:

$$\overrightarrow{F(x)} = \frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1}{x^2}\vec{j} + \frac{1}{x^3}\vec{k}.$$

Avem:

$$\lim_{+\infty} F = \vec{0},$$

$$\lim_{-\infty} F = \vec{0}.$$

III. Fie $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bază ortonormată a unui spaţiu vectorial euclidian de dimensiune 3 şi fie F funcţia definită prin:

$$\overrightarrow{F(x)} = \cos^2 x\,\vec{i} + \cos x \sin x\,\vec{j} + \sin x\,\vec{k}.$$

Avem:

$$\lim_{\pi/2} F = \vec{k}, \quad \lim_{0} F = \vec{i},$$

$$\lim_{\pi/4} F = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}.$$

Pe de altă parte:

$$\|\overrightarrow{F(x)}\| = \sqrt{\cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x} = 1;$$

deci:

$$\lim_{\pi/2} \|F\| = 1 = \|\vec{k}\|,$$

$$\lim_{0} \|F\| = 1 = \|\vec{i}\|,$$

$$\lim_{\pi/4} \|F\| = \left\| \frac{1}{2} (\vec{i} + \vec{j}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k} \right\| = 1.$$

Aceste proprietăţi se extind fără dificultate la limitele la stînga şi la dreapta într-un punct x_0.

5.4.3 Proprietăţi ale limitelor

Prin aplicarea teoremei de la nr. 5.4.2 şi a proprietăţilor limitelor de funcţii numerice, se pot enunţa următoarele teoreme:

TEOREMA 1 / **O funcţie vectorială F este continuă într-un punct x_0 neizolat din domeniul ei de definiţie dacă şi numai dacă:**

$$\lim_{x_0} F = \overrightarrow{F(x_0)}.$$

TEOREMA 2 / **Dacă o funcţie vectorială F admite o limită într-un punct de acumulare x_0 din domeniul ei de definiţie, atunci această limită este unică.**

O demonstraţie directă a acestei proprietăţi este considerată în exerciţiul nr. 5.23.

TEOREMA 3 / **Fie F şi G două funcţii vectoriale care admit limitele $\vec{V}$ şi $\vec{W}$ într-un punct de acumulare x_0 din domeniul lor de definiţie:**

$$\lim_{x_0} F = \vec{V}, \qquad \lim_{x_0} F = \vec{W}.$$

Avem atunci:

1 $\lim\limits_{x_0} [F + G] = \vec{V} + \vec{W}.$

2 $V_R\lambda \lim\limits_{x_0} \lambda F = \lambda\vec{V}.$

3 $\lim\limits_{x_0} [F \cdot G] = \vec{V} \cdot \vec{W}$ (produs scalar).

4 Dacă, mai mult, f este o funcţie numerică definită pe o mulţime D de numere reale care admit pe x_0 ca punct de acumulare şi astfel că:

$$\lim_{x_0} f = l,$$

avem atunci:

$$\lim_{x_0} f \cdot F = l\vec{V}.$$

TEOREMA / Fie F o funcție vectorială care admite într-un punct de acumulare
4 **l_0 din domeniul ei de definiție o limită $\vec{V}$ și fie f o funcție numerică care admite într-un punct de acumulare x_0 din domeniul ei de definiție limita l_0:**

$$\lim_{l_0} F = \vec{V}, \quad \lim_{x_0} f = l_0,$$

avem atunci:

$$\lim_{x_0} F \circ f = \vec{V}.$$

Exemple. Fie $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bază a unui spațiu vectorial euclidian de dimensiune 3.
I. Fie funcțiile:

$$F = \left[x \mapsto \frac{\sin x}{x}\vec{i} + \frac{\sin 2x}{x}\vec{j} + \frac{\sin 3x}{x}\vec{k}\right],$$

$$G = [x \mapsto \sqrt{1+x}\,\vec{i} + x\vec{j} + (x-1)\vec{k}].$$

O este punctul de acumulare al domeniilor de definiție ale lui F și G. Avem:

$$\lim_{0} F = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},$$

$$\lim_{0} G = \vec{i} - \vec{k};$$

deci:

$$\lim_{0} [F + G] = 2(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}).$$

II. Fie funcțiile:

$$F_1 = \left[x \mapsto \frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1+2x}{1+x}\vec{j} + \frac{1+3x}{1+x}\vec{k}\right],$$

$$F_2 = \left[x \mapsto 2\vec{i} + \frac{3}{x}\vec{j} + \frac{x}{1-x}\vec{k}\right],$$

$$F_3 = \left[x \mapsto \frac{1}{x^2}\vec{i} + \frac{x^2+1}{x^2}\vec{j} + \frac{x^2}{x^2+4}\vec{k}\right].$$

Avem:

$$\lim_{+\infty} F_1 = 2\vec{j} + 3\vec{k},$$

$$\lim_{+\infty} F_2 = 2\vec{i} - \vec{k},$$

$$\lim_{+\infty} F_3 = \vec{k},$$

$$\lim_{+\infty} [2F_1 + 2F_2 - 4F_3] = 4(\vec{i} + \vec{j}).$$

(Avem aceleași rezultate în $-\infty$.)
III. Fie funcțiile:

$$F = \left[x \mapsto \frac{\sin x}{x}\vec{i} + \frac{\sin 2x}{x}\vec{j} + \frac{\sin 3x}{x}\vec{k}\right],$$

$$f = \left[x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{2}\right].$$

Avem:
$$\lim_0 F = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},$$

$$\lim_0 f = \frac{1}{2};$$

deci:
$$\lim_0 f \cdot F = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}.$$

IV. Fie funcţiile:
$$F = \left[x \mapsto \frac{\sin x}{x}\vec{i} + \frac{\sin 2x}{x}\vec{j} + \frac{\sin 3x}{x}\vec{k}\right],$$

$$G = [x \mapsto \sqrt{1+x}\,\vec{i} + x\vec{j} + (1+x)\vec{k}].$$

Să presupunem în afară de aceasta că baza $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ este ortonormată.
Avem atunci:
$$\lim_0 F = \vec{V} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},$$

$$\lim_0 G = \vec{W} = \vec{i} + \vec{k};$$

deci:
$$\lim_0 F \cdot G = \vec{V} \cdot \vec{W} = 1 + 3 = 4 \text{ (bază ortonormată).}$$

V. Fie funcţiile:
$$F = \left[x \mapsto \frac{\sin x}{x}\vec{i} + \frac{\sin 2x}{x}\vec{j} + \frac{\sin 3x}{x}\vec{k}\right],$$

$$f = \left[x \mapsto \frac{1}{x}\right].$$

Avem:
$$\lim_{+\infty} f = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_0 F = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},$$

$$F \circ f = \left[x \mapsto x \sin\frac{1}{x}\vec{i} + x \sin\frac{2}{x}\vec{j} + x \sin\frac{3}{x}\vec{k}\right];$$

deci:
$$\lim_{+\infty} F \circ f = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Să observăm că, în studiul funcţiilor numerice componente, se pot întîlni forme nedeterminate (nr. 2.3.4).

EXERCIŢII

5.21 Fie F o funcţie vectorială definită pe o mulţime D, pentru care $+\infty$ este punct de acumulare şi astfel că $\lim_{+\infty} F = \vec{V}$.
Să se demonstreze că:
$$\lim_{+\infty} [x \mapsto \|\overrightarrow{F(x)}\|] = \|\vec{V}\|.$$

(Se pot folosi proprietăţile normelor date la nr. 5.1.1.)

5.22 Fie F o funcţie vectorială ale cărei componente într-o bază $\mathcal{B}$ sînt funcţiile $f_i(i \in I)$. Să se demonstreze că:

$$\lim_{+\infty} F = \vec{V} \Leftrightarrow \forall_I i \quad \lim_{+\infty} f_i = \alpha_i,$$

unde α_i $(i \in I)$ sînt componentele lui $\vec{V}$ în $\mathcal{B}$.

5.23 Să se demonstreze direct că, dacă o funcţie vectorială F admite o limită într-un punct x_0, această limită este unică.

5.24 Fie $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bază a spaţiului vectorial $\vec{E}$.
Fie I, J, K trei funcţii vectoriale definite prin:

$$\overrightarrow{I(x)} = x\vec{i}, \quad \overrightarrow{J(x)} = x\vec{j}, \quad \overrightarrow{K(x)} = x\vec{k}.$$

1° Pentru ce valori ale lui x vectorii $\overrightarrow{I(x)}, \overrightarrow{J(x)}, \overrightarrow{K(x)}$ formează o bază a lui $\vec{E}$? Fie $\mathcal{B}_x$ această bază cînd există.
2° Fie F funcţia vectorială definită prin:

$$\overrightarrow{F(x)} = x\overrightarrow{I(x)} + x^2\overrightarrow{J(x)} + x^3\overrightarrow{K(x)}.$$

Să se exprime F în baza $\mathcal{B}_x$.
3° Să se studieze limita lui F pentru $x_0 = 0$.
4° Ce se poate spune despre „componentele" lui F în baza $\mathcal{B}_x$ atunci cînd x este în vecinătatea lui 0? (Să se studieze limitele acestor funcţii pentru $x_0 = 0$). Permit aceste rezultate să se tragă o concluzie în privinţa limitei lui F? De ce?

5.5 DIFERENŢIALĂ. VECTOR DERIVAT ÎNTR-UN PUNCT

5.5.1 Funcţii vectoriale tangente

Şi aici, în ceea ce priveşte funcţiile vectoriale de o variabilă reală, vom dezvolta o teorie analoagă cu aceea pe care am expus-o (nr. 3.1) referitor la funcţiile numerice. Vom da mai întîi următoarea definiţie:

DEFINIŢIE / Două funcţii F şi G sînt tangente într-un punct x_0 din domeniul lor comun de definiţie, dacă şi numai dacă:

$$\lim_{x_0}\left[x \to \frac{\|\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{G(x)}\|}{x - x_0}\right] = 0.$$

Avem:

$$\left|\frac{\|\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{G(x)}\|}{x - x_0}\right| = \left\|\frac{\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{G(x)}}{x - x_0}\right\|.$$

Dacă:

$$\lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{\|\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{G(x)}\|}{x - x_0}\right] = 0,$$

atunci:

$$\lim_{x_0}\left[x \mapsto \left\|\frac{\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{G(x)}}{x - x_0}\right\|\right] = 0;$$

prin urmare (nr. 5.4.2, Observație):

$$\lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{G(x)}}{x - x_0}\right] = \vec{0}.$$

Reciproc, dacă:

$$\lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{G(x)}}{x - x_0}\right] = \vec{0},$$

avem evident:

$$\lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{\|\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{G(x)}\|}{|x - x_0|}\right] = 0.$$

Prin urmare, două funcții F și G sînt tangente într-un punct x_0 din domeniul lor de definiție, dacă și numai dacă:

$$\lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{G(x)}}{x - x_0}\right] = \vec{0}.$$

Fie ε funcția vectorială definită prin:

$$\overrightarrow{\varepsilon(x)} = \frac{\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{G(x)}}{x - x_0}.$$

Funcțiile F și G sînt tangente în x_0, dacă și numai dacă, există o funcție vectorială ε astfel că:

$$\overrightarrow{F(x)} = \overrightarrow{G(x)} + (x - x_0)\overrightarrow{\varepsilon(x)},$$

și:

$$\lim_{x_0} \varepsilon = \vec{0}.$$

Fie $\mathcal{F}_{x_0}$ mulțimea funcțiilor vectoriale de la $\mathbf{R}$ la $\vec{E}$, definite în x_0. Ca și în cazul funcțiilor numerice, relația de „tangentă în x_0", definită în $\mathcal{F}_{x_0}$, este o relație de echivalență. În particular, să observăm că, dacă F și G sînt tangente în x_0, atunci $F(x_0) = G(x_0)$.

5.5.2 Funcție afină tangentă la o funcție F Diferențială

DEFINIȚIA 1 / O funcție vectorială F este diferențiabilă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiție, dacă și numai dacă, există o aplicație afină de la $\mathbf{R}$ la $\vec{E}$ tangentă la F în x_0.

Fie Φ o aplicaţie afină de la **R** la $\vec{E}$. Există doi vectori $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ ai lui $\vec{E}$ astfel că:

$$\forall_{\mathbf{R}} x \quad \overrightarrow{\Phi(x)} = x\vec{u} + \vec{v}.$$

Dacă, mai mult, Φ este tangentă în x_0 la F, avem în mod necesar:

$$\overrightarrow{\Phi(x_0)} = x_0\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{F(x_0)};$$

prin urmare: $\vec{v} = \overrightarrow{F(x_0)} - x_0\vec{u}$;

deci:
$$\forall_{\mathbf{R}} x \quad \overrightarrow{\Phi(x)} = (x - x_0)\vec{u} + \overrightarrow{F(x_0)}.$$

Fie Φ' o altă funcţie afină tangentă la F în x_0. Avem de asemenea:

$$\exists_{\vec{E}} \vec{u}', \quad \forall_{\mathbf{R}} x \quad \overrightarrow{\Phi'(x)} = (x - x_0)\vec{u}' + \overrightarrow{F(x_0)}.$$

Funcţiile Φ şi Φ' sînt tangente în x_0 (nr. 5.5.1).
Deci:

$$\lim_{x_0} \left[x \mapsto \frac{\overrightarrow{\Phi(x)} - \overrightarrow{\Phi'(x)}}{x - x_0} \right] = \vec{0};$$

prin urmare:
$$\lim_{x_0} \, [x \mapsto \vec{u} - \vec{u}'] = \vec{0}.$$

Dar:
$$\lim_{x_0} \, [x \mapsto \vec{u} - \vec{u}'] = \vec{u} - \vec{u}';$$

deci:
$$\vec{u} = \vec{u}'$$

şi, pentru orice x:

$$\overrightarrow{\Phi(x)} = \overrightarrow{\Phi'(x)}.$$

Se poate deci enunţa:

TEOREMA / Dacă o funcţie F este diferenţiabilă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiţie, atunci funcţia afină Φ tangentă la F în x_0 este unică şi de forma:

$$\Phi = [x \mapsto (x - x_0)\, \vec{u} + \overrightarrow{F(x_0)}].$$

Această funcţie afină Φ, tangentă la F în x_0 este astfel că există o aplicaţie liniară u de la **R** la $\vec{E}$ astfel că:

$$\overrightarrow{\Phi(x)} = \overrightarrow{u(x - x_0)} + \overrightarrow{F(x_0)}.$$

Această aplicaţie u este *aplicaţia diferenţială* a lui F în x_0:

$$u = D(F, x_0).$$

DEFINIȚIA / Dacă o funcție vectorială F este diferențiabilă într-un punct x_0
2 din domeniul ei de definiție, există o aplicație liniară u de la R la E astfel că aplicația afină $\Phi = [x \mapsto \overrightarrow{u(x - x_0)} + \overrightarrow{F(x_0)}]$ este aplicația tangentă la F în x_0.
Aplicația liniară u este aplicația diferențială a lui F în x_0.

