

А.Х. Шахмейстер

УРАВНЕНИЯ



Практикум
Тренинг
Контроль

УДК 373.167.1:512

ББК 22.141я71.6

Редактор:

Кандидат пед. наук, доцент кафедры
математики МИОО А. В. Семенов.

Рецензенты:

Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ Г. Ю. Ризниченко,
Заслуженный учитель РФ Т. И. Курсищ,
Заслуженный учитель РФ Е. Б. Лившиц.

Рекомендовано

Московским институтом открытого образования (МИОО)
и Московским центром непрерывного математического
образования (МЦНМО) в качестве пособия для
школьников, абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А. Х.

Ш32 Уравнения. — 4-е издание — М.: Издательство МЦНМО :
СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс», 2011. — 264 с.: илл. —
ISBN 978-5-94057-792-8, ISBN 978-5-98712-022-4,
ISBN 978-5-91281-050-3.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного
курса математики, содержит большое количество разноуровневого
тренировочного материала. В книге представлена программа для про-
ведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах.
Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, сту-
дентов, преподавателей.

ISBN 978-5-94057-792-8 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-022-4 (ООО «Петроглиф»)
ISBN 978-5-91281-050-3 (ООО «Виктория плюс»)

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

© Шахмейстер А. Х., 2011
© Куликов Ю. Н., обложка, 2011
© ООО «Петроглиф», 2011

*Посвящается памяти
Заслуженных учителей России:*

*Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Владимира Леонидовича Ильина*

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачки по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

**Программа элективного курса для учащихся 9-11 классов
(20-25 уроков).**

| №№ уроков | Название темы В скобках указаны номера заданий |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Линейные уравнения (стр. 5–7) Практикум 1. |
| 2–3 | Линейные уравнения (стр. 13–42) Практикумы 2 – 3. Тренировочная работа 3 (5, 12). Тренировочная работа 4 (7, 10, 12). Проверочная работа 3 (7, 9, 11). |
| 4–6 (+1) | Квадратные уравнения (стр. 41–72) Практикумы 5 – 8. Тренировочная карточка 2 (2, 3, 6, 8, 9, 10). Тренировочная работа 5 (1, 2 (т. Виета), 3 (т. Виета), 7, 12, 14). Тренировочная работа 6 (1 (т. Виета), 7, 11, 12). |
| 7–10 (+1) | Уравнения содержащие модуль (стр. 74–92) Практикум 9. Тренировочная работа 8 (2, 3, 5, 9, 12). Проверочная работа 5 (3, 4, 8, 9, 10, 11, 12). |
| 11–15 (+2) | Уравнения высших степеней (стр. 93–147) Метод подстановки. Практикум 10. Тренировочная работа 8 (2, 5, 6, 13, 14) Применение теории делимости для решения уравнений. Практикум 11. Возвратные уравнения. Практикум 12 (1, 2, 3, 4). Тренировочная работа 9 (1, 3, 4, 11, 14, 16, 17). Еще несколько способов решения уравнений (стр. 136–146) (нестандартные способы). Примеры (2, 4, 6, 7, 12). |
| 16–20 (+1) | Карточки заданий (стр. 160–261) (обобщение и закрепление) Карточка 1 (1, 3, 5, 6). Карточка 3 (2, 6). Карточка 6 (5, 6). Зачетные карточки (2, 5, 8). Карточка 2 (2, 3, 5, 6). Карточка 4 (3, 5). Карточка 8 (2, 6). |

Программа подготовлена, составлена и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1

Линейные уравнения

Для того чтобы разобраться, что такое уравнение и дать его определение, напомним определения алгебраического выражения и равенства.

Определение 1. *Соединение чисел и букв в записи знаками арифметических действий и скобками называется алгебраическим выражением.*

Определение 2. *Равенством называется соединение двух алгебраических выражений двумя горизонтальными черточками = (знаком равенства).*

Очевидно, что равенство может быть истинным, а может быть и ложным при разных значениях букв, входящих в него.

Пример 1. $1 + a = 2a - (a - 1)$.

После преобразований правой части равенства:

$1 + a = 2a - a + 1$ получим: $a + 1 = a + 1$.

Значит, данное равенство справедливо (истинно) при любых значениях буквы a .

Пример 2. $(2a+5)-2(a+1)=4$.

После преобразования левой части равенства имеем:

$2a+5-2a-2=4$; $3=4$ — ложь. Значит, данное равенство ложно при любых значениях буквы a .

Пример 3. $3(3a+2)-a=2a$.

После преобразования левой части равенства имеем:

$9a+6-a=2a$; $8a+6=2a$.

Пусть $a=0$, получим $6=0$ — ложно.

Пусть $a=-1$, получим $8(-1)+6=2(-1)$; $-2=-2$ — истинно.

Интересно получилось, что при каком-то значении a равенство ложно, а при каком-то значении a равенство истинно. В связи с этими наблюдениями дадим два определения, связанные с классификацией равенств.

Определение 3. Равенство, справедливое (верное) для любых значений букв, входящих в правую и левую его часть, называется **тождеством**.

Определение 4. Равенство, справедливое не для всех значений букв, входящих в правую и левую часть, называется **уравнением**.

Примечание. В зависимости от скольких букв, не являющихся постоянными, уравнения бывают с одним неизвестным (скажем, буквой x), с двумя неизвестными (скажем буквами x и y) и т. д.

Пример 4. $4abx+3a=5$.

Здесь мы имеем буквы $a; b; x$, но нас интересует вопрос, только относительно неизвестного x , т.е. при каких его значениях выраженных через числа и буквы a и b , уравнение обращается в истинное равенство.

Пример 5. $4x+5y=7$.

Если нас интересует вопрос, при каких значениях x и y равенство справедливо, то это уравнение с двумя неизвестными x и y , и т. д.

Теперь, после того как мы разобрались в первом приближении, что такое уравнение, выясним, что называется «корнем» уравнения.

Определение 5. *Корнем уравнения называется такое значение неизвестного (выраженного через числа или буквы), при котором уравнение обращается в истинное равенство (тождество).*

Примечание. Решить уравнение – это значит найти все его корни или убедиться, что их нет.

Определение 6. *Уравнением n -й степени называется уравнение вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ ($a_0 \neq 0$)*

Пример 6. $2x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 10x^2 - x + 3 = 0$.

Это уравнение пятой степени. Сейчас мы будем рассматривать только уравнения первой степени (линейные),

где $n=1$, т. е. вида $a_0x + a_1 = 0$ ($a_0 \neq 0$).

Иногда его записывают иначе, т. е. в виде $kx + b = 0$ ($k \neq 0$), но это принципиального значения не имеет.

Продолжим далее: уравнение – это равенство, справедливое для определенных значений неизвестного, то имеет смысл напомнить свойства числовых равенств.

Свойства числовых равенств

1. Любое число a равно самому себе (свойство рефлексивности).
2. Если $a = b$, то $b = a$ (свойство симметричности).
3. Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$ (свойство транзитивности).
4. Если $a = b$ и c – любое число, то $a + c = b + c$ (свойство стабильности (монотонности) сложения).
5. Если $a = b$ и c – любое число, то $ac = bc$ (свойство стабильности (монотонности) умножения).

Если обе части истинного равенства умножить на одно и то же не нулевое число, то получится истинное равенство. Аналогичными свойствами обладают и алгебраические равенства.

Практикум 1

Решите уравнения:

1. $3x + 2 = 0$.

Применяя свойства преобразования алгебраических выражений, получим

$$3x + 2 = 0 \quad (\text{вычтем } 2 \text{ или прибавим } -2);$$

$$(3x + 2) - 2 = -2; \quad 3x + 2 - 2 = -2;$$

$$3x = -2 \quad (\text{умножим на } \frac{1}{3});$$

$$3 \cdot \frac{1}{3}x = -\frac{2}{3}; \quad x = -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $x = -\frac{2}{3}$.

Естественно, в дальнейшем мы не будем расписывать столь подробно, полагая (по умолчанию), какие свойства и как мы будем использовать для решения уравнения.

2. $2(x - 3) = x + 1$.

$2x - 6 = x + 1$ (перенесем неизвестные в одну сторону, а числа – свободные члены – в другую с противоположными знаками). Получим $x = 7$.

Ответ: $x = 7$.

3. $3(2 - x) - 2(2x + 1) = 3$.

(не забудем, что $-(a + b) = -a - b$);

$$6 - 3x - 4x - 2 = 3; \quad -7x + 4 = 3; \quad 4 - 3 = 7x; \quad 1 = 7x; \quad x = \frac{1}{7}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{7}$.

4. $5(x - 2) - 3(x - 2) = x - 1$ (не забудем, что $-(a - b) = -a + b$);

$$5x - 10 - 3x + 6 = x - 1; \quad 5x - 3x - x = -1 + 4; \quad x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

$$5. \frac{1}{3}(2x+1) - \frac{1}{2}(2-3x) = x \quad | \cdot 6.$$

Чтобы было проще, приведем уравнение к виду только с целыми коэффициентами. Для этого умножим обе части уравнения на общий знаменатель для числовых дробей.

$$6 \cdot \frac{1}{3}(2x+1) - 6 \cdot \frac{1}{2}(2-3x) = 6 \cdot x; \quad 2(2x+1) - 3(2-3x) = 6x;$$

$$4x + 2 - 6 + 9x = 6x; \quad 13x - 6x = 4; \quad 7x = 4; \quad x = \frac{4}{7}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{4}{7}.$$

$$6. \frac{x-3}{5} + \frac{x+2}{4} = \frac{1}{2} \quad | \cdot 20;$$

$$4(x-3) + 5(x+2) = 10; \quad 4x - 12 + 5x + 10 = 10; \quad 9x = 12; \quad x = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Ответ: } x = 1\frac{1}{3}.$$

$$7. 3\left(2x - \frac{1}{3}\right) - 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 4x;$$

$$6x - 1 - 2x - 1 = 4x.$$

Здесь $-2 = 0$, но это равенство ложное и не зависит от значения x . Это значит, что уравнение не имеет решения, иногда это записывают так: $x \in \emptyset$ (\emptyset – знак пустого множества, т. е. не содержащего ни одного элемента).

Ответ: корней нет.

$$8. -2\left(3 + \frac{1}{2}x\right) + 3\left(2 - \frac{1}{3}x\right) + 2x = 0;$$

$$-6 - x + 6 - x + 2x = 0.$$

Здесь $0 = 0$, но это истинное равенство независимо от значения x , значит любое значение x – есть решение (иногда записывают так: $\forall x \in R$ – решение, где \forall – символ, обозначающий любое число или $(-\infty; \infty)$, т. е. x – принадлежит всей числовой оси, \in – символ принадлежности).

Ответ: $(-\infty; \infty)$.

Тренировочная работа 1

Решите уравнения:

1. $2(x-3)+3(3-2x)-4(3x-2)=5(4-5x).$

2. $\frac{3+x}{2}-\frac{2x+7}{3}=2.$

3. $\frac{3-x}{2}-\frac{7-2x}{3}=4.$

4. $\frac{(2x-1)2}{3}-\frac{3(6+x)}{4}=1\frac{1}{2}.$

5. $\frac{3(3x+1)-4}{5}-\frac{2(2x+3)+6}{3}=4.$

6. $\frac{(5x-1)\cdot 1,2-3,2}{3}-\frac{1,3\cdot(2+3x)-4,2}{4}=1.$

7. $2,3(4x+0,2)-1\frac{3}{7}(0,3-2x)=1.$

8. $\frac{2,6\left(3x-3\frac{1}{2}\right)-2,1}{1,2}-\frac{2,7\left(2\frac{1}{4}-2,1x\right)-1}{0,7}=10.$

Решение тренировочной работы 1

Решите уравнения:

1. $2(x-3)+3(3-2x)-4(3x-2)=5(4-5x);$

$$\underline{2x} - 6 + 9 - \underline{6x} - \underline{12x} + 8 = 20 - \underline{25x}$$

$$25x - 16x = 20 - 11; \quad 9x = 9; \quad x = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

2. $\frac{3+x}{2} - \frac{2x+7}{3} = 2 \quad | \cdot 6 \quad -(a+b) = -a-b$

$$3(3+x) - 2(2x+7) = 2 \cdot 6;$$

$$9 + 3x - 4x - 14 = 12; \quad -x - 5 = 12; \quad x = -17.$$

Ответ: $x = -17$.

3. $\frac{3-x}{2} - \frac{7-2x}{3} = 4 \quad | \cdot 6 \quad -(a-b) = -a+b$

$$3(3-x) - 2(7-2x) = 4 \cdot 6; \quad 9 - 3x - 14 + 4x = 24; \quad x = 29.$$

Ответ: $x = 29$.

4. $\frac{(2x-1) \cdot 2}{3} - \frac{3(6+x)}{4} = 1\frac{1}{2} \quad | \cdot 12; \quad 4 \cdot 2(2x-1) - 3 \cdot 3(6+x) = \frac{3}{2} \cdot 12;$

$$16x - 8 - 54 - 9x = 18;$$

$$7x = 18 + 62; \quad 7x = 80; \quad x = \frac{80}{7}; \quad x = 11\frac{3}{7}.$$

Ответ: $x = 11\frac{3}{7}$.

5. $\frac{3(3x+1)-4}{5} - \frac{2(2x+3)+6}{3} = 4 \quad | \cdot 15$

$$9(3x+1) - 12 - 10(2x+3) - 6 \cdot 5 = 60;$$

$$27x + 9 - 12 - 20x - 30 - 30 = 60; \quad 7x = 60 + 60 + 3; \quad 7x = 123;$$

$$x = \frac{123}{7}; \quad x = 17\frac{4}{7}.$$

Ответ: $x = 17\frac{4}{7}$.

$$6. \frac{(5x-1) \cdot 1,2 - 3,2}{3} - \frac{1,3 \cdot (2+3x) - 4,2}{4} = 1 \quad | \cdot 12$$

$$4,8(5x-1) - 12,8 - 3,9(2+3x) + 12,6 = 12;$$

$$24x - 4,8 - 0,2 - 7,8 - 11,7x = 12; \quad 12,3x = 12 + 12,8;$$

$$12,3x = 24,8; \quad x = \frac{24,8}{12,3}; \quad x = \frac{248}{123}; \quad x = 2 \frac{2}{123}.$$

$$\text{О т в е т: } x = 2 \frac{2}{123}$$

$$7. 2,3(4x+0,2) - 1 \frac{3}{7}(0,3-2x) = 1;$$

$$2,3 \cdot 4x + 2,3 \cdot 0,2 - \frac{10}{7} \cdot \frac{3}{10} + \frac{10}{7} \cdot 2x = 1;$$

$$9,2x + 0,46 - \frac{3}{7} + \frac{20}{7}x = 1; \quad 9,2x + 2 \frac{6}{7}x = 1 - 0,46 + \frac{3}{7}.$$

Переведем все дроби в обыкновенные.

$$\left(9 \frac{1}{5} + 2 \frac{6}{7}\right)x = 1 - \frac{46}{100} + \frac{3}{7}; \quad 11 \frac{7+30}{35}x = \frac{54}{100} + \frac{3}{7};$$

$$12 \frac{2}{35}x = \frac{54 \cdot 7 + 300}{100 \cdot 7}; \quad \frac{12 \cdot 35 + 2}{35}x = \frac{378 + 300}{700};$$

$$x = \frac{678}{700} \cdot \frac{35}{422}; \quad x = \frac{339}{20 \cdot 211}; \quad x = \frac{339}{4220}.$$

$$\text{О т в е т: } x = \frac{339}{4220}.$$

$$8. \frac{2,6\left(3x - 3\frac{1}{2}\right) - 2,1}{1,2} - \frac{2,7\left(2\frac{1}{4} - 2,1x\right) - 1}{0,7} = 10.$$

Здесь, чтобы облегчить вычисления, поступим так: умножим числитель и знаменатель каждой дроби на 10.

$$\frac{10\left(2,6\left(3x - 3\frac{1}{2}\right) - 2,1\right)}{10 \cdot 1,2} - \frac{10\left(2,7\left(2\frac{1}{4} - 2,1x\right) - 1\right)}{10 \cdot 0,7} = 10;$$

$$\frac{26(3x - 3,5) - 21}{12} - \frac{27(2,25 - 2,1x) - 10}{7} = 10;$$

$$\frac{78x-91-21}{12} - \frac{50,75-56,7x}{7} = 10;$$

$$\frac{39x-56}{6} - \frac{50,75-56,7x}{7} = 10 \quad | \cdot 42$$

$$7(39x - 56) - 6(50,75 - 56,7x) = 420;$$

$$273x - 392 - 304,5 + 340,2x = 420; \quad 613,2x = 1116,5;$$

$$x = \frac{11165}{6132}; \quad x = 1\frac{719}{876}.$$

$$\text{О т в е т : } x = 1\frac{719}{876}.$$

Как видите, вычисления требуют точности, уверенности, аккуратности. И, главное, не паниковать из-за больших чисел, лучше еще раз проверить вычисления.

Линейные уравнения с одним неизвестным и приводящиеся к ним

Практикум 2

1. $\frac{3+2x}{x-1} = 4.$

Очевидно, что такое уравнение определено не всегда. Действительно, при $x=1$ знаменатель обращается в нуль, а деление на ноль не определено (это принципиальная качественная неопределенность, связанная с невозможностью сопоставить, например, дроби $\frac{5}{0}$ конкретное число)

Определение 7. Все значения неизвестного, при которых уравнение определено, образуют область на числовой оси, называемую областью определения уравнения.

Записывается это так: $D(Y)$: любое $x \neq 1$,

иногда записывают в виде неравенств $x < 1$ или $x > 1$, или в виде интервалов $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$, где \cup – знак объединения.

На языке теории множеств можно сформулировать это так: множество всех значений неизвестного x , при которых уравнение определено, называется областью определения уравнения.

$D(Y) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$, где \cup – знак объединения.

Итак, пусть $x \neq 1$, тогда дробно-рациональное

уравнение $\frac{3+2x}{x-1} = 4$ преобразуется к $3 + 2x = 4(x - 1)$.

$$3 + 2x = 4x - 4; \quad 4x - 2x = 3 + 4;$$

$$2x = 7; \quad x = 3,5,$$

или $\{3,5\}$ (множество, состоящее из одного элемента).

Ответ: $\{3,5\}$.

$$2. \frac{4x-2(3-x)}{3(x+2)}=1. \quad D(Y): x+2 \neq 0; x \neq -2$$

$$4x-2(3-x)=3(x+2);$$

$$4x-6+2x=3x+6;$$

$$6x-3x=6+6;$$

$$3x=12; \quad x=4.$$

Очевидно $4 \neq -2$, т.е. корень принадлежит области определения, записывают это так $4 \in D(Y)$.

Ответ: $x=4$.

$$3. \frac{2(2x-1)+3(4-2x)}{3(x-2)-2(x+2)}=3.$$

Выясним, при каких x уравнение определено. Для этого приравняем знаменатель к нулю и найдем значение x , при котором это верно.

$$3(x-2)-2(x+2)=0;$$

$$3x-6-2x-4=0; \quad x=10,$$

значит $D(Y): x \neq 10$;

$$2(2x-1)+3(4-2x)=3(3(x-2)-2(x+2));$$

$$4x-2+12-6x=3(3x-6-2x-4);$$

$$-2x+10=3(x-10);$$

$$-2x+10=3x-30;$$

$$5x=40;$$

$$x=8;$$

$$x=8 \in D(Y).$$

Ответ: $x=8$.

$$4. \frac{3(3x+1)-4(5x+1)}{2(2x-1)+5(0,2-3x)}=1.$$

Прежде, чем решать уравнение и выяснять $D(Y)$, преобразуем числитель и знаменатель.

$$\frac{9x+3-20x-4}{4x-2+1-15x} = 1;$$

$$\frac{-11x-1}{-11x-1} = 1; \quad D(Y): -11x-1 \neq 0, \quad \text{т.е. } x \neq -\frac{1}{11}.$$

Сокращая дробь, имеем $1=1$ – истина.

Значит любое значение x , принадлежащее области определения – есть решение.

$$\text{Ответ: } x \neq -\frac{1}{11} \text{ или } \left(-\infty; -\frac{1}{11}\right) \cup \left(-\frac{1}{11}; \infty\right).$$

$$5. \quad \frac{4x-2(5+2x)}{0,3(2+0,4x)+1} = 0.$$

После преобразования получим:

$$\frac{4x-10-4x}{0,6+0,12x+1} = 0;$$

$$\frac{-10}{1,6+0,12x} = 0.$$

Очевидно, что решения нет, так как $-10 \neq 0$.

Ответ: \emptyset .

$$6. \quad \frac{2x+3(4x-7)}{2(2x-3)-3(3-2x)} = 2;$$

$$\frac{2x+12x-21}{4x-6-9+6x} = 2;$$

$$\frac{14x-21}{10x-15} = 2;$$

$$D(Y): 10x-15 \neq 0; \quad x \neq 1,5.$$

$$\text{тогда } 14x-21 = 20x-30;$$

$$30-21 = 20x-14x;$$

$$9 = 6x;$$

$$x = 1,5 \notin D(Y).$$

Ответ: \emptyset .

Тренировочная работа 2

Решите уравнения:

1.
$$\frac{5x-1}{9} - \frac{2x-1}{6} = 2.$$

2.
$$\frac{2(2x-1)-1}{4} - \frac{3-5(3x+1)}{6} = 3.$$

3.
$$-0,3(1-2x) + 2,1(x-3) = 0,6(x+4) + 0,4(2-x).$$

4.
$$5x - (3x - (6x - 2)) = -10.$$

5.
$$2(2x-1) - 3(4-3x) = 2 - 4(2x+3).$$

6.
$$0,4(3-2x) - 0,3(2x-1) = 3 - 2(3x+1).$$

7.
$$\frac{(2x-1) \cdot 0,3-5}{(4x+2) \cdot 0,6-0,7\left(7x-\frac{1}{7}\right)} = 2.$$

8.
$$\frac{4(x+1)-2(7+2x)}{0,3(2,4+0,4x)+1} = 0.$$

9.
$$\frac{3(3x+2)-4(5x-4)}{2(2x-3)-3\left(5x-9\frac{1}{3}\right)} = 1.$$

10.
$$\frac{2(x-2)+3(4x-15)}{2(2x-7)-3(7-2x)} = 2.$$

Решение тренировочной работы 2

Решите уравнения:

1. $\frac{5x-1}{9} - \frac{2x-1}{6} = 2 \quad | \cdot 18$

$$2(5x-1) - 3(2x-1) = 2 \cdot 18;$$

$$10x - 2 - 6x + 3 = 36;$$

$$4x + 1 = 36;$$

$$4x = 35;$$

$$x = \frac{35}{4}; \quad x = 8\frac{3}{4}$$

$$\text{О т в е т: } x = 8\frac{3}{4}.$$

2. $\frac{2(2x-1)-1}{4} - \frac{3-5(3x+1)}{6} = 3 \quad | \cdot 12;$

$$3(2(2x-1)-1) - 2(3-5(3x+1)) = 36;$$

$$6(2x-1) - 3 - 6 + 10(3x+1) = 36;$$

$$12x - 6 - 9 + 30x + 10 = 36;$$

$$42x = 41;$$

$$x = \frac{41}{42}.$$

$$\text{О т в е т: } x = \frac{41}{42}.$$

3. $-0,3(1-2x) + 2,1(x-3) = 0,6(x+4) + 0,4(2-x); \quad | \cdot 10$

$$-3(1-2x) + 21(x-3) = 6(x+4) + 4(2-x);$$

$$-3 + 6x + 21x - 63 = 6x + 24 + 8 - 4x;$$

$$21x + 4x = 32 + 66;$$

$$25x = 98;$$

$$x = \frac{98}{25}; \quad x = 3\frac{23}{25}.$$

$$\text{О т в е т: } x = 3\frac{23}{25}.$$

$$4. 5x - (3x - (6x - 2)) = -10;$$

$$5x - 3x + (6x - 2) = -10;$$

$$2x + 6x - 2 = -10; \quad 8x = -8; \quad x = -1.$$

О т в е т: $x = -1$.

$$5. 2(2x - 1) - 3(4 - 3x) = 2 - 4(2x + 3).$$

$$4x - 2 - 12 + 9x = 2 - 8x - 12;$$

$$13x + 8x = 2 + 2;$$

$$21x = 4; \quad x = \frac{4}{21}.$$

О т в е т: $x = \frac{4}{21}$.

$$6. 0,4(3 - 2x) - 0,3(2x - 1) = 3 - 2(3x + 1); \quad | \cdot 10$$

$$4(3 - 2x) - 3(2x - 1) = 30 - 20(3x + 1);$$

$$12 - 8x - 6x + 3 = 30 - 60x - 20;$$

$$60x - 14x = 10 - 15; \quad 46x = -5;$$

$$x = -\frac{5}{46}.$$

О т в е т: $x = -\frac{5}{46}$.

$$7. \frac{(2x-1) \cdot 0,3-5}{(4x+2) \cdot 0,6-0,7\left(7x-\frac{1}{7}\right)} = 2;$$

$$\frac{0,6x-0,3-5}{2,4x+1,2-4,9x+0,1} = 2;$$

$$\frac{0,6x-5,3}{1,3-2,5x} = 2;$$

$$D(Y): \quad 1,3 - 2,5x \neq 0; \quad x \neq \frac{13}{25}.$$

$$0,6x - 5,3 = 2,6 - 5x; \quad 5x + 0,6x = 2,6 + 5,3;$$

$$5,6x = 7,9; \quad x = \frac{79}{56}; \quad x = 1\frac{23}{56} \in D(Y).$$

О т в е т: $x = 1\frac{23}{56}$.

$$8. \frac{4(x+1)-2(7+2x)}{0,3(2,4+4x)+1} = 0;$$

$$\frac{4x+4-14-4x}{0,72+1,2x+1} = 0; \quad \frac{-10}{1,72+1,2x} = 0, \quad \text{но } -10 \neq 0.$$

О т в е т : \emptyset (решения нет).

$$9. \frac{3(3x+2)-4(5x-4)}{2(2x-3)-3\left(5x-9\frac{1}{3}\right)} = 1.$$

$$\frac{9x+6-20x+16}{4x-6+28-15x} = 1;$$

$$\frac{-11x+22}{-11x+22} = 1;$$

$$D(y): -11x+22 \neq 0; \quad x \neq \frac{22}{11}; \quad x \neq 2.$$

После сокращения получим $1=1$ — истина.

Значит любое $x \in D(Y)$ — решение.

О т в е т : $x \neq 2$, или $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.

$$10. \frac{2(x-2)+3(4x-15)}{2(2x-7)-3(7-2x)} = 2.$$

$$\frac{2x-4+12x-45}{2(2x-7)+3(2x-7)} = 2;$$

$$\frac{14x-49}{5(2x-7)} = 2;$$

$$D(Y): 2x-7 \neq 0; \quad x \neq 3,5;$$

$$\frac{7(2x-7)}{5(2x-7)} = 2.$$

После сокращения: $\frac{7}{5} = 2$ — ложь.

О т в е т : \emptyset .

Проверочная работа 1

Решите уравнения:

1. $5(x+3) - 4(3-2x) + 3(4-5x) = 2(4x-5).$

2. $\frac{x+1}{4} - \frac{2x-3}{3} = 5.$

3. $\frac{1-x}{4} - \frac{2(2x+1)}{5} = 1\frac{1}{4}.$

4. $\frac{3(3x-2)}{4} - \frac{2(2x+1)}{3} = 1\frac{1}{4}.$

5. $\frac{2(2x-1)-3}{3} - \frac{3-2x}{2} = 5.$

6. $3,2(3x+0,3) - 2\frac{2}{7}(0,2-3x) = -1.$

7. $\frac{4,2-0,3(5x+1)}{3} - \frac{3,2-1,2(2-3x)}{4} = 1.$

8. $\frac{1,5-1,8(2x-1)}{0,6} - \frac{0,4-1,5(3+4x)}{1,8} = 5.$

9. $3x - (4x - 3(2x - 1)) = -14.$

10. $-0,5(2x+3) + 0,1(x-3) = 0,4(1-2x) - 3.$

11. $\frac{(3x-1)0,4-3}{(5x+3)0,7-0,6\left(6x-\frac{1}{6}\right)} = 3.$

12. $\frac{3x+1-2(4-3x)}{6(2x-1)-7(3x-2)-1} = -1.$

Уравнения, приводящиеся к линейным

Практикум 3

Уравнение по внешнему виду может выглядеть как уравнение, не являющееся линейным (т. е. степени выше первой), но после преобразований принимает стандартный вид линейного уравнения.

$$1. (3x-1)(2x+3)-(4-x)(3-6x)=2;$$

Воспользовавшись правилами перемножения многочлена на многочлен, получим:

$$6x^2 - 2x + 9x - 3 - (12 - 3x - 24x + 6x^2) = 2;$$

$$6x^2 + 7x - 3 - 6x^2 + 27x - 12 = 2;$$

$$34x = 17; \quad x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{2}.$$

$$2. (6x-1)^2 - 4(3x+2)(3x-2) = -7.$$

Разумеется, здесь важно знать основные формулы сокращенного умножения:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

тогда

$$36x^2 - 12x + 1 - 4(9x^2 - 4) = -7; \quad 36x^2 - 12x + 1 - 36x^2 + 16 = -7$$

$$-12x = -24; \quad x = 2.$$

$$\text{Ответ: } x = 2.$$

$$3. 4y^2 - (2y+1)^2 = 12;$$

$$4y^2 - (4y^2 + 4y + 1) = 12; \quad 4y^2 - 4y^2 - 4y - 1 = 12;$$

$$-4y = 13; \quad y = -\frac{13}{4}; \quad y = -3\frac{1}{4}.$$

$$\text{Ответ: } y = -3\frac{1}{4}.$$

4. $(5x+6)^2(x-3)-(5x+1)^2(x-1)=28;$
 $(25x^2+60x+36)(x-3)-(25x^2+10x+1)(x-1)=28;$
 $25x^3+60x^2+36x-75x^2-180x-108-(25x^3+10x^2+x-25x^2-10x-1)=28;$
 $25x^3-15x^2-144x-108-25x^3+15x^2+9x+1=28;$
 $-135x=28+107;$
 $-135x=135; \quad x=-1.$
О т в е т : $x=-1.$

5. $2(x-2)(x^2+2x+4)-3(x^3+2x-1)=-x^3+3.$
Напомним, что $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$
 $2(x^3-8)-3x^3-6x+3=-x^3+3;$
 $2x^3-16-3x^3-6x+3=-x^3+3;$
 $-6x-13=3; \quad -6x=16;$
 $x=-\frac{16}{6}; \quad x=-\frac{8}{3}.$
О т в е т : $x=-2\frac{2}{3}.$

6. $9x^3-3\left(x^2+2\frac{2}{3}x-1\frac{1}{3}\right)-9(x-1)^3=(3x+1)(8x-3).$
Напомним, что $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$
 $9x^3-3x^2-3\cdot\frac{8}{3}x+3\cdot\frac{4}{3}-9(x^3-3x^2+3x-1)=24x^2+8x-9x-3;$
 $9x^3-3x^2-8x+4-9x^3+27x^2-27x+9=24x^2-x-3;$
 $-35x+x=-3-13;$
 $-34x=-16;$
 $x=\frac{16}{34};$
 $x=\frac{8}{17}.$
О т в е т : $x=\frac{8}{17}.$

$$7. (x+3)^3 - (x+1)(x-2)(x+3) = 7(x+1)(x-1).$$

Напомним, что $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$$x^3 + 3x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3 - (x+1)(x^2 - 2x + 3x - 6) = 7(x^2 - 1);$$

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - (x+1)(x^2 + x - 6) = 7(x^2 - 1);$$

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - (x^3 + x^2 - 6x + x^2 + x - 6) = 7(x^2 - 1);$$

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - x^3 - 2x^2 + 5x + 6 = 7x^2 - 7;$$

$$32x = -7 - 33; \quad 32x = -40; \quad x = -\frac{40}{32}; \quad x = -\frac{5}{4}.$$

Ответ: $x = -1,25$.

$$8. 3(4x-3)(x+2)(1-2x) - 4(3x-4)(2-x)(2x+1) = 43(2x-3)(2-x).$$

$$3(4x-3)(x+2-2x^2-4x) - 4(3x-4)(4x-2x^2+2-x) =$$

$$= 43(4x-6-2x^2+3x);$$

$$3(4x-3)(-2x^2-3x+2) - 4(3x-4)(-2x^2+3x+2) = 43(-2x^2+7x-6);$$

$$3(-8x^3-12x^2+8x+6x^2+9x-6) - 4(3x-4)(-2x^2+3x+2) =$$

$$= -86x^2 + 301x - 258;$$

$$3(-8x^3-6x^2+17x-6) - 4(-6x^3+9x^2+6x+8x^2-12x-8) =$$

$$= -86x^2 + 301x - 258;$$

$$-24x^3 - 18x^2 + 51x - 18 + 24x^3 - 68x^2 + 24x + 32 =$$

$$= -86x^2 + 301x - 258;$$

$$75x + 14 = 301x - 258;$$

$$301x - 75x = 258 + 14; \quad 226x = 272;$$

$$x = \frac{272}{226}; \quad x = 1\frac{46}{226}.$$

Ответ: $x = 1\frac{23}{113}$.

Тренировочная работа 3

Решите уравнения:

1. $0,5(3x-4)-3x=2+0,4(2-x)+1,9x$.
2. $0,03x+0,07:\left(1\frac{7}{24}+\frac{7}{30}-2\frac{9}{40}\right)=0$.
3. $\left(\frac{29}{30}+1\frac{11}{12}-2\frac{31}{35}\right)x+\frac{3}{42}=0$.
4. $(4-3x)(3x+2)-2(3-x)(4+x)+7x^2=3$.
5. $2x^2-(2x-5)(x-1)=9$.
6. $9x^2-(3x-1)^2=6$.
7. $(13y-2)^2-(12y-5)^2-(5y+4)^2=19$.
8. $(6x-1)^2(x-2)-(6x-5)^2(x+1)=33-60x^2$.
9. $(y+5)(y^2-5y+25)-y(y^2-4)=25$.
10. $4(3x+4)(x+2)(1-2x)-3(4x+3)(2-x)(1+2x)=$
 $=-43(2x+3)(x+2)-12$.
11. $\frac{(3x-1)^2+(4x+3)^2}{(5x+2)^2-4}=1$.
12. $\frac{(2x-1)(3x+2)-2(x-2)^2}{2(x+2)(x-2)-10}=2$.

Решение тренировочной работы 3

Решите уравнения:

1. $0,5(3x-4)-3x=2+0,4(2-x)+1,9x; \quad | \cdot 10$

$$5(3x-4)-30x=20+4(2-x)+19x;$$

$$15x-20-30x=20+8-4x+19x;$$

$$-30x=28+20; \quad x=-\frac{48}{30}; \quad x=-\frac{8}{5}; \quad x=-1,6.$$

Ответ: $x=-1,6$.

2. $0,03x+0,07:\left(1\frac{7^{\underline{5}}}{24}+\frac{7^{\underline{4}}}{30}-2\frac{9^{\underline{3}}}{40}\right)=0; \quad | \cdot 100$

$$3x+7:\left(1\frac{35+28}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}-2\frac{27}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}\right)=0; \quad \begin{array}{l} 24=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ 30=2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 40=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \end{array}$$

$$3x+\frac{7}{-\left(2\frac{27}{120}-1\frac{63}{120}\right)}=0$$

$$3x+\frac{7}{-\left(\frac{147-63}{120}\right)}=0;$$

наименьший общий
знаменатель равен
 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

$$3x-\frac{7 \cdot 120}{84}=0; \quad 3x=\frac{7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10}{3 \cdot 4 \cdot 7}; \quad 3x=10; \quad x=\frac{10}{3}; \quad x=3\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x=3\frac{1}{3}$.

3. $\left(\frac{29}{30}+1\frac{11}{12}-2\frac{31}{35}\right)x+\frac{3}{42}=0;$

$$30=2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$12=2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$35=5 \cdot 7$$

$$\left(1\frac{14 \cdot 29+35 \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}-2\frac{31 \cdot 12}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}\right) \cdot x=-\frac{3}{42}$$

наименьший общий
знаменатель равен
 $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$$-\left(2\frac{372}{420}-1\frac{791}{420}\right)x=-\frac{3}{42};$$

$$\frac{1}{420}x=\frac{3}{42}; \quad x=\frac{420 \cdot 3}{42}; \quad x=10 \cdot 3; \quad x=30.$$

Ответ: $x=30$.

4. $(4-3x)(3x+2)-2(3-x)(4+x)+7x^2=3;$

$$12x-9x^2+8-6x-2(3-x)(4+x)+7x^2=3;$$

$$-9x^2+6x+8+2x^2+2x-24+7x^2=3;$$

$$8x=19; \quad x=\frac{19}{8}; \quad x=2\frac{3}{8}.$$

О т в е т: $x=2\frac{3}{8}.$

5. $2x^2-(2x-5)(x-1)=9;$

$$2x^2-2x^2+7x-5=9; \quad 7x=14; \quad x=2.$$

О т в е т: $x=2.$

6. $9x^2-(3x-1)^2=6;$

$$9x^2-(9x^2-6x+1)=6; \quad 9x^2-9x^2+6x-1=6;$$

$$6x=7; \quad x=\frac{7}{6}; \quad x=1\frac{1}{6}.$$

О т в е т: $x=1\frac{1}{6}.$

7. $(13y-2)^2-(12y-5)^2-(5y+4)^2=19;$

$$(169y^2-52y+4)-(144y^2-120y+25)-(25y^2+40y+16)=19;$$

$$169y^2-52y+4-144y^2+120y-25-25y^2-40y-16=19;$$

$$28y=19+37; \quad 28y=56; \quad y=2.$$

О т в е т: $y=2.$

8. $(6x-1)^2(x-2)-(6x-5)^2(x+1)=33-60x^2;$

$$(36x^2-12x+1)(x-2)-(36x^2-60x+25)(x+1)=33-60x^2;$$

$$(36x^3-12x^2+x-72x^2+24x-2)-(36x^3-60x^2+25x+36x^2-60x+25)=33-60x^2;$$

$$36x^3-84x^2+25x-2-36x^3+24x^2+35x-25=33-60x^2;$$

$$-60x^2+60x-60+60x^2=0; \quad 60x-60=0; \quad x=1.$$

О т в е т: $x=1.$

$$9. (y+5)(y^2-5y+25)-y(y^2-4)=25;$$

$$y^3+125-y^3+4y=25;$$

$$4y=-100;$$

$$y=-25.$$

Ответ: $y=-25$.

$$10. 4(3x+4)(x+2)(1-2x)-3(4x+3)(2-x)(1+2x)= \\ =-43(2x+3)(x+2)-12.$$

$$а) (3x+4)(x+2)(1-2x)=(3x+4)(x+2-2x^2-4x)= \\ = (3x+4)(-2x^2-3x+2)= \\ = -6x^3-8x^2-9x^2-12x+6x+8=-6x^3-17x^2-6x+8;$$

$$б) (4x+3)(2-x)(1+2x)=(4x+3)(2-x+4x-2x^2)= \\ = (4x+3)(-2x^2+3x+2)=-8x^3-6x^2+12x^2+9x+8x+6= \\ = -8x^3+6x^2+17x+6;$$

$$в) (2x+3)(x+2)=2x^2+3x+4x+6=2x^2+7x+6.$$

Тогда уравнение примет вид

$$4(-6x^3-17x^2-6x+8)-3(-8x^3+6x^2+17x+6)= \\ = -43(2x^2+7x+6)-12;$$

$$-24x^3-68x^2-24x+32+24x^3-18x^2-51x-18= \\ = -86x^2-301x-258-12;$$

$$301x-75x=-270-14; \quad 226x=-284;$$

$$x=-\frac{284}{226}; \quad x=-\frac{142}{113}.$$

Ответ: $x=-1\frac{29}{113}$.

$$11. \frac{(3x-1)^2 + (4x+3)^2}{(5x+2)^2 - 4} = 1; \quad D(Y): (5x+2)^2 - 4 \neq 0;$$

$$\frac{9x^2 - 6x + 1 + 16x^2 + 24x + 9}{25x^2 + 20x + 4 - 4} = 1;$$

$$\frac{25x^2 + 18x + 10}{25x^2 + 20x} = 1;$$

$$25x^2 + 18x + 10 = 25x^2 + 20x; \quad 2x = 10; \quad x = 5.$$

Проверим принадлежность $5 \in D(Y)$ – ?

Обозначим $y(x) = (5x+2)^2 - 4$, вычислим:

$$y(5) = (5 \cdot 5 + 2)^2 - 4 = 27^2 - 4 \neq 0. \quad \text{Значит } 5 \in D(Y).$$

Ответ: $x = 5$.

$$12. \frac{(2x-1)(3x+2) - 2(x-2)^2}{2(x+2)(x-2) - 10} = 2. \quad D(Y): \quad 2(x+2)(x-2) - 10 \neq 0.$$

$$\frac{6x^2 + x - 2 - 2x^2 + 8x - 8}{2x^2 - 8 - 10} = 2, \quad \text{значит } D(Y): x^2 - 9 \neq 0;$$

$$\frac{4x^2 + 9x - 10}{2x^2 - 18} = 2;$$

$$4x^2 + 9x - 10 = 4x^2 - 36;$$

$$9x = -26;$$

$$x = -\frac{26}{9}.$$

Пусть $y(x) = x^2 - 9$.

$$y\left(-\frac{26}{9}\right) = \left(-\frac{26}{9}\right)^2 - 9 = \frac{676}{81} - 9 \neq 0,$$

т. е. $x = -\frac{26}{9} \in D(Y)$.

Ответ: $x = -2\frac{8}{9}$.

Проверочная работа 2

Решите уравнения:

1. $4(2x-3)-3(2x+1)+2(3x+1)=-1.$

2. $\frac{2(x+2)-3(x-1)}{3(x+1)-4(x-1)}=1.$

3. $\frac{1,4(x-1)+1,2(3-x)}{2,1(x+2)-0,7(x-3)}=2.$

4. $(2x-3)(5x+1)-5x(2x+3)+16x=3.$

5. $4x^2-(x-2)(4x+3)=16.$

6. $\frac{(4x-1)(x+2)-(2x+1)(2x-1)-4(x-1)}{2x^2-(2x+1)(x-2)}=1.$

7. $(12x-5)^2-(8x+1)^2-(7-10x)(3-8x)=78.$

8. $\frac{(13x-1)^2-(12x+3)^2}{(4x+5)^2-41(x-1)(x+1)}=-1.$

9. $(5x-1)^2(x+1)-(6-5x)^2(x+3)=28.$

10. $(x-1)(x+2)(3-2x)-2(x+1)(x-2)(3-x)=(7x-1)(1-x).$

Практикум 4

Рассмотрим уравнения:

$$1. \frac{3}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{28}{1-x^2}.$$

Внешне оно выглядит как явно нелинейное, но после преобразования уравнение приводится к уравнению первой степени.

Для решения уравнения необходимо перенести все дроби в одну сторону, найти общий знаменатель и т. д.

$$\frac{3^{1+x}}{1-x} + \frac{1^{1-x}}{1+x} - \frac{28}{(1-x)(1+x)} = 0; \quad \frac{3(1+x)+1-x-28}{(1-x)(1+x)} = 0; \quad \frac{2x-24}{(1-x)(1+x)} = 0.$$

Напомним, что дробь равна нулю, только если числитель равен нулю, а знаменатель нет.

$$\text{т. е. } \begin{cases} 2x-24=0 \\ (1-x)(1+x) \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=12 \\ (1-12)(1+12) \neq 0 - \text{ истина} \end{cases}; \quad x=12.$$

$$\text{Можно чуть иначе: } D(y): (1-x)(1+x) \neq 0; \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}.$$

Ответ: $x=12$.

$$2. \frac{x+2}{x+1} + \frac{3}{x-2} - 1 = \frac{3}{(x+1)(x-2)}.$$

$$\frac{x+2^{\frac{x-2}{x+1}}}{x+1} + \frac{3^{\frac{x+1}{x-2}}}{x-2} - 1 \frac{|(x-2)(x+1)|}{(x+1)(x-2)} = \frac{3}{(x+1)(x-2)};$$

$$\frac{(x-2)(x+2)+3(x+1)-(x-2)(x+1)-3}{(x+1)(x-2)} = 0; \quad \frac{x^2-4+3x+3-x^2+x+2-3}{(x+1)(x-2)} = 0;$$

$$\frac{4x-2}{(x+1)(x-2)} = 0; \quad \begin{cases} 4x-2=0 \\ (x+1)(x-2) \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) \neq 0 - \text{ истина.} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

$$3. \frac{y}{y^2-9} - \frac{1}{y^2+3y} + \frac{1-2y}{6y+2y^2} = 0;$$

$$\frac{y^{2y}}{(y+3)(y-3)} - \frac{1^{2(y-3)}}{y(y+3)} + \frac{1-2y^{y-3}}{2y(3+y)} = 0; \frac{2y^2 - 2(y-3) + (1-2y)(y-3)}{2y(y+3)(y-3)} = 0;$$

$$\frac{2y^2 - 2y + 6 + y - 2y^2 - 3 + 6y}{2y(y+3)(y-3)} = 0; \frac{5y+3}{2y(y+3)(y-3)} = 0;$$

$$\begin{cases} 5y+3=0 \\ 2y(y+3)(y-3) \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} y = -0,6 \\ 2(-0,6)(-0,6+3)(-0,6-3) \neq 0 - \text{истина.} \end{cases}$$

Ответ: $y = -0,6$.

$$4. \frac{1}{2-x} - 1 = \frac{1-x}{x-2} - \frac{6-x}{3x^2-12};$$

$$\frac{1-(2-x)}{2-x} = \frac{1-x}{x-2} - \frac{6-x}{3(x+2)(x-2)}; \frac{1-2+x}{2-x} - \frac{1-x}{x-2} + \frac{6-x}{3(x+2)(x-2)} = 0;$$

$$-\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-1}{x-2} + \frac{6-x}{3(x+2)(x-2)} = 0; \frac{6-x}{3(x+2)(x-2)} = 0;$$

$$\begin{cases} 6-x=0 \\ 3(x+2)(x-2) \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} x=6 \\ 3(6+2)(6-2) \neq 0 - \text{истина.} \end{cases}$$

$x = 6$.

Ответ: $x = 6$.

$$5. \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3};$$

$$\frac{x+4-(x+2)}{(x+2)(x+4)} = \frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)}; \frac{2}{(x+2)(x+4)} = \frac{2}{(x+1)(x+3)};$$

$$\begin{cases} (x+2)(x+4) = (x+1)(x+3) \\ (x+2)(x+4) \neq 0 \\ (x+1)(x+3) \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} x^2 + 6x + 8 = x^2 + 4x + 3 \\ x+2 \neq 0 \\ x+4 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x = -5 \\ x \neq -2 \\ x \neq -4 ; x = -2,5. \\ x \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

О т в е т : $x = -2,5$.

$$6. \frac{1}{5 - \frac{1}{x}} = \frac{2}{7}. \quad D(Y): 5 - \frac{1}{x} \neq 0;$$

$$\frac{1}{\frac{5x-1}{x}} = \frac{2}{7}; \quad \frac{x}{5x-1} = \frac{2}{7}; \quad 7x = 2(5x-1); \quad 7x = 10x-2;$$

$$3x = 2; \quad x = \frac{2}{3}.$$

Проверим $\frac{2}{3} \in D(Y)$ или нет:

$$5 - \frac{1}{\frac{2}{3}} \neq 0; \quad 5 - \frac{3}{2} \neq 0; \quad 3,5 \neq 0 \text{ — истина.}$$

О т в е т : $x = \frac{2}{3}$.

$$7. \frac{x^2}{x^2+2x+1} = \left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x} \right) : \frac{1+x^3}{x^2-x};$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} = \left(\frac{x^{\frac{1}{x}}}{(x+1)(x-1)} - \frac{1^{\frac{1}{x-1}}}{x(x+1)} \right) \cdot \frac{x(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)};$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2-x+1}{x(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x(x-1)}{(1+x)(x^2-x+1)};$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{x^2-x+1} \cancel{(x-1)}}{\cancel{x(x+1)^2} \cancel{(x-1)} \cancel{(x^2-x+1)}} \quad (x \neq 0; x \neq 1);$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}; \quad \frac{x^2-1}{(x+1)^2} = 0;$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2} = 0; \quad \begin{cases} x-1=0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}; \quad x=1.$$

При проверке, если $x=1$, один из знаменателей равен нулю. Значит решения нет.

Ответ: \emptyset .

$$8. \left(\frac{6x-1}{x^2+6x} + \frac{6x+1}{x^2-6x} \right) : \frac{x^2+1}{x^2-36} - \frac{12}{x-1} = \frac{12}{x-x^2}.$$

$$\left(\frac{6x-1 \overbrace{+x-6}^{|x-6|}}{x(x+6)} + \frac{6x+1 \overbrace{+x+6}^{|x+6|}}{x(x-6)} \right) \cdot \frac{x^2-36}{x^2+1} - \frac{12}{x-1} - \frac{12}{x-x^2} = 0;$$

$$\frac{(x-6)(6x-1) + (x+6)(6x+1)}{x(x+6)(x-6)} \cdot \frac{(x+6)(x-6)}{x^2+1} - \frac{12}{x-1} - \frac{12}{x(1-x)} = 0;$$

$$\frac{(6x^2-36x-x+6+6x^2+36x+x+6)(x+6)(x-6)}{x(x+6)(x-6)(x^2+1)} - \frac{12 \overbrace{x}^{|x|}}{x-1} + \frac{12}{x(x-1)} = 0;$$

$$\frac{12 \cancel{(x^2+1)} \cancel{(x+6)} \cancel{(x-6)}}{x \cancel{(x+6)} \cancel{(x-6)} \cancel{(x^2+1)}} - \frac{12x-12}{x(x-1)} = 0; \quad \frac{12}{x} - \frac{12(x-1)}{x(x-1)} = 0; \quad \frac{12}{x} - \frac{12}{x} = 0;$$

$$0=0.$$

Значит $\forall x \in D(Y)$ – есть решение. Остается выяснить $D(Y)$, это условие того, что знаменатели не равны нулю и делитель не равен нулю.

$$D(Y): \begin{cases} x^2 + 6x \neq 0 \\ x^2 - 6x \neq 0 \\ x^2 - 36 \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \\ x(x-1) \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x + 6 \neq 0 \\ x - 6 \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 6 \\ x \neq -6 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-6; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 6) \cup (6; \infty)$.

