MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ион Акири Андрей Брайков Ольга Шпунтенко

Математика

Учебник для 7-го класса

7

EDITURA PRUT

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ион Акири Андрей Брайков Ольга Шпунтенко

Математика

Учебник для 7-го класса

EDITURA
PRUT

Acest manual este proprietate publică, editat din bugetul de stat, sursa Ministerului Educaţiei şi Cercetării, şi transmis cu titlul gratuit.

Manualul şcolar a fost elaborat în conformitate cu prevederile Curriculumului la disciplină, aprobat prin Ordinul ministrului educaţiei şi cercetării nr. 906 din 17 iulie 2019. Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului educaţiei şi cercetării nr. 446 din 12 mai 2023 ca urmare a evaluării calităţii metodico-ştiinţifice.

____

(наименование учебного заведения)

УЧЁТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УЧЕБНИКА

Год пользования	Фамилия и имя ученика	Учебный год	Состояние учебника	
			в начале года	в конце года
1				
2				
3				
4				
5				

- Учитель должен проверить правильность написания фамилии и имени ученика.
- Запрещаются записи и любые пометки на страницах учебника.
- Состояние учебника в начале и в конце учебного года оценивается как: *отлично*, *хорошо*, *удовлетворительно* или *плохо*.

Autori: Ion Achiri, doctor, conferenţiar universitar, Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chişinău
Andrei Braicov, doctor, conferenţiar universitar, Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chişinău
Olga Şpuntenco, profesoară, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Gaudeamus”, Chişinău

Traducere din limba română: Ion Achiri
Redactor: Vitalie Puţuntică
Corector: Olga Efremov
Copertă: Irina Cuzin, Sergiu Stanciu
Machetare computerizată: Valentina Stratu

Editura Prut Internaţional, str. Alba Iulia, nr. 23, bl. 1A, Chişinău, MD-2051
Tel.: (+373 22) 75 18 74; (+373 22) 74 93 18
www.edituraprut.md; e-mail: office@prut.ro

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii

Акири, Ион

Математика: Учебник для 7 класса / Ион Акири, Андрей Брайков, Ольга Шпунтенко; traducere din limba română: Ion Achiri; Ministerul Educaţiei şi Cercetării al Republicii Moldova. – [Chişinău]: Prut Internaţional, 2023 (Unisoft [Ucraina]). – 183, [1] p.

Editat din bugetul de stat.

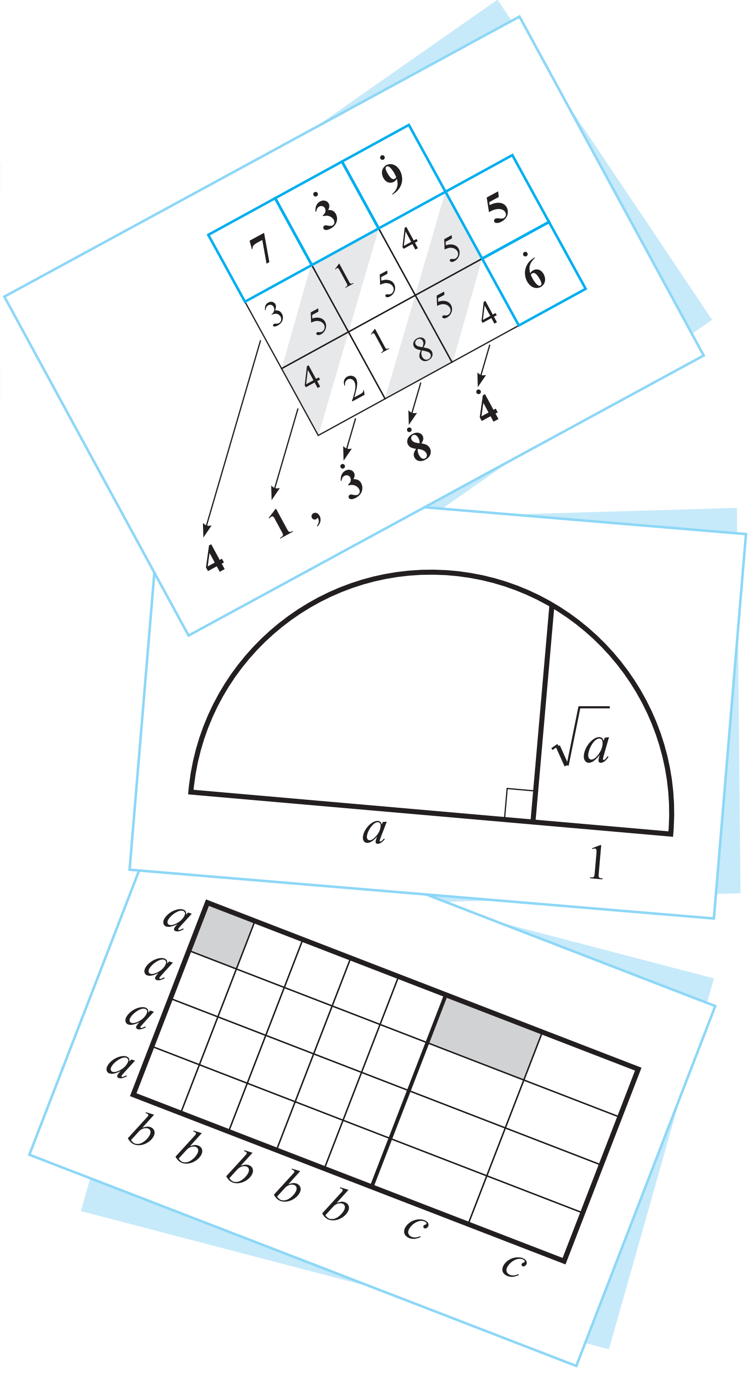
ISBN 978-9975-54-757-4

51(075.3)

A 392

Imprimat la Tipografia Unisoft

АЛГЕБРА



1 глава Действительные числа

> *Доказать можно все, даже истину.*
> Григорий Мойсил

§1. Множество рациональных чисел

1.1. Рациональные числа. Виды записи

Вспомним

1 а) Выберите числа, соответствующие первой корзине, затем из оставшихся отберите числа, соответствующие второй корзине. Подходят ли оставшиеся числа третьей корзине?

б) Получим ли мы тот же результат, если сначала выберем числа, соответствующие третьей корзине? Почему?

Запомните

- Любое рациональное число можно записать в виде $\frac{m}{n}$, где $m\in\mathbb{Z}$, и $n\in\mathbb{N}^*$.
- $\mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

2 Запишите число в виде $\frac{m}{n}$, где $m\in\mathbb{Z}$, и $n\in\mathbb{N}^*$:

а) 5; б) $4\frac{1}{3}$; в) –12,3; г) $-6\frac{2}{5}$.

Решение:

а) $5=\frac{5}{1}$;

б) $4\frac{1}{3}=\frac{4\cdot3+1}{3}=\frac{13}{3}$;

в) $-12{,}3=-12\frac{3}{10}=-\frac{12\cdot10+3}{10}=-\frac{123}{10}$;

г) $-6\frac{2}{5}=-\frac{6\cdot5+2}{5}=-\frac{32}{5}$.

3 Запишите три дроби, равные дроби $\frac{2}{5}$.

Решение:

1) $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, так как $4\cdot 5=10\cdot 2$;

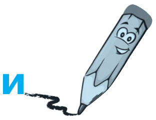
2) $\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$, так как $12\cdot 5=30\cdot 2$;

3) $\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$, так как $50\cdot 2=20\cdot 5$.

Вспомним

Дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны, если $a\cdot d=b\cdot c$. Обозначают $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Упражнения и задачи



☑☐☐

1. Выберите числа:
а) целые;
б) натуральные;
в) рациональные;
г) рациональные отрицательные.

9,3 $\quad \frac{19}{5} \quad$ 0,4 $\quad$ 173 $\quad$ 12,9 $\quad$ –8,(1) $\quad$ –7,1(2) $\quad -3\frac{9}{14}$ $\quad$ 0 $\quad$ –17 $\quad$ 5,01 $\quad$ 18 $\quad 7\frac{5}{11} \quad \frac{1}{99}$ $\quad$ –371 $\quad$ –46

2. Назовите три числа, которые:
а) принадлежат множеству ℤ и не принадлежат множеству ℕ;
б) принадлежат множествам ℕ и ℤ;
в) принадлежат множеству ℚ и не принадлежат множеству ℤ;
г) принадлежат множествам ℤ и ℚ.

3. ***Работайте в парах!*** Найдите пары равных дробей:

а) $\frac{21}{14}, \frac{4}{18}, \frac{7}{2}, \frac{5}{10}, \frac{8}{36}, \frac{6}{8}, \frac{18}{24}, \frac{4}{8}$;

б) $\frac{18}{27}, \frac{12}{16}, \frac{5}{8}, \frac{6}{9}, \frac{20}{32}, \frac{60}{80}, \frac{16}{28}, \frac{64}{112}$.

4. Выделите целую часть из дроби:

а) $\frac{7}{2}$; б) $-\frac{11}{3}$; в) $\frac{121}{10}$; г) $-\frac{61}{12}$.

5. Запишите в виде неправильной дроби:

а) $10\frac{1}{5}$; б) $-5\frac{3}{4}$; в) $8\frac{5}{7}$; г) –25.

6. ***Работайте в парах!*** Нарисуйте квадрат со стороной 4 см.

а) Закрасьте $\frac{1}{4}$ квадрата.

б) Закрасьте $\frac{2}{4}$ квадрата.

в) Закрасьте $\frac{1}{2}$ квадрата. Что вы заметили?

г) Закрасьте $\frac{3}{4}$ квадрата.

д) Закрасьте $\frac{4}{4}$ квадрата. Что вы заметили?

7. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно*?

а) $\frac{4}{7}=\frac{16}{49}$; б) $\frac{64}{40}=\frac{8}{5}$;

в) $\frac{1}{2}=\frac{10}{20}$; г) $\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$.

☑☑☐

8. Запишите в виде неправильной дроби десятичное число:

а) 3,5; б) –6,25; в) 15,48; г) 7,002.

9. ***Работайте в парах!*** Замените дробь равной ей дробью, знаменатель которой равен 36:

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{7}{4}$; в) $\frac{9}{12}$; г) $\frac{10}{18}$; д) $\frac{18}{72}$.

10. Запишите рациональное число, которое равно числу:

а) $4\frac{2}{5}$; б) $-7\frac{1}{8}$; в) $10\frac{2}{3}$; г) $-21\frac{1}{2}$.

11. Вероника прочла книгу за 3 дня. В первый день она прочла $\frac{2}{9}$ книги, во второй день – $\frac{1}{3}$ книги, а в третий день – оставшуюся часть. Какую часть книги прочитала Вероника в третий день?

12. Скорость звука равна $\frac{1}{3}$ км/с. На каком расстоянии от грозовой тучи находился Ваня, если он услышал звук через 12 секунд после того, как увидел молнию?

13. В марафоне приняли участие 64 спортсмена. $\frac{7}{8}$ участников марафона достигли финиша. Сколько спортсменов сошли с дистанции?

14. Велосипедист должен проехать 30 км. Какое расстояние проехал велосипедист, если оно составляет $\frac{4}{5}$ всего пути?

15. Соня заплатила в школьной столовой 5,5 лея за булочку. Сколько денег было у Сони, если за булочку она заплатила $\frac{1}{4}$ от имеющейся у нее суммы денег?

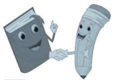
16. ***Работайте в группах!*** Напишите число, обратное рациональному числу, равное:

а) сумме чисел 0,5 и 1,4;

б) разности чисел $9\frac{3}{4}$ и $4\frac{1}{2}$;

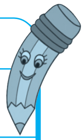
в) произведению чисел 2,45 и $4\frac{2}{5}$;

г) частному чисел $\frac{5}{13}$ и $\frac{5}{26}$.



17. ***Работайте в парах!***
Перепишите и заполните таблицу:

Скорость		90,5 км/ч	68 км/ч
Время	$\frac{2}{5}$ ч	$3\frac{2}{3}$ ч	
Расстояние	$8\frac{3}{4}$ км		120,25 км

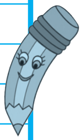


18. Запишите три рациональных числа, находящихся между:

а) $-1\frac{3}{4}$ и $-1\frac{1}{2}$; б) $4\frac{1}{4}$ и $4\frac{1}{3}$.

19. Перепишите и заполните таблицу (округлите до сотых). Расположите названия веществ в порядке возрастания их плотности.

Название вещества	Плотность (кг/м^3) – вес (в килограммах) куба вещества с ребром 1 м	Плотность (г/см^3) – вес (в граммах) куба вещества с ребром 1 см
Алюминий	2 700	
Серебро	10 500	
Золото	19 320	
Янтарь	1 100	
Медь	8 900	
Олово	7 300	
Платина	21 460	
Свинец	11 300	
Сахар	1 600	
Цинк	7 100	



1.2. Десятичные числа. Периодические десятичные числа

1.2.1. Десятичные числа

Вспомним

$$15\frac{27}{1000}=\underbrace{15}_{\text{целая часть}},\underbrace{027}_{\text{дробная часть}} \longleftarrow \text{десятичное число}$$

Записываем: 1 5 , 0 2 7

десятки единицы десятичные сотые тысячные

Читаем:
пятнадцать целых и двадцать семь тысячных
или
пятнадцать запятая нуль двадцать семь.

- $8\frac{3}{4}=?$

Способ 1

$\frac{3}{4}=3:4=0{,}75;\quad 8\frac{3}{4}=8+\frac{3}{4}=8+0{,}75=8{,}75.$

Способ 2

$8\frac{3}{4}=\frac{8\cdot 4+3}{4}=\frac{35}{4}=35:4=8{,}75.$

1 Рассмотрите образец и запишите в виде десятичного числа рациональные числа:

$2\frac{5}{10},\quad -4\frac{3}{5},\quad 3\frac{2}{4},\quad 1\frac{5}{8},\quad -\frac{5}{8},\quad 3\frac{8}{25},\quad \frac{9}{40}.$

- Прочитайте полученные десятичные числа.

Применяем

2 Запишите названия рек в порядке возрастания их длин.

- Определите, через какие страны протекает каждая река.
- Какая самая длинная река в мире? Какова ее длина?
- Назовите 5 самых длинных рек в мире.

Название реки	Длина реки (тысяч километров)
Днепр	2,201
Бык	0,155
Днестр	1,362
Дунай	2,857
Прут	0,953
Тиса	0,966
Реут	0,286
Миссисипи	3,78

1.2.2. Периодические десятичные числа

Исследуем и познаем

1) Выполните действия: а) 2,8 : 2,1; б) 2,7 : 1,1; в) 36,1 : 2,25; г) 0,9 : 2,2.
2) Обсудите полученные результаты.
3) Проанализируйте и дополните:

Десятичные периодические числа

$1{,}333\ldots=\underbrace{1{,}(\overbrace{3}^{\text{период}})}_{\text{пишут}}\xrightarrow{\text{читают}}$ одно целое и три в периоде;

$2{,}454545\ldots=\underbrace{2{,}(\overbrace{45}^{\text{период}})}_{\text{пишут}}\xrightarrow{\text{читают}}$ два целых и сорок пять в периоде;

$0{,}4090909\ldots=\underbrace{0{,}4(\overbrace{09}^{\text{период}})}_{\text{пишут}}\xrightarrow{\text{читают}}$ ноль целых четыре десятых и ноль девять в периоде;

$3{,}15212121\ldots=\underbrace{3{,}15(\overbrace{\boxed{}\boxed{}}^{\text{период}})}_{\text{пишут}}\xrightarrow{\text{читают}}\boxed{}$

4) Запишите результаты, полученные при решении задания 1), в виде периодических десятичных чисел.

Запомните

Числа 2,(8); 35,(21); 0,(115) – **десятичные периодические числа с чистым периодом**.
Числа 0,7(23); 6,25(3); 21,56(7) – **десятичные периодические числа со смешанным периодом**.
Период периодического десятичного числа – это число, записанное в его скобках.

Применяем

- $2 : 3 = 0{,}666\ldots = 0{,}\underbrace{(\square)}_{\text{период}}$;
- $14 : 12 = \square = 1{,}\square\underbrace{(\square)}_{\text{период}}$;
- $15 : 11 = \square = \square{,}\underbrace{(\square\,\square)}_{\text{период}}$;
- $63 : 22 = \square = \square{,}\square\underbrace{(\square\,\square)}_{\text{период}}$.

Запомните

Периодические десятичные числа представляют собой бесконечные десятичные числа.

1.2.3. Преобразование периодических чисел с чистым периодом в дробь

1 Запишите дробь в виде десятичного периодического числа:

- $\frac{2}{\underbrace{9}_{\text{одна цифра}}}=0{,}2222\ldots=0{,}\underbrace{(2)}_{\text{одна цифра}};$
- $\frac{11}{\underbrace{99}_{\text{2 цифры}}}=0{,}111111\ldots=0{,}\underbrace{(11)}_{\text{2 цифры}};$
- $\frac{5}{\underbrace{999}_{\text{3 цифры}}}=0{,}005005\ldots=0{,}\underbrace{(005)}_{\text{3 цифры}}.$

2 Запишите десятичное периодическое число с чистым периодом в виде дроби:

- $0{,}\underbrace{(7)}_{\text{одна цифра}}=0{,}7777\ldots=\frac{7}{\underbrace{9}_{\text{одна цифра}}};$
- $0{,}\underbrace{(15)}_{\text{2 цифры}}=0{,}151515\ldots=\frac{15^{(3}}{\underbrace{99}_{\text{2 цифры}}}=\frac{5}{33};$
- $1{,}\underbrace{(235)}_{\text{3 цифры}}=1{,}235235235\ldots=1\frac{235}{\underbrace{999}_{\text{3 цифры}}}=\frac{1234}{999}.$

Обобщим

① Если у десятичного периодического числа с чистым периодом число целых равно нулю, то это число записывается в виде дроби, числитель которой равен периоду десятичного периодического числа с чистым периодом. Знаменатель этой дроби равен числу, состоящему из стольких цифр 9, сколько цифр содержится в периоде периодического числа с чистым периодом.

$$0{,}(17)=\frac{17}{99}.$$

② Если у десятичного периодического числа с чистым периодом число целых отлично от нуля, то это число записывается в виде дроби путем сложения его целой части с дробью, полученной в результате преобразования дробной части исходного периодического числа с чистым периодом.

$$2{,}(05)=2+0{,}(05)=2+\frac{5}{99}=2\frac{5}{99}=\frac{203}{99}.$$

③ Полученную дробь, как правило, приводят к несократимой дроби.

1.2.4. Преобразование десятичных периодических чисел со сложным периодом в дробь

Исследуем и познаем

Способ I

- $$0,\underbrace{1}_{\text{одна цифра}}(\underbrace{16}_{\text{2 цифры}})=\frac{1,(16)}{10}=\frac{1\frac{16}{99}}{10}=\frac{\frac{115}{99}}{10}=\frac{115}{\underbrace{99}_{\text{2 цифры}}\underbrace{0}_{\text{одна цифра}}}\Bigg|=\frac{116-1}{990};$$

- $$0,\underbrace{21}_{\text{2 цифры}}(\underbrace{03}_{\text{2 цифры}})=\frac{21,(03)}{100}=\frac{21\frac{3}{99}}{100}=\frac{2082}{\underbrace{99}_{\text{2 цифры}}\underbrace{00}_{\text{2 цифры}}}\Bigg|=\frac{2103-21}{9900};$$

- $$10,5(2)=10+0,5(2)=10+\frac{\square}{\square}=10\frac{\square}{\square}=\square.$$

Способ II

- $$0,\boxed{2}(35)=\frac{235-\boxed{2}}{990}=\frac{233}{990};$$
- $$0,\boxed{16}(2)=\frac{162-\boxed{16}}{900}=\frac{146}{900};$$
- $$5,3(01)=5+0,3(01)=5+\frac{\square-\square}{\square}=\square.$$

Обобщим

① Если у десятичного периодического числа со смешанным периодом число целых равно нулю, то это число записывается в виде дроби, числитель которой равен разности между натуральным числом, выраженным непериодической частью, и периодической частью, и натуральным числом, выраженным непериодической частью. Знаменатель этой дроби является натуральным числом, которое состоит из стольких цифр 9, сколько цифр содержится в периоде, и стольких нулей, сколько цифр в непериодической части.

$$0,2(31)=\frac{231-2}{990}.$$

② Если у десятичного периодического числа со смешанным периодом число целых отлично от нуля, то это число преобразуется в дробь путем нахождения суммы его целой части с дробью, полученной в результате преобразования дробной части исходного периодического числа со смешанным периодом.

$$2,3(11)=2+0,3(11)=2+\frac{311-3}{990}=2+\frac{308}{990}=\frac{2288}{990}.$$

- Рассмотрите образец и запишите в виде дроби рациональные числа:

$6,8$; $-7,(12)$; $3,5(24)$;

$11,11$; $8,(76)$; $-0,2(134)$.

$$-2,9=-2\frac{9}{10}$$

число с чистым периодом

$$4,(53)=4\frac{53}{99}$$

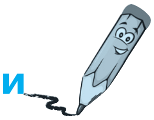
число со смешанным периодом

$$7,\underbrace{8(15)}_{1+2=3}=7\frac{815-8}{\underbrace{990}_{2+1=3}}=7\frac{807}{990}$$

Запомните

- Каждое рациональное число может быть записано однозначно в виде несократимой дроби.
- Каждое рациональное число может быть записано в виде десятичного числа.

Упражнения и задачи



☑ ☐ ☐

1. Дополните: $\frac{2}{5}=0,$ ▢; $1\frac{1}{4}=1,$ ▢; $\frac{3}{8}=0,$ ▢; $2\frac{1}{8}=2,$ ▢.

2. Запишите десятичные числа в возрастающем порядке: а) 6,025; 5,99; 6,1; б) 0,08; 25,02; 5.

3. ***Работайте в парах!*** Запишите два последовательных целых числа, между которыми находится (на числовой оси) число:

а) 4,81; б) –3,2; в) 34,01; г) 0,02; д) –0,1; е) –16,25.

4. а) Определите самую большую страну, полностью окруженную водой.
б) Найдите ее площадь (в км²).
в) Какой процент суши занимает ее поверхность?

5. а) Запишите названия гор в порядке убывания их высот.

Горы	Высота (км)	Страна
Чо-Ойю	8,201	Непал
Манаслу	8,163	Непал
Нанга Парбат	8,126	Пакистан
Аннапурна	8,091	Непал
Эверест	8,848	Непал

б) Какая самая высокая гора в мире? Какова ее высота (в метрах)?

6. Найдите пары равных чисел:

а) $\frac{5}{6}$; $1\frac{1}{5}$; $-\frac{12}{5}$; 0,8(3); $-2\frac{1}{5}$; $\frac{6}{5}$; –2,4; –2,(2); $-\frac{20}{9}$; –2,2.

б) $\frac{3}{4}$; $-\frac{21}{24}$; –0,75; 1,(3); 0,75; $\frac{7}{8}$; $\frac{4}{3}$; 0,875; $-\frac{7}{8}$; $-\frac{6}{8}$.

7. Запишите числа: а) с чистым периодом; б) со смешанным периодом.

0,0(21); –2431,49494949; 4,(1234); –0,722222; 16,6363121212...; –3,(5); –9,878787...

8. ***Работайте в группах!*** Запишите числа в виде десятичного числа:

а) $\frac{2}{5}, \frac{16}{3}, -2\frac{3}{8}, 1\frac{3}{7}, \frac{3}{16}, -\frac{4}{9}, \frac{25}{90}, -\frac{101}{90}$; б) $\frac{1}{8}, \frac{14}{9}, -3\frac{5}{6}, 2\frac{5}{7}, \frac{7}{18}, -\frac{7}{9}, \frac{34}{900}, \frac{21}{990}$.

9. Выполните действия и запишите результат в виде периодического десятичного числа:

а) 24,16 : 11; б) 12,4 : 37; в) 0,9 : 2,2;
г) 0,5 : 1,3; д) 64,45 : 15; е) 0,267 : 0,18;
ж) 1,24 : 2,7; з) 0,632 : 1,8.

10. Запишите простое периодическое десятичное число в виде дроби:

а) 0,(15); б) 0,(231); в) 2,(9); г) 12,(12).

11. Запишите периодическое десятичное число со смешанным периодом в виде дроби:

а) 2,3(4); б) 16,1(8);
в) 30,0(18); г) 12,12(12).

12. Запишите 4 дроби, равные числу:

а) 0,6; б) 0,(3); в) 2,4;
г) 1,8; д) 1,(5); е) 0,(4).

13. ***Работайте в парах!*** Запишите в виде дроби числа:

а) 0,16; –3,14; 0,(8); –5,(7); 0,3(5); 8,21(6); –4,97(35);

б) –0,72; 5,36; –0,(42); –3,(18); 0,5(3); 12,3(45); –7,6(543).

14. Дополните цифрами или скобками, чтобы получить десятичные числа:
а) с чистым периодом, б) со смешанным периодом.

3,☐☐4☐; 0,☐8☐☐☐; –41,7☐☐☐...; 39,☐27☐☐...; –6,3☐1☐☐☐...; 0,☐9☐4☐☐... .

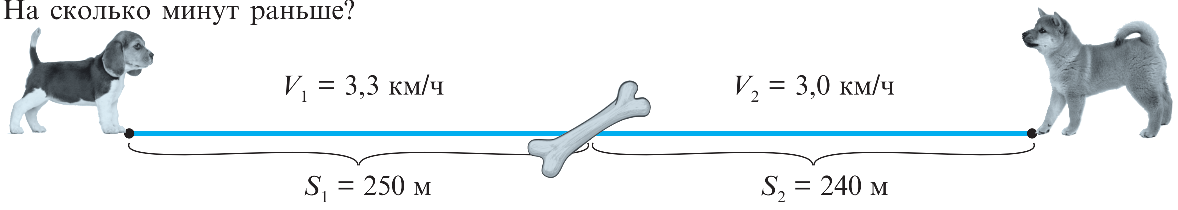
☑☑☐

15. Найдите целые числа, расположенные на числовой оси между числами:
а) –1,1 и 5,04; б) 0,03 и 2,5; в) –3,25 и 1,25;
г) –10,2 и –6,4; д) –25,4 и –22,2; е) 15,1 и 19,4.

16. Дополните цифрами, чтобы число было записано в виде периодического десятичного числа:
а) с чистым периодом; б) без периода; в) со смешанным периодом.

$\frac{13}{\square}$, $\frac{\square}{9\square}$, $\frac{\square}{3\square}$, $\frac{\square}{6}$, $\frac{7\square}{9\square}$, $\frac{34}{\square}$, $\frac{3\square}{3\square}$.

17. ***Работайте в парах!*** Какая из собак (слева или справа) быстрее доберется до кости? На сколько минут раньше?



18. Вычислите:
а) $\frac{2}{9}:0,(1)$; б) $2\frac{1}{18}:0,(4)$; в) $2\frac{2}{3}:0,(8)$;
г) $1,(4):\frac{8}{11}$; д) $3,(15):0,(5)$;
е) $0,(008)\cdot\frac{999}{100}$; ж) $2,(07):\frac{1}{9}$.

19. Запишите в виде дроби периодическое десятичное число:
а) 123,(18); б) 6,02(78); в) 2,(135);
г) 16,2(14); д) 6,25(8); е) 30,02(78).

20. Запишите число в виде периодического десятичного числа:
а) $\frac{43}{111}$; б) $\frac{37}{18}$; в) $2\frac{8}{15}$; г) $9\frac{2}{3}$.

21. Запишите в возрастающем порядке числа:
0,466; $\frac{7}{15}$; 0,4(63); 0,4637; 0,(46).

22. ***Исследуйте!*** Сравните числа:
а) 0,(545) ● $\frac{6}{11}$;
б) $-2\frac{2}{9}$ ● –2,(212);
в) $-7\frac{8}{11}$ ● –7,(72).

\>
=
<

23. Средняя масса одной горошины равна 220,6 мг. Найдите массу 100 горошин:
а) в граммах;
б) в килограммах.

24. ***Работайте в парах!*** ***Магия чисел!***

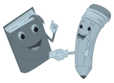
Запишите в виде десятичного числа: $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{891}$, $\frac{1}{8991}$, $\frac{1}{89991}$. Что вы заметили?

☑☑☑

25. Найдите рациональное число, находящееся между числами:
а) 64,(98) и 65; б) $\frac{417}{500}$ и $\frac{418}{499}$.

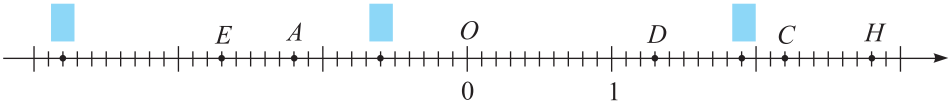
26. При каких значениях n, $n \in \mathbb{N}^*$, число $\frac{1}{n}$ является периодическим десятичным числом с чистым периодом, у которого:
а) одна цифра в периоде; б) две цифры в периоде?

1.3. Изображение рациональных чисел на оси

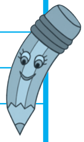


Работайте в парах!

1 Рассмотрите числовую ось и таблицу, затем дополните числом или соответствующей буквой.



Точка	Координата	Расстояние от точки до начала отсчета
A	–1,2	1,2
		0
	1,3	
E		
		$2\frac{4}{5}$
		2,2
	–2,8	
	1,9	



Вспомним

- Прямая, на которой указаны начало отсчета, направление (положительное) и единичный отрезок, называется **числовой осью**.
- Каждая точка на числовой оси имеет координату. Записывают: $A(a)$. Читают: *точка **A** с координатой **a***.

2 В задании **1** имеем: $A(-1{,}2)$; $O(0)$.

Дополните: а) E(☐); D(☐); C(☐); H(☐). б) ☐(2,8); ☐(0,6); ☐(1,9).

Запомните

Изображение рациональных чисел на оси помогает сравнивать числа.

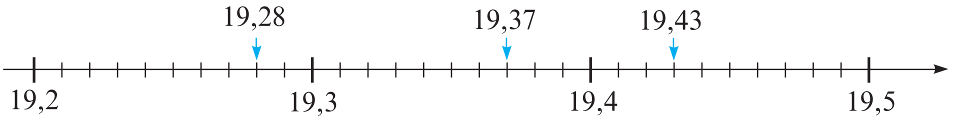
3 Рассмотрите таблицу и определите, в какой из дней курс доллара был наименьшим.

	1 $	1 €
Понедельник	19,37 лея	20,54 лея
Вторник	19,28 лея	20,57 лея
Среда	19,43 лея	20,48 лея

Решение:

Способ 1

Изобразим числа 19,37; 19,28; 19,43 на числовой оси:



☐ < 19,37 < ☐

Способ 2

Шаг 1

Сравним десятки:

19,37
19,28
19,43

Одно и то же число десятков

Шаг 2

Сравним единицы:

19,37
19,28
19,43

Одно и то же число единиц

Шаг 3

Сравним десятичные:

19,37
19,28
19,43

2 < 3 < 4

☐ < 19,37 < ☐

Ответ: ☐.

Запомните

Из двух чисел, расположенных на числовой оси, больше то число, которое расположено правее.

4 Рассмотрите таблицу из предыдущей задачи и скажите, в какой день был наибольший курс евро.

Упражнения и задачи

☑ ☐ ☐

1. а) Постройте в тетради числовую ось.

б) Отметьте на ней числа: $A(-3{,}5)$; $B\left(-2\frac{1}{2}\right)$; $C(-0{,}7)$; $D\left(3\frac{1}{4}\right)$; $E(4{,}5)$; $F(5)$.

в) Найдите расстояние от точки до начала координат.

2. Отметьте на числовой оси точки, равноудаленные от начала координат, и дополните:

а) $M(-5)$ и $F(☐)$; б) $A(-3{,}5)$ и $G(☐)$;

в) $C\left(2\frac{2}{5}\right)$ и $D(☐)$; г) $P\left(-4\frac{1}{5}\right)$ и $V(☐)$.

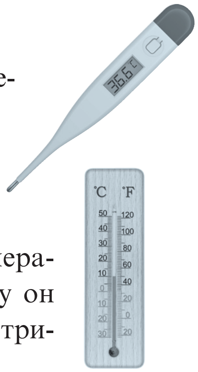
3. ***Работайте в парах!*** Отметьте на числовой оси точку, соответствующую:

а) натуральному числу, меньше, чем 4;

б) рациональному числу, больше, чем –2,5 и меньше, чем –1,4;

в) рациональному числу, больше, чем 1,4 и меньше, чем 2,5.

4. Исследуйте дома:



а) термометр для измерения температуры тела. Какую температуру он показывает: положительную или отрицательную? Обоснуйте.

б) термометр для измерения температуры воздуха. Какую температуру он показывает: положительную или отрицательную? Обоснуйте.

5. Запишите три рациональных числа, расположенных на оси:

а) левее числа 1;

б) правее числа 2,5;

в) правее числа $-4\frac{1}{2}$;

г) левее числа –8,25;

д) левее числа $12\frac{2}{3}$.

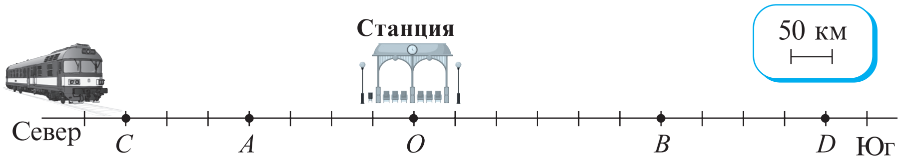
6. Найдите расстояние от начала координат до точки:

а) $A(15{,}1)$; б) $B(-6{,}4)$; в) $C(-78)$; г) $D(101)$; д) $O(0)$; е) $F\left(-\frac{1}{2}\right)$.

7. На каком расстоянии от станции O находится поезд, если он доехал до точки:

а) A; б) B;

в) C; г) D?



☑ ☑ ☐

8. Максим поднялся на лифте до 9 этажа 22-этажного дома, затем поднялся по ступенькам еще на 7 этажей. На каком этаже оказался Максим? Обоснуйте.

9. В каком направлении и на сколько единиц необходимо переместить объект из точки:

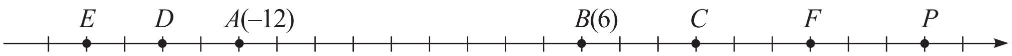
а) $A(-4{,}25)$ в точку $B(5)$;

б) $C\left(1\frac{3}{4}\right)$ в точку $D\left(-6\frac{1}{4}\right)$?

10. Объект был перемещен из точки E в отрицательном направлении на $6\frac{2}{3}$ единиц и оказался в точке $F\left(-2\frac{2}{3}\right)$. Найдите координату точки E.

11. Объект был перемещен из точки C в положительном направлении на $5\frac{1}{6}$ единиц и оказался в точке $D\left(3\frac{5}{6}\right)$. Найдите координату точки C.

12. Перечертите рисунок и отметьте начало отсчета. Какие координаты имеют точки C, D, E, F, P?



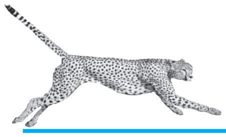
13. Обозначьте на числовой оси точки, у которых модуль координат равен:
а) 4; б) 1,5; в) $6\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{2}$.

14. Отметив на числовой оси точки $A(-7{,}5)$, $Д\left(\frac{31}{6}\right)$, $И(-8{,}4)$, $К\left(-\frac{31}{4}\right)$, $Р(5)$, $Ш(-10)$, вы получите фамилию ученого, который в 1623 году изобрел первую счетную машину, способную складывать и вычитать. Запишите фамилию этого изобретателя. (Учтите, что в записи фамилии будут две буквы $К$.)

15. У кого наибольшая скорость? А наименьшая?

Газель пробегает 5 км за 3 минуты

Кенгуру преодолевает 1 км за 2 минуты



Гепард пробегает 900 м за 30 секунд

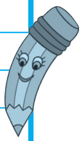
Страус пробегает 2 км за 90 секунд

16. Отметьте на числовой оси, если это возможно, целые числа x такие, что:
а) $|x| \le 6$; б) $|x| = 3$; в) $|x| < 3{,}8$; г) $|x| > 10$.

17. Найдите $|x|$, если расстояние между точками $B(x)$ и $C(-x)$ равно 8 единицам измерения.

18. Дополните таблицу (округлите до сотых). Отметьте на числовой оси названия стран в порядке возрастания плотности населения.

Страна	Площадь (км^2)	Количество жителей (млн)	Плотность населения $\left(\frac{\text{кол-во жителей}}{\text{км}^2}\right)$
Молдова	33 800	3,64	
Румыния	237 500	21,5	
Россия	17 075 000	141,83	
Украина	603 700	46,39	
Бельгия	30 500	10,63	
Франция	643 400	62	



Занимательная математика

19. Впишите такие 5 чисел, чтобы сумма всех этих чисел была положительной, а сумма любых трех соседних чисел была отрицательной.

§2. Иррациональные числа

2.1. Квадратный корень

1 Рассмотрите пример и дополните:

$3^2 = 9$, $\square^2 = 4$, $\square^2 = 25$, $\square^2 = 49$.

Определение Неотрицательное число b называется ***квадратным корнем*** из неотрицательного числа a (или корнем из a), если $b^2 = a$.
Квадратный корень из неотрицательного числа a обозначается через $\sqrt{a}$.

Пример. Так как $4^2 = 16$, то квадратный корень из числа 16 равен 4.
Обозначаем: $\sqrt{16} = 4$.

2 Дополните:

а) Число 3 является квадратным корнем из числа 9, так как $\square = 9$.
Обозначаем $\sqrt{9} = \square$.

б) Число 2,1 является квадратным корнем из числа 4,41, так как $2{,}1^2 = \square$.
Обозначаем $\sqrt{\square} = 2{,}1$.

в) Число $\square$ является квадратным корнем из числа 0,09, так как $\square^2 = 0{,}09$.
Обозначаем $\sqrt{0{,}09} = \square$.

г) Число –3 не является квадратным корнем из какого-либо числа, так как $-3 < \square$.

3 Округлите до сотых числа $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$.

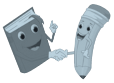
Объясняем Используем калькулятор и получим:

$\sqrt{3} = 1{,}7320508...$
↓
Цифра тысячных – 2.
↓
Так как $2 < 5$.
↓
$\sqrt{3} \approx 1{,}73$

$\sqrt{5} = 2{,}2360679...$
↓
Цифра тысячных – 6.
↓
Так как $6 > 5$.
↓
$\sqrt{5} \approx 2{,}24$

4 Вычислите, используя калькулятор, и дополните, округлив до сотых:

а) $\sqrt{2} \approx 1,\square$; б) $\sqrt{3} \approx 1,\square$; в) $\sqrt{5} \approx 2,\square$;
г) $\sqrt{10} \approx 3,\square$; д) $\sqrt{55} \approx 7,\square$; е) $\sqrt{1{,}15} \approx 1,\square$;
ж) $\sqrt{18\frac{3}{4}} \approx 4,\square$; з) $\sqrt{102{,}8} \approx 10,\square$; и) $\sqrt{625{,}4} \approx 25,\square$.



Работайте в парах!

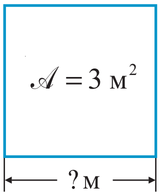
5 Дополните, округлив до целых:

а) $\sqrt{25{,}2} \approx 5$; б) $\sqrt{30} \approx \square$; в) $\sqrt{111{,}8} \approx \square$;
г) $\sqrt{1{,}25} \approx \square$; д) $\sqrt{5} \approx \square$; е) $\sqrt{226\frac{1}{4}} \approx \square$.

- Проверьте правильность вычислений, используя калькулятор.

2.2. Понятие иррационального числа

Всезнайка предложил своему другу Многознайке найти точную длину стороны квадрата, площадь которого равна 3 м^2. Обратите внимание, как рассуждает Многознайка.



Объясняем Обозначим длину стороны квадрата через x, где $x > 0$.

Тогда: $x \cdot x = 3$ или $x^2 = 3$.

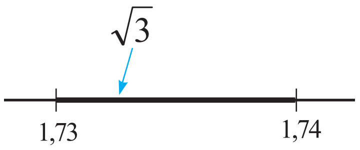
Следовательно, $x = \sqrt{3}$.

$\sqrt{3} = ?$

$$\overset{1}{1^2} < 3 < \overset{4}{2^2} \longrightarrow 1 < \sqrt{3} < 2$$

$$\overset{2{,}89}{1{,}7^2} < 3 < \overset{3{,}24}{1{,}8^2} \longrightarrow 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$$

$$\overset{2{,}9929}{1{,}73^2} < 3 < \overset{3{,}0276}{1{,}74^2} \longrightarrow 1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$$



Следовательно, длина стороны квадрата больше 1,73 м = 173 см и меньше 1,74 м = см.

Странно!
Не существует такого рационального числа, квадрат которого равен 3.

Действительно, число $\sqrt{3}$ не является рациональным, его невозможно записать в виде периодического десятичного числа. Следовательно, его нельзя записать в виде дроби. Оно является бесконечным непериодическим десятичным числом: $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$ Число $\sqrt{3}$ является *иррациональным*.

Иррациональные числа, представленные в десятичном виде, имеют бесконечное количество десятичных знаков и не являются периодическими.

Запомните

Иррациональное число невозможно записать в виде периодического десятичного числа (с чистым или смешанным периодом).

Иррациональное число невозможно записать в виде обыкновенной дроби.

Иррациональные числа – это числа, которые могут быть записаны в виде бесконечных непериодических десятичных чисел.

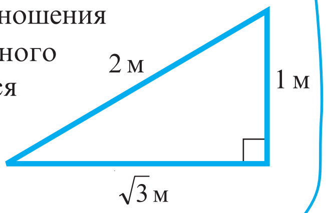
Множество иррациональных чисел обозначается буквой **I**.

Иррациональные числа не обязательно являются квадратными корнями. Например, иррациональное число 0,1234567891011... не является квадратным корнем какого-либо рационального числа. Число π = 3,1415... также является иррациональным числом.

Интересно и полезно

Несмотря на то, что длина стороны квадрата, площадь которого равна $3\ м^2$, является иррациональным числом, стороны этого квадрата можно точно построить с помощью линейки и циркуля. Для этого сначала построим прямоугольный треугольник с катетом, равным 1 м, и гипотенузой 2 м. Длина другого катета треугольника равна $\sqrt{3}$ м. Этот факт следует из соотношения длин катетов (a, b) и длины гипотенузы (c) прямоугольного треугольника: $a^2+b^2=c^2$. Это соотношение называется *теоремой Пифагора*.

В нашем случае $\underset{1}{\underset{\uparrow}{1^2}}+\underset{3}{\underset{\uparrow}{(\sqrt{3})^2}}=\underset{4}{\underset{\uparrow}{2^2}}$



Упражнения и задачи

☑ ☐ ☐

Образец:
Так как $10^2=100$,
следует, что $10=\sqrt{100}$.

1. Дополните:

а) $11=\sqrt{\square}$; б) $0{,}8=\sqrt{\square}$; в) $1\frac{1}{4}=\sqrt{\square}$;

г) $0{,}01=\sqrt{\square}$; д) $1{,}5=\sqrt{\square}$; е) $4,(3)=\sqrt{\square}$.

2. ***Работайте в парах!*** Вычислите:

а) $\sqrt{25}$; б) $\sqrt{0{,}04}$; в) $\sqrt{144}$; г) $\sqrt{81}$; д) $\sqrt{\frac{9}{4}}$;

е) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; ж) $\sqrt{4{,}5\cdot 2}$; з) $\sqrt{4\cdot 9^2}$; и) $\sqrt{\frac{8}{2}}$.

3. Укажите, какие из данных чисел являются рациональными:

а) $\sqrt{2}$; -4; $\sqrt{9}$; $-\sqrt{9}$; $\sqrt{24}$; 1,18; 0,1234567891011...; 3,(7); –5,0(2).

б) $\frac{1}{4}$; $-\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{81}}$; $\sqrt{\frac{48}{3}}$; $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; $(\sqrt{5})^0$; $(-1)^{2007}$; $(-1)^6\cdot\sqrt{7}$.

4. Вычислите:

а) $2{,}1^2$; б) $3{,}5^2$; в) $0{,}28^2$; г) $8{,}19^2$; д) $4{,}56^2$.

5. Запишите иррациональное число, заключенное между числами:

а) 5 и 6; б) 7 и 8; в) –5 и –4; г) 0 и 1.

6. ***Работайте в парах!*** Решите на множестве $\mathbb{Q}$ уравнение:

а) $x^2=9$; б) $x^2=25$; в) $x^2=\frac{1}{4}$; г) $x^2=8$; д) $x^2=-4$; е) $x^2=0$.

7. ***Исследуйте!*** Выберите верный ответ:

а) $\sqrt{2{,}89}=\square$;

1,7	1,07	1,3

б) $\sqrt{15{,}21}=\square$;

3,1	3,81	3,9

в) $\sqrt{0{,}1936}=\square$;

0,34	0,54	0,44

г) $\sqrt{0{,}5184}=\square$.

0,82	0,72	0,68

8. Не извлекая квадратный корень, сравните числа:

>
=
<

а) $\sqrt{8}$ и 3; б) 9 и $\sqrt{90}$;

в) 3,4 и $\sqrt{10}$; г) $\sqrt{19}$ и 4,5;

д) $\sqrt{39}$ и 6,2.

Образец:
$\sqrt{15} < 4$, так как $4 = \sqrt{16}$.

9. Применив калькулятор, вычислите:

а) $\sqrt{549{,}9025}$; б) $\sqrt{326{,}8864}$; в) $\sqrt{7942{,}3744}$; г) $\sqrt{4912{,}6081}$.

10. Вычислите, используя калькулятор, с точностью до двух десятичных знаков:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{7}$; г) $\sqrt{10}$.

11. Дополните, округлив до целых:

а) $\sqrt{39} \approx \square$; б) $\sqrt{12} \approx \square$; в) $\sqrt{25{,}1} \approx \square$;

г) $\sqrt{66\frac{1}{4}} \approx \square$; д) $\sqrt{105} \approx \square$; е) $\sqrt{145} \approx \square$.

12. Заполните таблицу.

Число a	Округление числа a до			
	единиц	десятых	сотых	тысячных
12,345678...				
−49,626226222...				
$\sqrt{53} = 7{,}2801098...$				
$\sqrt{0{,}6} = 0{,}774596...$				

13.  ***Работайте в группах!*** Возведите в квадрат число:

а) 0,(4); б) 0,(7); в) 7,(3);

г) 1,8(3); д) 0,2(6); е) –2,(45).

Образец:
$1,(3)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = 2{,}5(4)$

☑☑☐

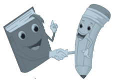
14. Вычислите, используя калькулятор, с точностью до 1 см длину стороны квадрата, площадь которого равна:

а) 2 м^2; б) 3 м^2; в) 2,4 м^2; г) 6 м^2.

15. Вычислите площадь квадрата со стороной, равной:

а) 4,(3) см; б) 2,(5) см;

в) $\sqrt{8{,}7}$ см; г) $\sqrt{3,(7)}$ см.

16.  ***Работайте в парах!*** Вычислите:

а) $\sqrt{0,(4)}$; б) $\sqrt{28,(4)}$;

в) $\sqrt{2,(7)}$; г) $\sqrt{7,(1)}$;

д) $\sqrt{53,(7)}$; е) $\sqrt{40,(1)}$.

Указание. Представьте в виде обыкновенной дроби число, записанное под знаком корня.

☑☑☑

17. Вычислите: а) $\sqrt{0{,}32(1)}$; б) $\sqrt{0{,}58(7)}$.

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

18. Рассмотрите внимательно и дополните, не вычисляя:

$\frac{1}{7} = 0,(142857)$; $\frac{2}{7} = 0,(285714)$; $\frac{3}{7} = 0,(428\square71)$;

$\frac{4}{7} = 0,(57\square\square28)$; $\frac{5}{7} = 0,(71\square\square\square5)$; $\frac{6}{7} = 0,(85\square\square\square\square)$.

§3. Множество действительных чисел

3.1. Множество действительных чисел

Всезнайка предложил Многознайке назвать числовое множество, которому будут принадлежать все результаты арифметических действий, возведения в степень с натуральным показателем и извлечения квадратного корня из числа. Обратите внимание, как рассуждает Многознайка.

Объясняем

Множество рациональных чисел (то есть $\mathbb{Q}$) не удовлетворяет условию задачи, так как квадратный корень не всегда является рациональным числом. Например, $\sqrt{3}$ не является рациональным числом. На множестве иррациональных чисел (то есть $\mathbf{I}$) не всегда результат операций, указанных выше, принадлежит множеству $\mathbf{I}$. Например, числа $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$ иррациональны, а их сумма равна 0 (рациональное число).

Среди множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbf{I}$ нет множества с таким свойством.

Построим другое множество, применив операцию объединения.

Запомните

> $\boxed{\mathbb{Q} \cup \mathbf{I}}$ ← **Множество действительных чисел**, которое обозначается буквой $\mathbb{R}$.
> Множество действительных чисел состоит из рациональных и иррациональных чисел.

***Обозначения*:**

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ← множество ненулевых действительных чисел;

$\mathbb{R}_-$ ← множество неположительных действительных чисел;

$\mathbb{R}_+$ ← множество неотрицательных действительных чисел;

$\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_- \setminus \{0\}$ ← множество отрицательных действительных чисел;

$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ ← множество положительных действительных чисел.

Ответ: Множество $\mathbb{R}$ удовлетворяет условию задачи.

- Впишите одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbf{I}$, $\mathbb{R}$, чтобы высказывание стало истинным.

а) $\square \subset \mathbb{Z}$.

б) $\square \setminus \mathbb{Q} = \mathbf{I}$.

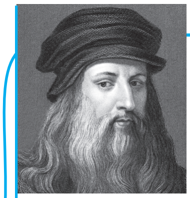
в) $\square \cap \square = \varnothing$.

г) $\square \subset \square \subset \square \subset R$.

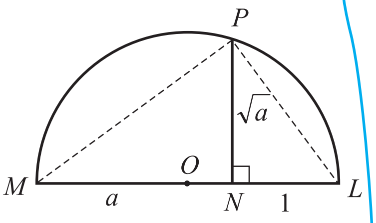
д) $\square \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

е) $\mathbb{N} \cap \square = N$.

Интересно и полезно



Леонардо да Винчи (1452–1519 гг.)

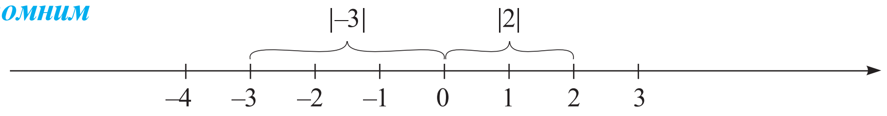


Леонардо да Винчи умел вычислять квадратный корень с помощью геометрических построений. Чтобы найти $\sqrt{a}$, он строил отрезок MN длиной a и его продолжение – отрезок NL длиной 1. Затем он строил полуокружность диаметром ML, а из точки N проводил перпендикуляр к ML, который пересекал полуокружность в точке P.

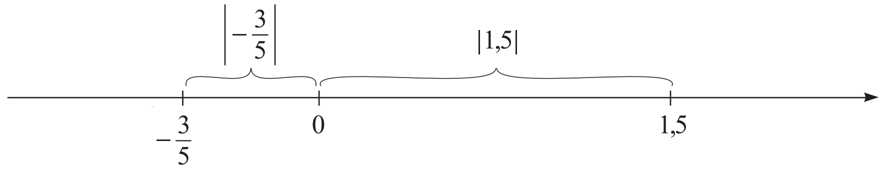
Получим $NP = \sqrt{a}$. Это равенство следует из так называемой **теоремы высоты** прямоугольного треугольника. Так как треугольник MPL – прямоугольный $(m(\angle MPL) = 90°)$, то $NP^2 = MN \cdot NL$, или $NP = \sqrt{MN \cdot NL}$.

3.2. Модуль действительного числа

Вспомним



$|-3| = 3$; $|2| = 2$



$\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$; $|1,5| = 1,5$

1 Рассмотрите и дополните:

$|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$; $\left|5\frac{1}{8}\right| = 5\frac{1}{8}$; $|-7,98| = 7,98$;

$|-0,005| = \square$; $\left|-\frac{5}{6}\right| = \square$; $\left|\frac{7}{11}\right| = \square$; $|0| = \square$.

Запомните

- Расстояние от начала координат O до точки $A(a)$, $a \in \mathbb{R}$, есть **модуль** или **абсолютная величина** действительного числа a. Его обозначают так: $|a|$.
- Для любого действительного числа a: $\boldsymbol{|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0, \\ 0, & \text{если } a = 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}}$

Работайте в парах!

2 Проанализируйте:

а) $|-3| = 3 > 0$; $|5,5| = 5,5 > 0$; $|0| = 0$ $\longrightarrow$ $|a| \geq 0$, для любого $a \in \mathbb{R}$;

б) $|-5| = 5 > -5$; $\left|8\frac{1}{2}\right| = 8\frac{1}{2} \geq 8\frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ $|a| \geq a$, для любого $a \in \mathbb{R}$;

в)

$$\begin{tikzcd}
{|-2|^2 = 4} \arrow[dr] & & \\
{(-2)^2 = 4} \arrow[r] & {|-2|^2 = (-2)^2 = |(-2)^2|} \arrow[dr] & \\
{|(-2)^2| = 4} \arrow[ur] & & {|a|^2 = a^2 = |a^2|,\ \text{для любого } a \in \mathbb{R};} \\
{|5,2|^2 = 27,04} \arrow[dr] & & \\
{(5,2)^2 = 27,04} \arrow[r] & {|5,2|^2 = (5,2)^2 = |5,2^2|} \arrow[uur] & \\
{|5,2^2| = 27,04} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

г)

$$\begin{tikzcd}
{|(-3)\cdot 5| = |-15| = 15} \arrow[r] & {|(-3)\cdot 5| = |-3|\cdot|5|} \arrow[dr] & \\
{|-3|\cdot|5| = 3\cdot 5 = 15} \arrow[ur] & & {|a\cdot b| = |a|\cdot|b|,\ \text{для любого } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R};} \\
{|\sqrt{21}\cdot\sqrt{2}| = \sqrt{21}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{42}} \arrow[r] & {|\sqrt{21}\cdot\sqrt{2}| = |\sqrt{21}|\cdot|\sqrt{2}|} \arrow[ur] & \\
{|\sqrt{21}|\cdot|\sqrt{2}| = \sqrt{21}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{42}} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{д) } \left|\frac{-\sqrt{5}}{4,5}\right| = \left|-\frac{\sqrt{5}}{4,5}\right| = \frac{\sqrt{5}}{4,5} \arrow[dr] & & \\
& \left|\frac{-\sqrt{5}}{4,5}\right| = \frac{|-\sqrt{5}|}{|4,5|} \arrow[dr] & \\
\frac{|-\sqrt{5}|}{|4,5|} = \frac{\sqrt{5}}{4,5} \arrow[ur] & & \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \text{ для любого } a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}^{*}. \\
\left|\frac{3,(2)}{6}\right| = \frac{3,(2)}{6} \arrow[dr] & & \\
& \left|\frac{3,(2)}{6}\right| = \frac{|3,(2)|}{|6|} \arrow[uur] & \\
\frac{|3,(2)|}{|6|} = \frac{3,(2)}{6} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Запомните

Свойства модуля действительного числа

1° $|a| \geq 0$;

2° $|a| \geq a$;

3° $|a|^2 = a^2 = |a^2|$;

4° $|ab| = |a| \cdot |b|$;

5° $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

3 Раскройте модуль: а) $|3-\sqrt{5}|$; б) $|\sqrt{2}-2|$.

Решение:

а) Найдем знак числа $3-\sqrt{5}$.

Так как $\sqrt{5} \approx 2{,}24$ и $3 > 2{,}24$, следует, что $3-\sqrt{5} > 0$.

Значит, $|3-\sqrt{5}| = 3-\sqrt{5}$.

Ответ: $3-\sqrt{5}$.

б) Найдем знак числа $\sqrt{2}-2$.

Так как $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ и $1{,}41 < 2$, следует, что $\sqrt{2}-2 < 0$.

Значит, $|\sqrt{2}-2| = -(\sqrt{2}-2) = 2-\sqrt{2}$.

Ответ: $2-\sqrt{2}$.

3.3. Сравнение и упорядочивание действительных чисел

1 Расположите в порядке возрастания числа: $-\sqrt{7}$; $2{,}345...$; $-2{,}(6)$.

Объясняем

$-\sqrt{7}$ и $-2{,}(6)$ — отрицательные числа

$2{,}345...$ — положительное число

→ Наибольшим является число ____

$$\begin{array}{ccc}
-\sqrt{7} & \bigcirc & -2{,}(6) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\approx -2{,}65 & \bigcirc & -2{,}66... \\
\uparrow & & \uparrow \\
|-2{,}65| & < & |-2{,}66|
\end{array}$$

Запомните

При сравнении действительных чисел применяют те же правила и методы, что и при сравнении рациональных чисел.

Следовательно, ____ < ____ $< 2{,}345...$

1) Если $a > b \geq 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

2) Если $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, то $a > b \geq 0$.

- Сравните числа:

  а) $\sqrt{9}$ и $\sqrt{16}$; б) $\sqrt{81}$ и $\sqrt{49}$; в) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}$.

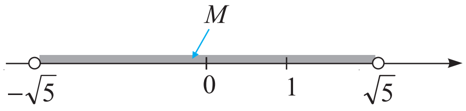
  Сделайте вывод.

2 Изобразите на числовой оси множество:

а) $M = \{$действительные числа больше, чем $-\sqrt{5}$, и меньше, чем $\sqrt{5}\}$;

б) $K = \{$действительные числа меньше либо равные $\sqrt{3}\}$.

Решение:

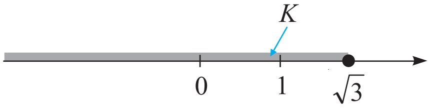


а) $\sqrt{5} \approx 2{,}24$. Числа $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$ расположены на одинаковом расстоянии от начала отсчета.

Числа, принадлежащие множеству M, расположены на числовой оси от начала отсчета на расстоянии меньшем, чем $\sqrt{5}$.

Множество M может быть записано так: $M = \{x \,|\, |x| < \sqrt{5}\}$.

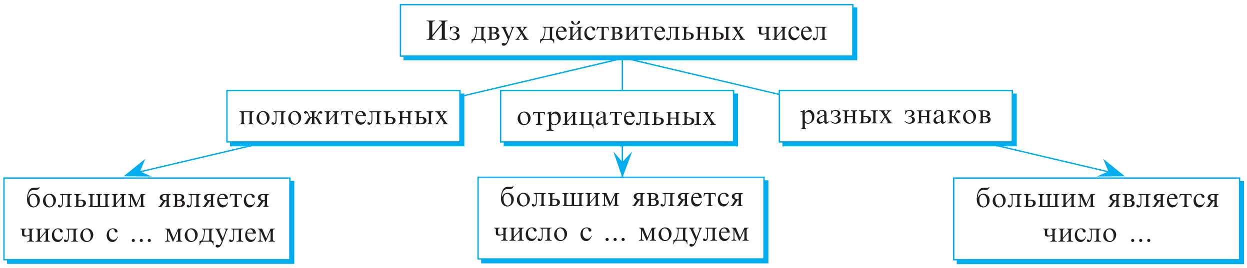
б)



Запомните

Два **действительных числа** называют **противоположными числами**, если они расположены на числовой оси на одинаковом расстоянии по разные стороны от начала отсчета.

3 Дополните схему:



Из двух действительных чисел

положительных

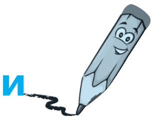
отрицательных

разных знаков

большим является число с ... модулем

большим является число с ... модулем

большим является число ...



Упражнения и задачи

☑ ☐ ☐

1. Укажите, какие из данных чисел являются:
а) рациональными;
б) иррациональными;
в) действительными положительными;
г) иррациональными отрицательными.

$\frac{2}{\sqrt{3}}$ $-\frac{10}{11}$ $\sqrt{1{,}44}$ 21 $-\sqrt{81}$ $-\sqrt{33}$

$-2{,}(6)$ 0 $\sqrt{12}$ $-\frac{5}{9}$ $17{,}82$ $\sqrt{0{,}(4)}$

2. ***Исследуйте!*** Сравните числа:

а) $-6{,}2345...$ и $0{,}1234...$; б) $\sqrt{71}$ и $-\sqrt{80}$;

в) $-\sqrt{\frac{5}{6}}$ и 1; г) $\sqrt{2}+3$ и $-3\sqrt{2}$;

д) $|-\sqrt{3}|$ и $\sqrt{2}+1$; е) $|-\sqrt{7}|$ и $|-2\sqrt{3}|$.

3. Найдите знак значения выражения:

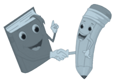
а) $\sqrt{17}-4$; б) $-7+\sqrt{47}$;

в) $\frac{8}{9}-\sqrt{1{,}25}$; г) $\sqrt{10}-2\sqrt{5}$.

4. Найдите число, противоположное числу:

а) $\sqrt{5}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{7}$; в) $2-\sqrt{3}$;

г) $-0,(2)$; д) $-\sqrt{2}+\frac{1}{3}$; е) $-6-2\sqrt{2}$.



5. ***Работайте в парах!*** Расположите в порядке возрастания числа:

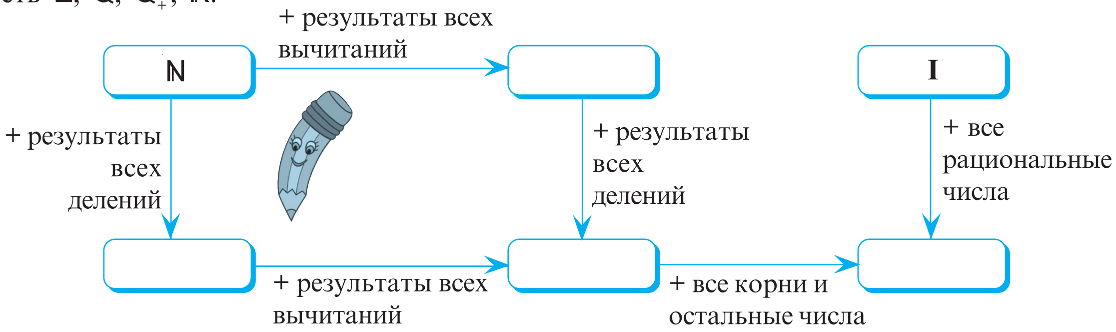
а) $3,(5); -3\sqrt{5}; -5\sqrt{3}$. б) $\frac{4}{7}; \sqrt{\frac{4}{7}}; -\frac{7}{4}$.

в) $4\frac{1}{2}; \left|-4\frac{2}{3}\right|; \sqrt{20}$. г) $-8\frac{1}{3}; -8{,}1(3); -8{,}3(1)$.

6. Изобразите на числовой оси числа, которые:

а) больше, чем $\sqrt{8}$;
б) меньше, чем $2\sqrt{3}$;
в) положительны и меньше, чем $5,(3)$;
г) отрицательны и больше, чем $-4\frac{5}{9}$.

7. ***Работайте в группах!*** Рассмотрите схему и впишите в каждую рамку одно из множеств $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{R}$:



8. Запишите противоположные числа, которые расположены на числовой оси друг от друга на расстоянии:

а) $5\frac{5}{8}$; б) $3,(6)$; в) $4\sqrt{10}$; г) $2+\sqrt{20}$.

9. Раскройте модуль:

а) $|\sqrt{7}-4|$;
б) $|9-\sqrt{80}|$;
в) $|\sqrt{6}-2\sqrt{3}|$;
г) $|-5+\sqrt{20}|$.

10. ***Работайте в парах!*** Изобразите на числовой оси действительные числа, которые:

а) меньше, чем $\frac{1}{3}$, и больше, чем $-0,5$;
б) заключены между числами -3 и $\sqrt{3}$;
в) меньше, чем $\sqrt{8}$, и больше, чем -2;
г) заключены между числами $-\sqrt{10}$ и $\sqrt{10}$.

11. Используя знак модуля и знаки сравнения, запишите аналитически:

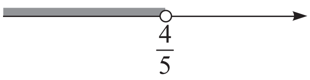
а) число a заключено между числами $-\sqrt{6}$ и $\sqrt{6}$;
б) число b больше, чем $-\frac{1}{6}$, и меньше, чем $\frac{1}{6}$;
в) число c меньше, чем -3, либо больше, чем 3;
г) число d больше, чем $2,4$, либо меньше, чем $-2,4$.

12. Известно, что число x принадлежит заштрихованному промежутку. Запишите, каким может быть значение x, используя знаки сравнения $<, \le, >, \ge$:

Образец:

$x > -3$.

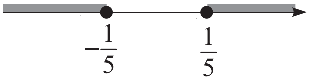
а)



б)

в)

г)



13. ***Исследуйте!*** Сравните:

а) $\sqrt{2,1^2}$ и $|2,1|$;
б) $\sqrt{\left(-\frac{2}{7}\right)^2}$ и $\left|-\frac{2}{7}\right|$;
в) $|-\sqrt{3}\cdot 2|$ и $|-\sqrt{3}|\cdot|2|$;
г) $\frac{|-9|}{|-4|}$ и $\left|\frac{-9}{-4}\right|$.

14. Постройте в тетради (или на листе в клеточку) отрезок длиной:

а) $\sqrt{7}$ см; б) $\sqrt{5}$ см; в) $\sqrt{3,5}$ см; г) $\sqrt{5,5}$ см.

§4. Действия над действительными числами

4.1. Арифметические действия над действительными числами. Свойства

Работайте в парах!

- Рассмотрите, вычислите, округляя до сотых, и дополните подходящими числами:

а) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}\approx\boxed{}$

$2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5}\approx 2\cdot 1{,}73+\boxed{}=\boxed{}$

$\approx 1{,}73$ $\quad\approx 2{,}24$

б) $2\cdot\sqrt{7}:\frac{1}{4}-5\cdot\sqrt{7}\approx\boxed{}$

$2\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{4}{1}-5\sqrt{7}=8\cdot\sqrt{7}-5\sqrt{7}=\boxed{}\cdot\sqrt{7}\approx\boxed{}$

$\approx\boxed{}$

Обозначаем: $a\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b}$.

Слагаемые $2\sqrt{7}$ и $5\sqrt{7}$ называются **подобными корнями.**

Запомните

- Числа $a\sqrt{b}$ и $c\sqrt{b}$, где $a, c\in\mathbb{R}^{*}$, $b\in\mathbb{R}_{+}$, называются ***подобными корнями***.
- При выполнении вычислений иррациональные числа округляют до рациональных чисел.
- При выполнении арифметических действий над действительными числами применяют те же правила и свойства, что и при выполнения арифметических действий над рациональными числами.

Свойства действий над действительными числами

Для любых действительных чисел a, b, c:

Сложение и умножение **коммутативны**.	$a+b=b+a$ $a\cdot b=b\cdot a$
Сложение и умножение **ассоциативны**.	$a+(b+c)=(a+b)+c$ $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Число 0 – **нейтральный** элемент сложения.	$a+0=0+a=a$
Число 1 – **нейтральный** элемент умножения.	$a\cdot 1=1\cdot a=a$
Для каждого действительного числа a существует единственное **противоположное** ему число $-a$.	$a+(-a)=(-a)+a=0$
Для каждого действительного числа a существует единственное **обратное** ему число $\frac{1}{a}$.	$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1,\ a\neq 0$
Умножение **дистрибутивно** относительно сложения и вычитания.	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ $a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$

4.2. Степень действительного числа с натуральным показателем

Возведение в степень с натуральным показателем можно выполнить и на множестве действительных чисел, при этом данное действие обладает теми же свойствами, что и возведение рационального числа в степень с натуральным показателем.

Определение

Для любых $a \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}} = a^n$$

показатель степени

степень

основание степени

$a^0 = 1,\ a \neq 0;\ \ a^1 = a;\ \ 0^0$ не имеет смысла.

Например, 2^3 является степенью с основанием 2 и показателем степени 3.

Свойства степени с натуральным показателем

Для любых ненулевых действительных чисел a, b и для любых натуральных чисел m, n, где $m \geq n$:

1° $1^m = 1$;

2° $(-1)^{2m} = 1$;

3° $(-1)^{2m+1} = -1$;

4° $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

5° $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

6° $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;

7° $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$;

8° $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

- Упростите выражение, применив свойства степени:

а) $4{,}13^5 \cdot 4{,}13^8$;   б) $(2\sqrt{11})^3 : (\sqrt{11})^2$;   в) $\dfrac{-0{,}39^2}{0{,}13^2}$;   г) $\left(-\dfrac{14}{9}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{3}{7}\right)^3$.

4.3. Действия над корнями. Свойства

1 Найдите пары числовых выражений с одинаковыми значениями:

$4\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2}\sqrt{8}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{24}$ $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$ $\sqrt{8}$ 8 $\sqrt{15}$ $\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

Если числа a, b являются действительными неотрицательными, то $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

Образец:

$(\sqrt{3} \cdot \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 3 \cdot 5 = \mathbf{15}$

$(\sqrt{15})^2 = \mathbf{15}$

$\rightarrow \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}.$

Запомните

Свойства корней

Для любых неотрицательных действительных чисел a, b, c, d справедливы свойства:

1° $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, где $a \geq 0, b \geq 0$;

2° $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, где $a \geq 0, b > 0$;

3° $(\sqrt{a})^2 = a$, где $a \geq 0$;

4° $\sqrt{a^2} = |a|$, где $a \in \mathbb{R}$.

Работайте в парах!

2 Найдите пары числовых выражений с одинаковыми значениями:

$-3\sqrt{8}$ $2\sqrt{10}$ $\sqrt{75}$ $4\sqrt{5}$ $-7\sqrt{2}$ $5\sqrt{3}$ $\sqrt{40}$ $-\sqrt{7^2 \cdot 2}$ $\sqrt{16 \cdot 5}$ $\sqrt{(-8)^2 \cdot 3}$ $-\sqrt{72}$ $-8\sqrt{3}$

Образец:

$(3\sqrt{8})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{8})^2 = 9 \cdot 8 = \mathbf{72}$

$(\sqrt{72})^2 = \mathbf{72}$

$\rightarrow 3\sqrt{8} = \sqrt{72}$

Запомните

Для любого действительного числа a и любого неотрицательного действительного числа b:

- $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$ ← **Вынесение множителя из-под знака корня.**
- $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b}, & \text{если } a \geq 0, \\ -\sqrt{a^2b}, & \text{если } a < 0. \end{cases}$ ← **Внесение множителя под знак корня.**

4.4. Порядок выполнения действий над действительными числами

- Найдите значение числового выражения:

$$\left[-3\sqrt{5} \underset{\textcircled{6}}{+} \underset{\textcircled{4}}{2^3} \underset{\textcircled{5}}{\cdot} (7\sqrt{5} \underset{\textcircled{3}}{-} \underset{\textcircled{1}}{\sqrt{9}} \underset{\textcircled{2}}{\cdot} 2\sqrt{5})\right] \underset{\textcircled{7}}{:} 5.$$

Объясняем

I. Выполняем действия в круглых скобках:

① $\sqrt{9} = 3$

② $3 \cdot 2\sqrt{5} = \boxed{}$

③ $7\sqrt{5} - \boxed{} = \boxed{}$

II. Выполняем действия в квадратных скобках:

④ $2^3 = 8$

⑤ $8 \cdot \boxed{} = \boxed{}$

⑥ $-3\sqrt{5} + \boxed{} = \boxed{}$

III. Выполняем деление:

⑦ $\boxed{} : 5 = \boxed{}$

Ответ: $\boxed{}$

Запомните

Порядок выполнения действий

1. Действия в скобках (сначала во внутренних, затем во внешних).
2. Возведение в степень и извлечение квадратного корня.
3. Умножение и деление.
4. Сложение и вычитание.

Упражнения и задачи

☑ ☐ ☐

1. Вычислите:

а) $8{,}54 - 2{,}75$; б) $-0{,}189 + 4{,}793$; в) $3{,}17 - 2{,}4$; г) $6{,}37 : 1{,}3$.

2. Вычислите, используя калькулятор, и округлите квадратный корень до десятых:

а) $\sqrt{7} + \sqrt{2}$; б) $\sqrt{3} - \sqrt{6}$; в) $2\sqrt{8} - 0{,}3\sqrt{8}$; г) $\frac{1}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

3. Рассмотрите карточки и продолжите последовательность подобных корней:

а) $\sqrt{8}$, ...

б) $-2\sqrt{5}$, ...

в) $\sqrt{0{,}3}$, ...

г) $7\sqrt{7}$, ...

$\sqrt{8}$ $\sqrt{5}$ $7\sqrt{7}$ $0{,}3\sqrt{5}$ $\sqrt{0{,}3}$ $7\sqrt{5}$

$2\sqrt{0{,}3}$ $-\sqrt{7}$ $0{,}4\sqrt{8}$ $-2\sqrt{5}$ $3\sqrt{8}$ $\frac{1}{4}\sqrt{8}$

4. Запишите в тетрадь и дополните подходящими числами:

а) $\sqrt{3}(8-\sqrt{2})=8\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\square$; б) $\sqrt{7}+2\sqrt{3}=2\sqrt{3}+\square$;

в) $4-\sqrt{11}=-(\square-\square)$; г) $-\square+2\sqrt{5}=0$;

д) $1\cdot(2\sqrt{6}+1)=1+\square$; е) $4\sqrt{10}\cdot\frac{1}{\square}=1$.

5. Упростите выражение:

а) $4\sqrt{3}-7\sqrt{3}-2\sqrt{3}+6\sqrt{3}$; б) $0{,}4\sqrt{6}+2\sqrt{6}-0{,}4\sqrt{6}+\sqrt{6}$;

в) $\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{5\sqrt{7}}{12}$; г) $0{,}8\sqrt{5}-\frac{4}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{9}\sqrt{5}+1{,}(1)\sqrt{5}$.

6. Вычислите:

а) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; б) $(-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{32})$; в) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$; г) $\sqrt{5}\cdot|-\sqrt{45}|$.

7. Вычислите:

а) $\sqrt{24}:\sqrt{6}$; б) $(-\sqrt{343}):\sqrt{7}$; в) $\sqrt{180}:\sqrt{5}$; г) $\sqrt{363}:|-\sqrt{3}|$.

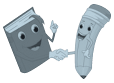
8. Упростите выражение, применив свойства степени:

а) $2{,}5^8\cdot2{,}5^4$; б) $7{,}1^9:7{,}1^6$; в) $(\sqrt{5})^{11}:\sqrt{5}$;

г) $(\sqrt{7})^3\cdot3\sqrt{7}$; д) $4{,}2^5\cdot0{,}5^5$; е) $(\sqrt{18})^3:(\sqrt{2})^3$.

9. Применив формулы $(a^m)^n=a^{mn}$, $a\in\mathbb{R}$, $m, n\in\mathbb{N}^*$, и $(\sqrt{a})^2=a$, $a\in\mathbb{R}_+$, вычислите:

а) $(\sqrt{2})^6$; б) $(\sqrt{3})^4$; в) $(\sqrt{0{,}5})^4$; г) $(\sqrt{0{,}1})^8$.

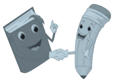
10.  ***Работайте в парах!*** Вынесите множитель из-под знака корня:

Образец:
$\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot5}=\sqrt{3^2\cdot5}=3\sqrt{5}$.

а) $\sqrt{24}$; б) $\sqrt{63}$;

в) $\sqrt{98}$; г) $\sqrt{96}$;

д) $\sqrt{200}$; е) $\sqrt{108}$.

11.  ***Работайте в парах!*** Внесите множитель под знак корня:

а) $2\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{2}$; в) $6\sqrt{5}$;

г) $-5\sqrt{6}$; д) $-4\sqrt{7}$; е) $7\sqrt{3}$.