5.5.3 Vector derivat

Spațiile vectoriale $\mathcal{L}(\mathbf{R}, \vec{E})$ și $\vec{E}$ sînt izomorfe (nr. 5.2.1). Prin urmare orice aplicație liniară de la R la $\vec{E}$ este caracterizată printr-un vector al lui $\vec{E}$. În particular, aplicația diferențială a unei funcții F într-un punct x_0 (în care ea este diferențiabilă) este caracterizată printr-un vector pe care-l vom numi *vector derivat* al lui F în punctul x_0. Fie $\vec{u}$ acest vector. Avem:

$$\overrightarrow{\Phi(x)} = (x - x_0) \cdot \vec{u} + \overrightarrow{F(x_0)},$$

$$\lim_{x_0} \left[x \mapsto \frac{\overrightarrow{\Phi(x)} - \overrightarrow{F(x)}}{x - x_0}\right] = \vec{0},$$

$$\lim_{x_0} \left[x \mapsto \vec{u} - \frac{\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}}{x - x_0}\right] = \vec{0}.$$

Prin urmare, prin aplicarea teoremelor asupra limitelor:

$$\lim_{x_0} \left[x \mapsto \frac{\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}}{x - x_0}\right] = \vec{u}.$$

Reciproc, dacă această limită există, funcția afină Φ este tangentă la F în x_0 și F este diferențiabilă în x_0.

DEFINIȚIE / Fie F o funcție vectorială și x_0 un punct din domeniul ei de definiție. Se spune că F este derivabilă în x_0 dacă și numai dacă limita în x_0 a funcției

$$\left[x \mapsto \frac{\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}}{x - x_0}\right] \text{ există.}$$

Dacă această limită există, vectorul:

$$\vec{u} = \lim_{x_0} \left[x \mapsto \frac{\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}}{x - x_0}\right]$$

este numit vector derivat al lui F în punctul x_0.

Din demonstrația precedentă, rezultă că o funcție vectorială F este diferențiabilă dacă și numai dacă ea este derivabilă.

Fie $\mathcal{B}$ o bază a spațiului vectorial $\vec{E}$ de dimensiune n.

Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n$ componentele în $\mathcal{B}$ ale unei funcții vectoriale F. Să presupunem că F este diferențiabilă într-un punct x_0 din domeniul ei de definiție și fie $\vec{u}$ vectorul derivat al lui F în x_0. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ componentele lui $\vec{u}$ în $\mathcal{B}$.

Componentele $\varphi_i(x)$ ale vectorului $\frac{\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}}{x - x_0}$ sînt date prin:

$$\varphi_i(x) = \frac{f_i(x) - f_i(x_0)}{x - x_0}.$$

(Aceasta defineşte funcţiile componente în $\mathscr{B}$ ale funcţiei $\left[x \mapsto \frac{\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}}{x - x_0}\right]$.
Conform proprietăţilor limitelor, avem:

$$\lim_{x_0} \varphi_i = \alpha_i$$

$$\lim_{x_0} \varphi_i = \lim_{x_0} \left[x \mapsto \frac{f_i(x) - f_i(x_0)}{x - x_0}\right] = f_i'(x_0).$$

Se deduce următoarea:

TEOREMĂ / Componentele într-o bază $\mathscr{B}$ a vectorului derivat în x_0 ale unei funcţii vectoriale F derivabile în x_0 sînt derivatele în x_0 ale funcţiilor numerice, componente ale lui F în $\mathscr{B}$.

Exemple. I. Fie $\vec{V}$ un vector al lui $\vec{E}$. Fie F funcţia: $F = [x \mapsto \vec{V}]$. Fie x_0 un număr real oarecare. Avem, pentru orice număr real x:

$$\frac{\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}}{x - x_0} = \vec{0}.$$

Vectorul derivat al lui F în x_0 este deci vectorul $\vec{0}$.

II. Fie $\vec{V}$ şi $\vec{u}$ doi vectori ai lui $\vec{E}$. Fie G funcţia:

$$G = [x \mapsto x\vec{u} + \vec{V}].$$

Funcţia G este o funcţie afină. Este deci propria ei funcţie afină tangentă şi vectorul ei derivat în orice punct x_0 este vectorul $\vec{u}$.
(Acest raţionament este de altfel valabil în exemplul I cu $\vec{u} = \vec{0}$.)

III. Fie $\mathscr{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bază a unui spaţiu vectorial $\vec{E}$ de dimensiune 3. Fie F funcţia vectorială de la $\mathbf{R}$ la $\vec{E}$ definită prin:

$$\overrightarrow{F(x)} = \cos x\vec{i} + \sin x\vec{j} + x\vec{k}.$$

Această funcţie este diferenţiabilă pentru $x_0 = 2\pi$ şi vectorul derivat în x_0 este vectorul $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}.$$

Observaţii. — 1 Pentru ca o funcţie vectorială F de la $\mathbf{R}$ la un spaţiu vectorial $\vec{E}$ să nu fie derivabilă (sau diferenţiabilă) pentru un număr real x_0, este suficient să existe o bază $\mathscr{B}$ în care una din funcţiile componente ale lui F să nu fie derivabilă în x_0. Acelaşi lucru pentru orice bază a lui $\vec{E}$.

2 Dacă funcţia F este derivabilă în x_0, toate funcţiile componente ale lui F, în orice bază $\mathscr{B}$ a lui $\vec{E}$, sînt derivabile în x_0, deci continue în x_0; prin urmare, F este continuă în x_0. Dar anumite funcţii vectoriale pot fi continue în x_0 fără a fi şi derivabile în x_0.

Exemplu. Fie $\mathscr{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bază a unui spaţiu vectorial $\vec{E}$ de dimensiune 3. Funcţia F, definită prin:

$$\overrightarrow{F(x)} = |x|\vec{i} + \cos x\vec{j} + x^3\vec{k},$$

este continuă pentru $x_0 = 0$, dar nu este derivabilă în x_0, căci funcţia valoare absolută nu este derivabilă în x_0.

---

3 Ca şi în cazul funcţiilor numerice, se definesc noţiunile de vector derivat la dreapta şi de vector derivat la stînga într-un punct x_0.

5.6 FUNCŢIE VECTORIALĂ DERIVATĂ

5.6.1 Definiţie

Fie F o funcţie vectorială de o variabilă reală definită pe o mulţime D de numere reale. La anumite elemente x_0 din D, putem face să-i corespundă, cînd există, vectorul derivat $\vec{V}_0$ al funcţiei F în punctul x_0. Se defineşte astfel o funcţie vectorială de o variabilă reală, definită pe o submulţime D' din D.

DEFINIŢIE / Fie o funcţie vectorială F de o variabilă reală. Funcţia care face ca oricărui element x al lui D să-i corespundă vectorul derivat al lui F în x (dacă există), se numeşte funcţia derivată a lui F sau mai simplu derivata lui F.

Funcţia derivată a unei funcţii F se notează F'. Vectorul derivat al lui F în punctul x_0 se notează deci $\overrightarrow{F'(x_0)}$:

$$\overrightarrow{F'x_0)} = \lim_{x_0}\left[x \mapsto \frac{\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}}{x - x_0}\right].$$

Fie D domeniul de definiţie al funcţiei F şi fie D' domeniul de definiţie al funcţiei derivate F'. Avem:

$$D' \subset D.$$

Fie $\mathscr{B}$ o bază a spaţiului vectorial $\vec{E}$ şi fie $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funcţiile numerice componente ale lui F în $\mathscr{B}$. Se ştie (nr. 5.5.3) că funcţiile componente ale vectorului derivat al lui F în punctul x_0 sînt derivatele în x_0 ale componentelor lui F în $\mathscr{B}$. Prin urmare, funcţiile componente în $\mathscr{B}$ ale funcţiei vectoriale derivate a lui F sînt funcţiile derivate ale funcţiilor numerice componente ale lui F în $\mathscr{B}$: dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt funcţiile componente ale lui F în $\mathscr{B}$, atunci $f'_1, f'_2, \ldots, f'_n$ sînt funcţiile componente ale lui F' în $\mathscr{B}$.

Exemple. I. Dacă:

$$F = [x \mapsto \vec{V}],$$

atunci:

$$F' = [x \mapsto \vec{0}] \quad \text{(nr. 5.5.3, Exemplul I).}$$

II. Dacă:

$$F = [x \mapsto x\vec{u} + \vec{v}],$$

atunci:

$$F' = [x \mapsto \vec{u}] \quad \text{(nr. 5.5.3, Exemplul II).}$$

III. Fie $\mathscr{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bază a unui spaţiu vectorial $\vec{E}$ de dimensiune 3. Fie F funcţia de la $\mathbf{R}$ la $\vec{E}$, definită prin:

$$\overrightarrow{F(x)} = \cos x\,\vec{i} + \sin x\,\vec{j} + x\,\vec{k}.$$

Avem:

$$\overrightarrow{F'(x)} = -\sin x\,\vec{i} + \cos x\,\vec{j} + \vec{k}.$$

5.6.2 Reguli de derivare

Ţinînd seama de rezultatele de la nr. 5.6.1 referitoare la funcţiile componente ale unei funcţii derivate (într-o bază $\mathscr{B}$) şi de regulile de derivare ale funcţiilor numerice, se pot enunţa următoarele rezultate a căror demonstraţie (imediată) este lăsată cititorului (exerciţiile 5.25—5.27).

■ DERIVATA UNEI SUME

TEOREMA 1 / Fie F şi G două funcţii vectoriale. Funcţia vectorială derivată a funcţiei $F + G$ este suma funcţiilor derivate ale lui F şi G:

$$[F + G]' = F' + G'.$$

Funcţia derivată a sumei este definită pe intersecţia mulţimilor D'_F şi D'_G unde, respectiv, F şi G sînt derivabile.

■ DERIVATA PRODUSULUI UNEI FUNCŢII VECTORIALE F PRINTR-O FUNCŢIE NUMERICĂ f

TEOREMA 2 / Fie F o funcţie vectorială şi f o funcţie numerică derivabilă. Funcţia derivată a funcţiei $f \cdot F$ este definită prin:

$$(f \cdot F)' = f' \cdot F + f \cdot F'.$$

Ca un caz particular, dacă λ este un număr real, avem:

$$(\lambda F)' = \lambda F'$$

(folosind funcţia numerică $f = [x \mapsto \lambda]$).

■ DERIVATA FUNCŢIEI COMPUSE DINTR-O FUNCŢIE NUMERICĂ f ŞI O FUNCŢIE VECTORIALĂ F

TEOREMA 3 / **Fie F o funcţie vectorială şi f o funcţie numerică. Funcţia derivată a funcţiei $F \circ f$ este definită prin:**

$$(F \circ f)' = f' \cdot (F' \circ f).$$

Exemple. Fie $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bază a unui spaţiu vectorial de dimensiune 3.

I. Fie F funcţia vectorială definită prin:

$$\overrightarrow{F(x)} = \cos x\vec{i} + \sin x\vec{j} + \vec{k}.$$

Fie f funcţia numerică definită prin:

$$f(x) = x^2.$$

Funcţia $f \cdot F$ este definită prin:

$$\overrightarrow{[f \cdot F](x)} = x^2 \cos x\vec{i} + x^2 \sin x\vec{j} + x^2\vec{k}.$$

Avem:

$$f'(x) = 2x,$$

$$\overrightarrow{F'(x)} = -\sin x\vec{i} + \cos x\vec{j},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{[f \cdot F]'(x)} &= (2x \cos x - x^2 \sin x)\vec{i} + (2x \sin x + x^2 \cos x)\vec{j} + 2x\vec{k} = \\ &= 2x(\overrightarrow{F(x)}) + x^2(\overrightarrow{F'(x)}) = \\ &= f'(x) \cdot \overrightarrow{F(x)} + f(x) \cdot \overrightarrow{F'(x)} = \\ &= \overrightarrow{[f' \cdot F](x)} + \overrightarrow{[f \cdot F'](x)}.\end{aligned}$$

II. Fie F funcţia vectorială definită prin:

$$\overrightarrow{F(x)} = x\vec{i} + x^2\vec{j} + x^3\vec{k}.$$

Fie f funcţia numerică definită prin:

$$f(x) = \operatorname{tg} x.$$

Avem:

$$\overrightarrow{[F \circ f](x)} = \operatorname{tg} x \cdot \vec{i} + \operatorname{tg}^2 x \cdot \vec{j} + \operatorname{tg}^3 x \cdot \vec{k}$$

Pe de altă parte:

$$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$$

$$\overrightarrow{F'(x)} = \vec{i} + 2x\vec{j} + 3x^2\vec{k}.$$

Rezultă:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{[F \circ f]'(x)} &= (1 + \operatorname{tg}^2 x)(\vec{i} + 2 \operatorname{tg} x\vec{j} + 3 \operatorname{tg}^2 x\vec{k}) = \\ &= (1 + \operatorname{tg}^2 x)\vec{i} + 2 \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)\vec{j} + 3 \operatorname{tg}^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x)\vec{k}.\end{aligned}$$

Să observăm că, în aceste trei cazuri, regulile de diferenţiere studiate la nr. 3.4 sînt valabile şi că demonstraţiile sînt identice.

■ *Derivata unui produs scalar*

Fie F şi G două funcţii vectoriale de o variabilă reală şi fie φ funcţia numerică definită prin:

$$\varphi(x) = \overrightarrow{F(x)} \cdot \overrightarrow{G(x)}.$$

Avem, pentru orice x:

$$\varphi'(x) = \lim_{0} \left[h \mapsto \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right].$$

Or: $$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \overrightarrow{F(x+h)} \cdot \overrightarrow{G(x+h)} - \overrightarrow{F(x)} \cdot \overrightarrow{G(x)} =$$
$$= \overrightarrow{F(x+h)} \cdot \overrightarrow{G(x+h)} - \overrightarrow{F(x+h)} \cdot \overrightarrow{G(x)} +$$
$$+ \overrightarrow{F(x+h)} \cdot \overrightarrow{G(x)} - \overrightarrow{F(x)} \cdot \overrightarrow{G(x)} =$$
$$= \overrightarrow{F(x+h)} \cdot [\overrightarrow{G(x+h)} - \overrightarrow{G(x)}] +$$
$$+ \overrightarrow{G(x)} \cdot [\overrightarrow{F(x+h)} - \overrightarrow{F(x)}].$$

Deci:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \overrightarrow{F(x+h)} \cdot \frac{\overrightarrow{G(x+h)} - \overrightarrow{G(x)}}{h} + \overrightarrow{G(x)} \cdot \frac{\overrightarrow{F(x+h)} - \overrightarrow{F(x)}}{h}.$$

Dacă F și G sînt derivabile în x, ele sînt continue în x și, folosindu-se teoremele asupra limitelor, se poate trage concluzia:

$$\varphi'(x) = \overrightarrow{F(x)} \cdot \overrightarrow{G'(x)} + \overrightarrow{G(x)} \cdot \overrightarrow{F'(x)};$$

prin urmare:

TEOREMA 4 / **Fie F și G două funcții vectoriale de o variabilă reală. Derivata funcției produs scalar $F \cdot G$ este dată prin:**

$$[F \cdot G]' = F \cdot G' + F' \cdot G.$$

Acest rezultat este asemănător cu acela al unui produs de funcții numerice. *Observație.* — Se dă uneori notația diferențială pentru funcțiile vectoriale:

$$\mathrm{d}F = F' \,\mathrm{d}x.$$

Dar atunci trebuie să fim circumspecți și să nu considerăm ca rapoarte veritabile orice scriere de forma $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}G}$.