Тренировочная работа 4

Решите уравнения:

1. $(2x-3)(5x-1) - 5x(2x-3) + 16x = 0.$

2. $(3-2x)(2x+3) - (4-2x)(5+2x) = 4.$

3. $(x+4)(x^2-4x+16) - x(x^2-9) = 18.$

4. $(6x+1)^2(1-x) + (5-6x)^2(x+1) = 14.$

5. $4(4-3x)(2-x)(1+2x) - 3(3-4x)(2+x)(1-2x) =$
 $= -43(2x+5)(x+2) - 18.$

6. $\frac{24}{x} - \frac{17-x}{x-1} = 1.$

7. $\frac{4}{x-3} + \frac{3}{x+3} = \frac{12}{2x^2-18}.$

8. $\frac{x+3}{x+2} + \frac{3}{x-1} - 1 = \frac{3}{(x+2)(x-1)}.$

9. $\frac{2x-1}{14x^2-7x} + \frac{8}{12x^2-3} = \frac{6x}{7(6x^2-3x)}.$

10. $\frac{1}{3-x} - 1 = \frac{2-x}{x-3} - \frac{7-x}{3(x-3)(x+1)}.$

11. $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}.$

12. $\frac{y}{y^2-2y+1} = \frac{y^2-y}{y^3-1} \left(\frac{1}{y^2-y} + \frac{y}{y^2-1} \right).$

Решение тренировочной работы 4

Решите уравнения:

1. $(2x-3)(5x-1)-5x(2x-3)+16x=0.$

$$10x^2-15x-2x+3-10x^2+15x+16x=0;$$

$$14x+3=0;$$

$$x=-\frac{3}{14}.$$

$$\text{О т в е т: } x=-\frac{3}{14}.$$

2. $(3-2x)(2x+3)-(4-2x)(5+2x)=4.$

$$9-4x^2-(20-10x+8x-4x^2)=4;$$

$$9-4x^2+4x^2+2x-20=4;$$

$$2x=15; \quad x=7,5.$$

$$\text{О т в е т: } x=7,5.$$

3. $(x+4)(x^2-4x+16)-x(x^2-9)=18.$

$$x^3+64-x^3+9x=18;$$

$$9x=-46;$$

$$x=-\frac{46}{9}; \quad x=-5\frac{1}{9}.$$

$$\text{О т в е т: } x=-5\frac{1}{9}.$$

4. $(6x+1)^2(1-x)+(5-6x)^2(x+1)=14.$

$$(36x^2+12x+1)(1-x)+(25-60x+36x^2)(x+1)=14;$$

$$36x^2+12x+1-36x^3-12x^2-x+25x-60x^2+36x^3+25-60x+36x^2=14;$$

$$-24x+26=14; \quad -24x=-12;$$

$$x=\frac{1}{2}.$$

$$\text{О т в е т: } x=\frac{1}{2}.$$

$$5. \quad 4(4-3x)(2-x)(1+2x) - 3(3-4x)(2+x)(1-2x) = \\ = -43(2x+5)(x+2) - 18.$$

$$а) \quad (4-3x)(2-x)(1+2x) = (4-3x)(2-x+4x-2x^2) = \\ = (4-3x)(-2x^2+3x+2) =$$

$$= -8x^2 + 6x^3 + 12x - 9x^2 + 8 - 6x = 6x^3 - 17x^2 + 6x + 8;$$

$$б) \quad (3-4x)(2+x)(1-2x) = (3-4x)(2+x-4x-2x^2) = \\ = (3-4x)(-2x^2-3x+2) =$$

$$= -6x^2 + 8x^3 - 9x + 12x^2 + 6 - 8x = 8x^3 + 6x^2 - 17x + 6;$$

$$в) \quad (2x+5)(x+2) = 2x^2 + 5x + 4x + 10 = 2x^2 + 9x + 10.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$4(6x^3 - 17x^2 + 6x + 8) - 3(8x^3 + 6x^2 - 17x + 6) = \\ = -43(2x^2 + 9x + 10) - 18;$$

$$24x^3 - 68x^2 + 24x + 32 - 24x^3 - 18x^2 + 51x - 18 = \\ = -86x^2 - 387x - 430 - 18;$$

$$75x + 14 = -387x - 448;$$

$$462x = -462;$$

$$x = -1.$$

Ответ: $x = -1$.

$$6. \quad \frac{24}{x} - \frac{17-x}{x-1} = 1 \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 0; \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\frac{24(x-1) - x(17-x)}{x(x-1)} = 1;$$

$$24x - 24 - 17x + x^2 = x(x-1);$$

$$x^2 + 7x - 24 = x^2 - x;$$

$$8x - 24 = 0;$$

$$x = 3 \in D(Y).$$

Ответ: $x = 3$.

$$7. \quad \frac{4}{x-3} + \frac{3}{x+3} = \frac{12}{2x^2-18}.$$

$$\frac{4(x+3)+3(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{12}{2(x^2-9)}; \quad \frac{4x+12+3x-9}{(x-3)(x+3)} - \frac{12}{2(x+3)(x-3)} = 0;$$

$$\frac{7x+3}{(x-3)(x+3)} - \frac{6}{(x+3)(x-3)} = 0; \quad \frac{7x+3-6}{(x+3)(x-3)} = 0; \quad \frac{7x-3}{(x+3)(x-3)} = 0;$$

$$\begin{cases} 7x-3=0 \\ (x+3)(x-3) \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ \left(\frac{3}{7}+3\right)\left(\frac{3}{7}-3\right) \neq 0 - \text{истина} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{3}{7}.$$

$$8. \quad \frac{x+3\frac{|x-1}{x+2}}{x+2} + \frac{3\frac{|x+2}{x-1}}{x-1} - 1\frac{|(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{3}{(x+2)(x-1)}.$$

$$\frac{(x-1)(x+3)+3(x+2)-(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{3}{(x+2)(x-1)};$$

$$\frac{x^2-x+3x-3+3x+6-x^2-2x+x+2}{(x+2)(x-1)} = \frac{3}{(x+2)(x-1)};$$

$$\frac{4x+5}{(x+2)(x-1)} - \frac{3}{(x+2)(x-1)} = 0; \quad \frac{4x+5-3}{(x+2)(x-1)} = 0; \quad \frac{4x+2}{(x+2)(x-1)} = 0;$$

$$\begin{cases} 4x+2=0 \\ (x+2)(x-1) \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ (x+2)(x-1) \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ \left(-\frac{1}{2}+2\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right) \neq 0 - \text{истина} \end{cases}.$$

$$x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{1}{2}.$$

$$9. \frac{2x-1}{14x^2-7x} + \frac{8}{12x^2-3} = \frac{6x}{7(6x^2-3x)}.$$

$$\frac{2x-1|^{3(2x+1)}}{7x(2x-1)} + \frac{8|^{7x}}{3(4x^2-1)} - \frac{6x|^{2x+1}}{21x(2x-1)} = 0;$$

$$\frac{3(2x+1)(2x-1)+56x-6x(2x+1)}{21x(2x+1)(2x-1)} = 0; \quad \frac{3(4x^2-1)+56x-12x^2-6x}{21x(2x+1)(2x-1)} = 0;$$

$$\frac{12x^2-3+56x-12x^2-6x}{21x(2x+1)(2x-1)} = 0; \quad \frac{50x-3}{21x(2x+1)(2x-1)} = 0;$$

$$\begin{cases} 50x = 3 \\ 21x(2x+1)(2x-1) \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{3}{50} \\ 21x(2x+1)(2x-1) \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 0,06 \\ 21 \cdot 0,06(0,12+1)(0,12-1) \neq 0 - \text{истина.} \end{cases}$$

$$x = 0,06.$$

О т в е т : $x = 0,06$.

$$10. \frac{1}{3-x} - 1 = \frac{2-x}{x-3} - \frac{7-x}{3(x-3)(x+1)}.$$

$$\frac{-1}{x-3} - 1 - \frac{2-x}{x-3} + \frac{7-x}{3(x-3)(x+1)} = 0;$$

$$\frac{-1-2+x}{x-3} - 1 + \frac{7-x}{3(x-3)(x+1)} = 0; \quad \frac{x-3}{x-3} - 1 + \frac{7-x}{3(x-3)(x+1)} = 0;$$

$$1-1 + \frac{7-x}{3(x-3)(x+1)} = 0; \quad \frac{7-x}{3(x-3)(x+1)} = 0;$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ 3(x+1)(x-3) \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ 3(7+1)(7-3) \neq 0 - \text{истина.} \end{cases}$$

$$x = 7.$$

О т в е т : $x = 7$.

$$11. \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}. \quad D(Y): \begin{cases} x+3 \neq 0 \\ x+5 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \\ x+4 \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq -5 \\ x \neq -2 \\ x \neq -4 \end{cases};$$

$$\frac{x+5-(x+3)}{(x+3)(x+5)} = \frac{x+4-(x+2)}{(x+2)(x+4)};$$

$$\frac{2}{(x+3)(x+5)} = \frac{2}{(x+2)(x+4)};$$

$$(x+3)(x+5) = (x+2)(x+4);$$

$$x^2 + 8x + 15 = x^2 + 6x + 8;$$

$$x = -3, 5 \in D(Y).$$

Ответ: $x = -3, 5$.

$$12. \frac{y}{y^2-2y+1} = \frac{y^2-y}{y^3-1} \left(\frac{1}{y^2-y} + \frac{y}{y^2-1} \right)$$

$$\frac{y}{(y-1)^2} - \frac{y}{y^2+y+1} \cdot \left(\frac{1|^{y+1}}{y(y-1)} + \frac{y|^{y^2}}{(y+1)(y-1)} \right) = 0;$$

$$\frac{y}{(y-1)^2} - \frac{y}{y^2+y+1} \cdot \frac{y+1+y^2}{y(y+1)(y-1)} = 0;$$

$$\frac{y}{(y-1)^2} - \frac{\cancel{y^2+y+1}}{\cancel{(y^2+y+1)} \cancel{y}(y+1)(y-1)} = 0;$$

$$\frac{y|^{y+1}}{(y-1)^2} - \frac{1|^{y-1}}{(y+1)(y-1)} = 0; \quad \frac{y(y+1)-(y-1)}{(y-1)^2(y+1)} = 0;$$

$$\frac{y^2+y-y+1}{(y-1)^2(y+1)} = 0; \quad \frac{y^2+1}{(y-1)^2(y+1)} = 0;$$

$$y^2 + 1 = 0.$$

Решения нет.

Ответ: $y \in \emptyset$.

Проверочная работа 3

Решите уравнения:

- $2x+1+\frac{2x-1}{6}=\frac{7x-13}{4}$.
- $\frac{3(2x-2,5)}{5}-2x+2,5=\frac{2-x}{2}$.
- $\frac{(2x-1)^2}{8}-\frac{x(2x-3)}{4}=\frac{1+0,25x}{12}$.
- $\frac{\left(x+1\frac{1}{3}\right)^2}{4}+\frac{1,5x(1-x)}{9}=\frac{(x-4)(x+4)}{12}$.
- $(3x+2)(3x-2)-(3x-4)^2=28$.
- $(2x-1)(1+2x+4x^2)-4x(2x^2-3)=23$.
- $\frac{x}{x-1}=\frac{4x}{x+5}-3$.
- $\frac{1,5x^2}{9x^2-1}-\frac{3x+1}{3-9x}-\frac{3x-1}{6x+2}=0$.
- $x-2+\frac{4}{2+x}-\frac{x^3+6}{x^2+2x}=0$.
- $\frac{x+3}{(2x+3)(2x-3)}-\frac{3-x}{(2x+3)^2}=\frac{1}{2x-3}$.
- $\frac{7-18x}{x^3+1}+\frac{15}{x^2-x+1}=\frac{3}{1-x^2}$.
- $\frac{2x-1}{2x+2}\left(\frac{2x}{1-4x+4x^2}-\frac{4x^2+2x}{8x^3-1}\right)=\frac{2x}{8x^3-1}$.

2

Квадратные уравнения

Определение 8. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) называется **квадратным**.

Известны следующие формулы решения.

А Приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$

решается по формуле: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

В Квадратное уравнение общего вида: $ax^2 + bx + c = 0$

решается по формуле: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

С Квадратное уравнение с четным коэффициентом при неизвестном первой степени $ax^2 + 2kx + c = 0$

решается по формуле: $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Примечание. Любые квадратные уравнения можно решать по общей формуле, но иногда рациональнее использовать алгоритмы формул А или С.

Практикум 5

1. $x^2 + 4x - 12 = 0.$

Используем формулу А.

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{(-2)^2 - (-12)} = -2 \pm \sqrt{4+12} = -2 \pm 4$$

где $\begin{cases} p = 4 \\ q = -12 \end{cases},$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \end{cases}, \text{ или } x_1 = 2; x_2 = -6.$$

Ответ: $x_1 = 2; x_2 = -6$, или $\{2; -6\}$ (множество, содержащее два элемента).

2. $3x^2 - 5x + 2 = 0.$

Используем формулу В.

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 1}{6}, \quad \text{где } \begin{cases} a = 3 \\ b = -5; \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ или } x_1 = 1; x_2 = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\left\{1; \frac{2}{3}\right\}.$

3. $5x^2 + 8x + 3 = 0.$

Используем формулу С.

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 5 \cdot 3}}{5} = \frac{-4 \pm 1}{5}, \quad \text{где } \begin{cases} a = 5 \\ k = 4; \\ c = 3 \end{cases}$$

$$x_1 = -\frac{3}{5}; x_2 = -1.$$

Ответ: $\left\{-1; -\frac{3}{5}\right\}.$

Тренировочные карточки заданий на решение простейших квадратных уравнений (с ответами)

Карточка 1

$$1. 2x^2 - x - 1 = 0. \quad \left\{ 1; -\frac{1}{2} \right\}$$

$$2. 5x^2 + x - 4 = 0. \quad \left\{ -1; \frac{4}{5} \right\}$$

$$3. 20x^2 + x - 1 = 0. \quad \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{1}{5} \right\}$$

$$4. 8x^2 + 10x + 3 = 0. \quad \left\{ -\frac{1}{2}; -\frac{3}{4} \right\}$$

$$5. -6x^2 + 7x - 2 = 0. \quad \left\{ \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right\}$$

$$6. 4x^2 + 7x - 2 = 0. \quad \left\{ -2; \frac{1}{4} \right\}$$

$$7. 7x^2 + 11x + 4 = 0. \quad \left\{ -1; -\frac{4}{7} \right\}$$

$$8. -5x^2 + 8x - 3 = 0. \quad \left\{ 1; \frac{3}{5} \right\}$$

$$9. 2x^2 + 9x - 5 = 0. \quad \left\{ -5; \frac{1}{2} \right\}$$

$$10. 8x^2 + 2x - 1 = 0. \quad \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right\}$$

Карточка 2

$$1. 4x^2 + x - 5 = 0. \quad \left\{ 1; -\frac{5}{4} \right\}$$

$$2. 12x^2 - 13x + 1 = 0. \quad \left\{ 1; \frac{1}{12} \right\}$$

$$3. 5 + 4x - x^2 = 0. \quad \{ 5; -1 \}$$

$$4. 5x^2 + 2x - 3 = 0. \quad \left\{ -1; \frac{3}{5} \right\}$$

$$5. 8x^2 - 10x + 3 = 0. \quad \left\{ \frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right\}$$

$$6. -2x^2 + 7x - 6 = 0. \quad \left\{ 2; 1\frac{1}{2} \right\}$$

$$7. 24x^2 + 5x - 1 = 0. \quad \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{8} \right\}$$

$$8. 4x^2 + x - 3 = 0. \quad \left\{ -1; \frac{3}{4} \right\}$$

$$9. -3x^2 + 8x - 5 = 0. \quad \left\{ 1; \frac{5}{3} \right\}$$

$$10. 5x^2 - 11x + 2 = 0. \quad \left\{ 2; \frac{1}{5} \right\}$$

Карточка 3

1. $-8x^2 + 6x + 9 = 0. \left\{ -\frac{3}{4}; \frac{3}{2} \right\}$

2. $28x^2 + 13x - 6 = 0. \left\{ \frac{2}{7}; -\frac{3}{4} \right\}$

3. $12x^2 + 23x + 5 = 0. \left\{ -\frac{1}{4}; -\frac{5}{3} \right\}$

4. $6x^2 - 17x + 5 = 0. \left\{ 2\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right\}$

5. $21x^2 - 22x - 8 = 0. \left\{ -\frac{2}{7}; 1\frac{1}{3} \right\}$

6. $9x^2 - 6x - 8 = 0. \left\{ -\frac{2}{3}; 1\frac{1}{3} \right\}$

7. $2x^2 + x - 3 = 0. \left\{ 1; -1\frac{1}{2} \right\}$

8. $5x^2 - 26x + 5 = 0. \left\{ 5; \frac{1}{5} \right\}$

9. $5x^2 - 8x - 4 = 0. \left\{ 2; -\frac{2}{5} \right\}$

10. $21x^2 + 4x - 1 = 0. \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{7} \right\}$

Карточка 4

1. $8x^2 + 14x - 15 = 0. \left\{ \frac{3}{4}; -2\frac{1}{2} \right\}$

2. $-8x^2 - 22x + 21 = 0. \left\{ \frac{3}{4}; -3\frac{1}{2} \right\}$

3. $5x^2 + 17x + 6 = 0. \left\{ -\frac{2}{5}; -3 \right\}$

4. $12x^2 - 23x + 5 = 0. \left\{ \frac{1}{4}; \frac{5}{3} \right\}$

5. $6x^2 - 13x - 28 = 0. \left\{ -1\frac{1}{3}; 3\frac{1}{2} \right\}$

6. $15x^2 - 14x - 8 = 0. \left\{ 1\frac{1}{3}; -\frac{2}{5} \right\}$

7. $3x^2 + 2x - 5 = 0. \left\{ 1; -\frac{5}{3} \right\}$

8. $8x^2 - 6x + 1 = 0. \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right\}$

9. $4x^2 + 4x - 3 = 0. \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{3}{2} \right\}$

10. $22x^2 - 9x - 1 = 0. \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{1}{11} \right\}$

Проверочные карточки заданий на решение простейших квадратных уравнений**Карточка 1**

1. $8x^2 - 2x - 3 = 0$.
2. $6x^2 + 5x - 6 = 0$.
3. $-6x^2 + 19x + 7 = 0$.
4. $10x^2 - 7x + 1 = 0$.
5. $-4x^2 - 6x + 18 = 0$.
6. $-15x^2 + 23x - 4 = 0$.
7. $2x^2 + x - 10 = 0$.
8. $12x^2 + 5x - 3 = 0$.
9. $18x^2 - 21x + 5 = 0$.
10. $6x^2 - 13x - 8 = 0$.

Карточка 2

1. $6x^2 - 5x - 6 = 0$.
2. $12x^2 + 7x + 1 = 0$.
3. $8x^2 + 2x - 3 = 0$.
4. $-6x^2 - 19x + 7 = 0$.
5. $15x^2 + 23x + 4 = 0$.
6. $-4x^2 + 6x + 18 = 0$.
7. $18x^2 + 21x + 5 = 0$.
8. $2x^2 - x - 10 = 0$.
9. $6x^2 + 13x - 8 = 0$.
10. $12x^2 - 5x - 2 = 0$.

Карточка 3

1. $3x^2 + 2x - 8 = 0$.
2. $6x^2 - 13x + 6 = 0$.
3. $7x^2 - 19x - 6 = 0$.
4. $10x^2 + 7x + 1 = 0$.
5. $18x^2 - 6x - 4 = 0$.
6. $4x^2 + 23x + 15 = 0$.
7. $10x^2 - x - 2 = 0$.
8. $2x^2 - 5x - 12 = 0$.
9. $5x^2 + 21x + 18 = 0$.
10. $8x^2 - 13x - 6 = 0$.

Карточка 4

1. $6x^2 + 13x + 6 = 0$.
2. $10x^2 - 7x - 6 = 0$.
3. $3x^2 - 2x - 8 = 0$.
4. $7x^2 + 19x - 6 = 0$.
5. $4x^2 - 23x + 15 = 0$.
6. $18x^2 - 23x + 5 = 0$.
7. $4x^2 + 6x - 18 = 0$.
8. $10x^2 + x - 2 = 0$.
9. $8x^2 + 13x - 6 = 0$.
10. $2x^2 + 5x - 12 = 0$.

Решение квадратных уравнений с иррациональными корнями и приводящихся к ним

Практикум 6

1. $2x^2 + 7x + 2 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 16}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{4}. \quad \text{Ответ: } \left\{ \frac{-7 - \sqrt{33}}{4}; \frac{-7 + \sqrt{33}}{4} \right\}.$$

2. $6x^2 - (3\sqrt{3} - 2)x - \sqrt{3} = 0$.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{3\sqrt{3} - 2 \pm \sqrt{(3\sqrt{3} - 2)^2 + 24\sqrt{3}}}{12} = \frac{3\sqrt{3} - 2 \pm \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 12\sqrt{3} + 2^2 + 24\sqrt{3}}}{12} = \\ &= \frac{3\sqrt{3} - 2 \pm \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{3} + 2^2}}{12} = \frac{3\sqrt{3} - 2 \pm (3\sqrt{3} + 2)}{12}; \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3\sqrt{3} - 2 + 3\sqrt{3} + 2}{12}; \\ x = \frac{3\sqrt{3} - 2 - 3\sqrt{3} - 2}{12} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ x = -\frac{1}{3} \end{array} \right].$$

Ответ: $\left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{3} \right\}$.

3. $6x^2 - \sqrt{5}x - 5 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 4 \cdot 6 \cdot 5}}{12} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{5 + 120}}{12} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{125}}{12} = \frac{\sqrt{5} \pm 5\sqrt{5}}{12};$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{5}}{2}. \\ x = -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{array} \right].$$

Ответ: $\left\{ -\frac{\sqrt{5}}{3}; \frac{\sqrt{5}}{2} \right\}$.

$$4. 3\sqrt{6}x^2 - (3 - \sqrt{6})x - 1 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{(3 - \sqrt{6}) \pm \sqrt{(3 - \sqrt{6})^2 + 12\sqrt{6}}}{6\sqrt{6}} = \frac{3 - \sqrt{6} \pm \sqrt{3^2 - 6\sqrt{6} + (\sqrt{6})^2 + 12\sqrt{6}}}{6\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{3 - \sqrt{6} \pm \sqrt{3^2 + 6\sqrt{6} + (\sqrt{6})^2}}{6\sqrt{6}} = \frac{3 - \sqrt{6} \pm (3 + \sqrt{6})}{6\sqrt{6}};$$

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{6} + 3 + \sqrt{6}}{6\sqrt{6}} = \frac{6}{6\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}; \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{6} - (3 + \sqrt{6})}{6\sqrt{6}} = \frac{-2\sqrt{6}}{6\sqrt{6}} = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{О т в е т: } \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{6}}{6} \right\}.$$

$$5. \frac{(3x-2)^2}{4} - \frac{(3-x)^2}{3} = 1 \quad | \cdot 12; \quad 3(3x-2)^2 - 4(9-6x+x^2) = 12;$$

$$3(9x^2 - 12x + 4) - 4(9 - 6x + x^2) = 12;$$

$$27x^2 - 36x + 12 - 36 + 24x - 4x^2 = 12; \quad 23x^2 - 12x - 36 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 23 \cdot 36}}{23} = \frac{6 \pm 6\sqrt{1+23}}{23} = \frac{6 \pm 12\sqrt{6}}{23}.$$

$$\text{О т в е т: } \left\{ \frac{6 - 12\sqrt{6}}{23}; \frac{6 + 12\sqrt{6}}{23} \right\}.$$

$$6. (8x-9)(3x+2) - (2x-3)(8x-2) = 33x+21.$$

$$24x^2 - 11x - 18 - 16x^2 + 28x - 6 - 33x - 21 = 0;$$

$$8x^2 - 16x - 45 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 8 \cdot 45}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{424}}{8} = \frac{8 \pm 2\sqrt{106}}{8};$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{4 + \sqrt{106}}{4} \\ x = \frac{4 - \sqrt{106}}{4} \end{array} \right.$$

$$\text{О т в е т: } \left\{ \frac{4 - \sqrt{106}}{4}; \frac{4 + \sqrt{106}}{4} \right\}.$$

Уравнения, приводящиеся к квадратным

Практикум 7

$$1. \frac{2x-1}{x+1} = \frac{4x+2}{3x-2}; \quad D(Y): \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 3x-2 \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq \frac{2}{3} \end{cases}.$$

$$(2x-1)(3x-2) = (4x+2)(x+1);$$

$$6x^2 - 7x + 2 = 4x^2 + 6x + 2; \quad 2x^2 - 13x = 0;$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 6,5 \end{cases} \in D(Y).$$

Ответ: $\{0; 6,5\}$.

$$2. \frac{32}{x+1} + \frac{21}{x-1} = 3,5; \quad D(Y): \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{cases};$$

$$32(x-1) + 21(x+1) = 3,5(x+1)(x-1); \quad | \cdot 2$$

$$64(x-1) + 42(x+1) = 7(x^2 - 1);$$

$$64x - 64 + 42x + 42 = 7x^2 - 7;$$

$$7x^2 - 106x + 15 = 0; \quad (\text{формула } C)$$

$$x_{1,2} = \frac{53 \pm \sqrt{53^2 - 7 \cdot 15}}{7} = \frac{53 \pm \sqrt{2809 - 105}}{7} = \frac{53 \pm 52}{7};$$

$$\begin{cases} x = 15 \\ x = \frac{1}{7} \end{cases}; \quad x \in D(Y).$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{7}; 15\right\}$.

$$3. \frac{1}{x^2+7x} = \frac{1}{x^2+7x+6}; \quad D(Y): \begin{cases} x^2+7x \neq 0 \\ x^2+7x+6 \neq 0 \end{cases};$$

$$x^2 + 7x = x^2 + 7x + 6;$$

$$0 = 6 \quad - \text{ЛОЖЬ.}$$

Ответ: \emptyset .

$$4. \frac{2x+1}{4x-1} = \frac{5(3x+5)}{8(6x-1)}. \quad D(Y): \begin{cases} 4x-1 \neq 0 \\ 6x-1 \neq 0 \end{cases}$$

$$8(2x+1)(6x-1) = 5(3x+5)(4x-1);$$

$$8(12x^2 + 4x - 1) = 5(12x^2 + 17x - 5);$$

$$96x^2 + 32x - 8 = 60x^2 + 85x - 25; \quad 36x^2 - 53x + 17 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{53 \pm \sqrt{2809 - 4 \cdot 36 \cdot 17}}{72} = \frac{53 \pm \sqrt{361}}{72} = \frac{53 \pm 19}{72} \in D(Y).$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{17}{36}; 1 \right\}.$$

$$5. 3x + x^2 = \left(\frac{x^2 + 3x}{2} \right)^2; \quad (x^2 + 3x) \left(1 - \frac{x^2 + 3x}{4} \right) = 0;$$

$$(x^2 + 3x)(4 - x^2 - 3x) = 0; \quad -(x^2 + 3x)(x^2 + 3x - 4) = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x = 0 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 1 \\ x = -4 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \{-4; -3; 0; 1\}.$$

$$6. \frac{(x+7)^2}{2} - \frac{x^2+5x}{3} = 6 + \frac{(5x+11)^2}{4}; \quad | \cdot 12$$

$$6(x+7)^2 - 4(x^2+5x) = 72 + 3(5x+11)^2;$$

$$6(x^2 + 14x + 49) - 4x^2 - 20x = 72 + 3(25x^2 + 110x + 121);$$

$$6x^2 + 84x + 294 - 4x^2 - 20x = 72 + 75x^2 + 330x + 363;$$

$$73x^2 + 266x + 141 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-133 \pm \sqrt{(133)^2 - 73 \cdot 141}}{73} = \frac{-133 \pm \sqrt{17689 - 10293}}{73} = \frac{-133 \pm \sqrt{7396}}{73} = \frac{-133 \pm 86}{73};$$

$$x_1 = \frac{-133 + 86}{73} = -\frac{47}{73}; \quad x_2 = \frac{-133 - 86}{73} = -\frac{219}{73} = -3.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -3; -\frac{47}{73} \right\}.$$

$$7. (2x+1)^2(5-x) = (x-1)^2(5-4x).$$

$$(4x^2 + 4x + 1)(5-x) - (x^2 - 2x + 1)(5-4x) = 0;$$

$$20x^2 + 20x + 5 - 4x^3 - 4x^2 - x - (5x^2 - 10x + 5 - 4x^3 + 8x^2 - 4x) = 0;$$

$$-4x^3 + 16x^2 + 19x + 5 + 4x^3 - 13x^2 + 14x - 5 = 0;$$

$$3x^2 + 33x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -11 \end{cases}.$$

О т в е т: $\{0; -11\}$.

$$8. \frac{x^3-8}{2x-4} = 12x-18;$$

$$D(Y): 2x-4 \neq 0; x \neq 2.$$

$$\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)} = 12x-18;$$

$$\frac{x^2+2x+4}{2} = 12x-18; \quad x^2 + 2x + 4 = 24x - 36;$$

$$x^2 - 22x + 40 = 0;$$

$$x_{1,2} = 11 \pm \sqrt{11^2 - 40} = 11 \pm 9; \quad \begin{cases} x = 20 \\ x = 2 \notin D(Y) \end{cases}.$$

О т в е т: $x = 20$.

$$9. \frac{x^4-625}{25-x^2} = 8x-90;$$

$$D(Y): 25-x^2 \neq 0;$$

$$\frac{(x^2-25)(x^2+25)}{25-x^2} = 8x-90;$$

$$(x+5)(x-5) \neq 0;$$

$$-x^2 - 25 = 8x - 90;$$

$$\begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq -5 \end{cases}.$$

$$x^2 + 8x - 65 = 0;$$

$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 + 65} = -4 \pm 9;$$

$$\begin{cases} x = 5 \notin D(Y) \\ x = -13 \end{cases}.$$

О т в е т: $x = -13$.

$$10. \frac{5x^2+7x+2}{4x^2-x-5} = \frac{(4x+5)^2}{16x^2-25};$$

$$D(Y): \begin{cases} 4x^2 - x - 5 \neq 0 \\ 16x^2 - 25 \neq 0 \end{cases}.$$

Решим уравнения:

а) $4x^2 - x - 5 = 0.$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{8} = \frac{1 \pm 9}{8}; \quad \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ x = -1 \end{cases}, \text{ значит } D(Y): \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq \pm \frac{5}{4} \end{cases},$$

тогда, зная, что $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $x_1; x_2$ — корни, разложим на множители:

$$4x^2 - x - 5 = 4\left(x - \frac{5}{4}\right)(x + 1) = (4x - 5)(x + 1).$$

б) $5x^2 + 7x + 2 = 0.$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{10} = \frac{-7 \pm 3}{10}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{2}{5} \end{cases}, \text{ итак}$$

$$5x^2 + 7x + 2 = 5\left(x + \frac{2}{5}\right)(x + 1) = (5x + 2)(x + 1).$$

$$\text{Итак } D(Y): \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq \pm \frac{5}{4} \end{cases};$$

$$\frac{(5x+2)(x+1)}{(4x-5)(x+1)} = \frac{(4x+5)^2}{(4x-5)(4x+5)}.$$

После сокращения имеем:

$$\frac{5x+2}{4x-5} = \frac{4x+5}{4x-5}, \text{ значит } 5x+2 = 4x+5;$$

$$x = 3 \in D(Y).$$

Ответ: $x = 3.$

Примечание. Разумеется, в окончательном виде это уравнение приводится к линейному, но для его решения нужно уметь решать квадратные уравнения и раскладывать на множители квадратный трехчлен.

Тренировочная работа 5

Решите уравнения:

1. $3x^2 - 7x + 3 = 0$.

2. $6x^2 + (3\sqrt{3} + 2)x + \sqrt{3} = 0$.

3. $3\sqrt{6}x^2 + (3 + \sqrt{6})x + 1 = 0$.

4. $\frac{(4x+3)^2}{5} - \frac{(5-x)^2}{4} = 1$.

5. $(4x+5)(3x-7) - (x+2)(4x-2) = 72 - 33x$.

6. $(x-0,5)(x^2-9) = (2x-1)(x-3)^2$.

7. $(x-1)(x+2)^3 - (x^2+4x+4)(x^2+x) + 8 = 0$.

8. $\frac{3x+7}{x-2} = \frac{6x-1}{3x+1}$.

9. $\frac{7-5x}{x+2} + \frac{2x-21}{x-2} + 8\frac{2}{3} = 0$.

10. $\frac{40}{12-x} + \frac{35}{12+x} = 6,5$.

11. $\frac{8x^3+27}{4x+6} = 5x+21$.

12. $\frac{16x^4-1}{16x^2-4} = 2,5-4x$.

13. $\frac{2x^2+3x-20}{6x^2+20x-16} = \frac{(6x+4)^2}{36x^2-16}$.

14. $\frac{7-2x}{x^2-5x-6} + \frac{3}{x^2-9x+18} = \frac{1}{3-x}$.

Решение тренировочной работы 5

$$1. 3x^2 - 7x + 3 = 0. \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 36}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

$$\text{О т в е т: } \left\{ \frac{7 - \sqrt{13}}{6}; \frac{7 + \sqrt{13}}{6} \right\}.$$

$$2. 6x^2 + (3\sqrt{3} + 2)x + \sqrt{3} = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-(3\sqrt{3} + 2) \pm \sqrt{(3\sqrt{3} + 2)^2 - 24\sqrt{3}}}{12} = \frac{-(3\sqrt{3} + 2) \pm (3\sqrt{3} - 2)}{12};$$

$$x_1 = \frac{-3\sqrt{3} - 2 + 3\sqrt{3} - 2}{12}; \quad x_1 = -\frac{1}{3};$$

$$x_2 = \frac{-3\sqrt{3} - 2 - 3\sqrt{3} + 2}{12}; \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{О т в е т: } \left\{ -\frac{1}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

$$3. 3\sqrt{6}x^2 + (3 + \sqrt{6})x + 1 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-(3 + \sqrt{6}) \pm \sqrt{(3 + \sqrt{6})^2 - 12\sqrt{6}}}{6\sqrt{6}} = \frac{-(3 + \sqrt{6}) \pm (3 - \sqrt{6})}{6\sqrt{6}};$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{6} + 3 - \sqrt{6}}{6\sqrt{6}} = -\frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{6} - 3 + \sqrt{6}}{6\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{О т в е т: } \left\{ -\frac{1}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{6} \right\}.$$

$$4. \frac{(4x+3)^2}{5} - \frac{(5-x)^2}{4} = 1 \quad | \cdot 20; \quad 4(4x+3)^2 - 5(5-x)^2 = 20;$$

$$4(16x^2 + 24x + 9) - 5(25 - 10x + x^2) = 20;$$

$$64x^2 + 96x + 36 - 125 + 50x - 5x^2 - 20 = 0; \quad 59x^2 + 146x - 109 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-73 \pm \sqrt{73^2 + 109 \cdot 59}}{59} = \frac{-73 \pm \sqrt{11760}}{59}.$$

$$\text{О т в е т: } \left\{ \frac{-73 - 28\sqrt{15}}{59}; \frac{-73 + 28\sqrt{15}}{59} \right\}.$$

$$5. (4x+5)(3x-7) - (x+2)(4x-2) = 72 - 33x.$$

$$12x^2 - 13x - 35 - (4x^2 + 6x - 4) - 72 + 33x = 0;$$

$$8x^2 + 14x - 103 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 824}}{8} = \frac{-7 \pm \sqrt{873}}{8} = \frac{-7 \pm 3\sqrt{97}}{8}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{-7 - 3\sqrt{97}}{8}; \frac{-7 + 3\sqrt{97}}{8} \right\}.$$

$$6. (x - 0,5)(x^2 - 9) = (2x - 1)(x - 3)^2.$$

$$(x - 0,5)(x + 3)(x - 3) - 2(x - 0,5)(x - 3)^2 = 0;$$

$$(x - 0,5)(x - 3)(x + 3 - 2(x - 3)) = 0;$$

$$(x - 0,5)(x - 3)(9 - x) = 0;$$

$$\begin{cases} x = 0,5 \\ x = 3 \\ x = 9 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \{0,5; 3; 9\}.$$

$$7. (x - 1)(x + 2)^3 - (x^2 + 4x + 4)(x^2 + x) + 8 = 0.$$

$$(x - 1)(x + 2)^3 - (x + 2)^2(x^2 + x) + 8 = 0;$$

$$(x + 2)^2((x - 1)(x + 2) - (x^2 + x)) + 8 = 0;$$

$$(x + 2)^2(x^2 + x - 2 - x^2 - x) + 8 = 0;$$

$$(x + 2)^2(-2) + 8 = 0;$$

$$(x + 2)^2 - 4 = 0;$$

$$(x + 2 + 2)(x + 2 - 2) = 0;$$

$$\begin{cases} x + 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = -4 \\ x = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \{0; -4\}.$$

$$8. \quad \frac{3x+7}{x-2} = \frac{6x-1}{3x+1}. \quad D(Y): \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ 3x+1 \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$9x^2 + 24x + 7 = 6x^2 - 13x + 2; \quad 3x^2 + 37x + 5 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-37 \pm \sqrt{37^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{6} = \frac{-37 \pm \sqrt{1309}}{6}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{-37 - \sqrt{1309}}{6}; \frac{-37 + \sqrt{1309}}{6} \right\}.$$

$$9. \quad \frac{7-5x}{x+2} + \frac{2x-21}{x-2} + 8\frac{2}{3} = 0 \quad | \cdot 3; \quad D(Y): x \neq \pm 2$$

$$\frac{3(7-5x)^{\frac{x-2}{x+2}}}{x+2} + \frac{3(2x-21)^{\frac{x+2}{x-2}}}{x-2} + 26\frac{|(x+2)(x-2)|}{(x+2)(x-2)} = 0;$$

$$3(7-5x)(x-2) + 3(2x-21)(x+2) + 26(x+2)(x-2) = 0;$$

$$3(-5x^2 + 17x - 14) + 3(2x^2 - 17x - 42) + 26x^2 - 104 = 0;$$

$$-15x^2 + 51x - 42 + 6x^2 - 51x - 126 + 26x^2 - 104 = 0;$$

$$17x^2 - 272 = 0; \quad x^2 - 16 = 0; \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases} \in D(Y).$$

$$\text{Ответ: } \{-4; 4\}.$$

$$10. \quad \frac{40}{12-x} + \frac{35}{12+x} = 6,5 \quad | \cdot 2;$$

$$\frac{80}{12-x} + \frac{70}{12+x} = 13 \quad D(Y): \begin{cases} 12-x \neq 0 \\ 12+x \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \neq 12 \\ x \neq -12 \end{cases};$$

$$80(12+x) + 70(12-x) = 13(12+x)(12-x);$$

$$960 + 80x + 840 - 70x - 13(144 - x^2) = 0;$$

$$13x^2 + 10x + 1800 - 1872 = 0; \quad 13x^2 + 10x - 72 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 13 \cdot 72}}{13} = \frac{-5 \pm 31}{13}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -2\frac{10}{13} \end{cases} \in D(Y).$$

$$\text{Ответ: } \left\{ 2; -2\frac{10}{13} \right\}.$$

$$11. \frac{8x^3+27}{4x+6} = 5x+21 \quad D(Y): 4x+6 \neq 0; x \neq -1,5.$$

$$\frac{(2x+3)(4x^2-6x+9)}{2(2x+3)} = 5x+21; 4x^2-6x+9 = 10x+42;$$

$$4x^2-16x-33=0;$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64+433}}{4} = \frac{8 \pm 14}{4}; \begin{cases} x = 5,5 \\ x = -1,5 \notin D(Y). \end{cases}$$

Ответ: $\{5,5\}$.

$$12. \frac{16x^4-1}{16x^2-4} = 2,5-4x; \quad D(Y): 16x^2-4 \neq 0; x \neq \pm \frac{1}{2}.$$

$$\frac{(4x^2+1)(4x^2-1)}{4(4x^2-1)} = 2,5-4x;$$

$$4x^2+1 = 10-16x; \quad 4x^2+16x-9=0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+36}}{4} = \frac{-8 \pm 10}{4}; \begin{cases} x = 0,5 \notin D(Y) \\ x = -4,5 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-4,5\}$

$$13. \frac{2x^2+3x-20}{6x^2+20x-16} = \frac{(6x+4)^2}{36x^2-16}; \quad D(Y): \begin{cases} 6x^2+20x-16 \neq 0 \\ 36x^2-16 \neq 0 \end{cases}.$$

Вначале разложим числитель и знаменатель на множители:

$$a) \quad 6x^2+20x-16=0;$$

$$3x^2+10x-8=0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{3} = \frac{-5 \pm 7}{3}; \begin{cases} x = -4 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Значит:

$$6x^2+20x-16 = 6(x+4)\left(x-\frac{2}{3}\right) = 2(x+4)(3x-2);$$

$$\text{б) } 2x^2 + 3x - 20 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{4} = \frac{-3 \pm 13}{4}; \quad \begin{cases} x = -4 \\ x = 2,5 \end{cases}.$$

$$\text{тогда } 2x^2 + 3x - 20 = 2(x+4)(x-2,5) = (x+4)(2x-5);$$

$$\text{в) } (6x+4)^2 = (2(3x+2))^2 = 4(3x+2)^2.$$

Теперь уравнение примет вид:

$$\frac{(2x-5)(x+4)}{2(x+4)(3x-2)} - \frac{4(3x+2)^2}{4(3x+2)(3x-2)} = 0, \text{ значит } D(Y): \begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq \pm \frac{2}{3} \end{cases};$$

$$\frac{2x-5}{2(3x-2)} - \frac{4(3x+2)}{4(3x-2)} = 0; \quad \frac{2x-5-2(3x+2)}{2(3x-2)} = 0;$$

$$2x-5-6x-4=0;$$

$$-4x-9=0;$$

$$x = -\frac{9}{4} \in D(Y).$$

Ответ: $x = -2,25$.

$$14. \frac{7-2x}{x^2-5x-6} + \frac{3}{x^2-9x+18} = \frac{1}{3-x}.$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \\ x \neq 6 \end{cases}.$$

$$1. \text{ а) } x^2 - 5x - 6 = (x-6)(x+1);$$

$$\text{б) } x^2 - 9x + 18 = (x-6)(x-3).$$

$$2. \frac{7-2x}{(x-6)(x+1)} + \frac{3}{(x-3)(x-6)} + \frac{1}{x-3} = 0.$$

$$(7-2x)(x-3) + 3(x+1) + (x-6)(x+1) = 0;$$

$$-2x^2 + 13x - 21 + 3x + 3 + x^2 - 5x - 6 = 0;$$

$$-x^2 + 11x - 24 = 0; \quad x^2 - 11x + 24 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 3 \notin D(Y) \\ x = 8 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 8$.

Решение квадратных уравнений и приводящихся к ним

Практикум 8

$$1. 2x^2 + 3x = 2(2 - \sqrt{6})^2 + 3(2 - \sqrt{6}).$$

$$2\left(x^2 - (2 - \sqrt{6})^2\right) + 3\left(x - (2 - \sqrt{6})\right) = 0;$$

$$2\left(x - (2 - \sqrt{6})\right)\left(x + (2 - \sqrt{6})\right) + 3\left(x - (2 - \sqrt{6})\right) = 0;$$

$$\left(x - (2 - \sqrt{6})\right)\left(2\left(x + (2 - \sqrt{6})\right) + 3\right) = 0;$$

$$\begin{cases} x = 2 - \sqrt{6} \\ 2\left(x + 2 - \sqrt{6}\right) + 3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2 - \sqrt{6} \\ x + 2 - \sqrt{6} = -1,5 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2 - \sqrt{6} \\ x = -3,5 + \sqrt{6} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \{2 - \sqrt{6}; -3,5 + \sqrt{6}\}.$$

$$2. \frac{6}{7x-21} - \frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{x^2-9} = 0.$$

$$D(Y): x \neq \pm 3.$$

$$\frac{6 \frac{|(x-3)(x+3)|}{7(x-3)}}{|(x-3)|} - \frac{1 \frac{|7(x+3)|}{(x-3)^2}}{|(x-3)|^2} + \frac{1 \frac{|7(x-3)|}{(x+3)(x-3)}}{|(x+3)(x-3)|} = 0;$$

$$\frac{6(x-3)(x+3) - 7(x+3) + 7(x-3)}{7(x-3)^2(x+3)} = 0;$$

$$6(x^2 - 9) - 7x - 21 + 7x - 21 = 0; \quad 6x^2 - 96 = 0; \quad x^2 - 16 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases} \in D(Y).$$

$$\text{Ответ: } \{-4; 4\}.$$

$$3. \frac{1}{x-4} - \frac{x+4}{2x^2+13x-45} - \frac{3}{20-13x+2x^2} = 0$$

$$\text{а) } 2x^2 - 13x + 20 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 160}}{4} = \frac{13 \pm 3}{4}; \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = 2,5 \end{cases}.$$

$$6) 2x^2 + 13x - 45 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 360}}{4} = \frac{-13 \pm 23}{4}; \quad \begin{cases} x = 2,5 \\ x = -9 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x-4} - \frac{x+4}{(2x-5)(x+9)} - \frac{3}{(x-4)(2x-5)} = 0; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 2,5 \\ x \neq 4 \\ x \neq -9 \end{cases}$$

$$(2x-5)(x+9) - (x+4)(x-4) - 3(x+9) = 0;$$

$$2x^2 + 13x - 45 - x^2 + 16 - 3x - 27 = 0; \quad x^2 + 10x - 56 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 4 \notin D(Y) \\ x = -14 \end{cases}$$

Ответ: $x = -14$.

$$4. \frac{2x+8}{3x+7} \left(\frac{x+4}{2x^2+x-3} - \frac{2x+3}{x^2+3x-4} \right) = \frac{6x-7}{2x+3}$$

$$1. \text{ а) } 2x^2 + x - 3 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$2x^2 + x - 3 = 2(x-1) \left(x + \frac{3}{2} \right) = (x-1)(2x+3);$$

$$\text{б) } x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1);$$

$$2. \frac{2(x+4)}{3x+7} \left(\frac{x+4}{(x-1)(2x+3)} - \frac{2x+3}{(x+4)(x-1)} \right) - \frac{6x-7}{2x+3} = 0; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1,5 \\ x \neq -4 \\ x \neq -2\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{2(x+4)}{3x+7} \cdot \frac{(x+4)^2 - (2x+3)^2}{(x-1)(2x+3)(x+4)} - \frac{6x-7}{2x+3} = 0;$$

$$\frac{2(x+4)(x+4+2x+3)(x+4-2x-3)}{(3x+7)(x-1)(2x+3)(x+4)} - \frac{6x-7}{2x+3} = 0;$$

$$\frac{2(3x+7)(1-x)}{(3x+7)(x-1)(2x+3)} - \frac{6x-7}{2x+3} = 0; \quad \frac{-2}{2x+3} - \frac{6x-7}{2x+3} = 0;$$

$$\frac{-2-6x+7}{2x+3} = 0; \quad \frac{5-6x}{2x+3} = 0; \quad x = \frac{5}{6} \in D(Y).$$

Ответ: $x = \frac{5}{6}$.

$$5. \frac{6x^2 - 5x - 6}{2x - 3} = \frac{4 - 9x^2}{3x - 2}. \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 1\frac{1}{2} \\ x \neq \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Можно сразу воспользоваться свойствами пропорции (произведение крайних равно произведению средних), но это технически утомительно, попробуем разложить числители дробей на множители, может удастся сократить.

$$а) 6x^2 - 5x - 6 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} = \frac{5 \pm 13}{12}; \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases};$$

$$6x^2 - 5x - 6 = 6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (2x - 3)(3x + 2);$$

$$б) 4 - 9x^2 = (2 - 3x)(2 + 3x);$$

$$\frac{\cancel{(2x-3)}(3x+2)}{\cancel{2x-3}} - \frac{\cancel{(2-3x)}(2+3x)}{\cancel{3x-2}} = 0;$$

$$3x + 2 + 2 + 3x = 0; \quad 6x + 4 = 0; \quad x = -\frac{2}{3} \in D(Y).$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{2}{3}.$$

$$6. \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} + \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} = 2x - \frac{1}{4x - 8}; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

Здесь рациональнее в начале выделить целые части в дробях левой части уравнения, пользуясь свойством

$$\frac{c \cdot a + b}{a} = \frac{c \cdot a}{a} + \frac{b}{a} = c + \frac{b}{a}, \text{ тогда:}$$

$$а) \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \frac{x^2 - x}{x - 1} + \frac{1}{x - 1} = \frac{x(x - 1)}{x - 1} + \frac{1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1};$$

$$б) \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} = \frac{x^2 - 3x}{x - 3} + \frac{1}{x - 3} = \frac{x(x - 3)}{x - 3} + \frac{1}{x - 3} = x + \frac{1}{x - 3}.$$

Уравнение примет вид:

$$x + \frac{1}{x-1} + x + \frac{1}{x-3} = 2x - \frac{1}{4x-8}; \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{4x-8} = 0;$$

$$\frac{1 \cdot |4(x-3)(x-2)|}{x-1} + \frac{1 \cdot |4(x-1)(x-2)|}{x-3} + \frac{1 \cdot |(x-1)(x-3)|}{4(x-2)} = 0;$$

$$\frac{4(x-3)(x-2) + 4(x-1)(x-2) + (x-1)(x-3)}{4(x-1)(x-2)(x-3)} = 0;$$

$$4(x^2 - 5x + 6) + 4(x^2 - 3x + 2) + x^2 - 4x + 3 = 0;$$

$$9x^2 - 36x + 35 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 9 \cdot 35}}{9} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 315}}{9} = \frac{18 \pm 3}{9}; \quad \left[\begin{array}{l} x = 2\frac{1}{3} \in D(Y) \\ x = 1\frac{2}{3} \in D(Y) \end{array} \right.$$

Ответ: $\left\{ 1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3} \right\}$.

$$7. \quad \frac{1}{1+2x} - \frac{2}{2+3x} + \frac{3}{3+4x} = \frac{4}{4+5x};$$

Перегруппируем:

$$\frac{3}{3+4x} - \frac{2}{2+3x} = \frac{4}{4+5x} - \frac{1}{1+2x};$$

$$\frac{3(2+3x) - 2(3+4x)}{(3+4x)(2+3x)} = \frac{4(1+2x) - (4+5x)}{(4+5x)(1+2x)};$$

$$\frac{6+9x-6-8x}{(3+4x)(2+3x)} = \frac{4+8x-4-5x}{(4+5x)(1+2x)}; \quad \frac{x}{(3+4x)(2+3x)} = \frac{3x}{(4+5x)(1+2x)};$$

а) $x = 0 \in D(Y)$;

б) $(4+5x)(1+2x) = 3(3+4x)(2+3x)$;

$$10x^2 + 13x + 4 = 36x^2 + 51x + 18; \quad 26x^2 + 38x + 14 = 0;$$

$$13x^2 + 19x + 7 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{361 - 364}}{26}; \quad x \in \emptyset.$$

Ответ: $x = 0$.

$$D(Y): \left\{ \begin{array}{l} x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq -\frac{2}{3} \\ x \neq -\frac{3}{4} \\ x \neq -\frac{4}{5} \end{array} \right.$$

$$8. \frac{3-x}{x^2+2x-3} = \frac{9-3x}{3x^2-2x-5}.$$

Здесь лучше разложить числитель на множители и попытаться вынести общий множитель.

$$\frac{3-x}{x^2+2x-3} - \frac{3(3-x)}{3x^2-2x-5} = 0; \quad (3-x) \left(\frac{1}{x^2+2x-3} - \frac{3}{3x^2-2x-5} \right) = 0, \text{ затем}$$

$$а) 3-x=0; \quad x=3; \quad б) \frac{1}{x^2+2x-3} - \frac{3}{3x^2-2x-5} = 0;$$

И здесь мы сначала приведем к общему знаменателю, и только потом разложим знаменатель на множители.

$$\frac{3x^2-2x-5-3(x^2+2x-3)}{(x^2+2x-3)(3x^2-2x-5)} = 0; \quad \frac{3x^2-2x-5-3x^2-6x+9}{(x^2+2x-3)(3x^2-2x-5)} = 0;$$

$$в) x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1);$$

$$г) 3x^2 - 2x - 5 = (x+1)(3x-5), \quad \text{тогда } D(Y):$$

$$\frac{4(1-2x)}{(x+3)(x-1)(x+1)(3x-5)} = 0;$$

$$д) 1-2x=0; \quad x=\frac{1}{2} \in D(Y). \quad е) x=3 \in D(Y).$$

$$\text{О т в е т: } \left\{ \frac{1}{2}; 3 \right\}.$$

$$9. \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

Весьма любопытный пример. Можно, конечно, стандартным образом привести к общему знаменателю и т. д. Но этот способ очень кропотлив и технически сложен. Попробуем взглянуть на этот пример с другой стороны. При внимательном подходе, очевидно, что слева имеем выражение не выше второй степени относительно x .

Напомним, что два квадратных трехчлена

$y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $y_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$ являются равными, только если: $a_1 = a_2$; $b_1 = b_2$; $c_1 = c_2$.

Известно так же, что любой квадратный трехчлен однозначно определяется тремя точками.

Пусть

$$а) \quad x = b, \text{ тогда } L = 0 + \frac{(b-c)(b-a)}{(b-c)(b-a)} + 0 = 1;$$

$$P = 1, \text{ отсюда следует, что } L = P;$$

$$б) \quad x = a, \text{ тогда } L = \frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} + 0 + 0 = 1;$$

$$P = 1, \text{ отсюда следует, что } L = P;$$

$$в) \quad x = c, \text{ тогда } L = 0 + 0 + \frac{(c-a)(c-b)}{(c-a)(c-b)} = 1;$$

$$P = 1, \text{ отсюда следует, что } L = P.$$

Значит для трех точек: $A(b;1)$, $B(a;1)$, $C(c;1)$, левая и правая части уравнения совпадают, тогда мы имеем дело с тождеством для любых допустимых значений букв a ; b ; c ($a \neq b$; $b \neq c$; $a \neq c$).

Ответ: любое x — есть решение этого уравнения при $a \neq b$; $b \neq c$; $a \neq c$.

$$10. \quad \frac{x+2}{x^2-7x} + \frac{x-2}{x^2-x-6} = \frac{2x-3,2}{x^2-5x-14}.$$

$$\frac{x+2}{x^2-7x} + \frac{x-2}{(x-3)(x+2)} - \frac{2x-3,2}{(x-7)(x+2)} = 0;$$

$$\frac{(x+2)^2(x-3) + (x-2)x(x-7) - (2x-3,2)x(x-3)}{x(x-7)(x-3)(x+2)} = 0; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq 7 \\ x \neq -2 \end{cases}.$$

$$(x^2 + 4x + 4)(x-3) + x(x^2 - 9x + 14) - x(2x^2 - 9,2x + 9,6) = 0;$$

$$x^3 + x^2 - 8x - 12 + x^3 - 9x^2 + 14x - 2x^3 + 9,2x^2 - 9,6x = 0;$$

$$1,2x^2 - 3,6x - 12 = 0; \quad x^2 - 3x - 10 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \notin D(Y) \end{cases}.$$

Ответ: $x = 5$.

