

Alain Piller

ANALYSE I

POUR ÉCONOMISTES

manuel d'exercices
corrigés

2^e édition

Deug Sciences Éco.

Deug MASS

Deug AES

**Écoles de
commerce**

MAXIMA
LAURENT du MESNIL • ÉDITEUR

Sommaire

Avant-propos	9
Rappels mathématiques	11
I Fonction numérique d'une variable réelle - Ensemble de définition - Parité - Périodicité - Centre de symétrie - Compositions d'applications. Exercices n° 1 à 11	21
II Limites et continuité d'une fonction numérique d'une variable réelle. Exercices n° 12 à 17	49
III Dérivées en un point - Dérivées sur un intervalle - Approximations affines - Différentielles partielles d'ordre 1, 2 et 3 - Différentielles totales d'ordre 1 et 2 - Fonctions homogènes - Théorème d'Euler - Théorème des fonctions implicites. Exercices n° 18 à 43	97
IV Primitives - Intégrales définies et indéfinies - Intégrales simples - Intégration par parties - Intégration par changement de variable - Intégration des fractions rationnelles - Intégrales généralisées ou impropres : La notion de convergence. Exercices n° 44 à 53	193
V Théorème de Rolle - Théorème des accroissements finis - Approximation polynomiale des fonctions d'une variable - Formule de Taylor avec reste de Lagrange - Formule de Taylor avec reste de Young - Formule de Mac Laurin - Développement limités usuels - Propriétés des développements limités Exercices n° 54 à 63	265

VI Nombres complexes : Définition – Forme algébrique d'un nombre complexe – Propriétés – Représentation géométrique d'un nombre complexe – Nombres complexes conjugués – Propriétés – Module et argument d'un nombre complexe – Forme trigonométrique d'un nombre complexe – Propriétés – Formule de Moivre – Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe – Résolution d'équations du second degré.

Exercices n° 64 à 75 301

Avant-propos

Ce manuel d'exercices corrigés d'Analyse est destiné aux étudiants de DEUG de Sciences Économiques, d'AES, de MASS et aux élèves des écoles de commerce.

Les exercices qu'il contient ont été élaborés d'après une étude précise des programmes d'enseignement de mathématiques dispensés aux économistes, aussi bien dans les Universités de Paris (Dauphine, Assas, Tolbiac, Nanterre...) et de province que dans la majorité des écoles de commerce.

Chacun des six thèmes traités a été conçu dans le même esprit et avec le même objectif : bien comprendre les exercices pour mieux assimiler le cours et faire de ce manuel l'instrument le plus efficace de réussite aux examens.

- Au sein d'un même thème, les exercices sont classés par ordre croissant de difficulté.

- Toute la panoplie des cas possibles a été imaginée : les exercices varient du plus classique au plus original.

Cette diversité des cas traités s'allie à une grande homogénéité dans les corrigés. Rigueur du raisonnement, exhaustivité des explications, rappel et résolution systématiques des difficultés en caractérisent la rédaction. L'étudiant se forge ainsi une véritable méthode de travail qui surprendra le correcteur par sa pertinence et son sérieux.

Analyse I pour Économistes : manuel d'exercices corrigés met l'accent sur ce qu'il faut vraiment retenir du cours et permet de tirer un réel profit des exercices afin de ne perdre ni son temps ni son année.

L'auteur tient à remercier tout particulièrement ses Amis d'hier et d'aujourd'hui «Lele» et «Tocar» ainsi que Joana Thérond pour l'aide précieuse qu'ils lui ont apportée lors de la rédaction de ce manuel...

RAPPELS MATHÉMATIQUES

① La notion de valeur absolue :

① Définition :

La valeur absolue d'une expression réelle positive ou négative est valeur positive de cette expression.

Ainsi, si $x \geq 0$, $|x| = x$,

si $x < 0$, $|x| = -x$.

② Propriétés :

Soient x et y deux nombres réels quelconques :

① $|x + y| \leq |x| + |y|$.

② $|x - y| \leq |x| + |y|$.

③ $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

④ $|x \cdot y| = x \cdot y$, si x et y sont de même signe.

⑤ $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.

⑥ $|x - y| > |x + y|$, si $x > 0$ et $y < 0$.

⑦ $|x - y| < |x + y|$, si $x > 0$ et $y > 0$.

③ Exemples :

① $|2| = 2$.

② $|-2| = 2$.

- ③ $|2 + 3| = |5| \Rightarrow |2 + 3| = 5.$
- ④ $|2 - 3| = |-1| \Rightarrow |2 - 3| = 1.$
- ⑤ $|3 \cdot 6| = |3| \cdot |6| \Rightarrow |3 \cdot 6| = 18.$
- ⑥ $|3 \cdot (-6)| = |3| \cdot |(-6)| \Rightarrow |3 \cdot (-6)| = 18.$
- ⑦ $\left|\frac{9}{3}\right| = \frac{|9|}{|3|} \Rightarrow \left|\frac{9}{3}\right| = \frac{9}{3} \Rightarrow \left|\frac{9}{3}\right| = 3.$
- ⑧ $\left|\frac{9}{-3}\right| = \frac{|9|}{|-3|} \Rightarrow \left|\frac{9}{-3}\right| = \frac{9}{3} \Rightarrow \left|\frac{9}{-3}\right| = 3.$
- ⑨ $|6 - (-3)| > |6 + (-3)|$, en effet $|9| > |3|$ car $9 > 3.$
- ⑩ $|6 - 3| < |6 + 3|$, en effet $|3| < |9|$ car $3 < 9.$

② Les puissances :

① Définition :

La fonction puissance $n^{\text{ième}}$ est la fonction qui fait correspondre à tout nombre x réel le nombre $x^n = x \times x \times x \times \dots \times x$ (produit de n facteurs, tous égaux à x).

② Propriétés :

- ① $x^n + x^p = x^n + x^p.$
- ② $x^n \times x^p = x^{n+p}.$
- ③ $(x^n)^p = x^{n \cdot p}.$
- ④ $(-x)^n = x^n$ si n est paire, et $(-x)^n = -(x)^n$ si n est impaire.
- ⑤ $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, avec $n > 0$ et $x \neq 0.$
- ⑥ $(x^{-n})^p = x^{-n \cdot p} \Rightarrow (x^{-n})^p = \frac{1}{x^{n \cdot p}}$ avec $n > 0$, $p > 0$ et $x \neq 0.$

$$\textcircled{\textbf{g}} \quad x^{1/p} = \sqrt[p]{x}.$$

$$\textcircled{\textbf{h}} \quad x^{n/p} = \sqrt[p]{x^n}.$$

$$\textcircled{\textbf{i}} \quad \frac{x^n}{x^p} = x^{n-p}, \text{ avec } x \neq 0.$$

$$\textcircled{\textbf{j}} \quad x^{-n/p} = \frac{1}{x^{n/p}} \Rightarrow x^{-n/p} = \frac{1}{\sqrt[p]{x^n}} \text{ avec } n > 0, p > 0 \text{ et } x \neq 0.$$

$$\textcircled{\textbf{k}} \quad x^0 = 1.$$

$$\textcircled{\textbf{l}} \quad x^n = a \Rightarrow x = a^{1/n}.$$

$$\textcircled{\textbf{m}} \quad x^{-n} = a \Rightarrow x = a^{-1/n} \Rightarrow x = \frac{1}{a^{1/n}}, \text{ avec } a \neq 0.$$

$$\textcircled{\textbf{n}} \quad x^n = a^p \Rightarrow x = a^{p/n}.$$

$$\textcircled{\textbf{o}} \quad x^{-n} = a^p \Rightarrow x = a^{-p/n} \Rightarrow x = \frac{1}{a^{p/n}}, \text{ avec } a \neq 0.$$

$$\textcircled{\textbf{p}} \quad x^{1/n} = a \Rightarrow x = a^n.$$

$$\textcircled{\textbf{q}} \quad x^{-1/n} = a \Rightarrow x = a^{-n} \Rightarrow x = \frac{1}{a^n}, \text{ avec } a \neq 0.$$

$$\textcircled{\textbf{r}} \quad x^{1/n} = a^p \Rightarrow x = a^{n \cdot p}.$$

$$\textcircled{\textbf{s}} \quad x^{-1/n} = a^p \Rightarrow x = a^{-n \cdot p} \Rightarrow x = \frac{1}{a^{n \cdot p}}, \text{ avec } a \neq 0.$$

$$\textcircled{\textbf{t}} \quad x^{-n/m} = a^p \Rightarrow x = a^{-m \cdot p/n} \Rightarrow x = \frac{1}{a^{m \cdot p/n}}, \text{ avec } a \neq 0.$$

$$\textcircled{\textbf{u}} \quad x^{n/m} = a^p \Rightarrow x = a^{m \cdot p/n}.$$

III Les fonctions logarithme et exponentielle de base e :

A La fonction logarithme de base e :

1 Définition :

La fonction logarithme népérien (ou fonction logarithme de base e) que l'on note : $y = \ln x$ ou $y = \text{Log} x$ est définie sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

En effet : $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow \text{Log} x.$

2 Propriétés :

- a) L'ensemble de définition de la fonction logarithme népérien est : $]0, +\infty[$.
- b) La fonction logarithme népérien est continue, dérivable et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- c) La dérivée de la fonction Log est la fonction $g(x) = 1/x$.
- d) $\text{Log}(a \times b) = \text{Log} a + \text{Log} b$, avec $a \in]0, +\infty[$ et $b \in]0, +\infty[$.
- e) $\text{Log}(a + b) = \text{Log}(a + b)$, avec $a \in]0, +\infty[$ et $b \in]0, +\infty[$.
- f) $\text{Log}\left(\frac{a}{b}\right) = \text{Log} a - \text{Log} b$, avec $a \in]0, +\infty[$ et $b \in]0, +\infty[$.
- g) $\text{Log}(a)^n = n\text{Log} a$, avec $a \in]0, +\infty[$.
- h) $\text{Log} 1 = 0$.
- i) $\text{Log} e = 1$.

(B) La fonction exponentielle de base e :

(1) Définition :

La fonction exponentielle de base e que l'on note : $y = e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$.

En effet : $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$
 $x \rightarrow e^x$.

(2) Propriétés :

- (a) L'ensemble de définition de la fonction exponentielle de base e est : $\mathbb{R}$.
- (b) La fonction exponentielle de base e est la réciproque de la fonction Log.
- (c) La fonction exponentielle de base e est continue, dérivable et strictement croissante.
- (d) La dérivée de la fonction $f(x) = e^x$ est la fonction $g(x) = e^x$.
- (e) $e^{a \times b} = e^{a \times b}$.
- (f) $e^{a+b} = e^a \times e^b$.
- (g) $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
- (h) $e^{a/b} = \sqrt[b]{e^a}$.
- (i) $e^0 = 1$.

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

IV) Les dérivées : tableau récapitulatif

Fonctions	Dérivées
$f(x) = k$, k étant une constante	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{(n-1)}$
$f(x) = 1/x$	$f'(x) = -1/x^2$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = 1/2\sqrt{x}$
$f(x) = \text{Log}x$	$f'(x) = 1/x$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1/\cos^2 x$ OU $f'(x) = 1 + \tan^2 x$
$f(x) = \cotan x$	$f'(x) = -1 - \cotan^2 x$ OU $f'(x) = -1/\sin^2 x$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = 1/(1+x^2)$
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = u(x) \times v(x)$	$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$
$f(x) = u(x)/v(x)$	$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{[v(x)]^2}$
$f(x) = g[u(x)]$	$f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x)$
$f(x) = [u(x)]^n$	$f'(x) = n[u(x)]^{n-1} \times u'(x)$
$f(x) = [\sin u(x)]$	$f'(x) = u'(x) \times \cos[u(x)]$
$f(x) = [\cos u(x)]$	$f'(x) = -u'(x) \times \sin[u(x)]$
$f(x) = \log[u(x)]$	$f'(x) = u'(x)/u(x)$
$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = (\text{Log} a) \times a^x$

(V) Les primitives : tableau récapitulatif

Fonctions	Primitives
$f(x) = 0$	$F(x) = k$, k étant une constante
$f(x) = 1$	$F(x) = x$
$f(x) = x^n$	$F(x) = x^{(n+1)}/(n+1)$, avec $n \neq -1$
$f(x) = 1/x$	$F(x) = \text{Log} x $
$f(x) = 1/x^2$	$F(x) = -1/x$
$f(x) = 1/\sqrt{x}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$F(x) = a^x/\text{Log}a$, avec $a \neq 1$
$f(x) = e^{\alpha \cdot x}$	$F(x) = e^{\alpha \cdot x}/\alpha$, avec $\alpha \neq 0$
$f(x) = \text{Log}x$	$F(x) = x\text{Log}x - x$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$F(x) = -[\cos(ax + b)]/a$, avec $a \neq 0$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$F(x) = [\sin(ax + b)]/a$, avec $a \neq 0$
$f(x) = \tan x$	$F(x) = -\text{Log} \cos x $
$f(x) = \cotan x$	$F(x) = \text{Log} \sin x $
$f(x) = 1/\sin x$	$F(x) = \text{Log}\left \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right $
$f(x) = 1/\sin^2 x$	$F(x) = -\cotan x$
$f(x) = 1/\cos^2 x$ OU $f(x) = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x$
$f(x) = 1/(1 + x^2)$	$F(x) = \arctan x$
$f(x) = 1/(a^2 + x^2)$	$F(x) = \left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]/a$, avec $a \neq 0$
$f(x) = 1/(a^2 - x^2)$	$F(x) = \left[\text{Log}\left \frac{a+x}{a-x}\right \right]/2a$, avec $a \neq 0$
$f(x) = 1/(x^2 + a^2)^{1/2}$	$F(x) = \text{Log} x + \sqrt{x^2 + a^2} $

$f(x) = 1/(x^2 - a^2)^{1/2}$	$F(x) = \text{Log} x + \sqrt{x^2 - a^2} $
$f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$	$F(x) = \arcsin x$
$f(x) = 1/\sqrt{a^2 - x^2}$	$F(x) = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$, avec $a \neq 0$
$f(x) = -1/\sqrt{1 - x^2}$	$F(x) = -\arccos x$
$f(x) = -1/\sqrt{a^2 - x^2}$	$F(x) = -\arccos\left(\frac{x}{a}\right)$, avec $a \neq 0$
$f(x) = [u(x)]^n \times u'(x)$	$F(x) = [u(x)]^{(n+1)/(n+1)}$, avec $n \neq -1$
$f(x) = u'(x)/(u(x))$	$F(x) = \text{Log} u(x) $

⒱ Les formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \cotan x &= \frac{\cos x}{\sin x} \end{aligned} ;$$

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, \sin(x + 2k\pi) &= \sin x \\ \cos(x + 2k\pi) &= \cos x \\ \tan(x + k\pi) &= \tan x \\ \cotan(x + k\pi) &= \cotan x \end{aligned} ;$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \sin^2 x &= \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \end{aligned} ;$$

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x \\ \tan(-x) &= -\tan x \\ \cotan(-x) &= -\cotan x \end{aligned} ;$$

$$\begin{aligned}\cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi - x) &= \sin x \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x\end{aligned};$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x\end{aligned};$$

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin 2x &= 2 \sin x \times \cos x \\ \tan 2x &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}\end{aligned};$$

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \\ \sin 2x &= \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}\end{aligned};$$

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}\end{aligned};$$

$$\begin{aligned}\cos(x + y) &= \cos x \times \cos y - \sin x \times \sin y \\ \cos(x - y) &= \cos x \times \cos y + \sin x \times \sin y \\ \sin(x + y) &= \sin x \times \cos y + \sin y \times \cos x \\ \sin(x - y) &= \sin x \times \cos y - \sin y \times \cos x \\ \tan(x + y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \times \tan y} \\ \tan(x - y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \times \tan y}\end{aligned};$$

$$\begin{aligned}\cos x \times \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin x \times \sin y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)] ; \\ \sin x \times \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \times \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) ; \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \times \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

Les fonctions arcsin, arccos et arctan sont les fonctions réciproques des fonctions sinus, cosinus et tangente.

I
FONCTION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE
RÉELLE – ENSEMBLE DE DÉFINITION –
PARITÉ – PÉRIODICITÉ –
CENTRE DE SYMÉTRIE –
COMPOSITIONS D'APPLICATIONS.

 EXERCICE n° 1

ÉNONCÉ :

- ① **Rappeler la définition d'une fonction numérique d'une variable réelle.**
- ② **Donner trois exemples.**

CORRIGÉ :

- ① **Rappelons la définition d'une fonction numérique d'une variable réelle :**

Une fonction réelle (ou numérique) d'une variable réelle est une application f de E dans $\mathbb{R}$, E étant une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que E est l'ensemble de définition de la fonction.

② **Donnons trois exemples :**

① Soit f_1 la fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f_1(x) = 3x + 2. \end{aligned}$$

② Soit f_2 la fonction numérique définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \frac{3}{x}. \end{aligned}$$

③ Soit f_3 la fonction numérique définie de $[0, 6]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f_3 : [0, 6] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow -x^2 + 9. \end{aligned}$$

f_1 , f_2 et f_3 sont des fonctions numériques d'une variable réelle x .

De plus, les ensembles de définition de f_1 , f_2 et f_3 sont respectivement :

- $E_1 = \mathbb{R}$,
- $E_2 = \mathbb{R}^*$,
- $E_3 = [0, 6]$.

 EXERCICE n° 2

ÉNONCÉ :

Déterminer les ensembles de définition des fonctions numériques suivantes :

① $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1},$

② $f(x) = \frac{1}{x},$

- ③ $f(x) = \frac{3}{x-2},$
- ④ $f(x) = \sqrt{x-4},$
- ⑤ $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2},$
- ⑥ $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}},$
- ⑦ $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}},$
- ⑧ $f(x) = \text{Log}(x+4),$
- ⑨ $f(x) = \text{Log}\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}\right),$
- ⑩ $f(x) = \text{Log}(\text{Log } x),$
- ⑪ $f(x) = x - \text{Log } x,$
- ⑫ $f(x) = e^{(x^2 - 10)} - \frac{1}{e^x},$
- ⑬ $f(x) = \text{Log}|2 - x|,$
- ⑭ $f(x) = (x - |x|)^{-1/2},$
- ⑮ $f(x) = \left(\frac{1 - |x|}{2 - |x|}\right)^{1/2}.$

CORRIGÉ :

- ① **Déterminons l'ensemble de définition de**

$$f(x) = (x^2 - 2)/(x + 1) :$$

Il faut que $x + 1 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq -1$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$

$$E = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

② **Déterminons l'ensemble de définition de $f(x) = 1/x$:**

Il faut que $x \neq 0$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{1}{x}$ est :
 $E = \mathbb{R}^*$.

③ **Déterminons l'ensemble de définition de $f(x) = 3/(x-2)$:**

Il faut que $x - 2 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 2$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{3}{x-2}$ est :
 $E = \mathbb{R} - \{2\}$.

④ **Déterminons l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{x-4}$:**

Il faut que $x - 4 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 4$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{x-4}$ est :
 $E = [4, +\infty[$.

Il est bon de noter que $\sqrt{x-4} = (x-4)^{1/2}$.

⑤ **Déterminons l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$:**

Il faut que $x^2 + x - 2 \geq 0$.

Soit l'équation $x^2 + x - 2 = 0$; elle possède un $\Delta = 9 > 0$ et admet donc deux racines : $x' = -2$ et $x'' = 1$.

Dans ces conditions, $x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$ est : $E =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

Il est bon de noter que $\sqrt{x^2 + x - 2} = (x^2 + x - 2)^{1/2}$.

⑥ **Déterminons l'ensemble de définition de**

$$f(x) = \sqrt{(x+2)/(x-2)} :$$

Il faut d'une part que $x - 2 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 2$, et d'autre part que $\frac{x+2}{x-2} \geq 0$ c'est-à-dire $x \leq -2$ ou $x > 2$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de

$$f(x) = \sqrt{(x+2)/(x-2)} \text{ est : } E =]-\infty, -2] \cup]2, +\infty[.$$

Il est bon de noter que $\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{1/2}$.

⑦ **Déterminons l'ensemble de définition de**

$$f(x) = \sqrt{x+2}/\sqrt{x-2} :$$

Il faut d'une part que $x-2 > 0$ c'est-à-dire $x > 2$, et d'autre part que $x+2 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq -2$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ est :

$$E =]2, +\infty[.$$

Il est bon de noter que $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{(x+2)^{1/2}}{(x-2)^{1/2}}$.

⑧ **Déterminons l'ensemble de définition de $f(x) = \text{Log}(x+4)$:**

Il faut que $x+4 > 0$ c'est-à-dire $x > -4$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de $f(x) = \text{Log}(x+4)$ est : $E =]-4, +\infty[$.

⑨ **Déterminons l'ensemble de définition de**

$$f(x) = \text{Log}\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}\right) :$$

Il faut que $\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} > 0$.

Soit l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$; elle possède un $\Delta = 1 > 0$ et admet donc deux racines : $x' = 1$ et $x'' = 2$.

D'où $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

De plus, il faut que $x+1 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq -1$.

Dans ces conditions,

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{x+1} > 0 \Rightarrow x \in]-1, 1[\cup]2, +\infty[.$$

Par conséquent, l'ensemble de définition de

$$f(x) = \text{Log}\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}\right) \text{ est : } E =]-1, 1[\cup]2, +\infty[.$$

⑩ Déterminons l'ensemble de définition de $f(x) = \text{Log}(\text{Log} x)$:

Il faut d'une part que $x > 0$, et d'autre part que $\text{Log} x > 0$ c'est-à-dire $x > 1$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de $f(x) = \text{Log}(\text{Log} x)$ est : $E =]1, +\infty[$.

⑪ Déterminons l'ensemble de définition de $f(x) = x - \text{Log} x$:

Il faut que $x > 0$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de $f(x) = x - \text{Log} x$ est : $E =]0, +\infty[$.

⑫ Déterminons l'ensemble de définition de

$$f(x) = e^{(x^2 - 10)} - \frac{1}{e^x} :$$

Nous savons que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{(x^2 - 10)} \neq 0$ et $e^x \neq 0$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de $f(x) = e^{(x^2 - 10)} - \frac{1}{e^x}$ est : $E = \mathbb{R}$.

⑬ Déterminons l'ensemble de définition de $f(x) = \text{Log}|2 - x|$:

Il faut que $|2 - x| \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 2$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de $f(x) = \text{Log}|2 - x|$ est : $E = \mathbb{R} - \{2\}$.

⑭ Déterminons l'ensemble de définition de

$$f(x) = (x - |x|)^{-1/2} :$$

$$\text{Nous savons que : } (x - |x|)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x - |x|}}.$$

Il faut donc que $x - |x| > 0$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - |x| = 0$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de $f(x) = (x - |x|)^{-1/2}$ est : $E = \emptyset$.

⑮ **Déterminons l'ensemble de définition de**

$$f(x) = ((1 - |x|)/(2 - |x|))^{1/2} :$$

Nous savons que : $\left(\frac{1 - |x|}{2 - |x|}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1 - |x|}{2 - |x|}}$.

Il faut d'une part que $2 - |x| \neq 0$ c'est-à-dire $|x| \neq 2$, et d'autre part que $\frac{1 - |x|}{2 - |x|} \geq 0$.

Distinguons deux cas :

- 1^{er} cas : $x \geq 0$.

Dans ce cas, $|x| \neq 2 \Rightarrow x \neq 2$, et

$$\frac{1 - |x|}{2 - |x|} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x}{2 - x} \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \text{ ou } x > 2.$$

Par conséquent, si $x \geq 0$, l'ensemble de définition de

$$f(x) = \left(\frac{1 - |x|}{2 - |x|}\right)^{1/2} \text{ est : } E_1 = [0, 1] \cup]2, +\infty[.$$

- 2^e cas : $x \leq 0$.

Dans ce cas,

$$|x| \neq 2 \Rightarrow x \neq -2, \quad \text{et} \quad \frac{1 - |x|}{2 - |x|} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 + x}{2 + x} \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \text{ ou } x < -2.$$

Par conséquent, si $x \leq 0$, l'ensemble de définition de

$$f(x) = \left(\frac{1 - |x|}{2 - |x|}\right)^{1/2} \text{ est : } E_2 =]-\infty, -2[\cup [-1, 0].$$

Au total, l'ensemble de définition de $f(x) = \left(\frac{1 - |x|}{2 - |x|}\right)^{1/2}$ est :

$$E = E_1 \cup E_2 \text{ c'est-à-dire } E =]-\infty, -2[\cup [-1, 1] \cup]2, +\infty[.$$

ÉNONCÉ :

- ① Définir la notion de fonction paire et celle de fonction impaire.
- ② Quelles sont les conséquences pour la courbe représentative d'une fonction dans les deux cas ?
- ③ Trouver un exemple d'une fonction paire et un exemple d'une fonction impaire.

CORRIGÉ :

- ① Définissons la notion de fonction paire et celle de fonction impaire :
 - a) Une fonction paire :
Soit f une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$.
Si $x \in E$ et $-x \in E$, on dit que f est paire si et seulement si :
 $f(-x) = f(x)$.
 - b) Une fonction impaire :
Soit f une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$.
Si $x \in E$ et $-x \in E$, on dit que f est impaire si et seulement si :
 $f(-x) = -f(x)$.
- ② Déterminons les conséquences pour la courbe représentative d'une fonction dans les deux cas :
 - a) Si f est une fonction paire :
Dans ce cas, la courbe représentative de la fonction paire f est symétrique par rapport à l'axe Oy .

(b) Si f est une fonction impaire :

Dans ce cas, la courbe représentative de la fonction impaire f est symétrique par rapport à l'origine.

③ **Trouvons un exemple d'une fonction paire et un exemple d'une fonction impaire :**

(a) Un exemple d'une fonction paire :

Soit f une fonction définie de $E = \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow x^2 - 15.$$

Dans ces conditions, nous avons $x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$.

De plus,

$$f(-x) = (-x)^2 - 15 \Leftrightarrow f(-x) = x^2 - 15 \Rightarrow f(-x) = f(x).$$

Donc la fonction f est paire.

(b) Un exemple d'une fonction impaire :

Soit f une fonction définie de $E = [-2, 2]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow 3x^3.$$

Dans ces conditions, nous avons $x \in E$ et $-x \in E$, avec $E = [-2, 2]$.

$$\text{De plus, } f(-x) = 3(-x)^3 \Leftrightarrow f(-x) = -3x^3 \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

Donc la fonction f est impaire.

 EXERCICE n° 4

ÉNONCÉ :

Déterminer, parmi les fonctions numériques suivantes, celles qui sont paires ou impaires :

① $f(x) = x^4 - x^2,$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = x^2 - x,$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = (6 - |2x|)^{1/2},$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = (x + 2)^{2/3} + (x - 2)^{2/3},$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = |2x + 4| - |3x - 1|,$$

$$\textcircled{6} \quad f(x) = \frac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}},$$

$$\textcircled{7} \quad f(x) = \text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

$$\textcircled{8} \quad f(x) = \frac{\text{Log } x^2}{x^2},$$

$$\textcircled{9} \quad f(x) = e^{x^2} - \frac{1}{e^{x^4}}.$$

CORRIGÉ :

Préalablement, il est bon de souligner que les fonctions f qui suivent sont considérées dans leur ensemble de définition.

① Déterminons si $f(x) = x^4 - x^2$ est une fonction paire ou impaire :

$$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 \Leftrightarrow f(-x) = x^4 - x^2 \Rightarrow f(-x) = f(x).$$

Donc la fonction $f(x) = x^4 - x^2$ est paire.

② Déterminons si $f(x) = x^2 - x$ est une fonction paire ou impaire :

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x) \Leftrightarrow f(-x) = x^2 + x.$$

Donc la fonction $f(x) = x^2 - x$ n'est ni paire, ni impaire.

- ③ **Déterminons si $f(x) = (6 - |2x|)^{1/2}$ est une fonction paire ou impaire :**

$$f(-x) = (6 - |2(-x)|)^{1/2} \Leftrightarrow f(-x) = (6 - |2x|)^{1/2} \Rightarrow f(-x) = f(x).$$

Donc la fonction $f(x) = (6 - |2x|)^{1/2}$ est paire.

- ④ **Déterminons si $f(x) = (x + 2)^{2/3} + (x - 2)^{2/3}$ est une fonction paire ou impaire :**

$$\begin{aligned} f(-x) &= ((-x) + 2)^{2/3} + ((-x) - 2)^{2/3} \\ &\Leftrightarrow f(-x) = (2 - x)^{2/3} + (-x - 2)^{2/3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } (2 - x)^{2/3} &= \sqrt[3]{(2 - x)^2} \Leftrightarrow (2 - x)^{2/3} = \sqrt[3]{(x - 2)^2} \\ &\Rightarrow (2 - x)^{2/3} = (x - 2)^{2/3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } (-x - 2)^{2/3} &= \sqrt[3]{(-x - 2)^2} \Leftrightarrow (-x - 2)^{2/3} = \sqrt[3]{(x + 2)^2} \\ &\Rightarrow (-x - 2)^{2/3} = (x + 2)^{2/3}. \end{aligned}$$

Dans ces conditions,

$$f(-x) = (x - 2)^{2/3} + (x + 2)^{2/3} \Rightarrow f(-x) = f(x).$$

Donc la fonction $f(x) = (x + 2)^{2/3} + (x - 2)^{2/3}$ est paire.

- ⑤ **Déterminons si $f(x) = |2x + 4| - |3x - 1|$ est une fonction paire ou impaire :**

$$f(-x) = |2(-x) + 4| - |3(-x) - 1| \Leftrightarrow f(-x) = |-2x + 4| - |-3x - 1|.$$

Donc la fonction $f(x) = |2x + 4| - |3x - 1|$ n'est ni paire, ni impaire.

- ⑥ **Déterminons si $f(x) = \frac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}}$ est une fonction paire ou impaire :**

$$f(-x) = \frac{(-x) - (-x)^{-1}}{(-x) + (-x)^{-1}} \Leftrightarrow f(-x) = \frac{-x + x^{-1}}{-x - x^{-1}} \Leftrightarrow f(-x) = \frac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}} \quad (\text{a})$$

$$(\text{a}) \Rightarrow f(-x) = f(x).$$

Donc la fonction $f(x) = \frac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}}$ est paire.

Déterminons si $f(x) = \text{Log}((1+x)/(1-x))$ est une fonction paire ou impaire :

$$f(-x) = \text{Log}\left(\frac{1+(-x)}{1-(-x)}\right) \Leftrightarrow f(-x) = \text{Log}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow f(-x) = \text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow f(-x) = -\text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

Donc la fonction $f(x) = \text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ est impaire.

Déterminons si $f(x) = (\text{Log } x^2)/x^2$ est une fonction paire ou impaire :

$$f(-x) = \frac{\text{Log}(-x)^2}{(-x)^2} \Leftrightarrow f(-x) = \frac{\text{Log } x^2}{x^2} \Rightarrow f(-x) = f(x).$$

Donc la fonction $f(x) = \frac{\text{Log } x^2}{x^2}$ est paire.

Déterminons si $f(x) = e^{x^2} - 1/e^{x^4}$ est une fonction paire ou impaire :

$$f(-x) = e^{(-x)^2} - \frac{1}{e^{(-x)^4}} \Leftrightarrow f(-x) = e^{x^2} - \frac{1}{e^{x^4}} \Rightarrow f(-x) = f(x).$$

Donc la fonction $f(x) = e^{x^2} - \frac{1}{e^{x^4}}$ est paire.

EXERCICE n° 5

ÉNONCÉ :

On pose : $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

- ① Déterminer l'ensemble de définition de ces deux fonctions.
- ② Sont-elles paires, impaires ?
- ③ Calculer $\text{ch}(x+y)$ et $\text{sh}(x+y)$ en fonction de $\text{ch}(x)$, $\text{ch}(y)$, $\text{sh}(x)$ et $\text{sh}(y)$.

CORRIGÉ :

- ① Déterminons l'ensemble de définition de ces deux fonctions :

Nous savons que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \neq 0$ et $e^{-x} \neq 0$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ est : $E = \mathbb{R}$.

De même, l'ensemble de définition de $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ est : $E = \mathbb{R}$.

- ② Les fonctions $\text{ch}(x)$ et $\text{sh}(x)$ sont-elles paires, impaires ?

① Déterminons si $\text{ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$ est une fonction paire ou impaire :

$$\text{ch}(-x) = \frac{e^{(-x)} + e^{-(-x)}}{2} \Leftrightarrow \text{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} \Rightarrow \text{ch}(-x) = \text{ch}(x).$$

Donc la fonction $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ est paire.

(b) Déterminons si $\text{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$ est une fonction paire ou impaire :

$$\text{sh}(-x) = \frac{e^{(-x)} - e^{-(-x)}}{2} \Leftrightarrow \text{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} \quad (\text{a})$$

$$(\text{a}) \Leftrightarrow \text{sh}(-x) = -\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \Rightarrow \text{sh}(-x) = -\text{sh}(x).$$

Donc la fonction $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ est impaire.

) **Calculons $\text{ch}(x+y)$ et $\text{sh}(x+y)$ en fonction de $\text{ch}(x)$, $\text{ch}(y)$, $\text{sh}(x)$ et $\text{sh}(y)$:**

(a) Calcul de $\text{ch}(x+y)$:

$$\text{ch}(x+y) = \frac{e^{(x+y)} + e^{-(x+y)}}{2} \Leftrightarrow \text{ch}(x+y) = \frac{e^x \cdot e^y + e^{-x} \cdot e^{-y}}{2} \quad (\text{b})$$

$$\begin{aligned} (\text{b}) \Leftrightarrow \text{ch}(x+y) &= \frac{(\text{ch}(x) + \text{sh}(x))(\text{ch}(y) + \text{sh}(y))}{2} \\ &\quad + \frac{(\text{ch}(x) - \text{sh}(x))(\text{ch}(y) - \text{sh}(y))}{2} \quad (\text{c}) \end{aligned}$$

$$(\text{c}) \Rightarrow \text{ch}(x+y) = \text{ch}(x) \cdot \text{ch}(y) + \text{sh}(x) \cdot \text{sh}(y).$$

(b) Calcul de $\text{sh}(x+y)$:

$$\text{sh}(x+y) = \frac{e^{(x+y)} - e^{-(x+y)}}{2} \Leftrightarrow \text{sh}(x+y) = \frac{e^x \cdot e^y - e^{-x} \cdot e^{-y}}{2} \quad (\text{d})$$

$$\begin{aligned} (\text{d}) \Leftrightarrow \text{sh}(x+y) &= \frac{(\text{ch}(x) + \text{sh}(x))(\text{ch}(y) + \text{sh}(y))}{2} \\ &\quad - \frac{(\text{ch}(x) - \text{sh}(x))(\text{ch}(y) - \text{sh}(y))}{2} \quad (\text{e}) \end{aligned}$$

$$(\text{e}) \Rightarrow \text{sh}(x+y) = \text{ch}(x) \cdot \text{sh}(y) + \text{sh}(x) \cdot \text{ch}(y).$$

ÉNONCÉ :

- ① Donner la définition d'une fonction numérique périodique.
- ② Montrer que la fonction $f(x) = \cos(3x + 2)$ est périodique et calculer sa période.
- ③ Soient f une fonction T -périodique et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\alpha \neq 0$. Montrer que la fonction $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ est périodique et calculer sa période.

CORRIGÉ :

- ① Donnons la définition d'une fonction numérique périodique :

Soit f une fonction numérique définie sur une partie E de $\mathbb{R}$.

La fonction f est dite périodique de période T ou T -périodique s'il existe un nombre $T \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout x de E :

- $x + T \in E$ et $x - T \in E$,
- $f(x + T) = f(x)$.

Il est bon de noter que le graphique d'une fonction périodique de période $T > 0$ est invariant par la translation de vecteur $k \cdot T \cdot \vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

De plus, le nombre T est la période de f , s'il est le plus petit réel strictement positif qui satisfait aux deux conditions précédentes.

Enfin, une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$ ne peut avoir de limite finie en $+\infty$.

Montrons que la fonction $f(x) = \cos(3x + 2)$ est périodique et calculons sa période :

L'ensemble de définition de $f(x) = \cos(3x + 2)$ est : $E = \mathbb{R}$.

Nous savons que la fonction f est dite périodique de période T ou T -périodique s'il existe un nombre $T \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout x de $\mathbb{R}$ (car $E = \mathbb{R}$) :

- $x + T \in \mathbb{R}$ et $x - T \in \mathbb{R}$,
- $f(x + T) = f(x)$.

Or, la première condition est satisfaite ici.

$$\text{D'où } f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow \cos(3(x + T) + 2) = \cos(3x + 2) \quad (\text{a})$$

$$(\text{a}) \Leftrightarrow \cos(3x + 3T + 2) = \cos(3x + 2)$$

$$(\text{a}) \Leftrightarrow \cos(3x + 2 + 3T) = \cos(3x + 2) \quad (\text{b}).$$

Or la fonction $\cos$ est 2π -périodique.

Par conséquent,

$$(\text{b}) \Leftrightarrow \cos(3x + 2 + 3T) = \cos(3x + 2 + 2\pi) \quad (\text{c})$$

$$(\text{c}) \Rightarrow 3T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}.$$

Au total, la fonction $f(x) = \cos(3x + 2)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{3}$ ou est $\frac{2\pi}{3}$ -périodique.

Soient f une fonction T -périodique et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\alpha \neq 0$. Montrons que la fonction $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ est périodique et calculons sa période :

Nous savons que si f est une fonction T -périodique, alors la fonction $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ est périodique si $\alpha \neq 0$.

De plus, nous pouvons affirmer que la période de la fonction $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ est $\frac{T}{\alpha}$.

Au total, si f est une fonction T -périodique, alors la fonction $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ est $\frac{T}{\alpha}$ -périodique avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

ÉNONCÉ :

Déterminer la périodicité des fonctions numériques suivantes :

① $f(x) = \sin(2x - 1),$

② $f(x) = \sin^2 x,$

③ $f(x) = \cos^2(5x + 3).$

CORRIGÉ :

- ① **Déterminons la périodicité de la fonction numérique**
 $f(x) = \sin(2x - 1) :$

L'ensemble de définition de $f(x) = \sin(2x - 1)$ est : $E = \mathbb{R}$.

Nous savons que la fonction f est dite périodique de période T ou T -périodique s'il existe un nombre $T \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car $E = \mathbb{R}$) :

- $x + T \in \mathbb{R}$ et $x - T \in \mathbb{R},$
- $f(x + T) = f(x).$

Or la première condition est satisfaite ici.

D'où $f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow \sin(2(x + T) - 1) = \sin(2x - 1)$ (a)

(a) $\Leftrightarrow \sin(2x + 2T - 1) = \sin(2x - 1)$

(a) $\Leftrightarrow \sin(2x - 1 + 2T) = \sin(2x - 1)$ (b).

Or la fonction $\sin$ est 2π -périodique.

Par conséquent,

(b) $\Leftrightarrow \sin(2x - 1 + 2T) = \sin(2x - 1 + 2\pi)$ (c)

(c) $\Rightarrow 2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi.$

Au total, la fonction $f(x) = \sin(2x - 1)$ est périodique de période $T = \pi$ ou est π -périodique.

Déterminons la périodicité de la fonction numérique $f(x) = \sin^2 x$:

L'ensemble de définition de $f(x) = \sin^2 x$ est : $E = \mathbb{R}$.

