Калбергенов Г.Е.

МАТЕМАТИКА

в таблицах и схемах

Для школьников

Москва
«Лист Нью»
2002

ББК 22.1
К 17

К 17 Калбергенов Г.Е. Математика в таблицах и схемах. Учебно-образовательная серия. — М.: Лист Нью. 2002. — 112 с.

В данном пособии в схематичной и доступной форме представлены основные определения, теоремы и формулы элементарной математики. Во всех разделах разобраны примеры, позволяющие лучше понять существо рассматриваемых вопросов. Пособие может использоваться как справочное при обобщающем повторении школьного курса.

Пособие предназначено абитуриентам, учащимся старших классов школ, лицеев и гимназий.

ISBN 5-7871-0020-4 ББК 22.1

Автор-составитель *Калбергенов Г.Е.*
Художник *Шалаева Т.И.*
Компьютерная вёрстка *Егоренкова И.М.*

ISBN 5-7871-0020-4

Содержание

Греческий алфавит

Α α	*альфа*	Ν ν	*ню (ни)*
Β β	*бэта*	Ξ ξ	*кси*
Γ γ	*гамма*	Ο ο	*омикрон*
Δ δ	*дельта*	Π π	*пи*
Ε ε	*эпсилон*	Ρ ρ	*ро*
Ζ ζ	*дзета*	Σ σ	*сигма*
Η η	*эта*	Τ τ	*тау*
Θ θ	*тэта*	Υ υ	*юпсилон (ипсилон)*
Ι ι	*йота*	Φ φ	*фи*
Κ κ	*каппа*	Χ χ	*хи*
Λ λ	*ламбда*	Ψ ψ	*пси*
Μ μ	*мю (ми)*	Ω ω	*омега*

Множество

В математике понятие **множество** используется для описания совокупности предметов и объектов. При этом предполагается, что предметы (объекты) данной совокупности можно отличить друг от друга и от предметов, не входящих в эту совокупность.

Примеры:

Множество страниц данной книги
Семейство звезд Большой Медведицы

Множество всех натуральных чисел
Множество всех точек данной прямой

Множество может содержать конечное или бесконечное число объектов произвольной природы

Объекты, из которых состоит множество, называются его **элементами.** Множества чаще всего обозначают большими буквами латинского алфавита, а их элементы – малыми буквами.

Запись $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ обозначает, что множество X состоит из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Если x – элемент множества X, то пишут $x \in X$

(читается "x принадлежит множеству X")

Если x не является элементом множества X, то пишут $x \notin X$

("x не принадлежит множеству X")

Пример: Если через N обозначено множество натуральных чисел, то $2 \in N$, $105 \in N$, $0 \notin N$, $-5 \notin N$, $1/3 \notin N$.

Пусть A и B – два множества.

Если A и B состоят из одних и тех же элементов, то говорят, что они **совпадают**, а пишут $A = B$.

Пример:

Множество учащихся всех классов школы №186 (множество A) и множество всех учащихся той же школы (множество B) совпадают: $A = B$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом $\varnothing$

Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A и множеству B, называется **пересечением** множеств A и B и обозначается $A \cap B$.

Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих или множеству A или множеству B, называется **объединением** множеств A и B и обозначается $A \cup B$.

Примеры: *Рассмотрим два множества A и B.*

1) $A = \{0, 1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \cap B = \{0, 1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 3\}$;

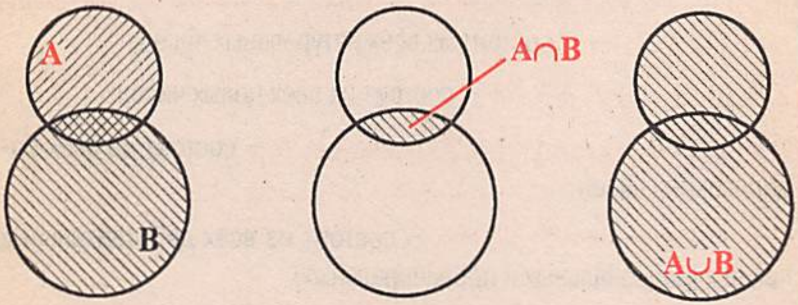
$A \cup B = \{0, 1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

2) $A = \{0, 1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$

$A \cap B = \{0, 1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \{\varnothing\}$;

$A \cup B = \{0, 1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

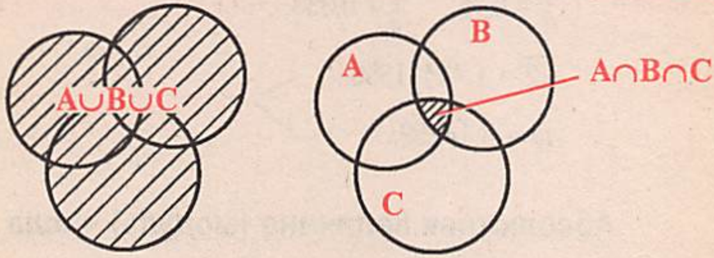
Определения пересечения и объединения множеств хорошо иллюстрируются при наглядном изображении множеств на плоскости. Множества A и B схематически изображаются кругами.



Объединение и пересечение трех и более множеств

Объединение множеств A, B и C есть множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств A, B или C.

Пересечение множеств A, B и C есть множество всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B, и множеству C.



Пример: Если A, B и C – соответственно множества учеников класса, решивших на контрольной по математике задачу по алгебре, задачу по геометрии, задачу по тригонометрии, то пересечение этих множеств есть множество учеников этого класса, решивших все три задачи.

Числовые множества и некоторые стандартные обозначения

В элементарной математике выделяют следующие множества чисел:

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – состоит из всех натуральных чисел;

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ – состоит из всех целых чисел;

$Q = \{\frac{m}{n}\}$, где $m \in Z$, $n \in Z$, причем $n \neq 0$ – состоит из всех рациональных чисел

$R = \{x\}$, где $-\infty < x < +\infty$ – состоит из всех действительных чисел x (рациональных и иррациональных)

Всякое **рациональное число** $\frac{m}{n}$ является либо целым, либо его можно представить в виде конечной или периодической бесконечной десятичной дроби (см. пункт "Десятичные дроби").

Всякое **иррациональное число** представляется непериодической бесконечной десятичной дробью.

Пример: $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ – рациональные числа

$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$;
$\pi = 3{,}14159\ldots$
– иррациональные числа

Абсолютная величина (модуль) числа

Абсолютной величиной (модулем) числа b называется выражение

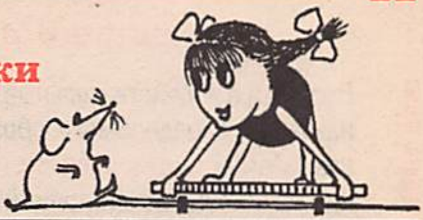
$$|b| = \begin{cases} b, & \text{если } b \geq 0, \\ -b, & \text{если } b < 0. \end{cases}$$

$|5| = 5$,

$|0| = 0$,

$|-5| = -(-5) = 5$

Числовая ось. Координата точки



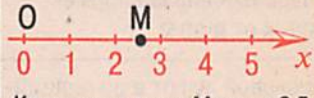
Действительные числа изображаются точками координатной прямой (числовой оси).

Координатная прямая – это всякая прямая, на которой выбраны направление, принимаемое за положительное, точка – начало отсчета и единица измерения – масштабный отрезок, длина которого принимается равной единице.

Точка О разбивает координатную прямую на два луча, один из которых имеет положительное направление и называется **положительным лучом**, другой – **отрицательным**.

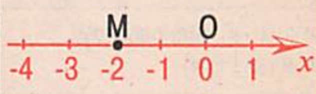
Число, изображением которого на координатной прямой является точка М, называется **координатой** точки М. Координата начальной точки О равна нулю.

Координата любой точки М, лежащей на положительном луче, равна длине отрезка ОМ: $x = |OM|$



Координата точки М равна 2,5

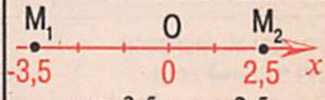
Координата любой точки М, лежащей на отрицательном луче, равна длине отрезка ОМ, но взятой со знаком минус: $x = -|OM|$



Координата точки М равна -2

Расстояние между двумя точками M_1 и M_2 координатной прямой равно абсолютной величине разности их координат x_1 и x_2:

$$|M_1M_2| = |x_1 - x_2|$$



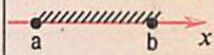
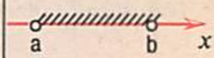
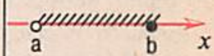
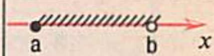
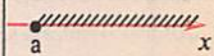
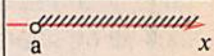
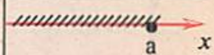
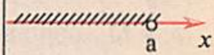
$x_1 = -3{,}5$; $x_2 = 2{,}5$

$|M_1M_2| = |-3{,}5-2{,}5| = |-6| = -(-6) = 6$

Числовые промежутки

Пусть a и b – действительные числа и a < b. В таблице даны названия, определения и обозначения числовых множеств, называемых **числовыми промежутками**, и их изображение на координатной прямой. Каждый из числовых промежутков определяется как множество действительных чисел x, удовлетворяющих определенным неравенствам.

Таблица (числовые промежутки)

НАЗВАНИЕ	Неравенство, определяющее множество	Обозначение	Изображение
отрезок от **a** до **b** (замкнутый промежуток)	$a \le x \le b$	$[a; b]$	
интервал от **a** до **b** (открытый промежуток)	$a < x < b$	$(a; b)$	
открытый слева промежуток от **a** до **b**	$a < x \le b$	$(a; b]$	
открытый справа промежуток от **a** до **b**	$a \le x < b$	$[a; b)$	
числовой луч от **a** до положительной бесконечности **(+∞)**	$a \le x$	$[a; +\infty)$	
открытый числовой луч от a до **(+∞)**	$a < x$	$(a; +\infty)$	
числовой луч от отрицательной бесконечности **(-∞)** до **a**	$x \le a$	$(-\infty; a]$	
открытый числовой луч от **(-∞)** до **a**	$x < a$	$(-\infty; a)$	

Множество действительных чисел R обозначается также $(-\infty; +\infty)$ и называется **числовой прямой**

АРИФМЕТИКА

Арифметические действия

ОПРЕДЕЛЕНИЯ	Примеры
1. ***Сложение.*** Понятие о том, что такое сложение, возникает из таких простых фактов, что оно не нуждается в определении и не может быть определено формально. Числа, которые складываются, называются **слагаемыми**. Число, получающееся в результате сложения, называется **суммой**.	$7 + 5 = 12$ 7 и 5 – слагаемые; 12 – сумма
2. ***Вычитание*** есть нахождение *разности* двух чисел путем уменьшения одного числа (**уменьшаемого**) на величину второго (**вычитаемого**).	$11 - 3 = 8$ 11 – уменьшаемое; 3 – вычитаемое; 8 – разность
3. ***Умножение***. Умножить некоторое число (**множимое**) на целое число (**множитель**) – значит повторить множимое слагаемым столько раз, сколько указывает множитель. Результат называется **произведением**.	$12 \times 5 = 60$, или $12 \cdot 5 = 60$ 12 – множимое; 5 – множитель; 60 – произведение $12 \times 5 = 12+12+12+12+12 = 60$
4. ***Деление*** есть нахождение одного из сомножителей по произведению и другому сомножителю. Данное произведение называется **делимым**, данный сомножитель – **делителем**, искомый сомножитель – **частным**.	$48:6 = 8$ или $\frac{48}{6} = 8$ 48 – делимое; 6 – делитель; 8 – частное

5. ***Возведение в степень.*** Возвести число в целую (вторую, третью, четвертую и т.д.) степень – значит повторить его сомножителем два, три, четыре и т.д. раз.

$$2^3 = 8$$

2 – основание степени;
8 – степень;
$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

Вторая степень называется иначе квадратом, третья степень – кубом.

6. ***Извлечение корня*** – это нахождение числа, которое при возведении в степень корня дает подкоренное число.

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

81 – подкоренное число;
4 – показатель корня;
3 – корень

Корень второй степени называется иначе квадратным, корень третьей степени – кубическим. При знаке квадратного корня показатель корня принято опускать: $\sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow \sqrt[2]{16} = 4.$

Порядок арифметических действий

При выполнении арифметических действий соблюдается следующий порядок:

1. Выполняются действия, заключенные в скобки. При этом вначале производится умножение и деление, а потом сложение и вычитание.

$8 + (4 + 3)\cdot7 - 3 = 8 + 7\cdot7 - 3 = 8 + 49 - 3 = 54$

2. Выполняются действия без скобок. При этом также вначале производится умножение и деление, а потом сложение и вычитание.

$81:3 - 5\cdot(7 - 3\cdot2) = 81:3 - 5\cdot(7 - 6) = 81:3 - 5\cdot1 =$
$= 27 - 5 = 22$

3. Если выражение, заключенное в скобки, также содержит скобки, то вначале выполняются действия во внутренних скобках.

$8 + 4\cdot(16 - 25:(2\cdot4 - 3) = 8 + 4\cdot(16 - 25:(8 - 3)) =$
$= 8 + 4\cdot(16 - 25:5) = 8 + 4\cdot(16 - 5) = 8 + 4\cdot11 =$
$= 8 + 44 = 52$

Признаки делимости

Признак делимости на 2. Число, делящееся на 2, называется четным, не делящееся – нечетным. Число делится на два, если его последняя цифра четная или нуль.	**52734** делится на 2, т.к. последняя цифра 4 – четная; **7681** не делится на 2, т.к. 1 – нечетная цифра; **1250** делится на 2.
Признак делимости на 4. Число делится на 4, если две последние его цифры нули или образуют число, делящееся на 4.	**31700** делится на 4; **814** не делится на 4, т.к. 14 не делится на 4; **608** делится на 4, т.к. 08 дают число 8, делящееся на 4.
Признаки делимости на 3 и на 9. На 3 делятся только те числа, у которых сумма цифр делится на 3; на 9 – только те, у которых сумма цифр делится на 9.	Число **17835** делится на 3 и не делится на 9, т.к. сумма его цирф 1+7+8+3+5=24 делится на 3 и не делится на 9.
Признак делимости на 5. На 5 делятся числа, последняя цифра которых 0 или 5.	**240** делится на 5 (последняя цифра 0); **554** не делится на 5 (последняя цифра 4).
Признак делимости на 6. Число делится на 6, если оно делится одновременно на 2 и на 3.	**126** делится на 6, т.к. оно делится и на 2, и на 3.
Признаки делимости на 10, 100 и 1000. На 10 делятся только те числа, последняя цифра которых нуль, на 100 – только те числа, у которых две последние цифры нули, на 1000 – только те, у которых три последние цифры нули.	**8200** делится на 10 и на 100; **842000** делится на 10, 100, 1000.

Простые и составные числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Простыми называются натуральные числа, кроме 1, которые делятся только на самих себя и на 1. Остальные числа называются составными.

Наибольшим общим делителем (НОД) нескольких натуральных чисел называется самое большое натуральное число, на которое все эти числа делятся.

Наименьшим общим кратным (НОК) нескольких натуральных чисел называется самое маленькое натуральное число, которое делится на все эти числа.

Простые числа, не превосходящие 50 → 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Любое составное число единственным образом можно представить в виде произведения простых множителей →

$72 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3 = 2^3\cdot3^2$

$90 = 2\cdot3\cdot3\cdot5 = 2\cdot3^2\cdot5$

Для нахождения НОД каждое из чисел раскладывают на простые множители и вычисляют произведение общих простых множителей, взяв каждый из них с наименьшим (из имеющихся) показателем.

Для нахождения НОК каждое из чисел раскладывают на простые множители и вычисляют произведение всех получившихся простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим (из имеющихся) показателем.

$60 = 2^2\cdot3\cdot5$

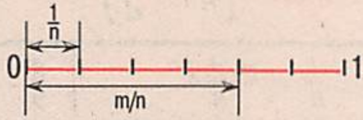
$280 = 2^3\cdot5\cdot7$

НОД (60, 280) $= 2^2\cdot5 = 20$

НОК (60, 280) $= 2^3\cdot3\cdot5\cdot7 = 840$

Простые дроби

Выражение вида $\frac{m}{n}$ или m/n, где m и n – целые числа



Число n, показывающее, на сколько равных частей (долей) разделена единица, называется знаменателем дроби; число m, показывающее количество взятых долей, – числителем дроби.

$m<n$ → m/n – правильная дробь → $\frac{3}{5}$ (три пятых)

$m \geq n$ → m/n – неправильная дробь → $\frac{5}{5}$, $\frac{19}{7}$

Любую неправильную дробь можно представить в виде суммы целого числа и правильной дроби (операция выделения целой части)	$\frac{19}{7} = 2 + \frac{5}{7} = 2\frac{5}{7}$, где 2 – целая часть от деления числа 19 на 7, а 5 – остаток
$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot s}{n \cdot s}$ («расширение» дроби)	$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{18}{30}$
$\frac{m}{n} = \frac{m : s}{n : s}$ (сокращение дроби)	$\frac{18}{30} = \frac{18 : 6}{30 : 6} = \frac{3}{5}$

Сравнение дробей $\left(\frac{m}{n}\text{ и }\frac{l}{d}\right)$

1) $m=l,\ n \leq d \iff \frac{m}{n} \geq \frac{m}{d}$	$\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, $\frac{3}{7} > \frac{3}{8}$
2) $n=d,\ m \geq l \iff \frac{m}{n} \geq \frac{l}{n}$	$\frac{6}{7} > \frac{5}{7}$, $\frac{10}{11} > \frac{9}{11}$
3) $m \neq l,\ n \neq d$ Операция приведения к общему знаменателю $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot d}{n \cdot d}$ $\frac{l}{d} = \frac{l \cdot n}{d \cdot n}$ $m \cdot d \geq l \cdot n \iff \frac{m}{n} \geq \frac{l}{d}$	Сравним дроби $\frac{3}{8}$ и $\frac{7}{12}$ $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 12}{8 \cdot 12} = \frac{36}{96}$ $\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 8}{12 \cdot 8} = \frac{56}{96}$ т.к. $\boxed{56>36}$ $\boxed{\frac{7}{12} > \frac{3}{8}}$

Действия над дробями $\left(\frac{m}{n} \text{ и } \frac{l}{d}\right)$

Сложение и вычитание	1) $n = d,\quad \frac{m}{n} \pm \frac{l}{n} = \frac{m \pm l}{n}$	$\frac{8}{9} - \frac{5}{9} = \frac{3}{9} = \frac{3:3}{9:3} = \frac{1}{3}$
	2) $n \neq d$ *(операция приведения к общему знаменателю)* $\frac{m}{n} \pm \frac{l}{d} = \frac{m \cdot d}{n \cdot d} \pm \frac{l \cdot n}{d \cdot n} = \frac{m \cdot d \pm l \cdot n}{n \cdot d}$ *Замечание:* ***в качестве общего знаменателя может быть взято НОК знаменателей дробей, т.е. НОК(n,d).***	$\frac{4}{5} + \frac{7}{6} = \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 6} + \frac{7 \cdot 5}{6 \cdot 5} =$ $= \frac{24}{30} + \frac{35}{30} = \frac{59}{30} = 1\frac{29}{30}$
Умножение	1) k – целое число, $k \cdot \frac{m}{n} = \frac{k \cdot m}{n}$	$5 \cdot \frac{4}{9} = \frac{5 \cdot 4}{9} = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}$
	2) $\frac{m}{n} \cdot \frac{l}{d} = \frac{m \cdot l}{n \cdot d}$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 7} = \frac{3}{56}$
Деление	1) $\frac{m}{n} : k = \frac{m}{n \cdot k}$	$\frac{12}{13} : 5 = \frac{12}{13 \cdot 5} = \frac{12}{65}$
	2) $\frac{m}{n} : \frac{l}{d} = \frac{m}{n} \cdot \frac{d}{l} = \frac{m \cdot d}{n \cdot l}$	$\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$

Десятичные дроби

В них единица делится на десять долей (десятые), каждая десятая доля снова на десять долей (сотые) и т.д.