Образец:
$-4\sqrt{8}=-\sqrt{4^2\cdot8}=-\sqrt{128}$

☑☑☐

12. Сравните:

а) $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$; б) $-3\sqrt{5}$ и $-4\sqrt{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\sqrt{5}}{5}$;

г) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ и $\frac{4}{\sqrt{20}}$; д) $2\sqrt{3}+1$ и $\sqrt{3}+2$; е) $\sqrt{5}-2$ и $3\sqrt{5}-9$.

Указание. Для заданий д) и е) учтите, что $a>b$ если и только если $a-b>0$, для любых $a, b\in\mathbb{R}$.

13. Вынесите множители из-под знака корня и упростите выражение:

а) $\sqrt{18}-3\sqrt{32}+2\sqrt{8}-\sqrt{72}$; б) $0{,}4\sqrt{12}-0{,}9\sqrt{27}+1{,}3\sqrt{75}$;

в) $-2\sqrt{80}+\sqrt{320}-4\sqrt{20}+\sqrt{45}$; г) $\sqrt{0{,}8}+\sqrt{3{,}2}+\sqrt{5}-10\sqrt{7{,}2}$.

14. ***Работайте в группах!*** Вычислите:

а) $4\sqrt{90}-\sqrt{10}-(3\sqrt{160}-5\sqrt{40})$;

б) $9\sqrt{27}+5\sqrt{24}-(-2\sqrt{96}-\sqrt{150}+3\sqrt{243})$;

в) $4\sqrt{84}-10\sqrt{189}-12\sqrt{1029}+2\sqrt{525}$;

г) $5\sqrt{243}+2\sqrt{48}-(8\sqrt{300}-6\sqrt{363})$.

15. Вычислите:

а) $3^3+\sqrt{25}[\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}-(5\sqrt{6})^2]-100$;

б) $[2^5-(4\sqrt{3})^2]\cdot\frac{5}{12}\cdot(\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}-2)+7^2$.

16. Найдите периметр равнобедренного треугольника, длина боковой стороны которого равна $12\sqrt{5}$ см, а длина основания на $\sqrt{20}$ см меньше, чем длина боковой стороны.

17. Найдите периметр прямоугольника, ширина которого равна $5\sqrt{12}$ см, а длина на $\sqrt{27}$ см больше ширины.

☑☑☑

18. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x^2-5=11$;

б) $-3x^2+4=1{,}2$;

в) $-\frac{5}{4}x^2=x^2$;

г) $(x+3)^2=-2$;

д) $\sqrt{3}x^2-\sqrt{27}=0$;

е) $\sqrt{5}x^2-5x=0$.

19. Упростите выражение $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}-\sqrt{(\sqrt{11}+2\sqrt{5})^2}+\sqrt{(1-2\sqrt{11})^2}$.

20. Определите при каких действительных значениях x, y и z верно равенство:

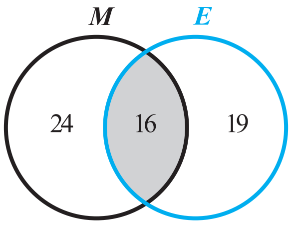
$$\sqrt{2-x}+|x-2y|+(z+3\sqrt{7})^2=0.$$

§5. Действия над множествами

5.1. Объединение, пересечение и разность множеств

1 Все учащиеся класса участвуют хотя бы в одном из конкурсов по математике или английскому языку: 24 записались на конкурс по математике, 19 – на конкурс по английскому языку. В обоих конкурсах участвуют 16 учащихся. Сколько всего учеников в классе? Посмотрите, как решил задачу Всезнайка.

Решение:



M – множество учеников, записавшихся на конкурс по математике

E – множество учеников, записавшихся на конкурс по английскому языку

n – количество учеников в классе

$n=24+19-16=27.$

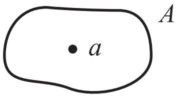
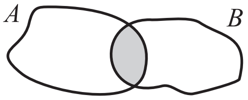
$$\boxed{\text{card } A\cup B=\text{card } A+\text{card } B-\text{card } A\cap B}$$

Ответ: 27 учеников.

- Что обозначают в задаче $M\cup E$ и $M\cap E$?

Вспомним

2 Перечертите и дополните таблицу:

Обозначаем	*Читаем*	*Изображаем*	*Примеры*
$a\in A$	Элемент a принадлежит множеству A		$3\in\mathbb{N}$
$a\notin A$			$-7{,}2\notin\mathbb{Z}$
$A\cup B$	Множество A в объединении с множеством B		
$A\cap B$			$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ $A\cap B=\{3,\ 4\}$
$A=B$			A – множество четных натуральных чисел $B=\{n\mid n=2k,\ k\in\mathbb{N}\}$ $A=B$
$A\subset B$	Множество A является подмножеством множества B		A – множество фруктовых деревьев B – множество деревьев $A\subset B$
$A\setminus B$			

Число элементов множества A называется **кардиналом** множества A и обозначается $\text{card}\,A$. **Пустое множество** обозначается $\varnothing$, и его кардинал равен 0.

- а) Что обозначает $M\setminus E$ в задаче **1**?
  А обозначение $E\setminus M$?
  б) Вычислите $\text{card}\,M\setminus E$ и $\text{card}\,E\setminus M$.

5.2. Декартово произведение двух множеств

1 Рассмотрите и заполните пропуски так, чтобы получить все возможные меню, состоящие из первого и второго блюд (в указанном порядке).

A *Первые блюда*
Борщ (Б)
Солянка (С)

$A=\{Б,\ С\}$

B *Вторые блюда*
Шашлык (Ш)
Рыба (Р)
Голубцы (Г)

$B=\{Ш,\ Р,\ Г\}$

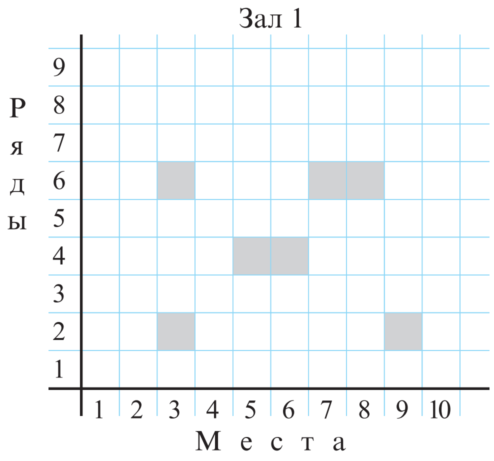
$A\times B=\{(Б,\ Ш),\ (Б,\ Р),\ (Б,\ \quad),\ (С,\ Ш),\ (\quad),\ (\quad)\}$

Запомните

Декартовым произведением двух множеств является множество, элементами которого являются все упорядоченные пары, в каждой из которых на первом месте записывается элемент первого множества, а на втором – элемент из второго множества. Декартово произведение множеств A и B обозначается $A\times B$. Значит, $A\times B=\{(x,\ y)\mid x\in A,\ y\in B\}$.

Замечания

1. Множество $A\times B$ из задачи **1** является декартовым произведением множеств A и B.
2. Так как пары декартового произведения являются упорядоченными, то считается, что пары (a, b) и (b, a), – различны, где a и b принадлежат множествам A и B.



2 Рассмотрите рисунок. Пусть R – множество рядов, а L – множество мест произвольного ряда в зале кинотеатра. Таким образом, $R=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $L=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

а) Что означает множество $L\times R$?

б) Дополните:

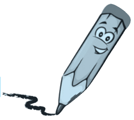
- Пусть O – множество занятых мест.

  Тогда $O=\{(3, 2), (9, 2), (\square),$
  $(\square), (\square), (\square), (\square)\}$.
- card $L\times R$ = card $\square$ · card $\square$
- Обоснуйте устно, почему $(3, 2)\neq(2, 3)$.

Запомните

- В общем, множества $A\times B$ и $B\times A$ могут быть разными.
- card $A\times B$ = card $A\cdot$ card B.

Упражнения и задачи



☑ ☐ ☐

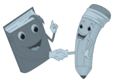
1. Найдите $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, если:

а) $A=\{-2, -5, 3, 7, 9\}$, $B=\{-5, 3, 7, 9\}$; б) $A=\{a, b, m, n\}$, $B=\{b, c, d, m, n, t\}$;

в) $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}, |x|<7\}$, $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}, |x|>2\}$; г) $A=\mathbb{N}$, $B=\mathbb{Z}$.

2. Перечислите элементы множества:

а) $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}, 2x<11\}$; б) $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}, |2x|<17\}$; в) $C=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}, 24\,\vdots\,x\}$.



3. ***Работайте в парах!*** Дополните числами или символами так, чтобы получить истинное высказывание:

а) $\{\square, \square\}\subset\{1, 11, 21, 31, 41, 51\}$; б) $\{-7, 9, 17\}\subset\{\square, \square, 9, 19{,}27\}$;

в) $-3\ \square\ \{x\,|\,x\in\mathbb{N}, |x|>2\}$; г) $\{10, 20, 30\}\ \square\ \{x\,|\,x\in\mathbb{Z}, x\,\vdots\,5\}$.

4. Запишите все подмножества множества $A=\{1, 2, ..., 6\}$, состоящие из 5 элементов.

5. Вычислите card $A\bigcup B$, если: а) card $A=12$, card $B=17$, card $A\bigcap B=4$;
б) card $A=44$, card $B=28$, card $A\bigcap B=0$;
в) card $A=9$, card $B=19$, card $A\bigcap B=9$.

6. Пусть A – множество месяцев, в которых 30 дней, B – множество месяцев, в которых 31 день. Сравните card A и card B.

7. Пусть $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{5, b\}$. Запишите декартово произведение:

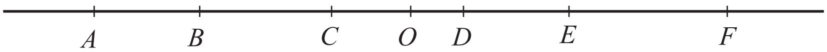
а) $X\times Y$; б) $Y\times X$; в) $X\times X$; г) $Y\times Y$.

8. Пусть A – множество прямоугольников, B – множество ромбов. Опишите элементы множества:

а) $A\bigcap B$; б) $A\setminus B$; в) $B\setminus A$.

9. ***Работайте в парах!*** Рассмотрите рисунок, затем найдите:

а) $[AO]\cup[BE]$;   б) $[BF]\cup[AC]$;   в) $[BD]\cap[CF]$;   г) $[CF]\cap[AB]$.



10. Напомним, что через D_n обозначается множество делителей числа n, а через M_n – множество чисел, кратных числу n. Найдите:

а) $D_{24}\cap D_{16}$;   б) $D_{48}\cap M_3$;   в) $D_{10}\cup D_{50}$;   г) $D_{120}\setminus M_2$;   д) $M_3\cap M_5$.

11. ***Работайте в группах!*** Найдите числа m и n, если:

а) $\{m, 3, 5\}\cup\{3, 5, 6\}=\{2, 3, n, 6\}$;   б) $\{-6, m, 9, 10\}\cap\{-8, n, 16\}=\{-8, 9\}$;

в) $\{5, 6, ..., m\}\setminus\{1, 2, n, 13\}=\{6, 7, ..., 11\}$;   г) $\{m, 8, 9\}\cap\{3, 6, n\}=\{6, 9\}$.

12. Вычислите $\text{card}\,A\cap B$, если:

а) $\text{card}\,A=33,\ \text{card}\,B=16,\ \text{card}\,A\cup B=40$;

б) $\text{card}\,A=26,\ \text{card}\,B=15,\ \text{card}\,A\cup B=27$;

в) $\text{card}\,A=14,\ \text{card}\,B=23,\ \text{card}\,A\cup B=37$.

$$\text{card}\,A\cap B=\text{card}\,A+\text{card}\,B-\text{card}\,A\cup B$$

☑☑☐

13. Найдите A и B, если: а) $A\cup B=\{1, 2, ..., 9\},\ A\setminus B=\{1, 3, 4\},\ B\setminus A=\{5, 6, 7\}$;

б) $A\cap\{a, b, c\}=\varnothing,\ B\cap\{d, f, h\}=\varnothing,\ A\cap B=\{e, g\},\ A\cup B=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

14. ***Работайте в группах!*** Найдите множества A и B, если:

а) $A\cup B=\{3, 4, 5\},\ A\cap B=\{3, 5\},\ B\setminus A=\varnothing$;   б) $A\cup B=\{a, b, c\},\ A\cap B=\{a, b\},\ A\setminus B=\{c\}$;

в) $A\cup B=\{3, 4, 5, 6, 7\},\ A\cap B=\{6, 7\},\ A\setminus B=\{3, 4\}$.

15. Из 30 учеников класса 18 говорят на английском, 16 – на французском и один не знает этих языков. Сколько учеников говорят на двух языках?

16. Каждый ученик класса занимается хотя бы одним видом спорта: волейболом или легкой атлетикой. Сколько учеников в классе, если 14 из них играют в волейбол, 16 предпочли легкую атлетику, а 5 занимаются обоими видами спорта?

17. Учащиеся одного лицея изучают хотя бы один из языков: латынь или греческий. 65% из них изучают латынь, 75% – греческий язык.
Какая часть учеников изучает оба языка?

18. ***Исследуйте!*** Запишите соотношение между множествами A и B, если:

а) A – множество чисел, кратных 9, а B – множество чисел, делящихся на 3;

б) A – множество чисел, кратных 2, а B – множество чисел, делящихся на 4;

в) A – множество чисел, кратных 10, а B – множество делителей числа 100.

19. В классе 30 человек. Каждому из детей нравится танцевать или петь. Известно, что 19 детей поют, а 18 танцуют. Скольким детям нравится и танцевать, и петь?

20. На фирме работают 70 человек, из которых 48 знают английский язык, 35 – французский и 24 – оба языка. Сколько человек не знают ни английского, ни французского языков?

21. 65% кроликов, которых выращивает Миша, любят морковь, 20% обожают и морковь, и капусту. Какая часть кроликов предпочитает капусту?

☑☑☑

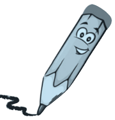
22. Из 400 опрошенных человек 320 предпочитают пить чай, 210 – кофе, 150 – и чай, и кофе. Сколько человек из опрошенных не любят ни чай, ни кофе?

23. Сколько человек было опрошено, если известно, что 180 из них предпочитают в кинотеатрах смотреть боевики, 190 – драматические фильмы, 60 любят оба жанра, а 5 человек вообще не посещают кинотеатры?

24. Из 200 студентов факультета иностранных языков 170 говорят на английском языке, 160 – на французском, 150 – на испанском. Каждый из студентов знает хотя бы один из этих языков, но ни один не говорит на двух языках. Сколько студентов говорят на 3 языках?

25. В лицее 600 учащихся. За I семестр оценку 10 по русскому языку получили 280 учащихся, по математике – 240, по физическому воспитанию – 460, по русскому языку и математике – 80, по математике и физическому воспитанию – 100 учащихся. Сколько учащихся получили 10 по всем трем дисциплинам, если известно, что каждый из учащихся получил 10 хотя бы по одной из трех дисциплин?

Упражнения и задачи на повторение



☑ ☐ ☐

1. Укажите, какие из данных чисел являются:
а) рациональными;
б) иррациональными;
в) действительными отрицательными.

$-\frac{5}{16}$ $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\frac{19}{9}$ $7{,}11$ $\sqrt{16}$ -24 $4\frac{3}{7}$

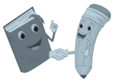
$4{,}(6)$ $0{,}001$ $-\sqrt{\frac{1}{4}}$ -660 $-3\sqrt{8}$ $-5{,}1(3)$ $9\sqrt{7}$

2. Вычислите: а) $(-3{,}8)^2$; б) $-4{,}5^2$; в) $\left(1\frac{1}{3}\right)^2$; г) $-\frac{6^2}{11}$; д) $\left(-\frac{3}{10}\right)^2$; е) $\left|-2\frac{1}{2}\right|^3$; g) $|-3|^0$.

3. Вычислите: а) $\left(\frac{8}{11}\right)^2$; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$; в) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; г) $\left(-\frac{5}{6}\right)^3$; д) $\left(1\frac{6}{7}\right)^2$.

4. Вычислите: а) $2{,}3^2$; б) $(-0{,}5)^3$; в) $(-2{,}1)^2$; г) $13{,}72^0$; д) $|-2|^3$.

5.



Работайте в парах!

Дополните соответствующими числами:

а) $0{,}9^5 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}9^{\square}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\square} \cdot \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^7$;

в) $(-6{,}1)^{11} : 6{,}1^{10} = \square$; г) $\left(\frac{9}{25}\right)^{\square} : \left(\frac{3}{5}\right)^{\square} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$;

д) $\left|-\frac{3}{5}\right|^2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^3 = -\left(\frac{3}{5}\right)^{\square}$.

6. Вычислите: а) $\left(1\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \left(1\frac{1}{5} - \frac{7}{10}\right)^2$;

б) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^6 : 0{,}5^{12} - \frac{1}{32}$.

7. Вычислите:

а) 1^{2007}; б) $(-1)^{2007}$;
в) 1^{44}; г) $(-1)^{44}$;
д) $(-1)^3 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)$; е) $(-1)^{15} \cdot 1^{27} \cdot (-1)^{32}$;
g) $\frac{(-1)^7}{(-1)^8}$; h) $((-1)^5)^{20}$.

8. Вычислите:

а) $\sqrt{121}$; б) $-\sqrt{2{,}56}$; в) $(\sqrt{1{,}7})^2$;
г) $(-\sqrt{7{,}3})^2$; д) $\sqrt{0{,}0009}$; е) $\sqrt{(-12)^2}$.

9. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $a^2 = 0{,}16$; б) $y^2 = -0{,}04$; в) $x^2 = 1$;
г) $-x^2 = -2{,}89$; д) $y^2 = \frac{1}{81}$.

10. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\sqrt{x} = 2{,}5$; б) $\sqrt{y} = 0{,}7$; в) $\sqrt{a} = -0{,}1$;
г) $-\sqrt{x} = 6{,}3$; д) $-\sqrt{y} = -1{,}8$.

11. Не извлекая квадратного корня, сравните:

а) 8 и $\sqrt{80}$; б) 11 и $\sqrt{110}$;
в) 9,9 и $\sqrt{99}$; г) 10,1 и $\sqrt{101}$.

12. Найдите знак значения выражения:

а) $6 - \sqrt{20}$; б) $\sqrt{0{,}9} - 0{,}9$; в) $\sqrt{1{,}1} - 1{,}1$;
г) $\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{7}{8}}$; д) $\frac{4}{3} - \sqrt{\frac{4}{3}}$.

13. Вычислите, округлив до десятых:

а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{11}$; в) $\sqrt{0,5}$; г) $\sqrt{2,4}$; д) $\sqrt{17,69}$.

14. ***Работайте в парах!*** Изобразите на числовой оси числа, которые:

а) больше либо равны –2,5; б) меньше либо равны 3,8;

в) заключены между $-\sqrt{6}$ и $2\sqrt{3}$; г) не заключены между 0,5 и $\sqrt{7}$.

15. Расположите в порядке убывания числа:

а) $\sqrt{6}-6$; $6-\sqrt{6}$; $\frac{\sqrt{6}}{6}$; $-\frac{6}{\sqrt{6}}$; $6\frac{1}{6}$; $-6,(6)$; $6+\sqrt{6}$; $-6\sqrt{6}$;

б) $5\sqrt{7}$; $-7\sqrt{5}$; $7\sqrt{5}$; $-5\sqrt{7}$; $\frac{5}{7}$; $-\frac{7}{5}$; $\frac{7}{5}$; $-\frac{5}{\sqrt{7}}$.

16. ***Работайте в группах!*** Вычислите:

а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$; б) $\sqrt{63}\cdot(-\sqrt{7})$; в) $\sqrt{3\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{1,2}$; г) $-\sqrt{\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{3\frac{1}{2}}$;

д) $-\sqrt{338}:\sqrt{98}$; е) $\frac{-\sqrt{7,5}}{-\sqrt{0,3}}$; ж) $\frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$; з) $\frac{\sqrt{5,4}}{\sqrt{9,6}}$.

17. Какие из чисел -3; $\frac{4}{5}$; 2,04; $-7,9$; 3 являются решениями уравнения:

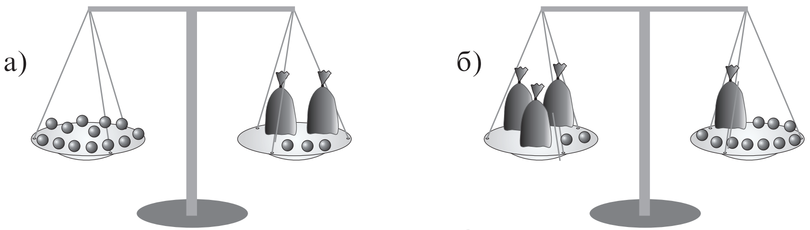
а) $3x-6=0,12$; б) $-4x+3,2=0$; в) $5-0,4x=3,8$; г) $\frac{2}{3}x=1,2^2-0,08$?

18. Решите на множестве рациональных чисел уравнения:

а) $x-2,4=8$; б) $x+3,6=0,5$; в) $-x+8,2=6$; г) $5-x=-11,7$;

д) $-\frac{3}{4}x=3,12$; е) $2,5x-7,2=1,8$; ж) $2\frac{1}{3}x+0,08=1,2$; з) $-5\frac{3}{5}x+0,48=-53$.

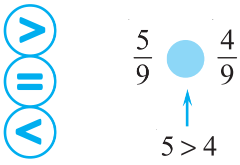
19. Чаши весов находятся в равновесии. В каждом мешочке одно и то же количество одинаковых шариков. Сколько шариков в каждом мешочке?

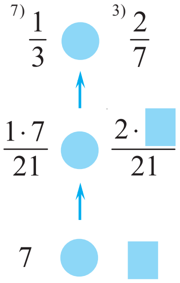


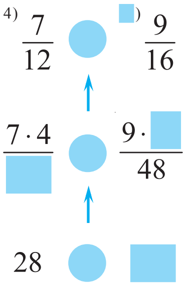
20. Запишите имена участников соревнования в беге на 200 м в порядке убывания их результатов:

Имя	*Время (с)*
Михаил	18,39
Петр	18,42
Степан	18,37
Раду	17,98
Иван	18,05
Виктор	18,47

21. ***Исследуйте!*** Рассмотрите и дополните:







22. Отметьте на числовой оси точки, соответствующие числам, модуль которых:
а) равен 2,5; б) натуральное число меньше 4; в) натуральное число больше 3 и меньше 7.

23. Найдите x, если:
а) $|x| = 18{,}1$; б) $-|x| = -2\frac{2}{7}$; в) $7 - |x| = 17$; г) $|x - 0{,}9| = 0{,}9$; д) $|x| = 0$.

24. ***Исследуйте!*** Впишите один из знаков <, =, > так, чтобы получилось истинное высказывание.
а) $\frac{8}{15}$ ● $\frac{7}{15}$; $-\frac{8}{15}$ ● $-\frac{7}{15}$; 59,317 ● 59,238; $\frac{3}{16}$ ● $\frac{5}{18}$; $-1\frac{4}{9}$ ● $-1{,}(4)$.
б) $\frac{7}{3}$ ● $\frac{7}{5}$; $-\frac{7}{3}$ ● $-\frac{7}{5}$; 18,(7) ● 18,77; $\frac{9}{10}$ ● $-\frac{10}{9}$; $-\frac{9}{4}$ ● $-3{,}25$.

\>
=
<

25. Сравните числа x и y, если:
а) $\frac{x}{y} = 1{,}14$ и $x > 0$; б) $\frac{x}{y} = 1\frac{2}{5}$ и $x < 0$; в) $\frac{x}{y} = -0{,}91$ и $x > 0$; г) $\frac{x}{y} = -0{,}83$ и $x < 0$.

26. Вынесите множитель из-под знака корня:
а) $\sqrt{90}$; б) $\sqrt{147}$; в) $\sqrt{132}$; г) $\sqrt{192}$; д) $\sqrt{588}$; е) $\sqrt{1080}$.

27. Внесите множитель под знак корня:
а) $3\sqrt{6}$; б) $6\sqrt{3}$; в) $9\sqrt{2}$; г) $5\sqrt{5}$; д) $8\sqrt{7}$; е) $7\sqrt{8}$.

28. Найдите длину отрезка AB (в единицах числовой оси), если:
а) $A\left(3\frac{1}{5}\right)$ и $B(2,(6))$; б) $A(-0,(8))$ и $B(0,0(8))$;
в) $A\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ и $B\left(-\frac{\sqrt{75}}{8}\right)$; г) $A\left(-9\frac{1}{3}\right)$ и $B(-3,(3))$.

29. Найдите периметр прямоугольника, измерения которого равны $\sqrt{80}$ см и $2\sqrt{45}$ см.

30. Найдите длину прямоугольника, площадь которого $36\ \text{см}^2$ и ширина $3\sqrt{3}$ см.

31. Найдите площадь прямоугольника, измерения которого равны $\sqrt{24}$ см и $2\sqrt{6}$ см.

☑☑☐

32. ***Исследуйте!*** Найдите наибольшее целое число, меньшее, чем: а) $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$; б) $\frac{2}{1-\sqrt{5}}$.

33. ***Исследуйте!*** Найдите наименьшее целое число, большее, чем:
а) $\frac{9-\sqrt{8}}{7}$; б) $\frac{6}{\sqrt{5}+4}$.

34. ***Работайте в парах!*** Вычислите:
а) $|5-\sqrt{5}| + |2-\sqrt{5}| - |\sqrt{20}-3| - |6-2\sqrt{5}|$;
б) $\dfrac{|3\sqrt{3}-6| + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}}{|\sqrt{3}-3|-1}$;
в) $2|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}| + |3\sqrt{8}-8\sqrt{3}| + 2\sqrt{12}$.

35. Перечертите таблицу и дополните (округлите до сотых).

Фамилия, имя	Кол-во отработанных дней	Зарплата за 1 день (леев)	Медицинская страховка 9%	Подоходный налог 7%	Индивидуальный взнос на социальное страхование 6%	К оплате
Морару Иван	22	200				
Олару Василий	21	250				
Албу Алина	23	220				
Урсу Георгий	23	180				

36. Вычислите, применив свойства арифметических действий:

а) $(2{,}18\cdot6{,}791+2{,}18\cdot3{,}209)\cdot3{,}14-1{,}8\cdot3{,}14$; б) $-9{,}25\cdot\dfrac{(16{,}2\cdot3^2+16{,}2-28{,}8)\cdot0{,}25}{9{,}25}$.

37. Найдите значение x из равенства: а) $[(3^{10}\cdot3^5)^2:81+3\cdot(9^3)^4]:x=3^{25}$; б) $\dfrac{2^{2007}}{4^{1004}}=\dfrac{x}{0{,}5}$.

38. Дополните:

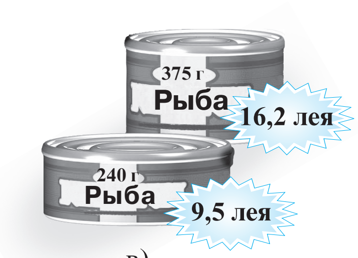
а) $2\frac{2}{5}$ м = ☐ см; б) $4\frac{1}{8}$ кг = ☐ г; в) $3\frac{5}{6}$ мин = ☐ с;

г) $9\frac{1}{4}$ т = ☐ кг; д) $\frac{4}{9}$ м = ☐ см; е) $7\frac{2}{3}$ ч = ☐ мин.

39. Что выгоднее купить?

а)

б)



в)

40. ***Работайте в группах!*** Проект *Приложения действительных чисел в повседневной жизни.*

41. Представьте число в виде произведения двух степеней с одинаковыми показателями (основание степени – натуральное число, не равное 1):

а) 1 000 000;
б) 320 000;
в) 24 300 000.

Образец: $144=3^2\cdot4^2$.

42. Найдите последнюю цифру числа:

а) 2^{2012}; б) 3^{2012}; в) 4^{2012}.

43. Найдите натуральное число n из равенства $2^{2n}-4=3(4+4^2+\ldots+4^{2011})$.

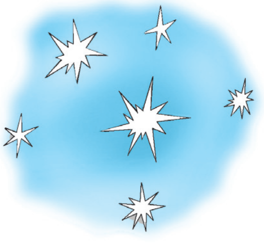
44. ***Большие числа!***

Один световой год – это расстояние, которое проходит световой луч за год.

а) Учитывая, что скорость света равна 298 000 км/с и в году в среднем 365,25 дня, вычислите длину светового года в километрах.

б) Ближайшей к Солнечной системе является галактика Туманность Андромеды, которая удалена на $2{,}25\cdot10^6$ световых лет. Выразите это расстояние в километрах.

в) Ближайшей к Земле звездой является Проксима Центавра, которая расположена на расстоянии 4,2 световых года. Выразите это расстояние в километрах.



45. ***Это интересно!***

Гугол – это самое большое число, которое имеет название.

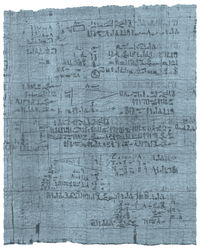
Сколько цифр содержит число 0,125 гугла, если 1 гугол = 10^{100}?

46. Найдите 2012-й десятичный знак дроби $\dfrac{7}{11}$.

47. Папирус Ринда (около 1650 года до н. э.) содержит информацию о разложении обыкновенных дробей на элементарные дроби, например:

$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{x}.$$

Найдите знаменатель x последней элементарной дроби.



48. Какое число надо вычесть из числителя дроби $\frac{537}{463}$ и прибавить к знаменателю, чтобы получить дробь, равную дроби $\frac{1}{9}$?

ЗАДАЧА ДЛЯ ЧЕМПИОНОВ

49. Обозначим $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Найдите, сколько множителей, равных 2, содержит разложение числа 2011! на простые множители.

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

50. Сумма пяти чисел в каждой строке, столбце и по диагонали должна быть одинаковой. Для этого надо использовать три различных натуральных числа столько раз, сколько это необходимо. Какие это числа?

	7		27	13
6	20			32
22	23	16	9	10
				14
19	9	20		

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. Укажите букву, соответствующую правильному ответу.

Число $\sqrt{18+x}$ рациональное при x равном:

A 2 **B** 7 **C** 3 **D** 10

2. Пусть

$A = \{0,(5);\ 3\sqrt{3};\ -\frac{7}{10};\ -11;\ 5;\ \sqrt{26};\ \sqrt{49}\}$.

а) Запишите в порядке возрастания элементы множества A.

б) Найдите множество $B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin \mathbb{Q}\}$.

в) Запишите множество C, которое содержит три элемента, такое, чтобы $C \cap A = \{-11,\ 5\}$.

г) Найдите $C \times B$.

3. Упростите выражение:

$$8\sqrt{48} - 8\sqrt{80} + 5\sqrt{405} - 7\sqrt{147}.$$

4. Замените ● подходящим знаком сравнения <, =, > так, чтобы получилось истинное высказывание:

$$72:6\ ●\ |2{,}56 - 9\tfrac{1}{5}|.$$

Обоснуйте.

5. Двое рабочих выкопали ров длиной 126 м. Один из них выкопал на 12 м больше, чем второй. Сколько метров выкопал каждый рабочий?

Вариант 2

1. Укажите букву, соответствующую правильному ответу.

Число $\sqrt{14+x}$ рациональное при x равным:

A 10 **B** 5 **C** 22 **D** 20

2. Пусть

$A = \{0,(3);\ 2\sqrt{2};\ -\frac{9}{10};\ -12;\ 6;\ \sqrt{15};\ \sqrt{64}\}$.

а) Запишите в порядке возрастания элементы множества A.

б) Найдите множество $B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin \mathbb{Q}\}$.

в) Запишите множество C, которое содержит три элемента, такое, чтобы $C \cap A = \{-12,\ 6\}$.

г) Найдите $C \times B$.

3. Упростите выражение:

$$-10\sqrt{125} + 2\sqrt{108} + 7\sqrt{192} - 3\sqrt{245}.$$

4. Замените ● подходящим знаком сравнения <, =, > так, чтобы получилось истинное высказывание:

$$169:13\ ●\ |15{,}24 - 2\tfrac{3}{5}|.$$

Обоснуйте.

5. Два ученика решили 98 задач. Один из них решил на 14 задач меньше, чем другой. Сколько задач решил каждый ученик?

2 глава

Алгебраические выражения

> *Математика – это музыка разума.*
> Джеймс Дж. Сильвестр

§1. Алгебраические выражения

1 Дана купила тетради. Одна тетрадь стоит 2 лея. Сколько заплатила Дана за 5 тетрадей? Сколько заплатит Дана за 5 тетрадей, если одна тетрадь будет стоить x леев?

Решение:

В первом случае Дана заплатит $5\cdot 2 = 10$ леев. А во втором случае она заплатит $5x$ леев.

Получили два выражения:

$$\underbrace{5\cdot 2}_{\text{числовое выражение}} \qquad \underbrace{5x}_{\text{алгебраическое выражение}}$$

Выражения $4a$, $1{,}3ab$, $-6x$, $\sqrt{3}x^2y$, xyz, $8t$ являются алгебраическими выражениями.

Определение Выражение, записанное в виде произведения, множителями которого являются числа и буквы, называется **алгебраическим выражением**.

Каждое алгебраическое выражение содержит **коэффициент** и **буквенную часть**.

$-\sqrt{2}\,x$; $\frac{1}{9}a^2b$; $2xyz$

■ – коэффициент

🟦 – буквенная часть

Замечания Каждое из алгебраических выражений $2a$, $3t$, a, $2t$, $-5bc$, $\sqrt{2}y$ состоит из **коэффициента** и **буквенной части.** Коэффициент – это действительное число.

Запомните

1) Сумма двух или нескольких алгебраических выражений также является алгебраическим выражением.

$2x^2-3xy$

$y-\sqrt{5}+tz+z^2$

2) Произведение двух или нескольких алгебраических выражений также является алгебраическим выражением.

$2ab\cdot b^2$

$x\cdot y\cdot x^2z^2$

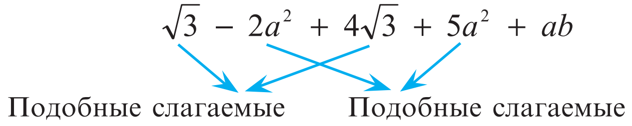
3) Если $E\neq 0$ – алгебраическое выражение, то E^{-1} – алгебраическое выражение .

$E(x)=x^3$

$E^{-1}(x)=\dfrac{1}{x^3}$

Определение Слагаемые алгебраического выражения, у которых одинаковые буквенные части, называются **подобными слагаемыми**.

Объясняем



Запомните Действие сложения подобных слагаемых называется **приведением** подобных слагаемых. Чтобы сложить подобные слагаемые, будем использовать свойство дистрибутивности умножения относительно сложения и вычитания.

Значит, $\sqrt{3}-2a^2+4\sqrt{3}+5a^2+ab=(\sqrt{3}+4\sqrt{3})-(2a^2-5a^2)+ab=5\sqrt{3}+3a^2+ab.$

Запомните С алгебраическими выражениями можно выполнять те же действия, что и с действительными числами: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень. Эти действия обладают теми же свойствами, что и действия с действительными числами.

Так как буквы в алгебраическом выражении могут быть заменены различными числами, то буквы называются **переменными**, а алгебраическое выражение – **выражением с переменной**.

Выражение с одной переменной обозначают $E(x)$.

Например: $E(x)=3x^2-2x+1$.

2 Найдите значение выражения $E(x)$ при $x=2$.

Объясняем Вычисляем $E(2)=3\cdot 2^2-2\cdot 2+1=9$.

Число 9 – значение выражения $E(x)$ при значении переменной $x=2$.

Упражнение Дано выражение $ab-a-b$. Найдите значение выражения при $a=1,\ b=3$.

Решение:

Подставим значения $a=1$ и $b=3$ в выражение.

Получаем: $1\cdot 3-1-3=3-4=-1$.

Ответ: –1.

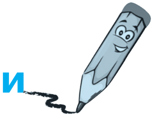
Определение Число, полученное в результате замены букв (переменных) их числовыми значениями и выполнения соответствующих действий, называется **значением алгебраического выражения**.

Запомните Если при вычислении значений числовых или алгебраических выражений получается деление на 0, возведение нуля в нулевую степень или возведение нуля в степень с отрицательным показателем, то говорят, что **выражение не имеет смысла** при соответствующих значениях.

Объясняем Выражения вида $\boxed{\frac{10}{0}}$, $\boxed{6:0}$, $\boxed{0^0}$ и $\boxed{0^{-3}}$ не имеют смысла.

Выражение $E(x)=\dfrac{3}{x-1}$ не имеет смысла при $x=1$, так как при подстановке значения $x=1$ в выражение $E(x)$ получим $\dfrac{3}{0}$. Это выражение не имеет смысла. Значит, при $x=1$ выражение $E(x)$ не имеет смысла.

Упражнения и задачи



☑ ☐ ☐

1. Перепишите и дополните: а)

Выражение	$-3x$	$2a^2$	$0{,}4xy$	$1\frac{1}{2}ab$	$\sqrt{2}xa$	$-5ax$	b^2c	$-3\sqrt{3}c$
Коэффициент								

б)

Выражение	xzy	$-abc$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}c^2$	-15	$0,(8)d$	$7{,}2x^2$	$-\frac{ax}{2}$
Коэффициент								

2. ***Работайте в парах!*** Вычислите значение числового выражения:

а) $3\cdot 17+25:0{,}5+1$; б) $16:(-0{,}5)-6(15+3^2\cdot 7)$;

в) $(24:1{,}2-8)\cdot(78:3+2\cdot 0{,}5)$; г) $(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{25}-3{,}5\cdot 0{,}4\sqrt{75}$.

3. Дано алгебраическое выражение $E(x)=1{,}4x^2$. Найдите значение выражения при:

а) $x=0$; б) $x=1$; в) $x=-1$; г) $x=5$; д) $x=-10$; е) $x=\sqrt{2}$.

4. Дано алгебраическое выражение $E(x)=\sqrt{3}x-x^3$. Найдите значение выражения при:

а) $x=-2$; б) $x=0$; в) $x=\sqrt{3}$; г) $x=10$.

5. ***Исследуйте!*** Определите, при каких значениях переменной выражение не имеет смысла:

а) $E(x)=\frac{3}{x}$; б) $E(x)=\frac{2x}{x+2}$; в) $E(x)=\frac{1}{3x-6}$;

г) $E(x)=\frac{x^2}{4-x}$; д) $E(x)=\frac{x+2}{x-5}$; е) $E(x)=\frac{\sqrt{3}+x^2}{2x}$.

6. ***Работайте в парах!*** Запишите числовое выражение, значение которого равно 100, используя в каждом случае четыре цифры 9 и знаки арифметических действий.

7. ***Исследуйте!*** Рассмотрите выражение и запишите подобные члены:

а) $-2x+3ay-\frac{1}{3}x+2{,}5y^2+9ay-\sqrt{5}y^2+1{,}4x-5$.

$-2x$, ...;

$3ay$, ...;

$2{,}5y^2$, ...

б) $\frac{x^2a}{2}-\frac{5}{2}+\frac{xa}{2}-\frac{5y}{3}-\sqrt{2}xa-x^2a+1+y$.

$\frac{x^2a}{2}$, ...;

$\frac{xa}{2}$, ...;

$-\frac{5}{2}$, ...;

$-\frac{5y}{3}$, ...

8. Приведите подобные слагаемые:

а) $2x-5y+3x+y$; б) $-2+2a-3b-a+b$;

в) $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2\sqrt{2}x+\sqrt{2}y$; г) $a+b-1+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+1$.

9. Прочтите выражение, используя термины: *сумма*, *разность*, *произведение*, *частное*:

а) $m+n+p$; б) $2t-z$; в) xyz; г) $\frac{x+3}{4}$; д) $\frac{m-n}{p}$; е) $\frac{xy}{x+y}$; ж) $\frac{x^2}{x-y}$.

10. Найдите значение выражения:

а) $E(x)=\frac{3x^2}{1-x}$, при $x=10$; б) $E(x)=\frac{x}{2+x^2}$, при $x=-\sqrt{2}$;

в) $E(x)=\frac{2x-16}{4x+12}$, при $x=2{,}5$; г) $E(x)=\frac{x^3-x+1}{x^4+2}$, при $x=-1$.

11. Найдите значение выражения:

а) $5a-3b$, при $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{3}$;
б) $0{,}5t-4z$, при $t=4$, $z=-0{,}5$;
в) $3a^2-\frac{1}{2}b^2$, при $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{8}$;
г) x^3-y^3, при $x=2$, $y=1$.

☑☑☐

12. Периметр треугольника равен P, а две его стороны равны a и b.

а) Запишите выражение для вычисления третьей стороны c.

б) Найдите значение выражения, полученного при решении задания а) при:

1) P = 25 см, a = 8 см, b = 7 см;
2) P = 18,5 см, a = 6,8 см, b = 4 см.

13. ***Работайте в парах!*** Земельный участок имеет форму прямоугольника со сторонами a км и b км. После расчистки прилежащего земельного участка исходная площадь увеличилась на 1,55 км².

а) Запишите выражение для вычисления площади участка после его увеличения.

б) Вычислите (в м²) площадь из п. а) для:

1) a = 25,2 м, b = 78,5 м;
2) a = 100,4 м, b = 96,8 м.

14. Найдите значение выражения:

а) $|a|+|b|-|c|-|d|$, при $a=2$, $b=-3$, $c=8$, $d=100$;
б) $|a-1|+|b+1|-|c-1|-|d+1|$, при $a=-3{,}8$, $b=-5$, $c=-7{,}8$, $d=-101$.

15. Каждую минуту станок производит 2 детали. Необходимо произвести 540 деталей. Узнайте, сколько времени проработал станок, если осталось произвести еще n деталей.

16. Дано выражение $x^2-2y^2-z^2$. Найдите значение выражения при:

а) $x=0$, $y=1$, $z=-1$;
б) $x=4$, $y=0$, $z=1$;
в) $x=-2$, $y=-3$, $z=-4$.

17. Пусть $A=3x-y$, $B=x+y-10$, $C=1{,}5x+2{,}4$. Найдите:

а) $A+B+C$;
б) $A+B-C$;
в) $A-B-C$;
г) $-A+B-C$;
д) $-A-B-C$;
е) $A-B+C$.

18. Дано выражение $\frac{6+a}{a-b+1}$. Найдите по три значения a и b, при которых выражение не имеет смысла.

19. Туристы шли по лесу 2 часа со скоростью v км/ч, затем 5 км по шоссе.

а) Запишите формулу s для вычисления пути, пройденного туристами.

б) Выразите из этой формулы v через s.

в) Найдите v, если s = 12 км.

20. Запишите в виде алгебраического выражения:

а) сумму двух последовательных натуральных чисел;
б) произведение двух последовательных целых чисел;
в) произведение трех последовательных натуральных чисел, если наименьшее число равно $2n$;
г) сумму трех последовательных нечетных натуральных чисел, если наименьшее число равно $2k+1$.

☑☑☑

21. Сколько монет достоинством 2 лея и 5 леев необходимо, чтобы получить 23 лея?

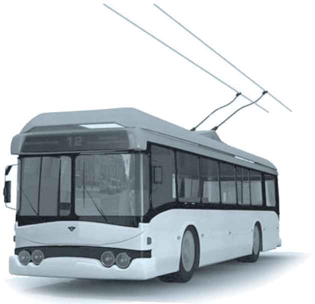
22. Сколько времени в день ученик находится в школе, если у него x уроков, y перемен по 10 минут и z перемен по 15 минут?

а) Запишите формулу для решения задачи.

б) Вычислите (в часах) при $x=5$, $y=3$ и $z=1$.

§2. Действия над действительными числами, представленными буквенными выражениями

2.1. Сложение и вычитание действительных чисел, представленных буквенными выражениями



1 Господин Копилкин два дня провел в Кишиневе. Экономный по натуре (и любопытный), он решил подсчитать, сколько денег потратил на проезд в городском транспорте.

Рассмотрите таблицу, учитывая, что a – цена (в леях) проезда на автобусе, а t – цена (в леях) проезда на троллейбусе.

	Автобус		Троллейбус	
	Кол-во поездок	Стоимость	Кол-во поездок	Стоимость
Суббота	2	$2a$	3	$3t$
Воскресенье	1	a	2	$2t$
Всего	3	?	?	?

Объясняем

В субботу господин Копилкин потратил $(2a+3t)$ леев.

В воскресенье господин Копилкин потратил $(\square+\square)$ леев.

Всего господин Копилкин потратил $(2a+3t+a+\square)$ леев, то есть $(3a+\square)$ леев.

2 Рассмотрите и заполните: $2\sqrt{3}-\sqrt{5}+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}$ $\qquad$ $2a+3t+a+2t$

Подобные корни $\qquad$ Подобные слагаемые

$2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{3}$; $\square$ и $2\sqrt{5}$. $\qquad$ $2a$ и a; $\square$ и $\square$.

Запомните

> **Чтобы сложить** (или **привести**) **подобные слагаемые**, надо сложить их коэффициенты и результат умножить на общую буквенную часть.

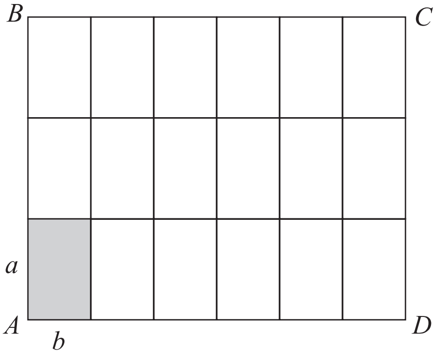
- Перечертите и заполните:

Выражение	$2a$	t	$-\sqrt{3}x$	$\frac{1}{4}y$	$-\frac{a}{3}$	$5sm$
Коэффициент		1				

3 Рассмотрите и продолжите приведение подобных слагаемых:

$$4\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}y+\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}-1=\left(4\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)x+\left(-\frac{1}{9}+\square\right)y-1=5x+\square\,y-1.$$

2.2. Умножение и деление действительных чисел, представленных буквенными выражениями



1 Прямоугольник $ABCD$ разделили на 18 равных прямоугольников со сторонами a и b.

Пусть $\mathscr{A}$ – площадь прямоугольника $ABCD$, а S – площадь маленького прямоугольника.

Дополните:

Длины сторон прямоугольника $ABCD$ равны $3a$ и $6b$.

$\mathscr{A}=3a\cdot 6b$, и $S=\square$.

$3a\cdot 6b=18\cdot\square$

Тогда, $\mathscr{A}=18\cdot S=18\cdot\square$.

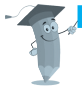
- Каков будет результат, если $a=b$?

Работайте в парах!

2 Рассмотрите и дополните:

а) $3\cdot2^2\cdot5\cdot2^3\cdot4\cdot5=3\cdot4\cdot2^{2+3}\cdot5^{\square}=\square\cdot2^{\square}\cdot5^{\square}$.

б) $5a^4\cdot6b^2\cdot a^3\cdot3b=5\cdot\square\cdot3\cdot a^{4+3}\cdot b^{\square+\square}=\square\cdot a^{\square}\cdot b^{\square}$.



Запомните

Чтобы выполнить умножение действительных чисел, представленных буквенными выражениями, надо:
- умножить их коэффициенты;
- умножить соответствующие буквенные части, используя свойства степени.

Работайте в парах!

3 Рассмотрите и дополните:

а) $(18\cdot5^4):(6\cdot5^2)=(18:6)\cdot(5^4:5^2)=3\cdot5^{\square-\square}=3\cdot5^{\square}$.

б) $12x^5y^3:(3x^2y)=(12:3)\cdot(x^5:x^2)\cdot(y^3:y)=\square\cdot x^{5-2}\cdot y^{\square-\square}=\square\cdot x^{\square}y^{\square}$.

Запомните

Чтобы выполнить деление действительных чисел, представленных буквенными выражениями, надо:
- разделить их коэффициенты;
- разделить соответствующие буквенные части, используя свойства степени.

2.3. Возведение в степень с натуральным показателем действительных чисел, представленных буквенными выражениями

1 Рассмотрите и дополните:

а) $\left(\frac{3}{4}\cdot7^2\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot(7^2)^{\square}=\frac{3^3}{4^{\square}}\cdot7^{2\cdot\square}=\frac{3^{\square}}{4^{\square}}7^{\square}$;

б) $(-0{,}2ab^3)^3=(-0{,}2)^3\cdot a^{\square}\cdot(b^3)^{\square}=\square\cdot a^{\square}\cdot b^{3\cdot\square}=-0{,}008\cdot a^{\square}b^{\square}$.

Запомните

Чтобы возвести в степень с натуральным показателем действительное число, представленное буквенным выражением, надо:
- возвести в степень его коэффициент;
- возвести в степень каждый множитель буквенной части.

2 Найдите: а) $(5x^2)^3$; б) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^2$; в) $(\sqrt{2}b\cdot\sqrt{3}c)^4$.

Решение:

а) $(5x^2)^3=(5x^2)\cdot(5x^2)\cdot(5x^2)=(5\cdot5\cdot5)(x^2\cdot x^2\cdot x^2)=\square\cdot\square$.

б) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^2=\frac{2a}{3b}\cdot\frac{2a}{3b}=\frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square}=\frac{(\square)^2}{(\square)^2}=\frac{\square}{\square}$.

в) $(\sqrt{2}b\cdot\sqrt{3}c)^4=(\sqrt{2}b\cdot\sqrt{3}c)\cdot(\sqrt{2}b\cdot\sqrt{3}c)\cdot(\sqrt{2}b\cdot\sqrt{3}c)\cdot(\sqrt{2}b\cdot\sqrt{3}c)=$

$=(\sqrt{2}\cdot\square\cdot\square\cdot\square)\cdot(b\cdot\square\cdot\square\cdot\square)\cdot$

$\cdot(\sqrt{3}\cdot\square\cdot\square\cdot\square)\cdot(c\cdot\square\cdot\square\cdot\square)=$

$=(\sqrt{2})^{\square}\cdot b^{\square}\cdot(\sqrt{3})^{\square}\cdot c^{\square}=\square b^4c^4$.

Ответ: а) $\square$; б) $\square$; в) $\square$.

Запомните

При возведении действительных чисел, представленных буквенными выражениями, в степень с натуральным показателем используются те же свойства, что и при возведении в степень действительных чисел. Для действительных чисел a и b, представленных буквенными выражениями, имеем:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a \neq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$; 2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$;

3) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, $m \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$; 4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$, $b \neq 0$, $m \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$;

5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $a \neq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Упражнения и задачи

☑☐☐

1. Приведите подобные слагаемые:

а) $2x - 3y + 4x + y$;

б) $a^2 - 3b - 4a^2 - 6b$;

в) $1{,}2x + 2{,}5xy + 3 - 0{,}5xy - x + y^2$;

г) $20x^3 - x^2 + 4x^2 + 2x - 5$;

д) $\dfrac{3}{2}a - \dfrac{1}{5}b + a - 3b$;

е) $-4{,}8t - 2z + 3{,}5t - 7{,}2z + 30$.

2. Выполните умножение:

а) $3x \cdot 5y$; б) $-2a \cdot (-3b)$; в) $2xy \cdot x$.

3. Запишите в виде суммы выражение:

а) $7{,}5xy$; б) $-\dfrac{2}{5}x^2$; в) $\sqrt{3}y$; г) x.

4. Выполните умножение:

а) $-\dfrac{1}{4}x^2y \cdot 2xy$; б) $0{,}6ab^2 \cdot 5a^2b$;

в) $2x^3y \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y\right)$; г) $-3\sqrt{18}ab \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3b^2$.

5. Выполните деление:

а) $12xy : (3x)$; б) $-\dfrac{2}{27}x^3y^4 : (\dfrac{1}{9}x^2y)$;

в) $0{,}1a^4b^2 : (-5ab^2)$; г) $1{,}(5)a^6b^7 : (0{,}(5)a^3b^5)$.

6. Возведите в степень:

а) $(-2a^3b)^2$; б) $(3xy^2)^4$;

в) $\left(\dfrac{1}{3}x^5y\right)^3$; г) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}ab^5\right)^4$.

☑☑☐

7. ***Работайте в парах!*** Дополните выражение так, чтобы можно было привести все подобные слагаемые:

а) $-3xy + 2x^2y - 5 + \ldots$;

б) $\sqrt{2}ab - \sqrt{3}a^2b + 10 + \ldots$

8. Перепишите и дополните:

а) $2x^2y^3 \cdot \boxed{} = 6x^3y^5$; б) $\boxed{} \cdot ab^2 = 5a^3b^2$;

в) $3xy \cdot \boxed{} = 0{,}3x^5y^2$; г) $\boxed{} \cdot 2a = \dfrac{2}{3}a^2b^2$.

9. Приведите подобные слагаемые:

а) $2y - 5x^2 + 51 - 18x^2 - 2y + 3x^2 - 50 - 5x + 10x^2$;

б) $\dfrac{2}{5}ax + ax^2 - \dfrac{1}{10}ax - a^2x - 0{,}1ax + a^2 - \dfrac{2}{3}a^2 + ax$.

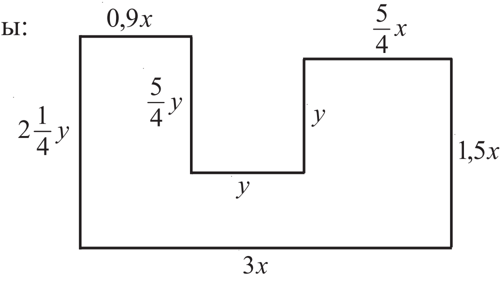
10. Перепишите и дополните:

а) $4x^5y^2 : \boxed{} = 2x^3y$; б) $\boxed{} : 3ab^2 = 3ab$;

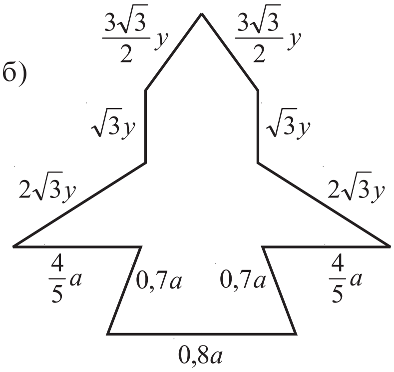
в) $x^3y^8 : \boxed{} = 3x$; г) $\boxed{} : a^2b^3 = 6a^3b^2$.

11. ***Работайте в группах!*** Найдите периметр фигуры:

а)



б)



12. Произведение квадрата одного числа и куба другого числа в 15 раз больше, чем удвоенное произведение квадратов этих чисел. Найдите одно из данных чисел.

13. Дано выражение $E(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}+\dfrac{1}{5-4x}$. Вычислите значение выражения при $x=0{,}125$.

14. Во сколько раз периметр прямоугольника больше, чем периметр квадрата, если известно, что одна сторона прямоугольника в 2,5 раза длиннее, а другая в 1,2 раза короче стороны квадрата?

15. Во сколько раз площадь прямоугольника больше площади квадрата, если известно, что стороны прямоугольника длиннее стороны квадрата в 1,2 раза и 1,5 раза соответственно?

☑☑☑

16. Сумма двух чисел на 124 больше их разности. Найдите числа, если их произведение равно 310.

17. Среднее арифметическое трех чисел равно 25. Второе число на 4 меньше первого, а разность между третьим и вторым числами равна 8. Найдите эти три числа.

18. Дополните:

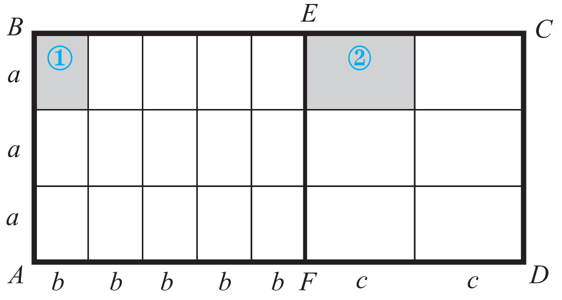
а) Если $5^n=625$, то $n=\square$.

б) Если $3^m=243$, то $m=\square$.

19. Найдите $(a+b+c)^2$.

§3. Формулы сокращенного умножения

3.1. Раскрытие скобок



1 Прямоугольник $ABCD$ разделили на два прямоугольника: $ABEF$ и $FECD$. Каждый из прямоугольников $ABEF$ и $FECD$ разбит на сетку прямоугольников.
Пусть $\mathscr{A}$ – площадь прямоугольника $ABCD$.

Рассмотрите рисунок и дополните:

$$\mathscr{A}=3a(5b+2c)$$

$$\mathscr{A}=\mathscr{A}_{ABEF}+\mathscr{A}_{FECD}=$$

$$=3a\cdot 5b+3a\cdot\square$$

$$\rightarrow$$

$$3a(5b+2c)=$$

$$=3a\cdot 5b+\square\cdot\square=$$

$$=\square ab+\square ac$$

Запомните

Умножение действительных чисел, представленных буквенными выражениями, дистрибутивно относительно сложения.
Для любых действительных чисел a, b, c верно соотношение:

$$\underset{\text{①}}{a}\cdot(\underset{\text{②}}{b}+\underset{\text{③}}{c})=\underset{\text{①}}{a}\cdot\underset{\text{②}}{b}+\underset{\text{①}}{a}\cdot\underset{\text{③}}{c},\qquad(\underset{\text{①}}{a}+\underset{\text{②}}{b})\cdot\underset{\text{③}}{c}=\underset{\text{①}}{a}\cdot\underset{\text{③}}{c}+\underset{\text{②}}{b}\cdot\underset{\text{③}}{c}.$$

- Дополните:

$$a(b-c)=a(b+(-c))=a\cdot\square-a\cdot\square.$$

Запомните

$$a(b\pm c)=ab\pm ac$$

2 Рассмотрите и дополните:

$$\overset{(a}{(2x}+\overset{б)}{3y)}\overset{\cdot\ c}{(s+t)}=\overbrace{\underset{a}{2x}\cdot(\underset{(b}{s}+\underset{в)}{t})}^{ac}\overset{+}{+}\overbrace{\square\cdot(s+t)}^{bc}=2\underset{ab}{xs}+2\underset{ac}{xt}+\square\cdot s+\square\cdot t.$$

Запомните

Для любых действительных чисел *a*, *b*, *c* верно соотношение:

$$(\underset{①}{a}+\underset{②}{b})\cdot(\underset{③}{c}+\underset{④}{d})=\underset{①}{a}\cdot\underset{③}{c}+\underset{①}{a}\cdot\underset{④}{d}+\underset{②}{b}\cdot\underset{③}{c}+\underset{②}{b}\cdot\underset{④}{d}.$$

3.2. Квадрат суммы двух чисел

Рассмотрите, прокомментируйте и дополните: $(a+b)^2=?$

I метод $(\underset{①}{a}+\underset{②}{b})^2=(\underset{①}{a}+\underset{②}{b})\cdot(\underset{③}{a}+\underset{④}{b})=\underset{①}{a}\cdot\underset{③}{a}+\underset{①}{a}\cdot\underset{④}{b}+\underset{②}{\square}\cdot\underset{③}{\square}+\underset{②}{\square}\cdot\underset{④}{\square}=$

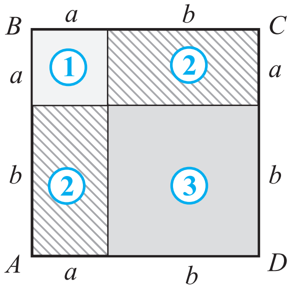
$=a^2+2\,\square\square+\square^2$

II метод $\mathcal{S}_{ABCD}=(a+b)^2$ или

$\mathcal{S}_{ABCD}=\mathcal{S}_{①}+2\mathcal{S}_{②}+\mathcal{S}_{③}=a^2+2\,\square\square+\square^2$

$\downarrow$

$(a+b)^2=a^2+2\,\square\square+\square^2$



Запомните

Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа:

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}.$$

3.3. Квадрат разности двух чисел

Рассмотрите, прокомментируйте и дополните: $(a-b)^2=?$

$(a-b)^2=[a+(-b)]^2=\bigcirc^2+2\cdot a\cdot(-б)+\square^2=\bigcirc^2-2ab+\square^2$

Запомните

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа:

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}.$$

- Докажите, что $(a-b)^2=(b-a)^2$.

3.4. Умножение суммы двух чисел на их разность

Рассмотрите, прокомментируйте и дополните: $(a+b)(a-b)=?$

$(a+b)(a-b)=(\underset{①}{a}+\underset{②}{b})(\underset{③}{a}+\underset{④}{(-b)})=\underset{①}{a}\cdot\underset{③}{a}+\underset{①}{a}\underset{④}{(-b)}+\underset{②}{\square}\underset{③}{\square}+\underset{②}{\square}\underset{④}{\square}=$

$=a^2-ab+\square\square+\square^2=\square$

Запомните

Произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел:

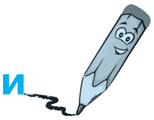
$$\boxed{(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2}.$$

$(\bigcirc+\square)^2=\bigcirc^2+2\bigcirc\square+\square^2$

$(\bigcirc-\square)^2=\bigcirc^2-2\bigcirc\square+\square^2$

$(\bigcirc+\square)(\bigcirc-\square)=\bigcirc^2-\square^2$

Упражнения и задачи



☑☐☐

1. Раскройте скобки:

а) $x(y+z)$; б) $(y-x)z$;

в) $2a(3b-c)$; г) $-\frac{1}{2}x(2x+y)$.

2. Раскройте скобки:

а) $(x+y)(u+v)$; б) $(u-v)(x+y)$;

в) $(a-b)(c-d)$; г) $(b-a)(x+y)$.

3. ***Работайте в парах!*** Вычислите:

а) $-\sqrt{3}(\sqrt{12}+\sqrt{3})$; б) $\sqrt{6}(\sqrt{24}-\sqrt{6})$;

в) $(\sqrt{8}+\sqrt{5})(\sqrt{8}-\sqrt{5})$; г) $\left(2-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(2+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

4. Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны $(\sqrt{5}+3)$ см и $(3-\sqrt{5})$ см.

5. Раскройте скобки:

а) $\frac{1}{9}x^2y(9x-3y^2)$;

б) $\frac{2}{3}xy^2(2y^2+3x^2)$;

в) $(x^2-2y^2)(5x+0,5y)$;

г) $(3x^3+4y)\left(\frac{1}{3}y+\frac{1}{12}x^2\right)$.

6. Раскройте скобки:

а) $(2a-\sqrt{3})(a^2+3a-\sqrt{3})$;

б) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

в) $(b-2b^2+1)(1-b)$;

г) $(x^2+2xy+y^2)(x-y)$.

7. Разложите на множители:

а) $2x-4$; б) $ab+a$;

в) $xy+x^2$; г) $3ab-6bc$.

8. ***Работайте в парах!*** Запишите в виде произведения: а) $-3a+2$; б) $1,5x-8$;

в) $-\sqrt{3}-x$; г) $-7+2b$.

9. Раскройте скобки:

а) $6m(n+1)$; б) $3b(4y-3)$;

в) $5x(3a+4b)$; г) $7y^3(y^2+3)$;

д) $(x-1)(4x+1)$; е) $(x-2)(9-y)$;

ж) $(a-b)(5+ay-by)$.

10. Возведите в степень:

а) $(x+y)^2$; б) $(a-3)^2$; в) $(x+a)^2$;

г) $(b-2)^2$; д) $(3-x)^2$; е) $(4+a)^2$.

11. Выполните действия:

а) $(2x-3y)^2$; б) $(3a+5b)^2$;

в) $(\sqrt{3}x-\sqrt{2}y)^2$; г) $\left(\frac{1}{3}a+2x\right)^2$;

д) $(\sqrt{3}+3b)^2$; е) $\left(\frac{b}{4}-\frac{a}{3}\right)^2$.

12. Выполните действия:

а) $(x+y)(x-y)$; б) $(c-b)(c+b)$;

в) $(x+4)(x-4)$; г) $(8-a)(8+a)$;

д) $(y-\sqrt{3})(y+\sqrt{3})$; е) $(\sqrt{7}-x)(x+\sqrt{7})$.

13. ***Работайте в парах!*** Перепишите и дополните:

а) $(\square+8a)(\square-8a)=49y^2-\square$;

б) $(5x-\square)(5x+\square)=\square-7y^2$;

в) $(\square-3b)(\square+\square)=25y^2-9b^2$;

г) $(0,6a+\square)(\square-\square)=0,36a^2-2b^2$.

☑☑☐

14. Сравните площадь квадрата и площадь прямоугольника, если известно, что одна сторона прямоугольника на $\sqrt{10}$ см длиннее, а другая на $\sqrt{10}$ см короче стороны квадрата.

15. Сравните периметр квадрата и периметр прямоугольника, если известно, что одна сторона прямоугольника на $3\sqrt{3}$ см длиннее, а другая на $5\sqrt{3}$ см короче стороны квадрата.

16. ***Работайте в группах!*** Перепишите и дополните:

а) $\square(2xy-5y)=10x^3y^2-\square$; б) $-7ax(\square+\square)=a^2x-14a^3x^2$;

в) $\square\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{4}{3}y^2\right)=\square+\frac{1}{9}xy^3$; г) $\frac{5}{6}a^2b(\square+\square)=a^2b^2+5a^2b$.

17. Разложите на множители: а) $5a^2b-25ab^2$; б) $-18x^4y^5-24x^5y^4$;

в) $-2xy+3x^3y$; г) $16xy^4+24y$.

18. ***Исследуйте!*** Даны три последовательных натуральных числа. Квадрат первого числа на 56 меньше произведения двух других чисел. Найдите эти числа.

19. Раскройте скобки:

а) $5(x-y)^2$;　　б) $(x-3)(y-2)$;

в) $(x-y)(3-y)$;　　г) $(b+1)(2a+b)$.

20. Перепишите и дополните:

а) $(3a+\square)^2=9a^2+42a+\square$;

б) $(\square-5b)^2=36a^2-\square+25b^2$;

в) $(4x-\square)^2=\square-24xy+\square$;

г) $(\square+\sqrt{2}a)^2=\square+4\sqrt{3}ab+\square$.

21. Найдите площадь квадрата со стороной:

а) $(\sqrt{5}-2)$ см;　　б) $(2\sqrt{3}+1)$ см.

22. Квадрат натурального числа на 65 меньше квадрата последующего числа. Найдите это число.

23. Квадрат натурального числа на 85 больше квадрата последующего числа. Найдите это число.

24. Если увеличить длину стороны квадрата на 6 см, то его площадь увеличится на 132 см². Найдите длину стороны квадрата.

25. Если уменьшить длину стороны квадрата на 8 см, то его площадь уменьшится на 128 см². Найдите длину стороны квадрата.

26. Примените формулу $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ и вычислите устно:

а) $101 \cdot 99$;　　б) $51 \cdot 49$;

в) $61 \cdot 59$;　　г) $102 \cdot 98$;

д) $32 \cdot 28$;　　е) $43 \cdot 37$.

27. Примените формулу $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ и вычислите устно:

а) 41^2;　б) 59^2;　в) 51^2;　г) 38^2;　д) 62^2.

28. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно?*

а) Для любых действительных чисел a и b истинно соотношение $(a+b)^2=(-a-b)^2$.

б) Для любых действительных чисел a и b истинно соотношение $(a-b)^2=-(b-a)^2$.

в) Для любых действительных чисел a и b истинно соотношение $2(a^2-b^2)=(a-b)^2+(a+b)^2$.

29. Известно, что $a+\frac{1}{a}=4$. Найдите:

а) $a^2+\frac{1}{a^2}$;　　б) $a^4+\frac{1}{a^4}$.

☑☑☑

30. Учитывая, что $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ для любого $n\in\mathbb{N}^*$, найдите сумму:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

31. Известно, что $\frac{1}{a}-a=8$. Найдите: а) $a^2+\frac{1}{a^2}$;　　б) $a^4+\frac{1}{a^4}$.

32. Вычислите:

а) $(\sqrt{3}-2)^{100}\cdot(\sqrt{3}+2)^{100}$;　　б) $(9-4\sqrt{5})^{50}\cdot(9+4\sqrt{5})^{50}$;

в) $(\sqrt{8}-\sqrt{2})^{20}$;　　г) $(\sqrt{3}-\sqrt{12})^{16}$.

33. ***Исследуйте!*** Докажите, что если a – целое нечетное число, то и a^3-4a – целое нечетное число.

34. Даны три последовательных натуральных числа. Докажите, что удвоенное первое число на 3 меньше модуля разности квадратов двух других чисел.

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

35. За 32 шара заплатили столько леев, сколько шаров можно купить на 8 леев. Найдите цену шара.

§4. Разложение алгебраических выражений на множители

4.1. Разложение на множители

1 Разложите на множители выражение $12x^4y^3+18x^2y^5$.

$$12x^4y^3+18x^2y^5=$$

$$\downarrow$$

$$=\left\{\begin{array}{l}12x^4y^3:(6x^2y^3)=2x^2\\ 18x^2y^5:(6x^2y^3)=3y^{\square}\end{array}\right\}=$$

$$\downarrow$$

$$=6x^2y^3(2x^2+3y^{\square})$$

① Находим НОД коэффициентов 12 и 18: $(12, 18)=\mathbf{6}$.

② Находим наименьший показатель степени каждого общего множителя буквенных частей:

$\boldsymbol{x}\rightarrow\min(4,\ 2)=\mathbf{2}$

$\boldsymbol{y}\rightarrow\min(3,\ 5)=\mathbf{3}$.

③ Выносим за скобки выражение $\mathbf{6}\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^3$.
В скобках остается результат, полученный от деления каждого слагаемого на $6x^2y^3$.

2 Вынесите общий множитель –1 в выражении $-3a+4b-1$.

Решение:

$-3a+4b-1=(-1)\cdot(3a-4b+1)=-(3a-4b+1)$.

Запомните Если вынести –1 за скобки, то знаки всех слагаемых поменяются на противоположные.

- Дополните: $6xy-2=(-1)\cdot(\square+\square)=\square(\square+\square)$.

4.2. Применение формул сокращенного умножения

4.2.1. Преобразование выражений в квадрат суммы или разности двух выражений

1 Рассмотрите и дополните.

а) $x^2+4xy+4y^2=(x+\square)^2$

$x^2+2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2=(x+2y)^2$

$\rightarrow\ x^2+4xy+4y^2=(x+2y)^2$

б) $a^2-2\sqrt{2}ab+\square^2=(a-\square)^2$

$$\downarrow$$

$a^2-2\cdot a\cdot\square+(\quad)^2=(a-\square)^2$

$\rightarrow\ a^2-2\sqrt{2}ab+\square^2=(a-\square)^2$

в) $29+12\sqrt{5}=(\bigcirc+\square)^2$

$$\downarrow$$

$29+2\cdot\underset{①}{2}\cdot\underset{②}{3}\underset{③}{\sqrt{5}}=(\bigcirc+\square)^2$

$\overset{①\ ②}{(2\cdot3)^2}=36>29$

$\overset{②\ ③}{(3\sqrt{5})^2}=45>29$

$$\boxed{\begin{array}{l}\overset{①\ ③}{(2\sqrt{5})^2}=20<29\\ \qquad\qquad +\\ \ 3^2\ \ =\ \ 9<29\\ \hline \qquad\quad 29\end{array}}\rightarrow\begin{array}{c}2\sqrt{5}\\ 3\end{array}$$

$\rightarrow\ 29+12\sqrt{5}=(3+\square)^2$

г) $79-20\sqrt{3}=(\bigcirc-\square)^2$

$\rightarrow$?

4.2.2. Разложение на множители разности квадратов двух чисел

1 Рассмотрите и дополните:

а) $4x^2-\frac{y^2}{9}=(2x+\square)(\bigcirc-\frac{y}{3})$

$\downarrow$

$\bigcirc^2-\square^2=\left(\bigcirc+\square\right)\left(\bigcirc-\square\right)$

$\rightarrow\ 4x^2-\frac{y^2}{9}=\left(2x+\frac{y}{3}\right)\left(\bigcirc-\square\right)$

б) $2a-3b=(\bigcirc+\square)(\bigcirc-\square)$

$\downarrow$

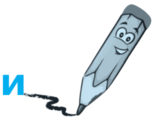
$(\sqrt{2a})^2-(\sqrt{3b})^2=(\bigcirc+\square)(\sqrt{2a}-\square)$

$\rightarrow\ 2a-3b=(\bigcirc+\square)(\sqrt{2a}-\square)$

- Какими должны быть числа a и b в примере пункта б)?

2 Вычислите устно $\frac{1{,}01^2-0{,}99^2}{0{,}04}$.

Упражнения и задачи



☑☐☐

1. Дополните: а) $x^2-2xy+y^2=(x-\square)^2$; б) $x^4+4x^2+4=(\square+2)^2$;
в) $9a^2-6ab+b^2=(\square-b)^2$; г) $3x^2+4\sqrt{3}xy+4y^2=(\square+2y)^2$.

2. Запишите в виде квадрата суммы или разности:
а) $a^2+2ay+y^2$; б) b^2+c^2-2bc; в) $2xz+z^2+x^2$; г) $9-6y+y^2$.

3. Преобразуйте в квадрат суммы или разности:
а) $16x^2+8xy+y^2$; б) $9y^2-12xy+4x^2$; в) $25x^2+40x+16$; г) $0{,}25a^2-2ab+4b^2$.

4. ***Работайте в группах!*** Дополните:
а) $6-2\sqrt{5}=(\sqrt{5}-\square)^2$; б) $7+4\sqrt{3}=(2+\square)^2$; в) $22-12\sqrt{2}=(\square-3\sqrt{2})^2$;
г) $33+12\sqrt{6}=(\square+3)^2$; д) $30-12\sqrt{6}=(2\sqrt{3}-\square)^2$; е) $50=(\sqrt{8}+\square)^2$.

5. Запишите в виде квадрата суммы или разности:
а) $29+12\sqrt{5}$; б) $73-40\sqrt{3}$; в) $89+36\sqrt{2}$;
г) $91-48\sqrt{3}$; д) $9+6\sqrt{2}$; е) $17-4\sqrt{15}$.

6. ***Работайте в парах!*** Дополните:
а) $a^2-4b^2=(a-\square)(a+\square)$; б) $9y^2-0{,}25x^2=(\square-0{,}5x)(\square+0{,}5x)$;
в) $3a^2-8y^2=(\sqrt{3}a-\square)(\square+\square)$; г) $\frac{b^2}{6}-\frac{1}{7}x^2=\left(\square-\frac{x}{\sqrt{7}}\right)(\square+\square)$.

7. Разложите на множители:
а) $16a^2-25b^2$; б) $0{,}09x^2-0{,}01y^2$; в) $\frac{4}{25}y^2-\frac{25}{4}x^2$; г) $6b^2-7a^2$.

☑☑☐

8. Запишите число в виде квадрата суммы:
а) 48; б) 28; в) 35; г) 112; д) 99.

9. Запишите число в виде квадрата разности:
а) 60; б) 44; в) 72; г) 120; д) 58.

Образец:
$50=(\sqrt{50})^2=(5\sqrt{2})^2=(2\sqrt{2}+3\sqrt{2})^2$

10. Упростите выражение:

а) $(a-\sqrt{2})^2-(a+\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}$; б) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b}+a+b$; в) $\frac{x^2-4y^2}{x+2y}-2y$;

г) $(\sqrt{5}-x)^2+(x+\sqrt{5})^2+4x\sqrt{5}$; д) $(a-2x)^2-4x^2-a^2$.

11. Разложите на множители:

а) $4a^2-y^2-2a-y$; б) $9x^2+3x-6xy+y^2-y$; в) $5b-4y-16y^2+25b^2$.

12. *Работайте в парах!* Вычислите, применив формулу $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$:

а) $\frac{34^2-18^2}{104}$; б) $\frac{78^2-46^2}{64}$; в) $\frac{57^2-39^2}{44^2-26^2}$.

☑☑☑

13. Сумма квадрата действительного отрицательного числа и его утроенного числа равна 4. Найдите это число.

14. Разность между действительным положительным числом и его квадратом равна –12. Найдите это число.

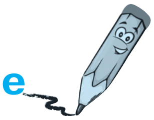
15. *Исследуйте!* Докажите, что при любом целом a значение выражения:

а) a^3-a делится на 3; б) a^3-a делится на 6.