Exemple. **I.** ***Derivata unui pătrat scalar.***
Fie F o funcție vectorială. Avem:

$$[F^2]' = 2F \cdot F'.$$

II. ***Derivata unei norme.***
Fie $||F||$ funcția normă, asociată funcției vectoriale F. Avem:

$$||F|| = \sqrt{F^2}.$$

Prin urmare:

$$||F||' = \frac{2F \cdot F'}{2\sqrt{F^2}} = \frac{F \cdot F'}{\sqrt{F^2}} = \frac{F \cdot F'}{||F||}.$$

Rezultă că, pentru ca o funcție vectorială F să fie astfel ca vectorul $\overrightarrow{F(x)}$ să aibă un modul constant, este necesar și suficient ca aceasta să fie ortogonală vectorului $\overrightarrow{F'(x)}$, derivata lui F în x și aceasta pentru orice x.

5.6.3 Funcții vectoriale care au aceeași derivată

Fie F și G două funcții vectoriale care admit derivatele F' și G' egale pe un interval. Același lucru se întîmplă și cu funcțiile lor componente într-o bază oarecare $\mathcal{B}$ a lui $\vec{E}$. Conform cu nr. 4.1.6., se deduce:

TEOREMA / **Dacă F și G sînt două funcții vectoriale astfel că pe un interval I avem $F' = G'$, există atunci un vector $\vec{u}$ astfel că pentru orice număr real x din intervalul I:**

$$\overrightarrow{F(x)} = \overrightarrow{G(x)} + \vec{u}.$$

5.6.4 Derivate succesive

Ca și în cazul funcțiilor numerice se definește derivata a doua, ..., a n-a a unei funcții vectoriale F:

$$\begin{aligned} F'' &= (F')' \\ F''' &= (F'')' \\ &\vdots \\ F^{(n)} &= (F^{(n-1)})' \end{aligned}$$

Exemple. Fie $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *o bază a unui spațiu vectorial* $\vec{E}$ *de dimensiune* 3.

I. Fie F funcția de la $\mathbf{R}$ la $\vec{E}$, definită prin:

$$\overrightarrow{F(t)} = (2t^2 + 3t - 1)\vec{i} + (t^2 + t)\vec{j} + (t^2 - t)\vec{k}.$$

Avem:

$$\overrightarrow{F'(t)} = (4t + 3)\vec{i} + (2t + 1)\vec{j} + (2t - 1)\vec{k},$$

$$\overrightarrow{F''(t)} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k},$$

$$\overrightarrow{F'''(t)} = \ldots = \overrightarrow{F^{(n)}(t)} = \vec{0}.$$

II. Fie G funcția vectorială de la $\mathbf{R}$ la $\vec{E}$ definită prin:

$$\overrightarrow{G(x)} = \cos x\vec{i} + \sin x\vec{j} + O\vec{k}.$$

Avem:

$$\overrightarrow{G'(x)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j} = \overrightarrow{G\left(x + \frac{\pi}{2}\right)},$$

$$\vdots$$

$$\overrightarrow{G^{(n)}(x)} = \overrightarrow{G\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)}.$$

Să observăm că $\overrightarrow{G^{(k)}(x)}$ și $\overrightarrow{G^{(k+1)}(x)}$ sînt ortogonale pentru orice $x(\|\overrightarrow{G^{(k)}(x)}\| = 1)$.

EXERCIŢII

5.25 Fie F şi G două funcţii vectoriale derivabile pe un domeniu D. Să se demonstreze că $F + G$ este derivabilă pe D şi că:

$$[F + G]' = F' + G'.$$

5.26 Fie F o funcţie vectorială şi f o funcţie numerică, derivabile pe un domeniu D. Să se demonstreze că $f \cdot F$ este derivabilă pe D şi că:

$$[f \cdot F]' = f' \cdot F + f \cdot F'.$$

5.27 Fie F o funcţie vectorială derivabilă pe un domeniu D. Fie f o funcţie numerică definită şi derivabilă pe un domeniu D', astfel că $f[D'] \subset D$.
Să se demonstreze că $F \circ f$ este derivabilă pe D' şi că:

$$(F \circ f)' = f' \cdot (F' \circ f).$$

5.28 Fie F o funcţie vectorială astfel că există un număr real c astfel că:

$$\forall_D x \qquad \|\overrightarrow{F(x)}\| = c.$$

1° Ce se poate spune despre vectorii $\overrightarrow{F(x)}$ şi $\overrightarrow{F'(x)}$?
2° În ce condiţie vectorul $\overrightarrow{F''(x)}$ este coliniar cu vectorul $\overrightarrow{F(x)}$ oricare ar fi x?

5.29 Fie $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ o bază a lui $\vec{E}$.
Fie F funcţia vectorială definită prin:

$$\overrightarrow{F(x)} = \cos x\,\vec{i} + \sin x\,\vec{j}.$$

Fie φ şi ρ două funcţii numerice.
1° Să se exprime derivatele funcţiilor: $F \circ \varphi$, $[\rho F] \circ \varphi$, $\rho[F \circ \varphi]$.
2° Să se determine φ pentru ca vectorul derivata a doua a funcţiei $F \circ \varphi$ să fie coliniar cu vectorul $\overrightarrow{F(x)}$, pentru orice x.

5.30 Fie $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bază ortonormată a lui $\vec{E}$. Se consideră funcţiile I, J, K definite prin:

$$\overrightarrow{I(x)} = \cos x \sin x\,\vec{i},$$
$$\overrightarrow{J(x)} = \cos^2 x\,\vec{j},$$
$$\overrightarrow{K(x)} = \sin x\,\vec{k}.$$

A. 1° Mulţimea $\mathcal{B}(x) = \{\overrightarrow{I(x)}, \overrightarrow{J(x)}, \overrightarrow{K(x)}\}$ este o bază a lui $\vec{E}$?
Să se discute.

2° $\mathcal{B}(x)$ poate fi o bază ortogonală? Dacă da, pentru ce valori ale lui x?
3° Vectorii $\overrightarrow{I(x)}$, $\overrightarrow{J(x)}$, $\overrightarrow{K(x)}$ pot să aibă aceeaşi normă?
B. 1° Să se determine funcţiile derivate I', J', K'.
2° Să se calculeze funcţiile „produs scalar" $I \cdot I'$, $J \cdot J'$, $K \cdot K'$.
3° Vectorii $\overrightarrow{I(x)}$ şi $\overrightarrow{I'(x)}$, $\overrightarrow{J(x)}$ şi $\overrightarrow{J'(x)}$, $\overrightarrow{K(x)}$ şi $\overrightarrow{K'(x)}$ pot fi ortogonali? Dacă da, să se precizeze în ce condiţii.
4° Să se calculeze:

$$\overrightarrow{[I + J + K](x)} \cdot \overrightarrow{[I + J + K]'(x)}.$$

Ce concluzie se poate trage? Să se regăsească acest rezultat printr-o altă metodă.
C. Fie G funcţia definită prin: $\overrightarrow{G(x)} = (1 - \mathrm{tg}^2\, x)\overrightarrow{I(x)} + 2\cos x\overrightarrow{K(x)}$.
1° Să se determine în modul cel mai simplu posibil funcţia: $G \cdot G'$.
2° Vectorul $\overrightarrow{[F + G](x)}$ are o normă independentă de x? (Se va scrie explicit funcţia

$$[x \mapsto \|[F + G](x)\|]).$$

5.31 Fie $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ o bază a lui $\vec{E}$ şi fie f o funcţie numerică. Fie, pe de altă parte, funcţia vectorială F definită prin:

$$\overrightarrow{F(x)} = x\vec{i} + f(x)\vec{j}.$$

Fie Γ indicatoarea lui F în reperul $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ al planului afin $\mathcal{E}_2$.
1° Să se compare Γ cu curba reprezentativă Γ_1, în $\mathcal{R}$, a funcţiei f.
2° Să se determine F'.

3° Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ şi de vector director $\overrightarrow{F'(x_0)}$ (care se presupune că există). Să se compare cu ecuaţia tangentei la Γ_1 în acest punct.

5.32 Fie F o funcţie care admite derivatele a întîia şi a doua continue într-un punct x_0. Să se demonstreze că există o funcţie vectorială η astfel că:

$$\overrightarrow{F(x)} = \overrightarrow{F(x_0)} + (x - x_0)\overrightarrow{F'(x_0)} + \frac{(x - x_0)^2}{2}\overrightarrow{F''(x_0)} + \frac{(x - x_0)^2}{2}\overrightarrow{\eta(x)};$$

$$\lim_{x_0} \eta = 0.$$

6. APLICAŢII ALE FUNCŢIILOR VECTORIALE. CINEMATICA

6.1 STUDIUL CURBELOR

6.1.1 Curbe şi funcţii vectoriale

Fie $\mathcal{E}_n$ un spaţiu afin cu n dimensiuni pe $\mathbf{R}$. Fiind dat un punct O, se ştie că mulţimea afină punctată $(O, \mathcal{E}_n)$ este izomorfă cu spaţiul vectorial $\mathbf{R}^n$ (Geometrie Anul I—CDE, nr. 5.1.6):

$$((O, \mathcal{E}_n) = \{0\} \times \mathcal{E}_n) \quad (O, \mathcal{E}_n) \overset{i}{\approx} \mathbf{R}^n.$$

Aplicaţia j de la $\mathcal{E}_n$ la $\mathbf{R}^n$, care face ca oricărui punct M al lui $\mathcal{E}_n$ să-i corespundă imaginea prin i a perechii (O, M), este o bijecţie.
Fie F o funcţie vectorială de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}^n$. Fie $\mathcal{E}_n$ un spaţiu afin de dimensiune n pe $\mathbf{R}$ şi O un punct dat al lui $\mathcal{E}_n$. Se poate defini, cu ajutorul lui F, o aplicaţie M de la $\mathbf{R}$ la $\mathcal{E}_n$ în felul următor:

$$M(x) = j^{-1}(\overrightarrow{F(x)}).$$

Indicatoarea funcţiei F în spaţiu afin punctat $(O, \mathcal{E}_n)$ este mulţimea:

$$\Gamma = M[\mathbf{R}],$$

numită încă *curbă indicatoare* a lui F în $(O, \mathcal{E}_n)$.

Reciproc, o aplicaţie M de la $\mathbf{R}$ la $\mathcal{E}_n$ fiind dată, se mai poate defini, prin alegerea unui punct O, o funcţie vectorială F de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}^n$ în felul următor:

$$F(x) = j[M(x)].$$

■ Fie $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}')$ un reper al lui $\mathcal{E}_n$ ($\mathcal{B}$ este imaginea prin j^{-1} a unei baze $\mathcal{B}$ a lui $\mathbf{R}^n$). Coordonatele în $\mathcal{R}$ ale punctului $M(x)$ sînt componentele în $\mathcal{B}$ ale vectorului $\overrightarrow{F(x)}$, adică numerele $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, unde f_i sînt funcţiile numerice componente ale lui F în $\mathcal{B}$.
În practică, vom cerceta de aici înainte numai spaţii vectoriale sau afine, de dimensiune mai mică sau egală cu 3, pe $\mathbf{R}$. Se obişnuieşte ca x, y (şi z) să fie numite coordonatele unui punct oarecare al lui $\mathcal{E}_2$ (respectiv $\mathcal{E}_3$) într-un reper $\mathcal{R}$. Ne vom conforma de acum înainte acestei uzanţe, rezervînd o literă diferită ($t, u, \ldots$) pentru a desemna variabila reală. Indicatoarea Γ este determinată prin *ecuaţia ei vectorială*:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F(t)},$$

sau prin *ecuaţiile parametrice*:

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \text{ (eventual).} \end{cases}$$

■ t este parametrul; el nu intervine explicit în forma curbei Γ.
Cu anumite condiţii, fiind dată o bijecţie φ de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$, avem:

$$t = \varphi(u), \qquad u = \varphi^{-1}(t),$$

$$\overrightarrow{F(t)} = \overrightarrow{[F \circ \varphi](u)}.$$

Curba Γ poate fi de asemenea definită prin *ecuaţia vectorială*:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{[F \circ \varphi)(u)},$$

sau prin *ecuaţiile ei parametrice*:

$$\begin{cases} x = [f_1 \circ \varphi](u) \\ y = [f_2 \circ \varphi](u) \\ z = [f_3 \circ \varphi](u); \end{cases}$$

u este acum parametru.
Se spune că s-a efectuat o schimbare de parametru.

Observaţii. — **1** Studiul reprezentărilor parametrice ale curbelor şi al schimbărilor de parametru ar merita să fie aprofundat. Ne vom mărgini să admitem că cazurile uzuale pe care le vom întîlni nu vor prezenta (fără menţiune explicită a contrariului) nici o particularitate în raport cu generalităţile succinte pe care le-am evocat.
2 Plecînd de la *ecuaţiile parametrice* ale unei curbe Γ, se poate, în anumite cazuri, să se obţină ecuaţia carteziană a lui Γ, găsind o relaţie independentă de parametru, între coordonatele x, y şi z.

Exemplu. Ecuaţii parametrice:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Ecuaţie carteziană: $x^2 + y^2 = 1$.

3 Fiind dată o curbă definită prin ecuaţia vectorială $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F(t)}$, se poate întîmpla ca un acelaşi punct M să fie obţinut pentru două valori distincte ale parametrului. Dacă aceste valori sînt izolate, punctul corespunzător se numeşte *punct dublu*. Mai general, dacă există mai multe valori distincte şi izolate ale parametrului, care determină un acelaşi punct, acest punct se numeşte punct *multiplu*.

Exemplu. Ecuaţii parametrice:

$$\begin{cases} x = \cos 3u \\ y = \sin 2u, \end{cases} \quad u \in [0, 2\pi[.$$

Valorile $\frac{\pi}{2}$ şi $-\frac{\pi}{2}$ ale parametrului determină amîndouă punctul de coordonate (0, 0). Mai mult, există o vecinătate V a lui $\frac{\pi}{2}$ şi o vecinătate V' a lui $-\frac{\pi}{2}$ astfel că:

$$\forall_V u, \forall_{V'} u' \quad \left[u \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{sau} \quad u' \neq -\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow M \neq M'.$$

(Notaţii evidente.)

6.1.2 Tangentă şi vector derivat

Fie Γ o curbă a spaţiului afin euclidian $\mathscr{E}_n$ pe $\mathbf{R}$, raportată la un reper afin $(O, \mathscr{B})$. Fie F funcţia vectorială a cărei indicatoare în spaţiu afin punctat $(O, \mathscr{E}_n)$ este Γ.

Fie t_0 un element al domeniului de definiţie al lui F şi M_0 punctul corespunzător al lui Γ.

Fie t un element al domeniului de definiţie al lui F şi M punctul corespunzător al lui Γ:

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{F(t)} - \overrightarrow{F(t_0)}.$$

Vectorul $\overrightarrow{v(t)} = \frac{\overrightarrow{F(t)} - \overrightarrow{F(t_0)}}{t - t_0}$ este un vector director al secantei la Γ, definită prin punctele M_0 şi M.

(Vom presupune că există o vecinătate V a lui t_0 astfel că, dacă t este un element al lui $V - \{t_0\}$, atunci $\overrightarrow{F(t)}$ şi $\overrightarrow{F(t_0)}$ sînt vectori diferiţi.)