При записи десятичных дробей наименование долей ("знаменатель") узнается по месту, занимаемому соответствующей цифрой. Сначала записывается целая часть числа, справа от нее ставится запятая; первая цифра после запятой означает число десятых (т.е. десятых долей единицы), вторая – сотых, третья – тысячных и т.д.

$$8{,}051 = 8 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} + \frac{1}{1000}$$

(нуль показывает отсутствие десятых долей)

Свойства десятичных дробей

1) Десятичная дробь не изменит величины, если к ней справа приписать любое количество нулей.	13,4=13,40=13,400 и т.д.
2) Десятичная дробь увеличится в 10, 100, 1000 и т.д. раз, если запятую перенести на один, два, три и т.д. знака вправо.	Число 14,256 увеличится в 10 раз, если напишем 142,56
3) Десятичная дробь уменьшится в 10, 100, 1000 и т.д. раз, если запятую перенести на один, два, три и т.д. знака влево.	Число 15,042 уменьшится в 100 раз, если напишем 0,15042

Превращение десятичных дробей в простые дроби и наоборот

Чтобы превратить десятичную дробь в простую, нужно, отбросив запятую, сделать получившееся число числителем дроби; знаменателем же нужно взять число, показывающее, какие доли представляет последняя цифра (не нуль).

$$0{,}01 = \frac{1}{100}$$

$$2{,}75 = 2\,\frac{75}{100} = 2\,\frac{3}{4}$$

Чтобы превратить простую дробь в десятичную нужно выполнить "столбиком" деление числителя на знаменатель.

$\frac{7}{8} = 0{,}875$ т.к.

$$\begin{array}{r|l} -\underline{70} & 8 \\ \underline{64} & \overline{0{,}875} \\ -\underline{60} & \\ \underline{56} & \\ -\underline{40} & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array}$$

При превращении простой дроби в десятичную процесс деления может продолжаться бесконечно, т.е. возникает периодическая дробь. При записи такой дроби период заключают в скобки.

$$\frac{62}{45} = 1{,}3777... = 1{,}3(7)$$

АЛГЕБРА

Основные свойства алгебраических действий

(Законы сложения и умножения)

1. *Переместительный закон:* a+b = b+a; a·b = b·a
2. *Сочетательный закон:* (a+b)+c = a+(b + c); (a·b)·c = a·(b·c)
3. *Распределительный закон:* (a+b)·c = a·c + b·c

Действия с одночленами

Одночленом называется произведение нескольких сомножителей, являющихся числами или буквами. Отдельные числа и буквы также считаются одночленами ($-4x^2y^2$, a^3d, n, 7 – одночлены).

Сложение одночленов. Сумма одночленов называется **многочленом** ($7x^2+9xy+5$ – многочлен).

Вынесение общего множителя за скобки производится на основе закона **3** и правил действия со степенями $ax^2y^2-bx^2y^2+cx^2y^2=(a-b+c)x^2y^2$

Приведение подобных членов также производится на основе закона **3**. $7xy^3-4xy^3+3xy^3=(7-4+3)xy^3=6xy^3$

Умножение и деление одночленов

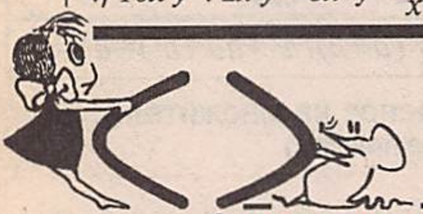
Произведение или частное двух одночленов можно упростить лишь в том случае, когда в них входят некоторые степени одних и тех же переменных или числовые коэффициенты.

1) $5ax^2y^5(-3a^3x^4z)=-15a^4x^6y^5z$ *[сложены показатели степени буквы a (1+3=4) и буквы x (2+4=6)]*

2) $12x^3y^4z^5 : 4x^2yz^2=3xy^3z^3$ *[вычтены показатели степени буквы x (3−2=1), буквы y (4−1=3), z (5−2=3)].*

3) $4x^2y^3 : 2x^2y=2x^0y^2=2y^2$ $\quad (x^0=1)$

4) $10x^2y^5 : 2x^6y^4=5x^{-4}y=\frac{5y}{x^4}$ $\quad (x^{-4}=\frac{1}{x^4})$



Умножение сумм и многочленов

Раскрытие скобок производится с помощью закона **3**: $(a+b+c)x=ax+bx+cx$

$(x=m+n)$

$$(a+b+c)=a(m+n)+b(m+n)+c(m+n)=$$
$$=am+an+bm+bn+cm+cn$$

(Это правило относится к произведению многочлена на многочлен)

$(3x^2-2x+5)(4x+2)=$

$=12x^3-8x^2+20x+6x^2-4x+10=$

$=12x^3+(-8+6)x^2+(20-4)x+10=$

$=12x^3-2x^2+16x+10$

Запись умножения:

$$\begin{array}{r} \times\; 3x^2-2x+5 \\ 4x+2 \\ \hline +\; 12x^3-8x^2+20x \\ 6x^2-4x+10 \\ \hline 12x^3-2x^2+16x+10 \end{array}$$

Формулы сокращенного умножения многочленов

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$104^2=(100+4)^2=$ $=10000+800+16=10816$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$98^2=(100-2)^2=$ $=10000-400+4=9604$
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	$71\cdot 69=(70+1)(70-1)=$ $=70^2-1=4899$
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$12^3=(10+2)^3=10^3+3\cdot 10^2\cdot 2+$ $+3\cdot 10\cdot 2^2+2^3=1728$
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	$99^3=(100-1)^3=1000000-$ $-3\cdot 10000\cdot 1+3\cdot 100\cdot 1-1=$ $=970299$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$	$(a+b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

Разложение многочленов на множители.
(Некоторые приемы)

Представление многочленов в виде произведения двух или нескольких многочленов ⇒ $8a^2x^3+9xa^3=xa^2(8x^2+9a)$

I. Вынесение некоторого множителя за скобки после предварительного преобразования многочлена:

1) $ax+bx+ay+by=x(a+b)+y(a+b)=(x+y)(a+b);$

2) $10a^3-6b^3+4ab^2-15a^2b=5a^2(2a-3b)+2b^2(2a-3b)=$
$$=(2a-3b)(5a^2+2b^2)$$

II. Пункт (I) иногда удается осуществить после предварительного введения новых (взаимо уничтожающихся) членов:

$$p^2+pq-2q^2=p^2+pq+pq-pq-2q^2=p^2+2pq-pq-2q^2=$$
$$=p(p+2q)-q(p+2q)=(p+2q)(p-q)$$

III. Применение формул сокращенного умножения многочленов:

$4x^2+20xy+25y^2=(2x+5y)^2=(2x+5y)(2x+5y)$, т.к.
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad (a=2x;\ b=5y)$

Правила действий со степенями

$(a\cdot b\cdot c\ldots)^n = a^n\cdot b^n\cdot c^n\ldots$

1) $(7\cdot2\cdot10)^2=7^2\cdot2^2\cdot10^2=49\cdot4\cdot100=19600$

2) $(x^2-a^2)^3=[(x+a)(x-a)]^3=(x+a)^3(x-a)^3$

Обратное преобразование:

$a^n\cdot b^n\cdot c^n\ldots=(a\cdot b\cdot c\ldots)^n$

3) $4^3\cdot(\frac{7}{4})^3\cdot(\frac{2}{7})^3=(4\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{7})^3=2^3=8$

4) $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2=[(a+b)(a^2-ab+b^2)]^2=(a^3+b^3)^2$

$(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$

5) $(\frac{2}{3})^4=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$

6) $(\frac{a+b}{a-b})^3=\frac{(a+b)^3}{(a-b)^3}$

Обратное преобразование:

$\frac{a^n}{b^n}=(\frac{a}{b})^n$

7) $\frac{7{,}5^3}{2{,}5^3}=(\frac{7{,}5}{2{,}5})^3=3^3=27$

8) $\frac{(a^2-b^2)^2}{(a+b)^2}=(\frac{a^2-b^2}{a+b})^2=(a-b)^2$

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

9) $2^2\cdot2^5=2^{2+5}=2^7=128$

10) $(a-4c+x)^2(a-4c+x)^3=(a-4c+x)^5$

$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

11) $12^5:12^3=12^{5-3}=12^2=144$

12) $(x-y)^3:(x-y)^2=x-y$

$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$

13) $(2^3)^2=2^6=64$

14) $(\frac{a^2b^3}{c})^4=\frac{(a^2)^4+(b^3)^4}{c^4}=\frac{a^8b^{12}}{c^4}$

Действия с корнями

В нижеприведенных формулах знаком $\sqrt{}$ обозначена абсолютная величина корня.

$\sqrt[m]{a}=\sqrt[m\cdot n]{a^n}$	$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3\cdot 2]{8^2}=\sqrt[6]{64}$
$\sqrt[m]{a}=\sqrt[m:n]{\sqrt[n]{a}}$	$\sqrt[6]{8}=\sqrt[6:3]{\sqrt[3]{8}}=\sqrt{2}$
$\sqrt[m]{a\cdot b\cdot c\ldots}=$ $=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}\ldots$	$\sqrt[3]{a^6b^2}=\sqrt[3]{a^6}\sqrt[3]{b^2}=a^2\sqrt[3]{b^2}$ $\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{16}\sqrt{3}=4\sqrt{3}$
$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}\ldots=$ $=\sqrt[m]{a\cdot b\cdot c\ldots}$	$\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt{ab^3}=\sqrt{a^4b^4}=a^2b^2$
$\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$	$\sqrt[3]{\dfrac{27}{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$
$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a^n}$	$\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^2=\sqrt[3]{a^4b^2}=\sqrt[3]{a^3\cdot ab^2}=$ $=\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{ab^2}=a\sqrt[3]{ab^2}$
$\sqrt[m]{a^n}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$	$\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=\left(\sqrt{3}\right)^3$

Отрицательные, нулевой и дробные показатели степени

Отрицательная степень $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$	$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$; $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = 1 : \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$; $(-4)^{-3} = 1 : (-4)^3 = -\dfrac{1}{64}$
Нулевая степень $a^0 = 1$	$3^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$; $\dfrac{a^5}{a^5} = a^0 = 1$
Дробная степень $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$9^{3/2} = \sqrt{9^3} = 27$; $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{4/3} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{8}{27}\right)^4} = \dfrac{8}{27}\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{16}{81}$

Логарифмы и их свойства

Логарифмом числа N по основанию a называется показатель степени x, в которую нужно возвести a, чтобы получить число N.
Обозначение: $log_a N = x$. Запись $log_a N = x$ равносильна записи $a^x = N$, где $N > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$log_2 8 = 3$, т.к. $2^3 = 8$; $log_{1/2} 16 = -4$, т.к. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} = 16$

Основное логарифмическое тождество $a^{log_a N} = N$ → $2^{log_2 8} = 8$; $5^{log_5 25} = 25$

Свойства логарифмов ($a > 0$, $a \neq 0$, $b > 0$, $c > 0$)

$$log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c$$
$$log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$$
$$log_a\left(b^n\right) = n\, log_a b$$

$$log_{a^n} b = \frac{1}{n} log_a b \quad (n \neq 0)$$
$$log_a b = \frac{1}{log_b a} \quad (b \neq 1)$$

$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a} \quad (c \neq 1)$$

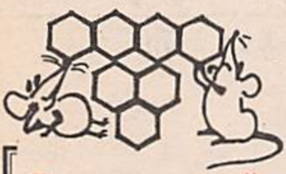
Специальные обозначения	$log_{10} b = lg\, b$ *(десятичные логарифмы)*	$log_e b = ln\, b$ *[натуральные логарифмы (e≈2,718...)]*
Пример логарифмирования	$lg\dfrac{2a^2b}{\sqrt[3]{m^2}} = lg(2a^2bm^{-2/3}) = lg\,2 + 2lg\,a + lg\,b - \dfrac{2}{3}lg\,m$	

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, в которой разность между последующим и предыдущим членами остается неизменной. Это неизменное число d называется разностью прогрессии. При $d>0$ прогрессия называется возрастающей, а при $d<0$ – убывающей.

n-й член арифметической прогрессии: $$a_n = a_1 + d(n-1)$$	Сумма первых n членов арифметической прогрессии $$S_n = a_1 + \ldots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$$

1,2,3,4,5,... – арифметическая прогрессия с разностью $d=1$ (натуральный ряд чисел)	$S_{100} = 1 + 2 + \ldots + 100 = \frac{(1+100)\,100}{2} = 5050$
6,4,2,0,-2,-4,... – арифметическая прогрессия (убывающая) с разностью $d=-2$	$a_6 = 6 + (-2)(6-1) = -4;$ $S_6 = \frac{(6-4)\cdot 6}{2} = 6$



Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, в которой отношение между последующим и предыдущим членами остается неизменным. Это неизменное отношение q называется знаменателем прогрессии. При $|q|>1$ прогрессия называется возрастающей, а при $|q|<1$ – убывающей.

n-й член геометрической прогрессии:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Сумма первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

5,10,20,40... – геометрическая прогрессия со знаменателем $q=2$

$$a_{10} = 5 \cdot 2^9 = 5 \cdot 512 = 2560$$

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot 2 - a_1}{2-1} = 5115$$

Если $q=1$, то прогрессия состоит из равных членов $a_1, a_1, a_1, \ldots$ и сумма первых n членов имеет вид:

$$S_n = \underbrace{a_1 + \ldots + a_1}_{n-раз} = n \cdot a_1$$

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q|<1$) называется число, к которому неограниченно приближается сумма первых n членов убывающей прогрессии при неограниченном возрастании числа n.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \dfrac{a_1}{1-q}$

$\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots$ бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \dfrac{1}{2}$

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$ т.е.

сумма $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$ при неограниченном возрастании n неограниченно приближается к числу 1.

Тождество и уравнение

$$ax+b=cx+d$$
$$mx^2+nx=qx+d$$
$$\frac{2}{3+x}=\frac{1}{2}x$$

Тождеством называется равенство двух алгебраических выражений, верное при всех значениях входящих в него переменных.

Числовое равенство $6\cdot7+3=42+3$ есть тождество.
Буквенное равенство $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ есть тождество: при всех числовых значениях a и b обе части дают одно и то же число.

Уравнением называется равенство, содержащее неизвестные переменные. По числу неизвестных уравнения разделяются на уравнения с одним, двумя, тремя и т.д. неизвестными.
Решением (корнями) уравнения называются значения неизвестных переменных, которые превращают его в тождество.

$\frac{2}{3+x}=\frac{1}{2}x$ – уравнение с одним неизвестным x.

При $x=1$ оба выражения $\frac{2}{3+x}$ и $\frac{1}{2}x$ образуют тождество,

т.е. дают одно и то же число; $x=1$ есть корень уравнения.

Равносильные уравнения. Основные приемы решения уравнений

Равносильными уравнениями называются такие уравнения, которые имеют одни и те же корни.

$x^2 = 3x - 2$ и $x^2 + 2 = 3x$ равносильны (оба имеют корни $x=1$ и $x=2$)

Равносильность уравнений сохраняется при следующих операциях *(основные приемы решения уравнений):*

1. Замена выражения на тождественно равное ему.
2. Перенос слагаемых из одной части уравнения в другую с изменением их знака на противоположный.
3. Умножение и деление обеих частей уравнения на одно и то же не равное нулю число.

$$(x+1)^2 = 2x+5 \overset{1}{\Leftrightarrow} x^2+2x+1 = 2x+5 \overset{2}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1-2x-5=0 \Leftrightarrow x^2-4=0$$

Степень уравнения

Перенесем все члены уравнения в одну его часть и произведем приведение подобных его членов; если уравнение после этого содержит только одно неизвестное, то **степенью уравнения** называют наибольший из показателей степени при неизвестном.

$7x^3+6x^2-9x=7x^3-5$ – уравнение второй степени, т.к. после перенесения всех членов в левую часть уравнения оно примет вид: $6x^2-9x+5=0$

$a^5x+b^7=c^9$ – уравнение первой степени, т.к. высшая степень неизвестного x – первая.

Уравнение первой степени (с любым числом неизвестных) называется также **линейным** уравнением. Уравнение второй степени иначе называется **квадратным**.

Линейные уравнения с одним неизвестным

Уравнения 1-й степени (линейные уравнения) с одним неизвестным после надлежащих преобразований можно представить в виде $ax = b$, где a и b – заданные числа.

Решение (корень) уравнения имеет вид $x = \frac{b}{a}$

Решить уравнение	$\frac{3x-5}{2(x+2)} = \frac{3x-1}{2x+5} - \frac{1}{x+2}$
Проведем последовательно следующие преобразования	
Приведем правую часть равенства к общему знаменателю	$\frac{3x-5}{2(x+2)} = \frac{(3x-1)(x+2)-(2x+5)}{(2x+5)(x+2)}$
В числителе правой части откроем скобки и приведем подобные члены	$\frac{3x-5}{2(x+2)} = \frac{3x^2+3x-7}{(2x+5)(x+2)}$
Умножим обе части равенства на $2(2x+5)(x+2)$*, чтобы освободить уравнение от знаменателей*	$(3x-5)(2x+5) = 2(3x^2+3x-7)$
Откроем скобки	$6x^2+5x-25 = 6x^2+6x-14$
Перенесем все неизвестные члены в левую часть, а известные в правую; после приведем подобные члены	$-x = 11$
Умножим обе части на -1	$x = -11$ *(корень)*

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ где x, y – неизвестные
a,b,c,d,p,q – данные числа

При $\Delta = a\cdot d - bc \neq 0$ решение системы находят по формулам: $x=\dfrac{p\cdot d-q\cdot b}{a\cdot d-bc}$, $y=\dfrac{a\cdot q-c\cdot p}{a\cdot d-bc}$
При $\Delta = 0$ и $a\cdot d = q\cdot b$ система имеет бесконечно много решений
При $\Delta = 0$ и $a\cdot d \neq q\cdot b$ система не имеет решений

Два способа решения системы

Способ подстановки. В каком-либо из уравнений системы одно неизвестное выражается через другое. Полученное выражение подставляется в оставшееся уравнение, после решения которого находится одно неизвестное. Второе неизвестное может быть найдено из любого уравнения системы.

Решить систему уравнений	$\begin{cases} 8x-3y=46, \\ 5x+6y=13 \end{cases}$
Из первого уравнения находим выражение x через данные числа и неизвестное y	$x=\dfrac{46+3y}{8}$
Подставляем это выражение во второе уравнение	$5\cdot\dfrac{46+3y}{8}+6y=13$
Решаем полученное уравнение	$5(46+3y)+48y=104 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 230+15y+48y=104 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 15y+48y=104-230 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 63y=-126 \Leftrightarrow y=-2$

Найденное значение $y=-2$ подставляем в выражение $x=\dfrac{46+3y}{8}$ и получаем $x=\dfrac{46-6}{8}$, т.е. $x=5$. Ответ: $x=5$, $y=-2$.