16. Разложите на множители: а) a^2+b^2; б) $4x^2+9y^2$.

Указание. а) Прибавьте и вычтите выражение $2|a||b|$.

Упражнения и задачи на повторение



☑☐☐

1. Найдите значение выражения $\frac{4x-y}{x+y}$ при:

а) $x=1,\ y=5$; б) $x=-1,\ y=2$;

в) $x=1{,}5,\ y=2{,}5$; г) $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{3}{4}$.

2. Приведите подобные слагаемые:

а) $3a+7b-1{,}5a-2{,}8b$;

б) $-8x-3+7y+4x-6y+1$.

3. Определите, какие значения могут принимать переменные a и b в алгебраических выражениях:

а) $\frac{a-b}{5}$; б) $\frac{a-3}{b}$; в) $\frac{b}{a-1}$; г) $\frac{2a}{a-b}$.

4. В театре n рядов по m мест в каждом ряду. При необходимости возможно добавить k дополнительных мест.

а) Сколько мест в театральном зале?

б) Вычислите при n = 45, m = 34 и k = 66.

5. Выполните умножение:

а) $\frac{2}{5}x^2\cdot 5y^3$; б) $-3a\cdot\frac{2}{3}a$; в) $\frac{3}{4}a\cdot\left(-\frac{2}{3}y\right)$;

г) $\sqrt{8}x\cdot\sqrt{2}y^2x$; д) $0,(5)x^2y\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)xy^2$.

6. Выполните деление:

а) $21x^3y^2:(3xy)$; б) $-18x^3y^2:(-6xy^2)$;

в) $\frac{3}{5}a^6b^2x:(\frac{1}{3}a^4bx)$; г) $35a^4b^5:(7a^2b^3)$.

7. Возведите в степень:

а) $(2x^3y^2)^6$; б) $(-\sqrt{7}x^3z^5)^8$; в) $(3\frac{1}{4}x^2z)^3$.

8. *Работайте в парах!* Вычислите:

а) $(\sqrt{8}+\sqrt{32})\sqrt{2}$;

б) $(\sqrt{27}-\sqrt{12})\sqrt{3}$;

в) $2\sqrt{5}(\sqrt{125}-3\sqrt{5})$;

г) $(4\sqrt{24}+2\sqrt{54})(-0{,}5\sqrt{6})$.

9. Раскройте скобки:

а) $(\sqrt{3}+7)(\sqrt{3}-7)$;

б) $(2\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}-4)$;

в) $(\sqrt{12}-5)(2\sqrt{5}+12)$;

г) $(5\sqrt{7}-\sqrt{13})(\sqrt{13}+5\sqrt{7})$.

10. Разложите на множители:

а) x^2y+3yz; б) $8xy-12x^2$;

в) $2ab-4a^2b$; г) $-12y^4b^3-16yb^2$.

11. Раскройте скобки:

а) $\left(\frac{3}{4}x+\frac{2}{9}\right)^2$; б) $\left(-\frac{2}{5}x-\frac{5}{2}\right)^2$;

в) $\left(\frac{1}{6}a-3b\right)^2$; г) $\left(8a^2-1\frac{1}{2}b\right)^2$.

12. ***Работайте в парах!*** Перепишите и дополните:

а) $(\boxed{}+3x)^2=\boxed{}+12xy+\boxed{}$;

б) $(\boxed{}-2a)^2=\boxed{}-16ab+\boxed{}$;

в) $(4x+\boxed{})^2=\boxed{}+4xy+\boxed{}$;

г) $(3a-\boxed{})^2=\boxed{}-4ab+\boxed{}$.

13. ***Работайте в парах!*** Дополните:

Дано выражение $E(x)=\dfrac{x^2-144}{x^3+12x^2-x-12}$.

Упростив выражение, получим $\boxed{}$. Обоснуйте!

14. Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны:

а) $(\sqrt{3}+3)$ см и $(\sqrt{27}+2)$ см;

б) $(5\sqrt{5}+1)$ см и $(\sqrt{5}-1)$ см.

15. Найдите площадь квадрата, сторона которого равна:

а) $(7-\sqrt{2})$ см; б) $(9+\sqrt{3})$ см;

в) $(2\sqrt{5}+3)$ см; г) $(\sqrt{27}-3\sqrt{2})$ см.

16. ***Работайте в парах!*** Вычислите:

а) $\sqrt{82^2-18^2}$; б) $\sqrt{65^2-63^2}$;

в) $\sqrt{113^2-112^2}$; г) $\sqrt{85^2-36^2}$.

17. Упростите выражение:

а) $-(a-5)(a+3)-(1-a)^2$; б) $(x-1)(x-2)-(x-4)^2$.

18. Разложите на множители:

а) $x^2-18xy+81y^2$; б) $\frac{1}{36}x^2-xy+9y^2$.

☑☑☐

19. Дано алгебраическое выражение:

а) $a-999$; б) $\frac{5}{a-1}$; в) $\frac{a-3}{a+5}$; г) a^2+4.

Существуют ли значения переменной a, при которых значение алгебраического выражения равно 0?

20. ***Исследуйте!*** Определите, при каких значениях переменной x выражение $E(x)$ не имеет смысла:

а) $E(x)=\dfrac{1}{2x+1}$; б) $E(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$;

в) $E(x)=\dfrac{x}{x^2+3x}$; г) $E(x)=\dfrac{1-x}{x-x^2}$.

21. Найдите длину стороны квадрата, площадь которого равна:

а) $(7-4\sqrt{3})$ см^2; б) $(49-12\sqrt{5})$ см^2.

22. ***Работайте в парах!***

Вычислите: $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2$.

23. Вычислите $\frac{x+y}{2}\cdot\sqrt{xy}$, если:

а) $x=\sqrt{5}+2$, $y=\sqrt{5}-2$;

б) $x=2\sqrt{7}-5$, $y=5+2\sqrt{7}$.

24. Я задумал натуральное число. Умножил его на то же число и к результату прибавил удвоенное задуманное число. Так я получил число 143. Какое число я задумал?

25. Я задумал натуральное число. Умножил его на то же число и из результата вычел удвоенное задуманное число. Так я получил число 168. Какое число я задумал?

26. Приведите примеры приложения формул сокращенного умножения в различных областях.

☑☑☑

27. Вычислите:

а) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

б) $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2$.

28. Зная, что $a+b=8\sqrt{5}$ и $ab=\frac{1}{\sqrt{5}}(a+b)$, вычислите a^2+b^2 и a^4+b^4.

29. Зная, что $x^2+y^2=25$ и $(x+y)^4-(x-y)^4=40$, вычислите xy.

30. Дано выражение
$E(x)=|-2x+7|+\sqrt{x^2}+3x-1$.
Найдите его значение при $x\le 0$.

31. Найдите наименьшее значение выражения $E(x)=9x^2+6x+5,\ x\in\mathbb{R}$.

32. ***Исследуйте!*** Докажите, что произведение трех последовательных натуральных чисел не является кубом какого-либо натурального числа.

ЗАДАЧА ДЛЯ ЧЕМПИОНОВ

33. Запишите число 2011 в виде разности квадратов натуральных чисел.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. Книга стоит x леев, а тетрадь – y леев.

а) Запишите алгебраическое выражение для вычисления стоимости 4 книг и 6 тетрадей.

б) Вычислите, сколько нужно заплатить, если $x=65$ леев, $y=2{,}4$ лея.

2. Перепишите и дополните:
$(3x-\square)^2=\square-\square+16$.

3. Разложите на множители:
а) $ab+ac+4b+4c$;
б) $(5a+7)^2-4b^2$.

4. Клумба имеет форму квадрата со стороной $(2\sqrt{27}+\sqrt{3})$ дм.

а) Найдите площадь клумбы.

б) Определите, сколько необходимо семян цветов, чтобы засеять клумбу, если на 1 дм² используется 22 г семян.

5. Запишите в виде квадрата разности:

$$19-8\sqrt{3}.$$

Вариант 2

1. Коробка конфет стоит a леев, а шоколадка – b леев.

а) Запишите алгебраическое выражение для вычисления стоимости 5 коробок конфет и 3 шоколадок.

б) Вычислите, сколько нужно заплатить, если $a=120$ леев, $b=22{,}5$ лея.

2. Перепишите и дополните:
$(\square-2x)^2=49-\square+\square$.

3. Разложите на множители:
а) $3x+3y+bx+by$;
б) $9x^2-(2y+1)^2$.

4. Участок земли имеет форму квадрата со стороной $(2\sqrt{80}-\sqrt{5})$ дм.

а) Найдите площадь участка.

б) Определите, сколько необходимо семян красной свеклы, чтобы засеять участок, если на 1 дм² используется 18 г семян.

5. Запишите в виде квадрата суммы:

$$27+10\sqrt{2}.$$

3 глава Функции

> *Мудрый человек никогда не говорит всего, что думает, но всегда думает о том, что говорит.*
>
> Аристотель

§1. Декартова система координат на плоскости

1 Действительные числа, то есть элементы множества $\mathbb{R}$, можно представить на прямой, которая называется **числовой осью**.

Для того чтобы представить элементы декартового произведения $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, нужны две перпендикулярные оси:

Рис. 1. *Декартова система координат*

Запомните

- Ось Ox называется **осью абсцисс**.
- Ось Oy называется **осью ординат**.
- Оси Ox и Oy перпендикулярны. Они делят плоскость на 4 части, называемые **координатными четвертями**.
- Точка O называется **началом** декартовой системы координат.

Запомните

2 Как можно изобразить в прямоугольной системе координат пару (a, b) множества $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$?

Объясняем

① Отмечаем на оси Ox точку $A(a)$.
② Отмечаем на оси Oy точку $B(b)$.
③ Прямая, проходящая через точку $A(a)$ параллельно Oy, пересекает прямую, проходящую через точку $B(b)$ параллельно Ox, в некоторой точке. Обозначим эту точку через M.
④ Точка M является представлением пары (a, b) на плоскости (рис. 2).

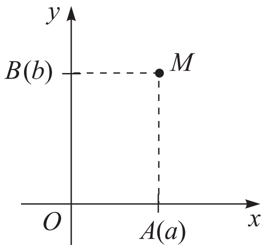


Рис. 2

Обозначаем: $M(a, b)$. *Читаем*: точка M с координатами (a, b). Координата a называется **абсциссой** точки M и всегда пишется на первом месте, а b – **ординатой** точки M.

- Изобразите в декартовой системе координат пары: (4; 3); (–3; 2,5); (4; –6); (–2; –1).

Запомните

3 Как определить координаты точки N в прямоугольной системе координат?

Объясняем

① Пусть $C(c)$ – точка, в которой прямая, проходящая через точку N параллельно оси Oy, пересекает ось Ox.

② Пусть $D(d)$ – точка, в которой прямая, проходящая через точку N параллельно оси Ox, пересекает ось Oy.

③ Пара (c, d) – координаты точки N.

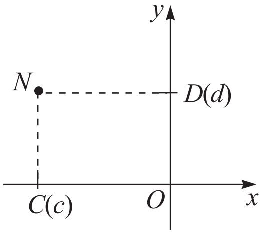
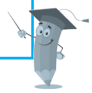


Рис. 3



- Найдите координаты точек, изображенных на рисунке.

Образец:
$E(-1; 2)$

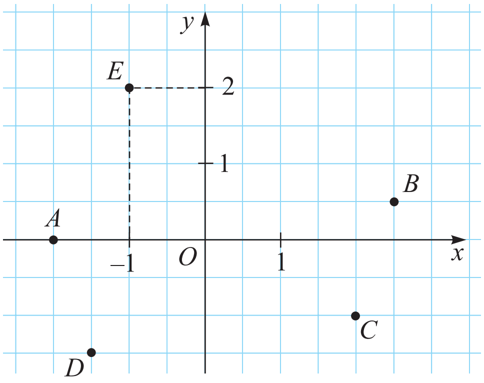


Рис. 4

4 Даны точки $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$.
Чему равны координаты середины отрезка AB?

Решаем

Пусть точка $M(m_1, m_2)$ – искомая точка (рис. 5). Тогда можно доказать, что m_1 является серединой отрезка $[a_1, b_1]$, а m_2 серединой отрезка $[a_2, b_2]$.

Таким образом, $m_1 - a_1 = b_1 - m_1$ или $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

$m_2 - b_2 = a_2 - m_2$ или $m_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}, \dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

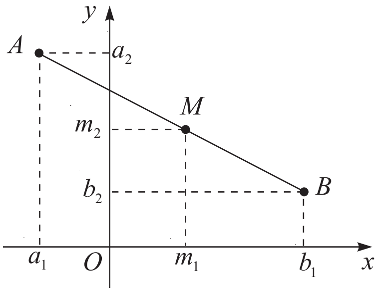


Рис. 5

Запомните

Пусть $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$. Тогда:

а) точка $M\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}, \dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$ является серединой отрезка AB;

б) $\boldsymbol{\dfrac{a_1 + b_1}{2}, \dfrac{a_2 + b_2}{2}}$ – формулы для вычисления координат середины отрезка AB;

в) $\boldsymbol{AB = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}$ – формула для вычисления расстояния между двумя точками.

Упражняемся Даны точки $A(-4; 3)$, $B(8; -2)$. Найдем:

а) координаты середины отрезка $[AB]$;

б) длину отрезка AB.

Решаем а) Пусть $M(m_1, m_2)$ – середина отрезка $[AB]$.

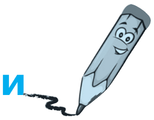
Тогда: $m_1 = \dfrac{-4+8}{2} = 2;\ \ m_2 = \dfrac{3+(-2)}{2} = 0{,}5.$

Ответ: $M(2;\ 0{,}5)$.

б) $AB = \sqrt{(-4-8)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{144+25} = 13.$

Ответ: 13 единиц длины.

Упражнения и задачи



☑ ☐ ☐

1. Начертите декартову систему координат и отметьте на ней точки:

а) $A(-4;\ 1)$; $B(0{,}5;\ 3)$; $C(7;\ -1{,}5)$; $D(-2;\ -6)$;

б) $M(3;\ 4{,}5)$; $N(9,\ -2)$; $K(-1;\ -8)$; $P(-4;\ 7)$.

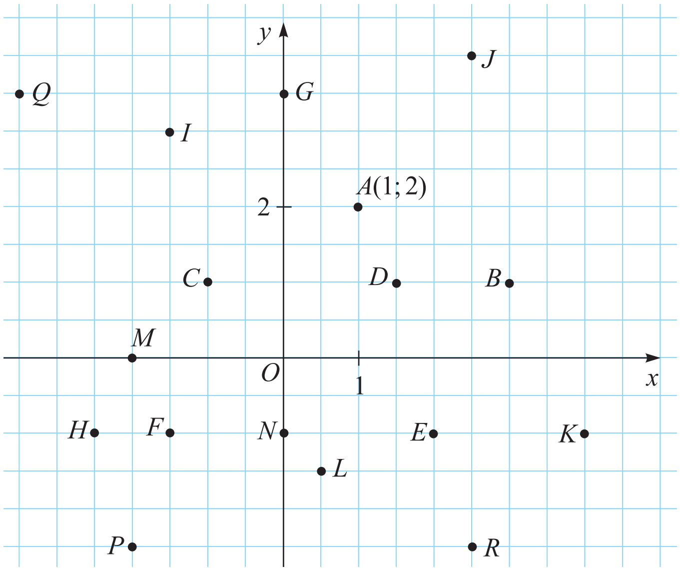
2. *Работайте в парах!*

Рассмотрите рисунок.

Найдите координаты точек:

а) B, C, D, E; б) F, G, H, I;

в) J, K, L, M; г) N, P, Q, R.



3. На плоскости начертите прямую, проходящую через точки $A(-2;\ -1)$ и $B(3;\ 1{,}5)$ в декартовой системе координат. Отметьте на прямой AB точки, абсциссы которых соответственно равны –1, 0, 1, 2. Найдите координаты этих точек.

4. На плоскости начертите прямую, проходящую через точки $M(-3;\ 4)$ и $N(4{,}5;\ -1)$ в декартовой системе координат. Отметьте на прямой MN точки, ординаты которых соответственно равны 0, 1, 2, 3. Найдите координаты этих точек.

5. *Исследуйте!* В какой четверти расположена точка $A(a,\ b)$, если:

а) $a > 0,\ b > 0$; б) $a > 0,\ b < 0$;

в) $a < 0,\ b > 0$; г) $a < 0,\ b < 0$?

6. *Исследуйте!* Что можно сказать о точках, у которых:

а) абсцисса равна 2;

б) ордината равна –4;

в) модуль абсциссы равен 3;

г) модуль ординаты равен 5?

7. Найдите длину отрезка, один конец которого лежит в начале координат, а другим является точка:

а) $A(4;\ 3)$; б) $B(-7;\ -24)$; в) $C(6;\ -8)$;

г) $D(-8;\ 15)$; д) $E(20;\ 21)$.

8. *Работайте в парах!* Найдите координаты середины отрезка AB, если:

а) $A(1;\ 3)$, $B(3;\ 5)$; б) $A(-2;\ 6)$, $B(6;\ -2)$;

в) $A(5;\ -2)$, $B(-5;\ 8)$; г) $A(-3;\ 7)$, $B(-9;\ 11)$.

☑☑☐

9. Зная, что $O(0, 0)$ – середина отрезка AB, найдите координаты точки A, если:
а) $B(3; -4)$; б) $B(-12; 10)$;
в) $B(-6; -6)$; г) $B(9; 2{,}5)$.

10. Найдите координаты вершин C и D квадрата $ABCD$, если:
а) $A(-3; 4)$, $B(1, 4)$;
б) $A(2; -3)$, $B(5, -3)$.

11. ***Работайте в парах!*** Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если:
а) $A(4{,}5; -1)$, $B(-3;\ -1)$ и $C(-3; 5)$;
б) $A(-5; 1)$, $B(3; 1)$ и $C(3; -2)$.

12. Точки A и B равноудалены от оси ординат, а отрезок $[AB]$ перпендикулярен этой оси. Найдите координаты точки B, если точка A имеет координаты:
а) $(2; \sqrt{5})$; б) $(-7{,}4; 4)$;
в) $(-0{,}6; -8{,}1)$; г) $(13; -10)$.

13. ***Работайте в группах!*** Точки M и N равноудалены от оси абсцисс, а отрезок $[MN]$ перпендикулярен этой оси. Найдите координаты точки N, если точка M имеет координаты:
а) $\left(3\frac{1}{4};\ 4\right)$; б) $(6; -5)$;
в) $(-0{,}35; 8)$; г) $(-85;\ -58)$.

☑☑☑

14. Вычислите площадь треугольника ABC, если:
а) $A(2; 6)$, $B(2; -1)$, $C(8; -1)$; б) $A(-2; 4)$, $B(-2; -5)$, $C(10; 4)$.
Указание. Дополните треугольник до прямоугольника.

§2. Понятие функции

2.1. Что такое функция?

1 В таблице даны размеры женской одежды, используемые в Европе, и соответствующие им размеры, используемые в США. Задайте аналитически соответствие между этими двумя множествами размеров.

E

EUR	36	38	40	42	44	46	48
США	10	12	14	16	18	20	22

A

Объясняем Так как каждому элементу m, $m \in E$, соответствует элемент $n = m - 26$, где $n \in A$, то можно задать множество A следующим образом: $A = \{m - 26 \mid m \in E\}$.

2 Определите соответствие между множеством $T = \{$Молдова, Румыния, Россия, Украина, Франция, Италия$\}$ и $C = \{$Бухарест, Москва, Киев, Рим, Кишинев, Париж$\}$.

Объясняем *Способ I.* Зададим соответствие с помощью таблицы:

T	Молдова	Румыния	Россия	Украина	Франция	Италия
C	Кишинев	Бухарест	Москва	Киев	Париж	Рим

Способ II. Зададим соответствие с помощью диаграммы:

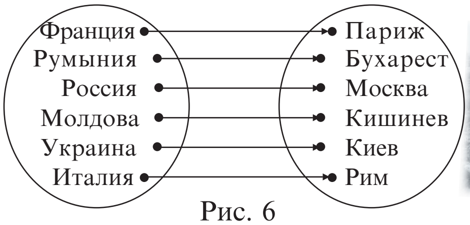


Рис. 6

3 Представьте с помощью диаграммы взаимосвязь между множествами $B = \{$мир, цирк, мотор, дерево, сыр, книга$\}$ и $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ так, чтобы каждому слову (элементу) множества B соответствовало количество букв в этом слове.

Решение:

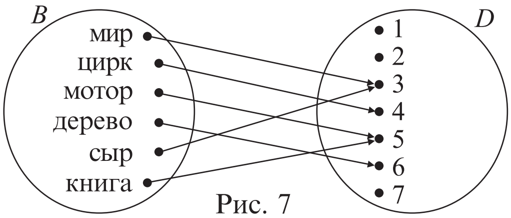


Рис. 7

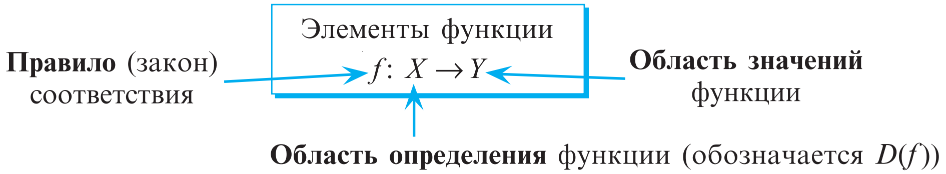
Соответствия (зависимости), рассмотренные в задачах **1**, **2** и **3**, называются **функциональными зависимостями**.

Определение Пусть X и Y – два ненулевых множества. Правило, которое каждому элементу множества X ставит в соответствие единственный элемент множества Y, называется **функцией, определенной на множестве X со значениями в множестве Y** (или **функцией из X в Y**).

Запомните Обозначение $f\colon X \to Y$ читают как «**функция f из X в Y**» или «**функция f, определенная на множестве X со значениями в множестве Y**».

Таким образом, в задачах **1**, **2** и **3** можно определить функции $f\colon E \to A$, $g\colon T \to C$, $h\colon B \to D$.

- Запомните названия элементов функции.



Элементы функции

Правило (закон) соответствия

$f\colon X \to Y$

Область значений функции

Область определения функции (обозначается $D(f)$)

Запомните Пусть дана функция $f\colon X \to Y$ и x – произвольный элемент множества X. Если $y \in Y$ и функция f ставит в соответствие элементу x элемент y, то говорят, что x – **аргумент** (или **независимая переменная**) **функции**, а y – **значение функции f в точке** x.

Обозначают $y = f(x)$ и читают «игрек равен эф от икс».

Например, значение функции $h\colon B \to D$, заданной в задаче **3**, в точке «цирк» равно 4, то есть h(цирк) = 4.

Запомните Множество $E(f) = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$ называется **множеством значений функции** f. Очевидно, что $E(f)$ – подмножество множества Y.

Например, $E(h) = \{3, 4, 5, 6\}$ является подмножеством множества D.

2.2. Способы задания функции

1 Какая из следующих диаграмм задает функцию?

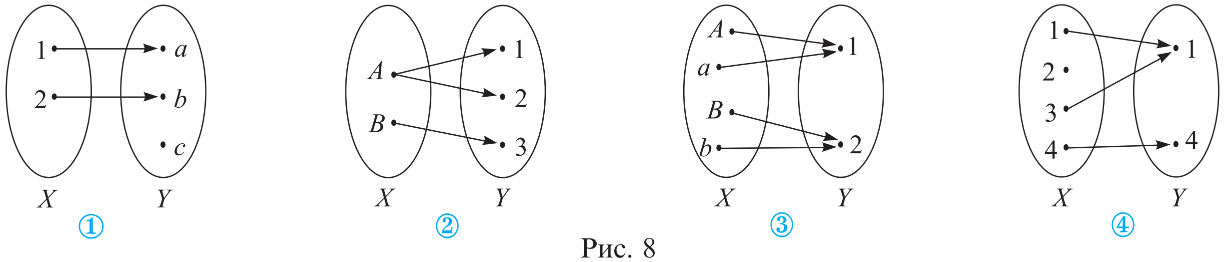


Рис. 8

Объясняем Диаграмма ① задает функцию, так как каждому элементу x области определения X соответствует единственный элемент y области значений Y.

Диаграмма ② не задает функцию, так как...

Диаграмма ③ ..., так как...

Диаграмма ④ ..., так как...

2 а) Какие из следующих таблиц задают функцию?

①

x	3	5	7	8
$f(x)$	13	15	17	18

②

x	–3	–2	–1	1	2	3
$g(x)$	3	2	1	1	2	3

③

x	A	B	C	D	E
$h(x)$	1	1	1	1	1

б) Запишите формулой каждую из функций, заданных в пункте а).

Объясняем а) Каждая из таблиц ①–③ задает функцию, так как ...

б) Функции, заданные таблицами ①–③, можно записать следующим образом:

f: $\{3, 5, 7, 8\} \to \{13, 15, 17, 18\}$, $f(x) = x + 10$.

g: $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3, \} \to \square$, $g(x) = \square$.

h: $\square \to \{1\}$, $h(x) = \square$.

Запомните

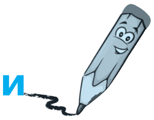
Функцию можно задать:
- ***таблицей значений*** функции;
- диаграммой;
- графиком;
- формулой;
- словесно.

синтетический способ

аналитический способ

Как правило, функция задается синтетически в тех случаях, когда ее область определения содержит небольшое количество элементов. Задание функции с помощью графика мы рассмотрим в следующем параграфе.

Упражнения и задачи



☑ ☐ ☐

1. Перечертите и заполните таблицу:

а)

Число	–3	2	0	1	5
Противоположное ему число	3				

б)

Число	–2	–1	0	1	2	3
Куб числа	–8					

2. Каждому месяцу текущего года соответствует определенное количество дней. Задает ли это соответствие функцию? Обоснуйте.

3. Каждой букве латинского алфавита ставится в соответствие ее порядковый номер расположения в алфавите. Задает ли это соответствие функцию? Обоснуйте.

4. ***Работайте в парах!*** Пусть M – множество чисел. Каждому числу $|x|$, где x из множества M, ставится в соответствие число x. Задает ли это соответствие функцию, если:

а) $M = \mathbb{N}$; б) $M = \mathbb{Z}$; в) $M = \mathbb{Q}$?

Обоснуйте.

5. Является ли функцией соответствие между фамилией и именем людей? Обоснуйте.

6. Пусть M – множество чисел. Каждому числу из множества M ставится в соответствие предшествующее ему число. Задает ли это соответствие функцию, если:

а) $M = \mathbb{N}$; б) $M = \mathbb{Z}$?

7. Пусть M – множество чисел. Каждому числу из множества M ставится в соответствие последующее ему число. Задает ли это соответствие функцию, если:

а) $M = \mathbb{N}$; б) $M = \mathbb{Z}$?

8. Прочтите:

а) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = x^2$;

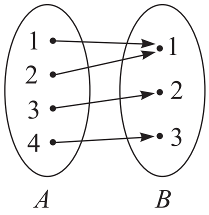
б) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ g(x) = |x|$;

в) $t\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R},\ t(x) = \sqrt{x}$;

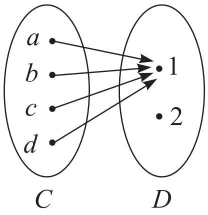
г) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 2x$.

9. ***Исследуйте!*** Какая из следующих диаграмм задает функцию?

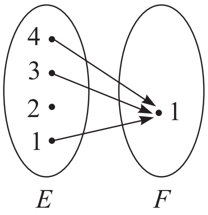
а)



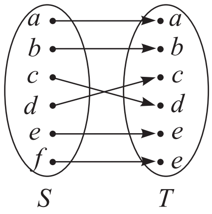
б)



в)



г)



10. ***Работайте в группах!*** Задайте аналитически функцию:

а) со значениями в множестве $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и определенную на множестве $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$, которая ставит в соответствие каждому числу противоположное ему число;

б) определенную на множестве $A = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{7}\right\}$ со значениями в множестве $B = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3, 5, 7\right\}$, которая ставит в соответствие каждому числу обратное ему число;

в) которая ставит в соответствие каждому неотрицательному действительному числу квадратный корень из этого числа;

г) которая ставит в соответствие каждому целому числу, модуль которого меньше 7, его квадрат.

11. Найдите значение функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x$, при x, равном:

а) –2,4; б) 3,5; в) $\sqrt{2}$; г) $-1\frac{5}{8}$.

☑☑☐

12. При каких значениях x значение функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$ равно:

а) 8; б) –5; в) $\sqrt{18}$; г) $3\frac{3}{4}$.

13. ***Работайте в парах!*** Составьте и заполните таблицу значений функции:

а) $f\colon \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{Q},\ f(x) = \frac{1}{x^2+1}$;

б) $f\colon \{a^2 \mid a < 6, a \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N},\ f(x) = \sqrt{x}$;

в) $f\colon \{a \mid |a| < 5,\ a \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = a + 3$;

г) $f\colon \{2a \mid -3 \le a \le 4,\ a \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = 3x$.

14. Задайте аналитически (формулой) функцию, которая задана следующей таблицей значений:

а)

0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	2	3	4	5

б)

1	2	3	4	5
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$

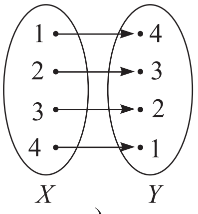
в)

–2	–1	0	1	2
–1,4	–0,4	0,6	1,6	2,6

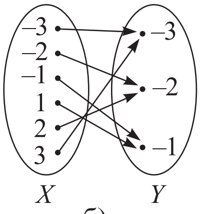
г)

0	1	2	3	4
1	2	4	8	16

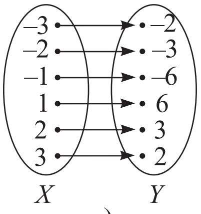
15. *Исследуйте!* Задайте аналитически функцию, которая задана диаграммой:



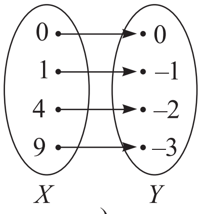
а)



б)



в)



г)

16. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = [x]$, ставит в соответствие каждому действительному числу x его целую часть (ближайшее к нему целое число, не превышающее число x). Вычислите:

а) $f(2{,}71)$, $f(0{,}49)$, $f(3\frac{5}{7})$;

б) $f(-3{,}14)$, $f(-5{,}81)$, $f(-7{,}9)$.

17. Каждому натуральному числу ставится в соответствие число, образованное последней цифрой (цифрой единиц) соответствующего числа. Задайте аналитически (с помощью формулы) это соответствие.
Указание. Используйте функцию из предыдущего задания.

§3. График функции

1 Рассмотрите и дополните:

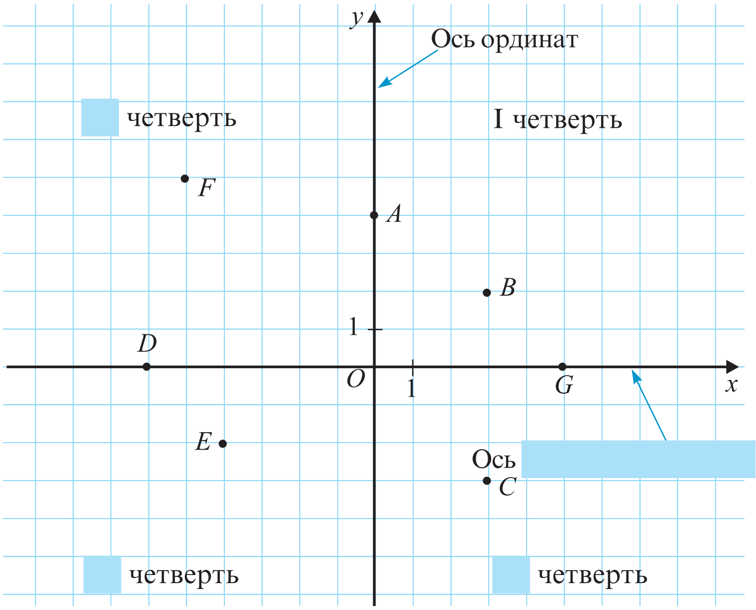


Рис. 9

Точка B имеет координаты (3; 2).

Точка G (5; 0) принадлежит оси ☐.

Точка D имеет координаты (–6, ☐).

Точка E принадлежит ☐ четверти.

Точка F принадлежит ☐ четверти.

Точка ☐ принадлежит IV четверти.

Абсцисса точки A равна ☐. Ордината точки E равна ☐.

Точки F и ☐ равноудалены от оси ☐ (рис. 9).

2 Миша провел зимние каникулы в Риме. Из любопытства он измерял температуру воздуха и результаты своих наблюдений представил в виде графика (точка O соответствует Новому году). Рассмотрите график и заполните пропуски.

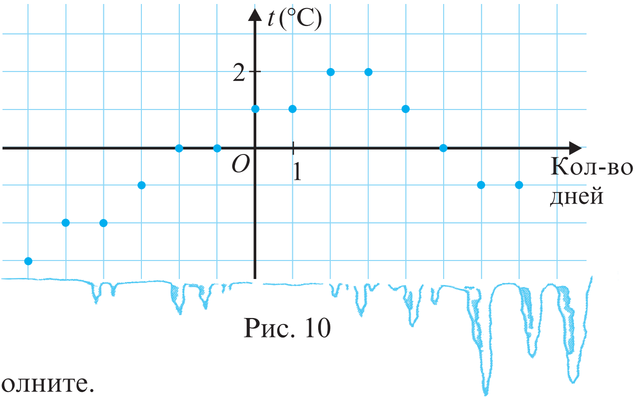


Рис. 10

- Рассмотрите график и заполните.

На Новый год температура воздуха была ___ °C.

За три дня до Нового года температура воздуха была ___ °C.

В течение ___ дней после Нового года температура воздуха повысилась на 2°C.

Температура –1 °C была зарегистрирована ___.

Спустя четыре дня после Нового года температура воздуха была ___ °C (рис. 10).

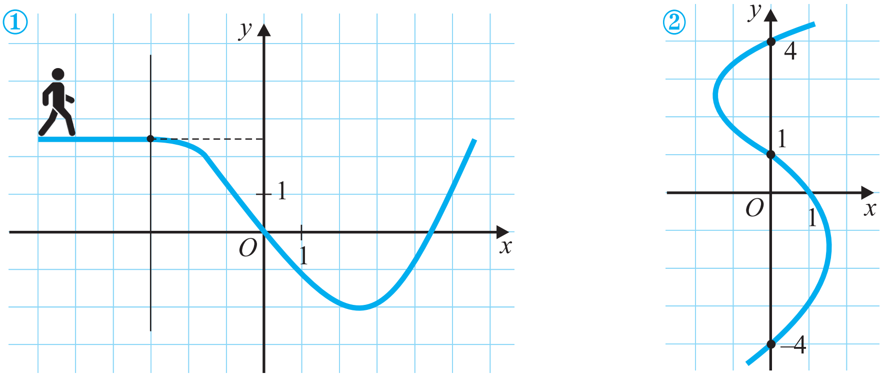
- Задает ли изображенный график функцию?

Объясняем Изображенный график задает функцию вида $f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, так как каждому числу дней (x, где $x\in\mathbb{Z}$) соответствует единственное значение температуры (y, где $y\in\mathbb{R}$).

Запомните

- Функция $f\colon X\to Y$, где X и Y – числовые множества, называется **числовой функцией**.
- **Графиком** числовой функции $f\colon X\to Y$ является фигура, образованная точками (x, y), где $x\in X$ и $y=f(x)\in Y$.
  График функции f обозначается через G_f.
  Итак, $G_f=\{(x, y)\,|\,x\in X,\ y=f(x)\in Y\}$.

3 а) Какой из следующих графиков задает функцию?
б) Как по заданному графику и по заданному значению x найти значение функции?



а) б)

Рис. 11

Объясняем а) График ① задает функцию, потому что каждому значению x соответствует единственное значение y.

График ② ▨ функцию, так как существуют значения x, которым соответствуют несколько значений y. Например, абсциссе 0 соответствуют несколько значений y: –4; 1 и 4.

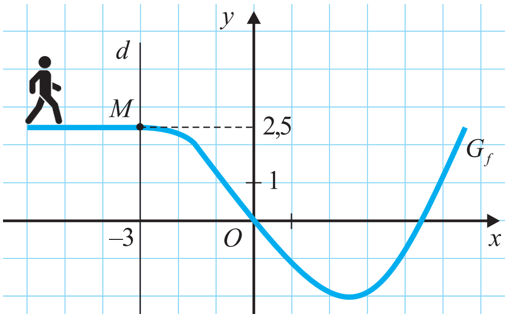


Рис. 12

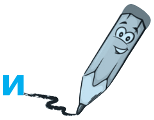
б) Обозначим через f функцию, заданную графиком ①. Найдем значение функции f в точке –3:

– строим прямую d, параллельную оси ординат, которая пересекает ось абсцисс в точке –3;

– пусть M – точка пересечения прямой d с графиком функции f.

Ордината точки M – это значение функции f в точке с абсциссой –3. Итак, $f(-3) = 2{,}5$.

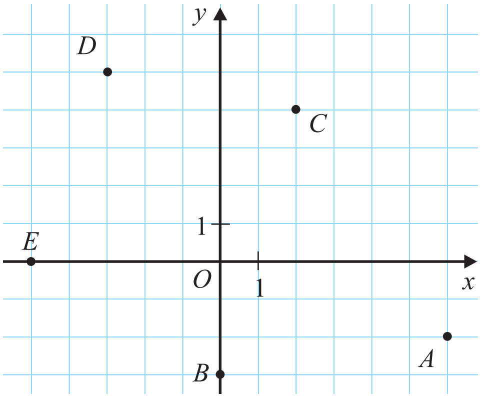
Упражнения и задачи



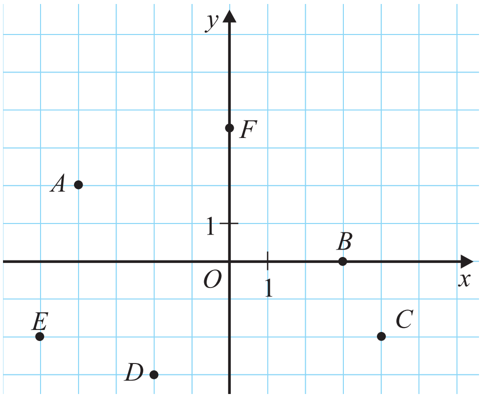
☑☐☐

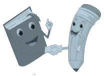
1. Запишите координаты точек, изображенных в декартовой системе координат:

а)



б)





2. ***Работайте в парах!*** Постройте декартову систему координат и отметьте в ней точки:

а) $A(-3; 5)$, $B(0; 2)$, $C(-4; 0)$, $D(3{,}5; -2)$;

б) $A(1; -2)$, $B(3; -1)$, $C(-5; -3)$, $D(1{,}5; 4)$.

3. Постройте график функции, заданной таблицей:

а)

–3	–2	–1	0	1	2	3
9	4	1	0	1	4	9

б)

–3	–2	–1	0	1	2	3
5	3	–2	0	2	–3	–5

в)

0	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	0

г)

0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
0	1	0	1	0	1	0

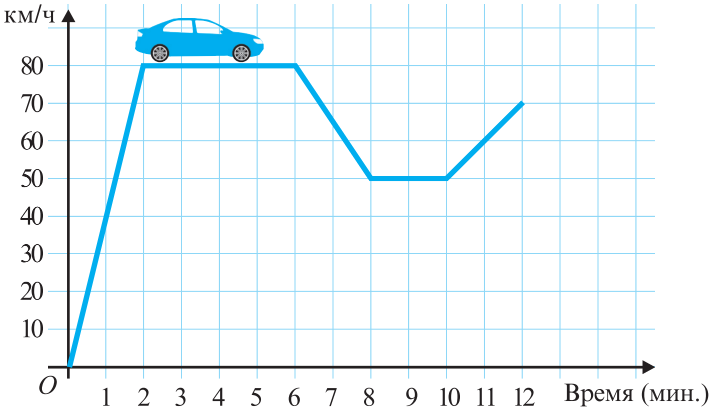
4. ***Работайте в группах!*** На рисунке изображен график скорости движения автомобиля. Используя график, определите:

а) Через сколько минут после начала движения автомобиль достиг максимальной скорости?

б) Сколько минут автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч?

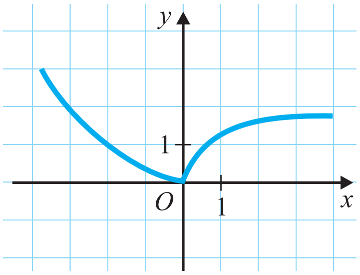
в) Какой была скорость автомобиля через 10 минут после начала движения?

г) Сколько времени автомобиль двигался со скоростью 50 км/ч?

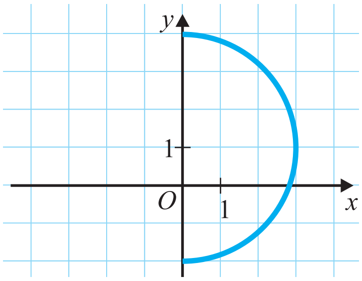


5. ***Исследуйте!*** Какой из следующих графиков задает функцию?

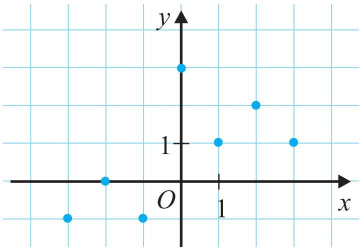
а)



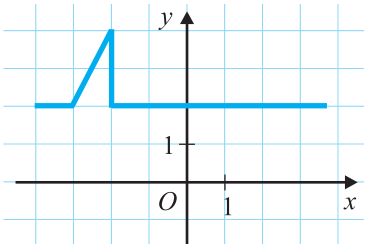
б)



в)



г)



6. ***Работайте в группах!*** Постройте таблицу значений, затем график функции:

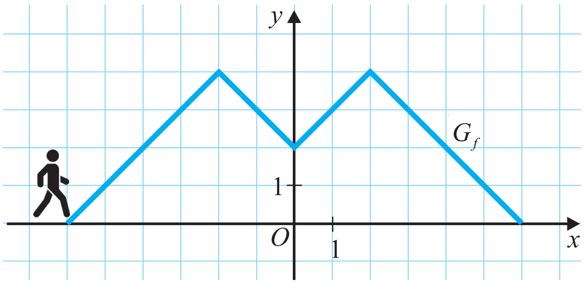
а) $f\colon \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x^2 - 3;$ б) $f\colon \{x \mid |x| \le 5,\ x \in \mathbb{Z}^*\} \to \mathbb{Q},\ f(x) = \frac{1}{x}.$

7. ***Исследуйте!***

Рассмотрите график функции f и найдите:

а) значение функции f в точках:
$-5;\ -3{,}5;\ -2;\ 1{,}5;\ 3;$

б) точки, в которых значение функции равно
$0;\ 1{,}5;\ 2;\ 3;\ 3{,}5.$



8. Постройте график функции:

а) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = 3x$;

б) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = -2x$;

в) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ f(x) = x^2$;

г) $f\colon \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q},\ f(x) = \dfrac{8}{x}$;

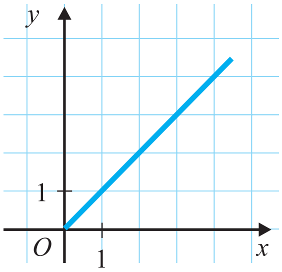
д) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4$;

е) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(x) = -1{,}5x$.

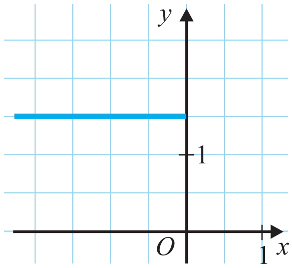
☑☑☐

9. ***Работайте в парах!***

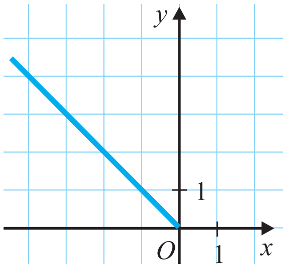
Задайте аналитически (формулой) функцию, заданную графически полупрямой:



а)



б)



в)

10. ***Исследуйте!*** Принадлежит ли точка $A(-1,\ 2)$ графику функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если:

а) $f(x) = -2x$;

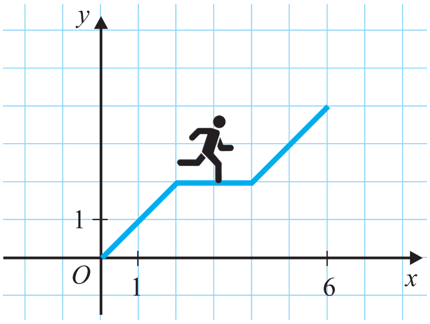
б) $f(x) = x^2 + 1$;

в) $f(x) = 3 - x$?

11. ***Работайте в группах!*** Известно, что областью определения функции f является множество $M = \{x \mid |x| \le 6,\ x \in \mathbb{R}\}$. На рисунке изображен график функции f для $0 \le x \le 6$. Перечертите и дополните график функции f для любого x из множества M, если:

а) $f(-x) = f(x)$;

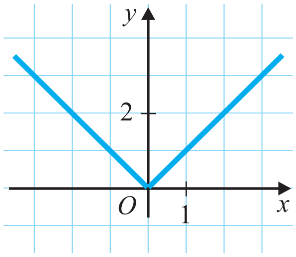
б) $f(-x) = -f(x)$.



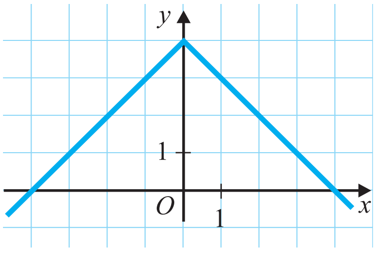
☑☑☑

12. Задайте аналитически функцию, графиком которой является объединение изображенных полупрямых:

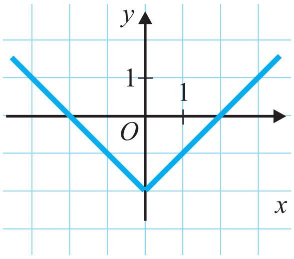
а)



б)



в)



13. Постройте график функции:

а) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(x) = (-1)^x$;

б) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x \cdot (-1)^x$;

в) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x| - 1$.

14. Постройте график функции, определенной на множестве $M = \{x \mid x < 10,\ x \in \mathbb{N}\}$, которая ставит в соответствие числу x остаток от деления числа x на 3.

15. Докажите, что окружность не является графиком ни одной функции.

§4. Функции I степени. Постоянные функции

4.1. Понятия *функция I степени* и *постоянная функция*

1 Высота бамбука 2 м. За день бамбук вырастает на 0,8 м.

а) Запишите формулу, по которой можно определить высоту бамбука через заданное количество дней.

б) Начертите таблицу и запишите в ней высоту бамбука через 0 дней, 1 день, 2 дня, 3 дня, 4 дня.

в) Представьте графически полученную функцию.

Объясняем а) За x дней бамбук вырастает на ▢ $\cdot\, x$ (метров).

Высота бамбука через x дней будет равна $h = 2 +$ ▢ $\cdot\, x$ (метров).

б)

x (дней)	0	1	2	3	4
h (м)	2	2,8	?	4,4	?

в) Получим функцию:

h: $\{0, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2 +$ ▢ x.

Построим график функции, отметив в системе координат точки (0; 2), (1; ▢), (2; ▢), (3; 4,4), (4; ▢) (рис. 13).

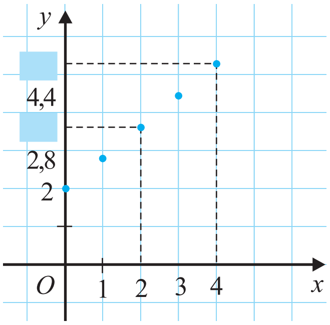


Рис. 13

Замечания Заметим, что все 5 отмеченных точек – коллинеарные (расположены на одной прямой).

2 Что представляет собой график функции $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 0{,}8x + 2$? А функции $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2$?

Решение:

Графиком функции $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 0{,}8x + 2$, является прямая (рис. 14).

Для построения этой прямой достаточно определить координаты двух различных точек, принадлежащих графику функции.

Графиком функции $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2$, является прямая, параллельная оси Ox (рис. 14).

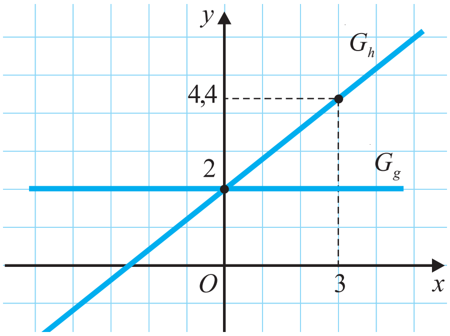


Рис. 14

Определения

- Функция вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, где $a \neq 0$ и $a, b \in \mathbb{R}$, называется **функцией I степени**.
- Функция вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b$, где $b \in \mathbb{R}$, называется **постоянной функцией**.

Запомните

Графиком функции I степени является прямая.
Графиком постоянной функции является прямая, параллельная оси абсцисс.

4.2. Свойства функции I степени

Практическая работа

а) Учитывая, что графиком функции I степени является прямая, постройте в одной системе координат графики функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 1$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = -2x + 2$.

б) Найдите координаты точек пересечения графика каждой функции с осью абсцисс; с осью ординат.

в) Определите тип угла, образованного графиком каждой функции с положительным направлением оси Ox.

г) Пусть $x_1 < x_2$. Сравните: $f(x_1)$ с $f(x_2)$; $h(x_1)$ с $h(x_2)$.

д) При каких значениях x: $f(x) > 0$; $h(x) > 0$? А $f(x) < 0$; $h(x) < 0$?

Объясняем

а) Так как любая прямая определяется двумя ее различными точками, достаточно заполнить таблицу значений функций для двух значений x.

x	0	1
$f(x)$	–1	1
$h(x)$	2	0

Точки с координатами (0, –1) и (1, 1) определяют прямую, которая является графиком функции $f(x)$ (рис. 15).

Точки с координатами (0, □) и (1, □) определяют прямую, которая является графиком функции $h(x)$ (рис. 15).

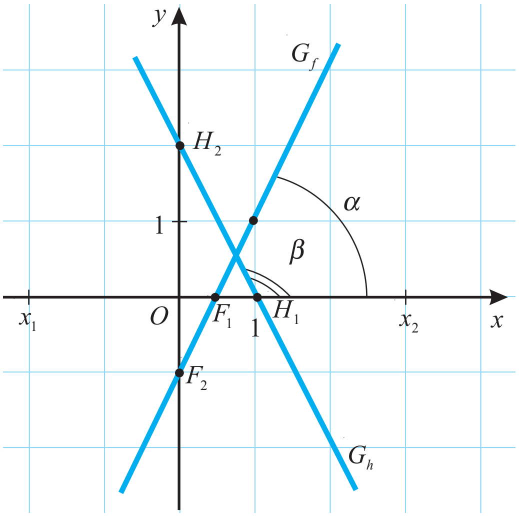


Рис. 15

б) Можно использовать график, а можно поступить следующим образом:

– Определяем точку пересечения графика с осью абсцисс:

$f(x) = 2x - 1 = 0$ или $2x = 1$.

Следовательно, $x = \frac{1}{2}$ и $F_1\left(\frac{1}{2};\, 0\right) \in G_f$.

$h(x) = -2x + 2 = 0$ или $-2x = -2$.

Значит, $x =$ □ ➔ $H_1($□$, 0) \in G_h$.

– Определяем точку пересечения графика с осью ординат:

Применив таблицу значений, получим $F_2(0; -1) \in G_f$ и $H_2(0; 2) \in G_h$.

в) Угол α, образованный графиком G_f и положительным направлением оси Ox, является острым углом.

Угол β, образованный графиком G_h и положительным направлением оси Ox, является □ углом.

г) Анализируя графики функций f и g, заметим, что для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 < x_2$, имеют место соотношения: $f(x_1) < f(x_2)$ и $h(x_1)$ ○ $h(x_2)$;

д) $f(x) > 0$ для любых $x > \frac{1}{2}$, и $h(x) > 0$ для любых $x <$ □.

$f(x) < 0$ для любых □, и $h(x) < 0$ для любых □ (рис. 15).

Запомните

Пусть дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Значение переменной x, при которой $f(x)=0$, называется **нулем** функции f.
- Если для любых $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$, выполняется соотношение:
  - а) $f(x_1) < f(x_2)$, то функция f является **строго возрастающей**;
  - б) $f(x_1) > f(x_2)$, то функция f является **строго убывающей**.

Пусть дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

- Нулем функции f является число $-\dfrac{b}{a}$.

  Для нахождения нуля функции решим уравнение $ax = -b$.
- Точкой пересечения графика функции f с осью абсцисс является точка $A(x_0;\, 0)$, где x_0 – нуль функции. Точкой пересечения графика функции f с осью ординат является точка $B(0;\, f(0))$, а в случае функции I степени – точка $B(0;\, b)$.
- Функция f является: а) строго возрастающей, если $a > 0$;

  б) строго убывающей, если $a < 0$.
- Число a называется **угловым коэффициентом** графика функции f.

4.3. Прямая пропорциональность

Важно понимать, что функции и их графики применяются в различных областях, в том числе в повседневной жизни.

Например:

В таблице зафиксировано количество электроэнергии (в киловаттах), потребленной обогревателем за определенное время работы (в часах).

Рассмотрите таблицу.

Время (ч)	0,5	1	1,5	2
Расход (кВт)	0,6	1,2	1,8	2,4

Дополните предложения:

- Время и расход электроэнергии являются прямо пропорциональными величинами, так как $\dfrac{0{,}5}{0{,}6} = \dfrac{\boxed{}}{1{,}2} = \dfrac{1{,}5}{1{,}8} = \dfrac{2}{\boxed{}}$.
- Если через x обозначить время, то $y = \boxed{} \cdot x$ – это количество киловатт, израсходованных обогревателем за x часов.
- Итак, таблица задает функцию

  $f\colon \{0{,}5;\ \boxed{}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \boxed{} \cdot x$.

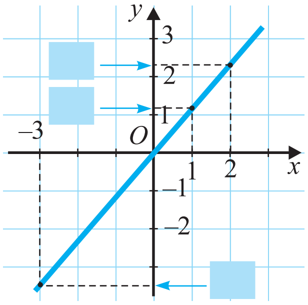


Рис. 16

График функции $f\colon \{0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1{,}2x$, состоит из четырех коллинеарных точек, а графиком функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1{,}2x$, является прямая (рис. 16).

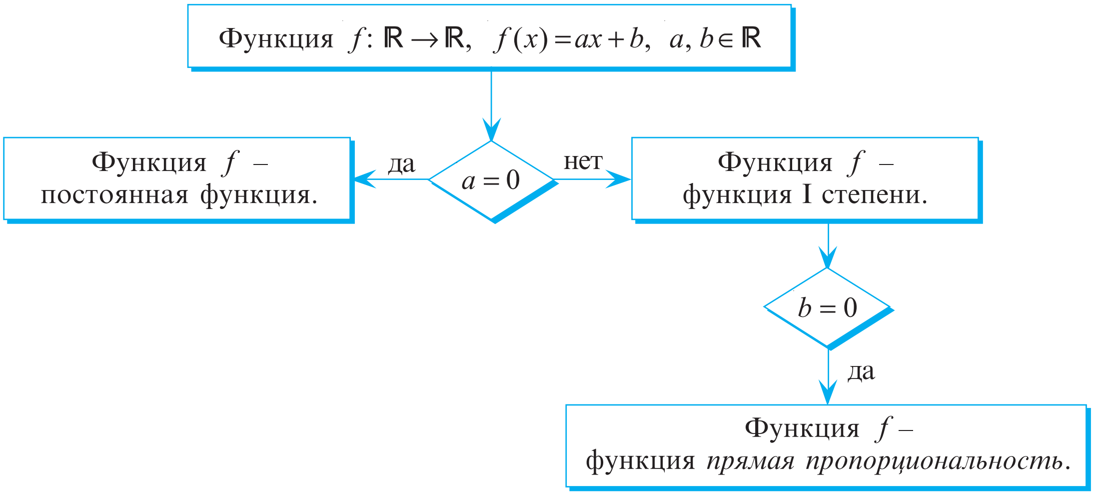
Запомните

- Функция вида $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax$, где $a \in \mathbb{R}^*$, называется **прямая пропорциональность**.
  Число a называется **коэффициентом пропорциональности**.
- Графиком функции *прямая пропорциональность* является прямая, проходящая через начало координат.

Заметим, что если в формуле функции I степени $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a \neq 0$, взять $b = 0$, то функция f станет функцией *прямая пропорциональность*.

Запомните

Следовательно, являясь частным случаем функции I степени, функция *прямая пропорциональность* обладает теми же свойствами, что и функция I степени.



- Известно, что точка $M(2, 3)$ принадлежит графику функции *прямая пропорциональность*.
  а) Постройте график этой функции.
  б) Запишите формулу, которая задает эту функцию.

Замечание Функция *прямая пропорциональность* описывает зависимость между двумя прямо пропорциональными величинами x и y. Зависимость между двумя обратно пропорциональными величинами задается функцией вида $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{k}{x}$, где $k \in \mathbb{R}^*$, которая называется **обратная пропорциональность**.

Функцию *обратная пропорциональность* мы изучим в VIII классе.

Упражнения и задачи

☑ ☐ ☐

1. Постройте график функции:

а) $f\colon \{-0{,}5;\ 0{,}5;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\} \to \mathbb{R},\quad f(x) = 2x - 1$;

б) $f\colon \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1{,}5;\ 3\} \to \mathbb{R},\quad g(x) = -2x + 1$;

в) $h\colon \left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2};\ 2;\ \frac{5}{2}\right\} \to \mathbb{R},\quad h(x) = 0{,}5x$.

2. ***Работайте в парах!*** Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Выберите формулы, которыми можно задать функцию f:

а) I степени;
б) постоянную;
в) прямая пропорциональность.

$f(x)=\frac{1}{3}x$

$f(x)=2x-4$

$f(x)=-3x$

$f(x)=\sqrt{5}$

$f(x)=\sqrt{7}x+7$

$f(x)=8x^2-1$

$f(x)=x^2$

3. Определите угловой коэффициент и постройте график функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=3x-4$;
б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x)=-1{,}5x+2$;
в) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x)=2(x+1)$;
г) $t: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t(x)=-\frac{5}{2}x$;
д) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x)=\frac{1}{2}x+1$;
е) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ q(x)=-3(1+\frac{x}{3})$.

4. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат, если:

а) $f(x)=0{,}8x+8$;
б) $f(x)=-3{,}2x-6{,}4$;
в) $f(x)=\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$;
г) $f(x)=-\sqrt{2}x+2$.

5. Задайте аналитически постоянную функцию, зная, что график этой функции пересекает ось ординат в точке:

а) $A(0;-3)$;
б) $B\left(0;\frac{1}{2}\right)$;
в) $C(0;\sqrt{3})$;
г) $O(0;0)$.

6. ***Исследуйте!*** В каких четвертях расположен график функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=121x$;
б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=-0{,}001x$;
в) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{59}}x$;
г) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=-2^{10}x$?

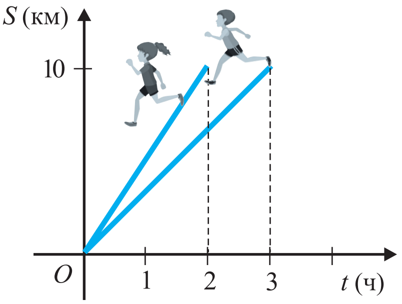
☑☑☐

7. Через какие из точек $A(-10;-6)$, $B(20;-8)$, $C(-40;4)$ проходит график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=-\frac{1}{5}x-4$?

8. В баллоне 1,6 кг жидкого газа. Газовая плита за час потребляет 0,1 кг газа. Задайте аналитически зависимость массы газа в баллоне от времени (в часах) работы плиты.

9. У Миши 20 леев. Он купил x тетрадей по 3 лея. Задайте формулой зависимость количества денег, которые остались у Миши, от количества купленных тетрадей.

10. В пустую емкость начинают наливать воду из крана со скоростью 4 литра в минуту. Емкость вмещает 20 л воды. Постройте график зависимости объема воды в емкости от времени t.



11. На рисунке изображены графики движения двух пешеходов. Скорость какого пешехода больше?

12. ***Работайте в группах!*** Запишите формулу функциональной зависимости функции I степени, если график этой функции пересекает оси координат в точках:

а) $A(0;-1)$, $B(2;0)$;
б) $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $B(-2;0)$;
в) $A(0;\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3};0)$;
г) $A(0;-4{,}5)$, $B(9;0)$.

13. ***Исследуйте!*** Пусть даны функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Определите взаимное расположение графиков этих функций, если:

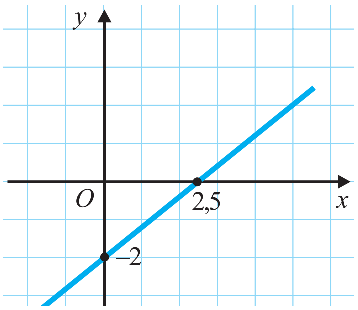
а) $f(x)=1{,}5x-1$, $g(x)=1{,}5x+2$;
б) $f(x)=2x-4$, $g(x)=3x-4$;
в) $f(x)=2{,}5x-2$, $g(x)=2{,}5x$;
г) $f(x)=-2x+1$, $g(x)=-2x-1$.

14. ***Исследуйте!*** Определите тип угла, образованного положительным направлением оси Ox и графиком функции:

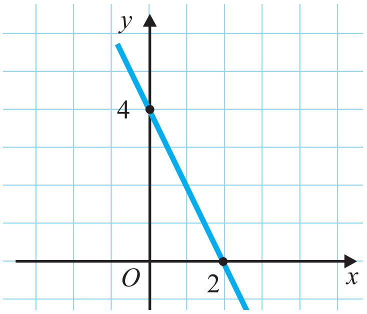
а) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+1$;
б) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}x+2$;
в) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{3}x$;
г) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-0{,}8x-1$.

15. ***Работайте в парах!*** Задайте аналитически функцию I степени, график которой изображен на рисунке:

а)



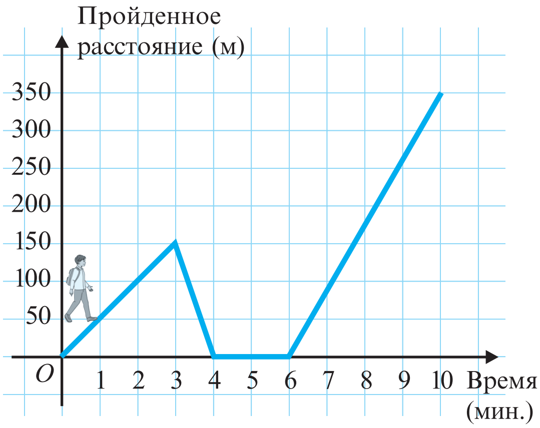
б)



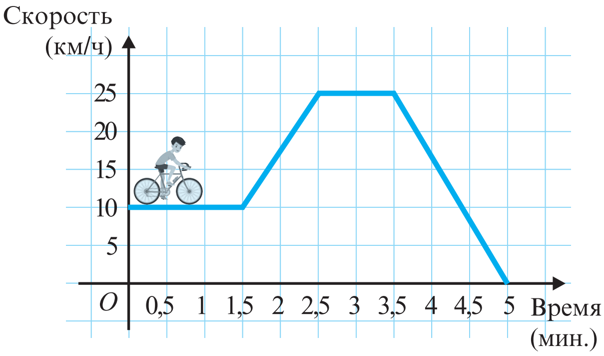
16. Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+8$.

1) Найдите нули функции f.
2) Постройте график функции f.
3) Используя график функции, определите значения x, при которых:
   а) $f(x)>0$;
   б) $f(x)<0$;
   в) f является строго возрастающей;
   г) f является строго убывающей.

17. Дима вышел из дома и пошел в школу. По пути он вспомнил, что забыл дома тетрадь с домашним заданием по математике, и вернулся. Взяв тетрадь, он снова пошел в школу. На рисунке изображен график движения Димы от дома до школы (время исчисляется в минутах, а расстояние в метрах).



1) Используя график, ответьте на вопросы:
   а) На каком расстоянии от дома Дима вспомнил о забытой тетради?
   б) Сколько времени потребовалось Диме, чтобы взять тетрадь?
   в) На каком расстоянии от дома находится школа?
   г) В какой период времени скорость движения Димы была наибольшей?
2) Постройте график расстояния от дома до школы, если бы Дима все время двигался с первоначальной скоростью, изображенной на рисунке.
3) Является ли график расстояния от дома до школы графиком прямой пропорциональности?



18. На рисунке изображен график движения велосипедиста на протяжении 5 минут (время исчисляется в минутах, а скорость в км/ч). Используя график, ответьте на вопросы:

а) Какова наибольшая скорость велосипедиста?

б) Сколько минут велосипедист двигался с постоянной скоростью?

в) В какой промежуток времени скорость велосипедиста увеличивалась?

г) В какой промежуток времени скорость велосипедиста снижалась?

д) С какой скоростью двигался велосипедист в промежуток времени [0; 1,5]?

е) А в промежуток времени [2,5; 3,5]?

19. Кристина болела 8 дней. На рисунке изображен график изменения температуры тела Кристины за 8 дней. Определите, используя график:

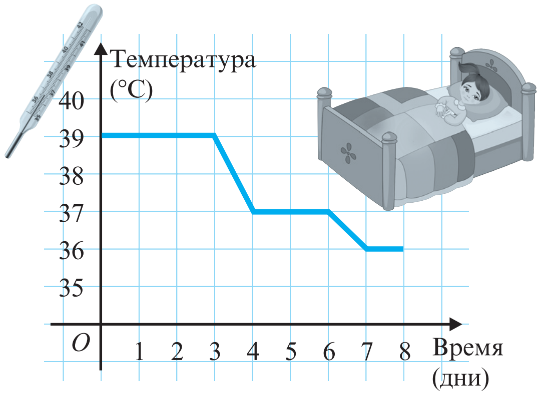
а) Какая температура была у Кристины на третий день болезни?

б) А на пятый день?

в) В какой из дней температура снизилась до 36°?

г) Какая температура была самой высокой?

д) Сколько времени продержалась температура 39°?



20. Приведите примеры приложения функций в физике, химии, биологии, экономике, истории и т. д.

21. ***Работайте в группах!*** Проект *Приложения функций в медицине*.

22. Графиком функции I степени f является прямая AB. Задайте аналитически функцию f, если:

а) $A(0; -2),\ B(1; 1)$; б) $A(0; 8),\ B(-3; 2)$.

23. Постройте график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если:

а) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{при } x<0 \\ -x+1, & \text{при } x \ge 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{при } x \le 2 \\ 6, & \text{при } x>2; \end{cases}$

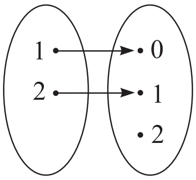
в) $f(x) = \begin{cases} -3x-1, & \text{при } x<1 \\ -4, & \text{при } x \ge 1; \end{cases}$ г) $g(x) = \begin{cases} 1{,}5-x, & \text{при } x \le -3, \\ 4{,}5, & \text{при } x>-3. \end{cases}$

21. ***Работайте в группах!*** Проект *Функции в физике*.

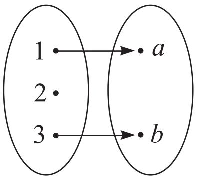
Упражнения и задачи на повторение

☑☐☐

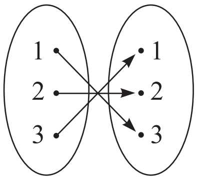
1. Какая из следующих диаграмм задает функцию?



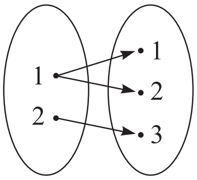
а)



б)

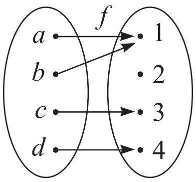


в)

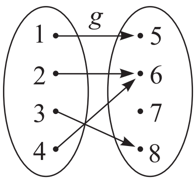


г)

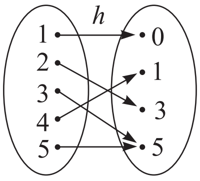
2. Найдите область определения и множество значений функции, заданной диаграммой.



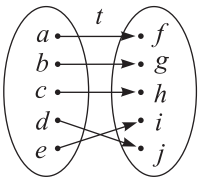
а)



б)



в)



г)

3. ***Работайте в парах!*** Рассмотрите функции, заданные в упражнении **2**, и вычислите:

а) $f(a)$, $f(c)$, $f(d)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$;

б) $h(1)$, $h(4)$, $h(5)$, $t(a)$, $t(d)$, $t(e)$.

4. ***Работайте в парах!*** Рассмотрите функции, заданные в упражнении **2**, и определите, в каких точках:

а) значение функции f равно 3, значение функции g равно 6;

б) значение функции h равно 5, значение функции t равно f.

5. Задайте таблицей функцию:

а) $f: \{1, 3, 5\} \to \{4, 10, 16\}$, $f(x) = 3x + 1$;

б) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2 \cdot |x|$;

в) $f: \{-3, -2, 1, 2, 3\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = -x$;

г) $f: \{x \in \mathbb{Z} \,|\, |x| < 4\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2 - 1$.

6. Вычислите $f(1)$, $f(3)$ и $f(5)$, если:

а) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \dfrac{1}{15}x$;

б) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = -x + 2$;

в) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 4 - x$;

г) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = |x| + 2$.

7. ***Работайте в группах!*** Запишите аналитически (с помощью формулы) функцию, которая ставит в соответствие:

а) каждому натуральному числу удвоенный квадрат этого числа;

б) каждому целому числу четверть числа, ему противоположного;

в) каждому рациональному числу число, противоположное обратному числу;

г) каждому действительному числу корень из модуля этого числа.

8. Найдите множество значений функции:

а) $f: \{-2, -1, 5, 7\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

б) $f: \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| - 1$;

в) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$;

г) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

9. ***Работайте в парах!*** Постройте график функции:

а) $f: \{x \in \mathbb{Z} \,||\, |x| \le 4\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$;

б) $f: \{x \in \mathbb{Z} \,||\, |x| \le 5\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = -2x - 1$;

в) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$;

г) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$.

10. Задайте таблицей функцию, графиком которой является множество:

а) $G_f=\{(0;\ 0),\ (1;\ 1),\ (2;\ 4),\ (3;\ 9)\}$;

б) $G_f=\{(-2;\ 2),\ (-1;\ 2),\ (0;\ 2),\ (1;\ 2),\ (2;\ 2)\}$.

11. ***Работайте в группах!*** Запишите аналитически каждую из функций, заданных в упражнении **10**.

12. Постройте график функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$, если:

а) $a=3,\ b=-1$;   б) $a=b=-2$;

в) $a=-1,\ b=3$;   г) $a=b=3$.

13. ***Работайте в парах!*** Для каждой из функций, заданных в упражнении **12**, найдите точки пересечения с осями координат и вид угла, образованного графиком функции и положительным направлением оси Ox.

14. Дополните:

а) $A\left(\frac{1}{5};\ \square\right)\in G_f$, где $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=20x$;

б) $B\left(\frac{1}{3};\ \square\right)\in G_f$, где $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-18x$;

в) $C(\square;\ -3)\in G_f$, где $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=12x$;

г) $D(\square;\ -1)\in G_f$, где $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5x$.

15. ***Исследуйте!*** Какие из следующих формул задают функцию? Обоснуйте.

а) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$;   б) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$;

в) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$;   г) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{Z},\ f(x)=x$.

16. Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Выберите формулы, которыми можно задать функцию f:

а) первой степени;

б) постоянную;

в) прямой пропорциональности.

$\boxed{f(x)=5}$

$\boxed{f(x)=\frac{1+x}{2}}$

$\boxed{f(x)=\frac{x}{4}}$

$\boxed{f(x)=0}$

$\boxed{f(x)=2(1-x)-2}$

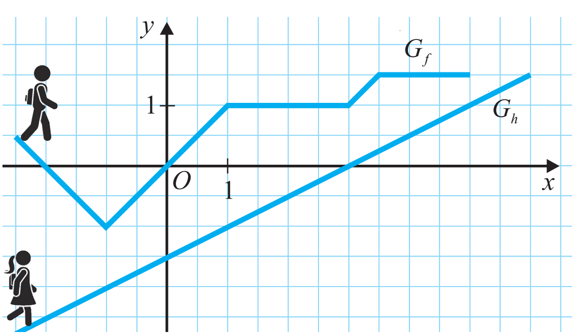
$\boxed{f(x)=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}}$

$\boxed{f(x)=x^2}$

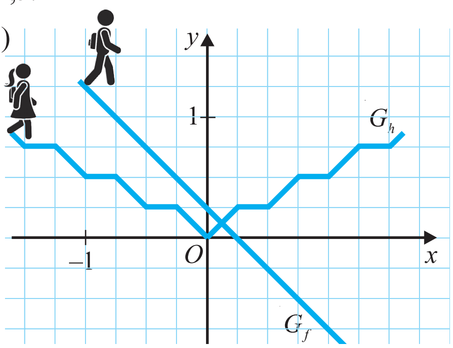
$\boxed{f(x)=\frac{4-x}{2}}$

17. ***Работайте в парах!*** Рассмотрите графики функций f и h. Вычислите значения функций f и h в точках с абсциссой, равной: –1,5; –1; –0,5; 0; 0,5; 1; 1,5.

а)



б)



☑☑☐

18. ***Работайте в группах!*** Дополните:

а) Точка $A(1;\,1)$ принадлежит графику функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\square\cdot x-1$.

б) Точка $B(-1;\,1)$ принадлежит графику функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+\square$.

в) Точка $C(\square;\,-15)$ принадлежит графику функции $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2+1$.

г) Точка $D(\square;\,3)$ принадлежит графику функции $f\colon \mathbb{R}_-\to\mathbb{R},\ f(x)=|x+2|$.

19. ***Исследуйте!*** Определите, содержит ли график функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ точки, у которых абсцисса равна ординате, если:

а) $f(x)=2x-4$; б) $f(x)=x+0{,}19$; в) $f(x)=0{,}8x-5$; г) $f(x)=|x|$.

20. ***Работайте в парах!*** Из 25 л молока можно получить 3 л сметаны.

а) Задайте аналитически функцию f, которая ставит в соответствие каждому x количество сметаны, полученной из x литров молока.

б) Вычислите $f(180)$; $f(0{,}5)$; $f(200)$.

в) При каких значениях x значение функции f равно $4{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}5$?

21. *Индивидуальный проект.* Постройте график изменения температуры воздуха утром на протяжении двух недель в населенном пункте, в котором вы живете.

22. Поговорите с родителями и вместе постройте график, используя данные их профессиональной деятельности.

☑☑☑

23. Сколько можно задать функций, для которых множество $\{1;\,2\}$ является областью определения, а множество $\{1;\,2;\,3\}$ – областью значений?

24. В таблице указаны тарифы на телефонные переговоры для двух абонементов.

Абонемент	Кол-во минут	Абонентская плата (леев)	Тариф на дополнительные минуты (банов)
Стандарт	300	24	9,6
Эконом	200	6	24

а) Задайте функции, описывающие формулы, по которым можно вычислить телефонную оплату для каждого абонемента.

б) Найдите значения функций S и E, соответствующие абонементу *Стандарт* и абонементу *Эконом*, в точках 100, 200, 250, 300, 400.

в) Для каких значений аргумента x будет верно равенство $S(x)=E(x)$? Какой вывод можно сделать, рассмотрев это равенство?

25. Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+3$.

а) Вычислите $f(f(-1))$, $f(f(2))$.

б) При каких значениях x, $f(x)=f(f(x))$?