Тренировочная работа 6

Решите уравнения

- $x^2 + 2(1 + \sqrt{8})x + 8\sqrt{2} = 0.$
- $(2x - 1)^2(x + 5) = (x + 1)^2(4x + 5).$
- $\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{8} - \frac{15}{88 + 32x}\right)^2 = 1.$
- $\frac{x+56}{9x^2-16} + \frac{1}{8-6x} = \frac{18}{3x^2+4x}.$
- $\frac{2x+2}{2x^2+9x+10} = \frac{x+1}{4x^2+4x-15}.$
- $\frac{14}{20-6x-2x^2} + \frac{x^2+4x}{x^2+5x} = \frac{x+3}{2-x} + 3.$
- $\left(\frac{4x+1}{2x^2+x-10} - \frac{4}{x^2-4}\right) \cdot \frac{4x^2+10x}{4x+9} + \frac{4}{x+2} = 2.$
- $\left(\frac{x^2+24}{4x^2-20x+25} + \frac{8}{5-2x}\right) : \left(\frac{1}{4x^2-20x+25} - \frac{2}{2x^2+x-15} + \frac{1}{(x+3)^2}\right) = 4.$
- $\frac{4}{x^2-16} - \frac{1}{x^2+8x+16} = \frac{10}{x^3-16x-4x^2+64}.$
- $\frac{x^2+x+3}{x+1} + \frac{x^2+3x+3}{x+3} = \frac{-3}{4x+8} + 2x.$
- $a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x.$
- $\frac{x+3}{x^2-5x-6} + \frac{x-1}{x^2+x-6} = \frac{2x-1,2}{x^2-3x-18}.$

Решение тренировочной работы 6

$$1. x^2 + 2(1 + \sqrt{8})x + 8\sqrt{2} = 0.$$

$$x_{1,2} = -(1 + \sqrt{8}) \pm \sqrt{(1 + \sqrt{8})^2 - 8\sqrt{2}} =$$

$$= -(1 + 2\sqrt{2}) \pm \sqrt{1 + 2 \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 - 8\sqrt{2}} = -(1 + 2\sqrt{2}) \pm (1 - 2\sqrt{2}); \quad \begin{cases} x = -4\sqrt{2} \\ x = -2 \end{cases}.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \{-2; -4\sqrt{2}\}.$$

$$2. (2x - 1)^2(x + 5) = (x + 1)^2(4x + 5).$$

$$(4x^2 - 4x + 1)(x + 5) - (x^2 + 2x + 1)(4x + 5) = 0;$$

$$4x^3 - 4x^2 + x + 20x^2 - 20x + 5 - 4x^3 - 8x^2 - 4x - 5x^2 - 10x - 5 = 0;$$

$$3x^2 - 33x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 11 \end{cases}.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \{0; 11\}.$$

$$3. \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{8} - \frac{15}{88 + 32x}\right)^2 = 1.$$

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{8} - \frac{15}{88 + 32x} - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{8} - \frac{15}{88 + 32x} + 1\right) = 0;$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{5}{8} - \frac{15}{88 + 32x} = 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{8} - \frac{15}{88 + 32x} = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{4(11 + 4x)x + 5(11 + 4x) - 15}{8(11 + 4x)} = 1 \\ \frac{4(11 + 4x)x + 5(11 + 4x) - 15}{8(11 + 4x)} = -1 \end{cases};$$

$$D(Y): \quad x \neq -2, 75;$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ x^2 + 6x + 8 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = -2 \\ x = -4 \end{cases} \in D(Y).$$

$$\text{ОТВЕТ: } \{-4; -3; -2; 1\}.$$

$$4. \frac{x+56}{9x^2-16} + \frac{1}{8-6x} = \frac{18}{3x^2+4x}.$$

$$\frac{x+56}{(3x+4)(3x-4)} - \frac{1}{2(3x-4)} - \frac{18}{x(3x+4)} = 0; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$2(x+56)x - x(3x+4) - 2 \cdot 18(3x-4) = 0;$$

$$2x^2 + 112x - 3x^2 - 4x - 108x + 144 = 0;$$

$$-x^2 + 144 = 0; \quad \begin{cases} x = 12 \\ x = -12 \end{cases} \in D(Y).$$

О т в е т : $\{-12; 12\}$.

$$5. \frac{2x+2}{2x^2+9x+10} = \frac{x+1}{4x^2+4x-15}.$$

$$(x+1) \left(\frac{2}{2x^2+9x+10} - \frac{1}{4x^2+4x-15} \right) = 0; \quad (x+1) \frac{8x^2+8x-30-2x^2-9x-10}{(2x^2+9x+10)(4x^2+4x-15)} = 0;$$

$$\frac{(x+1)(6x^2-x-40)}{(2x^2+9x+10)(4x^2+4x-15)} = 0.$$

а) $2x^2 + 9x + 10 = 0;$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81-80}}{4} = \frac{-9 \pm 1}{4}; \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = -2,5 \end{cases};$$

$$2x^2 + 9x + 10 = 2(x+2)(x+2,5) = (x+2)(2x+5);$$

б) $4x^2 + 4x - 15 = 0;$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{4} = \frac{-2 \pm 8}{4}; \quad \begin{cases} x = -2,5 \\ x = 1,5 \end{cases};$$

$$4x^2 + 4x - 15 = 4(x+2,5)(x-1,5) = (2x+5)(2x-3);$$

в) $6x^2 - x - 40 = 0;$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+960}}{12} = \frac{1 \pm 31}{12}; \quad \begin{cases} x = -2,5 \\ x = 2\frac{2}{3} \end{cases};$$

$$6x^2 - x - 40 = (3x-8)(2x+5);$$

$$\frac{(x+1)(3x-8)(2x+5)}{(x+2)(2x+5)(2x+5)(2x-3)} = 0$$

$$D(Y) : \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -2,5 \\ x \neq 1,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \in D(Y) \\ x = -2,5 \notin D(Y) \\ x = 2\frac{2}{3} \in D(Y) \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -1; 2\frac{2}{3} \right\}.$$

Можно было проще, если знать разложение.

$$(x+1) \left(\frac{2}{(x+2)(2x+5)} - \frac{1}{(2x+5)(2x-3)} \right) = 0;$$

$$(x+1) \frac{2(2x-3) - (x+2)}{(x+2)(2x+5)(2x-3)} = 0; \quad \frac{(x+1)(3x-8)}{(x+2)(2x+5)(2x-3)} = 0 \text{ и т. д.}$$

$$6. \quad \frac{14}{20-6x-2x^2} + \frac{x^2+4x}{x^2+5x} = \frac{x+3}{2-x} + 3.$$

$$-2x^2 - 6x + 20 = 0;$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0;$$

$$-2x^2 - 6x + 20 = -2(x+5)(x-2);$$

$$\frac{14}{-2(x+5)(x-2)} + \frac{x(x+4)}{x(x+5)} + \frac{x+3}{x-2} - 3 = 0;$$

$$D(Y) : \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -5 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$-7 + (x+4)(x-2) + (x+3)(x+5) - 3(x+5)(x-2) = 0;$$

$$-7 + x^2 + 2x - 8 + x^2 + 8x + 15 - 3x^2 - 9x + 30 = 0;$$

$$-x^2 + x + 30 = 0;$$

$$x^2 - x - 30 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ x = -5 \notin D(Y) \end{cases}$$

Ответ: $x = 6$.

$$7. \left(\frac{4x+1}{2x^2+x-10} - \frac{4}{x^2-4} \right) \cdot \frac{4x^2+10x}{4x+9} + \frac{4}{x+2} = 2.$$

$$а) 2x^2 + x - 10 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{4} = \frac{-1 \pm 9}{4}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -2,5 \end{cases}$$

$$2x^2 + x - 10 = 2(x-2)(x+2,5) = (x-2)(2x+5);$$

$$б) 4x^2 + x - 18 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+288}}{8} = \frac{-1 \pm 17}{8}; \quad \begin{cases} x = -\frac{9}{4} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$4x^2 + x - 18 = 4(x-2)\left(x + \frac{9}{4}\right) = (x-2)(4x+9);$$

$$\left(\frac{4x+1 \overset{|x+2}{\cancel{}}}{(x-2)(2x+5)} - \frac{4 \overset{|2x+5}{\cancel{}}}{(x+2)(x-2)} \right) \frac{2x(2x+5)}{4x+9} + \frac{4}{x+2} = 2;$$

$$\text{Тогда } D(Y): \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \neq -2\frac{1}{2}; \\ x \neq -2\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\frac{(4x+1)(x+2) - 4(2x+5)}{(x+2)(x-2)(2x+5)} \cdot \frac{2x(2x+5)}{4x+9} + \frac{4}{x+2} = 2;$$

$$\frac{(4x^2+9x+2-8x-20) \overset{\cancel{2x(2x+5)}}{}}{(x-2) \overset{\cancel{(2x+5)}}{}} (x+2)(4x+9)} + \frac{4}{x+2} = 2;$$

$$\frac{(4x^2+x-18)2x}{(x-2)(x+2)(4x+9)} + \frac{4}{x+2} = 2; \quad \frac{\overset{\cancel{(x-2)}}{}}{\overset{\cancel{(x-2)}}{}} \frac{\overset{\cancel{(4x+9)}}{}}{\overset{\cancel{(4x+9)}}{}} \frac{2x}{(x+2)(4x+9)} + \frac{4}{x+2} = 2;$$

$$\frac{2x}{x+2} + \frac{4}{x+2} = 2; \quad \frac{2x+4}{x+2} = 2; \quad 2 = 2 - \text{любое } x \in D(Y).$$

$$\text{Ответ: любое } x \text{ такое, что } \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \neq -2\frac{1}{2} \\ x \neq -2\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$8. \left(\frac{x^2+24}{4x^2-20x+25} + \frac{8}{5-2x} \right) : \left(\frac{1}{4x^2-20x+25} - \frac{2}{2x^2+x-15} + \frac{1}{(x+3)^2} \right) = 4.$$

$$2x^2 + x - 15 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{4} = \frac{-1 \pm 11}{4}; \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = 2,5 \end{cases} \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 2,5 \\ x \neq -3 \end{cases}.$$

$$2x^2 + x - 15 = 2(x+3)(x-2,5) = (x+3)(2x-5);$$

$$\left(\frac{x^2+24}{(2x-5)^2} - \frac{8}{2x-5} \right) : \left(\frac{1}{(2x-5)^2} - \frac{2}{(x+3)(2x-5)} + \frac{1}{(x+3)^2} \right) = 4;$$

$$\frac{x^2+24-8(2x-5)}{(2x-5)^2} : \left(\frac{1}{2x-5} - \frac{1}{x+3} \right)^2 = 4; \quad \frac{x^2-16x+64}{(2x-5)^2} : \left(\frac{x+3-2x+5}{(2x-5)(x+3)} \right)^2 = 4;$$

Дополнительное требование: $x \neq 8$ (чтобы было возможно деление) итак:

$$\frac{(x-8)^2}{(2x-5)^2} \cdot \left(\frac{(2x-5)(x+3)}{8-x} \right)^2 = 4; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 2,5 \\ x \neq -3 \\ x \neq 8 \end{cases}.$$

$$(a-b)^2 = (b-a)^2; \quad \frac{(x-8)^2(2x-5)^2(x+3)^2}{(2x-5)^2(x-8)^2} = 4;$$

$$(x+3)^2 = 4; \quad \begin{cases} x+3 = 2 \\ x+3 = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = -5 \end{cases} \in D(Y).$$

Ответ: $\{-1; -5\}$.

$$9. \frac{4}{x^2-16} - \frac{1}{x^2+8x+16} = \frac{10}{x^3-16x-4x^2+64}.$$

Разложим на множители:

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - 16x + 64 &= x^2(x-4) - 16(x-4) = \\ &= (x-4)(x^2-16) = (x-4)^2(x+4); \end{aligned}$$

$$\frac{4}{(x+4)(x-4)} - \frac{1}{(x+4)^2} - \frac{10}{(x-4)^2(x+4)} = 0; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq -4 \end{cases}.$$

$$4(x+4)(x-4) - (x-4)^2 - 10(x+4) = 0;$$

$$4(x^2 - 16) - (x^2 - 8x + 16) - 10x - 40 = 0;$$

$$4x^2 - 64 - x^2 + 8x - 16 - 10x - 40 = 0;$$

$$3x^2 - 2x - 120 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+360}}{3} = \frac{1 \pm 19}{3};$$

$$\begin{cases} x = 6\frac{2}{3} \\ x = -6 \end{cases} \in D(Y).$$

Ответ: $\left\{-6; 6\frac{2}{3}\right\}$.

10. $\frac{x^2+x+3}{x+1} + \frac{x^2+3x+3}{x+3} = \frac{-3}{4x+8} + 2x.$

Выделим целую часть в каждой из дробей.

$$\frac{x^2+x}{x+1} + \frac{3}{x+1} + \frac{x^2+3x}{x+3} + \frac{3}{x+3} = \frac{-3}{4(x+2)} + 2x;$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$\frac{x(x+1)}{x+1} + \frac{3}{x+1} + \frac{x(x+3)}{x+3} + \frac{3}{x+3} = \frac{-3}{4(x+2)} + 2x;$$

$$x + \frac{3}{x+1} + x + \frac{3}{x+3} = \frac{-3}{4(x+2)} + 2x;$$

$$\frac{3}{x+1} + \frac{3}{x+3} = \frac{-3}{4(x+2)}; \quad \frac{x+3+x+1}{(x+1)(x+3)} = \frac{-1}{4(x+2)};$$

$$(2x+4)4(x+2) + (x+1)(x+3) = 0;$$

$$8(x^2 + 4x + 4) + x^2 + 4x + 3 = 0;$$

$$8x^2 + 32x + 32 + x^2 + 4x + 3 = 0; \quad 9x^2 + 36x + 35 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 315}}{9} = \frac{-18 \pm 3}{9};$$

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ x = -\frac{7}{3} \end{cases} \in D(Y).$$

Ответ: $\left\{-2\frac{1}{3}; -1\frac{2}{3}\right\}$.

$$11. a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x.$$

Учитывая, что слева функция не выше второй степени, которая однозначно определяется тремя точками, проверим это. Пусть

$$a) \quad x = b, \text{ тогда } L = a \cdot 0 + b \frac{(b-c)(b-a)}{(b-c)(b-a)} + c \cdot 0 = b;$$

$$\Pi = b, \text{ отсюда следует, что } L = \Pi;$$

$$b) \quad x = a, \text{ тогда } L = a \frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} + b \cdot 0 + c \cdot 0 = a;$$

$$\Pi = a, \text{ отсюда следует, что } L = \Pi;$$

$$в) \quad x = c, \text{ тогда } L = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \frac{(c-a)(c-b)}{(c-a)(c-b)} = c;$$

$$\Pi = c, \text{ отсюда следует, что } L = \Pi.$$

Значит левая и правая части уравнения при трех значениях совпадают, тогда мы имеем дело с тождеством для любых допустимых значений букв a, b, c .

Ответ: любое x есть решение этого уравнения при $a \neq b; b \neq c; a \neq c$.

$$12. \frac{x+3}{x^2-5x-6} + \frac{x-1}{x^2+x-6} = \frac{2x-1,2}{x^2-3x-18}.$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq 6 \\ x \neq 2 \\ x \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases}.$$

$$\frac{x+3}{(x-6)(x+1)} + \frac{x-1}{(x+3)(x-2)} = \frac{2x-1,2}{(x-6)(x+3)};$$

$$(x+3)^2(x-2) + (x-1)(x+1)(x-6) = (2x-1,2)(x-2)(x+1);$$

$$(x^2 + 6x + 9)(x-2) + (x^2 - 1)(x-6) = (2x-1,2)(x^2 - x - 2);$$

$$x^3 + 4x^2 - 3x - 18 + x^3 - 6x^2 - x + 6 - 2x^3 + 3,2x^2 + 2,8x - 2,4 = 0;$$

$$1,2x^2 - 1,2x - 14,4 = 0 \quad (:1,2);$$

$$x^2 - x - 12 = 0; \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \notin D(Y) \end{cases}.$$

Ответ: $x = 4$.

Проверочная работа 4

Решите уравнения.

1. $\sqrt{3}x^2 - 2(\sqrt{3} + 2\sqrt{6})x + 8\sqrt{6} = 0.$

2. $(2x+1)^2(x-5) = (x-1)^2(4x-5).$

3. $\frac{27x^3+125}{3x+5} + 5 + 48x = 0.$

4. $\frac{2x^2+7x+6}{3x^2+4x-4} = \frac{(3x+2)^2}{9x^2-4}.$

5. $\left(\frac{15}{88-32x} - \frac{5}{8} + \frac{1}{2}x\right)^2 = 1.$

6. $\frac{4}{x^2-10x+25} + \frac{1}{25-x^2} = \frac{1}{x+5}.$

7. $\frac{2x-2}{2x^2-9x+10} = \frac{x-1}{4x^2-16x+15}.$

8. $\frac{9}{8x^3+12x^2-18x-27} - \frac{1}{4x^2-12x+9} = \frac{2}{9-4x^2}.$

9. $\frac{2x+13}{2x-5} : \left(\frac{24}{2x^2+3x-20} + \frac{8}{x^2-16} - \frac{3}{2x^2-13x+20}\right) = x+4.$

10. $\frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3}.$

11. $a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$

12. $\frac{x-4}{x^2+3x-10} + \frac{x}{x^2-3x-4} = \frac{2x-0,8}{x^2+x-20}.$

3

Уравнения, содержащие модуль

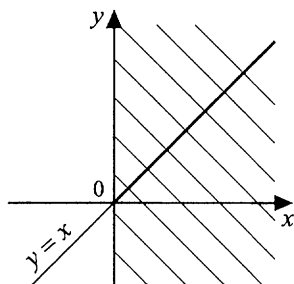
Определение 9. Модулем числа называется само число a , если оно положительно, и число $(-a)$, если оно отрицательно, т. е.

$$|a| = \begin{cases} a; & a \geq 0 \\ -a; & a < 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $y = |x|$. Из определения модуля следует, что функция $y = |x|$ состоит из двух частей:

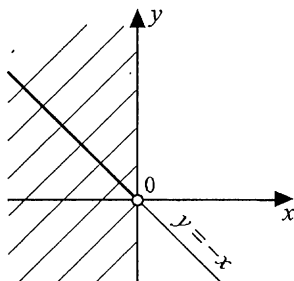
а) Пусть $x \geq 0$, тогда $y = x$.

При этом мы рассматриваем только ту часть прямой $y = x$, которая находится в правой полуплоскости.



б) Пусть $x < 0$. В этом случае

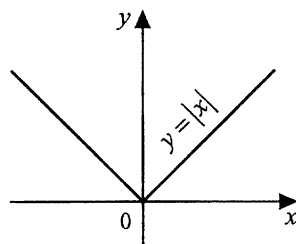
$|x| = -x$, следовательно $y = -x$, и мы рассматриваем только часть графика $y = -x$, находящуюся в левой полуплоскости.



значит график $y = |x|$ выглядит так:

Из графика $y = |x|$ очевидны следующие свойства:

- а) $|x| \geq 0$ для любых x ;
- б) $|x| = 0$ только при $x = 0$;
- в) $|x| < 0$ — решения нет, $x \notin \emptyset$.



Рассмотрим графическое решение уравнения $|x| = a$.

Чтобы было решение, необходимо

чтобы $a \geq 0$. Построим графики

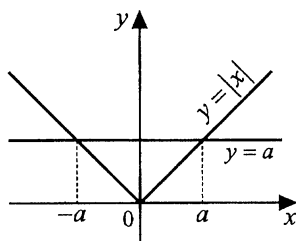
$y = |x|$ и $y = a$ на одном чертеже.

Очевидно, что при $a > 0$ прямая

$y = a$ пересекает график $y = |x|$

в двух точках с абсциссами $x = a$

и $x = -a$, т.е. из выражения $|x| = a$ следует, что $\begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases}$.



Пример 1. $|2x - 3| = 2$.

$$\begin{cases} 2x - 3 = 2 \\ 2x - 3 = -2 \end{cases}; \begin{cases} 2x = 5 \\ 2x = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 2,5 \\ x = 0,5 \end{cases}.$$

Ответ: $\{0,5; 2,5\}$.

Пример 2. $|6x^2 - 5x| = 1$.

$$\begin{cases} 6x^2 - 5x = 1 \\ 6x^2 - 5x = -1 \end{cases}; \begin{cases} 6x^2 - 5x - 1 = 0 \\ 6x^2 - 5x + 1 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{6} \\ x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1\right\}$.

Пример 3. $|2x^2 - 1| = x$.

Здесь уже необходим другой подход, потому что в правой части неизвестный x .

Действительно, уравнение может иметь решение только если $x \geq 0$. Так как по свойству модуля $|2x^2 - 1| \geq 0$, то, возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ (|2x^2 - 1|)^2 = x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ (2x^2 - 1)^2 = x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} 2x^2 - 1 = x \\ 2x^2 - 1 = -x \end{cases} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} 2x^2 - x - 1 = 0 \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}, \text{ значит } \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$.

Пример 4. $\frac{|x-2|-1}{2x-1} = 2$.

Используя определение, получим:

$$\begin{cases} \begin{cases} x-2 \geq 0 \ (|x-2| = x-2) \\ \frac{x-2-1}{2x-1} = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 < 0 \ (|x-2| = -(x-2)) \\ \frac{-(x-2)-1}{2x-1} = 2 \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} \begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{x-3}{2x-1} - 2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ \frac{-x+1}{2x-1} - 2 = 0 \end{cases} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{x-3-4x+2}{2x-1} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{-3x-1}{2x-1} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x \geq 2 \\ x = -\frac{1}{3} \quad \emptyset \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} ; x = \frac{3}{5} . \\
 \begin{cases} x < 2 \\ \frac{-x+1-4x+2}{2x-1} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x < 2 \\ \frac{-5x+3}{2x-1} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x < 2 \\ x = \frac{3}{5} \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{3}{5} \right\}$.

Подводя итоги, отметим:

- 1) $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$;
- 2) $|a| \geq 0, \forall a$;
- 3) $|a| = 0, a = 0$;
- 4) $|a| < 0$ — решения нет $a \in \emptyset$;
- 5) $|a| = |-a|$;
- 6) $|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b \\ a = -b \end{cases}$.

Практикум 9

1. $|x-2|=3$.
2. $|x^2-5x|=6$.
3. $|x-4|=2x$.
4. $|x^2-2x-3|=x-3$.
5. $|x+3|=x^2+2x-3$.
6. $\frac{|x-3|-2}{x+2}=2$.
7. $||x+3|-1|=2$.
8. $\frac{|x+3|}{x^2+5x+6}=1$.
9. $\frac{x+3}{|x^2+5x+6|}=2$.
10. $\frac{|x+2|-4}{|x-1|}=3$.
11. $\frac{|x|-3}{|x^2-5x-6|}=1$.
12. $|x+2|+2|x-1|-|x+1|=3$.

Решение практикума 9

1. $|x-2|=3$. Используем свойство $|a|=b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a=b \\ a=-b \end{cases}$:

Так как $3 > 0$, то $\begin{cases} x-2=3 \\ x-2=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=5 \\ x=-1 \end{cases}$.

Ответ: $\{-1; 5\}$.

2. $|x^2-5x|=6$. Действуем аналогично:

$\begin{cases} x^2-5x=6 \\ x^2-5x=-6 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-5x-6=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=6 \\ x=-1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$.

Ответ: $\{-1; 2; 3; 6\}$.

3. $|x-4|=2x$. По свойству $|a|=b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a=b \\ a=-b \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \\ \begin{cases} x-4=2x \\ x-4=-2x \end{cases} \end{cases} ; \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x=-4 \\ x=1\frac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{1\frac{1}{3}\right\}$.

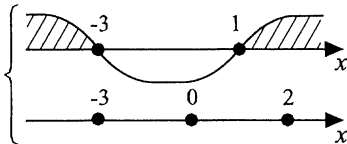
4. $|x^2-2x-3|=x-3$. Аналогично:

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ \begin{cases} x^2-2x-3=x-3 \\ x^2-2x-3=3-x \end{cases} \end{cases} ; \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ \begin{cases} x^2-3x=0 \\ x^2-x-6=0 \end{cases} \end{cases} ; \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ \begin{cases} x=0 \\ x=3 \\ x=3 \\ x=-2 \end{cases} \end{cases} ; x=3.$$

Ответ: $\{3\}$

5. $|x+3|=x^2+2x-3$. Аналогично:

$$\begin{cases} x^2+2x-3 \geq 0 \\ \begin{cases} x+3=x^2+2x-3 \\ x+3=-x^2-2x+3 \end{cases} \end{cases} ; \begin{cases} (x+3)(x-1) \geq 0 \\ \begin{cases} x^2+x-6=0 \\ x^2+3x=0 \end{cases} \end{cases}$$



Ответ: $\{-3; 2\}$.

6. $\frac{|x-3|-2}{x+2}=2$. По определению $|a| = \begin{cases} a; a \geq 0 \\ -a; a < 0 \end{cases}$, тогда:

$$\left\{ \begin{array}{l} x-3 \geq 0 \ (|x-3|=x-3) \\ \frac{x-3-2}{x+2} = 2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x \geq 3 \\ x-5 = 2x+4 \\ x \neq -2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x \geq 3 \\ x = -9 \\ x \neq -2 \end{array} \right. \quad \emptyset$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-3 < 0 \ (|x-3|=3-x) \\ \frac{3-x-2}{x+2} = 2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x < 3 \\ 1-x = 2x+4 \\ x \neq -2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x < 3 \\ x = -1 \\ x \neq -2 \end{array} \right. ; x = -1.$$

Ответ: $\{-1\}$.

$$7. \ ||x+3|-1|=2; \quad \left\{ \begin{array}{l} |x+3|-1=2 \\ |x+3|-1=-2 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} |x+3|=3 \\ |x+3|=-1 \ (\emptyset) \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+3=3 \\ x+3=-3 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ x=-6 \end{array} \right. .$$

Ответ: $\{-6; 0\}$.

$$8. \ \frac{|x+3|}{x^2+5x+6} = 1; \quad \left\{ \begin{array}{l} x+3 \geq 0 \ (|x+3|=x+3) \\ \frac{x+3}{x^2+5x+6} = 1 \\ x+3 < 0 \ (|x+3|=-x-3) \\ \frac{-(x+3)}{x^2+5x+6} = 1 \end{array} \right. ;$$

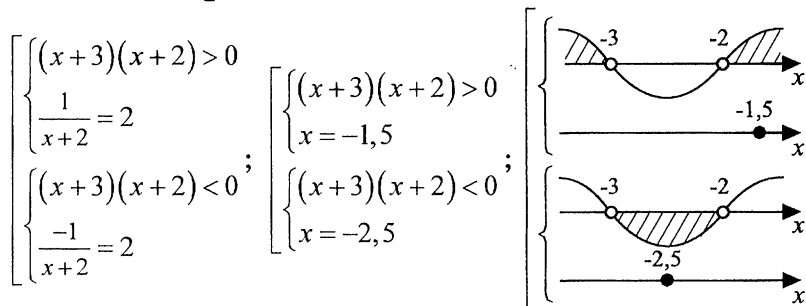
учтем, что $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x > -3 \\ \frac{1}{x+2} = 1 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x > -3 \\ 1 = x+2 \\ x \neq -2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x > -3 \\ x = -1 \\ x \neq -2 \end{array} \right. ; x = -1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < -3 \\ \frac{-1}{x+2} = 1 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x < -3 \\ -1 = x+2 \\ x \neq -2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x < -3 \\ x = -3 \\ x \neq -2 \end{array} \right. \quad \emptyset$$

Ответ: $x = -1$.

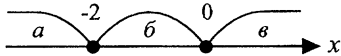
$$9. \frac{x+3}{|x^2+5x+6|} = 2; \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} x^2+5x+6 > 0 \left(|x^2+5x+6| = x^2+5x+6 \right) \\ \frac{x+3}{x^2+5x+6} = 2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2+5x+6 < 0 \left(|x^2+5x+6| = -x^2-5x-6 \right) \\ \frac{x+3}{-(x^2+5x+6)} = 2 \end{array} \right. \end{cases}$$



Ответ: $\{-2,5; -1,5\}$.

$$10. \frac{|x+2|-4}{|x|-1} = 3.$$

Разобьем числовую ось корнями (нулями) модулей $|x+2|=0$ и $|x|=0$ на три промежутка и на каждом отдельно решим уравнение:



$$a) \begin{cases} x < -2 \left(\begin{array}{l} x+2 < 0; |x+2| = -x-2 \\ x < 0; |x| = -x \end{array} \right); \begin{cases} x < -2 \\ -x-6 = -3x-3; \\ x \neq -1 \end{cases}; \begin{cases} x < -2 \\ x = 1,5 \quad \emptyset \\ x \neq -1 \end{cases} \\ \frac{-x-2-4}{-x-1} = 3 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x \geq -2 \left(\begin{array}{l} x+2 \geq 0; |x+2| = x+2 \\ x < 0; |x| = -x \end{array} \right); \begin{cases} x \geq -2 \\ x < 0 \\ x-2 = -3x-3; \\ x \neq -1 \end{cases}; \begin{cases} x \geq -2 \\ x < 0 \\ x = -0,25; \\ x \neq -1 \end{cases} \\ \frac{x+2-4}{-x-1} = 3 \end{cases}$$

$x = -0,25$.

$$в) \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \left(\begin{array}{l} x+2 \geq 0; |x+2|=x+2 \\ x \geq 0; |x|=x \end{array} \right); \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x-2=3x-3; \\ x \neq 1 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x=0,5; \\ x \neq 1 \end{array} \right. \\ \frac{x+2-4}{x-1}=3 \\ x=0,5. \end{array} \right.$$

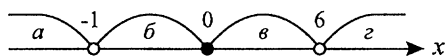
Ответ: $\{-0,25; 0,5\}$.

$$11. \frac{|x|-3}{|x^2-5x-6|}=1.$$

Разобьем числовую ось корнями (нулями) модулей на четыре части:

$$|x|=0; x=0.$$

$$|x^2-5x-6|=0; \begin{cases} x=6 \\ x=-1 \end{cases}.$$



На каждом участке решим преобразованное уравнение, раскрыв модули:

$$а) \left\{ \begin{array}{l} x < -1 \left(\begin{array}{l} |x|=-x \\ |x^2-5x-6|=x^2-5x-6 \end{array} \right) \\ \frac{-x-3}{x^2-5x-6}=1 \end{array} \right.$$

При этом, учитывая, что $t(x)=x^2-5x-6$ имеет

знаки ($t(x) \neq 0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} x < -1 \\ x^2-4x-3=0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x < -1 \\ x=2+\sqrt{7} \quad \emptyset \\ x=2-\sqrt{7} \end{array} \right.$$

$$б) \left\{ \begin{array}{l} 0 > x > -1 \left(\begin{array}{l} |x| = -x \\ |x^2 - 5x - 6| = -x^2 + 5x + 6 \end{array} \right); \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 > x > -1 \\ x^2 - 6x - 9 = 0 \end{array} \right.; \\ \frac{-x-3}{-x^2+5x+6} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 > x > -1 \\ x = 3 + 3\sqrt{2} \quad \emptyset. \\ x = 3 - 3\sqrt{2} \end{array} \right.$$

$$в) \left\{ \begin{array}{l} 6 > x \geq 0 \left(\begin{array}{l} |x| = x \\ |x^2 - 5x - 6| = -x^2 + 5x + 6 \end{array} \right); \quad \left\{ \begin{array}{l} 6 > x \geq 0 \\ x^2 - 4x - 9 = 0 \end{array} \right.; \\ \frac{x-3}{-x^2+5x+6} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 > x \geq 0 \\ x = 2 + \sqrt{13}; \quad x = 2 - \sqrt{13}. \\ x = 2 - \sqrt{13} \end{array} \right.$$

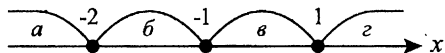
$$г) \left\{ \begin{array}{l} x > 6 \left(\begin{array}{l} |x| = x \\ |x^2 - 5x - 6| = x^2 - 5x - 6 \end{array} \right); \quad \left\{ \begin{array}{l} x > 6 \\ x^2 - 6x - 3 = 0 \end{array} \right.; \\ \frac{x-3}{x^2-5x-6} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 6 \\ x = 3 + 2\sqrt{3} \quad x = 3 + 2\sqrt{3}. \\ x = 3 - 2\sqrt{3} \end{array} \right.$$

Ответ: $\{2 + \sqrt{13}; 3 + 2\sqrt{3}\}$.

$$12. |x+2| + 2|x-1| - |x+1| = 3.$$

Разобьем корнями (нулями) подмодульных выражений числовую ось на промежутки и на каждом промежутке решим преобразованное уравнение, предварительно раскрыв модули. Затем объединим все ответы.



$$а) \begin{cases} x < -2 \begin{cases} |x+2| = -x-2 \\ |x-1| = -x+1 \\ |x+1| = -x-1 \end{cases} \\ -x-2-2x+2+x+1=3 \end{cases}; \begin{cases} x < -2 \\ -2x=2 \end{cases}; \begin{cases} x < -2 \\ x=-1 \end{cases} \quad \emptyset.$$

$$б) \begin{cases} -1 > x \geq -2 \begin{cases} |x+2| = x+2 \\ |x-1| = -x+1 \\ |x+1| = -x-1 \end{cases} \\ x+2-2x+2+x+1=3 \end{cases}; \begin{cases} 1 > x \geq -2 \\ 5=3 \end{cases}; \quad \emptyset.$$

$$в) \begin{cases} 1 > x \geq -1 \begin{cases} |x+2| = x+2 \\ |x-1| = 1-x \\ |x+1| = x+1 \end{cases} \\ x+2-2x+2-x-1=3 \end{cases}; \begin{cases} 1 > x \geq -1 \\ -2x=0 \end{cases}; \quad x=0.$$

$$г) \begin{cases} x \geq 1 \begin{cases} |x+2| = x+2 \\ |x-1| = x-1 \\ |x+1| = x+1 \end{cases} \\ x+2+2x-2-x-1=3 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x=4 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 1 \\ x=2 \end{cases}; \quad x=2.$$

Ответ: $\{0; 2\}$.

Тренировочная работа 7

Решите уравнения:

1. $|3x - 2| = 1.$

2. $|x^2 + 5x| = 6.$

3. $|x^2 - 2| = x.$

4. $\left| \frac{x-3}{x^2+2x-3} \right| = 1.$

5. $\frac{x^2+5|x|+6}{x^2-9} = 2.$

6. $|x+1| = x^2 - 2x - 3.$

7. $\frac{|x-3|-1}{x+2} = 1.$

8. $||x+4|-2| = 1.$

9. $\frac{x^2-9}{|x^2-5x+6|} = 1.$

10. $\frac{|x+2|-4}{|x|-1} = 2.$

11. $\frac{|x^2+5x+6|}{|x|-3} = 1.$

12. $|x-2| - 2|x+1| + |2x+5| = 3.$

Решение тренировочной работы 7

$$1. |3x-2|=1; \begin{cases} 3x-2=1 \\ 3x-2=-1 \end{cases}; \begin{cases} 3x=1+2 \\ 3x=-1+2 \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{3}; 1 \right\}.$$

$$2. |x^2+5x|=6; \begin{cases} x^2+5x=6 \\ x^2+5x=-6 \end{cases}; \begin{cases} x^2+5x-6=0 \\ x^2+5x+6=0 \end{cases}; \begin{cases} x=-6 \\ x=1 \\ x=-2 \\ x=-3 \end{cases};.$$

$$\text{Ответ: } \{-6; -3; -2; 1\}.$$

$$3. |x^2-2|=x; \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-2=x \\ x^2-2=-x \end{cases}; \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x-2=0 \\ x^2+x-2=0 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 0 \\ x=2 \\ x=-1 \\ x=-2 \\ x=1 \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \{1; 2\}.$$

$$4. \left| \frac{x-3}{x^2+2x-3} \right|=1; \begin{cases} \frac{x-3}{x^2+2x-3}=1 \\ \frac{x-3}{x^2+2x-3}=-1 \end{cases}; \begin{cases} x-3=x^2+2x-3 \\ x-3=-x^2-2x+3 \\ x \neq -3 \\ x \neq 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x^2+x=0 \\ x^2+3x-6=0 \\ x \neq -3 \\ x \neq 1 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=\frac{-3+\sqrt{33}}{2} \\ x=\frac{-3-\sqrt{33}}{2} \\ x \neq -3 \\ x \neq 1 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=\frac{-3+\sqrt{33}}{2} \\ x=\frac{-3-\sqrt{33}}{2} \end{cases} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{3+\sqrt{33}}{2}; -1; 0; \frac{-3+\sqrt{33}}{2} \right\}.$$

$$5. \frac{x^2+5|x|+6}{x^2-9} = 2; \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 (|x|=x) \\ \frac{x^2+5x+6}{x^2-9} = 2 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \frac{(x+2)(x+3)}{(x+3)(x-3)} = 2 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \frac{x+2}{x-3} = 2 \end{array} \right. ;$$

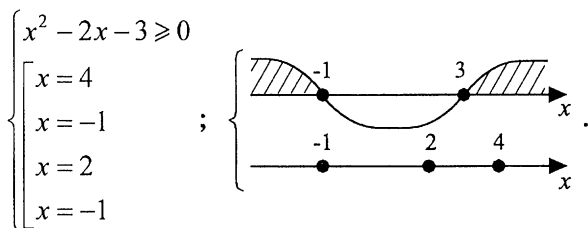
$$\left\{ \begin{array}{l} x < 0 (|x|=-x) \\ \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = 2 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ \frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = 2 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ \frac{x-2}{x+3} = 2 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x+2 = 2(x-3) \\ x \neq 3 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x+2 = 2x-6 \\ x \neq 3 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x = 8 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ x-2 = 2(x+3) \\ x \neq -3 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ x-2 = 2x+6 \\ x \neq -3 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ x = -8 \end{array} \right. .$$

Ответ: $\{-8; 8\}$.

$$6. |x+1| = x^2 - 2x - 3; \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x+1 = x^2 - 2x - 3 \\ x+1 = -x^2 + 2x + 3 \end{array} \right. \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x - 4 = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$



Ответ: $\{-1; 4\}$

$$7. \frac{|x-3|-1}{x+2} = 1; \quad \left\{ \begin{array}{l} x-3 \geq 0 (|x-3|=x-3) \\ \frac{x-3-1}{x+2} = 1 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-3 < 0 (|x-3|=3-x) \\ \frac{3-x-1}{x+2} = 1 \end{array} \right. ;$$

$$\left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x - 4 = x + 2 \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ -4 = 2 \end{array} \right. \quad \emptyset$$

$$\left[\begin{array}{l} x < 3 \\ 2 - x = x + 2 \\ x \neq -2 \end{array} \right. \quad ; \quad \left[\begin{array}{l} x < 3 \\ x = 0 \\ x \neq -2 \end{array} \right. \quad ; \quad x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

$$8. \quad \left| |x+4| - 2 \right| = 1; \quad \left[\begin{array}{l} |x+4| - 2 = 1 \\ |x+4| - 2 = -1 \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} |x+4| = 3 \\ |x+4| = 1 \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x+4 = 3 \\ x+4 = -3 \\ x+4 = 1 \\ x+4 = -1 \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -7 \\ x = -3 \\ x = -5 \end{array} \right. .$$

Ответ: $\{-7; -5; -3; -1\}$.

$$9. \quad \left| \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} \right| = 1; \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 > 0 \quad (|x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6) \\ \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = 1 \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 < 0 \quad (|x^2 - 5x + 6| = -x^2 + 5x - 6) \\ \frac{x^2 - 9}{-(x^2 - 5x + 6)} = 1 \end{array} \right. ;$$

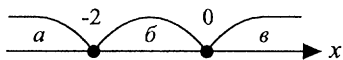
$$\left[\begin{array}{l} (x-2)(x-3) > 0 \\ \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)} = 1 \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} (x-2)(x-3) > 0 \\ x+3 = x-2 \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} (x-2)(x-3) > 0 \\ 3 = -2 \end{array} \right. \quad \emptyset$$

$$\left[\begin{array}{l} (x-2)(x-3) < 0 \\ \frac{(x-3)(x+3)}{-(x-3)(x-2)} = 1 \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} (x-2)(x-3) < 0 \\ x+3 = 2-x \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} (x-2)(x-3) < 0 \\ x = -0,5 \end{array} \right. ;$$

$$\left[\begin{array}{l} (-0,5 - 2)(-0,5 - 3) < 0 \\ x = -0,5 \end{array} \right. ; \quad x \in \emptyset.$$

Ответ: \emptyset .

10. $\frac{|x+2|-4}{|x|-1} = 2$. Найдем корни модулей $|x+2|=0$ и $|x|=0$:



Корни (нули) разделят числовую ось на три интервала, на каждом из которых рассмотрим уравнение:

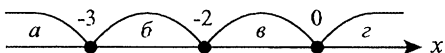
$$\text{а) } \begin{cases} x+2 < 0 \\ |x+2| = -(x+2) \\ |x| = -x \end{cases}; \begin{cases} x+2 < 0 \\ \frac{x+6}{x+1} = 2 \end{cases}; \begin{cases} x+2 < 0 \\ x+6 = 2x+2 \end{cases}; \\
 \begin{cases} x < -2 \\ x = 4 \end{cases} \quad \emptyset.$$

$$\text{б) } \begin{cases} 0 > x \geq -2 \\ |x+2| = x+2 \\ |x| = -x \end{cases}; \begin{cases} 0 > x \geq -2 \\ x-2 = -2x-2 \end{cases}; \begin{cases} 0 > x \geq -2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

$$\text{в) } \begin{cases} x \geq 0 \\ |x+2| = x+2 \\ |x| = x \end{cases}; \begin{cases} x \geq 0 \\ x-2 = 2x-2 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 0 \end{cases}; \quad x = 0.$$

Ответ: $\{0\}$.

11. $\frac{|x^2+5x+6|}{|x|-3} = 1$. $|x^2+5x+6|=0$, $|x|=0$; $\begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$.



$$y = x^2 + 5x + 6$$



$$a) \left\{ \begin{array}{l} x < -3 \left(\begin{array}{l} x^2 + 5x + 6 > 0; |x^2 + 5x + 6| = x^2 + 5x + 6 \\ x < 0; |x| = -x \end{array} \right); \\ \frac{x^2 + 5x + 6}{-x - 3} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < -3 \\ \frac{(x+3)(x+2)}{-(x+3)} = 1 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x < -3 \\ -(x+2) = 1 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x < -3 \\ x = -3 \end{array} \right. \emptyset.$$

$$б) \left\{ \begin{array}{l} -3 \leq x < -2 \left(\begin{array}{l} x^2 + 5x + 6 \leq 0; |x^2 + 5x + 6| = -x^2 - 5x - 6 \\ x < 0; |x| = -x \end{array} \right); \\ \frac{-(x^2 + 5x + 6)}{-x - 3} = 1 \end{array} \right.;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -3 \leq x < -2 \\ \frac{(x+2)(x+3)}{x+3} = 1 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} -3 \leq x < -2 \\ x+2 = 1 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} -3 \leq x < -2 \\ x = -1 \end{array} \right. \emptyset.$$

$$в) \left\{ \begin{array}{l} -2 \leq x < 0 \left(\begin{array}{l} x^2 + 5x + 6 \geq 0; |x^2 + 5x + 6| = x^2 + 5x + 6 \\ x < 0; |x| = -x \end{array} \right); \\ \frac{x^2 + 5x + 6}{-x - 3} = 1 \end{array} \right.;$$

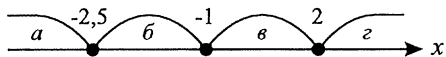
$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \leq x < 0 \\ -(x+2) = 1 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} -2 \leq x < 0 \\ x = -3 \end{array} \right. \emptyset.$$

$$г) \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \left(\begin{array}{l} x^2 + 5x + 6 > 0; |x^2 + 5x + 6| = x^2 + 5x + 6 \\ x \geq 0; |x| = x \end{array} \right); \\ \frac{x^2 + 5x + 6}{x - 3} = 1 \end{array} \right.;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x^2 + 5x + 6 = x - 3; \\ x \neq 3 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 9 = 0 \end{array} \right. \quad D < 0 \quad \emptyset.$$

Ответ: \emptyset .

$$12. |x-2| - 2|x+1| + |2x+5| = 3; \quad \begin{cases} |x-2|=0 \\ |x+1|=0 \\ |2x+5|=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \\ x=-2,5 \end{cases}$$



$$a) \begin{cases} x < -2,5 \begin{cases} (2x+5 < 0; |2x+5| = -2x-5) \\ (x+1 < 0; |x+1| = -x-1) \\ (x-2 < 0; |x-2| = 2-x) \end{cases} \\ 2-x+2x+2-2x-5=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < -2,5 \\ -x=4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x < -2,5 \\ x = -4 \end{cases}; \quad x = -4.$$

$$б) \begin{cases} -2,5 \leq x < -1 \begin{cases} (|2x+5| = 2x+5) \\ (|x+1| = -x-1) \\ (|x-2| = 2-x) \end{cases} \\ 2-x+2x+2+2x+5=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} -2,5 \leq x < -1 \\ 3x = -6 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -2,5 \leq x < -1 \\ x = -2 \end{cases}; \quad x = -2.$$

$$в) \begin{cases} -1 \leq x < 2 \begin{cases} (|2x+5| = 2x+5) \\ (|x+1| = x+1) \\ (|x-2| = 2-x) \end{cases} \\ 2-x-2x-2+2x+5=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ x = 2 \end{cases} \quad \emptyset.$$

$$г) \begin{cases} x \geq 2 \begin{cases} (|2x+5| = 2x+5) \\ (|x+1| = x+1) \\ (|x-2| = x-2) \end{cases} \\ x-2-2x-2+2x+5=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 2 \end{cases}; \quad x = 2.$$

Ответ: $\{-4; -2; 2\}$.

Проверочная работа 5

Решите уравнения:

1. $|3x+2|=1.$

2. $|x^2-3|=2x.$

3. $\left|\frac{x-4}{x^2+3x-4}\right|=1.$

4. $\frac{x^2-5|x|+6}{x^2-9}=2.$

5. $|x+1|=x^2-3x-4.$

6. $\frac{|x+3|-2}{|x|-2}=1.$

7. $||x-5|-3|=2x.$

8. $\frac{|x^2-5x+6|}{|x|-2}=1.$

9. $||x^2-5x|-6|=x^2-2x-3.$

10. $|x^2+3x|=|9-x^2|+2.$

11. $\left|x-1\right|-\frac{6}{x}=x+2.$

12. $\left|x+1\right|-\frac{6}{x}=2-x.$

Метод подстановки

Практикум 10

1. $x^4 + 7x^2 - 8 = 0$.

Положим $x^2 = t$ ($t \geq 0$);

$$t^2 + 7t - 8 = 0; \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = -8 \notin [0; \infty) \end{cases}; \quad x^2 = 1; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Ответ: $\{1; -1\}$.

Примечание. Такие уравнения называют **биквадратными**.

2. $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$.

Положим: $x^2 - x = t$. Тогда уравнение примет вид обычного квадратного уравнения.

$$t^2 - 8t + 12 = 0.$$

$$\begin{cases} t = 6 \\ t = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - x = 6 \\ x^2 - x = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$3. (x^2 + 5x + 2)(x^2 + 5x - 1) = 28.$$

Пусть $x^2 + 5x + 2 = t$, тогда $x^2 + 5x - 1 = t - 3$.

Уравнение примет вид:

$$t(t-3) = 28; \quad t^2 - 3t - 28 = 0.$$

$$\begin{cases} t = 7 \\ t = -4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 5x + 2 = 7 \\ x^2 + 5x + 2 = -4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 5x - 5 = 0 \\ x^2 + 5x + 6 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{-5+3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-5-3\sqrt{5}}{2} \\ x = -3 \\ x = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{5+3\sqrt{5}}{2}; -\frac{5-3\sqrt{5}}{2}; -3; -2 \right\}.$$

$$4. \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{2}{x}\right) - 3 = 0.$$

Положим $x + \frac{2}{x} = t$, тогда $t^2 + 2t - 3 = 0$.

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + \frac{2}{x} = 1 \\ x + \frac{2}{x} = -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - x + 2 = 0; & D < 0; & x \in \emptyset; \\ x^2 + 3x + 2 = 0; & & x_1 = -1; & x_2 = -2. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \{-2; -1\}.$$

$$5. 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9 = 0.$$

Положим $t = x + \frac{1}{x}$, тогда $t^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$,

$$\text{т. е. } t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2,$$

$$\text{значит } x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

Уравнение примет вид

$$7t - 2(t^2 - 2) - 9 = 0; \quad 2t^2 - 7t + 5 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{5}{2}; \\ t = 1 \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}; \\ x + \frac{1}{x} = 1 \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 2 = 0; \\ x^2 - x + 1 = 0; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{1}{2}; \\ D < 0; \quad x \in \emptyset. \end{array}$$

О т в е т: $\left\{ 2; \frac{1}{2} \right\}$.

6. $(x^2 - x + 1)^2 - 10(x - 4)(x + 3) - 109 = 0$.

$$(x^2 - x + 1)^2 - 10(x^2 - x - 12) - 109 = 0.$$

Положим $x^2 - x + 1 = t$; $x^2 - x - 12 = t - 13$.

Уравнение примет вид:

$$t^2 - 10(t - 13) - 109 = 0; \quad t^2 - 10t + 21 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} t = 7 \\ t = 3 \end{array} \right. .$$

Тогда $\left[\begin{array}{l} x^2 - x + 1 = 7 \\ x^2 - x + 1 = 3 \end{array} \right. ; \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 6 = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{array} \right. ; \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -2 \\ x = 2 \\ x = -1 \end{array} \right. .$

О т в е т: $\{-2; -1; 2; 3\}$.

7. $2(x^2 - 6) - \frac{3}{x^2 - 6} = 5$.

Пусть $x^2 - 6 = t$,

тогда $2t - \frac{3}{t} = 5 \quad (t \neq 0)$;

$$2t^2 - 5t - 3 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-\frac{1}{2} \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x^2-6=3 \\ x^2-6=-\frac{1}{2} \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x^2=9 \\ x^2=5,5 \end{array} \right. ; \left. \begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \\ x=\sqrt{5,5} \\ x=-\sqrt{5,5} \end{array} \right. .$$

Ответ: $\{-3; 3; -\sqrt{5,5}; \sqrt{5,5}\}$.

$$8. \frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{1}{x^2-2x+3} = \frac{9}{2(x^2-2x+4)}.$$

Пусть $x^2 - 2x + 2 = t$,

тогда $x^2 - 2x + 3 = t + 1$; $x^2 - 2x + 4 = t + 2$.

Уравнение примет вид:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} = \frac{9}{2(t+2)}; \quad D(Y): \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq -1 \\ t \neq -2 \end{cases}$$

$$2(t+2)(t+1) + 2t(t+2) = 9t(t+1);$$

$$2(t^2 + 3t + 2) + 2t^2 + 4t = 9t^2 + 9t; \quad 5t^2 - t - 4 = 0.$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{10} = \frac{1 \pm 9}{10}; \quad \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{4}{5} \end{array} \in D(Y); \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 2 = 1 \\ x^2 - 2x + 2 = -\frac{4}{5} \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ 5x^2 - 10x + 14 = 0; D < 0; x \in \emptyset \end{array} \right.$$

тогда $(x-1)^2 = 0$; $x=1$.

Ответ: $x=1$.

$$9. (2x^2 + 3x + 1)(2x^2 - 5x + 1) = 9x^2.$$

Так как $x=0$ корнем уравнения не является,

то разделим обе части уравнения на x^2 :

$$\frac{2x^2+3x+1}{x} \cdot \frac{2x^2-5x+1}{x} = 9; \left(2x+3+\frac{1}{x}\right)\left(2x-5+\frac{1}{x}\right) = 9;$$

положим $2x+\frac{1}{x}+3=t$, тогда $2x+\frac{1}{x}-5=t-8$ уравнение

примет вид: $t(t-8)=9$; $t^2-8t-9=0$;

$$\left[\begin{array}{l} t=9 \\ t=-1 \end{array} \right]; \left[\begin{array}{l} 2x+\frac{1}{x}+3=9 \\ 2x+\frac{1}{x}+3=-1 \end{array} \right]; \left[\begin{array}{l} x=\frac{3+\sqrt{7}}{2} \\ x=\frac{3-\sqrt{7}}{2} \\ x=\frac{-2+\sqrt{2}}{2} \\ x=\frac{-2-\sqrt{2}}{2} \end{array} \right].$$

Ответ: $\left\{ -\frac{2+\sqrt{2}}{2}; \frac{3-\sqrt{7}}{2}; \frac{-2+\sqrt{2}}{2}; \frac{3+\sqrt{7}}{2} \right\}$.

10. $\frac{16}{(x+6)(x-1)} - \frac{20}{(x+2)(x+3)} = 1.$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq -6 \\ x \neq -3 \\ x \neq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Можно решать стандартным способом, тогда мы получим уравнение четвертой степени, которое решать достаточно трудно. Попробуем поступить иначе:

Так как $(x+6)(x-1)=x^2+5x-6$, а $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$,

положим $x^2+5x+6=t$, тогда $x^2+5x-6=t-12$

и уравнение примет вид: $\frac{16}{t-12} - \frac{20}{t} = 1$ ($t \neq 0; t \neq 12$)

$$16t - 20(t-12) = t^2 - 12t; t^2 - 8t - 240 = 0; \left[\begin{array}{l} t=20 \\ t=-12 \end{array} \right];$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x+6=20 \\ x^2+5x+6=-12 \end{array} \right]; \left[\begin{array}{l} x^2+5x-14=0 \\ x^2+5x+18=0, D < 0 \end{array} \right]; \left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=2 \end{array} \right] \in D(Y).$$

Ответ: $\{-7; 2\}$.

$$11. 6\left(\frac{x^4+81}{9x^2}\right) - 7\left(\frac{x^2-9}{3x}\right) = 36.$$

Так как $\frac{x^2-9}{3x} = \frac{x^2}{3x} - \frac{9}{3x} = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$, положим $\frac{x}{3} - \frac{3}{x} = t$, тогда:

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{9}{x^2} - 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{3}{x} = \frac{x^4+81}{9x^2} - 2 = t^2, \text{ значит } \frac{x^4+81}{9x^2} = t^2 + 2.$$

Уравнение относительно t примет следующий вид:

$$6(t^2 + 2) - 7t = 36; 6t^2 - 7t - 24 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{8}{3} \\ t = -\frac{3}{2} \end{array} \right], \text{ значит } \left[\begin{array}{l} \frac{x}{3} - \frac{3}{x} = \frac{8}{3} \\ \frac{x}{3} - \frac{3}{x} = -\frac{3}{2} \end{array} \right]; \left[\begin{array}{l} x^2 - 8x - 9 = 0 \\ 2x^2 + 9x - 18 = 0 \end{array} \right]; \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = -1 \\ x = -6 \\ x = 1,5 \end{array} \right].$$

Ответ: $\{-6; -1; 1,5; 9\}$.

$$12. 20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0.$$

Так как $x = \pm 2$ и $x = \pm 1$ корнями не являются, то дом-

ножим обе части уравнения на $\frac{x^2-1}{x^2-4}$:

$$20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 \cdot \frac{x^2-1}{x^2-4} - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \cdot \frac{x^2-1}{x^2-4} + 48 = 0;$$

$$20\frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)} - 5\frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x-2)} + 48 = 0.$$

Положим $\frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = t$,

тогда $20t - \frac{5}{t} + 48 = 0$;

$$20t^2 + 48t - 5 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{-24 \pm \sqrt{576 + 100}}{20} = \frac{-24 \pm 26}{20}; \left[\begin{array}{l} t = 0,1 \\ t = -2,5 \end{array} \right];$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{10} \\ \frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = -\frac{5}{2} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} 10(x^2 - 3x + 2) = x^2 + 3x + 2 \\ 2(x^2 - 3x + 2) = -5(x^2 + 3x + 2) \end{array} \right];$$

$$\left[\begin{array}{l} 9x^2 - 33x + 18 = 0 \\ 7x^2 + 9x + 14 = 0 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 11x + 6 = 0 \\ 7x^2 + 9x + 14 = 0 \end{array} \right];$$

$$\left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{6} \\ x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 392}}{14} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{2}{3} \\ \emptyset \end{array} \right].$$

Ответ: $\left\{ \frac{2}{3}; 3 \right\}$.