Исключение неизвестных. (Пример)

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=11 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$$

Обе части первого уравнения умножаем на -2; обе части второго – на 3.

$$\begin{cases} -4x-6y=-22 \\ 9x+6y=27 \end{cases}$$

Складываем два уравнения. (Исключение y)

$$\begin{array}{r} -4x-6y=-22 \\ 9x+6y=27 \\ \hline 5x+0=5 \end{array}$$

$$x=1$$

Обе части первого уравнения умножаем на 3; обе части второго – на -2.

$$\begin{cases} 6x+9y=33 \\ -6x-4y=-18 \end{cases}$$

Складываем два уравнения. (Исключение x)

$$\begin{array}{r} 6x+9y=33 \\ -6x-4y=-18 \\ \hline 0+5y=15 \end{array}$$

$$y=\frac{15}{5}=3$$

Ответ: $x=1,\ y=3$

Решение систем с большим количеством неизвестных (с тремя, четырьмя и т.д.) проводится с использованием способов подстановки или исключения неизвестных аналогично решению системы

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$$

Квадратное уравнение
(Уравнение 2-й степени)

$ax^2+bx+c=0$, a, b, c – данные числа, причем $a \neq 0$

Простейшее квадратное уравнение

$x^2=m$, m – данное число

не имеет решений, если $m<0$	$x^2=-9$
имеет одно решение $x=0$, если $m=0$	$x^2=0 \Leftrightarrow x=0$
имеет два решения $x_{1,2}=\pm\sqrt{m}$, если $m>0$	$x^2=9 \Leftrightarrow x_1=\sqrt{9}=3,$ $x_2=-\sqrt{9}=-3.$

Решение квадратного уравнения

$$\boxed{ax^2+bx+c=0} \Leftrightarrow \boxed{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0} \Leftrightarrow \boxed{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

Полученное равносильное уравнение отличается от простейшего уравнения $x^2=m$ только внешним видом: $x+\dfrac{b}{2a}$ стоит вместо x, $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ – вместо m.

Квадратное уравнение не имеет решений, если $D=b^2-4ac<0$.
Кв. ур-ние имеет единственное решение $x=-\dfrac{b}{2a}$, если $D=0$.
Кв. ур-ние имеет два решения $x_{1,2}=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{D}}{2a}$, если $D>0$.

! Все решения квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, если они есть, находятся по формуле $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
Выражение $D=b^2-4ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения.

Примеры

$3x^2-7x+4=0$ $(a=3,\ b=-7,\ c=4)$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot3\cdot4}}{2\cdot3}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{6}$$

$$x_1=\frac{7+1}{6}=\frac{4}{3}\qquad x_2=\frac{7-1}{6}=1$$

$x^2+7x+12=0$ $(a=1,\ b=7,\ c=12)$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-4\cdot12}}{2}=\frac{-7\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$x_1=\frac{-7+1}{2}=-3\qquad x_2=\frac{-7-1}{2}=-4$$

Свойства корней квадратного уравнения (теорема Виета)

Сумма корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ равна коэффициенту b при первой степени x, деленному на коэффициент a при старшей степени, взятому с противоположным знаком, т.е. $x_1+x_2=-b/a$; произведение же корней квадратного уравнения равно свободному члену c, деленному на коэффициент a при старшей степени x, т.е. $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

Разложение квадратного трехчлена на множители

Квадратный трехчлен ax^2+bx+c можно разложить на множители первой степени следующим образом:
решим квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Если x_1 и x_2 – корни этого уравнения, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Разложить на множители трехчлен

$$2x^2+13x-24$$

Решаем уравнение $2x^2+13x-24=0$

Находим корни: $x_1=\frac{3}{2}$; $x_2=-8$

Следовательно:

$$2x^2+13x-24=2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+8)=$$
$$=(2x-3)(x+8)$$

Разложить на множители трехчлен

$$x^2+7x+12$$

Решаем уравнение $x^2+7x+12=0$

Находим корни: $x_1=-3$ $x_2=-4$

Следовательно:

$$x^2+7x+12=(x-(-3))(x-(-4))=$$
$$=(x+3)(x+4)$$

Уравнения высших степеней, разрешаемые с помощью квадратного уравнения

1. Иногда левую часть уравнения легко разложить на множители, из которых каждый – многочлен не выше 2-й степени. Тогда, приравнивая каждый множитель по отдельности нулю, решаем полученные уравнения. Найденные корни будут корнями исходного уравнения.

Решить уравнение $x^4+7x^3+12x^2=0$

$$x^4+7x^3+12x^2=x^2(x^2+7x+12)$$

Решаем уравнение $x^2=0$: корни $x_1=x_2=0$.
Решаем уравнение $x^2+7x+12=0$. Обозначив его корни x_3 и x_4, имеем $x_3=-3$, $x_4=-4$.

Корни исходного уравнения есть $\boxed{x_1=x_2=0;\ x_3=-3;\ x_4=-4.}$

2. Если уравнение имеет вид $ax^{2n}+bx^n+c=0$, его можно свести к квадратному, введя новое неизвестное $x^n=z$.

Решить уравнение $x^4-13x^2+36=0$

$$x^4-13x^2+36=(x^2)^2-13x^2+36=z^2-13z+36,\ \text{где } z=x^2$$

Корни уравнения $z^2-13z+36=0$ есть $z_1=9$, $z_2=4$.
Решаем уравнение $x^2=9$, корни $x_1=3$, $x_2=-3$.
Решаем уравнение $x^2=4$, корни $x_3=2$, $x_4=-2$.

$\boxed{x_1=3,\ x_2=-3,\ x_3=2,\ x_4=-2}$ – корни заданного уравнения

Уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$ называется **биквадратным**

Неравенства, их основные свойства

Два выражения, соединенные одним из знаков $>, \geq, <, \leq, \neq$, **образуют неравенство** ⇒ $ax+b \geq cx+d$, $8<16$

Решить неравенство – значит указать границы, в которых должны заключаться *(действительные)* значения неизвестных величин, чтобы неравенство было верным.

Решить неравенство $x^2<9$

Оно верно, если $|x|<3$, т.е. $-3<x<3$

Свойства	Примеры
1. Если $a>b$, то $b<a$.	$5x-1>2x+1 \Rightarrow 2x+1<5x-1$
2. Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.	$x>2y$, $2y>10 \Rightarrow x>10$
3. Если $a>b$, то $a+c>b+c$ (и $a-c>b-c$) Если же $a<b$, то $a+c<b+c$ (и $a-c<b-c$)	$x+8>3 \Rightarrow x+8-8>3-8$, т.е. $x>-5$ $x-6<-2 \Rightarrow x-6+6<-2+6$, т.е. $x<4$
4. Если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$; точно так же, если $a<b$ и $c<d$, то $a+c<b+d$	$\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y<18 \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y<4 \end{cases}$ Складывая их почленно, находим $x<22$.
Замечание. Неравенства одинакового смысла нельзя почленно вычитать: из неравенства $a>b$ и $c>d$ не следует $a-c>b-d$.	$5>3$, $4>1$, но $5-4<3-1$
5. Если $a>b$ и $c<d$, то $a-c>b-d$; если $a<b$ и $c>d$, то $a-c<b-d$.	$\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y<18 \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y>8 \end{cases}$ Вычитая из первого неравенства второе, находим $y<10$.

6. Если $a>b$ и m – положительное число, то $ma>mb$ и $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$	$2x<12 \Rightarrow \frac{2x}{2}<\frac{12}{2}$, т.е. $x<6$, $25>20 \Rightarrow 25:5>20:5$, т.е. $5>4$
7. Если $a>b$ и n – отрицательное число, то $na<nb$ и $\frac{a}{n}<\frac{b}{n}$	$-\frac{1}{3}x>4 \Rightarrow -\frac{1}{3}(-3)x<4(-3)$, т.е. $x<-12$, $25>20 \Rightarrow 25:(-5)<20:(-5)$, т.е. $-5<-4$
8. Если $a>b$ и $b\geq 0$, $n>0$ то $a^n>b^n$ и $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$	$25>16 \Rightarrow \sqrt{25}>\sqrt{16}$, т.е. $5>4$
Замечание. Обе части неравенства с произвольными неположительными членами нельзя почленно возводить в одну и ту же степень.	$4>-5$, но $4^2<(-5)^2$

Некоторые важные неравенства

1. $|a+b|\leq|a|+|b|$. Здесь a и b – произвольные числа, т.е. модуль суммы не превосходит суммы модулей.

$a=3$; $b=-5$; $a+b=-2$
$|a+b|=2$; $|a|=3$; $|b|=5$
Имеем $2<3+5$

2. $|a-b|\geq|a|-|b|$, a и b – произвольные числа.

3. $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ (a и b – положительные числа), т.е. среднее геометрическое $(\sqrt{ab})$ двух чисел не превосходит их среднего арифметического $\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

$a=2$; $b=8$;
$\sqrt{ab}=4$; $\frac{a+b}{2}=5$;
имеем $4<5$

Линейные неравенства с одним неизвестным

Линейное неравенство с одним неизвестным можно привести к виду $ax>b$.
Решением будет: $x>\frac{b}{a}$, если $a>0$; $x<\frac{b}{a}$, если $a<0$.

Решить неравенство $(x-1)^3>x^3-3x^2+8$

$\boxed{(x-1)^3>x^3-3x^2+8} \Rightarrow \boxed{x^3-3x^2+3x-1>x^3-3x^2+8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x^3-3x^2+3x-x^3+3x^2>8+1} \Rightarrow \boxed{3x>9} \Rightarrow \boxed{x>3}$

Ответ: $x\in(3;+\infty)$

Простейшие квадратные неравенства с одним неизвестным

1. Неравенство $x^2<m$

Если $m>0$, то решение есть $-\sqrt{m}<x<\sqrt{m}$ $\left(x\in(-\sqrt{m};\sqrt{m})\right)$ →	$x^2<4$, $x\in(-2;2)$
Если $m\le 0$, то решения нет ($x\in\{\varnothing\}$) (квадрат действительного числа не может быть отрицательным) →	$x^2<-4$, $x\in\{\varnothing\}$

2. Неравенство $x^2>m$

Если $m>0$, то решение есть $x>\sqrt{m}$ или $x<-\sqrt{m}$ $(x\in(-\infty;-\sqrt{m})\cup(\sqrt{m};+\infty))$ →	$x^2>4$, $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$
Если $m=0$, то неравенство $x^2>m$ справедливо при всех x, кроме $x=0$: $x>0$ или $x<0$ $(x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty))$ →	$x^2>0$, $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$
Если $m<0$, то неравенство выполняется при любых значениях x: $x\in\mathrm{R}$ →	$x^2>-4$, $x\in\mathrm{R}$

Квадратные неравенства (общий случай)

$$ax^2+bx+c>0,\ a\neq 0$$

(Вместо знака $>$, может стоять любой из знаков $\geq, <, \leq$)

Для решения квадратного неравенства разделив его почленно на коэффициент a, мы приведем (в зависимости от знака a) к одному из видов:

$$\boxed{\begin{matrix} x^2+px+q<0 \\ x^2+px+q>0 \end{matrix}} \to \boxed{\begin{matrix} x^2+px<-q \\ x^2+px>-q \end{matrix}} \to \boxed{\begin{matrix} x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2<\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \\ x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2>\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \end{matrix}} \to$$

$$\to \boxed{\begin{matrix} \left(x+\frac{p}{2}\right)^2<\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \\ \left(x+\frac{p}{2}\right)^2>\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \end{matrix}} \xrightarrow[\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=m]{x+p/2=z} \boxed{\begin{matrix} z^2<m \\ z^2>m \end{matrix}}$$

Простейшие квадратные неравенства

Решение простейших квадратных неравенств было дано в предыдущем пункте. Зная его, найдем решение неравенства $ax^2+bx+c>0$.

1. Решить неравенство $-2x^2+14x-20>0 \Rightarrow$

$$\boxed{x^2-7x+10<0} \Rightarrow \boxed{x^2-7x<-10} \Rightarrow \boxed{x^2-7x+\left(\frac{7}{2}\right)^2<-10+\left(\frac{7}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2<\frac{9}{4}} \Rightarrow \boxed{-\frac{3}{2}<x-\frac{7}{2}<\frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{-\frac{2}{3}+\frac{7}{2}<x<\frac{3}{2}+\frac{7}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{2<x<5}$$

Ответ: $x\in(2;5)$

2. Решить неравенство $-2x^2+14x-20<0$ (Выполнив те же преобразования, получим неравенство) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2>\frac{9}{4}} \Rightarrow \boxed{x-\frac{7}{2}>\frac{3}{2} \text{ или } x-\frac{7}{2}<-\frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{x>5 \text{ или } x<2}$$

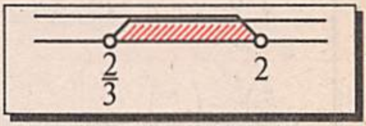
Ответ: $x\in(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$

Системы неравенств

Для решения системы линейных или квадратных неравенств необходимо решить каждое из них и найти пересечение множества решений.

1. Решить систему неравенств $\begin{cases} 4x-3>5x-5 \\ 2x+4<8x \end{cases}$

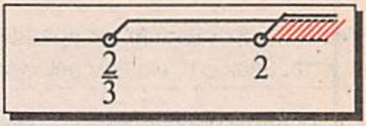
$$\begin{cases} 4x-3>5x-5 \\ 2x+4<8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>\dfrac{2}{3} \end{cases}$$



Ответ: $x \in (\frac{2}{3};2)$

2. Решить систему неравенств $\begin{cases} 2x-3<3x-5 \\ 2x+4<8x \end{cases}$

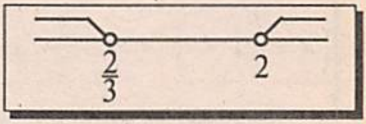
$$\begin{cases} 2x-3<3x-5 \\ 2x+4<8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>\dfrac{2}{3} \end{cases}$$



Ответ: $x \in (2;+\infty)$

3. Решить систему неравенств $\begin{cases} 2x-3<3x-5 \\ 2x+4>8x \end{cases}$

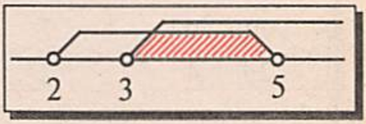
$$\begin{cases} 2x-3<3x-5 \\ 2x+4>8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<\dfrac{2}{3} \end{cases}$$



Ответ: $x \in \{\varnothing\}$

4. Решить систему неравенств $\begin{cases} -2x^2+14x-20>0 \\ x>3 \end{cases}$

$$\begin{cases} -2x^2+14x-20>0 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<x<5 \\ x>3 \end{cases}$$



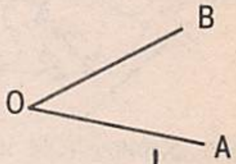
Ответ: $x \in (3;5)$

ПЛАНИМЕТРИЯ

Прямая линия, луч, отрезок

Прямую линию можно мысленно продолжить в обе стороны безгранично. В геометрии название **“прямая”** обозначает обычно прямую линию, не ограниченную ни с одной, ни с другой стороны. Часть прямой линии, с одной стороны ограниченная, а с другой – нет, называется **полупрямой** или **лучом**. Часть прямой линии, ограниченная с обеих сторон, называется **отрезком**.

Углы

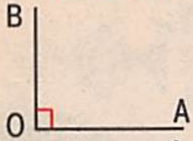
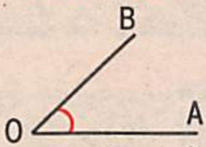
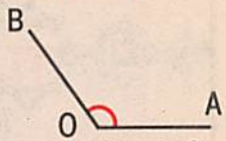


Угол есть фигура, образованная двумя лучами OA и OB (стороны угла), исходящими из одной точки O (вершина угла).

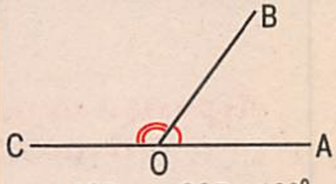
Мерой угла служит величина поворота вокруг вершины O, переводящего луч OA в положение OB.

Градусная система измерения углов. В ней за единицу принимается угол, полученный поворотом луча на 1/360 часть одного полного оборота – градус (обозначение $^\circ$).

360° – полный поворот. Градус делится на 60 минут (обозначение $'$); минута – на 60 секунд ($''$). Запись $37^\circ 45' 57''$ обозначает 37 градусов, 45 минут, 57 секунд.

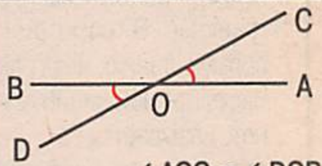
Прямой угол	*Острый угол*	*Тупой угол*
		
$\angle AOB = 90^\circ$	$\angle AOB < 90^\circ$	$\angle AOB > 90^\circ$

Смежные углы – пара углов AOB и COB с общей стороной OB и общей вершиной O; две другие стороны OA и OC являются продолжениями друг друга.



$\angle AOB + \angle COB = 180^\circ$

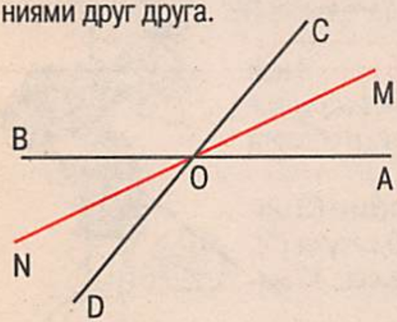
Вертикальные углы – пара углов, у которых вершина общая, а стороны одного составляют продолжение другого. На рисунке $\angle AOC$ и $\angle DOB$ (а также $\angle COB$ и $\angle AOD$) вертикальные.



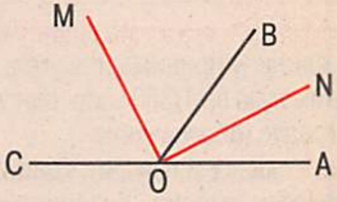
$\angle AOC = \angle DOB$

Биссектрисой угла называется луч, делящий угол пополам.

Биссектрисы (OM и ON) вертикальных углов являются продолжениями друг друга.



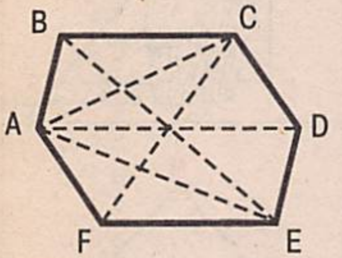
Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны



$OM \perp ON$

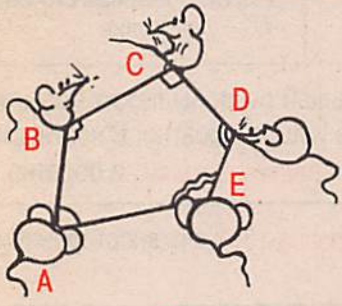
Многоугольник

Многоугольник – это фигура, состоящая из множества точек, не лежащих на одной прямой, и отрезков, попарно соединяющих эти точки и непересекающихся между собой.

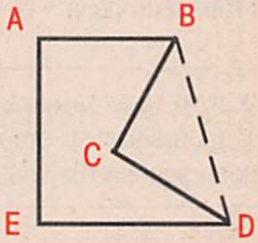


Точки A, B, C, D, E, F – вершины многоугольника. Углы при них (углы многоугольника) обозначаются $\angle A$, $\angle B$, ... $\angle F$. Отрезки: AC, AD, BE и т.д. – диагонали; AB, BC, CD и т.д. – стороны многоугольника; сумма длин сторон AB+BC+...+FA называется периметром многоугольника и обозначается P.

Если все диагонали многоугольника лежат внутри него, многоугольник называется выпуклым.



ABCDE – выпуклый пятиугольник

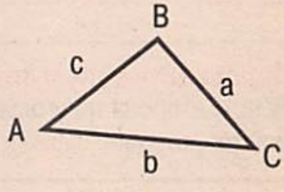


ABCDE – невыпуклый пятиугольник
(Диагональ BD лежит вне многоугольника)

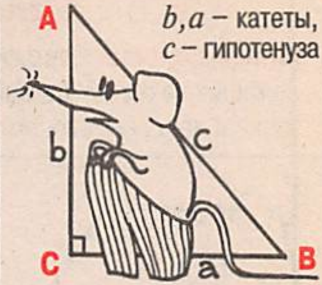
Сумма внутренних углов во всяком выпуклом многоугольнике равна $180^\circ(n-2)$, где n – число сторон многоугольника.