26. ***Работайте в группах!*** Проект *Прямая пропорциональность в повседневной жизни.*

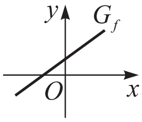
Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

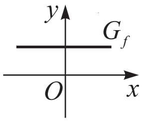
Вариант 1

1. Дана функция $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{2}{7}x + 4$.
Назовите три элемента функции f.

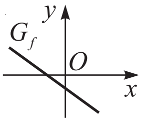
2. На рисунке изображен график функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$.



①



②



③

а) Дополните одним из терминов «функция I степени», «постоянная функция»:
- в ① изображен график ;
- в ② изображен график ;
- в ③ изображен график .

б) Сравните с нулем числа m и n.

3. а) Дополните так, чтобы получить функцию прямой пропорциональности с положительным коэффициентом

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \boxed{}\,x.$$

б) Определите вид угла, образованного графиком функции f и положительным направлением оси Ox.

4. Запишите формулу, которая выражает зависимость времени t от скорости v, зная, что пройденный путь равен s. Является ли эта зависимость прямо пропорциональной? Обоснуйте.

5. Постройте график функции
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 6$.

а) Найдите нули функции f.

б) Определите знак функции f, используя график.

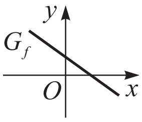
в) Установите, функция f является строго возрастающей или строго убывающей.

г) Укажите угловой коэффициент графика функции f.

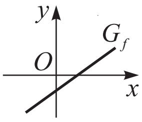
Вариант 2

1. Дана функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2\sqrt{x} - 3$.
Назовите три элемента функции g.

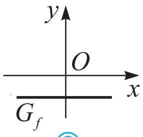
2. На рисунке изображен график функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$.



①



②



③

а) Дополните одним из терминов «функция I степени», «постоянная функция»:
- в ① изображен график ;
- в ② изображен график ;
- в ③ изображен график .

б) Сравните с нулем числа m и n.

3. а) Дополните так, чтобы получить функцию прямой пропорциональности с отрицательным коэффициентом

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \boxed{}\,x.$$

б) Определите вид угла, образованного графиком функции g и положительным направлением оси Ox.

4. Запишите формулу, которая выражает зависимость времени t от расстояния s, зная скорость v. Является ли эта зависимость прямо пропорциональной? Обоснуйте.

5. Постройте график функции
$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 4$.

а) Найдите нули функции g.

б) Определите знак функции g, используя график.

в) Установите, функция g является строго возрастающей или строго убывающей.

г) Укажите угловой коэффициент графика функции g.

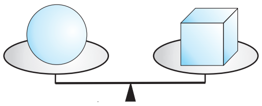
4 глава

Уравнения и неравенства

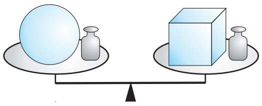
Математика – это язык и наука.
Лучиан Блага

§1. Понятие уравнения. Повторение и дополнения

- Рассмотрите и прокомментируйте.



$a=b$



$a+c=b+c$

$$\begin{tikzcd}
 & & a=b,\ a,b\in\mathbb{R} \arrow[dll, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\text{①}\ a+c=b+c,\ c\in\mathbb{R} & \text{②}\ a-c=b-c,\ c\in\mathbb{R} & \text{③}\ ac=bc,\ c\in\mathbb{R}^* & \text{④}\ \frac{a}{c}=\frac{b}{c},\ c\in\mathbb{R}^*
\end{tikzcd}$$

Запомните Эти отношения называются отношениями равенства на множестве действительных чисел.

1.1. Уравнения с одним неизвестным

1 Предприниматель планировал продать 600 кг апельсинов по цене 15 леев за килограмм. Однако при транспортировке 100 кг апельсинов испортилось. На сколько леев должен поднять цену предприниматель, чтобы получить намеченную прибыль?

Объясняем Пусть цену нужно поднять на x леев, тогда:

$$\boxed{(15+x)\cdot 500=15\cdot 600}$$

неизвестное уравнение с одним неизвестным

$(15+x)\cdot 500=9000$

$15+x=9000:\boxed{}$ ④

$x=\boxed{}$ ②

Ответ: На $\boxed{}$ леев.

Определение Равенство вида $A(x)=B(x)$, где $A(x)$ и $B(x)$ – выражения от x, называется **уравнением с одним неизвестным**.

Левая часть уравнения $\longrightarrow A(x) = B(x) \longleftarrow$ Правая часть уравнения

2 Является ли число **–1** решением следующих уравнений:

а) $7x+5=2(x+1)$;

б) $(y+1)(y-\sqrt{3})=0$;

в) $t^2+1=0$;

г) $2(z+1)-7=2z-5$?

***Образец*:**
$3x+5=2(2x+3)$
$3\cdot(-1)+5=2\cdot[2\cdot(-1)+3]$
$2=2$ – верно.
Ответ: Число –1 – решение данного уравнения.

Определение **Решением** уравнения с одним неизвестным называется значение неизвестного, при котором уравнение обращается в истинное равенство.

Итак, x_0 – решение уравнения $A(x)=B(x)$, если верно высказывание $A(x_0)=B(x_0)$.

Запомните

- **Решить уравнение** – значит, найти множество его решений.
- Множество решений уравнения, как правило, обозначают буквой S.
- Уравнение на заданном числовом множестве может иметь одно решение, конечное множество решений, бесконечное множество решений, не иметь решений.

Например, уравнение $(x+1)(x-\sqrt{3})=0$ на множестве $\mathbb{R}$ решается следующим образом: $x+1=0$ или $x-\sqrt{3}=0$

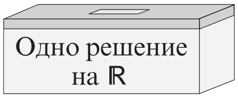
$x=-1$ или $x=\square$.

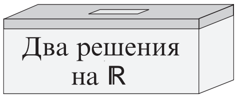
$S=\{\square\}$

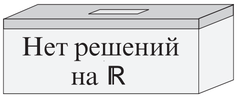
• Решите уравнение на множестве $\mathbb{Q}$, затем на множестве $\mathbb{N}$.

3 Определите, в какой из ящиков нужно отправить каждое из уравнений:

$3x+5=2(2x+3)$, $(x+1)(x-\sqrt{3})=0$, $x^2+1=0$, $2(x+1)-7=2x-5$.







• Что изменится, если на табличках заменить $\mathbb{R}$ на $\mathbb{N}$?

1.2. Равносильные уравнения

1 Рассмотрите и дополните так, чтобы получить решение уравнения на множестве $\mathbb{R}$:

$2-(x-4)-3x=7 \Leftrightarrow -x-3x=\square+7 \Leftrightarrow -4x=\square \Leftrightarrow x=\square$

Ответ: $S=\{\square\}$.

Чтобы решить уравнение, его заменяют более простым равносильным уравнением.

Определение Два **уравнения** называются **равносильными** (**эквивалентными**), если множества их решений совпадают.

Между равносильными уравнениями пишут знак $\Leftrightarrow$ (читается: «равносильно» или «эквивалентно»).

При замене уравнения равносильным ему уравнением применяют правила, основанные на свойствах отношения равенства:

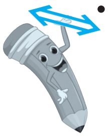
1^* В уравнении можно переносить слагаемое из одной части в другую, изменив при этом его знак на противоположный.
2^* Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число.

Применяем

$$5(7-2x)=15(x-1)\overset{2^*}{\Leftrightarrow}7-2x=3\cdot(x-1)\Leftrightarrow 7-2x=3x-\square\overset{1^*}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -3x-2x=\square-\square\Leftrightarrow -5x=\square\overset{2^*}{\Leftrightarrow}x=\square.$$

Ответ: $S=\{\square\}$.



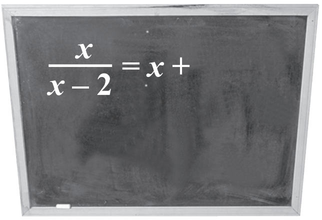
- Между какими парами уравнений можно поставить знак $\Leftrightarrow$? Объясните ответ.

а) $3(x-8)=9x$ ○ $x-8=3x$;   б) $4x-3=x+2$ ○ $4x-x=2+3$;
в) $x(x-1)=2x$ ○ $x-1=2$;   г) $2x+7=2-3x$ ○ $2x+3x=7-2$.

Запомните

Преобразования, приводящие к получению равносильных уравнений, называются **равносильными преобразованиями**.

1.3. Область допустимых значений (ОДЗ) уравнения



- На доске было записано уравнение, но перед уроком часть его случайно стер дежурный.

Учитель посмотрел на оставшуюся часть и спросил:

– Могло ли число 2 быть решением данного уравнения?

Объясняем При $x=2$ выражение $\dfrac{x}{x-2}$ не имеет смысла, поэтому число 2 не могло быть решением этого уравнения.

Определение Множество значений x, при которых имеют смысл выражения $A(x)$ и $B(x)$ уравнения $A(x)=B(x)$, называется **областью допустимых значений (ОДЗ)** этого уравнения.

Уравнения решают на их ОДЗ.

- Рассмотрите и дополните:

$\boxed{2x-3=5}\longrightarrow$ ОДЗ: $\mathbb{R}$

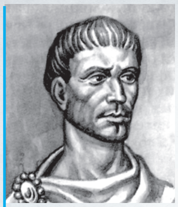
$\boxed{2(x-7)=4}\longrightarrow$ ОДЗ: $\square$

$\boxed{\dfrac{2}{x+1}=1}\longrightarrow$ ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$\boxed{\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{2}{x+5}}\longrightarrow$ ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{\square;\square\}$

$\boxed{\dfrac{3}{\square}=6}\longrightarrow$ ОДЗ: $\mathbb{R}^*$

Из истории

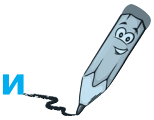


Диофант Александрийский (III в. до н. э.)

Впервые обозначил буквой неизвестную величину древнегреческий математик Диофант Александрийский. Первое описание преобразований уравнений встречается в трудах арабского математика аль-Хорезми. Перенесение слагаемых из одной части в другую аль-Хорезми называл «уничтожением» и «восстановлением». «Восстановление» по-арабски – **аль-джебр**. От этого слова и произошло название *алгебра*.

Аль-Хорезми (787–850 гг.)

Упражнения и задачи



☑☐☐

1. Запишите в виде равенства предложение:
а) Число 20 на 8 больше, чем число x.
б) Число x в три раза меньше числа $x+2$.
Как называются полученные равенства?

2. Отметьте букву, соответствующую правильному ответу.
Число –2 является решением уравнения:

A $x^2+4=0$. **B** $(x-2)^2=-4$.
C $(x+1)(x+2)=0$. **D** $-4x=-8$.

3. Покажите, что:
а) число 4 является решением уравнения $3(x-1)=5+x$;
б) число –1 не является решением уравнения $7x+2=5x^2$.

4. *Работайте в парах!* Какие из элементов множества $M=\{0;\ 1;\ -1;\ 2\}$ являются решением уравнения:
а) $x(x+2)=0$; б) $x^2-1=0$?

5. Сколько решений имеет уравнение $3x-1=7$:
а) на множестве $\mathbb{R}$;
б) на множестве $\mathbb{Z}$?

6. Сколько решений имеет уравнение $\sqrt{3}\cdot x-3=0$:
а) на множестве $\mathbb{R}$;
б) на множестве $\mathbb{Q}$?

7. *Работайте в парах!* Дополните так, чтобы множеством решений уравнения

$$2x+1=2x+\square$$

являлось: а) $S=\varnothing$; б) $S=\mathbb{R}$.

8. *Исследуйте! Истинно* или *Ложно*?
а) $2x-9=x \Leftrightarrow 2x+x=9$;
б) $12(3+x)=8x \Leftrightarrow 3(3+x)=4x$;
в) $5x+1=x-1 \Leftrightarrow 5x-x=0$;
г) $(x+1)(x+2)=2(x+1) \Leftrightarrow x+2=2$.

9. Найдите ОДЗ уравнения:
а) $\dfrac{2}{x}+3=1$; б) $x-4=\dfrac{48}{3x-12}$;
в) $x^2-x=0$; г) $\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{1}{x-1}$.

☑☑☐

10. Определите количество решений уравнения на множестве:
а) $8x+2=0$;
б) $x+4=x-2$;
в) $(x+1)\cdot 2=2x+2$.

11. Запишите в виде равенства:
а) Среднее арифметическое чисел 7 и x равно их произведению.
б) Число x составляет 12 % от числа 25.

12. Используя верное равенство $5\cdot 2-3=3\cdot 2+1$, составьте уравнение, множество решений которого $S=\{2\}$.

13. *Работайте в парах!* Дополните так, чтобы полученное уравнение:
а) не имело решений на множестве $\mathbb{Z}$, но имело решения на множестве $\mathbb{Q}$.
б) имело решения на множестве $\mathbb{R}$, но не имело решений на множестве $\mathbb{Q}$.

$$\square\, x=18.$$

14. Дополните так, чтобы получить уравнение, равносильное данному:
а) $\dfrac{2x-1}{3}=x \Leftrightarrow 2x-1=\square$;
б) $2x-(6x-5)=45 \Leftrightarrow 2x-6x=\square$.

15. Найдите ошибку в решении: $7x-14=5x-10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 7(x-2)=5(x-2) \Leftrightarrow 7=5$ – ложно.
Ответ: $S=\varnothing$.

16. Дано уравнение $|x|=x$ на множестве $\mathbb{R}$.
а) Является ли число 7 решением этого уравнения?
б) А число –7?
в) Найдите множество решений этого уравнения.

17. *Работайте в группах!*
Найдите ОДЗ уравнения:
а) $\dfrac{x}{x^2-1}=2$; б) $\sqrt{x}+1=3$;
в) $\dfrac{2}{x^2+4}=1$; г) $\dfrac{4}{|x|}=1$.

☑☑☑

18. Дополните так, чтобы множеством решений полученного уравнения являлось:
а) $S=\{1\}$; б) $S=\{0\}$;
в) $S=\{-1\}$; г) $S=\varnothing$.

$$4x-3=3x+\boxed{}.$$

19. Составьте уравнение, множество решений которого:
а) $S=\varnothing$; б) $S=\mathbb{R}$;
в) $S=\{\sqrt{2}\}$; г) $S=\{0;-2\}$.

20. Составьте уравнение, которое имеет одно решение на множестве $\mathbb{R}$, но не имеет решений на множестве $\mathbb{Q}$.

21. Составьте уравнение, которое имеет одно решение на множестве $\mathbb{Q}$, но не имеет решений на множестве $\mathbb{Z}$.

22. Отметьте букву, соответствующую правильному ответу.
Множеством решений уравнения $|x|=-x$ является:
A. $S=\varnothing$; **B.** $S=\mathbb{R}_+$;
C. $S=\mathbb{R}_-$; **D.** $S=\mathbb{R}^*_-$.

23. ***Исследуйте!*** Определите, равносильны ли уравнения:
а) $x^2=9$ и $x=3$; б) $|x|=2$ и $x=2$;
в) $|x|=0$ и $x=0$; г) $x^2=4$ и $|x|=2$.

Занимательная математика

24. Почему при любом значении x значение выражения $3(2x-8)-4(1{,}5x-8{,}5)$ одно и то же?

§2. Уравнение I степени с одним неизвестным

2.1. Решение уравнений I степени с одним неизвестным


Пифагор

1 Однажды на вопрос: «Который час?» греческий математик и философ Пифагор ответил: «До конца суток осталось дважды по $\frac{2}{5}$ от времени, которое уже прошло». Который был час?

Объясняем Пусть от начала суток прошло x часов. Тогда до конца суток осталось $2\cdot\frac{2}{5}x=\frac{4}{5}x$ часов. Итак, $x+\frac{4}{5}x=\frac{9}{5}x$ – составляют сутки. Значит, $\boxed{\frac{9}{5}x=24}$ ↑ уравнение I степени с одним неизвестным

$$\frac{9}{5}x=24 \quad\Leftrightarrow\quad x=24:\frac{9}{5} \quad\Leftrightarrow\quad x=\boxed{}.$$

Ответ: $\boxed{}$ часов и $\boxed{}$ минут.

Запомните

$\boxed{ax+b=0,\ \ a,b\in\mathbb{R},\ \ a\neq 0}$ ← **уравнение I степени с одним неизвестным** (общий вид)

коэффициент при неизвестном

свободный член

неизвестное

Уравнение $ax+b=0$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, имеет единственное решение: $-\frac{b}{a}$.

Значит, $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

- Дополните:

$\boxed{3x-2=0}$ ↓ $S=\{\boxed{}\}$

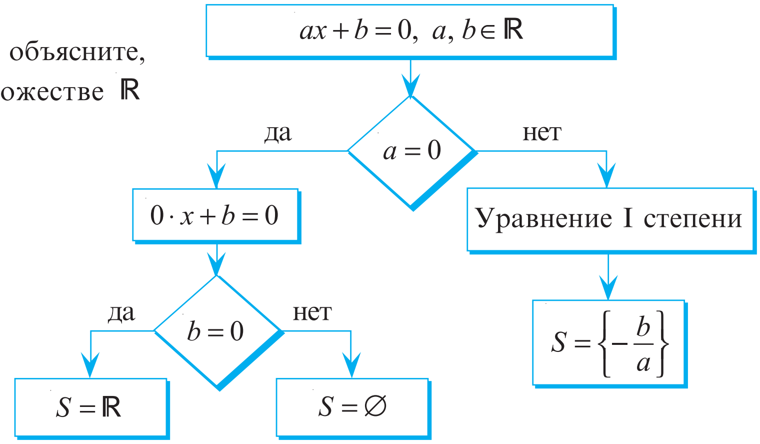
$\boxed{\frac{1}{2}x+1=0}$ ↓ $S=\{\boxed{}\}$

$\boxed{\frac{2}{5}x-\frac{3}{4}=0}$ ↓ $S=\{\boxed{}\}$

$\boxed{-0{,}1x+8=0}$ ↓ $S=\{\boxed{}\}$

Работайте в парах!

- Рассмотрите схему и объясните, как решается на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $ax+b=0$.



2 Бутылка, наполненная растительным маслом, весит 800 г. После того как ее опустошили наполовину, она стала весить 425 г. Сколько весит пустая бутылка?

Решение:

Пусть x г – вес пустой бутылки, тогда $(800-x)$ г – вес масла в полной бутылке.

Значит, $x+\dfrac{800-x}{2}=425 \Leftrightarrow 2x+800-x=850 \Leftrightarrow 2x-x=850-\boxed{} \Leftrightarrow x=\boxed{}$.

Ответ: $\boxed{}$ г.

Упражнения и задачи

☑ ☐ ☐

1. а) Выберите уравнения I степени с одним неизвестным.
б) В каждом из выбранных уравнений назовите коэффициент при неизвестном и свободный член.

$-2x=2$ $3x+5=0$ $\dfrac{5}{x}+1=0$

$2x^2-6=0$ $\dfrac{x}{5}-1=0$ $0\cdot x=2$

2. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $7x=21$;   б) $9x=3$;
в) $5x-\dfrac{2}{3}=0$;   г) $4x-\dfrac{1}{7}=0$;
д) $\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}=0$;   е) $0{,}2x-10=0$;
ж) $-10x+0{,}2=5$;   з) $24x+1=9$.

3. ***Работайте в парах!*** При каких действительных значениях переменного равны выражения:
а) $3x+2$ и $2x-1$;
б) $2{,}5y-4$ и $5y+2{,}4$;
в) $3z+4$ и $3-2z$;
г) $\sqrt{2}-7x$ и $2x-2\sqrt{2}$?

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $5x+4=25-2x$;   б) $2z-4=8-z$;   в) $6{,}5y-15=4y+3{,}4$;
г) $3x-35=7x-28$;   д) $5(x-7)=3(x-4)-13$;   е) $3(2z+7)+4=5(z-3)$;
ж) $\dfrac{4}{5}x-2=2\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{5}$;   з) $2\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{6}=2\dfrac{1}{3}x+1$;   и) $-2x=3(x-5)+6$.

5. Найдите нули функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, если:
а) $f(x)=2x+1$;   б) $f(x)=3-5x$;   в) $f(x)=\sqrt{10}x$;   г) $f(x)=\dfrac{1}{2}x-7{,}2$.

6. Найдите ОДЗ выражения:
а) $E(x)=\dfrac{x}{3x+0{,}2}$;   б) $E(x)=\dfrac{1-x}{\frac{2}{3}x-5}$;   в) $E(x)=\dfrac{3x}{2{,}8-0{,}1x}$.

☑☑☐

7. ***Работайте в парах!*** Продолжите решение:

а) $\frac{3x-1}{5}-\frac{5x+1}{6}=\frac{x+1}{8}-3 \Leftrightarrow 24\cdot(3x-1)-20\cdot(5x+1)=\square\cdot(x+1)-3\cdot 120 \Leftrightarrow \ldots$

б) $\frac{4x+1}{3}-\frac{3x-1}{5}=15-\frac{25-x}{4} \Leftrightarrow 20\cdot(4x+1)-\square(3x-1)=15\cdot 60-\square\cdot(25-x) \Leftrightarrow \ldots$

8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\frac{8x-1}{5}-1=\frac{50-2x}{9}+\frac{3x+3}{4}$;

б) $\frac{3y+1}{3}-\frac{16-y}{6}-\frac{9y+1}{7}=3$.

9. При каком действительном значении x значение выражения $8x+3$ в три раза больше значения выражения $5x-6$?

10. При каком действительном значении x значение выражения $3x+2$ составляет 25 % от значения выражения $x+15$?

11. ***Работайте в группах!*** Дополните так, чтобы полученное уравнение имело множество решений $S=\{2\}$:

а) $\square\, x-4=12$;

б) $3x+\square=15$;

в) $-5x+8=\square$;

г) $4x+\square=x+1$.

12. ***Работайте в группах!*** Пусть S_1 – множество решений уравнения $(4x+1)-(7x+3)=x$, а S_2 – множество решений уравнения $12x-9=\square+5$.

а) Найдите множество S_1.

б) Дополните так, чтобы $S_1=S_2$.

в) Дополните так, чтобы $S_2=\varnothing$.

г) Дополните так, чтобы $S_2=\mathbb{R}$.

13. Запишите каждое предложение в виде уравнения и решите его на множестве $\mathbb{R}$:

а) Если число x увеличить на 12 %, то получим число 56.

б) Если число x уменьшить на 30 %, то получим число 28.

в) Число $3x$ на 10 больше числа x.

г) Разность чисел 15 и $2x$ в 6 раз больше, чем $\frac{1}{2}x$.

14. ***Работайте в парах!*** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $(x-3)(x+4)-2(3x-2)=(x-4)^2$;

б) $(x+5)(x+2)-3(4x-3)=(x-5)^2$;

в) $x(x+2)-13=(x-3)(x+3)$;

г) $4x(x-1)=(2x+5)(2x-5)+1$.

15. Запишите уравнение I степени с одним неизвестным, множеством решений которого является:

а) $S=\{2\}$;

б) $S=\varnothing$;

в) $S=\mathbb{R}$.

16. Запишите уравнение I степени с одним неизвестным, множеством решений которого является множество решений уравнения:

а) $(4x+2)-(7x+1)=x-1$;

б) $6-3(2x-1)=-8x+1$;

в) $-5+2(2-x)=-3x$;

г) $1{,}8(x-5)-5{,}8x=4x+6$.

☑☑☑

17. Запишите в рамку такое действительное число, чтобы множеством решений уравнения $\square\, x+5=0$ было бы множество:

а) $S=\{5\}$;

б) $S=\{-10\}$;

в) $S=\varnothing$;

г) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

18*. При каких действительных значениях параметра m уравнение имеет одно решение? Найдите это решение, если:

а) $mx=4$; б) $(m+1)x+2=0$; в) $(m-3)x=0$.

19*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $|x|-2=0$;

б) $|y|+\sqrt{13}=0$;

в) $|x-2|=3$;

г) $|2x+1|=0$;

д) $|x-0{,}2|=3$;

е) $|4-x|=12{,}3$;

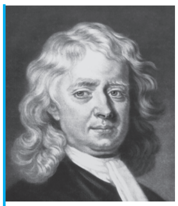
ж) $|2x+\sqrt{7}|=-5$;

з) $\left|\frac{1}{2}x+3\right|=25$.

Указание. Рассмотрите два случая: I – когда выражение под знаком модуля отрицательно, и II – когда это выражение неотрицательно.

20. ***Работайте в группах!*** Проект *Приложение уравнений I степени в различных областях*.

§ 3. Решение задач на составление уравнений



Исаак Ньютон (1643–1727 гг.)

В своем учебнике по алгебре Исаак Ньютон, известный английский математик и физик, писал: «Чтобы решить вопрос, относящийся к числам или некоторым отношениям величин, нужно лишь перевести задачу с родного языка на алгебраический язык».

Давайте последуем совету великого ученого.

1 На солнышке грелось несколько котят. Количество лап у этих котят на 10 больше количества ушей. Сколько котят грелось на солнышке?

	На математическом языке
На солнышке грелось несколько котят.	x
Количество лап у этих котят	$4x$
Количество ушей у этих котят	$2x$
Количество лап на 10 больше количества ушей	$2x+10=4x$

Решим полученное уравнение:

$2x+10=4x \Leftrightarrow \square\, x=\square \Leftrightarrow x=\square$

Ответ: $\square$ котят.

Запомните

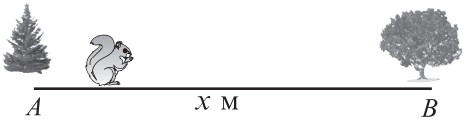
Результатом «перевода» задачи на математический язык является математическая модель задачи.

«Перевести» условие задачи на математический язык можно по-разному, поэтому и решения могут быть различными.

2 За 20 минут белка приносит в дупло один орех. Как далеко от дупла растет орешник, если известно, что налегке белка бежит со скоростью 5 м/с, а с орехом – 3 м/с?

20 мин. = 1200 сек.

Решение:



I способ Расстояние от дупла до орешника: x метров.

Время на путь от дупла до орешника: $\frac{x}{5}$ секунд.

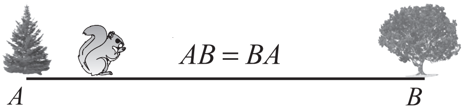
Время на обратный путь: $\frac{x}{\square}$ секунд.

$\frac{x}{5}+\frac{x}{\square}=1200 \Leftrightarrow \square\, x+\square\, x=1200\cdot 15 \Leftrightarrow \square\, x=\square \Leftrightarrow x=\square$ (метров).

Ответ: $\square$ метров.

II способ На путь к орешнику белка тратит y секунд, на обратный путь $(1200-y)$ секунд.

Расстояние между дуплом и орешником: $5y$ метров или $\square\cdot(1200-y)$ метров.



$5y=\square\cdot(1200-y) \Leftrightarrow 5y+\square\, y=1200\cdot 3 \Leftrightarrow \square\, y=3600 \Leftrightarrow y=\square$ (секунд).

$AB=5\cdot\square=\square$ (метров).

Ответ: $\square$ метров.

Упражнения и задачи

☑ ☐ ☐

1. «Переведите» на математический язык и найдите число x:

а) Если число x увеличить в 4 раза и полученное произведение уменьшить на 2, то получим 22.

б) Если число x увеличить в 3 раза, то разность полученного произведения и числа x будет равна 92.

2. В одном пакете x конфет, а во втором – в 3 раза больше. Что означает запись:

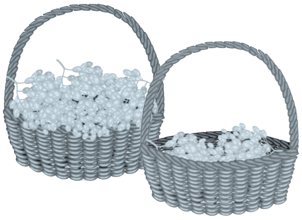
а) $x+3x=800$;

б) $3x-x=400$;

в) $3x-200=x+200$?

3. *Работайте в парах!* В первой корзине в 2 раза больше винограда, чем во второй. Если из первой корзины переложить во вторую 3 кг винограда, то его в корзинах станет поровну. Сколько килограммов винограда в каждой корзине?

Заполните таблицу и решите задачу.



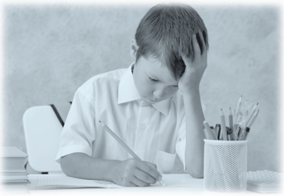
	На математическом языке
Во второй корзине (кг)	x
В первой корзине (кг)	___ x
Если из первой переложить 3 кг	___ – ___
Переложить во вторую корзину 3 кг	___ + ___
Винограда станет поровну.	___ = ___

4. В двух седьмых классах 64 ученика. Если из 7а перевести двух учеников в 7б класс, то в каждом классе будет одинаковое количество ребят. Сколько учеников в 7б классе?

5. В школу Аня едет на автобусе, а потом идет пешком. Вся дорога занимает у нее 25 минут. Время пешего пути на 5 минут превышает время поездки на автобусе. Сколько минут Аня едет в автобусе? Заполните таблицу и решите задачу.

	На математическом языке
Аня едет в автобусе (мин.).	x
Аня идет пешком на 5 минут дольше, чем едет на автобусе.	$x +$ ___
Вся дорога у нее занимает 25 минут.	___ = ___

6. Петя решил две задачи за 35 минут. Первую задачу он решал на 7 минут дольше, чем вторую. Сколько минут Петя решал вторую задачу?



☑ ☑ ☐

7. Сумма трех последовательных натуральных чисел равна 33. Найдите эти числа.

8. К некоторому числу приписали справа нуль. Число увеличилось на 405. Найдите исходное число.

9. Для трех аквариумов требуется 61 литр воды. Первый аквариум вмещает в 1,5 раза больше воды, чем третий, а второй – на 5 литров больше, чем третий. Сколько литров воды вмещает каждый аквариум?

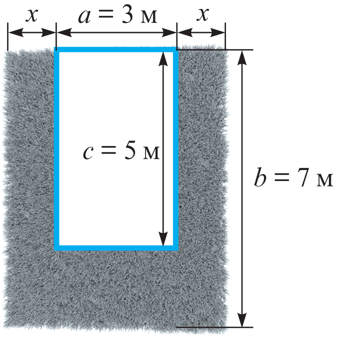
10. Три яйца африканского страуса и 60 куриных яиц весят 9 кг. Найдите вес яйца страуса, если известно, что оно тяжелее куриного в 20 раз.

11. *Работайте в парах!* Автобус едет со скоростью 50 км/ч и тратит на дорогу от Кишинева до Единец на 1,5 часа больше, чем автомобиль, едущий со скоростью 80 км/ч. В котором часу автобус прибудет в Единец, если он отправится из Кишинева в 9 часов утра?

12. Моторная лодка преодолевает расстояние между двумя пристанями за 6 часов по течению и за 10 часов против течения. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде 16 км/ч.

13. Витя с мамой слепили 220 пельменей. Витя работал 2 часа, а мама – 3 часа. За час они налепили 86 пельменей. Сколько пельменей слепил Витя, если у них одинаковая производительность?

14. На рисунке представлен план земельного участка, площадь которого 27 м². Найдите значение x.

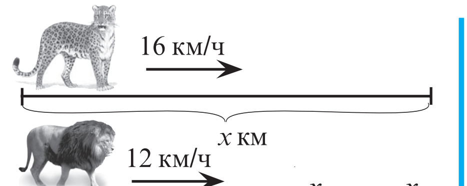


15. От деревни до реки Вася ехал на велосипеде со скоростью 15 км/ч, а на обратном пути – со скоростью 10 км/ч. На весь путь он потратил 1 час. Найдите расстояние от деревни до реки.
Решите задачу двумя способами.

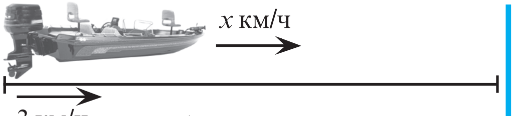
16. От автостанции до дачи Раду шел со скоростью 6 км/ч. На обратном пути он нес черешню, поэтому его скорость снизилась на 2 км/ч. На весь путь Раду потратил 1 час. На каком расстоянии от автостанции находится дача?
Решите задачу двумя способами.

17. По рисунку составьте задачу, решение которой сводится к решению уравнения:

а) $3x = 2(x + 2)$.

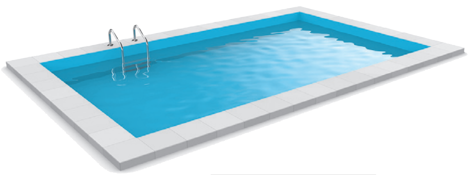


б) $\frac{x}{16} + 1 = \frac{x}{12}$.

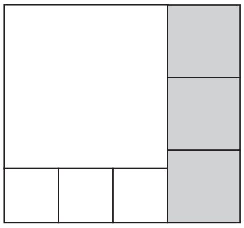


в) $5 \cdot (x + 3) = 8 \cdot (x - 3)$.

18. Бассейн прямоугольной формы окружен дорожкой, ширина которой 1 м. Одна из сторон бассейна на 15 м меньше другой. Площадь бассейна на 74 м² меньше площади, занимаемой бассейном вместе с дорожкой. Вычислите размеры бассейна.



19. Прямоугольник разделили на 7 квадратов так, как показано на рисунке. Сторона каждого закрашенного квадрата равна 8 см. Чему равна сторона самого большого квадрата?



§ 4. Неравенства с одним неизвестным

4.1. Свойства числовых неравенств

1 Рассмотрите, прокомментируйте и дополните.

Верные числовые неравенства

$-7{,}2 \le -7{,}1$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

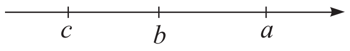
$1 < \sqrt{3} < 2$

☐ < 0

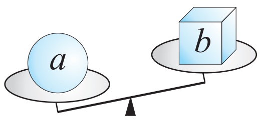
☐ $\ge 8{,}1$

$\frac{1}{3} <$ ☐ $< \frac{1}{2}$

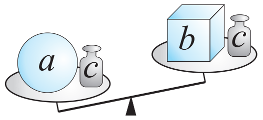
$a > b$; $a > c$; $b > c$



$c < b < a$



$a > b$



$a + c > b + c$

> = <

- Сравните:

12 ○ –6

12 + 7 ○ –6 + 7

12 – 9 ○ –6 – 9

Запомните

① Если $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a > b$, то $a + c > b + c$.

2 Сравните:

–3 ○ –7

–3 · 4 ○ –7 · 4

–3 · (–2) ○ –7 · (–2)

30 ○ 15

30 : 3 ○ 15 : 3

30 : (–5) ○ 15 : (–5)

Запомните

② Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ и $c \in \mathbb{R}^*_+$, то $ac > bc$.

③ Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ и $c \in \mathbb{R}^*_-$, то $ac < bc$.

④ Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ и $c \in \mathbb{R}^*_+$, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

⑤ Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ и $c \in \mathbb{R}^*_-$, то $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

- Зная, что $x, y \in \mathbb{R}$ и $x > y$, сравните:

$2x$ ○ $2y$

$\frac{1}{3}x$ ○ $\frac{1}{3}y$

$-5x$ ○ $-5y$

> = <

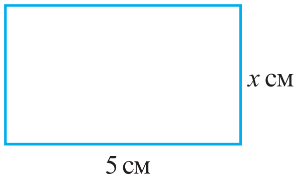
$0 \cdot x$ ○ $0 \cdot y$

$x + 1$ ○ $y + 1$

$x - 7$ ○ $y - 7$

4.2. Неравенства

1 Одна сторона прямоугольника 5 см. Какой длины должна быть вторая сторона, чтобы периметр прямоугольника был больше 16 см?



$\boxed{(5 + x) \cdot 2 > 16}$

неизвестное

неравенство с одним неизвестным

$(5 + x) \cdot 2 > 16$

④

$5 + x > 8$

①

$x >$ ☐

Ответ: ☐

- Является ли число **–4** решением неравенства:

а) $3x+6<0$;

б) $\frac{1}{2}x\ge 8$;

в) $x^2+x\le 13$;

г) $x+1>x+3$?

Образец: $2x+1\le 0$

$2\cdot(-4)+1\le 0$

$-7\le 0$ – верно

Ответ: Число –4 является решением неравенства.

Определение **Решением неравенства** называется значение неизвестного, обращающее это неравенство в верное числовое неравенство.

2 Найдите два различных решения неравенства:

а) $2x+1<0$;

б) $\frac{1}{2}x\ge 8$;

в) $x^2+x\le 13$;

г) $x+1<x+3$.

Запомните **Решить неравенство** – значит, найти множество его решений. Множество решений неравенства обозначают буквой S.

Определение Два неравенства называют **равносильными**, если они имеют одинаковое множество решений.

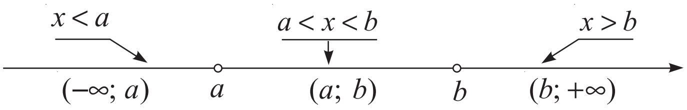
Между равносильными неравенствами пишут знак «$\Leftrightarrow$».

Итак, $2x+1<0\Leftrightarrow 2x<-1$.

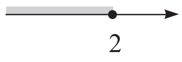
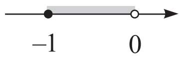
- У какого из указанных выше неравенств $S=\mathbb{R}$?

4.3. Числовые промежутки и операции над ними

Множество решений неравенства с одним неизвестным записывают в виде числового промежутка:

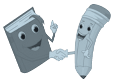


1 Рассмотрите, прокомментируйте и заполните пропуски:

	Изображают	*Записывают*	*Читают*
$x>3$		$S=(3;\ +\infty)$	Числовой промежуток от 3 до плюс бесконечности, исключая 3.
$x\le 2$		$S=(-\infty;\ 2]$	Числовой промежуток от минус бесконечности до 2, включая 2.
$-1\le x<0$		$S=[-1;\ 0)$	Числовой промежуток от –1 до 0, включая –1 и исключая 0.
$2\le x\le 5$		$S=[$ ☐ ; ☐ $]$	?

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$.

Множество	Числовой промежуток	
	Изображение на числовой оси	Обозначение
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\}$		$[a, b]$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\}$		$[a, b)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$		$(a, b]$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$		(a, b)
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > a\}$		$(a, +\infty)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \ge a\}$		$[a, +\infty)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < b\}$		$(-\infty, b)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \le b\}$		$(-\infty, b]$
$\mathbb{R}$		$(-\infty, +\infty)$



Работайте в парах!

2 Выполните действие:

а) $[-3; 8] \cup [0; 12) = [-3; 12)$.

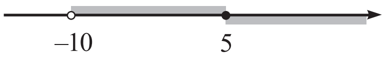
$[-3; 8] \cap [0; 12) =$

б) $(-\infty; 2] \cup (3; 7) =$

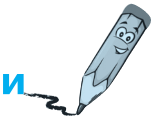
$(-\infty; 2] \cap (3; 7) =$

в) $(-10; 5] \cup [5; +\infty) =$

$(-10; 5] \cap [5; +\infty) =$



Упражнения и задачи



☑ ☐ ☐

1. Выпишите верные числовые неравенства:

а) $-2 > 0$;

б) $3 < 7$;

в) $-3 < -7$;

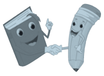
г) $6 \ge 6$;

д) $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$;

е) $\frac{5}{8} > \frac{9}{16}$;

ж) $-\frac{3}{4} \le -\frac{2}{3}$;

з) $3\sqrt{2} \le 2\sqrt{3}$.



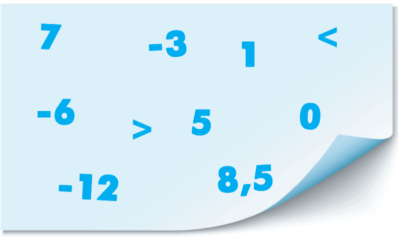
2. *Работайте в парах!* Запишите в виде неравенства:

а) Семь больше одного.

б) Минус три меньше нуля.

в) Пять не больше, чем восемь целых пять десятых.

г) Минус шесть не меньше минус двенадцати.



3. ***Исследуйте!*** Известно, что $a, b \in \mathbb{R}$ и $a > b$. Определите истинность высказывания:

а) $0{,}1a > 0{,}1b$; б) $\frac{a}{7} < \frac{b}{7}$;

в) $a - 3 > b - 3$; г) $-3a > -3b$;

д) $-5 + a < -5 + b$.

4. Является ли число –2 решением неравенства:

а) $-3x - 7 < 0$; б) $2x > 1$; в) $-5 < x \le 0$;

г) $\frac{1}{2}x \ge -1$; д) $3x + 6 > 0$; е) $10 - x > 10$?

5. Назовите одно решение неравенства:

а) $x > 18$; б) $x < -27$;

в) $9 < x \le 10$; г) $1 < x < 2$;

д) $-1{,}5 < x < -1$; е) $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$.

6. Прочитайте:

а) $[-2; 3)$; б) $(-1; 5]$; в) $(2; 7)$;

г) $[0; 11]$; д) $(0; +\infty)$; е) $(-\infty; -100]$;

ж) $[-17; +\infty)$; з) $(-\infty; 3{,}2)$.

7. ***Работайте в группах!*** Заполните таблицу по образцу первой строки:

$x < 2$		$(-\infty; 2)$	Числовой промежуток от $-\infty$ до 2, исключая 2.
		$[5; +\infty)$	
			
			Числовой промежуток от 3 до 4, включая 3, исключая 4.
$-1 \le x \le 15$			

8. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно*?

а) $5 \in (-1; 7)$; б) $3 \in (3; +\infty)$; в) $2 \in (-\infty; 2]$;

г) $10{,}2 \in (10{,}1; 10{,}19)$; д) $7 \in [-3; 7)$; е) $0 \in [0; 100)$.

9. «Переведите» на математический язык и запишите в виде числового промежутка ограничения:

а) в детской игре; б) скорости на дороге; в) на таможне.

Без декларации
можно провозить
не более 5000 $.

10. Изобразите на числовой оси числовой промежуток:

а) $(-2; 1]$; б) $[0; 5]$; в) $[1; 3)$; г) $(2; +\infty)$;

д) $(-\infty; -1]$; е) $(-\infty; 4)$; ж) $[7; +\infty)$; з) $(-4{,}5; +\infty)$.

11. ***Работайте в парах!*** Запишите числовой промежуток, изображенный на рисунке:

а) 

б) 

в) 

г) 

д) 

е) 

☑☑☐

12. Выберите верные числовые неравенства:

а) $-\frac{11}{23}<-\frac{1}{2}$; б) $\frac{7}{8}>\frac{11}{12}$;

в) $\frac{7}{29}\le\frac{1}{3}$; г) $\pi\le 3{,}14$;

д) $0{,}11>-\frac{10}{11}$; е) $\sqrt{5}>2\sqrt{2}$;

ж) $-\sqrt{11}<-3{,}5$; з) $0<-6{,}(3)$.

13. Сравните действительные числа a и b, если:

а) $a+3>b+3$; б) $\frac{a}{6}<\frac{b}{6}$;

в) $-\frac{1}{3}a>-\frac{1}{3}b$; г) $a-5>b-5$.

14. Обе части неравенства $7>6$ умножили на a^4, $a\in\mathbb{R}$. Можно ли утверждать, что $7a^4>6a^4$? Обоснуйте ответ.

15. ***Работайте в парах!*** Найдите два решения неравенства:

а) $0<x<\frac{1}{2}$; б) $2{,}5<x\le 2{,}6$;

в) $-0{,}25\le x<0$; г) $\frac{3}{4}<x\le 1$.

16. Найдите наибольшее и наименьшее целые числа, принадлежащие промежутку:

а) $(-10;-2)$; б) $[-1;2]$;

в) $(5;9]$; г) $[3;18)$;

д) $(1{,}1;7{,}21)$; е) $(-3{,}1;5{,}02]$;

ж) $[-9{,}2;0{,}8]$; з) $\left[-\frac{9}{2};\frac{11}{3}\right)$.

17. ***Работайте в группах!*** Изобразите на числовой оси и запишите в виде числового промежутка множество решений неравенства:

а) $x\ge -6{,}2$; б) $x\le 15$; в) $\frac{1}{8}<x<\frac{2}{3}$;

г) $x>8$; д) $x<-13{,}2$; е) $2\le x\le 2{,}5$.

18. Выполните действия:

а) $[0;5]\cup(-10;7)$;

б) $(-3;-1)\cup[-1;78]$;

в) $(-\infty;3)\cup(-8;+\infty)$;

г) $(-7{,}3;0{,}2)\cup(-1;3{,}5]$;

д) $(-\infty;+\infty)\cup[-7;\sqrt{3}]$;

е) $(-\infty;-\sqrt{5})\cup(-10;1]$.

19. Выполните действия:

а) $(-3;2)\cap(-2;3)$;

б) $(-\infty;5)\cap(-1;2)$;

в) $(8{,}3;+\infty)\cap[-3;7]$;

г) $(-\infty;+\infty)\cap(0;+\infty)$;

д) $(-\sqrt{7};-2{,}3]\cap[-2;7)$;

е) $(-3;7]\cap[7;+\infty)$.

20. ***Работайте в парах!***

Выполните действия:

а) $\mathbb{R}\cap[0;3]\cup(0;+\infty)$; б) $\mathbb{Z}\cap[-3;4)$;

в) $\mathbb{N}\cap[-1;5{,}5)$; г) $[-3;0]\cap[-7;1]\cup\mathbb{R}$.

21. Найдите три решения неравенства:

а) $\frac{1}{3}<x\le\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}\le x<\frac{3}{4}$; в) $\sqrt{2}<x<\sqrt{3}$.

☑☑☑

22. Объясните, почему любое отрицательное число является решением нервенства:

а) $x^2>x$; б) $0\cdot x>-1$; в) $x^2-2x\ge 0$.

23. Найдите все целые числа, принадлежащие числовому промежутку:

а) $(\sqrt{2};\sqrt{17})$; б) $[-\sqrt{11};-\sqrt{3})$;

в) $[\pi;\sqrt{27}]$; г) $(-\pi;-\sqrt{2}]$.

24. Дополните числовым промежутком, чтобы получить равенство:

а) ▭ $\cup[-1;1)=[-1;3]$; б) $(2;5)\cup$ ▭ $=[-5;5)$;

в) ▭ $\cap[0;2]=(0;1)$; г) $(-7;9]\cap$ ▭ $=\{9\}$.

25. Укажите букву, которая соответствует правильному ответу.

Если $a=2^{25}$, $b=8^8$, $c=3^{11}$, то:

а) $a<b<c$; б) $b<a<c$; в) $c<b<a$; г) $c<a<b$; д) $b<c<a$.

§5. Неравенства I степени с одним неизвестным

5.1. Понятие неравенства I степени с одним неизвестным

1 Ученическая тетрадь в 12 листов весит 35 г. Какое наибольшее количество тетрадей может взять домой учительница математики для проверки, если вес ее сумки с книгами составляет 4,5 кг и ей нельзя поднимать более 6 кг?

Объясняем Пусть x – количество тетрадей.

35 г = 0,035 кг

Тогда:

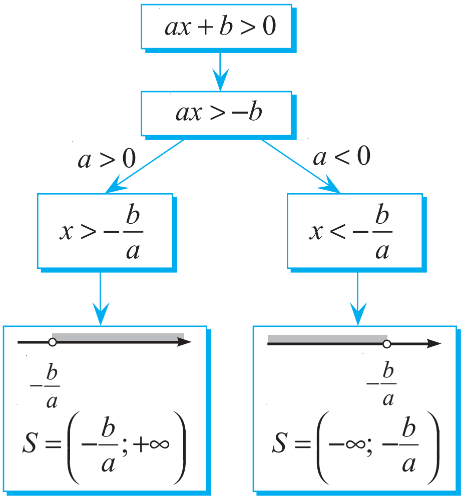
$$\underset{\text{неравенство I степени с одним неизвестным}}{\underset{\uparrow}{\boxed{0{,}035x+4{,}5\le 6}}}$$

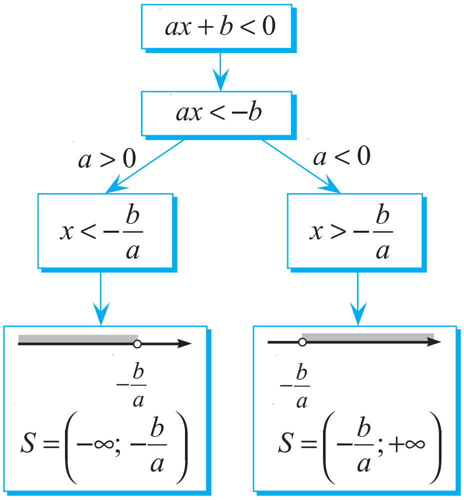
$$0{,}035x+4{,}5\le 5 \Leftrightarrow 0{,}035x\le \square +5 \Leftrightarrow x\le \square$$

Ответ: $\square$ тетрадей.

Определение Неравенства вида $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\ge 0$, $ax+b\le 0$, где $a, b\in \mathbb{R}$ и $a\ne 0$, называются **неравенствами I степени с одним неизвестным**.

2 Рассмотрите схемы:





Работайте в группах!

- Составьте подобные схемы решения неравенств $ax+b\ge 0$ и $ax+b\le 0$, $a, b\in \mathbb{R}$, $a\ne 0$. Используя их, дополните:

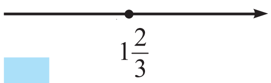
а) $2x-7\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x\ge 7\Leftrightarrow x \bigcirc 3{,}5$

$S=\square$

б) $5-3x\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x \bigcirc -5\Leftrightarrow x \bigcirc 1\frac{2}{3}$

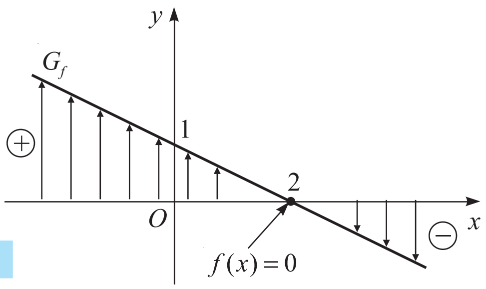


$S=\square$

3 Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-\frac{1}{2}x+1$.

Найдите значения x, при которых:

а) $f(x)=0$; б) $f(x)>0$; в) $f(x)<0$.



Объясняем а) $f(x)=0$ при $-\frac{1}{2}x+1=0$.

Значит, $-\frac{1}{2}x+1=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x=-1 \Leftrightarrow x=\boxed{}$

б) $f(x)>0$ при $-\frac{1}{2}x+1>0$.

$-\frac{1}{2}x>-1 \Leftrightarrow x<\boxed{}$

$x\in\boxed{}$

в) $f(x)<0$ при $-\frac{1}{2}x+1<0$.

$-\frac{1}{2}x<-1 \Leftrightarrow x>\boxed{}$

$x\in\boxed{}$

- Решите неравенства по образцу:

а) $0\cdot x\geq 3$; б) $0\cdot x<0$; в) $0\cdot x>-1$.

Образец:
$0\cdot x>2$
$0>2$ – ложно
$S=\varnothing$

5.2. Неравенства, приводимые к неравенствам I степени

Чтобы решить уравнение, его заменяют более простым, равносильным ему уравнением, используя свойства отношения равенств.

Применяем

$\frac{7-2x}{3}=5 \Leftrightarrow$

$7-2x=5\cdot 3 \Leftrightarrow$

$-2x=\boxed{} \Leftrightarrow$

$x=\boxed{}$.

Ответ: $S=\{\boxed{}\}$.

Чтобы решить неравенство, его заменяют более простым, равносильным ему неравенством, используя свойства числовых неравенств.

$\frac{7-2x}{3}>5 \Leftrightarrow$

$7-2x>5\cdot 3 \Leftrightarrow$

$-2x>\boxed{} \Leftrightarrow$

$x<\boxed{}$.

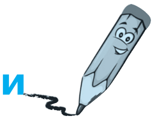
Ответ: $S=(-\infty;\ \boxed{})$.

Запомните

Преобразования неравенства, приводящие к равносильным ему неравенствам:

- Можно переносить слагаемые из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный.
$$3x-5>2x+1 \Leftrightarrow 3x-2x>5+1.$$
- Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, при этом знак неравенства не меняется.
$$\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}>2 \Leftrightarrow 2x-1>2\cdot 3.$$
- Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, поменяв знак неравенства на противоположнный.
$$-3x>6 \Leftrightarrow x<-2.$$
- Можно поменять местами части неравенства, изменив знак неравенства на противоположный.
$$-3\sqrt{2}>x \Leftrightarrow x<-3\sqrt{2}.$$

Упражнения и задачи



☑ ☐ ☐

1. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $2x > 12$; б) $-3x \geq 15$;

в) $8x < 24$; г) $-\frac{1}{2}x \leq -1$;

д) $5x < -2{,}5$; е) $0 \cdot x < -2$;

ж) $2x - 71 \leq 1$; з) $-15 - 11x > 18$.

2. Укажите два целых решения неравенства:

а) $\frac{x-1}{3} < 1$; б) $3x - 1 \leq 2 + 7x$;

в) $3 - 2x > 2x - 13$; г) $\frac{x}{2} < 1 + \frac{x}{3}$;

д) $x + 1 \geq \frac{x}{2}$; е) $\frac{2x-1}{6} < \frac{x+3}{12}$.

3. ***Работайте в парах!*** Найдите, при каких значениях x, $x \in \mathbb{R}$, выражение $5 + 8x$ принимает:

а) отрицательные значения;

б) значения больше 15;

в) неотрицательные значения;

г) значения не больше 21.

4. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

а) $2x + 5 \leq 3$; б) $6x - 2 < 4$;

в) $5{,}4 - x > 1{,}2$; г) $8 - 3x \geq 18$.

5. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

а) $5x + 2 \geq 17$; б) $3x - 19 > 2$;

в) $-2x - 3 < 4$; г) $10 - \frac{1}{3}x < 0{,}1$.

6. ***Работайте в группах!*** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство и укажите, какие из элементов множества $M = \left\{-21; -\frac{1}{5}; 0; \sqrt{2}; 101\right\}$ принадлежат множеству его решений:

а) $2x + 3 \geq 5 - x$; б) $\frac{1}{2}(x+5) \leq x - 3$;

в) $5 - 3x > 6 + 2x$; г) $7(3x - 5) < 28 - 21x$.

☑ ☑ ☐

7. При каких действительных значениях x значение выражения $5 - x$ не больше значения выражения $\frac{1-3x}{2}$?

8. При каких действительных значениях y значение выражения $7 - 2y$ не меньше значения выражения $\frac{1+3y}{2}$?

9. ***Работайте в группах!*** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $4x - 7(x-2) < 10 - (3x - 5)$;

б) $10 + 3(x-1) > 2x - 5(3x + 1)$;

в) $5 - 4(2x + 3) \geq 1 - 2(3x - 7)$;

г) $12x - (x + 4) \leq -3 - (x - 2)$.

10. а) Найдите множество S решений неравенства $-5(2x + 8) > x - 4(x + 6)$.

б) Определите истинность высказывания: $[-5; -3] \subset S$.

11. а) Найдите множество S решений неравенства: $3(6 - 9x) < 15x - 2(x + 1)$.

б) Определите истинность высказывания: $[-1; 2] \subset S$.

12. ***Работайте в парах!*** Определите, при каких значениях x выполняются соотношения $f(x) = 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 3x + 51$;

б) $f(x) = -\frac{1}{4}x + 15$;

в) $f(x) = 2 - 8x$.

13. Длина стороны AB прямоугольника $ABCD$ равна 15 см. Какой длины должна быть сторона BC, чтобы площадь прямоугольника была:

а) больше 120 см²; б) меньше 48 см²?

14. Периметр треугольника со сторонами a, b и c больше 20 см. Определите, какие значения может иметь сторона c, если a = 7 см и b = 9 см.

15. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$. При каких значениях x:

а) $f(x) = 0$; б) $f(x) > 0$; в) $f(x) \leq 0$?

☑☑☑

16. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $(\sqrt{3}-2)x<2\sqrt{3}-4$; б) $(\sqrt{5}-2)x+3\sqrt{5}\geq 6$.

17. При каких x, $x\in\mathbb{R}$, значение выражения:

а) $\dfrac{14-2x}{x^2+1}$ положительно; б) $\dfrac{3x+18}{|x|+1}$ не положительно?

18. Найдите все отрицательные решения неравенства $-2x-\dfrac{x-3}{2}\leq 14$.

19. Найдите все положительные решения неравенства $3x-\dfrac{2-x}{3}\leq 6$.

20. Найдите множество общих решений неравенств:

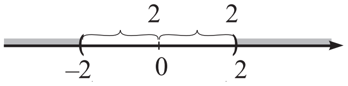
а) $2x+5>7$ и $7x-2\leq 26$;

б) $7x+3\geq 2x+10$ и $2-3x<4x-12$.

21. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $|x|\geq 3$; б) $|x|\leq 5$; в) $|2x|<7$; г) $4|x|>24$.

Образец: $|x|>2$



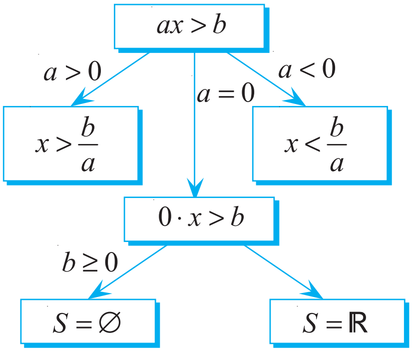
$x>2$ или $x<-2$

Ответ: $S=(-\infty;\,-2)\cup(2;\,+\infty)$.

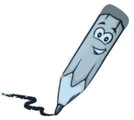
22. Папа с дочкой решили прокатиться на моторной лодке. Мама попросила их, чтобы они вернулись с прогулки не позже, чем через 2 часа. На какое максимальное расстояние от причала они могут отплыть по течению реки, чтобы выполнить просьбу мамы, если скорость лодки в стоячей воде 15 км/ч, скорость течения реки 3 км/ч, а время пути от причала до дома составляет 10 минут?

23.  ***Работайте в группах!***

1) Рассмотрите схему.
2) Составьте аналогичные схемы для случаев: $ax<b$, $ax\geq b$, $ax\leq b$, $a,b\in\mathbb{R}$.
3) Используя схемы, определите, при каких значениях $a\in\mathbb{R}$ множеством решения неравенства:
   а) $ax+2\leq 7$ является $S=(-\infty;\,1]$;
   б) $ax-10>2$ является $S=(-\infty;\,-3)$;
   в) $ax+3<-8$ является $S=\varnothing$.
4) Запишите неравенство, множеством решений которого является:
   а) $S=(2;\,+\infty)$; б) $S=(-\infty;\,-3)$;
   в) $S=[-1;\,+\infty)$; г) $S=(-\infty;\,0]$;
   д) $S=\mathbb{R}$; е) $S=\varnothing$.



Упражнения и задачи на повторение



☑☐☐

1. При каких значениях x, $x\in\mathbb{R}$, значение выражения $8x+2$ в три раза больше значения выражения $5x-18$?

2. При каких значениях y, $y\in\mathbb{R}$, значение выражения $3y-1$ в два раза меньше значения выражения $10y-18$?

3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $12x-3=9$; б) $7x+11=4$;

в) $3x+7=x-2$; г) $8x-(3x+1)=9$.

4. Периметр прямоугольника равен 32 см. Его ширина на 6 см меньше длины. Найдите стороны прямоугольника.

5. ***Работайте в парах!*** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство и изобразите множество решений на числовой оси:

а) $-2\cdot(x+5)<12$; б) $-\frac{1}{2}(x+2)\geq -3$; в) $5\cdot(3-2x)\leq 15$; г) $4\cdot(8-3x)>12$.

☑☑☐

6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $5(x-3)-2(x-7)=7-7(2x+6)$;

б) $5(8x-1)-7(4x+1)=9-8(7-4x)$;

в) $\frac{4x-51}{3}-\frac{17-3x}{4}=\frac{x+5}{2}$;

г) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x-2}{5}=\frac{7x+5}{15}$.

7. Цену на куртку снизили на 20%, и теперь куртка стоит 320 леев. Какова была ее начальная цена?

8. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно*?

а) $3x-2\leq 0 \Leftrightarrow 2-3x\geq 0$;

б) $x^2+1>0 \Leftrightarrow (x+1)^2<0$.

9. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство и укажите два иррациональных его решения:

а) $\frac{2x-3}{7}<1-\frac{3-x}{2}$;

б) $(3x-5)^2>x\cdot(9x-1)+54$.

10. Найдите все целые положительные решения неравенства $4-\frac{x-1}{2}\geq x-\frac{2x-1}{3}$.

11. Выполните действия, используя числовые промежутки на числовой оси:

а) $(-\infty;\,3)\cup[0{,}5;\,7)$;

б) $[-5;\,\sqrt{3})\cup(-2{,}(3);\,10)$;

в) $[-5;\,8)\cap(0;\,3)$;

г) $(-6;\,+\infty)\cap(-2;\,-0{,}3)$;

д) $[-8;\,3)\cap(0;\,1)\cup(8;\,+\infty)$;

е) $(3;\,+\infty)\cup(-2{,}6;\,5)\cap(0;\,25)$.

12. ***Работайте в группах!*** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

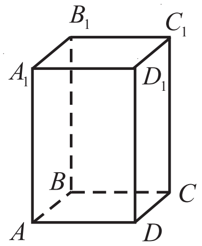
а) $x(x+2)-(x-3)(x+3)=13$;

б) $4x(x-1)-(2x+5)(2x-5)=1$;

в) $(x-3)(x+4)-2(3x-2)=(x-4)^2$;

г) $(x+5)(x+2)-3(4x-3)=(x-5)^2$.

13. Из проволоки длиной 96 дм нужно изготовить каркас прямоугольного параллелепипеда, у которого длина в два раза больше его ширины, а высота в три раза больше ширины. Найдите размеры параллелепипеда.



14. Длина забора, которым планируют оградить участок земли прямоугольной формы, не должна быть больше 150 м. Какова ширина участка, если его длина равна 40 м?

15. Даны функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3(x-2)$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-2x+3$. Найдите:

а) нули функций f и g;

б) значения x, при которых $f(x)>0$;

в) значения x, при которых $f(x)\leq g(x)$.

☑☑☑

16. Число 2 является решением уравнения $kx+5=x-1$. Найдите решение уравнения $k(x-1)=3x+7$.

17*. При каких значениях параметра m, $m\in\mathbb{R}$, уравнение не имеет решений:

а) $(m-4)x=12$; б) $2x=5-mx$?

18. При каких значениях a, $a\in\mathbb{R}$, уравнение $|x|=a$:

а) не имеет решений

б) имеет два решения;

в) имеет одно решение?

19. Из мешка отсыпали половину орехов, потом еще половину остатка, затем половину нового остатка и наконец половину от последнего остатка. После этого в мешке осталось 10 орехов. Сколько орехов было в мешке первоначально?

20. Найдите множество общих решений неравенств $|x| \le 3$ и $\dfrac{3-5x}{1-x} < 5$.

ЗАДАЧА ДЛЯ ЧЕМПИОНОВ

21. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $4^{23}x - 32^9 x = 16^4 \cdot (4^4)^4$; б) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x-2}{3} + \dfrac{x-3}{4} + \ldots + \dfrac{x-2022}{2023} + 2022 = 0.$

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. Дополните:

$5x - 7 = 2x + 1 \Leftrightarrow \square\, x = \square \Leftrightarrow x = \square$

2. Даны функции $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \dfrac{x-7}{2}$, $g(x) = 3x - 1$.

а) Найдите нули функций f и g.

б) При каких действительных значениях x, $f(x) \ge g(x)$?

3. Дано неравенство $3(x-1) > 6 - 2(x+1)$.

а) Обведите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно.
«Данное неравенство является неравенством, которое может быть приведено к неравенству I степени с одним неизвестным».

И	Л

б) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство.

в) Изобразите множество решений неравенства на числовой оси.

г) Найдите наименьшее целое решение неравенства.

4. Для продажи некоторого количества бананов за определенное время планировали ежедневно продавать по 40 кг. Каждый день продавали на 20 кг больше. Таким образом, весь товар был реализован на 3 дня ранее намеченного срока. За сколько дней планировали реализовать товар первоначально?

Вариант 2

1. Дополните:

$3 - 2x = x + 6 \Leftrightarrow \square\, x = \square \Leftrightarrow x = \square$

2. Даны функции $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \dfrac{5-x}{2}$, $g(x) = 5x + 1$.

а) Найдите нули функций f и g.

б) При каких действительных значениях x, $f(x) \ge g(x)$?

3. Дано неравенство $2(x+1) < 4 - 3(x-2)$.

а) Обведите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно.
«Данное неравенство является неравенством, которое может быть приведено к неравенству I степени с одним неизвестным».

И	Л

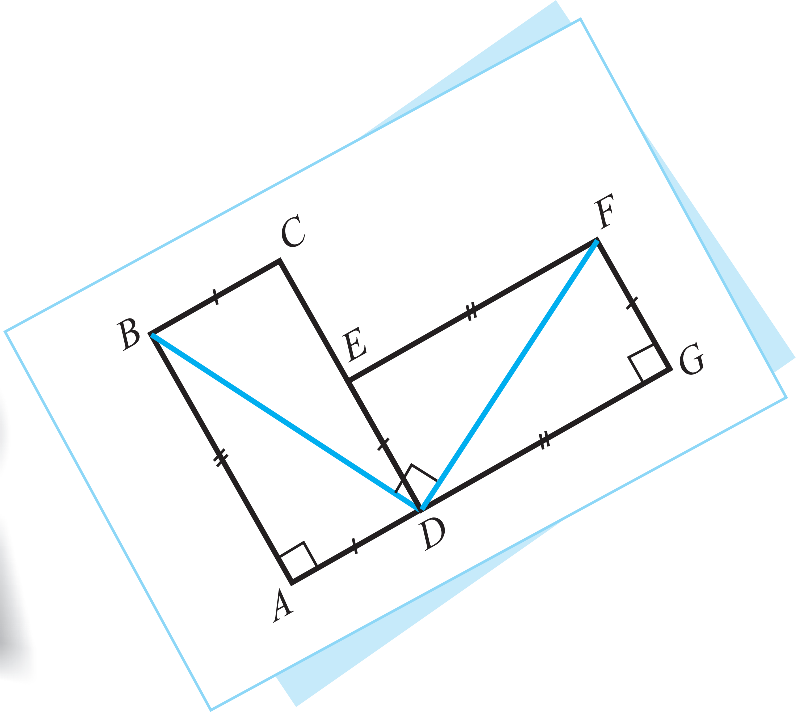
б) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство.

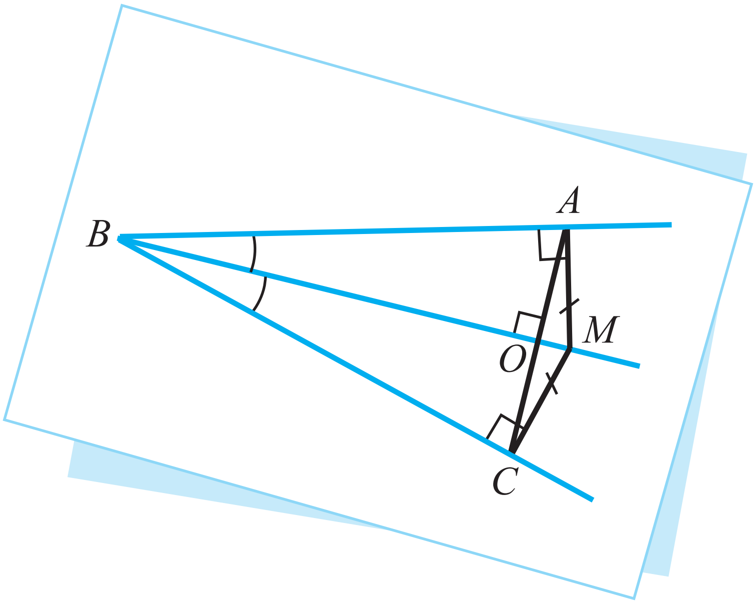
в) Изобразите множество решений неравенства на числовой оси.

г) Найдите наибольшее целое решение неравенства.

4. Степан прикинул: чтобы успеть прочесть книгу за время каникул, он должен ежедневно читать по 50 страниц. Каждый день он читал на 20 страниц больше. Таким образом, Степан прочел всю книгу на 4 дня раньше, чем закончились каникулы. Какова продолжительность каникул?

ГЕОМЕТРИЯ





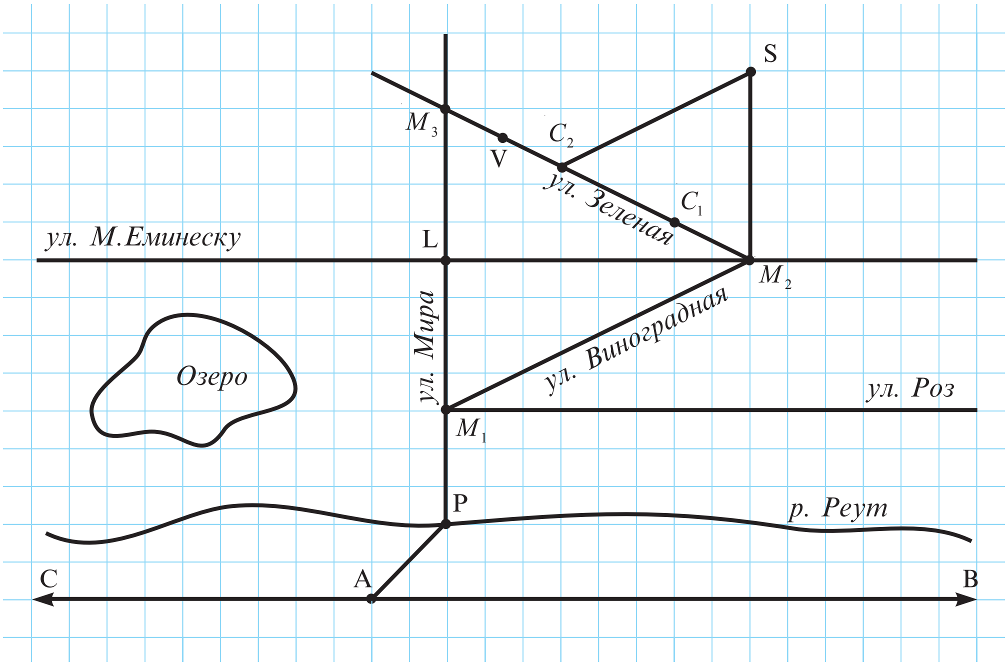
1
глава

Основные геометрические понятия

> *Изучая математику, вы учитесь думать.*
> Григорий Мойсил

§1. Точка, прямая, плоскость. Повторение и дополнения

1 В летнем лагере Влад подружился с Раду. Вскоре он написал новому другу и пригласил его в гости. К сообщению он приложил карту своего села, на которой обозначил: A – автовокзал, B – бельцкое направление, C – кишиневское направление, P – мост, M_1, M_2, M_3 – магазины, L – библиотека, S – школа, C_1, C_2 – дома, а V – его дом.



Рассмотрите карту.

а) Что обозначил Влад точками?

б) Что изобразил прямыми, полупрямыми, кривыми линиями?

в) Обозначьте в тетради точки; прямые; полупрямые; отрезки.

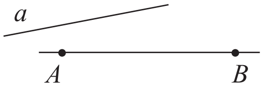
- Составьте и начертите аналогичную карту места, где вы живете.

✓ **Точка** – самая простая геометрическая фигура. Все геометрические фигуры состоят из точек. **Геометрическая фигура** – это множество точек. Две геометрические фигуры **равны**, если они образованы из одних и тех же точек.

Изображаем:	*Обозначаем*:
• или ×	Точки обозначают прописными латинскими буквами: A, B, ... Иногда точки обозначают A_1, A_2, ... (читают: «А один», «А два», ...).

✓ **Прямая**

Понятию прямой, как и понятию точки, невозможно дать определение. Его можно только объяснить. Прямая строится с помощью линейки. Фактически с помощью линейки мы изображаем только часть прямой. Прямые неограниченны, их можно продлить сколь угодно в оба конца.

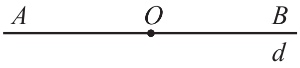
Изображаем:	*Обозначаем*:	*Читаем*:
	Прямые обозначают строчными латинскими буквами: a, b, ... или двумя прописными буквами: AB, CD, ...	Прямая a, прямая AB (или BA).

Определение

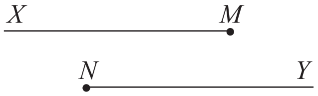
Точки, лежащие на одной прямой, называются **коллинеарными.**

Если три или более точек не являются коллинеарными, то их называют *неколлинеарными* точками.

✓ **Полупрямая**



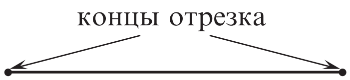
Произвольная точка O, лежащая на прямой, делит эту прямую на две фигуры, называемые **полупрямыми**. Точка O называется **началом полупрямой.**

Изображаем:	*Обозначаем*:
	Полупрямые обозначают прописными латинскими буквами: [MX, [NY, ..., первая из которых обозначает начало полупрямой.

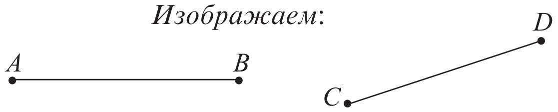
Определение

Две полупрямые с общим началом, образующие прямую, называются **противоположными полупрямыми**.

[AB и [AC являются противоположными полупрямыми.

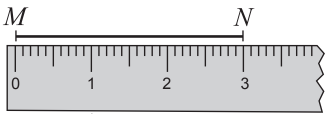


✓ **Отрезок** – это часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными ее точками. Эти точки называются его **концами**.

Изображаем:	*Обозначаем*:
	[AB] или [BA] [CD] или [DC]

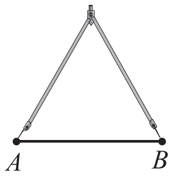
Длину отрезка можно определить с помощью линейки с делениями.

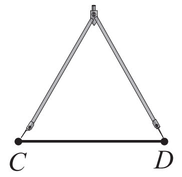
Чтобы **сравнить длину** двух отрезков, можно использовать линейку с делениями или циркуль.



$MN = 3$ см

Измеряем:





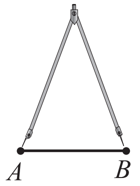
Обозначаем:

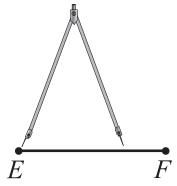
$AB = CD$

Читаем:

Длина отрезка AB равна длине отрезка CD.

Измеряем:





Обозначаем:

$AB < EF$

или

$EF > AB$

Читаем:

Длина отрезка AB меньше длины отрезка EF, или длина отрезка EF больше длины отрезка AB.

Определение Два отрезка одинаковой длины называются **конгруэнтными отрезками**.

Обозначаем: $[AB] \equiv [CD]$. *Читаем*: отрезок AB конгруэнтен отрезку CD.

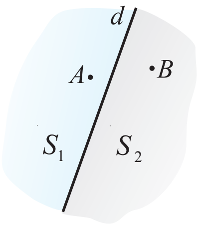
Очевидно, произвольный отрезок задает прямую. Эта прямая называется **несущей прямой** соответствующего отрезка. Итак, если $[AB]$ – отрезок, то прямая AB является несущей прямой этого отрезка.

2 Дополните:

Прямая d, лежащая в плоскости, разбивает эту плоскость на ______ множества точек S_1 и S_2.

Если отрезок AB пересекает прямую d и точка A принадлежит множеству S_1, то $B \in$ ______.

Если отрезок CD не пересекает прямую d и $D \in S_1$, то $C \in$ ______.



✓ Плоскость и полуплоскость

Понятию *плоскость*, как и понятиям *точка*, *прямая*, нельзя дать определение.

Изображаем:

Обозначаем:

Плоскости обозначают строчными греческими буквами: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ (читаем: «альфа», «бета», «гамма», «дельта», ...).

Определение Две **геометрические фигуры** называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости.

Если две геометрические фигуры не лежат в одной плоскости, то они называются **некомпланарными**.

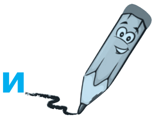
Учитывая, что геометрические фигуры – это множество точек, в случае, когда фигура F содержится в плоскости α, обозначаем $F \subset \alpha$. Если точка M принадлежит фигуре F, обозначаем $M \in F$.

Прямая d, лежащая в плоскости, разбивает эту плоскость на два множества точек, называемых **полуплоскостями**.

Прямая d называется **границей полуплоскостей**.