Тренировочная работа 8

Решите уравнения:

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.
2. $(x^2 + x)^2 - 6(x^2 + x) + 8 = 0$.
3. $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) = 10$.
4. $\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - 2\left(x - \frac{2}{x}\right) = 3$.
5. $3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x - \frac{2}{x}\right) = 13$.
6. $(x^2 + 5x + 7)^2 - (x + 2)(x + 3) = 1$.
7. $2(x^2 + 2x) - \frac{3}{x^2 + 2x} = 5$.
8. $\frac{1}{x^2 + 3x + 3} - \frac{9}{2(x^2 + 3x + 4)} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = 0$.
9. $\frac{2x^2 - 5x + 4}{3x - 2} + \frac{15x - 10}{2x^2 - 5x + 4} = 6$.
10. $\frac{1}{x - 3 + \frac{8}{x}} - \frac{1}{x + 2 + \frac{8}{x}} = \frac{5}{24}$.
11. $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$.
12. $x^3 - 7x^2 - 21x + 27 = 0$.
13. $\frac{6}{(x-1)(x-2)} + \frac{8}{(x+1)(x-4)} = 1$.
14. $(x^2 + x + 1)^4 - 10x^2(x^2 + x + 1)^2 + 9x^4 = 0$.

Решение тренировочной работы 8

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

$$x^2 = t \quad (t \geq 0); \quad t^2 - 5t + 4 = 0.$$

$$\begin{cases} t=4 \\ t=1 \end{cases}; \begin{cases} x^2=4 \\ x^2=1 \end{cases}; \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-2; -1; 1; 2\}$.

2. $(x^2 + x)^2 - 6(x^2 + x) + 8 = 0$.

Пусть $x^2 + x = t$, тогда $t^2 - 6t + 8 = 0$;

$$\begin{cases} t=4 \\ t=2 \end{cases}; \begin{cases} x^2 + x = 4 \\ x^2 + x = 2 \end{cases}; \begin{cases} x^2 + x - 4 = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases};$$

а) $x^2 + x - 4 = 0$; $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$;

б) $x^2 + x - 2 = 0$; $x_3 = -2$; $x_4 = 1$.

Ответ: $\left\{ -\frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}; -2; 1 \right\}$.

3. $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) = 10$.

Полагая, что $x^2 - 5x + 2 = t$, тогда $x^2 - 5x - 1 = t - 3$.

$$t(t-3) = 10; \quad t^2 - 3t - 10 = 0.$$

$$\begin{cases} t=5 \\ t=-2 \end{cases}; \begin{cases} x^2 - 5x + 2 = 5 \\ x^2 - 5x + 2 = -2 \end{cases}; \begin{cases} x^2 - 5x - 3 = 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases};$$

а) $x^2 - 5x - 3 = 0$; $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$;

б) $x^2 - 5x + 4 = 0$; $x_3 = 4$; $x_4 = 1$.

Ответ: $\left\{ \frac{5-\sqrt{37}}{2}; \frac{5+\sqrt{37}}{2}; 1; 4 \right\}$.

$$4. \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - 2\left(x - \frac{2}{x}\right) = 3.$$

Пусть $x - \frac{2}{x} = t$, тогда $t^2 - 2t - 3 = 0$;

$$\begin{cases} t=3 \\ t=-1 \end{cases}; \begin{cases} x - \frac{2}{x} = 3 \\ x - \frac{2}{x} = -1 \end{cases}; \begin{cases} x^2 - 3x - 2 = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases};$$

а) $x^2 - 3x - 2 = 0$; $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$;

б) $x^2 + x - 2 = 0$ $x_3 = -2$ $x_4 = 1$

О т в е т: $\left\{ \frac{3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2}; -2; 1 \right\}$.

$$5. 3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x - \frac{2}{x}\right) = 13.$$

Пусть $x - \frac{2}{x} = t$, тогда $x^2 - 2x \cdot \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = t^2$,

значит $x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4$.

Тогда уравнение примет вид

$$3(t^2 + 4) - 2t = 13;$$

$$3t^2 - 2t - 1 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{1 \pm 2}{3}; \begin{cases} t=1 \\ t=-\frac{1}{3} \end{cases};$$

а) $x - \frac{2}{x} = 1$; $x^2 - x - 2 = 0$; $\begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$;

б) $x - \frac{2}{x} = -\frac{1}{3}$; $3x^2 + x - 6 = 0$; $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+72}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{73}}{6}$.

О т в е т: $\left\{ -\frac{1 + \sqrt{73}}{6}; \frac{-1 + \sqrt{73}}{6}; -1; 2 \right\}$.

$$6. (x^2 + 5x + 7)^2 - (x+2)(x+3) = 1.$$

Преобразуем уравнение.

$$(x^2 + 5x + 7)^2 - (x^2 + 5x + 6) - 1 = 0.$$

Тогда пусть $x^2 + 5x + 7 = t$, значит $x^2 + 5x + 6 = t - 1$.

Уравнение приобретает более простой вид.

$$t^2 - (t-1) - 1 = 0;$$

$$t^2 - t = 0;$$

$$\begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}; \begin{cases} x^2 + 5x + 7 = 0; D < 0 \\ x^2 + 5x + 7 = 1 \end{cases};$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0; \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \end{cases}.$$

О т в е т : $\{-3; -2\}$.

$$7. 2(x^2 + 2x) - \frac{3}{x^2 + 2x} = 5.$$

Пусть $x^2 + 2x = t$ ($t \neq 0$).

Тогда $2t - \frac{3}{t} = 5$; $2t^2 - 5t - 3 = 0$;

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}; \begin{cases} t=3 \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases} \in D(Y); \begin{cases} x^2 + 2x = 3 \\ x^2 + 2x = -\frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ 2x^2 + 4x + 1 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = \frac{-2 + \sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

О т в е т : $\left\{-3; 1; -\frac{2+\sqrt{2}}{2}; -\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right\}$.

$$8. \frac{1}{x^2+3x+3} - \frac{9}{2(x^2+3x+4)} + \frac{1}{x^2+3x+2} = 0.$$

Пусть $x^2 + 3x + 2 = t$,

тогда $x^2 + 3x + 3 = t + 1$; $x^2 + 3x + 4 = t + 2$.

После подстановки уравнение примет более простой вид.

$$\frac{1}{t+1} - \frac{9}{2(t+2)} + \frac{1}{t} = 0; \quad D(Y): \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq -1; \\ t \neq -2 \end{cases}$$

$$2t(t+2) - 9t^2 - 9t + 2t^2 + 6t + 4 = 0; \quad -5t^2 + t + 4 = 0;$$

$$5t^2 - t - 4 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{10} = \frac{1 \pm 9}{10}; \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{4}{5} \end{cases} \in D(Y);$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 = 1 \\ x^2 + 3x + 2 = -\frac{4}{5} \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 3x + 1 = 0 \\ 5x^2 + 15x + 14 = 0; D < 0 \end{cases}.$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

$$9. \frac{2x^2-5x+4}{3x-2} + \frac{15x-10}{2x^2-5x+4} = 6.$$

Преобразуем уравнение.

$$\frac{2x^2-5x+4}{3x-2} + \frac{5(3x-2)}{2x^2-5x+4} = 6.$$

Теперь понятно, что если положить $\frac{2x^2-5x+4}{3x-2} = t$,

то упростим вид уравнения. $D(Y): t \neq 0$;

$$t + \frac{5}{t} = 6, \text{ тогда } t^2 - 6t + 5 = 0; \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = 5 \end{cases};$$

$$а) \frac{2x^2 - 5x + 4}{3x - 2} = 1.$$

$$2x^2 - 5x + 4 = 3x - 2; \quad 2x^2 - 8x + 6 = 0;$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0; \quad \begin{cases} x = 3; \\ x = 1 \end{cases}$$

$$б) \frac{2x^2 - 5x + 4}{3x - 2} = 5;$$

$$2x^2 - 5x + 4 = 15x - 10; \quad 2x^2 - 20x + 14 = 0; \quad x^2 - 10x + 7 = 0;$$

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 7} = 5 \pm \sqrt{18} = 5 \pm 3\sqrt{2}.$$

Очевидно, что $2x^2 - 5x + 4 \neq 0$; ($D < 0$)

$$3x - 2 = 0 \quad x = \frac{2}{3}, \text{ значит } D(Y) \quad x \neq \frac{2}{3}.$$

Все корни подходят.

О т в е т : $\{5 - 3\sqrt{2}; 5 + 3\sqrt{2}; 1; 3\}$.

$$10. \frac{1}{x - 3 + \frac{8}{x}} - \frac{1}{x + 2 + \frac{8}{x}} = \frac{5}{24}.$$

$$\text{Пусть } x + \frac{8}{x} + 2 = t; \quad x + \frac{8}{x} - 3 = t - 5.$$

После подстановки уравнение приобретет более простой вид.

$$\frac{1}{t-5} - \frac{1}{t} = \frac{5}{24}; \quad D(Y): \begin{cases} t \neq 5; \\ t \neq 0; \end{cases}$$

$$24t - 24(t - 5) = 5t(t - 5); \quad 5t^2 - 25t - 120 = 0;$$

$$t^2 - 5t - 24 = 0; \quad \begin{cases} t = 8 \\ t = -3 \end{cases} \in D(Y);$$

$$а) \quad x + \frac{8}{x} + 2 = 8; \quad x^2 - 6x + 8 = 0; \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases} \quad (x \neq 0);$$

$$б) \quad x + \frac{8}{x} + 2 = -3; \quad x^2 + 5x + 8 = 0; \quad D < 0.$$

О т в е т : $\{2; 4\}$.

Такого вида уравнение может быть более завуалированным, например:

$$\frac{x}{x^2-3x+8} - \frac{x}{x^2+2x+8} = \frac{5}{24}.$$

Необходимо увидеть, что можно вынести x в знаменателе и сократить, учитывая, что $x=0$ не является решением данного уравнения.

Общий вид такого уравнения

$$\frac{ax}{px^2+nx+g} + \frac{bx}{px^2+mx+g} = c, \text{ тогда } t = px + \frac{g}{x}.$$

11. $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0.$

Здесь можно решить обычным разложением на множители.

$$x^4 - (25x^2 - 60x + 36) = 0; \quad (x^2)^2 - (5x - 6)^2 = 0,$$

$$\text{тогда } (x^2 + 5x - 6)(x^2 - 5x + 6) = 0.$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ x = 1 \\ x = 3 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-6; 1; 2; 3\}.$

12. $x^3 - 7x^2 - 21x + 27 = 0.$

Аналогично можно решить и данное уравнение, зная, что $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$

$$(x^3 + 27) - (7x^2 + 21x) = 0; \quad (x+3)(x^2 - 3x + 9) - 7x(x+3) = 0;$$

$$(x+3)(x^2 - 3x + 9 - 7x) = 0; \quad (x+3)(x^2 - 10x + 9) = 0;$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x = 9 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-3; 1; 9\}.$

$$13. \frac{6}{(x-1)(x-2)} + \frac{8}{(x+1)(x-4)} = 1.$$

$$]x^2 - 3x + 2 = t, \text{ тогда } x^2 - 3x - 4 = t - 6; \frac{6}{t} + \frac{8}{t-6} = 1;$$

$$6t - 36 + 8t = t^2 - 6t; t^2 - 20t + 36 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 18 \\ t = 2 \end{array} \right]; \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 18 \\ x^2 - 3x + 2 = 2 \end{array} \right]; \left[\begin{array}{l} x = \frac{3 + \sqrt{73}}{2} \\ x = \frac{3 - \sqrt{73}}{2} \\ x = 3 \\ x = 0 \end{array} \right].$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{3 - \sqrt{73}}{2}; 0; 3; \frac{3 + \sqrt{73}}{2} \right\}.$$

$$14. (x^2 + x + 1)^4 - 10x^2(x^2 + x + 1)^2 + 9x^4 = 0; (:x^4)$$

$$\left(\frac{x^2 + x + 1}{x} \right)^4 - 10 \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} \right)^2 + 9 = 0.$$

$$\text{Пусть } \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} \right)^2 = t; \left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = 1 \end{array} \right].$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2 + x + 1}{x} = 3 \\ \frac{x^2 + x + 1}{x} = -3 \\ \frac{x^2 + x + 1}{x} = 1 \\ \frac{x^2 + x + 1}{x} = -1 \end{array} \right]; \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 + 4x + 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{array} \right]; \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 + \sqrt{3} \\ x = -2 - \sqrt{3} \\ x = -1 \\ \emptyset \end{array} \right].$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -1; -2 - \sqrt{3}; 1; -2 + \sqrt{3} \right\}.$$

Применение теории делимости для решения уравнений

Практикум 11

1. $2x^2 - 3x - 5 = 0$; $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$;

$$f(-1) = 2(-1)^2 - 3(-1) - 5 = 0, \text{ значит}$$

$$f(x) : (x+1) \text{ (: - символ кратности).}$$

Разделим уголком:

а) $2x^2 : (x) = 2x$ - запишем под уголком.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 3x - 5 & \underline{x+1} \\ 2x & \text{Умножим} \\ & 2x \text{ на } (x+1). \end{array}$$

б) $2x(x+1) = 2x^2 + 2x$ - запишем под выражением

$$2x^2 - 3x - 5.$$

$$2x^2 - 3x - 5 \quad \underline{x+1}$$

$$\underline{2x^2 + 2x} \quad 2x$$

в) Вычтем $(2x^2 - 3x - 5) - (2x^2 + 2x) = -5x - 5$.

$$2x^2 - 3x - 5 \quad \underline{x+1}$$

$$\underline{2x^2 + 2x} \quad 2x$$

$$-5x - 5$$

г) $(-5x) : x = -5$.

$$2x^2 - 3x - 5 \quad \underline{x+1}$$

$$\underline{2x^2 + 2x} \quad 2x - 5$$

$$-5x - 5$$

д) $-5 \cdot (x+1) = -5x - 5$. Подставим под $-5x - 5$.

$$2x^2 - 3x - 5 \quad \underline{x+1}$$

$$\underline{2x^2 + 2x} \quad 2x - 5$$

$$-5x - 5$$

$$\underline{-5x - 5}$$

е) $(-5x-5)-(-5x-5)=0$, значит остаток равен нулю.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3x - 5 \quad |x+1 \\ \underline{2x^2 + 2x} \quad 2x - 5 \\ -5x - 5 \\ \underline{-5x - 5} \\ 0 \end{array}$$

Процесс деления закончен.

$$\begin{cases} x+1=0 \\ 2x-5=0 \end{cases}$$

Ответ: $\{-1; 2,5\}$.

Если вы были внимательны, то деление происходит как с числами:

$$\begin{array}{r} 534 \quad | \quad 3 \\ \underline{3} \quad 178 \\ 23 \\ \underline{21} \\ 24 \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

2. $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$.

$$f(-1) = -1 + 2 - 1 = 0.$$

а) $(x^3 + 2x^2) - (x^3 + x^2) = x^2$;

б) $(x^2 - 1) - (x^2 + x) = -x - 1$.

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 1 \quad | \quad x+1 \\ \underline{x^3 + x^2} \quad x^2 + x - 1 \\ x^2 - 1 \\ \underline{x^2 + x} \\ -x - 1 \\ \underline{-x - 1} \\ 0 \end{array}$$

т. е. $x^3 + 2x^2 - 1 = (x+1)(x^2 + x - 1)$; $x^2 + x - 1 = 0$; $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\left\{-1; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

$$3. \quad x^4 + 5x^2 - 6 = 0.$$

$$f(1) = 1 + 5 - 6 = 0; \text{ т. е. } (x^4 + 5x^2 - 6) : (x - 1).$$

Разделим.

$$\begin{array}{r} x^4 + 5x^2 - 6 \\ \underline{x^4 - x^3} \end{array} \quad \begin{array}{r} | \quad x - 1 \\ \hline x^3 + x^2 + 6x + 6 \end{array}$$

$$x^3 + 5x^2$$

$$\underline{x^3 - x^2}$$

$$6x^2 - 6$$

$$\underline{6x^2 - 6x}$$

$$6x - 6$$

$$\underline{6x - 6}$$

$$0$$

$$a) \quad (x^4 + 5x - 6) - (x^4 - x^3) = x^3 + 5x^2 - 6;$$

$$б) \quad (x^3 + 5x^2 - 6) - (x^3 - x^2) = 6x^2 - 6;$$

$$в) \quad (6x^2 - 6) - (6x^2 - 6x) = 6x - 6.$$

$$\text{Пусть } \varphi(x) = x^3 + x^2 + 6x + 6;$$

$$\varphi(-1) = -1 + 1 - 6 + 6 = 0;$$

$$\text{т. е. } \varphi(x) : (x + 1).$$

Разделим уравнение.

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 + 6x + 6 \\ \underline{x^3 + x^2} \end{array} \quad \begin{array}{r} | \quad x + 1 \\ \hline x^2 + 6 \end{array}$$

$$6x + 6$$

$$\underline{6x + 6}$$

$$0$$

$$; \quad x^2 + 6 = 0; \quad x \in \emptyset$$

$$(x^3 + x^2 + 6x + 6) - (x^3 + x^2) = 6x + 6.$$

$$\text{О т в е т: } \{1; -1\}.$$

Примечания.

Теорема 1. Если $x = a$ корень уравнения $f(x) = 0$, где $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ и $a_0; a_1; a_2; \dots; a_n \in \mathbb{Z}$ — целые числа, то $f(x) : (x - a)$ ($:$ — символ кратности).

Теорема 2. Для приведенного уравнения с целыми коэффициентами $\varphi(x) = 0$, где $\varphi(x) = x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_n$, если $\varphi(k) = 0$, то

а) $\varphi(x) : (x - k)$; б) $b_n : k$,

где $k \in \mathbb{Z}$.

То есть, если есть целые корни, то они являются делителями свободного члена.

4. $x^3 - x^2 - 8x + 6 = 0$. Если есть целые корни, то они являются делителями числа b , т. е. $d = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$.

$$f(-1) \neq 0;$$

$$f(1) \neq 0;$$

$$f(-2) = -8 - 4 + 16 + 6 \neq 0;$$

$$f(2) = 8 - 4 - 16 + 6 \neq 0;$$

$$f(3) = 27 - 9 - 24 + 6 = 0 \quad (\text{т. е. } f(x) : (x - 3)).$$

$$\text{а) } (x^3 - x^2) - (x^3 - 3x^2) = 2x^2; \quad x^3 - x^2 - 8x + 6 \quad \left| \begin{array}{l} x - 3 \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\text{б) } (2x^2 - 8x) - (2x^2 - 6x) = -2x. \quad \begin{array}{r} x^3 - 3x^2 \\ \hline 2x^2 - 8x + 6 \\ \hline 2x - 6x \\ \hline -2x + 6 \\ \hline -2x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0;$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 2}.$$

Ответ: $\{3; -1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}\}$.

$$5. \quad x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0;$$

$$d = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24$$

$$f(1) = 1 - 10 + 35 - 50 + 24 = 0;$$

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 \quad \left| \quad x - 1 \right.$$

$$\underline{x^4 - \quad x^3} \qquad \qquad x^3 - 9x^2 + 26x - 24$$

$$-9x^3 + 35x^2$$

$$\underline{-9x^3 + 9x^2}$$

$$26x^2 - 50x$$

$$\underline{26x^2 - 26x}$$

$$-24x + 24$$

$$\underline{-24x + 24}$$

$$0$$

$$\varphi(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24;$$

$$\varphi(1) \neq 0;$$

$$\varphi(-1) \neq 0;$$

$$\varphi(2) = 8 - 36 + 52 - 24 = 0, \text{ значит}$$

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \quad \left| \quad x - 2 \right.$$

$$\underline{x^3 - 2x^2} \qquad \qquad x^2 - 7x + 12$$

$$-7x^2 + 26x$$

$$\underline{-7x^2 + 14x}$$

$$12x - 24$$

$$\underline{12x - 24}$$

$$0$$

$x^2 - 7x + 12 = 0$ можно уже решать обычным образом.

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ответ: $\{1; 2; 3; 4\}$.

$$6. 2x^3 + 7x^2 - 28x + 12 = 0.$$

Здесь уже другая идея.

Теорема 3. Если для уравнения $f(x) = 0$,

где $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ и $a_0; a_1; a_2; \dots; a_n \in \mathbb{Z}$.

$$f\left(\frac{p}{g}\right) = 0 \quad (\text{т.е. } \frac{p}{g} \text{ - корень - рациональное число,}$$

где $g \in \mathbb{N}$, а $p \in \mathbb{Z}$ и $(p; g) = 1$, что означает, что числа p и g взаимно просты, т.е. не имеют общих делителей, кроме единицы), то $a_0 : g$ и $a_n : p$.

Тогда в уравнении $2x^3 + 7x^2 - 28x + 12 = 0$

для p - возможны значения $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12$,

для g - возможны значения $1; 2$,

тогда корнями могут быть числа

$$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12; \pm \frac{1}{2} \text{ и т. д.}$$

Подбором можно убедиться, что $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Значит $f(x) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Разделим.

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 7x^2 - 28x + 12 \quad \left| \quad x - \frac{1}{2} \right. \\ \hline 2x^3 - x^2 \phantom{\left| \quad x - \frac{1}{2} \right.} \\ \hline 8x^2 - 28x \phantom{\left| \quad x - \frac{1}{2} \right.} \\ 8x^2 - 4x \phantom{\left| \quad x - \frac{1}{2} \right.} \\ \hline -24x + 12 \phantom{\left| \quad x - \frac{1}{2} \right.} \\ -24x + 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Значит $2x^2 + 8x - 24 = 0$, т.е. $x^2 + 4x - 12 = 0$; $\begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \end{cases}$.

Ответ: $\left\{-6; \frac{1}{2}; 2\right\}$.

$$7. \frac{1+9x+27x^2+27x^3}{9x^2+6x+1} - \frac{60x^3+293x^2-44x-45}{5+16x+3x^2} = 10-17x.$$

Разложим на множители числитель и знаменатель дроби, может впоследствии это поможет сократить эти дроби или уж в крайнем случае, очень важно для нахождения общего знаменателя.

$$а) 1+9x+27x^2+27x^3 = (1+3x)^3;$$

$$б) 9x^2+6x+1 = (3x+1)^2;$$

$$в) 3x^2+16x+5 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-15}}{3} = \frac{-8 \pm 7}{3}; \quad \begin{cases} x = -5 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$3x^2+16x+5 = 3(x+5)\left(x+\frac{1}{3}\right) = (x+5)(3x+1);$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq -\frac{1}{3} \\ x \neq -5 \end{cases}$$

Интересно, делится ли $60x^3+293x^2-44x-45$ на $(x+5)$?

Проверить $f(-5)$ — долго, попробуем «в лоб».

$$\begin{array}{r} 60x^3+293x^2-44x-45 \quad | \quad x+5 \\ \underline{60x^3+300x^2} \qquad \qquad \quad 60x^2-7x-9 \\ \qquad \qquad \qquad \quad -7x^2-44x \\ \qquad \qquad \qquad \quad \underline{-7x^2-35x} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \quad -9x-45 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \quad \underline{-9x-45} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \quad 0 \end{array}$$

Теперь аналогично попробуем разделить в лоб.

$60x^2 - 7x - 9$ на $3x + 1$

$$\begin{array}{r}
 60x^2 - 7x - 9 \quad | \quad 3x + 1 \\
 \underline{60x^2 + 20x} \quad \quad 20x - 9 \\
 27x - 9 \\
 \underline{27x - 9} \\
 0
 \end{array}$$

Значит если бы догадались разделить раньше, то можно было разделить сразу на $3x^2 + 16x + 5$:

$$\frac{60x^3 + 293x^2 - 44x - 45}{3x^2 + 16x + 5} = 20x - 9.$$

Уравнение приобретает вид:

$$\frac{(1+3x)^3}{(1+3x)^2} - \frac{(20x-9)(3x+1)(x+5)}{(3x+1)(x+5)} = 10 - 17x, \text{ тогда}$$

$$3x + 1 - (20x - 9) = 10 - 17x; \quad 10 = 10 \text{ — истина,}$$

т. е. решение $\forall x \in D(Y)$.

О т в е т: любое $\begin{cases} x \neq -\frac{1}{3} \\ x \neq -5 \end{cases}$ есть решение.

Решение уравнений высших степеней. Возвратные уравнения

Определение 10. Возвратным уравнением называют уравнение вида:

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \dots + a_nx^{n+1} + \lambda a_nx^n + \lambda^3 a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0\lambda^{2n+1} = 0,$$

если степень уравнения нечетная;

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_{n-1}x^{n+1} + a_nx^n + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \lambda^2 a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0\lambda^n = 0,$$

если степень уравнения четная (λ — некоторое число).

Пример 1. $2x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 81x + 486 = 0$.

Здесь $\lambda = 3$. Действительно, уравнение можно представить в виде: $2 \cdot x^5 + 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 - 2 \cdot 3^1 \cdot x^2 + 3 \cdot 3^3 \cdot x + 2 \cdot 3^5 = 0$, что соответствует определению возвратного уравнения нечетной степени.

Пример 2. $2x^6 + 3x^5 - 2x^4 + 45x^3 + 4x^2 + 12x - 16 = 0$.

Так как $2x^6 + 3x^5 - 2x^4 + 45x^3 - 2(-2)^1x^2 + 3(-2)^2x + 2(-2)^3 = 0$, то это тоже возвратное уравнение четной степени, где $\lambda = -2$.

Теорема 1. Возвратное уравнение нечетной степени всегда имеет корень $\boxed{x = -\lambda}$.

Для уравнения из примера 1 — $x = -3$ — корень.

Действительно:

$$2 \cdot (-3)^5 + 3 \cdot (-3)^4 - 2 \cdot (-3)^3 - 6 \cdot (-3)^2 + 81 \cdot (-3) + 486 = 0$$

Теорема 2. Возвратное уравнение четной степени $2n$ может быть сведено к уравнению степени n и к n уравнениям второй степени при помощи подстановки $y = x + \frac{\lambda}{x}$.

Для уравнения в примере 2,

$2x^6 + 3x^5 - 2x^4 + 45x^3 + 4x^2 + 12x - 16 = 0$, применим подстановку $t = x - \frac{2}{x}$, где $\lambda = -2$

Для этого разделим обе части уравнения на x^3 .

$$\text{Получим } 2x^3 + 3x^2 - 2x + 45 + \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{16}{x^3} = 0.$$

$$\text{Сгруппируем: } 2\left(x^3 - \frac{8}{x^3}\right) + 3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x - \frac{2}{x}\right) + 45 = 0.$$

$$\text{Так как } t = x - \frac{2}{x}, \text{ то } t^2 = x^2 - 2x \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = x^2 + \frac{4}{x^2} - 4,$$

$$\text{тогда } x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4;$$

$$t^3 = x^3 - 3x^2 \frac{2}{x} + 3x \frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^3} = \left(x^3 - \frac{8}{x^3}\right) - 6\left(x - \frac{2}{x}\right),$$

$$\text{тогда } x^3 - \frac{8}{x^3} = t^3 + 6t.$$

$$\text{Значит } 2(t^3 + 6t) + 3(t^2 + 4) - 2t + 45 = 0; \quad 2t^3 + 3t^2 + 10t + 57 = 0;$$

$$a_0 = 2; a_1 = 3; a_2 = 10; a_3 = 57$$

$$\text{Пусть } f(t) = 2t^3 + 3t^2 + 10t + 57, \quad d = \pm 1; \pm 3; \pm 19; \pm 57$$

$$f(-3) = 2(-27) + 3(-3)^2 + 10(-3) + 57 = 0;$$

$$f(-3) = 0, \text{ значит } f(t) : (t+3)$$

$$2t^3 + 3t^2 + 10t + 57 \overline{) t+3}$$

$$\underline{2t^3 + 6t^2} \qquad 2t^2 - 3t + 19$$

$$\underline{-3t^2 + 10t} \qquad D < 0$$

$$\underline{-3t^2 - 9t}$$

$$19t + 57$$

$$\underline{19t + 57}$$

$$0$$

Итак, только $t = -3$ является корнем, значит $x - \frac{2}{x} = -3$

$$x^2 + 3x - 2 = 0; \quad \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}.$$

Определение 11.

Уравнение вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ называется симметричным, если его коэффициенты, одинаково удаленные от начала и от конца, равны между собой.

(Это частный случай возвратного уравнения при $\lambda = 1$.)

Практикум 12

1. $6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0$.

Очевидно, что это симметричное уравнение ($\lambda = 1$).

Так как $x = 0$ — не является корнем этого уравнения, разделим обе части уравнения на x^2 .

(Это один из методов решения возвратных уравнений. В общем виде, для уравнения степени $2n$, разделим обе части уравнения на x^n .)

$$\frac{6x^4}{x^2} + \frac{35x^3}{x^2} + \frac{62x^2}{x^2} + \frac{35x}{x^2} + \frac{6}{x^2} = 0; \quad 6x^2 + 35x + 62 + \frac{35}{x} + \frac{6}{x^2} = 0.$$

Группируя, получим: $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0$.

Положим $t = x + \frac{1}{x}$. $t^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$.

Значит $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Подставляя, имеем: $6(t^2 - 2) + 35t + 62 = 0$;

$$6t^2 + 35t + 50 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{-35 \pm \sqrt{1225 - 1200}}{12} = \frac{-35 \pm 5}{12}; \quad \begin{cases} t = -\frac{10}{3} \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases};$$

а) $x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}$; $3x^2 + 10x + 3 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 9}}{3} = \frac{-5 \pm 4}{3}; \quad x_1 = -3; \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

б) $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$; $2x^2 + 5x + 2 = 0$; $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$;

$$x_1 = -2; \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Примечание. Если в симметричном уравнении

$x = a$ – корень, то $x = \frac{1}{a}$ – тоже корень уравнения.

Ответ: $\left\{-3; -2; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$.

2. $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.

Данное уравнение также является симметричным уравнением. Здесь наиболее удачным решением является группировка с разложением на множители.

$$(3x^3 + 3) - (7x^2 + 7x) = 0;$$

$$3(x+1)(x^2 - x + 1) - 7x(x+1) = 0;$$

$$(x+1)(3x^2 - 3x + 3 - 7x) = 0; \quad (x+1)(3x^2 - 10x + 3) = 0;$$

$$\begin{cases} x+1=0 \\ 3x^2 - 10x + 3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{3} = \frac{5 \pm 4}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{3} \\ x = 3 \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{-1; \frac{1}{3}; 3\right\}$.

3. $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$.

Это симметричное уравнение нечетной степени. Если внимательно присмотреться, то можно заметить, что $x = -1$ – есть корень уравнения, т. е. для

$$\varphi(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \quad \varphi(-1) = 0.$$

Действительно,

$$\varphi(-1) = (-1)^5 + 2(-1)^4 + 3(-1)^3 + 3(-1)^2 + 2(-1) + 1 = 0.$$

Значит $\varphi(x)$ – можно разложить на множители, одним из которых будет $(x+1)$, т. е. $\varphi(x) : (x+1)$ ($:$ – символ кратности).

Разделим.

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x + 1 \\ \hline x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \end{array} \right. \\
 \underline{x^5 + x^4} \\
 x^4 + 3x^3 \\
 \underline{x^4 + x^3} \\
 2x^3 + 3x^2 \\
 \underline{2x^3 + 2x^2} \\
 x^2 + 2x \\
 \underline{x^2 + x} \\
 x + 1 \\
 \underline{x + 1} \\
 0
 \end{array}$$

Получилось также симметричное уравнение, но уже четной степени.

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0 \quad (: x^2);$$

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0; \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \left(x + \frac{1}{x} \right) + 2 = 0.$$

Пусть $t = x + \frac{1}{x}$; $t^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$;

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2; \quad t^2 - 2 + t + 2 = 0; \quad t(t+1) = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -1 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = 0 \\ x + \frac{1}{x} = -1 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} \frac{x^2+1}{x} = 0; \quad x \in \emptyset \\ x^2 + x + 1 = 0; \quad D < 0 \end{array} \right].$$

Ответ: $x = -1$.

Примечание. Всякое симметричное уравнение нечетной степени имеет корень $x = -1$ (теорема 1), и, при делении этого уравнения на $(x+1)$, получится симметричное уравнение четной степени.

$$4. \quad x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0.$$

В данном уравнении все коэффициенты равно отстоящие от начала и конца равны, но, увы, только по абсолютной величине.

Примечание. Если уравнение имеет вид

$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4x = 0$, где $a_1 = -a_3$; $a_0 = a_4$, то оно называется косо-симметричным, но решается почти так же как и симметричное.

Как оно решается посмотрим на примере:

$$x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0 \quad (:x^2);$$

$$x^2 + 5x + 4 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0; \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x - \frac{1}{x}\right) + 4 = 0.$$

Здесь положим:

$$x - \frac{1}{x} = t, \text{ тогда } x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = t^2;$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = t^2 \text{ и } x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2.$$

Подставим и получим:

$$(t^2 + 2) + 5t + 4 = 0; \quad t^2 + 5t + 6 = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = -3 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x - \frac{1}{x} = -2 \\ x - \frac{1}{x} = -3 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 1 = 0 \\ x^2 + 3x - 1 = 0 \end{array} \right]; \quad \begin{array}{l} x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}; \\ x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{array}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{-3+\sqrt{13}}{2}; -1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2} \right\}.$$

Тренировочная работа 9

Решите уравнения:

- $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$.
- $5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$.
- $2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 3x - 2 = 0$.
- $5x^4 - 12x^3 + 14x^2 - 12x + 5 = 0$.
- $x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x + 1 = 0$.
- $6x^2 + 3x + 1 + \frac{2x^2 + x - 5}{2x^2 + x} = 0$.
- $\frac{1-9x}{x^2+2x-3} + \frac{3x-1}{x-1} = \frac{2x}{x+3}$.
- $\frac{9x^2-42x-15}{4x^2-21x+5} = \frac{(4x+1)^2}{16x^2-1}$.
- $(2x+8)^2(13x-39) = 26(4x^2-64)(x-3)$.
- $\frac{1}{x^2-2x} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{12}$.
- $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24$.
- $\left(\frac{x+2}{2x^2+3x-2} - \frac{x-1}{3x^2-x-2}\right)(6x^2+x-2) = 0$.
- $x^4 + x^3 - 11x^2 - 5x + 30 = 0$.
- $x^5 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 10 = 0, x \in \mathbb{Z}$.
- $x^3 + 7x^2 + 4x - 12 = 0$.
- $12x^4 + 52x^3 - 43x^2 - 13x + 10 = 0$.
- $\frac{x^3+9x^2+27x+27}{x^2+x-6} + \frac{196-173x}{5x^2-14x+8} = x$.

Решение тренировочной работы 9

1. $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$. ($:x^2$)

$$x^2 + x - 10 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0; \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 10 = 0.$$

Пусть $t = x + \frac{1}{x}$. $t^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$;

$$(t^2 - 2) + t - 10 = 0; \quad t^2 + t - 12 = 0;$$

$$\begin{cases} t = -4 \\ t = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + \frac{1}{x} = -4 \\ x + \frac{1}{x} = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 4x + 1 = 0 \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}; \\ x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$.

2. $5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$.

Пусть $\varphi(x) = 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4x + 5$.

$$\begin{aligned} \varphi(-1) &= 5(-1)^5 + 4(-1)^4 + 3(-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) + 5 = \\ &= -5 + 4 - 3 + 3 - 4 + 5 = 0. \end{aligned}$$

Разделим уголком:

$$\begin{array}{r} 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \quad \left| \begin{array}{l} x + 1 \\ \hline 5x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 5 \end{array} \right. \\ \underline{5x^5 + 5x^4} \\ -x^4 + 3x^3 \\ \underline{-x^4 - x^3} \\ 4x^3 + 3x^2 \\ \underline{4x^3 + 4x^2} \\ -x^2 + 4x \\ \underline{-x^2 - x} \\ 5x + 5 \\ \underline{5x + 5} \\ 0 \end{array}$$

$$5x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 5 = 0. \quad (: x^2)$$

$$5x^2 - x + 4 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} = 0; \quad 5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0.$$

Пусть $t = x + \frac{1}{x}$; $t^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$;

$$5(t^2 - 2) - t + 4 = 0; \quad 5t^2 - t - 6 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{10} = \frac{1 \pm 11}{10};$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{6}{5} \\ t = -1 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = \frac{6}{5} \\ x + \frac{1}{x} = -1 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} 5x^2 - 6x + 5 = 0; D < 0 \\ x^2 + x + 1 = 0; D < 0 \end{array} \right].$$

О т в е т : $x = -1$.

3. $2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 3x - 2 = 0$.

Пусть $\varphi(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 3x - 2$.

Здесь $\varphi(1) = 2 - 3 + 5 - 5 + 3 - 2 = 0$. Значит $\varphi(x) : (x-1)$.

Выполним деление:

$$\begin{array}{r} 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 3x - 2 \quad \left| \begin{array}{l} x-1 \\ \hline \end{array} \right. \\ \underline{2x^5 - 2x^4} \\ -x^4 + 5x^3 \\ \underline{-x^4 + x^3} \\ 4x^3 - 5x^2 \\ \underline{4x^3 - 4x^2} \\ -x^2 + 3x \\ \underline{-x^2 + x} \\ 2x - 2 \\ \underline{2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

Тогда $2x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 2 = 0$. $(: x^2)$

$$2x^2 - x + 4 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0; \quad 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0.$$

Пусть $t = x + \frac{1}{x}$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$; $2(t^2 - 2) - t + 4 = 0$;

$$2t^2 - t = 0; \quad \begin{cases} t=0 \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x+\frac{1}{x}=0 \\ x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x^2+1}{x}=0; & x \in \emptyset \\ 2x^2-x+2=0; & D < 0 \end{cases}.$$

Ответ: $x=1$.

Примечание. Исходное уравнение возвратное, нечетной степени, где $x=-\lambda$, а $x=\lambda$ — корень.

4. $5x^4 - 12x^3 + 14x^2 - 12x + 5 = 0. \quad (:x^2)$

$$5x^2 - 12x + 14 - \frac{12}{x} + \frac{5}{x^2} = 0; \quad 5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 12\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0;$$

Пусть $t = x + \frac{1}{x}$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$;

$$5(t^2 - 2) - 12t + 14 = 0; \quad 5t^2 - 12t + 4 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{5} = \frac{6 \pm 4}{5};$$

$$\begin{cases} t=2 \\ t=\frac{2}{5} \end{cases}; \quad \begin{cases} x+\frac{1}{x}=2 \\ x+\frac{1}{x}=\frac{2}{5} \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2-2x+1=0; & x=1 \\ 5x^2-2x+5=0; & D < 0 \end{cases}.$$

Ответ: $x=1$.

5. $x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x + 1 = 0. \quad (:x^2)$

$$x^2 + 3x - 6 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0; \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

Пусть $t = x - \frac{1}{x}$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$;

$$t^2 + 2 + 3t - 6 = 0; \quad t^2 + 3t - 4 = 0;$$

$$\begin{cases} t=-4 \\ t=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-\frac{1}{x}=-4 \\ x-\frac{1}{x}=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2+4x-1=0 & x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}; \\ x^2-x-1=0 & x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{-2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$.

$$6. 6x^2 + 3x + 1 + \frac{2x^2 + x - 5}{2x^2 + x} = 0.$$

Пусть $2x^2 + x = t$.

$$3(2x^2 + x) + 1 + \frac{(2x^2 + x) - 5}{2x^2 + x} = 0;$$

$$3t + 1 + \frac{t-5}{t} = 0; \quad 3t^2 + 2t - 5 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+15}}{3} = \frac{-1 \pm 4}{3};$$

$$\begin{cases} 2x^2 + x = 1 \\ 2x^2 + x = -1\frac{2}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0; & x_1 = -1; & x_2 = \frac{1}{2} \\ 6x^2 + 3x + 5 = 0; & D < 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}; -1\right\}$.

$$7. \frac{1-9x}{x^2+2x-3} + \frac{3x-1}{x-1} = \frac{2x}{x+3}.$$

Так как $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$.

$$\frac{1-9x}{(x+3)(x-1)} + \frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x}{x+3} = 0; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq -3; \\ x \neq 1 \end{cases};$$

$$1 - 9x + (3x - 1)(x + 3) - 2x(x - 1) = 0;$$

$$1 - 9x + 3x^2 + 8x - 3 - 2x^2 + 2x = 0;$$

$$x^2 + x - 2 = 0;$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \notin D(Y) \end{cases}.$$

Ответ: $x = -2$.

$$8. \frac{9x^2 - 42x - 15}{4x^2 - 21x + 5} = \frac{(4x+1)^2}{16x^2 - 1}.$$

$$a) 4x^2 - 21x + 5 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 80}}{8} = \frac{21 \pm 19}{8}; \quad \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$4x^2 - 21x + 5 = 4(x-5)\left(x - \frac{1}{4}\right) = (x-5)(4x-1)$$

$$б) 9x^2 - 42x - 15 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+15}}{3} = \frac{7 \pm 8}{3}; \quad \begin{cases} x = 5 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$9x^2 - 42x - 15 = 9(x-5)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 3(x-5)(3x+1).$$

Уравнение примет вид

$$\frac{3(x-5)(3x+1)}{(x-5)(4x-1)} = \frac{(4x+1)^2}{16x^2-1}; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq \pm \frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$\frac{3(3x+1)}{4x-1} = \frac{4x+1}{4x-1};$$

$$3(3x+1) = (4x+1);$$

$$9x+3 = 4x+1;$$

$$5x = -2; \quad x = -0,4 \in D(Y).$$

Ответ: $x = -0,4$.

$$9. (2x+8)^2(13x-39) = 26(4x^2-64)(x-3).$$

$$4(x+4)^2 13(x-3) - 2 \cdot 13 \cdot 4(x^2-16)(x-3) = 0;$$

$$4 \cdot 13(x-3)\left((x+4)^2 - 2(x+4)(x-4)\right) = 0;$$

$$(x-3)(x+4)(x+4-2(x-4)) = 0;$$

$$(x-3)(x+4)(12-x) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -4 \\ x = 12 \end{cases}$$

Ответ: $\{-4; 3; 12\}$.

$$10. \frac{1}{x^2-2x} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{12}. \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2-2x+1} = \frac{1}{12}.$$

Пусть $x^2 - 2x = t$, тогда уравнение примет вид.

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} = \frac{1}{12}$$

$$12(t+1) - 12t = t(t+1); \quad 12t + 12 - 12t = t^2 + t; \quad t^2 + t - 12 = 0;$$

$$\begin{cases} t = -4 \\ t = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - 2x = -4 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - 2x + 4 = 0; & D < 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0; & x_1 = 3; x_2 = -1. \end{cases}$$

Ответ: $\{-1; 3\}$.

$$11. (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24.$$

Для решения этого уравнения сгруппируем первый и четвертый множитель и второй и третий множитель и перемножим их.

$$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = 24;$$

$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24.$$

Пусть $x^2 + 5x + 4 = t$, тогда

$$t(t+2) = 24; \quad t^2 + 2t - 24 = 0;$$

$$\begin{cases} t = -6 \\ t = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 5x + 4 = -6 \\ x^2 + 5x + 4 = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 5x + 10 = 0; & D < 0 \\ x^2 + 5x = 0; & x_1 = 0; x_2 = -5. \end{cases}$$

Примечание. Уравнение вида

$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4) = p$ обращается в квадратное уравнение, если $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$, или $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$, или $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$.

Ответ: $\{0; -5\}$.

$$12. \left(\frac{x+2}{2x^2+3x-2} - \frac{x-1}{3x^2-x-2} \right) (6x^2+x-2) = 0.$$

$$а) 2x^2 + 3x - 2 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}; \\ x = -2 \end{cases}$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x + 2) = (2x - 1)(x + 2);$$

$$б) 3x^2 - x - 2 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$3x^2 - x - 2 = 3(x - 1) \left(x + \frac{2}{3} \right) = (x - 1)(3x + 2);$$

$$в) 6x^2 + x - 2 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12}; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}; \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$6x^2 + x - 2 = 6 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{2}{3} \right) = (2x - 1)(3x + 2);$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2 \\ x \neq \frac{1}{2}; \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\left(\frac{x+2}{(2x-1)(x+2)} - \frac{x-1}{(3x+2)(x-1)} \right) (2x-1)(3x+2) = 0;$$

$$\left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{3x+2} \right) (2x-1)(3x+2) = 0$$

$$\frac{(3x+2-2x+1)(2x-1)(3x+2)}{(2x-1)(3x+2)} = 0;$$

$$\frac{(x+3)(2x-1)(3x+2)}{(2x-1)(3x+2)} = 0$$

$$x+3=0; \quad x=-3 \in D(Y).$$

Ответ: $x = -3$.

$$13. \quad x^4 + x^3 - 11x^2 - 5x + 30 = 0.$$

$$d = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \pm 6; \pm 15; \pm 10; \pm 30.$$

$$f(1) \neq 0; \quad f(-1) \neq 0;$$

$$f(2) = 16 + 8 - 44 - 10 + 30 = 0,$$

тогда

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 - 11x^2 - 5x + 30 \quad | \quad x - 2 \\ \hline x^4 - 2x^3 \qquad \qquad \qquad x^3 + 3x^2 - 5x - 15 \\ \hline 3x^3 - 11x^2 \\ 3x^3 - 6x^2 \\ \hline -5x^2 - 5x \\ -5x^2 + 10x \\ \hline -15x + 30 \\ -15x + 30 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 15;$$

$$\varphi(-3) = -27 + 27 + 15 - 15 = 0;$$

$$x^3 + 3x^2 - 5x - 15 \quad | \quad x + 3$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 \qquad \qquad \qquad x^2 - 5 \\ \hline -5x - 15 \\ -5x - 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^2 - 5 = 0; \quad \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \{-3; 2; -\sqrt{5}; \sqrt{5}\}.$$

14. $x^5 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 10 = 0$. $x \in \mathbb{Z}$ (найти целые корни)

а) $f(1) \neq 0$; $f(-1) \neq 0$; $f(2) = 0$.

Значит $f(x) : (x-2)$.

$$\begin{array}{r}
 x^5 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 10 \quad | \quad \underline{x-2} \\
 \underline{x^5 - 2x^4} \\
 2x^4 - 2x^3 \\
 \underline{2x^4 - 4x^3} \\
 2x^3 - 8x^2 \\
 \underline{2x^3 - 4x^2} \\
 -4x^2 + 13x \\
 \underline{-4x^2 + 8x} \\
 5x - 10 \\
 \underline{5x - 10} \\
 0
 \end{array}$$

б) $\varphi(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 4x + 5$.

Проверять $\varphi(1)$ и $\varphi(-1)$ уже не нужно, так как если бы эти значения были корнями, то $f(1) = 0$ и $f(-1) = 0$, но это не так. $\varphi(5) \neq 0$; $\varphi(-5) \neq 0$.

Других целых делителей числа 5 нет.

Значит, только $x = 2$ — целый корень уравнения $f(x) = 0$, других целых корней нет.

Ответ: $x = 2$.

Примечание. Можно проще.

Так как $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 4x + 5 = x^4 + 2x^3 + x^2 + x^2 - 4x + 5 = (x^2 + x)^2 + (x-2)^2 + 1 > 0 \quad \forall x$, то $x = 2$ единственный корень уравнения.

$$15. x^3 + 7x^2 + 4x - 12 = 0.$$

$$d = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12;$$

$$a) \varphi(1) = 1 + 7 + 4 - 12 = 0.$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 7x^2 + 4x - 12 \quad | \quad x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} \quad x^2 + 8x + 12 \\ 8x^2 + 4x \\ \underline{8x^2 - 8x} \\ 12x - 12 \\ \underline{12x - 12} \\ 0 \end{array}$$

$$b) x^2 + 8x + 12 = 0;$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ответ: $\{-6; -2; 1\}$.

$$16. 12x^4 + 52x^3 - 43x^2 - 13x + 10 = 0$$

Тогда рациональными корнями уравнения могут быть

числа вида $\frac{p}{g}$, где p — делитель числа 10,

а g — делитель числа 12.

$$f(1) \neq 0$$

$$f(-1) \neq 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{13}{2} - \frac{43}{4} - \frac{13}{2} + 10 = 0.$$

значит $f(x) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Выполним деление.

$$\begin{array}{r}
 12x^4 + 52x^3 - 43x^2 - 13x + 10 \\
 \underline{12x^4 - 6x^3} \\
 58x^3 - 43x^2 \\
 \underline{58x^3 - 29x^2} \\
 -14x^2 - 13x \\
 \underline{-14x^2 + 7x} \\
 -20x + 10 \\
 \underline{-20x + 10} \\
 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} x - \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\varphi(x) = 12x^3 + 58x^2 - 14x - 20;$$

$$\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = -12 \cdot \frac{1}{8} + 29 \cdot \frac{1}{2} + 14 \cdot \frac{1}{2} - 20 = 0, \text{ т. е. } \varphi(x) : \left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Выполним деление.

$$\begin{array}{r}
 12x^3 + 58x^2 - 14x - 20 \\
 \underline{12x^3 + 6x^2} \\
 52x^2 - 14x \\
 \underline{52x^2 + 26x} \\
 -40x - 20 \\
 \underline{-40x - 20} \\
 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} x + \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \right.$$

Итак, $12x^2 + 52x - 40 = 0$; $3x^2 + 13x - 10 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 120}}{6} = \frac{-13 \pm 17}{6}; \quad \begin{cases} x = -5 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{-5; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right\}$.

$$17. \frac{x^3+9x^2+27x+27}{x^2+x-6} + \frac{196-173x}{5x^2-14x+8} = x.$$

$$a) x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2);$$

$$б) 5x^2 - 14x + 8 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{5} = \frac{7 \pm 3}{5};$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{4}{5} \end{cases};$$

$$5x^2 - 14x + 8 = 5(x-2)\left(x - \frac{4}{5}\right) = (x-2)(5x-4).$$

Уравнение примет вид:

$$\frac{(x+3)^3}{(x+3)(x-2)} + \frac{196-173x}{(5x-4)(x-2)} = x \quad D(Y): \begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 2 \\ x \neq \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\frac{(x+3)^2}{x-2} + \frac{196-173x}{(5x-4)(x-2)} - x = 0;$$

$$(x+3)^2(5x-4) + 196 - 173x - x(5x-4)(x-2) = 0;$$

$$(x^2 + 6x + 9)(5x-4) + 196 - 173x - 5x^3 + 14x^2 - 8x = 0;$$

$$5x^3 + 26x^2 + 21x - 36 - 5x^3 + 14x^2 - 181x + 196 = 0;$$

$$40x^2 - 160x + 160 = 0;$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0;$$

$$x = 2 \notin D(Y).$$

Ответ: $x \in \emptyset$ (решения нет).

Еще несколько способов решения уравнений

$$1. \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{13}{36}.$$

Вычтем из обеих частей уравнения удвоенное произведение $\frac{1}{x+1}$ и $\frac{1}{x+2}$ (для выделения полного квадрата в левой части уравнения).

Итак,

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{13}{36}; \quad \left(-\frac{2}{(x+1)(x+2)}\right)$$

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 - \frac{2}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{13}{36} - \frac{2}{(x+1)(x+2)};$$

$$\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)^2 = \frac{13}{36} - \frac{2}{(x+1)(x+2)}; \quad \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right)^2 = \frac{13}{36} - \frac{2}{(x+1)(x+2)}.$$

Пусть $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = a$; $a^2 = \frac{13}{36} - 2a$; $36a^2 + 72a - 13 = 0$;

$$a_{1,2} = \frac{-36 \pm \sqrt{1296 + 468}}{36} = \frac{-36 \pm \sqrt{1764}}{36} = \frac{-36 \pm 42}{36}; \quad \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ a = -\frac{13}{6} \end{cases};$$

а) $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{6}$;

$$x^2 + 3x + 2 = 6; \quad x^2 + 3x - 4 = 0; \quad \begin{cases} x = -4 \\ x = 1 \end{cases}.$$

б) $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = -\frac{13}{6}$;

$$6 = -13x^2 - 39x - 26;$$

$$13x^2 + 39x + 32 = 0;$$

$$D < 0.$$

Ответ: $\{-4; 1\}$.

$$2. \quad \frac{24}{x^2-2x} = \frac{12}{x^2-x} + x^2 - x. \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2. \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Для решения этого уравнения представим дробь в виде алгебраической суммы двух других дробей.

$$\frac{1}{x^2-2x} = \frac{1}{x(x-2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right);$$

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x},$$

тогда

$$24 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right) = 12 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) + x(x-1);$$

$$\frac{12}{x-2} - \frac{12}{x} = \frac{12}{x-1} - \frac{12}{x} + x(x-1);$$

$$12 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) = x(x-1);$$

$$\frac{12}{(x-2)(x-1)} = x(x-1),$$

значит $x(x-1)(x-1)(x-2) = 12$.