Dacă funcţia vectorială v admite o limită $\vec{v}_0$, nenulă, în t_0, vectorul $\vec{v}_0$ este un vector director al tangentei la Γ în M_0. Or, dacă $\vec{v}_0$ există, el este vectorul $\overrightarrow{F'(t_0)}$ derivat al lui F în t_0. Se poate deci enunţa:

TEOREMA / Fie Γ o curbă a unui spaţiu afin euclidian $\mathcal{E}_n$, O un punct al lui $\mathcal{E}_n$ şi F o funcţie vectorială a cărei indicatoare în $(O, \mathcal{E}_n)$ este Γ. Fie M_0 un punct al lui Γ şi t_0 numărul real corespunzător.

Dacă vectorul derivat al lui F în t_0, $\overrightarrow{F'(t_0)}$, există şi este nenul, atunci Γ admite o tangentă în M_0 şi $\overrightarrow{F'(t_0)}$ este un vector director al acestei tangente.

În condiţiile teoremei, ecuaţia vectorială a tangentei la Γ în t_0 este:

$$\overrightarrow{OM} = (t - t_0)\overrightarrow{F'(t_0)} + \overrightarrow{F(t_0)}.$$

(Această tangentă este deci indicatoarea funcţiei afine tangente la F în t_0.) Ecuaţiile parametrice ale acestei tangente sînt (cazul unui spaţiu cu trei dimensiuni):

$$x = (t - t_0)f_1'(t_0) + f_1(t_0),$$

$$y = (t - t_0)f_2'(t_0) + f_2(t_0),$$

$$z = (t - t_0)f_3'(t_0) + f_3(t_0).$$

În cazul particular în care $F = [t \mapsto t\vec{i} + f(t)\vec{j}]$, se regăseşte ecuaţia tangentei în punctul M_0 de coordonate $x_0(= t_0)$ şi $f(x_0)$:

$$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0).$$

Observaţie importantă. — Dacă vectorul derivat al lui F în t_0 este nul sau nu există, nu se poate trage o concluzie asupra neexistenţei unei tangente în punctul corespunzător. Există, într-adevăr, curbe Γ care admit o tangentă într-un punct M_0, de parametru t_0, unde funcţia F nu admite funcţie derivată.

Exemplu. Fie curba Γ pentru care una din ecuaţiile vectoriale în $(O, \mathcal{E}_2)$ este:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{|t|}{t}\sqrt[3]{|t|}\,\vec{i} + t\vec{j} = \overrightarrow{F(t)},$$

$$\overrightarrow{F(0)} = \vec{0}.$$

Pentru $t_0 = 0$, funcţia F este continuă, dar $\overrightarrow{F'(0)}$ nu există (funcţia $\left[x \mapsto \frac{|t|}{t}\sqrt[3]{|t|}\right]$ nu este derivabilă în 0).
Totuşi, avem:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{|t|}{t}\sqrt[3]{|t|}\,\overrightarrow{\sigma(t)},$$

cu:

$$\overrightarrow{\sigma(t)} = \vec{i} + \sqrt[3]{t^2}\vec{j}.$$

$\overrightarrow{\sigma(t)}$ este deci, pentru orice t, un vector director al secantei OM.
Or:

$$\lim_{0} \sigma = \vec{i}.$$

Curba Γ admite deci ca tangentă în 0 (pentru $t_0 = 0$) dreapta care trece prin 0 și de vector director $\vec{i}$, în timp ce $\overrightarrow{F'(0)}$ nu există.

6.1.3 Puncte staționare

DEFINIȚIE / Fie Γ o curbă a spațiului afin euclidian $\mathcal{E}_n$. Fie O un punct al lui $\mathcal{E}_n$ și F o funcție vectorială pentru care Γ este indicatoare în $(O, \mathcal{E}_n)$. Un punct M_0 care corespunde unui număr real t_0 (valoare a parametrului) este numit staționar dacă și numai dacă $\overrightarrow{F'(t_0)} = \vec{0}$.

Vectorul derivat fiind nul într-un punct staționar, el nu poate determina direcția tangentei. Să presupunem atunci că vectorul derivată a doua în t_0, $\overrightarrow{F''(t_0)}$, este nenul.
Dacă F este derivabilă în t_0, avem:

$$\overrightarrow{F(t)} = \overrightarrow{F(t_0)} + (t - t_0)\overrightarrow{F'(t_0)} + (t - t_0)\overrightarrow{\varepsilon(t)},$$

$$\lim_{t_0} \varepsilon = \vec{0}.$$

Mai general, vom admite că, dacă F este o funcție de două ori derivabilă pe o mulțime D și t_0 un punct din interiorul lui D, avem, pe D (exercițiul nr. 5.29):

$$\overrightarrow{F(t)} = \overrightarrow{F(t_0)} + (t - t_0)\overrightarrow{F'(t_0)} + \frac{(t - t_0)^2}{2}\overrightarrow{F''(t_0)} + \frac{(t - t_0)^2}{2}\overrightarrow{\eta(t)},$$

cu:

$$\lim_{t_0} \eta = \vec{0}.$$

Dacă $\overrightarrow{F'(t_0)} = \vec{0}$, avem:

$$\overrightarrow{F(t)} = \overrightarrow{F(t_0)} + \frac{(t - t_0)^2}{2}\overrightarrow{F''(t_0)} + \frac{(t - t_0)^2}{2}\overrightarrow{\eta(t)}.$$

În aceste condiții, vectorul $\overrightarrow{v(t)} = 2\frac{\overrightarrow{F(t)} - \overrightarrow{F(t_0)}}{(t - t_0)^2}$ este un vector director al secantei M_0M şi limita sa în t_0 este un vector director al tangentei. Or, această limită nu este alta decît $\overrightarrow{F''(t_0)}$:

$$\lim_{t} v = \overrightarrow{F''(t_0)}.$$

Mai general, se poate demonstra următorul rezultat:

TEOREMĂ / **Γ fiind o curbă într-un spaţiu afin euclidian $\mathscr{E}_n$, fie F o funcţie vectorială pentru care Γ este indicatoare şi fie M_0 un punct al lui Γ corespunzător valorii t_0 a parametrului. Să presupunem că derivatele succesive ale lui F în t_0 există.**
În aceste condiţii, primul dintre vectorii derivaţi succesivi ai lui F în t_0 care este nenul defineşte direcţia tangentei la Γ în M_0.

Observaţie. — Studiul precis al formei unei curbe Γ, definită de n ecuaţii parametrice în $\mathscr{E}_n$, în vecinătatea unui punct M_0, corespunzător valorii t_0 a parametrului, se poate face avantajos aplicînd metoda precedentă. Ne plasăm în reperul format de primii n vectori derivaţi succesivi ai lui F în t_0 care sînt liniar independenţi (în practică, n este egal cu 2 sau cu 3).

6.2 EXEMPLE DE DETERMINAREA TANGENTELOR

6.2.1 Recapitulări la conice

Să reamintim cîteva definiţii.
Fie, în planul afin euclidian $\mathscr{E}_2$, o dreaptă D şi un punct F care nu aparţine lui D. Mulţimea punctelor M, astfel că raportul distanţelor de la M la D (fie H proiecţia ortogonală a lui M pe D) şi de la M la F este constant (egal cu e), este o *conică C de excentricitate e*, de focar F şi de *directoare D* (asociată lui F) (*fig.* 1):

$$M \in C \Leftrightarrow \frac{d(M,F)}{d(M,H)} = e.$$

Se obţin astfel: hiperbolele ($e > 1$), parabolele ($e = 1$), elipsele ($e < 1$).
Numai cercul nu a fost obţinut astfel, cu toate că poate fi considerat ca o conică de excentricitate nulă (focarele sînt confundate şi directoarele aruncate la infinit).
Conicele cu centru pot fi definite într-un alt mod.

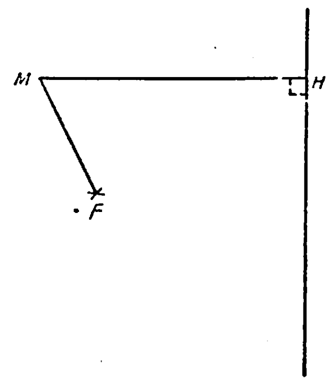


Fig. 1

Fie două puncte F şi F' ale planului afin euclidian $\mathcal{E}_2$.

Mulţimea E a punctelor M ale lui $\mathcal{E}_2$, astfel că:

$$d(M, F) + d(M, F') = a, \qquad a > f(F, F'),$$

este o elipsă pentru care F şi F' sînt cele două focare.

Mulţimea H a punctelor M ale lui $\mathcal{E}_2$, astfel că:

$$|d(M, F) - d(M, F')| = a \qquad a < d(F, F'),$$

este o hiperbolă ale cărei focare sînt F şi F'.

Pe de altă parte:

Elipsa E mai este mulţimea centrelor cercurilor tangente la cercul C' de centru F' şi de rază a, care trec printr-un punct F interior lui C' (cercul director asociat lui F) (*fig.* 2).

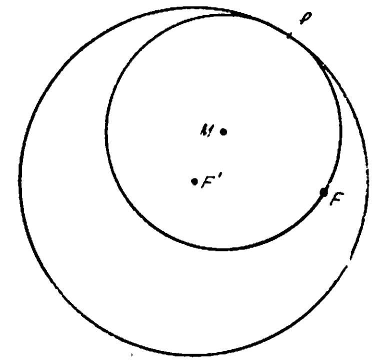


Fig. 2

Hiperbola H este de asemenea mulţimea centrelor cercurilor tangente la cercul C' de centru F' şi de rază a, care trec printr-un punct F exterior lui C' (cercul director asociat lui F) (*fig.* 3). Parabola P este mulţimea centrelor cercurilor tangente la o dreaptă D (directoare) şi care trec printr-un punct F nesituat pe D.

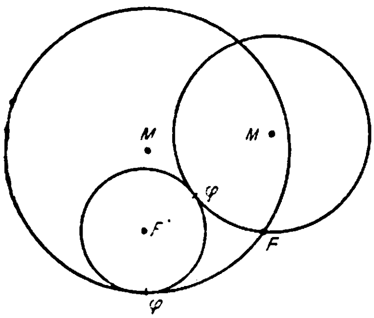


Fig. 3

6.2.2 Tangente la conice

■ **CONICA ESTE DEFINITĂ DE UN FOCAR, DIRECTOAREA CORESPUNZĂTOARE ŞI EXCENTRICITATE.**

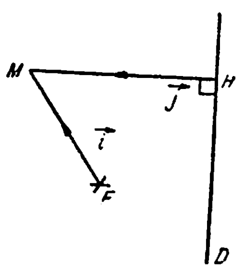


Fig. 4

Fie o conică C definită de un focar F, directoarea corespunzătoare D şi excentritatea e. Fie M un punct al acestei conice (*fig.* 4); t fiind un parametru de care depinde M, să punem:

$$d[F, M(t)] = r(t), \quad d[H, M(t)] = h(t);$$

deci:

$$r(t) = eh(t).$$

Să notăm prin $\overrightarrow{i(t)}$ şi $\overrightarrow{j(t)}$ vectorii unitari respectivi ai semidreptelor $FM(t)$ şi $HM(t)$; avem deci:

$$\overrightarrow{FM(t)} = \overrightarrow{[ri](t)}; \quad \overrightarrow{HM(t)} = \overrightarrow{[hj](t)}.$$

M depinzînd de t, $\overrightarrow{FM}$ şi $\overrightarrow{HM}$ sînt funcţii vectoriale de t:

$$\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} = r\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dr}{dt}\vec{i};$$

$$\frac{d\overrightarrow{HM}}{dt} = h\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dh}{dt}\vec{j}.$$

Rezultă, $\vec{i}(t)$ şi $\vec{j}(t)$ fiind vectori unitari pentru orice t (deci ortogonali cu vectorii lor derivaţi):

$$\vec{i}\cdot\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} = \frac{dr}{dt};\quad \vec{j}\cdot\frac{d\overrightarrow{HM}}{dt}; = \frac{dh}{dt};$$

cum:

$$r = eh \Rightarrow \frac{dr}{dt} = e\frac{dh}{dt},$$

avem:

$$\vec{i}\cdot\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} = e\vec{j}\cdot\frac{d\overrightarrow{HM}}{dt}. \tag{1}$$

Pe de altă parte:

$$\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HM};$$

deci:

$$\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{FH}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{HM}}{dt}.$$

Punctul F fiind fix, $\frac{d\overrightarrow{FH(t)}}{dt}$ este purtat de tangenta la indicatoarea lui $\overrightarrow{FH}$, deci de dreapta D; rezultă: $\vec{j}\,\frac{d\overrightarrow{FH}}{dt} = 0$,

deci:

$$\vec{j}\cdot\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} = \vec{j}\cdot\frac{d\overrightarrow{HM}}{dt}.$$

Relaţia (1) se scrie atunci:

$$(\vec{i} - e\vec{j})\cdot\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} = 0. \tag{2}$$

F fiind fix, funcţia vectorială Φ, definită prin: $\overrightarrow{\Phi(t)} = \overrightarrow{FM(t)}$, admiţînd pe C ca indicatoare, are un vector derivat ortogonal cu vectorul $\overrightarrow{i(t)} - \overrightarrow{ej(t)}$, oricare ar fi t.

Se poate trage concluzia:

Fie C o conică. Pentru orice punct M al lui C, există o tangentă la C care trece prin M.

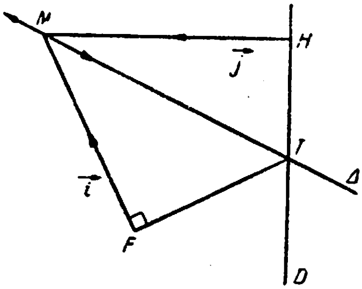


Fig. 5

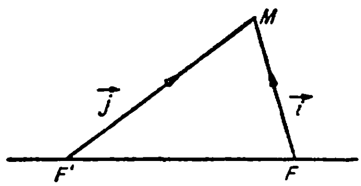


Fig. 6

Din F, să ducem perpendiculara pe FM pînă în T de pe D (*fig.* 5).
Avem:

$$\vec{j}\cdot\overrightarrow{TM}=\vec{j}\cdot\overrightarrow{HM}=\vec{j}\cdot h\vec{j}=h,$$
$$\vec{i}\cdot\overrightarrow{TM}=\vec{i}\cdot\overrightarrow{FM}=\vec{i}\cdot r\vec{i}=r;$$

deci, pentru că $r=eh$, avem $(\vec{i}-e\vec{j})\cdot\overrightarrow{TM}=0$.
Comparînd cu relaţia (2), se vede că vectorii $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{FM}}{\mathrm{d}t}$ şi $\overrightarrow{TM}$ sînt ortogonali cu vectorul $\vec{i}-e\vec{j}$; sînt deci coliniari.
Tangenta la conică este deci dreapta TM.
Se poate enunţa:

Fie C o conică definită de un focar F şi directoarea asociată D. Fie M un punct oarecare al lui C şi Δ tangenta la C în M. Fie T punctul de intersecţie al lui Δ şi D. Segmentul $[M, T]$ este atunci astfel că unghiul (FM, FT) este drept.