Изображаем:	*Обозначаем*:	*Читаем*:
	$[dA$	Полуплоскость, определенная прямой d и точкой A.

Упражнения и задачи



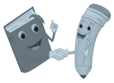
☑ ☐ ☐

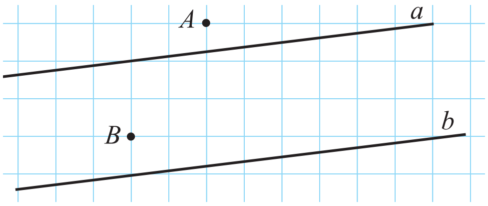
1. Выберите геометрические фигуры, которым нельзя дать определение: прямая, квадрат, плоскость, треугольник, окружность, точка, полупрямая, отрезок.

2. Постройте геометрическую фигуру, образованную:
   - а) тремя точками;
   - б) пятью точками;
   - в) двумя прямыми;
   - г) тремя полупрямыми;
   - д) самое меньшее 100 точками;
   - е) четырьмя отрезками.

3. Точка N принадлежит отрезку MK. Найдите:
   - а) MN, если $MK = 4{,}4$ см, $NK = 26$ мм;
   - б) NK, если $MK = 6{,}3$ см, $MN = 17$ мм;
   - в) MK, если $KN = 5{,}6$ см, $MN = 0{,}9$ дм;
   - г) NM, если $KN = 3{,}8$ см, $MK = 0{,}12$ м.

4. Определите, являются ли точки A, B, C коллинеарными, зная, что:
   - а) $AB = 17$ см, $AC = 3$ дм, $BC = 13$ см;
   - б) $AB = 29$ см, $AC = 420$ мм, $BC = 1{,}3$ дм;
   - в) $AB = 4$ дм, $AC = 15$ мм, $BC = 38{,}5$ см;
   - г) $AB = 48$ мм, $AC = 6$ см, $BC = 12$ см.

5.  ***Работайте в парах!*** Перечертите рисунок и отметьте две точки, коллинеарные точкам A и B:
   - а) лежащие на прямых a и b;
   - б) лежащие по разные стороны относительно прямой a;
   - в) лежащие в полуплоскости $[bA$;
   - г) лежащие в полуплоскости $[aA$.



6. Рассмотрите рисунок из предыдущего упражнения. Применив операции над множествами, запишите, как можно обозначить часть плоскости, заключенной между прямыми a и b.

7. Точки M, N, K коллинеарны. Какая из точек не лежит между двумя другими, если:
   а) $MN < NK$; б) $KM < KN$; в) $NK > KM$; г) $NM > NK$?

8. Постройте рисунок, соответствующий описанной ситуации.
   - а) Прямые a и b пересекаются, точка A принадлежит прямой a, точка B (отличная от A) принадлежит обеим прямым.
   - б) Прямые a, b, c не имеют общих точек, и каждые две из них пересекаются.
   - в) Прямая a содержит полупрямую $[OA$, и точки O, A, B коллинеарны.
   - г) Точка C принадлежит пересечению полупрямых $[AB$ и $[BA$.

9. На сколько частей делят плоскость 3 полупрямые с общим началом?

10. Прочтите: а) $M \in [AB]$; б) $d \subset \alpha$; в) $M \in \alpha$; г) $[AB] \subset \alpha$.

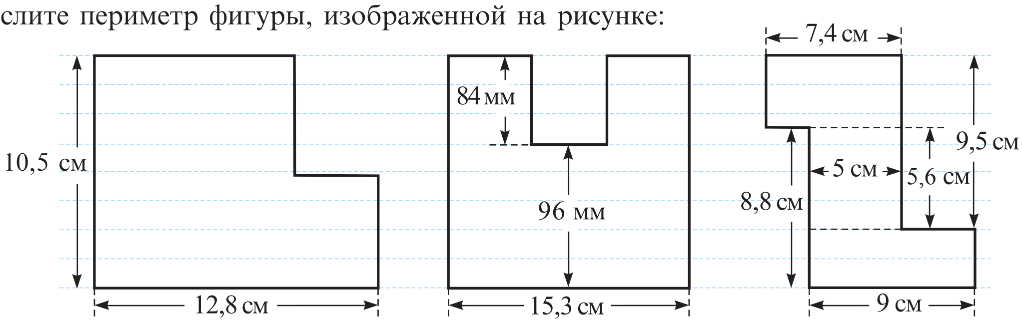
11. ***Работайте в парах!*** Обозначьте:
а) Точка O принадлежит полупрямой $[AB$.   б) Точка X не принадлежит отрезку MN.
в) Точки A, B, C коллинеарны, а точки A и B принадлежат прямой a.
г) Плоскость α содержит отрезок AB.

☑☑☐

12. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно*?
а) $[AB] \subset AB$;   б) $[AB \subset [AB]$;   в) $[AB \cap [BA = \varnothing$;
г) $[AB] \cap [AB = [AB$;   д) $[AB] \cup [AB = [AB$;   е) $AB \setminus [AB = [AB]$.

13. Сколько различных полупрямых определяют:
а) три коллинеарные точки;   б) три неколлинеарные точки;
в) четыре коллинеарные точки;   г) четыре точки, если любые три из них неколлинеарные?

14. Вычислите периметр фигуры, изображенной на рисунке:

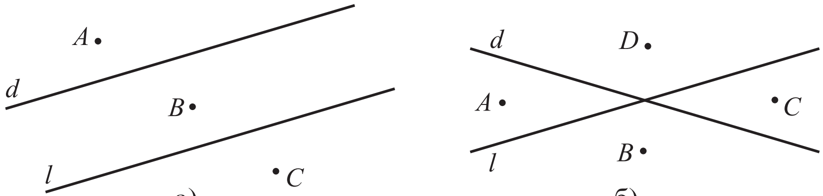


а)   б)   в)

15. Сколькими способами можно обозначить изображенную прямую?

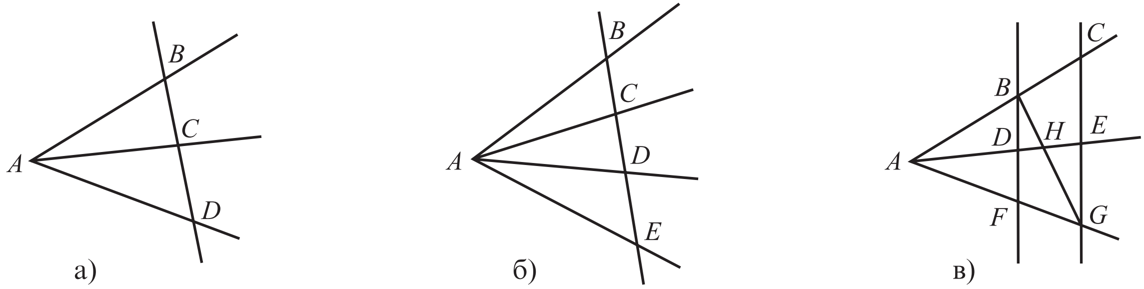
а)   б)

16. Обозначьте все полуплоскости.



а)   б)

17. ***Исследуйте!*** Сколько отрезков здесь изображено?



а)   б)   в)

☑☑☑

18. ***Работайте в парах!*** Отметьте:
а) 5 точек, из которых любые три неколлинеарны;
б) 7 точек, из которых любые три неколлинеарны;
в) 20 точек, из которых любые три неколлинеарны.

§2. Взаимные расположения

✓ Две точки

Точки идентичны или совпадают	Различные точки
$A \bullet_B$	$A \bullet \qquad \bullet B$
Обозначаем: $A = B$	*Обозначаем*: $A \neq B$

Запомните

Основное свойство
Если A и B – две различные точки, то существует единственная прямая, проходящая через точки A и B.

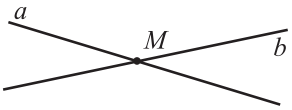
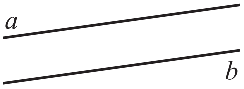
✓ Точка и прямая

Точка принадлежит прямой	Точка не принадлежит прямой
	
Обозначаем: $A \in d$	*Обозначаем*: $A \notin d$

Запомните

Основное свойство
Для любой прямой существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

✓ Две компланарные прямые

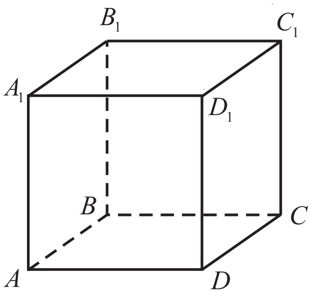
Прямые совпадают	Прямые пересекаются	Прямые параллельны
		
Обозначаем: $a = b$	*Обозначаем*: $a \cap b = \{M\}$	*Обозначаем*: $a \parallel b$

Вспомним

Две пересекающиеся прямые, образующие при пересечении прямой угол, называются **перпендикулярными прямыми**.

Обозначаем: $a \perp b$. *Читаем*: прямые a и b перпендикулярны.

- Рассмотрите карту, составленную Владом (с. 98), и укажите:
  а) пересекающиеся прямые;
  б) параллельные прямые;
  в) точки, принадлежащие прямой C_1C_2;
  г) точки, не принадлежащие прямым M_2L и C_1C_2;
  д) точку пересечения прямых C_1C_2 и M_2L.
- Рассмотрите куб и укажите ребра, несущие прямые которых:
  а) параллельны;
  б) пересекаются;
  в) не параллельны и не пересекаются.



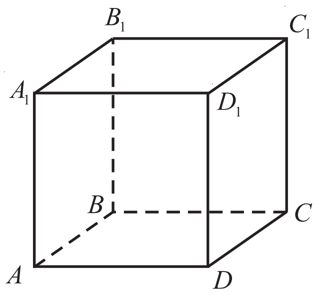
Замечание Принято говорить, что два ***отрезка параллельны***, если их несущие прямые параллельны.

Упражнения и задачи

☑☐☐

1. Прочтите: а) $M \in d$; б) $M \notin AB$;
в) $\{A, B, C\} \subset d$; г) $\{A, B, C\} \subset \alpha$.

2. Рассмотрите куб.
Запишите:
а) две прямые, параллельные прямой AD.
б) семь прямых, содержащих точку A.
в) четыре прямые, пересекающие прямую AD.



3. ***Работайте в парах!*** Запишите все пары прямых, проходящих через вершины изображенного куба, которые не параллельны и не пересекаются.

4. Сколько различных прямых можно провести через:
а) три неколлинеарные точки;
б) четыре точки, из которых любые три неколлинеарны;
в) пять точек, из которых любые три неколлинеарны;
г) десять точек, из которых любые три неколлинеарны?

5. ***Работайте в парах!*** Выполните рисунок, соответствующий ситуации:
а) $a \parallel b$, $b \cap c = \{A\}$, $B \neq a \cap c$, $B \in a$;
б) $a \cap b = \{A\}$, $b \cap c = \{B\}$, $a \cap c = \{C\}$;
в) $a \cap b \cap c = \{X\}$, $\{X, Y, Z\} \subset a$;
г) $[AB] \cap d = \{C\}$, $AC = BC$, $D \in [dA$.

6. ***Исследуйте!*** Можно ли определить взаимное расположение прямых a и b, если:
а) прямые a и c параллельные, а прямые b и c некомпланарные;
б) прямые a и c пересекаются, а прямые b и c некомпланарные;
в) прямые a и c пересекаются, а прямые b и c параллельные;
г) прямые a и c компланарные и прямые b и c компланарные?
Ответ обоснуйте.

☑☑☐

7. ***Исследуйте!*** *Возможно* или *невозможно*?
а) Три прямые имеют две точки пересечения.
б) Три прямые имеют три точки пересечения.
в) Три прямые имеют четыре точки пересечения.
г) Три прямые имеют одну точку пересечения.

8. Постройте 4 прямые, которые пересекаются в:
а) 3 точках; б) 4 точках; в) 5 точках; г) 6 точках.

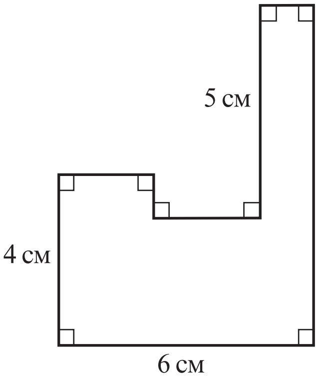
9. На сколько различных частей разбивают плоскость:
а) две параллельные прямые, пересеченные третьей прямой;
б) три параллельные прямые, пересекающиеся с четвертой прямой;
в) четыре прямые, пересекающиеся в одной точке?

☑☑☑

10. ***Исследуйте!*** Возможно ли, чтобы три прямые, каждые две из которых пересекаются, были некомпланарными? Обоснуйте ответ.

ЗАДАЧА ДЛЯ ЧЕМПИОНОВ

11. Найдите периметр фигуры.



§3. Расстояния на плоскости. Конгруэнтность фигур

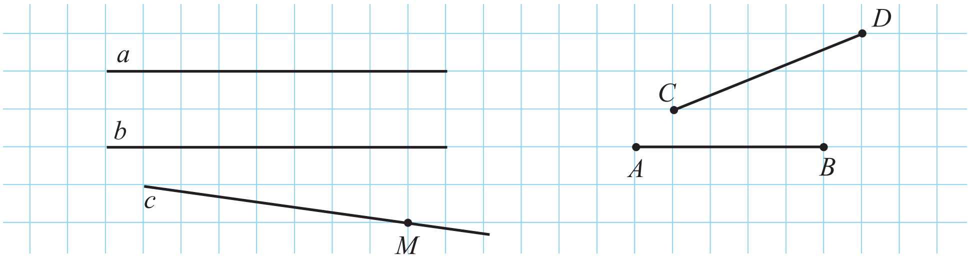
3.1. Расстояния

Расстояние между двумя геометрическими фигурами F_1 и F_2 – это длина наименьшего отрезка, концы которого принадлежат фигурам F_1 и F_2 соответственно.

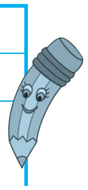
Очевидно, что расстояние между точками A и B равно длине отрезка AB.

Обозначаем: $d(A, B)$ или AB.

1 Рассмотрите рисунок и заполните таблицу. Сделайте вывод.



Фигура ①	A	a	a	$[AB]$	M	C	A
Фигура ②	B	b	c	$[CD]$	a	AB	b
Расстояние между фигурами ① и ② (см)							



2 Обратите внимание на свойства расстояний между двумя точками, прокомментируйте их и проиллюстрируйте примерами.

Запомните

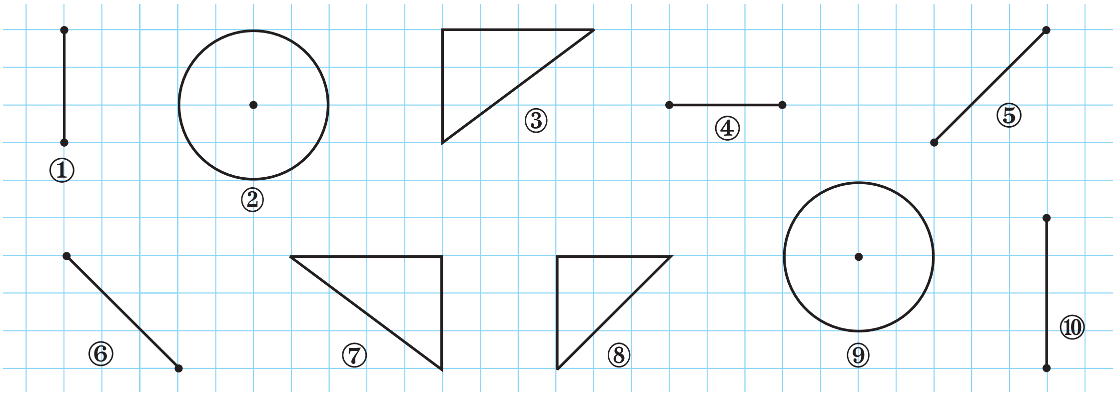
Свойства расстояний между двумя точками

1° $d(A, A) = 0$; 2° $d(A, B) = d(B, A)$; 3° $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

- Каково взаимное расположение точек A, B, C, если $d(A, B) < d(A,C) + d(C,B)$?

3.2. Конгруэнтность фигур

1 Рассмотрите рисунок и выберите пары фигур, которые при наложении совпадают.



Определение Две геометрические фигуры F_1 и F_2, которые при наложении совпадают, называются **конгруэнтными фигурами**.

Обозначаем: $F_1 \equiv F_2$. *Читаем*: «фигура F_1 конгруэнтна фигуре F_2».

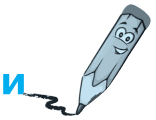
- Используя определение конгруэнтных фигур, подумайте и дополните:
  а) Два отрезка конгруэнтны, если ... равны.
  б) Две окружности конгруэнтны, если ... равны.
  в) Два угла конгруэнтны, если ... равны.
  г) Два прямоугольника конгруэнтны, если ... равны.

2 Даны геометрические фигуры F_1, F_2, F_3. Что можно сказать о конгруэнтности фигур F_1 и F_2, если $F_1 \equiv F_3$ и $F_2 \equiv F_3$?

Теорема

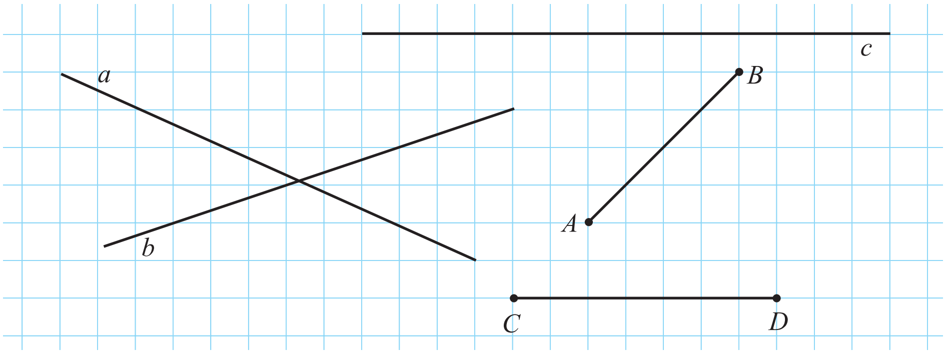
Если $F_1 \equiv F_3$ и $F_2 \equiv F_3$, то $F_1 \equiv F_2$.

Упражнения и задачи

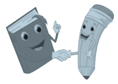


☑ ☐ ☐

1. Рассмотрите рисунок и заполните таблицу.

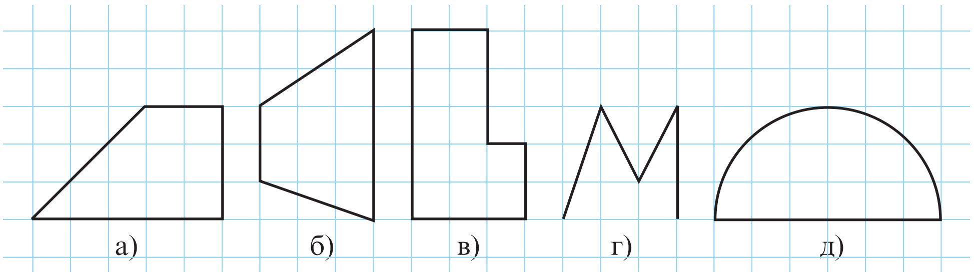


Фигура ①	a	a	b	a	$[CD]$	$[AB]$	$[AB]$
Фигура ②	b	$[CD]$	AB	c	c	$[CD]$	c
Расстояние между фигурами ① и ② (см)	0						



2. ***Работайте в парах!*** Дополните так, чтобы получить истинное высказывание.
а) Расстояние между пересекающимися прямыми равно .
б) Если расстояние между точкой A и прямой a равно 0, то .
в) Если расстояние между двумя компланарными прямыми отлично от 0, то прямые .
г) Если $AB + AC = BC$, то точки A, B, C являются .

3. Постройте фигуру, конгруэнтную фигуре, изображенной на рисунке:



а) б) в) г) д)

4. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно*?

а) Любые две прямые конгруэнтны.
б) Любые две полупрямые конгруэнтны.
в) Любые два квадрата конгруэнтны.
г) Любые две стороны квадрата конгруэнтны.

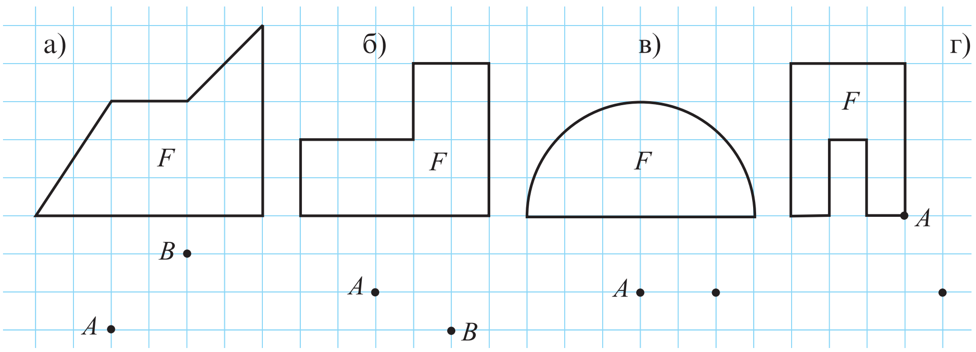
☑☑☐

5. Расстояние между двумя конгруэнтными отрезками равно 18 см. Найдите расстояние между серединами отрезков, если их концы коллинеарны, и длина одного из отрезков равна 10 см.

6. Расстояние между двумя конгруэнтными отрезками равно 24 см. Найдите длину отрезков, если известно, что она в 2 раза меньше расстояния от середины одного отрезка до другого отрезка, а концы отрезков коллинеарны.

7. Прямые a, b, c параллельны. Расстояние между прямыми a и c в два раза меньше, чем расстояние между прямыми b и c. Каким может быть расстояние между прямыми a и c, b и c, если расстояние между прямыми a и b равно 12 см?

8. Перечертите и постройте фигуру F_c, конгруэнтную изображенной на рисунке фигуре F, так, чтобы точки A и B принадлежали фигуре F_c.



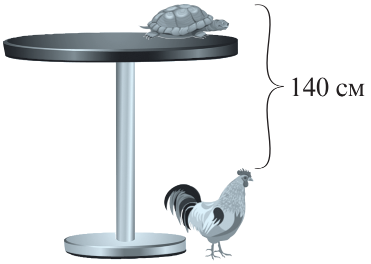
☑☑☑

9. ***Работайте в парах!*** Точки M, N и L коллинеарны. Вычислите расстояние между серединами отрезков MN и NL, если $MN = 10$ см и $[MN] \equiv [NL]$.
Рассмотрите все возможные случаи.

10. Сторона квадрата конгруэнтна одной из сторон прямоугольника, а периметр квадрата в 2 раза меньше периметра прямоугольника. Во сколько раз длина стороны квадрата меньше длины стороны прямоугольника?

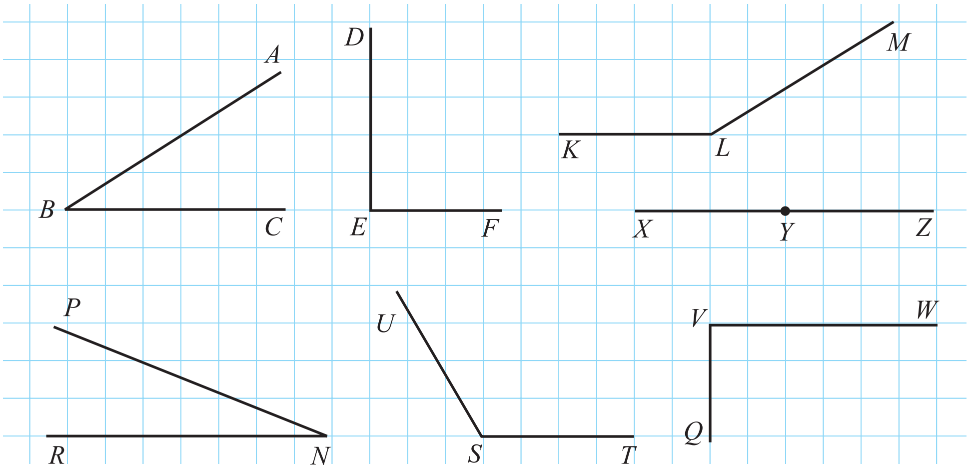
Занимательная математика

11. Какова высота стола?



§4. Углы

1 Рассмотрите рисунок и дополните.



а) Угол – это геометрическая фигура, образованная...

б) Элементами угла ABC являются...

в) Углы DEF и QVW являются...

г) Углы ABC и PNR являются...

д) Углы ______ и ______ являются тупыми.

е) Угол XYZ – ______________ .

ж) Угол, стороны которого совпадают, называется ______________ .

Вспомним

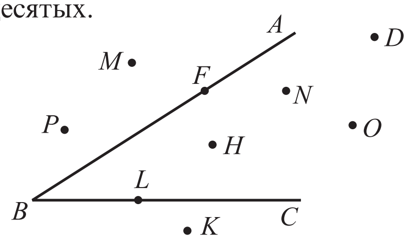
- **Углом** называется геометрическая фигура, образованная двумя полупрямыми (**стороны** угла) с общим началом (**вершина** угла).
- Величина **острого** угла меньше 90°.
  Величина **тупого** угла больше 90° и меньше 180°.
  Величина **прямого** угла равна 90°.
  Величина **развернутого** угла равна 180°.
  Величина **нулевого** угла равна 0°.

- Используя транспортир, найдите градусную меру изображенных в задании **1** углов. Результаты округлите до десятых.

2 Рассмотрите рисунок и укажите, какие точки принадлежат:

а) внутренней области угла ABC;

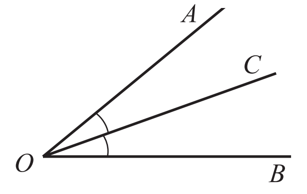
б) внешней области угла ABC.



Вспомним

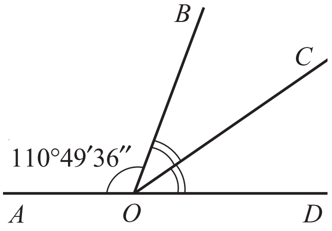
- Угол ABC (величина которого больше 0° и меньше 180°) разделяет плоскость на два множества, которые называются **внутренней областью угла** (множество точек, заключенных между сторонами угла, обозначается $\text{Int}\angle ABC$) и **внешней областью угла** (обозначается $\text{Ext}\angle ABC$).
- Углы одинаковой величины называются **конгруэнтными**.
- Два угла, лежащие в одной плоскости, называются **смежными углами**, если у них есть общая вершина и общая сторона, которая расположена между двумя другими сторонами.

- Углы A и B называются **дополнительными до 90°**, если сумма их величин равна 90°. В этом случае угол A называется **дополнительным до 90°** углу B и наоборот.
- Углы A и B называются **дополнительными до 180°**, если сумма их величин равна 180°. В этом случае угол A называется **дополнительным до 180°** углу B.
- Два угла называются **вертикальными**, если у них общая вершина и их стороны являются дополнительными полупрямыми.
- Вертикальные углы конгруэнтны.
- **Биссектрисой угла** называется полупрямая с началом в вершине угла, лежащая во внутренней области угла и образующая со сторонами этого угла два конгруэнтных угла.



$[OC$ – биссектриса угла AOB.

Применяем 3 Вычислите $m(\angle COD)$, если $m(\angle AOB) = 110°49'36''$, а полупрямая $[OC$ является биссектрисой угла BOD.



Объясняем ① Сначала вычислим $m(\angle BOD)$.
Углы AOB и BOD являются смежными и дополнительными до 180°.
Следовательно, $m(\angle BOD) = 180° - m(\angle AOB)$.

градусы
минуты
секунды

$$180° - 110°49'36'' = ? \rightarrow \begin{array}{r} \overset{1°}{\frown} \\ 180°\,0'\,0'' - \\ 110°49'36'' \\ \hline ? \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} \overset{1'}{\frown} \\ 179°60'\,0'' - \\ 110°49'36'' \\ \hline ? \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 179°\,59'\,60'' - \\ 110°\,49'\,36'' \\ \hline \square°\,\square'24'' \end{array}$$

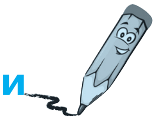
$m(\angle BOD) = \square°\,\square'24''$.

② $m(\angle COD) = m(\angle BOD) : 2 = 69°\overset{1°}{\frown}10'\,\square'' : 2 = 68°\,\square'\,\square'' : 2 = \square°\,\square'\,\square''$.

Ответ: $\square$.

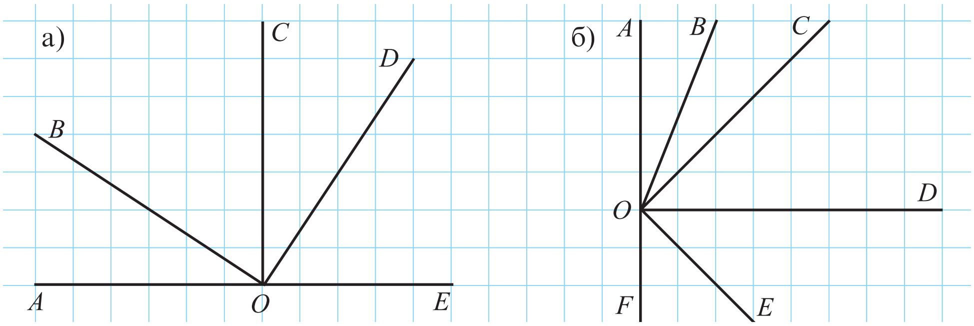
Замечание При выполнении арифметических действий с величинами углов учитывается, что $1° = 60'$ и $1' = 60''$.

Упражнения и задачи



☑ ☐ ☐

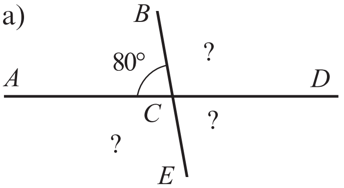
1. Рассмотрите рисунок и укажите углы:
а) острые;
б) прямые;
в) тупые;
г) развернутые.

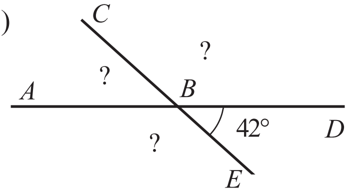


2. Рассмотрите рисунок предыдущего упражнения и укажите пары углов:
а) дополнительных до 180°; б) дополнительных до 90°; в) смежных;
г) смежных и дополнительных до 90°; д) смежных и дополнительных до 180°.

3. Вычислите величину угла:
а) дополнительного до 90° углу, равному 60°;
б) дополнительного до 90° углу, равному 38°;
в) дополнительного до 180° углу, равному 70°;
г) дополнительного до 180° углу, равному 11°.

4. *Работайте в парах!* Вычислите величины неизвестных углов, изображенных на рисунке.


а)


б)

5. Найдите величину угла, если известно, что величина ему дополнительного до 90° угла:
а) в 5 раз больше; б) в 4 раза меньше;
в) на 50° больше; г) на 60° меньше.

6. Найдите величину угла, если известно, что величина ему дополнительного до 180° угла:
а) в 3 раза меньше; б) в 5 раз больше;
в) на 70° больше; г) на 128° меньше.

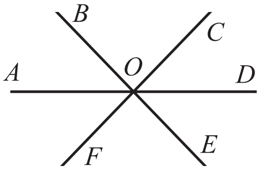
7. Вычислите:
а) $48°30' + 54°40'$;
б) $112°48' + 49°15'$;
в) $99°25'34'' + 27°28'29''$;
г) $36°37'38'' + 39°38'37''$.

8. Вычислите:
а) $88°12' - 26°41'$; б) $170° - 64°39$;
в) $95°40' - 28°54'43''$; г) $100° - 37°48'59''$.

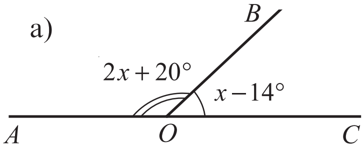
9. Вычислите: а) $47°24' : 2$; б) $125°37' : 2$;
в) $19° : 3$; г) $21° : 4$.

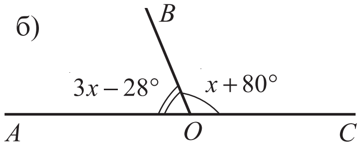
☑☑☐

10. Рассмотрите рисунок и определите множество:
а) $\angle AOC \cap \angle BOC$; б) $\angle FOD \cap \angle AOE$;
в) $\angle FOE \cap \angle DOE$; г) $\angle BOF \cap \angle DOF$.



11. *Работайте в парах!* Рассмотрите рисунок и найдите величины углов *AOB* и *BOC*:


а)


б)

12. Величина угла равна 44°. Найдите величины углов, образованных биссектрисой данного угла и сторонами угла, дополнительного до 90° данному углу, и смежного с ним.

13. Величина угла равна 68°. Найдите величины углов, образованных биссектрисой данного угла и сторонами угла, дополнительного до 180° данному углу, и смежного с ним.

14. Разность величин двух углов, дополнительных до 180°, на 100° меньше их суммы. Найдите величины этих углов.

15. *Исследуйте! Истинно* или *Ложно*?
а) Величины вертикальных углов, дополнительных до 180°, равны 90°.
б) Величины вертикальных углов, дополнительных до 90°, равны 90°.
в) Величина угла, образованного биссектрисами углов, дополнительных до 90°, равна 45°.
г) Величина угла, образованного биссектрисами углов, дополнительных до 180°, равна 90°.

16. При пересечении двух прямых образуется 4 угла. Каковы величины углов, если сумма величин 3 углов равна 200°?

☑☑☑

17. Стороны двух углов с общей вершиной попарно перпендикулярны. Каково взаимное расположение биссектрис этих углов?

18. Вычислите величину угла, образованного стрелками часов, показывающими 2 часа 10 минут.

§5. Математические высказывания. Аксиомы. Теоремы

5.1. Утверждения и математические высказывания

- Алина заметила в тетради брата следующие записи:

- Корова – домашнее животное. – **И**
- Число 13 кратно числу 5. – **Л**
- Луна – спутник Земли. – **И**
- Число 21 нечетное. – **И**
- Париж – столица Испании. – **Л**

- Время проходит быстро.
- Число $\frac{1}{10}$ очень маленькое.
- Зима – самое красивое время года.
- Трудно переплыть Днестр.

Работайте в парах!

• Обсудите и объясните:

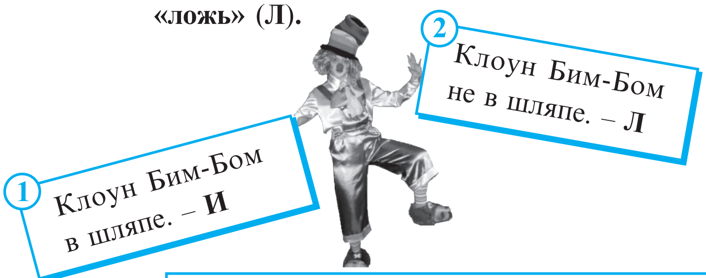
– Что означают буквы **И** и **Л** справа от высказываний на первой странице?

– Почему рядом с высказываниями на второй странице эти буквы отсутствуют?

Высказывание (математическое) – это утверждение, о котором с уверенностью можно сказать истинно (**И**) оно или ложно (**Л**).

Если высказывание **истинно**, то говорят, что его **истинностное значение – «истина»** (**И**).

Если высказывание **ложно**, то говорят, что его **истинностное значение – «ложь»** (**Л**).



Приведите пример истинного высказывания и пример ложного высказывания. Сформулируйте утверждение, которое не является высказыванием.

Высказывание ② является **отрицанием высказывания** ①.
Каждому высказыванию соответствует другое высказывание, которое называется **отрицанием исходного высказывания** и которое, как правило, получают из исходного высказывания приписыванием частицы *не* перед глаголом.
Высказывание и его отрицание имеют различные истинностные значения.

Объясняем **1.** Сформулируйте отрицание высказывания, затем определите, какое высказывание является истинным, а какое ложным:

а) Ноль – наименьшее натуральное число. б) Число 33 кратно 9.

Решение:

а) Ноль – наименьшее натуральное число. – И
Ноль не является наименьшим натуральным числом. –

б) Число 33 кратно 9. –
 –

Из простых высказываний с помощью слов *и*, *или*, *если*..., *то*... можно составить сложные высказывания.

2. Определите, какие из высказываний являются истинными, а какие ложными:

а) Число 5 нечетное и $5 < 7$.

б) Пустыня Сахара находится в Европе, или пустыня Сахара находится в Африке.

в) Если сегодня вторник, то завтра будет среда.

5.2. Аксиомы. Теоремы

Истинные математические высказывания, которые принимаются без доказательств, называются **аксиомами.** Математическое высказывание, истинность которого надо доказать, называется **теоремой**.

Доказательство теоремы – это последовательность логических рассуждений, основанных на аксиомах, теоремах и свойствах (уже доказанных).

Примеры

1. Высказывания «Для любой прямой существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей» и «Любые две различные точки определяют одну и только одну прямую» являются аксиомами.
2. Высказывание «Если две прямые имеют две различные общие точки, то они совпадают» является теоремой. Ее истинность можно доказать.

Теорему можно сформулировать так: «Если U, то Z».

Высказывание U называется **условием** теоремы, а высказывание Z – **заключением** теоремы.

Условие теоремы – это истинное высказывание. Заключение теоремы – это высказывание, истинность которого надо доказать.

Поменяв местами условие теоремы с ее заключением, получим новое высказывание, которое называется **обратным** исходной теореме. Высказывание, обратное исходной теореме, может быть истинным (т. е. новой теоремой) или ложным. Если высказывание, обратное исходной теореме, также является теоремой, то исходная теорема называется **прямой теоремой**, а обратная – обратной теоремой.

Примеры

1. Теореме «Если целое число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 10» соответствует обратное высказывание – «Если целое число делится на 10, то оно оканчивается цифрой 0», которое является истинным высказыванием (теоремой).
2. Теореме «Если целое число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 5» соответствует обратное высказывание – «Если целое число делится на 5, то оно оканчивается цифрой 0», которое является ложным.

Существуют разные методы доказательств теорем.

Иногда вместо доказательства того, что высказывание Z истинно, легче доказать, что оно не может быть ложным. Этот метод доказательства называется *методом от противного*. Он основывается на том, что:

> Высказывание «Если $\boldsymbol{U}$, то $\boldsymbol{Z}$» является истинным тогда и только тогда, когда является истинным высказывание «Если **отрицание** $\boldsymbol{Z}$, то **отрицание** $\boldsymbol{U}$». (*)

Этапы доказательства методом от противного

1. Предполагаем, что заключение Z ложно (то есть отрицание Z истинно).
2. Исходя из этого предположения, путем логических рассуждений приходим к противоречию либо аксиом, либо теорем, либо показываем, что условие U ложно (то есть отрицание U истинно).
3. Согласно (*) заключение Z теоремы является истинным.

Пример

Докажем методом от противного следующую теорему:
«Если две прямые имеют две различные общие точки, то прямые совпадают».

Доказательство:

1. Предположим, что заключение «прямые совпадают» не является истинным, то есть пусть «прямые различны».

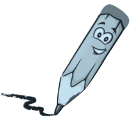
2. Получим, что через две различные точки проходят **две** различные прямые. Это противоречит аксиоме «Любые две различные точки определяют **одну и только одну** прямую».
3. Полученное противоречие доказывает, что предположение было неверным, т. е. заключение «прямые совпадают» является истинным. Что и требовалось доказать (ч. т. д.).

- Докажите теорему:
  «Если три точки являются неколлинеарными, то каждые две из них различны».

Замечание Иногда для того, чтобы доказать, что высказывание не является истинным, необходимо найти пример (называемый **контрпримером**), который противоречит высказыванию.

- Докажите, что высказывание «Если целое число делится на 5, то оно оканчивается цифрой 0» является ложным.

Упражнения и задачи

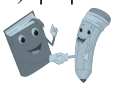


☑☐☐

1. Выберите высказывания и установите их истинностное значение.
а) «Через три коллинеарные точки можно провести две различные прямые».
б) «Периметр квадрата со стороной 0,75 см равен 30 мм».
в) «$3 \cdot 3 = 10$».
г) «Летом температура воздуха не ниже 5 °С».
д) «Существуют белые кошки».
е) «Скорость звука больше скорости света».

2. Сформулируйте отрицание каждого высказывания из упражнения **1**.

3. При каких целых значениях a высказывание является истинным?
а) $a+2=3$.
б) $a+a=a$.
в) $|a|=4$.
г) $2a-3a=-a$.



4. *Работайте в парах!* Укажите условие и заключение теоремы:
а) Если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$.
б) Если число делится на 8, то оно делится и на 4.
в) Если из четырех заданных точек каждые три точки коллинеарны, то все четыре точки коллинеарны.
г) Если a, b, c – действительные числа, $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

5. Сформулируйте высказывания, обратные теоремам из упражнения **4**. Установите их истинностное значение.

6. *Работайте в группах!* Докажите, приведя контрпримеры, что следующие высказывания являются ложными.
а) «Если натуральное число оканчивается цифрой 7, то это число простое».
б) «Любое число вида $\sqrt{a}$ является иррациональным».
в) «В русском языке нет слов, которые содержат подряд 4 согласных».
г) «Уравнение $x^2 = 2x$ не имеет целых решений».

7. Примените метод от противного и докажите истинность высказываний.
а) «Если $a \neq b$, то $a+3 \neq b+3$».
б) «Если завтра воскресенье, то сегодня суббота».
в) «Если длина стороны равностороннего треугольника равна 8 см, то периметр треугольника равен 24 см».
г) «Число 19 – простое».

☑☑☐

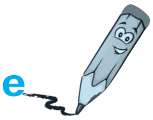
8. ***Работайте в парах!*** Сформулируйте отрицание высказываний.
а) «Любое натуральное число является рациональным».
б) «Существуют отрицательные числа».
в) «Все числа являются целыми».
г) «Существуют натуральные числа, которые не являются целыми».
Что вы заметили?

9. Дана теорема: «Если натуральное число делится на 3, то сумма его цифр также делится на 3». Сформулируйте высказывание, обратное этой теореме. Определите ее истинностное значение.

☑☑☑

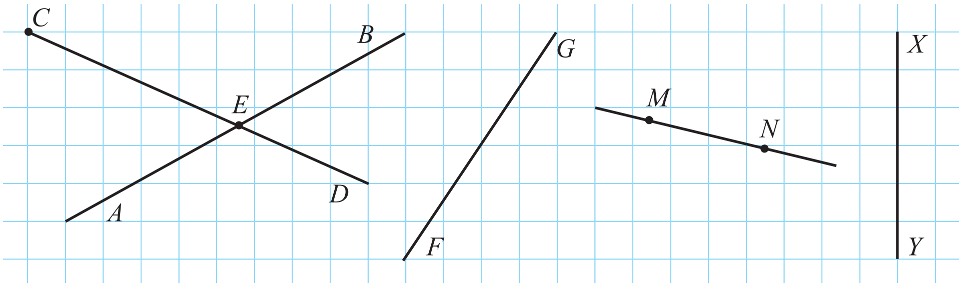
10. Докажите, что:
а) для любого целого числа n, если $n^2 \vdots 16$, то $n^2 \vdots 4$;
б) в любом треугольнике существует не более одного тупого угла.

Упражнения и задачи на повторение



☑☐☐

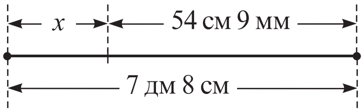
1. Рассмотрите и укажите:
а) прямые; б) полупрямые; в) отрезки.



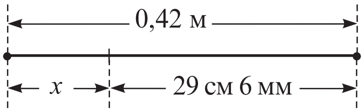
2. Прочитайте обозначения:
а) MN, $[MN$, $[MN]$, $[NM$, m, $[mN$, α; б) d, $[dA$, $[DA]$, $[AD$, AD, $[DA$, β.

3. Прочитайте:
а) $M \in d$ и $M \notin l$; б) $\{X, Y, Z\} \subset \alpha$; в) $a \cap b = \{M\}$;
г) $C \in [AB$; д) $X \notin AB$; е) $XY = YZ$.

4. Найдите x:
а)



б)



5. Постройте рисунок, соответствующий описанной ситуации:
а) Точки M, R, S – коллинеарны, а прямые AB и CD пересекаются в точке R.
б) Прямые a, b, c попарно пересекаются в точках A, B, C, $a \cap b = \{A\}$, $B \notin c$.
в) Полупрямые $[MN$ и $[MP$ не являются противоположными полупрямыми, а точки L, N, P – коллинеарны.
г) Точки X и Y принадлежат полупрямым $[AB$ и $[CD$.

6. ***Работайте в парах!*** Измерьте линейкой и вычислите реальную длину:

а) автомобиля; б) грузовика.

Масштаб 1 : 90

Масштаб 1 : 160

Указание. Если масштаб рисунка 1 : *n*, то в реальности нарисованный предмет в *n* раз больше.

7. Точка M принадлежит отрезку AB. Найдите расстояние между серединами отрезков AM и MB, если $AB = 6$ см.

☑☑☐

8. Четверть длины отрезка MN равна половине длины отрезка KP, который на 24 см короче. Найдите длину каждого отрезка.

9. Точки A, B, C, D коллинеарны. $AB = 1$ см, $BC = 2$ см, $CD = 4$ см. Какова может быть длина отрезка AD?

10. На линейке указаны лишь деления 0 см, 7 см и 11 см. Как с помощью этой линейки построить отрезок длиной:

а) 18 см; б) 5 см; в) 10 см?

11. Точка C принадлежит отрезку AB. Найдите:

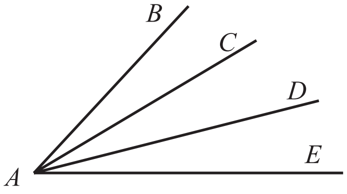
а) $\frac{AB}{AC}$, если $\frac{AC}{BC} = \frac{2}{5}$; б) $\frac{BC}{AB}$, если $\frac{BC}{AC} = 0{,}75$; в) $\frac{AC}{BC}$, если $\frac{AB}{BC} = 1{,}(3)$.

12. ***Работайте в парах!***

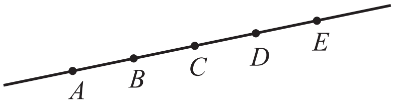
а) Сколько углов изображено на рисунке?

б) Сколько углов получится, если во внутренней области одного из углов провести 5 полупрямых; 6 полупрямых?

в) Сколько полупрямых надо провести во внутренней области одного из углов, чтобы получить 21 угол; 28 углов?



13. Рассмотрите рисунок и укажите все полупрямые.



14. Рассмотрите рисунок из предыдущего упражнения и определите:

а) $[AC]\cap[BE]$; б) $[CA]\cup[AD]$;

в) $[AB]\cap[CD]$; г) $[BE\cup[CD$;

д) $[BD\cap[CA$; е) $AE\cap[BC\cap[CD$.

15. Точка A является серединой отрезка BC, $D \in BC$ так, что $AD = 3{,}(3)$ см и $AB = 3{,}75$ см. Какова может быть длина отрезка CD?

16. ***Работайте в парах!*** Установите истинностное значение высказывания.

а) «Число 5 является делителем числа 20».

б) «Разность любых двух натуральных чисел является натуральным числом».

в) «Слово *математика* состоит из 9 букв».

г) «Отрицание истинного высказывания является ложным».

17. Сформулируйте обратные высказывания.

а) «Если сегодня 1 мая, то через 60 дней будет лето».

б) «Если у Вани есть 100 леев, то ему хватит денег, чтобы купить подарок за 90 леев».

в) «Если $a = 0$, то $\frac{8}{a}$ не имеет смысла».

г) «Если четырехугольник является квадратом, то у него все углы прямые».

18. Установите истинностное значение высказываний из упражнения 17 и высказываний, обратных им.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. Постройте рисунок, соответствующий описанной ситуации:

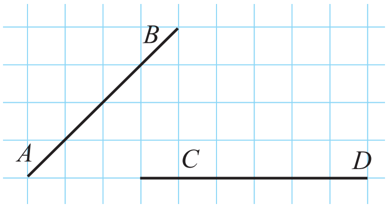
$A \in BC$, $D \notin BC$, $[AB] \equiv [AC]$ и $[BD] \equiv [DC]$.

2. *Истинно* или *Ложно*?

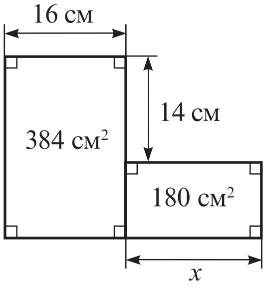
$[AB] \cup [BA = AB$.

3. Вычислите: $40°32' + 28°49'$.

4. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.



5. Найдите x:



6. Найдите величину угла, если величина его дополнительного до 180° угла больше в 4 раза.

7. Сформулируйте и установите истинностное значение обратного высказывания: «Если $5a = 0$, то $a = 0$».

Вариант 2

1. Постройте рисунок, соответствующий описанной ситуации:

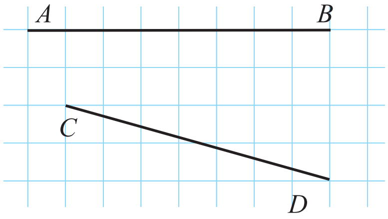
$M \in [AB$, $N \in [AC$, $K \in [AD$ и $N \in MK$.

2. *Истинно* или *Ложно*?

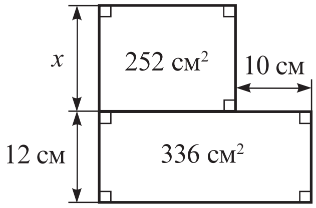
$[AB \cup [BA = [AB]$.

3. Вычислите: $20°47' + 13°25'$.

4. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.



5. Найдите x:



6. Найдите величину угла, если величина его дополнительного до 180° угла меньше в 8 раз.

7. Сформулируйте и установите истинностное значение обратного высказывания: «Если $n \vdots 4$, то $n \vdots 2$».

2
глава

Конгруэнтные треугольники

> *Математика – это не язык, это приключение.*
> Пол Локхарт

§1. Треугольник и его элементы. Повторение и дополнения

Вспомним

Геометрическая фигура, образованная объединением отрезков [*AB*], [*AC*], [*BC*], где *A*, *B*, *C* – три неколлинеарные точки, называется **треугольником** *ABC* и обозначается ΔABC. Точки *A*, *B*, *C* называются **вершинами** треугольника, отрезки [*AB*], [*AC*], [*BC*] – **сторонами** треугольника, а углы *ABC*, *ACB*, *BAC* – **углами** треугольника *ABC*.

Замечание

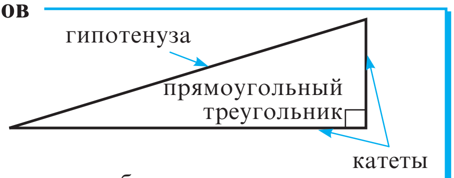
Внутренняя область треугольника *ABC* обозначается $\mathrm{Int}\Delta ABC$, а внешняя область – $\mathrm{Ext}\Delta ABC$.

1 Рассмотрите классификацию треугольников и название их элементов.

Классификация треугольников

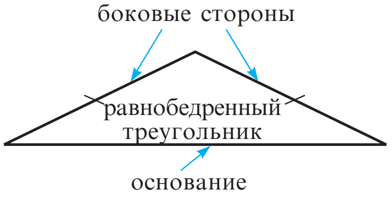
✓ **по углам**

У **остроугольного** треугольника все углы острые.
У **прямоугольного** треугольника один угол прямой.
У **тупоугольного** треугольника один угол тупой.

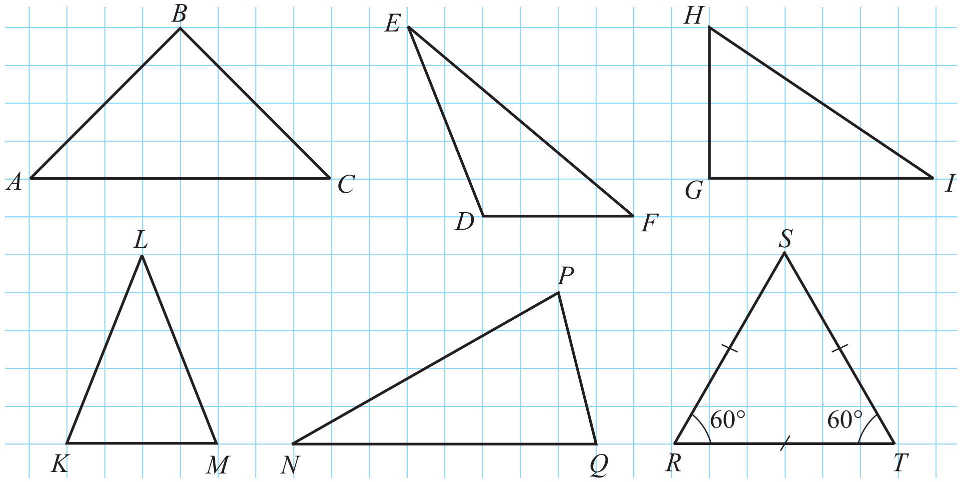


✓ **по сторонам**

У **разностороннего** треугольника все стороны разной длины.
У **равнобедренного** треугольника две стороны конгруэнтны.
У **равностороннего** треугольника все стороны конгруэнтны.



- Рассмотрите рисунок и дополните.



а) Треугольники KLM и ______ являются остроугольными, так как...

б) Треугольники ABC и HGI являются ______, так как...

в) Стороны HG и GI называются ______ треугольника HGI. Сторона ______ называется гипотенузой треугольника ABC.

г) Треугольник DEF является ______, так как $m(\angle D) >$ ______.

д) Треугольники ______ и ______ являются равнобедренными, так как...

е) Треугольник NPQ является ______, так как...

ж) Треугольник ______ является равносторонним, так как...

з) Если $m(\angle N) = 35°$ и $m(\angle Q) = 75°$, то $m(\angle P) =$ ______.

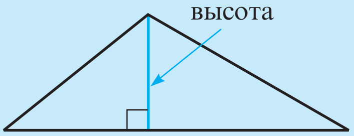
Свойства

1° Из свойств расстояний следует, что для любого треугольника ABC верны соотношения:
$AB + AC > BC,\ AB + BC > AC,\ AC + BC > AB$ (**неравенства треугольника**).

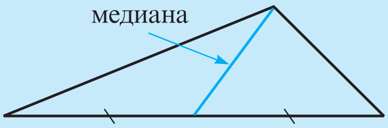
2° Сумма величин углов треугольника равна 180°.

Определения

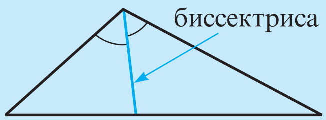
- **Высотой** треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, в которой прямая, проходящая через эту вершину перпендикулярно прямой, содержащей противолежащую сторону, пересекает эту прямую.



- **Медианой** треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.



- **Биссектрисой** треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны.



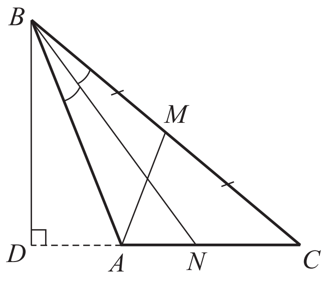
Применяем

2 Рассмотрите рисунок и дополните одним из понятий: высота, медиана, биссектриса.

а) Отрезок BD является ______ треугольника ABC, так как...

б) Отрезок AM является ______ треугольника ABC, так как $[BM] \equiv [MC]$.

в) Отрезок BN является ______ треугольника ABC, так как...



3 Вспомните определение конгруэнтных фигур и установите, какие отношения существуют между соответствующими сторонами и углами двух конгруэнтных треугольников.

Определение Два **треугольника** называются **конгруэнтными**, если стороны и углы одного из них соответственно конгруэнтны сторонам и углам другого.

Замечание При обозначении двух конгруэнтных треугольников необходимо соблюдать порядок записи вершин треугольника.

Так, обозначение

$\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$ означает, что

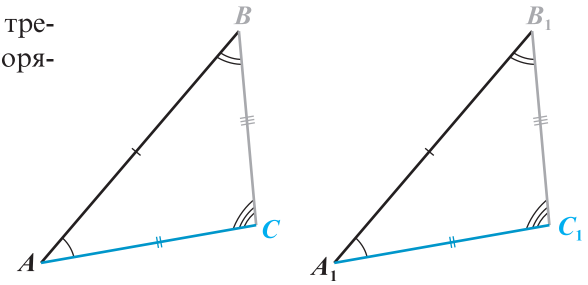
$\angle A \equiv \angle A_1,\ \angle B \equiv \angle B_1,\ \angle C \equiv \angle C_1$

и $[AB] \equiv [A_1B_1]$,

$[AC] \equiv [A_1C_1]$,

$[BC] \equiv [B_1C_1]$.

Если это не означает, что, например, $\Delta ABC \equiv \Delta B_1A_1C_1$.



■ – соответственные вершины;

🟦 – соответственные вершины;

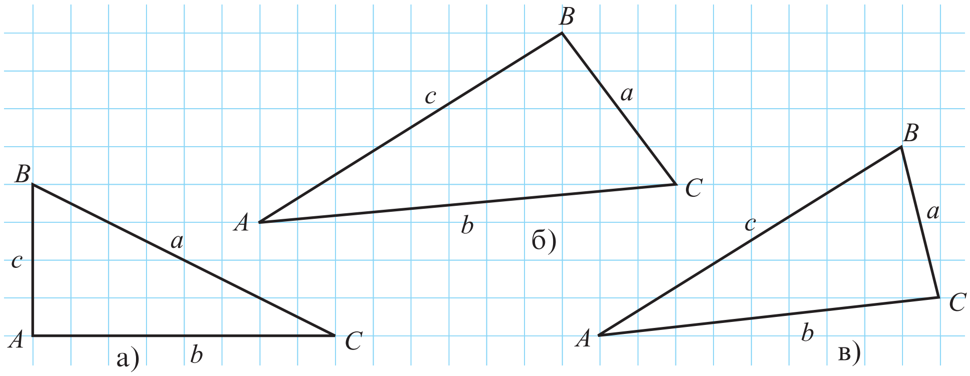
▨ – соответственные вершины;

— – соответственные стороны;

= – соответственные стороны;

≡ – соответственные стороны.

4 Рассмотрите рисунок. Используя циркуль и транспортир, сравните длины сторон, затем величины углов треугольника.



Дополните:

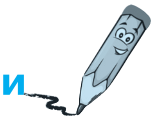
а) ☐ $< b < a$; б) $a <$ ☐ $<$ ☐; в) ☐ $<$ ☐ $< c$;

☐ $< m(\angle B) <$ ☐; $m(\angle A) <$ ☐ $<$ ☐; ☐ $<$ ☐ $< m(\angle C)$.

Теорема Против наибольшего угла треугольника лежит наибольшая его сторона.

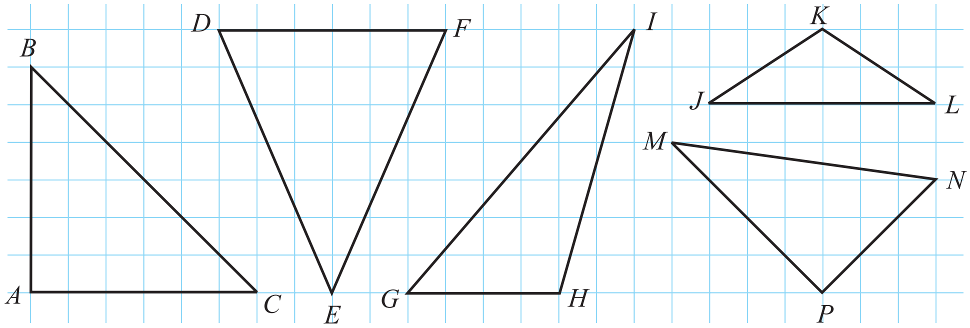
- Высказывание, обратное данной теореме, также является теоремой. Сформулируйте теорему, обратную данной теореме.

Упражнения и задачи

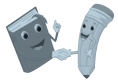


☑ ☐ ☐

1. Рассмотрите рисунок и укажите треугольники:
а) остроугольные;
б) прямоугольные;
в) тупоугольные;
г) равнобедренные;
д) разносторонние;
е) равнобедренные прямоугольные.



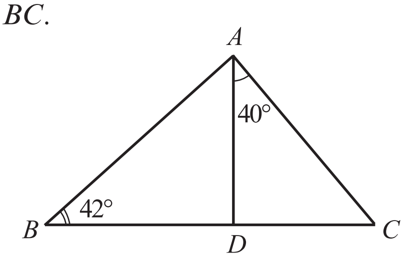
2. Назовите элементы треугольника ABC, изображенного в упражнении **1**. Измерьте линейкой стороны треугольника ABC и вычислите его периметр.

3.  ***Работайте в парах!*** Выполните рисунок, соответствующий описанной ситуации:
а) Точки M и N принадлежат треугольнику ABC, точки K и L – внутренней области треугольника ABC, а точка P – внешней области треугольника ABC так, что точки A, M, N, K, P коллинеарны.
б) Треугольник ABC – равнобедренный тупоугольный с основанием, равным 4 см.
в) Треугольники KLM и LMN – равнобедренные прямоугольные.
г) Треугольники KLM и KLN – равнобедренные тупоугольные и $KM \cap LN = \{R\}$.

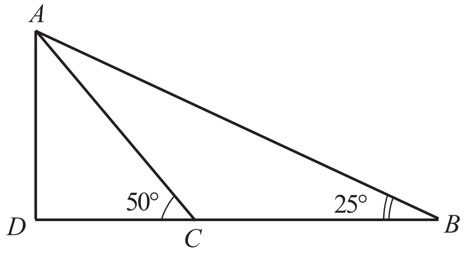
4. Дан треугольник ABC. Вычислите $m(\angle A)$, если:
а) $m(\angle B) = m(\angle C) = 35°$;
б) $m(\angle B) = 48°$, $m(\angle C) = 84°$;
в) $m(\angle B) + m(\angle C) = 130°$;
г) $m(\angle A) = m(\angle B) = m(\angle C)$.

5. Вычислите периметр треугольника ABC, если:
а) $AB = AC = BC = 9{,}7$ см;
б) $AB = 2AC = 16$ см, $BC = 10{,}6$ см;
в) $AB = 0{,}8(AC + BC) = 12$ см;
г) $AB + AC = 15$ см, $AB + BC = 16$ см, $AC + BC = 17$ см.

6. Рассмотрите рисунок и вычислите величину угла A треугольника ABC, если AD – высота треугольника ABC.

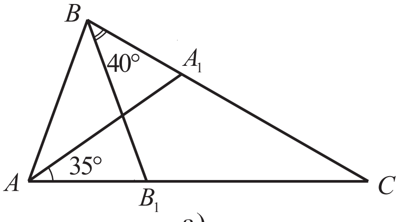


а)

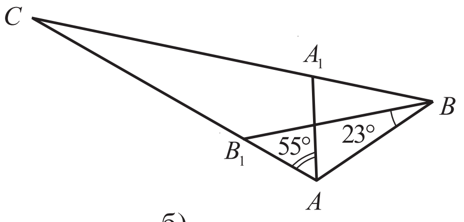


б)

7. Рассмотрите рисунок и вычислите величины углов треугольника ABC, если $[AA_1]$ и $[BB_1]$ – биссектрисы углов треугольника ABC.



а)



б)

8. $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ – медианы треугольника ABC. Вычислите периметр треугольника ABC, если:

а) $AC_1 = 7{,}8$ см, $BA_1 = 9$ см, $CB_1 = 8{,}7$ см;

б) $BC_1 = \sqrt{8}$ см, $BA_1 = \sqrt{18}$ см, $AB_1 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ см.

9. Определите, могут ли следующие три числа выражать длины (в одной и той же единице измерения) сторон треугольника:

а) 7, 9, 17; б) 3, 10, 13;

в) 12, 11, 20; г) $\sqrt{8}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{32}$.

10. ***Работайте в парах!*** Найдите наибольший и наименьший углы треугольника ABC, если:

а) $AB = 8$ см, $BC = 7$ см, $AC = 9$ см;

б) $AB = \dfrac{2}{3}AC$, $AC = 1{,}2BC$;

в) $AB = 4\sqrt{3}$ см, $BC = 3\sqrt{5}$ см, $AC = 7$ см.

11. Запишите стороны треугольника ABC в порядке возрастания их длин, если:

а) $m(\angle A) = 30°$, $m(\angle B) = 70°$;

б) $m(\angle B) = 60°$, $m(\angle C) = 10°$;

в) $m(\angle A) < m(\angle B) < 45°$.

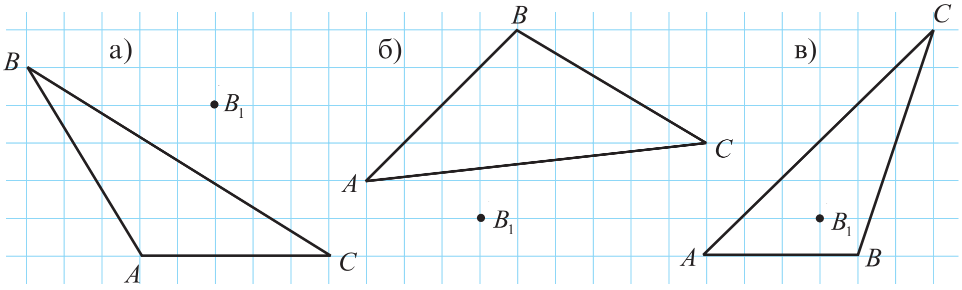
☑☑☐

12. Периметр треугольника ABC равен 44 см, а периметр треугольника ACD – 52 см. Чему равен периметр треугольника ABD, если $AC = 18$ см и $C \in [BD]$?

13. Вычислите периметр равностороннего треугольника ABC, если $M \in [AC]$ и $AM = 3MC = 12{,}6$ см.

14. Вычислите площадь треугольника ABC, если $m(\angle B) = 90°$, $AB = 12{,}4$ см и $BC = 8{,}5$ см.

15. Перечертите рисунок и постройте треугольник $A_1B_1C_1$, конгруэнтный треугольнику ABC, так, чтобы точка B_1 соответствовала вершине B.



16. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно*?

а) Если ΔABC – равнобедренный с основанием $[AC]$, то $\Delta ABC \equiv \Delta CBA$.

б) Если $\Delta ABC \equiv \Delta CBA$, то ΔABC – равнобедренный.

в) Если $\Delta ABC \equiv \Delta CBA \equiv \Delta BAC$, то ΔABC – равносторонний.

г) Если $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, $m(\angle B) = 90°$ и $m(\angle A) + m(\angle D) = 70°$, то $m(\angle F) = 20°$.

17. Длины сторон треугольника выражены последовательными натуральными числами. Найдите эти длины, если периметр треугольника равен 54 см.

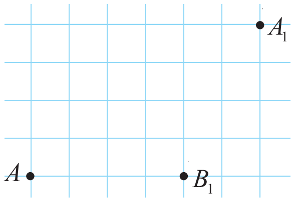
18. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно*?

а) Существует треугольник со сторонами 6 см, 8 см, 14 см.

б) Высота треугольника не длиннее медианы, проведенной к той же стороне.

☑☑☑

19. Точка A, изображенная на рисунке, является вершиной треугольника ABC, а точки A_1 и B_1 – середины сторон BC и AC этого треугольника. Перечертите рисунок и линейкой и циркулем «восстановите» треугольник ABC.



20. Дан треугольник ABC. Величина угла A в 1,8 раза меньше величины угла B и в 5 раз больше величины угла C. Найдите величины углов треугольника.

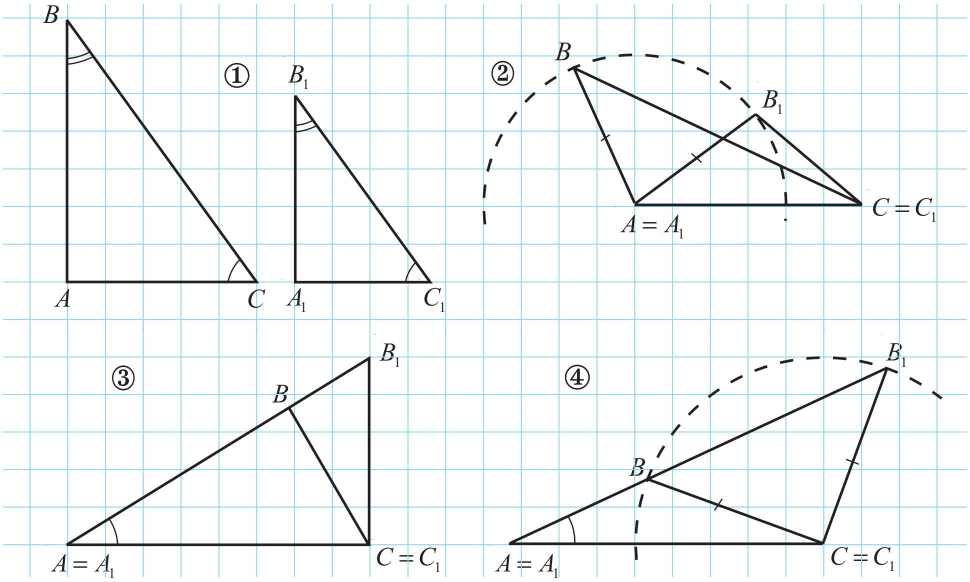
21. Какой длины может быть сторона AB треугольника ABC, если AB на 2 см больше $\dfrac{AC}{2}$ и на 32 см меньше $2BC$?

22. Докажите, что если AB – сторона наименьшей длины треугольника ABC, то $m(\angle C) < 90°$.

§2. Признаки конгруэнтности треугольников

2.1. Признаки конгруэнтности произвольных треугольников

Рассмотрите рисунок и запишите для каждого случая пары конгруэнтных элементов треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.



Исследуйте! • Определите, является ли высказывание истинным. Сделайте вывод.

а) «Если два угла одного треугольника соответственно конгруэнтны двум углам другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны».

б) «Если две стороны одного треугольника соответственно конгруэнтны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны».

в) «Если сторона и угол одного треугольника конгруэнтны стороне и углу другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны».

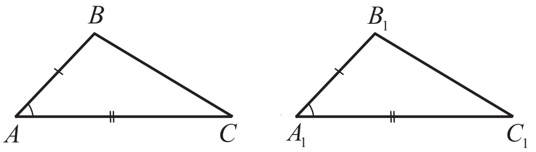
Замечание Чтобы утверждать, что два треугольника конгруэнтны, недостаточно знать две пары их элементов.

Запомните

Признаки конгруэнтности двух произвольных треугольников

1. Признак СУС (сторона–угол–сторона)

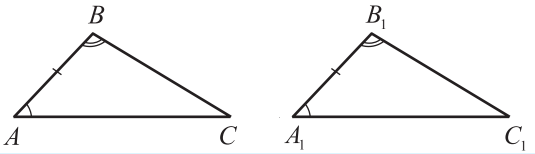
Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно конгруэнтны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.



$[AB]\equiv[A_1B_1]$
$[AC]\equiv[A_1C_1]$
$\angle A\equiv\angle A_1$
$\rightarrow$ $\Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$

2. Признак УСУ (угол–сторона–угол)

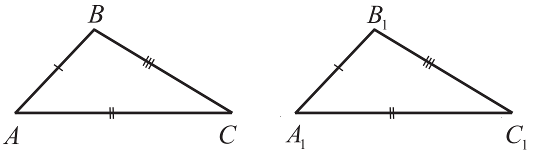
Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника соответственно конгруэнтны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.



$[AB]\equiv[A_1B_1]$
$\angle A\equiv\angle A_1$
$\angle B\equiv\angle B_1$
$\rightarrow$ $\Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$

3. Признак ССС (сторона–сторона–сторона)

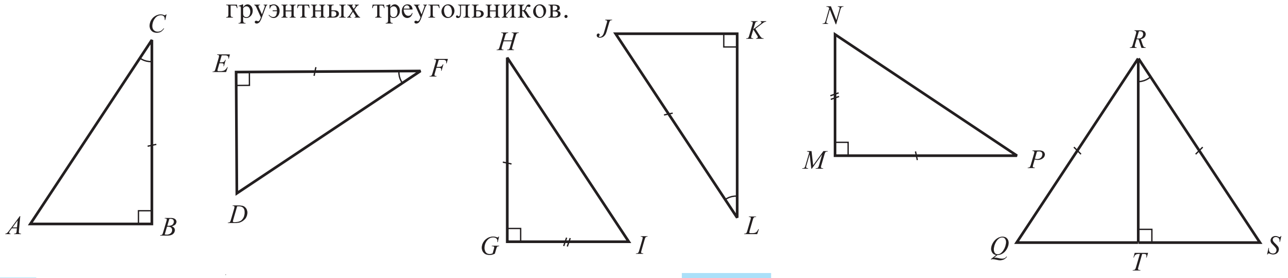
Если три стороны одного треугольника соответственно конгруэнтны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.



$$\left.\begin{array}{l}[AB]\equiv[A_1B_1]\\ [AC]\equiv[A_1C_1]\\ [BC]\equiv[B_1C_1]\end{array}\right| \rightarrow \Delta\, ABC\equiv\Delta\, A_1B_1C_1$$

2.2. Признаки конгруэнтности прямоугольных треугольников

Рассмотрите рисунок. Примените признаки конгруэнтности и найдите пары конгруэнтных треугольников.



Объясняем $\Delta ABC\equiv\Delta DEF$, согласно признаку .

$\Delta HGI\equiv\Delta PMN$, согласно признаку .

$\Delta LKJ\equiv\Delta RTS$, согласно признаку

(так как $m(\angle J)=90^\circ-m(\angle L)=90^\circ-m(\angle R)=m(\angle S)$).

Позже мы докажем, что высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является и медианой, и биссектрисой этого треугольника. Следовательно, $[QT]\equiv[ST]$. Значит, $\equiv\Delta SRT$, согласно признаку ССС.

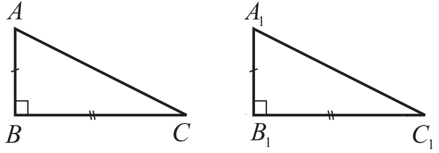
Замечание Так как у каждого из двух прямоугольных треугольников есть прямой угол, из этого следует, что два прямоугольных треугольника конгруэнтны, если существуют две пары соответственно конгруэнтных элементов, из которых хотя бы одной парой является пара сторон.

Запомните

Признаки конгруэнтности двух прямоугольных треугольников

1. Признак КК (катет–катет)

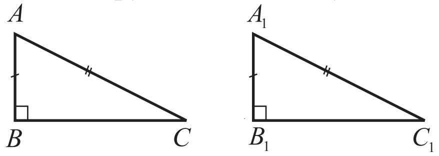
Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно конгруэнтны катетам другого, то такие треугольники конгруэнтны.



$$\left.\begin{array}{l}m(\angle B)=m(\angle B_1)=90^\circ\\ [AB]\equiv[A_1B_1]\\ [BC]\equiv[B_1C_1]\end{array}\right| \rightarrow \Delta\, ABC\equiv\Delta\, A_1B_1C_1$$

2. Признак ГК (гипотенуза–катет)

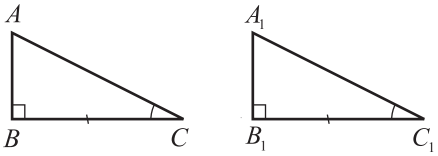
Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно конгруэнтны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники конгруэнтны.



$$\left.\begin{array}{l}m(\angle B)=m(\angle B_1)=90^\circ\\ [AB]\equiv[A_1B_1]\\ [AC]\equiv[A_1C_1]\end{array}\right| \rightarrow \Delta\, ABC\equiv\Delta\, A_1B_1C_1$$

3. Признак КУ (катет–прилежащий острый угол)

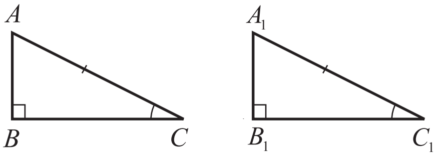
Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно конгруэнтны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники конгруэнтны.



$$\left.\begin{array}{l} m(\angle B)=m(\angle B_1)=90^\circ \\ [BC]\equiv[B_1C_1] \\ m(\angle C)=m(\angle C_1) \end{array}\right| \rightarrow \Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$$

4. Признак ГУ (гипотенуза–острый угол)

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника конгруэнтны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники конгруэнтны.