Треугольник

Треугольник – многоугольник с тремя сторонами. Стороны треугольника обозначаются малыми буквами, соответствующими обозначению противоположных вершин.

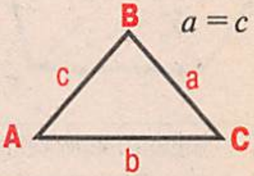


Прямоугольный треугольник – треугольник, один из углов которого прямой; стороны, образующие прямой угол, называются **катетами**, а сторона, лежащая напротив прямого угла – **гипотенузой**.



b, a – катеты,
c – гипотенуза

Треугольник ABC **равнобедренный**, когда две стороны равны; **равносторонний**, когда три стороны равны. Равные стороны равнобедренного треугольника называются **боковыми**; третья сторона – **основанием**.



$a = c$

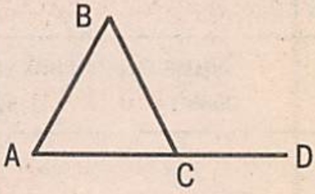
AB, BC – боковые стороны,
AC – основание

Во всяком треугольнике против большей стороны лежит больший угол; против равных сторон – равные углы, и обратно. В частности, равносторонний треугольник является равноугольным, и обратно.

Во всяком треугольнике сумма углов равна 180°; в равностороннем треугольнике каждый угол равен 60°.

Продолжив одну из сторон треугольника (AC на рис.), получаем внешний угол $\angle$ BCD.

Внешний угол равен сумме внутренних, с ним не смежных.



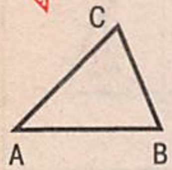
$\angle BCD = \angle A + \angle B$

Неравенства треугольника

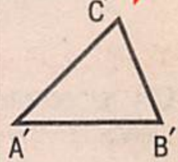
Всякая сторона треугольника меньше суммы и больше разности двух других сторон. $a<b+c; \quad a>b-c.$

Признаки равенства треугольников

Два треугольника равны, если у них соответственно равны:

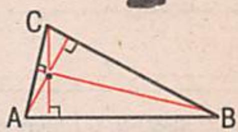


1) две стороны и угол, заключенный между ними; например $AB=A'B'$; $AC=A'C'$; $\angle A=\angle A'$
2) два угла и прилежащая к ним сторона; например $\angle A=\angle A'$, $\angle C=\angle C'$; $AC=A'C'$.
3) три стороны: $AB=A'B'$; $BC=B'C'$; $AC=A'C'$.



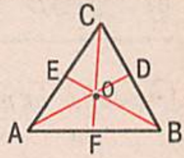
Замечательные линии и точки в треугольнике

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из любой вершины треугольника на противолежащую сторону или на ее продолжение.



Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

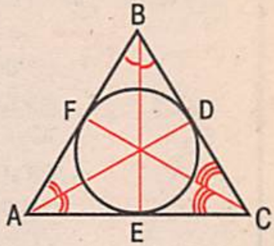


Три медианы треугольника (AD, BE, CF) пересекаются в одной точке, являющейся центром тяжести треугольника. Эта точка делит каждую медиану в отношении 2:1 (считая от вершины).

$$\frac{AO}{OD}=\frac{BO}{OE}=\frac{CO}{OF}=\frac{2}{1}$$

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы любого угла от вершины до пересечения с противоположной стороной.

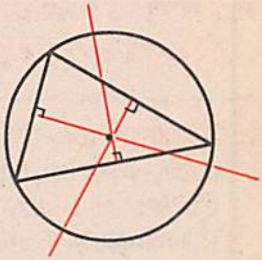
Три биссектрисы треугольника (AD, BE, CF) пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанного круга.



Биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам.

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$$

Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины, пересекаются в одной точке, служащей центром описанного круга.



h_a – высота, опущенная на сторону a	m_a – длина медианы, проведенной к стороне a	l_a – биссектриса угла A
$h_a=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$	$m_a=\frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}$	$l_a=\frac{2\sqrt{b\cdot c\cdot p(p-a)}}{b+c}$

Здесь: a, b, c – длины сторон треугольника;

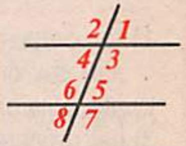
$p=\frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр.

Параллельные прямые

Две прямые AB и CD называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются, сколько бы их не продолжать.

обозначение: $AB \parallel CD$

При пересечении двух параллельных прямых третьей прямой образуется восемь углов, которые попарно носят названия:



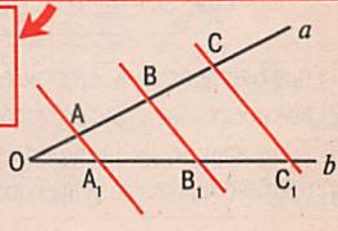
1) соответственные углы (1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8); эти углы попарно равны ($\angle 1=\angle 5$, $\angle 2=\angle 6$, $\angle 3=\angle 7$, $\angle 4=\angle 8$);
2) внутренние накрест лежащие углы (4 и 5, 3 и 6);
они попарно равны;
3) внешние накрест лежащие углы (1 и 8, 2 и 7); они также попарно равны;
4) внутренние односторонние углы (3 и 5, 4 и 6), в сумме составляющие 180° ($\angle 3+\angle 5=180^\circ$, $\angle 4+\angle 6=180^\circ$);
5) внешние односторонние углы (1 и 7, 2 и 8), в сумме составляющие 180° ($\angle 1+\angle 7=180^\circ$, $\angle 2+\angle 8=180^\circ$).

Теорема Фалеса

Если на прямой ***a*** отложить несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, то эти прямые отсекут на любой другой прямой ***b*** равные между собой отрезки.

Параллельные прямые отсекают на сторонах угла соответственно пропорциональные отрезки.

$$\frac{OA}{OA_1}=\frac{OB}{OB_1}=\frac{OC}{OC_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$$ и т.д.



Признаки подобия треугольников

Треугольники **подобны**, если у них соответственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны.

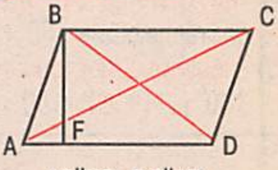
Для подобия треугольников достаточно выполнения одного из следующих условий:

1) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого;
2) два угла одного треугольника равны двум углам другого;
3) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключенные между ними, равны.

Прямоугольные треугольники подобны, если гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого.

Параллелограмм и трапеция

Параллелограмм (ABCD) есть четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. Любые две противоположные стороны можно считать основаниями. Расстояние между ними (по перпендикуляру) называется высотой (BF).



AB||CD; BC||AD

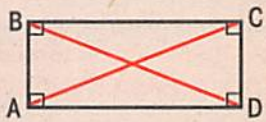
Признаки параллелограмма. Четырехугольник ABCD является параллелограммом, если имеет место одно из следующих условий:

1) противоположные стороны попарно равны (AB=CD, BC=AD);
2) две противоположные стороны равны и параллельны (AB=CD, AB||CD);
3) диагонали взаимно делятся пополам;
4) противоположные углы попарно равны ($\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$).

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов четырех сторон.

$$AC^2+BD^2=2(AB^2+BC^2)$$

Если один из углов параллелограмма прямой, то и все углы прямые. Такой параллелограмм называется **прямоугольником**.



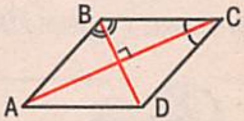
В прямоугольнике диагонали равны.

$$AC=BD$$

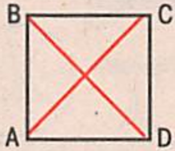
В прямоугольнике квадрат диагонали равен сумме квадратов двух смежных сторон

$$AC^2=AD^2+DC^2$$

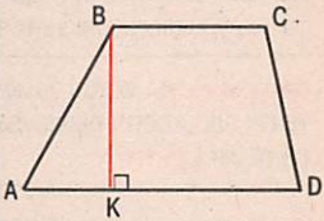
Если в параллелограмме все стороны равны, он называется **ромбом**. В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны ($AC \perp BD$) и делят углы ромба пополам ($\angle DCA=\angle BCA$ и т.д.)



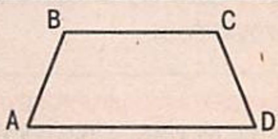
Квадратом называется параллелограмм с прямыми углами и равными сторонами.



Трапецией называется четырехугольник, две противоположные стороны которого параллельны. Параллельные стороны называются **основаниями** трапеции, две двугие (AB, CD) **боковыми сторонами**. Расстояние между основаниями (по перпендикуляру) называется **высотой** (BK).



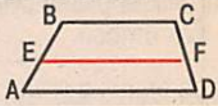
Трапеция с равными боковыми сторонами называется **равнобокой**. **В равнобокой трапеции углы при основаниях равны** ($\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle C$).



$AB = CD$

Теорема о средней линии трапеции и треугольника

Отрезок EF, соединяющий середины боковых сторон, называется средней линией трапеции.

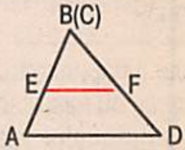


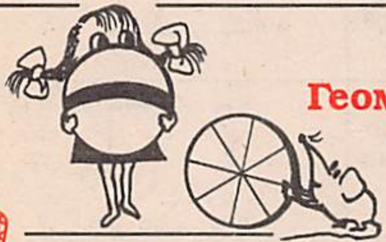
Средняя линия трапеции равна полусумме оснований и параллельна им.

$$EF = \frac{1}{2}(AD+BC),\quad EF \parallel AD$$

Треугольник является предельным случаем ("вырождением") трапеции, когда одно из оснований обращается в точку. В вырожденной трапеции сохраняются ее свойства.

Линия, соединяющая середины E и F сторон треугольника ABD (средняя линия треугольника), параллельна стороне AD и равна ее половине.





Геометрическое место точек. Круг и окружность

Геометрическим местом точек (обладающих данным свойством) называется совокупность всех точек, удовлетворяющих заданным условиям.

Окружность есть геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра).

Круг есть часть плоскости, лежащая внутри окружности.

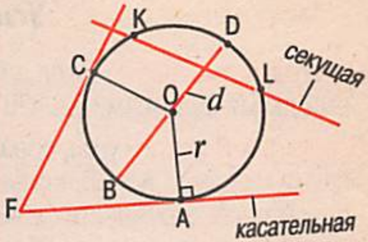
Радиусы окружности (круга) (r) – равные отрезки, соединяющие центр с точками окружности (круга).

Хорда (KL) – отрезок, соединяющий любые две точки окружности.

Диаметр (d) – хорда BD, проходящая через центр (O) *(d=2r)*.

Секущая – прямая, имеющая две общие точки с окружностью.

Касательная – прямая, имеющая одну общую точку с окружностью.

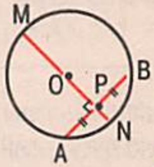


Касательная к окружности перпендикулярна радиусу OA, проведенному в точку касания A.

Через точку F, лежащую вне круга, можно провести к окружности две касательные; длины отрезков касательных равны. (FC=FA)

Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, проходит через ее середину.

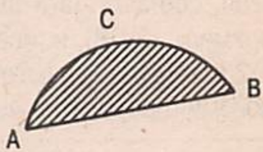
Обратно: если диаметр проходит через середину хорды, то он ей перпердикулярен.



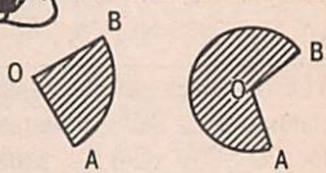
AP=PB

Дуга – часть окружности.

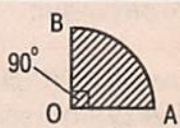
Сегмент – часть круга, ограниченная дугой ACB и стягивающей ее хордой AB.



Сектор – часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, проведенными к концам дуги.



Квадрант – сектор, отсекаемый радиусами, образующими угол 90°.

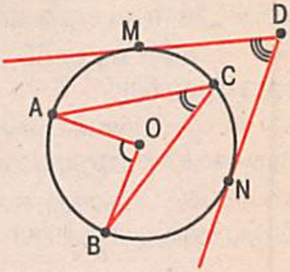


Углы в круге

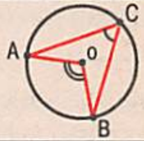
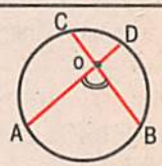
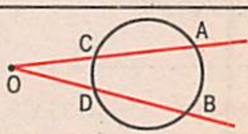
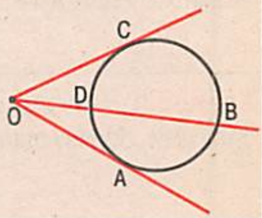
Центральный угол – угол, образованный двумя радиусами (∠AOB)

Вписанный угол – угол, образованный двумя хордами CA и CB, исходящими из одной точки окружности (∠ACB)

Описанный угол – угол, образованный двумя касательными DM и DN (∠MDN)

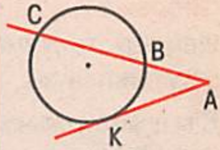


Измерение углов в круге

Вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу (∠ACB = 1/2 ∠AOB)	
Все вписанные углы, опирающиеся на данную дугу, равны между собой	
Угол, составленный двумя хордами (например, ∠AOB), измеряется полусуммой $1/2(\overset{\smile}{CD}+\overset{\smile}{AB})$ дуг, заключенных между сторонами (продолженными в обе стороны)	
Угол, составленный двумя секущими (∠AOB), измеряется полуразностью $1/2(\overset{\smile}{AB}-\overset{\smile}{CD})$ дуг, заключенных между его сторонами	
Угол, составленный касательной и секущей (например, ∠BOA), измеряется полуразностью $1/2(\overset{\smile}{BA}-\overset{\smile}{DA})$ дуг, заключенных между его сторонами Описанный угол (∠COA) измеряется полуразностью $1/2(\overset{\smile}{CBA}-\overset{\smile}{CDA})$ дуг, заключенных между его сторонами	

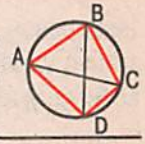
Теорема о квадрате касательной

Если из точки А к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной от точки А до точки касания равен произведению длин отрезков секущей от точки А до точек ее пересечения с окружностью $AK^2 = AC \cdot AB$

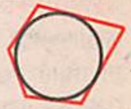


Вписанные и описанные многоугольники

! Вписанным в круг многоугольником называется такой многоугольник, все вершины которого лежат на окружности.



! Описанным около круга многоугольником называется такой многоугольник, все стороны которого касаются окружности.



В четырехугольник можно вписать окружность лишь в том случае, если суммы его противоположных сторон одинаковы.

Около четырехугольника окружность можно описать лишь в том случае, если сумма противоположных углов равна 180°.

Для вписанного четырехугольника

$$a \cdot c + b \cdot d = d_1 \cdot d_2$$

Длина окружности

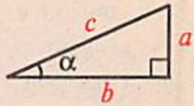
Длиной окружности называется предел последовательности периметров правильных вписанных в эту окружность многоугольников при неограниченном увеличении числа их сторон.

$\boxed{l = 2\pi R}$, где R – радиус окружности,

$\pi = 3{,}14159\ldots$

Метрические теоремы планиметрии

Теорема Пифагора. Если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы: $a^2+b^2=c^2$.



Для прямоугольного треугольника **синус** острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе. **Косинус** равен отношению прилежащего катета к гипотенузе.

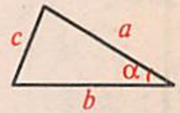
$\sin\alpha = a/c$

$\cos\alpha = b/c$

$tg\,\alpha = a/b$

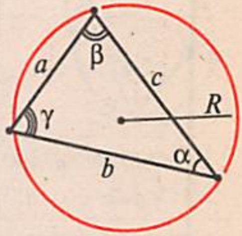
$ctg\,\alpha = b/a$

Теорема косинусов. Квадрат стороны треугльника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними: $c^2=a^2+b^2-2a\cdot b\cdot\cos\alpha$.



Теорема синусов. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла есть величина постоянная для данного треугольника, равная двум радиусам описанной окружности:

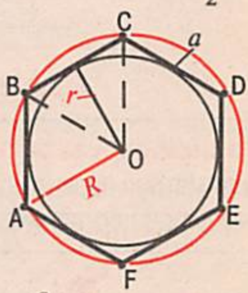
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$



Правильные многоугольники

Правильный многоугольник – многоугольник с равными сторонами и углами. Каждый угол правильного n-угольника равен $\frac{180^0(n-2)}{2}$

Внутри правильного многоугольника имеется точка О равностоящая от всех его вершин (OA=OB=OC и т.д.), – **центр** правильного многоугольника.



Около правильного многоугольника можно описать и в него можно вписать окружность. Центры вписанной и описанной окружностей лежат в центре правильного многоугольника.

$$R=\frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}} \qquad r=\frac{a}{2tg\frac{180^0}{n}}$$

Площади плоских фигур

Прямоугольный тр-ник. a, b – катеты: $S = \frac{1}{2} a \cdot b$

Равнобедренный тр-ник. a – основание; b – боковая сторона: $S = \frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$

Равносторонний тр-ник. a – сторона: $S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

Произвольный тр-ник. a, b, c – стороны; a – основание; h – высота; A, B, C – углы, лежащие против сторон a, b, c; $p=(a+b+c)/2$:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \cdot \sin A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Параллелограмм. a, b – стороны; α – один из углов; h – высота: $S = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin\alpha$

Трапеция. a, b – основания; h – высота; c – средняя линия: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h = c \cdot h$

Квадрат. a – сторона, d – диагональ: $S = a^2 = d^2/2$

Прямоугольник. a, b – стороны: $S = a \cdot b$

Ромб. a – сторона; d_1, d_2 – диагонали; α – один из углов: $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = a^2 \cdot \sin\alpha$

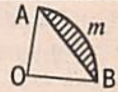
Любой четырехугольник. d_1, d_2 – диагонали; α –угол между ними: $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin\alpha$

Правильный шестиугольник. a – сторона: $S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$

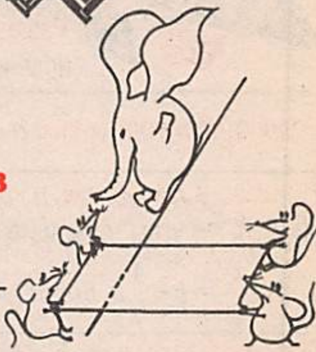
Круг. d – диаметр; r – радиус, l – длина окружности: $S = \frac{l}{2} \cdot r = \pi \cdot r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$

Сектор. r – радиус, α – градусная мера центрального угла: $S = \frac{\pi r^2}{360^0} \cdot \alpha$

Сегмент. Площадь сегмента находится как разность площадей сектора $OAmB$ и треугольника AOB.



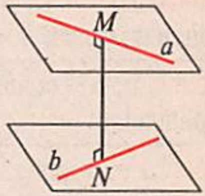
СТЕРЕОМЕТРИЯ



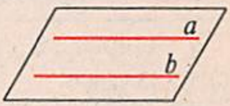
Прямые и плоскости в пространстве

Прямые a и b называются **скрещивающимися,** если они не лежат в одной плоскости.

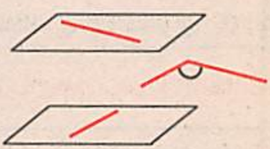
Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра (MN).



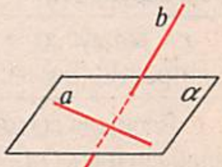
Прямые a и b называются **параллельными**, если они не пересекаются и лежат в одной плоскости.



Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными двум данным скрещивающимся прямым.