■ *Conica (cu centru) este definită de focarul ei şi numărul a.*

Fie M un punct al conicii, F şi F' cele două focare (*fig.* 6); fie $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ vectorii unitari ai semidreptelor FM şi $F'M$; se pune:

$$FM=r, \qquad F'M=r',$$

deci:

$$\overrightarrow{FM}=r\vec{i}, \qquad \overrightarrow{F'M}=r'\vec{j}.$$

Atunci cînd M variază pe conică, vectorii $\overrightarrow{F'M}$ şi $\overrightarrow{FM}$ sînt funcţii vectoriale de o variabilă t. Avem:

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{FM}}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t}+\vec{i}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

Înmulţind scalar prin $\vec{i}$ şi observînd că, $\vec{i}$ fiind un vector unitar:

$$(\vec{i})^2=1 \text{ şi } \vec{i}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t}=0, \text{ avem: } \vec{i}\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{FM}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

De asemenea avem: $$\vec{j}\cdot\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{F'M}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}t}.$$

Pe de altă parte, $\overrightarrow{F'F}=\overrightarrow{F'M}-\overrightarrow{FM}$; deci, derivînd, pentru că vectorul $\overrightarrow{F'F}$ este un vector independent de t: $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{F'M}}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{FM}}{\mathrm{d}t}=\vec{0}$.

În final se obține: $\vec{i} \cdot \frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} = \frac{dr}{dt}$; $\vec{j} \cdot \frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} = \frac{dr'}{dt}$.

Punctul F fiind fix, vectorul $\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt}$ are aceeași direcție ca și tangenta în M la conică.

Cazul elipsei.

Avem: $r + r' = 2a$ deci: $\frac{dr}{dt} + \frac{dr'}{dt} = 0$, deci: $(\vec{i} + \vec{j}) \cdot \frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} = 0$.

Vectorul $\vec{i} + \vec{j}$ este ortogonal cu tangenta în M la curbă; $\vec{i}$ și $\vec{j}$ fiind unitari, $\vec{i} + \vec{j}$ este un vector director al unei drepte numită *bisectoarea interioară* a unghiului $\widehat{(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})}$. (Vectorul $\vec{i} - \vec{j}$ definește de asemenea *bisectoarea exterioară* a acestui unghi).
Or, $\vec{i}$ și $\vec{j}$ fiind unitari: $(\vec{i} + \vec{j}) \cdot (\vec{i} - \vec{j}) = 0$.
Se enunță (*fig.* 7):

Tangenta la elipsă într-un punct este bisectoarea exterioară a unghiului de raze vectoare $\overrightarrow{MF}$ și $\overrightarrow{MF'}$.

Cazul hiperbolei.

Avem: $|r - r'| = 2a$, deci, prin derivare: $\frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt}$.

De unde rezultă (*fig.* 8): $(\vec{i} - \vec{j}) \cdot \frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} = 0$.

După definițiile reamintite mai sus, se enunță în mod analog:

Tangenta la hiperbolă într-un punct este bisectoarea interioară a unghiului razelor vectoare $\overrightarrow{MF}$ și $\overrightarrow{MF'}$;

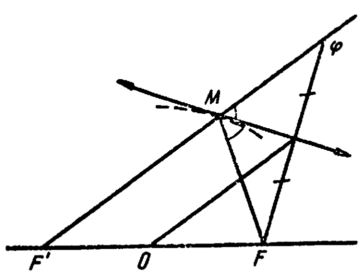


Fig. 7

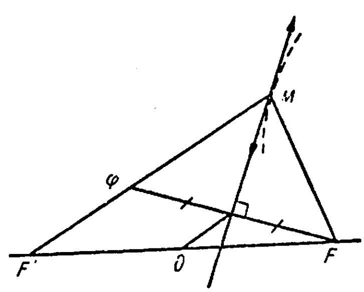


Fig. 8

6.2.3 Tangente la o elice circulară

Fie $\mathcal{E}_3$ un spaţiu afin euclidian real de dimensiune 3.

Fie $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un reper ortonormat al lui $\mathcal{E}_3$. O *elice circulară* este o curbă Γ a lui $\mathcal{E}_3$ ale cărei ecuaţii parametrice în $\mathcal{R}$ sînt:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = \lambda t. \end{cases}$$

Proiecţia ortogonală a lui Γ pe planul determinat prin $(O, \vec{i}, \vec{j})$ este cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 = R^2$.

Proiecţiile ortogonale ale lui Γ pe celelalte plane de coordonate sînt sinusoide.

Tangenta T la Γ într-un punct M_0 corespunzător parametrului t_0 are ca vector director vectorul de componente:

$$\begin{cases} -R\sin t_0 \\ R\cos t_0 \\ \lambda. \end{cases}$$

Rezultă că această tangentă T face un unghi constant cu planul definit de $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Ea se proiectează pe acest plan după tangenta τ la cercul γ de ecuaţie $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, în punctul m_0, proiecţie a lui M_0 (*fig.* 9).

Exerciţii

6.1 Fie F funcţia vectorială definită prin componentele ei x şi y în reperul ortonormat $\mathcal{R}$ al planului afin euclidian:

$$\begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\sin t \end{cases} \qquad (r \in \mathbf{R}).$$

1° Care este curba indicatoare Γ a lui F în $\mathcal{R}$?

2° Cum se traduce periodicitatea lui F? (În acest caz, ne mărginim în general să definim pe F într-un interval format de o perioadă, astfel ca curba Γ să nu fie obţinută decît o singură dată.)

3° Să se efectueze schimbarea de parametru definite prin:

$$v = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\cdot$$

Care este indicatoarea Γ' a noii funcţii vectoriale astfel obţinute? Să se explice de ce Γ şi Γ' nu sînt identice.

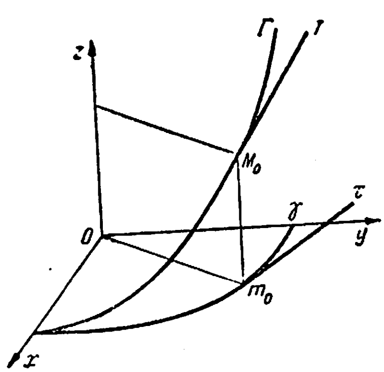


Fig. 9

6.2 Fie D o submulţime a lui $\mathbf{R}$ şi F o aplicaţie de la D la $\mathbf{R}^2$. Fie x_0 un punct interior lui D. Vom admite că, dacă F admite pe D derivate de un ordin oarecare, avem:

$$\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)} + (x - x_0)\overrightarrow{F'(x_0)} + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\overrightarrow{F^{(n)}(x_0)} + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\overrightarrow{\varepsilon_n(x)},$$

cu: $\quad \lim\limits_{x_0} \varepsilon_n = \vec{0}.$

1° Să se demonstreze că primul vector derivat nenul în x_0 definește tangenta la Γ în punctul corespunzător.
2° Cu ajutorul relației precedente, să se studieze curba indicatoare a lui F în vecinătatea unui punct x_0 astfel ca vectorii $\overrightarrow{F^{(n)}(x_0)}$ și $\overrightarrow{F^{(m)}(x_0)}$ să formeze o bază a lui $\mathbf{R}^2$:

a) pentru $n = 1$ și $m = 2$;
b) pentru $n = 1$ și $m = 3$;
c) pentru $n = 2$ și $m = 3$;
d) pentru $n = 2$ și $m = 4$.

(Se va folosi semnul componentelor vectorului $\overrightarrow{F(x)} - \overrightarrow{F(x_0)}$ pe baza considerată $[\overrightarrow{F^{(n)}(x_0)}, \overrightarrow{F^{(m)}(x)_0}]$.)

6.3 Fie F o funcție vectorială a cărei curbă indicatoare Γ în reperul ortonormat $\mathcal{R}$ al planului admite o ramură infinită în vecinătatea unui punct de acumulare x_0 din domeniul de definiție D al lui F.

1° Să se precizeze ce semnificație are existența unei asemenea ramuri infinite.
2° În ce condiții Γ admite o direcție asimptotică în vecinătatea lui x_0?
3° În ce cazuri Γ admite o asimptotă, o ramură parabolică în vecinătatea lui x_0?

6.4 În cazurile următoare ce se poate spune despre curba indicatoare Γ, într-un reper plan $\mathcal{R}$, a funcției vectoriale F de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}^2$?

$$1° \quad \exists_{\mathbf{R}^2}\vec{V},\ \exists_{\mathbf{R}}T,\ \forall_D t\ \ \overrightarrow{F(t+T)} = \overrightarrow{F(t)} + \vec{V}.$$

(Exemplu: $\overrightarrow{F(t)} = (t - \sin t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j}$.)

$$2° \quad \exists_{\mathbf{R}^2}\vec{V},\ \forall_{\mathbf{R}}t,\ \exists_{\mathbf{R}}t'\ \ \overrightarrow{F(t)} + \overrightarrow{F(t')} = \vec{V}.$$

(Exemplu: $\overrightarrow{F(t)} = (1 + \cos t)\vec{i} + (1 + \sin t)\vec{j}$.)

$$3° \quad \exists_{\mathbf{R}^2}\vec{V},\ \forall_{\mathbf{R}}t,\ \exists_{\mathbf{R}}t',\ \exists_{\mathbf{R}}\lambda\ \ \overrightarrow{F(t)} + \overrightarrow{F(t')} = \lambda\vec{V}.$$

(Exemplu: $\overrightarrow{F(t)} = a\cos t\vec{i} + b\sin t\vec{j}$.)

•

Să se studieze curbele definite într-un reper ortonormat al planului prin funcțiile vectoriale definite mai jos prin componentele lor. Se vor studia eventualele simetrii (exercițiul nr. 6.4), *ramurile infinite cînd este cazul (exercițiul* nr. 6.3). *Se va determina, eventual, o ecuație carteziană.*

6.5 $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t}} \\ y(t) = \sqrt{t}. \end{cases}$

6.6 $\begin{cases} x(m) = m^2 \\ y(m) = \dfrac{1}{m^2} \end{cases}$

6.7 $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1 - t^2}{2t} \\ y(t) = \dfrac{1 + t^2}{2t}. \end{cases}$

6.8 $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t. \end{cases}$

6.9 $\begin{cases} x(t) = 2\cos^2 t \\ y(t) = \sin 2t. \end{cases}$

6.10 $\begin{cases} x(t) = 2t + 1 \\ y(t) = t^2 - \dfrac{3t}{2}. \end{cases}$

6.11 $\begin{cases} x(t) = \dfrac{a}{\cos t} \\ y(t) = b\,\mathrm{tg}\,t. \end{cases}$

6.12 $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t^2 - 1} \\ y(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1} \end{cases}$

6.13 $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2}{t^2} \\ y(t) = \dfrac{2}{t}. \end{cases}$ 6.14 $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2}{t^2+1} \\ y(t) = \dfrac{2t}{t^2+1} \end{cases}$

6.15 $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2t^2+1} \\ y(t) = \dfrac{t}{2t^2+1} \end{cases}$ 6.16 $\begin{cases} x(t) = 3 + \dfrac{2}{4t^2+1} \\ y(t) = 5 + \dfrac{2t}{4t^2+1} \end{cases}$

6.17 Fie $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$ un reper ortonormat al planului.
Să se studieze în $\mathcal{R}$ curba indicatoare Γ_e a funcției vectoriale F_e, definită prin componentele ei în **R**:

$$\begin{cases} x_e(t) = \dfrac{1}{1-e^2+t^2} \\ y_e(t) = \dfrac{t}{1-e^2+t^2}. \end{cases}$$

Să se discute după valorile lui e. (Se poate determina o ecuație carteziană a lui Γ_e în $\mathcal{R}$.)

6.18 *Exercițiu rezolvat.*
Să se studieze funcția vectorială F definită prin componentele ei într-un reper ortonormat:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = \dfrac{1}{t^2} + t^2 \end{cases}$$

Soluție. — Domeniul de definiție al lui F este $D = \mathbf{R}^*$; funcția F nu este periodică.
Curba indicatoare Γ nu prezintă simetrie aparentă.
F este continuă pe domeniul ei de definiție.
F reprezintă ramuri infinite în vecinătatea lui $-\infty$, 0, $+\infty$: pentru $-\infty$, avem: $\lim\limits_{-\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} y = +\infty$;

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^2(t^2-2t)}{t^4+1};$$

deci:

$$\lim_{-\infty} \frac{y}{x} = 1.$$

Curba Γ admite o direcție asimptotică de coeficient director 1:

$$y(t) - x(t) = 2t + \frac{1}{t^2};$$

deci:

$$\lim_{-\infty} y - x = -\infty.$$

Curba Γ admite o ramură parabolică în vecinătatea lui $-\infty$:
pentru $+\infty$, avem: $\lim\limits_{+\infty} x = \lim\limits_{+\infty} y = +\infty$,

$$\lim_{+\infty} \frac{y}{x} = 1,$$

$$\lim_{+\infty} y - x = +\infty.$$

Curba Γ admite o direcţie asimptotică de coeficient director 1 şi o ramură parabolică în această direcţie, în vecinătatea lui $+\infty$: pentru 0, avem:

$$\lim_{0} x = 0, \quad \lim_{0} y = +\infty.$$

Curba Γ admite ca asimptotă axa ordonatelor în vecinătatea lui 0.

■ *Studiul punctelor remarcabile.*

1 *Puncte duble.*
Dacă există puncte duble există valori t, t' ale parametrului astfel că:

$$\overrightarrow{F(t)} = \overrightarrow{F(t')} \quad \text{şi} \quad t \neq t'.$$

Reciproc, dacă există asemenea numere, care în afară de aceasta sînt puncte izolate ale domeniului de definiţie al lui F, există atît puncte duble, cît şi perechi de valori ale parametrului care satisfac această relaţie. Să rezolvăm deci ecuaţia definită prin:

$$(t, t') \in D^2 \quad \text{şi} \quad t \neq t' \quad \text{şi} \quad \overrightarrow{F(t)} = \overrightarrow{F(t')}.$$

Condiţia $\overrightarrow{F(t)} = \overrightarrow{F(t')}$ implică succesiv:

a) $x(t) = x(t')$,

$t^2 - 2t = t'^2 - 2t'$,

$(t - t')(t + t' - 2) = 0$;

mai mult: $t \neq t' \Rightarrow t - t' \neq 0$;

deci: $t + t' = 2$.

b) $y(t) = y(t')$,

$$\frac{1}{t^2} + t^2 = \frac{1}{t'^2} + t'^2,$$

$(1 + t^4)t'^2 = t^2(1 + t'^4)$,

$(t'^2 - t^2) + t^2t'^2(t^2 - t'^2) = 0$,

$(t'^2 - t^2)(1 - t^2t'^2) = 0$,

$(t' - t)(t' + t)(1 - t^2t'^2) = 0$.

Or: $t' - t \neq 0$,

$t' + t \neq 0 \quad (t' + t = 2)$;

deci: $t^2t'^2 = 1$,

adică: $tt' = 1$ sau $tt' = -1$.

c) Dacă: $t' + t = 2$ şi $tt' = 1$,

atunci: $t = t' = 1$.

Această soluţie nu convine căci este incompatibilă cu condiţia

$$t \neq t'.$$

Dacă: $t + t' = 2$ şi $tt' = -1$,

atunci:
$$\begin{cases} t = 1 + \sqrt{2} \\ t' = 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

Există deci un punct dublu unic ale cărui coordonate sînt:

$$x(1+\sqrt{2}) = x(1-\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^2 - 2(1+\sqrt{2}) = 1$$
$$y(1+\sqrt{2}) = y(1-\sqrt{2}) = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} - (1+\sqrt{2})^2 = 6.$$

Tangentele la cele două ramuri ale lui Γ care trec prin acest punct dublu sînt determinate de vectorii:

$$\overrightarrow{F'(1+\sqrt{2})} \quad \text{și} \quad \overrightarrow{F'(1-\sqrt{2})};$$

acești vectori nu sînt obligatoriu egali.