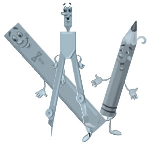
$$\left.\begin{array}{l} m(\angle B)=m(\angle B_1)=90^\circ \\ [AC]\equiv[A_1C_1] \\ m(\angle C)=m(\angle C_1) \end{array}\right| \rightarrow \Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$$

Для доказательства признаков конгруэнтности двух прямоугольных треугольников применяются признаки конгруэнтности двух произвольных треугольников.

Признак КК (катет–катет) следует из признака СУС, так как две стороны – это катеты, а угол между ними равен 90°. Следовательно, применив признак СУС, делаем вывод: если два катета прямоугольного треугольника конгруэнтны соответственно двум катетам другого прямоугольного треугольника, то эти треугольники конгруэнтны.

Признак КУ (катет–прилежащий угол) следует из признака УСУ, где второй прилежащий угол – это угол 90°.

2.3. Построение треугольников



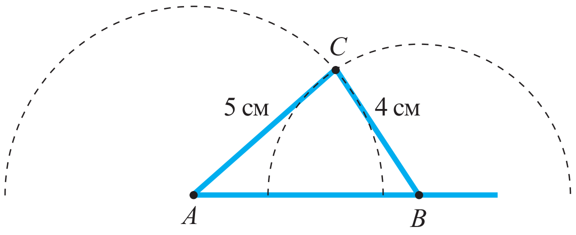
1 С помощью линейки и циркуля построим треугольник со сторонами 6 см, 5 см, 4 см.

Объясняем Согласно признаку ССС, данных задачи достаточно для построения треугольника.

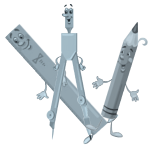
① Построим полупрямую $[AM$ и отложим на ней с помощью циркуля отрезок AB, равный 6 см.

② Установим ножку циркуля в точке A и построим полуокружность радиуса 5 см.

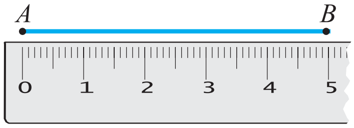
③ Построим полуокружность с центром в точке B радиуса 4 см. Эти две полуокружности пересекаются в точке C.



Построенный треугольник ABC удовлетворяет условию задачи.

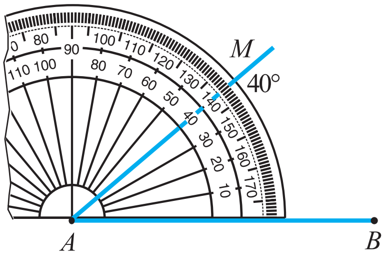


2 С помощью линейки, циркуля и транспортира построим треугольник со стороной 5 см и двумя прилежащими к ней углами 40° и 45°.

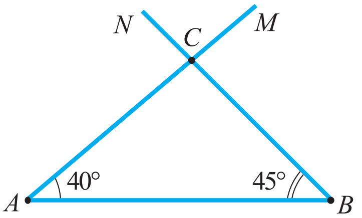


Объясняем ① Построим отрезок AB, равный 5 см.

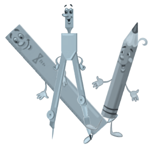
② Установим центр транспортира в точке A и отметим точку M, соответствующую делению 40°. Построим полупрямую $[AM$.



③ Аналогично строим полупрямую $[BN$, которая образует с полупрямой $[BA$ угол 45°. Обозначим через C точку пересечения полупрямых $[AM$ и $[BN$.

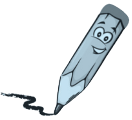


Построенный треугольник ABC удовлетворяет условию задачи.



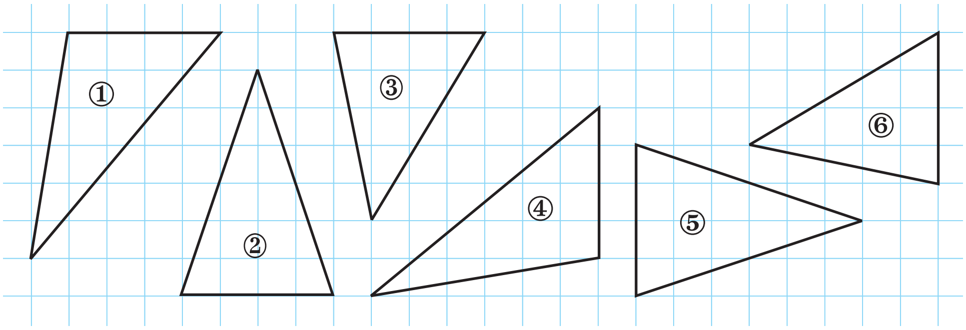
- С помощью линейки, транспортира и циркуля постройте треугольник со сторонами 5 см и 6 см и углом между ними 60°.

Упражнения и задачи



☑ ☐ ☐

1. Рассмотрите каждый рисунок и укажите пары конгруэнтных треугольников.



2. Треугольники ABC и DEF конгруэнтны. Перепишите и дополните:

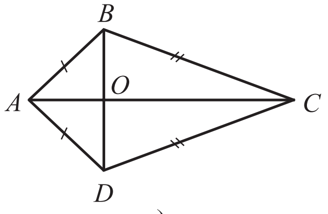
$[AB] \equiv [DE]$, ______ $\equiv DF$, $EF \equiv$ ______, $\angle A \equiv$ ______, $\angle E \equiv$ ______, ______ $\equiv \angle C$.

3. Треугольники ABC и CAD конгруэнтны. Перепишите и дополните:

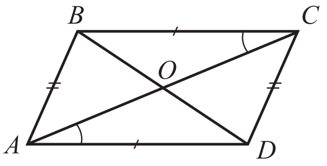
а) ______ $\equiv [AB]$, ______ $\equiv [DC]$, $[BC] \equiv$ ______, $\angle A \equiv$ ______, $\angle B \equiv$ ______.

б) Треугольники ABC и CAD являются ______.

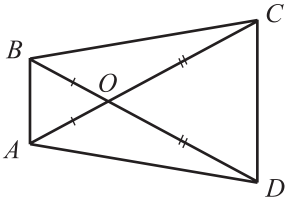
4. ***Работайте в парах!*** Применив признаки конгруэнтности, укажите пары конгруэнтных треугольников.



а)



б)

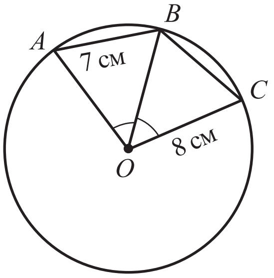


в)

5. ***Работайте в парах!*** Даны треугольники ABC и DEF, у которых $\angle A \equiv \angle D$, $[AB] \equiv [DE]$. Запишите еще одно соотношение между элементами треугольников так, чтобы выполнялся признак конгруэнтности:

а) СУС;   б) УСУ.

6. Рассмотрите рисунок и найдите длину отрезков AO, BO и BC, если точка O – центр окружности.



7. ***Работайте в парах!*** Постройте треугольник со сторонами, равными:

а) 6 см, 7 см, 8 см;   б) 5 см, 3 см, 6 см.

8. Постройте треугольник с двумя сторонами, равными:

а) 3 см и 4 см и углом между ними 45°;

б) 5 см и 6 см и углом между ними 120°.

9. Постройте треугольник:

а) со стороной 4 см и двумя прилежащими к ней углами 30° и 50°;

б) со стороной 6 см и двумя прилежащими к ней углами 25° и 60°.

10. Точка M – середина стороны AB треугольника ABC и $CM \perp AB$. Найдите AC, если $BC = 8$ см.

11. Отрезок EH является биссектрисой и высотой треугольника DEF.
Найдите $m(\angle D)$, если $m(\angle F) = 40°$.

☑☑☐

12. Постройте равносторонний треугольник, периметр которого равен 15 см.

13. Постройте равнобедренный треугольник с основанием 5 см и периметром 17 см.

14. ***Исследуйте!*** Можно ли построить треугольник со сторонами:

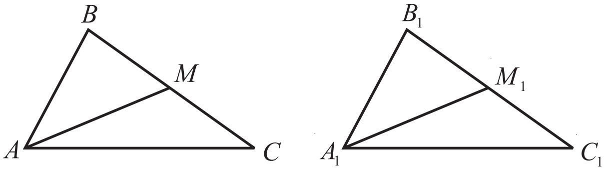
а) 2 см, 3 см, 5 см;   б) 3 см, 7 см, 3 см?

Обоснуйте ответ.

15. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой этих отрезков. Найдите AC и BC, если $AD = 10$ см, $BD = 9$ см.

☑☑☑

16. Рассмотрите рисунок.
$[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$, $[AM] \equiv [A_1M_1]$ и $[AM]$, $[A_1M_1]$ являются медианами треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.
Докажите, что $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

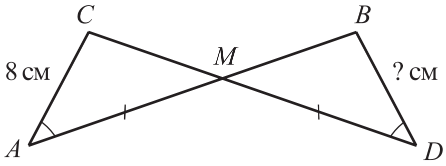


17. Докажите, что биссектрисы углов ромба содержат диагонали этого ромба.

18. ***Исследуйте!*** Углы одного треугольника соответственно конгруэнтны углам другого треугольника, и две стороны первого треугольника конгруэнтны двум сторонам второго треугольника. Можно ли утверждать, что данные треугольники конгруэнтны?

§3. Метод конгруэнтных треугольников

1 Отрезки AB и CD пересекаются в точке M так, что $AM = DM$, $AC = 8$ см и $m(\angle CAM) = m(\angle BDM)$.



Объясняем Рассмотрим треугольники AMC и DMB.

$[AM] \equiv [DM]$. $\angle CAM \equiv$ ____.

Углы AMC и ____ – вертикальные. Следовательно, $\angle AMC \equiv$ ____.

Применив признак УСУ, можно утверждать, что $\Delta AMC \equiv$ ____.

Значит, $[AC] \equiv$ ____ и $BD =$ ____ см.

Ответ: $BD =$ ____ см.

Задача решена *методом конгруэнтных треугольников*.

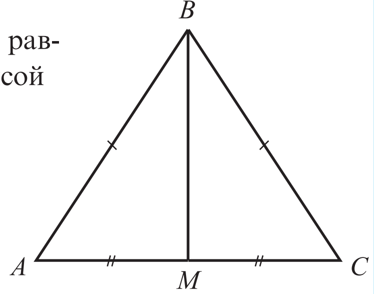
Запомните

Метод конгруэнтных треугольников применяется для доказательства конгруэнтности двух отрезков или углов. Чтобы это доказать, нужно:

- включить эти два отрезка (или угла) в два треугольника, конгруэнтность которых можно доказать, используя признаки СУС, УСУ, ССС;
- сделать вывод, что отрезки (или углы) конгруэнтны, если они являются соответствующими элементами конгруэнтных треугольников, в которые были включены.

Образец доказательства теоремы

2 Докажем, что медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является и биссектрисой этого треугольника.



Объясняем

① Выполним рисунок, соответствующий условию.

② Переформулируем условие задачи, используя обозначения рисунка:
«Докажем, что медиана BM, проведенная к основанию AC равнобедренного треугольника ABC, является и его биссектрисой».

③ Чтобы уточнить условие и заключение высказывания, которое надо доказать, запишем последнее утверждение в виде:
Если Условие, *то* Заключение.
Если треугольник ABC равнобедренный и $[BM]$ – медиана, проведенная к основанию AC, *то* $[BM]$ является биссектрисой треугольника ABC.

④ Уточним условие: ...
Уточним заключение: ...

⑤ Запишем коротко утверждение и доказательство:
Условие: ΔABC, $[AB] \equiv [CB]$, $M \in [AC]$, $[AM] \equiv [CM]$.
Заключение: $\angle ABM \equiv \angle CBM$.
Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l}[AB] \equiv [CB] \text{ (по условию)} \\ [AM] \equiv [CM] \text{ (по условию)} \\ [BM] \text{ – общая сторона}\end{array}\right\} \overset{\text{ССС}}{\Rightarrow} \Delta ABM \equiv \Delta CBM \overset{\text{опр}}{\Rightarrow} \angle ABM \equiv \angle CBM \text{ (ч.т.д.).}$$ ▶

Замечание Как правило, шаги ②–④ выполняют устно.

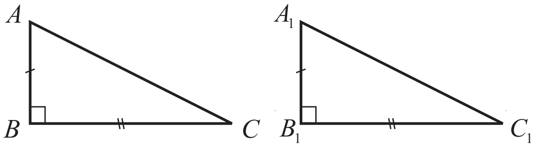
3 Применяя метод конгруэнтных треугольников, докажем признак КК конгруэнтности прямоугольных треугольников.

Условие: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$ – прямоугольные,

$[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$.

Заключение: $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

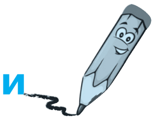


① $m(\angle ABC) = m(A_1B_1C_1) = 90°$. Значит, $\angle ABC \equiv \angle A_1B_1C_1$. (∗)

② Согласно условию и соотношению (∗), применяя признак конгруэнтности произвольных треугольников СУС, получим $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$ (ч. т. д.). ▶

- Докажите аналогичным способом признак КУ конгруэнтности прямоугольных треугольников.

Упражнения и задачи



☑☐☐

1. Рассмотрите рисунок 1 и вычислите AD, DC и BD, если $AB = 9$ см, $BC = 6$ см, $DE = 3$ см.

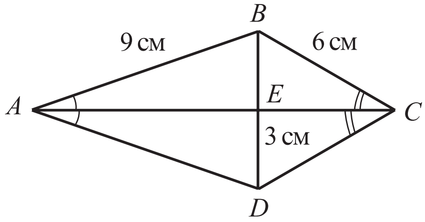


Рис. 1

2. Пусть $[AM]$ – медиана треугольника ABC и $D \in [AM$ так, что $AM = MD$. Найдите BD и CD, если $AB = 5$ см, $AC = 6$ см.

3. ***Работайте в группах!*** Рассмотрите рисунок 2 и укажите другие пары конгруэнтных отрезков.

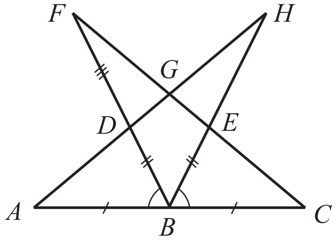


Рис. 2

4. Отрезок BD – медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника ABC. Найдите BD, если периметры треугольников ABC и ABD равны 48 см и 36 см соответственно.

☑☑☐

5. Рассмотрите рисунок 3. Докажите, что $[AM]$ является биссектрисой треугольника ABC.

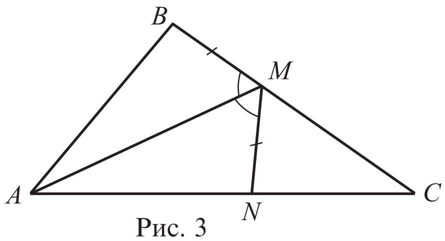


Рис. 3

6. Рассмотрите рисунок 4 и найдите величину угла ACD.

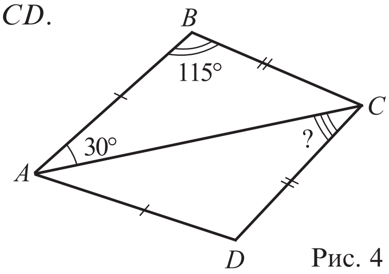


Рис. 4

7. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A \equiv \angle A_1$, $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$, $m(\angle C) = 80°$, а угол C_1 – тупой. Найдите $m(\angle C_1)$.

8. Рассмотрите рисунок 5. Докажите, что $\angle BAF \equiv \angle DEG$ и $[AB] \equiv [DE]$, если $[AG] \equiv [FE]$, $m(\angle B) = m(\angle D)$, $m(\angle CGF) = m(\angle CFG)$.

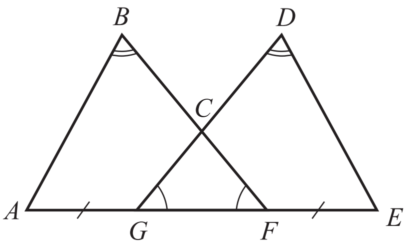


Рис. 5

9. Рассмотрите рисунок 6. Найдите AB, если $DE = 7$ см.

Указание. Исследуйте треугольники ABE и ADE.

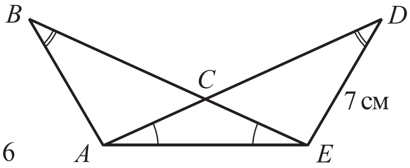


Рис. 6

10. ***Работайте в парах!*** Рассмотрите рисунок 7. Найдите BE, если $FC = 10$ см.

Указание. Исследуйте треугольники ABE и AFC.

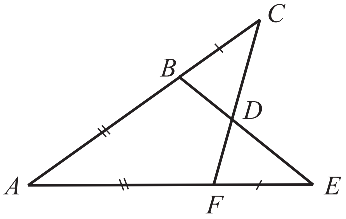


Рис. 7

☑☑☑

11. ***Работайте в парах!*** Окружности с центрами O и O_1 пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямые AB и OO_1 перпендикулярны.

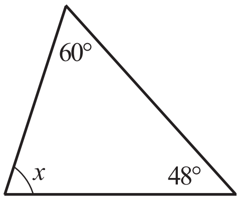
12. Докажите, что длина стороны любого треугольника меньше полупериметра этого треугольника.

13. Точка D принадлежит внутренней области треугольника ABC. Докажите, что $m(\angle A) < m(\angle ADC)$.

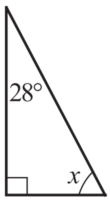
Упражнения и задачи на повторение

☑☐☐

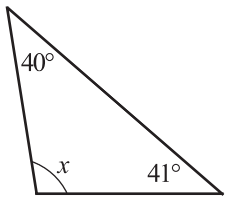
1. Рассмотрите рисунок и вычислите величину угла x.



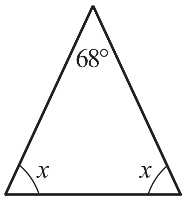
а)



б)



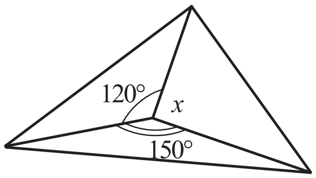
в)



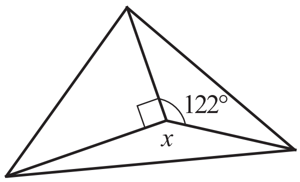
г)

2. Найдите периметр равностороннего треугольника со стороной $2\frac{1}{3}$ см.

3. Рассмотрите рисунок и вычислите величину угла x:



а)



б)

4. Вычислите периметр треугольника:
а) равностороннего со стороной, равной 11 см;
б) равнобедренного, одна сторона которого равна 19 см, а другая 8 см;
в) разностороннего, длины сторон которого выражены последовательными натуральными числами, наибольшая из которых равна 10 см.

5. Найдите величину угла B треугольника ABC, если:
а) $m(\angle A) = m(\angle C) = 50°$;
б) $m(\angle A) = 2m(\angle B) = m(\angle C)$;
в) $m(\angle A) = \frac{1}{2}m(\angle B) = m(\angle C)$;
г) $m(\angle A) + m(\angle C) = m(\angle B)$.

6. Разность величин острых углов прямоугольного треугольника равна 50°. Найдите величины углов треугольника.

7. Периметр равностороннего треугольника ABC равен 2,7 см. Найдите AB.

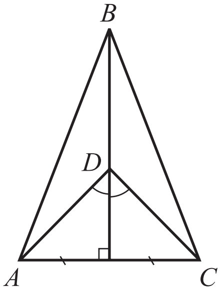
8. ***Исследуйте!*** У равнобедренного треугольника одна сторона равна 10 см, а другая – 14 см. Каким может быть периметр этого треугольника?

9. Каждая из двух сторон равнобедренного треугольника на 6 см короче третьей стороны. Какова длина самой большой стороны треугольника, если она на 22 см меньше его периметра?

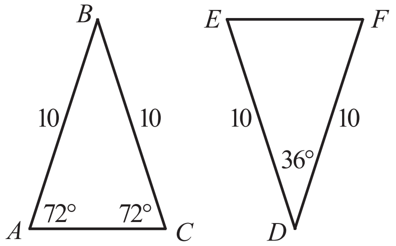
10. В равнобедренном треугольнике одна из сторон равна 10 см, а его периметр – 28 см. Найдите длины других сторон треугольника.

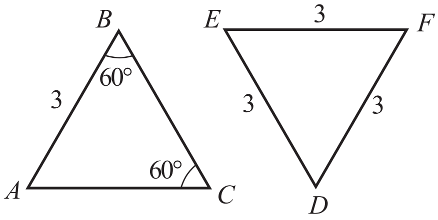
11. Величина острого угла прямоугольного треугольника равна $68°45'$. Найдите величину второго острого угла этого треугольника.

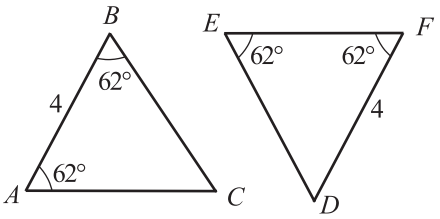
12. ***Работайте в парах!*** Рассмотрите рисунок и запишите пары конгруэнтных отрезков.

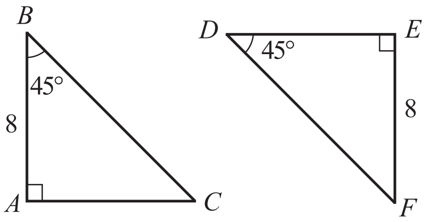


13. Рассмотрите рисунок и определите, являются ли треугольники конгруэнтными.









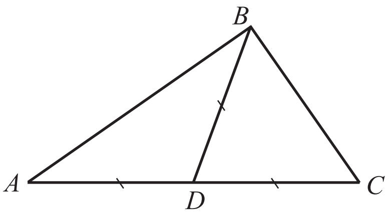
☑☑☐

14. Постройте треугольник со сторонами 5 см, 6 см, 8 см.

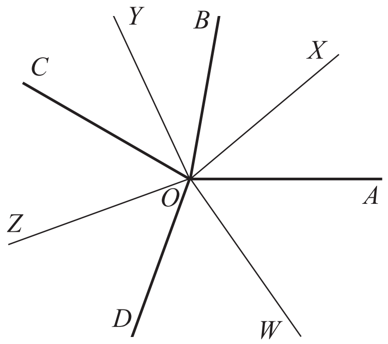
15. Постройте треугольник со сторонами 5 см и 7 см и углом между ними 140°.

16. Постройте треугольник со стороной 7 см и двумя прилежащими к ней углами 45° и 55° соответственно.

17. Дан треугольник ABC и $D \in [AC]$ так, что $[AD] \equiv [BD] \equiv [CD]$ (см. рисунок). Докажите, что $m(\angle ABC) = 90^\circ$.



18. 10 прямых пересекаются в одной точке. Докажите, что величина хотя бы одного из образованных углов меньше 20°.



19. ***Работайте в парах!*** Из точки O провели 4 полупрямые: $[OA$, $[OB$, $[OC$ и $[OD$ (см. рисунок). Полупрямые $[OX$, $[OY$, $[OZ$ и $[OW$ являются биссектрисами углов AOB, BOC, COD и DOA. Докажите, что среди углов XOY, YOZ, ZOW, WOX есть две пары углов, дополнительных до 180°.

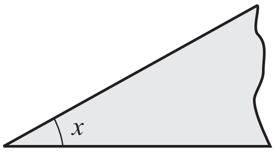
20. Найдите $m(\angle A)$, если величины углов B и C треугольника ABC равны соответственно:

а) $20^\circ 47'$ и $73^\circ 28'$; б) $39^\circ 21'$ и $48^\circ 58'$;
в) $120^\circ 21'$ и $32^\circ 54'$; г) $82^\circ 04' 11''$ и $32^\circ 18' 43''$;
д) $71^\circ 52' 19''$ и $81^\circ 32' 42''$; е) $14^\circ 18''$ и $132^\circ 52' 43''$.

☑☑☑

21. ***Работайте в парах!*** На рисунке изображен предмет, с помощью которого можно построить угол x°. Как с помощью этого предмета построить угол:

а) 9°, если $x = 19^\circ$;
б) 4°, если $x = 23^\circ$;
в) 3°, если $x = 31^\circ$;
г) 19°, если $x = 38^\circ$?



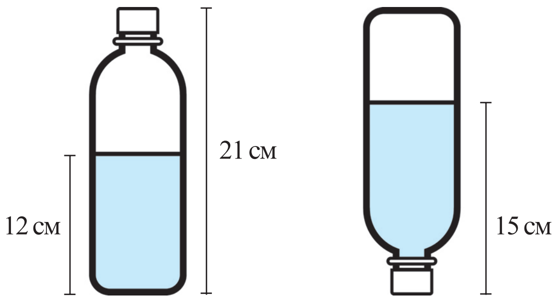
22. Найдите величину угла, образованного стрелками часов, показывающими:

а) 2 часа 20 минут; б) 1 час 15 минут.

23. Две окружности с радиусами 3 см и 5 см соответственно пересекаются в двух точках. Докажите, что расстояние между центрами окружностей не меньше 2 см и не больше 8 см.

ЗАДАЧА ДЛЯ ЧЕМПИОНОВ

24. Рассмотрите изображения! Какая часть сосуда заполнена?



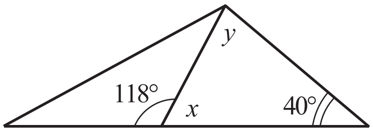
Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

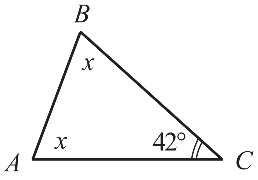
Вариант 1

1. Найдите величины углов x и y:

а)



б)

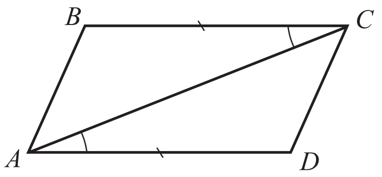


2. Треугольник ABC прямоугольный, с прямым углом B. Найдите $m(\angle C)$, если:

$$m(\angle A) = 36°.$$

3. Найдите $m(\angle C)$, если величины углов A и B треугольника ABC равны соответственно $48°36'$ и $25°31'$.

4. Запишите конгруэнтные треугольники:

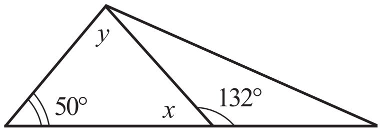


5. Длины сторон треугольника прямо пропорциональны числам 4, 5, 6. Найдите длины этих сторон, если периметр треугольника равен 45 см.

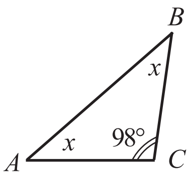
Вариант 2

1. Найдите величины углов x и y:

а)



б)

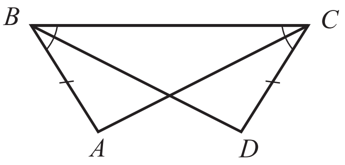


2. Треугольник ABC прямоугольный, с прямым углом B. Найдите $m(\angle C)$, если:

$$m(\angle A) = 28°.$$

3. Найдите $m(\angle C)$, если величины углов A и B треугольника ABC равны соответственно $37°46'$ и $24°22'$.

4. Запишите конгруэнтные треугольники:



5. Длины сторон треугольника прямо пропорциональны числам 3, 4, 5. Найдите длины этих сторон, если периметр треугольника равен 48 см.

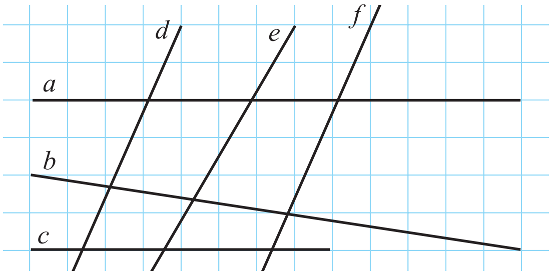
3 глава

Параллельность и перпендикулярность

> *Высшая форма чистого мышления существует в математике.*
>
> Платон

§1. Параллельные прямые

1.1. Параллельные прямые



1 Рассмотрите рисунок. Обратите внимание на взаимное расположение прямых и дополните подходящим словом или выражением.

а) Прямые a и b – ____________, так как ____________.

б) Прямые d и c – ____________, так как ____________.

в) Прямые a и c – ____________, так как ____________.

г) Прямые e и f – ____________, так как ____________.

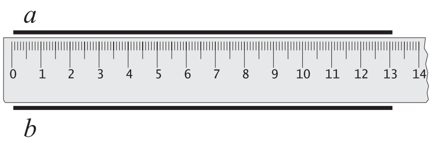
Замечание Очевидно, вывод о том, что две прямые параллельны или не параллельны, нужно аргументировать математически. С этой целью мы изучим признаки параллельности прямых.

Определение Две **прямые** называются **параллельными**, если они компланарны и у них нет общих точек или они совпадают.

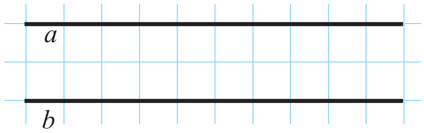
Обозначаем: $a \parallel b$. *Читаем*: «Прямые a и b параллельны».
Если прямые a и b непараллельны, то обозначаем $a \nparallel b$.

- Параллельные прямые можно построить:

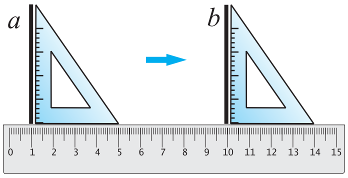
а) с помощью линейки;

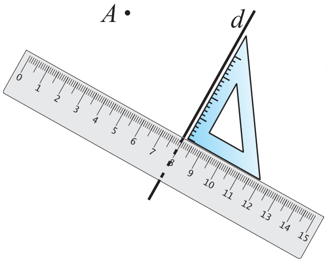


б) с помощью клеточной сетки;



в) с помощью линейки и угольника.





2 Рассмотрите рисунок и объясните, как можно построить прямую, параллельную прямой d и проходящую через точку A. Сколько таких прямых можно построить?

Аксиома параллельных прямых (или **аксиома Евклида**)

Через точку, не лежащую на прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.

- Учитывая, что две различные точки определяют единственную прямую, определите, сколько пар параллельных прямых можно построить так, чтобы любой паре принадлежали три заданные неколлинеарные точки.

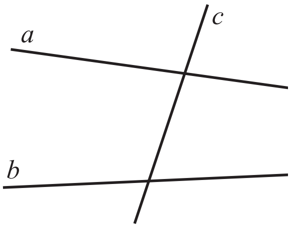
3 Применив метод от противного и аксиому параллельности прямых, докажите следующую теорему.

Теорема (транзитивность отношения параллельности)

Если две различные прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой: если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$.

- Дополните и обоснуйте:
  Если $a \parallel b$ и $a \cap c = \{M\}$, то прямые b и c .

1.2. Признаки параллельности двух прямых



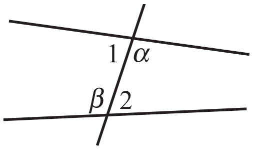
1 а) Сколько углов образует с прямыми a и b прямая c?
б) Сколько конгруэнтных углов вы заметили на рисунке?
в) Сколько пар углов, дополнительных до 180°, изображено на рисунке?

Определение Прямая, пересекающая две различные компланарные прямые, называется **секущей**.

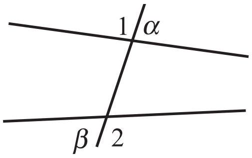
Прямая c, изображенная на рисунке, является секущей, так как она пересекает прямые a и b.

Запомните

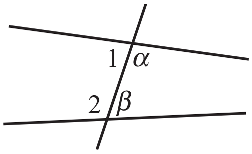
Две прямые образуют с секущей 8 углов.



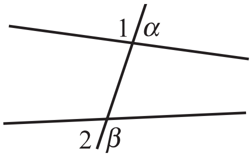
Внутренние накрест лежащие углы
$(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle 1, \angle 2)$.



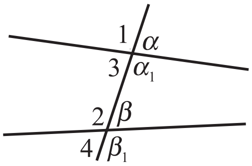
Внешние накрест лежащие углы
$(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle 1, \angle 2)$.



Внутренние односторонние углы
$(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle 1, \angle 2)$.



Внешние односторонние углы
$(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle 1, \angle 2)$.



Соответственные углы
$(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle\alpha_1, \angle\beta_1)$; $(\angle 1, \angle 2)$; $(\angle 3, \angle 4)$.

2 Внутренние накрест лежащие углы, изображенные на рисунке, конгруэнтны, и их величина равна 60°.

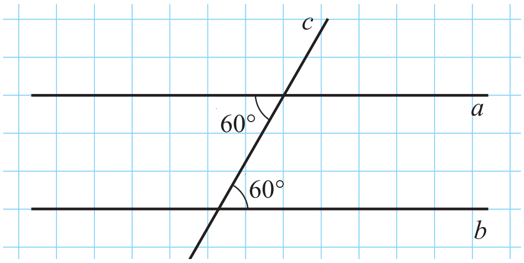
Найдите:

а) величины внешних накрест лежащих углов;

б) сумму величин внутренних односторонних углов;

в) сумму величин внешних односторонних углов;

г) величины соответственных углов.



Теорема 1

Если две прямые образуют с секущей пары конгруэнтных внутренних накрест лежащих углов, то:

1) другие два внутренних накрест лежащих угла конгруэнтны;

2) внешние накрест лежащие углы конгруэнтны;

3) внутренние односторонние углы дополнительны до 180°;

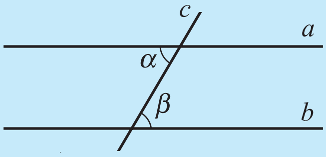
4) внешние односторонние углы дополнительны до 180°;

5) соответственные углы конгруэнтны.

Замечание Поменяв местами условие теоремы 1 и любое утверждение в заключении теоремы 1, также получим истинное высказывание, т. е. новую теорему.

Теорема 2 (признак параллельности прямых)

Если при пересечении прямых с секущей ***внутренние накрест лежащие углы конгруэнтны***, то прямые параллельны.



$\angle\alpha \equiv \angle\beta \Rightarrow a \parallel b$

- Докажите теорему 2, используя метод от противного.

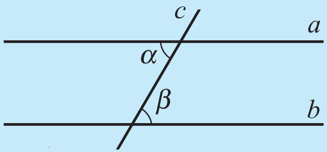
Замечания

1. На основании теоремы 1 выделенное из теоремы 2 условие можно заменить любым из утверждений 2)–5) теоремы 1 и получить еще 4 признака параллельности двух прямых. Сформулируйте эти признаки.

2. Высказывания, обратные признакам параллельности прямых, также являются теоремами. Теорема 3 является обратной теореме 2. Сформулируйте обратные теоремы для других признаков.

Теорема 3 (обратная теореме 2)

Две параллельные прямые образуют с секущей конгруэнтные внутренние накрест лежащие углы.



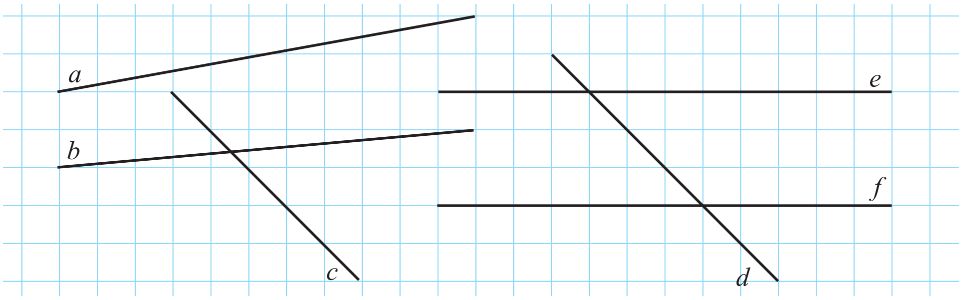
$a \parallel b \Rightarrow \angle\alpha \equiv \angle\beta$

- Даны прямая *a* и точка *M*, не принадлежащая прямой *a*. При помощи линейки и транспортира постройте прямую *b*, параллельную прямой *a* и проходящую через точку *M*.

Упражнения и задачи

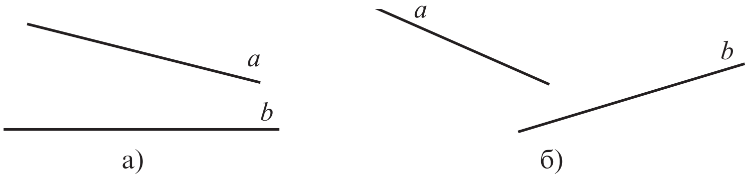
☑☐☐

1. Рассмотрите рисунок и определите пары прямых:
а) параллельных; б) пересекающихся.



2. *Работайте в парах!* Постройте в тетради с помощью линейки:
а) две горизонтальные прямые;
б) две наклонные параллельные прямые;
в) две наклонные пересекающиеся прямые.

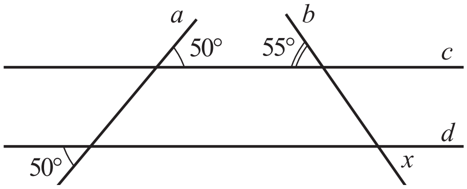
3. Используя транспортир и угольник, найдите величину наименьшего угла, образованного при пересечении прямых a и b, изображенных на рисунке.



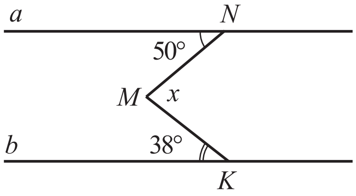
а) б)

4. На сколько различных частей разбивают плоскость три попарно пересекающиеся прямые?

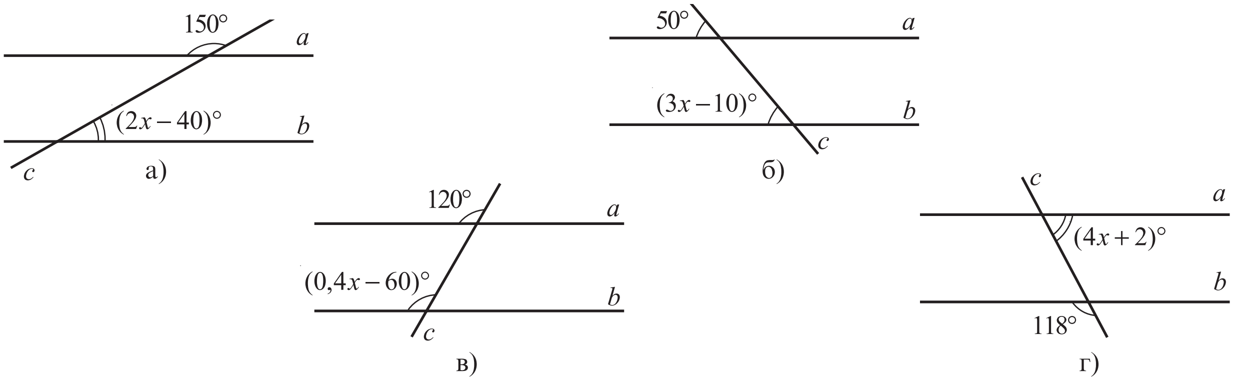
5. Рассмотрите рисунок и найдите величину угла x.



6. Прямые a и b параллельны. Найдите величину угла x.
Указание. Проведите через точку M прямую, параллельную прямым a и b.

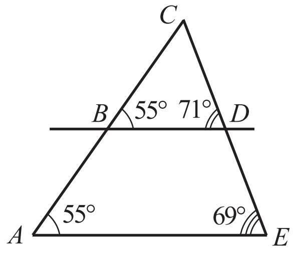


7. *Работайте в группах!* Прямые a и b, изображенные на рисунке, параллельны. Вычислите значение x.

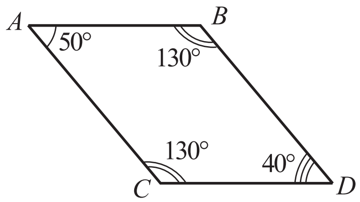


а) б) в) г)

8. Объясните, почему показатели значений на рисунке ошибочны.



а)

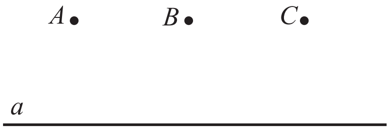


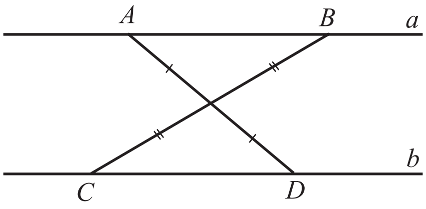
б)

9. ***Работайте в парах!*** Даны точки $A(3; 0)$, $B(0; 2)$, $C(6; 0)$. Определите координаты точек M и N, если известно, что $MN \parallel AB$ и M, N, C коллинеарны.

10. Сумма 6 углов из 8, образованных секущей с двумя параллельными прямыми, равна 636°. Найдите величины этих 8 углов.

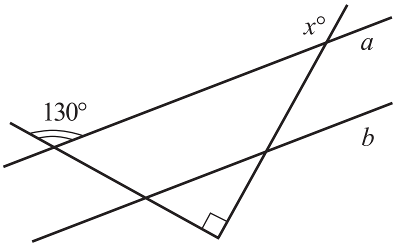
11. Точки A, B, C не принадлежат прямой a, $AB \parallel a$ и $BC \parallel a$ (см. рисунок). Докажите, что точки A, B, C коллинеарны.





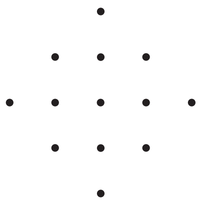
12. Докажите, что прямые a и b, изображенные на рисунке, параллельны.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ЧЕМПИОНОВ



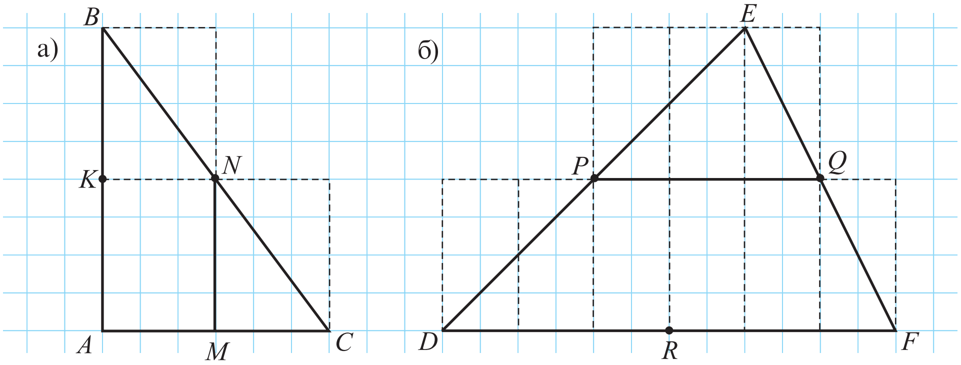
13. Какова величина x, если прямые a и b параллельны?

14. Постройте 5 отрезков, не отрывая карандаша от листа бумаги и не проходя дважды по одной и той же линии, так, чтобы пересечь все 13 точек на рисунке.



§2. Средняя линия треугольника

Рассмотрите рисунок и дополните.



а) Точка M – ______ стороны AC.

Точка N – ______ стороны BC.

Прямые MN и AB – ______.

$\frac{AB}{MN}=$ ______.

б) Точка P – ______ стороны DE.

Точка Q – ______ стороны EF.

Прямые PQ и DF – ______.

$\frac{DF}{PQ}=$ ______.

Определение

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется **средней линией** треугольника.

Например, на рисунке $[MN]$ – средняя линия треугольника ABC, а $[PQ]$ – средняя линия треугольника DEF.

- На рисунке точка K – середина стороны AB, а точка R – середина стороны DF. Какое соотношение существует между отрезками KN и AC? А между отрезками QR и DE?

Теорема 1

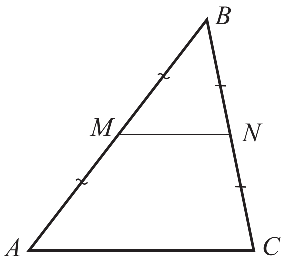
Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Докажем теорему 1.

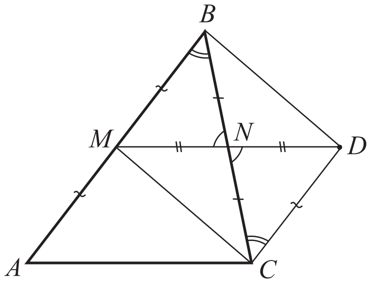
Условие: ΔABC, $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $[MN]$ – средняя линия треугольника ABC.

Заключение: 1) $MN \parallel AC$; 2) $AC = 2MN$.

Доказательство:



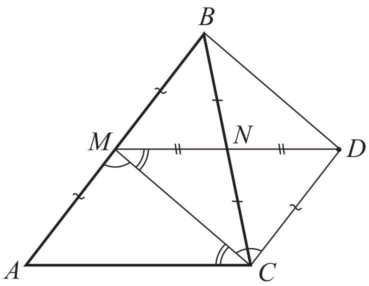
① Отметим на прямой MN точку D так, чтобы $ND = MN$.



①–③

② Рассмотрим ΔBNM и ΔCND:
$[BN] \equiv [CN]$ (по условию),
$[NM] \equiv [ND]$ (по построению),
$\angle BNM \equiv \angle CND$ (вертикальные углы).
По признаку СУС $\Delta BNM \equiv \Delta CND$.
Следовательно,
$\angle MBN \equiv \angle DCN$ и $[BM] \equiv [DC]$.

③ Рассмотрим прямые MB и CD, пересекаемые прямой BC. Согласно признаку параллельности прямых $MB \parallel CD$ (углы MBN и DCN – конгруэнтные внутренние накрест лежащие).

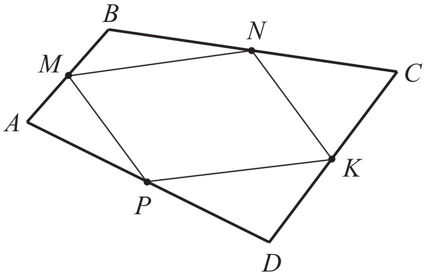


④, ⑤

④ Параллельные прямые MB и CD образуют с секущей MC конгруэнтные внутренние накрест лежащие углы AMC и DCM.

⑤ По признаку СУС, $\Delta AMC \equiv \Delta DCM$.
Следовательно, $[AC] \equiv [MD]$. Так как $MD = 2MN$ и $MD = AC$, то $AC = 2MN$.
$MN \parallel AC$, так как прямые MN и AC образуют с секущей MC конгруэнтные внутренние накрест лежащие углы DMC и ACM, ч. т. д. ▶

- Точки M, N, K, P являются серединами сторон четырехугольника $ABCD$.
Применив свойство средней линии треугольника и транзитивность отношения параллельности двух прямых, докажите, что $MN \parallel PK$ и $MP \parallel NK$.



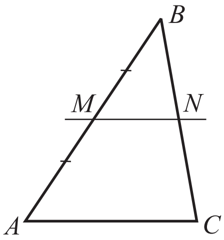
Теорема 2 (обратная теореме 1)

> Прямая, проведенная через середину стороны треугольника параллельно другой стороне, проходит через середину третьей стороны.

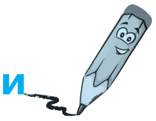
Условие: ΔABC, $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $AM = MB$, $MN \parallel AC$.

Заключение: $BN = NC$.

- Докажите теорему 2, применив метод от противного.



Упражнения и задачи



☑ ☐ ☐

1. Найдите длины средних линий треугольника со сторонами:

а) 3 см, 4 см, 5 см;

б) $\frac{5}{8}$ см, $\frac{6}{7}$ см, $\frac{4}{5}$ см;

в) $\sqrt{12}$ см, $\sqrt{10}$ см, $\sqrt{14}$ см;

г) 2,(4) см, 3,(6) см, 1,(8) см.

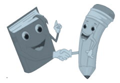
2. Вычислите периметр треугольника, если длины средних линий треугольника равны:

а) $4\frac{1}{3}$ см, $4\frac{4}{9}$ см, $3\frac{1}{6}$ см;

б) $2\sqrt{3}$ см, $3\sqrt{3}$ см, $4\sqrt{3}$ см;

в) 2,(4) см, 2,(6) см, 2,(3) см.

3. Средняя линия треугольника ABC образует со сторонами треугольника углы 45° и 60° соответственно. Найдите величины углов треугольника.

4.  ***Работайте в парах!*** Отрезок MN является средней линией треугольника ABC, причем $MN \parallel AC$. Вычислите периметр треугольника BMN, если известно, что периметр треугольника ABC равен $4\sqrt{7}$ см.

☑☑☐

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Точки M и N являются серединами сторон AB и DC соответственно.
Докажите, что $MN \parallel AD$ и $MN \parallel BC$.

6. Длина средней линии равнобедренного треугольника, соединяющей середины боковых сторон, равна 6 см. Найдите длины сторон треугольника, если известно, что периметр треугольника равен 40 см.

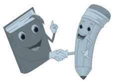
7. Средняя линия равнобедренного треугольника, не параллельная основанию, равна 5 см. Найдите длины сторон треугольника, если известно, что его периметр равен 32 см.

8. Точки A, B, C, D являются серединами сторон четырехугольника $MNKP$. Найдите длины сторон четырехугольника $ABCD$, если $MK = 10$ см, $NP = 12$ см.

9. ***Работайте в группах!*** Отрезок MN – средняя линия треугольника ABC, $M \in [AB]$, $N \in [BC]$.
Найдите длины двух других сторон треугольника, если:
а) $AB = 8$ см, $MN = 4{,}5$ см и периметр треугольника ABC равен 27 см;
б) $BC = 11$ см, $MN = 5{,}4$ см и периметр треугольника ABC равен 30 см;
в) $AB = 4\sqrt{5}$ см, $MN = 3\sqrt{5}$ см и периметр треугольника ABC равен $15\sqrt{5}$ см;
г) $BC = 9,(4)$ см, $MN = 5,(2)$ см и периметр треугольника ABC равен 28, (6) см.

10. Длина средней линии равностороннего треугольника равна 3,(7) см. Найдите периметр треугольника.

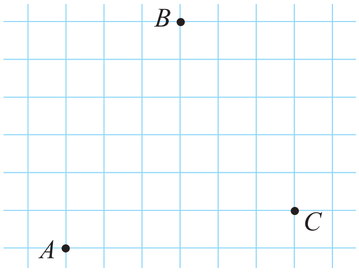
11. Точки M, N, K являются серединами сторон треугольника ABC.
Найдите периметр треугольника, если $MN + MK = 9{,}3$ см, $MN + NK = 10{,}1$ см, $MK + NK = 9{,}8$ см.



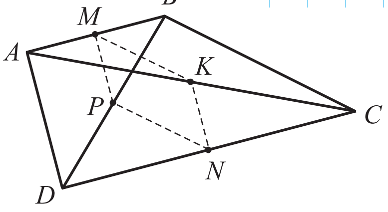
12. ***Работайте в парах!*** Докажите, что средние линии треугольника делят его на четыре конгруэнтных треугольника.

☑☑☑

13. Точки A, B, C, изображенные на рисунке, являются серединами сторон треугольника MNK. Перечертите рисунок и «восстановите» треугольник MNK с помощью линейки и угольника.



14. Рассмотрите рисунок. M и N – середины сторон AB и CD, а P и K – середины диагоналей BD и AC четырехугольника $ABCD$.
Докажите, что $MP \parallel KN$ и $MK \parallel PN$.

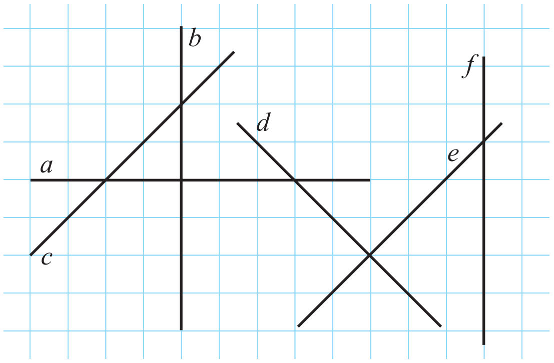


§ 3. Перпендикулярные прямые. Медиатриса отрезка

3.1. Перпендикулярные прямые. Расстояние от точки до прямой

1 Рассмотрите рисунок. Укажите пары перпендикулярных прямых.

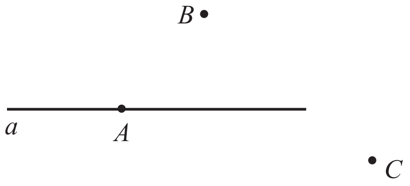
Исследуйте!
- Каково взаимное расположение прямых x и y, если каждая из них перпендикулярна прямой z?



2 Можно ли с помощью линейки и угольника построить перпендикулярно прямой a, изображенной на рисунке, прямую, которой принадлежит:

а) точка A;
б) точка B;
в) точка C?

Обоснуйте.



- Какие прямые называются перпендикулярными?
- Как с помощью математических символов записать фразу «Прямые a и b перпендикулярны»?

Теорема

> Через любую точку, принадлежащую прямой или не принадлежащую ей, можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной.

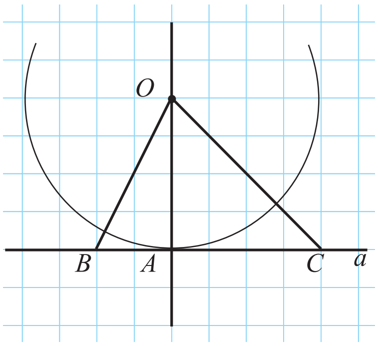
3 Рассмотрите рисунок и дополните.

Прямая OA перпендикулярна прямой ☐.

Расположив в порядке возрастания длины отрезков OA, OB, OC, получим:

$$\square < OB < \square.$$

Согласно определению расстояния между двумя фигурами, заметим, что расстояние между точкой O и прямой a равно длине отрезка ☐.

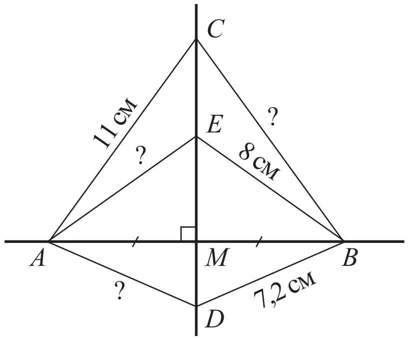


Определения

- Точка, в которой перпендикуляр, проведенный из точки O к прямой a, пересекает прямую a, называется **основанием перпендикуляра**, проведенного из точки O к прямой a, или **ортогональной проекцией точки** O на прямую a.
- Прямая, определенная точкой O и любой точкой прямой a, отличной от ортогональной проекции точки O на прямую a, называется **наклонной**.
- **Расстоянием от точки O до прямой a** называется длина отрезка, определенного точкой O и ее ортогональной проекцией на прямую a.

На рисунке в задаче **3** точка A является ортогональной проекцией точки O на прямую a, прямые OB и OC являются наклонными, а отрезок OA – это расстояние от точки O до прямой a.

3.2. Медиатриса отрезка

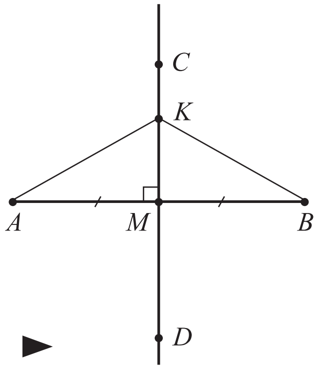


1 Прямые AB и CD, изображенные на рисунке, перпендикулярны, а точка M – середина отрезка AB.
Укажите пары конгруэнтных прямоугольных треугольников.
Найдите длины отрезков BC, AE и AD.
Сформулируйте вывод.

Определение **Медиатрисой отрезка** называется прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к данному отрезку.

На рисунке прямая CD является медиатрисой отрезка AB.

Теорема Точки, принадлежащие медиатрисе отрезка, равноудалены от концов этого отрезка.



Докажем теорему.

Условие: CD – медиатриса отрезка $[AB]$. $K \in CD$.

Заключение: $AK = BK$.

Доказательство:

① Пусть $M \in [AB]$, $AM = BM$.

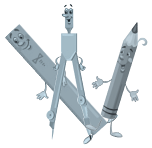
② $CD \perp AB$, $CD \cap AB = \{M\}$ (по условию).

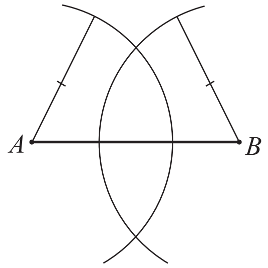
③ $\Delta AMK \equiv \Delta BMK$ (признак КК).

④ Следовательно, $[AK] \equiv [BK]$, то есть $AK = BK$, ч. т. д. ▶

- Также верно высказывание, обратное данной теореме.
  Сформулируйте обратную теорему и докажите истинность теорем.

Замечание Согласно теореме о точках медиатрисы отрезка и обратной теореме, точка равноудалена от концов отрезка, если и только если она принадлежит медиатрисе отрезка.





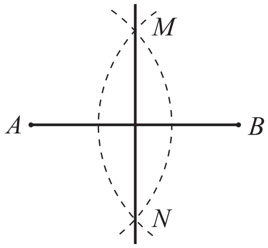
2 Как с помощью линейки и циркуля построить медиатрису отрезка?

Объясняем Пусть задан отрезок AB.

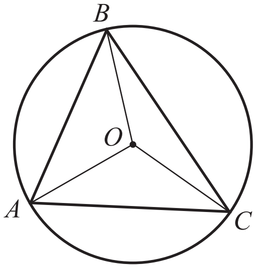
① Зафиксируем ножку циркуля в точке A и построим полуокружность радиусом больше $\frac{AB}{2}$.

② Сохраняя раствор циркуля, фиксируем его ножку в точке B и строим вторую полуокружность.

③ Точки пересечения полуокружностей определяют медиатрису отрезка AB.



- Докажите, что прямая MN, построенная таким образом, является медиатрисой отрезка AB.
- Почему радиус полуокружностей должен быть больше $\frac{AB}{2}$?



3 Рассмотрите рисунок. Как расположен центр O окружности относительно точек A и B? А относительно A и C? B и C?
Сформулируйте вывод.

Объясняем Точка O равноудалена от точек A и B, так как AO и OB являются ______ окружности. Следовательно, точка O принадлежит ______ отрезка AB.

То же самое можно сказать и о расположении точки O относительно точек A и C (соответственно B и C).

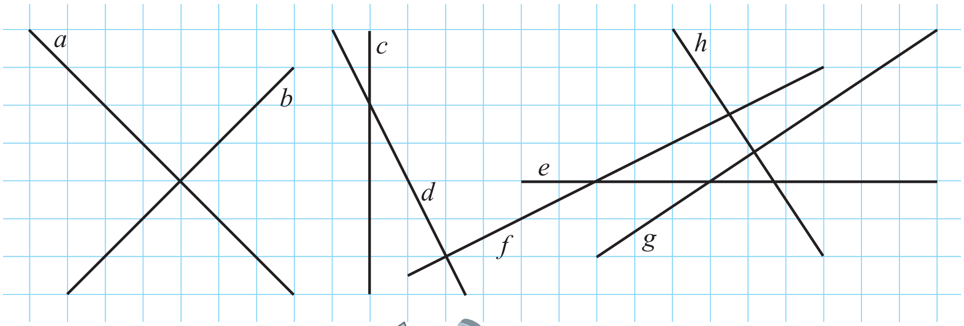
Запомните

> Медиатрисы сторон треугольника пересекаются в одной точке.
> Точка пересечения медиатрис равноудалена от вершин треугольника.

Упражнения и задачи

☑ ☐ ☐

1. Рассмотрите рисунок и соответствующими инструментами определите пары перпендикулярных прямых.



2. Точка M принадлежит медиатрисе отрезка AB. Найдите:

а) AM, если $BM = 8$ см;

б) BM, если $AM = \sqrt{10}$ см;

в) AM, если $AM + BM = 21$ см;

г) BM, если $3AM = 17$ см.

3. Точка M_1 является ортогональной проекцией точки $M\,(a, b)$ на ось абсцисс прямоугольной системы координат. Найдите координаты точки M_1, если:

а) $a = \sqrt{3},\ b = -\frac{5}{12}$; б) $a = \frac{1}{9},\ b = -\frac{1}{5}$;

в) $a = 2,(5),\ b = 1,(4)$; г) $a = 0,\ b = -2$.

4. ***Работайте в парах!*** Точка M_1 является ортогональной проекцией точки $M(a, b)$ на ось ординат прямоугольной системы координат. Найдите MM_1, если:

а) $a = 3,\ b = -7$; б) $a = -2,\ b = \sqrt{5}$;

в) $a = b = -3,(4)$; г) $a = -5,\ b = 0$.

5. Точки A_1 и B_1 являются ортогональными проекциями точек A и B соответственно на прямую a (точки расположены в разных полуплоскостях относительно прямой a), $[AA_1] \equiv [BB_1]$. Найдите:

а) AB_1, если $A_1B = 7$ см;

б) $m(\angle A_1AB_1)$, если $m(\angle B_1A_1B) = 30°$.

6. Точки A_1 и B_1 являются ортогональными проекциями точек A и B соответственно на прямую a (точки расположены в одной полуплоскости относительно прямой a), $[AA_1] \equiv [BB_1]$, точка M – середина отрезка A_1B_1. Найдите:

а) $\text{m}(\angle A_1AM)$, если $\text{m}(\angle BMB_1) = 50°$;

б) $\text{m}(\angle AMB)$, если $\text{m}(\angle BMB_1) = 40°$.

7. Точка D – середина стороны BC треугольника ABC, $E \in AD$, $[BE] \equiv [CE]$.
Найдите:

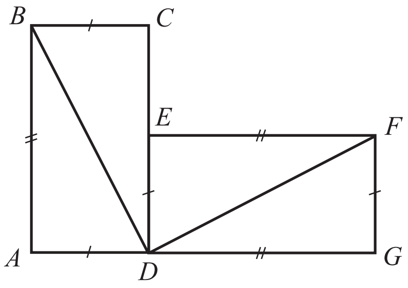
а) $\text{m}(\angle BED)$, если $\text{m}(\angle DCE) = 42°$;

б) $\text{m}(\angle CAD)$, если $\text{m}(\angle ABC) = 35°$.

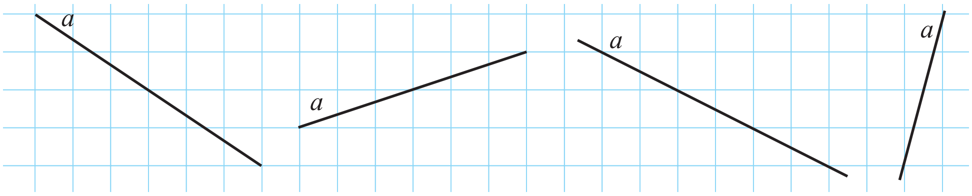
☑☑☐

8. ***Исследуйте!*** Сколько пар перпендикулярных прямых можно провести через три неколлинеарные точки?

9. Изображенные на рисунке прямоугольники $ABCD$ и $DEFG$ конгруэнтны.
Докажите, что $\text{m}(\angle BDF) = 90°$.



10. Перечертите рисунок, используя результат упражнения **9**. Постройте, пользуясь лишь линейкой, прямую перпендикулярно прямой a.



а) б) в) г)

☑☑☑

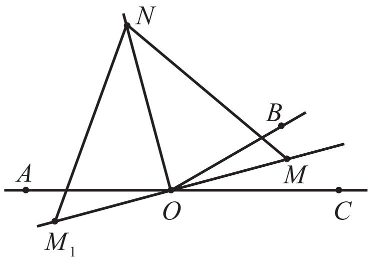
11. ***Работайте в парах!*** Даны точки $A(1;\ 2)$, $B(5;\ 6)$, $C(5;\ 2)$ в прямоугольной системе координат. Найдите координаты:

а) ортогональной проекции точки C на прямую AB;
б) ортогональной проекции точки B на прямую AC;
в) ортогональной проекции точки A на прямую BC.

12. Точки A, O, C коллинеарны (см. рисунок), $[OM$ – биссектриса угла BOC, а $[ON$ – биссектриса угла AOB, $M_1 \in OM$, $[M_1O] \equiv [OM]$.
Найдите:

а) $\text{m}(\angle ONM_1)$, если $\text{m}(\angle OMN) = 55°$;

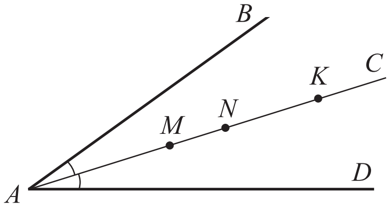
б) ON, если OM = 5 см и периметр треугольника M_1NM равен 24 см, а периметр треугольника MON равен 18 см.



§4. Свойства биссектрисы угла

1 Рассмотрите рисунок. Полупрямая $[AC$ – биссектриса угла BAD. С помощью угольника и линейки с делениями найдите расстояние от точек M, N, K до сторон треугольника BAD.

- Что вы заметили?



Теорема 1

Любая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон этого угла.

Докажем теорему 1.

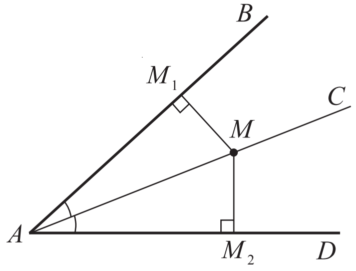
Условие: ΔBAD, $\angle BAC \equiv \angle CAD$,

$MM_1 \perp AB$, $MM_2 \perp AD$,

$M_1 \in [AB$, $M_2 \in [AD$.

Заключение: $MM_1 = MM_2$

Доказательство:

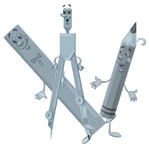


① $\Delta AM_1M \equiv \Delta AM_2M$ (признак ГУ).

② Следовательно, $[MM_1] \equiv [MM_2]$, то есть $MM_1 = MM_2$, ч. т. д. ►

Теорема 2 (обратная теореме 1)

Если точка, лежащая между сторонами угла, равноудалена от сторон этого угла, то эта точка принадлежит биссектрисе угла.

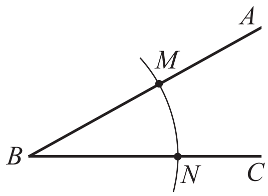


- Докажите теорему 2.

2 Как можно построить биссектрису заданного угла ABC с помощью линейки и циркуля?

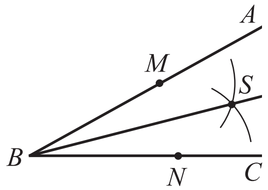
Объясняем

① Зафиксируем ножку циркуля в вершине угла и построим окружность.
Пусть M и N – точки пересечения окружности со сторонами угла ABC.

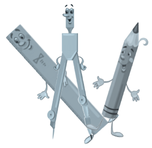


② Зафиксируем ножку циркуля в точке M и построим окружность радиуса больше $\frac{MN}{2}$. Затем построим окружность того же радиуса с центром в точке N. Пусть S – точка пересечения этих двух окружностей (заключенная между сторонами угла).

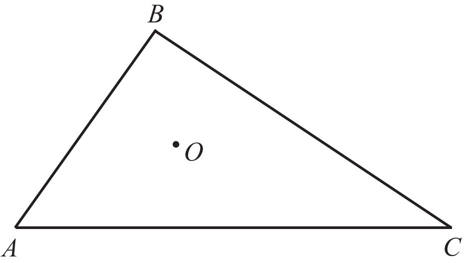
③ Полупрямая $[BS$ – биссектриса угла ABC.



- Докажите, что полупрямая $[BS$ действительно является биссектрисой угла ABC.
- Почему радиус двух окружностей, построенных в пункте ②, должен быть больше $\frac{MN}{2}$?



3 Как найти такую точку O во внутренней области треугольника, чтобы она была равноудалена от всех сторон треугольника?

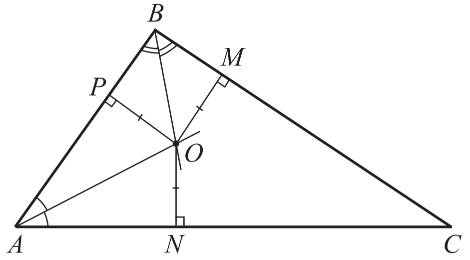


Объясняем

① Так как точка O равноудалена от сторон AB и AC, то она принадлежит биссектрисе угла A.

② Аналогично делаем вывод, что точка O одновременно принадлежит биссектрисам углов B и C.
Следовательно, точка O принадлежит всем биссектрисам треугольника.

③ Достаточно построить биссектрисы двух углов треугольника. Точка их пересечения и будет искомой точкой.



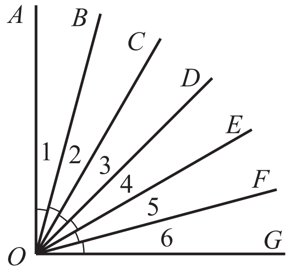
Запомните

> Биссектрисы углов треугольника пересекаются в точке, равноудаленной от сторон треугольника.

Упражнения и задачи

☑ ☐ ☐

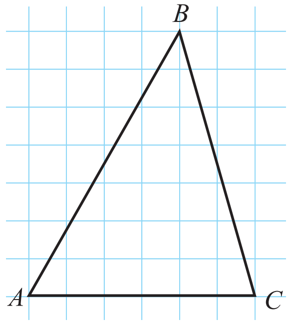
1. Изображенные на рисунке углы 1–6 конгруэнтны. Перечертите и заполните:
   а) Полупрямая $[CO$ – биссектриса углов...
   б) Биссектрисой угла AOG является...
   в) $\angle AOC \equiv ...$, $\angle DOG \equiv ...$
   г) Если $m(\angle AOG) = 90°$, то $m(\angle BOD) = ...$



2. Точка X принадлежит биссектрисе угла AOB. Найдите расстояние от точки X до полупрямой $[OB$, если расстояние от точки X до полупрямой $[OA$ равно:
   а) $\sqrt{5}$ см; б) 3,6 см;
   в) $|\sqrt{3}-2|$ см; г) 0,4 см.

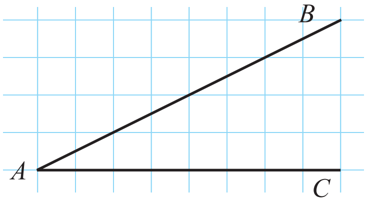
3. Точка M равноудалена от сторон угла AOB и принадлежит внутренней области этого угла. Найдите $m(\angle AOM)$, если:
   а) $m(\angle BOM) = 35°$; б) $m(\angle AOB) = 80°$;
   в) $m(\angle BOM) = 40°26'$; г) $m(\angle AOB) = 17°$.

4. *Работайте в парах!* Перечертите рисунок и с помощью линейки и циркуля постройте биссектрису треугольника ABC, проведенную из вершины: а) A; б) B; в) C.

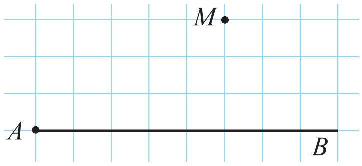


5. Точка M принадлежит биссектрисе угла AOB, а точки M_1 и M_2 – ортогональные проекции точки M на стороны угла AOB. Найдите:
   а) $m(\angle M_1OM)$, если $m(\angle OMM_2) = 42°$;
   б) $m(\angle OMM_2)$, если $m(\angle AOB) = 70°$;
   в) $m(\angle AOB)$, если $m(\angle OMM_1) = 65°$;
   г) $m(\angle AOB)$, если $m(\angle M_1MM_2) = 160°$.

6. Перечертите рисунок и с помощью линейки и циркуля постройте полупрямую $[AD$, такую, чтобы полупрямая $[AB$ являлась биссектрисой угла CAD.



7. Перечертите рисунок и с помощью линейки и циркуля постройте полупрямую $[AC$, такую, чтобы точка M была равноудалена от полупрямых $[AB$ и $[AC$.



☑☑☐

8. Полупрямая $[OA$ противоположна биссектрисе угла BOC. Найдите:

а) $m(\angle AOB)$, если $m(\angle BOC)=60°$; б) $m(\angle BOC)$, если $m(\angle AOC)=165°$.

9. Отрезок AD – биссектриса треугольника ABC и $E\in[AC]$ так, что $[AE]\equiv[AB]$. Докажите, что $BD=DE$.

10. Дан треугольник ABC, у которого $[AB]\equiv[BC]$ и $[AD]$ – биссектриса треугольника. Найдите:

а) $m(\angle CAD)$, если $m(\angle B)=20°$; б) $m(\angle B)$, если $m(\angle BAD)=25°$.

☑☑☑

11. Точка M равноудалена от сторон равностороннего треугольника ABC. Найдите $m(\angle AOB)$.

12. Полупрямая $[BE$ является биссектрисой углов ABC и ADC (см. рисунок 1). Докажите, что треугольники ABC и ADC – равнобедренные.

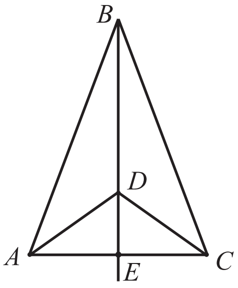
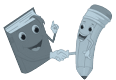


Рис. 1

13.  ***Работайте в парах!***

Рассмотрите рисунок 2.
Докажите, что $AC\perp M_1M_2$.

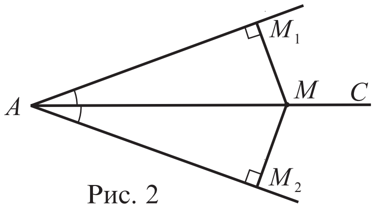


Рис. 2

14. Точка O – центр окружности, вписанной в равносторонний треугольник ABC (см. рисунок 3) и $M\in[AB]$, $N\in[BC]$, $K\in[AC]$ так, что $OM\perp AB$, $ON\perp BC$, $OK\perp AC$. Найдите:

а) $m(\angle MON)$;

б) периметр треугольника MNK, если $AC=10$ см.

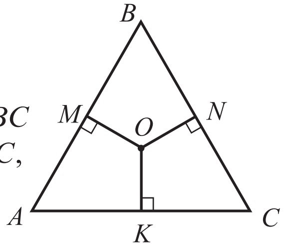
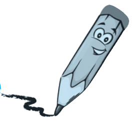


Рис. 3

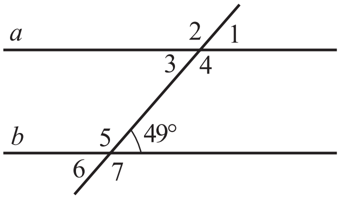
Упражнения и задачи на повторение



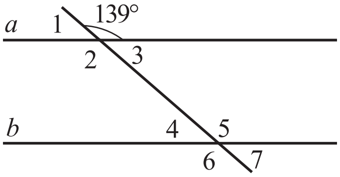
☑☐☐

1. Прямые a и b параллельны. Найдите величины углов 1–7.

а)



б)



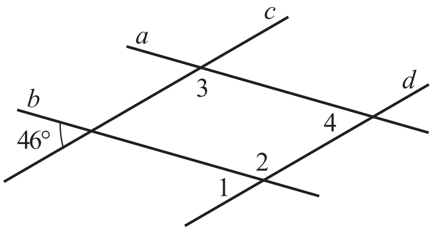
2. Найдите величину угла между биссектрисами внутренних односторонних углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей.

3. При пересечении двух параллельных прямых секущей величина одного из образованных внутренних односторонних углов на 50° больше другого. Найдите величину меньшего угла.