Сгруппируем и перемножим первый и четвертый множитель, затем второй и третий множитель (аналогичный прием был уже показан).

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 1) = 12.$$

Положим $x^2 - 2x = a$.

Уравнение приобретет вид

$$a(a+1) = 12;$$

$$a^2 + a - 12 = 0;$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ a = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - 2x = -4 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - 2x + 4 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}, \quad D < 0; \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-1; 3\}$.

3. $(x+1)^3 + \frac{27}{x^2}(x+1) + 1 = \frac{9}{x}(x+1)^2 + \frac{27}{x^3}$. $D(Y): x \neq 0$.

Прямой путь возведения в степень и приведения к общему знаменателю технически очень сложен. Перенесем слагаемые правой части в левую сторону и сгруппируем слагаемые в порядке убывания степеней при $(x+1)$.

Получим $(x+1)^3 - \frac{9}{x}(x+1)^2 + \frac{27}{x^2}(x+1) - \frac{27}{x^3} + 1 = 0$;

учитывая, что $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$, получим

$$\left(x+1 - \frac{3}{x}\right)^3 + 1 = 0, \text{ значит } x+1 - \frac{3}{x} = -1.$$

Тогда $x^2 + 2x - 3 = 0$; $\begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$.

Ответ: $\{-3; 1\}$.

4. $\frac{x^8+x^4-2x^2+6}{x^4+2x^2+3} = 11x^2 - 34$.

Перемножить и затем раскладывать на множители очень накладно, попробуем выделить целую часть в левой дроби уравнения. Для этого поделим уголком.

$$\begin{array}{r} x^8 + x^4 - 2x^2 + 6 \quad \left| \begin{array}{l} x^4 + 2x^2 + 3 \\ x^4 - 2x^2 + 2 \end{array} \right. \\ \hline x^8 + 2x^6 + 3x^4 \\ \hline -2x^6 - 2x^4 - 2x^2 \\ \hline -2x^6 - 4x^4 - 6x^2 \\ \hline 2x^4 + 4x^2 + 6 \\ \hline 2x^4 + 4x^2 + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

Повезло, что разделилось нацело. Итак,

$$x^4 - 2x^2 + 2 = 11x^2 - 34; \quad x^4 - 13x^2 + 36 = 0; \quad \begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = 9 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-3; -2; 2; 3\}$.

$$5. \quad 3\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 + 168\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 - 46\frac{x^2-9}{x^2-4} = 0. \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2 \end{cases}.$$

Пусть $x^2 \neq 9$,

тогда разделим обе части уравнения на $\frac{x^2-9}{x^2-4}$.

$$3\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 \frac{x^2-4}{x^2-9} + 168\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 \frac{x^2-4}{x^2-9} - 46\frac{x^2-9}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-9} = 0;$$

$$3\frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x+2)} + 168\frac{(x+3)(x+2)}{(x-3)(x-2)} - 46 = 0.$$

Пусть $\frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x+2)} = a$, тогда уравнение примет вид

$$3a + \frac{168}{a} - 46 = 0; \quad 3a^2 - 46a + 168 = 0;$$

$$a_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 504}}{3} = \frac{23 \pm 5}{3}; \quad \begin{cases} a = 9\frac{1}{3}; \\ a = 6 \end{cases}$$

$$a) \quad \frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x+2)} = 9\frac{1}{3};$$

$$3(x^2 - 5x + 6) = 28(x^2 + 5x + 6); \quad 25x^2 + 155x + 150 = 0;$$

$$.5x^2 + 31x + 30 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-31 \pm \sqrt{961 - 600}}{10} = \frac{-31 \pm 19}{10}; \quad \begin{cases} x = -5 \\ x = -1,2 \end{cases} \in D(Y);$$

$$б) \quad \frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x+2)} = 6;$$

$$x^2 - 5x + 6 = 6(x^2 + 5x + 6);$$

$$5x^2 + 35x + 30 = 0; \quad x^2 + 7x + 6 = 0; \quad \begin{cases} x = -6 \\ x = -1 \end{cases} \in D(Y)$$

Проверим, что будет если:

а) $x = 3$; $0 + 168 \cdot 6^2 - 0 = 0$ — ложь, т.е. $x = 3$ не является корнем.

б) $x = -3$; $3 \cdot 6^2 + 0 - 0 = 0$ — ложь, т.е. $x = -3$ не является корнем.

Ответ: $\{-5; -1,2; -1; -6\}$.

6. $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.

Для решения примеров такого типа рассмотрим бином Ньютона:

$$(a+b)^n = A_0 a^n + A_1 a^{n-1} b + A_2 a^{n-2} b^2 + \dots + A_k a^{n-k} b^k + \dots + A_n b^n,$$

где $A_0; A_1; A_2; A_3; A_k; A_n$ – коэффициенты при a в n -й степени, которые вычисляются по правилу:

$$A_k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots \cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot k \cdot (k-1)(k-2)\dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Здесь n – степень бинома, а k обозначает $(k+1)$ -ое слагаемое разложения ($k < n$).

Но можно иначе.

Составим таблицу коэффициентов разложения в зависимости от степени:

| Степень | Коэффициенты (в n -й степени $(n+1)$ – слагаемых) | | | | | | | | | | | |
|--------------|-----------------------------------------------------|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|---|----------|
| $(a+b)^0$ | 1 | | | | | | | | | | | 2^0 |
| $(a+b)^1$ | 1 | 1 | | | | | | | | | | 2^1 |
| $(a+b)^2$ | 1 | 2 | 1 | | | | | | | | | 2^2 |
| $(a+b)^3$ | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | | 2^3 |
| $(a+b)^4$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | | 2^4 |
| $(a+b)^5$ | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | | 2^5 |
| $(a+b)^6$ | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | | 2^6 |
| $(a+b)^7$ | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | | 2^7 |
| $(a+b)^8$ | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | | 2^8 |
| $(a+b)^9$ | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | | 2^9 |
| $(a+b)^{10}$ | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 | 2^{10} |

Таблица любопытная:

А) Второй столбец – степень двучлена по возрастанию.

Б) Вторая диагональ – степень двучлена.

В) Для того, чтобы найти коэффициент в третьем слагаемом седьмой степени двучлена, необходимо сложить коэффициенты при втором и третьем слагаемых шестой степени двучлена. И так можно получить коэффициенты при любом слагаемом n -й степени разложения.

Г) Очень интересно, что сумма всех коэффициентов в разложении любой степени равна этой же степени числа двух, т. е. $A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n = 2^n$ и т. д.

Теперь можно заняться собственно решением самого уравнения

$$(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16.$$

Положим $t = \frac{(x+3)+(x+5)}{2} = x+4$.

Тогда $x = t - 4$.

Из уравнения $(t-1)^4 + (t+1)^4 = 16$, учитывая распределение коэффициентов, получим:

(чередование знаков)

$$\begin{aligned} (t+1)^4 &= t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 \\ + (t-1)^4 &= t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 \end{aligned}$$

$$(t+1)^4 + (t-1)^4 = 2t^4 + 0 + 12t^2 + 0 + 2.$$

Значит $2t^4 + 12t^2 + 2 = 16$;

$$t^4 + 6t^2 - 7 = 0;$$

$$\begin{bmatrix} t^2 = -7 \\ t^2 = 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = -1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x+4 = 1 \\ x+4 = -1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x = -3 \\ x = -5 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $\{-5; -3\}$.

$$7. (x-1)^5 + (x+3)^5 = 242(x+1).$$

Положим $t = \frac{x-1+x+3}{2} = x+1$, тогда $x = t-1$.

$$\text{Получим } (t-2)^5 + (t+2)^5 = 242t,$$

так как

$$\begin{aligned} (t+2)^5 &= t^5 + 5 \cdot t^4 \cdot 2 + 10t^3 \cdot 2^2 + 10t^2 \cdot 2^3 + 5t \cdot 2^4 + 2^5 \\ + (t-2)^5 &= t^5 - 5 \cdot t^4 \cdot 2 + 10t^3 \cdot 2^2 - 10t^2 \cdot 2^3 + 5t \cdot 2^4 - 2^5 \end{aligned}$$

$$(t+2)^5 + (t-2)^5 = 2t^5 + 0 + 2 \cdot 10 \cdot 2^2 t^3 + 0 + 2 \cdot 5 \cdot 2^4 t + 0.$$

$$\text{Итак } 2t^5 + 80t^3 + 160t = 242t.$$

а) $t = 0$;

б) $t^4 + 40t^2 - 41 = 0$;

$$\begin{cases} t^2 = 1 \\ t^2 = -41 \end{cases}; \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Значит } \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+1 = 0 \\ x+1 = 1 \\ x+1 = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-2; -1; 0\}$.

$$8. \frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0.$$

Сгруппируем:

$$\left(\frac{3}{x} + \frac{3}{x-5}\right) + \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4}\right) + \left(\frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3}\right) = 0;$$

$$3 \cdot \frac{x-5+x}{x(x-5)} + \frac{2x-5}{(x-1)(x-4)} + \frac{4(2x-5)}{(x-2)(x-3)} = 0;$$

$$(2x-5) \left(\frac{3}{x^2-5x} + \frac{1}{x^2-5x+4} + \frac{4}{x^2-5x+6} \right) = 0;$$

а) $2x-5 = 0$; $x = 2,5$;

б) пусть $x^2 - 5x = t$, тогда

$$\frac{3}{t} + \frac{1}{t+4} + \frac{4}{t+6} = 0; \quad \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq -4; \\ t \neq -6 \end{cases}$$

$$\frac{3(t+4)(t+6) + t(t+6) + 4t(t+4)}{t(t+4)(t+6)} = 0;$$

$$3(t^2 + 10t + 24) + t^2 + 6t + 4t^2 + 16t = 0;$$

$$8t^2 + 52t + 72 = 0; \quad 2t^2 + 13t + 18 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 144}}{4} = \frac{-13 \pm 5}{4}$$

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 \quad | \quad x + 1 \\
 \hline
 x^4 + x^3 \\
 \hline
 3x^3 - x^2 \\
 3x^3 + 3x^2 \\
 \hline
 -4x^2 - 16x \\
 -4x^2 - 4x \\
 \hline
 -12x - 12 \\
 -12x - 12 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

б) $\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$; $\varphi(2) = 8 + 12 - 8 - 12 = 0$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \quad | \quad x - 2 \\
 \hline
 x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 5x^2 - 4x \\
 5x^2 - 10x \\
 \hline
 6x - 12 \\
 6x - 12 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

в) $x^2 + 5x + 6 = 0$; $\begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$.

Ответ: $\{-1; -2; -3; 2\}$.

10. $\frac{x^3 + 2x - 2}{x^3 + 2x - 3} = \frac{x^3 + x + 3}{x^3 + x + 2}$.

Воспользоваться свойством пропорций можно, но довольно непросто. Попробуем выделить целую часть в левой и правой частях уравнения.

$$L = \frac{x^3 + 2x - 2}{x^3 + 2x - 3} = \frac{(x^3 + 2x - 3) + 1}{x^3 + 2x - 3} = 1 + \frac{1}{x^3 + 2x - 3} \quad (\text{левая часть});$$

$$П = \frac{x^3+x+3}{x^3+x+2} = \frac{(x^3+x+2)+1}{x^3+x+2} = 1 + \frac{1}{x^3+x+2} \quad (\text{правая часть}).$$

$$\text{Тогда } \frac{1}{x^3+2x-3} = \frac{1}{x^3+x+2}; \quad x^3+x+2 = x^3+2x-3; \quad x=5.$$

$$\text{Пусть } f(x) = x^3 + 2x - 3; \quad f(5) = 125 + 10 - 3 \neq 0;$$

$$f(x) = x^3 + x + 2; \quad f(5) = 125 + 5 + 2 \neq 0. \quad \text{Значит } 5 \in D(Y).$$

Ответ: $x=5$.

$$11. \quad 2x^4 - 10x^3 + 15x^2 - 7x + 1 = 0.$$

Это уравнение не является возвратным.

$$f(1) \neq 0; \quad f(-1) \neq 0; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0; \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$$

Значит рациональных корней нет. Конечно, существуют формулы Кардано-Феррари, по которым можно решить любое уравнение 3-й и 4-й степени, но это требует знания комплексных чисел. Попробуем применить другие соображения.

Многочлен 4-й степени с целыми коэффициентами можно представить в виде произведения двух квадратных трехчленов.

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = (b_0x^2 + b_1x + b_2)(c_0x^2 + c_1x + c_2),$$

где $b_0; b_1; b_2; c_0; c_1; c_2 \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим данное уравнение:

а) так как $a_0 = 2$, то $b_0c_0 = 2$ и, либо $b_0 = 1$ и $c_0 = 2$, либо $b_0 = 2$ и $c_0 = 1$ (случаи $b_0 < 0$ и $c_0 < 0$ пока исключим);

б) $a_4 = 1$, тогда $b_2c_2 = 1$, значит $b_2 = 1$ и $c_2 = 1$ (случаи $b_2 < 0$ и $c_2 < 0$ пока исключим), тогда $2x^4 - 10x^3 + 15x^2 - 7x + 1 = (2x^2 + b_1x + 1)(x^2 + c_1x + 1)$, но $(2x^2 + b_1x + 1)(x^2 + c_1x + 1) =$
 $= 2x^4 + b_1x^3 + x^2 + 2c_1x^3 + b_1c_1x^2 + c_1x + 2x^2 + b_1x + 1 =$
 $= 2x^4 + (b_1 + 2c_1)x^3 + (3 + b_1c_1)x^2 + (c_1 + b_1)x + 1.$

Два многочлена равны, если все коэффициенты при соответствующих степенях равны.

$$\begin{cases} b_1 + 2c_1 = -10 \\ 3 + b_1c_1 = 15 \\ c_1 + b_1 = -7 \end{cases} ; \begin{cases} b_1c_1 = 12 \\ c_1 + b_1 = -7 \end{cases} .$$

По теореме обратной теореме Виета, эта система порождает уравнение $m^2 + 7m + 12 = 0$.

Значит или $c_1 = -4$ и $b_1 = -3$ или $c_1 = -3$ и $b_1 = -4$, но $b_1 + 2c_1 = -10$, тогда $c_1 = -3$ и $b_1 = -4$.

Значит $2x^4 - 10x^3 + 15x^2 - 7x + 1 = (2x^2 - 4x + 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$.

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x + 1 = 0 \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} .$$

Так как больше четырех корней у данного уравнения быть не может, то случаи с отрицательными коэффициентами b_0, c_0, b_2 и c_2 рассматривать нет смысла.

О т в е т : $\left\{ \frac{2 + \sqrt{2}}{2}; \frac{2 - \sqrt{2}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right\}$.

12. $12x^6 - 52x^5 - 13x^4 + 156x^3 - 13x^2 - 52x + 12 = 0$.

В данном случае это возвратное уравнение. Известно, что возвратное уравнение четной степени можно с помощью подстановки $t = x + \frac{1}{x}$ привести к уравнению в два раза меньшей степени. Для этого уравнение степени $2n$ делят на x в n -ой степени и группируют равноотстоящие члены, после чего используют замену $t = x + \frac{1}{x}$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$ и т. д.

Применим этот прием к данному уравнению. ($:x^3$)

$$12x^3 - 52x^2 - 13x + 156 - \frac{13}{x} - \frac{52}{x^2} + \frac{12}{x^3} = 0;$$

$$12\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 52\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 156 = 0.$$

Пусть $x + \frac{1}{x} = t$.

$$12(t^3 - 3t) - 52(t^2 - 2) - 13t + 156 = 0;$$

$$12t^3 - 52t^2 - 49t + 260 = 0;$$

$$f(4) = 0$$

$$12t^3 - 52t^2 - 49t + 260 \quad | \quad t - 4$$

$$12t^3 - 48t^2 \qquad 12t^2 - 4t - 65$$

$$\hline -4t^2 - 49t$$

$$-4t^2 + 16t$$

$$\hline -65t + 260$$

$$-65t + 260$$

$$\hline 0$$

$$12t^2 - 4t - 65 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 780}}{12} = \frac{2 \pm 28}{12};$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{5}{2} \\ t = -\frac{13}{6} \\ t = 4 \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \\ x + \frac{1}{x} = -\frac{13}{6} \\ x + \frac{1}{x} = 4 \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ 6x^2 + 13x + 6 = 0 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \\ x = -\frac{2}{3} \\ x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{array} \right].$$

Ответ: $\left\{ 2; \frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; 2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3} \right\}$.

$$13. x^4 + 4x^3 + 18x^2 + 28x - 15 = 0.$$

Рассмотрим еще один метод.

Положим $x = t + a$ и подставим в уравнение:

$$(t+a)^4 + 4(t+a)^3 + 18(t+a)^2 + 28(t+a) - 15 = 0;$$

$$t^4 + 4t^3a + 6t^2a^2 + 4ta^3 + a^4 + 4t^3 + 12t^2a + 12ta^2 + 4a^3 + 18t^2 + 36ta + 18a^2 + 28t + 28a - 15 = 0;$$

$$t^4 + 4(a+1)t^3 + 6(a^2 + 2a + 3)t^2 + 4(a^3 + 3a^2 + 9a + 7)t + a^4 + 4a^3 + 18a^2 + 28a - 15 = 0.$$

Идея метода состоит в том, чтобы подобрать такие значения параметра a , при которых уравнение стало бы биквадратным, т.е. коэффициенты при t^3 и t оказались бы равными нулю.

$$\text{Т.е. } \begin{cases} a+1=0 \\ a^3+3a^2+9a+7=0 \end{cases}; a=-1.$$

$$\text{Значит } t^4 + 12t^2 - 28 = 0; \begin{cases} t^2 = -14 \notin (0; \infty) \\ t^2 = 2 \end{cases}; \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases},$$

$$\text{тогда } \begin{cases} x = \sqrt{2} - 1 \\ x = -\sqrt{2} - 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \{-\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} - 1\}.$$

5

Самостоятельные работы

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

Решите уравнения:

1. $3(x+3) - 2(2x-1) + 5(3x-1) = 4.$

2. $\frac{4-3(3x+1)}{2} - \frac{2(5-x)}{3} = 1.$

3. $3,2(2x+5) - 1\frac{2}{5}(2-3x) = 2,6.$

4. $\frac{2,2(2x-2,1)}{3} - \frac{4\left(\frac{2}{5}-2,5x\right)-1}{5} = 1.$

5. $\frac{3(3x+4)-4(5x+6)}{2(2x+1)-5(3x+2,8)} = 1.$

6. $\frac{2x+3(4x-7)-4}{2(2x+5)-3(5-2x)} = 1.$

7. $\frac{2(x-1)+3(4x-11)}{2(2x-5)-3(5-2x)} = 2.$

8. $(5x+1)^2(x-4) - (5x-4)^2(x-2) = 28.$

9. $(13x+11)^2 - (12x+7)^2 - (5x+9)^2 = 19.$

10. $(x-2)^3 - (x+2)(x^2-2x+4) + (2-3x)(5-2x) = 22$

Вариант 2

Решите уравнения:

1. $2(2x+1) - 3(x-3) - 5(3x+1) = 4.$

2. $\frac{4+3(3x-1)}{2} - 1 = \frac{2(5+x)}{3}.$

3. $3,2(2x-5) + 1,4(3x+2) = -2,6.$

4. $\frac{1-4\left(2\frac{2}{5}+2,5x\right)}{5} - \frac{2,2(2x+2,1)}{3} = 1.$

5. $\frac{5(3x-2,8) - 2(2x-1)}{4(5x-6) - 3(3x-4)} = 1.$

6. $\frac{4+3(4x+7)+2x}{2(2x-5)+3(2x+5)} = 1.$

7. $\frac{2(2x+5)+3(5+2x)}{2(x+1)+3(4x+11)} = \frac{1}{2}.$

8. $(x+2)(5x+4)^2 - (5x-1)^2(x+4) = 28.$

9. $(13x-11)^2 - (5x-9)^2 - (12x-7)^2 = 19.$

10. $(x-2)(x^2+2x+4) - (x+2)^3 + (2+3x)(5+2x) = 22.$

Самостоятельная работа 2**Вариант 1**

Решите уравнения:

$$1. \frac{x+3}{x+2} + \frac{3}{x-1} = \frac{3}{(x+2)(x-1)}.$$

$$2. \frac{y-1}{(y-4)(y+2)} - \frac{1}{(y-1)(y+2)} + \frac{3-2y}{2(y-1)(y+2)} = 0.$$

$$3. \frac{x^2}{x^2-2x+1} = \left(\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-x} \right) : \frac{x^3-1}{x^2+x}.$$

$$4. \left(\frac{6x+1}{x^2-6x} + \frac{6x-1}{x^2+6x} \right) : \frac{x^2+1}{x^2-36} - \frac{12}{x+1} = \frac{12}{x^2+x}.$$

$$5. \frac{1,5x^2}{9x^2-1} + \frac{3x-1}{3+9x} - \frac{3x+1}{6x-2} = 0.$$

$$6. x+2 + \frac{4}{x-2} + \frac{x^3-6}{2x-x^2} = 0.$$

$$7. \frac{2x+1}{2x-2} \cdot \left(\frac{4x^2-2x}{8x^3+1} - \frac{2x}{1+4x+4x^2} \right) = \frac{2x}{8x^3+1}.$$

$$8. 8x - (2+x^2)(2-x^2) = (x^2-2x)^2 + 4x^3.$$

$$9. \frac{(2x^2+x+1)^2 - 2(2x^2+x+1) + 1}{x^2} = 0.$$

$$10. (x^2-x+1)(x^2+x+1) - (x^2+1)(x^4-x^2+1) + (x^2+1)^3 = 1.$$

Вариант 2

Решите уравнения:

$$1. \frac{x-3}{x-2} - \frac{3}{x+1} = \frac{3}{(x-2)(x+1)}.$$

$$2. \frac{3+2y}{2(y+1)(y-2)} - \frac{y+1}{(y+4)(y-2)} = \frac{1}{(y+1)(y-2)}.$$

$$3. \left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{x}{x^2-1} \right) : \frac{x^3+1}{x-x^2} = \frac{x^2}{x^2+2x+1}.$$

$$4. \left(\frac{1-6x}{x^2+6x} + \frac{1+6x}{6x-x^2} \right) : \frac{x^2+1}{x^2-36} + \frac{12}{x-1} = \frac{12}{x^2-x}.$$

$$5. \frac{1,5x^2}{9x^2-1} + \frac{1+3x}{9x-3} - \frac{3x-1}{6x+2} = 0.$$

$$6. \frac{x^3+6}{x^2+2x} - x + 2 = \frac{4}{x+2}.$$

$$7. \frac{2x-1}{2x+2} \cdot \left(\frac{2x}{1-4x+4x^2} - \frac{4x^2+2x}{8x^3-1} \right) = \frac{2x}{8x^3-1}.$$

$$8. (x^2 + 2x)^2 = 4x^3 - 8x - (2 + x^2)(2 - x^2).$$

$$9. \frac{(2x^2-x+1)^2 - 2(2x^2-x+1)+1}{x^2} = 0.$$

$$10. (x^2 + 1)^3 - (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) + (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 1) + 8x^2 = 1.$$

Самостоятельная работа 3**Вариант 1**

Решите уравнения:

- $6x^2 - (3\sqrt{3} + 2)x + \sqrt{3} = 0.$
- $\frac{2x-1}{4x+1} = \frac{5(3x-5)}{8(6x+1)}.$
- $\frac{5x^2-7x+2}{4x^2+x-5} = \frac{(4x-5)^2}{16x^2-25}.$
- $(x+1)(x-2)^3 - (x^2-4x+4)(x^2-x) + 8 = 0.$
- $\frac{7+2x}{x^2+5x-6} + \frac{3}{x^2+9x+18} = \frac{1}{x+3}.$
- $\frac{1}{x+4} - \frac{x-4}{2x^2-13x-45} + \frac{3}{20+13x+2x^2} = 0.$
- $\frac{2x-2}{2x^2-9x+10} = \frac{x-1}{4x^2-4x-15}.$
- $\left(\frac{4x-1}{2x^2-x-10} + \frac{4}{x^2-4}\right) \frac{4x^2-10x}{4x-9} - \frac{4}{x-2} = 2.$
- $\frac{2x-13}{2x+5} : \left(\frac{3}{2x^2+13x+20} - \frac{8}{x^2-16} - \frac{24}{2x^2-3x-20}\right) = x-4.$
- $\frac{6x^2-17x-10}{4x^2-12x-7} - \frac{x^3+2x^2-9x-18}{(x+3)(2x^2-3x-14)} = 5-x.$

Вариант 2

Решите уравнения:

1. $6x^2 + (3\sqrt{3} + 2)x + \sqrt{3} = 0$.
2. $\frac{2x+1}{4x-1} = \frac{5(3x+5)}{8(6x-1)}$.
3. $\frac{5x^2+7x+2}{4x^2-x-5} = \frac{(4x+5)^2}{16x^2-25}$.
4. $(x-1)(x+2)^3 - (x^2+4x+4)(x^2+x) + 8 = 0$.
5. $\frac{1}{x-3} + \frac{3}{x^2-9x+18} = \frac{2x-7}{x^2-5x-6}$.
6. $\frac{x+4}{2x^2+13x-45} + \frac{3}{20-13x+2x^2} = \frac{1}{x-4}$.
7. $\frac{2x+2}{2x^2+9x+10} = \frac{x+1}{4x^2+4x-15}$.
8. $\frac{4}{x+2} - \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{4x+1}{2x^2+x-10} \right) \frac{4x^2+10x}{4x+9} = 2$.
9. $x+4 = \frac{2x+13}{5-2x} : \left(\frac{3}{2x^2-13x+20} - \frac{8}{x^2-16} - \frac{24}{2x^2+3x-20} \right)$.
10. $\frac{6x^2+17x-10}{4x^2+12x-7} + \frac{x^3-2x^2-9x+18}{(3-x)(2x^2+3x-14)} = x+5$.

Самостоятельная работа 4**Вариант 1**

Решите уравнения:

1. $|x+4|=2.$

2. $|2x+1|=3-x.$

3. $|x^2+2x-3|=x+3.$

4. $|x-3|=x^2+2x-3.$

5. $\frac{|x+3|-2}{2-x}=2.$

6. $||x+4|-1|=3.$

7. $||x+4|-2x+1|=2.$

8. $\frac{|x+4|}{x^2+6x+8}=1.$

9. $\frac{x+5}{|x^2+7x+10|}=2.$

10. $\frac{|x^2-2x|}{x-3}+|x+2|=1.$

Вариант 2

Решите уравнения:

1. $|x-4|=2.$

2. $|2x-1|=3+x.$

3. $|x^2-2x-3|=3-x.$

4. $|x+3|=x^2-2x-3.$

5. $\frac{|3-x|-2}{2+x}=2.$

6. $||x-4|-1|=3.$

7. $||x-4|+2x+1|=2..$

8. $\frac{|x-4|}{x^2-6x+8}=1.$

9. $\frac{5-x}{|x^2-7x+10|}=2.$

10. $|x-2|-\frac{|x^2+2x|}{x+3}=1.$

Самостоятельная работа 5**Вариант 1**

Решите уравнения:

1. $(x^2 + x)^2 - 8x^2 - 8x + 12 = 0.$

2. $\frac{2x-1}{x} + \frac{4x}{2x-1} = 5.$

3. $7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 9 = 0.$

4. $\frac{4}{9x^2-9x+2} - \frac{8}{9x^2-9x+8} = 1.$

5. $\frac{x^2-x}{x^2-x+1} - \frac{x^2-x+2}{x^2-x-2} = 1.$

6. $(x^2 - 3x + 5)^4 - 10x^2(x^2 - 3x + 5)^2 + 9x^4 = 0.$

7. $x^2(x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3) = 24.$

8. $\frac{2x}{4x^2+3x+8} + \frac{3x}{4x^2-6x+8} = \frac{1}{6}.$

9. $(x-1)^3 + \frac{27}{x^2}(x-1) + 27 = \frac{9}{x}(x-1)^2 + \frac{27}{x^3}.$

10. $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 5.$

Вариант 2

Решите уравнения:

1. $(x^2 - x)^2 - 8x^2 + 8x + 12 = 0$

2. $\frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5$

3. $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$

4. $\frac{4}{9x^2+9x+2} - \frac{8}{9x^2+9x+8} = 1$

5. $\frac{x^2+x}{x^2+x+1} - \frac{x^2+x+2}{x^2+x-2} = 1$

6. $9x^4 - 10x^2(x^2 + 3x + 5)^2 + (x^2 + 3x + 5)^4 = 0$

7. $x^2(4x^2 - 1)(2x^2 - 1)(4x^2 - 3) = 3$

8. $\frac{3x}{4x^2+6x+8} + \frac{2x}{4x^2-3x+8} = -\frac{1}{6}$

9. $27 - \frac{27}{4x^2}(2x+1) + \frac{9}{2x}(2x+1)^2 = (2x+1)^3 - \frac{27}{8x^3}$

10. $x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2} = 5$

Самостоятельная работа 6**Вариант 1**

Решите уравнения:

1. $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0.$

2. $2x^6 + 5x^5 - 7x^4 - 9x^3 + x^2 - 36x - 36 = 0.$

3. $30x^4 - 97x^3 + 64x^2 + 28x - 16 = 0.$

4. $x^2 + \frac{24}{x-4} + \frac{6(x^2-10)}{(x-4)^2} + 4x + 9 = 0.$

5. $12x^6 + 52x^5 - 13x^4 - 156x^3 - 13x^2 + 52x + 12 = 0.$

6. $x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 7x - 3 = 0.$

7. $x^4 - 4x^3 + 18x^2 - 28x - 15 = 0.$

8. $\frac{81x^4 + 135x^2 + 1}{27x^3 + 3x} = -7,7.$

9. $(x+2)^5 + (4-x)^5 = 1056.$

10. $\frac{135}{x^2-3x} = \frac{45}{x^2-x} + 2(x^2-1).$

Вариант 2

Решите уравнения:

1. $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$.

2. $2x^6 - 5x^5 - 7x^4 + 9x^3 + x^2 + 36x - 36 = 0$.

3. $30x^4 + 97x^3 + 64x^2 - 28x - 16 = 0$.

4. $x^2 - \frac{24}{x+4} + \frac{6(x^2-10)}{(x+4)^2} + 9 - 4x = 0$.

5. $4x^6 - 8x^5 - 21x^4 + 34x^3 + 21x^2 - 8x - 4 = 0$.

6. $x^4 + 9x^3 + 18x^2 - 7x - 3 = 0$.

7. $x^4 + 4x^3 + 18x^2 + 28x - 15 = 0$.

8. $\frac{81x^4 + 135x^2 + 1}{21(9x^3 + x)} = 1,1$.

9. $(4+x)^5 - (x-2)^5 = 1056$.

10. $\frac{135}{x^2+3x} = \frac{45}{x^2+x} + 2(x^2-1)$.

Ответы к самостоятельным работам

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. $\boxed{-\frac{1}{7}}$ 2. $\boxed{-1}$ 3. $\boxed{-1}$ 4. $\boxed{1\frac{119}{520}}$ 5. $\boxed{x \neq -1\frac{1}{11}}$
 6. $\boxed{5}$ 7. $\boxed{\emptyset}$ 8. $\boxed{0}$ 9. $\boxed{1}$ 10. $\boxed{-4}$

Вариант 2

1. $\boxed{\frac{1}{7}}$ 2. $\boxed{1}$ 3. $\boxed{1}$ 4. $\boxed{-1\frac{119}{520}}$ 5. $\boxed{x \neq 1\frac{1}{11}}$
 6. $\boxed{-5}$ 7. $\boxed{\emptyset}$ 8. $\boxed{0}$ 9. $\boxed{-1}$ 10. $\boxed{4}$

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. $\boxed{0; -5}$ 2. $\boxed{0, 4}$ 3. $\boxed{\emptyset}$ 4. $\boxed{\begin{cases} x \neq \pm 6 \\ x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}}$ 5. $\boxed{-\frac{1}{30}}$
 6. $\boxed{\emptyset}$ 7. $\boxed{\begin{cases} x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}}$ 8. $\boxed{1}$ 9. $\boxed{-0,5}$ 10. $\boxed{0}$

Вариант 2

1. $\boxed{5; 0}$ 2. $\boxed{-0, 4}$ 3. $\boxed{\emptyset}$ 4. $\boxed{\begin{cases} x \neq \pm 6 \\ x \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}}$ 5. $\boxed{\frac{1}{30}}$
 6. $\boxed{\emptyset}$ 7. $\boxed{\begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq -1 \end{cases}}$ 8. $\boxed{-1}$ 9. $\boxed{0,5}$ 10. $\boxed{0}$

Самостоятельная работа 3**Вариант 1**

1. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{3}\right]$ 2. $\left[-1; -\frac{17}{36}\right]$ 3. $[-3]$ 4. $[0; 4]$ 5. $[-8]$

6. $[14]$ 7. $\left[-2\frac{2}{3}; 1\right]$ 8. $\begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \neq 2, 25 \\ x \neq 2, 5 \end{cases}$ 9. $[-12]$ 10. $[4]$

Вариант 2

1. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{3}\right]$ 2. $\left[1; \frac{17}{36}\right]$ 3. $[3]$ 4. $[0; -4]$ 5. $[8]$

6. $[-14]$ 7. $\left[2\frac{2}{3}; -1\right]$ 8. $\begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \neq -2, 25 \\ x \neq -2, 5 \end{cases}$ 9. $[12]$ 10. $[-4]$

Самостоятельная работа 4**Вариант 1**

1. $[-6; -2]$ 2. $\left[-4; \frac{2}{3}\right]$ 3. $[-3; 0; 2]$ 4. $\left[\frac{-3-\sqrt{33}}{2}; \frac{-3+\sqrt{33}}{2}\right]$ 5. $[1]$

6. $[-8; 0]$ 7. $[3; 7]$ 8. $[-1]$ 9. $[-2, 5; -1, 5]$ 10. $\left[\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right]$

Вариант 2

1. $[2; 6]$ 2. $\left[-\frac{2}{3}; 4\right]$ 3. $[-2; 0; 3]$ 4. $\left[\frac{3\pm\sqrt{33}}{2}\right]$ 5. $[-1]$

6. $[0; 8]$ 7. $[-7; -3]$ 8. $[1]$ 9. $[1, 5; 2, 5]$ 10. $\left[\frac{-2\pm\sqrt{10}}{2}\right]$

Самостоятельная работа 5

Вариант 1

1. $\boxed{-3; -2; 1; 2}$ 2. $\boxed{-0,5; 1}$ 3. $\boxed{-2; -0,5}$ 4. $\boxed{0; 1}$ 5. $\boxed{0; 1}$
 6. $\boxed{1; 5}$ 7. $\boxed{-2; 2}$ 8. $\boxed{0,25; 8}$ 9. $\boxed{-3; 1}$ 10. $\boxed{-1; 2}$

Вариант 2

1. $\boxed{-2; -1; 2; 3}$ 2. $\boxed{-1; 0,5}$ 3. $\boxed{0,5; 2}$ 4. $\boxed{-1; 0}$ 5. $\boxed{-1; 0}$
 6. $\boxed{-5; -1}$ 7. $\boxed{-1; 1}$ 8. $\boxed{-8; -0,25}$ 9. $\boxed{-0,5; 1,5}$ 10. $\boxed{-2; 1}$

Самостоятельная работа 6

Вариант 1

1. $\boxed{-3; -1; 2; 4}$ 2. $\boxed{-3; -1,5; -1; 2}$ 3. $\boxed{-\frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{4}{3}; 2}$ 4. $\boxed{-2; 1; 2; 3}$
 5. $\boxed{-2; -\frac{1}{2}; -\sqrt{2} + 1; \frac{1}{2}; 2; 1 + \sqrt{2}}$ 6. $\boxed{\frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}; 2 \pm \sqrt{3}}$
 7. $\boxed{1 - \sqrt{2}; \sqrt{2} + 1}$ 8. $\boxed{-1\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{6}; -\frac{1}{15}}$ 9. $\boxed{0; 2}$ 10. $\boxed{-2; 4}$

Вариант 2

1. $\boxed{-4; -2; 1; 3}$ 2. $\boxed{-2; 1; 1,5; 3}$ 3. $\boxed{-2; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{5}; \frac{1}{2}}$
 4. $\boxed{-3; -2; -1; 2}$ 5. $\boxed{-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; -\sqrt{3} + 2; \frac{1}{2}; 2; 2 + \sqrt{3}}$
 6. $\boxed{-2 \pm \sqrt{3}; \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}}$ 7. $\boxed{-\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} - 1}$ 8. $\boxed{\frac{1}{15}; \frac{1}{6}; \frac{2}{3}; 1\frac{2}{3}}$
 9. $\boxed{-2; 0}$ 10. $\boxed{-4; 2}$

6

Карточки заданий

Тренировочные карточки

Карточка 1

- $$1. \frac{5x^2-6x+1}{4x^2+5x+1} = 1.$$
- $$2. x^3 - 6x + 8 - 3x^2 = 0.$$
- $$3. x(x+1)(x+2)(x+3) = 3.$$
- $$4. \frac{28x^2+42x}{x+1} = \frac{18x^2-33x-90}{x-4}.$$
- $$5. \frac{6}{x^2+2x-3} - \frac{24}{x^2+2x-8} = 1.$$
- $$6. x^3 = \frac{55x^2-22x-8}{8x^2+22x-55}.$$

Карточка 2

- $$1. \frac{2x+3}{12-x-x^2} + 0,5 = 0.$$
- $$2. (2x-1)^2(5x-3) = (x-0,6)(16x^2-4).$$
- $$3. \frac{2x^2+3x-20}{6x^2+20x-16} = \frac{6x+4}{36x^2-16}.$$
- $$4. \frac{6x^2+17x-10}{4x^2+12x-7} + \frac{x^3-2x^2-9x+18}{(3-x)(2x^2+3x-14)} = x+5.$$
- $$5. 10x^4 - 29x^3 + 30x^2 - 29x + 10 = 0.$$
- $$6. \frac{(x-1)^2 x}{(x^2-x+1)^2} = \frac{2}{9}.$$

Карточка 3

$$1. \frac{2x+3}{6x^2+5x-6} + \frac{3x+2}{4-9x^2} = 0.$$

$$2. \frac{x^2-x}{x^2-x+1} - \frac{x^2-x+2}{x^2-x-2} = 1.$$

$$3. 8x^3 - 8x^2 + 1 = 0.$$

$$4. \frac{x^3-9x^2+27x-27}{x^2+x-12} - \frac{128x+365}{2x^2+13x+20} = x.$$

$$5. \left(\frac{36x^2}{5x^2+13x-6} - \frac{5x-2}{x+3} \right) : \frac{11x-2}{x^2-2x-5} - \frac{28x-x^2}{2-5x} = 5.$$

$$6. \frac{81x^4+135x^2+1}{27x^3+3x} = 7,7.$$

Карточка 4

$$1. (x+3)^2 + \frac{1}{x^2+6x+9} = 2.$$

$$2. \frac{(2-x)(2x^2-5x+3)}{x^3-3x^2-4x+12} - \frac{3x^2+4x-7}{3x^2+13x+14} = -3.$$

$$3. \frac{16}{x^2+5x-6} - \frac{20}{x^2+5x+6} = 1.$$

$$4. \frac{x}{x^2-3x+8} - \frac{x}{x^2+2x+8} = \frac{5}{24}.$$

$$5. x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = 0.$$

$$6. (x+1)^4 + (x-4)^4 = 97.$$

Карточка 5

$$1. \frac{3x^2-5x-8}{2x^2-5x-3} = \frac{3}{2}.$$

$$2. \left(\frac{x-2}{2x^2-3x-2} - \frac{x+1}{3x^2+x-2} \right) (6x^2-x-2) = 0.$$

$$3. (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0.$$

$$4. \frac{6}{x^2-3x+2} + \frac{8}{x^2+3x-4} = 1.$$

$$5. \frac{(x^2-x+1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{49}{45}.$$

$$6. 9x-6x^2 - \frac{2x^2-3x-4}{2x^2-3x+1} = 4.$$

Карточка 6

$$1. \frac{2x^2+7x+6}{3x^2+4x-4} = \frac{(3x+2)^2}{9x^2-4}.$$

$$2. \frac{4x^2+2x+3}{2x^2+x+1} + \frac{2x^2+x-2}{6x^2+3x-1} = 2.$$

$$3. 0,24(x^2+1)^2 + x(x^2-1) = 0.$$

$$4. \frac{21}{4x+6} + \frac{x^2-25}{x+2} \left(\frac{6}{25-x^2} + \frac{x}{2x^2-7x-15} \right) = \frac{1}{2}x.$$

$$5. x^4 + (x+4)^4 = 32.$$

$$6. \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{10}{9}.$$

Карточка 7

1. $(x+1)(x^2+2) + (x+2)(x^2+1) = 2.$

2. $\frac{21}{x^2-4x+10} - x^2 + 4x = 6.$

3. $\frac{x+4}{2x^2-4x-6} - \frac{x-3}{2-2x^2} = \frac{x+6}{x^3-3x^2-x+3}.$

4. $(x-3)^3 + \frac{27}{x^2}(x-3) + 1 = \frac{9}{x}(x-3)^2 + \frac{27}{x^3}.$

5. $\left(2 - \frac{9x+1}{x^2+6x+1}\right)^2 + \left(2 + \frac{18x+2}{2x^2+3x+1}\right)^2 = 8.$

6. $x^4 = \frac{11x+6}{6x+11}.$

Карточка 8

1. $7\left(\frac{x^2+9}{3x}\right) - 2\left(\frac{x^4+81}{9x^2}\right) = 9.$

2. $\frac{x^3+2x+2}{x^3+2x+3} = \frac{x^3+x-3}{x^3+x-2}.$

3. $\frac{2x+0.8}{x^2-x-20} - \frac{x+4}{x^2-3x-10} = \frac{x}{x^2+3x-4}.$

4. $x^4 + x^3 - 9x^2 - 2x + 2 = 0.$

5. $\frac{4x^2(43x^2+71x-602)}{(x^2+x-14)^3} = 9.$

6. $x^6 + 1 + (x-1)^6 = 2(x^2 - x + 1).$

Решение тренировочной карточки 1

$$1. \frac{5x^2-6x+1}{4x^2+5x+1} = 1; \quad D(Y): 4x^2+5x+1 \neq 0 \quad \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$5x^2 - 6x + 1 = 4x^2 + 5x + 1; \quad x^2 - 11x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 11 \end{cases} \in D(Y).$$

Ответ: $\{0; 11\}$.

$$2. x^3 - 6x + 8 - 3x^2 = 0$$

Сгруппируем.

$$(x^3 + 8) - (3x^2 + 6x) = 0; \quad (x+2)(x^2 - 2x + 4) - 3x(x+2) = 0;$$

$$(x+2)(x^2 - 2x + 4 - 3x) = 0; \quad (x+2)(x^2 - 5x + 4) = 0; \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-2; 1; 4\}$.

$$3. x(x+1)(x+2)(x+3) = 3.$$

Сгруппируем.

$$(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2; \quad x(x+3) = x^2 + 3x.$$

Тогда уравнение представим, как

$$(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 3.$$

Обозначим $x^2 + 3x = t$.

Уравнение примет вид

$$t^2 + 2t - 3 = 0.$$

$$\begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 3x = -3 \\ x^2 + 3x = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 3x + 3 = 0; D < 0 \\ x^2 + 3x - 1 = 0 \end{cases};$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $\left\{ -\frac{3+\sqrt{13}}{2}; -\frac{3+\sqrt{13}}{2} \right\}$.

$$4. \quad \frac{28x^2+42x}{x+1} = \frac{18x^2-33x-90}{x-4}; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 4 \end{cases}.$$

$$18x^2 - 33x - 90 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121+24 \cdot 30}}{12} = \frac{11 \pm \sqrt{841}}{12};$$

$$\begin{cases} x = \frac{11+29}{12}; \\ x = \frac{11-29}{12}; \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{10}{3}; \\ x = -\frac{3}{2}; \end{cases};$$

$$18x^2 - 33x - 90 = 18\left(x - \frac{10}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 3(3x-10)(2x+3);$$

$$\frac{14x(2x+3)}{x+1} = \frac{3(3x-10)(2x+3)}{x-4}; \quad (2x+3)\left(\frac{14x}{x+1} - \frac{3(3x-10)}{x-4}\right) = 0.$$

$$a) \quad 2x+3=0 \quad x=-1,5 \in D(Y);$$

$$b) \quad \frac{14x}{x+1} - \frac{9x-30}{x-4} = 0; \quad 14x(x-4) - (9x-30)(x+1) = 0;$$

$$14x^2 - 56x - 9x^2 + 21x + 30 = 0; \quad 5x^2 - 35x + 30 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 600}}{10} = \frac{35 \pm 25}{10}; \quad \begin{cases} x = 6 \\ x = 1 \end{cases} \in D(Y).$$

Ответ: $\{-1,5; 1; 6\}$.

$$5. \quad \frac{6}{x^2+2x-3} - \frac{24}{x^2+2x-8} = 1$$

Положим $x^2 + 2x - 3 = t$, тогда $x^2 + 2x - 8 = t - 5$.

Уравнение примет вид

$$\frac{6}{t} - \frac{24}{t-5} = 1; \quad D(Y): \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq 5 \end{cases};$$

$$6(t-5) - 24t = t(t-5); \quad t^2 + 13t + 30 = 0; \quad \begin{cases} t = -10 \\ t = -3 \end{cases} \in D(Y);$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 = -10 \\ x^2 + 2x - 3 = -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 2x + 7 = 0; D < 0 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-2; 0\}$.

$$6. x^3 = \frac{55x^2 - 22x - 8}{8x^2 + 22x - 55}.$$

Что-то подозрительно часто повторяются коэффициенты в числителе и знаменателе. Приведем уравнение к целочисленному виду.

$$8x^5 + 22x^4 - 55x^3 = 55x^2 - 22x - 8;$$

$$8x^5 + 22x^4 - 55x^3 - 55x^2 + 22x + 8 = 0.$$

Теперь понятно почему - это возвратное уравнение нечетной степени.

Значит, есть корень $x = -1$, но $8x^2 + 22x - 55 \neq 0$.

Решим $8x^2 + 22x - 55 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 440}}{8} = \frac{-11 \pm \sqrt{561}}{8}.$$

Значит $D(Y): x \neq \frac{-11 \pm \sqrt{561}}{8}$.

$$8x^5 + 22x^4 - 55x^3 - 55x^2 + 22x + 8 \Big| \frac{x+1}{8x^4 + 14x^3 - 69x^2 + 14x + 8}$$

$$\begin{array}{r} 8x^5 + 8x^4 \\ \hline 14x^4 - 55x^3 \\ 14x^4 + 14x^3 \\ \hline -69x^3 - 55x^2 \\ -69x^3 - 69x^2 \\ \hline 14x^2 + 22x \\ 14x^2 + 14x \\ \hline 8x + 8 \\ \underline{8x + 8} \\ 0 \end{array}$$

Получили новое возвратное уравнение четной степени.

$$8x^4 + 14x^3 - 69x^2 + 14x + 8 = 0; \quad (:x^2)$$

$$8x^2 + 14x - 69 + \frac{14}{x} + \frac{8}{x^2} = 0; \quad 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 14\left(x + \frac{1}{x}\right) - 69 = 0.$$

$$\text{Пусть } x + \frac{1}{x} = t;$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2;$$

$$8(t^2 - 2) + 14t - 69 = 0 \quad ;$$

$$8t^2 + 14t - 85 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 680}}{8} = \frac{-7 \pm \sqrt{729}}{8} = \frac{-7 \pm 27}{8};$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{5}{2} \\ t = -4\frac{1}{4} \end{array} \right. ;$$

$$\text{а) } x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad ;$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \in D(Y); \right.$$

$$\text{б) } x + \frac{1}{x} = -4\frac{1}{4} \quad ;$$

$$4x^2 + 17x + 4 = 0 \quad \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -\frac{1}{4} \end{array} \in D(Y). \right.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -4; -1; -\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 2 \right\}.$$

Решение тренировочной карточки 2

$$1. \frac{2x+3}{12-x-x^2} + 0,5 = 0; \quad D(Y): 12-x-x^2 \neq 0; \begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

$$2x+3+6-0,5x-0,5x^2 = 0; \quad 4x+18-x-x^2 = 0; \quad x^2-3x-18=0;$$

$$\begin{cases} x=6 \\ x=-3 \end{cases} \in D(Y).$$

О т в е т: $\{-3; 6\}$.

$$2. (2x-1)^2(5x-3) = (x-0,6)(16x^2-4).$$

$$(2x-1)^2(5x-3) - (x-0,6) \cdot 4 \cdot (2x-1)(2x+1) = 0;$$

$$(2x-1)((2x-1) \cdot 5(x-0,6) - (x-0,6)4(2x+1)) = 0;$$

$$(2x-1)(x-0,6)(10x-5-8x-4) = 0; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{5} \\ x = 4\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$(2x-1)(x-0,6)(2x-9) = 0;$$

О т в е т: $\left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{5}; 4\frac{1}{2}\right\}$.

$$3. \frac{2x^2+3x-20}{6x^2+20x-16} = \frac{6x+4}{36x^2-16}.$$

$$а) 6x^2 + 20x - 16 = 0; \quad 3x^2 + 10x - 8 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{3} = \frac{-5 \pm 7}{3};$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}; \quad 6x^2 + 20x - 16 = 6(x+4)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 2(x+4)(3x-2).$$

$$б) 2x^2 + 3x - 20 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{4} = \frac{-3 \pm 13}{4}; \quad \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -4 \end{cases}; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq \frac{2}{3} \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$2x^2 + 3x - 20 = 2(x+4)\left(x - \frac{5}{2}\right) = (x+4)(2x-5).$$

$$\frac{(x+4)(2x-5)}{2(x+4)(3x-2)} = \frac{2(3x+2)}{4(3x+2)(3x-2)}; \quad \frac{2x-5}{2(3x-2)} = \frac{1}{2(3x-2)};$$

$$2x - 5 = 1; \quad x = 3 \in D(Y).$$

Ответ: $x = 3$.

$$4. \quad \frac{6x^2 + 17x - 10}{4x^2 + 12x - 7} + \frac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{(3-x)(2x^2 + 3x - 14)} = x + 5;$$

$$а) \quad 4x^2 + 12x - 7 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{4} = \frac{-6 \pm 8}{4}; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{7}{2} \end{cases};$$

$$4x^2 + 12x - 7 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2}\right) = (2x - 1)(2x + 7).$$

$$б) \quad 6x^2 + 17x - 10 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 + 240}}{12} = \frac{-17 \pm 23}{12}; \quad \begin{cases} x = -\frac{10}{3} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$6x^2 + 17x - 10 = 6\left(x + \frac{10}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (3x + 10)(2x - 1).$$

$$в) \quad 2x^2 + 3x - 14 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 112}}{4} = \frac{-3 \pm 11}{4}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{7}{2} \end{cases};$$

$$2x^2 + 3x - 14 = 2\left(x - 2\right)\left(x + \frac{7}{2}\right) = (x - 2)(2x + 7);$$

$$г) \quad x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0; \quad \text{Сгруппируем } (x^3 - 9x) - (2x^2 - 18) = 0;$$

$$(x^3 - 9x) - (2x^2 - 18) = 0; \quad x(x^2 - 9) - 2(x^2 - 9) = 0;$$

$$(x^2 - 9)(x - 2) = 0; \quad (x + 3)(x - 3)(x - 2) = 0;$$

$$\frac{(3x + 10)(2x - 1)}{(2x - 1)(2x + 7)} + \frac{(x + 3)(x - 3)(x - 2)}{(3 - x)(x - 2)(2x + 7)} = x + 5; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq -3, 5 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$\frac{3x + 10}{2x + 7} - \frac{x + 3}{2x + 7} = x + 5;$$

$$\frac{3x + 10 - x - 3}{2x + 7} = x + 5; \quad \frac{2x + 7}{2x + 7} = x + 5; \quad x + 5 = 1; \quad x = -4 \in D(Y).$$

Ответ: $x = -4$.

$$5. 10x^4 - 29x^3 + 30x^2 - 29x + 10 = 0.$$

Так как это возвратное уравнение четной степени, разделим обе части уравнения на x^2 .

$$10x^2 - 29x + 30 - \frac{29}{x} + \frac{10}{x^2} = 0; \quad 10\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 29\left(x + \frac{1}{x}\right) + 30 = 0.$$

$$\text{Пусть } x + \frac{1}{x} = t; \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2; \quad 10(t^2 - 2) - 29t + 30 = 0;$$

$$10t^2 - 29t + 10 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 400}}{20} = \frac{29 \pm 21}{20};$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{5}{2} \\ t = \frac{2}{5} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \\ x + \frac{1}{x} = \frac{2}{5} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ 5x^2 - 2x + 5 = 0; D < 0 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \right].$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}.$$

$$6. \frac{(x-1)^2 x}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{2}{9}.$$

$$\frac{(x^2 - 2x + 1)x}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{2}{9}; \quad \frac{x^2 \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{2}{9}.$$

Положим $x + \frac{1}{x} - 1 = t$, тогда $x + \frac{1}{x} - 2 = t - 1$.