Nous savons que la fonction f est dite périodique de période T ou T -périodique s'il existe un nombre $T \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car $E = \mathbb{R}$) :

- $x + T \in \mathbb{R}$ et $x - T \in \mathbb{R}$,
- $f(x + T) = f(x)$.

Or la première condition est satisfaite ici.

Par ailleurs, nous savons que $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

D'où $f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow \sin^2(x + T) = \sin^2 x$ (a)

$$(a) \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2(x + T)}{2} = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad (b).$$

(b) $\Leftrightarrow \cos 2(x + T) = \cos 2x \Leftrightarrow \cos(2x + 2T) = \cos 2x$ (c).

Or la fonction $\cos$ est 2π -périodique.

Par conséquent, (c) $\Leftrightarrow \cos(2x + 2T) = \cos(2x + 2\pi)$ (d)

(d) $\Rightarrow 2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi$.

Au total, la fonction $f(x) = \sin^2 x$ est périodique de période $T = \pi$ ou est π -périodique.

Déterminons la périodicité de la fonction numérique $\cos^2(5x + 3)$:

L'ensemble de définition de $f(x) = \cos^2(5x + 3)$ est : $E = \mathbb{R}$.

Nous savons que la fonction f est dite périodique de période T ou T -périodique s'il existe un nombre $T \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car $E = \mathbb{R}$) :

- $x + T \in \mathbb{R}$ et $x - T \in \mathbb{R}$,

- $f(x + T) = f(x)$.

Or la première condition est satisfaite ici.

Par ailleurs, nous savons que $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

D'où :

$$f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow \cos^2(5(x + T) + 3) = \cos^2(5x + 3) \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow \frac{1 + \cos(2(5x + 5T + 3))}{2} = \frac{1 + \cos(2(5x + 3))}{2} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow \cos(10x + 10T + 6) = \cos(10x + 6) \quad (c).$$

Or la fonction $\cos$ est 2π -périodique.

Par conséquent,

$$(c) \Leftrightarrow \cos(10x + 6 + 10T) = \cos(10x + 6 + 2\pi) \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow 10T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}.$$

Au total, la fonction $f(x) = \cos^2(5x + 3)$ est périodique de période $T = \frac{\pi}{5}$ ou est $\frac{\pi}{5}$ -périodique.

 EXERCICE n° 8

ÉNONCÉ :

- ① Définir ce qu'est un centre de symétrie.
- ② Dans le cas d'une fonction numérique impaire, quel est le centre de symétrie ?
- ③ Déterminer le centre de symétrie du graphique représentatif de la fonction $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{2x - 4}$.

CORRIGÉ :

① Définissons ce qu'est un centre de symétrie :

Soit f une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$.

S'il existe un point $A(a, b)$ du plan tel que :

- $\forall x \in E, x - a \in E \text{ et } x + a \in E,$
- $f(a - x) + f(a + x) = 2b,$

alors le point A est centre de symétrie du graphique de f .

② Déterminons le centre de symétrie dans le cas d'une fonction numérique impaire :

Nous savons que la courbe représentative de la fonction impaire f est symétrique par rapport à l'origine.

Donc le centre de symétrie d'une fonction numérique impaire est : le point $O(0, 0)$.

En effet, dans ce cas nous avons bien :

$$f(0 - x) + f(0 + x) = 2 \times 0 \quad (a)$$

$(a) \Leftrightarrow f(-x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \quad (b)$; l'égalité (b) correspond à la définition d'une fonction numérique impaire.

③ Déterminons le centre de symétrie du graphique représentatif de la fonction $f(x) = (x^2 + 3x + 6)/(2x - 4)$:

L'ensemble de définition de $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{2x - 4}$ est :

$$E = \mathbb{R} - \{2\}.$$

Si la courbe représentative de f admet un centre de symétrie, c'est nécessairement le point A qui a pour abscisse 2 : $A(2, b)$.

Dans ces conditions,

- $\forall x \in \mathbb{R}^* - \{2\}, x - 2 \in \mathbb{R}^* - \{2\} \text{ et } x + 2 \in \mathbb{R}^* - \{2\},$
- $f(2 - x) + f(2 + x) = 2b \Leftrightarrow \frac{(2 - x)^2 + 3(2 - x) + 6}{2(2 - x) - 4} + \frac{(2 + x)^2 + 3(2 + x) + 6}{2(2 + x) - 4} = 2b,$

$$f(2-x) + f(2+x) = 2b \Leftrightarrow \frac{4+x^2-4x+6-3x+6}{-2x} + \frac{4+x^2+4x+6+3x+6}{2x} = 2b,$$

$$f(2-x) + f(2+x) = 2b \Leftrightarrow \frac{x^2-7x+16}{-2x} + \frac{x^2+7x+16}{2x} = 2b,$$

$$f(2-x) + f(2+x) = 2b \Leftrightarrow \frac{-14x}{-2x} = 2b \Rightarrow b = \frac{7}{2}.$$

Au total, le point $A\left(2, \frac{7}{2}\right)$ est le centre de symétrie du graphique

représentatif de la fonction $f(x) = \frac{x^2+3x+6}{2x-4}$.

🔖 **EXERCICE n° 9**

ÉNONCÉ :

Déterminer le centre de symétrie du graphique représentatif des fonctions numériques suivantes :

① $f(x) = \frac{2x+1}{3-x},$

② $f(x) = \frac{6x^3-x}{2},$

③ $f(x) = \frac{-x^2+x}{x-6}.$

CORRIGÉ :

- ① **Déterminons le centre de symétrie du graphique représentatif de la fonction $f(x) = (2x + 1)/(3 - x)$:**

L'ensemble de définition de $f(x) = \frac{2x + 1}{3 - x}$ est : $E = \mathbb{R} - \{3\}$.

Si la courbe représentative de f admet un centre de symétrie, c'est nécessairement le point A qui a pour abscisse 3 : $A(3, b)$.

Dans ces conditions,

- $\forall x \in \mathbb{R}^* - \{3\}, x - 3 \in \mathbb{R}^* - \{3\} \text{ et } x + 3 \in \mathbb{R}^* - \{3\},$
- $f(3 - x) + f(3 + x) = 2b \Leftrightarrow \frac{2(3 - x) + 1}{3 - (3 - x)} + \frac{2(3 + x) + 1}{3 + (3 - x)} = 2b,$
 $f(3 - x) + f(3 + x) = 2b \Leftrightarrow \frac{6 - 2x + 1}{x} + \frac{6 + 2x + 1}{-x} = 2b,$
 $f(3 - x) + f(3 + x) = 2b \Leftrightarrow \frac{-6 + 2x - 1 + 6 + 2x + 1}{-x} = 2b,$
 $f(3 - x) + f(3 + x) = 2b \Leftrightarrow \frac{4x}{-x} = 2b \Rightarrow b = -2.$

Au total, le point $A(3, -2)$ est le centre de symétrie du graphique représentatif de la fonction $f(x) = \frac{2x + 1}{3 - x}$.

- ② **Déterminons le centre de symétrie du graphique représentatif de la fonction $f(x) = (6x^3 - x)/2$:**

L'ensemble de définition de $f(x) = \frac{6x^3 - x}{2}$ est : $E = \mathbb{R}$.

De plus, nous avons :

- $x \in \mathbb{R} \text{ et } -x \in \mathbb{R},$
- $f(-x) = \frac{6(-x)^3 - (-x)}{2} \Leftrightarrow f(-x) = \frac{-6x^3 + x}{2} \quad (a)$
 $(a) \Rightarrow f(-x) = -f(x).$

Donc la fonction $f(x) = \frac{6x^3 - x}{2}$ est impaire.

Dans ces conditions, la courbe représentative de la fonction impaire f est symétrique par rapport à l'origine.

Au total, le point $A(0, 0)$ est le centre de symétrie du graphique représentatif de la fonction $f(x) = \frac{6x^3 - x}{2}$.

③ **Déterminons le centre de symétrie du graphique représentatif de la fonction $f(x) = (-x^2 + x)/(x - 6)$:**

L'ensemble de définition de $f(x) = \frac{-x^2 + x}{x - 6}$ est : $E = \mathbb{R} - \{6\}$.

Si la courbe représentative de f admet un centre de symétrie, c'est nécessairement le point A qui a pour abscisse 6 : $A(6, b)$.

Dans ces conditions,

- $\forall x \in \mathbb{R}^* - \{6\}, x - 6 \in \mathbb{R}^* - \{6\} \text{ et } x + 6 \in \mathbb{R}^* - \{6\},$

- $$f(6 - x) + f(6 + x) = 2b \Leftrightarrow \frac{-(6 - x)^2 + (6 - x)}{(6 - x) - 6} + \frac{-(6 + x)^2 + (6 + x)}{(6 + x) - 6} = 2b,$$

$$f(6 - x) + f(6 + x) = 2b \Leftrightarrow \frac{-36 - x^2 + 12x + 6 - x}{-x} + \frac{-36 - x^2 - 12x + 6 + x}{x} = 2b,$$

$$f(6 - x) + f(6 + x) = 2b \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 11x - 30 + x^2 + 11x + 30}{-x} = 2b,$$

$$f(6 - x) + f(6 + x) = 2b \Leftrightarrow \frac{22x}{-x} = 2b \Rightarrow b = -11.$$

Au total, le point $A(6, -11)$ est le centre de symétrie du graphique représentatif de la fonction $f(x) = \frac{-x^2 + x}{x - 6}$.

ÉNONCÉ :

- ① Donner la définition de la notion de fonction composée.
- ② Soient $f : x \rightarrow x^2 + 3$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[3, +\infty[$ et $g : x \rightarrow \sin \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $[-1, 1]$.

Déterminer la fonction composée de f par g .

CORRIGÉ :

- ① Donnons la définition de la notion de fonction composée :
Soient f et g deux fonctions, E_1 et E_2 leurs ensembles de définition respectifs.
Soit E l'ensemble : $E = \{x \in E_1 ; f(x) \in E_2\}$. Si E est non vide, il est possible de définir sur E la fonction composée $g \circ f$.
Soit h cette fonction dont l'ensemble de définition est E , h s'écrit de la manière suivante : $h(x) = g \circ f(x) \Leftrightarrow h(x) = g[f(x)]$.
- ② Soient $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = \sin \sqrt{x}$, déterminons la fonction composée de f par g :

L'ensemble de définition de $f(x) = x^2 + 3$ est : $E_1 = \mathbb{R}$.

L'ensemble de définition de $g(x) = \sin \sqrt{x}$ est : $E_2 = \mathbb{R}^+$.

Or $f(x) = x^2 + 3$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[3, +\infty[$ et $[3, +\infty[\subset \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+$ étant l'ensemble de définition de $g(x)$.

Dans ces conditions, nous pouvons définir sur $E = \mathbb{R}$, la fonction composée $h(x) = g \circ f(x) \Leftrightarrow h(x) = g[f(x)]$; E étant l'ensemble de définition de la fonction h .

En effet, pour qu'il soit possible de définir sur E la fonction composée h , il faut que $f(E_1) \subset E_2$.

Ici, nous avons donc : $b(x) = g(x^2 + 3) \Rightarrow b(x) = \sin \sqrt{x^2 + 3}$.

Au total, $b : x \rightarrow \sin \sqrt{x^2 + 3}$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$.

 EXERCICE n° 11

ÉNONCÉ :

Déterminer la fonction composée de f par g avec :

- ① $f(x) = x - 1$ et $g(x) = e^x$,
- ② $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^2$,
- ③ $f(x) = x^{-1/2}$ et $g(x) = 2\text{Log } x$,
- ④ $f(x) = (x + 3)^{2/3}$ et $g(x) = 4(x - 1)$,
- ⑤ $f(x) = \frac{x^2 + 10x}{x - 2}$ et $g(x) = \text{Log } x$,
- ⑥ $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ et $g(x) = \sqrt{2x - 1}$.

CORRIGÉ :

- ① Déterminons la fonction composée de f par g avec $f(x) = x - 1$ et $g(x) = e^x$:

L'ensemble de définition de $f(x) = x - 1$ est : $E_1 = \mathbb{R}$.

L'ensemble de définition de $g(x) = e^x$ est : $E_2 = \mathbb{R}$.

Or $f(x) = x - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ c'est-à-dire $f(E_1) \subset E_2$.

Dans ces conditions, nous pouvons définir sur $E = \mathbb{R}$, la fonction composée $h(x) = g \circ f(x) \Leftrightarrow h(x) = g[f(x)]$; E étant l'ensemble de définition de la fonction h .

Ici, nous avons donc : $h(x) = g(x - 1) \Rightarrow h(x) = e^{(x-1)}$.

Au total, $h : x \rightarrow e^{(x-1)}$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$.

Déterminons la fonction composée de f par g avec $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^2$:

L'ensemble de définition de $f(x) = e^x$ est : $E_1 = \mathbb{R}$.

L'ensemble de définition de $g(x) = x^2$ est : $E_2 = \mathbb{R}$.

Or $f(x) = e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et $]0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ c'est-à-dire $f(E_1) \subset E_2$.

Dans ces conditions, nous pouvons définir sur $E = \mathbb{R}$, la fonction composée $h(x) = g \circ f(x) \Leftrightarrow h(x) = g[f(x)]$; E étant l'ensemble de définition de la fonction h .

Ici, nous avons donc :

$$h(x) = g(e^x) \Rightarrow h(x) = (e^x)^2 \Rightarrow h(x) = e^{2x}.$$

Au total, $h : x \rightarrow e^{2x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$.

Déterminons la fonction composée de f par g avec $f(x) = x^{-1/2}$ et $g(x) = 2\text{Log}x$:

L'ensemble de définition de $f(x) = x^{-1/2}$ est : $E_1 =]0, +\infty[$.

L'ensemble de définition de $g(x) = 2\text{Log}x$ est : $E_2 = \mathbb{R}^*$ car $2\text{Log}x = \text{Log}x^2$.

Or $f(x) = x^{-1/2}$ est définie sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et $]0, +\infty[\subset \mathbb{R}^*$ c'est-à-dire $f(E_1) \subset E_2$.

Dans ces conditions, nous pouvons définir sur $E =]0, +\infty[$, la fonction composée $h(x) = g \circ f(x) \Leftrightarrow h(x) = g[f(x)]$; E étant l'ensemble de définition de la fonction h .

Ici, nous avons donc :

$$h(x) = g(x^{-1/2}) \Rightarrow h(x) = 2\text{Log}\frac{1}{\sqrt{x}} \quad (a)$$

$$(a) \Rightarrow h(x) = \text{Log}\frac{1}{x} \Rightarrow h(x) = -\text{Log}x.$$

Au total, $h : x \rightarrow -\text{Log}x$ est définie sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- ④ **Déterminons la fonction composée de f par g avec $f(x) = (x+3)^{2/3}$ et $g(x) = 4(x-1)$:**

L'ensemble de définition de $f(x) = (x+3)^{2/3}$ est : $E_1 = \mathbb{R}$.

L'ensemble de définition de $g(x) = 4(x-1)$ est : $E_2 = \mathbb{R}$.

Or $f(x) = (x+3)^{2/3}$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, +\infty[$ et $[0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ c'est-à-dire $f(E_1) \subset E_2$.

Dans ces conditions, nous pouvons définir sur $E = \mathbb{R}$ la fonction composée $h(x) = g \circ f(x) \Leftrightarrow h(x) = g[f(x)]$; E étant l'ensemble de définition de la fonction h .

Ici, nous avons donc :

$$h(x) = g(x+3)^{2/3} \Rightarrow h(x) = 4(x+2)^{2/3} - 4.$$

Au total, $h : x \rightarrow 4(x+2)^{2/3} - 4$ est définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-4, +\infty[$.

- ⑤ **Déterminons la fonction composée de f par g avec $f(x) = (x^2 + 10x)/(x-2)$ et $g(x) = \text{Log}x$:**

L'ensemble de définition de $f(x) = \frac{x^2 + 10x}{x-2}$ est : $E_1 = \mathbb{R} - \{2\}$.

L'ensemble de définition de $g(x) = \text{Log}x$ est : $E_2 =]0, +\infty[$.

Or $f(x) = \frac{x^2 + 10x}{x-2}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas inclu dans $]0, +\infty[$: $f(E_1)$ n'est pas inclu dans E_2 .

Dans ces conditions, nous ne pouvons pas déterminer la fonction h c'est-à-dire la composée de f par g .

Déterminons la fonction composée de f par g avec $f(x) = \sqrt{4x-1}$ et $g(x) = \sqrt{2x-1}$:

L'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{4x-1}$ est : $E_1 = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

L'ensemble de définition de $g(x) = \sqrt{2x-1}$ est : $E_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Or $f(x) = \sqrt{4x-1}$ est définie sur $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$ qui n'est pas inclu dans $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$: $f(E_1)$ n'est pas inclu dans E_2 .

Dans ces conditions, nous ne pouvons pas déterminer la fonction h c'est-à-dire la composée de f par g .

II

LIMITES ET CONTINUITÉ D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE.

EXERCICE n° 12

ÉNONCÉ :

- ① Définir la notion de limite d'une fonction.
- ② Rappeler la définition d'une limite à droite et celle d'une limite à gauche.
- ③ Qu'est ce que le théorème de l'encadrement ou théorème dit des gendarmes ?

CORRIGÉ :

- ① Définissons la notion de limite d'une fonction numérique d'une variable réelle :

Soit $y = f(x)$ une fonction numérique d'une variable réelle définie dans un voisinage de x_0 sauf peut-être au point x_0 .

On dit que la fonction $y = f(x)$ tend vers la limite l lorsque x tend vers x_0 si $f(x)$ s'approche de l quand x s'approche de x_0 .

Mathématiquement, cela se traduit par :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ et soit x_0 un point appartenant à $\mathbb{R}$.

On dit que f a pour limite l , $l \in \mathbb{R}$, quand x tend vers x_0 et on note

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ si :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, (x \in E \text{ et } |x - x_0| < \alpha) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

) **Rappelons la définition d'une limite à droite et celle d'une limite à gauche :**

(a) Définition d'une limite à droite :

Soit $y = f(x)$ une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $E =]x_0, b[$. On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures ou f admet une limite l à droite en x_0 ou $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0^+ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,$$

$$\forall x, (x \in E \text{ et } x_0 < x < x_0 + \alpha) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

$$\text{On note : } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l.$$

(b) Définition d'une limite à gauche :

Soit $y = f(x)$ une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $E =]a, x_0[$. On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures ou f admet une limite l à gauche en x_0 ou $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0^- si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,$$

$$\forall x, (x \in E \text{ et } x_0 - \alpha < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

$$\text{On note : } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l.$$

Il est bon de noter d'une part que lorsqu'elles existent, ces limites sont uniques, et, d'autre part que les limites lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) sont en fait des limites à gauche (resp. à droite).

De plus, si la limite à droite et la limite à gauche sont égales, alors la valeur commune est la limite de la fonction $f(x)$ au point x_0 . Inversement, si une fonction tend vers une limite l , alors l est limite à droite et limite à gauche de cette fonction.

Enfin, si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, alors f n'a pas de limite en x_0 .

③ Le théorème de l'encadrement ou théorème dit des gendarmes :

Soient trois fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ telles que :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si $f(x)$ et $h(x)$ ont comme limite l quand x tend vers x_0 , alors $g(x)$ tend également vers l .

$$\text{Autrement dit : } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l.$$

 EXERCICE n° 13

ÉNONCÉ :

- ① Rappeler les propriétés des limites.**
- ② Quelles sont les formes indéterminées ?**
- ③ La règle de l'Hospital permet-elle de lever éventuellement certaines formes indéterminées ?**

CORRIGÉ :

- ① Rappelons les propriétés des limites :**

Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble E et admettant des limites finies ou infinies dans les mêmes conditions, alors :

a La limite d'une somme de fonctions est égale à la somme des limites de ces fonctions :

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$, alors
$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l + m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$, alors
$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$, alors
$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, alors
$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors
$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, alors
$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors
$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m$, alors
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = l + m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m$, alors
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)] = l + m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty.$$

(b) La limite d'un produit de fonctions est égale au produit des limites de ces fonctions :

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = 0.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = 0.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = 0.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = 0.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = l \times m.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = l \times m.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = l \times m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = l \times m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = l \times m.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = l \times m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = l \times m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = l \times m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = 0.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = l \times m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = l \times m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = l \times m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = l \times m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = -\infty.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \times g(x)] = +\infty.$$

Ⓒ La limite d'un rapport de deux fonctions est égale au rapport des limites de ces fonctions (à condition que le dénominateur ne s'annule pas) :

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = -\infty.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = +\infty.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = l/m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = l/m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = +\infty.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = 0.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = l/m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = l/m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = 0.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)/g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)/g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)/g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)/g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)/g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)/g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)/g(x)] = l/m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)/g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m < 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)/g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)/g(x)] = 0.$$

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)/g(x)] = l/m.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)/g(x)] = +\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m > 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)/g(x)] = -\infty.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)/g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)/g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)/g(x)] = 0.$$
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)/g(x)] = 0.$$

Enfin, il est bon de noter que si $f(x) = 1$, la limite de l'inverse d'une fonction est l'inverse de sa limite : $\lim_{x \rightarrow A} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow A} g(x)}$, avec $A = x_0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$.

④ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit f une fonction définie sur E et admettant une limite finie ou infinie. Dans ces conditions, $\lim_{x \rightarrow A} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot l$, l étant la limite de $f(x)$ quand x tend vers A avec ($A = x_0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$) :

- Si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = l$ et $\lambda = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow A} \lambda \cdot f(x) = 0$.

- Si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = l$ et $\lambda > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow A} \lambda \cdot f(x) = \lambda \times l$.
- Si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = l$ et $\lambda < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow A} \lambda \cdot f(x) = \lambda \times l$.
- Si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$ et $\lambda = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow A} \lambda \cdot f(x) = 0$.
- Si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$ et $\lambda > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow A} \lambda \cdot f(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$ et $\lambda < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow A} \lambda \cdot f(x) = -\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$ et $\lambda = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow A} \lambda \cdot f(x) = 0$.
- Si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$ et $\lambda > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow A} \lambda \cdot f(x) = -\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$ et $\lambda < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow A} \lambda \cdot f(x) = +\infty$.

Ⓔ Soit le rapport $f(x)/g(x)$ de deux fonctions polynômes :

- quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, la limite du rapport est donnée par le rapport des termes de plus haut degré.
- quand x tend vers 0, la limite du rapport est donnée par le rapport des termes de plus bas degré.

) **Déterminons les formes indéterminées :**

Les formes indéterminées sont :

- Ⓐ $\frac{0}{0}$,
- Ⓑ $0 \times \infty$,
- Ⓒ $\frac{\infty}{\infty}$,
- Ⓓ $\infty - \infty$,
- Ⓔ 1^∞ ,
- Ⓕ 0^0 ,
- Ⓖ ∞^0 .

Il est bon de noter que 0^∞ n'est pas une forme indéterminée.

③ **La règle de l'Hospital permet-elle de lever éventuellement certaines formes indéterminées ?**

La règle de l'Hospital permet de lever éventuellement certaines formes indéterminées.

En effet, selon cette règle si $\frac{f(x)}{g(x)}$ prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ quand x tend vers x_0 (et pas $+\infty$ ou $-\infty$) et si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0 , alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Il est bon de remarquer que si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ prend aussi la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ quand x tend vers x_0 (et pas $+\infty$ ou $-\infty$) et si $\frac{f''(x)}{g''(x)}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0 , alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \quad \text{etc.}$$

👉 **EXERCICE n° 14**

ÉNONCÉ :

Déterminer les limites des expressions suivantes :

① $f(x) = \frac{3x^2 + 12x + 9}{21x}$, pour x tend vers 1.

② $f(x) = \frac{12x^3 - 6}{3x}$, pour x tend vers 2.

③ $f(x) = 36x^2 - 21x + 12$, pour x tend vers 3.

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \frac{3x^3 - 6x^2 + 3x - 9}{18x^4 - 6}, \text{ pour } x \text{ tend vers } +\infty.$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = \frac{3x^3 - 6x^2 + 3x - 9}{18x^4 - 6}, \text{ pour } x \text{ tend vers } -\infty.$$

$$\textcircled{6} \quad f(x) = \frac{6x^3 - 3}{9x^2}, \text{ pour } x \text{ tend vers } +\infty.$$

$$\textcircled{7} \quad f(x) = \frac{6x^3 - 3}{9x^2}, \text{ pour } x \text{ tend vers } -\infty.$$

$$\textcircled{8} \quad f(x) = \frac{12x^4 - 6x}{9x^2 + 3}, \text{ pour } x \text{ tend vers } +\infty.$$

$$\textcircled{9} \quad f(x) = \frac{12x^4 - 6x}{9x^2 + 3}, \text{ pour } x \text{ tend vers } -\infty.$$

$$\textcircled{10} \quad f(x) = \frac{9x^9 - 18x^2 + 6}{3x^9 + 9}, \text{ pour } x \text{ tend vers } +\infty.$$

$$\textcircled{11} \quad f(x) = \frac{9x^9 - 18x^2 + 6}{3x^9 + 9}, \text{ pour } x \text{ tend vers } -\infty.$$

$$\textcircled{12} \quad f(x) = \frac{-12x^2 + 3}{6x}, \text{ pour } x \text{ tend vers } +\infty.$$

$$\textcircled{13} \quad f(x) = \frac{-12x^2 + 3}{6x}, \text{ pour } x \text{ tend vers } -\infty.$$

$$\textcircled{14} \quad f(x) = \frac{33x^3 + 21x^2 + 9}{18x^2 + 3x - 6}, \text{ pour } x \text{ tend vers } 0.$$

$$\textcircled{15} \quad f(x) = \frac{33x^3 + 21x^2}{18x^2 + 3x - 6}, \text{ pour } x \text{ tend vers } 0.$$

$$\textcircled{16} \quad f(x) = \frac{33x^3 + 21x^2 + 9}{18x^2 + 3x}, \text{ pour } x \text{ tend vers } 0.$$

$$\textcircled{17} \quad f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6}{2x - 4}, \text{ pour } x \text{ tend vers } 2.$$

$$\textcircled{18} \quad f(x) = \frac{3x^2 + 6x}{x - 3}, \text{ pour } x \text{ tend vers } 3.$$

$$\textcircled{19} \quad f(x) = \frac{x - 3}{3x^2 + 6x}, \text{ pour } x \text{ tend vers } 3.$$

$$\textcircled{20} \quad f(x) = \frac{x - 1}{x}, \text{ pour } x \text{ tend vers } 1.$$

$$\textcircled{21} \quad f(x) = \frac{x^3 - a^3}{x - a}, \text{ pour } x \text{ tend vers } a.$$

$$\textcircled{22} \quad f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 1}{x^2 + x - 2}, \text{ pour } x \text{ tend vers } 1.$$

$$\textcircled{23} \quad f(x) = \frac{x^5 - 1}{2x^2 - 2}, \text{ pour } x \text{ tend vers } 1.$$

$$\textcircled{24} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}, \text{ pour } x \text{ tend vers } a, \text{ avec } a > 0.$$

$$\textcircled{25} \quad f(x) = \frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3}, \text{ pour } x \text{ tend vers } 1.$$

$$\textcircled{26} \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}, \text{ pour } x \text{ tend vers } 0.$$

$$\textcircled{27} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}, \text{ pour } x \text{ tend vers } 4.$$

$$\textcircled{28} \quad f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4}, \text{ pour } x \text{ tend vers } -2.$$

$$\textcircled{29} \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}, \text{ pour } x \text{ tend vers } 1.$$

$$(30) \quad f(x) = \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}, \text{ pour } x \text{ tend vers } a.$$

$$(31) \quad f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}, \text{ pour } x \text{ tend vers } +\infty.$$

$$(32) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + ax} - x, \text{ pour } x \text{ tend vers } +\infty.$$

$$(33) \quad f(x) = (x^3 + x^2 - 1)^{1/2} - x, \text{ pour } x \text{ tend vers } +\infty.$$

$$(34) \quad f(x) = \frac{(2x + 5)^{1/2} - (3x + 3)^{1/2}}{(4x + 1)(x - 2)}, \text{ pour } x \text{ tend vers } +\infty.$$

$$(35) \quad f(x) = (x^3 + x + 2)^{1/2} - x(x - 1)^{1/2}, \text{ pour } x \text{ tend vers } +\infty.$$

$$(36) \quad f(x) = \frac{(x^2 + 1)^{1/2} - x^{1/2}}{(x - 1)(x - 2)}, \text{ pour } x \text{ tend vers } +\infty.$$

$$(37) \quad f(x) = x + 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{2}, \text{ pour } x \text{ tend vers } 0.$$

$$(38) \quad f(x) = 2\frac{\sqrt{x^2}}{x} + 3x + 5, \text{ pour } x \text{ tend vers } 0.$$

$$(39) \quad f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}, \text{ pour } x \text{ tend vers } +\infty.$$

$$(40) \quad f(x) = \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin x}, \text{ pour } x \text{ tend vers } 0.$$

$$(41) \quad f(x) = \frac{\sin x}{\operatorname{Log}(1 + x)}, \text{ pour } x \text{ tend vers } 0.$$

$$(42) \quad f(x) = \frac{\sin x}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}, \text{ pour } x \text{ tend vers } \pi.$$

CORRIGÉ :

- ① Déterminons la limite de $f(x) = (3x^2 + 12x + 9)/(21x)$ quand x tend vers 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 12x + 9}{21x} = \frac{3 \times (1)^2 + 12 \times (1) + 9}{21 \times (1)}.$$

Au total, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 12x + 9}{21x} = \frac{8}{7}}.$

- ② Déterminons la limite de $f(x) = (12x^3 - 6)/(3x)$ quand x tend vers 2 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{12x^3 - 6}{3x} = \frac{12 \times (2)^3 - 6}{3 \times (2)}.$$

Au total, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{12x^3 - 6}{3x} = 15}.$

- ③ Déterminons la limite de $f(x) = 36x^2 - 21x + 12$ quand x tend vers 3 :

$$\lim_{x \rightarrow 3} 36x^2 - 21x + 12 = 36 \times (3)^2 - 21 \times (3) + 12.$$

Au total, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 3} 36x^2 - 21x + 12 = 273}.$

- ④ Déterminons la limite de

$$f(x) = (3x^3 - 6x^2 + 3x - 9)/(18x^4 - 6)$$

quand x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 6x^2 + 3x - 9}{18x^4 - 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{18x^4}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{18x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{6x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{6x} = 0^+.$

Au total, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 6x^2 + 3x - 9}{18x^4 - 6} = 0^+}.$

⑤ Déterminons la limite de

$$f(x) = (3x^3 - 6x^2 + 3x - 9)/(18x^4 - 6)$$

quand x tend vers $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 6x^2 + 3x - 9}{18x^4 - 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{18x^4}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{18x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{6x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{6x} = 0^-.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 6x^2 + 3x - 9}{18x^4 - 6} = 0^-}.$$

⑥ Déterminons la limite de $f(x) = (6x^3 - 3)/(9x^2)$ quand x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - 3}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3}{9x^2}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{9} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{9} = +\infty.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - 3}{9x^2} = +\infty}.$$

⑦ Déterminons la limite de $f(x) = (6x^3 - 3)/(9x^2)$ quand x tend vers $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 - 3}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3}{9x^2}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{9} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{9} = -\infty.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 - 3}{9x^2} = -\infty}.$$

⑧ Déterminons la limite de $f(x) = (12x^4 - 6x)/(9x^2 + 3)$ quand x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^4 - 6x}{9x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^4}{9x^2}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^4}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{3} = +\infty.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^4 - 6x}{9x^2 + 3} = +\infty}.$$

- ⑨ Déterminons la limite de $f(x) = (12x^4 - 6x)/(9x^2 + 3)$ quand x tend vers $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x^4 - 6x}{9x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x^4}{9x^2}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x^4}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{3} = +\infty.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x^4 - 6x}{9x^2 + 3} = +\infty}.$$

- ⑩ Déterminons la limite de $f(x) = (9x^9 - 18x^2 + 6)/(3x^9 + 9)$ quand x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^9 - 18x^2 + 6}{3x^9 + 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^9}{3x^9}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^9}{3x^9} = 3.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^9 - 18x^2 + 6}{3x^9 + 9} = 3}.$$

- ⑪ Déterminons la limite de $f(x) = (9x^9 - 18x^2 + 6)/(3x^9 + 9)$ quand x tend vers $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^9 - 18x^2 + 6}{3x^9 + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^9}{3x^9}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^9}{3x^9} = 3.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^9 - 18x^2 + 6}{3x^9 + 9} = 3}.$$

- ⑫ Déterminons la limite de $f(x) = (-12x^2 + 3)/(6x)$ quand x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-12x^2 + 3}{6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-12x^2}{6x}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-12x^2}{6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-12x^2 + 3}{6x} = -\infty}.$$

- ⑬ Déterminons la limite de $f(x) = (-12x^2 + 3)/(6x)$ quand x tend vers $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^2 + 3}{6x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^2}{6x}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^2}{6x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^2 + 3}{6x} = +\infty}.$$

- ⑭ Déterminons la limite de

$$f(x) = (33x^3 + 21x^2 + 9)/(18x^2 + 3x - 6)$$

quand x tend vers 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{33x^3 + 21x^2 + 9}{18x^2 + 3x - 6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9}{-6}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{33x^3 + 21x^2 + 9}{18x^2 + 3x - 6} = -\frac{3}{2}}.$$

- ⑮ Déterminons la limite de

$$f(x) = (33x^3 + 21x^2)/(18x^2 + 3x - 6)$$

quand x tend vers 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{33x^3 + 21x^2}{18x^2 + 3x - 6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{21x^2}{-6}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{21x^2}{-6} = 0.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{33x^3 + 21x^2}{18x^2 + 3x - 6} = 0}.$$

⑩ Déterminons la limite de

$f(x) = (33x^3 + 21x^2 + 9)/(18x^2 + 3x)$ quand x tend vers 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{33x^3 + 21x^2 + 9}{18x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9}{3x}.$$

Distinguons deux cas :

1^{er} cas : x tend vers 0^+ :

$$\text{Dans ce cas, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{3x} = +\infty.$$

2^e cas : x tend vers 0^- :

$$\text{Dans ce cas, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{9}{3x} = -\infty.$$

Au total,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{33x^3 + 21x^2 + 9}{18x^2 + 3x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{33x^3 + 21x^2 + 9}{18x^2 + 3x} = -\infty}.$$

⑪ Déterminons la limite de $f(x) = (x^3 + 3x^2 + 6)/(2x - 4)$ quand x tend vers 2 :

Distinguons deux cas :

1^{er} cas : x tend vers 2^+ :

$$\text{Dans ce cas, } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 + 3x^2 + 6}{2x - 4} = +\infty.$$

2^e cas : x tend vers 2^- :

$$\text{Dans ce cas, } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 + 3x^2 + 6}{2x - 4} = -\infty.$$

Au total, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 + 3x^2 + 6}{2x - 4} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 + 3x^2 + 6}{2x - 4} = -\infty$.

- ⑮ Déterminons la limite de $f(x) = (3x^2 + 6x)/(x - 3)$ quand x tend vers 3 :

Distinguons deux cas :

1^{er} cas : x tend vers 3^+ :

Dans ce cas, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^2 + 6x}{x - 3} = +\infty$.

2^e cas : x tend vers 3^- :

Dans ce cas, $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x^2 + 6x}{x - 3} = -\infty$.

Au total, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^2 + 6x}{x - 3} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x^2 + 6x}{x - 3} = -\infty$.

- ⑯ Déterminons la limite de $f(x) = (x - 3)/(3x^2 + 6x)$ quand x tend vers 3 :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{3x^2 + 6x} = \frac{(3) - 3}{3 \times (3)^2 + 6 \times (3)}$$

Au total, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{3x^2 + 6x} = 0$.

- ⑰ Déterminons la limite de $f(x) = (x - 1)/(x)$ quand x tend vers 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x} = \frac{1 - 1}{1}$$

Au total, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x} = 0$.

- ⑱ Déterminons la limite de $f(x) = (x^3 - a^3)/(x - a)$ quand x tend vers a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{a^3 - a^3}{a - a}$$

D'où $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{0}{0}$, c'est une forme indéterminée.

Appliquons la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2}{1}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2}{1} = 3a^2.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = 3a^2}.$$

②② Déterminons la limite de

$$f(x) = (x^3 + 3x^2 - 3x - 1)/(x^2 + x - 2)$$

quand x tend vers 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{0}{0}, \text{ c'est une forme indéterminée.}$$

Appliquons la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 6x - 3}{2x + 1}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 6x - 3}{2x + 1} = \frac{6}{3}.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 1}{x^2 + x - 2} = 2}.$$

②③ Déterminons la limite de $f(x) = (x^5 - 1)/(2x^2 - 2)$ quand x tend vers 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^2 - 2} = \frac{0}{0}, \text{ c'est une forme indéterminée.}$$

Appliquons la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4}{4x}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4}{4x} = \frac{5}{4}.$$

Au total, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^2 - 2} = \frac{5}{4}}.$

- (24) Déterminons la limite de $f(x) = (\sqrt{x} - \sqrt{a})/(x - a)$ quand x tend vers a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{0}{0}, \text{ c'est une forme indéterminée.}$$

Appliquons la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Au total, $\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \text{ avec } a > 0}.$

- (25) Déterminons la limite de $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$ quand x tend vers 1 :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \Rightarrow f(x) = \frac{(1-x^3) - 3(1-x)}{(1-x)(1-x^3)}.$$

$$\text{D'où } f(x) = \frac{-x^3 + 3x - 2}{(1-x)(1-x^3)}.$$

Dans ces conditions, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 + 3x - 2}{(1-x)(1-x^3)} = \frac{0}{0}$, c'est une forme indéterminée.

Appliquons la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 + 3x - 2}{(1-x)(1-x^3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x^2 + 3}{4x^3 - 3x^2 - 1}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x^2 + 3}{4x^3 - 3x^2 - 1} = \frac{0}{0}, \text{ c'est une forme indéterminée.}$$

Appliquons à nouveau la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 + 3x - 2}{(1-x)(1-x^3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-6x}{12x^2 - 6x}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-6x}{12x^2 - 6x} = -1.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = -1}.$$

②⑥ **Déterminons la limite de $f(x) = (\sqrt{1+x} - 1)/(\sqrt[3]{1+x} - 1)$ quand x tend vers 0 :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \frac{0}{0}, \text{ c'est une forme indéterminée.}$$

- Appliquons la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/2} - 1}{(1+x)^{1/3} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}}{\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}}{\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \frac{3}{2}}.$$

②⑦ **Déterminons la limite de $f(x) = (\sqrt{x} - 2)/(x^2 - 5x + 4)$ quand x tend vers 4 :**

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4} = \frac{0}{0}, \text{ c'est une forme indéterminée.}$$

Appliquons la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x - 5}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x-5} = \frac{1}{12}.$

Au total, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \frac{1}{12}}.$

(28) Déterminons la limite de $f(x) = (x^3 - 3x + 2)/(x^2 - 4)$ quand x tend vers -2 :

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{0}{0},$ c'est une forme indéterminée.

Appliquons la règle de l'Hospital :

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 3}{2x}.$

Or $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 3}{2x} = \frac{-9}{4}.$

Au total, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{-9}{4}}.$

(29) Déterminons la limite de $f(x) = (x^2 - 1)/(\sqrt{x} - 1)$ quand x tend vers 1 :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0},$ c'est une forme indéterminée.