4. Точки A и D расположены в одной полуплоскости относительно прямой BC, $m(\angle ABC)=\alpha$, а $m(\angle BCD)=\beta$. Каково взаимное расположение прямых AB и CD, если:
а) $\alpha=70°$, $\beta=110°$; б) $\alpha=65°$, $\beta=115°$.

5. Разность величин двух внутренних односторонних углов (образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей) в 4 раза меньше их суммы. Найдите величину большего угла.

6. ***Работайте в парах!*** Рассмотрите рисунок. Найдите величины углов 1–4, если $a \parallel b$ и $c \parallel d$.



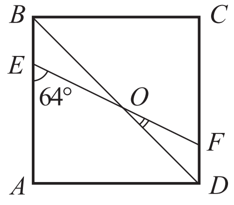
7. Дан прямоугольный треугольник ABC, у которого $m(\angle B)=90°$. Расстояние между серединой гипотенузы и одним из катетов треугольника равно 7,5 см. Найдите длину другого катета.

8. Точка M равноудалена от сторон угла ABC. Найдите величину угла ABM, если величина угла ABC равна 111°.

9. Точка M равноудалена от концов отрезка AB. Найдите $m(\angle MAB)$, если $m(\angle AMB)=71°$.

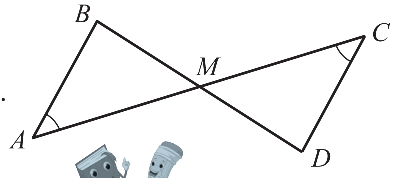
☑☑☐

10. Рассмотрите рисунок. $ABCD$ является квадратом. Найдите $m(\angle DOF)$, если $m(\angle AEO)=64°$.

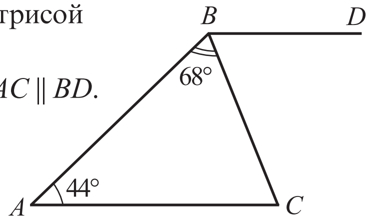


11. Две медианы треугольника конгруэнтны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

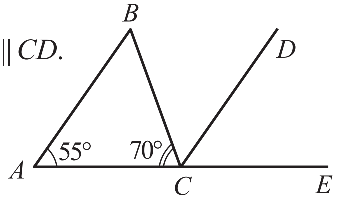
12. Рассмотрите рисунок. Докажите, что $AB \parallel CD$.



13. Рассмотрите рисунок. Полупрямая $[BC$ является биссектрисой угла ABD. Докажите, что $AC \parallel BD$.



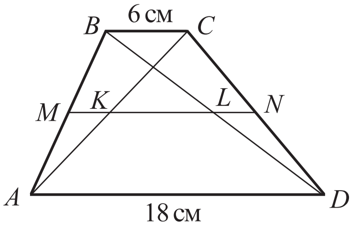
14. ***Работайте в парах!*** Рассмотрите рисунок. Полупрямая $[CD$ является биссектрисой угла BCE. Докажите, что $AB \parallel CD$.



☑☑☑

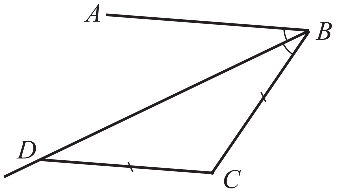
15. Дана трапеция $ABCD$, у которой $AD \parallel BC$. Точки M и N – середины боковых сторон трапеции. Найдите MN, если AD = 12 см и BC = 4,8 см.

16. Дана трапеция $ABCD$, у которой $AD \parallel BC$ и AD = 18 см, BC = 6 см (см. рисунок).
Точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно, $MN \cap AC=\{K\}$, $BD \cap MN=\{L\}$. Найдите MK, KL, LN.



17. Точка пересечения отрезков AB и CD делит их пополам. Докажите, что если прямая a параллельна прямой AC, то прямая a параллельна и прямой BD.

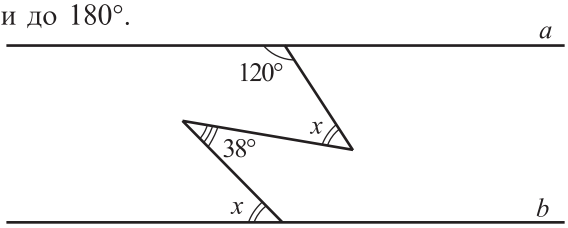
18. Рассмотрите рисунок. Полупрямая [*BD* является биссектрисой треугольника *ABC* и $[BC] \equiv [CD]$. Докажите, что $AB \parallel CD$.
Указание. Проведите медиану *CN* треугольника *BDC* и докажите, что треугольники *CNB* и *CND* конгруэнтны.



19. Докажите, что углы, у которых стороны соответственно параллельны, являются конгруэнтными или дополнительными до 180°.

ЗАДАЧА ДЛЯ ЧЕМПИОНОВ

20. Найдите величину угла *x*, если прямые *a* и *b* параллельны.

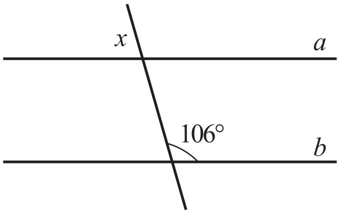


Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. Прямые *a* и *b* параллельны. Вычислите величину угла *x*.



2. Разность величин внутренних односторонних углов равна 36°.
Найдите величину большего угла.

3. Найдите периметр треугольника *ABC*, если периметр треугольника *MNK*, где точки *M*, *N*, *K* – середины сторон треугольника *ABC*, равен 22,2 см.

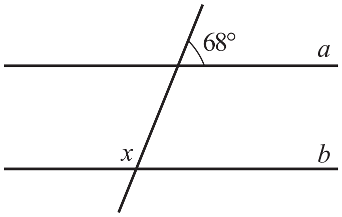
4. Найдите величину угла, образованного полупрямой, противоположной биссектрисе угла *A*, и стороной этого угла, если:

$$m(\angle A) = 88°.$$

5. Даны точки *A*, *B*, *C* в декартовой системе координат. Найдите координаты точки *C*, если она принадлежит медиатрисе отрезка *AB*, где *A*(–3, 4), *B*(5, 4), имеет положительную ординату и расположена на расстоянии 6 единиц от отрезка *AB*.

Вариант 2

1. Прямые *a* и *b* параллельны. Вычислите величину угла *x*.



2. Разность величин внутренних односторонних углов равна 34°.
Найдите величину меньшего угла.

3. Найдите периметр треугольника *ABC*, если периметр треугольника *MNK*, где точки *A*, *B*, *C* – середины сторон треугольника *MNK*, равен 19,1 см.

4. Найдите величину угла, образованного полупрямой, противоположной биссектрисе угла *A*, и стороной этого угла, если:

$$m(\angle A) = 76°.$$

5. Даны точки *A*, *B*, *C* в декартовой системе координат. Найдите координаты точки *C*, если она принадлежит медиатрисе отрезка *AB*, где *A*(2, 3), *B*(2, –2), имеет положительную ординату и расположена на расстоянии 5 единиц от отрезка *AB*.

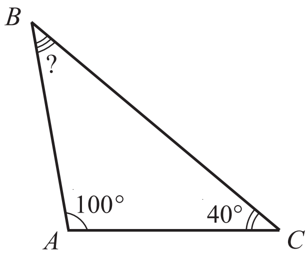
4 глава

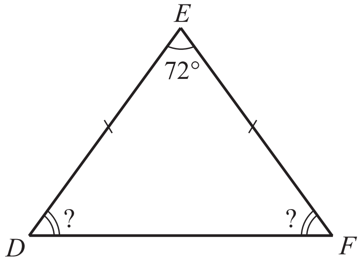
Свойства треугольников

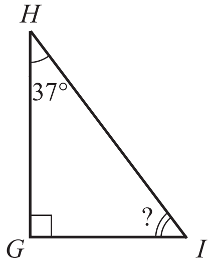
> *Математика является ни больше ни меньше точной частью нашего мышления.*
>
> Л. Э. Я. Брауэр

§1. Внешний угол треугольника

1 Рассмотрите рисунок и вычислите величины неизвестных углов треугольника.







Объясняем Так как сумма углов любого треугольника равна 180°, получим:

$$m(\angle B)=180^\circ-m(\angle A)-m(\angle C)=180^\circ-100^\circ-\square^\circ=\square^\circ.$$

$$m(\angle D)=m(\angle F)=\frac{180^\circ-\square^\circ}{2}=\square^\circ.$$

$$m(\angle I)=180^\circ-\square^\circ-\square^\circ=\square^\circ.$$

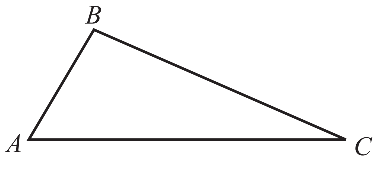
До сих пор мы применяли свойство углов треугольника без его доказательства. Докажем это свойство.

Теорема 1 Сумма углов треугольника равна 180°.

Условие: ABC – треугольник.

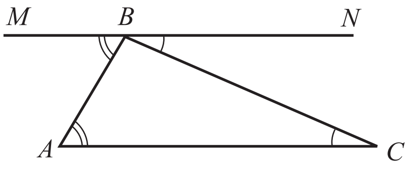
Заключение: $m(\angle A)+m(\angle B)+m(\angle C)=180^\circ$.

Доказательство:



① Проведем через точку B прямую MN, параллельную прямой AC.

② $\angle C\equiv\angle CBN$, $\angle A\equiv\angle ABM$ (внутренние накрест лежащие углы, образованные секущими BC, AB и параллельными прямыми MN и AC).

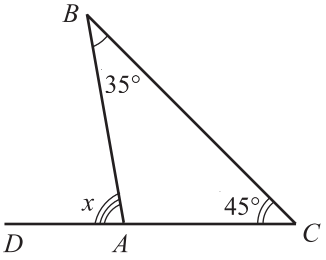


③ $m(\angle MBN)=180^\circ$ (развернутый угол).

④ $m(\angle A)+m(\angle B)+m(\angle C)\overset{②}{=}m(\angle ABM)+m(\angle B)+m(\angle CBN)=$

$=m(\angle MBN)\overset{③}{=}180^\circ$, ч. т. д. ►

2 Найдите величину угла, обозначенную через x.



Объясняем Углы BAD и BAC – смежные и дополнительные до 180°:

$$m(\angle BAD) = 180° - m(\angle BAC); \qquad (1)$$

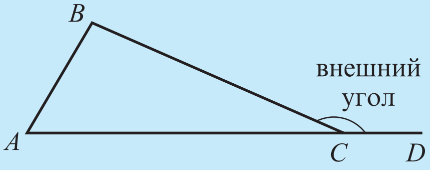
$$m(\angle BAC) \overset{T_1}{=} 180° - m(\angle B) - m(\angle C). \qquad (2)$$

Подставляя соотношение (2) в (1), получим:

$$m(\angle BAD) = 180° - [180° - m(\angle B) - m(\angle C)] = \boxed{\qquad\qquad}.$$

$$m(\angle BAD) = \boxed{\quad}° + \boxed{\quad}° = \boxed{\quad}°.$$

Определение **Внешним углом** треугольника при данной вершине называется угол, смежный углу треугольника при этой вершине.



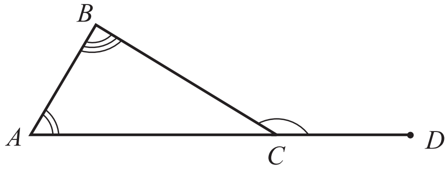
Теорема 2 Величина внешнего угла треугольника равна сумме величин двух углов треугольника, не смежных с ним.

$$m(\angle BCD) = m(\angle A) + m(\angle B).$$

Докажем теорему 2.

Условие: ΔABC, $D \in [AC$, $C \in [AD]$.

Заключение: $m(\angle BCD) = m(\angle A) + m(\angle B)$.



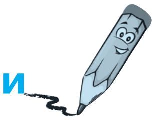
Доказательство:

① $m(\angle ACB) = 180° - m(\angle BCD)$, так как $\angle ACB$ и $\angle BCD$ – смежные и дополнительные до 180°.

② $m(\angle ACB) = 180° - [m(\angle A) + m(\angle B)]$, так как все три угла принадлежат тому же треугольнику ABC.

③ Из ① и ② следует, что $180° - m(\angle BCD) = 180° - [m(\angle A) + m(\angle B)]$, то есть $m(\angle BCD) = m(\angle A) + m(\angle B)$ ч. т. д. ►

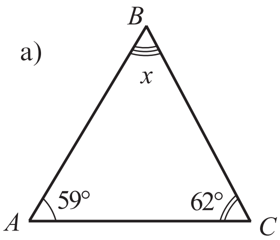
Упражнения и задачи



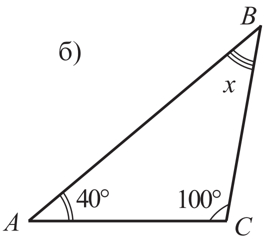
☑ ☐ ☐

1. Рассмотрите рисунок и найдите величину угла, обозначенную через x.

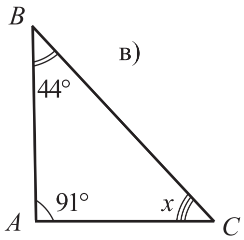
а)



б)

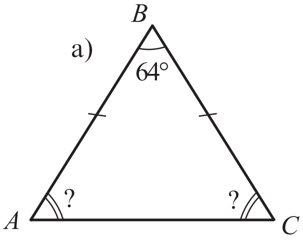


в)

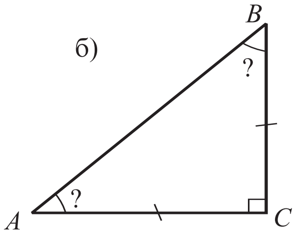


2. Рассмотрите рисунок и вычислите величины неизвестных углов треугольника ABC.

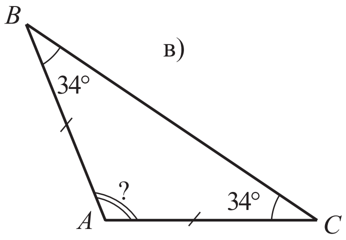
а)



б)

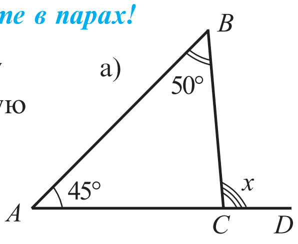


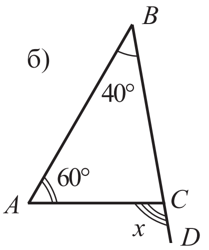
в)

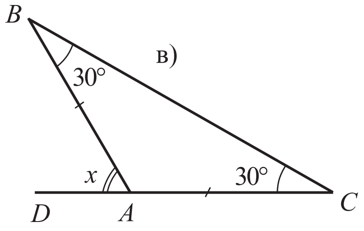


3. ***Работайте в парах!***

Найдите величину угла, обозначенную через x.







4. Вычислите величины внешних углов равностороннего треугольника.

5. Вычислите величины внешних углов равнобедренного прямоугольного треугольника.

6. Вычислите величины внешних углов прямоугольного треугольника, один из острых углов которого равен 20°.

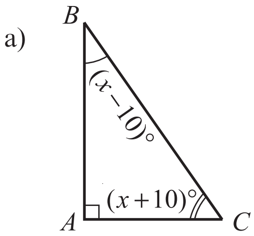
7. Найдите сумму внешних углов любого треугольника.

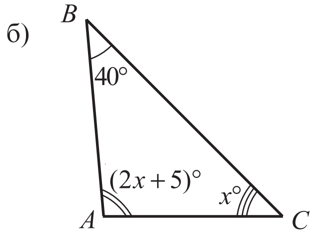
8. Величины внешних углов треугольника равны 100°, 110°, 150°. Найдите величины углов треугольника.

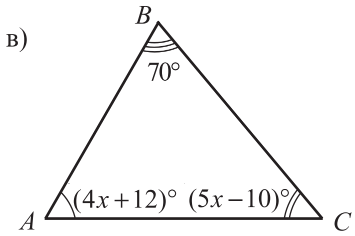
☑☑☐

9. Величины двух внешних углов треугольника равны 95° и 130° соответственно. Найдите величины углов треугольника.

10. Рассмотрите рисунок и вычислите величины неизвестных углов треугольника ABC.





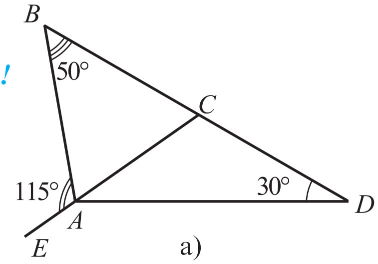


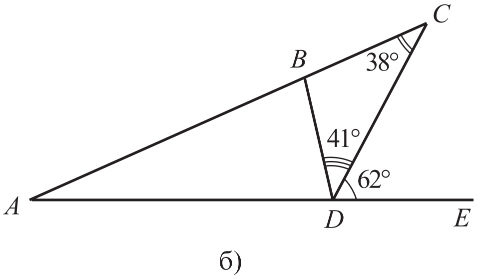
11. Величина одного из углов равнобедренного треугольника равна 92°. Найдите величины двух других углов.

12. Найдите величины углов треугольника, если они прямо пропорциональны числам 2, 3, 4.

13. ***Работайте в парах!***

Рассмотрите рисунок и найдите величину угла CAD.





14. Найдите величины углов треугольника, если величины внешних углов треугольника прямо пропорциональны числам 3, 4, 5.

☑☑☑

15. Докажите, что не существует треугольника, у которого все возможные суммы любых двух углов:
а) больше 120°; б) меньше 120°.

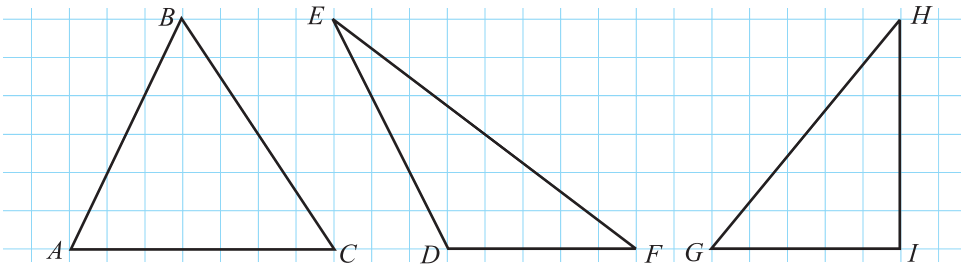
16. Величины углов треугольника прямо пропорциональны трем последовательным натуральным числам. Докажите, что величина одного из углов равна 60°.

Указание. Используйте свойство $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

§2. Свойства замечательных линий треугольника

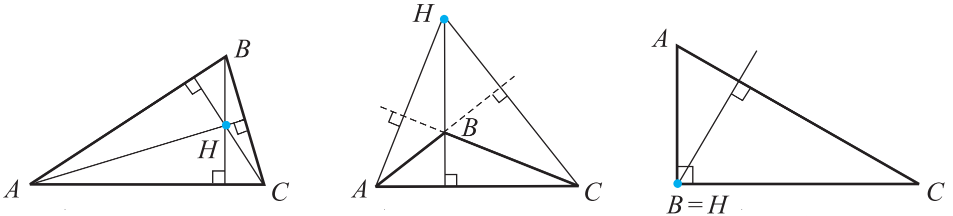
1 Дополните так, чтобы получить истинное высказывание.
а) Точка пересечения медиатрис сторон треугольника равноудалена от ... .
б) Точка пересечения биссектрис треугольника равноудалена от ... .

2 Перечертите и проведите высоты в каждом треугольнике.

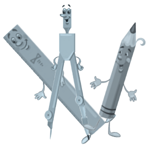


- Обратите внимание, как зависит от вида треугольника расположение точек пересечения несущих прямых высот треугольника. Сформулируйте гипотезы и проверьте их на других треугольниках такого же вида (остроугольных, тупоугольных, прямоугольных).

Несущие прямые высот треугольника пересекаются в одной точке, которая называется **ортоцентром** треугольника (как правило, обозначается через H).

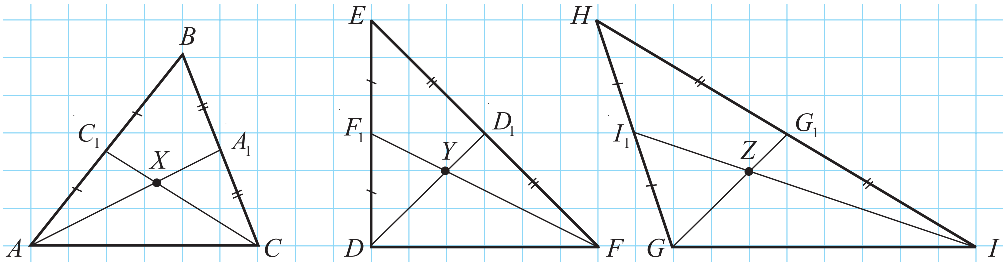


$H \in \mathrm{Int}\,\Delta ABC$ $H \in \mathrm{Ext}\,\Delta ABC$ $H \in \Delta ABC$



Практическая работа

Рассмотрите рисунок. Линейкой определите, будет ли третья медиана треугольника проходить через точку пересечения двух построенных медиан. Сформулируйте вывод.



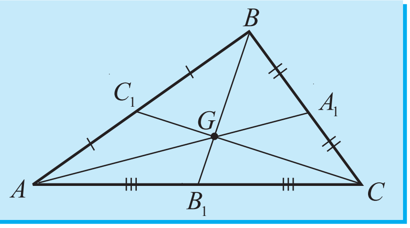
- Точка пересечения медиан делит каждую медиану на два отрезка. Циркулем определите, во сколько раз меньший отрезок короче большего отрезка. Сформулируйте вывод.

Запомните

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая называется **центром тяжести** треугольника (как правило, обозначается через G).

Теорема

Центр тяжести треугольника расположен на каждой медиане в два раза дальше от вершины треугольника, чем от середины противоположной стороны.

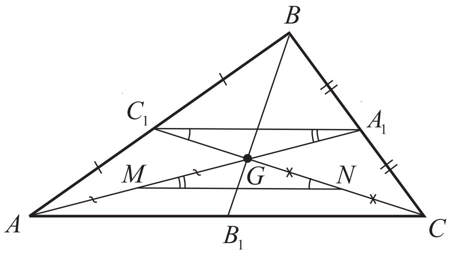


Докажем теорему.

Условие: ΔABC, $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ – медианы треугольника ABC. $[AA_1]\cap[BB_1]\cap[CC_1]=\{G\}$.

Заключение: $AG=2A_1G,\ BG=2B_1G,\ CG=2C_1G$.

Доказательство:



① Пусть точка M – середина отрезка AG, а точка N – середина отрезка CG.

② $[A_1C_1]$ – средняя линия треугольника ABC. Значит, $A_1C_1 \parallel AC$ и $A_1C_1=\dfrac{AC}{2}$ (1).
$[MN]$ – средняя линия треугольника AGC. Значит, $MN \parallel AC$ и $MN=\dfrac{AC}{2}$ (2).

③ Из соотношений (1) и (2) следует, что $[MN]\equiv[A_1C_1]$ и $MN \parallel A_1C_1$ (3).

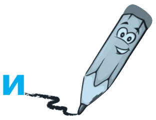
④ $\angle MNG \equiv \angle A_1C_1G$ (внутренние накрест лежащие углы, образованные секущей NC_1 и параллельными прямыми MN и A_1C_1) (4).

⑤ $\angle NMG \equiv \angle C_1A_1G$, (внутренние накрест лежащие углы, образованные секущей MA_1 и параллельными прямыми MN и A_1C_1) (5).

⑥ Из сотношений (3)–(5) следует, что $\Delta A_1C_1G \equiv \Delta MNG$ (УСУ).
Следовательно, $[A_1G]\equiv[MG] \Rightarrow AG=2A_1G$,
$[C_1G]\equiv[NG] \Rightarrow CG=2C_1G$.
Аналогично доказывают, что $BG=2B_1G$, ч. т. д. ▶

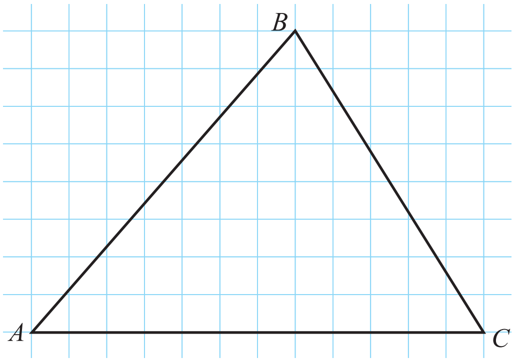
Замечание Теорему можно сформулировать и так:
Точка пересечения медиатрис треугольника делит каждую медиану в соотношении 2:1, считая от вершины.

Упражнения и задачи



☑ ☐ ☐

1. Перечертите рисунок и проведите в треугольнике:
а) медианы;
б) высоты;
в) биссектрисы.



2. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно*?

а) Центр тяжести треугольника является точкой пересечения его биссектрис.

б) Медианы треугольника пересекаются в точке, являющейся центром окружности, описанной около этого треугольника.

в) Биссектрисы треугольника пересекаются в точке, являющейся центром окружности, вписанной в этот треугольник.

г) Ортоцентр треугольника является точкой пересечения медиатрис треугольника.

3. Исправьте ложные высказывания из задания **2**.

4. ***Работайте в парах!*** Дополните так, чтобы получить истинные высказывания.

а) Ортоцентр $\boxed{}$ треугольника расположен во внешней области этого треугольника.

б) Если точка G – центр тяжести треугольника ABC и $[AA_1]$ – медиана этого треугольника, то $\frac{AA_1}{A_1G}=\boxed{}$, $\frac{AA_1}{AG}=\boxed{}$.

в) Если диаметр окружности, содержащей вершины треугольника, равен 10 см, то расстояние от вершины треугольника до точки пересечения медиатрис треугольника равно $\boxed{}$ см.

5. Определите вид треугольника, если точка пересечения медиатрис принадлежит:

а) треугольнику;

б) внутренней области треугольника;

в) внешней области треугольника.

6. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 6 см. Найдите радиус окружности, содержащей вершины этого треугольника.

7. Медианы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O. Вычислите:

а) AO и BO, если $AM=9$ см, $BN=12$ см;

б) AM и BN, если $AO=4\sqrt{3}$ см, $BO=6\sqrt{3}$ см;

в) OM и ON, если $AM=12$ см, $BN=15$ см;

г) AO и BO, если $OM=\sqrt{5}$ см, $ON=\sqrt{6}$ см.

8. Точка M равноудалена от сторон треугольника ABC. Найдите:

а) величины углов треугольника ABC, если $m(\angle MAC)=30°$, $m(\angle ACM)=40°$;

б) $m(\angle BAM)$ и $m(\angle BCM)$, если $m(\angle BAC)=74°$, $m(\angle ABC)=70°$;

в) $m(\angle AMC)$ и $m(\angle BMC)$, если $m(\angle BAC)=46°$, $m(\angle ABC)=100°$;

г) величины углов треугольника ABC, если $m(\angle AMB)=100°$, $m(\angle BMC)=130°$.

☑☑☐

9. Отрезок AM – высота остроугольного треугольника ABM. Найдите величины углов, образованных полупрямой $[AM$ и сторонами AB и AC треугольника, если:

а) $m(\angle B)=70°$, $m(\angle C)=50°$;

б) величины внешних углов треугольника при вершинах B и C равны 120° и 110° соответственно.

10. Дан равнобедренный треугольник ABC, у которого $[AB]\equiv[AC]$, $[AM]$ и $[CN]$ – две высоты треугольника. Вычислите:

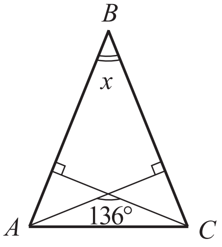
а) величины углов, образованных полупрямой $[AM$ с $[AB$ и $[AC$, если $m(\angle B)=78°$;

б) величины углов, образованных полупрямой $[CN$ с $[CA$ и $[CB$, если $m(\angle A)=50°$;

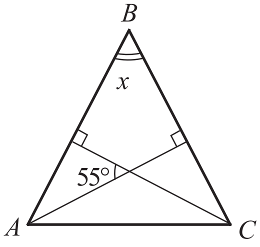
в) $m(\angle B)$, если $m(\angle MAC)=27°$;

г) $m(\angle A)$, если $m(\angle MCN)=31°$.

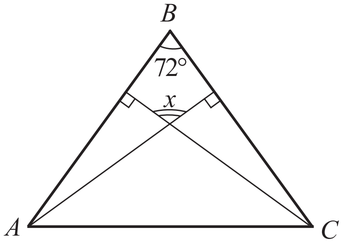
11. ***Работайте в парах!*** Рассмотрите рисунок ($[AB]\equiv[BC]$) и вычислите величину угла, обозначенную через x.



а)



б)



в)

12. $[AM]$ и $[CN]$ – медианы треугольника ABC. Вычислите:

а) периметр треугольника BMN, если периметр треугольника ABC равен $8\sqrt{7}$ см;

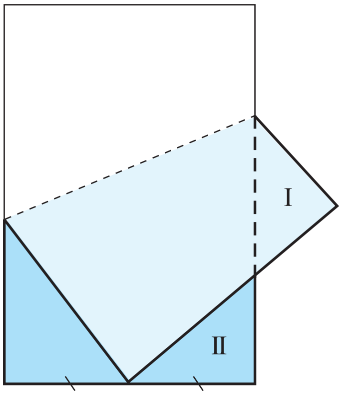
б) периметр четырехугольника $ANMC$, если периметр треугольника ABC равен 28 см и $AC = 10$ см.

☑ ☑ ☑

13. Медиана AM треугольника ABC конгруэнтна отрезку BM. Докажите, что величина одного из углов треугольника ABC равна сумме величин двух других углов этого треугольника.

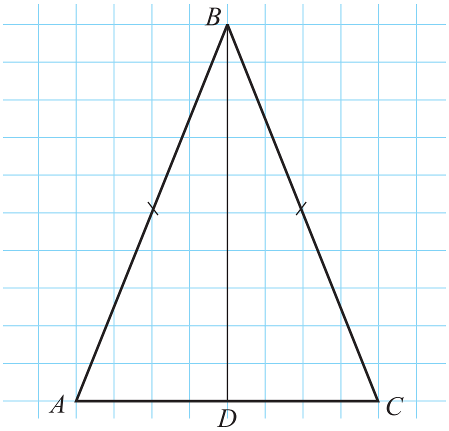
14. Дан треугольник ABC, у которого $[AB]\equiv[AC]$. Точки M и N принадлежат стороне BC так, что $[BM]\equiv[CN]$. Найдите $m(\angle MAN)$, если $m(\angle BMA) = 115°$.

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА



15. Лист бумаги прямоугольной формы был сложен так, чтобы левый верхний угол совпадал с серединой нижней стороны (см. рисунок). Получились два равных треугольника I и II. Найдите длину листа, если его ширина равна 16 см.

§3. Свойства равнобедренного треугольника



1 Рассмотрите рисунок. Дополните одним из понятий: *медиана, биссектриса, высота* – так, чтобы получить истинное высказывание.

Отрезок BD – ________ равнобедренного треугольника ABC.

- Сформулируйте вывод.

Теорема 1 Медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины равнобедренного треугольника к его основанию, совпадают.

Докажем теорему 1.

Условие:	*Заключение*:
ΔABC, $[AB] \equiv [CB]$.	
Если отрезок $[BD]$ – медиана,	то отрезок $[BD]$ является биссектрисой и высотой.
Если отрезок $[BD]$ – биссектриса,	то отрезок $[BD]$ является высотой и медианой.
Если отрезок $[BD]$ – высота,	то отрезок $[BD]$ является медианой и биссектрисой.

Доказательство:

Если отрезок $[BD]$ – медиана, то $\Delta ABD \equiv \Delta CBD$ (признак ССС).
Если отрезок $[BD]$ – биссектриса, то $\Delta ABD \equiv \Delta CBD$ (признак СУС).
Если отрезок $[BD]$ – высота, то $\Delta ABD \equiv \Delta CBD$ (признак ГК).
Заключение теоремы следует из конгруэнтности треугольников ABD и CBD,

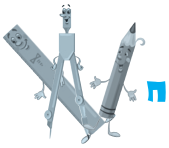
ч. т. д. ►

Доказав теорему 1, мы показали, что треугольники ABD и CBD конгруэнтны. Следовательно, $\angle A \equiv \angle C$.

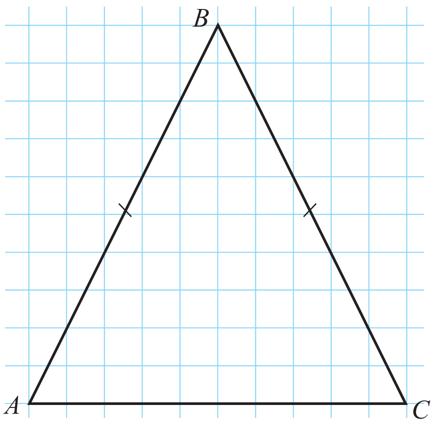
Теорема 2 Углы при основании равнобедренного треугольника конгруэнтны.

Замечание Высказывание, обратное теореме 2, также верно.

- Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме 2.



Практическая работа

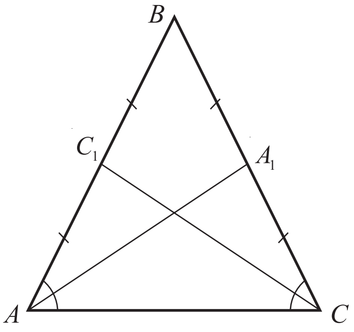


1. Перечертите рисунок.
2. Проведите высоты, медианы и биссектрисы треугольника, исходящие из вершин A и C. Сравните длины:
   а) медиан;
   б) биссектрис;
   в) высот.
   Сформулируйте вывод.

Теорема 3 Медианы, проведенные из вершин основания равнобедренного треугольника, конгруэнтны.

Теорема 4 Биссектрисы, проведенные из вершин основания равнобедренного треугольника, конгруэнтны.

Теорема 5 Высоты, проведенные из вершин основания равнобедренного треугольника, конгруэнтны.



Докажем теорему 3.

Условие: ΔABC, $[AB]\equiv[CB]$,
$[AA_1], [CC_1]$ – медианы треугольника ABC.

Заключение: $[AA_1]\equiv[CC_1]$.

Доказательство:

$\Delta AC_1C \equiv \Delta CA_1A$ (признак СУС: $[AC]$ – общая сторона, $[AC_1]\equiv[CA_1]$ по условию, $m(\angle A)\equiv m(\angle C)$ по теореме 2).

Следовательно, $[AA_1]\equiv[CC_1]$, ч. т. д. ►

- Докажите теоремы 4 и 5.

Замечание Высказывания, обратные теоремам 3–5, также верны.

- Сформулируйте и докажите теоремы, обратные теоремам 3–5.

Запомните

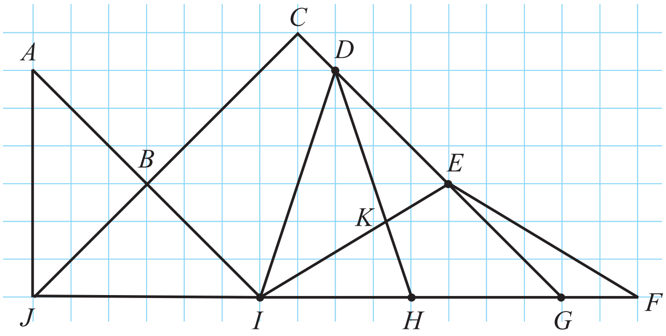
Признаки равнобедренного треугольника

Треугольник является равнобедренным, если выполняется хотя бы одно из условий:
1) два угла треугольника конгруэнтны;
2) одна из медиан и одна из биссектрис треугольника совпадают;
3) одна из медиан и одна из высот треугольника совпадают;
4) одна из биссектрис и одна из высот треугольника совпадают;
5) две медианы треугольника конгруэнтны;
6) две биссектрисы треугольника конгруэнтны;
7) две высоты треугольника конгруэнтны.

Упражнения и задачи

☑ ☐ ☐

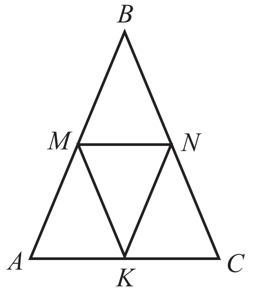
1. Рассмотрите рисунок и укажите равнобедренные треугольники.



2. Углы A и B треугольника ABC конгруэнтны. Вычислите:
а) AC, если $BC = 6$ см;
б) BC, если $AC + BC = 11$ см;
в) $2AC$, если $3BC = 15$ см;
г) $2AC - BC$, если $AC = \sqrt{5}$ см.

3. $[BM]$ – медиана равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Вычислите:
а) $m(\angle ABC)$, если $m(\angle ABM) = 25°$;
б) $m(\angle A)$, если $m(\angle MBC) = 28°$;
в) $m(\angle C)$, если $m(\angle ABM) + m(\angle AMB) = 130°$;
г) $m(\angle ABM)$, если $m(\angle C) + m(\angle BMC) = 124°$.

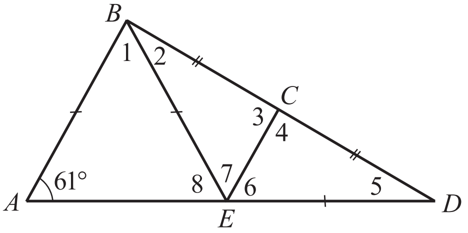
4. ***Работайте в парах!*** На рисунке $[AB] \equiv [BC]$ и точки M, N, K – середины сторон треугольника ABC. Перечислите:
а) конгруэнтные отрезки;
б) конгруэнтные углы.



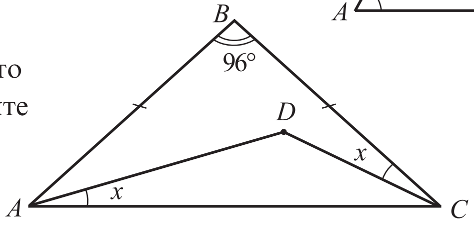
5. Используя рисунок и условие упражнения **4**, найдите:
а) $m(\angle MKN)$, если $m(\angle A) = 44°$;
б) $m(\angle B)$, если $m(\angle KMN) = 55°$;
в) $m(\angle A)$, если $m(\angle B) + m(\angle MKN) = 80°$;
г) $m(\angle C)$, если $m(\angle A) + m(\angle KMN) = 88°$.

6. Используя рисунок и условие упражнения **4**, найдите:
а) MN, если $AC + MN = 18$ см;
б) AM, если $MB + NC = 9$ см;
в) BN, если $AM + MK = 4\sqrt{3}$ см;
г) KN, если $AB + BC = 8,(4)$ см.

7. ***Работайте в парах!*** Рассмотрите рисунок. Учитывая, что $[AB] \equiv [BE] \equiv [DE]$, $[BC] \equiv [CD]$, $m(\angle A) = 61°$, вычислите величины углов 1–8.

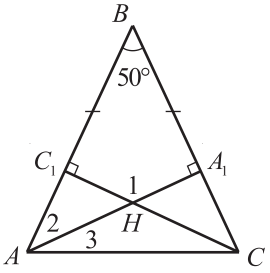


8. Рассмотрите рисунок. Учитывая, что $[AB] \equiv [BC]$, $m(\angle B) = 96°$, вычислите $m(\angle ADC)$.

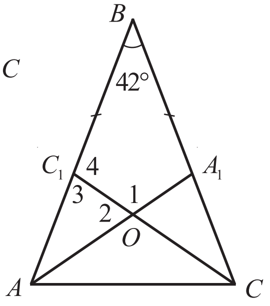


☑☑☐

9. Рассмотрите рисунок. Учитывая, что $[AB] \equiv [BC]$, $[AA_1]$ и $[CC_1]$ – высоты треугольника ABC, $m(\angle B) = 50°$, вычислите величины углов 1–3.

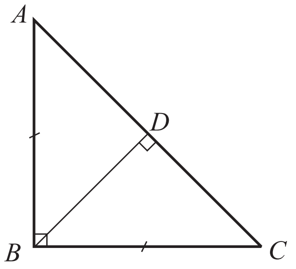


10. Рассмотрите рисунок. Учитывая, что $[AB] \equiv [BC]$, $[AA_1]$ и $[CC_1]$ – биссектрисы треугольника ABC, $m(\angle B) = 42°$, вычислите величины углов 1–4.



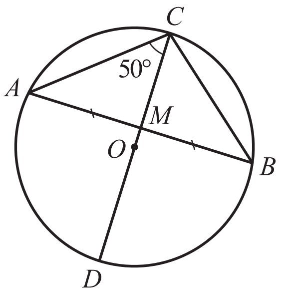
11. Найдите длины сторон равнобедренного треугольника, если:
а) периметр треугольника равен 28 см и одна из сторон треугольника на 8 см короче другой;
б) периметр треугольника равен 42 см и одна из сторон треугольника в 2,5 раза длиннее другой.

12. Треугольник ABC, изображенный на рисунке, равнобедренный и прямоугольный $(\mathrm{m}(\angle B) = 90°,\ [AB] \equiv [AC])$, отрезок $[BD]$ – высота треугольника ABC.
Найдите BD, если $AC = 4\sqrt{2}$ см.

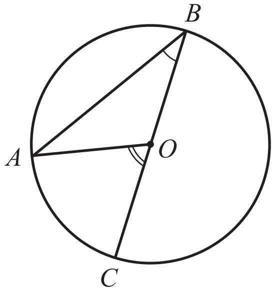


13. Диаметр AB окружности пересекает хорду CD в точке M под углом 90°.
Найдите CM и DM, если $CD = 18$ см.

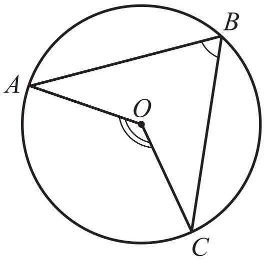
14. Диаметр CD окружности пересекает хорду AB в точке M, которая является серединой хорды (см. рисунок).
Найдите $\mathrm{m}(\angle ABC)$, если $\mathrm{m}(\angle ACM) = 50°$.



15. Отрезок BC – диаметр окружности с центром в точке O, а точка A принадлежит этой окружности (см. рисунок).
Докажите, что $\mathrm{m}(\angle AOC) = 2\mathrm{m}(\angle ABC)$.

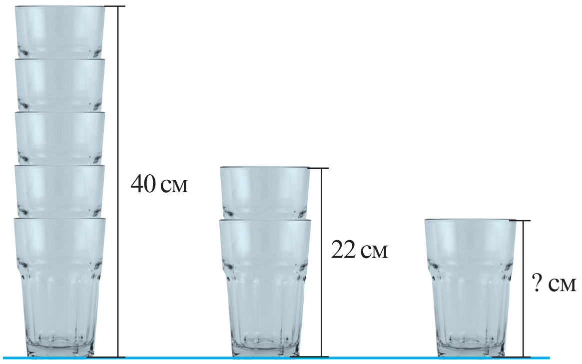


16. Точки A, B, C принадлежат окружности с центром в точке O так, что точка O расположена между сторонами угла AOB (см. рисунок).
Докажите, что $\mathrm{m}(\angle AOC) = 2\mathrm{m}(\angle ABC)$.
Указание. Используйте результат, полученный в упражнении **15**.

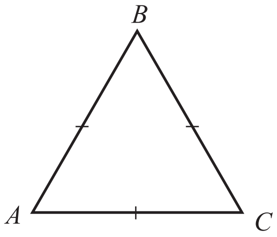


Занимательная математика

17. Рассмотрите изображение и найдите высоту стакана.



§4. Свойства равностороннего треугольника



1 Используя соответствующие инструменты и учитывая свойства равнобедренного треугольника, сформулируйте как можно больше истинных высказываний об элементах и замечательных линиях равностороннего треугольника.

Пример. Медианы равностороннего треугольника конгруэнтны.

Замечание Равносторонний треугольник – одновременно и равнобедренный.

Теорема 1 Если треугольник является равносторонним, то его углы конгруэнтны, и их величины равны 60°.

Докажем теорему 1.

Условие: ΔABC – равносторонний.

Заключение: $\angle A \equiv \angle B \equiv \angle C$, $m(\angle A) = 60°$.

Доказательство:

① Так как $[AB] \equiv [CB]$, то $\angle A \equiv \angle C$ (по теореме об углах при основании равнобедренного треугольника).

② Так как $[AC] \equiv [BC]$, то $\angle A \equiv \angle B$.

③ Из пунктов ① и ② следует, что $\angle A \equiv \angle B \equiv \angle C$.

Значит, $m(\angle A) = 180° : 3 = 60°$, ч. т. д. ►

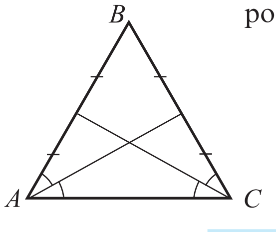
Теорема 2 (обратная теореме 1)

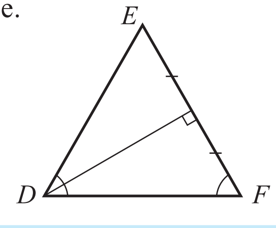
Если углы треугольника конгруэнтны, то треугольник равносторонний.

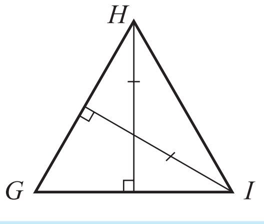
- Докажите теорему 2.

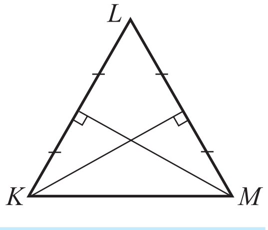
Теорема 3 Медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины равностороннего треугольника, совпадают. Медианы, биссектрисы и высоты равностороннего треугольника конгруэнтны.

2 Рассмотрите рисунок и определите, какие из данных треугольников равносторонние.









Теорема 4 Если две медианы треугольника являются его биссектрисами, то треугольник равносторонний.

Теорема 5 Если две медианы треугольника являются его высотами, то треугольник равносторонний.

Теорема 6 Если две высоты треугольника являются его биссектрисами, то треугольник равносторонний.

- Докажите теоремы 4–6.

Запомните

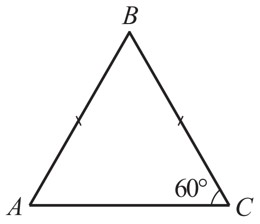
Признаки равностороннего треугольника

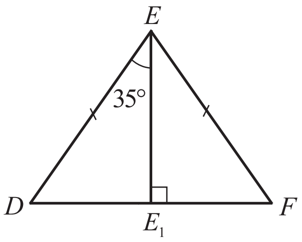
Треугольник является равносторонним, если выполняется хотя бы одно из условий:
1) все углы треугольника конгруэнтны;
2) две медианы треугольника являются биссектрисами этого треугольника;
3) две медианы треугольника являются высотами этого треугольника;
4) две биссектрисы треугольника являются высотами этого треугольника;
5) медианы треугольника конгруэнтны;
6) биссектрисы треугольника конгруэнтны;
7) высоты треугольника конгруэнтны;
8) треугольник равнобедренный, и величина одного из углов равна 60°.

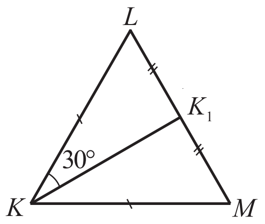
Упражнения и задачи

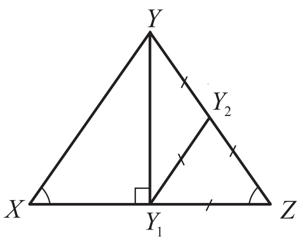
☑ ☐ ☐

1. Рассмотрите рисунок и определите, какие из треугольников равносторонние.



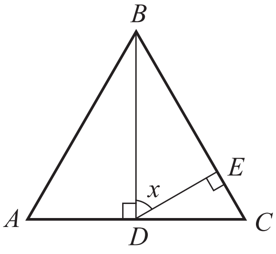




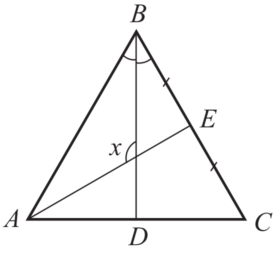


2. Используя линейку и циркуль, постройте равносторонний треугольник со сторонами:
а) 4 см; б) 5 см.

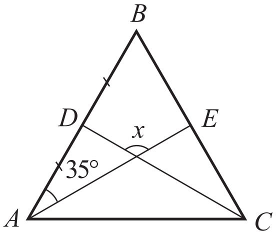
3. ***Работайте в парах!*** Треугольник ABC, изображенный на рисунке, равносторонний. Рассмотрите рисунок и найдите величину угла, обозначенную через x.



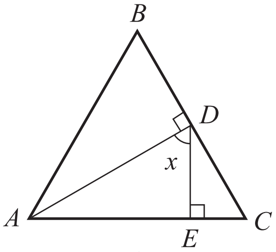
а)



б)



в)



г)

4. Вычислите периметр равностороннего треугольника, если длина его средней линии равна $\frac{4}{\sqrt{3}}$ см.

5. Площадь равностороннего треугольника ABC равна 60 см^2. Найдите площадь треугольника, образованного средними линиями треугольника ABC.

☑☑☐

6. Высота равностороннего треугольника равна 8 см. Точка M находится на одинаковом расстоянии d от сторон треугольника. Найдите $R + d$, где R радиус окружности, содержащей вершины треугольника.

7. Высота равностороннего треугольника равна 9 см. Найдите радиус окружности, содержащей вершины этого треугольника.

8. Высота равностороннего треугольника равна 12 см. Найдите расстояние от точки, равноудаленной от сторон этого треугольника, до его стороны.

9. Радиус окружности, содержащей вершины равностороннего треугольника, равен 5 см. Найдите высоту треугольника.

10. Точка M находится на одном и том же расстоянии d от сторон равностороннего треугольника. Найдите высоту треугольника, если $d = 7$ см.

11. Высота равностороннего треугольника ABC равна 8,4 см. Найдите высоту треугольника AOB, проведенную из вершины O, если точка O равноудалена от сторон треугольника ABC.

12. Найдите величины углов, образованных пересечением биссектрисы и медианы равностороннего треугольника.

13. Высота и медиана равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника AMB, если площадь треугольника ABC равна 24 см^2.

☑☑☑

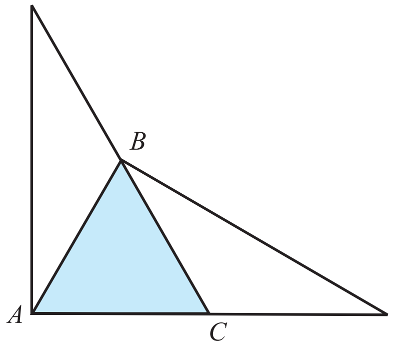
14. Медиана AA_1 и биссектриса BB_1 равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника A_1BM равна 6 см^2.

15. Биссектриса AA_1 и высота CC_1 равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника MA_1C_1, если площадь треугольника ABC равна 96 см^2.

16. Дан равнобедренный треугольник ABC, у которого $[AB]\equiv[BC]$. Точки M и N принадлежат внешней области треугольника ABC так, что треугольники ABM и BCN – равносторонние. Докажите, что $MN \parallel AC$.

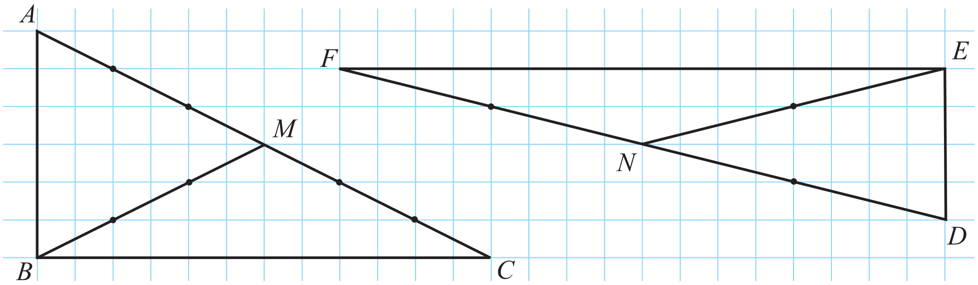
Занимательная математика

17. Два одинаковых листа бумаги, каждый в форме прямоугольного треугольника, были наложены друг на друга так, что вершина прямого угла одного оказалась на одной из сторон другого треугольника. Найдите периметр закрашенного треугольника, если $AB = 12$ см.



§ 5. Свойства прямоугольного треугольника

- Рассмотрите рисунок.



Дополните:

а) Треугольники ABC и DEF являются ________ треугольниками.

б) ____ и ____ – катеты треугольника ABC.

в) Отрезок $[FD]$ – ________ треугольника DEF.

г) Отрезок $[BM]$ – ________ треугольника ABC.

$[BM] \equiv$ ____, $[BM] \equiv$ ____.

д) Отрезок ____ – медиана треугольника DEF. $[FN] \equiv$ ____ $\equiv [ND]$.

Сформулируйте вывод. Проверьте циркулем.

Теорема 1

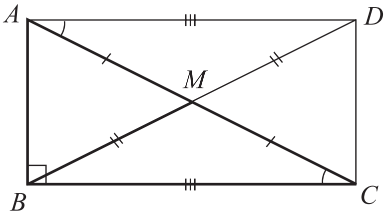
Длина медианы, соответствующей гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине длины гипотенузы.

Докажем теорему 1.

Условие: ΔABC, $m(\angle B) = 90°$, $[BM]$ – медиана.

Заключение: $BM = \frac{1}{2}AC$.

Доказательство:



① На полупрямой $[BM$ отметим такую точку D, что $[BM] \equiv [DM]$.

② $\Delta ADM \equiv \Delta CBM$

(По признаку СУС: $[AM] \equiv [CM]$ – по условию, $[BM] \equiv [DM]$ – по построению, $\angle AMD \equiv \angle CMB$ – вертикальные углы).

③ $AD \parallel BC$ (Внутренние накрест лежащие углы DAM и BCM конгруэнтны согласно пункту ②).

④ $AB \perp AD$, так как $AB \perp BC$ и $AD \parallel BC$.

Следовательно, ΔBAD – прямоугольный.

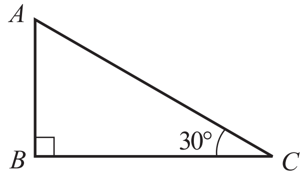
⑤ $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$ (По признаку КК: $[AB]$ – общий катет, $[AD] \equiv [BC]$ согласно пункту ②).

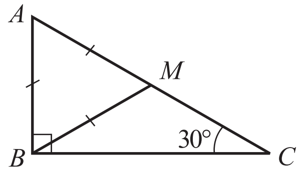
Следовательно, $[AC] \equiv [BD]$ и $BM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC$, ч. т. д. ►

- Дополните так, чтобы получить высказывание, обратное теореме 1, которое также является верным: *Если длина медианы треугольника равна..., то...*

Теорема 2

Если величина одного из углов прямоугольного треугольника равна 30°, то длина катета, противолежащего этому углу, равна половине длины гипотенузы.





Докажем теорему 2.

Условие: ΔABC – прямоугольный, $m(\angle B)=90°$, $m(\angle C)=30°$.

Заключение: $AB=0{,}5AC$.

Доказательство:

① Проведем медиану $[BM]$.

② $[BM]\equiv[AM]$ (согласно теореме 1).

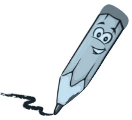
③ $m(\angle A)=180°-m(\angle B)-m(\angle C)=180°-90°-30°=60°$

④ ΔAMB – равнобедренный (по пункту ②) и $m(\angle A)=60°$. Следовательно, ΔAMB – равносторонний (по признаку 8, стр. 162).

⑤ Итак, ΔAMB – равносторонний и $AB=AM=0{,}5AB$, ч. т. д. ▶

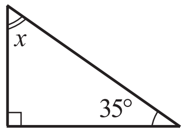
- Высказывание, обратное теореме 2, также верно. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме 2.

Упражнения и задачи

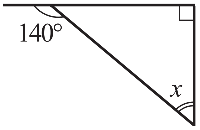


☑ ☐ ☐

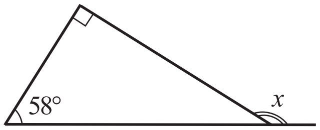
1. Найдите величину угла, обозначенную через x.



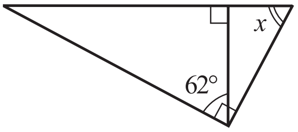
а)



б)



в)



г)

2. Дан треугольник ABC с прямым углом B. Найдите длину медианы BM, если:

а) $AC=10$ см; б) $AM=8$ см;

в) $MC=\sqrt{2}$ см; г) $BM+AC=12$ см.

3. $[BM]$ – медиана треугольника ABC с прямым углом B. Найдите:

а) AC, если $BM=6$ см;

б) AM, если $BM=\sqrt{5}$ см;

в) MC, если $AM+BM=9$ см;

г) $\dfrac{AC+BM}{AM}$.

4. Точка T – середина гипотенузы PS прямоугольного треугольника PRS. Найдите:

а) $m(\angle S)$, если $m(\angle TRS)=32°$;

б) $m(\angle P)$, если $m(\angle PTR)=100°$;

в) $m(\angle TRP)$, если $m(\angle S)=40°$;

г) $m(\angle RTS)$, если $m(\angle PRT)=42°$.

5. ***Работайте в парах!*** Дан треугольник ABC с прямым углом B. Известно, что $m(\angle C)=30°$. Найдите:

а) AB, если $AC=16$ см;

б) AC, если $AB=6$ см;

в) AB, если $[AC]$ на 11 см длиннее $[AB]$;

г) AC, если $[AB]$ на $\sqrt{5}$ см короче $[AC]$.

6. Точка M – середина гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC.

Зная, что $m(\angle A)=30°$, найдите:

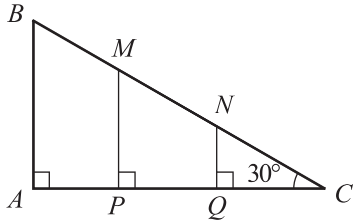
а) BM, если $BC=11$ см;

б) BC, если $BM=9$ см;

в) периметр треугольника BMC, если $AC=16$ см;

г) AC, если периметр треугольника BMC равен 15 см.

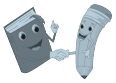
☑☑☐

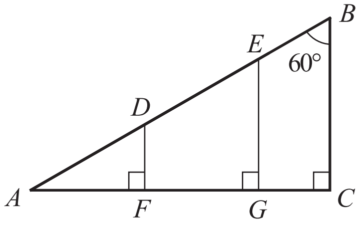


7. Рассмотрите рисунок. Найдите:

а) AB, PM, QN, если $BM=8$ см, $MN=9$ см, $NC=10$ см.

б) BM, MN, NC, если $AB=4\sqrt{2}$ см, $PM=3\sqrt{2}$ см, $QN=2\sqrt{2}$ см.

8.  *Работайте в парах!*



Рассмотрите рисунок. Найдите:

а) DF, EG, BC, если $AD=DE=4\sqrt{5}$ см, $EB=3\sqrt{5}$ см;

б) AD, DE, EB, если $DF=0{,}8EG=0{,}6BC=4{,}8$ см.

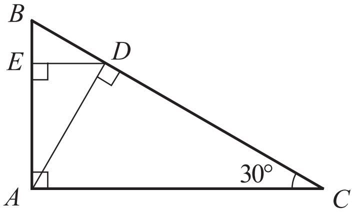
9. Найдите радиус окружности, содержащей вершины прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 6 см.

10. Найдите длину гипотенузы прямоугольного треугольника, вершины которого лежат на окружности радиуса $8\sqrt{3}$ см.

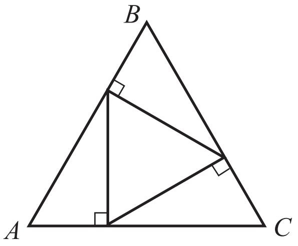
11. Рассмотрите рисунок. Найдите:

а) ED, если $AC=24$ см;

б) AC, если $ED=10$ см.



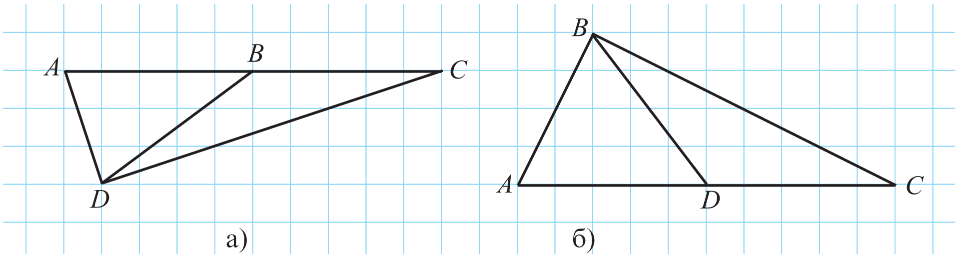
12. В равносторонний треугольник ABC вписали другой равносторонний треугольник (см. рисунок), стороны которого перпендикулярны сторонам треугольника ABC. В каком соотношении вершины вписанного треугольника делят стороны треугольника ABC?



☑☑☑

13. $[BM]$ – медиана треугольника ABC с прямым углом B. Найдите площадь треугольника ABM, если площадь треугольника ABC равна 40 см^2 и $m(\angle C)=30°$.

14*. Рассмотрите рисунок. Учитывая, что длина стороны квадрата клеточной сетки равна 0,5 см, вычислите длину отрезка BD.
Составьте аналогичную задачу.



а) б)

Занимательная математика

15. Вырежьте из картона 4 одинаковые фигуры в виде прямоугольного треугольника, у которого один из углов равен 30°. Образуйте из этих фигур прямоугольный треугольник, у которого один из углов также равен 30°.

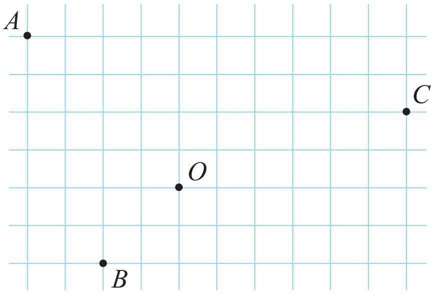
§6. Симметрии

6.1. Симметрия относительно точки

1 а) Перечертите рисунок. Постройте точки A_1, B_1, C_1 так, чтобы точка O была серединой отрезков AA_1, BB_1, CC_1.

б) Считая точку O началом отсчета прямоугольной системы координат, найдите координаты точек A_1, B, B_1, C, C_1, если точка A имеет координаты (–2, 2).

в) Какая существует связь между координатами концов отрезка, серединой которого является начало отсчета прямоугольной системы координат?



Определения

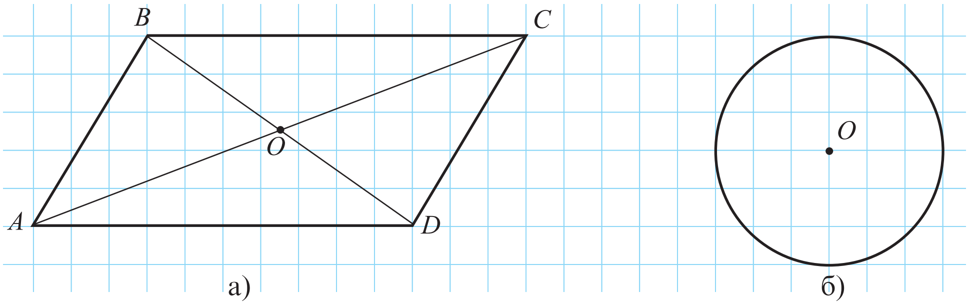
- Точки A и A_1 называются **симметричными относительно точки** O, если точка O является серединой отрезка AA_1. Точка A является **симметрией точки** A_1 **относительно точки** O и наоборот.
- **Фигурой, симметричной фигуре** F **относительно точки** O, является множество F_1, образованное из всех точек, симметричных точкам фигуры F относительно точки O. Геометрические фигуры F и F_1 называются **симметричными относительно точки** O.

Теорема 1

Две геометрические фигуры, симметричные относительно точки, конгруэнтны.

- Пусть дан отрезок AB и точка O. Как можно построить фигуру, симметричную отрезку AB относительно точки O? Обоснуйте, применив теорему 1.

2 Перечертите рисунок.



Применив теорему, постройте фигуру, симметричную данной относительно точки O. Что вы заметили?

Определение

Если геометрическая фигура F совпадает со своей симметрией относительно точки O, то точка O называется **центром симметрии фигуры** F, а фигура F называется фигурой **центральной симметрии**.

Теорема 2

Центр окружности является ее центром симметрии.

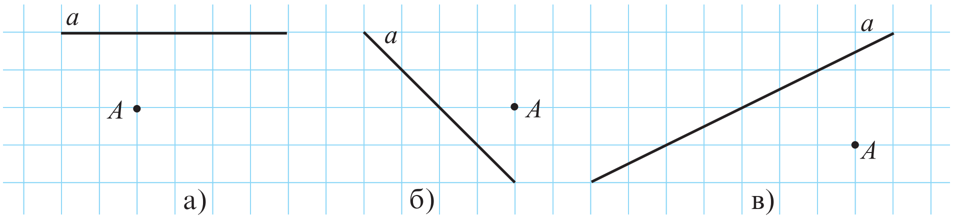
Теорема 3

Точки $A(x, y)$ и $A_1(-x, -y)$ симметричны относительно начала отсчета декартовой системы координат.

- Докажите теоремы 2–3.

6.2. Симметрия относительно прямой

1 Перечертите рисунок. Постройте точку A_1 так, чтобы прямая a являлась медиатрисой отрезка AA_1. Сколько таких точек можно построить?



Определения

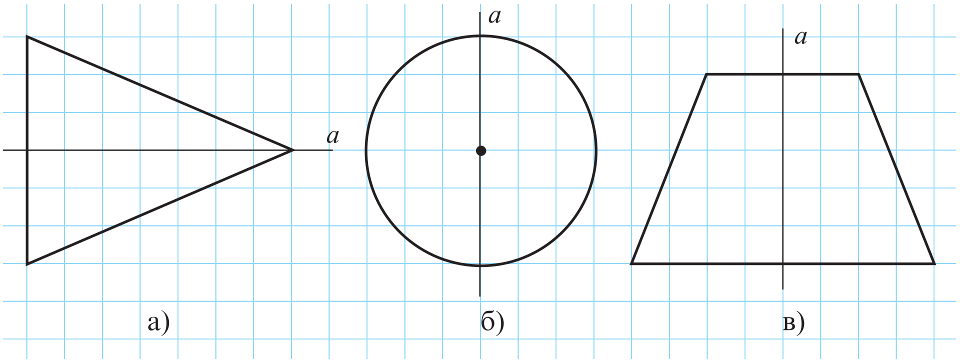
- Точки A и A_1 называются **симметричными относительно прямой** a, если эта прямая является медиатрисой отрезка AA_1.
- **Фигурой, симметричной геометрической фигуре** F **относительно прямой** a, является множество F_1, образованное из всех точек, симметричных точкам фигуры F относительно прямой a. Геометрические фигуры F и F_1 называются **симметричными относительно прямой** a.

Теорема 1

Две геометрические фигуры, симметричные относительно прямой, конгруэнтны.

- Пусть дан отрезок AB и прямая a. Как можно построить фигуру, симметричную отрезку AB относительно прямой a? Обоснуйте, применив теорему 1.
- В каком случае точка и симметричная ей относительно прямой точка совпадают?

2 Перечертите рисунок. Постройте фигуру, симметричную данной относительно прямой a. Что вы заметили?



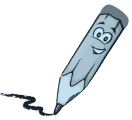
Определение

Если геометрическая фигура F совпадает с симметричной ей фигурой относительно прямой a, то прямая a называется **осью симметрии фигуры** F, а фигура F – **симметричной относительно прямой** a.

Исследуйте!

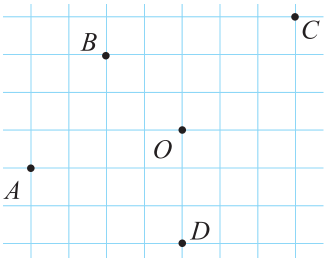
- Определите истинностное значение высказывания:
  а) «Медиатриса отрезка является его осью симметрии».
  б) «Равнобедренный треугольник имеет ось симметрии».
  в) «Угол не имеет оси симметрии».
  г) «У равностороннего треугольника одна ось симметрии».
  д) «У окружности более 10 осей симметрии».

Упражнения и задачи

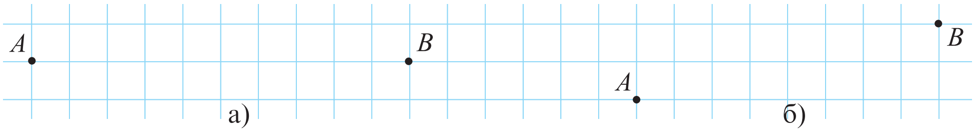


☑ ☐ ☐

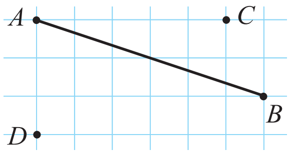
1. Перечертите рисунок. Постройте точки, симметричные точкам A, B, C, D относительно точки O.



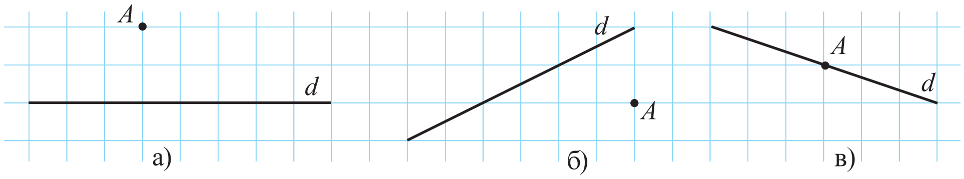
2. Перечертите рисунок. Отметьте точку O так, чтобы точки A и B были симметричными относительно точки O.



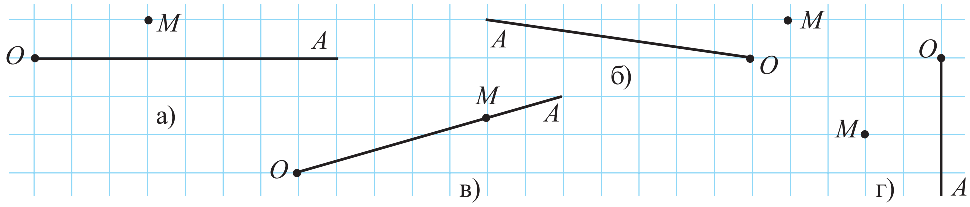
3. Перечертите рисунок. Постройте отрезок, симметричный отрезку AB относительно точки: а) C; б) D.



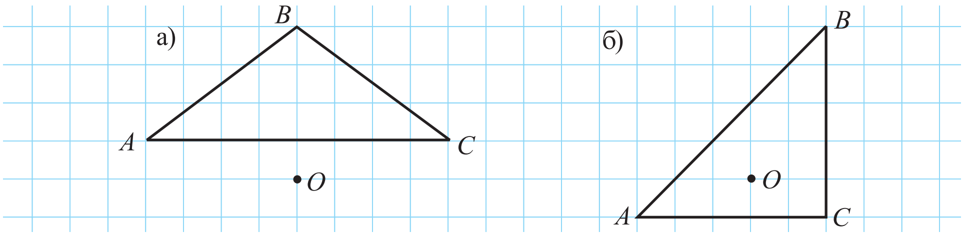
4. Перечертите рисунок. Постройте прямую, симметричную прямой d относительно точки A.



5. Перечертите рисунок. Постройте полупрямую, симметричную полупрямой $[OA$ относительно точки M.

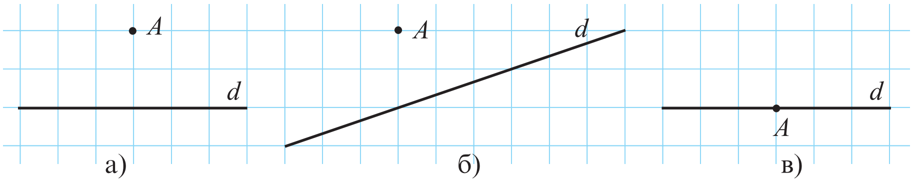


6. Перечертите рисунок. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно точки O.

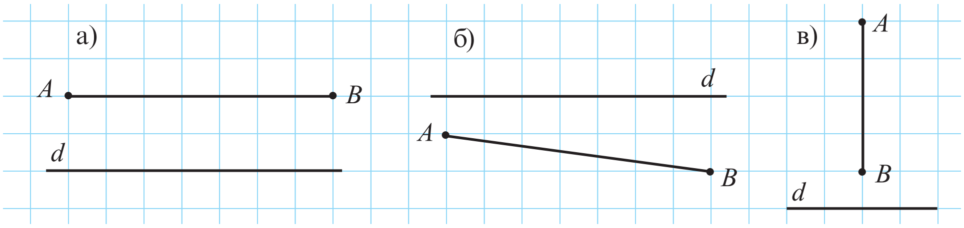


7. Найдите координаты точек, симметричных точкам A (–2, 3), B (1, 4), C (2, –7) относительно начала отсчета декартовой системы координат.

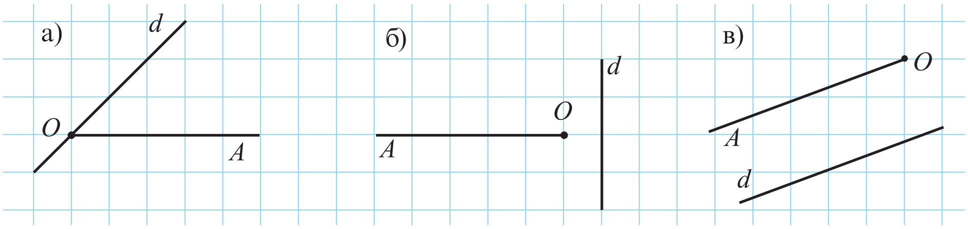
8. Перечертите рисунок. Постройте отрезок, симметричный отрезку AB относительно прямой d.



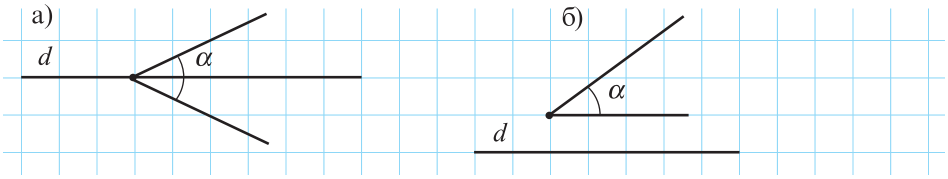
9. Перечертите рисунок. Постройте отрезок, симметричный отрезку AB относительно прямой d.



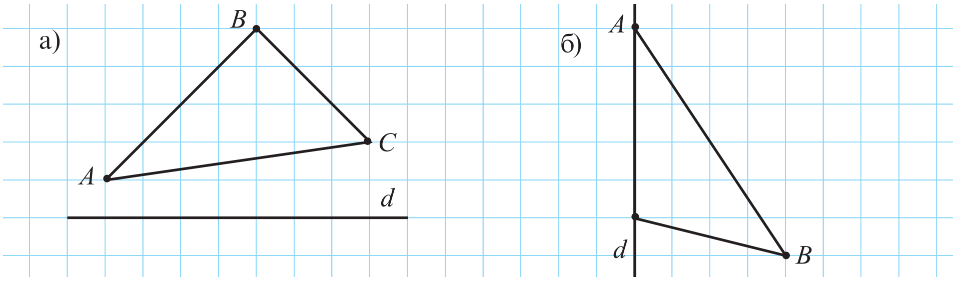
10. Перечертите рисунок. Постройте полупрямую, симметричную полупрямой $[OA$ относительно прямой d.