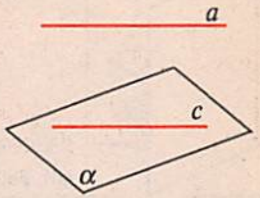


Признак скрещивающихся прямых. Если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой a, то эти прямые скрещиваются.



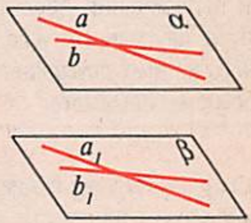
Прямая a называется параллельной плоскости α, если она не имеет с этой плоскостью общих точек.

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая a параллельна некоторой прямой c, лежащей в плоскости α, то она параллельна плоскости α.



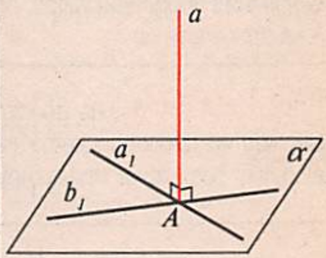
Две плоскости α и β называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



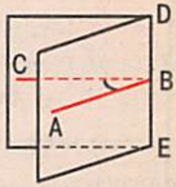
Прямая a называется перпендикулярной плоскости α, если она перпендикулярна любой прямой, принадлежащей плоскости α..

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Прямая a перпендикулярна плоскости α, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости α..



Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей

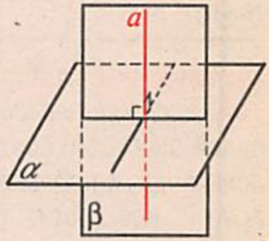
Двугранный угол – фигура, образованная двумя полуплоскостями, выходящими из одной прямой.



Двугранный угол измеряется своим *линейным углом ABC*, т.е. углом между перпендикулярами *к ребру DE* двугранного угла, восставленными в обеих плоскостях (гранях) из одной точки.

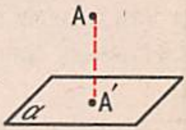
При пересечении двух плоскостей образуется четыре двугранных угла. Если линейный угол одного из этих двугранных углов прямой, то эти плоскости называются перпендикулярными.

Признак перпендикулярности плоскостей. Если прямая a, перпендикулярная к плоскости α, принадлежит плоскости b, то плоскости a и b перпендикулярны.

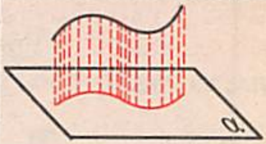


Проекция

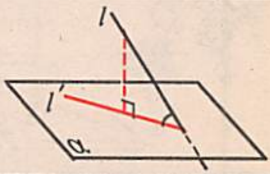
Перпендикулярной проекцией (или, короче, проекцией) точки А на плоскость α называется основание перпендикуляра, опущенного из точки А на плоскость α.



Проекцией фигуры на плоскость α называется множество точек плоскости α, являющихся проекциями всех точек проектируемой фигуры.

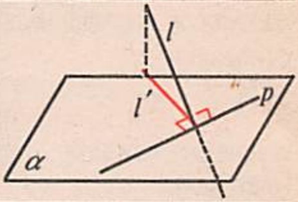


Углом между прямой l и плоскостью α называется угол между прямой l и ее проекцией на плоскость α.



Теорема о трех перпендикулярах

Для того чтобы прямая p, лежащая в плоскости α, была перпендикулярна наклонной l, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной l' на эту плоскость.



Многогранники: призма, параллелепипед, пирамида

Многогранником называется тело, граница которого состоит из кусков плоскостей (многоугольников).

грани	МНОГОГРАННИКА	многоугольники
вершины		вершины многоугольника
ребра		стороны многоугольника
диагонали		отрезки, соединяющие две вершины, не лежащие на одной грани

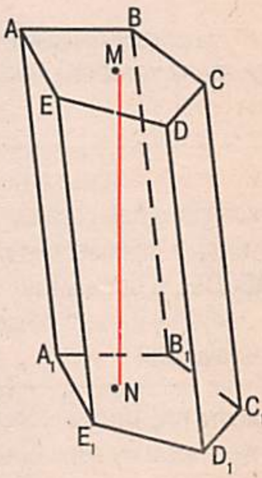
Призмой называется многогранник, у которого две грани – равные многоугольники, а все остальные грани – параллелограммы.

Основания призмы – равные многоугольники ABCDE и $A_1B_1C_1D_1E_1$.

Боковые грани – параллелограммы AA_1B_1B, BB_1C_1C и т.д.

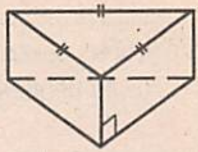
Боковые ребра – отрезки AA_1, BB_1 и т.д.

Высота призмы – перпендикуляр MN, опущенный из любой точки одного основания на плоскость другого.



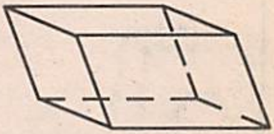
Прямая призма – призма, боковые ребра которой перпендикулярны плоскости основания.

Правильная призма – прямая призма, основание которой – правильный многоугольник.

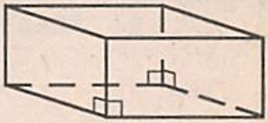


Правильная треугольная призма

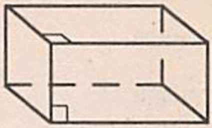
Параллелепипед – призма, основание которой параллелограмм; таким образом, параллелепипед имеет 6 граней и все они параллелограммы.



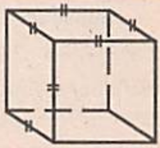
Прямой параллелепипед – параллелепипед, четыре боковые грани которого – прямоугольники.



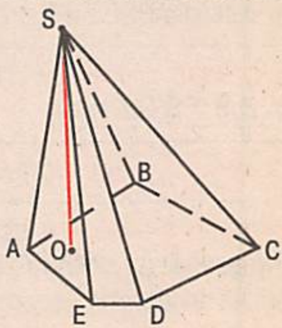
Прямоугольный параллелепипед – прямой параллелепипед, у которого все шесть граней – прямоугольники.



Куб – прямоугольный параллелепипед, все грани которого – квадраты.

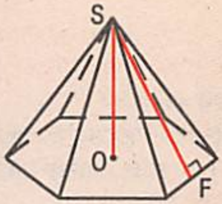


Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань – основание пирамиды – произвольный многоугольник (ABCDE), а остальные – боковые грани – треугольники с общей вершиной S, называемой вершиной пирамиды.



Высота пирамиды – перпендикуляр SO, опущенный из вершины на основание.

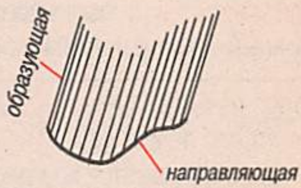
Пирамида называется правильной, если основание ее – правильный многоугольник и высота падает в центр основания. Все боковые грани правильной пирамиды – равные равнобедренные треугольники.



Апофема правильной пирамиды – высота (SF) боковой грани.

Цилиндр

Цилиндрическая поверхность образуется прямой линией (образующей), перемещающейся параллельно заданному направлению вдоль некоторой кривой (направляющей).



Цилиндр – тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с замкнутой направляющей и двумя параллельными плоскостями, являющимися основаниями цилиндра.

Высота цилиндра – расстояние между основаниями (MN).

Цилиндр – прямой, если его образующие перпендикулярны к основанию.

Цилиндр – круговой, если в основании его лежит круг.

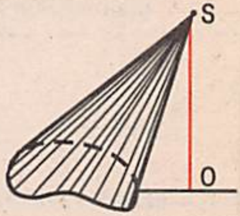
Прямой круговой цилиндр можно получить, вращая прямоугольник вокруг одной из его сторон, поэтому прямой круговой цилиндр называется также цилиндром вращения.

Конус

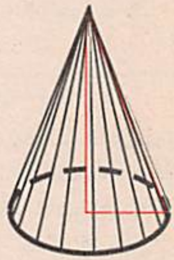
Коническая поверхность образуется прямой линией (образующей), перемещающейся вдоль кривой линии (направляющей) и имеющей неподвижную точку (вершину).

Конус – тело, ограниченное конической поверхностью с замкнутой направляющей и плоскостью, образующей основание.

Высота конуса – перпендикуляр SO, опущенный из вершины на основание.



Конус называется круговым, если в основании его лежит круг. Прямым круговым конусом называется круговой конус, высота которого проходит через центр круга, лежащего в основании. Прямой круговой конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов. Поэтому его называют также конусом вращения.

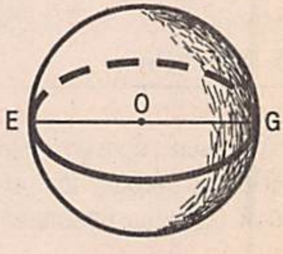


Шар

Сферической поверхностью (или, просто, сферой) называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки – центра сферы (точка O).

Радиус OE и диаметр EG сферы определяются так же, как для окружности.

Тело, ограниченное сферической поверхностью, называется **шаром**.

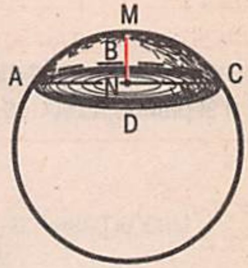


Части шара

Часть шара, отсекаемая от него какой-либо плоскостью (ABCD), называется **шаровым сегментом**.

Основанием шарового сегмента называется круг ABCD.

Высотой шарового сегмента называется отрезок NM, т.е. длина перпендикуляра, восстановленного из центра N до пересечения с поверхностью шара.

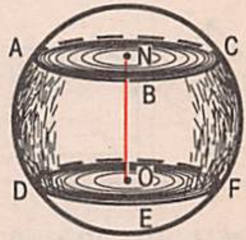


Часть шара, заключенная между двумя секущими параллельными плоскостями (ABC и DEF), называется шаровым слоем.

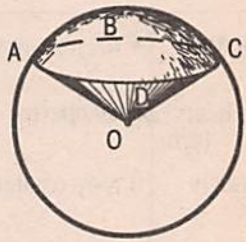
Кривая поверхность шарового слоя называется **шаровым поясом** (или зоной).

Круги ACB и DFE называются основаниями шарового слоя.

Расстояние NO между основаниями есть высота шарового слоя.



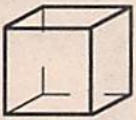
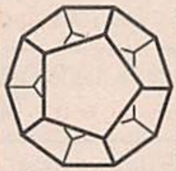
Часть шара, ограниченная кривой поверхностью шарового сегмента (AC) и конической поверхностью (OABCD), основанием которой служит основание сегмента (ABCD), а вершиной – центр шара, называется **шаровым сегментом**.



Правильные многогранники

Многогранник называется правильным, если все его грани – равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одно и то же число граней.

Выпуклых правильных многогранников (т.е. правильных многогранников, все диагонали которых лежат внутри) может быть только пять:

тетра́эдр *(четырехгранник)*	гекса́эдр (куб) *(шестигранник)*	окта́эдр *(восьмигранник)*	додека́эдр *(12-гранник)*	икоса́эдр *(20-гранник)*
				

Элементы правильных многогранников *(a – длина ребра)*

Название	Число граней и их форма	Число		Полная поверхность	Объем
		ребер	вершин		
Тетраэдр	4 треугольника	6	4	$1{,}7321\ a^2$	$0{,}1179\ a^3$
Гексаэдр (куб)	6 квадратов	12	8	$6\ a^2$	a^3
Октаэдр	8 треугольников	12	6	$3{,}46\ a^2$	$0{,}47\ a^3$
Додекаэдр	12 пятиугольников	30	20	$20{,}6\ a^2$	$7{,}67\ a^3$
Икосаэдр	20 треугольников	30	12	$8{,}67\ a^2$	$2{,}18\ a^3$

Объемы и поверхности тел

Обозначения: V – объем, S – площадь основания; $S_{бок}$ – боковая поверхность *(например, для призмы и пирамиды сумма площадей всех боковых граней)*; P – полная поверхность; h – высота; a, b, c – измерения прямоугольного параллелепипеда; A – апофема правильной пирамиды; l – образующая конуса; p – периметр или длина окружности основания; r – радиус основания; d – диаметр основания; R – радиус шара; D – диаметр шара.

Призма, прямая или наклонная; параллелепипед: $V = S \cdot h$

Прямая призма: $S_{бок} = p \cdot h$

Параллелепипед прямоугольный: $V = a \cdot b \cdot c$; $P = 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)$

Куб: $V = a^3$; $P = 6a^2$

Пирамида, правильная и неправильная: $V = \frac{1}{3} S \cdot h$

Пирамида правильная: $S_{бок} = \frac{1}{2} p \cdot A$

Цилиндр круговой (прямой и наклонный): $V = S \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Цилиндр круговой: $S_{бок} = 2\pi r \cdot h = \pi \cdot d \cdot h$

Конус круговой (прямой и наклонный): $V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

Конус круговой: $S_{бок} = \frac{1}{2} pl = \pi \cdot r \cdot l = \frac{1}{2} \pi \cdot d \cdot l$

Шар: $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{6} \pi D^3$; $P = 4\pi R^2 = \pi D^2$

Шаровой сегмент: $V = \pi h^2 (R - \frac{1}{3} h) = \frac{\pi h}{6} (h^2 + 3r^2)$

$S_{бок} = 2\pi Rh = \pi(r^2 + h^2)$; $P = \pi(2r^2 + h^2)$

Шаровой слой: $V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi (r_1^2 + r_2^2) \cdot h$; $S_{бок} = 2\pi \cdot R \cdot h$

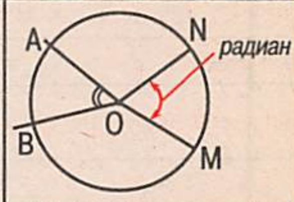
Шаровой сектор: $V = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot h'$ (h' – высота сегмента, содержащегося в секторе)

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Радианное измерение углов

Наряду с градусной мерой углов в тригонометрии употребляется и другая мера, называемая **радианной**. В ней за единицу измерения принимается острый угол ($\angle MON$), под которым видна из центра окружности ее дуга, равная радиусу ($\overset{\frown}{MN}=OM$). Такой угол называется **радианом**.

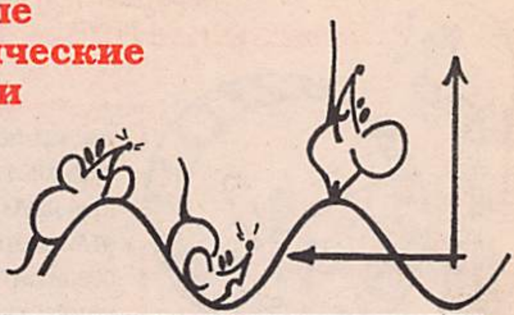
Радианной мерой любого угла (АОВ) является отношение этого угла к радиану; но отношение $\angle AOB{:}\angle MON$ равно отношению дуг $\overset{\frown}{AB}{:}\overset{\frown}{MN}$, т.е. отношению дуги АВ к радиусу.



Радианная мера любого угла АОВ есть отношение длины дуги АВ, описанной произвольным радиусом из центра О и заключенной между сторонами угла, к радиусу ОА этой дуги.

Углы в градусах	360°	180°	90°	60°	45°	30°
Углы в радианах	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Основные тригонометрические функции



Пусть круг радиуса 1 с центром в начале прямоугольной системы координат пересекает положительную ось абсцисс *(OX)* в точке S. Движущаяся по окружности точка P с координатами x, y определяет угол SOP, величину которого *(в радианах или в градусах)* обозначим через α. При этом α положительно, если точка P, начиная движение из точки S, пробегает окружность в направлении против часовой стрелки *(положительном направлении)*.

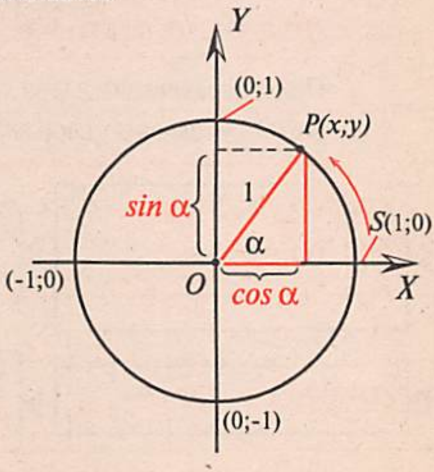
Тригонометрические функции (функции угла) определяются следующими равенствами:

СИНУС: $\sin\alpha = y$

КОСИНУС: $\cos\alpha = x$

ТАНГЕНС: $tg\alpha = \dfrac{y}{x}$

КОТАНГЕНС: $ctg\alpha = \dfrac{x}{y}$



Периодичность тригонометрических функций

Так как положения движущейся по окружности точки, соответствующие двум углам, величины которых отличаются на число, кратное 2π, совпадают, то значения всех тригонометрических функций периодически повторяются.