Appliquons la règle de l'Hospital :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(\sqrt{x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)^{-1/2}}.$

Or $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)^{-1/2}} = 0.$

Au total, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = 0}.$

- ③⑩ Déterminons la limite de $f(x) = (\sin^2 x - \sin^2 a)/(x^2 - a^2)$ quand x tend vers a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2} = \frac{0}{0}, \text{ c'est une forme indéterminée.}$$

Appliquons la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin x \cos x}{2x}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin x \cos x}{2x} = \frac{\sin a \times \cos a}{a}.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2} = \frac{\sin a \times \cos a}{a}}.$$

- ③⑪ Déterminons la limite de $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$ quand x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - x} = +\infty - \infty, \text{ c'est une forme indéterminée.}$$

Si nous multiplions et divisons par la quantité conjuguée $x + \sqrt{x^2 - x}$, nous obtenons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - x} = \frac{1}{2}}.$$

- ③⑫ Déterminons la limite de $f(x) = \sqrt{x^2 + ax} - x$ quand x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + ax} - x = +\infty - \infty, \text{ c'est une forme indéterminée.}$$

Si nous multiplions et divisons par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2 + ax} + x$, nous obtenons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + ax} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2 + ax} + x}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2 + ax} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{2x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{2x} = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + ax} - x = \frac{a}{2}}.$$

Déterminons la limite de $f(x) = (x^3 + x^2 + 1)^{1/2} - x$ quand x tend vers $+\infty$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x^2 + 1)^{1/2} - x = +\infty - \infty$, c'est une forme indéterminée.

Si nous multiplions et divisons par la quantité conjuguée $(x^3 + x^2 + 1)^{1/2} + x$, nous obtenons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x^2 + 1)^{1/2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x^3 + x^2 + 1)^{1/2} + x}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x^3 + x^2 + 1)^{1/2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^{3/2}}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^{3/2}} = +\infty.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x^2 + 1)^{1/2} - x = +\infty}.$$

Déterminons la limite de

$$f(x) = [(2x + 5)^{1/2} - (3x + 3)^{1/2}] / [(4x + 1)(x - 2)]$$

quand x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + 5)^{1/2} - (3x + 3)^{1/2}}{(4x + 1)(x - 2)} = \frac{+\infty - \infty}{+\infty}, \text{ c'est une forme indéterminée.}$$

Si nous multiplions et divisons par la quantité conjuguée $(2x + 5)^{1/2} + (3x + 3)^{1/2}$, nous obtenons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+5)^{1/2} - (3x+3)^{1/2}}{(4x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+2}{[(4x+1)(x-2)][(2x+5)^{1/2} + (3x+3)^{1/2}]}$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+2}{[(4x+1)(x-2)][(2x+5)^{1/2} + (3x+3)^{1/2}]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{4\sqrt{6}x^3}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{4\sqrt{6}x^3} = 0.$$

Au total, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+5)^{1/2} - (3x+3)^{1/2}}{(4x+1)(x-2)} = 0}.$

③⑤ **Déterminons la limite de**

$f(x) = (x^3 + x + 2)^{1/2} - x(x-1)^{1/2}$ **quand x tend vers $+\infty$:**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x + 2)^{1/2} - x(x-1)^{1/2} = +\infty - \infty$, c'est une forme indéterminée.

Si nous multiplions et divisons par la quantité conjuguée $(x^3 + x + 2)^{1/2} + x(x-1)^{1/2}$, nous obtenons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x + 2)^{1/2} - x(x-1)^{1/2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 2}{(x^3 + x + 2)^{1/2} + x(x-1)^{1/2}}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 2}{(x^3 + x + 2)^{1/2} + x(x-1)^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^{3/2}}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^{3/2}} = +\infty.$$

Au total, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x + 2)^{1/2} - x(x-1)^{1/2} = +\infty}.$

③⑥ **Déterminons la limite de**

$$f(x) = [(x^2 + 1)^{1/2} - x^{1/2}] / [(x-1)(x-2)]$$

quand x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 1)^{1/2} - x^{1/2}}{(x-1)(x-2)} = \frac{+\infty - \infty}{+\infty}, \text{ c'est une forme indéterminée.}$$

Si nous multiplions et divisons par la quantité conjuguée $(x^2 + 1)^{1/2} + x^{1/2}$, nous obtenons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 1)^{1/2} - x^{1/2}}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{[(x-1)(x-2)][(x^2 + 1)^{1/2} + x^{1/2}]}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{[(x-1)(x-2)][(x^2 + 1)^{1/2} + x^{1/2}]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 1)^{1/2} - x^{1/2}}{(x-1)(x-2)} = 0}.$$

Déterminons la limite de $f(x) = x + 1 + (\sqrt{x^2})/2$ quand x tend vers 0 :

Distinguons deux cas :

1^{er} cas : x tend vers 0^+ :

$$\text{Dans ce cas, } \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 + \frac{x}{2}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 + \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + 2}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + 2}{2} = 1.$$

2^e cas : x tend vers 0^- :

$$\text{Dans ce cas, } \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 - \frac{x}{2}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 - \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 2}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 2}{2} = 1.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{2} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{2} = 1}.$$

③⑧ Déterminons la limite de $f(x) = \frac{2\sqrt{x^2}}{x} + 3x + 5$ quand x tend vers 0 :

Distinguons deux cas :

1^{er} cas : x tend vers 0^+ :

$$\text{Dans ce cas, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x^2}}{x} + 3x + 5 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} + 3x + 5.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} + 3x + 5 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 = 7.$$

2^e cas : x tend vers 0^- :

$$\text{Dans ce cas, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sqrt{x^2}}{x} + 3x + 5 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x} + 3x + 5.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x} + 3x + 5 = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x + 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x + 3 = 3.$$

$$\text{Au total, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x^2}}{x} + 3x + 5 = 7 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sqrt{x^2}}{x} + 3x + 5 = 3.}$$

③⑨ Déterminons la limite de $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ quand x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = +\infty - \infty, \text{ c'est une forme indéterminée.}$$

Si nous multiplions et divisons par la quantité conjuguée $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}$, nous obtenons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1/2}}{2x^{1/2}}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1/2}}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2}.$$

Au total, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}}.$

Déterminons la limite de $f(x) = (\cos x - \sqrt{\cos 2x})/(\sin x)$ quand x tend vers 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin x} = \frac{0}{0}, \text{ c'est une forme indéterminée.}$$

Appliquons la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - \frac{1}{2}(\cos 2x)^{-1/2} \times (-2 \sin 2x)}{\cos x}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - \frac{1}{2}(\cos 2x)^{-1/2} \times (-2 \sin 2x)}{\cos x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + (\cos 2x)^{-1/2} \times \sin 2x}{\cos x}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + (\cos 2x)^{-1/2} \times \sin 2x}{\cos x} = 0.$$

Au total, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin x} = 0}.$

Déterminons la limite de $f(x) = (\sin x)/(\text{Log}(1 + x))$ quand x tend vers 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\text{Log}(1 + x)} = \frac{0}{0}, \text{ c'est une forme indéterminée.}$$

Appliquons la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\text{Log}(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{1+x}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{1+x}} = 1.$$

Au total, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\text{Log}(1 + x)} = 1}.$

④② Déterminons la limite de $f(x) = (\sin x) / \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ quand x tend vers π :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{0}{0}, \text{ c'est une forme indéterminée.}$$

Appliquons la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{-\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{-\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 2.$$

Au total, $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = 2$.

EXERCICE n° 15

ÉNONCÉ :

① Rappeler le théorème des croissances comparées (TCC).

② Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (\text{Log } x)^4.$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{3x}.$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(3x^2 + 4x)}}{x^3 + 3x^2 + 9}.$

$$\textcircled{d} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{6x^3}}{\text{Log}(x^2 + 10x - 4)}.$$

$$\textcircled{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6 + x^3}{\text{Log}(1\,000x^9)}.$$

$$\textcircled{f} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{(30x^4 + 10x^2)}}{x^9 + x^6 - 69}.$$

$$\textcircled{g} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^6 + 30x^3}{e^{2x}}.$$

$$\textcircled{h} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}(50\,000x^{51} + 3\,000)}{e^{x^2}}.$$

$$\textcircled{i} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}(30\,000x^{39} + 69\,000)}{x^3}.$$

CORRIGÉ :

① Rappelons le théorème des croissances comparées :

D'une manière générale, quand x tend vers l'infini, la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction puissance qui, à son tour, l'emporte sur la fonction logarithme.

② Calculons les limites suivantes :

$$\textcircled{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2(\text{Log}x)^4 = 0 \quad \text{car d'après le cours, } \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall \beta \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\text{Log}x|^\beta = 0.$$

$$\textcircled{b} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{3x} = 0 \quad \text{car d'après le cours, } \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall \beta \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0.$$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(3x^2 + 4x)}}{x^3 + 3x^2 + 9} = +\infty$ d'après le théorème des croissances comparées (TCC).

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{6x^3}}{\text{Log}(x^2 + 10x - 4)} = +\infty$ d'après TCC.

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6 + x^3}{\text{Log}(1\,000x^9)} = +\infty$ d'après TCC.

(f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{(30x^4 + 10x^2)}}{x^9 + x^6 - 69} = +\infty$ d'après TCC.

(g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^6 + 30x^3}{e^{2x}} = 0$ d'après TCC.

(h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}(50\,000x^{51} + 3\,000)}{e^{x^2}} = 0$ d'après TCC.

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}(30\,000x^{39} + 69\,000)}{x^3} = 0$ d'après TCC.

 EXERCICE n° 16

ÉNONCÉ :

- ① Définir la continuité en un point.
- ② Quelles sont les propriétés des fonctions continues en un point ?
- ③ Donner trois exemples de fonction continue en un point.

CORRIGÉ :

① Définissons la continuité d'une fonction en un point :

Soit $y = f(x)$ une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ et x_0 un point de E .

On dit que f est continue en x_0 (ou au point x_0) si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

De plus, f est continue à droite en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Enfin, f est continue à gauche en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Il est bon de noter que : f continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ continue à droite et à gauche en x_0 .

② Déterminons les propriétés des fonctions continues en un point :

① Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soient f et g deux fonctions continues en x_0 .

Alors les fonctions $f + g$, $-f$, $-g$, $f \cdot g$, $\lambda \cdot f$ et $\lambda \cdot g$ sont continues en x_0 .

② Soient f et g deux fonctions continues en x_0 .

Si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 .

③ Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en x_0 .

Dans ces conditions, si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et g est continue en l , alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g[f(x)] = g(l).$$

③ **Donnons trois exemples de fonction continue en un point :**

① Premier exemple :

Soit la fonction $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

Elle est continue en $x_0 = 1$.

En effet, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ et $f(1) = 0$.

Nous avons donc bien : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ et par conséquent, la fonction $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$ est continue en $x_0 = 1$.

② Second exemple :

Soit la fonction $f(x) = x \operatorname{Log} x$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.
Elle est continue en $x_0 = 0$.

En effet, nous savons que la fonction $\operatorname{Log} x$ est définie sur $]0, +\infty[$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ (car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (\operatorname{Log} x)^\beta = 0$) et $f(0) = 0$.

Nous avons donc bien : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, d'après l'énoncé, et $f(0) = 0$.

Nous avons donc bien : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$.

Donc f est continue à droite en $x_0 = 0$ et f est continue à gauche en $x_0 = 0$.

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que f est continue en $x_0 = 0$.

③ Troisième exemple :

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$.

Elle est continue en $x_0 = 1$.

En effet, $f(x) = \frac{(1-x^2) - 2(1-x)}{(1-x)(1-x^2)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{(1-x)(1-x^2)}$ (a)

$$(a) \Leftrightarrow f(x) = \frac{-(1-x)^2}{(1-x)(1-x^2)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{-(1-x)}{(1-x^2)} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow f(x) = \frac{-1}{1+x}.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$ et $f(1) = -\frac{1}{2}$.

Nous avons donc bien : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ et par conséquent, la fonction

$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ est continue en $x_0 = 1$.

 EXERCICE n° 17

ÉNONCÉ :

- ① Définir la continuité d'une fonction sur un intervalle.
- ② Quelles sont les propriétés des fonctions continues sur un intervalle.
- ③ Rappeler le théorème des valeurs intermédiaires et donner un exemple.

CORRIGÉ :

- ① Définissons la continuité d'une fonction sur un intervalle :

Soit $y = f(x)$ une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$. Si f est continue en tout point d'un intervalle I inclus dans E , on dit que f est continue sur I .

Il est bon de noter que lorsqu'on dit qu'une fonction f est continue, cela signifie qu'elle est continue sur tout intervalle de son ensemble de définition.

② Déterminons les propriétés des fonctions continues sur un intervalle :

① Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soient f et g deux fonctions continues sur I , I étant un intervalle de $\mathbb{R}$.

Alors les fonctions $f + g$, $-f$, $-g$, $f \cdot g$, $\lambda \cdot f$ et $\lambda \cdot g$ sont continues sur I .

② Soient f et g deux fonctions continues sur I , I étant un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si $g \neq 0$ sur I , alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

③ Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f continue sur I et g continue sur J , avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I .

④ Tout polynôme est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, le rapport de deux polynômes est continue sur son ensemble de définition.

⑤ Les fonctions sinus, cosinus, tangente, exponentielle et logarithme sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

⑥ Par conséquent, toutes les fonctions obtenues en combinant somme, produit, quotient et composition de fonctions continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition, sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

Il est bon de noter que c'est de cette manière que se démontre la continuité dans pratiquement tous les exercices.

Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{3x^2 - 6}{x^4 + 9}$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, la fonction f est un rapport de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

) Rappelons le théorème des valeurs intermédiaires et donnons un exemple :

(a) *Le théorème des valeurs intermédiaires :*

Soit $y = f(x)$ une fonction continue sur un intervalle I fermée : $[a, b]$. Alors tout nombre réel m compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image par f d'un point c de I ou tout nombre réel m compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent par f dans $I = [a, b]$.

Mathématiquement, cela se traduit par :

$\forall m$ tel que $f(a) \leq m \leq f(b)$, $\exists c \in [a, b]$ tel que $m = f(c)$.

(b) *Un exemple :*

Soit $f(x) = x^2 + 9$.

f est continue sur $I = [0, 6]$.

De plus, $f(0) = 9$ et $f(6) = 45$.

Prenons, par exemple, $m = 25$, $f(0) \leq 25 \leq f(6)$, en effet : $9 \leq 25 \leq 45$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists c \in [0, 6]$ tel que : $25 = f(c)$.

Déterminons c :

$$f(c) = 25 \Leftrightarrow c^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow c^2 = 16 \quad (a)$$

$$(a) \Rightarrow c = 4 \text{ ou } c = -4.$$

La solution $c = -4$ est à rejeter car elle n'appartient pas à $I = [0, 6]$.

Seule la solution $c = 4$ est à retenir car $4 \in [0, 6]$.

Au total, le théorème des valeurs intermédiaires est bien vérifié.

En définitive, il est très important de remarquer que le théorème des valeurs intermédiaires a pour conséquence : si f est continue sur un intervalle $I = [a, b]$ et prend des valeurs positives et des valeurs négatives sur I , l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans I .

En effet, si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors :

$\exists x \in]a, b[$ tel que $f(x) = 0$.

Conseil pratique :

Les exercices sur la notion de continuité sont volontairement peu nombreux.

En effet, la continuité d'une fonction en un point et la continuité d'une fonction sur un intervalle ont été traitées en terminale de manière exhaustive : c'est supposé être acquis !

Par conséquent, révisez vos cours de terminale.

III
DÉRIVÉES EN UN POINT –
DÉRIVÉES SUR UN INTERVALLE –
APPROXIMATIONS AFFINES –
DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES
D'ORDRE 1, 2 ET 3 –
DIFFÉRENTIELLES TOTALES
D'ORDRE 1 ET 2 –
FONCTIONS HOMOGÈNES –
THÉORÈME D'EULER –
THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES.

 EXERCICE n° 18

ÉNONCÉ :

- ① Définir la dérivée d'une fonction en un point.
- ② Donner la définition d'une fonction dérivable sur un intervalle.

③ Quel lien existe-t-il entre les notions de dérivabilité et de continuité ?

CORRIGÉ :

① Définissons la dérivée d'une fonction en un point :

Soit $y = f(x)$ une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle I et x_0 un point de cet intervalle.

On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un nombre réel l tel que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l, \text{ avec } x \neq x_0.$$

Le nombre réel l est appelé nombre dérivé de f en x_0 .

De plus, on dit que f est dérivable à droite en x_0 si et seulement si il

existe un nombre réel l tel que : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l, \text{ avec } x \neq x_0.$

Le nombre réel l est appelé nombre dérivée à droite de f en x_0 .

Enfin, on dit que f est dérivable à gauche en x_0 si et seulement si il existe

un nombre réel l tel que : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l, \text{ avec } x \neq x_0.$

Le nombre réel l est appelé nombre dérivée à gauche de f en x_0 .

Il est bon de noter que le rapport $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, avec $x \neq x_0$, s'appelle le taux d'accroissement de f en x_0 .

② Donnons la définition d'une fonction dérivable sur un intervalle :

Soit $y = f(x)$ une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle I .

Si f est dérivable en tout point de I , on dit qu'elle est dérivable sur I .

De plus, la fonction f' qui, à tout x de I , associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en ce point est appelée fonction dérivée de f sur I .

Il est bon de noter que : si f' est continue sur I , on dit que f est continûment dérivable ou qu'elle est de classe C^1 sur I .

De même, si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$, sa dérivée $n^{\text{ième}}$, est continue sur I , on dit que f est n fois continûment dérivable ou qu'elle est de classe C^n sur I .

③ Déterminons le lien qui existe entre les notions de dérivabilité et de continuité :

Soit $y = f(x)$ une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle I .

Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

De même, si f est dérivable sur I , alors f est continue sur I .

Au total : dérivabilité $\Rightarrow$ continuité.

 EXERCICE n° 19

ÉNONCÉ :

Rappeler la formule de Leibniz.

CORRIGÉ :

Rappelons la formule de Leibniz :

Soient f et g deux fonctions définies et indéfiniment dérivables sur un intervalle ouvert I . La fonction produit $f \cdot g$ est indéfiniment dérivable sur I et :

$$(f \cdot g)^n = f^{(n)} \cdot g + C_n^1 f^{(n-1)} \cdot g' + C_n^2 f^{(n-2)} \cdot g'' + \dots + f \cdot g^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Il est bon de noter que : $f^{(n)}$ signifie « la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f ».

ÉNONCÉ :

Calculer la dérivée en un point des fonctions suivantes :

① $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 12$ au point $x_0 = 1$.

② $f(x) = 12x^2 + 24$ au point $x_0 = 2$.

③ $f(x) = \frac{x}{(x+1)}$ au point $x_0 = 3$.

④ $f(x) = \sqrt{x}$ au point $x_0 = 4$.

⑤ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ au point $x_0 = 1$.

⑥ $f(x) = \text{Log}(x + 3)$ au point $x_0 = 2$.

⑦ $f(x) = \text{Log}(x^3 + 3x^2 - 1)$ au point $x_0 = 3$.

⑧ $f(x) = e^{(x^4 + 10x)}$ au point $x_0 = x_0$.

⑨ $f(x) = \sin x + 3x^3 - 6$ au point $x_0 = \pi$.

CORRIGÉ :

① Calculons la dérivée de $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 12$ au point $x_0 = 1$:

$$f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 12.$$

Or, la dérivée de f est : $f'(x) = 12x^3 + 18x^2$.

Par conséquent, la dérivée de f au point $x_0 = 1$ est :

$$f'(1) = 12 \times (1)^3 + 18 \times (1)^2 \Rightarrow \boxed{f'(1) = 30}.$$

② Calculons la dérivée de $f(x) = 12x^2 + 24$ au point $x_0 = 2$

$$f(x) = 12x^2 + 24.$$

Or, la dérivée de f est : $f'(x) = 24x$.

Par conséquent, la dérivée de f au point $x_0 = 2$ est :

$$\boxed{f'(2) = 48}.$$

③ Calculons la dérivée de $f(x) = x/(x+1)$ au point $x_0 = 3$

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)}.$$

Or, la dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Par conséquent, la dérivée de f au point $x_0 = 3$ est :

$$\boxed{f'(3) = \frac{1}{16}}.$$

④ Calculons la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ au point $x_0 = 4$:

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

$$\text{Or, la dérivée de } f \text{ est : } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Par conséquent, la dérivée de f au point $x_0 = 4$ est :

$$\boxed{f'(4) = \frac{1}{4}}.$$

⑤ Calculons la dérivée de $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ au point $x_0 = 1$:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}.$$

Or, la dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \times 2x \Rightarrow f'(x) = (x^2 + 1)^{-1/2} \times x.$$

Par conséquent, la dérivée de f au point $x_0 = 1$ est :

$$f'(1) = 2^{-1/2} \Rightarrow \boxed{f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Calculons la dérivée de $f(x) = \text{Log}(x + 3)$ au point $x_0 = 2$:

$$f(x) = \text{Log}(x + 3).$$

$$\text{Or, la dérivée de } f \text{ est : } f'(x) = \frac{1}{x + 3}.$$

Par conséquent, la dérivée de f au point $x_0 = 2$ est :

$$\boxed{f'(2) = \frac{1}{5}}.$$

Calculons la dérivée de $f(x) = \text{Log}(x^3 + 3x^2 - 1)$ au point $x_0 = 3$:

$$f(x) = \text{Log}(x^3 + 3x^2 - 1).$$

$$\text{Or, la dérivée de } f \text{ est : } f'(x) = \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2 - 1}.$$

Par conséquent, la dérivée de f au point $x_0 = 3$ est :

$$\boxed{f'(3) = \frac{45}{53}}.$$

Calculons la dérivée de $f(x) = e^{(x^4 + 10x)}$ au point $x_0 = x_0$:

$$f(x) = e^{(x^4 + 10x)}.$$

$$\text{Or, la dérivée de } f \text{ est : } f'(x) = (4x^3 + 10) \times e^{(x^4 + 10x)}.$$

Par conséquent, la dérivée de f au point $x_0 = x_0$ est :

$$\boxed{f'(x_0) = (4x_0^3 + 10) \times e^{(x_0^4 + 10x_0)}}.$$

- ⑨ Calculons la dérivée de $f(x) = \sin x + 3x^3 - 6$ au point $x_0 = \pi$:

$$f(x) = \sin x + 3x^3 - 6.$$

Or, la dérivée de f est : $f'(x) = \cos x + 9x^2$.

Par conséquent, la dérivée de f au point $x_0 = \pi$ est :

$$f'(\pi) = -1 + 9\pi^2.$$

EXERCICE n° 21

ÉNONCÉ :

Calculer la dérivée à droite et la dérivée à gauche au point x_0 des fonctions suivantes, et dire si elles sont dérivables en ce point :

- ① $f(x) = |x|$ au point $x_0 = 0$.
- ② $f(x) = e^{\log|x|}$ au point $x_0 = 0$.
- ③ $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$, et $f(x) = 1$ si $x = 0$, au point $x_0 = 0$.
- ④ $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$, et $f(x) = 0$ si $x = 0$, au point $x_0 = 0$.
- ⑤ $f(x) = |x^2 - x| + |x|$ aux points $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$.

- 6) $f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$, au point $x_0 = 0$.
- 7) $f(x) = \sqrt{|x|} + \sqrt{1-x}$ au point $x_0 = 0$.
- 8) $f(x) = x \text{Log}(x^2)$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$, au point $x_0 = 0$.
- 9) $f(x) = x^2 \text{Log}(x) - x^2$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$, au point $x_0 = 0$.

CORRIGÉ :

- 1) Calculons la dérivée à droite et la dérivée à gauche de $f(x) = |x|$ au point $x_0 = 0$ et concluons sur sa dérivabilité en ce point :

$$f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Or la dérivée à droite de f est : $f'(x) = 1$;

et la dérivée à gauche de f est : $f'(x) = -1$.

Par conséquent, la dérivée à droite de f au point $x_0 = 0$ est : $f'(0) = 1$; et la dérivée à gauche de f au point $x_0 = 0$ est : $f'(0) = -1$.

Au total, f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche distinctes au point $x_0 = 0$, donc elle n'est pas dérivable en ce point.

- 2) Calculons la dérivée à droite et la dérivée à gauche de $f(x) = e^{\text{Log}|x|}$ au point $x_0 = 0$ et concluons sur sa dérivabilité en ce point :

$$f(x) = e^{\text{Log}|x|} \Leftrightarrow f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Or la dérivée à droite de f est : $f'(x) = 1$;

et la dérivée à gauche de f est : $f'(x) = -1$.

Par conséquent, la dérivée à droite de f au point $x_0 = 0$ est : $f'(0) = 1$; et la dérivée à gauche de f au point $x_0 = 0$ est : $f'(0) = -1$.

Au total, f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche distinctes au point $x_0 = 0$, donc elle n'est pas dérivable en ce point.

③ Calculons la dérivée à droite et la dérivée à gauche de

$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 1$ si $x = 0$, au point $x_0 = 0$, et concluons sur sa dérivabilité en ce point :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Nous devons calculer ici la dérivée à l'origine à partir de la définition :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 1}{x},$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 1}{x} = -\infty ;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 1}{x},$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 1}{x} = +\infty .$$

Au total, la quantité $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0^+ , et vers $+\infty$ quand x tend vers 0^- , donc f n'est pas dérivable au point $x_0 = 0$.

Calculons la dérivée à droite et la dérivée à gauche de

$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$, au point $x_0 = 0$, et concluons sur sa dérivabilité en ce point :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Nous devons calculer ici la dérivée à l'origine à partir de la définition :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x},$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{xe^{\frac{1}{x^2}}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{xe^{\frac{1}{x^2}}} = 0;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x},$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{xe^{\frac{1}{x^2}}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{xe^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

Au total, la quantité $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+ , et vers 0 quand x tend vers 0^- , donc f est dérivable au point $x_0 = 0$.

De plus, f admet une dérivée nulle pour $x_0 = 0$: $f'(0) = 0$.

Calculons la dérivée à droite et la dérivée à gauche de $f(x) = |x^2 - x| + |x|$ aux points $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$ et concluons sur sa dérivabilité en ces points :

$$f(x) = |x^2 - x| + |x| \Leftrightarrow f(x) = |x(x - 1)| + |x| \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow f(x) = |x||x-1| + |x|.$$

Distinguons trois cas :

1^{er} cas : si $x \leq 0$:

$$\text{Dans ce cas, } f(x) = -x(1-x) - x \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x.$$

2^e cas : si $x \in [0, 1]$:

$$\text{Dans ce cas, } f(x) = x(1-x) + x \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x.$$

3^e cas : si $x \geq 1$:

$$\text{Dans ce cas, } f(x) = x(x-1) + x \Rightarrow f(x) = x^2.$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$	
$f(x)$	$x^2 - 2x$	0	$-x^2 + 2x$	1	x^2	
$f'(x)$	$2x - 2$	a	b	$-2x + 2$	c	d
						$2x$

avec : $a = -2$, $b = 2$, $c = 0$ et $d = 2$.

Au total, pour $x_0 = 0$, la dérivée à gauche est égale à -2 et la dérivée à droite est égale à 2 ; f admet donc une dérivée à droite et une dérivée à gauche distinctes au point $x_0 = 0$, donc elle n'est pas dérivable en ce point.

De même, pour $x_0 = 1$, la dérivée à gauche est égale à 0 et la dérivée à droite est égale à 2 ; f admet donc une dérivée à droite et une dérivée à gauche distinctes au point $x_0 = 1$, donc elle n'est pas dérivable en ce point.

- ⑥ Calculons la dérivée à droite et la dérivée à gauche de $f(x) = x/(1 + e^{1/x})$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$, au point $x_0 = 0$, et concluons sur sa dérivabilité en ce point :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Nous devons calculer ici la dérivée à l'origine à partir de la définition :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}},$

or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 0 ;$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}},$

or $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 1 .$

Au total, la quantité $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+ , et vers 1 quand x tend vers 0^- , donc f n'est pas dérivable au point $x_0 = 0$.

Calculons la dérivée à droite et la dérivée à gauche de $f(x) = \sqrt{|x|} + \sqrt{1-x}$ au point $x_0 = 0$ et concluons sur sa dérivabilité en ce point :

$$f(x) = \sqrt{|x|} + \sqrt{1-x}.$$

Nous devons calculer ici la dérivée à l'origine à partir de la définition :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 1}{x},$

or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 1}{x} = +\infty ;$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x} + \sqrt{1-x} - 1}{x},$

or $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x} + \sqrt{1-x} - 1}{x} = -\infty .$

Au total, la quantité $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+ , et vers $-\infty$ quand x tend vers 0^- , donc f n'est pas dérivable au point $x_0 = 0$.

- ⑧ Calculons la dérivée à droite et la dérivée à gauche de $f(x) = x\text{Log}(x^2)$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$, au point $x_0 = 0$, et concluons sur sa dérivabilité en ce point :

$$f(x) = \begin{cases} x\text{Log}(x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Nous devons calculer ici la dérivée à l'origine à partir de la définition :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\text{Log}(x^2)}{x},$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\text{Log}(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\text{Log}x \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\text{Log}x = -\infty ;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x\text{Log}(x^2)}{x},$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x\text{Log}(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{Log}(x^2) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{Log}(x^2) = -\infty.$$

Au total, f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche qui ne sont pas finies au point $x_0 = 0$, donc elle n'est pas dérivable en ce point.

- ⑨ Calculons la dérivée à droite et la dérivée à gauche de $f(x) = x^2\text{Log}(x) - x^2$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$, au point $x_0 = 0$, et concluons sur sa dérivabilité en ce point :

$$f(x) = \begin{cases} x^2\text{Log}(x) - x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Nous devons calculer ici la dérivée à l'origine à partir de la définition :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \text{Log} x - x^2}{x},$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \text{Log} x - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \text{Log} x - x \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \text{Log} x - x = 0 ;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \text{Log} x - x^2}{x},$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \text{Log} x - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \text{Log} x - x \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} x \text{Log} x - x = 0 .$$

Au total, la quantité $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+ ,
et vers 0 quand x tend vers 0^- , donc f est dérivable au point
 $x_0 = 0$.

De plus, f admet une dérivée nulle pour $x_0 = 0$: $f'(0) = 0$.

👉 EXERCICE n° 22

ÉNONCÉ :

Soit $y = f(x)$ une fonction numérique d'une variable réelle et soit G le graphe de f . À partir des résultats de l'exercice précédent, calculer l'équation de la tangente au point A d'abscisse x_0 dans les cas suivants :

① $f(x) = |x|$ au point $x_0 = 0$.

② $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 1$ si $x = 0$, au point $x_0 = 0$.

$$\textcircled{3} \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(x) = 0 \text{ si } x = 0, \text{ au point } x_0 = 0.$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = |x^2 - x| + |x| \text{ aux points } x_0 = 0 \text{ et } x_0 = 1.$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = x \text{Log}(x^2) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(x) = 0 \text{ si } x = 0, \text{ au point } x_0 = 0.$$

$$\textcircled{6} \quad f(x) = x^2 \text{Log}(x) - x^2 \text{ si } x > 0 \text{ et } f(x) = 0 \text{ si } x = 0, \text{ au point } x_0 = 0.$$

CORRIGÉ :

Préalablement, nous savons que :

- Si f est dérivable en x_0 $\Leftrightarrow G$, c'est-à-dire le graphe de f , admet en A une tangente non verticale d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$
- Si f est dérivable à droite en x_0 $\Leftrightarrow G$, c'est-à-dire le graphe de f , admet en A une demi-tangente à droite de pente $f'_d(x_0)$, $f'_d(x_0)$ étant la dérivée à droite de f en x_0 .
- Si f est dérivable à gauche en x_0 $\Leftrightarrow G$, c'est-à-dire le graphe de f , admet en A une demi-tangente à gauche de pente $f'_g(x_0)$, $f'_g(x_0)$ étant la dérivée à gauche de f en x_0 .
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ $\Leftrightarrow G$, c'est-à-dire le graphe de f , admet en A une tangente verticale.

- ① Si $f(x) = |x|$, calculons l'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 0$:

Si $f(x) = |x|$, nous savons que :

- la dérivée à droite de f au point $x_0 = 0$ est : $f'_d(0) = 1$;
- la dérivée à gauche de f au point $x_0 = 0$ est : $f'_g(0) = -1$.

Dans ces conditions, f est dérivable à droite en $x_0 = 0$ et à gauche en $x_0 = 0$.

D'où :

- f est dérivable à droite en $x_0 = 0 \Leftrightarrow G$ admet en A une demi-tangente à droite d'équation : $y = x$;
- f est dérivable à gauche en $x_0 = 0 \Leftrightarrow G$ admet en A une demi-tangente à gauche d'équation : $y = -x$.

- ② Si $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 1$ si $x = 0$, calculons l'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 0$:

Si $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 1$ si $x = 0$, nous savons que :

- la quantité $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers $-\infty$, quand x tend vers 0^+ (a)

(a) $\Leftrightarrow G$ admet en A une tangente verticale ;

- la quantité $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers $+\infty$, quand x tend vers 0^- (b)

(b) $\Leftrightarrow G$ admet en A une tangente verticale.

- ③ Si $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$, calculons l'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 0$:

Si $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$ nous savons que :

- la quantité $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers 0, quand x tend vers 0^+ (a)

(a) $\Leftrightarrow f$ est dérivable à droite en $x_0 = 0$;

- la quantité $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers 0, quand x tend vers 0^- (b)

(b) $\Leftrightarrow f$ est dérivable à gauche en $x_0 = 0$.

Au total, $f'_d(0) = 0$ et $f'_g(0) = 0$, donc f est dérivable en $x_0 = 0$ (c)

(c) $\Leftrightarrow G$ admet en A une tangente non verticale d'équation :

$$\boxed{y = 0}.$$

④ Si $f(x) = |x^2 - x| + |x|$, calculons d'une part l'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 0$, d'autre part l'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 1$:

① L'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 0$:

Si $f(x) = |x^2 - x| + |x|$, nous savons que :

- la dérivée à droite de f au point $x_0 = 0$ est : $f'_d(0) = 2$;

- la dérivée à gauche de f au point $x_0 = 0$ est : $f'_g(0) = -2$.

Dans ces conditions, f est dérivable à droite en $x_0 = 0$ et à gauche en $x_0 = 0$.

D'où :

- f est dérivable à droite en $x_0 = 0 \Leftrightarrow G$ admet en A une demi-tangente à droite d'équation : $\boxed{y = 2x}$.

- f est dérivable à gauche en $x_0 = 0 \Leftrightarrow G$ admet en A une demi-tangente à gauche d'équation : $\boxed{y = -2x}$.

② L'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 1$:

Si $f(x) = |x^2 - x| + |x|$, nous savons que :

- la dérivée à droite de f au point $x_0 = 1$ est : $f'_d(1) = 2$;

- la dérivée à gauche de f au point $x_0 = 1$ est : $f'_g(1) = 0$.

Dans ces conditions, f est dérivable à droite en $x_0 = 1$ et à gauche en $x_0 = 1$.

D'où :

- f est dérivable à droite en $x_0 = 1 \Leftrightarrow G$ admet en A une demi-tangente à droite d'équation : $y = 2(x - 1) + 1$, c'est-à-dire

$$\boxed{y = 2x - 1}.$$

- f est dérivable à gauche en $x_0 = 1 \Leftrightarrow G$ admet en A une demi-tangente à gauche d'équation : $\boxed{y = 1}$.

⑤ Si $f(x) = x \text{Log}(x^2)$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$, calculons l'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 0$:

Si $f(x) = x \text{Log}(x^2)$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$, nous savons que :

- la quantité $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers $-\infty$, quand x tend vers 0^+ (a)

(a) $\Leftrightarrow f$ n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 0$;

- la quantité $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers $-\infty$, quand x tend vers 0^- (b)

(b) $\Leftrightarrow f$ n'est pas dérivable à gauche en $x_0 = 0$.

Au total, comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty \Leftrightarrow G$ admet en A une tangente verticale.

⑥ Si $f(x) = x^2 \text{Log}(x) - x^2$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$, calculons l'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 0$:

Si $f(x) = x^2 \text{Log}(x) - x^2$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$, nous savons que :

- la quantité $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers 0, quand x tend vers 0^+ (a)

(a) $\Leftrightarrow f$ est dérivable à droite en $x_0 = 0$;

- la quantité $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers 0, quand x tend vers 0^- (b)

(b) $\Leftrightarrow f$ est dérivable à gauche en $x_0 = 0$.

Au total, $f'_d(0) = 0$ et $f'_g(0) = 0$, donc f est dérivable en $x_0 = 0$ (c)

(c) $\Leftrightarrow G$ admet en A une tangente non verticale d'équation :

$y = 0$

.

 EXERCICE n° 23

ÉNONCÉ :

Soit $y = f(x)$ une fonction numérique d'une variable réelle et soit G le graphe de f . Calculer l'équation de la tangente au point A d'abscisse x_0 , et réaliser une approximation affine de f au voisinage de x_0 dans les cas suivants :

① $f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 3$ au point $x_0 = 2$.

② $f(x) = \frac{9x^2 - 6}{x^2 + 1}$ au point $x_0 = 2$.

③ $f(x) = e^x + \text{Log } x$ au point $x_0 = 1$.

④ $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ au point $x_0 = 0$.

⑤ $f(x) = e^{\alpha \text{Log } x}$ au point $x_0 = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

⑥ $f(x) = x^{x^{1/2}}$ au point $x_0 = 1$.

CORRIGÉ :

Préalablement, il est bon de noter que ces six fonctions sont toutes dérivables en x_0 .

De plus, nous savons que :

si f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow G$, c'est-à-dire le graphe de f , admet en A une tangente non verticale d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Enfin, si $f'(x_0)$ existe on appelle approximation affine de f au voisinage de x_0 , la fonction g définie sur un voisinage de x_0 par :

$$g(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

D'où : réaliser une approximation affine de f au voisinage de x_0 , revient à remplacer la courbe par sa tangente au point d'abscisse $x = x_0$.

① Si $f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 3$, calculons l'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 2$, et réalisons une approximation affine de f au voisinage de $x_0 = 2$:

Ⓐ L'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 2$:

f est dérivable en $x_0 = 2$ et sa dérivée est : $f'(x) = 18x^2 - 18x$.

Dans ces conditions, G admet en A une tangente non verticale d'équation :

$$y = 36(x - 2) + 15.$$

Ⓑ L'approximation affine de f au voisinage de $x_0 = 2$:

Elle s'écrit : $g(x) = 15 + 36(x - 2) \Rightarrow g(x) = 36x - 57$.

- ② Si $f(x) = \frac{9x^2 - 6}{x^2 + 1}$, calculons l'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 2$, et réalisons une approximation affine de f au voisinage de $x_0 = 2$:

- ① *L'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 2$:*

f est dérivable en $x_0 = 2$ et sa dérivée est : $f'(x) = \frac{30x}{(x^2 + 1)^2}$.

Dans ces conditions, G admet en A une tangente non verticale d'équation :

$$y = \frac{12}{5}(x - 2) + 6.$$

- ② *L'approximation affine de f au voisinage de $x_0 = 2$:*

Elle s'écrit : $g(x) = 6 + \frac{12}{5}(x - 2) \Rightarrow g(x) = \frac{12}{5}x + \frac{6}{5}$.

- ③ Si $f(x) = e^x + \text{Log } x$, calculons l'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 1$, et réalisons une approximation affine de f au voisinage de $x_0 = 1$:

- ① *L'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 1$:*

f est dérivable en $x_0 = 1$ et sa dérivée est : $f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$.