11. Перечертите рисунок. Постройте угол, симметричный углу α относительно прямой d.



12. Перечертите рисунок. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой d.



13. ***Работайте в парах!*** Впишите такое число, чтобы получить истинное высказывание.

а) «У квадрата ☐ оси симметрии».

б) «У полуокружности ☐ ось симметрии».

в) «У ромба ☐ оси симметрии».

г) «У равностороннего треугольника ☐ оси симметрии».

☑☑☐

14. Точки A и B симметричны относительно точки M. Найдите координаты точки M, если:

а) $A(3; 0)$ и $B(1; 4)$; б) $A(–1; 5)$ и $B(5; –1)$;

в) $A(2; 9)$ и $B(4; 7)$; г) $A(3; –11)$ и $B(0; 1)$.

15. Найдите координаты точки, симметричной точке A относительно точки B, если:

а) $A(1; 1)$ и $B(2; 2)$; б) $A(–2; 0)$ и $B(0; –2)$;

в) $A(2; 5)$ и $B(3; 1)$; г) $A(11; –7)$ и $B(8; –4)$.

16. Найдите координаты точки, симметричной середине отрезка AB относительно O (0; 0), если:

а) $A(4; 0)$ и $B(2; 0)$; б) $A(-2; 1)$ и $B(1; -2)$;

в) $A(-5; 5)$ и $B(11; 11)$; г) $A\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ и $B(-1; 2)$.

17. Найдите точки, симметричные точкам A (2; 7), B (–3; 1,5), $C\ (2\sqrt{2}; -4)$ относительно:

а) оси Ox; б) оси Oy.

18. Треугольники ABC и $A'B'C'$ симметричны относительно прямой. Найдите $m(\angle A'C'B')$, если $m(\angle B) = 90°$, $m(\angle A) = 35°$, точка A' симметрична точке A, а точка B' симметрична точке B.

19. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Прямая AP – медиатриса основания. Точки M и N принадлежат сторонам AB и AC так, что $MN \parallel BC$. Покажите, что точки M и N симметричны относительно AP.

20. Точка D симметрична точке B относительно несущей прямой стороны AC треугольника ABC. Какого вида треугольники BCD и ABD?

21. ***Работайте в парах!*** Дан треугольник ABC, у которого $AB = 6$ см, $AC = 9$ см и $BC = 4$ см. Точка D симметрична точке B относительно AC, а точка E симметрична точке C относительно AB. Вычислите:

а) $EB + BC + CD$; б) $AE + AD$.

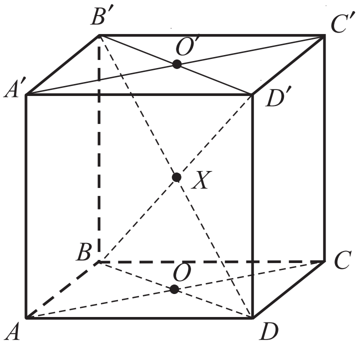
☑☑☑

22. Фигура, образованная объединением прямых d_1, d_2, d_3, имеет бесконечное количество центров симметрии. Определите взаимное расположение этих прямых.

23. Прямые a и b симметричны относительно точки O. Прямые c и d пересекаются в точке O и пересекают прямую a в точках A и B, а прямую b – в точках C и D. Вычислите CD, если $AB = 12$ см.

24. На рисунке изображен куб $ABCDA'B'C'D'$,
$\{O\} = AC \cap BD$, $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$,
$\{X\} = BD' \cap B'D$.
Назовите точку:

а) симметричную точке A относительно точки O;
б) симметричную точке B относительно точки O;
в) симметричную точке A' относительно точки X;
г) симметричную точке C' относительно точки X;
д) симметричную точке O относительно точки X;
е) симметричную точке B относительно точки X;
ж) симметричную точке D относительно точки X;
з) относительно которой симметричны точки A и C';
и) относительно которой симметричны точки B' и D;
к) относительно которой симметричны точки A и C.



25. Докажите, что если у треугольника две оси симметрии, то он равносторонний.

26. ***Работайте в группах!*** Проект *Симметрия в искусстве*.

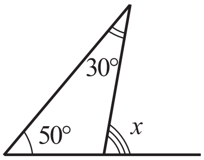
Упражнения и задачи на повторение

☑☐☐

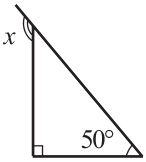
1. Дан треугольник ABC. Найдите:

а) $m(\angle A)$, если $m(\angle B)=60°$, $m(\angle C)=70°$;
б) $m(\angle B)$, если $m(\angle A)=m(\angle C)=25°$;
в) $m(\angle C)$, если $m(\angle A)+m(\angle B)=100°$;
г) $m(\angle A)$, если $m(\angle A)=m(\angle B)=m(\angle C)$.

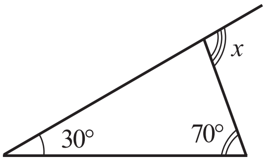
2. Найдите величину угла, обозначенную через x.



а)



б)



в)

3. Вычислите величины внешних углов треугольника ABC, если:

а) $m(\angle A)=30°$, $m(\angle B)=75°$;
б) $m(\angle A)=m(\angle B)=40°$;
в) $m(\angle A)=2m(\angle B)=70°$;
г) $\frac{2}{3}m(\angle A)=m(\angle B)=60°$.

4. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно*?

а) Если ортоцентр треугольника совпадает с его вершиной, то этот треугольник прямоугольный.
б) Точка пересечения медиатрис тупоугольного треугольника принадлежит внутренней области этого треугольника.
в) Центр тяжести тупоугольного треугольника не принадлежит внутренней области этого треугольника.

5. Точка G – центр тяжести треугольника ABC, а A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB соответственно. Вычислите:

а) AG и BG, если $AA_1=12$ см и $BB_1=9$ см;
б) BG и CG, если $BB_1=3{,}3$ см и $CC_1=3$ см;
в) A_1G и B_1G, если $AA_1=18$ см и $BB_1=15$ см;
г) A_1G и C_1G, если $AA_1=1{,}5$ см и $CC_1=2{,}4$ см.

6. ***Работайте в парах!*** Точка O равноудалена от сторон треугольника ABC. Вычислите:

а) величины углов треугольника ABC, если $m(\angle BAO)=30°$, $m(\angle COA)=125°$;
б) $m(\angle BAO)$, $m(\angle COA)$, если $m(\angle A)=70°$, $m(\angle B)=100°$;
в) $m(\angle AOB)$, $m(\angle BOC)$, если $m(\angle A)=50°$, $m(\angle B)=60°$;
г) $m(\angle AOB)+m(\angle BOC)+m(\angle AOC)$.

7. Найдите величины двух углов равнобедренного треугольника, если один из углов треугольника равен:

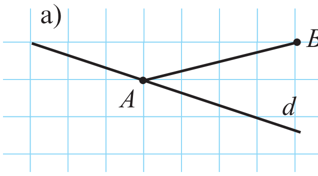
а) 60°; б) 90°; в) 100°.

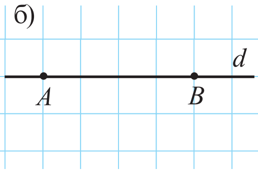
8. Определите вид треугольника, если известно, что:

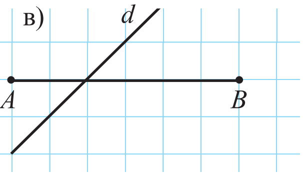
а) две медианы треугольника конгруэнтны;
б) две биссектрисы треугольника пересекают соответствующие стороны треугольника в их середине;
в) биссектриса треугольника перпендикулярна соответствующей стороне;
г) одна из биссектрис треугольника совпадает с высотой, а другая – с медианой;
д) медиана треугольника в два раза короче стороны, к которой она проведена.

9. Вычислите сумму длин средних линий равностороннего треугольника со стороной 11 см.

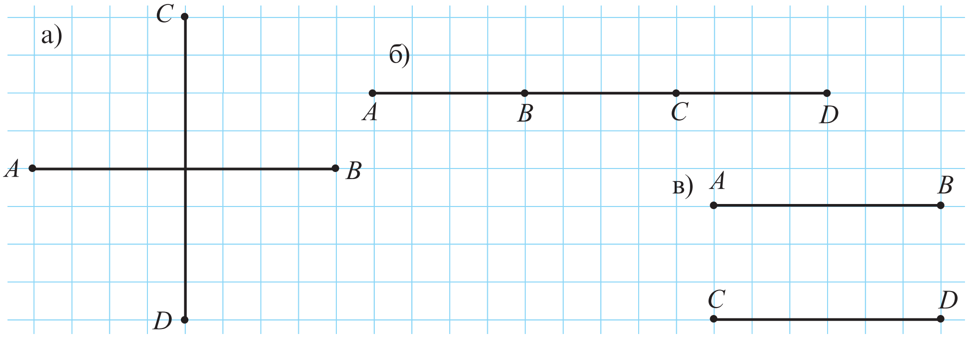
10. Перечертите рисунок. Постройте отрезок, симметричный отрезку AB относительно прямой d.



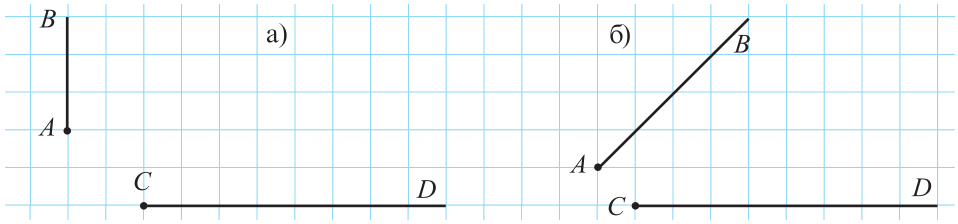




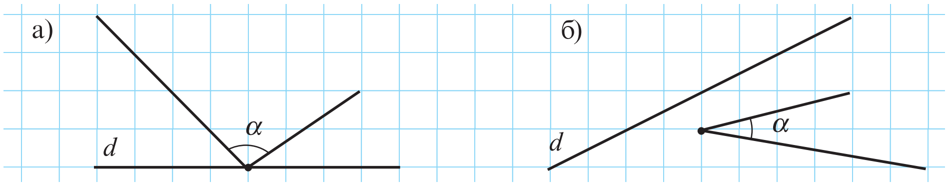
11. Перечертите рисунок. Существует ли прямая d, относительно которой симметричны отрезки AB и CD? Если существует, то постройте ее.



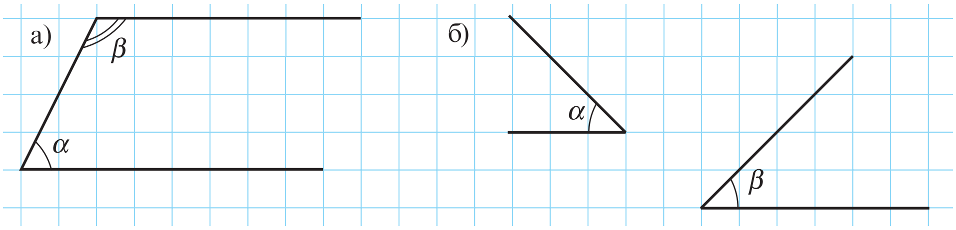
12. Перечертите рисунок. Существует ли прямая d, относительно которой симметричны полупрямые $[AB$ и $[CD$? Если существует, то постройте ее.



13. Перечертите рисунок. Постройте угол, симметричный углу α относительно прямой d.



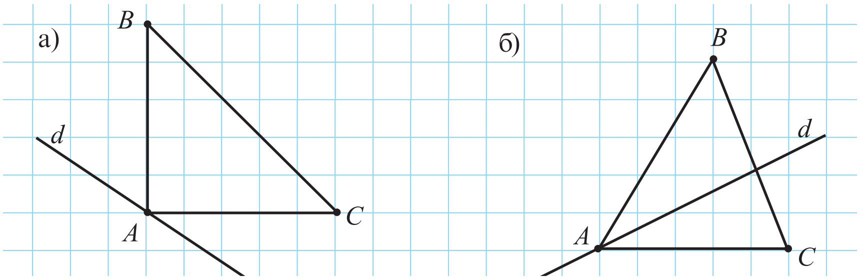
14. Перечертите рисунок. Существует ли прямая d, относительно которой симметричны углы α и β? Если существует, то постройте ее.



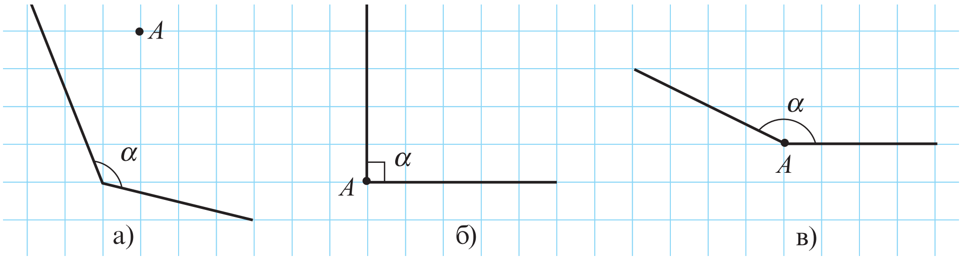
15. Запишите углы треугольника ABC в порядке возрастания их величин, если:

а) $AB = 9$ см, $AC = 8{,}5$ см, $BC = 8{,}(5)$ см;   б) $AC = \sqrt{11}$ см, $BC = 3\sqrt{2}$ см, $AB = 2\sqrt{3}$ см.

16. Перечертите рисунок. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой d.

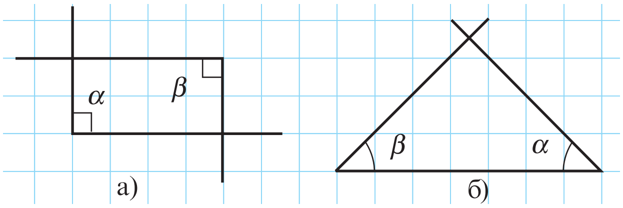


17. Перечертите рисунок. Постройте угол, симметричный углу α относительно точки A.

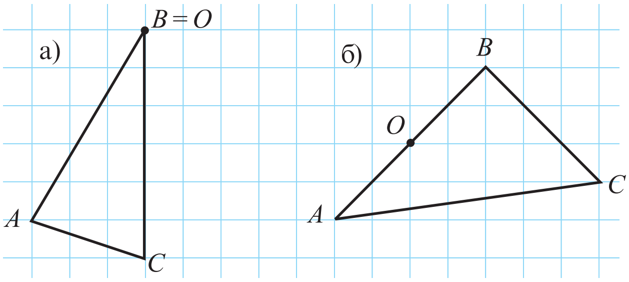


18. ***Работайте в парах!***

Перечертите рисунок.
Существует ли такая точка O, относительно которой будут симметричны угол α и угол β?
Если такая точка существует, то отметьте ее.



19. Перечертите рисунок.
Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно точки O.



☑☑☐

20. Найдите величины внешних углов треугольника ABC, если величины его углов:
а) прямо пропорциональны числам 1, 2, 3;
б) обратно пропорциональны числам 1,2; 4; 6.

21. Точка G – центр тяжести треугольника ABC, а A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB соответственно. Вычислите:
а) AA_1 и BB_1, если $AG = 6$ см и $BG = 5$ см;
б) BB_1 и CC_1, если $B_1G = 6$ см и $C_1G = 5$ см;
в) A_1G и B_1G, если $AG = 4{,}2$ см и $BG = 3{,}8$ см;
г) AA_1 и CC_1, если $AG = 1{,}2 \cdot GC = 8{,}4$ см.

22. Найдите величины углов треугольника, если:
а) величины двух внешних углов этого треугольника равны 70° и 160°.
б) величины внешних углов треугольника прямо пропорциональны числам 11, 12, 13.

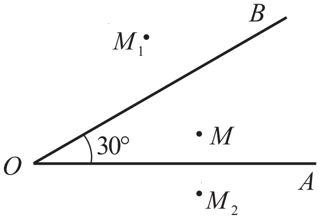
23. Пусть $[AM]$ и $[BN]$ – биссектрисы равностороннего треугольника ABC со сторонами $4\sqrt{5}$ см.

Найдите периметр треугольника CMN.

24. ***Работайте в парах!*** Треугольник ABC – равнобедренный с основанием $[AB]$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AMC, если $AB = 8$ см, точка M – середина стороны AB, а периметр треугольника ABC равен 30 см.

☑☑☑

25. Точка M принадлежит внутренней области угла AOB, равного 30°, точки M_1 и M_2 симметричны точке M относительно сторон угла AOB. Найдите m($\angle M_1OM_2$) и периметр треугольника M_1OM_2, если $OM = 10$ см.



26. Точка O равноудалена от вершин равнобедренного треугольника ABC с основанием AB. Найдите $m(\angle OBA)$, если $m(\angle OAC) = 20°$.

27. Докажите, что сумма внешних углов треугольника равна 360°.

28. Точки A_1, B_1, C_1 симметричны точкам A, B, C относительно точки O. Докажите, что если точки A, B, C коллинеарны, то точки A_1, B_1, C_1 также коллинеарны.

Занимательная математика

29. Вырежьте из картона фигуру в форме прямоугольного треугольника. Разрежьте фигуру на 3 треугольника и составьте из них:

а) прямоугольник; б) ромб.

Задача для чемпионов

30. Точка E принадлежит внутренней области квадрата $ABCD$, причем треугольник DEC – равнобедренный и $m(\angle DEC) = 150°$.

Определите вид треугольника AEB.

31.  ***Работайте в группах!*** Проект *Симметрия в природе*.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. Найдите величины внешних углов треугольника ABC, если: $m(\angle A) = 60°$, $m(\angle B) = 20°$.

2. Медианы AM и CN равнобедренного треугольника ABC с основанием AC пересекаются в точке X.
Найдите периметр треугольника AXC, если $AM = 30$ см, $CN = 24$ см и $AC = 25$ см.

3. Найдите высоту равностороннего треугольника ABC, зная, что точка M принадлежит внутренней области треугольника ABC и $AM = BM = CM = 8$ см.

4. Запишите стороны треугольника ABC в порядке убывания их длин, если:

$$\frac{m(\angle A)}{m(\angle B)} < 0{,}9, \quad \frac{m(\angle C)}{m(\angle B)} > 1{,}1.$$

5. Найдите координаты точки, симметричной середине отрезка AB относительно точки $O(0; 0)$, если $A(2; 6)$ и $B(8; 0)$.

Вариант 2

1. Найдите величины внешних углов треугольника ABC, если: $m(\angle B) = 30°$, $m(\angle C) = 80°$.

2. Медианы AM и CN равнобедренного треугольника ABC с основанием AC пересекаются в точке X.
Найдите периметр треугольника AXN, если $AM = 27$ см, $CN = 24$ см и $AC = 26$ см.

3. Найдите, на каком расстоянии от каждой вершины равностороннего треугольника расположена точка P, если высота этого треугольника равна 8 см и $PA = PB = PC$.

4. Запишите углы треугольника ABC в порядке возрастания их величин, если:

$$\frac{AB}{AC} > 1{,}2, \quad \frac{BC}{AC} < 0{,}8.$$

5. Найдите координаты точки, симметричной середине отрезка MN относительно точки $O(0; 0)$, если $M(1; -4)$ и $N(5; 4)$.

Ответы и указания

Алгебра

Глава 1. Действительные числа

§1. 1.1. 3. а) $\frac{21}{14}=\frac{7}{2}$; $\frac{4}{18}=\frac{8}{36}$; $\frac{5}{10}=\frac{4}{8}$; $\frac{6}{8}=\frac{18}{24}$; б) $\frac{18}{27}=\frac{6}{9}$; $\frac{12}{16}=\frac{60}{80}$; $\frac{5}{8}=\frac{20}{32}$; $\frac{16}{28}=\frac{64}{112}$. **4.** а) $3\frac{1}{2}$; б) $-3\frac{2}{3}$; в) $12\frac{1}{10}$; г) $-5\frac{1}{12}$. **5.** а) $\frac{51}{5}$; б) $-\frac{23}{4}$; в) $\frac{61}{7}$; г) $-\frac{25}{1}$. **7.** а) Л; б) И; в) И; г) Л. **8.** б) $-\frac{625}{100}$; г) $\frac{7002}{1000}$. **9.** в) $\frac{27}{36}$; д) $\frac{9}{36}$. **10.** в) $\frac{96}{9}$; г) $-\frac{86}{4}$. **11.** $\frac{4}{9}$ книги. **12.** 4 км. **13.** 8 спортсменов. **14.** 24 км. **15.** 22 лея. **16.** а) $\frac{10}{19}$; б) $\frac{4}{21}$; в) $\frac{50}{539}$; г) $\frac{1}{2}$.

1.2. 6. а) $\frac{5}{6}=0{,}8(3)$; $1\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$; $-\frac{12}{5}=-2{,}4$; $-2\frac{1}{5}=-2{,}2$; $-2{,}(2)=-\frac{20}{9}$; б) $\frac{3}{4}=0{,}75$; $-\frac{21}{24}=-\frac{7}{8}$; $-0{,}75=-\frac{6}{8}$; $1{,}(3)=\frac{4}{3}$; $\frac{7}{8}=0{,}875$. **7.** а) 4,(1234); –3,(5); –9,878787…; б) 0,0(21); 16,6363121212… **8.** а) $\frac{2}{5}=0{,}4$; $\frac{16}{3}=5{,}(3)$; $-2\frac{3}{8}=-2{,}375$; $1\frac{3}{7}=1{,}(428571)$; $\frac{3}{16}=0{,}1875$; $-\frac{4}{9}=-0{,}(4)$; $\frac{25}{90}=0{,}2(7)$; $-\frac{101}{90}=-1{,}1(2)$; б) $\frac{1}{8}=0{,}125$; $\frac{14}{9}=1{,}(5)$; $-3\frac{5}{6}=-3{,}8(3)$; $2\frac{5}{7}=2{,}(714285)$; $\frac{7}{18}=0{,}3(8)$; $-\frac{7}{9}=-0{,}(7)$; $\frac{34}{900}=0{,}03(7)$; $\frac{21}{990}=0{,}0(21)$. **9.** а) 2,19(63); б) 0,3(351); в) 0,4(09); г) 0,(384615); д) 4,29(6); е) 0,48(3); ж) 0,4(592); з) 0,35(1). **12.** а) $0{,}6=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=\frac{12}{20}=\frac{18}{30}$; б) $0{,}3=\frac{3}{10}=\frac{6}{20}=\frac{9}{30}=\frac{12}{40}$; в) $2{,}4=2\frac{4}{10}=\frac{24}{10}=\frac{12}{5}=\frac{36}{15}=\frac{48}{20}$; г) $1{,}8=1\frac{8}{10}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}=\frac{27}{15}=\frac{36}{20}$. **13.** а) $0{,}16=\frac{4}{25}$; $-3{,}14=-3\frac{7}{50}$; $0{,}(8)=\frac{8}{9}$; $-5{,}(7)=-5\frac{7}{9}$; $0{,}3(5)=\frac{16}{45}$; $8{,}21(6)=8\frac{13}{60}$; $-4{,}97(35)=-4\frac{4819}{4950}$; б) $-0{,}72=-\frac{18}{25}$; $5{,}36=5\frac{9}{25}$; $-0{,}(42)=-\frac{21}{50}$; $-3{,}(18)=-3\frac{2}{11}$; $0{,}5(3)=\frac{8}{15}$; $12{,}3(45)=12\frac{19}{55}$; $-7{,}6(543)=-7\frac{2179}{3330}$. **15.** а) –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5; б) 1, 2; в) –3, –2, –1, 0, 1; г) –10, –9, –8, –7; д) –25, –24, –23; е) 16, 17, 18, 19. **17.** Собака слева прибудет первой, примерно на 0,26 минуты раньше. **18.** а) $4\frac{5}{8}$; б) 2; в) 3; г) 7,(7); д) 5,6(72); е) $\frac{2}{25}$; ж) 18,(63). **20.** а) 0,(387); б) 2,0(5); в) 2,5(3); г) 9,(6). **23.** а) 22,1 г; б) 0,022 кг. **25.** а) $64\frac{981}{990}$; б) $\frac{418}{500}=\frac{209}{250}$. **26.** а) $n\in\{3;9\}$; б) $n=11$.

1.3. 6. а) 15,1; б) 6,4; в) 78; г) 101; д) 0; е) 0,5. **7.** а) 200 км – Север; б) 300 км – Юг; в) 350 км – Север; г) 500 км – Юг. **8.** На втором этаже или на 16 этаже. **9.** а) В положительном направлении на 9,25 единиц; б) в отрицательном направлении на 8 единиц. **10.** $E\left(9\frac{1}{3}\right)$. **11.** $C\left(-1\frac{1}{3}\right)$. **14.** Шиккард. **15.** Наибольшая скорость у гепарда, наименьшая – у кенгуру. **19.** Например: 2, 5, –10, 4, 3.

§2. 6. а) $S=\{\pm 3\}$; б) $S=\{\pm 5\}$; в) $S=\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$; г) $S=\varnothing$; д) $S=\varnothing$; е) $S=\{0\}$. **7.** а) 1,7; б) 3,9; в) 0,44; г) 0,72. **8.** а) $\sqrt{8}<3$; б) $9<\sqrt{90}$; в) $3{,}4>\sqrt{10}$; г) $\sqrt{19}<4{,}5$; д) $\sqrt{39}>6{,}2$. **9.** а) 23,45; б) 18,08; в) 89,12; г) 70,09. **13.** а) 0,(197530864); б) 0,(604938271); в) 53,(7); г) 3,36(1); д) 0,07(1); е) 6,(0247933884297520661157). **14.** а) ≈141 см; б) ≈173 см; в) ≈155 см; г) ≈245 см. **15.** а) 18,(7) см^2; б) 6,(530864197) см^2; в) 8,7 см^2; г) 3,(7) см^2. **16.** а) $\frac{2}{3}$; б) $5\frac{1}{3}$; в) $1\frac{2}{3}$; г) $2\frac{2}{3}$; д) $7\frac{1}{3}$; е) $6\frac{1}{3}$. **17.** а) $\frac{17}{30}$; б) $\frac{23}{30}$.

§3. 2. б) $\sqrt{71}>-\sqrt{80}$; в) $-\sqrt{\frac{5}{6}}<1$; г) $\sqrt{2}+3>-3\sqrt{2}$. **3.** а) +; б) –; в) –; г) –. **4.** а) $-\sqrt{5}$; в) $-2+\sqrt{3}$; д) $\sqrt{2}-\frac{1}{3}$; е) $6+2\sqrt{2}$. **5.** а) $-5\sqrt{3}$; $-3\sqrt{5}$; 3,(5); б) $-\frac{7}{4}$; $\sqrt{\frac{4}{7}}$; $\frac{4}{7}$; в) $\sqrt{20}$; $4\frac{1}{2}$; $\left|-4\frac{2}{3}\right|$. г) $-8\frac{1}{3}$; –8,3(1); –8,1(3). **8.** в) $-2\sqrt{10}$; $2\sqrt{10}$; г) $-1-\sqrt{5}$; $1+\sqrt{5}$. **9.** а) $4-\sqrt{7}$; б) $9-\sqrt{80}$; в) $2\sqrt{3}-\sqrt{6}$; г) $5-\sqrt{20}$. **11.** а) $|x|<\sqrt{6}$; б) $|x|<\frac{1}{6}$; в) $|x|>3$; г) $|x|>2{,}4$. **12.** а) $x<\frac{4}{5}$; б) $|x|<\sqrt{11}$; в) $|x|>2$; г) $|x|\ge\frac{1}{5}$. **13.** *Указание*. Числа равны.

§4. **1.** а) 5,79; б) 4,604; в) 0,74; г) 4,9. **2.** а) $\approx 4{,}1$; б) $\approx -0{,}7$; в) $\approx 4{,}8$; г) $\approx -0{,}4$. **3.** б) $-2\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; $0{,}3\sqrt{5}$; $7\sqrt{5}$; в) $\sqrt{0{,}3}$; $2\sqrt{0{,}3}$. **5.** а) $\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{6}$; в) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; г) $\sqrt{5}$. **6.** а) 9; б) –8; в) 6; г) 15. **7.** а) 2; б) –7; в) 6; г) 11. **8.** г) 147; д) $2{,}1^5$; е) 27. **9.** а) 8; б) 9; в) 0,25; г) 0,0001. **10.** а) $2\sqrt{6}$; б) $3\sqrt{7}$; в) $7\sqrt{2}$; г) $4\sqrt{6}$; д) $10\sqrt{2}$; е) $6\sqrt{3}$. **11.** а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{18}$; в) $\sqrt{180}$; г) $-\sqrt{150}$; д) $-\sqrt{112}$; е) $\sqrt{147}$. **12.** б) $-3\sqrt{5} > -4\sqrt{3}$; г) $\frac{2}{\sqrt{10}} < \frac{4}{\sqrt{20}}$; е) $\sqrt{5}-2 > 3\sqrt{5}-9$. **13.** а) $-11\sqrt{2}$; б) $4{,}6\sqrt{3}$; в) $-5\sqrt{5}$. **14.** а) $9\sqrt{10}$; б) $23\sqrt{6}$; в) $-96\sqrt{21}$; г) $39\sqrt{3}$. **15.** а) –793; б) $-\frac{53}{3}$. **16.** $34\sqrt{5}$ см; **17.** $46\sqrt{3}$ см. **18.** а) $S=\{\pm 4\}$; б) $S=\left\{\pm\sqrt{\frac{14}{15}}\right\}$; в) $S=\{0\}$; г) $S=\varnothing$; д) $S=\{\pm 3\}$; е) $S=\{0;\ \sqrt{5}\}$. **20.** $x=2,\ y=1,\ z=-3\sqrt{7}$.

§5. **1.** а) $A\cup B=\{-5,-2,3,7,9\}$, $A\cap B=\{-5,3,7,9\}$, $A\setminus B=\{-2\}$, $B\setminus A=\varnothing$. **2.** а) $A=\{0,1,2,3,4,5\}$; б) $B=\{-8,-7,\ldots,7,8\}$; в) $C=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$. **5.** а) 25; б) 72; в) 19. **8.** а) $A\cap B$ – множество квадратов. **9.** а) $[AE]$; б) $[AF]$; в) $[CD]$; г) $\varnothing$. **10.** а) $\{1,2,4,8\}$; б) $\{3,6,12,24,48\}$; в) $\{1,2,5,10,25,50\}$; г) $\{1,3,5,15\}$; д) M_{15}. **11.** а) $m=2,\ n=5$; б) $m=-8,\ n=9$; в) $m=11,\ n=5$; г) $m=6,\ n=9$. **12.** а) 9; б) 14; в) 0. **13.** а) $A=\{1,2,3,4,8,9\}$, $B=\{2,5,6,7,8,9\}$; б) $A=\{d,e,f,g,h\}$, $B=\{a,b,c,e,g\}$. **14.** а) $A=\{3,4,5\}$, $B=\{3,5\}$; б) $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b\}$; в) $A=\{3,4,6,7\}$, $B=\{5,6,7\}$. **15.** 5. **16.** 25. **17.** 40%. **18.** а) $A\subset B$; б) $B\subset A$; в) $A\cap B=\{10,20,50,100\}$. **19.** 7. **20.** 11. **21.** 55%. **22.** 20. **23.** 315. **24.** 120. **25.** 10.

Упражнения и задачи на повторение. **6.** а) $1\frac{1}{5}$; б) $-0{,}5^6$. **15.** а) $6+\sqrt{6}$, $6\frac{1}{6}$, $6-\sqrt{6}$, $\frac{\sqrt{6}}{6}$, $-\frac{6}{\sqrt{6}}$, $\sqrt{6}-6$, $-6{,}(6)$, $-6\sqrt{6}$; б) $7\sqrt{5}$, $5\sqrt{7}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{7}$, $-\frac{7}{5}$, $-\frac{5}{\sqrt{7}}$, $-5\sqrt{7}$, $-7\sqrt{5}$. **16.** а) 8; б) –21; в) 2; г) –1; д) $-1\frac{6}{7}$; е) 5; ж) 6; з) $\frac{3}{4}$. **17.** а) 2,04; б) $\frac{4}{5}$; в) 3; г) 2,04. **18.** а) $S=\{10{,}4\}$; б) $S=\{-3{,}1\}$; в) $S=\{2{,}2\}$; г) $S=\{16{,}7\}$; д) $S=\{-4{,}16\}$; е) $S=\{3{,}6\}$; ж) $S=\{0{,}48\}$; з) $S=\{9{,}55\}$. **19.** а) 5; б) 4. **25.** а) $x>y$; б) $x<y$; в) $x>y$; г) $x<y$. **28.** а) $\frac{8}{15}$; б) 0,9(7); в) $\frac{7\sqrt{3}}{8}$; г) 6. **29.** $20\sqrt{5}$ см. **30.** $4\sqrt{3}$ см. **31.** 24 см^2. **32.** а) 1; б) –2. **33.** а) 1; б) 1. **34.** а) 0; б) 4; в) $8\sqrt{3}$. **36.** а) 62,8; б) –33,3. **37.** а) 4; б) 0,25. **39.** а) Цены равны; б) $\frac{31{,}1}{5} < \frac{21{,}78}{3}$, значит, цена муки в 5-килограммовом пакете меньше. **41.** Например: а) $2^6\cdot 5^6$; б) $2^5\cdot 10^5$; в) $5^5\cdot 6^5$. **42.** а) 6; б) 1; в) 6. **43.** 2012. **44.** а) $94041648\cdot 10^5$ км. **46.** 3. **47.** 365. **48.** 437. **50.** Используем числа 11, 12 и 21.

21	7	12	27	13
6	20	11	11	32
22	23	16	9	10
12	21	21	12	14
19	9	20	21	11

Глава 2. Алгебраические выражения

§1. **2.** а) 102; б) –500; в) 324; г) $10-7\sqrt{3}$. **3.** а) 0; б) 1,4; в) 1,4; г) 35; д) 140; е) 2,8. **4.** а) $8-2\sqrt{3}$; б) 0; в) $3-3\sqrt{3}$; г) $10\sqrt{3}-1000$. **8.** а) $5x-4y$; б) $a-2b-2$; в) $3\sqrt{2}x$; г) $1{,}5a+0{,}5b$. **16.** а) –3; б) 15; в) –30. **17.** а) $5{,}5x-7{,}6$; б) $2{,}5x-12{,}4$; в) $0{,}5x-2y+7{,}6$; г) $-3{,}5x+2y-12{,}4$; д) $-5{,}5x+7{,}6$; е) $3{,}5x-2y+12{,}4$. **19.** а) $s=2v+5$; б) $v=\frac{s-5}{2}$; в) 3,5 км/ч. **20.** а) $n+(n+1)$; б) $n\cdot(n+1)$; в) $2n(2n+1)(2n+2)$; г) $(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)$. **22.** а) $t=45x+10y+15z$.

§2. **2.** $15xy$; б) $6ab$; в) $2x^2y$. **3.** а) $5xy+2{,}5xy$; б) $-\frac{1}{5}x^2+\left(-\frac{1}{5}x^2\right)$; в) $-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}y$; г) $-4x+5x$. **4.** а) $-0{,}5x^3y^2$; б) $3a^3b^3$; в) $-\sqrt{2}x^3y^2$; г) $-6a^4b^3$. **5.** а) $4y$; б) $-\frac{2}{3}xy^3$; в) $-0{,}02a^3$; г) $2{,}8a^3b^2$. **6.** а) $4a^6b^2$; б) $81x^4y^8$; в) $\frac{1}{27}x^{15}y^3$; г) $\frac{1}{64}a^4b^{20}$. **8.** а) $3xy^2$; б) $5a^2$; в) $0{,}1x^4y$; г) $\frac{1}{3}ab^2$. **9.** а) $-10x^2-5x+1$; б) $ax^2+1{,}2ax-a^2x+\frac{1}{3}a^2$. **10.** а) $2x^2y$;

б) $9a^2b^3$; в) $\frac{1}{3}x^2y^8$; г) $6a^5b^5$. **11.** а) $6{,}65x+5{,}5y$; б) $3{,}8a+9\sqrt{3}y$. **12.** 30. **13.** $-4\frac{2}{45}$. **14.** В $\frac{5}{3}$ раза. **15.** В 1,8 раза. **16.** 5 и 62. **17.** 25, 21 и 29. **18.** а) $n=45$; б) $m=5$. **19.** $a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$.

§3. **1.** а) $xy+xz$; б) $yz-xz$; в) $6ab-2ac$; г) $-x^2-\frac{1}{2}xy$. **2.** а) $xu+xv+yu+yv$; б) $ux+uy-vx-vy$; в) $ac-ad-bc+bd$; г) $bx+by-ax-ay$. **3.** а) –9; б) 6; в) 3; г) $3\frac{13}{16}$. **4.** 4 см^2. **5.** а) $x^3y-\frac{1}{3}x^2y^3$; б) $\frac{4}{3}xy^4+2x^3y^2$; в) $5x^3+0{,}5x^2y-10y^2x-y^3$; г) $x^3y+\frac{1}{4}x^5+\frac{4}{3}y^2+\frac{1}{3}yx^2$. **6.** а) $2a^3+(6-\sqrt{3})a^2-5\sqrt{3}a+3$; б) a^3-b^3; в) $2b^3-3b^2+1$; г) $x^3+x^2y-xy^2-y^3$. **7.** а) $2(x-2)$; б) $a(b+1)$; в) $x(y+x)$; г) $3b(a-c)$. **8.** а) $-(3a-2)$; б) $-(8-1{,}5x)$; в) $-(\sqrt{3}+x)$; г) $-(7-2b)$. **9.** а) $6mn+6m$; б) $12by-9b$; в) $15ax+20bx$; г) $7y^5+21y^3$; д) $4x(x-1)-(1-x)$; е) $y(2-x)+9(x-2)$; ж) $5(a-b)+y(b-a)^2$. **11.** а) $4x^2-12xy+9y^2$; б) $9a^2+30ab+25b^2$; в) $3x^2-2\sqrt{6}xy+2y^2$; г) $\frac{1}{9}a^2+\frac{4}{3}ax+4x^2$; д) $3+6\sqrt{3}b+9b^2$; е) $\frac{b^2}{16}-\frac{1}{6}ab+\frac{a^2}{9}$. **13.** а) $(7y+8a)(7y-8a)=49y^2-64a^2$; б) $(5x-\sqrt{7}y)(5x+\sqrt{7}y)=25x^2-7y^2$; в) $(5y-3b)(5y+3b)=25y^2-9b^2$; г) $(0{,}6a+\sqrt{2}b)(0{,}6a-\sqrt{2}b)=0{,}36a^2-2b^2$. **14.** Площадь прямоугольника на 10 см^2 меньше. **15.** Периметр прямоугольника на $4\sqrt{3}$ см меньше. **16.** а) $5x^2y(2xy-5y)=10x^3y^2-25x^2y^2$; б) $-7ax\left(-\frac{1}{7}a+2a^2x\right)=a^2x-14a^3x^2$; в) $-\frac{1}{12}xy\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{4}{3}y^2\right)=-\frac{1}{16}x^3y+\frac{1}{9}xy^3$; г) $\frac{5}{6}a^2b\left(\frac{6}{5}b+6\right)$. **17.** а) $5ab(a-5b)$; б) $-6x^4y^4(3y+4x)$; в) $-xy(2-3x^2)$; г) $8y(2xy^3+3)$. **18.** 18, 19, 20. **19.** а) $5x^2-10xy+5y^2$; б) $xy+6-2x-3y$; в) $3x-yx-3y+y^2$; г) $2ab+b+2a+b^2$. **20.** а) $(3a+7)^2=9a^2+42a+49$; б) $(6a-5b)^2=36a^2-60ab+25b^2$; в) $(4x-3y)^2=16x^2-24xy+9y^2$; г) $(\sqrt{6}b+\sqrt{2}a)^2=6b^2+4\sqrt{3}ab+2a^2$. **21.** а) $(9-4\sqrt{5})$ см^2; б) $(13+4\sqrt{3})$ см^2. **22.** 32. **23.** 43. **24.** 8 см. **25.** 12 см. **28.** а) Истинно; б) ложно; в) ложно. **29.** а) 14; б) 194. **30.** $\frac{99}{100}$. **31.** а) 66; б) 4354. **32.** а) 1; б) 1; в) 1024; г) 6561. **35.** 50 банов.

§4. **3.** а) $(4x+y)^2$; б) $(3y-2x)^2$; в) $(5x+4)^2$; г) $(0{,}5a-2b)^2$. **4.** а) 1; б) $\sqrt{3}$; в) 2; г) $2\sqrt{6}$; д) $3\sqrt{2}$; е) $3\sqrt{2}$. **5.** а) $(3+2\sqrt{5})^2$; б) $(5-4\sqrt{3})^2$; в) $(9+2\sqrt{2})^2$; г) $(8-3\sqrt{3})^2$; д) $(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$; е) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$. **8.** а) $(\sqrt{3}+3\sqrt{3})^2$; б) $(\sqrt{7}+\sqrt{7})^2$; в) $(-2\sqrt{35}+\sqrt{35})^2$; г) $(3\sqrt{7}+\sqrt{7})^2$; д) $(2\sqrt{11}+\sqrt{11})^2$. **10.** а) $3\sqrt{2}-4\sqrt{2}a$; б) $2a$; в) $x-4y$; г) $2(x+\sqrt{5})^2$; д) $-4ax$. **11.** а) $(2a+y)(2a-y-1)$; б) $(3x-y)(3x-y+1)$; в) $(5b-4y)(5b+4y+1)$. **12.** а) 8; б) 62; в) $1\frac{13}{35}$. **13.** –4. **14.** 4. **16.** а) $a^2+b^2=|a|^2+|b|^2+2|a||b|-2|a||b|=(|a|+|b|)^2-(\sqrt{2|ab|})^2=$
$=(|a|+|b|-\sqrt{2|ab|})\cdot(|a|+|b|+\sqrt{2|ab|})$.

Упражнения и задачи на повторение. **2.** а) $1{,}5a+4{,}2b$; б) $-4x+y-2$. **3.** а) $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$; б) $b\in\mathbb{R}^*$, $a\in\mathbb{R}$; в) $b\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; г) $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $a\neq b$. **4.** а) $(n\cdot m+k)$ мест; б) 1596 мест. **5.** а) $2x^2y^3$. **6.** а) $7x^2y$. **7.** а) $64x^{18}y^{12}$. **8.** а) 12; б) 3; в) 20; г) -42. **9.** а) -46; б) $8-5\sqrt{2}$; в) $4\sqrt{15}+24\sqrt{3}-10\sqrt{5}-60$; г) 162. **10.** а) $y(x^2+3z)$. **11.** а) $\frac{9}{16}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{4}{81}$. **12.** а) $(2y+3x)^2=4y^2+12xy+9x^2$. **14.** а) $(15+11\sqrt{3})$ см^2. **15.** а) $(51-14\sqrt{2})$ см^2. **16.** а) 80. **17.** а) $-2a^2+4a+14$; б) $5x-14$. **18.** а) $(x-9y)^2$. **19.** а) Существует, $a=999$; б) не существует; в) существует, $a=3$; г) не существует. **20.** а) $x=-\frac{1}{2}$; б) $x\in\{\pm2\}$; в) $x\in\{-3;0\}$; г) $x\in\{-1;0;1\}$. **21.** а) $(2-\sqrt{3})$ см; б) $(3\sqrt{5}-2)$ см. **22.** 22. **23.** а) $\sqrt{5}$; б) $2\sqrt{21}$. **24.** 11. **25.** 14. **27.** а) 1; б) 36. **28.** 304; 92288. **29.** 0,2. **33.** $2011=1006^2-1005^2$.

Глава 3. Функции

§1. **2.** а) $B(3;1), C(-1;1), D(1{,}5;1), E(2;-1)$; б) $F(-1{,}5;-1), G(0;3{,}5), H(-2{,}5;-1), I(-1{,}5;3)$; в) $J(2{,}5;4), K(4;-1), L(-0{,}5;-1{,}5), M(-2;0)$; г) $N(0;-1), P(-2;-2{,}5), Q(-3{,}5;3{,}5), R(2{,}5;-2{,}5)$. **3.** $C(-1;-0{,}5), O(0;0), D(1;0{,}5), E(2;1)$. **4.** $A(3;0), B(1{,}5;1), C(0;2), D(-1{,}5;3)$. **5.** а) I; б) IV; в) II; г) III. **6.** а) Точки принадлежат прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $A(2;0)$. **7.** а) 5 лин. ед.; б) 25 лин. ед.; в) 10 лин. ед.; г) 17 лин. ед.; д) 29 лин. ед. **8.** а) $M(2;4)$; б) $M(2;2)$; в) $M(0;3)$; г) $M(-6;9)$. **9.** а) $A(-3;4)$; б) $A(12;-10)$; в) $A(6;6)$; г) $A(-9;-2{,}5)$. **10.** а) $C(1;0), D(-3;0)$ или $C(1;8), D(-3;8)$; б) $C(5;0), D(2;0)$ или $C(5;-6), D(2;-6)$. **11.** а) 45 квадратных единиц; б) 24 квадратных единиц. **12.** а) $(-2;\sqrt{5})$; б) $(7{,}4;4)$; в) $(0{,}6;-8{,}1)$; г) $(-13;-10)$. **13.** а) $\left(3\frac{1}{4};-4\right)$; б) $(6;5)$; в) $(0{,}35;8)$; г) $(-85;58)$. **14.** а) 21 квадратная единица; б) 54 квадратных единиц.

§2. **1.** а)

–3	2	0	1	5
3	–2	0	–1	–5

б)

–2	–1	0	1	2	3
–8	–1	0	1	8	27

2. Да. **3.** Да. **4.** а) Да; б) нет; в) нет. **5.** Нет.

10. а) $f\colon B\to A,\ f(x)=-x$; б) $f\colon A\to B,\ f(x)=\frac{1}{x}$; в) $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$; г) $f\colon \{x \mid |x|<7,\ x\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{Z},\ f(x)=x^2$. **11.** а) –9,6; б) 14; в) $4\sqrt{2}$; г) –6,5. **12.** а) 4; б) –2,5; в) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; г) $1\frac{7}{8}$.

13. а)

x	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

б)

x	0	1	4	9	16	25
$f(x)$	0	1	2	3	4	5

в)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	–1	0	1	2	3	4	5	6	7

г)

x	–6	–4	–2	0	2	4	6	8
$f(x)$	–18	–12	–6	0	6	12	18	24

14. а) $f(x)=10x$; б) $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$; в) $f(x)=x+0{,}6$; г) $f(x)=2^x$. **15.** а) $f(x)=5-x$; б) $f(x)=-|x|$; в) $f(x)=\frac{6}{x}$; г) $f(x)=-\sqrt{x}$. **16.** а) 2, 0,3; б) –4, –6, –8. **17.** $f(x)=x-\left[\frac{x}{10}\right]\cdot 10$.

§3. **5.** а) Да; б) нет; в) да. **9.** а) $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\ f(x)=x$; б) $f\colon \mathbb{R}_-\to\{1{,}5\},\ f(x)=1{,}5$; в) $f\colon \mathbb{R}_-\to\mathbb{R},\ f(x)=-x$. **10.** а) Да; б) да; в) нет. **11.** а) График симметричен относительно оси Oy; б) график симметричен относительно точки $O(0;0)$. **12.** а) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$; б) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-|x|+4$; в) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|-2$.

§4. **4.** а) $A(0;8), B(-10;0)$; б) $A(0;-6{,}4), B(-2;0)$; в) $A\left(0;\frac{1}{5}\right), B\left(-\frac{1}{4};0\right)$; г) $A(0;2), B(\sqrt{2};0)$. **6.** а) I, III; б) II, IV; в) I, III; г) II, IV. **7.** Точка $A(-10;-6)$ не принадлежит графику. **8.** $m=1{,}6-0{,}1t$, где t – время. **9.** $r=20-3x$, где x – количество тетрадей. **11.** Скорость первого пешехода. **12.** а) $f(x)=\frac{1}{2}x-1$; б) $f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$; в) $y=-x+\sqrt{3}$; г) $f(x)=2x-4{,}5$. **13.** а) Параллельные прямые; б) пересекающиеся прямые; в) параллельные прямые; г) параллельные прямые. **14.** а) Тупой; б) острый; в) острый; г) тупой. **15.** а) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=0{,}8x-2$; б) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+4$. **17.** 1) а) 150 м; б) 2 мин.; в) 350 м; г) в период времени [3, 4]; 3) да. **18.** а) 25 км/ч; б) 2,5 мин.; в) в период времени [1,5; 2,5]; г) в период времени [3,5; 5]; д) 10 км/ч; е) 25 км/ч. **19.** а) 39°; б) 37°; в) на 7 день; г) 39°; д) 3 дня. **22.** а) $f(x)=3x-2$; б) $f(x)=2x+8$.

Упражнения и задачи на повторение. **3.** а) $f(a)=1,\ f(c)=3,\ f(d)=4,\ g(2)=6,\ g(3)=8,\ g(4)=6$; б) $h(1)=0,\ h(4)=1,\ h(5)=5,\ t(a)=f,\ t(d)=j,\ t(e)=i$. **4.** а) $f(c)=3,\ g(2)=g(4)=6$; б) $h(3)=h(5)=5,\ t(a)=f$.

5. а)

x	1	3	5
$f(x)$	4	10	16

б)

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	4	2	0	2	4

в)

x	–3	–2	1	2	3
$f(x)$	3	2	–1	–2	–3

г)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	8	3	0	–1	0	3	8

6. а) $f(1)=\frac{1}{15}$, $f(3)=\frac{1}{5}$, $f(5)=\frac{1}{3}$; б) $f(1)=1$, $f(3)=-1$, $f(5)=-3$; в) $f(1)=3$, $f(3)=1$, $f(5)=-1$; г) $f(1)=3$, $f(3)=5$, $f(5)=7$. **7.** а) $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=2x^2$; б) $f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$, $f(x)=-\frac{1}{4}x$; в) $f\colon \mathbb{Q}^*\to\mathbb{Q}^*$, $f(x)=-\frac{1}{x}$; г) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{|x|}$. **8.** а) $E=\left\{-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}\right\}$; б) $E=\{2, 1, 0, -1\}$; в) $E=\{0\}$; г) $E=\mathbb{R}_+$. **11.** а) $f\colon \{0, 1, 2, 3\}\to\mathbb{N}$, $f(x)=x^2$; б) $f\colon \{-2, -1, 0, 1, 2\}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=2x$. **14.** а) $A\left(\frac{1}{5}; 4\right)$; б) $B\left(\frac{1}{3}; -6\right)$; в) $C\left(-\frac{1}{4}; -3\right)$. **15.** в). **18.** а) $f(x)=2x-1$; б) $f(x)=2x+3$; в) $C(4; -15)$; г) $D(-5; 3)$. **19.** а) $A(4; 4)$; б) не содержит; в) $A(-25; -25)$; г) точки $M(a; a)$, $a\in\mathbb{R}_+$. **20.** а) $f(x)=\frac{3}{25}x$; б) $f(180)=21{,}6l$, $f(0{,}5)=0{,}06l$, $f(200)=24l$; в) 37,5; 5; $4\frac{1}{6}$.

24. а) $S(x)=\begin{cases}24, & x\le 300,\\ 24+(x-300)\cdot 0{,}096, & x>300;\end{cases}$ $E(x)=\begin{cases}6, & x\le 200,\\ 6+(x-200)\cdot 0{,}24, & x>200.\end{cases}$ б) $S(100)=24$, $S(400)=33{,}6$, $E(100)=6$, $E(250)=18$, $E(300)=30$, $E(400)=54$.

Глава 4. Уравнения и неравенства

§1. **1.** а) $20=x+8$; б) $x=\frac{1}{3}(x+2)$. **2.** C. **4.** а) 0; б) –1; 1. **5.** а) Одно решение; б) нет решений. **6.** а) Одно решение; б) нет решений. **7.** а) Любое число из множества $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; б) 1. **8.** а) Ложно; б) ложно; в) ложно; г) ложно. **9.** а) $\mathbb{R}^*$; б) $\mathbb{R}\setminus\{4\}$; в) $\mathbb{R}$; г) $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$. **10.** а) Одно решение; б) нет решений; в) бесконечное множество решений. **11.** а) $\frac{7+x}{2}=7x$; б) $0{,}12x=25$. **12.** $5x-3=3x+1$. **13.** а) Например, 7; б) например, $\sqrt{3}$. **16.** а) Да; б) нет; в) $S=\mathbb{R}_+$. **17.** а) $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$; б) $\mathbb{R}_+$; в) $\mathbb{R}$; г) $\mathbb{R}^*$. **22.** C. **23.** а) Нет; б) нет; в) да; г) да.

§2. **2.** а) $S=\{3\}$; б) $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$; в) $S=\left\{\frac{2}{15}\right\}$; г) $S=\left\{\frac{1}{28}\right\}$; д) $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$; е) $S=\{50\}$; ж) $S=\{-0{,}48\}$; з) $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **3.** а) –3; б) –2,56; в) $-\frac{1}{5}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **4.** а) $S=\{3\}$; б) $S=\{4\}$; в) $S=\{7{,}36\}$; г) $S=\left\{-1\frac{3}{4}\right\}$; д) $S=\{5\}$; е) $S=\{-40\}$; ж) $S=\left\{-1\frac{1}{17}\right\}$; з) $S=\{5\}$. **8.** а) $S=\{7\}$; б) $S=\{-46\}$. **9.** 3. **10.** $\frac{7}{11}$. **11.** а) 8; б) 9; в) –2; г) –5. **13.** а) 50; б) 40; в) 5; г) 3. **14.** а) $S=\{8\}$; б) $S=\left\{1\frac{1}{5}\right\}$; в) $S=\{2\}$; г) $S=\{6\}$. **17.** а) –1; б) $\frac{1}{2}$; в) 0; г) –10. **18.** а) $m\in\mathbb{R}^*$, $S=\left\{\frac{4}{m}\right\}$; б) $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $S=\left\{-\frac{2}{m+1}\right\}$; в) $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $S=\{0\}$. **19.** а) $S=\{\pm2\}$; б) $S=\varnothing$; в) $S=\{-1; 5\}$; г) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; д) $S=\{-2{,}8; 3{,}2\}$; е) $S=\{-8{,}3; 16{,}3\}$; ж) $S=\varnothing$; з) $S=\{-56; 44\}$.

§3. **1.** а) 6; б) 46. **3.** 6 кг; 12 кг. **4.** 30 учеников. **5.** 10 мин. **6.** 14 мин. **7.** 10, 11, 12. **8.** 45. **9.** 24 л; 21 л; 16 л. **10.** 1,5 кг. **11.** В 13:00. **12.** 4 км/ч. **13.** 76 пельменей. **14.** 1,5 м. **15.** 6 км. **16.** 2,4 км. **19.** 18 см.

§4. **2.** в) $5\le 8{,}5$; г) $-6\ge -12$. **3.** а) И; б) Л; в) И; г) Л; д) Л. **4.** а) Да; б) нет; в) да; г) да; д) нет; е) да. **8.** а) И; б) Л; в) И; г) Л; д) Л; е) И. **9.** а) $[2; 5)$; б) $(0; 50]$; в) $[0; 5000]$. **11.** а) $[-2; 6)$; б) $(-\infty; 3)$; в) $[1; +\infty)$; г) $[-1; 0]$; д) $(-3; +\infty)$; е) $(-\infty; 0]$. **13.** а) $a>b$; б) $a<b$; в) $a<b$; г) $a>b$. **14.** Да. **16.** а) –3 и –9; б) –1 и 2; в) 6 и 9; г) 3 и 17; д) 2 и 7; е) –3 и 5; ж) –9 и 0; з) –4 и 3. **18.** а) $(-10; 7)$; б) $(-3; 78]$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-7{,}3; 3{,}5]$; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $(-\infty; 1]$. **19.** а) $(-2; 2)$; б) $(-1; 2)$; в) $\varnothing$; г) $(0; +\infty)$; д) $\varnothing$; е) $\{7\}$. **20.** а) $[0; +\infty)$; б) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; в) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; г) $\mathbb{R}$. **23.** а) $\{2, 3, 4\}$; б) $\{-3, -2\}$; в) $\{4, 5\}$; г) $\{-3, -2\}$. **25.** в).

§5. **1.** а) $S=(6; +\infty)$; б) $S=(-\infty; -5]$; в) $S=(-\infty; 3)$; г) $S=[2; +\infty)$; д) $S=(-\infty; -0{,}5)$; е) $S=\varnothing$; ж) $S=(-\infty; 36]$;

з) $S=(-\infty;-3)$. **3.** а) $x\in\left(-\infty;-\frac{5}{8}\right)$; б) $x\in\left(1\frac{1}{4};+\infty\right)$; в) $x\in\left[-\frac{5}{8};+\infty\right)$; г) $x\in(-\infty;2]$. **4.** а) –1; б) 0; в) 4; г) –4. **5.** а) 3; б) 8; в) –3; г) 30. **6.** а) $S=\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$, $\{\sqrt{2},101\}\subset S$; б) $S=[11;+\infty)$, $101\in S$; в) $S=\left(-\infty;-\frac{1}{5}\right)$, $-21\in S$; г) $S=(-\infty;1{,}5)$, $\{-21,-\frac{1}{5},0,\sqrt{2}\}\subset S$. **7.** $x\in(-\infty;-9]$. **8.** $y\in\left(-\infty;1\frac{6}{7}\right]$. **9.** а) $S=\mathbb{R}$; б) $S=\left(-\frac{3}{4},+\infty\right)$; в) $S=(-\infty;-11]$; г) $S=\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$. **10.** а) $S=\left(-\infty;-2\frac{2}{7}\right)$; б) истинно. **11.** а) $S=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; б) ложно. **13.** а) $BC>8$ см; б) $0<BC\leq 3{,}2$ см. **14.** 4 см < c < 16 см. **16.** а) $S=(2;+\infty)$; б) $S=[-3;+\infty)$. **17.** а) $x\in(-\infty;7)$; б) $x\in(-\infty;-6]$. **18.** $x\in[-5;0)$. **19.** $x\in(0;2]$. **20.** а) $S=(1;4]$; б) $S=(2;+\infty)$. **21.** а) $S=(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$; б) $S=[-5;5]$; в) $S=(-3{,}5;3{,}5)$; г) $S=(-\infty;-6)\cup(6;+\infty)$. **22.** Не дальше, чем 13,2 км.

Упражнения и задачи на повторение. **1.** 8. **2.** 4. **3.** а) $S=\{1\}$; б) $S=\{-1\}$; в) $S=\{-4{,}5\}$; г) $S=\{2\}$. **4.** 5 см, 11 см. **5.** а) $S=(-11;+\infty)$; б) $S=(-\infty;4]$; в) $S=[0;+\infty)$; г) $S=\left(-\infty;1\frac{2}{3}\right)$. **6.** а) $S=\{-2\}$; б) $S=\{1{,}75\}$; в) $S=\{15\}$; г) $S=\varnothing$. **7.** 400 леев. **9.** а) $S=\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$; б) $S=(-\infty;-1)$, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$. **10.** $\{1,2,3,4,5\}$. **12.** а) $S=\{2\}$; б) $S=\{6\}$; в) $S=\{8\}$; г) $S=\left\{1\frac{1}{5}\right\}$. **13.** а) $AA_1=12$ дм, $AB=4$ дм, $AD=8$ дм. **14.** Не больше 35 м. **16.** $S=\{-1\}$. **17.** а) $m=4$; б) $m=-2$. **18.** а) $a\in(-\infty;0)$; б) $a\in(0;+\infty)$; в) $a=0$. **19.** 160 орехов. **20.** $S=[-3;1)$. **21.** а) $S=\{8\}$; б) $S=\{-1\}$.

Геометрия

Глава 1. Основные геометрические понятия

§1. **3.** а) 1,8 см; б) 4,6 см; в) 14,6 см; г) 8,2 см. **4.** а) Да; б) да; в) нет; г) нет. **6.** $[aB\cap[bB$ или $[aB\cap[bA$. **7.** а) K; б) N; в) N; г) M. **9.** 3. **12.** а) Истинно; б) ложно; в) ложно; г) ложно; д) истинно; е) ложно. **13.** а) 4; б) 6; в) 6; г) 12. **14.** а) 46,6 см; б) 83,4 см; в) 48,2 см. **15.** а) 7 способов: a, AB, AC, BC, BA, CA, CB; б) 13 способов. **17.** а) 6; б) 10; в) 17.

§2. **4.** а) 3; б) 6; в) 10; г) 45. **6.** а) Некомпланарные или пересекающиеся; б) нет; в) пересекающиеся или некомпланарные; г) нет. **7.** а) Возможно; б) возможно; в) невозможно; г) возможно. **9.** а) 6; б) 8; в) 8. **10.** Возможно. Например, прямые, содержащие ребра треугольной пирамиды, некомпланарны, но каждые две из них пересекаются. **11.** 30 см.

§3. **4.** а) Истинно; б) истинно; в) ложно; г) истинно. **5.** 28 см. **6.** 12 см. **7.** 4 см, 8 см или 12 см, 24 см. **10.** В 3 раза.

§4. **3.** а) 50°; б) 65°; в) 70°; г) 144°. **4.** а) $m(\angle DCE)=80°$, $m(\angle ACE)=m(\angle BCD)=100°$; б) $m(\angle ABC)=42°$, $m(\angle CBD)=m(\angle ABE)=138°$. **5.** а) 15°; б) 72°; в) 20°; г) 75°. **6.** а) 135°; б) 30°; в) 55°; г) 154°. **7.** а) $103°10'$; б) $162°3'$; в) $126°54'3''$; г) $76°16'15''$. **8.** а) $61°31'$. **9.** а) $23°42'$. **11.** а) 136° и 44°; б) 68° и 112°. **12.** 22° и 68°. **13.** 34° и 146°. **14.** 130° и 50°. **15.** а) Истинно; б) ложно; в) истинно; г) истинно. **16.** 20°, 20°, 160°, 160°. **17.** Совпадают или перпендикулярны. **18.** 5°.

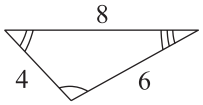
§5. **3.** а) 1; б) 0; в) 4 или –4; г) для любого целого значения.

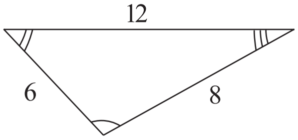
Упражнения и задачи на повторение. **4.** а) 23,1 см; б) 12,4 см. **6.** а) 5,4 м; б) 8 м. **7.** 3 см. **8.** $MN=48$ см; $KP=24$ см. **9.** 1 см, 3 см, 4 см, 5 см, 6 см, 7 см. **10.** а) $11+7=18$; б) $3\cdot 11-4\cdot 7=5$; в) $6\cdot 11-8\cdot 7=10$. **11.** а) 3,5; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{1}{3}$. **12.** а) 6; б) 10; 15; в) 5; 6. **14.** а) $[BC]$; б) $[AD]$; в) $\varnothing$; г) $[BE$; д) $[BC]$; е) $[CD$. **15.** $\frac{5}{12}$ см или $7\frac{1}{12}$ см. **16.** а) Истинно; б) ложно; в) ложно; г) истинно.

Глава 2. Конгруэнтные треугольники

§1. **4.** а) 110°; б) 48°; в) 50°; г) 60°. **5.** а) 29,1 см; б) 34,6 см; в) 27 см; г) 24 см. **6.** а) 88°; б) 25°. **7.** а) $m(\angle A)=70°$, $m(\angle B)=80°$, $m(\angle C)=30°$. **8.** а) 51 см; б) $15\sqrt{2}$ см. **9.** а) Не могут; б) не могут; в) могут; г) могут. **10.** а) $\angle B$ – наибольший, $\angle A$ – наименьший. **11.** а) BC, AC, AB. **12.** 60 см. **13.** 50,4 см. **14.** 52,7 см². **16.** а) Истинно; б) истинно; в) истинно; г) ложно. **17.** 17 см, 18 см, 19 см. **18.** а) Ложно; б) истинно. **20.** 60°, 108°, 12°. **21.** Больше, чем 8 см, и меньше, чем 40 см.

§2. **5.** а) $[AC]\equiv[DF]$; б) $\angle B\equiv\angle E$. **6.** $AO=BO=8$ см, $BC=7$ см. **10.** 8 см. **11.** 40°. **14.** а) Нет; б) нет. **15.** $AC=9$ см, $BC=10$ см. **18.** Нет (см. случай на рисунке).





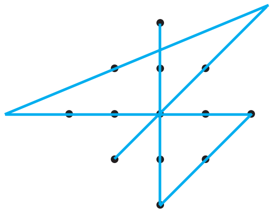
§3. **1.** $AD=9$ см, $DC=6$ см, $BD=6$ см. **2.** $BD=6$ см, $CD=5$ см. **4.** 12 см. **6.** 35°. **7.** 100°. **9.** $AB=7$ см. **10.** $BE=10$ см.

Упражнения и задачи на повторение. **1.** а) 72°; б) 62°; в) 99°; г) 56°. **2.** 7 см. **3.** а) 90°; б) 148°. **5.** а) 80°; б) 36°; в) 90°; г) 90°. **6.** 20° и 70°. **7.** 0,9 см. **8.** 34 см или 38 см. **9.** 17 см. **10.** I случай: 8 см, 10 см; II случай: 9 см, 9 см. **11.** 21°15′. **21.** а) *Указание*. $180°-19°\cdot 9=9°$. **22.** а) 50°; б) 52°30′. **23.** *Указание*. Используйте неравенство треугольника. **24.** $\frac{2}{3}$.

Глава 3. Параллельность и перпендикулярность

§1. **4.** 7. **5.** 55°. **6.** 88°. **7.** а) 35; б) 20; в) 450; г) 15. **9.** $y=-\frac{2}{3}x+2$ – это уравнение прямой AB. Пусть $-\frac{2}{3}x+b$ – уравнение прямой MN, где $MN\parallel AB$. Так как $C(6,\ 0)\in MN$, то $0=-\frac{2}{3}\cdot 6+b\Rightarrow b=4$. Значит, $y=-\frac{2}{3}x+4$ – уравнение прямой MN. Таким образом, например, при $x_1=0$, $x_2=3$ получим точки $M(0,\ 4)$, $N(3,\ 2)$.

10. 42°, 42°, 42°, 42°, 138°, 138°, 138°, 138°. **14.**



§2. **1.** а) 1,5 см, 2 см, 2,5 см; б) $\frac{5}{16}$ см, $\frac{3}{7}$ см, $\frac{2}{5}$ см; в) $\sqrt{3}$ см, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ см, $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ см; г) 1,(2) см, 1,8(3) см, 0,9(4) см. **2.** а) 23,(8) см; б) $18\sqrt{3}$ см; в) 14,(8) см. **3.** 45°, 60°, 75°. **4.** $2\sqrt{7}$ см. **6.** 12 см, 14 см, 14 см. **7.** 10 см, 10 см, 12 см. **8.** 5 см, 5 см, 6 см, 6 см. **9.** а) $AC=9$ см, $BC=10$ см; б) $AC=10{,}8$ см, $AB=8{,}2$ см, в) $AC=6\sqrt{5}$ см, $BC=5\sqrt{5}$ см; г) $AC=10{,}(4)$ см, $AB=8{,}(8)$ см. **10.** 22,(6) см. **11.** 29,2 см.

§3. **2.** а) $AM=8$ см. **3.** а) $M_1(\sqrt{3};\ 0)$. **4.** а) 3; б) 2. **5.** а) 7 см; б) 60°. **6.** а) 40°; б) 100°. **7.** а) 48°; б) 55°. **8.** 3. **11.** а) $C_1(3;\ 4)$; б) $B_1=C$; в) $A_1=C$. **12.** а) 35°; б) 6 см.

§4. **3.** а) 35°; б) 40°; в) 40°26′; г) 8°30′. **5.** а) 48°; б) 55°; в) 50°; г) 20°. **8.** а) 150°; б) 30°. **10.** а) 40°; б) 80°. **14.** а) 120°; б) 15 см.

Упражнения и задачи на повторение. **2.** 90°. **3.** 65°. **4.** а) Параллельны; б) параллельны. **5.** 112°30′. **7.** 15 см. **8.** 55°30′. **9.** 54°30′. **10.** 19°. **16.** $MK=LN=3$ см, $KL=6$ см. **20.** 49°.

Глава 4. Свойства треугольников

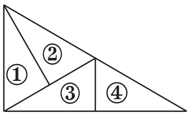
§1. **1.** а) 59°; б) 40°; в) 45°. **2.** а) 58°; б) 45°; в) 112°. **3.** а) 95°; б) 100°; в) 60°. **4.** 120°. **5.** 90°, 135°, 135°. **6.** 90°, 110°, 160°. **7.** 360°. **8.** 30°, 70°, 80°. **9.** 45°, 50°, 85°. **10.** а) 35°, 55°; б) 45°, 95°; в) 60°, 50°. **11.** 44°. **12.** 40°, 60°, 80°. **13.** а) 35°; б) 24°. **14.** 45°, 60°, 75°.

§2. **2.** а) Ложно; б) ложно; в) истинно; г) ложно. **5.** а) Прямоугольный; б) остроугольный; в) тупоугольный. **6.** 3 см. **7.** а) $AO=6$ см, $BO=8$ см; б) $AM=6\sqrt{3}$ см, $BN=9\sqrt{3}$ см; в) $OM=4$ см, $ON=5$ см; г) $AO=2\sqrt{5}$ см, $BO=2\sqrt{6}$ см. **8.** а) 60°, 80°, 40°; б) $m(\angle BAM)=37°$, $m(\angle BCM)=18°$; в) $m(\angle AMC)=140°$, $m(\angle BMC)=113°$; г) $m(\angle A)=m(\angle B)=80°$, $m(\angle C)=20°$. **9.** а) $m(\angle BAM)=20°$, $m(\angle MAC)=40°$; б) $m(\angle BAM)=30°$, $m(\angle MAC)=20°$. **10.** а) 12°; б) $m(\angle ACN)=40°$, $m(\angle BCN)=25°$; в) 63°; г) 62°. **11.** а) 44°; б) 55°; в) 108°. **12.** а) $4\sqrt{7}$ см; б) 24 см. **14.** 50°.

§3. **2.** а) 6 см; б) 5,5 см; в) 10 см; г) $\sqrt{5}$ см. **3.** а) 50°; б) 62°; в) 50°; г) 56°. **5.** а) 92°; б) 70°; в) 70°; г) 44°. **6.** а) 6 см; б) 4,5 см; в) $2\sqrt{3}$ см; г) 2,(1) см. **7.** а) $m(\angle 1)=58°$, $m(\angle 2)=m(\angle 5)=30°30'$, $m(\angle 3)=m(\angle 4)=90°$, $m(\angle 6)=m(\angle 7)=59°30'$, $m(\angle 8)=61°$. **8.** 138°. **9.** $m(\angle 1)=130°$, $m(\angle 2)=40°$, $m(\angle 3)=25°$. **10.** $m(\angle 1)=111°$, $m(\angle 2)=69°$, $m(\angle 3)=76°30'$, $m(\angle 4)=103°30'$. **11.** а) 4 см, 12 см, 12 см; б) 7 см, 17,5 см, 17,5 см. **12.** $2\sqrt{2}$ см. **13.** $CM=DM=9$ см. **14.** 40°. **17.** 16 см.

§4. **3.** а) 60°; б) 120°; в) 125°; г) 60°. **4.** $8\sqrt{3}$ см. **5.** 15 см^2. **6.** 8 см. **7.** 6 см. **8.** 4 см. **9.** 7,5 см. **10.** 21 см. **11.** 2,8 см. **12.** 120°, 60°. **13.** 8 см^2. **14.** 36 см^2. **15.** 8 см^2.

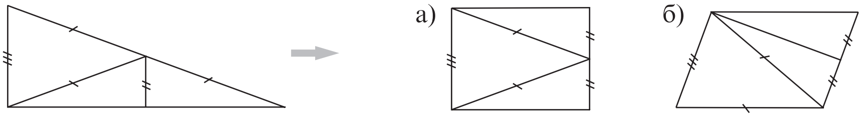
§5. **1.** а) 55°; б) 50°; в) 148°; г) 62°. **2.** а) 5 см; б) 8 см; в) $\sqrt{2}$ см; г) 4 см. **3.** а) 12 см; б) $\sqrt{5}$ см; в) 4,5 см; г) 3. **4.** а) 32°; б) 40°; в) 50°; г) 84°. **5.** а) 8 см; б) 12 см; в) 11 см; г) $2\sqrt{5}$ см. **6.** а) 11 см; б) 9 см; в) 24 см; г) 10 см. **7.** а) $AB=14{,}5$ см, $PM=9{,}5$ см, $QN=5$ см; б) $BM=MN=2\sqrt{2}$ см, $NC=4\sqrt{2}$ см. **8.** а) $DF=2\sqrt{5}$ см, $EG=4\sqrt{5}$ см, $BC=\frac{11\sqrt{5}}{2}$ см; б) $AD=9{,}6$ см, $DE=2{,}4$ см, $EB=4$ см. **9.** 3 см. **10.** $16\sqrt{3}$ см. **11.** а) 6 см; б) 40 см. **12.** $\frac{1}{2}$. **13.** 20 см^2. **14.** а) 2,5 см; б) 2,5 см. **15.**



§6. **7.** $A_1(2;-3)$; $B_1(-1;-4)$; $C_1(-2;7)$. **13.** а) 4; б) 1; в) 2; г) 3. **14.** а) $M(2;2)$; б) $M(2;2)$; в) $M(3;8)$; г) $M(1{,}5;-5)$. **15.** а) $A_1(3;3)$; б) $A_1(2;-4)$; в) $A_1(4;-3)$; г) $A_1(5;-1)$. **16.** а) $M(-3;0)$; б) $M(0{,}5;0{,}5)$; в) $M(-3;-8)$; г) $M\left(\frac{1}{3};-1{,}5\right)$. **17.** а) $A_1(2;-7)$, $B_1(-3;-1{,}5)$, $C_1(2\sqrt{2};4)$; б) $A_1(-2;7)$, $B_1(3;1{,}5)$, $C_1(-2\sqrt{2};-4)$. **18.** 55°. **20.** Равнобедренные. **21.** а) 12 см; б) 15 см. **22.** Эквидистантные параллельные прямые (то есть расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга). **23.** 12 см.

Упражнения и задачи на повторение. **2.** а) 80°; б) 140°; в) 100°. **3.** а) 105°, 105°, 150°; б) 80°, 100°, 100°; в) 105°, 110°, 145°; г) 90°, 120°, 150°. **4.** а) Истинно; б) ложно; в) ложно. **5.** а) $AG=8$ см, $BG=6$ см; б) $BG=2{,}2$ см, $CG=2$ см; в) $A_1G=6$ см, $B_1G=5$ см; г) $A_1G=0{,}5$ см, $C_1G=0{,}8$ см. **6.** а) 50°, 60°, 70°; б) $m(\angle BAO)=35°$, $m(\angle COA)=140°$; в) $m(\angle BOC)=115°$, $m(\angle AOB)=125°$; г) 360°. **7.** а) 60°, 60°; б) 45°, 45°; в) 40°, 40°. **8.** а) Равнобедренный; б) равносторонний; в) равнобедренный; г) равносторонний; д) прямоугольный. **9.** 16,5 см. **15.** а) $\angle B, \angle A, \angle C$; б) $\angle B, \angle C, \angle A$. **20.** а) 60°, 120°, 180°; б) 240°, 72°, 48°. **21.** а) $AA_1=9$ см; $BB_1=7{,}5$ см; б) $BB_1=18$ см, $CC_1=15$ см; в) $A_1G=2{,}1$ см; $B_1G=1{,}9$ см; г) $AA_1=12{,}6$ см, $CC_1=10{,}5$ см. **22.** а) 20°, 50°, 110°; б) 50°, 60°, 70°. **23.** $6\sqrt{5}$ см. **24.** 5,5 см. **25.** 60°, 30 см. **26.** 50°.

29.


а) б)

30. Равносторонний.

Содержание

Учебник

7 класс