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi \cdot k)$,
$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi \cdot k)$,
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ являются периодическими с периодом 2π

$tg\,\alpha = tg(\alpha + \pi \cdot k)$,
$ctg\,\alpha = ctg(\alpha + \pi \cdot k)$,
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Функции $tg\,\alpha$, $ctg\,\alpha$ являются периодическими с периодом π

Четность и нечетность тригонометрических функций

При изменении знака угла $\sin\alpha$, $tg\,\alpha$, $ctg\,\alpha$ меняют знак, а $\cos\alpha$ сохраняет свое значение

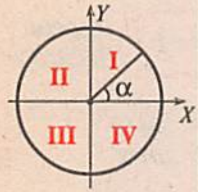
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$,
$tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$,
$ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$

Функции $\sin\alpha$, $tg\,\alpha$, $ctg\,\alpha$ являются **нечетными** функциями

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Функция $\cos\alpha$ является **четной** функцией

Таблица знаков тригонометрических функций



Квадрант	Аргумент	$sin\,\alpha$	$cos\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$
I	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	+	+	+	+
II	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	+	–	–	–
III	$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$	–	–	+	+
IV	$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$	–	+	–	–

Значения тригонометрических функций для некоторых углов

Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Градусы	0°	30°	45°	60°	90°
$sin\,\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$cos\,\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$tg\,\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$ctg\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

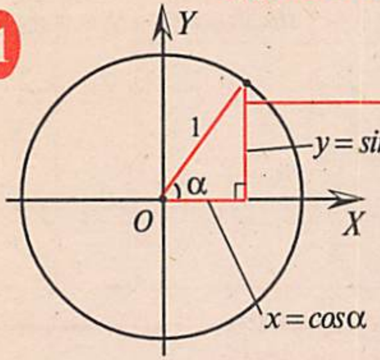
Формулы приведения

Значения тригонометрических функций для аргументов, значения которых лежат между $\pi/2$ и 2π, сводятся к значениям функции от аргументов, лежащих между 0 и $\pi/2$, при помощи следующих **формул приведения:**

$sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = cos\,\alpha$ $sin\,(\pi \pm \alpha) = \mp\, sin\,\alpha$ $sin\left(\frac{3}{2}\pi \pm \alpha\right) = -cos\,\alpha$	$cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -sin\,\alpha$ $cos\,(\pi \pm \alpha) = -cos\,\alpha$ $cos\left(\frac{3}{2}\pi \pm \alpha\right) = \pm sin\,\alpha$
$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -ctg\,\alpha$ $tg\,(\pi \pm \alpha) = \pm tg\,\alpha$ $tg\left(\frac{3}{2}\pi \pm \alpha\right) = \mp\, ctg\,\alpha$	$ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -tg\,\alpha$ $ctg\,(\pi \pm \alpha) = \pm ctg\,\alpha$ $ctg\left(\frac{3}{2}\pi \pm \alpha\right) = \mp\, tg\,\alpha$

Связь тригонометрических функций одного аргумента

1



$$x^2+y^2=1$$

Теорема Пифагора

$x=\cos\alpha$
$y=\sin\alpha$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

Основное тригонометрическое тождество

2

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

3

$$tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x};\qquad ctg\,x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$tg\,x\cdot ctg\,x=\frac{\cancel{\sin}\,x}{\cancel{\cos}\,x}\cdot\frac{\cancel{\cos}\,x}{\cancel{\sin}\,x}=1$$

$$tg\,x\cdot ctg\,x=1$$

Соотношения между квадратами тригонометрических функций одного аргумента

Результаты предыдущего пункта позволяют вывести следующие полезные формулы:

$sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha = \dfrac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \dfrac{1}{1+ctg^2\alpha}$
$cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+tg^2\alpha} = \dfrac{ctg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha}$
$tg^2\alpha = \dfrac{sin^2\alpha}{1-sin^2\alpha} = \dfrac{1-cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \dfrac{1}{ctg^2\alpha}$
$ctg^2\alpha = \dfrac{1-sin^2\alpha}{sin^2\alpha} = \dfrac{cos^2\alpha}{1-cos^2\alpha} = \dfrac{1}{tg^2\alpha}$

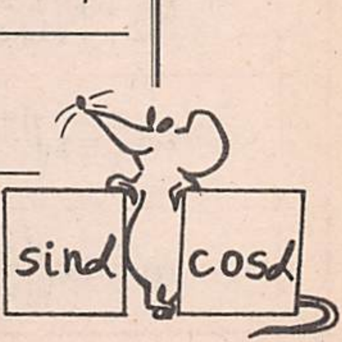
Формулы сложения для суммы и разности аргументов

$$sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta \pm cos\alpha \cdot sin\beta$$

$$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sin\alpha \cdot sin\beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\,\alpha \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\,\alpha \cdot ctg\,\beta \mp 1}{ctg\,\alpha \pm ctg\,\beta}$$



Формулы сложения для кратных аргументов

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$	
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\cdot\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$	
$tg 2\alpha = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$	$ctg 2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\,\alpha}$
$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$	$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

Для функций *половинного аргумента* имеют место следующие соотношения: (знак “+” или “–” выбираются в соответствии с тем, в какой четверти (квадранте) находится угол – аргумент $\alpha/2$

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
$tg\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$
$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
$ctg\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Формулы сложения для суммы и разности функций

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	
$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	
$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	
$\cos\alpha\pm\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\mp\alpha\right)$	
$tg\,\alpha\pm tg\,\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$	$ctg\,\alpha\pm ctg\,\beta=\pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$
$tg\,\alpha\pm ctg\,\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$	$ctg\,\alpha-tg\,\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\cos\beta}$

Произведения тригонометрических функций

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$
$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$
$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$
$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$

Обратные тригонометрические функции

Функции		Обратные функции (обозначение)
$y = x + 3$	$x = y - 3$	$y = x - 3$
$y = x^2$	$x = \sqrt{y},\ y \geq 0$	$y = \sqrt{x}$
$y = \sin x$	$x = \arcsin y$	$y = \arcsin x$

Арксинусом числа b ($\arcsin b$) называется угол α, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен числу b.	$\arcsin b = \alpha \Leftrightarrow b = \sin\alpha$ $b \in [-1;1],\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
Арккосинусом числа b ($\arccos b$) называется угол α, принадлежащий отрезку $[0;\pi]$, косинус которого равен числу b.	$\arccos b = \alpha \Leftrightarrow b = \cos\alpha$ $b \in [-1;1],\ \alpha \in [0;\pi]$
Арктангенсом числа b ($\operatorname{arctg} b$) называется угол α, принадлежащий интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен числу b.	$\operatorname{arctg} b = \alpha \Leftrightarrow b = \operatorname{tg}\alpha$ $b \in (-\infty;+\infty)$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
Арккотангенсом числа b ($\operatorname{arcctg} b$) называется угол α, принадлежащий интервалу $(0;\pi)$, котангенс которого равен числу b.	$\operatorname{arcctg} b = \alpha \Leftrightarrow b = \operatorname{ctg}\alpha$ $b \in (-\infty;+\infty)$, $\alpha \in (0;\pi)$

Некоторые примеры

$\arcsin 0{,}5 = \frac{\pi}{6}$	$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$	$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$	$\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$
$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$	$\arccos 1 = 0$	$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$	$\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3}{4}\pi$

Основные соотношения для обратных тригонометрических функций

$$b = \sin\alpha \xrightarrow{\alpha = \arcsin b} b = \sin(\arcsin b)$$

$$b = \cos\alpha \xrightarrow{\alpha = \arccos b} b = \cos(\arccos b)$$

$$b = \mathrm{tg}\,\alpha \xrightarrow{\alpha = \mathrm{arctg}\, b} b = \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, b)$$

$$b = \mathrm{ctg}\,\alpha \xrightarrow{\alpha = \mathrm{arcctg}\, b} b = \mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, b)$$

Соотношения типа $\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$ не всегда верны, например:

$$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\arcsin a = \arccos\sqrt{1-a^2} = \mathrm{arctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}};\\
&\arccos a = \arcsin\sqrt{1-a^2} = \mathrm{arcctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}};\\
&\mathrm{arctg}\, a = \mathrm{arcctg}\frac{1}{a} = \arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}
\end{aligned}\right\} \text{при } a>0$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}; \qquad \mathrm{arctg}\, a + \mathrm{arcctg}\, a = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin a + \arcsin b = \begin{cases} \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right), & \text{если } a^2+b^2<1, \text{ а также если } a^2+b^2>1, \text{ но } ab<0\\ \pm\left[\pi - \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)\right], & \text{если } a^2+b^2>1 \text{ и } ab>0 \end{cases}$$

$$\arcsin a - \arcsin b = \begin{cases} \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}\right), & \text{если } a^2+b^2<1, \text{ а также если } a^2+b^2>1, \text{ но } ab>0\\ \pm\left[\pi - \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}\right)\right], & \text{если } a^2+b^2>1, \text{ но } ab<0 \end{cases}$$

В обеих последних формулах перед каждой квадратной скобкой нужно взять +, если a положительно, и −, если a отрицательно.

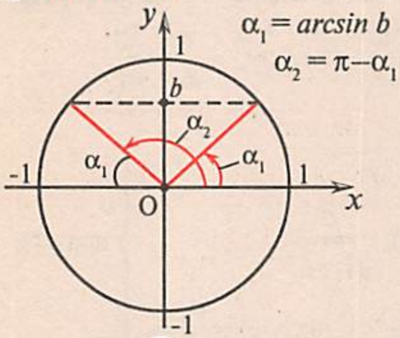
Простейшие тригонометрические уравнения

① $\sin x = b$ ③ $tg\, x = b$

② $\cos x = b$ ④ $ctg\, x = b$

Уравнения ①, ② имеют решение только в том случае, если выполнено неравенство $-1 \le b \le 1$

① $\sin x = b$



Решение ①

$\boxed{x = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2 = \pi - \alpha_1}$

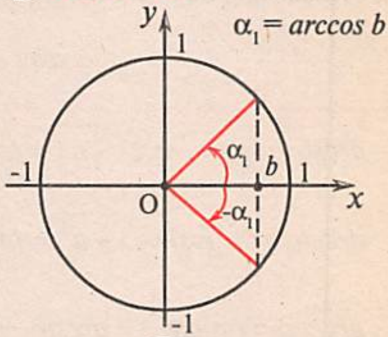
Учитывая периодичность функции синус, получим **множества корней уравнения** ①

$$\begin{aligned} &x = \alpha_1 - 2\pi n,\\ &x_2 = \pi - \alpha_1 + 2\pi n =\\ &\quad = -\alpha_1 + (2n+1)\pi,\\ &n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

$\alpha_1 = \arcsin b$

$$\boxed{x = (-1)^m \arcsin b + \pi \cdot m,\ m \in Z}$$

② $\cos x = b$



Решение ②

$\boxed{x = \alpha_1, \quad x_2 = -\alpha_1}$

Учитывая периодичность функции косинус, получим **множества корней уравнения** ②

$$\begin{aligned} &x = \alpha_1 + 2\pi n,\\ &x = -\alpha_1 + 2\pi n,\\ &n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

$\alpha_1 = \arccos b$

$$\boxed{x = \pm \arccos b + 2\pi \cdot n,\ n \in Z}$$

Уравнения ③, ④ имеют решения при любых значениях $b \in (-\infty; +\infty)$. Поскольку функции тангенс и котангенс имеют период π, то множество корней записываются следующим образом:

Уравнение ③

$$tg\, x = b$$

Решение ③

$$x = arctg\, b + \pi \cdot n,\ n \in Z$$

Уравнение ④

$$ctg\, x = b$$

Решение ④

$$x = arcctg\, b + \pi \cdot n,\ n \in Z$$

Частные случаи уравнения ① и ②

Уравнение	Решение
$\sin x = 0$	$x = \pi n, \quad n \in Z$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n, \quad n \in Z$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$

Основные приемы решения тригонометрических уравнений

Решить тригонометрические уравнения $\xrightarrow{\text{Преобразования, приводящие функции к одинаковому аргументу}}$ Решить простейшие тригонометрические уравнения ① – ④

$$\boxed{\cos 2x+7\sin x+8=0} \xrightarrow{\cos 2x=1-2\sin^2 x} \boxed{1-2\sin^2 x+7\sin x+8=0} \to$$

$$\to \boxed{2\sin^2 x-7\sin x-9=0} \xrightarrow{\sin x=y,\ \ y\in[-1;1]} \boxed{2y^2-7y-9=0} \to$$

$$\to \boxed{\begin{array}{c} y_1=\dfrac{9}{2}, \\ y_2=-1 \end{array}} \xrightarrow[y_2\in[-1;1]]{y_1\notin[-1;1]} \boxed{\sin x=-1} \to \boxed{x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z}$$

①

Решить тригонометрические уравнения $\xrightarrow{\text{Тригонометрические функции, входящие в уравнение, выражаются через одну и ту же функцию одного аргумента}}$ Решить простейшие тригонометрические уравнения ① – ④

$$\boxed{\frac{3}{\cos^2 x}=8tg\,x-2} \xrightarrow{\cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2 x}} \boxed{3tg^2 x-8tg\,x+5=0} \to$$

$$\to \boxed{\begin{array}{c} 3y^2-8y+5=0, \\ y=tg\,x \end{array}} \to \boxed{\begin{array}{c} y_1=1; \\ y_2=\dfrac{5}{3} \end{array}} \to \boxed{\begin{array}{c} (tg\,x)_1=1; \\ (tg\,x)_2=\dfrac{5}{3} \end{array}} \to$$

③

$$\to \boxed{\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+\pi\cdot n, \\ x=arctg\dfrac{5}{3}+\pi\cdot n,\ \ n\in Z \end{array}}$$

Решить уравнение
$a\sin x + b\cos x = c$

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$
(метод вспомогательного аргумента)

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Введем вспомогательный угол по формулам:

$$\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos x\cdot\cos\varphi + \sin x\cdot\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Простейшее тригонометрическое уравнение ② относительно *(x–φ)*

$$4\sin x + 3\cos x = 1$$

$$\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}\sin x + \frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

$$\frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x = \frac{1}{5}$$

$$\cos\varphi = \frac{3}{5}$$

$$\sin\varphi = \frac{4}{5}$$

$$\cos\varphi\cdot\cos x + \sin\varphi\cdot\sin x = \frac{1}{5}$$

$$\cos(x-\varphi) = \frac{1}{5}$$

$$x-\varphi = \pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi n$$

$$x = \varphi \pm \arccos\frac{1}{5} + 2\pi n$$

$$\varphi = \arccos\frac{3}{5}$$

$$x = \arccos\frac{3}{5} \pm \arccos\frac{1}{5} + 2\pi n,\ n\in Z$$

ФУНКЦИИ, ГРАФИКИ

Постоянная и переменная величины

Переменная величина – эта такая величина, которая в условиях данного вопроса может принимать различные значения.

Скорость движения автомобиля – переменная величина

Постоянная величина – это такая величина, которая в условиях данного вопроса сохраняет неизменное значение.

Температура T кипения воды в большинстве физических вопросов есть величина постоянная ($T = 100^\circ$ C)

Одна и та же величина в одном вопросе может быть *постоянной*, а в другом – *переменной* величиной.

В тех вопросах, где нужно считаться с изменением атмосферного давления, T – переменная величина

Чаще всего переменные величины обозначаются последними буквами латинского алфавита: x, y, z, а постоянные – первыми: a, b, c, ...

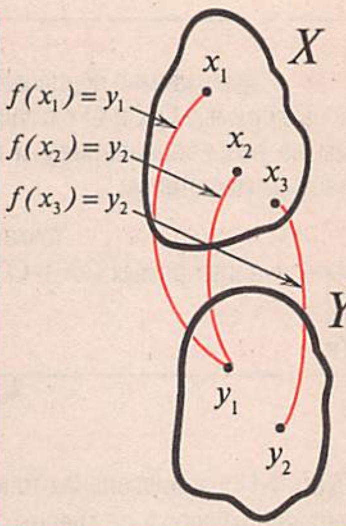
Понятие функции

Переменная y называется **функцией** переменной x, если каждому значению x, принадлежащему некоторому множеству X, поставлено в соответствие единственное значение переменной y:

обозначение $y=f(x)$

Множество X – **области определения** функции $y=f(x)$

Множество Y всех значений, которые принимает переменная y, называется **областью изменения** *(или областью значений)* функции $y=f(x)$



x – **аргумент** *(или независимая переменная)* функции $y=f(x)$

Примеры

Функции	**Область определения** (X)	**Область изменения** (Y)
$y=\sin x$	$x \in (-\infty;+\infty)$	$y \in [-1;1]$
$y=\arcsin x$	$x \in [-1;\ 1]$	$y \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$
$y=\mathrm{arctg}\, x$	$x \in (-\infty;+\infty)$	$y \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$
$y=ax+b$	$x \in (-\infty;+\infty)$	$y \in (-\infty;+\infty)$
$y=x^2$	$x \in (-\infty;+\infty)$	$y \in [0;+\infty)$
$y=\sqrt{x}$	$x \in [0;+\infty)$	$y \in [0;+\infty)$

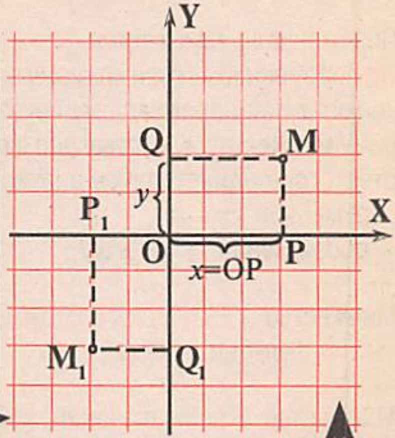
Координаты на плоскости

Прямоугольная система координат – две взаимно перпендикулярные прямые OX и OY с заданным на них направлением и выбранным масштабом.

Начало координат – точка O (пересечения прямых OX и OY);

OX – ось абсцисс;

OY – ось ординат.

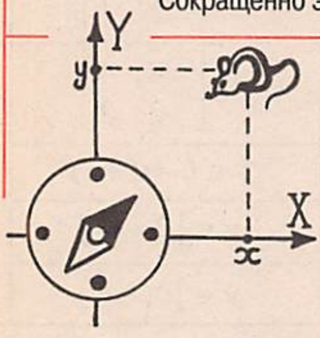


Пусть M – произвольная точка плоскости, а P и Q – основания перпендикуляров, опущенных из нее на оси OX и OY.

Абсцисса точки M – отрезок OP на оси абсцисс;
ордината точки M – отрезок OQ на оси ординат.

Величины $\begin{cases} x = OP \\ y = OQ \end{cases}$ называются прямоугольными координатами *(или просто координанами)* точки M.

На рисунке точка M имеет абсциссу $x = 3$ и ординату $y = 2$; точка M_1 – абсциссу $x_1 = -2$ и ординату $y_1 = 1$. Сокращенно это записывается так: $M(3;2)$; $M_1(-2;1)$.



Каждой точке плоскости соответствует одна пара чисел x, y. Каждой паре (действительных) чисел x, y соответствует одна точка M.

Способы задания функции

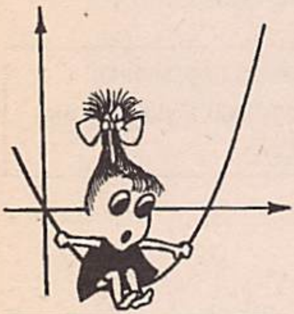
1. Табличный способ – запись в виде таблицы конкретных значений переменной x и соответствующих им значений переменной y.

Зависимость между давлением р и температурой кипения воды

р, мм	300	350	400	450	500	550	600	650	700
T°C	75,8	79,6	83,0	85,8	88,5	91,2	93,5	95,7	97,6

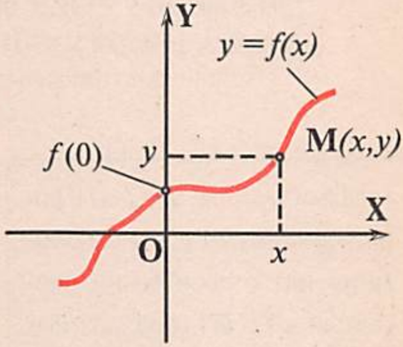
2. Аналитический способ – запись функциональной зависимости в виде некоторой формулы.

$$y = \ln x + x^2, \quad y = \sin(a^x)$$



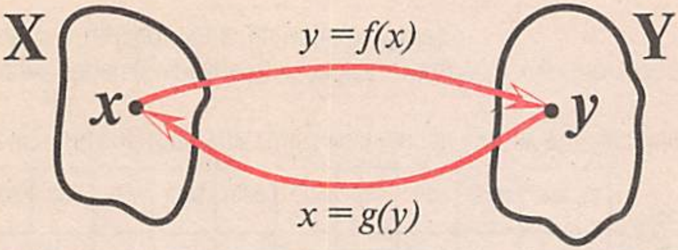
3. Графический способ.

Пусть задана функция $y = f(x)$.



Изображая на координатной плоскости множество точек $M(x;y)$, координаты которых x и y удовлетворяют соотношению $y = f(x)$, получим линию, называемую **графиком** функции $y = f(x)$.

Обратные функции



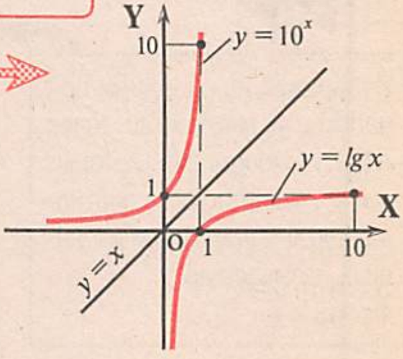
Пусть задана функция $y = f(x)$, причем каждому значению y, принадлежащему области значений Y, соответствует единственное значение x из области определения X. Функцию $y = f(x)$ можно рассматривать как уравнение $f(x)-y=0$. Решая это уравнение относительно x, получим обратную функцию $x = g(y)$, имеющую множество Y в качестве области определения, а множество X в качестве области значений.

Функция $y = lg\,x$ имеет обратную функцию $x = 10^y$.

Поскольку принято аргумент функции обозначать переменной x, а значение функции – переменной y, то обратную функцию для функции $y = f(x)$ записывают в виде $y = g(x)$.