Уравнение примет вид:

$$\frac{t-1}{t^2} = \frac{2}{9}; \quad 2t^2 - 9t + 9 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4} = \frac{9 \pm 3}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \frac{3}{2} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} - 1 = 3 \\ x + \frac{1}{x} - 1 = \frac{3}{2} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 1 = 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \\ x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \right].$$

$$\text{Ответ: } \left\{ 2 - \sqrt{3}; \frac{1}{2}; 2; 2 + \sqrt{3} \right\}.$$

Решение тренировочной карточки 3

$$1. \frac{2x+3}{6x^2+5x-6} + \frac{3x+2}{4-9x^2} = 0;$$

$$а) 6x^2 + 5x - 6 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 36}}{12} = \frac{-5 \pm 13}{12}; \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq \pm \frac{2}{3} \\ x \neq -1\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$б) 6x^2 + 5x - 6 = 6\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (2x+3)(3x-2);$$

$$\frac{2x+3}{(2x+3)(3x-2)} + \frac{3x+2}{(2-3x)(2+3x)} = 0;$$

$$\frac{1}{3x-2} - \frac{1}{3x-2} = 0; \quad 0 = 0;$$

$\forall x \in D(Y)$: — есть решение.

Ответ: $\left(-\infty; -1\frac{1}{2}\right) \cup \left(-1\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$ —
есть решение уравнения.

$$2. \frac{x^2-x}{x^2-x+1} - \frac{x^2-x+2}{x^2-x-2} = 1.$$

Положим $x^2 - x + 1 = t$, тогда $x^2 - x + 2 = t + 1$;

$$x^2 - x = t - 1; \quad x^2 - x - 2 = t - 3.$$

$$\frac{t-1}{t} - \frac{t+1}{t-3} = 1; \quad D(Y): \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq 3 \end{cases};$$

$$(t-1)(t-3) - t(t+1) = t(t-3);$$

$$t^2 - 4t + 3 - t^2 - t = t^2 - 3t;$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0;$$

$$\begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \end{cases} \in D(Y); \quad \begin{cases} x^2 - x + 1 = -3 \\ x^2 - x + 1 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - x + 4 = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \quad D < 0; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Ответ: $\{0; 1\}$.

$$3. 8x^3 - 8x^2 + 1 = 0;$$

$$d = \pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{1}{8}; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \frac{1}{8} - 8 \cdot \frac{1}{4} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0,$$

тогда

$$\begin{array}{r} 8x^3 - 8x^2 + 1 \quad \left| \quad x - \frac{1}{2} \right. \\ \hline 8x^3 - 4x^2 \qquad \quad 8x^2 - 4x - 2 \\ -4x^2 + 1 \\ \hline -4x^2 + 2x \\ \hline -2x + 1 \\ -2x + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$8x^2 - 4x - 2 = 0; \quad 4x^2 - 2x - 1 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{О т в е т: } \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{4}; \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right\}.$$

$$4. \frac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x^2 + x - 12} - \frac{128x + 365}{2x^2 + 13x + 20} = x;$$

$$\text{а) } x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3);$$

$$\text{б) } x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x-3)^3;$$

$$\text{в) } 2x^2 + 13x + 20 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 160}}{4} = \frac{-13 \pm 3}{4}; \quad \begin{cases} x = -4 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$2x^2 + 13x + 20 = 2(x+4)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (x+4)(2x+5).$$

Тогда уравнение примет вид

$$\frac{(x-3)^2}{(x+4)} - \frac{128x+365}{(x+4)(2x+5)} - x = 0; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -4 \\ x \neq -2,5 \end{cases}.$$

$$(x-3)^2(2x+5) - 128x - 365 - x(x+4)(2x+5) = 0;$$

$$(x^2 - 6x + 9)(2x+5) - 128x - 365 - x(2x^2 + 13x + 20) = 0;$$

$$2x^3 - 7x^2 - 12x + 45 - 128x - 365 - 2x^3 - 13x^2 - 20x = 0;$$

$$-20x^2 - 160x - 320 = 0; \quad x^2 + 8x + 16 = 0; \quad x = -4 \notin D(Y).$$

Ответ: \emptyset (решения нет).

$$5. \left(\frac{36x^2}{5x^2+13x-6} - \frac{5x-2}{x+3} \right) : \frac{11x-2}{x^2-2x-5} - \frac{28x-x^2}{2-5x} = 5.$$

$$5x^2 + 13x - 6 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169+120}}{10} = \frac{-13 \pm 17}{10}; \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases};$$

$$5x^2 + 13x - 6 = 5(x+3) \left(x - \frac{2}{5} \right) = (x+3)(5x-2);$$

$$\left(\frac{36x^2}{(x+3)(5x-2)} - \frac{5x-2}{x+3} \right) \cdot \frac{x^2-2x-5}{11x-2} - \frac{28x-x^2}{2-5x} = 5; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq \frac{2}{5} \\ x \neq \frac{2}{11} \\ x^2 - 2x - 5 \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{36x^2 - (5x-2)^2}{(x+3)(5x-2)} \cdot \frac{x^2-2x-5}{11x-2} + \frac{28x-x^2}{5x-2} = 5;$$

$$\frac{(6x+5x-2)(6x-5x+2)(x^2-2x-5)}{(x+3)(5x-2)(11x-2)} + \frac{28x-x^2}{5x-2} = 5;$$

$$\frac{(x+2)(x^2-2x-5) + (x+3)(28x-x^2)}{(x+3)(5x-2)} = 5;$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 2x^2 - 4x - 10 - x^3 - 3x^2 + 28x^2 + 84x}{(x+3)(5x-2)} = 5;$$

$$\frac{25x^2 + 75x - 10}{(x+3)(5x-2)} = 5;$$

$$25x^2 + 75x - 10 = 25x^2 + 65x - 30; \quad 10x = -20; \quad x = -2 \in D(Y).$$

Ответ: $x = -2$.

$$6. \frac{81x^4 + 135x^2 + 1}{27x^3 + 3x} = 7,7; \quad | \cdot 10 \qquad D(Y): x \neq 0;$$

$$810x^4 + 1350x^2 + 10 = 77 \cdot 27x^3 + 3 \cdot 77x;$$

$$810x^4 - 2079x^3 + 1350x^2 - 231x + 10 = 0.$$

Да... Желание решать уравнение «в лоб» что-то отпало. Попробуем иначе.

$$\frac{x^2 \left(81x^2 + 135 + \frac{1}{x^2} \right)}{3x^2 \left(9x + \frac{1}{x} \right)} = 7,7. \quad \text{Ну теперь ясно,}$$

$$\text{положим } 9x + \frac{1}{x} = t; \quad 81x^2 + 2 \cdot 9x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = t^2,$$

$$\text{тогда } 81x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 18.$$

$$\text{Уравнение примет вид } \frac{t^2 - 18 + 135}{3t} = 7,7.$$

$$t^2 - 23,1t + 117 = 0 \quad | \cdot 10; \quad 10t^2 - 231t + 1170 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{231 \pm \sqrt{(231)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 1170}}{20} = \frac{231 \pm \sqrt{53361 - 46800}}{20} = \frac{231 \pm \sqrt{6561}}{20};$$

$$t_{1,2} = \frac{231 \pm 81}{20}; \quad \begin{cases} t = \frac{78}{5} \\ t = \frac{15}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 9x + \frac{1}{x} = \frac{78}{5} \\ 9x + \frac{1}{x} = \frac{15}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 45x^2 - 78x + 5 = 0 \\ 18x^2 - 15x + 2 = 0 \end{cases};$$

$$x_{1,2} = \frac{39 \pm \sqrt{39^2 - 5 \cdot 45}}{45}; \quad \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ x = \frac{1}{15} \end{cases};$$

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 8 \cdot 18}}{36}; \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{15}; \frac{1}{6}; \frac{2}{3}; 1\frac{2}{3} \right\}.$$

Решение тренировочной карточки 4

$$1. (x+3)^2 + \frac{1}{x^2+6x+9} = 2.$$

$$(x+3)^2 + \frac{1}{(x+3)^2} - 2 = 0;$$

$$\frac{(x+3)^4 - 2(x+3)^2 + 1}{(x+3)^2} = 0; \quad \frac{((x+3)^2 - 1)^2}{(x+3)^2} = 0;$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x+3+1=0 \\ x+3-1=0; \\ x \neq -3 \end{cases} & \begin{cases} x = -4 \\ x = -2. \\ x \neq -3 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $\{-4; -2\}$.

$$2. \frac{(2-x)(2x^2-5x+3)}{x^3-3x^2-4x+12} - \frac{3x^2+4x-7}{3x^2+13x+14} = -3;$$

$$a) x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0;$$

$$(x^3 - 4x) - (3x^2 - 12) = 0; \quad x(x^2 - 4) - 3(x^2 - 4) = 0;$$

$$(x^2 - 4)(x - 3) = 0; \quad (x - 2)(x + 2)(x - 3) = 0;$$

$$б) 3x^2 + 13x + 14 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 168}}{6} = \frac{-13 \pm 1}{6}; \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

$$3x^2 + 13x + 14 = 3(x+2)\left(x + \frac{7}{3}\right) = (x+2)(3x+7);$$

$$в) 3x^2 + 4x - 7 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 21}}{3} = \frac{-2 \pm 5}{3}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

$$3x^2 + 4x - 7 = (3x+7)(x-1);$$

$$г) 2x^2 - 5x + 3 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases};$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (2x - 3)(x - 1);$$

$$\frac{(2-x)(2x-3)(x-1)}{(x-2)(x+2)(x-3)} - \frac{(3x+7)(x-1)}{(x+2)(3x+7)} = -3$$

$$-\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}(2x-3+x-3) = -3;$$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-3)} = 1;$$

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 6;$$

$$x = 4 \in D(Y).$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2 \\ x \neq 3 \\ x \neq -2\frac{1}{3} \end{cases}$$

О т в е т : $x = 4$.

$$3. \frac{16}{x^2+5x-6} - \frac{20}{x^2+5x+6} = 1.$$

$$\text{Пусть } x^2 + 5x - 6 = t; \quad x^2 + 5x + 6 = t + 12.$$

Уравнение приобретет вид

$$\frac{16}{t} - \frac{20}{t+12} = 1;$$

$$D(Y): \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq -12 \end{cases}$$

$$16(t+12) - 20t = t(t+12);$$

$$16t + 192 - 20t = t^2 + 12t;$$

$$t^2 + 16t - 192 = 0;$$

$$\begin{cases} t = -24 \\ t = 8 \end{cases} \in D(Y); \quad \begin{cases} x^2 + 5x - 6 = -24 \\ x^2 + 5x - 6 = 8 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 18 = 0; D < 0 \\ x^2 + 5x - 14 = 0; \begin{cases} x = -7 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

О т в е т : $\{-7; 2\}$.

$$4. \frac{x}{x^2-3x+8} - \frac{x}{x^2+2x+8} = \frac{5}{24}.$$

$$\frac{x}{x\left(x-3+\frac{8}{x}\right)} - \frac{x}{x\left(x+2+\frac{8}{x}\right)} = \frac{5}{24}; \quad \frac{1}{x-3+\frac{8}{x}} - \frac{1}{x+2+\frac{8}{x}} = \frac{5}{24}.$$

Пусть $x-3+\frac{8}{x}=t$; $x+2+\frac{8}{x}=t+5$;

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t+5} = \frac{5}{24};$$

$$D(Y): \quad \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq -5 \end{cases}$$

$$24(t+5) - 24t = 5t(t+5);$$

$$24t + 120 - 24t = 5t(t+5); \quad 5t^2 + 25t - 120 = 0$$

$$t^2 + 5t - 24 = 0;$$

$$\begin{cases} t = -8 \\ t = 3 \end{cases} \in D(Y); \quad \begin{cases} x-3+\frac{8}{x} = -8 \\ x-3+\frac{8}{x} = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2+5x+8=0; D < 0 \\ x^2-6x+8=0; \begin{cases} x=4 \\ x=2. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $\{2; 4\}$.

$$5. x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = 0; \quad (:x^2)$$

$$x^2 + 5x + 8 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0; \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0.$$

Положим $x + \frac{1}{x} = t$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

$$(t^2 - 2) + 5t + 8 = 0; \quad t^2 + 5t + 6 = 0;$$

$$\begin{cases} t = -3 \\ t = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + \frac{1}{x} = -3 \\ x + \frac{1}{x} = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 3x + 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ x = -1 \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}; -1; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

$$6. (x+1)^4 + (x-4)^4 = 97.$$

Положим $t = \frac{x+1+x-4}{2} = x-1,5$.

Тогда $x = t+1,5$, и уравнение примет вид

$(t+2,5)^4 + (t-2,5)^4 = 97$. Учитывая распределение коэффициентов, получим

$$\begin{aligned} (t+2,5)^4 &= t^4 + 4t^3 \cdot 2,5 + 6t^2 \cdot 2,5^2 + 4t(2,5)^3 + (2,5)^4 \\ + (t-2,5)^4 &= t^4 - 4t^3 \cdot 2,5 + 6t^2 \cdot 2,5^2 - 4t(2,5)^3 + (2,5)^4 \end{aligned}$$

$$(t+2,5)^4 + (t-2,5)^4 = 2t^4 + 0 + 12t^2(2,5)^2 + 0 + 2(2,5)^4$$

Значит $2t^4 + 75t^2 + 2\frac{625}{16} = 97$;

$$16t^4 + 600t^2 + 625 = 776 ;$$

$$16t^4 + 600t^2 - 151 = 0 ;$$

$$(t^2)_{1,2} = \frac{-300 \pm \sqrt{300^2 + 16 \cdot 151}}{16} = \frac{-300 \pm 4\sqrt{75^2 + 151}}{16} = \frac{-75 \pm 76}{4} ;$$

$$\left[\begin{array}{l} t^2 = \frac{1}{4} \\ t^2 = -\frac{151}{4} \end{array} ; \right. \left[\begin{array}{l} x - 1,5 = \frac{1}{2} \\ x - 1,5 = -\frac{1}{2} \end{array} ; \right. \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Ответ: $\{1; 2\}$.

Решение тренировочной карточки 5

$$1. \frac{3x^2-5x-8}{2x^2-5x-3} = \frac{3}{2};$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4};$$

$$6x^2 - 10x - 16 = 6x^2 - 15x - 9; \quad 5x = 7; \quad x = 1, 4 \in D(Y);$$

Ответ: $\{1, 4\}$.

$$2. \left(\frac{x-2}{2x^2-3x-2} - \frac{x+1}{3x^2+x-2} \right) (6x^2 - x - 2) = 0;$$

$$a) 2x^2 - 3x - 2 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases};$$

$$б) 3x^2 + x - 2 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases};$$

$$в) 6x^2 - x - 2 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}; \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases};$$

$$6x^2 - x - 2 = (3x-2)(2x+1);$$

$$\left(\frac{x-2}{(2x+1)(x-2)} - \frac{x+1}{(3x-2)(x+1)} \right) (3x-2)(2x+1) = 0; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3x-2} \right) (3x-2)(2x+1) = 0;$$

$$\frac{(3x-2-2x-1)(3x-2)(2x+1)}{(2x+1)(3x-2)} = 0;$$

$$x-3=0; \quad x=3 \in D(Y).$$

Ответ: $x=3$.

$$3. (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0.$$

$$\text{Сгруппируем: } (x+1)(x+7) \cdot (x+3)(x+5)+15=0;$$

$$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=0.$$

$$\text{Положим } x^2+8x+7=t, \text{ тогда } x^2+8x+15=t+8;$$

$$t(t+8)+15=0; \quad t^2+8t+15=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t = -5 \\ t = -3 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x^2+8x+7 = -5 \\ x^2+8x+7 = -3 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x^2+8x+12 = 0 \\ x^2+8x+10 = 0 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = -2 \\ x = -4 + \sqrt{6} \\ x = -4 - \sqrt{6} \end{array} \right].$$

$$\text{О т в е т: } \left\{ -4 - \sqrt{6}; -6; -2; -4 + \sqrt{6} \right\}.$$

$$4. \frac{6}{x^2-3x+2} + \frac{8}{x^2+3x-4} = 1; \quad \frac{6}{(x-1)(x-2)} + \frac{8}{(x+4)(x-1)} = 1; \quad D(Y): \left\{ \begin{array}{l} x \neq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq -4 \end{array} \right.$$

$$6(x+4)+8(x-2)=(x-1)(x-2)(x+4);$$

$$6x+24+8x-16=(x^2-3x+2)(x+4);$$

$$14x+8=x^3-3x^2+2x+4x^2-12x+8; \quad x^3+x^2-24x=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2+x-24 = 0 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{-1+\sqrt{97}}{2} \\ x = -\frac{1+\sqrt{97}}{2} \end{array} \right] \in D(Y).$$

$$\text{О т в е т: } \left\{ -\frac{1+\sqrt{97}}{2}; 0; \frac{-1+\sqrt{97}}{2} \right\}.$$

$$5. \frac{(x^2-x+1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{49}{45}.$$

Вынесем x^2 в числителе и знаменателе в левой части уравнения.

$$\left((x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \right); \quad \frac{x^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x} \right)^2}{x^2 \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right)} = \frac{49}{45}.$$

Получим $\frac{\left(x - 1 + \frac{1}{x} \right)^2}{\left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right)} = \frac{49}{45}$. Положим $x + \frac{1}{x} = t$.

$$\frac{(t-1)^2}{(t-2)t} = \frac{49}{45}; \quad 45(t^2 - 2t + 1) = 49t^2 - 98t; \quad D(Y): \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq 2 \end{cases}.$$

$$4t^2 - 8t - 45 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{4} = \frac{4 \pm 14}{4}; \quad \begin{cases} t = \frac{9}{2} \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases} \in D(Y);$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = \frac{9}{2} \\ x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2 - 9x + 2 = 0 \\ 2x^2 + 5x + 2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{9 + \sqrt{65}}{4} \\ x = \frac{9 - \sqrt{65}}{4} \\ x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ -2; \frac{9 - \sqrt{65}}{4}; -\frac{1}{2}; \frac{9 + \sqrt{65}}{4} \right\}$.

6. $9x - 6x^2 - \frac{2x^2 - 3x - 4}{2x^2 - 3x + 1} = 4$.

Положим $2x^2 - 3x = t$, тогда уравнение приобретет вид:

$$-3t - \frac{t-4}{t+1} = 4; \quad -3t^2 - 3t - t + 4 = 4t + 4; \quad D(Y): t \neq -1.$$

$$-3t^2 - 3t - t + 4 = 4t + 4; \quad 3t^2 + 8t = 0;$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{8}{3} \end{cases} \in D(Y); \quad \begin{cases} 2x^2 - 3x = 0 \\ 2x^2 - 3x = -\frac{8}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 1,5 \\ 6x^2 - 9x + 8 = 0; D < 0 \end{cases}.$$

Ответ: $\{0; 1,5\}$.

Решение тренировочной карточки 6

$$1. \frac{2x^2+7x+6}{3x^2+4x-4} = \frac{(3x+2)^2}{9x^2-4};$$

$$а) 3x^2 + 4x - 4 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{3} = \frac{-2 \pm 4}{3}; \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}; \quad 3x^2 + 4x - 4 = (3x-2)(x+2);$$

$$б) 2x^2 + 7x + 6 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4}; \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases};$$

$$2x^2 + 7x + 6 = (x+2)(2x+3);$$

$$\frac{(x+2)(2x+3)}{(x+2)(3x-2)} - \frac{(3x+2)^2}{(3x-2)(3x+2)} = 0;$$

$$\frac{2x+3}{3x-2} - \frac{3x+2}{3x-2} = 0; \quad 2x+3-3x-2=0;$$

$$x=1 \in D(Y).$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq \frac{2}{3} \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Ответ: $x=1$.

$$2. \frac{4x^2+2x+3}{2x^2+x+1} + \frac{2x^2+x-2}{6x^2+3x-1} = 2.$$

Положим $2x^2 + x + 1 = t$, тогда

$$2x^2 + x - 2 = t - 3; \quad 4x^2 + 2x + 3 = 2t + 1; \quad 6x^2 + 3x - 1 = 3t - 4;$$

$$\frac{2t+1}{t} + \frac{t-3}{3t-4} = 2; \quad (2t+1)(3t-4) + t(t-3) = 2t(3t-4);$$

$$6t^2 - 8t + 3t - 4 + t^2 - 3t - 6t^2 + 8t = 0; \quad t^2 = 4; \quad D(Y): \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=2 \\ t=-2 \end{cases} \in D(Y); \quad \begin{cases} 2x^2 + x + 1 = 2 \\ 2x^2 + x + 1 = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0; \\ 2x^2 + x + 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases} \cdot D < 0$$

Ответ: $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$.

$$3. 0,24(x^2 + 1)^2 + x(x^2 - 1) = 0; \quad | \cdot 25 \quad 6(x^4 + 2x^2 + 1) + 25x^3 - 25x = 0;$$

$$6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0 \quad | : x^2$$

Это возвратное уравнение (косо-симметричное).

$$6x^2 + 25x + 12 - \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2} = 0; \quad 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 12 = 0.$$

Положим $x - \frac{1}{x} = t$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$.

$$6(t^2 + 2) + 25t + 12 = 0; \quad 6t^2 + 25t + 24 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{625 - 576}}{12} = \frac{-25 \pm 7}{12};$$

$$\left[\begin{array}{l} t = -\frac{3}{2}; \\ t = -\frac{8}{3} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x - \frac{1}{x} = -\frac{3}{2} \\ x - \frac{1}{x} = -\frac{8}{3} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} 2x^2 + 3x - 2 = 0 \\ 3x^2 + 8x - 3 = 0 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -3 \\ x = \frac{1}{3} \end{array} \right].$$

Ответ: $\left\{ -3; -2; \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\}$.

$$4. \frac{21}{4x+6} + \frac{x^2-25}{x+2} \left(\frac{6}{25-x^2} + \frac{x}{2x^2-7x-15} \right) = \frac{1}{2}x;$$

$$a) 2x^2 - 7x - 15 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \frac{7 \pm 13}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -\frac{3}{2} \end{array} \right];$$

$$2x^2 - 7x - 15 = (x - 5)(2x + 3);$$

$$\frac{21}{2(2x+3)} + \frac{x^2-25}{x+2} \left(\frac{6}{(5+x)(5-x)} + \frac{x}{(x-5)(2x+3)} \right) = \frac{1}{2}x;$$

$$\frac{21}{2(2x+3)} + \frac{x^2-25}{x+2} \cdot \frac{-6(2x+3)+x(x+5)}{(x-5)(x+5)(2x+3)} = \frac{1}{2}x;$$

$$\frac{21}{2(2x+3)} + \frac{x^2-7x-18}{(x+2)(2x+3)} = \frac{1}{2}x;$$

$$D(Y): \left\{ \begin{array}{l} x \neq -1,5 \\ x \neq 5 \\ x \neq -5 \\ x \neq 2 \end{array} \right.$$

$$6) x^2 - 7x - 18 = 0; \quad \begin{cases} x = 9 \\ x = -2 \end{cases}; \quad 2x^2 - 7x - 18 = (x+2)(x-9);$$

$$\frac{21}{2(2x+3)} + \frac{(x-9)(x+2)}{(x+2)(2x+3)} = \frac{1}{2}x; \quad \frac{21}{2(2x+3)} + \frac{x-9}{2x+3} = \frac{1}{2}x;$$

$$\frac{21+2x-18}{2(2x+3)} = \frac{1}{2}x; \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x; \quad x = 1 \in D(Y).$$

О т в е т : $x = 1$.

$$5. x^4 + (x+4)^4 = 32. \text{ Положим } t = \frac{x+x+4}{2} = x+2, \text{ тогда}$$

$$x = t-2; \quad (t-2)^4 + (t+2)^4 = 32;$$

$$\begin{aligned} (t+2)^4 &= t^4 + 4t^3 \cdot 2 + 6t^2 \cdot 2^2 + 4t \cdot 2^3 + 2^4 \\ + (t-2)^4 &= t^4 - 4t^3 \cdot 2 + 6t^2 \cdot 2^2 - 4t \cdot 2^3 + 2^4 \end{aligned}$$

$$(t+2)^4 + (t-2)^4 = 2t^4 + 12t^2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^4$$

$$t^4 + 24t^2 + 16 = 16; \quad t^2(t^2 + 24) = 0;$$

$$t = 0; \quad t^2 + 24 = 0, \emptyset, \text{ т. е. } x+2 = 0; \quad x = -2.$$

О т в е т : $x = -2$.

$$6. \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{10}{9} \quad \left(-\frac{2}{x(x+2)} \right); \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -2 \end{cases}.$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{10}{9} - \frac{2}{x(x+2)}; \quad \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right)^2 = \frac{10}{9} - \frac{2}{x(x+2)};$$

$$\left(\frac{2}{x(x+2)} \right)^2 = \frac{10}{9} - \frac{2}{x(x+2)}. \text{ Положим } \frac{2}{x(x+2)} = t.$$

$$t^2 + t - \frac{10}{9} = 0; \quad 9t^2 + 9t - 10 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+360}}{18} = \frac{-9 \pm 21}{18};$$

$$\begin{cases} t = -\frac{5}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{2}{x(x+2)} = -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{x(x+2)} = \frac{2}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x^2 + 10x + 6 = 0; D < 0 \\ 2x^2 + 4x - 6 = 0; \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases} \in D(Y)$$

О т в е т : $\{-3; 1\}$.

Решение тренировочной карточки 7

$$1. (x+1)(x^2+2) + (x+2)(x^2+1) = 2.$$

$$x^3 + x^2 + 2x + 2 + x^3 + 2x^2 + x + 2 = 2;$$

$$2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$$

– это возвратное уравнение нечетной степени.

Тогда $x = -1$ – корень.

$$2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \Big|_{x+1}$$

$$\underline{2x^3 + 2x^2} \qquad 2x^2 + x + 2; D < 0$$

$$x^2 + 3x$$

$$\underline{x^2 + x}$$

$$2x + 2$$

$$\underline{2x + 2}$$

$$0$$

Ответ: $x = -1$.

$$2. \frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6.$$

Пусть $x^2 - 4x + 10 = t$, тогда $x^2 - 4x + 6 = t - 4$;

$$\frac{21}{t} - (t - 4) = 0; \quad D(Y): \quad t \neq 0$$

$$t^2 - 4t - 21 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 7 \\ t = -3 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 10 = 7 \\ x^2 - 4x + 10 = -3 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 = 0; \\ x^2 - 4x + 13 = 0; D < 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array} \right].$$

Ответ: $\{1; 3\}$.

$$3. \frac{x+4}{2x^2-4x-6} - \frac{x-3}{2-2x^2} = \frac{x+6}{x^3-3x^2-x+3}.$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0;$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1);$$

$$2 - 2x^2 = 2(1-x)(1+x);$$

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2(x-3) - (x-3) =$$

$$= (x-3)(x^2-1) = (x-3)(x+1)(x-1);$$

$$\frac{x+4}{2(x-3)(x+1)} + \frac{x-3}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x+6}{(x-3)(x+1)(x-1)};$$

$$(x+4)(x-1) + (x-3)(x-3) = 2(x+6);$$

$$x^2 + 3x - 4 + x^2 + 9 - 6x = 2x + 12;$$

$$2x^2 - 5x - 7 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+56}}{4} = \frac{5 \pm 9}{4}; \quad \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ x = -1 \notin D(Y) \end{cases}.$$

$$\text{О т в е т: } x = \frac{7}{2}.$$

$$4. (x-3)^3 + \frac{27}{x^2}(x-3) + 1 = \frac{9}{x}(x-3)^2 + \frac{27}{x^3}; \quad D(Y): x \neq 0$$

Перенесем все в одну сторону.

$$(x-3)^3 - \frac{9}{x}(x-3)^2 + \frac{27}{x^2}(x-3) - \frac{27}{x^3} + 1 = 0.$$

Так как $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$,

$$\left(x-3-\frac{3}{x}\right)^3 + 1 = 0; \quad x-3-\frac{3}{x} = -1;$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0; \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}.$$

$$\text{О т в е т: } \{3; -1\}.$$

$$5. \left(2 - \frac{9x+1}{x^2+6x+1}\right)^2 + \left(2 + \frac{18x+2}{2x^2+3x+1}\right)^2 = 8.$$

$$\left(\frac{2x^2+12x+2-9x-1}{x^2+6x+1}\right)^2 + \left(\frac{4x^2+6x+2+18x+2}{2x^2+3x+1}\right)^2 = 8;$$

$$\left(\frac{2x^2+3x+1}{x^2+6x+1}\right)^2 + \left(\frac{4x^2+24x+4}{2x^2+3x+1}\right)^2 = 8;$$

$$\left(\frac{2x^2+3x+1}{x^2+6x+1}\right)^2 + \left(\frac{4(x^2+6x+1)}{2x^2+3x+1}\right)^2 = 8; \quad D(Y): \begin{cases} x^2+6x+1 \neq 0 \\ 2x^2+3x+1 \neq 0 \end{cases}$$

Пусть $\left(\frac{2x^2+3x+1}{x^2+6x+1}\right)^2 = t \quad (t \geq 0).$

$$t + \frac{16}{t} - 8 = 0; \quad t^2 - 8t + 16 = 0;$$

$$(t-4)^2 = 0; \quad t = 4;$$

$$\left(\frac{2x^2+3x+1}{x^2+6x+1}\right)^2 = 4; \quad \begin{cases} \frac{2x^2+3x+1}{x^2+6x+1} = 2 \\ \frac{2x^2+3x+1}{x^2+6x+1} = -2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x^2+3x+1 = 2x^2+12x+2 \\ 2x^2+3x+1 = -2x^2-12x-2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{9} \in D(Y); \\ 4x^2+15x+3 = 0 \end{cases};$$

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225-48}}{8} = -\frac{15 \pm \sqrt{177}}{8}; \quad \begin{cases} x = -\frac{15+\sqrt{177}}{8} \\ x = -\frac{15-\sqrt{177}}{8} \end{cases} \in D(Y).$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{9}; -\frac{15+\sqrt{177}}{8}; -\frac{15-\sqrt{177}}{8}\right\}.$

$$6. \quad x^4 = \frac{11x+6}{6x+11};$$

$$D(Y): \quad x \neq -1\frac{5}{6}$$

$$6x^5 + 11x^4 - 11x - 6 = 0;$$

$$f(1) = 0;$$

$$\begin{array}{r}
 6x^5 + 11x^4 - 11x - 6 \quad | \quad \underline{\hspace{10em} x-1 \hspace{10em}} \\
 \underline{6x^5 - 6x^4} \hspace{10em} \quad 6x^4 + 17x^3 + 17x^2 + 17x + 6 \\
 17x^4 - 11x \hspace{10em} \\
 \underline{17x^4 - 17x^3} \hspace{10em} \\
 17x^3 - 11x \hspace{10em} \\
 \underline{17x^3 - 17x^2} \hspace{10em} \\
 17x^2 - 11x \hspace{10em} \\
 \underline{17x^2 - 17x} \hspace{10em} \\
 6x - 6 \hspace{10em} \\
 \underline{6x - 6} \hspace{10em} \\
 0
 \end{array}$$

$$6x^4 + 17x^3 + 17x^2 + 17x + 6 = 0; \quad | :x^2$$

$$6x^2 + 17x + 17 + \frac{17}{x} + \frac{6}{x^2} = 0;$$

Пусть $x + \frac{1}{x} = t$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$;

$$6(t^2 - 2) + 17t + 17 = 0; \quad 6t^2 + 17t + 5 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 120}}{12} = \frac{-17 \pm 13}{12};$$

$$\left[\begin{array}{l} t = -\frac{1}{3}; \\ t = -\frac{5}{2} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{3}; \\ x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} 3x^2 + x + 3 = 0; D < 0 \\ 2x^2 + 5x + 2 = 0; \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ответ: $\left\{ -2; -\frac{1}{2}; 1 \right\}$.

Решение тренировочной карточки 8

$$1. \quad 7\left(\frac{x^2+9}{3x}\right) - 2\left(\frac{x^4+81}{9x^2}\right) = 9.$$

$$7\left(\frac{x}{3} + \frac{3}{x}\right) - 2\left(\frac{x^2}{9} + \frac{9}{x^2}\right) = 9.$$

Положим $\frac{x}{3} + \frac{3}{x} = t$, тогда $\frac{x^2}{9} + \frac{9}{x^2} = t^2 - 2$.

Уравнение приобретет вид

$$7t - 2(t^2 - 2) = 9; \quad 2(t^2 - 2) - 7t + 9 = 0; \quad 2t^2 - 7t + 5 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4}; \quad \begin{cases} t = \frac{5}{2}; \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{3}{x} = \frac{5}{2}; \\ \frac{x}{3} + \frac{3}{x} = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2 - 15x + 18 = 0 \\ x^2 - 3x + 9 = 0; D < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{15+9}{4} \\ x = \frac{15-9}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 6 \\ x = 1\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{1\frac{1}{2}; 6\right\}$.

$$2. \quad \frac{x^3+2x+2}{x^3+2x+3} = \frac{x^3+x-3}{x^3+x-2}.$$

Выделим целую часть в левой и правой части уравнения.

$$\frac{(x^3+2x+3)-1}{x^3+2x+3} = \frac{(x^3+x-2)-1}{x^3+x-2}; \quad 1 - \frac{1}{x^2+2x+3} = 1 - \frac{1}{x^3+x-2};$$

$$\frac{1}{x^3+2x+3} = \frac{1}{x^3+x-2}; \quad D(Y): \quad \begin{cases} x^3+2x+3 \neq 0 \\ x^3+x-2 \neq 0 \end{cases}$$

Учитывая свойства пропорций, получим

$$x^3+x-2 = x^3+2x+3;$$

$$x = -5 \in D(Y).$$

Ответ: $x = -5$.

$$3. \frac{2x+0,8}{x^2-x-20} - \frac{x+4}{x^2-3x-10} = \frac{x}{x^2+3x-4};$$

$$а) x^2 - x - 20 = (x-5)(x+4);$$

$$б) x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2);$$

$$в) x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4);$$

$$\frac{2x+0,8}{(x-5)(x+4)} - \frac{x+4}{(x-5)(x+2)} - \frac{x}{(x-1)(x+4)} = 0; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \\ x \neq -4 \end{cases}$$

$$(2x+0,8)(x+2)(x-1) - (x+4)(x+4)(x-1) - x(x-5)(x+2) = 0;$$

$$(2x+0,8)(x^2+x-2) - (x^2+8x+16)(x-1) - x(x^2-3x-10) = 0;$$

$$2x^3 + 2x^2 - 4x + 0,8x^2 + 0,8x - 1,6 - x^3 - 8x^2 - 16x + x^2 +$$

$$+ 8x + 16 - x^3 + 3x^2 + 10x = 0;$$

$$-1,2x^2 - 1,2x + 14,4 = 0;$$

$$12x^2 + 12x - 144 = 0;$$

$$x^2 + x - 12 = 0;$$

$$\begin{cases} x = -4; \notin D(Y) \\ x = 3. \end{cases}$$

О т в е т : $x = 3$.

$$4. x^4 + x^3 - 9x^2 - 2x + 2 = 0.$$

$$f(1) \neq 0; \quad f(-1) \neq 0; \quad f(2) \neq 0; \quad f(-2) \neq 0.$$

Значит рациональных корней нет, это не возвратное уравнение. Как же быть? Так как нам дано уравнение четвертой степени, то в принципе его можно представить в виде произведения двух уравнений второй степени.

$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = (b_0x^2 + b_1x + b_2)(c_0x^2 + c_1x + c_2)$,
 где $a_0; a_1; a_2; a_3; a_4; b_0; b_1; b_2; c_0; c_1; c_2 \in \mathbb{Z}$

В данном случае предположим, что $b_0; c_0; b_2; c_2$ — положительные.

а) Так как $a_0 = 1$, то $b_0 = 1$ и $c_0 = 1$;

б) $a_4 = 2$, значит или $b_2 = \pm 2$ и $c_2 = \pm 1$, или $b_2 = \pm 1$ и $c_2 = \pm 2$, тогда

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 2x + 2 = (x^2 + b_1x + 2)(x^2 + c_1x + 1), \text{ но}$$

$$(x^2 + b_1x + 2)(x^2 + c_1x + 1) =$$

$$= x^4 + b_1x^3 + 2x^2 + c_1x^3 + b_1c_1x^2 + 2c_1x + x^2 + b_1x + 2 =$$

$$= x^4 + (b_1 + c_1)x^3 + (3 + b_1c_1)x^2 + (2c_1 + b_1)x + 2.$$

$$\begin{cases} b_1 + c_1 = 1 \\ 3 + b_1c_1 = -9 \\ 2c_1 + b_1 = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1 + c_1 = 1 \\ b_1c_1 = -12 \\ 2c_1 + b_1 = -2 \end{cases}.$$

Рассмотрим $\begin{cases} b_1 + c_1 = 1 \\ b_1c_1 = -12 \end{cases}$.

По теореме, обратной теореме Виета, эта система порождает уравнение $m^2 - m - 12 = 0$.

Значит или $c_1 = -3$ и $b_1 = 4$ или $c_1 = 4$ и $b_1 = -3$, но $b_1 + 2c_1 = -2$, тогда $c_1 = -3$ и $b_1 = 4$.

Значит $x^4 + x^3 - 9x^2 - 2x + 2 = (x^2 + 4x + 2)(x^2 - 3x + 1) = 0$.

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 2 = 0 \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -2 + \sqrt{2} \\ x = -2 - \sqrt{2} \\ x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Так как найдены все четыре корня уравнения, то случай с отрицательными $b_0; c_0; b_2; c_2$ рассматривать нет смысла.

Ответ: $\left\{ -2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right\}$.

$$5. \frac{4x^2(43x^2+71x-602)}{(x^2+x-14)^3} = 9.$$

Преобразуем уравнение, вынесем в числителе и знаменателе x^3 :

$$\frac{4x^3\left(43x+71-\frac{602}{x}\right)}{x^3\left(x+1-\frac{14}{x}\right)^3} = 9. \quad \text{Так как } 602 = 43 \cdot 14 \text{ и } 71 = 43 + 28,$$

$$\text{то } \frac{4\left(43\left(x-\frac{14}{x}\right)+43+28\right)}{\left(x-\frac{14}{x}+1\right)^3} = 9.$$

Пусть $x - \frac{14}{x} + 1 = t$, тогда уравнение примет вид

$$\frac{4(43t+28)}{t^3} = 9; \quad 9t^3 - 172t - 112 = 0;$$

$$f(-4) = -9 \cdot 64 + 172 \cdot 4 - 112 = 0;$$

$$9t^3 - 172t - 112 \quad \left| \begin{array}{l} t+4 \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\underline{9t^3 + 36t^2} \quad 9t^2 - 36t - 28$$

$$-36t^2 - 172t$$

$$\underline{-36t^2 - 144t}$$

$$-28t - 112$$

$$\underline{-28t - 112}$$

0

$$9t^2 - 36t - 28 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 252}}{9} = \frac{18 \pm 24}{9}; \quad \left[\begin{array}{l} t = -\frac{2}{3}; \\ t = \frac{14}{3} \end{array} \right.;$$

$$\text{а) } t = -4; \quad x - \frac{14}{x} + 1 = -4; \quad x^2 + 5x - 14 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = -7; \\ x = 2 \end{array} \right.;$$

$$\text{б) } t = -\frac{2}{3}; \quad x - \frac{14}{x} + 1 = -\frac{2}{3}; \quad 3x^2 + 5x - 42 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+504}}{6} = \frac{-5 \pm 23}{6}; \quad \begin{cases} x=3 \\ x=-\frac{14}{3} \end{cases}$$

$$\text{в) } t = \frac{14}{3}; \quad x - \frac{14}{x} + 1 = \frac{14}{3}; \quad 3x^2 - 11x - 42 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121+504}}{6} = \frac{11 \pm 25}{6}; \quad \begin{cases} x=6 \\ x=-\frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\text{О т в е т: } \left\{ -7; -4\frac{2}{3}; -2\frac{1}{3}; 2; 3; 6 \right\}.$$

$$6. \quad x^6 + 1 + (x-1)^6 = 2(x^2 - x + 1).$$

$$(x-1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1, \quad \text{тогда}$$

$$x^6 + 1 + x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 - 2x^2 + 2x - 2 = 0;$$

$$2x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 13x^2 - 4x = 0;$$

$$\text{а) } x = 0.$$

$$\text{б) } 2x^5 - 6x^4 + 15x^3 - 20x^2 + 13x - 4 = 0; \quad f(1) = 2 - 6 + 15 - 20 + 13 - 4 = 0,$$

$$\begin{array}{r} \text{тогда} \quad 2x^5 - 6x^4 + 15x^3 - 20x^2 + 13x - 4 \quad \Big| \quad \underline{\hspace{2cm} x-1 \hspace{2cm}} \\ \underline{2x^5 - 2x^4} \hspace{10cm} 2x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 9x + 4 \\ \quad -4x^4 + 15x^3 \hspace{10cm} \\ \quad \underline{-4x^4 + 4x^3} \hspace{10cm} \\ \hspace{10cm} 11x^3 - 20x^2 \\ \hspace{10cm} \underline{11x^3 - 11x^2} \hspace{10cm} \\ \hspace{10cm} -9x^2 + 13x \\ \hspace{10cm} \underline{-9x^2 + 9x} \hspace{10cm} \\ \hspace{10cm} 4x - 4 \\ \hspace{10cm} \underline{4x - 4} \hspace{10cm} \\ \hspace{10cm} 0 \end{array}$$

$$\text{Положим } \varphi(x) = 2x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 9x + 4.$$

$$\begin{aligned} \varphi(1) \neq 0; & \quad \varphi(4) \neq 0; & \quad \varphi(-1) \neq 0; & \quad \varphi(-4) \neq 0; \\ \varphi(2) \neq 0; & \quad \varphi\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0; & \quad \varphi(-2) \neq 0; & \quad \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0. \end{aligned}$$

Значит, рациональных корней нет.

Известно, что многочлен четвертой степени можно представить, как произведение квадратных трехчленов.

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = (b_0x^2 + b_1x + b_2)(c_0x^2 + c_1x + c_2),$$

где $a_0; a_1; a_2; a_3; a_4; b_0; b_1; b_2; c_0; c_1; c_2 \in \mathbb{Z}$.

В данном случае, так как

$$a_0 = 2 \text{ и } a_4 = 4 \text{ рискнем предположить, что}$$

$$2x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 9x + 4 = (2x^2 + b_1x + 1)(x^2 + c_1x + 4).$$

Возможность возможностью, но надо чтобы это было технически осуществимо.

$$\begin{aligned} (2x^2 + b_1x + 1)(x^2 + c_1x + 4) &= \\ = 2x^4 + b_1x^3 + x^2 + 2c_1x^3 + b_1c_1x^2 + c_1x + 8x^2 + 4b_1x + 4 &= 0; \\ 2x^4 + (b_1 + 2c_1)x^3 + (9 + b_1c_1)x^2 + (c_1 + 4b_1)x + 4 &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b_1 + 2c_1 = -4 \\ 9 + b_1c_1 = 11 \\ c_1 + 4b_1 = -9 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 + 2c_1 = -4 \\ 4b_1 + c_1 = -9 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = -2 \\ c_1 = -1 \end{cases}.$$

Это подходит и для $9 + b_1c_1 = 11$. Итак нам повезло.

$$2x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 9x + 4 = (2x^2 - 2x + 1)(x^2 - x + 4).$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} 2x^2 - 2x + 1 = 0; D < 0 \\ x^2 - x + 4 = 0; D < 0 \end{cases} \quad \text{. Ответ: } \{0; 1\}.$$

Примечание. Можно проще.

Так как $2x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 9x + 4 = 2(x^4 - 2x^3 + x^2) + 9x^2 - 9x + 4 =$
 $= 2(x^2 - x)^2 + 9x^2 - 9x + 4 > 0 \quad \forall x \quad (9x^2 - 9x + 4 > 0 \quad \forall x),$
 то других корней, кроме найденных, нет.

Зачетные карточки

Карточка 1

$$1. \frac{(5x+4)(3x-2)}{x+3} = \frac{3x^2+4x-4}{1-x}.$$

$$2. \frac{(x^2+3x)^2 - 2x^2 - 6x - 8}{x^4 - 5x^2 + 4} - \frac{4x^2 + 16x + 16}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} = 3.$$

$$3. 8x^3 + 4x^2 - 10x + 3 = 0.$$

$$4. \frac{5}{x^2+10x+25} - \frac{7}{x^2+3x-10} = \frac{4}{4-x^2}.$$

$$5. \frac{4x+5}{4x^2+13x+10} = 2x+3.$$

$$6. \frac{2x}{2x^2+5x+3} + \frac{13x}{2x^2-x+3} + 6 = 0.$$

Карточка 2

$$1. \frac{2x-1}{4x^2+4x-3} = \frac{2x-3}{9-4x^2} + 2x+4.$$

$$2. \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+6}{x+2} + \frac{x-6}{x-2}.$$

$$3. \frac{x^2+x}{x^2+x+1} - \frac{x^2+x+2}{x^2+x-2} = 1.$$

$$4. 31\left(2x + \frac{1}{2x}\right) - 5\left(4x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) = 36.$$

$$5. \frac{4x+6}{x+2} - \frac{5x-30}{3x^2-10x-8} : \left(\frac{4(x+4)}{3x^2-10x-8} - \frac{3x+2}{x^2-16}\right) = 1.$$

$$6. x^4 - 10x^3 + 90x - 81 = 0.$$

Карточка 3

$$1. \frac{4x^2+13x+10}{4x+5} = \frac{1}{2x+3}.$$

$$2. \frac{8x^2-22x+15}{4x-15} \left(\frac{16x-24}{16x^2-48x+35} + \frac{9}{8x^2-46x+56} + \frac{9}{42x-40-8x^2} \right) = 2x+3.$$

$$3. \left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right) (x+4)(x+6) = 12.$$

$$4. \frac{4(x^2+1)}{x^2-10x+1} - \frac{5x}{x^2+1} + 3,5 = 0.$$

$$5. x^3 + \frac{55x^2+22x-8}{8x^2-22x-55} = 0.$$

$$6. (x+1)^5 + (x-3)^5 = 242(x-1).$$

Карточка 4

$$1. \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+4x-12} - \frac{178x+748}{2x^2+19x+42} = x.$$

$$2. x^2(2x-1) + x(x^2-1) = 2(x+1)^2.$$

$$3. (2x^2+3x-1)^2 - 5(2x^2+3x+3) + 24 = 0.$$

$$4. \frac{24}{x^2+2x} = \frac{12}{x^2+x} + x^2 + x.$$

$$5. \left(\frac{9-2x}{x^2+x-42} + \frac{x-6}{2x^2+5x-63} \right) \left(\frac{2}{x-5} + \frac{6}{x-3} \right) = 1.$$

$$6. x^6 + 1 + (x+1)^6 = 2(x^2+x+1)^3.$$

Карточка 5

1. $(x^2 + 2x - 1)(2x^2 + 4x - 1) = 10.$

2. $\frac{6x^6 - 11x^5 + 11}{x} = 11x + \frac{11}{x} - 6.$

3. $\frac{4x^2 + 10x + 9}{2x^2 + 5x + 4} + \frac{2x^2 + 5x + 1}{6x^2 + 15x + 8} = 2.$

4. $\frac{6}{x^2 - 3x - 4} + \frac{3x - 6}{x^2 - x - 2} = \frac{x}{x + 1}.$

5. $x^2 + \frac{36x^2}{(x+6)^2} = 13.$

6. $(x-1)^4 + (x+4)^4 = 97.$

Карточка 6

1. $\frac{x^2 + 2x - 15}{x - 2} = \frac{48}{8 - x^3}.$

2. $4x^3 - 21x + 10 = 0$

3. $\frac{3x(7x^2 - 92x - 147)(7x^2 - 20x - 147)}{(x^2 - 8x - 21)^3} = -10.$

4. $\left(\frac{9}{2x^2 - 11x + 5} + \frac{9}{5 + 9x - 2x^2} + \frac{8x}{4x^2 - 1}\right) \cdot \frac{2x^2 + x}{2x - 9} - \frac{10}{x - 5} = 2.$

5. $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6.$

6. $(x+1)^5 + (5-x)^5 = 1056.$

Карточка 7

$$1. \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{4}{x}\right)\left(x - \frac{9}{x}\right) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

$$2. (x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0.$$

$$3. (x^2 - 6x - 9)^2 = x^3 - 4x^2 - 9x.$$

$$4. \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x-4} + \frac{6}{x-5} = 0. \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$5. x^4 - x^3 - 9x^2 + 2x + 2 = 0.$$

$$6. 1 + \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{5}{x^2}.$$

Карточка 8

$$1. \frac{3x^2 + 30x + 75}{x^3 + 5x^2 - 25x - 125} - \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{(x^2 - 4x)^2 - 2x^2 + 8x - 15} = 2.$$

$$2. \frac{x-2}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{x-4}{x-3} + \frac{x+4}{x+3} - \frac{28}{15}.$$

$$3. x^2 + \frac{66(x^2 - 610)}{(x+26)^2} = 15.$$

$$4. \frac{(x-1)^4 + (x-3)^4}{4,1} = \left(x - 1 - \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \left(x - 3 + \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^3.$$

$$5. \frac{(x^2 + x + 1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{49}{45}.$$

$$6. 12x^6 + 52x^5 - 13x^4 - 156x^3 - 13x^2 + 52x + 12 = 0.$$

7

Решения

Решение проверочной работы 1

1. $5(x+3) - 4(3-2x) + 3(4-5x) = 2(4x-5);$
 $5x+15-12+8x+12-15x=8x-10; \quad -10x=-25; \quad x=2,5.$

Ответ: $x=2,5.$

2. $\frac{x+1}{4} - \frac{2x-3}{3} = 5 \quad | \cdot 12; \quad 3(x+1) - 4(2x-3) = 5 \cdot 12;$
 $3x+3-8x+12=60; \quad -5x=60-15; \quad -5x=45; \quad x=-9.$

Ответ: $x=-9.$

3. $\frac{1-x}{4} - \frac{2(2x+1)}{5} = 1\frac{1}{4} \quad | \cdot 20; \quad 5(1-x) - 8(2x+1) = 5 \cdot 5;$
 $5-5x-16x-8=25; \quad -21x=28; \quad 3x=-4; \quad x=-1\frac{1}{3}.$

Ответ: $x=-1\frac{1}{3}.$

4. $\frac{3(3x-2)}{4} - \frac{2(2x+1)}{3} = 1\frac{1}{4}; \quad \frac{9(3x-2) - 8(2x+1)}{12} = \frac{5}{4} \quad | \cdot 12;$
 $27x-18-16x-8=15; \quad 11x=15+26; \quad x=\frac{41}{11}; \quad x=3\frac{8}{11}.$

Ответ: $x=3\frac{8}{11}.$

$$5. \frac{2(2x-1)-3}{3} - \frac{3-2x}{2} = 5; \quad 2(2(2x-1)-3) - 3(3-2x) = 5 \cdot 6;$$

$$4(2x-1) - 6 - 9 + 6x = 30; \quad 8x - 4 - 15 + 6x = 30;$$

$$14x = 49; \quad x = \frac{49}{14}; \quad x = \frac{7}{2}; \quad x = 3,5.$$

О т в е т: $x = 3,5$.

$$6. 3,2(3x+0,3) - 2\frac{2}{7}(0,2-3x) = -1;$$

$$9,6x + 0,96 - \frac{16}{7} \cdot \frac{1}{5} + \frac{16}{7} \cdot 3x = -1 \quad | \cdot 35;$$

$$9,6 \cdot 35x + 0,96 \cdot 35 - 16 + 16 \cdot 5 \cdot 3x = -35;$$

$$336x + 33,6 - 16 + 240x = -35; \quad 576x = -35 - 17,6; \quad 576x = -52,6;$$

$$x = -\frac{526}{5760}; \quad x = -\frac{263}{2880}.$$

О т в е т: $x = -\frac{263}{2880}$.

$$7. \frac{4,2-0,3(5x+1)}{3} - \frac{3,2-1,2(2-3x)}{4} = 1 \quad | \cdot 10; \quad \frac{42-3(5x+1)}{3} - \frac{32-12(2-3x)}{4} = 10;$$

$$14 - (5x+1) - (8-3(2-3x)) = 10; \quad 14 - 5x - 1 - 8 + 3(2-3x) = 10;$$

$$-5x + 5 + 6 - 9x = 10; \quad -14x = -1; \quad x = \frac{1}{14}.$$

О т в е т: $x = \frac{1}{14}$.

$$8. \frac{1,5-1,8(2x-1)}{0,6} - \frac{0,4-1,5(3+4x)}{1,8} = 5;$$

$$\frac{10(1,5-1,8(2x-1))}{10 \cdot 0,6} - \frac{10(0,4-1,5(3+4x))}{10 \cdot 1,8} = 5;$$

$$\frac{15-18(2x-1)}{6} - \frac{4-15(3+4x)}{18} = 5 \quad | \cdot 18;$$

$$3(15-36x+18) - 4 + 15(3+4x) = 5 \cdot 18;$$

$$99 - 108x - 4 + 45 + 60x = 90; \quad -48x = 90 - 140; \quad -48x = -50;$$

$$x = \frac{50}{48}.$$

О т в е т: $x = 1\frac{1}{24}$.

$$9. \quad 3x - (4x - 3(2x - 1)) = -14; \quad 3x - (4x - 6x + 3) = -14;$$

$$3x - (-2x + 3) = -14; \quad 3x + 2x - 3 = -14; \quad 5x = -11.$$

Ответ: $x = -2, 2$.

$$10. \quad -0,5(2x + 3) + 0,1(x - 3) = 0,4(1 - 2x) - 3 \quad | \cdot 10;$$

$$-5(2x + 3) + 1 \cdot (x - 3) = 4(1 - 2x) - 30; \quad -9x + 8x = -26 + 18;$$

$$-x = -8; \quad x = 8.$$

Ответ: $x = 8$.

$$11. \quad \frac{(3x-1) \cdot 0,4-3}{(5x+3) \cdot 0,7-0,6\left(6x-\frac{1}{6}\right)} = 3; \quad \frac{10(0,4(3x-1)-3)}{10\left(0,7(5x+3)-0,6\left(6x-\frac{1}{6}\right)\right)} = 3;$$

$$\frac{4(3x-1)-30}{7(5x+3)-6\left(6x-\frac{1}{6}\right)} = 3; \quad \frac{12x-4-30}{35x+21-36x+1} = 3;$$

$$\frac{12x-34}{22-x} = 3;$$

$$D(Y): 22 - x \neq 0; \quad x \neq 22$$

$$12x - 34 = 3(22 - x); \quad 12x - 34 = 66 - 3x; \quad 15x = 100;$$

$$x = \frac{100}{15}; \quad x = 6\frac{2}{3} \in D(Y).$$

Ответ: $x = 6\frac{2}{3}$.

$$12. \quad \frac{3x+1-2(4-3x)}{6(2x-1)-7(3x-2)-1} = -1; \quad \frac{3x+1-8+6x}{12x-6-21x+14-1} = -1;$$

$$\frac{9x-7}{-9x+7} = -1;$$

$$D(Y): -9x + 7 \neq 0; \quad x \neq \frac{7}{9}$$

$$9x - 7 = 9x - 7; \quad 0 = 0.$$

Любое $x \in D(Y)$ – решение.