Dans ces conditions, G admet en A une tangente non verticale d'équation :

$$y = (e + 1)(x - 1) + e.$$

- ② *L'approximation affine de f au voisinage de $x_0 = 1$:*

Elle s'écrit :

$g(x) = e + (e + 1)(x - 1) \Rightarrow g(x) = (e + 1)x - 1$.

- ④ Si $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, calculons l'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 0$, et réalisons une approximation affine de f au voisinage de $x_0 = 0$:

- Ⓐ L'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 0$:

f est dérivable en $x_0 = 0$ et sa dérivée est :

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

Dans ces conditions, G admet en A une tangente non verticale d'équation :

$$y = x.$$

- Ⓑ L'approximation affine de f au voisinage de $x_0 = 0$:

Elle s'écrit : $g(x) = x$.

- ⑤ Si $f(x) = e^{\alpha \log x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), calculons l'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 1$, et réalisons une approximation affine de f au voisinage de $x_0 = 1$:

- Ⓐ L'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 1$:

f est dérivable en $x_0 = 1$ et sa dérivée est : $f'(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \log x}$.

Dans ces conditions, G admet en A une tangente non verticale d'équation :

$$y = \alpha(x - 1) + 1.$$

- Ⓑ L'approximation affine de f au voisinage de $x_0 = 1$:

Elle s'écrit : $g(x) = 1 + \alpha(x - 1) \Rightarrow g(x) = \alpha x + (1 - \alpha)$.

- ⑥ Si $f(x) = x^{x^{1/2}}$, calculons l'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 1$, et réalisons une approximation affine de f au voisinage de $x_0 = 1$:

① L'équation de la tangente au point A d'abscisse $x_0 = 1$:

f est dérivable en $x_0 = 1$ et sa dérivée est :

$$f'(x) = x^{-1/2} \left[\frac{\text{Log} x}{2} + 1 \right] x^{x^{1/2}}.$$

Dans ces conditions, G admet en A une tangente non verticale d'équation :

$$y = x + 1.$$

② L'approximation affine de f au voisinage de $x_0 = 1$:

Elle s'écrit : $g(x) = x + 1$.

EXERCICE n° 24

ÉNONCÉ :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- ① $f(x) = 9$.
- ② $f(x) = 3x^2 - 6x$.
- ③ $f(x) = 9x^3 + 12x^2 + 24$.
- ④ $f(x) = (3x^2 - 18)^3 - 6x^2 + 30$.
- ⑤ $f(x) = (6x^4 - 3x^2)^9$.

$$\textcircled{6} \quad f(x) = 3x^2 - 6x^{1/2}.$$

$$\textcircled{7} \quad f(x) = \sqrt{x} + 15x^3.$$

$$\textcircled{8} \quad f(x) = \sqrt{6x^2 + 12x - 1}.$$

$$\textcircled{9} \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2}.$$

$$\textcircled{10} \quad f(x) = \sqrt[4]{x^3 - 2x}.$$

$$\textcircled{11} \quad f(x) = \sqrt[5]{(x^2 - 1)^3}.$$

$$\textcircled{12} \quad f(x) = \frac{x^3 - 4}{12x^2 - 6x}.$$

$$\textcircled{13} \quad f(x) = \left(\frac{x^3 - 4}{12x^2 - 6x} \right)^3.$$

$$\textcircled{14} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}.$$

$$\textcircled{15} \quad f(x) = \frac{3}{\sqrt[7]{x^2 - 1}}.$$

$$\textcircled{16} \quad f(x) = \frac{12}{\sqrt[8]{(x^3 - 6)^3}}.$$

$$\textcircled{17} \quad f(x) = \frac{12x^3 - 9x^2 + 6}{\sqrt[9]{(x^4 - 3x^3)^4} + 3x^2}.$$

$$\textcircled{18} \quad f(x) = 3x^2\sqrt{x}.$$

$$\textcircled{19} \quad f(x) = (6x^3 + 3x)\sqrt[3]{x + 1}.$$

$$\textcircled{20} \quad f(x) = 3x^2 \sqrt[4]{(x^6 + 10)^5}.$$

$$\textcircled{21} \quad f(x) = (7x^3 - 20)(9x^4 + 10).$$

$$\textcircled{22} \quad f(x) = (7x^3 - 20)(9x^4 + 10)^2.$$

$$\textcircled{23} \quad f(x) = (7x^3 - 20)^9(9x^4 + 10)^2.$$

$$\textcircled{24} \quad f(x) = x^n \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\textcircled{25} \quad f(x) = \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{1 + (x - 1)^2}.$$

$$\textcircled{26} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + (x - 1)^2}.$$

$$\textcircled{27} \quad f(x) = \frac{3 + \sqrt{x}}{(x + 1)^{3/2}}.$$

$$\textcircled{28} \quad f(x) = \sqrt{\sqrt{x}}.$$

$$\textcircled{29} \quad f(x) = \sqrt{(x - 1)^2(x + 2)}.$$

$$\textcircled{30} \quad f(x) = \mathbf{Log}(|x|).$$

$$\textcircled{31} \quad f(x) = \mathbf{Log}(\mathbf{Log}(x)).$$

$$\textcircled{32} \quad f(x) = x\mathbf{Log}(|x + 3|).$$

$$\textcircled{33} \quad f(x) = (x + \mathbf{Log}(x^2 + 12))^n.$$

$$\textcircled{34} \quad f(x) = \mathbf{Log}\left[\frac{|x(2x - 1)|}{|x + 3|}\right].$$

$$\textcircled{35} \quad f(x) = \frac{x^3}{\text{Log } x}.$$

$$\textcircled{36} \quad f(x) = a^x, \quad a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}.$$

$$\textcircled{37} \quad f(x) = x^x.$$

$$\textcircled{38} \quad f(x) = x^n e^{ax}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{39} \quad f(x) = x^2 e^{1/x}.$$

$$\textcircled{40} \quad f(x) = \text{Log}(xe^x + 3).$$

$$\textcircled{41} \quad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

$$\textcircled{42} \quad f(x) = e^{x^2 + 10x - 5}.$$

$$\textcircled{43} \quad f(x) = e^{\sqrt{3x-6}}.$$

$$\textcircled{44} \quad f(x) = e^{\sqrt[3]{12x^5-7}}.$$

$$\textcircled{45} \quad f(x) = x^{\sqrt{x}}.$$

$$\textcircled{46} \quad f(x) = \sin^2(3x^2 - 10).$$

$$\textcircled{47} \quad f(x) = \sin^3(9x^2 - 6x).$$

$$\textcircled{48} \quad f(x) = \cos^4(6x^3 - 12x)^2.$$

$$\textcircled{49} \quad f(x) = \cos(e^{3x^3}).$$

$$\textcircled{50} \quad f(x) = \tan^2 x.$$

⑤① $f(x) = \cotan^3 x$.

CORRIGÉ :

① Calculons la dérivée de $f(x) = 9$:

Nous avons : $f'(x) = 0$.

② Calculons la dérivée de $f(x) = 3x^2 - 6x$:

Nous avons : $f'(x) = 6x - 6$.

③ Calculons la dérivée de $f(x) = 9x^3 + 12x^2 + 24$:

Nous avons : $f'(x) = 27x^2 + 24x$.

④ Calculons la dérivée de $f(x) = (3x^2 - 18)^3 - 6x^2 + 30$

Nous avons : $f'(x) = 3(3x^2 - 18)^2 \times (6x) - 12x$,

c'est-à-dire : $f'(x) = 18x(3x^2 - 18)^2 - 12x$.

⑤ Calculons la dérivée de $f(x) = (6x^4 - 3x^2)^9$:

Nous avons : $f'(x) = 9(6x^4 - 3x^2)^8 \times (24x^3 - 6x)$.

⑥ Calculons la dérivée de $f(x) = 3x^2 - 6x^{1/2}$:

Nous avons : $f'(x) = 6x - 3x^{-1/2}$.

⑦ Calculons la dérivée de $f(x) = \sqrt{x} + 15x^3$:

Nous avons : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 45x^2$.

⑧ Calculons la dérivée de $f(x) = \sqrt{6x^2 + 12x - 1}$:

$f(x) = \sqrt{6x^2 + 12x - 1} \Leftrightarrow f(x) = (6x^2 + 12x - 1)^{1/2}$.

Nous avons : $f'(x) = \frac{1}{2}(6x^2 + 12x - 1)^{-1/2} \times (12x + 12),$

c'est-à-dire : $f'(x) = (6x^2 + 12x - 1)^{-1/2} \times (6x + 6),$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = \frac{6x + 6}{\sqrt{6x^2 + 12x - 1}}.$$

⑨ Calculons la dérivée de $f(x) = \sqrt[3]{x^2} :$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} \Leftrightarrow f(x) = x^{2/3}.$$

Nous avons : $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3},$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}.$$

⑩ Calculons la dérivée de $f(x) = \sqrt[4]{x^3 - 2x} :$

$$f(x) = \sqrt[4]{x^3 - 2x} \Leftrightarrow f(x) = (x^3 - 2x)^{1/4}.$$

Nous avons : $f'(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 2x)^{-3/4} \times (3x^2 - 2),$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2}{4 \sqrt[4]{(x^3 - 2x)^3}}.$$

⑪ Calculons la dérivée de $f(x) = \sqrt[5]{(x^2 - 1)^3} :$

$$f(x) = \sqrt[5]{(x^2 - 1)^3} \Leftrightarrow f(x) = (x^2 - 1)^{3/5}.$$

Nous avons : $f'(x) = \frac{3}{5}(x^2 - 1)^{-2/5} \times (2x),$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = \frac{6x}{5 \sqrt[5]{(x^2 - 1)^2}}.$$

⑫ Calculons la dérivée de $f(x) = (x^3 - 4)/(12x^2 - 6x) :$

Nous avons :
$$f'(x) = \frac{(3x^2) \times (12x^2 - 6x) - (x^3 - 4) \times (24x - 6)}{(12x^2 - 6x)^2},$$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = \frac{12x^4 - 12x^3 + 96x - 24}{(12x^2 - 6x)^2}.$$

(13) Calculons la dérivée de $f(x) = [(x^3 - 4)/(12x^2 - 6x)]^3$:

Nous avons :
$$f'(x) = 3 \left(\frac{x^3 - 4}{12x^2 - 6x} \right)^2 \times \left(\frac{12x^4 - 12x^3 + 96x - 24}{(12x^2 - 6x)^2} \right)$$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = \frac{3(x^3 - 4)^2(12x^4 - 12x^3 + 96x - 24)}{(12x^2 - 6x)^4}.$$

(14) Calculons la dérivée de $f(x) = 1/\sqrt[6]{x}$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{x}} \Leftrightarrow f(x) = x^{-1/6}.$$

Nous avons :
$$f'(x) = -\frac{1}{6}x^{-7/6},$$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = -\frac{1}{6\sqrt[6]{x^7}}.$$

(15) Calculons la dérivée de $f(x) = 3/\sqrt[7]{x^2 - 1}$:

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt[7]{x^2 - 1}} \Leftrightarrow f(x) = 3(x^2 - 1)^{-1/7}.$$

Nous avons :
$$f'(x) = -\frac{3}{7}(x^2 - 1)^{-8/7} \times (2x),$$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = -\frac{6x}{7\sqrt[7]{(x^2 - 1)^8}}.$$

(16) Calculons la dérivée de $f(x) = 12/\sqrt[8]{(x^3 - 6)^3}$:

$$f(x) = \frac{12}{\sqrt[8]{(x^3 - 6)^3}} \Leftrightarrow f(x) = 12(x^3 - 6)^{-3/8}.$$

Nous avons :
$$f'(x) = -\frac{36}{8}(x^3 - 6)^{-11/8} \times (3x^2),$$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = -\frac{27x^2}{2^8 \sqrt{(x^3 - 6)^{11}}}.$$

⑪ Calculons la dérivée de

$$f(x) = (12x^3 - 9x^2 + 6) / (\sqrt[9]{(x^4 - 3x^3)^4} + 3x^2) :$$

$$f(x) = \frac{12x^3 - 9x^2 + 6}{\sqrt[9]{(x^4 - 3x^3)^4} + 3x^2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{12x^3 - 9x^2 + 6}{(x^4 - 3x^3)^{4/9} + 3x^2}.$$

Nous avons :

$$f'(x) = \frac{(36x^2 - 18x) \times ((x^4 - 3x^3)^{4/9} + 3x^2)}{((x^4 - 3x^3)^{4/9} + 3x^2)^2} - \frac{(12x^3 - 9x^2 + 6) \times \left(\frac{4}{9} (x^4 - 3x^3)^{-5/9} \times (4x^3 - 9x^2) + 6x \right)}{((x^4 - 3x^3)^{4/9} + 3x^2)^2}.$$

⑫ Calculons la dérivée de $f(x) = 3x^2 \sqrt{x}$:

$$f(x) = 3x^2 \sqrt{x} \Leftrightarrow f(x) = 3x^2 x^{1/2} \Leftrightarrow f(x) = 3x^{5/2}.$$

Nous avons : $f'(x) = \frac{15}{2} x^{3/2},$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = \frac{15}{2} \sqrt{x^3}.$$

⑬ Calculons la dérivée de $f(x) = (6x^3 + 3x) \sqrt[3]{x+1}$:

$$f(x) = (6x^3 + 3x)(x+1)^{1/3}.$$

Nous avons :

$$f'(x) = (18x^2 + 3) \times (x+1)^{1/3} + (6x^3 + 3x) \times \frac{1}{3} (x+1)^{-2/3},$$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = (18x^2 + 3) \sqrt[3]{x+1} + \frac{(2x^3 + x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}.$$

⑭ Calculons la dérivée de $f(x) = 3x^2 \sqrt[4]{(x^6 + 10)^5}$:

$$f(x) = 3x^2 \sqrt[4]{(x^6 + 10)^5} \Leftrightarrow f(x) = 3x^2 (x^6 + 10)^{5/4}.$$

Nous avons :

$$f'(x) = (6x) \times (x^6 + 10)^{5/4} + (3x^2) \times \frac{5}{4}(x^6 + 10)^{1/4} \times (6x^5),$$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = 6x \sqrt[4]{(x^6 + 10)^5} + \frac{45x^7 \sqrt[4]{x^6 + 10}}{2}.$$

②① Calculons la dérivée de $f(x) = (7x^3 - 20)(9x^4 + 10)$:

Nous avons : $f'(x) = (21x^2) \times (9x^4 + 10) + (7x^3 - 20) \times (36x^3)$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = 441x^6 - 720x^3 + 210x^2.$$

②② Calculons la dérivée de $f(x) = (7x^3 - 20)(9x^4 + 10)^2$:

Nous avons :

$$f'(x) = (21x^2) \times (9x^4 + 10)^2 + (7x^3 - 20) \times 2 \times (9x^4 + 10) \times (36x^3).$$

c'est-à-dire :

$$f'(x) = 21x^2(9x^4 + 10)^2 + 72x^3(7x^3 - 20)(9x^4 + 10).$$

②③ Calculons la dérivée de $f(x) = (7x^3 - 20)^9(9x^4 + 10)^2$:

Nous avons :

$$f'(x) = 9 \times (7x^3 - 20)^8 \times (21x^2) \times (9x^4 + 10)^2 + (7x^3 - 20)^9 \times 2 \times (9x^4 + 10) \times (36x^3)$$

c'est-à-dire :

$$f'(x) = 189x^2(7x^3 - 20)^8(9x^4 + 10)^2 + 72x^3(7x^3 - 20)^9(9x^4 + 10).$$

②④ Calculons la dérivée de $f(x) = x^{\sqrt[n]{n}}, n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = x^{\sqrt[n]{n}} \Leftrightarrow f(x) = xx^{1/n} \Leftrightarrow f(x) = x^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}.$$

Nous avons : $f'(x) = \left(\frac{n+1}{n}\right) \times x^{1/n},$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = \left(\frac{n+1}{n}\right) \sqrt[n]{x}.$$

②⑤ Calculons la dérivée de $f(x) = (1 + \sqrt{x})^2 / (1 + (x - 1)^2)$:

$$f(x) = \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{(1 + (x - 1)^2)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{(1 + x^{1/2})^2}{(1 + (x - 1)^2)}.$$

Nous avons :

$$f'(x) = \frac{2(1 + x^{1/2}) \times \left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) \times (1 + (x - 1)^2) - (1 + x^{1/2})^2 \times 2 \times (x - 1)}{(1 + (x - 1)^2)^2},$$

c'est-à-dire :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x})(1 + (x - 1)^2) - 2(1 + \sqrt{x})(x - 1)}{(1 + (x - 1)^2)^2}.$$

②⑥ Calculons la dérivée de $f(x) = (\sqrt{x}) / (\sqrt{x} + (x - 1)^2)$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + (x - 1)^2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^{1/2}}{x^{1/2} + (x - 1)^2}.$$

Nous avons :

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) \times (x^{1/2} + (x - 1)^2) - (x^{1/2})\left(\frac{1}{2}x^{-1/2} + 2(x - 1)\right)}{(x^{1/2} + (x - 1)^2)^2},$$

c'est-à-dire :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^{-1/2}(x - 1)^2 - \frac{1}{2} - 2x^{1/2}(x - 1)}{(x^{1/2} + (x - 1)^2)^2}$$

c'est-à-dire :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x - 1)^2 - 2\sqrt{x}(x - 1)}{(x^{1/2} + (x - 1)^2)^2}.$$

②⑦ Calculons la dérivée de $f(x) = (3 + \sqrt{x}) / (x + 1)^{3/2}$:

$$f(x) = \frac{3 + \sqrt{x}}{(x + 1)^{3/2}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{3 + x^{1/2}}{(x + 1)^{3/2}}.$$

Nous avons :

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) \times (x+1)^{3/2} - (3+x^{1/2}) \times \frac{3}{2} \times (x+1)^{1/2}}{(x+1)^3},$$

c'est-à-dire :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(x+1)^{3/2} - 3(3+\sqrt{x})(x+1)^{1/2}}{2(x+1)^3}.$$

②⑧ Calculons la dérivée de $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$:

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x}} \Leftrightarrow f(x) = (x^{1/2})^{1/2}.$$

Nous avons :

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^{1/2})^{-1/2} \times \frac{1}{2} \times (x)^{-1/2},$$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = \frac{1}{4(\sqrt{\sqrt{x}} \sqrt{x})}.$$

②⑨ Calculons la dérivée de $f(x) = \sqrt{(x-1)^2(x+2)}$:

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2(x+2)} \Leftrightarrow f(x) = ((x-1)^2(x+2))^{1/2}.$$

Nous avons :

$$f'(x) = \frac{1}{2}((x-1)^2(x+2))^{-1/2} \times (2 \times (x-1) \times (x+2) + (x-1)^2)$$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+2) + (x-1)^2}{2\sqrt{(x-1)^2(x+2)}}.$$

③⑩ Calculons la dérivée de $f(x) = \text{Log}(|x|)$:

Nous avons :
$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

③⑪ Calculons la dérivée de $f(x) = \text{Log}(\text{Log}(x))$:

Nous avons :
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\text{Log}(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\text{Log}(x)}.$$

③② Calculons la dérivée de $f(x) = x \text{Log}|x+3|$:

Nous avons : $f'(x) = (1) \times \text{Log}|x+3| + (x) \times \left(\frac{1}{x+3}\right),$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = \text{Log}|x+3| + \frac{x}{x+3}.$$

③③ Calculons la dérivée de $f(x) = (x + \text{Log}(x^2 + 12))^n$:

Nous avons :
$$f'(x) = n(x + \text{Log}(x^2 + 12))^{(n-1)} \times \left(1 + \frac{2x}{x^2 + 12}\right).$$

③④ Calculons la dérivée de $f(x) = \text{Log}\left[\frac{|x(2x-1)|}{|x+3|}\right]$:

$$f(x) = \text{Log}\left[\frac{|x(2x-1)|}{|x+3|}\right] \Leftrightarrow f(x) = \text{Log}|x| + \text{Log}|2x-1| - \text{Log}|x+3|.$$

Nous avons :
$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+3}.$$

③⑤ Calculons la dérivée de $f(x) = (x^3)/\text{Log}x$:

Nous avons :
$$f'(x) = \frac{(3x^2) \times \text{Log}x - (x^3) \times \frac{1}{x}}{(\text{Log}x)^2},$$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = \frac{3x^2 \text{Log}x - x^2}{(\text{Log}x)^2}.$$

③⑥ Calculons la dérivée de $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow f(x) = e^{\text{Log}(a^x)} \Leftrightarrow f(x) = e^{x \text{Log}a}.$$

Nous avons : $f'(x) = (\text{Log}a) \times (e^{x \text{Log}a}),$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = (\text{Log}a)a^x.$$

③⑦ Calculons la dérivée de $f(x) = x^x$:

$$f(x) = x^x \Leftrightarrow f(x) = e^{\text{Log}(x^x)} \Leftrightarrow f(x) = e^{x \text{Log}x}.$$

Nous avons : $f'(x) = \left(1 \times \text{Log } x + x \times \frac{1}{x}\right) \times (e^{x \text{Log } x})$,

c'est-à-dire : $f'(x) = (\text{Log } x + 1)x^x$.

③⑧ Calculons la dérivée de $f(x) = x^n e^{ax}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$

Nous avons : $f'(x) = (nx^{(n-1)}) \times (e^{ax}) + (x^n) \times (ae^{ax})$,

c'est-à-dire : $f'(x) = (nx^{(n-1)} + ax^n)e^{ax}$.

③⑨ Calculons la dérivée de $f(x) = x^2 e^{1/x}$:

Nous avons : $f'(x) = (2x) \times (e^{1/x}) + (x^2) \times \left(-\frac{1}{x^2} e^{1/x}\right)$,

c'est-à-dire : $f'(x) = (2x - 1)e^{1/x}$.

④① Calculons la dérivée de $f(x) = \text{Log}(xe^x + 3)$:

Nous avons : $f'(x) = \frac{(1) \times (e^x) + (x) \times e^x}{xe^x + 3}$,

c'est-à-dire : $f'(x) = \frac{(1+x)e^x}{xe^x + 3}$.

④① Calculons la dérivée de $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \Leftrightarrow f(x) = e^{\text{Log}\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]} \Leftrightarrow f(x) = e^{x \text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

Nous avons :

$$f'(x) = \left[(1) \times \left(\text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) + (x) \times \left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}\right) \right] e^{x \text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)},$$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = \left[\text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Calculons la dérivée de $f(x) = e^{x^2 + 10x - 5}$:

Nous avons :
$$f'(x) = (2x + 10)e^{x^2 + 10x - 5}.$$

Calculons la dérivée de $f(x) = e^{\sqrt{3x-6}}$:

$$f(x) = e^{\sqrt{3x-6}} \Leftrightarrow f(x) = e^{(3x-6)^{1/2}}.$$

Nous avons :
$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x-6)^{-1/2} \times (3) \times e^{(3x-6)^{1/2}},$$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = \frac{3e^{\sqrt{3x-6}}}{2\sqrt{3x-6}}.$$

Calculons la dérivée de $f(x) = e^{\sqrt[3]{12x^5-7}}$:

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{12x^5-7}} \Leftrightarrow f(x) = e^{(12x^5-7)^{1/3}}.$$

Nous avons :
$$f'(x) = \frac{1}{3}(12x^5-7)^{-2/3} \times (60x^4) \times e^{(12x^5-7)^{1/3}},$$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = \frac{20x^4 e^{\sqrt[3]{12x^5-7}}}{\sqrt[3]{(12x^5-7)^2}}.$$

Calculons la dérivée de $f(x) = x^{\sqrt{x}}$:

$$f(x) = x^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow f(x) = x^{x^{1/2}} \Leftrightarrow f(x) = e^{\text{Log}(x^{x^{1/2}})} \quad (\text{a})$$

$$(\text{a}) \Leftrightarrow f(x) = e^{x^{1/2} \text{Log} x}.$$

Nous avons :

$$f'(x) = \left[\left(\frac{1}{2}x^{-1/2} \right) \times (\text{Log} x) + (x^{1/2}) \times \left(\frac{1}{x} \right) \right] e^{x^{1/2} \text{Log} x},$$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = \left[\frac{\log x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right] x^{\sqrt{x}}.$$

④⑥ Calculons la dérivée de $f(x) = \sin^2(3x^2 - 10)$:

$$f(x) = \sin^2(3x^2 - 10) \Leftrightarrow f(x) = [\sin(3x^2 - 10)]^2.$$

Nous avons :

$$f'(x) = (2[\sin(3x^2 - 10)]) \times (6x) \times (\cos(3x^2 - 10)),$$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = 12x(\sin(3x^2 - 10))(\cos(3x^2 - 10)).$$

④⑦ Calculons la dérivée de $f(x) = \sin^3(9x^2 - 6x)$:

$$f(x) = \sin^3(9x^2 - 6x) \Leftrightarrow f(x) = [\sin(9x^2 - 6x)]^3.$$

Nous avons :

$$f'(x) = (3[\sin(9x^2 - 6x)]^2) \times (18x - 6) \times (\cos(9x^2 - 6x)),$$

c'est-à-dire :
$$f'(x) = (54x - 18)(\sin(9x^2 - 6x))^2(\cos(9x^2 - 6x))$$

④⑧ Calculons la dérivée de $f(x) = \cos^4(6x^3 - 12x)^2$:

$$f(x) = \cos^4(6x^3 - 12x)^2 \Leftrightarrow f(x) = [\cos(6x^3 - 12x)^2]^4.$$

Nous avons :

$$f'(x) = (4[\cos(6x^3 - 12x)^2]^3) \times (-2) \times (6x^3 - 12x) \times (18x^2 - 12) \times (\sin(6x^3 - 12x)^2)$$

c'est-à-dire :

$$f'(x) = -8[\cos(6x^3 - 12x)^2]^3 \times (6x^3 - 12x) \times (18x^2 - 12) \times (\sin(6x^3 - 12x)^2).$$

④⑨ Calculons la dérivée de $f(x) = \cos(e^{3x^3})$:

Nous avons :
$$f'(x) = -9x^2 e^{3x^3} \sin(e^{3x^3}).$$

⑤⑩ Calculons la dérivée de $f(x) = \tan^2 x$:

$$f(x) = \tan^2 x \Leftrightarrow f(x) = [\tan x]^2.$$

Nous avons : $f'(x) = ([2(\tan x)]) \times (1 + \tan^2 x)$,

c'est-à-dire : $f'(x) = 2(\tan x + \tan^3 x)$.

Calculons la dérivée de $f(x) = \cotan^3 x$:

$$f(x) = \cotan^3 x \Leftrightarrow f(x) = [\cotan x]^3.$$

Nous avons : $f'(x) = ([3(\cotan x)]^2) \times (-1 - \cotan^2 x)$,

c'est-à-dire : $f'(x) = -3(\cotan^2 x + \cotan^4 x)$.

EXERCICE n° 25

ONCÉ :

À partir de l'exercice précédent, calculer la dérivée seconde des fonctions suivantes :

$$f(x) = 9x^3 + 12x^2 + 24.$$

$$f(x) = (6x^4 - 3x^2)^9.$$

$$f(x) = \sqrt{6x^2 + 12x - 1}.$$

$$f(x) = \sqrt[4]{x^3 - 2x}.$$

$$f(x) = \sqrt[5]{(x^2 - 1)^3}.$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}.$$

$$\textcircled{7} f(x) = \frac{12}{\sqrt[8]{(x^3 - 6)^3}}.$$

$$\textcircled{8} f(x) = (6x^3 + 3x)^{\sqrt[3]{x}}.$$

$$\textcircled{9} f(x) = 3x^2 \sqrt{x}.$$

$$\textcircled{10} f(x) = x^{\sqrt[n]{x}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\textcircled{11} f(x) = \tan^2 x.$$

$$\textcircled{12} f(x) = \sqrt{\sqrt{x}}.$$

$$\textcircled{13} f(x) = \text{Log}(|x|).$$

$$\textcircled{14} f(x) = \text{Log}(\text{Log}(x)).$$

$$\textcircled{15} f(x) = x \text{Log}|x + 3|.$$

$$\textcircled{16} f(x) = \frac{x^3}{\text{Log } x}.$$

$$\textcircled{17} f(x) = a^x, \quad a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$$

$$\textcircled{18} f(x) = x^x.$$

$$\textcircled{19} f(x) = x^2 e^{1/x}.$$

$$\textcircled{20} f(x) = e^{x^2 + 10x - 5}.$$

$$\textcircled{21} f(x) = e^{\sqrt[3]{12x^5 - 7}}.$$

CORRIGÉ :

- ① **Calculons la dérivée seconde de $f(x) = 9x^3 + 12x^2 + 24$:**

Nous savons que : $f'(x) = 27x^2 + 24x$;

d'où : $f''(x) = 54x + 24$.

- ② **Calculons la dérivée seconde de $f(x) = (6x^4 - 3x^2)^9$:**

Nous savons que : $f'(x) = 9(6x^4 - 3x^2)^8(24x^3 - 6x)$;

d'où :

$$f''(x) = 72(6x^4 - 3x^2)^7(24x^3 - 6x)^2 + 9(6x^4 - 3x^2)^8(72x^2 - 6)$$

- ③ **Calculons la dérivée seconde de $f(x) = \sqrt{6x^2 + 12x - 1}$:**

Nous savons que :

$$f'(x) = \frac{6x + 6}{\sqrt{6x^2 + 12x - 1}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{6x + 6}{(6x^2 + 12x - 1)^{1/2}} ;$$

$$\text{d'où : } f''(x) = \frac{(6) \times (6x^2 + 12x - 1)^{1/2}}{(6x^2 + 12x - 1)}$$

$$- \frac{(6x + 6) \times \left(\frac{1}{2} (6x^2 + 12x - 1)^{-1/2} \times (12x + 12) \right)}{(6x^2 + 12x - 1)},$$

c'est-à-dire :

$$f''(x) = \frac{6\sqrt{6x^2 + 12x - 1} - (6x + 6)^2 \times \frac{1}{\sqrt{6x^2 + 12x - 1}}}{(6x^2 + 12x - 1)}$$

- ④ **Calculons la dérivée seconde de $f(x) = \sqrt[4]{x^3 - 2x}$:**

$$\text{Nous savons que : } f'(x) = \frac{3x^2 - 2}{4\sqrt[4]{(x^3 - 2x)^3}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(3x^2 - 2)}{4(x^3 - 2x)^{3/4}} ;$$

$$\text{d'où : } f''(x) = \frac{(6x) \times (4(x^3 - 2x)^{3/4})}{16(x^3 - 2x)^{3/2}}$$

$$- \frac{(3x^2 - 2) \times (3(x^3 - 2x)^{-1/4} \times (3x^2 - 2))}{16(x^3 - 2x)^{3/2}}$$

$$\text{c'est-à-dire : } f''(x) = \frac{24x \sqrt[4]{(x^3 - 2x)^3} - 3(3x^2 - 2)^2 \times \frac{1}{\sqrt[4]{x^3 - 2x}}}{16\sqrt{(x^3 - 2x)^3}}$$

⑤ Calculons la dérivée seconde de $f(x) = \sqrt[5]{(x^2 - 1)^3}$:

$$\text{Nous savons que : } f'(x) = \frac{6x}{5 \sqrt[5]{(x^2 - 1)^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{6x}{5(x^2 - 1)^{2/5}}$$

$$\text{d'où } f''(x) = \frac{(6) \times (5(x^2 - 1)^{2/5}) - (6x) \times (2(x^2 - 1)^{-3/5} \times (2x))}{25(x^2 - 1)^{4/5}}$$

$$\text{c'est-à-dire : } f''(x) = \frac{30 \sqrt[5]{(x^2 - 1)^2} - 24x^2 \times \frac{1}{\sqrt[5]{(x^2 - 1)^3}}}{25 \sqrt[5]{(x^2 - 1)^4}}$$

⑥ Calculons la dérivée seconde de $f(x) = 1/(\sqrt[6]{x})$:

$$\text{Nous savons que : } f'(x) = \frac{-1}{6 \sqrt[6]{x^7}} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{6}x^{-7/6};$$

$$\text{d'où : } f''(x) = \frac{7}{36}x^{-13/6},$$

$$\text{c'est-à-dire : } f''(x) = \frac{7}{36 \sqrt[6]{x^{13}}}$$

⑦ Calculons la dérivée seconde de $f(x) = \frac{12}{\sqrt[8]{(x^3 - 6)^3}}$:

$$\text{Nous savons que : } f'(x) = \frac{-27x^2}{2 \sqrt[8]{(x^3 - 6)^{11}}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-27x^2}{2(x^3 - 6)^{11/8}}$$

d'où :

$$f''(x) = \frac{(-54x) \times (2(x^3 - 6)^{11/8}) - (-27x^2) \times \left(\frac{11}{4}(x^3 - 6)^{3/8} \times (3x^2) \right)}{4(x^3 - 6)^{11/4}},$$

$$\text{c'est-à-dire : } f''(x) = \frac{-108x(x^3 - 6)^{11/8} + \frac{891}{4}x^4(x^3 - 6)^{3/8}}{4(x^3 - 6)^{11/4}},$$

$$\text{c'est-à-dire : } f''(x) = \frac{-108x \sqrt[8]{(x^3 - 6)^{11}} + \frac{891}{4}x^4 \sqrt[8]{(x^3 - 6)^3}}{4 \sqrt[4]{(x^3 - 6)^{11}}}.$$

⑧ Calculons la dérivée seconde de $f(x) = (6x^3 + 3x) \sqrt[3]{x+1}$:

$$\text{Nous savons que : } f'(x) = (18x^2 + 3) \sqrt[3]{x+1} + \frac{(2x^3 + x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \quad (\text{a})$$

$$(\text{a}) \Leftrightarrow f'(x) = (18x^2 + 3)(x+1)^{1/3} + \frac{(2x^3 + x)}{(x+1)^{2/3}};$$

$$\text{d'où : } f''(x) = (36x) \times (x+1)^{1/3} + (18x^2 + 3) \times \left(\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3} \right)$$

$$+ \frac{(6x^2 + 1) \times (x+1)^{2/3} - (2x^3 + x) \times \left(\frac{2}{3}(x+1)^{-1/3} \right)}{(x+1)^{4/3}}$$

c'est-à-dire :

$$f''(x) = 36x \sqrt[3]{x+1} + \frac{6x^2 + 1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} + \frac{(6x^2 + 1) \sqrt[3]{(x+1)^2} - \frac{2(2x^3 + x)}{3} \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}.$$

⑨ Calculons la dérivée seconde de $f(x) = 3x^2 \sqrt{x}$:

Nous savons que :

$$f'(x) = \frac{15}{2} \sqrt{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{15}{2} x^{3/2};$$

$$\text{d'où : } f''(x) = \frac{45}{4} x^{1/2};$$

c'est-à-dire : $\boxed{f''(x) = \frac{45}{4}\sqrt{x}}.$

⑩ Calculons la dérivée seconde de $f(x) = x^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}$, $n \in \mathbb{N}$:

Nous savons que : $f'(x) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sqrt{x} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{n+1}{n}\right)x^{1/n}$

d'où : $f''(x) = \left(\frac{n+1}{n^2}\right)x^{\left(\frac{1-n}{n}\right)},$

c'est-à-dire : $\boxed{f''(x) = \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n \sqrt{x^{(1-n)}}}.$

⑪ Calculons la dérivée seconde de $f(x) = \tan^2 x$:

Nous savons que :

$f'(x) = 2(\tan x + \tan^3 x) \Leftrightarrow f'(x) = 2 \tan x + 2[\tan x]^3 ;$

d'où : $f''(x) = 2(1 + \tan^2 x) + 6[\tan x]^2 \times (1 + \tan^2 x),$

c'est-à-dire : $\boxed{f''(x) = 6 \tan^4 x + 8 \tan^2 x + 2}.$

⑫ Calculons la dérivée seconde de $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$:

Nous savons : $f'(x) = \frac{1}{4(\sqrt{\sqrt{x}}\sqrt{x})} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(x^{1/2})^{-1/2}x^{-1/2}}{4} ;$

d'où :

$$f''(x) = \frac{\left(-\frac{1}{2}(x^{1/2})^{-3/2} \times \left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)\right) \times (x^{-1/2}) + ((x^{1/2})^{-1/2}) \times \left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)}{4}$$

c'est-à-dire :

$$f''(x) = \frac{\left(-\frac{1}{4}(x^{1/2})^{-3/2} \times (x^{-1/2})\right) \times (x^{-1/2}) + \left(-\frac{1}{2}(x^{1/2})^{-1/2} \times (x^{-3/2})\right)}{4},$$

c'est-à-dire :

$$f''(x) = \frac{\left(-\frac{1}{4}(x^{1/2})^{-3/2} \times (x)^{-1}\right) + \left(-\frac{1}{2}(x^{1/2})^{-1/2}(x^{-3/2})\right)}{4},$$

$$\text{c'est-à-dire : } f''(x) = \frac{\frac{-1}{4x\sqrt{\sqrt{x^3}}} - \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}}\sqrt{x^3}}}{4}.$$

⑬ **Calculons la dérivée seconde de $f(x) = \text{Log}|x|$:**

$$\text{Nous savons que : } f'(x) = \frac{1}{x};$$

$$\text{d'où : } f''(x) = \frac{-1}{x^2}.$$

⑭ **Calculons la dérivée seconde de $f(x) = \text{Log}(\text{Log}(x))$:**

$$\text{Nous savons que : } f'(x) = \frac{1}{x\text{Log}(x)};$$

$$\text{d'où : } f''(x) = \frac{-(1) \times \left((1) \times (\text{Log}x) + (x) \times \left(\frac{1}{x}\right)\right)}{(x\text{Log}x)^2},$$

$$\text{c'est-à-dire : } f''(x) = \frac{-(\text{Log}x + 1)}{(x\text{Log}x)^2}.$$

⑮ **Calculons la dérivée seconde de $f(x) = x\text{Log}|x+3|$:**

$$\text{Nous savons que : } f'(x) = \text{Log}|x+3| + \frac{x}{x+3};$$

$$\text{d'où : } f''(x) = \left(\frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{(1) \times (x+3) - (x) \times (1)}{(x+3)^2}\right),$$

$$\text{c'est-à-dire : } f''(x) = \frac{1}{x+3} + \frac{3}{(x+3)^2}.$$

⑯ **Calculons la dérivée seconde de $f(x) = (x^3)/\text{Log}x$:**

$$\text{Nous savons que : } f'(x) = \frac{3x^2\text{Log}x - x^2}{(\text{Log}x)^2};$$

$$\text{d'où : } f''(x) = \frac{\left((6x) \times (\text{Log}x) + (3x^2) \times \left(\frac{1}{x}\right) - (2x) \right) \times (\text{Log}x)^2}{(\text{Log}x)^4} - \frac{(3x^2 \text{Log}x - x^2) \times \left(2(\text{Log}x) \times \left(\frac{1}{x}\right) \right)}{(\text{Log}x)^4}$$

c'est-à-dire :

$$f''(x) = \frac{(6x \text{Log}x + x)(\text{Log}x)^2 - (6x(\text{Log}x)^2 - 2x \text{Log}x)}{(\text{Log}x)^4},$$

$$\text{c'est-à-dire : } f''(x) = \frac{(6x \text{Log}x + x)(\text{Log}x) - (6x \text{Log}x - 2x)}{(\text{Log}x)^3},$$

$$\text{c'est-à-dire : } f''(x) = \frac{6x(\text{Log}x)^2 - 5x \text{Log}x + 2x}{(\text{Log}x)^3}.$$

⑪ Calculons la dérivée seconde de $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

Nous savons que : $f'(x) = (\text{Log}a) \times (e^{x \text{Log}a})$;

d'où : $f''(x) = (\text{Log}a)^2 \times (e^{x \text{Log}a})$,

$$\text{c'est-à-dire : } f''(x) = (\text{Log}a)^2 a^x.$$

⑫ Calculons la dérivée seconde de $f(x) = x^x$:

Nous savons que :

$$f'(x) = (\text{Log}x + 1)x^x \Leftrightarrow f'(x) = (\text{Log}x + 1) \times (e^{x \text{Log}x}) ;$$

d'où : $f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right) \times (e^{x \text{Log}x}) + (\text{Log}x + 1) \times (\text{Log}x + 1) \times (e^{x \text{Log}x})$

$$\text{c'est-à-dire : } f''(x) = \left[\frac{1}{x} + (\text{Log}x + 1)^2 \right] x^x.$$

⑬ Calculons la dérivée seconde de $f(x) = x^2 e^{1/x}$:

Nous savons que : $f'(x) = (2x - 1)e^{1/x}$;

d'où : $f''(x) = (2) \times (e^{1/x}) + (2x - 1) \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) \times (e^{1/x})$,

c'est-à-dire :
$$f''(x) = \left(\frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2} \right) (e^{1/x}).$$

(20) Calculons la dérivée seconde de $f(x) = e^{x^2 + 10x - 5}$:

Nous savons que : $f'(x) = (2x + 10)e^{x^2 + 10x - 5}$;

d'où :

$$f''(x) = (2) \times (e^{x^2 + 10x - 5}) + (2x + 10) \times (2x + 10) \times (e^{x^2 + 10x - 5}),$$

c'est-à-dire :
$$f''(x) = [2 + (2x + 10)^2]e^{x^2 + 10x - 5}.$$

(21) Calculons la dérivée seconde de $f(x) = e^{\sqrt[3]{12x^5 - 7}}$:

Nous savons que :

$$f'(x) = \frac{20x^4 e^{\sqrt[3]{12x^5 - 7}}}{\sqrt[3]{(12x^5 - 7)^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{20x^4 e^{(12x^5 - 7)^{1/3}}}{(12x^5 - 7)^{2/3}} ;$$

d'où :

$$f''(x) = \frac{\left((80x^3) \times (e^{(12x^5 - 7)^{1/3}}) + (20x^4) \times \left(\frac{20x^4 e^{(12x^5 - 7)^{1/3}}}{(12x^5 - 7)^{2/3}} \right) \right) \times ((12x^5 - 7)^{2/3})}{(12x^5 - 7)^{4/3}} - \frac{(20x^4 e^{(12x^5 - 7)^{1/3}}) \times \left(\frac{2}{3} (12x^5 - 7)^{-1/3} \times (60x^4) \right)}{(12x^5 - 7)^{4/3}},$$

c'est-à-dire :

$$f''(x) = \frac{(80x^3) \times (e^{(12x^5 - 7)^{1/3}}) + (400x^8) \times (e^{(12x^5 - 7)^{1/3}})}{(12x^5 - 7)^{4/3}} - \frac{(800x^8) \times (e^{(12x^5 - 7)^{1/3}}) \times (12x^5 - 7)^{-1/3}}{(12x^5 - 7)^{4/3}},$$

c'est-à-dire :

$$f''(x) = \frac{[80x^3 + 400x^8 - 800x^8 (12x^5 - 7)^{-1/3}] e^{\sqrt[3]{12x^5 - 7}}}{\sqrt[3]{(12x^5 - 7)^4}}.$$

ÉNONCÉ :

- ① Soit $y = f(x)$ une fonction numérique d'une variable réelle, quelle est l'expression de la différentielle partielle de y par rapport à x ?
- ② Comment s'écrit alors la différentielle totale de f ?
- ③ Si $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, déterminer la différentielle totale de y .