2 *Puncte singulare.*

Vectorul $\overrightarrow{F'(t)}$ este definit prin componentele sale:

$$\begin{cases} x'(t) = 2t - 2 \\ y'(t) = -\dfrac{2}{t^3} + 2t = \dfrac{2(t^4-1)}{t^3}. \end{cases}$$

Se obține un punct singular S pentru $t = 1$.
Avem într-adevăr:

$$\overrightarrow{F'(1)} = \vec{0} \quad [x(1) = -1,\ y(1) = 2].$$

Tangenta în acest punct singular este definită de vectorul $\overrightarrow{F''(1)}$:

$$\begin{cases} x''(t) = 2 \\ y''(t) = 2 + \dfrac{6}{t^4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''(1) = 2 \\ y''(1) = 8. \end{cases}$$

În vecinătatea acestui punct singular, se poate scrie:

$$\overrightarrow{F(t)} = \overrightarrow{F(1)} + \overrightarrow{F'(1)}(t-1) + \overrightarrow{F''(1)}\frac{(t-1)^2}{2} + \overrightarrow{F'''(1)}\frac{(t-1)^3}{3!} + \frac{(t-1)^3}{3!}\overrightarrow{\varepsilon(t)},$$

cu:
$$\lim_{1} \varepsilon = \vec{0}.$$

Vectorul $\overrightarrow{F'''(1)}$ este definit prin componentele sale:

$$\begin{cases} x'''(t) = 0 \\ y'''(t) = -\dfrac{24}{t^5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'''(1) = 0 \\ y'''(1) = -24. \end{cases}$$

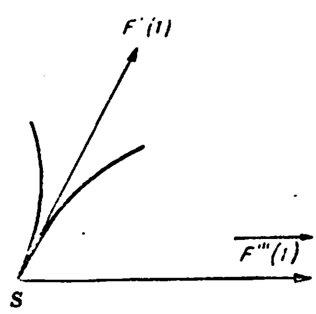


Fig. 10

În vecinătatea punctului singular, avem:

$$\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{F(t)} - \overrightarrow{F(1)} = \frac{(t-1)^2}{2}\overrightarrow{F''(1)} + \frac{(t-1)^3}{6}\overrightarrow{F'''(1)} + \frac{(t-1)^3}{6}\overrightarrow{\varepsilon(t)}.$$

Vectorii $\overrightarrow{F''(1)}$ şi $\overrightarrow{F'''(1)}$ formînd o bază a lui $\mathbf{R}^2$ şi vectorul $\overrightarrow{\varepsilon(t)}$ fiind neglijabil în vecinătatea lui 1, componenta lui $\overrightarrow{V(t)}$ pe $\overrightarrow{F''(1)}$ este pozitivă în vecinătatea lui 1 şi componenta lui $\overrightarrow{V(t)}$ pe $\overrightarrow{F'''(1)}$ are semnul lui $t - 1$ în vecinătatea lui 1.

Cum, mai mult, $\overrightarrow{F''(1)}$ este tangentă la curba Γ în punctul studiat S, configuraţia este aceea din *figura* 10 („întoarcere de prima speţă").

■ Studiul curbei Γ este uşurat de prezentarea unui tabel care recapitulează diversele rezultate:

t	$-\infty$		-1			0			1		$+\infty$
$x(t)$	$+\infty$	↘	3	↘			↘		-1	↗	$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$-$			$-$		0	$+$	
$y(t)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$	‖	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0		$+$	‖	$-$		0	$+$	

■ Schiţa formei curbei este făcută plecînd de la tablou şi ţinînd seama de diversele informaţii obţinute cu ocazia studiului punctelor remarcabile (*fig.* 11).
Să observăm că, pentru $t = -1$:

$$y'(t) = 0, \qquad x'(t) \neq 0;$$

avem deci o tangentă paralelă cu axa absciselor (de coeficient director 0).
Pentru a preciza curba, se pot plasa cîteva puncte remarcabile şi, eventual, tangenta la Γ în aceste puncte:

$$x(t) = 0, \quad t = 0 \quad \text{sau} \quad t = 2;$$

$$y(0) \text{ nu este definit;}$$

$$y(2) = 4 + \frac{1}{4}, \quad x'(2) = 2, \quad y'(2) = \frac{15}{4}.$$

*

Să se studieze, într-un reper ortonormat, curbele indicatoare ale funcţiilor vectoriale definite mai jos prin componentele lor. (Se vor studia în particular simetriile curbei, punctele remarcabile şi ramurile infinite; se va da forma generală a curbei.)

6.19 $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3. \end{cases}$

6.20 $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t. \end{cases}$

6.21 $\begin{cases} x(t) = 3u - u^3 \\ y(t) = u^2 + \dfrac{1}{u^2}. \end{cases}$

6.22 $\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \sin 3t. \end{cases}$

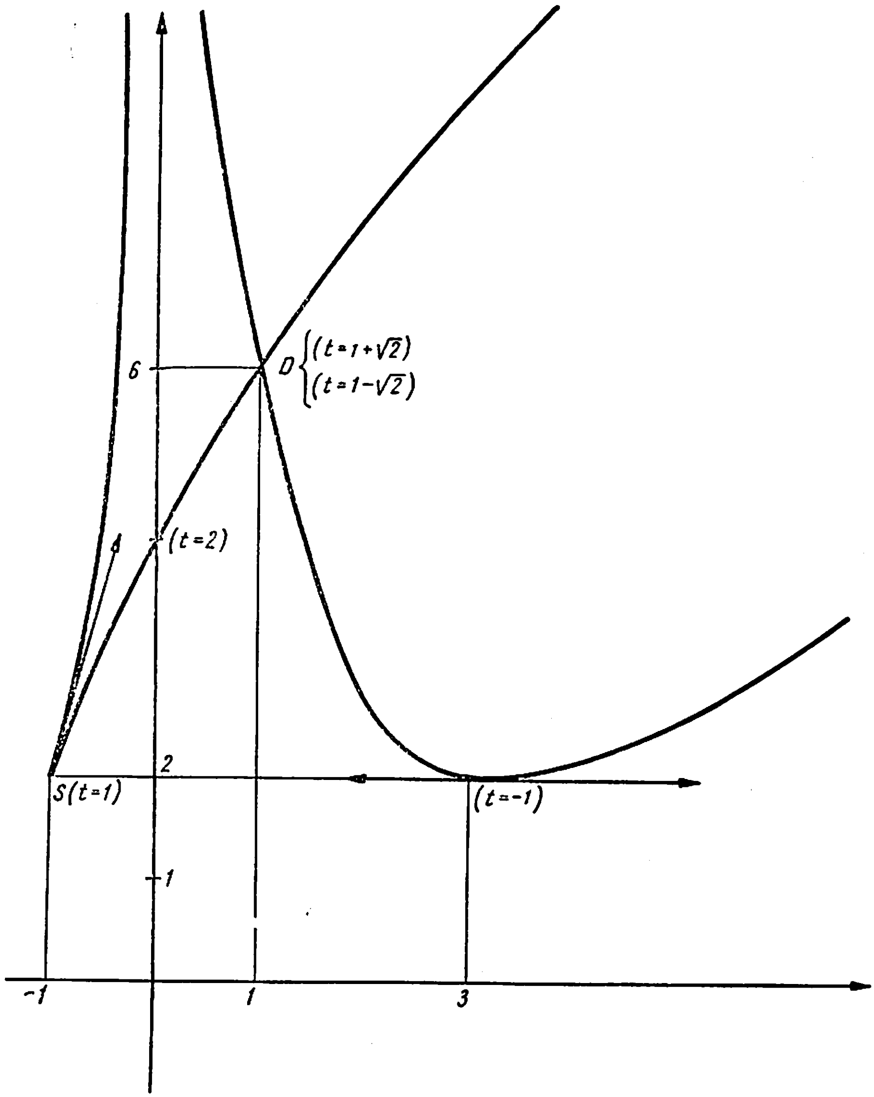


Fig. 11

6.3 CINEMATICA. GENERALITĂŢI

6.3.1 Matematizarea unei probleme

Pentru a aplica metodele matematice la o problemă reală pe care sîntem puşi s-o studiem, trebuie mai întîi să transpunem această problemă în termeni matematici. Aceasta se poate face adesea în diferite feluri şi prima

chestiune ce trebuie rezolvată este de a alege *modelul matematic* ce-l vom aplica problemei puse. Este ceea ce numim *matematizarea* problemei.
Apoi, şi în aceasta consta domeniul privilegiat al matematicilor, se lucrează pe acest model pentru a se rezolva problema dată, tradusă în termeni matematici.
Se poate întîmpla, mai ales în problemele complexe, ca soluţiile matematice astfel obţinute să fie date prin soluţii puţin satisfăcătoare în realitate. Aceasta se datorează faptului că modelul ales nu era destul de adecvat problemei puse pentru a o rezolva cu destulă precizie.
Problema conduce adesea la modificarea modelului iniţial. Evoluţia ştiinţelor fizice, de exemplu, furnizează numeroase exemple în această privinţă.
Mecanică clasică, destul de adecvată realităţii pentru a explica fenomenele uzuale, nu-şi dădea seama de anumite fenomene (de exemplu, rezultatele experienţei lui Michelson şi Morley). Un nou model, acela al *mecanicii relativiste*, s-a dovedit mai adecuat. Există dealtfel multe şanse ca nici un model matematic să nu fie perfect adaptat unei probleme reale ceva mai complexe. Ştiinţa procedează astfel la treceri de la modele la modele din ce în ce mai adecuate.

Exemplu. Cumpărarea unei mărfi în Franţa poate fi matematizată prin operaţii asupra numerelor zecimale.
Dimpotrivă, în Anglia, acest model ar fi neadecuat datorită existenţei unei monede nezecimale*.

6.3.2 Cinematica. Punerea problemei

În spaţiul care ne înconjoară se găsesc mai multe obiecte. Unele sînt în mişcare, altele în repaus.
Dar *această noţiune de mişcare este esenţial relativă faţă de observator*. De exemplu, bancheta din tren este în repaus în raport cu voiajorul care stă pe ea, dar poate fi în mişcare în raport cu cantonierul. Un obiect M se spune că este în mişcare în raport cu un observator O, dacă poziţia lui M în raport cu O variază în funcţie de timp.
Vom considera noţiunea de timp ca o noţiune intuitivă. (Noţiunea de durată este înţeleasă fiziologic, iar noţiunea de timp este deja o matematizare.)
Observaţie. — În realitate, este greu de spus dacă noţiunea de durată este primară în raport cu noţiunea de mişcare sau invers. Este posibil ca noţiunea de mişcare să fie primară şi fondată pe consideraţiuni energetice.
Cinematica este studiul matematic al mişcării obiectelor.

6.3.3 Matematizarea problemei precedente

Modelul cel mai simplu al situaţiei descrise la 6.3.2 este următorul:
Spaţiul care ne înconjoară este „modelat" printr-un spaţiu afin euclidian $\mathcal{E}_3$ de dimensiune 3 pe $\mathbf{R}$. Un obiect din acest spaţiu este modelat printr-un

* Această situaţie nu mai este reală în prezent (N.R.)

punct M al lui $\mathscr{E}_3$ şi observatorul printr-un punct O al lui $\mathscr{E}_3$. În aceste condiţii, poziţia lui M în raport cu punctul O este definită prin vectorul $\overrightarrow{OM}$. Pe de altă parte, noţiunea de timp este definită printr-un parametru real pe care-l asociem fiecărui „moment". O durată este definită printr-o diferenţă (pozitivă) a două valori ale parametrului real ataşate momentelor extreme ale acestei durate.

Vectorul $\overrightarrow{OM}$ apare deci ca o funcţie de parametrul t (timpul). Studiul mişcării unui punct corespunde deci în acest model studiului unei aplicaţii M de la $\mathbf{R}$ la $(O, \mathscr{E}_3)$, care poate fi adus la studiul funcţiei vactoriale F definite prin:

$$\overrightarrow{F(t)} = \overrightarrow{OM(t)}.$$

Observaţii. — **1** Am dat aplicaţiei de la $\mathbf{R}$ la $(O, \mathscr{E}_3)$ acelaşi nume ca obiectului căci, în realitate, această corespondenţă este concretizată prin acest obiect M.

2 După particularităţile intuitive pe care le acordăm mişcărilor, funcţia F este continuă şi derivabilă, cu excepţie poate în anumite puncte izolate (care ar corespunde la fenomene de şoc: glonte care ricoşează, ...) în care funcţia este totuşi derivabilă la dreapta şi la stînga.

3 Dacă M se deplasează într-un plan, matematizarea se efectuează în acelaşi fel cu un spaţiu afin euclidian $\mathscr{E}_2$ de dimensiune 2 pe $\mathbf{R}$.

4 Este extrem de verosimil ca modelul pe care l-am dezvoltat să se dovedească inadecvat pentru explicarea unui anumit număr de fenomene observate. Vom conveni să modificăm acest model pentru a descrie mai perfect aceste noi fenomene (exemplu: mecanica relativistă).

5 Cinematica foloseşte un vocabular particular pe care-l vom dezvolta în secţiunea următoare.

6.3.4 Vocabularul cinematicii

Atunci cînd se tratează o problemă de cinematică, cuvinte a căror origine sînt de natură fizică interferează cu modelul matematic. Din această cauză, punctul $M(t)$, imaginea unui număr real t prin aplicaţia M de la $\mathbf{R}$ la spaţiul afin euclidian, model al spaţiului real, este numit *poziţia mobilului la momentul* t şi se poate da numele de *mobil* acestei aplicaţii M.

Un punct O fiind dat în $\mathscr{E}_3$, indicatoarea în $(O, \mathscr{E}_3)$ a funcţiei vectoriale F definite la numărul 6.3.3 este *traiectoria mobilului în raport cu observatorul O.* În raport cu acest observator O, se poate repera poziţia mobilului la momentul t în diverse moduri care corespund diferitelor feluri în care se determină vectorul $\overrightarrow{OM(t)}$. Metoda cea mai curentă este de a da un reper $\mathscr{R}$ al lui $\mathscr{E}_3$, de origine O şi de a repera vectorul $\overrightarrow{OM(t)}$ prin componentele lui $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ în $\mathscr{R}$.

Există şi alte metode, dar nu vom semnala decît pe aceea care constă în a repera vectorul $\overrightarrow{OM(t)}$ sub forma:

$$\overrightarrow{OM(t)} = \rho(t)\vec{i}(t),$$

unde $\vec{i}(t)$ este un vector unitate al direcției lui $\overrightarrow{OM(t)}$ și $\rho(t)$ măsura algebrică a lui $[O, M(t)]$ pe axa definită prin $\vec{i}(t)$. Această metodă este adesea întrebuințată în cazul unei probleme referitoare la un spațiu de dimensiune 2, căci atunci (în raport cu O) este ușor să se repereze $\vec{i}(t)$ prin unghiul lui polar $\theta(t)$ în raport cu un vector fix dat $\vec{j}$ (*fig.* 12).