Ответ: $\forall x \neq \frac{7}{9}$ – есть решение

или $x \in \left(-\infty; \frac{7}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}; \infty\right)$.

Решение проверочной работы 2

$$1. \quad 4(2x-3)-3(2x+1)+2(3x+1)=-1; \quad 8x-12-6x-3+6x+2=-1;$$

$$8x=-1+13; \quad 8x=12; \quad x=\frac{12}{8}; \quad x=\frac{3}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x=1\frac{1}{2}.$$

$$2. \quad \frac{2(x+2)-3(x-1)}{3(x+1)-4(x-1)}=1; \quad \frac{2x+4-3x+3}{3x+3-4x+4}=1;$$

$$\frac{7-x}{-x+7}=1;$$

$$D(Y): -x+7 \neq 0; \quad x \neq 7$$

После сокращения получим $1=1$ – истина, значит $\forall x \in D(Y)$ – есть решение.

$$\text{Ответ: } \forall x \neq 7 \text{ или } (-\infty; 7) \cup (7; \infty).$$

$$3. \quad \frac{1,4(x-1)+1,2(3-x)}{2,1(x+2)-0,7(x-3)}=2; \quad \frac{10(1,4(x-1)+1,2(3-x))}{10(2,1(x+2)-0,7(x-3))}=2;$$

$$\frac{14(x-1)+12(3-x)}{21(x+2)-7(x-3)}=2; \quad \frac{14x-14+36-12x}{21x+42-7x+21}=2;$$

$$D(Y): 14x+63 \neq 0; \quad 2x+9 \neq 0; \quad x \neq -4,5$$

$$2x+22=28x+126; \quad -26x=104; \quad x=-4 \in D(Y).$$

$$\text{Ответ: } x=-4.$$

$$4. \quad (2x-3)(5x+1)-5x(2x+3)+16x=3;$$

$$10x^2-15x+2x-3-10x^2-15x+16x=3; \quad -12x=6; \quad x=-\frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x=-\frac{1}{2}.$$

$$5. \quad 4x^2-(x-2)(4x+3)=16;$$

$$4x^2-(4x^2-8x+3x-6)=16; \quad 4x^2-4x^2+5x+6=16;$$

$$5x=10; \quad x=2.$$

$$\text{Ответ: } x=2.$$

$$6. \frac{(4x-1)(x+2)-(2x+1)(2x-1)-4(x-1)}{2x^2-(2x+1)(x-2)} = 1;$$

$$\frac{4x^2-x+8x-2-(4x^2-1)-4x+4}{2x^2-(2x^2-3x-2)} = 1; \quad \frac{4x^2+7x-2-4x^2+1-4x+4}{2x^2-2x^2+3x+2} = 1;$$

$$\frac{3x+3}{3x+2} = 1;$$

$$D(Y): \quad 3x+2 \neq 0; \quad x \neq -\frac{2}{3}$$

$$3x+3 = 3x+2;$$

$$1 = 0 \text{ — ложь.}$$

Ответ: $x \in \emptyset$.

$$7. (12x-5)^2 - (8x+1)^2 - (7-10x)(3-8x) = 78.$$

$$144x^2 - 120x + 25 - (64x^2 + 16x + 1) - (21 - 30x - 56x + 80x^2) = 78;$$

$$144x^2 - 120x + 25 - 64x^2 - 16x - 1 - 21 + 86x - 80x^2 = 78;$$

$$-50x = 75; \quad x = -\frac{75}{50}; \quad x = -1,5.$$

Ответ: $x = -1,5$.

$$8. \frac{(13x-1)^2 - (12x+3)^2}{(4x+5)^2 - 41(x-1)(x+1)} = -1;$$

$$\frac{169x^2 - 26x + 1 - (144x^2 + 72x + 9)}{16x^2 + 40x + 25 - 41(x^2 - 1)} = -1; \quad \frac{169x^2 - 26x + 1 - 144x^2 - 72x - 9}{16x^2 + 40x + 25 - 41x^2 + 41} = -1;$$

$$\frac{25x^2 - 98x - 8}{-25x^2 + 40x + 66} = -1;$$

$$D(Y): \quad -25x^2 + 40x + 66 \neq 0$$

$$25x^2 - 98x - 8 = 25x^2 - 40x - 66;$$

$$-58x = -58; \quad x = 1.$$

Выясним $1 \in D(Y)$ или нет.

Пусть $y(x) = -25x^2 + 40x + 66$,

тогда $y(1) = -25 + 40 + 66 \neq 0$.

Значит $1 \in D(Y)$.

Ответ: $x = 1$.

$$9. (5x-1)^2(x+1) - (6-5x)^2(x+3) = 28.$$

$$(25x^2 - 10x + 1)(x+1) - (36 - 60x + 25x^2)(x+3) = 28;$$

$$25x^3 - 10x^2 + x + 25x^2 - 10x + 1 - (36x - 60x^2 + 25x^3 + 108 - 180x + 75x^2) = 28;$$

$$25x^3 + 15x^2 - 9x + 1 - 25x^3 - 15x^2 + 144x - 108 = 28;$$

$$135x = 135; \quad x = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

$$10. (x-1)(x+2)(3-2x) - 2(x+1)(x-2)(3-x) = (7x-1)(1-x);$$

$$\begin{aligned} \text{а) } (x-1)(x+2)(3-2x) &= (x^2 + x - 2)(3-2x) = \\ &= 3x^2 + 3x - 6 - 2x^3 - 2x^2 + 4x = -2x^3 + x^2 + 7x - 6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } (x+1)(x-2)(3-x) &= (x^2 - x - 2)(3-x) = \\ &= 3x^2 - 3x - 6 - x^3 + x^2 + 2x = -x^3 + 4x^2 - x - 6; \end{aligned}$$

$$\text{в) } (7x-1)(1-x) = 7x - 1 - 7x^2 + x = -7x^2 + 8x - 1.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$-2x^3 + x^2 + 7x - 6 - 2(-x^3 + 4x^2 - x - 6) = -7x^2 + 8x - 1;$$

$$-2x^3 + x^2 + 7x - 6 + 2x^3 - 8x^2 + 2x + 12 = -7x^2 + 8x - 1;$$

$$9x - 8x = -1 - 6; \quad x = -7.$$

Ответ: $x = -7$.

Решение проверочной работы 3

$$1. 2x+1+\frac{2x-1}{6}=\frac{7x-13}{4} \quad | \cdot 12; \quad 12(2x+1)+2(2x-1)=3(7x-13);$$

$$24x+12+4x-2=21x-39; \quad 7x=-49; \quad x=-7.$$

О т в е т: $x=-7$.

$$2. \frac{3(2x-2,5)}{5}-2x+2,5=\frac{2-x}{2} \quad | \cdot 10;$$

$$6(2x-2,5)-20x+25=5(2-x); \quad 12x-15-20x+25=10-5x;$$

$$-8x+5x=0; \quad 3x=0; \quad x=0.$$

О т в е т: $x=0$.

$$3. \frac{(2x-1)^2}{8}-\frac{x(2x-3)}{4}=\frac{1+0,25x}{12} \quad | \cdot 24;$$

$$3(2x-1)^2-6x(2x-3)=2(1+0,25x);$$

$$3(4x^2-4x+1)-12x^2+18x=2+0,5x;$$

$$12x^2-12x+3-12x^2+18x=2+0,5x; \quad 6x-0,5x=2-3;$$

$$5,5x=-1; \quad x=-\frac{1}{5,5}; \quad x=-\frac{10}{55}; \quad x=-\frac{2}{11}.$$

О т в е т: $x=-\frac{2}{11}$.

$$4. \frac{\left(x+1\frac{1}{3}\right)^2}{4}+\frac{1,5x(1-x)}{9}=\frac{(x-4)(x+4)}{12} \quad | \cdot 36;$$

$$9\left(x+1\frac{1}{3}\right)^2+4 \cdot 1,5x(1-x)=3(x^2-16);$$

$$\left(3\left(x+1\frac{1}{3}\right)\right)^2+6x(1-x)=3x^2-48;$$

$$(3x+4)^2+6x-6x^2-3x^2=-48; \quad 9x^2+24x+16+6x-9x^2=-48;$$

$$30x=-64; \quad x=-\frac{64}{30}; \quad x=-2\frac{4}{30}; \quad x=-2\frac{2}{15}.$$

О т в е т: $x=-2\frac{2}{15}$.

$$5. (3x+2)(3x-2)-(3x-4)^2=28; \quad 9x^2-4-(9x^2-24x+16)=28;$$

$$9x^2-4-9x^2+24x-16=28; \quad 24x=28+20; \quad 24x=48; \quad x=2.$$

О т в е т: $x=2$.

$$6. (2x-1)(1+2x+4x^2)-4x(2x^2-3)=23;$$

$$(2x-1)(4x^2+2x+1)-8x^3+12x=23; \quad 8x^3-1-8x^3+12x=23;$$

$$12x=24; \quad x=2.$$

О т в е т: $x=2$.

$$7. \frac{x}{x-1} = \frac{4x}{x+5} - 3; \quad D(Y): \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+5 \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

$$\frac{x^{|x+5|}}{x-1} - \frac{4x^{|x-1|}}{x+5} + 3 \frac{|(x-1)(x+5)|}{(x-1)(x+5)} = 0; \quad \frac{x(x+5)-4x(x-1)+3(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+5)} = 0;$$

$$x^2+5x-4x^2+4x+3(x^2-x+5x-5)=0;$$

$$-3x^2+9x+3x^2+12x-15=0; \quad 21x=15; \quad x=\frac{15}{21}; \quad x=\frac{5}{7} \in D(Y).$$

О т в е т: $x=\frac{5}{7}$.

$$8. \frac{1,5x^2}{9x^2-1} - \frac{3x+1}{3-9x} - \frac{3x-1}{6x+2} = 0; \quad \frac{1,5x^2}{(3x-1)(3x+1)} - \frac{3x+1}{3(1-3x)} - \frac{3x-1}{2(3x+1)} = 0;$$

$$\frac{1,5x^{2|6|}}{(3x-1)(3x+1)} + \frac{3x+1|^{2(3x+1)}}{3(3x-1)} - \frac{3x-1|^{3(3x-1)}}{2(3x+1)} = 0;$$

$$\frac{6 \cdot 1,5x^2+2(3x+1)^2-3(3x-1)^2}{6(3x-1)(3x+1)} = 0; \quad \frac{9x^2+2(3x+1)^2-3(3x-1)^2}{6(3x-1)(3x+1)} = 0;$$

$$\frac{9x^2+2(9x^2+6x+1)-3(9x^2-6x+1)}{6(3x-1)(3x+1)} = 0;$$

$$\frac{9x^2+18x^2+12x+2-27x^2+18x-3}{6(3x-1)(3x+1)} = 0; \quad \frac{30x-1}{6(3x-1)(3x+1)} = 0;$$

$$\begin{cases} 30x - 1 = 0 \\ 6(3x - 1)(3x + 1) \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{30} \\ 6\left(\frac{1}{10} - 1\right)\left(\frac{1}{10} + 1\right) \neq 0 - \text{истина.} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{1}{30}$.

$$9. \quad (x-2)^{\frac{2+x}{2+x}} + \frac{4}{2+x} - \frac{x^3+6}{x^2+2x} = 0; \quad \frac{(2+x)(x-2)+4}{2+x} - \frac{x^3+6}{x(x+2)} = 0;$$

$$\frac{x^{2\frac{2+x}{2+x}}}{x+2} - \frac{x^3+6}{x(x+2)} = 0; \quad \frac{x^3 - (x^3+6)}{x(x+2)} = 0; \quad \frac{x^3 - x^3 - 6}{x(x+2)} = 0;$$

$-6 = 0$ — ложь.

Ответ: $x \in \emptyset$ (решения нет).

$$10. \quad \frac{x+3}{(2x+3)(2x-3)} - \frac{3-x}{(2x+3)^2} = \frac{1}{2x-3};$$

$$\frac{x+3 \cdot \frac{2x+3}{2x+3}}{(2x+3)(2x-3)} - \frac{3-x \cdot \frac{2x-3}{2x+3}}{(2x+3)^2} - \frac{1 \cdot \frac{(2x+3)^2}{2x-3}}{2x-3} = 0;$$

$$\frac{(2x+3)(x+3) - (3-x)(2x-3) - (2x+3)^2}{(2x+3)^2(2x-3)} = 0;$$

$$\frac{2x^2+9x+9 - (6x-2x^2-9+3x) - (4x^2+12x+9)}{(2x+3)^2(2x-3)} = 0;$$

$$\frac{2x^2+9x+9+2x^2-9x+9-4x^2-12x-9}{(2x+3)^2(2x-3)} = 0; \quad \frac{9-12x}{(2x+3)^2(2x-3)} = 0;$$

$$\begin{cases} 9-12x = 0 \\ (2x+3)^2(2x-3) \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ \left(\frac{3}{2}+3\right)^2\left(\frac{3}{2}-3\right) \neq 0 - \text{истина} \end{cases}; \quad x = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $x = \frac{3}{4}$.

$$11. \frac{7-18x}{x^3+1} + \frac{15}{x^2-x+1} = \frac{3}{1-x^2}.$$

$$\frac{7-18x \frac{1-x}{x^3+1}}{x^3+1} + \frac{15 \frac{(x+1)(1-x)}{x^2-x+1}}{x^2-x+1} - \frac{3 \frac{x^2-x+1}{1-x^2}}{1-x^2} = 0;$$

$$\frac{(1-x)(7-18x)+15(x+1)(1-x)-3(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)(1-x)} = 0;$$

$$\frac{7-7x-18x+18x^2+15(1-x^2)-3x^2+3x-3}{(x+1)(1-x)(x^2-x+1)} = 0;$$

$$\frac{4-22x+15x^2+15-15x^2}{(x+1)(1-x)(x^2-x+1)} = 0; \quad \frac{-22x+19}{(x+1)(1-x)(x^2-x+1)} = 0;$$

$$\begin{cases} -22x+19=0 \\ (x+1)(1-x)(x^2-x+1) \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{19}{22} \end{cases}$$

$$\left[\left(\frac{19}{22} + 1 \right) \left(\frac{19}{22} - 1 \right) \left(\left(\frac{19}{22} \right)^2 - \frac{19}{22} + 1 \right) \right] \neq 0 - \text{ истина.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{19}{22}.$$

$$12. \frac{2x-1}{2x+2} \cdot \left(\frac{2x}{1-4x+4x^2} - \frac{4x^2+2x}{8x^3-1} \right) = \frac{2x}{8x^3-1};$$

$$(a-b)^2 = (b-a)^2;$$

$$\frac{2x-1}{2x+2} \cdot \left(\frac{2x \frac{4x^2+2x+1}{(1-2x)^2}}{(1-2x)^2} - \frac{4x^2+2x \frac{2x-1}{(2x-1)(4x^2+2x+1)}}{(2x-1)(4x^2+2x+1)} \right) - \frac{2x}{(2x-1)(4x^2+2x+1)} = 0;$$

$$\frac{2x-1}{2(x+1)} \cdot \frac{2x(4x^2+2x+1) - (2x-1)2x(2x+1)}{(2x-1)^2(4x^2+2x+1)} - \frac{2x}{(2x-1)(4x^2+2x+1)} = 0;$$

$$\frac{2x-1}{2(x+1)} \cdot \frac{8x^3+4x^2+2x-2x(4x^2-1)}{(2x-1)^2(4x^2+2x+1)} - \frac{2x}{(2x-1)(4x^2+2x+1)} = 0;$$

$$\frac{(2x-1)(8x^3+4x^2+2x-8x^3+2x)}{2(x+1)(2x-1)^2(4x^2+2x+1)} - \frac{2x}{(2x-1)(4x^2+2x+1)} = 0;$$

$$\frac{4x^2+4x}{2(x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)} - \frac{2x \cdot 2^{2(x+1)}}{(2x-1)(4x^2+2x+1)} = 0;$$

$$\frac{4x^2+4x-4x^2-4x}{2(x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)} = 0;$$

$$\frac{0}{2(x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)} = 0, \text{ т. е. любое } x \in D(Y).$$

Значит надо выяснить, когда есть решение.

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 2x-1 \neq 0 \\ 4x^2+2x+1 \neq 0 \end{cases} ; \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ 4x^2+2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \neq 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \neq 0 - \text{ истина} \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$4x^2+2x+1 = \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ — называется выделением полного квадрата.

Ответ: любое $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ — есть решение или

$(-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$ — есть решение.

**Ответы к проверочным карточкам заданий
на решение простейших квадратных уравнений****Карточка 1**

1. $\left\{ -\frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right\}$

2. $\left\{ -\frac{3}{2}; \frac{2}{3} \right\}$

3. $\left\{ -\frac{1}{3}; 3\frac{1}{2} \right\}$

4. $\left\{ \frac{1}{5}; \frac{1}{2} \right\}$

5. $\{-3; 1,5\}$

6. $\left\{ \frac{1}{5}; 1\frac{1}{3} \right\}$

7. $\{-2,5; 2\}$

8. $\left\{ -\frac{3}{4}; \frac{1}{3} \right\}$

9. $\left\{ \frac{1}{3}; \frac{5}{6} \right\}$

10. $\left\{ -\frac{1}{2}; 2\frac{2}{3} \right\}$

Карточка 2

1. $\left\{ -\frac{2}{3}; 1\frac{1}{2} \right\}$

2. $\left\{ -\frac{1}{3}; -\frac{1}{4} \right\}$

3. $\left\{ -\frac{3}{4}; \frac{1}{2} \right\}$

4. $\left\{ -3\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right\}$

5. $\left\{ -1\frac{1}{3}; -\frac{1}{5} \right\}$

6. $\{-1,5; 3\}$

7. $\left\{ -\frac{5}{6}; -\frac{1}{3} \right\}$

8. $\{-2; 2,5\}$

9. $\left\{ -2\frac{2}{3}; \frac{1}{2} \right\}$

10. $\left\{ -\frac{1}{4}; \frac{2}{3} \right\}$

Карточка 3

1. $\left\{-2; 1\frac{1}{3}\right\}$

2. $\left\{\frac{2}{3}; 1\frac{1}{2}\right\}$

3. $\left\{-\frac{2}{7}; 3\right\}$

4. $\left\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{5}\right\}$

5. $\left\{-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}$

6. $\left\{-5; -\frac{3}{4}\right\}$

7. $\left\{-\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right\}$

8. $\left\{-1\frac{1}{2}; 4\right\}$

9. $\left\{-3; -1\frac{1}{5}\right\}$

10. $\left\{-\frac{3}{8}; 2\right\}$

Карточка 4

1. $\left\{-1\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right\}$

2. $\left\{-\frac{1}{2}; 1\frac{1}{5}\right\}$

3. $\left\{-1\frac{1}{3}; 2\right\}$

4. $\left\{-3; \frac{2}{7}\right\}$

5. $\left\{\frac{3}{4}; 5\right\}$

6. $\left\{\frac{5}{18}; 1\right\}$

7. $\left\{-3; 1\frac{1}{2}\right\}$

8. $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right\}$

9. $\left\{-2; \frac{3}{8}\right\}$

10. $\left\{-4; 1\frac{1}{2}\right\}$

Решение проверочной работы 4

$$1. \sqrt{3}x^2 - 2(\sqrt{3} + 2\sqrt{6})x + 8\sqrt{6} = 0; \quad | : \sqrt{3}$$

$$x^2 - 2(1 + 2\sqrt{2})x + 8\sqrt{2} = 0;$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= 1 + 2\sqrt{2} \pm \sqrt{(1 + 2\sqrt{2})^2 - 8\sqrt{2}} = 1 + 2\sqrt{2} \pm \sqrt{1 + 2 \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 - 8\sqrt{2}} = \\ &= 1 + 2\sqrt{2} \pm \sqrt{1 - 4\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2} = 1 + 2\sqrt{2} \pm (1 - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 4\sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \{2; 4\sqrt{2}\}.$$

$$2. (2x+1)^2(x-5) = (x-1)^2(4x-5).$$

$$(4x^2 + 4x + 1)(x - 5) = (x^2 - 2x + 1)(4x - 5);$$

$$\begin{aligned} 4x^3 + 4x^2 + x - 20x^2 - 20x - 5 &= 4x^3 - 8x^2 + 4x - 5x^2 + 10x - 5; \\ -3x^2 - 33x &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -11 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \{0; -11\}.$$

$$3. \frac{27x^3 + 125}{3x + 5} + 5 + 48x = 0; \quad D(Y): 3x + 5 \neq 0; \quad x \neq -1\frac{2}{3}.$$

$$\frac{(3x+5)(9x^2-15x+25)}{3x+5} + 5 + 48x = 0;$$

$$9x^2 - 15x + 25 + 5 + 48x = 0; \quad 9x^2 + 33x + 30 = 0;$$

$$3x^2 + 11x + 10 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 120}}{6} = \frac{-11 \pm 1}{6};$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = -1\frac{2}{3} \notin D(Y). \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = -2.$$

$$4. \frac{2x^2+7x+6}{3x^2+4x-4} = \frac{(3x+2)^2}{9x^2-4}$$

$$а) \quad 3x^2 + 4x - 4 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{3} = \frac{-2 \pm 4}{3}; \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases};$$

$$3x^2 + 4x - 4 = 3(x+2)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (x+2)(3x-2);$$

$$б) \quad 2x^2 + 7x + 6 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4}; \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = -1,5 \end{cases};$$

$$2x^2 + 7x + 6 = 2(x+2)(x+1,5) = (x+2)(2x+3);$$

$$\frac{(x+2)(2x+3)}{(x+2)(3x-2)} = \frac{(3x+2)^2}{(3x+2)(3x-2)}; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq \pm \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\frac{2x+3}{3x-2} = \frac{3x+2}{3x-2}; \quad 2x+3 = 3x+2; \quad x=1 \in D(Y).$$

О т в е т : $x=1$.

$$5. \left(\frac{15}{88-32x} - \frac{5}{8} + \frac{1}{2}x \right)^2 = 1; \quad D(Y): x \neq 2,75.$$

$$\begin{cases} \frac{15}{8(11-4x)} - \frac{5}{8} + \frac{1}{2}x = 1 \\ \frac{15}{8(11-4x)} - \frac{5}{8} + \frac{1}{2}x = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{15-5(11-4x)+4(11-4x)x}{8(11-4x)} = 1 \\ \frac{15-5(11-4x)+4(11-4x)x}{8(11-4x)} = -1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 15 - 55 + 20x + 44x - 16x^2 = 88 - 32x \\ 15 - 55 + 20x + 44x - 16x^2 = -88 + 32x \end{cases};$$

$$\begin{cases} 16x^2 - 96x + 128 = 0 \\ 16x^2 - 32x - 48 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 8 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \\ x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \in D(Y).$$

О т в е т : $\{-1; 2; 3; 4\}$.

$$6. \frac{4}{x^2-10x+25} + \frac{1}{25-x^2} = \frac{1}{x+5}; \quad D(Y): x \neq \pm 5;$$

$$\frac{4}{(x-5)^2} - \frac{1}{(x-5)(x+5)} - \frac{1}{x+5} = 0; \quad 4x+20 - (x-5) - (x-5)^2 = 0;$$

$$4x+20 - x+5 - x^2 + 10x - 25 = 0; \quad x^2 - 13x = 0; \quad \begin{cases} x=0 \\ x=13 \end{cases} \in D(Y).$$

О т в е т : $\{0; 13\}$.

$$7. \frac{2x-2}{2x^2-9x+10} = \frac{x-1}{4x^2-16x+15}.$$

$$a) 2x^2 - 9x + 10 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{4} = \frac{9 \pm 1}{4}; \quad \begin{cases} x=2,5 \\ x=2 \end{cases};$$

$$2x^2 - 9x + 10 = 2(x-2)(x-2,5) = (x-2)(2x-5);$$

$$b) 4x^2 - 16x + 15 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{4} = \frac{8 \pm 2}{4}; \quad \begin{cases} x=2,5 \\ x=1,5 \end{cases}; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 1,5 \\ x \neq 2,5 \end{cases}$$

$$4x^2 - 16x + 15 = 4(x-1,5)(x-2,5) = (2x-3)(2x-5);$$

$$(x-1) \left(\frac{2}{(x-2)(2x-5)} - \frac{1}{(2x-3)(2x-5)} \right) = 0;$$

$$\frac{(x-1)(2(2x-3)-(x-2))}{(x-2)(2x-5)(2x-3)} = 0; \quad \frac{(x-1)(3x-4)}{(x-2)(2x-5)(2x-3)} = 0; \quad \begin{cases} x=1 \\ x=1\frac{1}{3} \end{cases} \in D(Y).$$

О т в е т : $\left\{1; 1\frac{1}{3}\right\}$.

$$8. \frac{9}{8x^3+12x^2-18x-27} - \frac{1}{4x^2-12x+9} = \frac{2}{9-4x^2};$$

$$a) 8x^3 + 12x^2 - 18x - 27 = (8x^3 - 27) + (12x^2 - 18x) =$$

$$= (2x-3)(4x^2 + 6x + 9) + 6x(2x-3) = (2x-3)(4x^2 + 12x + 9) =$$

$$= (2x-3)(2x+3)^2;$$

$$\text{б) } 4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2; \quad D(Y): x \neq \pm 1,5$$

$$\text{в) } 9 - 4x^2 = (3 - 2x)(3 + 2x);$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{9}{(2x-3)(2x+3)^2} - \frac{1}{(2x-3)^2} + \frac{2}{(2x-3)(2x+3)} = 0;$$

$$9(2x-3) - (2x+3)^2 + 2(2x-3)(2x+3) = 0;$$

$$18x - 27 - 4x^2 - 12x - 9 + 8x^2 - 18 = 0; \quad 4x^2 + 6x - 54 = 0;$$

$$2x^2 + 3x - 27 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+216}}{4} = \frac{-3 \pm 15}{4}; \quad \begin{cases} x = -4,5 \\ x = 3 \end{cases} \in D(Y).$$

Ответ: $\{-4,5; 3\}$.

$$9. \frac{2x+13}{2x-5} : \left(\frac{24}{2x^2+3x-20} + \frac{8}{x^2-16} - \frac{3}{2x^2-13x+20} \right) = x+4.$$

$$\text{а) } 2x^2 + 3x - 20 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{4} = \frac{-3 \pm 13}{4}; \quad \begin{cases} x = 2,5 \\ x = -4 \end{cases};$$

$$2x^2 + 3x - 20 = 2(x+4)(x-2,5) = (x+4)(2x-5);$$

$$\text{б) } 2x^2 - 13x + 20 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169-160}}{4} = \frac{13 \pm 3}{4}; \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = 2,5 \end{cases};$$

$$2x^2 - 13x + 20 = 2(x-4)(x-2,5) = (x-4)(2x-5);$$

$$\frac{2x+13}{2x-5} : \left(\frac{24}{(x+4)(2x-5)} + \frac{8}{(x+4)(x-4)} - \frac{3}{(x-4)(2x-5)} \right) = x+4;$$

$$\frac{2x+13}{2x-5} : \left(\frac{24(x-4) + 8(2x-5) - 3(x+4)}{(x+4)(x-4)(2x-5)} \right) = x+4; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 2,5 \\ x \neq \pm 4 \end{cases}$$

$$\frac{2x+13}{2x-5} : \frac{37x-148}{(x+4)(x-4)(2x-5)} = x+4;$$

$$\frac{2x+13}{2x-5} \cdot \frac{(x+4)\cancel{(x-4)}(2x-5)}{37\cancel{(x-4)}} = x+4; \quad \frac{(2x+13)(x+4)(2x-5)}{37(2x-5)} = x+4;$$

$$(2x+13)(x+4) = 37(x+4); \quad (x+4)(2x+13-37) = 0;$$

$$(x+4)(2x-24)=0; \quad \begin{cases} x=-4 \notin D(Y) \\ x=12 \end{cases}.$$

Ответ: $x=12$.

$$10. \frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3};$$

Выделим полный квадрат
в числителе каждой дроби:

$$\frac{(x+1)^2+1}{x+1} + \frac{(x+4)^2+4}{x+4} = \frac{(x+2)^2+2}{x+2} + \frac{(x+3)^2+3}{x+3}. \quad D(Y): \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \\ x \neq -3 \\ x \neq -4 \end{cases}$$

Выделим целую часть
в каждой дроби:

$$\frac{(x+1)^2}{x+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{(x+4)^2}{x+4} + \frac{4}{x+4} = \frac{(x+2)^2}{x+2} + \frac{2}{x+2} + \frac{(x+3)^2}{x+3} + \frac{3}{x+3};$$

$$x+1 + \frac{1}{x+1} + x+4 + \frac{4}{x+4} = x+2 + \frac{2}{x+2} + x+3 + \frac{3}{x+3};$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+4} = \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}; \quad \frac{x+4+4(x+1)}{(x+1)(x+4)} = \frac{2(x+3)+3(x+2)}{(x+2)(x+3)};$$

$$\frac{5x+8}{(x+1)(x+4)} = \frac{5x+12}{(x+2)(x+3)};$$

$$(5x+8)(x+2)(x+3) = (5x+12)(x+1)(x+4);$$

$$(5x+8)(x^2+5x+6) = (5x+12)(x^2+5x+4);$$

$$5x^3+25x^2+30x+8x^2+40x+48 = 5x^3+25x^2+20x+12x^2+60x+48;$$

$$4x^2+10x=0; \quad \begin{cases} x=0 \\ x=-2,5 \end{cases}.$$

Ответ: $\{0; -2,5\}$.

$$11. a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

Для решения уравнения отметим, что левая часть уравнения есть функция не выше второй степени;

справа – второй степени. Для того чтобы они совпадали, достаточно трех точек совпадения.

Проверим:

$$\text{а) } x = b, \text{ тогда } L = a^2 \cdot 0 + b^2 \frac{(b-c)(b-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \cdot 0 = b^2;$$

$$П = b^2, \text{ отсюда следует, что } L = П;$$

$$\text{б) } x = a, \text{ тогда } L = a^2 \frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot 0 = a^2;$$

$$П = a^2, \text{ отсюда следует, что } L = П;$$

$$\text{в) } x = c, \text{ тогда } L = a^2 \cdot 0 + b^2 \cdot 0 + c^2 \frac{(c-a)(c-b)}{(c-a)(c-b)} = c^2;$$

$$П = c^2, \text{ отсюда следует, что } L = П;$$

Левая и правая часть уравнения при трех значениях совпадают, тогда мы имеем дело с тождеством для любых допустимых значений букв $a; b; c$ ($a \neq b; b \neq c; a \neq c$).

Ответ: любое x – есть решение этого уравнения при $a \neq b; b \neq c; a \neq c$.

$$12. \frac{x-4}{x^2+3x-10} + \frac{x}{x^2-3x-4} = \frac{2x-0,8}{x^2+x-20};$$

$$\frac{x-4}{(x+5)(x-2)} + \frac{x}{(x-4)(x+1)} = \frac{2x-0,8}{(x+5)(x-4)}; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq -1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$(x-4)^2(x+1) + x(x+5)(x-2) = (2x-0,8)(x+1)(x-2);$$

$$(x^2-8x+16)(x+1) + x(x^2+3x-10) - (2x-0,8)(x^2-x-2) = 0;$$

$$x^3-7x^2+8x+16+x^3+3x^2-10x-2x^3+2,8x^2+3,2x-1,6=0;$$

$$-1,2x^2+1,2x+14,4=0; \quad |:(-1,2)$$

$$x^2-x-12=0; \quad \begin{cases} x=4 \notin D(Y) \\ x=-3 \end{cases}$$

Ответ: $x = -3$.

Решение проверочной работы 5

$$1. |3x+2|=1; \begin{cases} 3x+2=1 \\ 3x+2=-1 \end{cases}; \begin{cases} 3x=1-2 \\ 3x=-1-2 \end{cases}; \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ x=-1 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{-1; -\frac{1}{3}\right\}.$$

$$2. |x^2-3|=2x; \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x^2-3=2x \\ x^2-3=-2x \end{cases}; \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-2x-3=0 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 0 \\ x=3 \\ x=-1 \\ x=1 \\ x=-3 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \{1; 3\}.$$

$$3. \left| \frac{x-4}{x^2+3x-4} \right|=1; \begin{cases} \frac{x-4}{x^2+3x-4}=1 \\ \frac{x-4}{x^2+3x-4}=-1 \end{cases}; \begin{cases} x-4=x^2+3x-4 \\ x-4=-x^2-3x+4 \\ x^2+3x-4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x^2+2x=0 \\ x^2+4x-8=0 \\ x \neq -4 \\ x \neq 1 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \\ x=-2+2\sqrt{3} \\ x=-2-2\sqrt{3} \\ x \neq -4 \\ x \neq 1 \end{cases} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \{-2-2\sqrt{3}; -2; 0; -2+2\sqrt{3}\}.$$

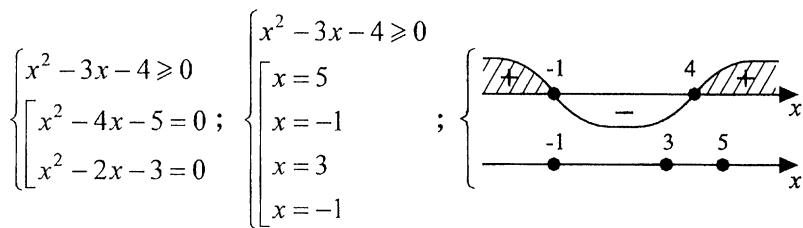
$$4. \frac{x^2-5|x|+6}{x^2-9}=2; \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0 (|x|=x) \\ \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=2 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x-3)}=2 \end{cases}; \\ \begin{cases} x < 0 (|x|=-x) \\ \frac{x^2+5x+6}{x^2-9}=2 \end{cases}; \begin{cases} x < 0 \\ \frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}=2 \end{cases} \end{cases};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \neq 3 \\ x - 2 = 2(x + 3) \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x = -8 \end{array} \right. \emptyset$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ x \neq -3 \\ x + 2 = 2(x - 3) \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ x = 8 \end{array} \right. \emptyset$$

Ответ: \emptyset .

5. $|x+1| = x^2 - 3x - 4$; $\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ x + 1 = x^2 - 3x - 4 \\ x + 1 = -x^2 + 3x + 4 \end{array} \right. ;$



Ответ: $\{-1; 5\}$.

6. $\frac{|x+3|-2}{|x-2|} = 1$; $\left\{ \begin{array}{l} |x+3| = 0 \\ |x| = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x = -3 \\ x = 0 \end{array} \right. ;$

а) $\left\{ \begin{array}{l} x < -3 \\ |x+3| = -x-3 \\ |x| = -x \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x < -3 \\ x+5 = x+2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x < -3 \\ 5 = 2 \end{array} \right. \emptyset$

б) $\left\{ \begin{array}{l} 0 > x \geq -3 \\ |x+3| = x+3 \\ |x| = -x \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} 0 > x \geq -3 \\ x+1 = -x-2 \\ x \neq -2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} 0 > x \geq -3 \\ x = -1,5 \end{array} \right. ;$

$x = -1,5$.


$$в) \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{x+3-2}{x-2} = 1 \end{cases} \begin{cases} |x+3| = x+3 \\ |x| = x \end{cases}; \begin{cases} x \geq 0 \\ x+1 = x-2; \\ x \neq 2 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 = -2 \\ x \neq 2 \end{cases} \quad \emptyset.$$

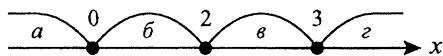
Ответ: $x = -1,5$.

$$7. \quad ||x-5|-3| = 2x; \quad \begin{cases} 2x \geq 0 \\ |x-5|-3 = 2x \\ |x-5|-3 = -2x \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ |x-5| = 2x+3 \\ |x-5| = 3-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ x-5 = 2x+3 \\ x-5 = -2x-3 \end{cases} \\ 0 \leq x \leq 1,5 \\ \begin{cases} x-5 = 3-2x \\ x-5 = 2x-3 \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ x = -8 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \\ 0 \leq x \leq 1,5 \\ \begin{cases} x = 2\frac{2}{3} \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ \emptyset \end{cases}.$$

Ответ: $x = \frac{2}{3}$.

$$8. \quad \frac{|x^2-5x+6|}{|x-2|} = 1; \quad y = x^2 - 5x + 6;$$




$$а) \begin{cases} x < 0 \\ \frac{x^2-5x+6}{-x-2} = 1 \end{cases} \begin{cases} x^2-5x+6 > 0; \\ x < 0; |x| = -x \end{cases} \left(\begin{cases} x^2-5x+6 = x^2-5x+6 \end{cases} \right);$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2-5x+6 = -x-2 \\ x \neq -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2-4x+8 = 0; \\ x \neq -2 \end{cases} \quad D < 0 \quad \emptyset.$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2 > x \geq 0 & \left(\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 > 0; |x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6 \\ x \geq 0; |x| = x \end{array} \right); \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 > x \geq 0 \\ x - 3 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 > x \geq 0 \\ x = 4 \end{cases} \quad \emptyset.$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3 > x > 2 & \left(\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 < 0; |x^2 - 5x + 6| = -x^2 + 5x - 6 \\ x > 0; |x| = x \end{array} \right); \\ \frac{-x^2 + 5x - 6}{x - 2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 > x > 2 \\ 3 - x = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3 > x > 2 \\ x = 2 \end{cases}; \quad \emptyset.$$

$$\text{г) } \begin{cases} x \geq 3 & \left(\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 \geq 0; |x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6 \\ x > 0; |x| = x \end{array} \right); \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x - 3 = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x = 4 \end{cases}; \quad x = 4.$$

Ответ: $\{4\}$.

$$9. \quad \left\| \begin{array}{l} x^2 - 5x - 6 = x^2 - 2x - 3; \\ \left\| \begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ |x^2 - 5x| - 6 = x^2 - 2x - 3; \\ |x^2 - 5x| - 6 = -x^2 + 2x + 3 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

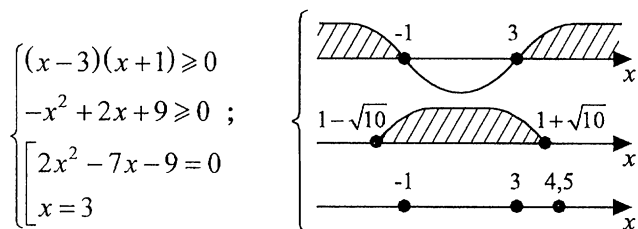
$$\left\| \begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ \left\| \begin{array}{l} |x^2 - 5x| = x^2 - 2x + 3 \\ |x^2 - 5x| = -x^2 + 2x + 9 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{a) } \begin{cases} (x-3)(x+1) \geq 0 \\ |x^2 - 5x| = x^2 - 2x + 3 \quad (x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0 \quad \forall x) \end{cases};$$

$$\begin{cases} (x-3)(x+1) \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 - 5x = x^2 - 2x + 3 \\ x^2 - 5x = -x^2 + 2x - 3 \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} (x-3)(x+1) \geq 0 \\ \begin{cases} x = -1 \\ 2x^2 - 7x + 3 = 0 \end{cases} \end{cases};$$

$$\begin{cases} (x-3)(x+1) \geq 0 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}; \quad \{-1; 3\}.$$

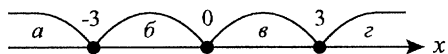
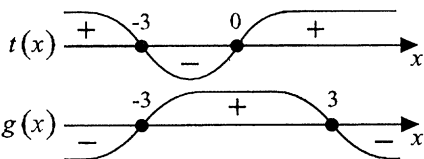
$$\text{б) } \begin{cases} (x-3)(x+1) \geq 0 \\ |x^2 - 5x| = -x^2 + 2x + 9 \end{cases}; \quad \begin{cases} (x-3)(x+1) \geq 0 \\ -x^2 + 2x + 9 \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 - 5x = -x^2 + 2x + 9 \\ x^2 - 5x = x^2 - 2x - 9 \end{cases} \end{cases};$$



Ответ: $\{-1; 3\}$.

$$10. |x^2 + 3x| = |9 - x^2| + 2; \quad \left(\begin{cases} |x^2 + 3x| = 0 \\ |9 - x^2| = 0 \end{cases} \right); \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases}.$$

$$t(x) = x^2 + 3x; \quad g(x) = 9 - x^2$$



$$\text{а) } \begin{cases} x < -3 \left(\begin{array}{l} |x^2 + 3x| = x^2 + 3x \\ |9 - x^2| = x^2 - 9 \end{array} \right); & \begin{cases} x < -3 \\ x = -\frac{7}{3}; \quad \emptyset. \end{cases} \\ x^2 + 3x = x^2 - 9 + 2 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 0 > x \geq -3 \left(\begin{array}{l} |x^2 + 3x| = -x^2 - 3x \\ |9 - x^2| = 9 - x^2 \end{array} \right); & \begin{cases} 0 > x \geq -3 \\ x = -\frac{11}{3}; \quad \emptyset. \end{cases} \\ -x^2 - 3x = 9 - x^2 + 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3 > x \geq 0 \left(\begin{array}{l} |x^2 + 3x| = x^2 + 3x \\ |9 - x^2| = 9 - x^2 \end{array} \right); & \begin{cases} 3 > x \geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 11 = 0; \end{cases} \\ x^2 + 3x = 9 - x^2 + 2 \end{cases}$$

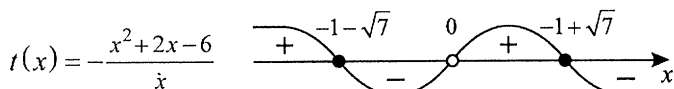
$$\begin{cases} 3 > x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{-3 + \sqrt{97}}{4}; \quad x = \frac{-3 + \sqrt{97}}{4} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{97}}{4} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x \geq 3 \left(\begin{array}{l} |x^2 + 3x| = x^2 + 3x \\ |9 - x^2| = x^2 - 9 \end{array} \right); & \begin{cases} x \geq 3 \\ x = -\frac{7}{3}; \quad \emptyset. \end{cases} \\ x^2 + 3x = x^2 - 9 + 2 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{-3 + \sqrt{97}}{4}.$$

$$11. \left\| |x-1| - \frac{6}{x} \right\| = x+2; \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ |x-1| - \frac{6}{x} = x+2 \\ |x-1| - \frac{6}{x} = -x-2 \end{cases}; \begin{cases} x \geq -2 \\ |x-1| = \frac{x^2+2x+6}{x} \\ |x-1| = -\frac{x^2+2x-6}{x} \end{cases};$$

$$(x^2 + 2x + 6 > 0 (\forall x)); x^2 + 2x - 6 = 0; x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{7}$$



$$a) \begin{cases} x \geq -2 \\ x > 0 \\ |x-1| = \frac{x^2+2x+6}{x} \\ |x-1| = -\frac{x^2+2x+6}{x} \end{cases}; \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = x^2 + 3x + 6 \\ x^2 = -x^2 - x - 6 \end{cases}$$

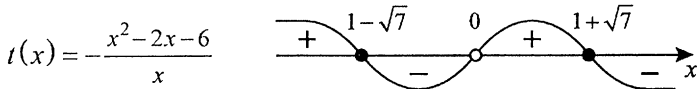
$$\begin{cases} x > 0 \\ x = -2 \\ 2x^2 + x + 6 = 0 \quad D < 0 \end{cases}; \emptyset.$$

$$b) \begin{cases} 0 < x \leq -1 + \sqrt{7} \\ |x-1| = -\frac{x^2+2x-6}{x} \\ |x-1| = \frac{x^2+2x-6}{x} \end{cases}; \begin{cases} 0 < x \leq -1 + \sqrt{7} \\ x^2 = -x^2 - x + 6 \\ x^2 = x^2 + 3x - 6 \end{cases}; \begin{cases} 0 < x \leq -1 + \sqrt{7} \\ 2x^2 + x - 6 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x \leq -1 + \sqrt{7} \\ x = 1,5 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}; \begin{cases} 0 < x \leq -1 + \sqrt{7} \\ x = 1,5 \end{cases}; x = 1,5.$$

Ответ: $\{1, 5\}$.

$$12. \left| |x+1| - \frac{6}{x} \right| = 2-x; \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} |x+1| = \frac{6}{x} + 2 - x; \\ |x+1| = \frac{6}{x} + x - 2 \end{array} \right. \end{cases}$$



$$a) \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ |x+1| = -\frac{x^2-2x-6}{x} \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x+1 = -\frac{x^2-2x-6}{x}; \\ x+1 = \frac{x^2-2x-6}{x} \end{array} \right. \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 = -x^2 + x + 6; \\ x^2 = x^2 - 3x - 6 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2 - x - 6 = 0; \\ x = -2 \end{array} \right. \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1,5; \\ x = -2 \end{array} \right. \end{cases}; \quad x = 2.$$

$$b) \begin{cases} x \leq 1 - \sqrt{7} \\ |x+1| = -\frac{x^2-2x-6}{x} \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leq 1 - \sqrt{7} \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1,5; \\ x = -2 \end{array} \right. \end{cases}; \quad x = -2.$$

$$b) \begin{cases} x \leq 2 \\ |x+1| = \frac{x^2-2x+6}{x} \end{cases}; \quad g(x) = x^2 - 2x + 6 > 0 \quad (\forall x)$$

$$\begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x+1 = \frac{x^2-2x+6}{x}; \\ x+1 = -\frac{x^2-2x+6}{x} \end{array} \right. \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 = x^2 - 3x + 6; \\ x^2 = -x^2 + x - 6 \end{array} \right. \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ 2x^2 - x + 6 = 0 \quad (D < 0) \end{array} \right. \end{cases};$$

$$x = 2.$$

Ответ: $\{-2; 2\}$.

Решение зачетной карточки 1

$$1. \frac{(5x+4)(3x-2)}{x+3} = \frac{3x^2+4x-4}{1-x}.$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$а) 3x^2 + 4x - 4 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{3} = \frac{-2 \pm 4}{3}; \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases};$$

$$3x^2 + 4x - 4 = (3x-2)(x+2).$$

Уравнение приобретает вид:

$$\frac{(5x+4)(3x-2)}{x+3} - \frac{(3x-2)(x+2)}{1-x} = 0; \quad (3x-2) \left(\frac{5x+4}{x+3} + \frac{x+2}{x-1} \right) = 0;$$

$$(3x-2) \frac{(5x+4)(x-1) + (x+2)(x+3)}{(x+3)(x-1)} = 0;$$

$$б) 3x - 2 = 0;$$

$$x = \frac{2}{3} \in D(Y)$$

$$в) (5x+4)(x-1) + (x+2)(x+3) = 0; \quad 5x^2 - x - 4 + x^2 + 5x + 6 = 0;$$

$$6x^2 + 4x + 2 = 0; \quad 3x^2 + 2x + 1 = 0; \quad D < 0.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{3}.$$

$$2. \frac{(x^2+3x)^2 - 2x^2 - 6x - 8}{x^4 - 5x^2 + 4} - \frac{4x^2 + 16x + 16}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} = 3.$$

$$а) x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2);$$

$$б) x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = (x^3 - 8) + (2x^2 - 4x) = (x-2)(x^2 + 2x + 4) + 2x(x-2) =$$

$$= (x-2)(x^2 + 2x + 4 + 2x) = (x-2)(x^2 + 4x + 4) = (x-2)(x+2)^2;$$

$$в) (x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8 = (x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x + 2) =$$

$$= (x+4)(x-1)(x+1)(x+2).$$

Тогда уравнение приобретает вид:

$$\frac{(x+4)(x-1)(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)} - \frac{4(x+2)^2}{(x-2)(x+2)^2} = 3;$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\frac{x+4}{x-2} - \frac{4}{x-2} = 3; \quad x+4-4 = 3(x-2); \quad 3x-6-x=0;$$

$$x=3 \in D(Y). \quad \text{Ответ: } x=3.$$

$$3. 8x^3 + 4x^2 - 10x + 3 = 0; \quad d = \pm 1; \pm 3; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{3}{4}; \pm \frac{1}{8}; \pm \frac{3}{8}.$$

$$f(1) \neq 0; \quad f(-1) \neq 0; \quad f(3) \neq 0; \quad f(-3) \neq 0;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{4} - 10 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 2 - 5 + 3 = 0.$$

$$\text{Тогда } f(x) : \left(x - \frac{1}{2}\right).$$

$$8x^3 + 4x^2 - 10x + 3 \quad \left| \quad x - \frac{1}{2} \right.$$

$$\underline{8x^3 - 4x^2} \qquad 8x^2 + 8x - 6$$

$$8x^2 - 10x$$

$$\underline{8x^2 - 4x}$$

$$-6x + 3$$

$$\underline{-6x + 3}$$

$$0$$

$$8x^2 + 8x - 6 = 0;$$

$$4x^2 + 4x - 3 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{4} =$$

$$= \frac{-2 \pm 4}{4}; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{2}; -1\frac{1}{2} \right\}.$$

$$4. \frac{5}{x^2+10x+25} - \frac{7}{x^2+3x-10} = \frac{4}{4-x^2};$$

$$x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2).$$

$$\frac{5}{(x+5)^2} - \frac{7}{(x+5)(x-2)} + \frac{4}{(x+2)(x-2)} = 0;$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq 2 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

$$5(x+2)(x-2) - 7(x+5)(x+2) + 4(x+5)^2 = 0;$$

$$5(x^2 - 4) - 7(x^2 + 7x + 10) + 4(x+5)^2 = 0;$$

$$5x^2 - 20 - 7x^2 - 49x - 70 + 4x^2 + 40x + 100 = 0; \quad 2x^2 - 9x + 10 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{4} = \frac{9 \pm 1}{4}; \quad \begin{cases} x = 2; \notin D(Y) \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } x = 2, 5.$$

$$5. \frac{4x+5}{4x^2+13x+10} = 2x+3;$$

$$4x^2 + 13x + 10 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169-160}}{8} = \frac{-13 \pm 3}{8}; \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{5}{4} \end{cases};$$

$$4x^2 + 13x + 10 = (4x+5)(x+2); \quad D(Y): \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\frac{4x+5}{(x+2)(4x+5)} = 2x+3; \quad \frac{1}{x+2} = 2x+3; \quad 1 = (2x+3)(x+2);$$

$$1 = 2x^2 + 7x + 6; \quad 2x^2 + 7x + 5 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{4} = \frac{-7 \pm 3}{4}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases} \in D(Y).$$

О т в е т : $\{-1; -2,5\}$.

$$6. \frac{2x}{2x^2+5x+3} + \frac{13x}{2x^2-x+3} + 6 = 0; \quad \frac{2x}{x(2x+5+\frac{3}{x})} + \frac{13x}{x(2x-1+\frac{3}{x})} + 6 = 0.$$

Пусть $2x + \frac{3}{x} + 5 = t$, тогда $2x + \frac{3}{x} - 1 = t - 6$.

$$\frac{2}{t} + \frac{13}{t-6} + 6 = 0; \quad D(Y): \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq 6 \end{cases}$$

$$2(t-6) + 13t + 6t(t-6) = 0; \quad 2t - 12 + 13t + 6t^2 - 36t = 0;$$

$$6t^2 - 21t - 12 = 0; \quad 2t^2 - 7t - 4 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4}; \quad \begin{cases} t = 4 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \in D(Y); \quad \begin{cases} 2x + \frac{3}{x} + 5 = 4 \\ 2x + \frac{3}{x} + 5 = -\frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x^2 + x + 3 = 0; D < 0 \\ 4x^2 + 11x + 6 = 0 \end{cases}; \quad x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121-96}}{8}; \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ x = -2 \end{cases}.$$

О т в е т : $\{-2; -\frac{3}{4}\}$.