CORRIGÉ :

- ① Soit $y = f(x)$ une fonction numérique d'une variable réelle, déterminons la différentielle partielle de y par rapport à x :

Si $y = f(x)$ est une fonction numérique d'une variable réelle, la différentielle partielle de y par rapport à x s'écrit :

$$\boxed{y'_x = \frac{\delta y}{\delta x}} \quad \text{ou} \quad \boxed{f'_x = \frac{\delta f}{\delta x}}.$$

Il s'agit en fait de la dérivée de f par rapport à x .

- ② Écrivons la différentielle totale de f :

La différentielle totale de f s'écrit :

$$\boxed{dy = \frac{\delta y}{\delta x} \cdot dx} \quad \text{ou} \quad \boxed{df = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot dx}.$$

- ③ Si $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, déterminons la différentielle totale de y :

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une fonction à plusieurs variables et plus exactement à n variables.

Dans ce cas, la différentielle totale de y s'écrit :

$$dy = \frac{\delta y}{\delta x_1} \cdot dx_1 + \frac{\delta y}{\delta x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\delta y}{\delta x_n} \cdot dx_n ,$$

$$\text{ou : } df = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot dx_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot dx_n .$$

Il est bon de noter que :

- $\frac{\delta y}{\delta x_1}$ ou $\frac{\delta f}{\delta x_1}$ est la différentielle partielle de y ou f par rapport à x_1 , c'est-à-dire la dérivée de f par rapport à x_1 .
- $\frac{\delta y}{\delta x_2}$ ou $\frac{\delta f}{\delta x_2}$ est la différentielle partielle de y ou f par rapport à x_2 , c'est-à-dire la dérivée de f par rapport à x_2 .
- ...
- $\frac{\delta y}{\delta x_n}$ ou $\frac{\delta f}{\delta x_n}$ est la différentielle partielle de y ou f par rapport à x_n , c'est-à-dire la dérivée de f par rapport à x_n .

Enfin, il est bon de remarquer que lorsqu'on calcule la différentielle partielle d'une fonction à plusieurs variables par rapport à l'une d'elles, il faut considérer que les autres variables sont fixées et qu'elles interviennent dans les calculs au même titre qu'une constante.

EXERCICE n° 27

ÉNONCÉ :

Soient $y = f(x)$ et $z = g(x)$ deux fonctions dérivables en tout point x d'un intervalle.

Quelles sont les propriétés des différentielles totales ?

CORRIGÉ :

Déterminons les propriétés des différentielles totales :

Soient $y = f(x)$ et $z = g(x)$ deux fonctions dérivables en tout point x d'un intervalle. Elles admettent alors pour tout x de cet intervalle des différentielles totales df et dg qui vérifient :

- (a) $d(f + g) = df + dg$;
- (b) $d(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot df, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- (c) $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$;
- (d) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$, avec $g \neq 0$.

Il est bon de noter que ces propriétés restent valables si nous sommes en présence de deux fonctions à plusieurs variables.

 EXERCICE n° 28

ÉNONCÉ :

- ① Soit $z = f[x(u), y(u)]$, calculer la différentielle totale de z ainsi que la dérivée (ou différentielle partielle) de z par rapport à u .
- ② Soit $z = f[x(u, v), y(u, v)]$, calculer les différentielles partielles $\frac{\delta z}{\delta u}$ et $\frac{\delta z}{\delta v}$.
- ③ Soit $z = f(x, y)$ avec $f(x, y) = 3xy$, $x = u^2 + v^2$ et $y = 6u^2 - 9v^2$, calculer $\frac{\delta z}{\delta u}$ et $\frac{\delta z}{\delta v}$ par deux méthodes différentes.

CORRIGÉ :

- ① **Calculons la différentielle totale de z ainsi que la différentielle partielle de z par rapport à u :**

- ① ***La différentielle totale de z :***

Nous savons que : $z = f[x(u), y(u)]$.

Dans ces conditions nous avons : $dz = \frac{\delta z}{\delta x} dx + \frac{\delta z}{\delta y} dy$,

$$\text{ou } dz = z'_x dx + z'_y dy,$$

$$\text{ou } dz = \frac{\delta f}{\delta x} dx + \frac{\delta f}{\delta y} dy,$$

$$\text{ou } dz = f'_x dx + f'_y dy.$$

- ② ***La différentielle partielle de z par rapport à u :***

Nous avons :
$$\frac{\delta z}{\delta u} = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta u} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta u}.$$

- ② **Calculons les différentielles partielles $\delta z / \delta u$ et $\delta z / \delta v$:**

Nous savons que : $z = f[x(u, v), y(u, v)]$.

Dans ces conditions nous avons :
$$\frac{\delta z}{\delta u} = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta u} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta u},$$

et :
$$\frac{\delta z}{\delta v} = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta v} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta v}.$$

- ③ **Calculons $\delta z / \delta u$ et $\delta z / \delta v$ par deux méthodes différentes :**

Nous savons que : $z = f(x, y)$ avec $f(x, y) = 3xy$, $x = u^2 + v^2$ et $y = 6u^2 - 9v^2$.

1^{ère} méthode :

Nous allons remplacer x et y par leur valeur et calculer directement les différentielles partielles $\delta z / \delta u$ et $\delta z / \delta v$.

Nous avons donc :

$$z = f(x, y) \Leftrightarrow z = 3xy \Leftrightarrow z = 3(u^2 + v^2)(6u^2 - 9v^2) \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow z = 18u^4 - 27v^4 - 9u^2v^2.$$

Dans ces conditions nous avons :

$$\frac{\delta z}{\delta u} = 72u^3 - 18uv^2,$$

et :

$$\frac{\delta z}{\delta v} = -108v^3 - 18u^2v.$$

2^e méthode :

Nous allons appliquer directement les formules de la seconde question.

Nous savons que :

$$\frac{\delta z}{\delta u} = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta u} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta u},$$

et :

$$\frac{\delta z}{\delta v} = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta v} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta v}.$$

Application numérique :

$$\frac{\delta z}{\delta u} = (3y) \cdot (2u) + (3x) \cdot (12u) \quad (2),$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\delta z}{\delta u} = (3[6u^2 - 9v^2]) \cdot (2u) + (3[u^2 + v^2]) \cdot (12u) \quad (3),$$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{\delta z}{\delta u} = 72u^3 - 18uv^2.$$

De plus,

$$\frac{\delta z}{\delta v} = (3y) \cdot (2v) + (3x) \cdot (-18v) \quad (4),$$

$$(4) \Leftrightarrow \frac{\delta z}{\delta v} = (3[6u^2 - 9v^2]) \cdot (2v) + (3[u^2 + v^2]) \cdot (-18v) \quad (5),$$

$$(5) \Leftrightarrow \frac{\delta z}{\delta v} = -108v^3 - 18u^2v.$$

EXERCICE n° 29

ÉNONCÉ :

Soient $y = f(x_1, x_2, x_3)$ une fonction à plusieurs variables et x_1, x_2, x_3 les variables explicatives.

Calculer les différentes différentielles partielles et en déduire la différentielle totale de y dans les cas suivants :

$$\textcircled{1} \quad y = 3x_1x_2 - x_3^3.$$

$$\textcircled{2} \quad y = 6x_1x_2^2x_3^3 - 4x_1x_2.$$

$$\textcircled{3} \quad y = \sqrt{x_3x_2} - \sqrt{x_1^3}.$$

$$\textcircled{4} \quad y = \sqrt[3]{x_1x_2^2x_3}.$$

$$\textcircled{5} \quad y = \text{Log}(x_1^2x_2) + x_1x_3.$$

$$\textcircled{6} \quad y = \text{Log}(x_3^3) \times (3x_1x_2).$$

$$\textcircled{7} \quad y = e^{(x_1x_2^9)} \times x_3.$$

$$\textcircled{8} \quad y = \frac{x_3^3x_2^2 - x_1}{x_3x_1}.$$

$$\textcircled{9} \quad y = \frac{6x_2^2}{x_3x_1^6}.$$

$$\textcircled{10} \quad y = \frac{\text{Log}(x_3^2)}{3x_1x_2}.$$

$$\textcircled{11} \quad y = \frac{e^{(x_1x_3^9)} \times x_2}{x_3}.$$

$$\textcircled{12} \quad y = \frac{e^{(x_1^2)} \times \text{Log}(x_3x_1)}{x_2^3}.$$

CORRIGÉ :

① Calculons les différentes différentielles partielles et déduisons-en la différentielle totale de y si $y = 3x_1x_2 - x_3^3$:

- La différentielle partielle de y par rapport à x_1 est : $\frac{\delta y}{\delta x_1} = 3x_2$.

- La différentielle partielle de y par rapport à x_2 est : $\frac{\delta y}{\delta x_2} = 3x_1$.

- La différentielle partielle de y par rapport à x_3 est : $\frac{\delta y}{\delta x_3} = -3x_3^2$.

- D'où la différentielle totale de y s'écrit :

$$dy = \frac{\delta y}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta y}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta y}{\delta x_3} dx_3,$$

c'est-à-dire : $dy = (3x_2) dx_1 + (3x_1) dx_2 + (-3x_3^2) dx_3$.

② Calculons les différentes différentielles partielles et déduisons-en la différentielle totale de y si $y = 6x_1x_2^2x_3^3 - 4x_1x_2$:

- La différentielle partielle de y par rapport à x_1 est :

$$\frac{\delta y}{\delta x_1} = 6x_2^2x_3^3 - 4x_2.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_2 est :

$$\frac{\delta y}{\delta x_2} = 12x_1x_2x_3^3 - 4x_1.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_3 est :

$$\frac{\delta y}{\delta x_3} = 18x_1x_2^2x_3^2.$$

- D'où la différentielle totale de y s'écrit :

$$dy = \frac{\delta y}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta y}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta y}{\delta x_3} dx_3,$$

c'est-à-dire :

$$dy = (6x_2^2x_3^3 - 4x_2) dx_1 + (12x_1x_2x_3^3 - 4x_1) dx_2 + (18x_1x_2^2x_3^2) dx_3.$$

③ Calculons les différentes différentielles partielles et déduisons-en la différentielle totale de y si $y = \sqrt{x_3 x_2} - \sqrt{x_1^3}$:

$$y = \sqrt{x_3 x_2} - \sqrt{x_1^3} \Leftrightarrow y = (x_3 x_2)^{1/2} - x_1^{3/2}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_1 est :

$$\boxed{\frac{\delta y}{\delta x_1} = -\frac{3}{2}x_1^{1/2}}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_2 est :

$$\boxed{\frac{\delta y}{\delta x_2} = \frac{1}{2}(x_3 x_2)^{-1/2} \times x_3}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_3 est :

$$\boxed{\frac{\delta y}{\delta x_3} = \frac{1}{2}(x_3 x_2)^{-1/2} \times x_2}.$$

- D'où la différentielle totale de y s'écrit :

$$dy = \frac{\delta y}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta y}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta y}{\delta x_3} dx_3,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{dy = \left(-\frac{3}{2}x_1^{1/2}\right)dx_1 + \left(\frac{1}{2}(x_3 x_2)^{-1/2} \times x_3\right)dx_2 + \left(\frac{1}{2}(x_3 x_2)^{-1/2} \times x_2\right)dx_3}.$$

④ Calculons les différentes différentielles partielles et déduisons-en la différentielle totale de y si $y = \sqrt[3]{x_1 x_2^2 x_3}$:

$$y = \sqrt[3]{x_1 x_2^2 x_3} \Leftrightarrow y = (x_1 x_2^2 x_3)^{1/3}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_1 est :

$$\boxed{\frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{1}{3}(x_1 x_2^2 x_3)^{-2/3} \times x_2^2 x_3}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_2 est :

$$\boxed{\frac{\delta y}{\delta x_2} = \frac{2}{3}(x_1 x_2^2 x_3)^{-2/3} \times x_1 x_2 x_3}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_3 est :

$$\boxed{\frac{\delta y}{\delta x_3} = \frac{1}{3}(x_1 x_2^2 x_3)^{-2/3} \times x_1 x_2^2}.$$

- D'où la différentielle totale de y s'écrit :

$$dy = \frac{\delta y}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta y}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta y}{\delta x_3} dx_3,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{dy = \left(\frac{1}{3}(x_1 x_2^2 x_3)^{-2/3} \times x_2^2 x_3 \right) dx_1 + \left(\frac{2}{3}(x_1 x_2^2 x_3)^{-2/3} \times x_1 x_2 x_3 \right) dx_2 + \left(\frac{1}{3}(x_1 x_2^2 x_3)^{-2/3} \times x_1 x_2^2 \right) dx_3}.$$

- ⑤ **Calculons les différentes différentielles partielles et déduisons-en la différentielle totale de y si $y = \text{Log}(x_1^2 x_2) + x_1 x_3$:**

- La différentielle partielle de y par rapport à x_1 est :

$$\boxed{\frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{2}{x_1} + x_3}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_2 est : $\boxed{\frac{\delta y}{\delta x_2} = \frac{1}{x_2}}.$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_3 est : $\boxed{\frac{\delta y}{\delta x_3} = x_1}.$

- D'où la différentielle totale de y s'écrit :

$$dy = \frac{\delta y}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta y}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta y}{\delta x_3} dx_3,$$

c'est-à-dire : $\boxed{dy = \left(\frac{2}{x_1} + x_3 \right) dx_1 + \left(\frac{1}{x_2} \right) dx_2 + (x_1) dx_3}.$

- ⑥ **Calculons les différentes différentielles partielles et déduisons-en la différentielle totale de y si $y = \text{Log}(x_3^3) \times (3x_1 x_2)$:**

- La différentielle partielle de y par rapport à x_1 est :

$$\frac{\delta y}{\delta x_1} = 3x_2 \times \text{Log}(x_3^3).$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_2 est :

$$\frac{\delta y}{\delta x_2} = 3x_1 \times \text{Log}(x_3^3).$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_3 est :

$$\frac{\delta y}{\delta x_3} = \frac{3}{x_3}.$$

- D'où la différentielle totale de y s'écrit :

$$dy = \frac{\delta y}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta y}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta y}{\delta x_3} dx_3,$$

c'est-à-dire :

$$dy = (3x_2 \times \text{Log}(x_3^3)) dx_1 + (3x_1 \times \text{Log}(x_3^3)) dx_2 + \left(\frac{3}{x_3} \right) dx_3.$$

Calculons les différentes différentielles partielles et déduisons-en la différentielle totale de y si $y = e^{(x_1 x_2^9)} \times x_3$:

- La différentielle partielle de y par rapport à x_1 est :

$$\frac{\delta y}{\delta x_1} = x_2^9 x_3 e^{(x_1 x_2^9)}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_2 est :

$$\frac{\delta y}{\delta x_2} = 9x_1 x_2^8 x_3 e^{(x_1 x_2^9)}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_3 est :

$$\frac{\delta y}{\delta x_3} = e^{(x_1 x_2^9)}.$$

- D'où la différentielle totale de y s'écrit :

$$dy = \frac{\delta y}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta y}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta y}{\delta x_3} dx_3,$$

c'est-à-dire :

$$dy = (x_2^9 x_3 e^{(x_1 x_2^9)}) dx_1 + (9x_1 x_2^8 x_3 e^{(x_1 x_2^9)}) dx_2 + (e^{(x_1 x_2^9)}) dx_3.$$

- ⑧ **Calculons les différentes différentielles partielles et déduisons-en la différentielle totale de y si $y = (x_3^3 x_2^2 - x_1)/(x_3 x_1)$:**

- La différentielle partielle de y par rapport à x_1 est

$$\frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{-(x_3 x_1) - (x_3^3 x_2^2 - x_1) \times (x_3)}{(x_3 x_1)^2} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow \frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{-(x_3 x_1) - (x_3^4 x_2^2 - x_1 x_3)}{(x_3 x_1)^2} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow \boxed{\frac{\delta y}{\delta x_1} = -\left(\frac{x_2 x_3}{x_1}\right)^2 = -\left(\frac{x_a x_3}{x_1}\right)}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_2 est

$$\boxed{\frac{\delta y}{\delta x_2} = \frac{2x_2 x_3^2}{x_1}}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_3 est

$$\frac{\delta y}{\delta x_3} = \frac{(3x_3^2 x_2^2) \times (x_3 x_1) - (x_3^3 x_2^2 - x_1) \times (x_1)}{(x_3 x_1)^2} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow \frac{\delta y}{\delta x_3} = \frac{(3x_3^3 x_2^2 x_1) - (x_3^3 x_2^2 x_1 - x_1^2)}{(x_3 x_1)^2} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow \boxed{\frac{\delta y}{\delta x_3} = \frac{2x_2^2 x_3}{x_1} + \frac{1}{x_3^2}}.$$

- D'où la différentielle totale de y s'écrit :

$$dy = \frac{\delta y}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta y}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta y}{\delta x_3} dx_3,$$

c'est-à-dire :

$$dy = - \left(\frac{x_2 x_3}{x_1} \right)^2 dx_1 + \left(\frac{2x_2 x_3^2}{x_1} \right) dx_2 + \left(\frac{2x_2^2 x_3}{x_1} + \frac{1}{x_3^2} \right) dx_3.$$

Calculons les différentielles partielles et déduisons-en la différentielle totale de y si $y = (6x_2^2)/(x_3 x_1^6)$:

- La différentielle partielle de y par rapport à x_1 est :

$$\frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{-(6x_2^2) \times (6x_3 x_1^5)}{(x_3 x_1^6)^2} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow \frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{-36x_1^5 x_2^2 x_3}{x_1^{12} x_3^2} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow \boxed{\frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{-36x_2^2}{x_1^7 x_3}}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_2 est :

$$\boxed{\frac{\delta y}{\delta x_2} = \frac{12x_2}{x_1^6 x_3}}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_3 est :

$$\frac{\delta y}{\delta x_3} = \frac{-(6x_2^2) \times (x_1^6)}{(x_3 x_1^6)^2} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow \frac{\delta y}{\delta x_3} = \frac{-6x_1^6 x_2^2}{x_1^{12} x_3^2} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow \boxed{\frac{\delta y}{\delta x_3} = \frac{-6x_2^2}{x_1^6 x_3^2}}.$$

- D'où la différentielle totale de y s'écrit :

$$dy = \frac{\delta y}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta y}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta y}{\delta x_3} dx_3,$$

$$\text{c'est-à-dire : } \boxed{dy = \left(\frac{-36x_2^2}{x_1^7 x_3} \right) dx_1 + \left(\frac{12x_2}{x_1^6 x_3} \right) dx_2 + \left(\frac{-6x_2^2}{x_1^6 x_3^2} \right) dx_3}.$$

- ⑩ ● Calculons les différentes différentielles partielles et déduisons-en la différentielle totale de y si $y = (\text{Log}(x_3^2))/(3x_1x_2)$:

- La différentielle partielle de y par rapport à x_1 est :

$$\frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{-(\text{Log}(x_3^2)) \times (3x_2)}{(3x_1x_2)^2} \quad (\text{a})$$

$$(\text{a}) \Leftrightarrow \frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{-6x_2 \text{Log} x_3}{9x_1^2 x_2^2} \quad (\text{b})$$

$$(\text{b}) \Leftrightarrow \boxed{\frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{-2 \text{Log} x_3}{3x_1^2 x_2}}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_2 est :

$$\frac{\delta y}{\delta x_2} = \frac{-(\text{Log}(x_3^2)) \times (3x_1)}{(3x_1x_2)^2} \quad (\text{a})$$

$$(\text{a}) \Leftrightarrow \frac{\delta y}{\delta x_2} = \frac{-6x_1 \text{Log} x_3}{9x_1^2 x_2^2} \quad (\text{b})$$

$$(\text{b}) \Leftrightarrow \boxed{\frac{\delta y}{\delta x_2} = \frac{-2 \text{Log} x_3}{3x_1 x_2^2}}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_3 est :

$$\boxed{\frac{\delta y}{\delta x_3} = \frac{2}{3x_1 x_2 x_3}}.$$

- D'où la différentielle totale de y s'écrit :

$$dy = \frac{\delta y}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta y}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta y}{\delta x_3} dx_3,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{dy = \left(\frac{-2 \text{Log} x_3}{3x_1^2 x_2} \right) dx_1 + \left(\frac{-2 \text{Log} x_3}{3x_1 x_2^2} \right) dx_2 + \left(\frac{2}{3x_1 x_2 x_3} \right) dx_3}.$$

(11) Calculons les différentes différentielles partielles et déduisons-en la différentielle totale de y si $y = (e^{(x_1 x_3^9)} \times x_2) / (x_3)$:

- La différentielle partielle de y par rapport à x_1 est :

$$\frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{x_2 x_3^9 e^{(x_1 x_3^9)}}{x_3} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow \boxed{\frac{\delta y}{\delta x_1} = x_2 x_3^8 e^{(x_1 x_3^9)}}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_2 est :

$$\boxed{\frac{\delta y}{\delta x_2} = \frac{e^{(x_1 x_3^9)}}{x_3}}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_3 est :

$$\frac{\delta y}{\delta x_3} = \frac{(9x_1 x_2 x_3^8 e^{(x_1 x_3^9)}) \times (x_3) - (x_2 e^{(x_1 x_3^9)}) \times (1)}{x_3^2} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow \frac{\delta y}{\delta x_3} = \frac{9x_1 x_2 x_3^9 e^{(x_1 x_3^9)} - x_2 e^{(x_1 x_3^9)}}{x_3^2} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow \boxed{\frac{\delta y}{\delta x_3} = 9x_1 x_2 x_3^7 e^{(x_1 x_3^9)} - \frac{x_2 e^{(x_1 x_3^9)}}{x_3^2}}.$$

- D'où la différentielle totale de y s'écrit :

$$dy = \frac{\delta y}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta y}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta y}{\delta x_3} dx_3,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{dy = (x_2 x_3^8 e^{(x_1 x_3^9)}) dx_1 + \left(\frac{e^{(x_1 x_3^9)}}{x_3} \right) dx_2 + \left(9x_1 x_2 x_3^7 e^{(x_1 x_3^9)} - \frac{x_2 e^{(x_1 x_3^9)}}{x_3^2} \right) dx_3.}$$

(12) Calculons les différentes différentielles partielles et déduisons-en la différentielle totale de y si $y = (e^{(x_1^2)} \times \text{Log}(x_3 x_1)) / (x_2^3)$:

- La différentielle partielle de y par rapport à x_1 est :

$$\frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{(2x_1 e^{(x_1^2)}) \times (\text{Log}(x_3 x_1)) + (e^{(x_1^2)}) \times \left(\frac{1}{x_1}\right)}{x_2^3} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow \boxed{\frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{2x_1^2 e^{(x_1^2)} \text{Log}(x_3 x_1) + e^{(x_1^2)}}{x_1 x_2^3}}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_2 est

$$\frac{\delta y}{\delta x_2} = \frac{-e^{(x_1^2)} \times \text{Log}(x_3 x_1) \times (3x_2^2)}{(x_2^3)^2} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow \frac{\delta y}{\delta x_2} = \frac{-3x_2^2 e^{(x_1^2)} \text{Log}(x_3 x_1)}{x_2^6} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow \boxed{\frac{\delta y}{\delta x_2} = \frac{-3e^{(x_1^2)} \text{Log}(x_3 x_1)}{x_2^4}}.$$

- La différentielle partielle de y par rapport à x_3 est : $\boxed{\frac{\delta y}{\delta x_3} = \frac{e^{(x_1^2)}}{x_2^3 x_3}}$

- D'où la différentielle totale de y s'écrit :

$$dy = \frac{\delta y}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta y}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta y}{\delta x_3} dx_3,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{dy = \left(\frac{2x_1^2 e^{(x_1^2)} \text{Log}(x_3 x_1) + e^{(x_1^2)}}{x_1 x_2^3} \right) dx_1 + \left(\frac{-3e^{(x_1^2)} \text{Log}(x_3 x_1)}{x_2^4} \right) dx_2 + \left(\frac{e^{(x_1^2)}}{x_2^3 x_3} \right) dx_3}.$$

ÉNONCÉ :

Déterminer la différentielle totale au point $x = x_0$ des fonctions suivantes :

① $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$, au point $x_0 = 1$.

② $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 - 3}$, au point $x_0 = 2$.

③ $f(x) = \sqrt[9]{x^6 - 3x^3}$, au point $x_0 = 3$.

④ $f(x) = \text{Log}(x^6 + 3x)$, au point $x_0 = 4$.

⑤ $f(x) = e^{(x^2 - 2x)}$, au point $x_0 = 5$.

⑥ $f(x) = \frac{e^x}{x + \text{Log}(x^2)}$, au point $x_0 = 6$.

CORRIGÉ :

① Déterminons la différentielle totale de $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$ au point $x_0 = 1$:

Nous savons que la différentielle totale de f s'écrit :

$$df = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot dx \quad \text{ou} \quad df = f'_x \cdot dx.$$

Or ici : $f'_x = \frac{\delta f}{\delta x} = 6x - 5$.

D'où au point $x_0 = 1$, $f'_x = 1$.

En définitive, la différentielle totale de $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$ au point $x_0 = 1$ s'écrit : $df = 1 \cdot dx$.

- ② **Déterminons la différentielle totale de $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 - 3}$ au point $x_0 = 2$:**

Nous savons que la différentielle totale de f s'écrit :

$$df = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot dx \quad \text{ou} \quad df = f'_x \cdot dx.$$

$$\text{Or ici : } f'_x = \frac{\delta f}{\delta x} = \frac{1}{2}(x^3 + x^2 - 3)^{-1/2} \times (3x^2 + 2x).$$

$$\text{D'où au point } x_0 = 2, \quad f'_x = \frac{1}{6} \times 16 \Rightarrow f'_x = \frac{8}{3}.$$

En définitive, la différentielle totale de $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 - 3}$ au point $x_0 = 2$ s'écrit : $df = \frac{8}{3} \cdot dx$.

- ③ **Déterminons la différentielle totale de $f(x) = \sqrt[9]{x^6 - 3x^3}$ au point $x_0 = 3$:**

$$f(x) = \sqrt[9]{x^6 - 3x^3} \Leftrightarrow f(x) = (x^6 - 3x^3)^{1/9}.$$

Nous savons que la différentielle totale de f s'écrit :

$$df = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot dx \quad \text{ou} \quad df = f'_x \cdot dx.$$

$$\text{Or ici : } f'_x = \frac{\delta f}{\delta x} = \frac{1}{9}(x^6 - 3x^3)^{-8/9} \times (6x^5 - 9x^2).$$

D'où au point $x_0 = 3$,

$$f'_x = \frac{1}{9}(648)^{-8/9} \times (1\,377) \Rightarrow f'_x = \frac{153}{\sqrt[9]{(648)^8}}.$$

En définitive, la différentielle totale de $f(x) = \sqrt[9]{x^6 - 3x^3}$ au point $x_0 = 3$ s'écrit : $df = \frac{153}{\sqrt[9]{(648)^8}} \cdot dx$.

Déterminons la différentielle totale de $f(x) = \text{Log}(x^6 + 3x)$ au point $x_0 = 4$:

Nous savons que la différentielle totale de f s'écrit :

$$df = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot dx \quad \text{ou} \quad df = f'_x \cdot dx.$$

$$\text{Or ici : } f'_x = \frac{\delta f}{\delta x} = \frac{6x^5 + 3}{x^6 + 3x}.$$

$$\text{D'où au point } x_0 = 4, \quad f'_x = \frac{(6 \times 1\,024) + 3}{4\,096 + 12} \Rightarrow f'_x = \frac{6\,147}{4\,108}.$$

En définitive, la différentielle totale de $f(x) = \text{Log}(x^6 + 3x)$ au point $x_0 = 4$ s'écrit : $df = \frac{6\,147}{4\,108} \cdot dx$.

Déterminons la différentielle totale de $f(x) = e^{(x^2 - 2x)}$ au point $x_0 = 5$:

Nous savons que la différentielle totale de f s'écrit :

$$df = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot dx \quad \text{ou} \quad df = f'_x \cdot dx.$$

$$\text{Or ici : } f'_x = \frac{\delta f}{\delta x} = (2x - 2) \times e^{(x^2 - 2x)}.$$

$$\text{D'où au point } x_0 = 5, \quad f'_x = 8e^{(15)}.$$

En définitive, la différentielle totale de $f(x) = e^{(x^2 - 2x)}$ au point $x_0 = 5$ s'écrit : $df = 8e^{(15)} \cdot dx$.

Déterminons la différentielle totale de $f(x) = (e^x)/(x + \text{Log}(x^2))$ au point $x_0 = 6$:

Nous savons que la différentielle totale de f s'écrit :

$$df = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot dx \quad \text{ou} \quad df = f'_x \cdot dx.$$

$$\text{Or ici : } f'_x = \frac{\delta f}{\delta x} = \frac{(e^x) \times (x + \text{Log}(x^2)) - (e^x) \times \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{(x + \text{Log}(x^2))^2}.$$

D'où au point $x_0 = 6$, $f'_x = \frac{e^6(6 + \text{Log}(36)) - e^6\left(\frac{4}{3}\right)}{(6 + \text{Log}(36))^2}$.

En définitive, la différentielle totale de $f(x) = \frac{e^x}{x + \text{Log}(x^2)}$ au

point $x_0 = 6$ s'écrit :

$$df = \left(\frac{e^6(6 + \text{Log}(36)) - e^6\left(\frac{4}{3}\right)}{(6 + \text{Log}(36))^2} \right) \cdot dx.$$

EXERCICE n° 31

ÉNONCÉ :

Déterminer la différentielle totale des fonctions à plusieurs variables suivantes, quand $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$:

- ① $f(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^3x_2^2 - x_1x_2x_3$.
- ② $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[3]{x_1^2x_2} - x_3^3$.
- ③ $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{e^{(x_1x_2^3x_3 - x_1)} + 10x_1^2x_2}{\text{Log}(x_1x_2x_3)}$.

CORRIGÉ :

- ① Déterminons la différentielle totale de

$$f(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^3x_2^2 - x_1x_2x_3 \quad \text{quand } x_1 = 1, x_2 = 2 \text{ et } x_3 = 3 :$$

Nous savons que la différentielle totale de f s'écrit :

$$df = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot dx_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot dx_2 + \frac{\delta f}{\delta x_3} \cdot dx_3 \quad \text{ou}$$

$$df = f'_{x_1} \cdot dx_1 + f'_{x_2} \cdot dx_2 + f'_{x_3} \cdot dx_3.$$

Or ici :

- $f'_{x_1} = 27x_1^2x_2^2 - x_2x_3,$

- $f'_{x_2} = 18x_1^3x_2 - x_1x_3,$

- $f'_{x_3} = -x_1x_2.$

D'où quand $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$:

- $f'_{x_1} = 102,$

- $f'_{x_2} = 33,$

- $f'_{x_3} = -2.$

En définitive, la différentielle totale de

$$f(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^3x_2^2 - x_1x_2x_3 \quad \text{quand } x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \quad \text{et}$$

$$x_3 = 3 \quad \text{s'écrit : } \boxed{df = 102 \cdot dx_1 + 33 dx_2 - 2 \cdot dx_3}.$$

Déterminons la différentielle totale de

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[3]{x_1^2x_2} - x_3^3$$

quand $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$:

Nous savons que la différentielle totale de f s'écrit :

$$df = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot dx_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot dx_2 + \frac{\delta f}{\delta x_3} \cdot dx_3 \quad \text{ou}$$

$$df = f'_{x_1} \cdot dx_1 + f'_{x_2} \cdot dx_2 + f'_{x_3} \cdot dx_3.$$

Or ici :

- $f'_{x_1} = \frac{1}{3}(x_1^2x_2)^{-2/3} \times (2x_1x_2),$

- $f'_{x_2} = \frac{1}{3}(x_1^2 x_2)^{-2/3} \times (x_1^2),$

- $f'_{x_3} = -3x_3^2.$

D'où quand $x_1 = 1, x_2 = 2$ et $x_3 = 3$:

- $f'_{x_1} = \frac{4}{3\sqrt[3]{4}},$

- $f'_{x_2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}},$

- $f'_{x_3} = -27.$

En définitive, la différentielle totale de

$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[3]{x_1^2 x_2} - x_3^3$ quand $x_1 = 1, x_2 = 2$ et $x_3 = 3$ s'écrit :

$$df = \left(\frac{4}{3\sqrt[3]{4}} \right) \cdot dx_1 + \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \right) dx_2 - 27 \cdot dx_3.$$

③ Déterminons la différentielle totale de

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{e^{(x_1 x_2^3 x_3 - x_1)} + 10 x_1^2 x_2}{\text{Log}(x_1 x_2 x_3)}$$

quand $x_1 = 1, x_2 = 2$ et $x_3 = 3$:

Nous savons que la différentielle totale de f s'écrit :

$$df = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot dx_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot dx_2 + \frac{\delta f}{\delta x_3} \cdot dx_3 \quad \text{ou}$$

$$df = f'_{x_1} \cdot dx_1 + f'_{x_2} \cdot dx_2 + f'_{x_3} \cdot dx_3.$$

Or ici :

- $$f'_{x_1} = \frac{((x_2^3 x_3 - 1)e^{(x_1 x_2^3 x_3 - x_1)} + 20 x_1 x_2) \times (\text{Log}(x_1 x_2 x_3))}{(\text{Log}(x_1 x_2 x_3))^2} \\ - \frac{(e^{(x_1 x_2^3 x_3 - x_1)} + 10 x_1^2 x_2) \times \left(\frac{1}{x_1} \right)}{(\text{Log}(x_1 x_2 x_3))^2}.$$

$$\bullet \quad f'_{x_2} = \frac{((3x_1x_2^2x_3)e^{(x_1x_2^3x_3-x_1)} + 10x_1^2) \times (\text{Log}(x_1x_2x_3))}{(\text{Log}(x_1x_2x_3))^2} - \frac{(e^{(x_1x_2^3x_3-x_1)} + 10x_1^2x_2) \times \left(\frac{1}{x_2}\right)}{(\text{Log}(x_1x_2x_3))^2}.$$

$$\bullet \quad f'_{x_3} = \frac{((x_1x_2^3)e^{(x_1x_2^3x_3-x_1)}) \times (\text{Log}(x_1x_2x_3))}{(\text{Log}(x_1x_2x_3))^2} - \frac{(e^{(x_1x_2^3x_3-x_1)} + 10x_1^2x_2) \times \left(\frac{1}{x_3}\right)}{(\text{Log}(x_1x_2x_3))^2}.$$

D'où quand $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$:

$$\bullet \quad f'_{x_1} = \frac{(23e^{(23)} + 40)(\text{Log}6) - (e^{(23)} + 20)}{(\text{Log}6)^2},$$

$$\bullet \quad f'_{x_2} = \frac{2(36e^{(23)} + 10)(\text{Log}6) - (e^{(23)} + 20)}{2(\text{Log}6)^2},$$

$$\bullet \quad f'_{x_3} = \frac{3(8e^{(23)})(\text{Log}6) - (e^{(23)} + 20)}{3(\text{Log}6)^2}.$$

En définitive, la différentielle totale de

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{e^{(x_1x_2^3x_3-1)} + 10x_1^2x_2}{\text{Log}(x_1x_2x_3)}$$

quand $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$ s'écrit :

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{(23e^{(23)} + 40)(\text{Log}6) - (e^{(23)} + 20)}{(\text{Log}6)^2} \right) \cdot dx_1 \\ &\quad + \left(\frac{(72e^{(23)} + 20)(\text{Log}6) - (e^{(23)} + 20)}{2(\text{Log}6)^2} \right) \cdot dx_2 \\ &\quad + \left(\frac{(24e^{(23)})(\text{Log}6) - (e^{(23)} + 20)}{3(\text{Log}6)^2} \right) \cdot dx_3 \end{aligned}$$

ÉNONCÉ :

Calculer la différentielle totale de $g = f \circ u$ dans les cas suivants :

① $u(x) = x^2 + x + 1$ et $f(u) = \text{Log}(1 + u)$.