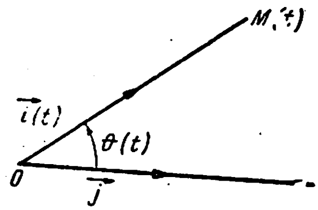


Fig. 12

■ Vectorul derivat în t al funcției F se numește *vector-viteză al mobilului la momentul t.*

Să reamintim că acesta este paralel cu tangenta la traiectorie în punctul $M(t)$.

Se notează de obicei $\overrightarrow{V(t)}$ și se reprezintă prin reprezentantul lui de origine $M(t)$. Indicatoarea funcției vectoriale V într-un reper de origine Ω este adesea numită *hodograful mișcării în raport cu* Ω.

Fiind dat un reper cartezian $\mathcal{R}$ de origine O, componentele în $\mathcal{R}$ ale vectorului-viteză $\overrightarrow{V(t)}$ sînt, cu notațiile date mai sus:

$$f_1'(t), \quad f_2'(t), \quad f_3'(t).$$

În cazul planului, dacă se consideră că vectorul $\overrightarrow{F(t)} = \overrightarrow{OM(t)}$ este definit prin:

$$\overrightarrow{F(t)} = \rho(t)\overrightarrow{i(t)} \quad (\overrightarrow{i(t)} \text{ vector unitate}),$$

avem, după regulile de derivare ale unei funcții vectoriale:

$$\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{F'(t)} = \rho'(t)\overrightarrow{i(t)} + \rho(t)\overrightarrow{i'(t)};$$

$\overrightarrow{i(t)}$ fiind unitar, $\overrightarrow{i(t)}$ și $\overrightarrow{i'(t)}$ sînt ortogonali; ei formează deci o bază (dacă $\overrightarrow{i'(t)}$ nu este nul).

În aceste condiții:

$\rho'(t)\overrightarrow{i(t)}$ este numit uneori *vector-viteză radială* a mobilului la momentul t;

$\rho(t)\overrightarrow{i'(t)}$ este numit uneori *vector-viteză transversă* a mobilului la momentul t.

Norma vectorului-viteză la momentul t este numită *viteză aritmetică* a mobilului la momentul t.

Observație. — Este important să nu se confunde $||F'(t)||$ cu $||F(t)||'$.

■ Valoarea în t a derivatei a doua $\overrightarrow{F''(t)}$ (care vom presupune că există, exceptînd poate o mulțime finită de puncte izolate) este *vectorul-accelerație al mobilului la momentul t.* Se notează adesea: $\overrightarrow{\Gamma(t)}$.

Fiind dat un reper cartezian $\mathcal{R}$ de origine O, componentele în $\mathcal{R}$ ale vectorului accelerație $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ sînt:

$$f_1''(t), \; f_2''(t), \; f_3''(t) \quad \text{(notațiile precedente).}$$

În cazul planului şi dacă $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{F(t)}$ este definit prin:

$$\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{F(t)} = \rho(t)\overrightarrow{i(t)} \ (\overrightarrow{i(t)} \text{ vector unitate}),$$

avem:
$$\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{F'(t)} = \rho'(t)\overrightarrow{i(t)} + \rho(t)\overrightarrow{i'(t)}.$$

Prin urmare: $\overrightarrow{\Gamma(t)} = \overrightarrow{F''(t)} = \rho''(t)\overrightarrow{i(t)} + 2\rho'(t)\overrightarrow{i'(t)} + \rho(t)\overrightarrow{i''(t)}$;

$\overrightarrow{i(t)}$ şi $\overrightarrow{i'(t)}$ formînd o bază (ortonormată) a lui $\mathbf{R}^2$, se poate scrie:

$$\Gamma(t) = r(t)\overrightarrow{i(t)} + \tau(t)\overrightarrow{i'(t)}.$$

În aceste condiţii:

$r(t)\overrightarrow{i(t)}$ este numit uneori *vector-acceleraţie radială* a mobilului la momentul t;

$\tau(t)\overrightarrow{i'(t)}$ este numit uneori *vector-acceleraţie transversă* a mobilului la momentul t.

Să notăm că vectorul $\overrightarrow{i'(t)}$ nu are în mod necesar o normă constantă.

Observaţie. — Există alte moduri de a determina o aplicaţie de la $\mathbf{R}$ la un spaţiu afin euclidian şi de a determina astfel o mişcare. De exemplu, dacă se cunoaşte traiectoria $\mathcal{T}$ a mobilului M şi dacă această traiectorie are un anumit număr de proprietăţi, care permit să se măsoară printr-un număr real lungimea arcelor lui $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ este numită *rectificabilă*), se poate, avînd $\mathcal{T}$ orientată şi înzestrată cu o origine O, determina poziţia $M(t)$ a lui M la momentul t prin abscisa curbilinie $\widehat{OM}(t)$ pe curba $\mathcal{T}$. Studiul mişcării revine atunci la studiul unei funcţii numerice.

Acest lucru se întîmplă frecvent în cazul traiectoriilor simple: drepte, cercuri (a se vedea Algebra, anul I—CDE, capitolul 10).

Pentru a vizualiza acest studiu, se vor trasa diagrame (spaţii, acceleraţii, ...) care nu trebuie în nici un caz, confundate cu traiectoria.

Relaţia care dă abscisa curbilinie s a lui M pe $\mathcal{T}$ în funcţie de timp ia numele de *lege orară a mişcării*.

6.4 MIŞCARE CIRCULARĂ

6.4.1 Definiţii

Se spune că o mişcare este *circulară* dacă traiectoria acestei mişcări este un cerc.

Vom nota cu O centrul cercului C şi cu R raza lui.

Vom presupune că cercul este orientat în sensul direct al planului său şi prevăzut cu o origine A, ceea ce permite să se repereze un punct M al lui C prin abscisa lui curbilinie s:

$$s = \widehat{AM} = R(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})^1.$$

1. Confundăm aici unghiul cu măsura lui în radiani, ceea ce nu are nici un inconvenient practic. Dar se înţelege că trebuie să fim conştienţi de aceasta.

Planul cercului C este raportat la un reper ortonormat direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, astfel că: $\overrightarrow{OA} = R\vec{i}$.

Poziţia punctului M pe C este definită de vectorul $\overrightarrow{OM}$.
Acest vector poate fi definit prin unghiul θ:

$$\theta = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}).$$

Acest unghi este numit *unghi orar* al mobilului M, atunci cînd se foloseşte limbajul cinematicii.

Vectorul $\overrightarrow{OM}$ poate fi determinat într-un cu totul altfel, de exemplu, prin componentele lui scalare în reperul $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

unde x şi y verifică ecuaţia cercului C în $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

■ O mişcare circulară poate fi determinată prin indicarea funcţiei vectoriale $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{F(t)}$ sau încă prin indicarea legii orare a mişcării şi a traiectoriei sale.

Să presupunem că mişcarea este dată prin legea ei orară:

$$s(t) = f(t).$$

Fie $\theta(t)$ unghiul orar al punctului $M(t)$.

Avem: $$s(t) = R\theta(t) = f(t);$$

prin urmare: $$\theta(t) = \frac{f(t)}{R},$$

ceea ce permite să se determine funcţia vectorială F prin:

$$\overrightarrow{F(t)} = R\left[\cos\frac{f(t)}{R}\cdot\vec{i} + \sin\frac{f(t)}{R}\cdot\vec{j}\right] = R\,[\cos\theta(t)\cdot\vec{i} + \sin\theta(t)\cdot\vec{j}].$$

Să observăm că, în cazul unei mişcări circulare într-un plan raportat la un reper ortonormat a cărui origine este centrul cercului, vectorul $\overrightarrow{F(t)}$ are o normă constantă (egală cu **R**).

6.4.2 Vector-viteză

Fie o mişcare circulară într-un plan raportat la un reper a cărui origine este centrul cercului.

Vectorul $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{F(t)}$ are o normă constantă: $\overrightarrow{F(t)} = R\overrightarrow{k(t)}$.

Vectorul viteză $\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{F'(t)}$ este ortogonal cu $\overrightarrow{F(t)} = \overrightarrow{OM(t)}$ (are de altfel aceeaşi direcţie ca tangenta la cerc în punctul $M(t)$). Avem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{F'(t)} &= R \cdot \theta'(t)\ [\sin \theta(t)\vec{i} + \cos \theta(t)\vec{j}] = \\ &= R\overrightarrow{k'(t)} = \\ &= R \cdot \theta'(t)\left[\cos\left[\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right]\vec{i} + \sin\left[\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right]\vec{j}\right].\end{aligned}$$

DEFINIŢIE / Se numeşte viteză unghiulară a unei mişcări circulare, la data t, derivata la momentul t a unghiului orar al lui M (funcţie de t).

Această viteză unghiulară este notată adesea: $\omega(t)$.

Dacă $\overrightarrow{\tau(t)}$ este un vector unitate care formează cu $\dfrac{\overrightarrow{OM(t)}}{R}$ un reper ortonormat direct, avem: $\overrightarrow{V(t)} = R\omega(t)\overrightarrow{\tau(t)}$,

şi:

$$\boxed{\vec{V} = R\omega \cdot \vec{\tau}}$$

6.4.3 Vector-acceleraţie

Avem: $\overrightarrow{V(t)} = R\omega(t)\left[\cos\left[\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right]\vec{i} + \sin\left[\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right]\vec{j}\right] = R\omega(t)\overrightarrow{\tau(t)}$;

deci: $$\overrightarrow{\Gamma(t)} = R\omega'(t)\overrightarrow{\tau(t)} + R\omega(t)\overrightarrow{\tau'(t)};$$

dar: $$\overrightarrow{\tau'(t)} = \omega(t)\left[\cos\left[\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right]\vec{i} + \sin\left[\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right]\vec{j}\right];$$

vectorul $\overrightarrow{\tau'(t)}$ este deci coliniar cu $\overrightarrow{OM(t)}$, deci normal (ortogonal) la traiectorie în punctul t:

$$\overrightarrow{\tau'(t)} = \omega(t)\ [-\overrightarrow{k(t)}];$$

prin urmare: $$\overrightarrow{\Gamma(t)} = \overrightarrow{F''(t)} = R\omega'(t)\ \overrightarrow{\tau(t)} - R\omega^2(t)\ \overrightarrow{k(t)}.$$

Se spune:

$R\omega'(t)\overrightarrow{\tau(t)}$ este *acceleraţia tangenţială* a mişcării;

$-R\omega^2(t)\overrightarrow{k(t)}$ este *acceleraţia normală* a mişcării.

Observaţie. — Se defineşte adesea vectorul $\overrightarrow{n(t)} = -\overrightarrow{k(t)}$ normal la curbă.

Componenta tangențială a accelerației este $R\omega'(t)$ şi componenta normală este $R\omega^2(t)$:

$$\boxed{\vec{\Gamma} = R\omega^2\vec{n} + R\omega'\vec{\tau}}$$

Este de remarcat că, în cazul unei mişcări circulare, accelerația normală a mişcării este dirijată spre centrul cercului. Se spune că *accelerația este centripetă.*

6.4.4 Mişcarea circulară uniformă

DEFINIȚIE / O mişcare circulară este uniformă dacă şi numai dacă cele două condiții de mai jos sînt realizate:
a) accelerația mişcării este definită în fiecare moment;
b) norma vectorului ei viteză este constantă.

Cu notațiile de la nr. 6.4.3, avem:

$$\|\vec{V}\| = |R\omega(t)| = R|\omega(t)|.$$

Pe de altă parte, ω este o funcție derivabilă, deci continuă. Prin urmare:

O mişcare circulară este uniformă dacă şi numai dacă viteza ei unghiulară este constantă.

Avem atunci:

$$\theta'(t) = \omega,$$

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0 \qquad (\theta_0 \in \mathbf{R}).$$

Se deduce de aici expresia funcției vectoriale F:

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{F}(t) = R\,[\cos(\omega t + \theta_0)\vec{i} + \sin(\omega t + \theta_0)\vec{j}].$$

Funcția F este periodică. Se poate deci enunța:

O mişcare circulară uniformă, de viteză unghiulară ω, este periodică, de perioadă T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Observație. — θ_0 este unghiul orar al mobilului la momentul inițial. Este posibil, în numeroase cazuri, să se aleagă reperul în care se lucrează, astfel ca θ_0 să fie nul.

VITEZA ŞI ACCELERAȚIA

Fie o mişcare circulară uniformă (notațiile de mai sus). Avem:

$$\overrightarrow{F(t)} = \overrightarrow{OM(t)} = R\,[\cos(\omega t + \theta_0)\cdot\vec{i} + \sin(\omega t + \theta_0)\cdot\vec{j}],$$

$$\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{F'(t)} = R\omega\,[-\sin(\omega t + \theta_0)\cdot\vec{i} + \cos(\omega t + \theta_0)\cdot\vec{j}],$$

$$\overrightarrow{\Gamma(t)} = \overrightarrow{F''(t)} = -R\omega^2\,[\cos(\omega t + \theta_0)\cdot\vec{i} + \sin(\omega t + \theta_0)\cdot\vec{j}].$$

Dacă se pune:

$$\overrightarrow{F(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j},$$

avem:

$$\overrightarrow{V(t)} = -\omega y(t)\vec{i} + x(t)\vec{j},$$

$$\overrightarrow{\Gamma(t)} = -\omega^2 x(t)\vec{i} - \omega^2 y(t)\vec{j} = R\omega^2\vec{n}.$$

Într-o mişcare circulară uniformă, de viteză unghiulară ω pe un cerc de rază R, acceleraţia tangenţială este nulă, iar acceleraţia normală, centripetă (nr. 6.4.3), are ca modul $\omega^2 R$.

6.5 MIŞCARE ELICOIDALĂ

6.5.1 Mişcări elicoidale

DEFINIŢIE / O mişcare este numită elicoidală dacă traiectoria ei este o elice (nr. 6.2.3).

O asemenea mişcare este definită atunci printr-o funcţie vectorială F definită prin:

$$\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{F(t)} = R\cos f(t)\cdot\vec{i} + R\sin f(t)\cdot\vec{j} + hf(t)\cdot\vec{k},$$

unde $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este un reper ortonormat al spaţiului afin euclidian $\mathcal{E}_3$.
Se observă: h este *pasul* elicei.
O mişcare elicoidală poate fi considerată ca fiind compusă dintr-o mişcare circulară plană (funcţia F_1) şi o mişcare rectilinie (funcţia F_2):

$$\overrightarrow{F(t)} = \overrightarrow{F_1(t)} + \overrightarrow{F_2(t)}.$$

Vectorul viteză al acestei mişcări este definit prin:

$$\overrightarrow{V(t)} = -Rf'(t)\sin f(t)\vec{i} + Rf'(t)\cos f(t)\vec{j} + hf'(t)\vec{k}.$$

Dacă se pune $f'(t) = \omega$ (ca în cazul mişcării circulare).

avem:

$$\overrightarrow{V(t)} = R\omega\,[-\sin f(t)\vec{i} + \cos f(t)\vec{j}] + h\omega\vec{k}.$$

Reperul $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fiind ortonormat, avem:

$$||\overrightarrow{V(t)}||^2 = (R^2 + h^2)\omega^2.$$

6.5.2 Mişcarea elicoidală uniformă

DEFINIŢIE / O mişcare elicoidală este uniformă dacă şi numai dacă cele două condiţii de mai jos sînt realizate:
a) acceleraţia ei este definită în fiecare moment;
b) norma vectorului ei viteză este constantă.