Решение зачетной карточки 2

$$1. \frac{2x-1}{4x^2+4x-3} = \frac{2x-3}{9-4x^2} + 2x+4.$$

$$4x^2 + 4x - 3 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{4} = \frac{-2 \pm 4}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{array} \right];$$

$$4x^2 + 4x - 3 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (2x-1)(2x+3);$$

$$\frac{2x-1}{(2x-1)(2x+3)} + \frac{2x-3}{(2x+3)(2x-3)} = 2(x+2);$$

$$D(Y): \left\{ \begin{array}{l} x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq -\frac{3}{2} \\ x \neq \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+3} = 2(x+2); \quad 2 = 2(x+2)(2x+3); \quad 1 = 2x^2 + 7x + 6;$$

$$2x^2 + 7x + 5 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{4} = \frac{-7 \pm 3}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\frac{5}{2} \in D(Y). \end{array} \right.$$

Ответ: $\{-2, 5; -1\}$.

$$2. \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+6}{x+2} + \frac{x-6}{x-2};$$

$$D(Y): \left\{ \begin{array}{l} x \neq \pm 1 \\ x \neq \pm 2 \end{array} \right.$$

$$\frac{(x-1)-2}{x-1} + \frac{(x+1)+2}{x+1} = \frac{(x+2)+4}{x+2} + \frac{(x-2)-4}{x-2};$$

$$1 - \frac{2}{x-1} + 1 + \frac{2}{x+1} = 1 + \frac{4}{x+2} + 1 - \frac{4}{x-2};$$

$$-\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x+2} - \frac{4}{x-2}; \quad \frac{x-1-x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{2(x-2-x-2)}{(x+2)(x-2)};$$

$$\frac{-2}{(x+1)(x-1)} = \frac{-8}{(x+2)(x-2)};$$

$$x^2 - 4 = 4(x^2 - 1); \quad 3x^2 = 0; \quad x = 0 \in D(Y).$$

Ответ: $x = 0$.

$$3. \frac{x^2+x}{x^2+x+1} - \frac{x^2+x+2}{x^2+x-2} = 1.$$

Положим $x^2 + x + 1 = t$.

$$x^2 + x - 2 = t - 3; \quad x^2 + x = t - 1; \quad x^2 + x + 2 = t + 1;$$

$$\frac{t-1}{t} - \frac{t+1}{t-3} = 1; \quad D(Y): \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq 3 \end{cases};$$

$$t^2 - 4t + 3 - t^2 - t = t^2 - 3t;$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0; \quad \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \end{cases} \in D(Y);$$

$$D < 0$$

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = -3 \\ x^2 + x + 1 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + x + 4 = 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

О т в е т : $\{0; -1\}$.

$$4. 31\left(2x + \frac{1}{2x}\right) - 5\left(4x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) = 36.$$

Положим $2x + \frac{1}{2x} = t$;

$$4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} = t^2;$$

$$4x^2 + \frac{1}{4x^2} = t^2 - 2; \quad 31t - 5(t^2 - 2) = 36; \quad 5t^2 - 31t + 26 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{31 \pm \sqrt{961 - 520}}{10} = \frac{31 \pm 21}{10}; \quad \begin{cases} t = 5,2 \\ t = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{2x} = \frac{52}{10} \\ 2x + \frac{1}{2x} = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 20x^2 - 52x + 5 = 0 \\ 4x^2 - 2x + 1 = 0; D < 0 \end{cases};$$

$$x_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 20 \cdot 5}}{20} = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{20} = \frac{26 \pm 24}{20}; \quad \begin{cases} x = 2,5 \\ x = 0,1 \end{cases}.$$

О т в е т : $\{0,1; 2,5\}$.

$$5. \frac{4x+6}{x+2} - \frac{5x-30}{3x^2-10x-8} : \left(\frac{4(x+4)}{3x^2-10x-8} - \frac{3x+2}{x^2-16} \right) = 1.$$

$$3x^2 - 10x - 8 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{3} = \frac{5 \pm 7}{3}; \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$3x^2 - 10x - 8 = 3(x-4)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (x-4)(3x+2); \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq -4 \\ x \neq -2 \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\frac{2(2x+3)}{x+2} - \frac{5(x-6)}{(x-4)(3x+2)} : \left(\frac{4(x+4)}{(x-4)(3x+2)} - \frac{3x+2}{(x-4)(x+4)} \right) = 1;$$

$$\frac{2(2x+3)}{x+2} - \frac{5(x-6)}{(x-4)(3x+2)} : \frac{4(x+4)^2 - (3x+2)^2}{(x-4)(x+4)(3x+2)} = 1;$$

$$\frac{2(2x+3)}{x+2} - \frac{5(x-6)}{(x-4)(3x+2)} \cdot \frac{(x-4)(x+4)(3x+2)}{(2(x+4)+3x+2)(2(x+4)-3x-2)} = 1;$$

$$\frac{2(2x+3)}{x+2} - \frac{5(x-6)}{(x-4)(3x+2)} \cdot \frac{(x-4)(x+4)(3x+2)}{5(x+2)(6-x)} = 1; \quad x \neq 6;$$

$$\frac{5x+10}{x+2} = 1; \quad 5 = 1 - \text{ложь}$$

Ответ: $x = \emptyset$. (Решения нет).

$$6. \quad x^4 - 10x^3 + 90x - 81 = 0.$$

$$(x^4 - 81) - 10x(x^2 - 9) = 0 ;$$

$$(x^2 + 9)(x^2 - 9) - 10x(x^2 - 9) = 0;$$

$$(x^2 - 9)(x^2 + 9 - 10x) = 0; \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \\ x = 1 \\ x = 9 \end{cases}$$

Ответ: $\{-3; 1; 3; 9\}$.

Решение зачетной карточки 3

$$1. \frac{4x^2+13x+10}{4x+5} = \frac{1}{2x+3};$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq -1\frac{1}{2} \\ x \neq -1\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$4x^2 + 13x + 10 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 160}}{8} = \frac{-13 \pm 3}{8} \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$4x^2 + 13x + 10 = 4\left(x + \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{5}{4}\right) = (x + 2)(4x + 5);$$

$$\frac{(x+2)(4x+5)}{(4x+5)} = \frac{1}{2x+3}; \quad x + 2 = \frac{1}{2x+3}; \quad (x+2)(2x+3) = 1;$$

$$2x^2 + 7x + 6 = 1; \quad 2x^2 + 7x + 5 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} = \frac{-7 \pm 3}{4}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{5}{2} \in D(Y). \end{cases}$$

О т в е т : $\{-2, 5; -1\}$.

$$2. \frac{8x^2 - 22x + 15}{4x - 15} \left(\frac{16x - 24}{16x^2 - 48x + 35} + \frac{9}{8x^2 - 46x + 56} + \frac{9}{42x - 40 - 8x^2} \right) = 2x + 3.$$

$$a) \quad 8x^2 - 22x + 15 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{8} = \frac{11 \pm 1}{8}; \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$8x^2 - 22x + 15 = 8\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{4}\right) = (2x - 3)(4x - 5);$$

$$b) \quad 16x^2 - 48x + 35 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 16 \cdot 35}}{16} = \frac{24 \pm 4}{16}; \quad \begin{cases} x = \frac{7}{4} \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$16x^2 - 48x + 35 = 16\left(x - \frac{7}{4}\right)\left(x - \frac{5}{4}\right) = (4x - 7)(4x - 5);$$

$$в) \quad 8x^2 - 46x + 56 = 0; \quad 4x^2 - 23x + 28 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 448}}{8} = \frac{23 \pm 9}{8}; \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$8x^2 - 46x + 56 = 8\left(x - \frac{7}{4}\right)(x - 4) = 2(4x - 7)(x - 4);$$

$$\text{г) } -8x^2 + 42x - 40 = 0; \quad 4x^2 - 21x + 20 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 320}}{8} = \frac{21 \pm 11}{8}; \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \quad D(Y): \begin{cases} x \neq 3,75 \\ x \neq 1,25 \\ x \neq 1,75 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$-8x^2 + 42x - 40 = -8(x - 4)\left(x - \frac{5}{4}\right) = -2(x - 4)(4x - 5);$$

Уравнение приобретает вид:

$$\frac{(2x-3)(4x-5)}{4x-15} \left(\frac{8(2x-3)}{(4x-7)(4x-5)} + \frac{9}{2(x-4)(4x-7)} - \frac{9}{2(x-4)(4x-5)} \right) = 2x+3;$$

$$\frac{(2x-3)(4x-5)}{4x-15} \cdot \frac{8(2x-3) \cdot 2(x-4) + 9(4x-5) - 9(4x-7)}{2(4x-7)(4x-5)(x-4)} = 2x+3;$$

$$\frac{(2x-3)\left(16(2x^2-11x+12)+36x-45-36x+63\right)}{(4x-15) \cdot 2(4x-7)(x-4)} = 2x+3;$$

$$\frac{(2x-3)(32x^2-176x+210)}{(4x-15) \cdot 2(4x-7)(x-4)} = 2x+3;$$

$$32x^2 - 176x + 210 = 0; \quad 16x^2 - 88x + 105 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{44 \pm \sqrt{44^2 - 16 \cdot 105}}{16} = \frac{44 \pm 16}{16}; \quad \begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ x = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$32x^2 - 176x + 210 = 32\left(x - \frac{7}{4}\right)\left(x - \frac{15}{4}\right) = 2(4x - 7)(4x - 15);$$

$$\frac{(2x-3)2(4x-15)(4x-7)}{(4x-15)2(4x-7)(x-4)} = 2x+3; \quad \frac{2x-3}{x-4} = 2x+3;$$

$$2x - 3 = 2x^2 - 5x - 12; \quad 2x^2 - 7x - 9 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{4} = \frac{7 \pm 11}{4}; \quad \begin{cases} x = 4,5 \\ x = -1 \end{cases} \in D(Y).$$

О т в е т : $\{-1; 4,5\}$.

$$3. \quad \left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right)(x+4)(x+6) = 12; \quad D(Y): \quad x \neq 0;$$

$$(x+2)(x+3)(x+4)(x+6) = 12x^2.$$

Сгруппируем первый с четвертым и второй с третьим множители и выполним умножение.

$$(x^2 + 8x + 12)(x^2 + 7x + 12) = 12x^2; \quad x\left(x + 8 + \frac{12}{x}\right)x\left(x + \frac{12}{x} + 7\right) = 12x^2;$$

$$\left(x + \frac{12}{x} + 8\right)\left(x + \frac{12}{x} + 7\right) = 12.$$

Положим $x + \frac{12}{x} + 7 = t$, значит $t(t+1) = 12$;

$$t^2 + t - 12 = 0 \quad \begin{cases} t = -4 \\ t = 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + \frac{12}{x} + 7 = -4 \\ x + \frac{12}{x} + 7 = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 11x + 12 = 0 \\ x^2 + 4x + 12 = 0; D < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{-11 + \sqrt{73}}{2} \\ x = \frac{-11 - \sqrt{73}}{2} \end{cases}.$$

О т в е т : $\left\{-\frac{11 + \sqrt{73}}{2}; \frac{-11 + \sqrt{73}}{2}\right\}$.

$$4. \quad \frac{4(x^2+1)}{x^2-10x+1} - \frac{5x}{x^2+1} + 3,5 = 0.$$

$$\frac{4x\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x\left(x - 10 + \frac{1}{x}\right)} - \frac{5x}{x\left(x + \frac{1}{x}\right)} + 3,5 = 0; \quad \frac{4\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x + \frac{1}{x} - 10} - \frac{5}{\left(x + \frac{1}{x}\right)} + 3,5 = 0.$$

Положим $x + \frac{1}{x} = t$: $\frac{4t}{t-10} - \frac{5}{t} + 3,5 = 0$;

$$4t^2 - 5t + 50 + 3,5t^2 - 35t = 0; \quad 7,5t^2 - 40t + 50 = 0;$$

$$15t^2 - 80t + 100 = 0; \quad 3t^2 - 16t + 20 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{3} = \frac{8 \pm 2}{3};$$

$$\left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \\ x + \frac{1}{x} = 2 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \\ x = 1 \end{array} \right].$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{3}; 1; 3 \right\}$.

5. $x^3 + \frac{55x^2 + 22x - 8}{8x^2 - 22x - 55} = 0.$

$$8x^5 - 22x^4 - 55x^3 + 55x^2 + 22x - 8 = 0; \quad f(1) = 8 - 22 - 55 + 55 + 22 - 8 = 0;$$

$$\begin{array}{r} 8x^5 - 22x^4 - 55x^3 + 55x^2 + 22x - 8 \quad | \quad \frac{x-1}{8x^4 - 14x^3 - 69x^2 - 14x + 8} \\ \hline 8x^5 - 8x^4 \\ \hline -14x^4 - 55x^3 \\ -14x^4 + 14x^3 \\ \hline -69x^3 + 55x^2 \\ -69x^3 + 69x^2 \\ \hline -14x^2 + 22x \\ -14x^2 + 14x \\ \hline 8x - 8 \\ 8x - 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$8x^4 - 14x^3 - 69x^2 - 14x + 8 = 0.$$

Возвратное уравнение

$$8x^2 - 14x - 69 - \frac{14}{x} + \frac{8}{x^2} = 0; \quad 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 14\left(x + \frac{1}{x}\right) - 69 = 0.$$

Положим $x + \frac{1}{x} = t$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$;

$$8(t^2 - 2) - 14t - 69 = 0; \quad 8t^2 - 14t - 85 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 8 \cdot 85}}{8} = \frac{7 \pm \sqrt{729}}{8} = \frac{7 \pm 27}{8}; \quad \begin{cases} t = \frac{17}{4}; \\ t = -\frac{5}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4}; \\ x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}; \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x^2 - 17x + 4 = 0; \\ 2x^2 + 5x + 2 = 0; \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \\ x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{-2; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; 1; 4\right\}$.

6. $(x+1)^5 + (x-3)^5 = 242(x-1)$.

Положим $t = \frac{x+1+x-3}{2} = x-1$, тогда $x = t+1$.

Уравнение примет вид.

$$(t+2)^5 + (t-2)^5 = 242t;$$

$$\begin{aligned} (t+2)^5 &= t^5 + 5t^4 \cdot 2 + 10t^3 \cdot 2^2 + 10t^2 \cdot 2^3 + 5t \cdot 2^4 + 2^5 \\ + (t-2)^5 &= t^5 - 5t^4 \cdot 2 + 10t^3 \cdot 2^2 - 10t^2 \cdot 2^3 + 5t \cdot 2^4 - 2^5 \end{aligned}$$

$$(t+2)^5 + (t-2)^5 = 2t^5 + 0 + 20t^3 \cdot 2^2 + 0 + 10t \cdot 2^4$$

$$2t(t^4 + 40t^2 + 80) = 242t;$$

а) $t = 0;$

$$x-1=0; \quad x=1;$$

б) $t^4 + 40t^2 - 41 = 0;$

$$\begin{cases} t^2 = 1 \\ t^2 = -41; \emptyset \end{cases}; \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=2 \\ x=0 \end{cases}.$$

Ответ: $\{0; 1; 2\}$.

Решение зачетной карточки 4

$$1. \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 + 4x - 12} - \frac{178x + 748}{2x^2 + 19x + 42} = x.$$

$$а) x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3;$$

$$б) x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2);$$

$$в) 2x^2 + 19x + 42 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{361 - 336}}{4} = \frac{-19 \pm 5}{4}; \quad \begin{cases} x = -6 \\ x = -\frac{7}{2} \end{cases};$$

$$2x^2 + 19x + 42 = 2(x + 6)\left(x + \frac{7}{2}\right) = (x + 6)(2x + 7).$$

Уравнение приобретает вид:

$$\frac{(x-2)^3}{(x+6)(x-2)} - \frac{178x+748}{(x+6)(2x+7)} = x;$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -6 \\ x \neq -3,5 \end{cases}$$

$$\frac{(x-2)^2}{x+6} - \frac{178x+748}{(x+6)(2x+7)} - x = 0;$$

$$(x-2)^2(2x+7) - 178x - 748 - x(2x^2 + 19x + 42) = 0;$$

$$(x^2 - 4x + 4)(2x + 7) - 178x - 748 - 2x^3 - 19x^2 - 42x = 0;$$

$$2x^3 - x^2 - 20x + 28 - 2x^3 - 19x^2 - 220x - 748 = 0;$$

$$-20x^2 - 240x - 720 = 0;$$

$$x^2 + 12x + 36 = 0;$$

$$(x + 6)^2 = 0;$$

$$x = -6 \notin D(Y).$$

Ответ: $x \in \emptyset$ (решения нет).

$$2. \quad x^2(2x-1) + x(x^2-1) = 2(x+1)^2.$$

$$2x^3 - x^2 + x^3 - x = 2x^2 + 4x + 2;$$

$$3x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0;$$

$$f(2) = 3 \cdot 8 - 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 - 2 = 0;$$

$$3x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \quad \Big| \quad \underline{x-2}$$

$$\underline{3x^3 - 6x^2} \qquad 3x^2 + 3x + 1$$

$$3x^2 - 5x$$

$$\underline{3x^2 - 6x}$$

$$x - 2$$

$$\underline{x - 2}$$

$$0$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0; \quad D < 0.$$

$$\text{О т в е т: } \quad x = 2.$$

$$3. \quad (2x^2 + 3x - 1)^2 - 5(2x^2 + 3x + 3) + 24 = 0.$$

Положим $2x^2 + 3x - 1 = t$, тогда $2x^2 + 3x + 3 = t + 4$.

Уравнение примет вид

$$t^2 - 5(t+4) + 24 = 0; \quad t^2 - 5t - 20 + 24 = 0; \quad t^2 - 5t + 4 = 0;$$

$$\begin{cases} t = 4 \\ t = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2 + 3x - 1 = 4 \\ 2x^2 + 3x - 1 = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 3x - 5 = 0 \\ 2x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -2,5 \\ x = -2 \\ x = 0,5 \end{cases}.$$

$$\text{О т в е т: } \quad \{-2,5; -2; 0,5; 1\}.$$

$$4. \frac{24}{x^2+2x} = \frac{12}{x^2+x} + x^2 + x.$$

$$\text{Так как } \frac{1}{x^2+2x} = \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right),$$

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1};$$

$$\text{то } 24 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) = 12 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) + x^2 + x.$$

$$\frac{12}{x} - \frac{12}{x+2} = \frac{12}{x} - \frac{12}{x+1} + x^2 + x;$$

$$12 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) = x^2 + x;$$

$$\frac{12}{(x+1)(x+2)} = x(x+1);$$

$$12 = x(x+1)(x+1)(x+2).$$

Сгруппируем первый множитель с четвертым и второй с третьим множителем.

$$12 = (x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 1).$$

$$\text{Тогда } x^2 + 2x = t;$$

$$12 = t(t+1);$$

$$t^2 + t - 12 = 0; \quad \begin{cases} t = -4; \\ t = 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x = -4; \\ x^2 + 2x = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 2x + 4 = 0; D < 0; \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -3; \\ x = 1 \end{cases};$$

$$\text{Ответ: } \{-3; 1\}.$$

$$5. \left(\frac{9-2x}{x^2+x-42} + \frac{x-6}{2x^2+5x-63} \right) \left(\frac{2}{x-5} + \frac{6}{x-3} \right) = 1.$$

$$a) x^2 + x - 42 = 0;$$

$$\begin{cases} x = -7 \\ x = 6 \end{cases};$$

$$x^2 + x - 42 = (x+7)(x-6);$$

$$б) 2x^2 + 5x - 63 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+504}}{4} = \frac{-5 \pm 23}{4}; \quad \begin{cases} x = -7 \\ x = \frac{9}{2} \end{cases};$$

$$2x^2 + 5x - 63 = 2(x+7) \left(x - \frac{9}{2} \right) = (x+7)(2x-9);$$

$$\left(\frac{9-2x}{(x+7)(x-6)} + \frac{x-6}{(x+7)(2x-9)} \right) \frac{2(x-3)+6(x-5)}{(x-5)(x-3)} = 1;$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq 6 \\ x \neq 5 \\ x \neq 4, 5; \\ x \neq 3 \\ x \neq -7 \end{cases}$$

$$\frac{(x-6)^2 - (2x-9)^2}{(x+7)(x-6)(2x-9)} \cdot \frac{8x-36}{(x-5)(x-3)} = 1;$$

$$\frac{(x-6+2x-9)(x-6-2x+9)4(2x-9)}{(x+7)(x-6)(2x-9)(x-5)(x-3)} = 1;$$

$$\frac{3(x-5)(3-x)4(2x-9)}{(x+7)(x-6)(2x-9)(x-5)(x-3)} = 1;$$

$$-12 = x^2 + x - 42; \quad x^2 + x - 30 = 0;$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ x = 5 \notin D(Y). \end{cases}$$

Ответ: $x = -6$.

$$6. x^6 + 1 + (x+1)^6 = 2(x^2 + x + 1)^3.$$

$$\text{Пусть } t = \frac{x+x+1}{2} = x + \frac{1}{2};$$

$$x = t - \frac{1}{2};$$

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

$$\text{Уравнение примет вид } \left(t - \frac{1}{2}\right)^6 + \left(t + \frac{1}{2}\right)^6 + 1 = 2\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)^3$$

$$\begin{aligned} \left(t + \frac{1}{2}\right)^6 &= t^6 + 6t^5 \cdot \frac{1}{2} + 15t^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 20t^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 15t^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 6t \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\ + \left(t - \frac{1}{2}\right)^6 &= t^6 - 6t^5 \cdot \frac{1}{2} + 15t^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 20t^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 15t^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 6t \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \end{aligned}$$

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^6 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^6 + 1 = 2t^6 + \frac{30}{4}t^4 + \frac{30}{16}t^2 + \frac{1}{32} + 1.$$

$$\text{Но } 2\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)^3 = 2\left(t^6 + 3t^4 \cdot \frac{3}{4} + 3t^2 \cdot \frac{9}{16} + \frac{27}{64}\right) = 2t^6 + \frac{9}{2}t^4 + \frac{27}{8}t^2 + \frac{27}{32},$$

$$\text{значит } 2t^6 + \frac{30}{4}t^4 + \frac{30}{16}t^2 + \frac{33}{32} = 2t^6 + \frac{9}{2}t^4 + \frac{27}{8}t^2 + \frac{27}{32};$$

$$16t^4 - 8t^2 + 1 = 0;$$

$$(4t^2 - 1)^2 = 0;$$

$$\begin{cases} 2t - 1 = 0 \\ 2t + 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \{0; -1\}.$$

Решение зачетной карточки 5

$$1. (x^2 + 2x - 1)(2x^2 + 4x - 1) = 10.$$

Пусть $x^2 + 2x - 1 = t$, тогда $2x^2 + 4x - 1 = 2t + 1$;

$$t(2t + 1) = 10; \quad 2t^2 + t - 10 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{4} = \frac{-1 \pm 9}{4}; \quad \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 1 = 2 \\ x^2 + 2x - 1 = -\frac{5}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ 2x^2 + 4x + 3 = 0; D < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}.$$

ОТВЕТ: $\{-3; 1\}$.

$$2. \frac{6x^6 - 11x^5 + 11}{x} = 11x + \frac{11}{x} - 6.$$

$$6x^6 - 11x^5 + 11 = 11x^2 + 11 - 6x; \quad 6x^6 - 11x^5 - 11x^2 + 6x = 0; \quad x \neq 0$$

$$6x^5 - 11x^4 - 11x + 6 = 0; \quad f(-1) = -6 - 11 + 11 + 6 = 0$$

$$6x^5 - 11x^4 - 11x + 6 \quad \left| \begin{array}{r} x+1 \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\underline{6x^5 + 6x^4} \quad 6x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 6$$

$$-17x^4 - 11x$$

$$\underline{-17x^4 - 17x^3}$$

$$17x^3 - 11x$$

$$\underline{17x^3 + 17x^2}$$

$$-17x^2 - 11x$$

$$\underline{-17x^2 - 17x}$$

$$6x + 6$$

$$\underline{6x + 6}$$

$$0$$

$$6x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0. \quad (:x^2)$$

Получили возвратное уравнение.

$$6x^2 - 17x + 17 - \frac{17}{x} + \frac{6}{x^2} = 0; \quad 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 17\left(x + \frac{1}{x}\right) + 17 = 0.$$

Пусть $x + \frac{1}{x} = t$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. $6(t^2 - 2) - 17t + 17 = 0$;

$$6t^2 - 17t + 5 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 120}}{12} = \frac{17 \pm 13}{12}; \quad \begin{cases} t = \frac{5}{2}; \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}; \\ x + \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ 3x^2 - x + 3 = 0; D < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{-1; \frac{1}{2}; 2\right\}$.

$$3. \frac{4x^2 + 10x + 9}{2x^2 + 5x + 4} + \frac{2x^2 + 5x + 1}{6x^2 + 15x + 8} = 2.$$

Положим $2x^2 + 5x + 4 = t$.

$$4x^2 + 10x + 9 = 2t + 1; \quad 6x^2 + 15x + 8 = 3t - 4; \quad 2x^2 + 5x + 1 = t - 3;$$

$$\frac{2t+1}{t} + \frac{t-3}{3t-4} = 2; \quad D(Y): \quad \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq 1\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$(2t+1)(3t-4) + t(t-3) = 2t(3t-4);$$

$$6t^2 - 5t - 4 + t^2 - 3t - 6t^2 + 8t = 0; \quad t^2 - 4 = 0; \quad \begin{cases} t = 2 \\ t = -2 \end{cases} \in D(Y);$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 5x + 4 = 2 \\ 2x^2 + 5x + 4 = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2 + 5x + 2 = 0 \\ 2x^2 + 5x + 6 = 0; D < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}; -2\right\}$.

$$4. \frac{6}{x^2-3x-4} + \frac{3x-6}{x^2-x-2} = \frac{x}{x+1}.$$

$$\frac{6}{(x-4)(x+1)} + \frac{3(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x}{x+1};$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\frac{6}{(x-4)(x+1)} + \frac{3}{x+1} - \frac{x}{x+1} = 0; \quad \frac{6}{(x-4)(x+1)} + \frac{3-x}{x+1} = 0;$$

$$6 + (3-x)(x-4) = 0; \quad -x^2 + 7x - 12 + 6 = 0;$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases} \in D(Y).$$

Ответ: $\{1; 6\}$.

$$5. x^2 + \frac{36x^2}{(x+6)^2} = 13. \quad \left(-\frac{12x^2}{x+6} \right)$$

$$x^2 - \frac{12x^2}{x+6} + \frac{36x^2}{(x+6)^2} = 13 - \frac{12x^2}{x+6}; \quad D(Y): \quad x \neq -6;$$

$$\left(x - \frac{6x}{x+6} \right)^2 = 13 - \frac{12x^2}{x+6};$$

$$\left(\frac{x^2}{x+6} \right)^2 + \frac{12x^2}{x+6} - 13 = 0.$$

Пусть $\frac{x^2}{x+6} = t$, тогда

$$t^2 + 12t - 13 = 0;$$

$$\begin{cases} t = -13 \\ t = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x^2}{x+6} = -13 \\ \frac{x^2}{x+6} = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 13x + 78 = 0; D < 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-2; 3\}$.

$$6. (x-1)^4 + (x+4)^4 = 97.$$

Пусть $t = \frac{x-1+x+4}{2} = x+1,5$, тогда $x = t-1,5$;

$$(t-2,5)^4 + (t+2,5)^4 = 97;$$

$$\begin{aligned} (t+2,5)^4 &= t^4 + 4t^3 \cdot 2,5 + 6t^2 \cdot (2,5)^2 + 4t \cdot (2,5)^3 + (2,5)^4 \\ + (t-2,5)^4 &= t^4 - 4t^3 \cdot 2,5 + 6t^2 \cdot (2,5)^2 - 4t \cdot (2,5)^3 + (2,5)^4 \end{aligned}$$

$$(t+2,5)^4 + (t-2,5)^4 = 2t^4 + 12t^2 \cdot (2,5)^2 + 2(2,5)^4 = 97.$$

Пусть $t^2 = a$.

$$2a^2 + 75a + \frac{625}{8} - 97 = 0;$$

$$16a^2 + 600a - 151 = 0;$$

$$a_{1,2} = \frac{-300 \pm \sqrt{300^2 + 16 \cdot 151}}{16} = \frac{-300 \pm 4 \cdot \sqrt{75^2 + 151}}{16} = \frac{-75 \pm 76}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} a = \frac{1}{4} \\ a = -\frac{151}{4} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} (x+1,5)^2 = \frac{1}{4} \\ (x+1,5)^2 = -\frac{151}{4}; \emptyset \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x+1,5 = \frac{1}{2} \\ x+1,5 = -\frac{1}{2} \end{array} \right];$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \end{array} \right].$$

Ответ: $\{-2; -1\}$.

Решение зачетной карточки 6

$$1. \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 2} = \frac{48}{8 - x^3}; \quad D(Y): x \neq 2.$$

$$\frac{x^2 + 2x - 15}{x - 2} + \frac{48}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = 0;$$

$$(x^2 + 2x - 15)(x^2 + 2x + 4) + 48 = 0.$$

Положим $x^2 + 2x - 15 = t$, тогда $x^2 + 2x + 4 = t + 19$.

$$t(t + 19) + 48 = 0; \quad t^2 + 19t + 48 = 0;$$

$$\begin{cases} t = -3; \\ t = -16; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 2x - 15 = -3; \\ x^2 + 2x - 15 = -16; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 2x - 12 = 0; \\ x^2 + 2x + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 + \sqrt{13} \\ x = -1 - \sqrt{13} \\ x = -1 \end{cases} \in D(Y).$$

$$\text{Ответ: } \{-1 - \sqrt{13}; -1; -1 + \sqrt{13}\}.$$

$$2. 4x^3 - 21x + 10 = 0.$$

$$f(2) = 4 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2 + 10 = 0;$$

$$4x^3 - 21x + 10 \Big| \underline{x - 2}$$

$$\underline{4x^3 - 8x^2} \quad 4x^2 + 8x - 5$$

$$8x^2 - 21x + 10$$

$$\underline{8x^2 - 16x}$$

$$-5x + 10$$

$$\underline{-5x + 10}$$

$$0$$

$$4x^2 + 8x - 5 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{4} = \frac{-4 \pm 6}{4};$$

$$\text{Ответ: } \{-2,5; 0,5; 2\}.$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -2,5 \end{cases}.$$

$$3. \frac{3x(7x^2-92x-147)(7x^2-20x-147)}{(x^2-8x-21)^3} = -10.$$

$$\frac{3x^3 \left(7 \left(x - \frac{21}{x} - 8 \right) - 36 \right) \left(7 \left(x - \frac{21}{x} - 8 \right) + 36 \right)}{x^3 \left(x - \frac{21}{x} - 8 \right)^3} = -10.$$

Положим $x - \frac{21}{x} - 8 = t$.

$$\frac{3(7t-36)(7t+36)}{t^3} = -10;$$

$$10t^3 + 3 \cdot 49t^2 - 3 \cdot 1296 = 0; \quad 10t^3 + 147t^2 - 3888 = 0.$$

Так как $3888 = 3^5 \cdot 4^2$ и $t^2(10t+147) = 3^5 \cdot 4^2$, то делители

$$d = \pm 3; \pm 3 \cdot 4; \pm 3 \cdot 4^2; \pm 3^2; \pm 3^2 \cdot 4; \dots$$

$$f(3) \neq 0; \quad f(-3) \neq 0; \quad f(12) \neq 0;$$

$$f(-12) = 0, \text{ так как } 12^2(10 \cdot (-12) + 147) = 12^2 \cdot 3^3;$$

$$12^2 \cdot (27) = 12^2 \cdot 3^3;$$

$$10t^3 + 147t^2 - 3888 \left| \begin{array}{l} t+12 \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\underline{10t^3 + 120t^2} \qquad 10t^2 + 27t - 324$$

$$27t^2 - 3888$$

$$\underline{27t^2 + 324t}$$

$$-324t - 3888$$

$$\underline{-324t - 3888}$$

$$0$$

$$10t^2 + 27t - 324 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{-27 \pm \sqrt{729 + 4 \cdot 10 \cdot 324}}{20} = \frac{-27 \pm 117}{20}; \quad \left[\begin{array}{l} t = 4,5 \\ t = -\frac{36}{5} \end{array} \right.$$

$$а) x - \frac{21}{x} - 8 = -12;$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0; \quad \begin{cases} x = -7; \\ x = 3 \end{cases}$$

$$б) x - \frac{21}{x} - 8 = \frac{9}{2};$$

$$2x^2 - 25x - 42 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 + 336}}{4} = \frac{25 \pm 31}{4}; \quad \begin{cases} x = 14 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$в) x - \frac{21}{x} - 8 = -\frac{36}{5};$$

$$5x^2 - 4x - 105 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 525}}{5} = \frac{2 \pm 23}{5}; \quad \begin{cases} x = 5 \\ x = -4,2 \end{cases}$$

О т в е т : $\{-7; -4,2; -1,5; 3; 5; 14\}$.

$$4. \left(\frac{9}{2x^2 - 11x + 5} + \frac{9}{5 + 9x - 2x^2} + \frac{8x}{4x^2 - 1} \right) \cdot \frac{2x^2 + x}{2x - 9} - \frac{10}{x - 5} = 2;$$

$$а) 2x^2 - 11x + 5 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{4} = \frac{11 \pm 9}{4}; \quad \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x^2 - 11x + 5 = 2(x - 5) \left(x - \frac{1}{2} \right) = (x - 5)(2x - 1);$$

$$б) -2x^2 + 9x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{4} = \frac{9 \pm 11}{4}; \quad \begin{cases} x = 5 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-2x^2 + 9x + 5 = -2(x - 5) \left(x + \frac{1}{2} \right) = -(x - 5)(2x + 1);$$

$$в) 8x^2 - 40x + 18 = 0;$$

$$4x^2 - 20x + 9 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{4} = \frac{10 \pm 8}{4}; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}; \\ x = \frac{9}{2} \end{cases};$$

$$8x^2 - 40x + 18 = 2(2x - 9)(2x - 1);$$

$$\frac{9(2x+1) - 9(2x-1) + 8x(x-5)}{(x-5)(2x-1)(2x+1)} \cdot \frac{x(2x+1)}{2x-9} - \frac{10}{x-5} = 2;$$

$$\frac{18x+9-18x+9+8x^2-40x}{(x-5)(2x+1)(2x-1)} \cdot \frac{x(2x+1)}{2x-9} - \frac{10}{x-5} = 2;$$

$$\frac{(8x^2 - 40x + 18)x(2x+1)}{(2x-9)(x-5)(2x+1)(2x-1)} - \frac{10}{x-5} = 2;$$

$$\frac{2(2x-9)(2x-1)x}{(2x-9)(x-5)(2x-1)} - \frac{10}{x-5} = 2;$$

$$\frac{2x}{x-5} - \frac{10}{x-5} = 2; \quad \frac{2(x-5)}{x-5} = 2; \quad 2 = 2.$$

Ответ: любое x , такое что $\begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq 4,5 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$ есть решение.

$$D(Y): \begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq 4,5 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$5. \frac{2x}{2x^2-5x+3} + \frac{13x}{2x^2+x+3} = 6.$$

$$\frac{2x}{x(2x-5+\frac{3}{x})} + \frac{13x}{x(2x+1+\frac{3}{x})} = 6$$

$$D(Y): \begin{cases} t \neq 6 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

Положим $2x + \frac{3}{x} + 1 = t$, тогда $2x + \frac{3}{x} - 5 = t - 6$; $\frac{2}{t-6} + \frac{13}{t} = 6$;

$$2t + 13(t-6) = 6t(t-6); \quad 6t^2 - 51t + 78 = 0;$$

$$2t^2 - 17t + 26 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289-208}}{4} = \frac{17 \pm 9}{4};$$

$$\begin{cases} t = 2 \\ t = 6,5 \end{cases} \in D(Y); \quad \begin{cases} 2x + \frac{3}{x} + 1 = 2 \\ 2x + \frac{3}{x} + 1 = \frac{13}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2 - x + 3 = 0; D < 0 \\ 4x^2 - 11x + 6 = 0 \end{cases}.$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-96}}{8} = \frac{11 \pm 5}{8}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Ответ: $\{0,75; 2\}$.

$$6. (x+1)^5 + (5-x)^5 = 1056.$$

$$(x+1)^5 - (x-5)^5 = 1056.$$

Положим $t = \frac{x+1+x-5}{2} = x-2$, тогда $x = t+2$;

$$(t+3)^5 - (t-3)^5 = 1056;$$

$$(t+3)^5 = t^5 + 5t^4 \cdot 3 + 10t^3 \cdot 3^2 + 10t^2 \cdot 3^3 + 5t \cdot 3^4 + 3^5$$

$$-(t-3)^5 = t^5 - 5t^4 \cdot 3 + 10t^3 \cdot 3^2 - 10t^2 \cdot 3^3 + 5t \cdot 3^4 - 3^5$$

$$(t+3)^5 - (t-3)^5 = 10t^4 \cdot 3 + 20t^2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^5 = 1056;$$

$$15t^4 + 270t^2 + 243 = 528; \quad 15t^4 + 270t^2 - 285 = 0; \quad t^4 + 18t^2 - 19 = 0;$$

$$\begin{cases} t^2 = -19; \emptyset \\ t^2 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-2 = 1 \\ x-2 = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases};$$

Ответ: $\{1; 3\}$.

Решение зачетной карточки 7

$$1. \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{4}{x}\right)\left(x - \frac{9}{x}\right) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

$$\frac{(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)}{x^3} = (x-1)(x-2)(x-3); \quad D(Y): \quad x \neq 0;$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)((x+1)(x+2)(x+3) - x^3) = 0;$$

$$a) \begin{cases} x = 1 \\ x = 2; \\ x = 3 \end{cases}$$

$$б) (x+1)(x+2)(x+3) - x^3 = 0;$$

$$(x^2 + 3x + 2)(x+3) - x^3 = 0;$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 - x^3 = 0;$$

$$6x^2 + 11x + 6 = 0; \quad D < 0.$$

Ответ: $\{1; 2; 3\}$.

$$2. (x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0. \quad (:x^4)$$

$$\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^4 - 10\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2 + 9 = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2 = 9 \\ \left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2 = 1 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} \frac{x^2-x+1}{x} = 3 \\ \frac{x^2-x+1}{x} = -3 \\ \frac{x^2-x+1}{x} = 1 \\ \frac{x^2-x+1}{x} = -1 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 + 1 = 0; D < 0 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array} \right].$$

Ответ: $\{-1; 2 - \sqrt{3}; 1; 2 + \sqrt{3}\}$.

$$3. (x^2 - 6x - 9)^2 = x^3 - 4x^2 - 9x.$$

$$x^2 \left(x - 6 - \frac{9}{x} \right)^2 = x^2 \left(x - 4 - \frac{9}{x} \right). \quad (x \neq 0)$$

Положим $x - \frac{9}{x} - 6 = t$, тогда $x - \frac{9}{x} - 4 = t + 2$,

и уравнение приобретает вид $t^2 = t + 2$.

$$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -1 \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x - \frac{9}{x} - 6 = 2 \\ x - \frac{9}{x} - 6 = -1 \end{array} \right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 8x - 9 = 0 \\ x^2 - 5x - 9 = 0 \end{array} \right. ; \quad \left. \begin{array}{l} x = 9 \\ x = -1 \\ x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{61}}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{5 - \sqrt{61}}{2}; -1; \frac{5 + \sqrt{61}}{2}; 9 \right\}.$$

$$4. \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x-4} + \frac{6}{x-5} = 0 \quad x \in \mathbb{Z}; \quad D(Y): \left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \\ x \neq 4 \\ x \neq 5 \end{array} \right.$$

Так как x — целые числа, то:

а) если $x > 5$, то все дроби положительные числа

это значит $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x-4} + \frac{6}{x-5} > 0$, т. е.

корней нет;

б) если $x < 0$, то все дроби отрицательные числа, что

означает $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x-4} + \frac{6}{x-5} < 0$;

в) значения x , равные $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

не принадлежат $D(Y)$.

Ответ: решения нет.

$$5. x^4 - x^3 - 9x^2 + 2x + 2 = 0.$$

$$f(1) \neq 0; \quad f(-1) \neq 0; \quad f(2) \neq 0; \quad f(-2) \neq 0.$$

Значит, рациональных корней уравнение не имеет.

Представим левую часть уравнения в виде произведения двух трехчленов, т.е.

$$\begin{aligned} a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = \\ = (b_0x^2 + b_1x + b_2)(c_0x^2 + c_1x + c_2), \end{aligned}$$

где $a_0; a_1; a_2; a_3; a_4; b_0; b_1; b_2; c_0; c_1; c_2 \in \mathbb{Z}$, но замечаем, что $b_0c_0 = 1$, а $b_2c_2 = 2$.

$$\text{Проверим } (x^2 + b_1x + 2)(x^2 + c_1x + 1) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 2x + 2,$$

тогда

$$\begin{aligned} (x^2 + b_1x + 2)(x^2 + c_1x + 1) = \\ = x^4 + (b_1 + c_1)x^3 + (b_1c_1 + 3)x^2 + (b_1 + 2c_1)x + 2, \end{aligned}$$

$$\text{т. е. } \begin{cases} b_1 + c_1 = -1 \\ 3 + b_1c_1 = -9 \\ 2c_1 + b_1 = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1 + c_1 = -1; \\ 2c_1 + b_1 = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} c_1 = 3 \\ b_1 = -4 \end{cases}.$$

Эта пара подходит для $b_1c_1 = -12$.

Итак,

$$x^4 - x^3 - 9x^2 + 2x + 2 = (x^2 - 4x + 2)(x^2 + 3x + 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 2 = 0 \\ x^2 + 3x + 1 = 0 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \\ x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \\ x = -\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{array} \right].$$

$$\text{Ответ: } \left\{ 2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}; -\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

$$6. \quad 1 + \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{5}{x^2}; \quad D(Y): \begin{cases} x \neq -2; \\ x \neq 0 \end{cases};$$

$$x^2(x^2 + 4x + 4) + 4x^2 = 5(x^2 + 4x + 4);$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x^2 - 5x^2 - 20x - 20 = 0;$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 20x - 20 = 0;$$

$$f(-1) = 0;$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 20x - 20 \quad \Big| \quad x + 1$$

$$\underline{x^4 + x^3} \qquad \qquad \qquad x^3 + 3x^2 - 20$$

$$3x^3 + 3x^2$$

$$\underline{3x^3 + 3x^2}$$

$$-20x - 20$$

$$\underline{-20x - 20}$$

$$0$$

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 20;$$

$$\varphi(2) = 0;$$

$$x^3 + 3x^2 - 20 \quad \Big| \quad x - 2$$

$$\underline{x^3 - 2x^2} \quad x^2 + 5x + 10 \quad (D < 0)$$

$$5x^2 - 20$$

$$\underline{5x^2 - 10x}$$

$$10x - 20$$

$$\underline{10x - 20}$$

$$0$$

Ответ: $\{-1; 2\}$.

Решение зачетной карточки 8

$$1. \frac{3x^2+30x+75}{x^3+5x^2-25x-125} - \frac{x^4-10x^2+9}{(x^2-4x)^2-2x^2+8x-15} = 2.$$

$$\frac{3(x^2+10x+25)}{(x-5)(x^2+5x+25)+5x(x-5)} - \frac{(x^2-9)(x^2-1)}{(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-15} = 2;$$

$$\frac{3(x+5)^2}{(x-5)(x+5)^2} - \frac{(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)}{(x^2-4x-5)(x^2-4x+3)} = 2;$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq \pm 5 \\ x \neq 3 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\frac{3}{x-5} - \frac{(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)}{(x-5)(x+1)(x-1)(x-3)} = 2;$$

$$\frac{3}{x-5} - \frac{x+3}{x-5} = 2; \quad \frac{3-x-3}{x-5} = 2; \quad -x = 2x-10; \quad x = 3\frac{1}{3} \in D(Y).$$

$$\text{Ответ: } x = 3\frac{1}{3}.$$

$$2. \frac{x-2}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{x-4}{x-3} + \frac{x+4}{x+3} - \frac{28}{15};$$

$$D(Y): \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x = \pm 3 \end{cases};$$

$$1 - \frac{1}{x-1} + 1 + \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x-3} + 1 + \frac{1}{x+3} - \frac{28}{15};$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-3} - \frac{28}{15}; \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{3}{x^2-9} + \frac{14}{15};$$

$$\text{Пусть } x^2 - 1 = t. \quad \frac{1}{t} = \frac{3}{t-8} + \frac{14}{15}; \quad 15(t-8) = 45t + 14(t^2 - 8t);$$

$$15t - 120 = 45t + 14t^2 - 112t; \quad 14t^2 - 82t + 120 = 0; \quad 7t^2 - 41t + 60 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 1680}}{14} = \frac{41 \pm 1}{14}; \quad \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{20}{7} \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - 1 = 3 \\ x^2 - 1 = \frac{20}{7} \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = \frac{27}{7} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ x = 3\sqrt{\frac{3}{7}} \\ x = -3\sqrt{\frac{3}{7}} \end{cases} \in D(Y).$$

$$\text{Ответ: } \left\{ 2; -2; 3\sqrt{\frac{3}{7}}; -3\sqrt{\frac{3}{7}} \right\}.$$

$$3. x^2 + \frac{66(x^2 - 610)}{(x+26)^2} = 15.$$

$$D(Y): x \neq -26;$$

$$x^2 - 676 = (x - 26)(x + 26);$$

$$610 = 676 - 66;$$

$$x^2 - 610 = x^2 - 676 + 66;$$

$$66(x^2 - 610) = 66(x^2 - 676) + 66^2;$$

$$x^2 + \frac{66(x^2 - 676)}{(x+26)^2} + \frac{66^2}{(x+26)^2} = 15;$$

$$x^2 + \frac{66(2x - (x+26))}{x+26} + \frac{66^2}{(x+26)^2} = 15;$$

$$x^2 + \frac{2x \cdot 66}{x+26} + \frac{66^2}{(x+26)^2} - \frac{66(x+26)}{x+26} = 15;$$

$$\left(x + \frac{66}{x+26}\right)^2 = 81; \quad \begin{cases} x + \frac{66}{x+26} = 9 \\ x + \frac{66}{x+26} = -9 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 + 26x + 66 = 9x + 234 \\ x^2 + 26x + 66 = -9x - 234 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 17x - 168 = 0 \\ x^2 + 35x + 300 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ x = -24 \\ x = -20 \\ x = -15 \end{cases} \in D(Y).$$

Ответ: $\{-24; -20; -15; 7\}$.

$$4. \frac{(x-1)^4 + (x-3)^4}{4,1} = \left(x-1-\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \left(x-3+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^3.$$

Положим $t = \frac{x-1+x-3}{2} = x-2 \quad x = t+2.$

$$\frac{(t+1)^4 + (t-1)^4}{4,1} = \left(t + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \left(t - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3;$$

$$\text{а) } \begin{aligned} (t+1)^4 &= t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 \\ + (t-1)^4 &= t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 \end{aligned}$$

$$(t+1)^4 + (t-1)^4 = 2(t^4 + 6t^2 + 1);$$

$$\text{б) } \begin{aligned} \left(t + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 &= t^3 + 3t^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 3t \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 \\ + \left(t - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 &= t^3 - 3t^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 3t \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

$$\left(t + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \left(t - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = 2(t^3 + t).$$

Уравнение примет вид $\frac{2(t^4 + 6t^2 + 1)}{4,1} = 2(t^3 + t).$

$$10t^4 + 60t^2 + 10 = 41t^3 + 41t;$$

$$10t^4 - 41t^3 + 60t^2 - 41t + 10 = 0 - \text{возвратное уравнение.}$$

$$10t^2 - 41t + 60 - \frac{41}{t} + \frac{10}{t^2} = 0. \quad \text{Пусть } t + \frac{1}{t} = a, \text{ тогда}$$

$$t^2 + \frac{1}{t^2} = a^2 - 2; \quad 10(a^2 - 2) - 41a + 60 = 0; \quad 10a^2 - 41a + 40 = 0;$$

$$a_{1,2} = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 1600}}{20} = \frac{41 \pm 9}{20}; \quad \begin{cases} a = \frac{5}{2}; \\ a = \frac{8}{5} \end{cases}; \quad \begin{cases} t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}; \\ t + \frac{1}{t} = \frac{8}{5} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0 \\ 5t^2 - 8t + 5 = 0; D < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x - 2 = 2 \\ x - 2 = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = 2,5 \end{cases}.$$

Ответ: $\{2,5; 4\}.$

$$5. \frac{(x^2+x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{49}{45}; \quad \frac{(x^2+x+1)^2}{(x^2+2x+1)(x^2+1)} = \frac{49}{45};$$

$$\frac{x^2 \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2}{x^2 \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right)} = \frac{49}{45};$$

$$x + \frac{1}{x} + 1 = t; \quad x + \frac{1}{x} + 2 = t + 1; \quad x + \frac{1}{x} = t - 1;$$

$$\frac{t^2}{(t+1)(t-1)} = \frac{49}{45}; \quad 45t^2 = 49(t^2 - 1); \quad 4t^2 = 49;$$

$$\begin{cases} t = \frac{7}{2} \\ t = -\frac{7}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x + \frac{1}{x} + 1 = \frac{7}{2} \\ x + \frac{1}{x} + 1 = -\frac{7}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0; \\ 2x^2 + 9x + 2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{-9 + \sqrt{65}}{4} \\ x = \frac{-9 + \sqrt{65}}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{9 + \sqrt{65}}{4}; \frac{-9 + \sqrt{65}}{4}; \frac{1}{2}; 2 \right\}.$$

$$6. 12x^6 + 52x^5 - 13x^4 - 156x^3 - 13x^2 + 52x + 12 = 0 \quad (:x^3);$$

Получим возвратное уравнение

$$12x^3 + 52x^2 - 13x - 156 - \frac{13}{x} + \frac{52}{x^2} + \frac{12}{x^3} = 0;$$

$$12 \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 52 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13 \left(x + \frac{1}{x}\right) - 156 = 0.$$

Пусть $x + \frac{1}{x} = t$.

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2; \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t;$$

$$12(t^3 - 3t) + 52(t^2 - 2) - 13t - 156 = 0;$$

$$12t^3 + 52t^2 - 49t - 260 = 0; \quad f(-4) = 0;$$

$$\begin{array}{r}
 12t^3 + 52t^2 - 49t - 260 \quad | \quad t + 4 \\
 \hline
 12t^3 + 48t^2 \qquad \qquad 12t^2 + 4t - 65 \\
 \hline
 4t^2 - 49t \\
 4t^2 + 16t \\
 \hline
 -65t - 260 \\
 -65t - 260 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$12t^2 + 4t - 65 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 780}}{12} = \frac{-2 \pm 28}{12}; \quad \begin{cases} t = -\frac{5}{2}; \\ t = \frac{13}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \\ x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6} \\ x + \frac{1}{x} = -4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2 + 5x + 2 = 0 \\ 6x^2 - 13x + 6 = 0 \\ x^2 + 4x + 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{2}{3} \\ x = -2 - \sqrt{3} \\ x = -2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -2 - \sqrt{3}; -2; -\frac{1}{2}; -2 + \sqrt{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{2} \right\}.$$

Содержание

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Программа элективного курса | 4 |
| 1. Линейные уравнения | 5 |
| Практикум 1 | 8 |
| Тренировочная работа 1 | 10 |
| Линейные уравнения с одним неизвестным и приводящиеся к ним | 14 |
| Практикум 2 | 14 |
| Тренировочная работа 2 | 17 |
| Проверочная работа 1 | 21 |
| Уравнения приводящиеся к линейным | 22 |
| Практикум 3 | 22 |
| Тренировочная работа 3 | 25 |
| Проверочная работа 2 | 30 |
| Практикум 4 | 31 |
| Тренировочная работа 4 | 35 |
| Проверочная работа 3 | 41 |
| 2. Квадратные уравнения | 42 |
| Практикум 5 | 43 |
| Тренировочные карточки заданий на решение простейших квадратных уравнений | 44 |
| Проверочные карточки заданий на решение простейших квадратных уравнений | 46 |
| Решение квадратных уравнений с иррациональ- ными корнями и приводящихся к ним | 47 |
| Практикум 6 | 47 |
| Уравнения приводящиеся к квадратным | 49 |
| Практикум 7 | 49 |
| Тренировочная работа 5 | 53 |
| Решение квадратных уравнений и приводящихся к ним | 59 |
| Практикум 8 | 59 |
| Тренировочная работа 6 | 65 |
| Проверочная работа 4 | 73 |
| 3. Уравнения содержащие модуль | 74 |
| Практикум 9 | 78 |
| Тренировочная работа 7 | 85 |
| Проверочная работа 5 | 92 |
| 4. Уравнения высших степеней | 93 |
| Метод подстановки | 93 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Практикум 10 | 93 |
| Тренировочная работа 8 | 100 |
| Применение теории делимости для решения уравнений | 108 |
| Практикум 11 | 108 |
| Решение уравнений высших степеней. Возвратные уравнения | 116 |
| Практикум 12 | 118 |
| Тренировочная работа 9 | 122 |
| Еще несколько способов решения уравнений | 135 |
| 5. Самостоятельные работы | 148 |
| Ответы к самостоятельным работам | 159 |
| 6. Карточки заданий | 162 |
| Тренировочные карточки | 162 |
| Решение тренировочной карточки 1 | 166 |
| Решение тренировочной карточки 2 | 170 |
| Решение тренировочной карточки 3 | 173 |
| Решение тренировочной карточки 4 | 177 |
| Решение тренировочной карточки 5 | 181 |
| Решение тренировочной карточки 6 | 184 |
| Решение тренировочной карточки 7 | 187 |
| Решение тренировочной карточки 8 | 191 |
| Зачетные карточки | 197 |
| 7. Решения | 201 |
| Решение проверочной работы 1 | 201 |
| Решение проверочной работы 2 | 204 |
| Решение проверочной работы 3 | 207 |
| Ответы к проверочным карточкам заданий на решение простейших квадратных уравнений | 212 |
| Решение проверочной работы 4 | 214 |
| Решение проверочной работы 5 | 220 |
| Решение зачетной карточки 1 | 228 |
| Решение зачетной карточки 2 | 231 |
| Решение зачетной карточки 3 | 234 |
| Решение зачетной карточки 4 | 239 |
| Решение зачетной карточки 5 | 244 |
| Решение зачетной карточки 6 | 248 |
| Решение зачетной карточки 7 | 253 |
| Решение зачетной карточки 8 | 257 |