② $u(x) = \text{Log } x$ et $f(u) = \text{Log } u$.

③ $u(x) = (x + 1)^{1/2}$ et $f(u) = e^u$.

④ $u(x) = xe^x + \frac{1}{x}$ et $f(u) = u^{1/2}$.

CORRIGÉ :

① Calculons la différentielle totale de $g = f \circ u$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$ et $f(u) = \text{Log}(1 + u)$:

Ici nous avons : $u(x) = x^2 + x + 1$ et $f(u) = \text{Log}(1 + u)$;

d'où $g(x) = \text{Log}(1 + [x^2 + x + 1]) \Leftrightarrow g(x) = \text{Log}(x^2 + x + 2)$.

Dans ces conditions, la différentielle partielle de g par rapport à x

est : $g'_x = \frac{\delta g}{\delta x} = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 2}$.

Et donc, la différentielle totale de $g = f \circ u$ s'écrit :

$$dg = \left(\frac{2x + 1}{x^2 + x + 2} \right) \cdot dx.$$

② Calculons la différentielle totale de $g = f \circ u$ avec $u(x) = \text{Log } x$ et $f(u) = \text{Log } u$:

Ici nous avons : $u(x) = \text{Log } x$ et $f(u) = \text{Log } u$;

d'où $g(x) = \text{Log}(\text{Log}x)$.

Dans ces conditions, la différentielle partielle de g par rapport à x

$$\text{est : } g'_x = \frac{\delta g}{\delta x} = \frac{1}{x \text{Log}x}.$$

Et donc, la différentielle totale de $g = f \circ u$ s'écrit :

$$\boxed{dg = \left(\frac{1}{x \text{Log}x} \right) \cdot dx}.$$

Calculons la différentielle totale de $g = f \circ u$ avec $u(x) = (x+1)^{1/2}$ et $f(u) = e^u$:

Ici nous avons : $u(x) = (x+1)^{1/2}$ et $f(u) = e^u$;

d'où $g(x) = e^{(x+1)^{1/2}}$.

Dans ces conditions, la différentielle partielle de g par rapport à x

$$\text{est : } g'_x = \frac{\delta g}{\delta x} = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} \times e^{(x+1)^{1/2}} \quad (\text{a})$$

$$(\text{a}) \Leftrightarrow g'_x = \frac{\delta g}{\delta x} = \frac{e^{(x+1)^{1/2}}}{2(x+1)^{1/2}}.$$

Et donc, la différentielle totale de $g = f \circ u$ s'écrit :

$$\boxed{dg = \left(\frac{e^{(x+1)^{1/2}}}{2(x+1)^{1/2}} \right) \cdot dx}.$$

Calculons la différentielle totale de $g = f \circ u$ avec $u(x) = xe^x + \frac{1}{x}$ et $f(u) = u^{1/2}$:

Ici nous avons : $u(x) = xe^x + \frac{1}{x}$ et $f(u) = u^{1/2}$;

d'où $g(x) = \left(xe^x + \frac{1}{x} \right)^{1/2}$.

Dans ces conditions, la différentielle partielle de g par rapport à x

$$\text{est : } g'_x = \frac{\delta g}{\delta x} = \frac{1}{2} \left(xe^x + \frac{1}{x} \right)^{-1/2} \times \left(e^x + xe^x - \frac{1}{x^2} \right) \quad (\text{a})$$

$$(a) \Leftrightarrow g'_x = \frac{\frac{\delta g}{\delta x}}{\frac{\delta g}{\delta x}} = \frac{e^x + xe^x - \frac{1}{x^2}}{2\left(xe^x + \frac{1}{x}\right)^{1/2}}.$$

Et donc, la différentielle totale de $g = f \circ u$ s'écrit :

$$dg = \left(\frac{e^x + xe^x - \frac{1}{x^2}}{2\left(xe^x + \frac{1}{x}\right)^{1/2}} \right) \cdot dx.$$

👉 EXERCICE n° 33

ÉNONCÉ :

Soit $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ une fonction à plusieurs variables.

- ① Que représentent $f''_{x_1x_1}$ et $f''_{x_1x_3}$?
- ② D'une manière générale que représente $f''_{x_ix_j}$?
- ③ Si $y = 3x_1^2x_2 - x_3^6$, calculer $f''_{x_1x_1}$, $f''_{x_1x_2}$, $f''_{x_1x_3}$, $f''_{x_2x_1}$, $f''_{x_2x_2}$, $f''_{x_2x_3}$, $f''_{x_3x_1}$, $f''_{x_3x_2}$ et $f''_{x_3x_3}$.
- ④ Que constatez-vous ?

CORRIGÉ :

- ① Que représentent $f''_{x_1x_1}$ et $f''_{x_1x_3}$?

(a) $f''_{x_1 x_1}$:

$f''_{x_1 x_1}$ signifie que nous dérivons partiellement une première fois f par rapport à x_1 puis que nous dérivons à nouveau partiellement f'_{x_1} par rapport à x_1 : il s'agit d'une différentielle partielle seconde par rapport à x_1 .

$f''_{x_1 x_1}$ se note aussi $\frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2}$: $f''_{x_1 x_1} = \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2}$.

(b) $f''_{x_1 x_3}$:

$f''_{x_1 x_3}$ signifie que nous dérivons partiellement une première fois f par rapport à x_1 puis que nous dérivons à nouveau partiellement f'_{x_1} par rapport à x_3 .

$f''_{x_1 x_3}$ se note aussi $\frac{\delta^2 f}{\delta x_3 \delta x_1}$: $f''_{x_1 x_3} = \frac{\delta^2 f}{\delta x_3 \delta x_1}$.

) **Que représente $f''_{x_i x_j}$?**

D'une manière générale, $f''_{x_i x_j}$ signifie que nous dérivons partiellement une première fois f par rapport à x_i puis que nous dérivons à nouveau partiellement f'_{x_i} par rapport à x_j .

Il est bon de noter que lorsque nous écrivons $f''_{x_i x_j}$, l'indice de gauche concerne la variable de la première dérivation et l'indice de droite la variable de la deuxième dérivation.

) **Calculons $f''_{x_1 x_1}$, $f''_{x_1 x_2}$, $f''_{x_1 x_3}$, $f''_{x_2 x_1}$, $f''_{x_2 x_2}$, $f''_{x_2 x_3}$, $f''_{x_3 x_1}$, $f''_{x_3 x_2}$ et $f''_{x_3 x_3}$ avec $y = 3x_1^2 x_2 - x_3^6$:**

- $f'_{x_1} = 6x_1 x_2$,

- $f'_{x_2} = 3x_1^2$,

- $f'_{x_3} = -6x_3^5,$
- $f''_{x_1x_1} = 6x_2,$
- $f''_{x_1x_2} = 6x_1,$
- $f''_{x_1x_3} = 0,$
- $f''_{x_2x_1} = 6x_1,$
- $f''_{x_2x_2} = 0,$
- $f''_{x_2x_3} = 0,$
- $f''_{x_3x_1} = 0,$
- $f''_{x_3x_2} = 0,$
- $f''_{x_3x_3} = -30x_3^4.$

④ Que constatons-nous ?

Nous pouvons constater que :

- $f''_{x_1x_2} = f''_{x_2x_1},$
- $f''_{x_1x_3} = f''_{x_3x_1},$
- $f''_{x_2x_3} = f''_{x_3x_2}.$

Ainsi l'ordre des dérivations est sans importance pour les résultats. Autrement dit nous pouvons d'abord dériver par rapport à x_i ou d'abord dériver par rapport à x_j , nous aurons toujours :

$$\boxed{f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}}.$$

ÉNONCÉ :

Soit $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ une fonction à plusieurs variables.

- ① Que représente $f'''_{x_i x_j x_k}$?
- ② Si $y = \text{Log}(x_1 x_2 x_3) - x_1^2 x_2 + 10 x_3^3$, calculer $f'''_{x_1 x_1 x_1}$, $f'''_{x_1 x_2 x_3}$, $f'''_{x_1 x_3 x_3}$ et $f'''_{x_3 x_3 x_1}$.
- ③ Que constatez-vous ?

CORRIGÉ :

- ① Que représente $f'''_{x_i x_j x_k}$?

$f'''_{x_i x_j x_k}$ représente une différentielle partielle d'ordre 3.

L'indice de gauche indique la variable par rapport à laquelle est faite la première dérivation, l'indice du milieu la deuxième et l'indice de droite la troisième.

$$f'''_{x_i x_j x_k} \text{ se note aussi } \frac{\delta^3 f}{\delta x_k \delta x_j \delta x_i} : \boxed{f'''_{x_i x_j x_k} = \frac{\delta^3 f}{\delta x_k \delta x_j \delta x_i}}.$$

- ② Calculons $f'''_{x_1 x_1 x_1}$, $f'''_{x_1 x_2 x_3}$, $f'''_{x_1 x_3 x_3}$ et $f'''_{x_3 x_3 x_1}$ avec $y = \text{Log}(x_1 x_2 x_3) - x_1^2 x_2 + 10 x_3^3$:

- $f'_{x_1} = \frac{1}{x_1} - 2x_1 x_2,$

- $f'_{x_2} = \frac{1}{x_2} - x_1^2,$

- $f'_{x_3} = \frac{1}{x_3} + 30x_3^2,$
- $f''_{x_1x_1} = \frac{-1}{x_1^2} - 2x_2,$
- $f''_{x_1x_2} = -2x_1,$
- $f''_{x_1x_3} = 0,$
- $f''_{x_3x_3} = \frac{-1}{x_3^2} + 60x_3,$
- $f'''_{x_1x_1x_1} = \frac{2}{x_1^3},$
- $f'''_{x_1x_2x_3} = 0,$
- $f'''_{x_1x_3x_3} = 0,$
- $f'''_{x_3x_3x_1} = 0.$

③ **Que constatons-nous ?**

Nous pouvons constater que : $f'''_{x_1x_3x_3} = f'''_{x_3x_3x_1}.$

Ainsi, d'une manière générale : $f'''_{x_ix_kx_k} = f'''_{x_kx_kx_i}.$

Plus encore, nous avons : $f'''_{x_ix_kx_k} = f'''_{x_kx_ix_k} = f'''_{x_kx_kx_i}.$

 EXERCICE n° 35

ÉNONCÉ :

- ① Soit $y = f(x_1, x_2)$, une fonction à deux variables.
Écrire la différentielle totale d'ordre 2 de f .

- ② Soit $y = f(x_1, x_2, x_3)$, une fonction à trois variables.
Écrire la différentielle totale d'ordre 2 de f .

CORRIGÉ :

- ① Écrivons la différentielle totale d'ordre 2 de $y = f(x_1, x_2)$:

Nous savons que la différentielle totale d'ordre 2 de $y = f(x_1, x_2)$

s'écrit :
$$d^2f = f''_{x_1x_1} \cdot dx_1^2 + f''_{x_2x_2} \cdot dx_2^2 + 2f''_{x_1x_2} \cdot dx_1 dx_2 .$$

- ② Écrivons la différentielle totale d'ordre 2 de $y = f(x_1, x_2, x_3)$:

Nous savons que la différentielle totale d'ordre 2 de $y = f(x_1, x_2, x_3)$ s'écrit :

$$d^2f = f''_{x_1x_1} \cdot dx_1^2 + f''_{x_2x_2} \cdot dx_2^2 + f''_{x_3x_3} \cdot dx_3^2 + 2f''_{x_1x_2} \cdot dx_1 dx_2 + 2f''_{x_1x_3} \cdot dx_1 dx_3 + 2f''_{x_2x_3} \cdot dx_2 dx_3 .$$

ÉNONCÉ :

① Soit $y = 3x_1^2x_2^3 - x_1^2x_2 + 10x_2$.

Calculer d^2f .

② Soit $y = 6x_1x_2^4x_3^6 + x_3^3x_2 - x_1x_2x_3$.

Calculer d^2f .

CORRIGÉ :

① Calculons d^2f avec $y = f(x_1, x_2) = 3x_1^2x_2^3 - x_1^2x_2 + 10x_2$

Nous savons que :

$$d^2f = f''_{x_1x_1} \cdot dx_1^2 + f''_{x_2x_2} \cdot dx_2^2 + 2f''_{x_1x_2} \cdot dx_1 dx_2.$$

Or ici : $f'_{x_1} = 6x_1x_2^3 - 2x_1x_2,$

$$f'_{x_2} = 9x_1^2x_2^2 - x_1^2 + 10,$$

$$f''_{x_1x_1} = 6x_2^3 - 2x_2,$$

$$f''_{x_2x_2} = 18x_1^2x_2,$$

$$f''_{x_1x_2} = f''_{x_2x_1} = 18x_1x_2^2 - 2x_1.$$

D'où :

$$d^2f = (6x_2^3 - 2x_2) \cdot dx_1^2 + (18x_1^2x_2) \cdot dx_2^2 + (36x_1x_2^2 - 4x_1) \cdot dx_1 dx_2.$$

Calculons d^2f avec

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1x_2^4x_3^6 + x_3^3x_2 - x_1x_2x_3 :$$

Nous savons que :

$$\begin{aligned} d^2f = f''_{x_1x_1} \cdot dx_1^2 + f''_{x_2x_2} \cdot dx_2^2 + f''_{x_3x_3} \cdot dx_3^2 + 2f''_{x_1x_2} \cdot dx_1dx_2 \\ + 2f''_{x_1x_3} \cdot dx_1dx_3 + 2f''_{x_2x_3} \cdot dx_2dx_3. \end{aligned}$$

$$\text{Or ici : } f'_{x_1} = 6x_2^4x_3^6 - x_2x_3,$$

$$f'_{x_2} = 24x_1x_2^3x_3^6 + x_3^3 - x_1x_3,$$

$$f'_{x_3} = 36x_1x_2^4x_3^5 + 3x_3^2x_2 - x_1x_2,$$

$$f''_{x_1x_1} = 0,$$

$$f''_{x_1x_2} = f''_{x_2x_1} = 24x_2^3x_3^6 - x_3,$$

$$f''_{x_1x_3} = f''_{x_3x_1} = 36x_2^4x_3^5 - x_2,$$

$$f''_{x_2x_1} = f''_{x_1x_2} = 24x_2^3x_3^6 - x_3,$$

$$f''_{x_2x_2} = 72x_1x_2^2x_3^6,$$

$$f''_{x_2x_3} = f''_{x_3x_2} = 144x_1x_2^3x_3^5 + 3x_3^2 - x_1,$$

$$f''_{x_3x_1} = f''_{x_1x_3} = 36x_2^4x_3^5 - x_2,$$

$$f''_{x_3x_2} = f''_{x_2x_3} = 144x_1x_2^3x_3^5 + 3x_3^2 - x_1,$$

$$f''_{x_3x_3} = 180x_1x_2^4x_3^4 + 6x_3x_2.$$

D'où :

$$\begin{aligned}d^2f = & (72x_1x_2^2x_3^6) \cdot dx_2^2 + (180x_1x_2^4x_3^4 + 6x_3x_2) \cdot dx_3^2 \\ & + (48x_2^3x_3^6 - 2x_3) \cdot dx_1dx_2 \\ & + (72x_2^4x_3^5 - 2x_2) \cdot dx_1dx_3 \\ & + (288x_1x_2^3x_3^5 + 6x_3^2 - 2x_1) \cdot dx_2dx_3\end{aligned}$$

EXERCICE n° 37

ÉNONCÉ :

En reprenant les résultats de l'exercice précédent, calculer d^2f aux points A et B dans les cas suivants :

- ① $y = 3x_1^2x_2^3 - x_1^2x_2 + 10x_2$ avec A(1, 1) et B(2, 3).
- ② $y = 6x_1x_2^4x_3^6 + x_3^3x_2 - x_1x_2x_3$ avec A(0, 1, 1) et B(1, 2, 0).

CORRIGÉ :

- ① Calculons d^2f aux points A(1, 1) et B(2, 3) quand

$$y = 3x_1^2x_2^3 - x_1^2x_2 + 10x_2 :$$

Dans ce cas, nous savons que :

$$d^2f = (6x_2^3 - 2x_2) \cdot dx_1^2 + (18x_1^2x_2) \cdot dx_2^2 + (36x_1x_2^2 - 4x_1) \cdot dx_1dx_2.$$

- a) Au point A(1, 1) :

$$d^2f = 4 \cdot dx_1^2 + 18 \cdot dx_2^2 + 32 \cdot dx_1dx_2.$$

⑥ *Au point $B(2, 3)$:*

$$d^2f = 42 \cdot dx_1^2 + 216 \cdot dx_2^2 + 640 \cdot dx_1 dx_2 .$$

) **Calculons d^2f aux points $A(0, 1, 1)$ et $B(1, 2, 0)$ quand $y = 6x_1x_2^4x_3^6 + x_3^3x_2 - x_1x_2x_3$:**

Dans ce cas, nous savons que :

$$\begin{aligned} d^2f &= (72x_1x_2^2x_3^6) \cdot dx_2^2 + (180x_1x_2^4x_3^4 + 6x_3^3x_2) \cdot dx_3^2 \\ &\quad + (48x_2^3x_3^6 - 2x_3) \cdot dx_1 dx_2 \\ &\quad + (72x_2^4x_3^5 - 2x_2) \cdot dx_1 dx_3 \\ &\quad + (288x_1x_2^3x_3^5 + 6x_3^2 - 2x_1) \cdot dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

⑦ *Au point $A(0, 1, 1)$:*

$$d^2f = 6 \cdot dx_3^2 + 46 \cdot dx_1 dx_2 + 70 \cdot dx_1 dx_3 + 6 \cdot dx_2 dx_3 .$$

⑧ *Au point $B(1, 2, 0)$:*

$$d^2f = -4 \cdot dx_1 dx_3 - 2 \cdot dx_2 dx_3 .$$

EXERCICE n° 38

NONCÉ :

-) **Définir la notion de fonction homogène de degré m .**
-) **Les fonctions suivantes sont-elles homogènes ?**

$$\textcircled{a} \quad y = f(x_1, x_2) = 3x_1x_2 - x_2^2;$$

$$\textcircled{b} \quad y = f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2x_3 - 3x_1x_2x_3}{2x_1 + 2x_2};$$

$$\textcircled{c} \quad y = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_3^4 + x_2^2.$$

CORRIGÉ :

① Définissons la notion de fonction homogène de degré m :

Une fonction $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ est dite homogène de degré m si et seulement si :

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m \cdot f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}.$$

② Déterminons si les fonctions suivantes sont homogènes :

$$\textcircled{a} \quad y = f(x_1, x_2) = 3x_1x_2 - x_2^2 :$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x_1, \lambda x_2) = 3(\lambda x_1)(\lambda x_2) - (\lambda x_2)^2 \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2) = 3\lambda x_1\lambda x_2 - \lambda^2 x_2^2 \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^2 [3x_1x_2 - x_2^2] \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow \boxed{f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^2 \cdot f(x_1, x_2)}.$$

Par conséquent, la fonction $y = f(x_1, x_2) = 3x_1x_2 - x_2^2$ est homogène de degré 2.

$$\textcircled{b} \quad y = f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2x_3 - 3x_1x_2x_3)/(2x_1 + 2x_2) :$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \frac{(\lambda x_1)^2(\lambda x_3) - 3(\lambda x_1)(\lambda x_2)(\lambda x_3)}{2(\lambda x_1) + 2(\lambda x_2)} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \frac{\lambda^2 x_1^2 \lambda x_3 - 3 \lambda x_1 \lambda x_2 \lambda x_3}{2 \lambda x_1 + 2 \lambda x_2} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \frac{\lambda^3 (x_1^2 x_3 - 3 x_1 x_2 x_3)}{\lambda (2 x_1 + 2 x_2)} \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^2 \left[\frac{x_1^2 x_3 - 3 x_1 x_2 x_3}{2 x_1 + 2 x_2} \right] \quad (d)$$

$$(d) \Leftrightarrow \boxed{f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^2 \cdot f(x_1, x_2, x_3)}.$$

Par conséquent, la fonction $y = f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 x_3 - 3 x_1 x_2 x_3}{2 x_1 + 2 x_2}$ est homogène de degré 2.

$$(c) \quad y = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_3^4 + x_2^2 :$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (\lambda x_1)^2 (\lambda x_3)^4 + (\lambda x_2)^2 \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^2 x_1^2 \lambda^4 x_3^4 + \lambda^2 x_2^2 \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^6 x_1^2 x_3^4 + \lambda^2 x_2^2 \quad (c).$$

Comme nous ne pouvons pas mettre λ^6 en facteur c'est-à-dire écrire $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^6 [x_1^2 x_3^4 + x_2^2]$,

la fonction $y = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = x_1^2 x_3^4 + x_2^2$ n'est pas homogène.

👉 EXERCICE n° 39

NONCÉ :

Déterminer le degré d'homogénéité des fonctions suivantes :

$$\textcircled{1} \quad f(x_1, x_2) = \frac{3x_1x_2 + 6x_2^2}{x_1 + 9x_2}.$$

$$\textcircled{2} \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{3x_1x_2x_3 - 4x_1^2x_3}{x_2^3}.$$

$$\textcircled{3} \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{6x_1^2x_4 + 10x_1^3 - 21x_1x_3x_4}{5}.$$

CORRIGÉ :

\textcircled{1} Déterminons le degré d'homogénéité de la fonction

$$f(x_1, x_2) = \frac{3x_1x_2 + 6x_2^2}{x_1 + 9x_2} :$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{3(\lambda x_1)(\lambda x_2) + 6(\lambda x_2)^2}{(\lambda x_1) + 9(\lambda x_2)} \quad (\text{a})$$

$$(\text{a}) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{3\lambda x_1 \lambda x_2 + 6\lambda^2 x_2^2}{\lambda x_1 + 9\lambda x_2} \quad (\text{b})$$

$$(\text{b}) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{\lambda^2(3x_1x_2 + 6x_2^2)}{\lambda(x_1 + 9x_2)} \quad (\text{c})$$

$$(\text{c}) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda \left[\frac{3x_1x_2 + 6x_2^2}{x_1 + 9x_2} \right] \quad (\text{d})$$

$$(\text{d}) \Leftrightarrow \boxed{f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda \cdot f(x_1, x_2)}.$$

Par conséquent, la fonction $f(x_1, x_2) = \frac{3x_1x_2 + 6x_2^2}{x_1 + 9x_2}$ est homogène de degré 1.

On dit aussi que f est linéaire homogène.

Déterminons le degré d'homogénéité de la fonction

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{3x_1x_2x_3 - 4x_1^2x_3}{x_2^3} :$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \frac{3(\lambda x_1)(\lambda x_2)(\lambda x_3) - 4(\lambda x_1)^2(\lambda x_3)}{(\lambda x_2)^3} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \frac{3\lambda x_1 \lambda x_2 \lambda x_3 - 4\lambda^2 x_1^2 \lambda x_3}{\lambda^3 x_2^3} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \frac{\lambda^3(3x_1x_2x_3 - 4x_1^2x_3)}{\lambda^3(x_2^3)} \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^0 \left[\frac{3x_1x_2x_3 - 4x_1^2x_3}{x_2^3} \right] \quad (d)$$

$$(d) \Leftrightarrow \boxed{f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^0 \cdot f(x_1, x_2, x_3)}.$$

Par conséquent, la fonction $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{3x_1x_2x_3 - 4x_1^2x_3}{x_2^3}$ est homogène de degré 0.

Déterminons le degré d'homogénéité de la fonction

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (6x_1^2x_4 + 10x_1^3 - 21x_1x_3x_4)/(5) :$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4) = \frac{6(\lambda x_1)^2(\lambda x_4)}{5} + \frac{10(\lambda x_1)^3}{5} - \frac{21(\lambda x_1)(\lambda x_3)(\lambda x_4)}{5} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow$$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4) = \frac{6\lambda^2 x_1^2 \lambda x_4 + 10\lambda^3 x_1^3 - 21\lambda x_1 \lambda x_3 \lambda x_4}{5} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4) = \frac{\lambda^3(6x_1^2x_4 + 10x_1^3 - 21x_1x_3x_4)}{5} \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow \boxed{f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4) = \lambda^3 \cdot f(x_1, x_2, x_3, x_4)}.$$

Par conséquent,

la fonction $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{6x_1^2x_4 + 10x_1^3 - 21x_1x_3x_4}{5}$ est homogène de degré 3.

👉 EXERCICE n° 40

ÉNONCÉ :

- ① **Rappeler le théorème d'Euler dans le cas d'une fonction à n variables.**
- ② **Vérifier le théorème d'Euler dans les cas suivants :**
 - Ⓐ $f(x_1) = 6x_1^2.$
 - Ⓑ $f(x_1, x_2) = \frac{x_2^3 - x_1^2x_2}{x_1 + 3x_2}.$
 - Ⓒ $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2}{x_3}.$

CORRIGÉ :

- ① **Rappelons le théorème d'Euler dans le cas d'une fonction à n variables :**

Soit $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ une fonction à n variables.

Si $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ est homogène de degré m , alors d'après le théorème d'Euler, nous avons :

$$x_1 \times \frac{\delta f}{\delta x_1} + x_2 \times \frac{\delta f}{\delta x_2} + x_3 \times \frac{\delta f}{\delta x_3} + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n} = m \times f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

) **Vérifions le théorème d'Euler dans les cas suivants :**

Ⓐ $f(x_1) = 6x_1^2 :$

Ⓐ Déterminons le degré d'homogénéité de $f(x_1) = 6x_1^2 :$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x_1) = 6(\lambda x_1)^2 \quad (\text{a})$$

$$(\text{a}) \Leftrightarrow f(\lambda x_1) = 6\lambda^2 x_1^2 \quad (\text{b})$$

$$(\text{b}) \Leftrightarrow f(\lambda x_1) = \lambda^2 [6x_1^2] \quad (\text{c})$$

$$(\text{c}) \Leftrightarrow f(\lambda x_1) = \lambda^2 \cdot f(x_1).$$

Par conséquent, la fonction $f(x_1) = 6x_1^2$ est homogène de degré 2.

Ⓑ Vérifions le théorème d'Euler :

$$x_1 \times \frac{\delta f}{\delta x_1} = x_1 \times (12x_1) \Leftrightarrow x_1 \times \frac{\delta f}{\delta x_1} = 12x_1^2.$$

$$\text{Or } 12x_1^2 = 2 \times f(x_1).$$

D'où le théorème d'Euler est bien vérifié.

Ⓑ $f(x_1, x_2) = (x_2^3 - x_1^2 x_2) / (x_1 + 3x_2) :$

Ⓐ Déterminons le degré d'homogénéité de $f(x_1, x_2) = (x_2^3 - x_1^2 x_2) / (x_1 + 3x_2) :$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{(\lambda x_2)^3 - (\lambda x_1)^2 (\lambda x_2)}{(\lambda x_1) + 3(\lambda x_2)} \quad (\text{a})$$

$$(a) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{\lambda^3 x_2^3 - \lambda^2 x_1^2 \lambda x_2}{\lambda x_1 + 3 \lambda x_2} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{\lambda^3 (x_2^3 - x_1^2 x_2)}{\lambda (x_1 + 3x_2)} \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^2 \left[\frac{x_2^3 - x_1^2 x_2}{x_1 + 3x_2} \right] \quad (d)$$

$$(d) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^2 \cdot f(x_1, x_2).$$

Par conséquent, la fonction $f(x_1, x_2) = \frac{x_2^3 - x_1^2 x_2}{x_1 + 3x_2}$ est homogène de degré 2.

ⓑ Vérifions le théorème d'Euler :

$$\begin{aligned} x_1 \times \frac{\delta f}{\delta x_1} + x_2 \times \frac{\delta f}{\delta x_2} &= x_1 \left(\frac{(-2x_1 x_2) \times (x_1 + 3x_2) - (x_2^3 - x_1^2 x_2) \times (1)}{(x_1 + 3x_2)^2} \right) \\ &\quad + x_2 \times \left(\frac{(3x_2^2 - x_1^2) \times (x_1 + 3x_2) - (x_2^3 - x_1^2 x_2) \times (3)}{(x_1 + 3x_2)^2} \right) \quad (a) \end{aligned}$$

$$(a) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 \times \frac{\delta f}{\delta x_1} + x_2 \times \frac{\delta f}{\delta x_2} &= x_1 \left(\frac{-2x_1^2 x_2 - 6x_1 x_2^2 - x_2^3 + x_1^2 x_2}{(x_1 + 3x_2)^2} \right) \\ &\quad + x_2 \left(\frac{3x_2^2 x_1 + 9x_2^3 - x_1^3 - 3x_1^2 x_2 - 3x_2^3 + 3x_1^2 x_2}{(x_1 + 3x_2)^2} \right) \quad (b) \end{aligned}$$

$$(b) \Leftrightarrow$$

$$x_1 \times \frac{\delta f}{\delta x_1} + x_2 \times \frac{\delta f}{\delta x_2} = \frac{-x_1^3 x_2 - 6x_1^2 x_2^2 - x_1 x_2^3 + 3x_2^3 x_1 + 6x_2^4 - x_1^3 x_2}{(x_1 + 3x_2)^2} \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow$$

$$x_1 \times \frac{\delta f}{\delta x_1} + x_2 \times \frac{\delta f}{\delta x_2} = \frac{-2x_1^3x_2 + 2x_1x_2^3 - 6x_1^2x_2^2 + 6x_2^4}{(x_1 + 3x_2)(x_1 + 3x_2)} \quad (d)$$

$$(d) \Leftrightarrow x_1 \times \frac{\delta f}{\delta x_1} + x_2 \times \frac{\delta f}{\delta x_2} = \frac{2(x_2^3 - x_1^2x_2)(x_1 + 3x_2)}{(x_1 + 3x_2)(x_1 + 3x_2)} \quad (e)$$

$$(e) \Leftrightarrow x_1 \times \frac{\delta f}{\delta x_1} + x_2 \times \frac{\delta f}{\delta x_2} = 2 \times \left[\frac{x_2^3 - x_1^2x_2}{x_1 + 3x_2} \right].$$

$$\text{Or } 2 \times \left[\frac{x_2^3 - x_1^2x_2}{x_1 + 3x_2} \right] = 2 \times f(x_1, x_2).$$

D'où le théorème d'Euler est bien vérifié.

$$\textcircled{c} \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2)/(x_3) :$$

$\textcircled{\alpha}$ Déterminons le degré d'homogénéité de $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2)/(x_3) :$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \frac{(\lambda x_1)^2 + 2(\lambda x_2)^2 + 3(\lambda x_3)^2}{(\lambda x_3)} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \frac{\lambda^2 x_1^2 + 2\lambda^2 x_2^2 + 3\lambda^2 x_3^2}{\lambda x_3} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \frac{\lambda^2 (x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2)}{\lambda (x_3)} \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda \left[\frac{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2}{x_3} \right] \quad (d)$$

$$(d) \Leftrightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda \cdot f(x_1, x_2, x_3).$$

Par conséquent, la fonction $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2}{x_3}$ est

homogène de degré 1.

ⓑ) Vérifions le théorème d'Euler :

$$x_1 \times \frac{\delta f}{\delta x_1} + x_2 \times \frac{\delta f}{\delta x_2} + x_3 \times \frac{\delta f}{\delta x_3} = x_1 \times \left(\frac{2x_1}{x_3} \right) + x_2 \times \left(\frac{4x_2}{x_3} \right) + x_3 \times \left(\frac{(6x_3) \times (x_3) - (x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2)}{x_3^2} \right) \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow x_1 \times \frac{\delta f}{\delta x_1} + x_2 \times \frac{\delta f}{\delta x_2} + x_3 \times \frac{\delta f}{\delta x_3} = \frac{2x_1^2}{x_3} + \frac{4x_2^2}{x_3} + \frac{6x_3^2 - x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2}{x_3} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow x_1 \times \frac{\delta f}{\delta x_1} + x_2 \times \frac{\delta f}{\delta x_2} + x_3 \times \frac{\delta f}{\delta x_3} = \frac{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2}{x_3} \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow x_1 \times \frac{\delta f}{\delta x_1} + x_2 \times \frac{\delta f}{\delta x_2} + x_3 \times \frac{\delta f}{\delta x_3} = 1 \times \left[\frac{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2}{x_3} \right].$$

$$\text{Or } 1 \times \left[\frac{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2}{x_3} \right] = 1 \times f(x_1, x_2, x_3).$$

D'où le théorème d'Euler est bien vérifié.

 EXERCICE n° 41

ÉNONCÉ :

- ① Énoncer le théorème des fonctions implicites dans le cas de deux variables.

- ② Soit l'équation $F(x, y) = x^3 - 3xy + 6y^3 - 4 = 0$, calculer la dérivée de la fonction $y = f(x)$ définie implicitement à partir de $F(x, y) = 0$ et cela au point $A(1, 1)$.

CORRIGÉ :

- ① Énonçons le théorème des fonctions implicites dans le cas de deux variables :

Étant donné une fonction $F(x, y)$ continue telle que $F(x_0, y_0) = 0$ et qui possède en (x_0, y_0) des différentielles partielles F'_x et F'_y continues, avec F'_y non nulle en (x_0, y_0) , il existe une fonction $y = f(x)$ unique définie et continue dans un voisinage de x_0 , telle que $F(x, f(x)) = 0$.

Dans ces conditions, la dérivée f'_x d'une fonction définie sous

forme implicite $F(x, y) = 0$ est :
$$f'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

- ② Soit l'équation $F(x, y) = x^3 - 3xy + 6y^3 - 4 = 0$, calculons la dérivée de la fonction $y = f(x)$ définie implicitement à partir de $F(x, y) = 0$ et cela au point $A(1, 1)$:

- $F(x, y) = x^3 - 3xy + 6y^3 - 4$ est une fonction continue ;
- $F(1, 1) = 0$;
- la fonction $F(x, y)$ possède en $A(1, 1)$ des différentielles partielles F'_x et F'_y continues ; en effet : $F'_x = 3x^2 - 3y$ et $F'_y = -3x + 18y^2$ sont continues ;
- F'_y est non nulle au point $A(1, 1)$; en effet au point A , $F'_y = 15 \neq 0$.

Dans ces conditions, il existe une fonction $y = f(x)$ unique définie et continue dans un voisinage de $A(1,1)$, telle que $F(x, f(x)) = 0$.

De plus, la dérivée f'_x est : $f'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ (a)

$$(a) \Leftrightarrow \boxed{f'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 + 3y}{-3x + 18y^2}} \quad (b).$$

D'où, la dérivée de la fonction $y = f(x)$ définie implicitement à partir de $F(x, y) = 0$ au point $A(1, 1)$ est : $\boxed{f'_x = 0}$.

👉 EXERCICE n° 42

ÉNONCÉ :

Soit la fonction $F(x, y) = x \text{Log}(x + y)$.

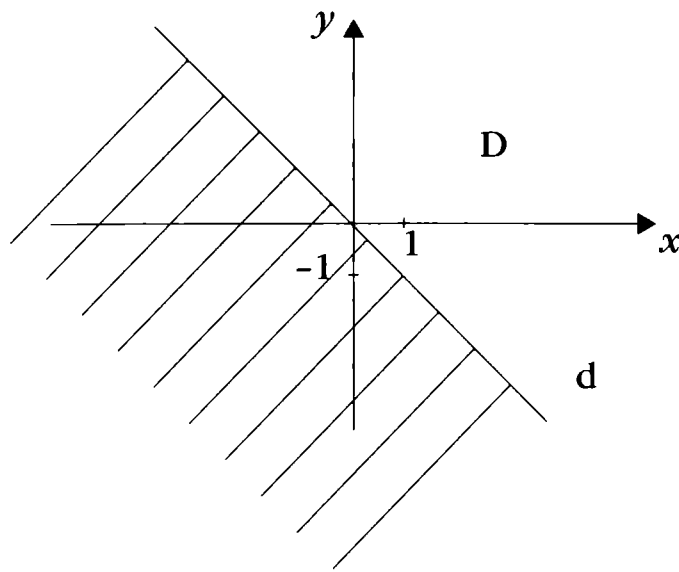
- ① Calculer et représenter le domaine de définition de F .
- ② Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $F(x, y) = 0$ passe par le point $A(1, 0)$ et vérifier que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de ce point.
- ③ En déduire la pente de la tangente au point A de la courbe $\mathcal{C}$.

CORRIGÉ :

- ① Calculons et représentons le domaine de définition de F :

Il faut que $x + y > 0 \Rightarrow \boxed{x > -y}$.

D'où le graphique :



- d est la droite d'équation : $x = -y$.
- D représente le domaine de définition de F

) **Montrons que la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $F(x, y) = 0$ passe par le point $A(1, 0)$ et vérifions que nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de ce point :**

(a) *La courbe $\mathcal{C}$ d'équation $F(x, y) = 0$ passe par le point $A(1, 0)$:*

En effet : $F(1, 0) = 1 \times \text{Log}1 \Rightarrow F(1, 0) = 0$.

(b) *Nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de ce point :*

En effet :

- $F(x, y) = x\text{Log}(x + y)$ est une fonction continue ;
- $F(1, 0) = 0$;
- la fonction $F(x, y)$ possède en $A(1, 0)$ des différentielles partielles F'_x et F'_y continues ; en effet :

$$F'_x = \text{Log}(x + y) + \frac{x}{x + y} \text{ et } F'_y = \frac{x}{x + y} \text{ sont continues ;}$$

- F'_y est non nulle au point $A(1, 0)$; en effet au point A, $F'_y = 1 \neq 0$.

Dans ces conditions, il existe une fonction $y = f(x)$ unique définie et continue dans un voisinage de $A(1, 0)$, telle que $F(x, f(x)) = 0$.

Donc nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage du point $A(1, 0)$.

③ **Déduisons-en la pente de la tangente au point A de la courbe $\mathcal{C}$:**

Comme nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage du point $A(1, 0)$, nous savons que la dérivée f'_x

$$\text{est : } f'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow \boxed{f'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{-\text{Log}(x+y) - \frac{x}{x+y}}{\frac{x}{x+y}}} \quad (b).$$

D'où, la dérivée de la fonction $y = f(x)$ définie implicitement à partir de $F(x, y) = 0$ au point $A(1, 0)$ est : $\boxed{f'_x = -1}$.

Au total, $f'_x = -1$ représente la pente de la tangente au point A de la courbe $\mathcal{C}$.

 EXERCICE n° 43

ÉNONCÉ :

Soit la fonction $F(x, y) = x + 2y - 13 + m\text{Log}(x - y)$, avec $x > y$.

- ① **Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $F(x, y) = 0$ admet au point $A(5, 4)$ une fonction implicite : $y = f_m(x)$. Discuter selon les valeurs de m .**
- ② **Quelle est l'expression de $f'_1(x)$?**

CORRIGÉ :

- ① Montrons que la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $F(x, y) = 0$, pour des valeurs de m , admet au point $A(5, 4)$ une fonction implicite :

Nous savons que : étant donné une fonction $F(x, y)$ continue telle que $F(x_0, y_0) = 0$ et qui possède en (x_0, y_0) des différentielles partielles F'_x et F'_y continues, avec F'_y non nulle en (x_0, y_0) , il existe une fonction $y = f_m(x)$ unique définie et continue dans un voisinage de x_0 , telle que $F(x, f_m(x)) = 0$.