Для функции $y = lg\,x$ обратной является функция $y = 10^x$

Графики функции $y = f(x)$ и обратной функции $y = g(x)$ симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов *(прямая* $y = x$*).*

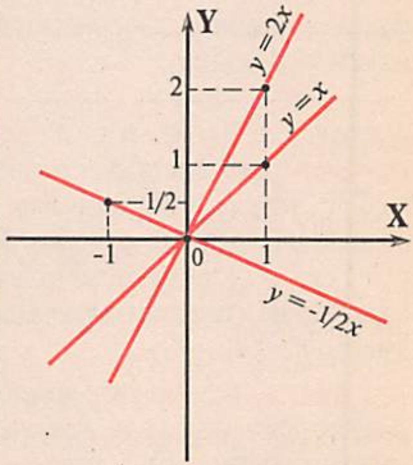


Общие свойства функций

Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной**, если существует число $c>0$, такое что $\lvert f(x)\rvert \leq c$ для любого x из области определения функции.	$y = \cos x$ – ограниченная функция, т.к. $\lvert \cos x \rvert \leq 1$
Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x)=f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси OY.	$y = \cos x$ – четная функция, т.к. $\cos(-x)=\cos x$; $y=x^4+5$ – четная функция, т.к. $(-x)^4+5=x^4+5$
Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.	$y = \sin x$ – нечетная функция, т.к. $\sin(-x)=-\sin x$; $y=x^3$ – нечетная функция, т.к. $(-x)^3=-x^3$
Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число $T\neq 0$, что для любого значения x из области определения функции числа $(x+T)$ и $(x-T)$ также входят в область определения и при этом выполнено равенство $f(x+T)=f(x)$. **Главным периодом** *(или просто периодом)* принято называть наименьшее положительное число T, являющееся периодом функции.	$y = \operatorname{tg} x$ – периодическая функция с периодом π, т.к. $\operatorname{tg}(x+\pi\cdot k)=\operatorname{tg} x$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ Наименьшим из чисел π, 2π, 3π,... является π.

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на интервале $(a;b)$, если для двух точек x_1 и x_2 интервала таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$; соответственно функция называется **убывающей**, если из неравенства $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) < f(x_1)$.	Функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает, а на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ убывает.

Простейшие функции и их графики

Функции	*Графики*
1. Пропорциональность. Если переменные величины y и x (прямо) пропорциональны, то функциональная зависимость между ними выражается уравнением $y=kx$, k – некоторая постоянная величина (коэффициент пропорциональности). График прямой пропорциональности есть прямая линия, проходящая через начало координат и образующая с осью абсцисс угол α, тангенс которого равен постоянной k; $tg\,\alpha = k$. k – угловой коэффициент.	

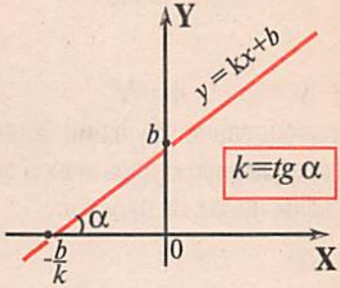
2. Линейная функция $y=kx+b$, $k\neq0$.

Область определения: $x\in R$

Область изменения: $y\in R$

Функция является непериодической, неограниченной, график пересекает ось OY в точке $y=b$ и ось OX в точке $x=-b/k$. Функция возрастает на всей числовой прямой в случае $k>0$ и убывает в случае $k<0$.

График – прямая линия



k – угловой коэффициент

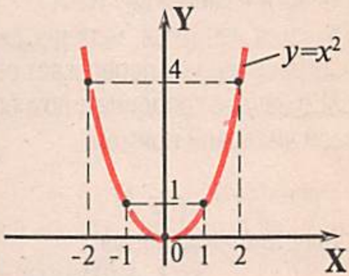
3. Квадратичная функция $y=x^2$.

Область определения: $x\in R$

Область изменения: $y\geq0$

Функция четная, непериодическая, неограниченная, пересекает оси OX и OY в начале координат; убывает на интервале $x\in(-\infty;0]$ и возрастает на интервале $x\in[0;+\infty)$.

График – парабола



4. Обратная пропорциональная зависимость $y=1/x$.

Область определения:

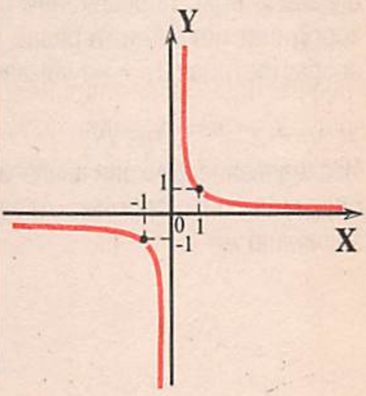
$x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

Область изменения:

$y\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

Функция нечетная, непериодическая, неограниченная, пересечений с осями координат нет; на обоих интервалах $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$ убывает (однако во всей области определения не является убывающей).

График – гипербола



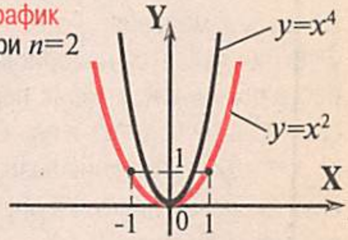
4. **Степенные функции** $y = x^{\alpha}$, α – любое число

$\alpha=1 \rightarrow y = x$ – *случай* **1**
$\alpha=2 \rightarrow y = x^2$ – *случай* **2**
$\alpha=-1 \rightarrow y = 1/x$ – *случай* **3**

а) $y = x^{2n},\ n \in N$

Исследование функции аналогично исследованию квадратичной функции, график похож на параболу.

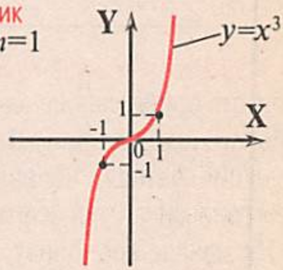
График при $n=2$



b) $y = x^{2n+1},\ n \in N$

Область определения: $x \in R$
Область изменения: $y \in R$
Функция нечетная, непериодическая, неограниченная, пересекает оси OX и OY в начале координат; возрастает на всей числовой прямой.

График при $n=1$



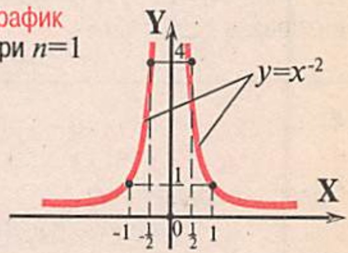
c) $y = x^{-2n},\ n \in N$

Область определения:

$x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

Область изменения: $y > 0$
Функция четная, непериодическая, неограниченная, пересечений с осями координат нет, на интервале $(-\infty;0)$ возрастает, на $(0;+\infty)$ убывает.

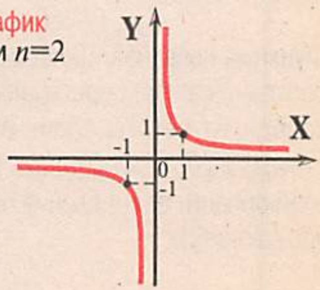
График при $n=1$



d) $y = x^{-2n+1},\ n \in N$

Исследование функции аналогично исследованию гиперболы, отвечающей значению $n=1$.

График при $n=2$



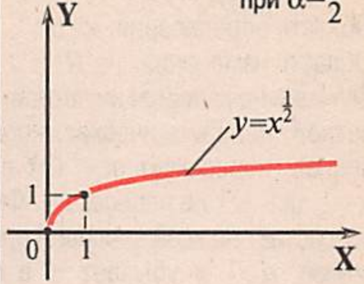
е) $y = x^{\alpha}$, $\alpha>0$, α – нецелое

Область определения: $x\geq0$ (отрицательные значения x не взяты, т.к. при $x<0$ некоторые степенные функции, например, $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$, теряют смысл).

Область изменения: $y\geq0$

Функция не является ни четной, ни нечетной, непериодическая; пересекает оси в начале координат; возрастает на всей области определения.

График при $\alpha=\frac{1}{2}$



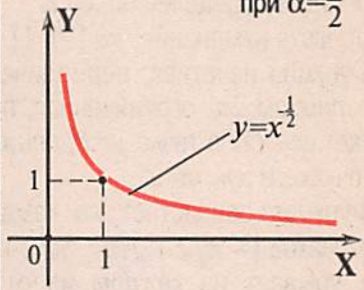
f) $y = x^{-\alpha}$, $\alpha>0$, α – нецелое

Область определения: $x>0$

Область изменения: $y>0$

Функция не является ни четной, ни нечетной; непериодическая, неограниченная, не пересекает оси координат, убывает во всей области определения.

График при $\alpha=\frac{1}{2}$



5. Показательная функция

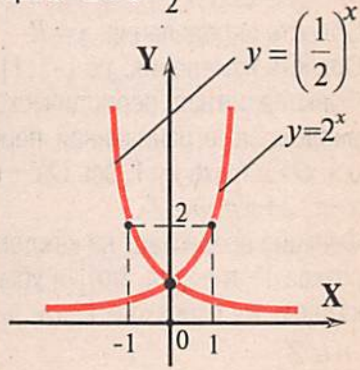
$$y = a^x, \quad a>0, \; a\neq1$$

Область определения: $x\in R$

Область изменения: $y>0$

Функция не является ни четной, ни нечетной; непериодическая, неограниченная, пересекает ось OY при $y=1$, ось OX не пересекает. Возрастает на всей числовой прямой в случае $a>1$ и убывает – в случае $0<a<1$.

Графики при $a=2$ и $a=\frac{1}{2}$



6. Логарифмическая функция

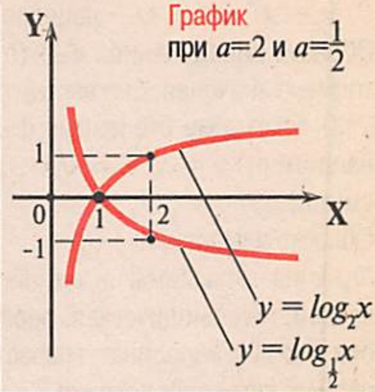
$$y = \log_a x,\ a>0,\ a \neq 1$$

Область определения: $x>0$

Область изменения: $y \in R$

Функция не является ни четной, ни нечетной; непериодическая, неограниченная, пересекает ось OX в точке $x=1$, ось OY не пересекает. Функция возрастает на всей числовой прямой в случае $a>1$ и убывает – в случае $0<a<1$.

График при $a=2$ и $a=\frac{1}{2}$



7. Тригонометрические функции

а) $y = \sin x$

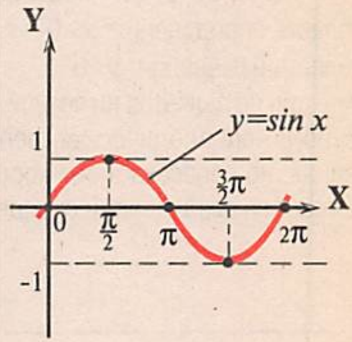
Область определения: $x \in R$

Область изменения: $y \in [-1;1]$

Функция нечетная, периодическая с периодом 2π, ограниченная, пересекает ось OY в точке $y=0$, ось OX – в точках $x \in \pi n,\ n \in Z$.

Функция возрастает на каждом из отрезков $\left[-\pi/2 + 2\pi n;\ \pi/2 + 2\pi n\right]$ и убывает на каждом из отрезков $\left[\pi/2 + 2\pi n;\ 3/2\pi + 2\pi n\right]$.

График – синусоида



b) $y = \cos x$

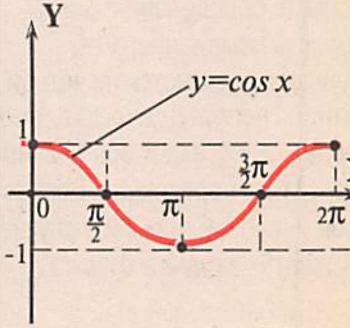
Область определения: $x \in R$

Область изменения: $y \in [-1;1]$

Функция четная, периодическая с периодом 2π, ограниченная, пересекает ось OY в точке $y=1$, ось OX – в точках $x=\pi/2+\pi n,\ n \in Z$.

Функция возрастает на каждом из отрезков $\left[-\pi+2\pi n;\ 2\pi n\right]$ и убывает на каждом из отрезков $\left[2\pi n;\ \pi+2\pi n\right]$, $n \in Z$.

График – косинусоида



c) $y = tg\, x$

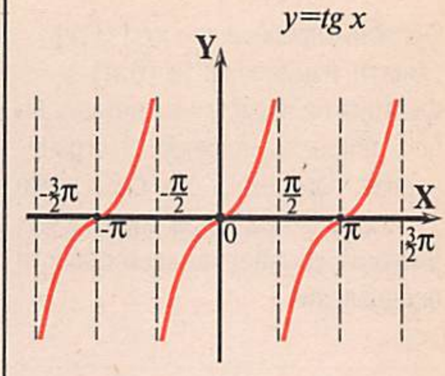
Область определения: $x \in R$,

$x \neq \pi/2 + \pi n,\ \ n \in Z$

Область изменения: $y \in R$

Функция нечетная, периодическая с периодом π, неограниченная, пересекает ось OY в точке $y=0$, ось OX – в точках $x=\pi n$. Функция возрастает на каждом из интервалов

$(-\pi/2+\pi n;\ \pi/2+\pi n)$, $n \in Z$.



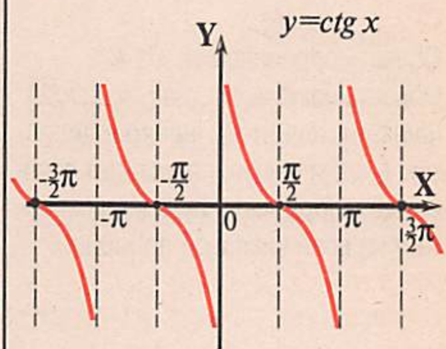
d) $y = ctg\, x$

Область определения:

$x \in R,\ x \neq \pi n,\ n \in Z$

Область изменения: $y \in R$

Функция нечетная, периодическая с периодом π, неограниченная, пересекает ось OX в точках $x=\pi/2+\pi n$, ось OY не пересекает. Функция убывает на каждом из интервалов $(\pi n;\ \pi+\pi \cdot n)$.



Обратные тригонометрические функции

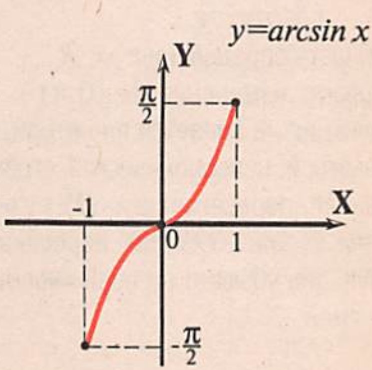
a) $y = arcsin\, x$

Область определения: $x \in [-1;1]$

Область изменения:

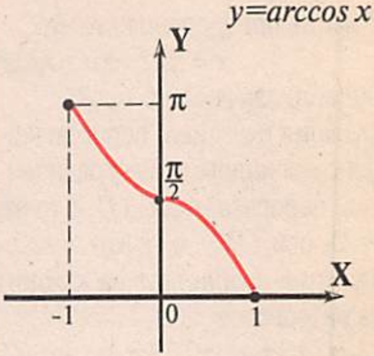
$y \in [-\pi/2;\pi/2]$

Функция нечетная, непериодическая, ограниченная, пересекает оси OX и OY в начале координат. Функция возрастает на всей области определения.



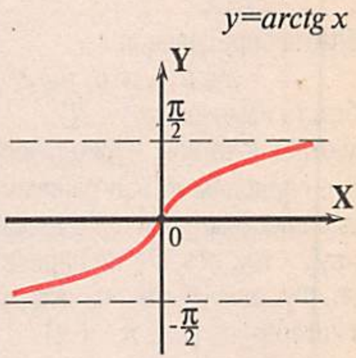
b) *$y=\arccos x$*

Область определения: $x \in [-1;1]$
Область изменения: $y \in [0;\pi]$
Функция не является ни четной, ни нечетной,непериодическая, ограниченная, пересекает ось OY в точке $y=\pi/2$, ось OX – в точке $x=1$. Функция убывает на всей области определения.



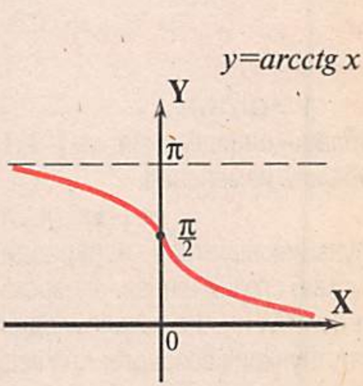
c) *$y=\mathrm{arctg}\, x$*

Область определения: $x \in R$
Область изменения: $y \in [-\pi/2;\pi/2]$
Функция нечетная, непериодическая, ограниченная, пересекает оси в начале координат. Функция возрастает на всей числовой прямой.



d) *$y=\mathrm{arcctg}\, x$*

Область определения: $x \in R$
Область изменения: $y \in (0;\pi)$
Функция не является ни четной, ни нечетной, непериодическая, ограниченная, пересекает ось OY в точке $y=\pi/2$, ось OX не пересекает. Функция убывает на всей числовой прямой.



НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Бесконечные последовательности

Бесконечной **числовой последовательностью** называется числовая функция, определенная на множестве N натуральных чисел. Аргумент этой функции обычно обозначается n, а сама функция – буквой с индексом внизу: a_n.

Бесконечная последовательность задана, если указан закон, по которому каждому натуральному числу N ставится в соответствие определенное число a_n.

Бесконечная последовательность a_n, $n \in N$, записывается в виде $a_1; a_2; ...; a_n; ...$ или кратко (a_n). Числа a_1, a_2, a_n называются **членами** последовательности, a_1 – первым членом, a_2 – вторым, a_n – n-м членом последовательности.

Способы задания бесконечных последовательностей

Функциональный способ

Задание каждого члена последовательности как функции своего номера

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}$$

Рекуррентный способ

Задание n-ого члена последовательности как функции нескольких предыдущих членов

$$a_1 = 1,$$
$$a_n = 4a_{n-1} + 3,\ n \geq 2$$

Задание с помощью описаний

Закон соответствия между номером члена и значением этого члена задается словесно

Каждому натуральному числу n сопоставляется число, равное n-му десятичному знаку после запятой числа $8/33$ в десятичной записи.

$8/33=0,242424...$

a_1	0	1	2
a_2	1/3	7	4
a_3	1/2	31	2
a_4	3/5	127	4
a_5	⋮	⋮	⋮
⋮			

Предел последовательности

Число a называется **предел**ом последовательности (a_n), если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое натуральное число N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $|a_n-a|<\varepsilon$.

Обозначение $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Если последовательность (a_n) имеет предел a, то говорят, что последовательность (a_n) **сходится** к пределу a.
Если последовательность сходится к a, то вне любой ε-окрестности Q лежит лишь конечное число членов этой последовательности.
Последовательность не имеющая предела, называется **расходящейся**.

Последовательность (a_n) называется **ограниченной**, если существует такое число $K \in R$, что $|a_n| \leq K$ для всех $n \in N$.

Примеры

1. Последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ сходится к нулю: если задать произвольное $\varepsilon > 0$ и выбрать $N > \frac{1}{\varepsilon}$, то для всех $n \geq N$ имеет место соотношение: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$

2. (n)– неограниченная и расходящаяся последовательность.

3. Последовательность $((-1)^n)$ является ограниченной и расходящейся.

4. Последовательности $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ и (q^n), $|q| < 1$ сходятся к нулю, т.е.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} q^n = 0}$$

5. Для $a > 0$ имеем $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1}$

Монотонные последовательности

Последовательность (a_n) называется **возрастающей**, если для любого n выполнено неравенство $a_{n+1} > a_n$

(n^2) – возрастающая последовательность, т.к. для любого натурального n имеет место $a_{n+1}=(n+1)^2 > n^2 = a_n$

Последовательность (a_n) называется **убывающей**, если для любого n выполнено неравенство $a_{n+1} < a_n$

Последовательность $(1/n)$ убывающая, т.к. для каждого n справедливо неравенство $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, т.е. $a_{n+1} < a_n$

Последовательность (a_n) называется **неубывающей**, если $a_{n+1} \geq a_n$ для любого n, и **невозрастающей**, если $a_{n+1} \leq a_n$ для любого n.