Ca şi în cazul mişcării circulare uniforme, se deduce:

> **O mişcare elicoidală este uniformă dacă şi numai dacă viteza ei unghiulară ω este constantă.**

Să observăm că această viteză unghiulară constantă este în acelaşi timp viteza de translaţie a proiecţiei punctului M pe axa $(O, \vec{k})$.

■ VITEZA ŞI ACCELERAŢIA

Fie o mişcare elicoidală uniformă (notaţiile de mai sus). Avem:

$$\overrightarrow{F(t)} = R\,[\cos(\omega t + \theta_0)\vec{i} + \sin(\omega t + \theta_0)\vec{j}] + h(\omega t + \theta_0)\vec{k},$$

$$\overrightarrow{V(t)} = R\omega\,[-\sin(\omega t + \theta_0)\vec{i} + \cos(\omega t + \theta_0)\vec{j}] + h\omega\vec{k},$$

$$\overrightarrow{\Gamma(t)} = R\omega^2\,[-\cos(\omega t + \theta_0)\vec{i} - \sin(\omega t + \theta_0)\vec{j}].$$

Să observăm că acceleraţia este identică cu aceea a mişcării circulare uniforme proiectate pe planul $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Acceleraţia tangenţială este nulă.

EXERCIŢII

6.23 Un punct $M(t)$ este definit într-un plan raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ prin funcţia vectorială următoare:

$$\overrightarrow{F(t)} = \overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j},$$

cu:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t - \sin t \\ y(t) = \cos t + \sin t. \end{cases}$$

Să se construiască traiectoria şi hodograful în raport cu O. Să se calculeze vectorul acceleraţie. (Reamintim că hodograful în raport cu O este indicatoarea funcţiei vectoriale V într-un reper de origine O.)

6.24 Un punct M al planului P, raportat la un reper $(O, \vec{i}, \vec{j})$, descrie parabola $y - x^2 = 0$ după o lege astfel că proiecţia lui M pe dreapta $(O, \vec{i})$ are o mişcare uniformă de viteză a.
1° Să se exprime norma vectorului viteză la data t în funcţie de x.
2° Să se determine hodograful şi vectorul acceleraţie la data t.

6.25 1° Se presupune că proiecţia unui mobil M, pe o axă, paralel cu un plan P, are o mişcare rectilinie uniformă (vector-viteză constant). Să se demonstreze că hodograful este o curbă plană.
2° Să se demonstreze că, reciproc, dacă hodograful în raport cu un punct O este într-un plan Q, care nu conţine pe O, proiecţia mobilului, paralel cu Q, pe orice axă neparalelă la Q, are o mişcare uniformă.

6.26 Dacă traiectoria unui punct M este plană hodograful în raport cu un punct oarecare O este într-un plan care trece prin O. Ce se poate spune, reciproc, despre o mişcare astfel că hodograful în raport cu un punct O este într-un plan care trece prin O?

6.27 Să se caracterizeze o mişcare astfel încît hodograful în raport cu un punct O este o dreaptă D care nu trece prin O.

6.28 Într-un plan raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$, se notează prin $M(t)$ punctul ale cărui coordonate sînt date în funcţie de timp prin:

$$X(t) = 2t, \qquad Y(t) = t^2 - 1.$$

1° Să se determine traiectoria.
2° Să se calculeze componentele vectorului viteză şi acelea ale vectorului acceleraţie la data t. Să se indice prin săgeţi sensul mişcării.
3° Să se construiască hodograful în raport cu punctul O.

6.29 Un punct M a cărei poziţie $M(t)$ depinde de un parametru real, t, descrie o curbă plană Γ.
1° Se presupune că la momentul t_0 norma vitezei se anulează. Ce se poate spune despre mişcarea punctului M în acest moment?
2° Se presupune că curba Γ este orientată şi că tangenta în fiecare punct se orientează la fel ca Γ. Fie v măsura algebrică a vectorului viteză pe tangenta orientată.
a) Ce se poate spune dacă v se anulează fără să schimbe semnul în t_0?
b) Ce se poate spune dacă v se anulează schimbînd semnul în t_0?

6.30 Mişcarea unui punct M, în planul raportat la un reper ortonormat, este definită prin:

$$x(t) = t + 2, \qquad y(t) = \frac{1}{t^2 + 4t + 3}.$$

1° Să se studieze mişcarea începînd cu $t = 0$. Să se demonstreze că traiectoria se află pe curba de ecuaţie:

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

În ce sens este aceasta parcursă?
2° Să se determine hodograful în raport cu originea O. Ce se poate spune despre vectorul acceleraţie?

6.31 Un punct se mişcă în plan începînd de la $t = 1$. Avem în funcţie de timp:

$$x(t) = \mathrm{Log}\, t, \qquad y(t) = t + \frac{1}{t}.$$

(Log înseamnă logaritm neperian).
1° Să se determine şi să se construiască hodograful mişcării.
2° Să se calculeze valoarea algebrică a vitezei. Să se deducă lungimea arcului parcurs între datele $t = 2$ şi $t = 4$.

6.32 Fie, într-un plan P, un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ şi un mobil M care se deplasează în acest plan. La data t, coordonatele sale sînt definite prin:

$$x(t) = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}, \; y(t) = 2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}.$$

1° Care este traiectoria?
2° Să se calculeze componentele, la data t, ale vectorului viteză $\vec{V}$ şi ale vectorului acceleraţie $\vec{\Gamma}$ ale acestui mobil. Ce relaţie există între vectorii $\overrightarrow{OM}$ şi $\vec{\Gamma}$?
După cît timp mobilul revine la aceeaşi poziţie pe curbă?
3° Să se determine poziţiile mobilului şi coordonatele lui $\vec{V}$, între datele $t_1 = 0$ şi $t_2 = 4\pi$, pentru a avea un vector acceleraţie de lungime $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

6.33 Planul este raportat la un reper ortonormat $\mathcal{R}$. Coordonatele unui punct mobil M sînt date în funcţie de timpul t prin:

$$x(t) = -t + 2,$$
$$y(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t + 4.$$

1° Să se alcătuiască ecuaţia carteziană a traiectoriei şi să se construiască traiectoria pentru: $0 \leqslant t \leqslant 4$. Să se indice sensul de deplasare a mobilului pe traiectorie.

2° Să se calculeze componentele vectorului viteză şi acelea ale vectorului accelerație în funcție de timp. Să se reprezinte aceste valori la $t = \frac{1}{2}$.
3° Pentru care t modulul vectorului viteză este minim? Care este atunci valoarea sa? Ce se poate spune în acest caz despre vectorul viteză şi despre vectorul accelerație?

6.34 Un punct M este în mişcare pe parabola de ecuație $y^2 - 4ax = 0$ într-un reper ortonormat $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Proiecția m a lui M pe axa definită de $(O, \vec{j})$ are o mişcare definită de:

$$\overrightarrow{Om} = \varphi(t)\vec{j} = a \sin \omega t \vec{j}.$$

Să se studieze mişcarea proiecției m_1 a lui M pe axa definită de $(O, \vec{i})$.

6.35 Fie $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un reper ortonormat al planului. Fie C un cerc de rază R, care trece prin O şi cu centru pe axa absciselor. Fie $\overrightarrow{k(t)}$ un vector unitar astfel că:

$$\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{k(t)})} = \omega t \qquad (\omega \in \mathbf{R}).$$

Fie în fine $D(t)$ dreapta care trece prin O şi de vector director $\overrightarrow{k(t)}$. $D(t)$ taie pe C în O şi $M(t)$.
1° Să se studieze mişcarea lui $M(t)$ pe cerc.
2° Să se studieze mişcarea lui $M(t)$ pe dreapta D ($M(t)$ este în mişcare pe dreapta D considerată ca fixă).

6.36 Folosind coordonatele vectorului viteză al unei mişcări elicoidale, să se demonstreze că tangenta la elicea circulară face un unghi constant cu axa cilindrului. Să se studieze hodograful unei mişcări helicoidale uniforme, în raport cu un punct oarecare O.

6.37 Un punct M are o mişcare elicoidală uniformă. El se proiectează ortogonal în H pe axa cilindrului. Să se studieze mişcarea mijlocului m al lui HM.

6.38 Se dă elicea, indicatoare într-un reper ortonormat $\mathcal{R}$ a funcției F definită prin:

$$x(\theta) = \cos \theta, \ y(\theta) = \sin \theta, \ z(\theta) = \theta.$$

Un punct M descrie elicea astfel că hodograful său în raport cu O este cercul de ecuație:

$$X^2 + Y^2 - 1 = 0, \qquad Z - 2a = 0.$$

1° Să se calculeze a. (Se va alege a mai mare ca 0.)
2° Să se exprime θ în funcție de t ştiind că, pentru $t = 0$, avem $\theta = 0$.

6.39 Se dă un semicerc de diametru $[A, B] = 2$. Un punct M se mişcă pe acest semicerc în sens trigonometric astfel că viteza unghiulară a lui AM are o valoare constantă; semicercul este descris în π secunde.
1° Care este vectorul viteză al punctului M la o dată dată t, cuprinsă între 0 şi π.
2° Fie N astfel că:

$$\|\overrightarrow{MN}\| = l \text{ (lungimea dată) şi } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} > 0.$$

Să se construiască vectorul viteză $\overrightarrow{NV}$ al lui N la data t. Să se calculeze norma acestui vector în funcție de l şi t. Să se calculeze l pentru ca la data $t = \frac{\pi}{4}$, norma lui $\overrightarrow{NV}$ să fie egală cu 2.

3° Să se găsească, la data $\frac{\pi}{4}$, mulțimea punctelor V, extremități ale vectorilor viteză $\overrightarrow{NV}$ cînd lungimii l i se dau toate valorile posibile.
4° Să se demonstreze că toți vectorii viteză $\overrightarrow{NV}$ ai diferitelor puncte N, considerați ca mai înainte la acelaşi $t = \frac{\pi}{4}$, sînt tangenți la aceeaşi parabolă de vîrf A şi de tangentă la vîrf AN.

6.40 Se dă un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Un mobil M descrie dreapta $(O, \vec{i})$ cu o mişcare uniformă variată.

1° Să se calculeze abscisa lui $x(t)$ la data t, ştiind că la data $t = 1$ mobilul trece prin originea O a absciselor cu o viteză algebrică v egală cu $+2$ şi că la $t = 2$ are o abscisă egală cu $+5$.
2° Să se construiască diagrama spaţiilor şi diagrama vitezelor pentru: $0 \leqslant t \leqslant 3$.

3° Să se determine t pentru care raportul $\frac{x}{v}$ are o valoare dată k, punctul M fiind obligat, în plus, să aibă o abscisă mai mică decît 1. Discuţie.

6.41 Se dă un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ şi un punct A de coordonate $\binom{a}{b}$ $(a>0)$. Un prim mobil, M, de abscisă x, descrie dreapta $(O, \vec{i})$ cu o mişcare uniformă; pentru $t = 0$, $x = 0$; pentru $t = 1$, $x = 1$. Un al doilea mobil, P, de ordonată y, descrie paralela la dreapta $(O, \vec{j})$ trecînd prin A cu o mişcare uniform variată; pentru $t = 0$ şi $t = 4$, $y - b = 0$; pentru $t = 1$, $y - b = 1{,}5$.
1° Să se calculeze x şi y în funcţie de t.
2° Care este relaţia pe care trebuie să o satisfacă a şi b pentru ca cele două mobile să se întîlnească?
Să se traseze curba C pe care trebuie să se aleagă A pentru ca întîlnirea să aibă loc.
3° Pentru o poziţie iniţială A a lui P, există un punct A' de ordonată maximă.
Să se demonstreze că se trece simplu de la A la A' şi să se construiască curba C', mulţimea punctelor A' cînd A este pe C.
4° Să se calculeze viteza v a lui P în momentul întîlnirii cu M şi să se distingă pe C punctele A care dau pe v mai mare ca zero de acelea care dau pe v mai mic ca zero.

6.42 Un punct M este mobil într-un plan înzestrat cu un reper $\mathcal{R}$ şi coordonatele sale, în funcţie de timpul t, sînt date de relaţiile:

$$x(t) = a(1 + \cos t), \qquad y(t) = b \sin t,$$

a şi b fiind două lungimi date $(a > b)$.
1° Să se demonstreze că traiectoria punctului M este o elipsă.
Să se determine poziţia acestei elipse.
2° Să se calculeze, la t oarecare, viteza mobilului şi să se caute la ce t viteza mobilului are o valoare absolută egală cu un număr pozitiv dat v. Discuţie.
3° Vectorul viteză poate fi ortogonal cu vectorul acceleraţie?
4° Să se determine hodograful mişcării punctului M.

6.43 Se dă, într-un plan, un reper ortonormat $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
Coordonatele $x(t)$ şi $y(t)$ ale unui punct M, mobil în plan, sînt date de:

$$x(t) = \cos t,$$

$$y(t) = \sin t - \cos t.$$

1° Să se studieze variaţiile lui x şi y şi să se construiască traiectoria.

2° Să se studieze variaţiile normei $r(t)$ a razei vectoare $\overrightarrow{OM}$, după ce s-a pus r^2 sub forma:

$$a + b \cos(2t + \alpha),$$

a, b şi α fiind constante.
3° Ce relaţie există între valorile lui t care corespund maximului şi minimului lui $r(t)$?
4° Ce relaţie există între valorile lui t pentru care r are una şi aceeaşi valoare?
5° Să se determine vectorul viteză. Să se calculeze norma $v(t)$ a acestui vector.
Să se demonstreze că hodograful mişcării este o curbă egală cu traiectoria.
Ce relaţie există între $r(t)$ şi $v(t)$?
6° Să se determine vectorul acceleraţie.

TABLA DE MATERII

Tiraj: 17 900. Ex. S.P. 80 ex. broşate.
Coli de tipar: 17,5.
Hîrtia: scris tip I A 70×100/45. Format: 16/70×100.
Bun de tipar: 5. XI. 1975. Ediţia: 1975.
Nr. plan: 6044.

Întreprinderea Poligrafică Cluj
Str. Brassai Nr. 5—7
Municipiul Cluj-Napoca
Republica Socialistă România
Comanda Nr. 460

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ – BUCUREŞTI

Au apărut:

Alef$_0$ *Algebră*,	vol. I, Mulţimi, aplicaţii, numere reale vol. II, Funcţii şi ecuaţii numerice
Alef$_0$, *Geometrie*,	vol. I, Plan afin, plan vectorial vol. II, Geometrie vectorială, geometrie afină vol. III, Geometrie metrică vol. IV, Geometrie în spaţiu şi geometrie descriptivă
Alef$_0$, *Algebră*,	vol. I, Mulţimi, statistică, probabilităţi vol. II, Funcţii numerice, aplicaţii diverse
Alef$_0$, *Geometrie*,	vol. I, Spaţii vectoriale, spaţii afine vol. II, Geometrie metrică
Alef$_0$, *Algebră*,	Numere întregi
Alef$_0$, *Algebră*,	Numere reale, calcul numeric, numere complexe
Alef$_0$, *Geometrie*,	vol. I, II, Elemente de geometrie afină şi euclidiană
Alef$_0$, *Analiză*,	vol. I, Calcul diferenţial, aplicaţii vol. II, Calcul integral, aplicaţii
Alef$_0$, *Probleme*	

Vol. I–II: Lei 22,90