Dans ces conditions, la dérivée $f'_m(x)$ d'une fonction définie sous

forme implicite $F(x, y) = 0$ est :
$$f'_m(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Or ici :

- $F(x, y) = x + 2y - 13 + m \log(x - y)$ est continue $\forall m \in \mathbb{R}$;
- $F(5, 4) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$;
- la fonction $F(x, y)$ possède en $A(5, 4)$ des différentielles partielles F'_x et F'_y continues ; en effet : $F'_x = 1 + \frac{m}{x - y}$ et $F'_y = 2 - \frac{m}{x - y}$ sont continues $\forall m \in \mathbb{R}$ car $x \neq y$ car $x > y$ d'après l'énoncé ;
- F'_y est non nulle au point $A(5, 4)$ si et seulement si
$$2 - \frac{m}{5 - 4} \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{m \neq 2}.$$

Au total, si $m \neq 2$, il existe une fonction $y = f_m(x)$ unique définie et continue dans un voisinage de $A(5, 4)$, telle que $F(x, f_m(x)) = 0$.

Donc la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $F(x, y) = 0$ admet au point $A(5, 4)$ une fonction implicite si et seulement si $m \neq 2$: $y = f_m(x)$.

② **Déterminons l'expression de $f'_1(x)$:**

Nous savons que la dérivée $f'_1(x)$ d'une fonction définie so
forme implicite $F(x, y) = 0$ est :

$$\boxed{f'_1(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad \text{avec} \quad m = 1}.$$

D'où ici, nous avons :

$$f'_1(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{-1 - \frac{1}{x-y}}{2 - \frac{1}{x-y}} \Leftrightarrow \boxed{f'_1(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{-x+y-1}{2x-2y-1}}.$$

IV
PRIMITIVES – INTÉGRALES DÉFINIES
ET INDÉFINIES –
INTÉGRALES SIMPLES –
INTÉGRATION PAR PARTIES –
INTÉGRATION PAR CHANGEMENT
DE VARIABLE –
INTÉGRATION DES FRACTIONS
RATIONNELLES –
INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES OU
IMPROPRES :
LA NOTION DE CONVERGENCE.

 EXERCICE n° 44

ÉNONCÉ :

- ① Définir la notion de primitive.
- ② Quelles sont la définition et les propriétés d'une intégrale définie ?
- ③ Qu'est-ce qu'une intégrale indéfinie ?

CORRIGÉ :

① Définissons la notion de primitive :

f étant définie sur un intervalle I , une fonction F définie sur I est une primitive de f si elle est dérivable sur I et si :

$$\boxed{\forall x \in I : F'(x) = f(x)}.$$

Toutefois il est bon de noter que : F étant une primitive de f sur un intervalle I , toutes les primitives de f sur I sont de la forme $x \rightarrow F(x) + c$, c étant une constante.

En effet, une primitive de $f(x) = 3x^3$ est $F(x) = \frac{3}{4}x^4$ puisque la dérivée $F'(x)$ de $F(x)$ est : $F'(x) = 3x^3$. Mais $f(x)$ n'a pas qu'une primitive et $F(x) = \frac{3}{4}x^4 + 6$, par exemple, a également comme dérivée : $F'(x) = 3x^3$.

② Donnons la définition ainsi que les propriétés d'une intégrale définie :

Soit $y = f(x)$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

Si F est une primitive de f , par définition on appelle l'intégrale définie de f entre a et b :

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}.$$

Il est bon de remarquer que d'une part a et b sont appelées les bornes d'intégration, et que d'autre part on dit que la fonction $f(x)$ est intégrable sur $[a, b]$ au sens de RIEMANN.

Quant aux propriétés, elles sont au nombre de 12 :

- Si f est intégrable sur un intervalle $[-a, a]$ et si f est une fonction

$$\text{paire : } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- Si f est intégrable sur un intervalle $[-a, a]$ et si f est une fonction

$$\text{impaire : } \int_{-a}^a f(x) dx = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

- Nous avons : $\int_a^a f(x)dx = 0$.

- Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \quad c \in [a, b].$$

C'est ce qu'on appelle la relation de CHASLES.

- Si f et g sont intégrables sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

- Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Si f et g sont intégrables sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx, \quad \forall \lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si f et g sont intégrables sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$;

on suppose : $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$,

alors : $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

- Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

- Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors : $|f|$

est intégrable sur $[a, b]$ et $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

- Si f et g sont intégrables sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors

$$\left(\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx.$$

C'est ce qu'on appelle l'inégalité de SCHWARZ.

③ **Déterminons ce qu'est une intégrale indéfinie :**

Une intégrale indéfinie est une intégrale sans borne d'intégration.

Ainsi l'intégrale indéfinie de $f(x)$ se note : $\int f(x)dx = F(x) + c$;

$F(x)$ étant une primitive de $f(x)$ et c étant une constante.

 EXERCICE n° 45

ÉNONCÉ :

Calculer les intégrales définies suivantes :

① $I_1 = \int_0^1 (x + 3)dx.$

② $I_2 = \int_3^6 (x^2 + 6)dx.$

③ $I_3 = \int_1^2 (x - 3)(x - 9)dx.$

④ $I_4 = \int_0^1 (3x^{1/2} - 6x)dx.$

⑤ $I_5 = \int_0^3 (\sqrt{2x} + x^{1/3})dx.$

⑥ $I_6 = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3}.$

⑦ $I_7 = \int_1^2 \frac{dx}{3x^2}.$

⑧ $I_8 = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$

$$\textcircled{9} \quad I_9 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+2}.$$

$$\textcircled{10} \quad I_{10} = \int_3^6 \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 3)\mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{11} \quad I_{11} = \int_{-1}^3 x|x|\mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{12} \quad I_{12} = \int_2^0 \sqrt{|1-x|}\mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{13} \quad I_{13} = \int_{-1}^1 (x^2 - \sqrt{|x|}) \sqrt[3]{x^2} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{14} \quad I_{14} = \int_{-2}^2 (x^3 - \sqrt[3]{x}) x^2 \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{15} \quad I_{15} = \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{(-2x+1)} \mathrm{d}x.$$

CORRIGÉ :

① Calculons l'intégrale définie I_1 :

Nous savons que :

$$I_1 = \int_0^1 (x+3)\mathrm{d}x \quad (\text{a})$$

$$(\text{a}) \Leftrightarrow I_1 = \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_0^1 3\mathrm{d}x \quad (\text{b})$$

$$(\text{b}) \Leftrightarrow I_1 = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + [3x]_0^1 \quad (\text{c})$$

$$(\text{c}) \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{7}{2}}.$$

② Calculons l'intégrale définie I_2 :

Nous savons que :

$$I_2 = \int_3^6 (x^2 + 6) dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_2 = \int_3^6 x^2 dx + \int_3^6 6 dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_2 = \left[\frac{x^3}{3} \right]_3^6 + [6x]_3^6 \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{I_2 = 81}.$$

③ Calculons l'intégrale définie I_3 :

Nous savons que :

$$I_3 = \int_1^2 (x-3)(x-9) dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_3 = \int_1^2 (x^2 - 12x + 27) dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_3 = \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 (-12x) dx + \int_1^2 27 dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_3 = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + [-6x^2]_1^2 + [27x]_1^2 \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{I_3 = \frac{34}{3}}.$$

④ Calculons l'intégrale définie I_4 :

Nous savons que :

$$I_4 = \int_0^1 (3x^{1/2} - 6x) dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_4 = \int_0^1 3x^{1/2} dx + \int_0^1 (-6x) dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_4 = [2x^{3/2}]_0^1 + [-3x^2]_0^1 \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{I_4 = -1}.$$

⑤ Calculons l'intégrale définie I_5 :

Nous savons que :

$$I_5 = \int_0^3 (\sqrt{2x} + x^{1/3}) dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_5 = \int_0^3 \sqrt{2x} dx + \int_0^3 x^{1/3} dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_5 = \int_0^3 (2x)^{1/2} dx + \int_0^3 x^{1/3} dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_5 = 2^{1/2} \int_0^3 x^{1/2} dx + \int_0^3 x^{1/3} dx \quad (d)$$

$$(d) \Leftrightarrow I_5 = 2^{1/2} \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^3 + \left[\frac{3}{4} x^{4/3} \right]_0^3 \quad (e)$$

$$(e) \Rightarrow \boxed{I_5 = 2\sqrt{6} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{81}}.$$

⑥ **Calculons l'intégrale définie I_6 :**

Nous savons que :

$$I_6 = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_6 = \int_{-1}^0 x^{-3} dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_6 = \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right]_{-1}^0 \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{I_6 = \frac{1}{2}}.$$

⑦ **Calculons l'intégrale définie I_7 :**

Nous savons que :

$$I_7 = \int_1^2 \frac{dx}{3x^2} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_7 = \int_1^2 \frac{x^{-2}}{3} dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_7 = \left[-\frac{x^{-1}}{3} \right]_1^2 \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{I_7 = \frac{1}{6}}.$$

Calculons l'intégrale définie I_8 :

Nous savons que :

$$I_8 = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_8 = \int_1^2 x dx + \int_1^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_8 = \int_1^2 x dx + \int_1^2 (-x^{-1/2}) dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_8 = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + [-2x^{1/2}]_1^2 \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{I_8 = \frac{7}{2} - 2\sqrt{2}}.$$

Calculons l'intégrale définie I_9 :

Nous savons que :

$$I_9 = \int_0^1 \frac{dx}{x+2} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_9 = [\text{Log}|x+2|]_0^1 \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_9 = [\text{Log}(x+2)]_0^1 \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{I_9 = \text{Log}3 - \text{Log}2}.$$

Calculons l'intégrale définie I_{10} :

Nous savons que :

$$I_{10} = \int_3^6 e^x(e^x + 3) dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{10} = \int_3^6 (e^{2x} + 3e^x) dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_{10} = \int_3^6 e^{2x} dx + \int_3^6 3e^x dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_{10} = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_3^6 + [3e^x]_3^6 \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{I_{10} = \frac{1}{2} e^{12} + \frac{5}{2} e^6 - 3e^3}.$$

⑪ Calculons l'intégrale définie I_{11} :

Nous savons que :

$$I_{11} = \int_{-1}^3 x|x| dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{11} = \int_{-1}^0 x(-x) dx + \int_0^3 x(x) dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_{11} = \int_{-1}^0 -x^2 dx + \int_0^3 x^2 dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_{11} = \left[-\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{I_{11} = \frac{26}{3}}.$$

⑫ Calculons l'intégrale définie I_{12} :

Nous savons que :

$$I_{12} = \int_2^0 \sqrt{|1-x|} dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{12} = \int_2^0 (|1-x|)^{1/2} dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_{12} = \int_2^1 (x-1)^{1/2} dx + \int_1^0 (1-x)^{1/2} dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_{12} = \left[\frac{2}{3} (x-1)^{3/2} \right]_2^1 + \left[-\frac{2}{3} (1-x)^{3/2} \right]_1^0 \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{I_{12} = -\frac{4}{3}}.$$

⑬ Calculons l'intégrale définie I_{13} :

Nous savons que :

$$I_{13} = \int_{-1}^1 (x^2 - \sqrt{|x|}) \sqrt[3]{x^2} \, dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{13} = \int_{-1}^1 (x^2 - (|x|)^{1/2}) x^{2/3} \, dx \quad (b).$$

Or la fonction $f(x) = (x^2 - (|x|)^{1/2}) x^{2/3}$ est une fonction paire, d'où :

$$(b) \Leftrightarrow I_{13} = 2 \int_0^1 (x^2 - (|x|)^{1/2}) x^{2/3} \, dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_{13} = 2 \int_0^1 (x^2 - x^{1/2}) x^{2/3} \, dx \quad (d)$$

$$(d) \Leftrightarrow I_{13} = 2 \int_0^1 (x^{8/3} - x^{7/6}) \, dx \quad (e)$$

$$(e) \Leftrightarrow I_{13} = 2 \int_0^1 x^{8/3} \, dx + 2 \int_0^1 (-x^{7/6}) \, dx \quad (f)$$

$$(f) \Leftrightarrow I_{13} = 2 \left[\frac{3}{11} x^{11/3} \right]_0^1 + 2 \left[-\frac{6}{13} x^{13/6} \right]_0^1 \quad (g)$$

$$(g) \Rightarrow \boxed{I_{13} = -\frac{54}{143}}.$$

⑭ Calculons l'intégrale définie I_{14} :

Nous savons que :

$$I_{14} = \int_{-2}^2 (x^3 - \sqrt[3]{x}) x^2 \, dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{14} = \int_{-2}^2 (x^3 - x^{1/3}) x^2 \, dx \quad (b).$$

Or la fonction $f(x) = (x^3 - x^{1/3}) x^2$ est une fonction impaire, d'où : $(b) \Leftrightarrow I_{14} = 0$.

⑮ Calculons l'intégrale définie I_{15} :

Nous savons que $I_{15} = \int_{-1}^1 e^{(-2x+1)} dx$ (a).

Or la fonction $f(x) = e^{(-2x+1)}$ n'est ni une fonction paire, ni fonction impaire,

d'où :

$$(a) \Leftrightarrow I_{15} = \left[-\frac{1}{2} e^{(-2x+1)} \right]_{-1}^1 \quad (b)$$

$$(b) \Rightarrow \boxed{I_{15} = -\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} e^3}.$$

 EXERCICE n° 46

ÉNONCÉ :

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

① $I_1 = \int (3x^2 + 9) dx.$

② $I_2 = \int (\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{2x}) dx.$

③ $I_3 = \int \left(\frac{1}{x^4} + 10 \right) dx.$

④ $I_4 = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx.$

⑤ $I_5 = \int a^x dx, \quad a \in \mathbb{R}_+^* - \{-1\}.$

$$\textcircled{6} \quad I_6 = \int (e^{x/a} + e^{-x/a})^2 dx, \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

CORRIGÉ :

\textcircled{1} Calculons l'intégrale indéfinie I_1 :

Nous savons que :

$$I_1 = \int (3x^2 + 9)dx \quad (\text{a})$$

$$(\text{a}) \Leftrightarrow I_1 = \int 3x^2 dx + \int 9dx \quad (\text{b})$$

$$(\text{b}) \Leftrightarrow I_1 = [x^3] + [9x] \quad (\text{c})$$

$$(\text{c}) \Rightarrow \boxed{I_1 = x^3 + 9x + c}, \quad c \text{ étant une constante.}$$

\textcircled{2} Calculons l'intégrale indéfinie I_2 :

Nous savons que :

$$I_2 = \int (\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{2x})dx \quad (\text{a})$$

$$(\text{a}) \Leftrightarrow I_2 = \int (x^{1/2} - 3(2x)^{1/3}) dx \quad (\text{b})$$

$$(\text{b}) \Leftrightarrow I_2 = \int x^{1/2} dx + (-3)2^{1/3} \int x^{1/3} dx \quad (\text{c})$$

$$(\text{c}) \Leftrightarrow I_2 = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right] + (-3)2^{1/3} \left[\frac{3}{4} x^{4/3} \right] \quad (\text{d})$$

$$(\text{d}) \Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{9}{4} 2^{1/3} x^{4/3} + c}, \quad c \text{ étant une constante.}$$

\textcircled{3} Calculons l'intégrale indéfinie I_3 :

Nous savons que :

$$I_3 = \int \left(\frac{1}{(x)^4} + 10 \right) dx \quad (\text{a})$$

$$(a) \Leftrightarrow I_3 = \int (x^{-4} + 10) dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_3 = \int x^{-4} dx + \int 10 dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_3 = \left[-\frac{1}{3}x^{-3} \right] + [10x] \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{I_3 = -\frac{1}{3}x^{-3} + 10x + c}, \text{ } c \text{ étant une constante.}$$

④ **Calculons l'intégrale indéfinie I_4 :**

Nous savons que :

$$I_4 = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_4 = \int \sqrt{x} dx + \int \frac{1}{x} dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_4 = \int x^{1/2} dx + \int \frac{1}{x} dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_4 = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} \right] + [\text{Log}|x|] \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{I_4 = \frac{2}{3}x^{3/2} + \text{Log}|x| + c}, \text{ } c \text{ étant une constante.}$$

⑤ **Calculons l'intégrale indéfinie I_5 :**

Nous savons que :

$$I_5 = \int a^x dx, \text{ } a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_5 = \int e^{\text{Log } a^x} dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_5 = \int e^{x \text{Log } a} dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_5 = \left[\frac{1}{\text{Log } a} e^{x \text{Log } a} \right] \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{I_5 = \frac{1}{\text{Log} a} a^x + c}, c \text{ étant une constante.}$$

⑥ **Calculons l'intégrale indéfinie I_6 :**

Nous savons que :

$$I_6 = \int (e^{x/a} + e^{-x/a})^2 dx, \quad a \in \mathbb{R}^* \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_6 = \int (e^{2x/a} + e^{-2x/a} + 2) dx \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_6 = \int e^{2x/a} dx + \int e^{-2x/a} dx + \int 2 dx \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_6 = \left[\frac{a}{2} e^{2x/a} \right] + \left[-\frac{a}{2} e^{-2x/a} \right] + [2x] \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{I_6 = \frac{a}{2} e^{2x/a} - \frac{a}{2} e^{-2x/a} + 2x + c}, c \text{ étant une constante.}$$

 EXERCICE n° 47

ÉNONCÉ :

① **Rappeler la formule de l'intégration par parties.**

② **Calculer les intégrales définies et indéfinies suivantes à l'aide d'une intégration par parties :**

$$(a) \quad I_1 = \int_1^2 x \text{Log}(x) dx.$$

$$(b) \quad I_2 = \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

$$\textcircled{\text{c}} \quad I_3 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} \, dx.$$

$$\textcircled{\text{d}} \quad I_4 = \int_2^3 \text{Log}(x^2 - 1) \, dx.$$

$$\textcircled{\text{e}} \quad I_5 = \int_{-1}^1 (3x^2 + 4x) e^x \, dx.$$

$$\textcircled{\text{f}} \quad I_6 = \int_1^4 \frac{\text{Log } x}{x^3} \, dx.$$

$$\textcircled{\text{g}} \quad I_7 = \int_0^1 \frac{x+1}{e^x} \, dx.$$

$$\textcircled{\text{h}} \quad I_8 = \int_2^1 x (\text{Log } x)^2 \, dx.$$

$$\textcircled{\text{i}} \quad I_9 = \int \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}} \, dx.$$

$$\textcircled{\text{j}} \quad I_{10} = \int \arctan x \, dx.$$

$$\textcircled{\text{k}} \quad I_{11} = \int e^{-2x} \sin x \, dx.$$

$$\textcircled{\text{l}} \quad I_{12} = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx.$$

CORRIGÉ :

① Rappelons la formule de l'intégration par parties :

Soient u et v deux fonctions admettant des dérivées continues sur l'intervalle $[a, b]$, avec $a < b$, nous avons :

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx}.$$

Il est bon de noter que pour une intégrale indéfinie, nous avons :

$$\int u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)] - \int v(x)u'(x)dx .$$

)

(a) Calculons l'intégrale définie I_1 à l'aide d'une intégration par parties :

Nous savons que : $I_1 = \int_1^2 x \operatorname{Log} x \, dx$.

Posons :

- $u(x) = \operatorname{Log} x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x},$

- $v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}.$

Dans ces conditions :

$$I_1 = \left[(\operatorname{Log} x) \frac{x^2}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2} dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_1 = \left[(\operatorname{Log} x) \frac{x^2}{2} \right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^2 \quad (b)$$

$$(b) \Rightarrow \boxed{I_1 = 2\operatorname{Log}(2) - \frac{3}{4}}.$$

(b) Calculons l'intégrale définie I_2 à l'aide d'une intégration par parties :

Nous savons que : $I_2 = \int_0^1 x e^{-x} dx$.

Posons :

- $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1,$

- $v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}.$

Dans ces conditions :

$$I_2 = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_2 = [-xe^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1 \quad (b)$$

$$(b) \Rightarrow \boxed{I_2 = 1 - 2e^{-1}}.$$

(c) Calculons l'intégrale définie I_3 à l'aide d'une intégration par parties :

$$\text{Nous savons que : } I_3 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx.$$

Posons :

$$\bullet \quad u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1,$$

$$\bullet \quad v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow v(x) = 2\sqrt{1+x},$$

$$\left(\text{car } \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} \right).$$

Dans ces conditions :

$$I_3 = [x(2\sqrt{1+x})]_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{1+x} dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_3 = [x(2\sqrt{1+x})]_0^1 - \left[\frac{4}{3} (1+x)^{3/2} \right]_0^1 \quad (b)$$

$$(b) \Rightarrow \boxed{I_3 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}}.$$

(d) Calculons l'intégrale définie I_4 à l'aide d'une intégration par parties :

$$\text{Nous savons que : } I_4 = \int_2^3 \text{Log}(x^2 - 1) dx.$$

Posons :

$$\bullet \quad u(x) = \text{Log}(x^2 - 1) \Rightarrow u'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1},$$

- $v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x.$

Dans ces conditions : $I_4 = [(\text{Log}(x^2 - 1))x]_2^3 - \int_2^3 \frac{2x^2}{x^2 - 1} dx \quad (\text{a});$

or $\frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2 + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}.$

D'où :

(a) $\Leftrightarrow$

$$I_4 = [(\text{Log}(x^2 - 1))x]_2^3 - \int_2^3 2dx - \int_2^3 \frac{1}{x - 1} dx - \int_2^3 \left(-\frac{1}{x + 1}\right) dx \quad (\text{b})$$

(b) $\Leftrightarrow$

$$I_4 = [(\text{Log}(x^2 - 1))x]_2^3 - [2x]_2^3 - [\text{Log}|x - 1|]_2^3 + [\text{Log}|x + 1|]_2^3 \quad (\text{c})$$

(c) $\Leftrightarrow$

$$I_4 = [(\text{Log}(x^2 - 1))x]_2^3 - [2x]_2^3 - [\text{Log}(x - 1)]_2^3 + [\text{Log}(x + 1)]_2^3 \quad (\text{d})$$

(d) $\Rightarrow \boxed{I_4 = 10\text{Log}2 - 3\text{Log}3 - 2}.$

Ⓔ Calculons l'intégrale définie I_5 à l'aide d'une intégration par parties :

Nous savons que : $I_5 = \int_{-1}^1 (3x^2 + 4x)e^x dx.$

Posons :

- $u(x) = (3x^2 + 4x) \Rightarrow u'(x) = (6x + 4),$

- $v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x.$

Dans ces conditions :

$$I_5 = [(3x^2 + 4x)e^x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x (6x + 4) dx \quad (\text{a}).$$

Procédons à une seconde intégration par parties pour le calcul

de : $\int_{-1}^1 e^x (6x + 4) dx.$

Posons :

$$\bullet \quad u(x) = (6x + 4) \Rightarrow u'(x) = 6,$$

$$\bullet \quad v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x.$$

D'où :

$$\int_{-1}^1 e^x (6x + 4) dx = [(6x + 4)e^x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (e^x) 6 dx \quad (a')$$

$$(a') \Leftrightarrow \int_{-1}^1 e^x (6x + 4) dx = [(6x + 4)e^x]_{-1}^1 - [6e^x]_{-1}^1 \quad (b')$$

$$(b') \Rightarrow \int_{-1}^1 e^x (6x + 4) dx = 4e + 8e^{-1}.$$

Par conséquent :

$$(a) \Leftrightarrow I_5 = [(3x^2 + 4x)e^x]_{-1}^1 - (4e + 8e^{-1}) \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_5 = (7e + e^{-1}) - (4e + 8e^{-1}) \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{I_5 = 3e - 7e^{-1}}.$$

(f) Calculons l'intégrale définie I_6 à l'aide d'une intégration par parties :

$$\text{Nous savons que : } I_6 = \int_1^4 \frac{\text{Log} x}{x^3} dx.$$

Posons :

$$\bullet \quad u(x) = \text{Log} x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x},$$

$$\bullet \quad v'(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{2x^2}.$$

Dans ces conditions :

$$I_6 = \left[(\text{Log} x) \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \right]_1^4 - \int_1^4 -\frac{1}{2x^3} dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_6 = \left[(\text{Log} x) \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \right]_1^4 - \left[\frac{1}{4x^2} \right]_1^4 \quad (b)$$

$$(b) \Rightarrow \boxed{I_6 = -\frac{\text{Log} 2}{16} + \frac{15}{64}}.$$

(g) Calculons l'intégrale définie I_7 à l'aide d'une intégration par parties :

$$\text{Nous savons que : } I_7 = \int_0^1 \frac{x+1}{e^x} dx.$$

Posons :

- $u(x) = (x+1) \Rightarrow u'(x) = 1,$
- $v'(x) = \frac{1}{e^x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}.$

Dans ces conditions :

$$I_7 = [(x+1)(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_7 = [(x+1)(-e^{-x})]_0^1 - [e^{-x}]_0^1 \quad (b)$$

$$(b) \Rightarrow \boxed{I_7 = 2 - 3e^{-1}}.$$

(h) Calculons l'intégrale définie I_8 à l'aide d'une intégration par parties :

$$\text{Nous savons que : } I_8 = \int_2^1 x (\text{Log } x)^2 dx.$$

Posons :

- $u(x) = (\text{Log } x)^2 \Rightarrow u'(x) = \frac{2\text{Log } x}{x},$
- $v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}.$

Dans ces conditions :

$$I_8 = \left[(\text{Log } x)^2 \left(\frac{x^2}{2} \right) \right]_2^1 - \int_2^1 x \text{Log } (x) dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_8 = \left[(\text{Log } x)^2 \left(\frac{x^2}{2} \right) \right]_2^1 + \int_1^2 x \text{Log } x dx \quad (b);$$

or nous savons d'après l'intégrale I_1 que :

$$\int_1^2 x \text{Log } x dx = 2\text{Log}2 - \frac{3}{4}.$$

D'où :

$$(b) \Leftrightarrow I_8 = \left[(\text{Log } x)^2 \left(\frac{x^2}{2} \right) \right]_2^1 + \left(2\text{Log}2 - \frac{3}{4} \right) \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{I_8 = -2(\text{Log}2)^2 + 2\text{Log}2 - \frac{3}{4}}.$$

(i) Calculons l'intégrale indéfinie I_9 à l'aide d'une intégration p parties :

$$\text{Nous savons que : } I_9 = \int \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}} dx.$$

Posons :

- $u(x) = \text{Log } x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x},$
- $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow v(x) = 2x^{1/2} \left(\text{car } \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} \right).$

Dans ces conditions :

$$I_9 = [(\text{Log } x)(2x^{1/2})] - \int \frac{2}{x^{1/2}} dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_9 = [(\text{Log } x)(2x^{1/2})] - [4x^{1/2}] \quad (b)$$

$$(b) \Rightarrow \boxed{I_9 = 2\sqrt{x} \text{Log } x - 4\sqrt{x} + c},$$

c étant une constante.

⓵ Calculons l'intégrale indéfinie I_{10} à l'aide d'une intégration par parties :

Nous savons que : $I_{10} = \int \arctan x \, dx$.

Posons :

- $u(x) = \arctan x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$,
- $v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$.

Dans ces conditions :

$$I_{10} = [(\arctan x)(x)] - \int \frac{x}{1+x^2} dx \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{10} = [(\arctan x)(x)] - \left[\frac{1}{2} \text{Log}(1+x^2) \right] \quad (b)$$

$$(b) \Rightarrow \boxed{I_{10} = x \arctan x - \frac{\text{Log}(1+x^2)}{2} + c},$$

c étant une constante.

⓶ Calculons l'intégrale indéfinie I_{11} à l'aide d'une intégration par parties :

Nous savons que : $I_{11} = \int e^{-2x} \sin x \, dx$.

Posons :

- $u(x) = e^{-2x} \Rightarrow u'(x) = -2e^{-2x}$,
- $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$.

Dans ces conditions :

$$I_{11} = [(e^{-2x})(-\cos x)] - \int 2 \cos x e^{-2x} dx \quad (a).$$

Procédons à une seconde intégration par parties pour le calcul de

$$\int 2 \cos x e^{-2x} dx.$$

Posons :

$$\bullet \quad u(x) = e^{-2x} \Rightarrow u'(x) = -2e^{-2x},$$

$$\bullet \quad v'(x) = 2\cos x \Rightarrow v(x) = 2\sin x.$$

$$\text{D'où : } \int 2\cos x e^{-2x} dx = [(e^{-2x})(2\sin x)] - \int -4\sin x e^{-2x} dx \quad (a).$$

Par conséquent :

$$(a) \Leftrightarrow I_{11} = [(e^{-2x})(-\cos x)] - [(e^{-2x})(2\sin x)] - 4I_{11} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow 5I_{11} = [(e^{-2x})(-\cos x)] - [(e^{-2x})(2\sin x)] \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{I_{11} = \frac{(-e^{-2x})(\cos x + 2\sin x)}{5} + c}, \quad c \text{ étant une constante.}$$

① Calculons l'intégrale définie I_{12} à l'aide d'une intégration par parties :

$$\text{Nous savons que : } I_{12} = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx.$$

Posons :

$$\bullet \quad u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x,$$

$$\bullet \quad v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x.$$

Dans ces conditions :

$$I_{12} = [(x^2)(-\cos x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos x)(2x) dx \quad (a).$$

Procédons à une seconde intégration par parties pour le calcul de

$$\int_0^{\pi/2} (-\cos x)(2x) dx.$$

Posons :

$$\bullet \quad u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = 2,$$

$$\bullet \quad v'(x) = -\cos x \Rightarrow v(x) = -\sin x.$$

D'où :

$$\int_0^{\pi/2} (-\cos x)(2x) dx = [(2x)(-\sin x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -2 \sin x dx \quad (a')$$

$$(a') \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} (-\cos x)(2x) dx = [(2x)(-\sin x)]_0^{\pi/2} - [2 \cos x]_0^{\pi/2} \quad (b')$$

$$(b') \Rightarrow \int_0^{\pi/2} (-\cos x)(2x) dx = -\pi + 2.$$

Par conséquent :

$$(a) \Leftrightarrow I_{12} = [(x^2)(-\cos x)]_0^{\pi/2} - (-\pi + 2) \quad (b)$$

$$(b) \Rightarrow \boxed{I_{12} = \pi - 2}.$$

📖 EXERCICE n° 48

ÉNONCÉ :

Calculons les intégrales définies suivantes à l'aide d'un changement de variable :

$$\textcircled{1} \quad I_1 = \int_2^3 \frac{x + 1/2}{x^2 + x - 3} dx.$$

$$\textcircled{2} \quad I_2 = \int_0^3 \frac{2x + 1}{\sqrt{2x + 1}} dx.$$

$$\textcircled{3} \quad I_3 = \int_0^1 (1 + x^2) x dx.$$

$$\textcircled{4} \quad I_4 = \int_1^{e^2} 3(1 + x^3) x^2 dx.$$

$$\textcircled{5} \quad I_5 = \int_1^5 \sqrt{2x - 1} dx.$$

$$\textcircled{6} \quad I_6 = \int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{25-3x}}.$$

$$\textcircled{7} \quad I_7 = \int_0^1 \frac{x^2}{2+x^3} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{8} \quad I_8 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\operatorname{Log} x)}.$$

$$\textcircled{9} \quad I_9 = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(10-3\mathrm{e}^x)^2} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{10} \quad I_{10} = \int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}.$$

$$\textcircled{11} \quad I_{11} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{12} \quad I_{12} = \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{13} \quad I_{13} = \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{(1+x)} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{14} \quad I_{14} = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^x) \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{15} \quad I_{15} = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1+\operatorname{Log} x}{x \operatorname{Log} x} \mathrm{d}x.$$

CORRIGÉ :

- \textcircled{1} Calculons l'intégrale définie I_1 à l'aide d'un changement de variable :**

$$\text{Nous savons que : } I_1 = \int_2^3 \frac{x+1/2}{x^2+x-3} \mathrm{d}x.$$

Posons :

- $u = x^2 + x - 3 \Rightarrow du = (2x + 1)dx,$

- de plus, $u(2) = 3$ et $u(3) = 9.$

D'où : $I_1 = \int_3^9 \frac{du}{2u}$ (a)

(a) $\Leftrightarrow I_1 = \left[\frac{1}{2} \text{Log}|u| \right]_3^9$ (b)

(b) $\Leftrightarrow I_1 = \left[\frac{1}{2} \text{Log}(u) \right]_3^9$ (c)

(c) $\Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{\text{Log}3}{2}}.$

Calculons l'intégrale définie I_2 à l'aide d'un changement de variable :

Nous savons que : $I_2 = \int_0^3 \frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}} dx.$

Posons :

- $u = (2x+1)^{1/2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2} \times (2)dx$ (α),

(α) $\Rightarrow du = \frac{1}{u}dx,$

- de plus, $u(0) = 1$ et $u(3) = \sqrt{7}.$

D'où : $I_2 = \int_1^{\sqrt{7}} \frac{u^2 \times u}{u} du$ (a)

(a) $\Leftrightarrow I_2 = \int_1^{\sqrt{7}} u^2 du$ (b)

(b) $\Leftrightarrow I_2 = \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^{\sqrt{7}}$ (c)

(c) $\Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{7\sqrt{7}-1}{3}}.$

③ **Calculons l'intégrale définie I_3 à l'aide d'un changement de variable :**

Nous savons que : $I_3 = \int_0^1 (1+x^2)x \, dx$.

Posons :

- $u = 1 + x^2 \Rightarrow du = 2x \, dx$,
- de plus, $u(0) = 1$ et $u(1) = 2$.

D'où : $I_3 = \int_1^2 \frac{u}{2} du$ (a)

(a) $\Leftrightarrow I_3 = \left[\frac{u^2}{4} \right]_1^2$ (b)

(b) $\Rightarrow \boxed{I_3 = \frac{3}{4}}$.

④ **Calculons l'intégrale définie I_4 à l'aide d'un changement de variable :**

Nous savons que : $I_4 = \int_1^{e^2} 3(1+x^3)x^2 \, dx$.

Posons :

- $u = 1 + x^3 \Rightarrow du = 3x^2 \, dx$,
- de plus, $u(1) = 2$ et $u(e^2) = 1 + e^6$.

D'où : $I_4 = \int_2^{1+e^6} u \, du$ (a)

(a) $\Leftrightarrow I_4 = \left[\frac{u^2}{2} \right]_2^{1+e^6}$ (b)

(b) $\Rightarrow \boxed{I_4 = \frac{e^{12} + 2e^6 - 3}{2}}$.

⑤ **Calculons l'intégrale définie I_5 à l'aide d'un changement de variable :**

Nous savons que : $I_5 = \int_1^5 \sqrt{2x-1} \, dx$.

Posons :

$$\bullet \quad u = \sqrt{2x-1} \Rightarrow du = \frac{1}{2}(2x-1)^{-1/2} \times (2) dx \quad (\alpha)$$

$$(\alpha) \Rightarrow du = \frac{1}{u} dx,$$

$$\bullet \quad \text{de plus, } u(1) = 1 \text{ et } u(5) = 3.$$

$$\text{D'où : } I_5 = \int_1^3 u \times u du \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_5 = \int_1^3 u^2 du \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_5 = \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^3 \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{I_5 = \frac{26}{3}}.$$

Calculons l'intégrale définie I_6 à l'aide d'un changement de variable :

$$\text{Nous savons que : } I_6 = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25-3x}}.$$

Posons :

$$\bullet \quad u = \sqrt{25-3x} \Rightarrow du = \frac{1}{2}(25-3x)^{-1/2} \times (-3) dx \quad (\alpha)$$

$$(\alpha) \Rightarrow du = \frac{-3}{2u} dx,$$

$$\bullet \quad \text{de plus, } u(0) = 5 \text{ et } u(3) = 4.$$

$$\text{D'où : } I_6 = \int_5^4 -\frac{2u}{3u} du \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_6 = \int_5^4 -\frac{2}{3} du \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_6 = \left[-\frac{2}{3}u \right]_5^4 \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{I_6 = \frac{2}{3}}.$$

⑦ **Calculons l'intégrale définie I_7 à l'aide d'un changement de variable :**

$$\text{Nous savons que : } I_7 = \int_0^1 \frac{x^2}{2+x^3} dx.$$

Posons :

- $u = 2 + x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$;
- de plus, $u(0) = 2$ et $u(1) = 3$.

$$\text{D'où : } I_7 = \int_2^3 \frac{1}{3u} du \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_7 = \left[\frac{1}{3} \text{Log}|u| \right]_2^3 \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_7 = \left[\frac{1}{3} \text{Log}(u) \right]_2^3 \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{I_7 = \frac{1}{3} \text{Log}\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

⑧ **Calculons l'intégrale définie I_8 à l'aide d'un changement de variable :**

$$\text{Nous savons que : } I_8 = \int_1^2 \frac{dx}{x(1 + \text{Log } x)}.$$

Posons :

- $u = 1 + \text{Log } x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$,
- de plus, $u(1) = 1$ et $u(2) = 1 + \text{Log } 2$.

$$\text{D'où : } I_8 = \int_1^{1+\text{Log } 2} \frac{1}{u} du \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_8 = [\text{Log}|u|]_1^{1+\text{Log } 2} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_8 = [\text{Log}(u)]_1^{1+\text{Log } 2} \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{I_8 = \text{Log}(1 + \text{Log}2)}.$$

Calculons l'intégrale définie I_9 à l'aide d'un changement de variable :

$$\text{Nous savons que : } I_9 = \int_0^1 \frac{e^x}{(10 - 3e^x)^2} dx.$$

Posons :

- $u = 10 - 3e^x \Rightarrow du = -3e^x dx,$
- de plus, $u(0) = 7$ et $u(1) = 10 - 3e.$

$$\text{D'où : } I_9 = \int_7^{10-3e} \frac{-1}{3u^2} du \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_9 = \int_7^{10-3e} -\frac{u^{-2}}{3} du \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_9 = \left[\frac{u^{-1}}{3} \right]_7^{10-3e} \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{I_9 = \frac{1}{3(10-3e)} - \frac{1}{21}}.$$

Calculons l'intégrale définie I_{10} à l'aide d'un changement de variable :

$$\text{Nous savons que : } I_{10} = \int_0^3 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

Posons :

$$\bullet \quad u = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2} x^{-1/2} dx \quad (\alpha)$$

$$(\alpha) \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \quad (\beta)$$

$$(\beta) \Rightarrow du = \frac{1}{2(u-1)} dx,$$

- de plus, $u(0) = 1$ et $u(3) = 1 + \sqrt{3}.$

$$\text{D'où : } I_{10} = \int_1^{1+\sqrt{3}} \frac{2(u-1)}{u} du \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{10} = \int_1^{1+\sqrt{3}} \left(2 - \frac{2}{u}\right) du \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_{10} = \int_1^{1+\sqrt{3}} 2 du + \int_1^{1+\sqrt{3}} \left(-\frac{2}{u}\right) du \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_{10} = [2u]_1^{1+\sqrt{3}} + [-2\text{Log}|u|]_1^{1+\sqrt{3}} \quad (d)$$

$$(d) \Leftrightarrow I_{10} = [2u]_1^{1+\sqrt{3}} + [-2\text{Log}(u)]_1^{1+\sqrt{3}} \quad (e)$$

$$(e) \Rightarrow \boxed{I_{10} = 2\sqrt{3} - 2\text{Log}(1 + \sqrt{3})}.$$

⑪ Calculons l'intégrale définie I_{11} à l'aide d'un changement de variable :

$$\text{Nous savons que : } I_{11} = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Posons :

- $u = e^x + e^{-x} \Rightarrow du = (e^x - e^{-x}) dx,$
- de plus, $u(0) = 2$ et $u(1) = e + e^{-1}.$

$$\text{D'où : } I_{11} = \int_2^{e+e^{-1}} \frac{1}{u} du \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{11} = [\text{Log}|u|]_2^{e+e^{-1}} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_{11} = [\text{Log}(u)]_2^{e+e^{-1}} \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{I_{11} = \text{Log}\left(\frac{e + e^{-1}}{2}\right)}.$$

⑫ Calculons l'intégrale définie I_{12} à l'aide d'un changement de variable :

$$\text{Nous savons que : } I_{12} = \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} dx.$$

Posons :

- $u = 1 + x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$,
- de plus, $u(0) = 1$ et $u(1) = 2$.