$1;1;2;2;3;3;...$ – неубывающая последовательность

Теоремы о бесконечных последовательностях

1. Если последовательность сходится, то она имеет только один предел.
2. Если последовательность сходится, то она ограничена.
3. Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.
4. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то справедливы следующие утверждения:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

3) $b \neq 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$

Примеры

Последовательность $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ возрастает, ограничена и вследствие теоремы 3 она сходится. Ее предел обозначается буквой e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (e \approx 2{,}718)$$

Из теоремы 4 следует, что постоянную можно выносить за знак предела, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+4n-3}{3n^2+2n+4} - ?$$

Применяя теорему 4, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+4n-3}{3n^2+2n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(9+\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{9+4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-3\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2}{3+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+4\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{9}{3} = 3$$

Предел функции

Число a называется **пределом** функции $y=f(x)$ **в точке** x_0, если для любой последовательности чисел x_n таких, что $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = x_0$ соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ имеет пределом число a, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = a$.

$\Updownarrow$

Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$, такое что для любого $x=x_0$, удовлетворяющего условию $|x-x_0|<\delta$ справедливо неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$. **Обозначение:** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$

Примеры

1. Функция $f(x)=x$ имеет в любой точке x_0 предел, равный x_0, т.к. для любой последовательности (x_n) такой, что $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = x_0$ имеем $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to\infty} x_n = x_0$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} x = x_0}$$

2. Функция $f(x)=1/x$ не имеет предела в 0. Иначе должна была бы сходиться к конечному пределу последовательность

$$\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right) = (n), \quad n \in N$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \text{ – не существует}}$

Основные теоремы о пределах функций

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел в точке x_0, то справедливы утверждения:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

c) если $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$

Примеры

1. $$\lim_{x\to 3}\frac{2x-3}{3+7x}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(2x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(3+7x)}=\frac{2\lim\limits_{x\to 3}x-3}{3+7\lim\limits_{x\to 3}x}=\frac{2\cdot 3-3}{3+7\cdot 3}=\frac{1}{8}$$

---

2. $$\lim_{x\to 0}x\cdot\sin x=\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=0$$

---

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-1^2}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Непрерывность функции

Если предел функции $f(x)$ в точке x_0 равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0.

Функция называется **непрерывной на интервале** $(a;b)$, если она непрерывна в любой точке этого интервала.

Пример

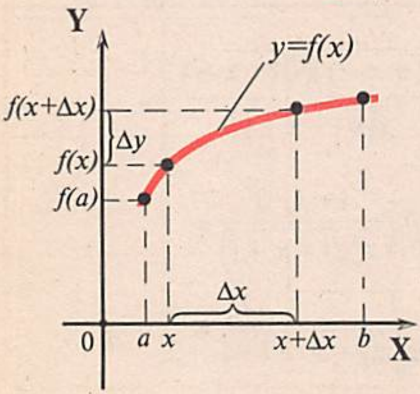
Функция $y = \dfrac{1}{x}$

непрерывна в любой точке $x = x_0 \neq 0$, т.к. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x_0}$, если $x_0 \neq 0$;

разрывна в точке $x_0 = 0$, т.к. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ – не существует

Функция $y = \dfrac{1}{x}$ непрерывна на любом интервале, *на котором она определена.*

Производная



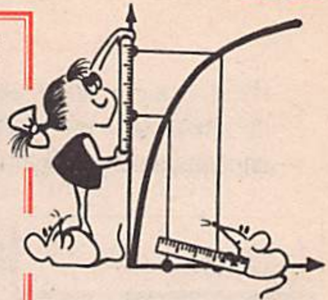
Пусть $y=f(x)$ – непрерывная функция, определенная на интервале $(a;b)$.

Δx – приращение аргумента,

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ – приращение функции в точке x.

Производной функции $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. *Обозначения:* y' или $f'(x)$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Функция, имеющая производную в точке x, называется **дифференцируемой в этой точке**; операция нахождения производной называется **дифференцированием**.
Функция, дифференцируемая в каждой точке некоторого интервала, называется **дифференцируемой на этом интервале**.

Пример Функция $f(x)=x$ дифференцируема в каждой точке $x \in R$, и

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Производные элементарных функций

Функция	Производная
C (const)	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x

Функция	Производная
a^x	$a^x ln x$
$log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$sin x$	$cos x$
$cos x$	$-sin x$
$tg x$	$\frac{1}{cos^2 x}$
$ctg x$	$-\frac{1}{sin^2 x}$

Функция	Производная
$arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования

Пусть c_1 и c_2 – постоянные числа, $u(x)$, $v(x)$ – дифференцируемые на некотором интервале $(a;b)$ функции, на этом же интервале справедливы формулы:

1.

$$(c_1u+c_2v)'=c_1u'+c_2v'$$

$$y=x^4+5x^3+6;$$

$$y'=(x^4)'+5(x^3)'+(6)'=4x^3+15x^2$$

2.

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$y=x^3\ln x;\quad y'=(x^3)'\ln x+x^3(\ln x)'=$$

$$=3x^2\ln x+x^3\frac{1}{x}=3x^2\ln x+x^2=x^2(3\ln x+1)$$

3.

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v+u\cdot v'}{v^2};\quad v\neq 0$$

$$y=\frac{x^2}{5-x};\quad y'=\frac{(x^2)'(5-x)-x^2(5-x)'}{(5-x)^2}=$$

$$=\frac{2x(5-x)-x^2(-1)}{(5-x)^2}=\frac{10x-x^2}{(5-x)^2};\ x\neq 5$$

Пусть $y=F(u)$, $u=u(x)$ и $y(x)=F(u(x))$ – сложная функция. Если функция $u(x)$ дифференцируема в точке x_0 и функция $F(u)$ дифференцируема в точке $u_0=u(x_0)$, то сложная функция $y(x)=F(u(x))$ дифференцируема в точке x_0 и

4.

$$y'(x_0)=F'(u_0)\cdot u'(x_0)$$

$$y(x)=\sqrt{x^2+4}$$

Полагая $u(x)=x^2+4$, получаем

$$y(x)=\sqrt{u(x)}.$$

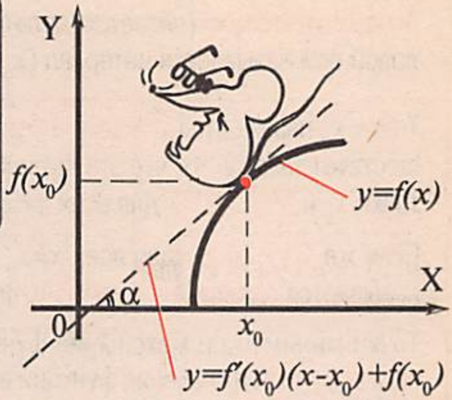
Т.к. $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$, то имеем

$$y'(x)=\left(\sqrt{u}\right)'u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'(x)=$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

Геометрический смысл производной

Производная функции в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к графику этой функции, проведенной в точке с координатами $(x_0; f(x_0))$: $\quad tg\,\alpha = f'(x_0)$.



Уравнение касательной к графику $y=f(x)$, проведенной в точке с координатами $(x_0; f(x_0))$, имеет вид:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Пример

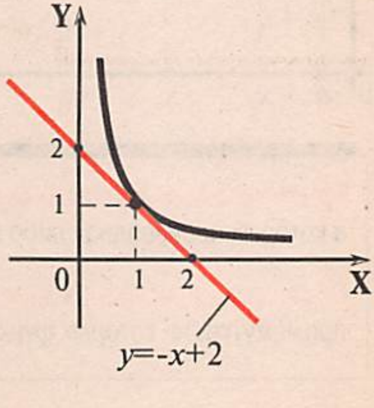
Найти уравнение касательной к графику функции

$y=\dfrac{1}{x}$ в точке с координатами $x_0=1, \quad y_0=y(1)=1.$

$$y'=-\frac{1}{x^2}, \quad y'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1$$

$$\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$$

$$\boxed{y=(-1)(x-1)+1=-x+2}$$



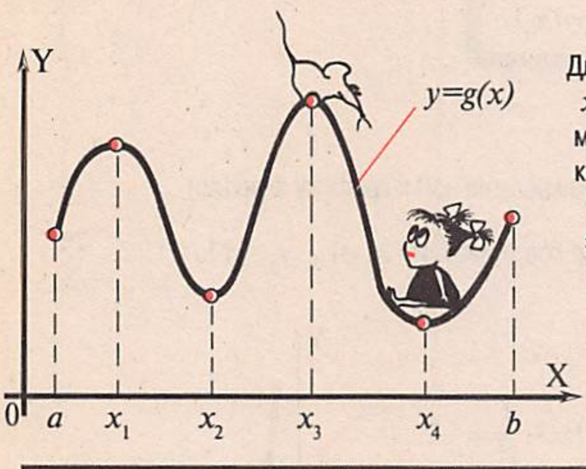
Применение производной к исследованию функций

δ-окрестностью (*читается* "дельта окрестностью") точки x_0 на числовой оси называется интервал $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$.

Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $f(x)$, если существует такое $\delta>0$, что эта функция определена в δ-окрестности точки x_0 и $f(x)>f(x_0)$ для всех $x\neq x_0$ из этой δ-окрестности.

Если же $f(x)<f(x_0)$ для всех $x\neq x_0$ из δ-окрестности, то точка x_0 называется **точкой максимума** функции $f(x)$.

Точки минимума и максимума функции называются ее **точками экстремума**, а значения функции в этих точках – **экстремумами** данной функции.



Для функции $g(x)$, точки x_1, x_3 – точки максимума, а точки x_2, x_4 – точки минимума. Точки a и b не являются точками экстремума $g(x)$, т.к. у них нет окрестностей, целиком входящих в область определения функции.

Критическими точками функции $y=f(x)$ называются точки, в которых производная либо не существует, либо равна нулю.

Промежутками монотонности функции $y=f(x)$ называются промежутки, на которых функция возрастает или убывает.

Теорема (о монотонности функции). Если функция $f(x)$ во всех точках некоторого интервала имеет положительную производную ($f'(x)>0$), то она возрастает на этом интервале, а если отрицательную производную ($f'(x)<0$), то $f(x)$ убывает.

Теорема (об экстремумах дифференцируемой функции). Для того, чтобы функция $y=f(x)$ имела в точке x_0 экстремум, необходимо, чтобы $f'(x_0)=0$, и достаточно, чтобы $f'(x)$ имела разные знаки по разные стороны от точки.
(Если слева от x_0 имеем $f'(x)<0$, а справа $f'(x)>0$, то в точке x_0 будет минимум, если наоборот – то максимум.

Пример

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{7}{2}x^2+12x-9$$

$$f'(x)=x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$$

$f'(x)=0$ при $x=3$ и $x=4$;
$f'(x)>0$ на интервалах $x\in(-\infty;3)$ и $x\in(4;+\infty)$;
$f'(x)<0$ на интервале $x\in(3;4)$

На интервалах $x\in(-\infty;3)$ и $x\in(4;+\infty)$ функция возрастает;
на интервале $x\in(3;4)$ функция убывает;
в точках $x=3$ и $x=4$ функция имеет экстремумы:
в точке $x=3$ – максимум

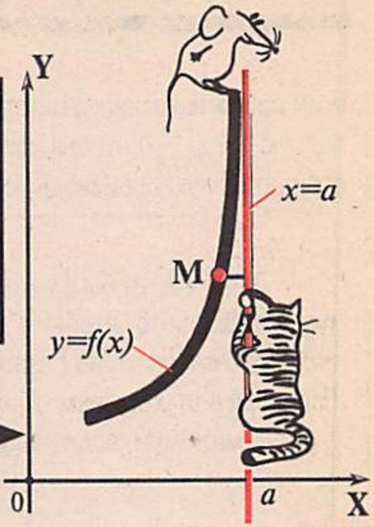
$$f(3)=\frac{27}{3}-\frac{7}{2}\cdot 9+12\cdot 3-9=\frac{-63}{2}+36=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2},$$

а в точке $x=4$ – минимум

$$f(4)=\frac{4^3}{3}-\frac{7}{2}\cdot 4^2+12\cdot 4-9=\frac{64}{3}-17=\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}$$

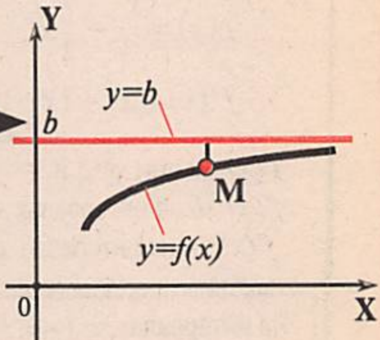
Асимптоты

Прямая l называется **асимптотой графика функции** $y=f(x)$, если расстояние от точки M графика функции до прямой l стремится к нулю при бесконечном удалении точки M.



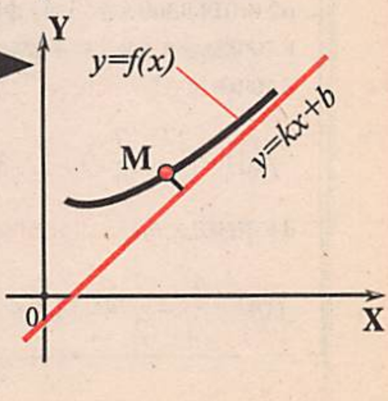
Прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x>a)}} f(x)=\infty \text{ или } \lim_{\substack{x\to a\\(x<a)}} f(x)=\infty$$



Прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)=b$$



Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x}=k;$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left(f(x)-kx\right)=b$$

Схема исследования функции и построение ее графика

1. Нахождение области определения и области значений функции.
2. Исследование функции на четность и нечетность.
3. Исследование функции на периодичность.
4. Определение точек пересечения графика функции с осями координат и интервалов, где функция сохраняет знак.
5. Нахождение асимптот графика функции.
6. Определение интервалов возрастания и убывания функции.
7. Определение точек экстремумов функции.
8. Построение графика.

Пример

Исследовать функцию $y=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$ и построить ее график.

1. Функция определена для всех $x\in R$, кроме $x=-1$.
2. Функция не является ни четной, ни нечетной.
3. Функция не является периодической.
4. Пересечение с осью OX ($y=0$):

$$\frac{(x-1)^2}{x+1}=0 \;\Rightarrow\; (x-1)^2=0\text{, т.е. } x=1$$

Пересечение с осью OY ($x=0$): $\quad y(0)=\dfrac{(0-1)^2}{0+1}=1$.

График функции пересекает оси координат в точках $(0;1)$ и $(1;0)$.

5.

$$\lim_{\substack{x\to -1\\(x<-1)}}\frac{(x-1)^2}{x+1}=-\infty,\qquad \lim_{\substack{x\to -1\\(x>-1)}}\frac{(x-1)^2}{x+1}=+\infty$$

$\boxed{x=-1}$ – вертикальная асимптота;

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^2}{x(x+1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{1+\frac{1}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-1)^2}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-3x}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-3}{1+\frac{1}{x}}=-3$$

$\boxed{y=x-3}$ – наклонная асимптота

6.,7. $$y'=\frac{2(x-1)(x+1)-(x-1)^2}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

$y'>0$ на промежутках $x\in(-\infty;-3)$ и $x\in(1;+\infty)$;

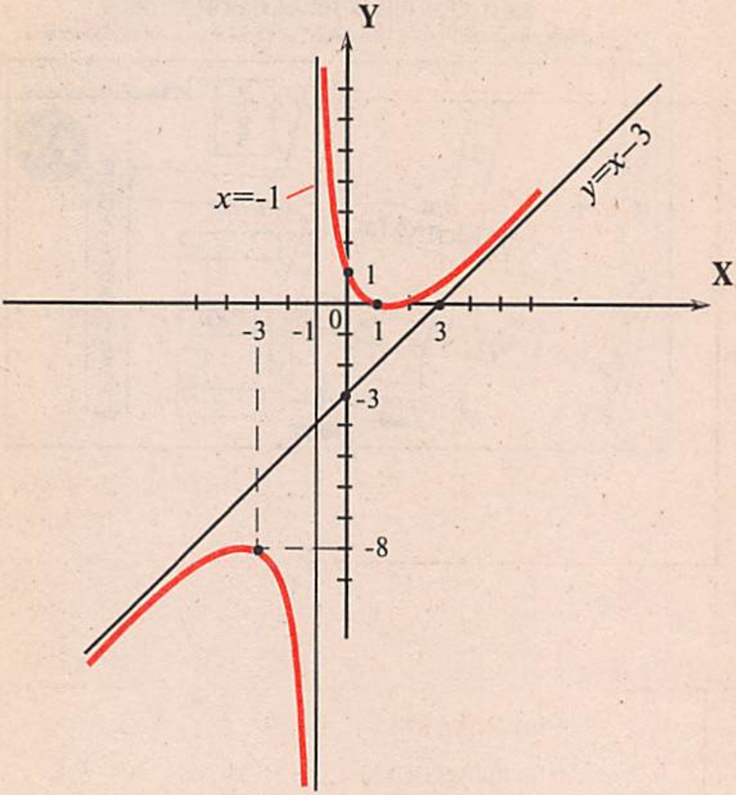
$y'<0$ на промежутках $x\in(-3;-1)$ и $x\in(-1;1)$;

$y'=0$ при $x=1$ и $x=-3$

Функция на промежутке $(-\infty;-3]$ возрастает от $-\infty$ до -8;
на промежутке $[-3;-1)$ убывает от -8 до $-\infty$;
на промежутке $(-1;1]$ убывает от $+\infty$ до 0;
на промежутке $[1;+\infty)$ возрастает от 0 до $+\infty$.

Функция при $x=-3$ имеет максимум, а при $x=1$ – минимум.

8. График функции $y = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$

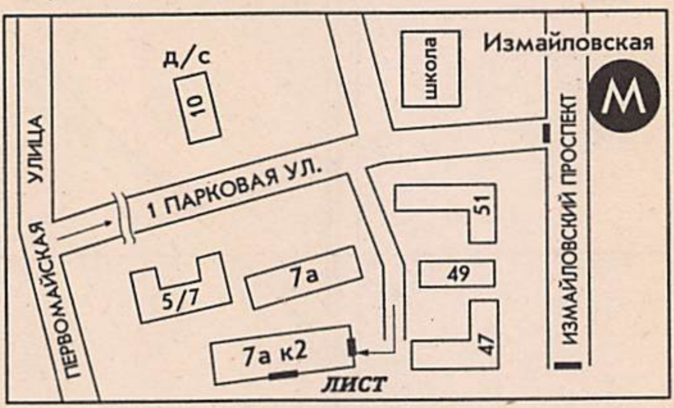


ООО «Лист-Нью»

Адрес: г.Москва, ул. 1-я Парковая, д.7а, к.2.
Для писем: г.Москва, 105037, а/я 11
Тел./факс: (095) 367-70-96, 367-06-61
Издательство: 367-37-40
Время работы: понедельник - пятница с 10 до 17

ИЗДАТЕЛЬСТВО, ОПТОВАЯ КНИГОТОРГОВЛЯ

Широкий выбор детской, учебной, прикладной, справочной и языковой литературы.



ИД № 06182 от 01.11.01 г. Подписано к печати 22.02.02 г. Формат 60x84/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Гарнитура Прагматика. Усл. печ. л. 6,51.
Тираж 5000 экз. Заказ № 3208.

Отпечатано с готового оригинал-макета
на ГИПП «Вятка».
610033, г.Киров, ул. Московская, 122