D'où : $I_{12} = \int_1^2 \frac{1}{3} \sqrt{u} du$ (a)

(a) $\Leftrightarrow I_{12} = \int_1^2 \frac{1}{3} u^{1/2} du$ (b)

(b) $\Leftrightarrow I_{12} = \left[\frac{2}{9} u^{3/2} \right]_1^2$ (c)

(c) $\Rightarrow \boxed{I_{12} = \frac{4}{9} \sqrt{2} - \frac{2}{9}}.$

Calculons l'intégrale définie I_{13} à l'aide d'un changement de variable :

Nous savons que : $I_{13} = \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx.$

Posons :

- $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2} x^{-1/2} dx$ (α)

(α) $\Rightarrow du = \frac{1}{2u} dx,$

- de plus, $u(1) = 1$ et $u(3) = \sqrt{3}$.

D'où : $I_{13} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{u \times (2u)}{1+u^2} du$ (a);

or $\frac{u^2}{1+u^2} = 1 - \frac{1}{1+u^2},$

d'où :

(a) $\Leftrightarrow I_{13} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2u^2}{1+u^2} du$ (b)

$$(b) \Leftrightarrow I_{13} = \int_1^{\sqrt{3}} \left(2 - \frac{2}{1+u^2} \right) du \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_{13} = \int_1^{\sqrt{3}} 2 du + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{-2}{1+u^2} du \quad (d)$$

$$(d) \Leftrightarrow I_{13} = [2u]_1^{\sqrt{3}} + [-2 \arctan u]_1^{\sqrt{3}} \quad (e)$$

$$(e) \Rightarrow \boxed{I_{13} = 2(\sqrt{3} - 1) - 2(\arctan \sqrt{3} - \arctan 1)}.$$

⑭ **Calculons l'intégrale définie I_{14} à l'aide d'un changement de variable :**

Nous savons que : $I_{14} = \int_0^1 e^{-x}(1 + e^x)dx$.

Posons :

- $u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x} dx$,
- de plus, $u(0) = 1$ et $u(1) = e^{-1}$.

$$\text{D'où : } I_{14} = \int_1^{e^{-1}} -(1 + u^{-1})du \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow I_{14} = \int_1^{e^{-1}} -\left(1 + \frac{1}{u}\right)du \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_{14} = \int_1^{e^{-1}} -du + \int_1^{e^{-1}} -\frac{1}{u} du \quad (c)$$

$$(c) \Leftrightarrow I_{14} = [-u]_1^{e^{-1}} + [-\text{Log}|u|]_1^{e^{-1}} \quad (d)$$

$$(d) \Leftrightarrow I_{14} = [-u]_1^{e^{-1}} + [-\text{Log}(u)]_1^{e^{-1}} \quad (e)$$

$$(e) \Rightarrow \boxed{I_{14} = 2 - e^{-1}}.$$

⑮ Calculons l'intégrale définie I_{15} à l'aide d'un changement de variable :

Nous savons que : $I_{15} = \int_e^{e^2} \frac{1 + \text{Log}x}{x \text{Log}x} dx.$

Posons : • $u = x \text{Log}x \Rightarrow du = \left(1 \times \text{Log}x + x \times \frac{1}{x}\right) dx \quad (\alpha)$

$$(\alpha) \Rightarrow du = (1 + \text{Log}x) dx,$$

• de plus, $u(e) = e$ et $u(e^2) = 2e^2.$

D'où : $I_{15} = \int_e^{2e^2} \frac{1}{u} du \quad (a)$

$$(a) \Leftrightarrow I_{15} = [\text{Log}|u|]_e^{2e^2} \quad (b)$$

$$(b) \Leftrightarrow I_{15} = [\text{Log}(u)]_e^{2e^2} \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \boxed{I_{15} = 1 + \text{Log}2}.$$

👉 **EXERCICE n° 49**

ÉNONCÉ :

Intégrer les fractions rationnelles suivantes :

$$\textcircled{1} \quad I_1 = \int_0^3 \frac{3x+2}{x^2+x-6} dx.$$

$$\textcircled{2} \quad I_2 = \int_0^6 \frac{3x+2}{(x-2)(x+3)(x-1)} dx.$$

$$\textcircled{3} \quad I_3 = \int \frac{3x+1}{2x^2-3x+1} dx.$$

$$\textcircled{4} \quad I_4 = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} \right) \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{5} \quad I_5 = \int \frac{1+x^5-x^6}{1-x} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{6} \quad I_6 = \int \frac{x^3+1}{x^2-x-2} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{7} \quad I_7 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-5x+4}.$$

$$\textcircled{8} \quad I_8 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-7x+6}.$$

$$\textcircled{9} \quad I_9 = \int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{10} \quad I_{10} = \int \frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{11} \quad I_{11} = \int \frac{2x+1}{(x-1)^2} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{12} \quad I_{12} = \int \frac{5x^2-2}{(x-1)^3} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{13} \quad I_{13} = \int \frac{x^2-1}{(x+2)^2(x-3)} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{14} \quad I_{14} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}.$$

$$\textcircled{15} \quad I_{15} = \int \frac{\tan x}{1+\cos x} \mathrm{d}x.$$

CORRIGÉ :

① Intégrons la fraction rationnelle I_1 :

$$\text{Nous savons que : } I_1 = \int_0^3 \frac{3x+2}{x^2+x-6} dx.$$

$$\text{Or } x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3).$$

$$\text{Par conséquent : } I_1 = \int_0^3 \frac{3x+2}{(x-2)(x+3)} dx.$$

$$\text{Or } \frac{3x+2}{x^2+x-6} = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x+3)} \quad (1).$$

Il s'agit donc de déterminer a et b par identification.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3x+2}{x^2+x-6} = \frac{a(x+3)+b(x-2)}{(x-2)(x+3)} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{3x+2}{x^2+x-6} = \frac{(a+b)x + (3a-2b)}{(x-2)(x+3)};$$

$$\text{par identification nous avons donc le système : } \begin{cases} a+b=3 \\ 3a-2b=2 \end{cases} \quad (I).$$

En résolvant le système (I) par substitution, nous obtenons :

$$\boxed{a = \frac{8}{5}} \quad \text{et} \quad \boxed{b = \frac{7}{5}}.$$

$$\text{Dans ces conditions : } I_1 = \int_0^3 \frac{8/5}{(x-2)} + \frac{7/5}{(x+3)} dx \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow I_1 = \int_0^3 \frac{8/5}{(x-2)} dx + \int_0^3 \frac{7/5}{(x+3)} dx$$

$$(3) \Leftrightarrow I_1 = \left[\frac{8}{5} \text{Log}|x-2| \right]_0^3 + \left[\frac{7}{5} \text{Log}|x+3| \right]_0^3$$

$$(3) \Leftrightarrow I_1 = \left[\frac{8}{5} \text{Log}|x-2| \right]_0^3 + \left[\frac{7}{5} \text{Log}(x+3) \right]_0^3$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{I_1 = -\frac{8}{5} \text{Log} 2 + \frac{7}{5} \text{Log} 6 - \frac{7}{5} \text{Log} 3}.$$

② Intégrons la fraction rationnelle I_2 :

Nous savons que : $I_2 = \int_0^6 \frac{3x+2}{(x-2)(x+3)(x-1)} dx$.

$$\text{Or } \frac{3x+2}{(x-2)(x+3)(x-1)} = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x+3)} + \frac{c}{(x-1)} \quad (1).$$

Il s'agit donc de déterminer a, b et c par identification.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3x+2}{(x-2)(x+3)(x-1)} = \frac{a(x+3)(x-1)}{(x-2)(x+3)(x-1)} + \frac{b(x-2)(x-1) + c(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)(x-1)} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{3x+2}{(x-2)(x+3)(x-1)} = \frac{(a+b+c)x^2}{(x-2)(x+3)(x-1)} + \frac{(2a-3b+c)x + (-3a+2b-6c)}{(x-2)(x+3)(x-1)}$$

par identification nous avons donc le système :

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ 2a-3b+c = 3 \\ -3a+2b-6c = 2 \end{cases} \quad (I).$$

En résolvant le système (I) par substitution, nous obtenons :

$$\boxed{a = \frac{8}{5}}, \boxed{b = -\frac{7}{20}} \text{ et } \boxed{c = -\frac{5}{4}}.$$

$$\text{Dans ces conditions : } I_2 = \int_0^6 \frac{8/5}{(x-2)} + \frac{(-7/20)}{(x+3)} + \frac{(-5/4)}{(x-1)} dx \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow I_2 = \int_0^6 \frac{8/5}{(x-2)} dx + \int_0^6 \frac{(-7/20)}{(x+3)} dx + \int_0^6 \frac{(-5/4)}{(x-1)} dx$$

$$(3) \Leftrightarrow$$

$$I_2 = \left[\frac{8}{5} \text{Log}|x-2| \right]_0^6 + \left[-\frac{7}{20} \text{Log}|x+3| \right]_0^6 + \left[-\frac{5}{4} \text{Log}|x-1| \right]_0^6$$

$$(3) \Leftrightarrow$$

$$I_2 = \left[\frac{8}{5} \text{Log}|x-2| \right]_0^6 + \left[-\frac{7}{20} \text{Log}(x+3) \right]_0^6 + \left[-\frac{5}{4} \text{Log}|x-1| \right]_0^6$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{8}{5}\text{Log}2 - \frac{7}{20}\text{Log}3 - \frac{5}{4}\text{Log}5}.$$

Intégrons la fraction rationnelle I_3 :

$$\text{Nous savons que : } I_3 = \int \frac{3x+1}{2x^2-3x+1} dx.$$

$$\text{Or } 2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Par conséquent : } I_3 = \int \frac{3x+1}{2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)} dx.$$

$$\text{Or } \frac{3x+1}{2x^2-3x+1} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{\left(x - \frac{1}{2}\right)} \quad (1).$$

Il s'agit donc de déterminer a, b et c par identification.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3x+1}{2x^2-3x+1} = \frac{a\left(x - \frac{1}{2}\right) + b(x-1)}{(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)} \quad (2),$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{3x+1}{2x^2-3x+1} = \frac{(a+b)x + \left(-\frac{1}{2}a - b\right)}{(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{(3/2)x + (1/2)}{(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{(a+b)x + \left(-\frac{1}{2}a - b\right)}{(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)};$$

$$\text{par identification nous avons donc le système : } \begin{cases} a+b = \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}a - b = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (I).$$

En résolvant le système (I) par substitution, nous obtenons :

$$\boxed{a = 4} \quad \text{et} \quad \boxed{b = -\frac{5}{2}}.$$

Dans ces conditions : $I_3 = \int \frac{4}{(x-1)} + \frac{(-5/2)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)} dx \quad (3)$

$$(3) \Leftrightarrow I_3 = \int \frac{4}{(x-1)} dx + \int \frac{(-5/2)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)} dx$$

$$(3) \Leftrightarrow I_3 = [4\text{Log}|x-1|] + \left[-\frac{5}{2}\text{Log}\left|x - \frac{1}{2}\right|\right]$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{I_3 = 4\text{Log}|x-1| - \frac{5}{2}\text{Log}\left|x - \frac{1}{2}\right| + c}, c \text{ étant une constante.}$$

④ **Intégrons la fraction rationnelle I_4 :**

Nous savons que : $I_4 = \int \left(\frac{1}{(x-2)} + \frac{2}{(x-1)} - \frac{3}{(x-1)^2} \right) dx.$

Dans ces conditions :

$$I_4 = \int \frac{1}{(x-2)} dx + \int \frac{2}{(x-1)} dx + \int \frac{-3}{(x-1)^2} dx \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow I_4 = [\text{Log}|x-2|] + [2\text{Log}|x-1|] + \left[\frac{3}{x-1}\right] \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{I_4 = \text{Log}|x-2| + 2\text{Log}|x-1| + \frac{3}{x-1} + c}, c \text{ étant une constante.}$$

⑤ **Intégrons la fraction rationnelle I_5 :**

Nous savons que : $I_5 = \int \frac{1+x^5-x^6}{1-x} dx.$

Or $1+x^5-x^6 = 1+x^5(1-x).$

Par conséquent : $I_5 = \int \frac{1+x^5(1-x)}{1-x} dx.$

Dans ces conditions : $I_5 = \int \left(\frac{1}{1-x} + x^5 \right) dx$ (1)

(1) $\Leftrightarrow I_5 = \int \frac{1}{1-x} dx + \int x^5 dx$ (2)

(2) $\Leftrightarrow I_5 = [-\text{Log}|1-x|] + \left[\frac{x^6}{6} \right]$ (3)

(3) $\Rightarrow \boxed{I_5 = -\text{Log}|1-x| + \frac{x^6}{6} + c}$, c étant une constante.

Intégrons la fraction rationnelle I_6 :

Nous savons que : $I_6 = \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2} dx$.

Or $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$.

Par conséquent : $I_6 = \int \frac{x^3 + 1}{(x+1)(x-2)} dx$.

De plus, $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$.

D'où : $I_6 = \int \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x-2)} dx \Leftrightarrow I_6 = \int \frac{x^2 - x + 1}{(x-2)} dx$.

De plus, $x^2 - x + 1 = (x+1)(x-2) + 3$.

D'où : $I_6 = \int \frac{(x+1)(x-2) + 3}{(x-2)} dx \Leftrightarrow I_6 = \int \left((x+1) + \frac{3}{(x-2)} \right) dx$.

Dans ces conditions : $I_6 = \int (x+1) dx + \int \frac{3}{(x-2)} dx$ (1)

(1) $\Leftrightarrow I_6 = \left[\frac{x^2}{2} + x \right] + [3\text{Log}|x-2|]$ (2)

(2) $\Rightarrow \boxed{I_6 = \frac{x^2}{2} + x + 3\text{Log}|x-2| + c}$, c étant une constante.

Intégrons la fraction rationnelle I_7 :

Nous savons que : $I_7 = \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 4}$.

Or $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$.

Par conséquent : $I_7 = \int \frac{dx}{(x - 4)(x - 1)}$.

Or $\frac{1}{(x - 4)(x - 1)} = \frac{a}{(x - 4)} + \frac{b}{(x - 1)}$ (1).

Il s'agit donc de déterminer a et b par identification.

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{(x - 4)(x - 1)} = \frac{a(x - 1) + b(x - 4)}{(x - 4)(x - 1)}$ (2)

(2) $\Leftrightarrow \frac{1}{(x - 4)(x - 1)} = \frac{(a + b)x + (-a - 4b)}{(x - 4)(x - 1)}$;

par identification nous avons donc le système :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a - 4b = 1 \end{cases} \quad (\text{I}).$$

En résolvant le système (I) par substitution, nous obtenons :

$$\boxed{a = \frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{b = -\frac{1}{3}}.$$

Dans ces conditions : $I_7 = \int \frac{1/3}{(x - 4)} + \frac{(-1/3)}{(x - 1)} dx$ (3)

(3) $\Leftrightarrow I_7 = \int \frac{1/3}{(x - 4)} dx + \int \frac{(-1/3)}{(x - 1)} dx$

(3) $\Leftrightarrow I_7 = \left[\frac{1}{3} \text{Log}|x - 4| \right] + \left[-\frac{1}{3} \text{Log}|x - 1| \right]$

(3) $\Rightarrow \boxed{I_7 = \frac{1}{3} \text{Log}|x - 4| - \frac{1}{3} \text{Log}|x - 1| + c}$, c étant une constante

⑧ Intégrons la fraction rationnelle I_8 :

Nous savons que : $I_8 = \int \frac{dx}{x^3 - 7x + 6}$.

Or $x^3 - 7x + 6 = (x - 2)(x - 1)(x + 3)$.

Par conséquent : $I_8 = \int \frac{dx}{(x - 2)(x - 1)(x + 3)}$.

$$\text{Or } \frac{1}{(x-2)(x-1)(x+3)} = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x+3)} \quad (1).$$

Il s'agit donc de déterminer a, b et c par identification.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)(x-1)(x+3)} = \frac{a(x-1)(x+3)}{(x-2)(x-1)(x+3)} + \frac{b(x-2)(x+3) + c(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-1)(x+3)} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)(x-1)(x+3)} = \frac{(a+b+c)x^2}{(x-2)(x-1)(x+3)} + \frac{(2a+b-3c)x + (-3a-6b+2c)}{(x-2)(x-1)(x+3)};$$

par identification nous avons donc le système :

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ 2a+b-3c = 0 \\ -3a-6b+2c = 1 \end{cases} \quad (\text{I}).$$

En résolvant le système (I) par substitution, nous obtenons :

$$\boxed{a = \frac{1}{5}}, \boxed{b = -\frac{1}{4}} \text{ et } \boxed{c = \frac{1}{20}}.$$

$$\text{Dans ces conditions : } I_8 = \int \frac{1/5}{(x-2)} + \frac{(-1/4)}{(x-1)} + \frac{(1/20)}{(x+3)} dx \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow I_8 = \int \frac{1/5}{(x-2)} dx + \int \frac{(-1/4)}{(x-1)} dx + \int \frac{(1/20)}{(x+3)} dx$$

$$(3) \Leftrightarrow I_8 = \left[\frac{1}{5} \text{Log}|x-2| \right] + \left[-\frac{1}{4} \text{Log}|x-1| \right] + \left[\frac{1}{20} \text{Log}|x+3| \right]$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{I_8 = \frac{1}{5} \text{Log}|x-2| - \frac{1}{4} \text{Log}|x-1| + \frac{1}{20} \text{Log}|x+3| + c}, c \text{ étant une constante.}$$

Intégrons la fraction rationnelle I_9 :

$$\text{Nous savons que : } I_9 = \int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} dx.$$

$$\text{Or } x^3+x^2-6x = x(x-2)(x+3).$$

Par conséquent : $I_9 = \int \frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)} dx$.

$$\text{Or } \frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x-2)} + \frac{c}{(x+3)} \quad (1).$$

Il s'agit donc de déterminer a, b et c par identification.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} = \frac{a(x-2)(x+3) + bx(x+3) + cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} = \frac{(a+b+c)x^2 + (a+3b-2c)x - 6a}{x(x-2)(x+3)};$$

par identification nous avons donc le système :

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ a+3b-2c = 7 \\ -6a = -5 \end{cases} \quad (\text{I}).$$

En résolvant le système (I) par substitution, nous obtenons :

$$\boxed{a = \frac{5}{6}}, \boxed{b = \frac{9}{10}} \text{ et } \boxed{c = \frac{-26}{15}}.$$

$$\text{Dans ces conditions : } I_9 = \int \frac{5/6}{x} + \frac{9/10}{(x-2)} + \frac{(-26/15)}{(x+3)} dx \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow I_9 = \int \frac{5/6}{x} dx + \int \frac{9/10}{(x-2)} dx + \int \frac{(-26/15)}{(x+3)} dx$$

$$(3) \Leftrightarrow I_9 = \left[\frac{5}{6} \text{Log}|x| \right] + \left[\frac{9}{10} \text{Log}|x-2| \right] + \left[-\frac{26}{15} \text{Log}|x+3| \right]$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{I_9 = \frac{5}{6} \text{Log}|x| + \frac{9}{10} \text{Log}|x-2| - \frac{26}{15} \text{Log}|x+3| + c}, \text{ } c \text{ étant une constante.}$$

⑩ Intégrons la fraction rationnelle I_{10} :

$$\text{Nous savons que : } I_{10} = \int \frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5} dx.$$

$$\text{Or } x^2+6x+5 = (x-1)(x-5) + 12x,$$

$$\text{et } x^2-6x+5 = (x-1)(x-5).$$

Par conséquent :

$$I_{10} = \int \frac{(x-1)(x-5) + 12x}{(x-1)(x-5)} dx \Leftrightarrow I_{10} = \int 1 + \frac{12x}{(x-1)(x-5)} dx.$$

$$\text{Or } \frac{12x}{(x-1)(x-5)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-5)} \quad (1).$$

Il s'agit donc de déterminer a et b par identification.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{12x}{(x-1)(x-5)} = \frac{a(x-5) + b(x-1)}{(x-1)(x-5)} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{12x}{(x-1)(x-5)} = \frac{(a+b)x + (-5a-b)}{(x-1)(x-5)};$$

$$\text{par identification nous avons donc le système : } \begin{cases} a+b = 12 \\ -5a-b = 0 \end{cases} \quad (I).$$

En résolvant le système (I) par substitution, nous obtenons :

$$\boxed{a = -3} \text{ et } \boxed{b = 15}.$$

$$\text{Dans ces conditions : } I_{10} = \int 1 + \frac{(-3)}{(x-1)} + \frac{15}{(x-5)} dx \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow I_{10} = \int 1 dx + \int -\frac{3}{(x-1)} dx + \int \frac{15}{(x-5)} dx$$

$$(3) \Leftrightarrow I_{10} = [x] + [-3\text{Log}|x-1|] + [15\text{Log}|x-5|]$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{I_{10} = x - 3\text{Log}|x-1| + 15\text{Log}|x-5| + c}, \quad c \text{ étant une constante.}$$

Intégrons la fraction rationnelle I_{11} :

$$\text{Nous savons que : } I_{11} = \int \frac{2x+1}{(x-1)^2} dx.$$

$$\text{Or } \frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)} \quad (1).$$

Il s'agit donc de déterminer a et b par identification.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{a+b(x-1)}{(x-1)^2} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{bx+(a-b)}{(x-1)^2};$$

par identification nous avons donc le système : $\begin{cases} b = 2 \\ a - b = 1 \end{cases}$ (I).

En résolvant le système (I) par substitution, nous obtenons :

$$\boxed{a = 3} \text{ et } \boxed{b = 2}.$$

$$\text{Dans ces conditions : } I_{11} = \int \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)} dx \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow I_{11} = \int \frac{3}{(x-1)^2} dx + \int \frac{2}{(x-1)} dx$$

$$(3) \Leftrightarrow I_{11} = [-3(x-1)^{-1}] + [2\text{Log}|x-1|]$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{I_{11} = \frac{-3}{(x-1)} + 2\text{Log}|x-1| + c}, c \text{ étant une constante.}$$

⑫ Intégrons la fraction rationnelle I_{12} :

$$\text{Nous savons que : } I_{12} = \int \frac{5x^2-2}{(x-1)^3} dx.$$

$$\text{Or } \frac{5x^2-2}{(x-1)^3} = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)} \quad (1).$$

Il s'agit donc de déterminer a, b et c par identification.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{5x^2-2}{(x-1)^3} = \frac{a+b(x-1)+c(x-1)^2}{(x-1)^3} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{5x^2-2}{(x-1)^3} = \frac{cx^2+(b-2c)x+(a-b+c)}{(x-1)^3};$$

par identification nous avons donc le système :

$$\begin{cases} c = 5 \\ b - 2c = 0 \\ a - b + c = -2 \end{cases} \quad (I).$$

En résolvant le système (I) par substitution, nous obtenons :

$$\boxed{a = 3}, \quad \boxed{b = 10} \quad \text{et} \quad \boxed{c = 5}.$$

Dans ces conditions : $I_{12} = \int \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{10}{(x-1)^2} + \frac{5}{(x-1)} dx \quad (3)$

$$(3) \Leftrightarrow I_{12} = \int \frac{3}{(x-1)^3} dx + \int \frac{10}{(x-1)^2} dx + \int \frac{5}{(x-1)} dx$$

$$(3) \Leftrightarrow I_{12} = \left[-\frac{3}{2}(x-1)^{-2} \right] + [-10(x-1)^{-1}] + [5\text{Log}|x-1|]$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{I_{12} = \frac{-3}{2(x-1)^2} - \frac{10}{(x-1)} + 5\text{Log}|x-1| + c}, \quad c \text{ étant une constante.}$$

Intégrons la fraction rationnelle I_{13} :

Nous savons que : $I_{13} = \int \frac{x^2 - 1}{(x+2)^2(x-3)} dx.$

Or $\frac{x^2 - 1}{(x+2)^2(x-3)} = \frac{a}{(x+2)^2} + \frac{b}{(x+2)} + \frac{c}{(x-3)} \quad (1).$

Il s'agit donc de déterminer a, b et c par identification.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{(x+2)^2(x-3)} = \frac{a(x-3) + b(x+2)(x-3) + c(x+2)^2}{(x+2)^2(x-3)} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{(x+2)^2(x-3)} = \frac{(b+c)x^2}{(x+2)^2(x-3)} + \frac{(a-b+4c)x + (-3a-6b+4c)}{(x+2)^2(x-3)};$$

par identification nous avons donc le système :

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ a - b + 4c = 0 \\ -3a - 6b + 4c = -1 \end{cases} \quad (\text{I}).$$

En résolvant le système (I) par substitution, nous obtenons :

$$\boxed{a = \frac{-3}{5}}, \quad \boxed{b = \frac{17}{25}} \quad \text{et} \quad \boxed{c = \frac{8}{25}}.$$

Dans ces conditions : $I_{13} = \int \frac{(-3/5)}{(x+2)^2} + \frac{(17/25)}{(x+2)} + \frac{(8/25)}{(x-3)} dx$ (3)

$$(3) \Leftrightarrow I_{13} = \int \frac{(-3/5)}{(x+2)^2} dx + \int \frac{(17/25)}{(x+2)} dx + \int \frac{(8/25)}{(x-3)} dx$$

$$(3) \Leftrightarrow I_{13} = \left[\frac{3}{5}(x+2)^{-1} \right] + \left[\frac{17}{25} \text{Log}|x+2| \right] + \left[\frac{8}{25} \text{Log}|x-3| \right]$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{I_{13} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{17}{25} \text{Log}|x+2| + \frac{8}{25} \text{Log}|x-3| + c}, c \text{ étant une constante.}$$

⑭ Intégrons la fraction rationnelle I_{14} :

Nous savons que : $I_{14} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$.

Or $x^2 + 2x + 5 = 4 \left[\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right]$.

Par conséquent : $I_{14} = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1}$.

Procédons à un changement de variable.

Posons : • $u = \left(\frac{x+1}{2} \right) \Rightarrow du = \frac{1}{2} dx$,

• de plus, $u(0) = \frac{1}{2}$ et $u(1) = 1$.

D'où : $I_{14} = \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{u^2 + 1} \right) du$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow I_{14} = \frac{1}{2} [\arctan u]_{1/2}^1 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{I_{14} = \frac{1}{2} \left(\arctan 1 - \arctan \frac{1}{2} \right)}.$$

⑮ Intégrons la fraction rationnelle I_{15} :

Nous savons que : $I_{15} = \int \frac{\tan x}{1 + \cos x} dx$.

Procédons à un changement de variable.

Posons : $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$.

D'où : $I_{15} = \int \frac{-du}{u(1+u)}$.

En effet, $\frac{\tan x}{1 + \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x(1 + \cos x)}$,

et donc si $u = \cos x$, $I_{15} = \int \frac{-du}{u(1+u)}$.

Or $\frac{-1}{u(1+u)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{(1+u)}$ (1).

Il s'agit donc de déterminer a et b par identification.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-1}{u(1+u)} = \frac{a(1+u) + bu}{u(1+u)} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{-1}{u(1+u)} = \frac{(a+b)u + a}{u(1+u)};$$

par identification nous avons donc le système : $\begin{cases} a + b = 0 \\ a = -1 \end{cases}$ (I).

En résolvant le système (I) par substitution, nous obtenons :

$$\boxed{a = -1} \text{ et } \boxed{b = 1}.$$

Dans ces conditions : $I_{15} = \int -\frac{1}{u} + \frac{1}{(1+u)} du$ (3)

$$(3) \Leftrightarrow I_{15} = \int -\frac{1}{u} du + \int \frac{1}{(1+u)} du$$

$$(3) \Leftrightarrow I_{15} = [-\text{Log}|u|] + [\text{Log}|1+u|]$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{I_{15} = -\text{Log}|u| + \text{Log}|1+u| + c}, c \text{ étant une constante.}$$

ÉNONCÉ :

Définir la notion d'intégrale généralisée ou impropre.

CORRIGÉ :

Définissons la notion d'intégrale généralisée ou impropre :

- Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie et localement intégrable sur $[a, +\infty[$.

On définit la fonction F sur $[a, +\infty[$ par : $F(t) = \int_a^t f(x) dx$.

Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$ existe, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ existe ou qu'elle est convergente.

On note : $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$.

Sinon, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ n'existe pas ou qu'elle est divergente.

- Soit $b \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie et localement intégrable sur $]-\infty, b]$.

On définit la fonction F sur $]-\infty, b]$ par : $F(t) = \int_t^b f(x) dx$.

Si $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t)$ existe, on dit que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ existe ou qu'elle est convergente.

On note : $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$.

Sinon, on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ n'existe pas ou qu'elle est divergente.

- Soit f une fonction définie et localement intégrable sur $] -\infty, +\infty[$.

On dit que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ existe ou qu'elle est convergente si et seulement si les deux intégrales généralisées $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ et $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ sont convergentes.

On note : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx .}$

Sinon, on dit que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ n'existe pas ou qu'elle est divergente.

 EXERCICE n° 51

ÉNONCÉ :

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

① $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$

② $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}.$

③ $I_3 = \int_1^{+\infty} x^2 dx.$

$$\textcircled{4} \quad I_4 = \int_{-\infty}^0 3e^x dx.$$

$$\textcircled{5} \quad I_5 = \int_{-\infty}^{-1} e^{x/2} dx.$$

$$\textcircled{6} \quad I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

CORRIGÉ :

\textcircled{1} Déterminons la nature de l'intégrale généralisée I_1 :

$$\text{Nous savons que : } I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

$$\text{Dans ces conditions : } I_1 = \left[\frac{-1}{x} \right]_1^A, \text{ avec } A \rightarrow +\infty \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow I_1 = \left(\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{A} \right) \right) + 1 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{I_1 = 1}.$$

Nous pouvons donc affirmer que l'intégrale généralisée I_1 est vergente car elle admet une limite finie.

\textcircled{2} Déterminons la nature de l'intégrale généralisée I_2 :

$$\text{Nous savons que : } I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

$$\text{Dans ces conditions : } I_2 = [\text{Log}|x|]_1^A, \text{ avec } A \rightarrow +\infty \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow I_2 = [\text{Log } x]_1^A \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow I_2 = \left(\lim_{A \rightarrow +\infty} (\text{Log } A) \right) - 0 \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{I_2 \rightarrow +\infty}.$$

Nous pouvons donc affirmer que l'intégrale généralisée I_2 est divergente car elle n'admet pas de limite finie.

Déterminons la nature de l'intégrale généralisée I_3 :

Nous savons que : $I_3 = \int_1^{+\infty} x^2 dx$.

Dans ces conditions : $I_3 = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^A$, avec $A \rightarrow +\infty$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow I_3 = \left(\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{A^3}{3} \right) \right) - \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{I_3 \rightarrow +\infty}.$$

Nous pouvons donc affirmer que l'intégrale généralisée I_3 est divergente car elle n'admet pas de limite finie.

Déterminons la nature de l'intégrale généralisée I_4 :

Nous savons que : $I_4 = \int_{-\infty}^0 3e^x dx$.

Dans ces conditions : $I_4 = [3e^x]_B^0$, avec $B \rightarrow -\infty$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow I_4 = 3 - \left(\lim_{B \rightarrow -\infty} (3e^B) \right) \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{I_4 = 3}.$$

Nous pouvons donc affirmer que l'intégrale généralisée I_4 est convergente car elle admet une limite finie.

Déterminons la nature de l'intégrale généralisée I_5 :

Nous savons que : $I_5 = \int_{-\infty}^{-1} e^{x/2} dx$.

Dans ces conditions : $I_5 = [2e^{x/2}]_B^{-1}$, avec $B \rightarrow -\infty$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow I_5 = 2e^{-1/2} - \left(\lim_{B \rightarrow -\infty} (2e^{B/2}) \right) \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{I_5 = 2e^{-1/2}}.$$

Nous pouvons donc affirmer que l'intégrale généralisée I_5 est convergente car elle admet une limite finie.

⑥ **Déterminons la nature de l'intégrale généralisée I_6 :**

Nous savons que : $I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$.

Or, d'après le cours, nous savons qu'il s'agit de **l'intégrale de Gauss** dont la valeur est : $I_6 = \sqrt{2\pi}$.

Nous pouvons donc affirmer que l'intégrale généralisée I_6 est convergente car elle admet une limite finie.

 EXERCICE n° 52

ÉNONCÉ :

Énoncer les théorèmes permettant d'étudier la nature d'une intégrale généralisée ou non, et cela, sans la calculer.

CORRIGÉ :

Il existe huit théorèmes qui permettent de déterminer la nature d'une intégrale, et cela, sans la calculer.

① **Théorème 1 :**

Soit l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} r^x dx$, avec $r > 0$.

- L'intégrale I est convergente si et seulement si $r < 1$.
- L'intégrale I est divergente si et seulement si $r \geq 1$.

② **Théorème 2 :**

Soit l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, avec $\alpha > 0$.

- L'intégrale I est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- L'intégrale I est divergente si et seulement si $\alpha \leq 1$.

③ Théorème 3 :

Soient f et g deux fonctions continues et positives pour tout $x \geq a$.

① Si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ est convergente et $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \geq a$, alors

$I = \int_a^{+\infty} f(x) dx$ est convergente, I étant l'intégrale dont nous devons déterminer la nature.

② Si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ est divergente et $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \geq a$, alors

$I = \int_a^{+\infty} f(x) dx$ est divergente, I étant l'intégrale dont nous devons déterminer la nature.

③ Il est bon de noter que si nous ne pouvons pas appliquer ni ① et ni ②, alors il n'est pas possible de conclure sur la nature de l'intégrale I , à l'aide de ce théorème.

④ Théorème 4 :

Si la fonction f est telle que $x^\alpha f(x)$ possède une limite finie μ quand x tend vers $+\infty$, alors :

① $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est divergente si et seulement si $\alpha \leq 1$ et $\mu > 0$.

② $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ et $\mu \geq 0$.

③ Sinon nous ne pouvons pas conclure sur la nature de l'intégrale.

⑤ **Théorème 5 :**

Soit l'intégrale $I = A \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, avec $\alpha \geq 0$.

- L'intégrale I est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
- L'intégrale I est divergente si et seulement si $\alpha \geq 1$.

⑥ **Théorème 6 :**

Soit l'intégrale $I = A \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, avec $\alpha \geq 0$.

- L'intégrale I est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
- L'intégrale I est divergente si et seulement si $\alpha \geq 1$.

⑦ **Théorème 7 :**

Soient f et g deux fonctions continues et positives pour $a < x \leq b$.

① Si $\int_a^b g(x) dx$ est convergente et $f(x) \leq g(x)$, pour $a < x \leq b$,

alors $I = \int_a^b f(x) dx$ est convergente, I étant l'intégrale dont nous devons déterminer la nature.

② Si $\int_a^b g(x) dx$ est divergente et $f(x) \geq g(x)$, pour $a < x \leq b$,

alors $I = \int_a^b f(x) dx$ est divergente, I étant l'intégrale dont nous devons déterminer la nature.

③ Sinon nous ne pouvons pas conclure sur la nature de l'intégrale I .

Il est bon de remarquer que lorsque nous écrivons $a < x \leq b$, cela signifie que f n'est pas définie en a .

⑧ **Théorème 8 :**

Soient f et g deux fonctions continues et positives pour tout $a \leq x < b$.

Ⓐ Si $\int_a^b g(x) dx$ est convergente et $f(x) \leq g(x)$, pour $a \leq x < b$, alors $I = \int_a^b f(x) dx$ est convergente, I étant l'intégrale dont nous devons déterminer la nature.

Ⓑ Si $\int_a^b g(x) dx$ est divergente et $f(x) \geq g(x)$, pour $a \leq x < b$, alors $I = \int_a^b f(x) dx$ est divergente, I étant l'intégrale dont nous devons déterminer la nature.

Ⓒ Sinon nous ne pouvons pas conclure sur la nature de l'intégrale I .
Il est bon de remarquer que lorsque nous écrivons $a \leq x < b$, cela signifie que f n'est pas définie en b .

 EXERCICE n° 53

ÉNONCÉ :

Étudier la nature des intégrales suivantes (on ne cherchera pas à déterminer la valeur des intégrales convergentes) :

① $I_1 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x dx.$

② $I_2 = \int_0^{+\infty} 2^x dx.$

③ $I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}.$

④ $I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

$$\textcircled{5} \quad I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + 3x^2 + x} \quad (\text{de deux façons différentes}).$$

$$\textcircled{6} \quad I_6 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^{(x^4 + 3x^2)} + 5}.$$

$$\textcircled{7} \quad I_7 = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - 1)^2}.$$

$$\textcircled{8} \quad I_8 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x + (x^2 + x + 5)^{1/3}}.$$

$$\textcircled{9} \quad I_9 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}}{x^2 + x + 1} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{10} \quad I_{10} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}(x + 1)}{(x + 2)^2} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{11} \quad I_{11} = \int_0^{+\infty} \mathrm{Log}(x^2 + 1) \times \left(\frac{5(2x + 5)}{(x^2 + 5x + 6)^2} \right) \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{12} \quad I_{12} = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{13} \quad I_{13} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{14} \quad I_{14} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Log} x}{x^2} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{15} \quad I_{15} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^4)^{1/2}}.$$

$$\textcircled{16} \quad I_{16} = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{17} \quad I_{17} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2 + x}}.$$

$$\textcircled{18} \quad I_{18} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{x^5 + 1}}.$$

$$\textcircled{19} \quad I_{19} = \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \mathrm{Log} x}.$$

$$\textcircled{20} \quad I_{20} = \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\mathrm{Log} x)^2}.$$

$$\textcircled{21} \quad I_{21} = \int_0^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{22} \quad I_{22} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{23} \quad I_{23} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{24} \quad I_{24} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^{-x})}.$$

$$\textcircled{25} \quad I_{25} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

$$\textcircled{26} \quad I_{26} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}.$$

$$\textcircled{27} \quad I_{27} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3 - 5x^2}.$$

$$\textcircled{28} \quad I_{28} = \int_0^1 \frac{\mathrm{Log}(1+x)}{x} \mathrm{d}x.$$

$$\textcircled{29} \quad I_{29} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

$$\textcircled{30} \quad I_{30} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1-x}}.$$

CORRIGÉ :

\textcircled{1} Déterminons la nature de l'intégrale I_1 :

Nous savons que : $I_1 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x \mathrm{d}x.$

Or, d'après le théorème 1, $\frac{2}{3} > 0$ et $\frac{2}{3} < 1$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_1 est **convergente**.

② **Déterminons la nature de l'intégrale I_2 :**

Nous savons que : $I_2 = \int_0^{+\infty} 2^x dx.$

Or, d'après le théorème 1, $2 > 0$ et $2 \geq 1$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_2 est **divergente**.

③ **Déterminons la nature de l'intégrale I_3 :**

Nous savons que : $I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}.$

Or, d'après le théorème 2, $3 > 0$ et $3 > 1$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_3 est **convergente**.

④ **Déterminons la nature de l'intégrale I_4 :**

Nous savons que : $I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

Or, d'après le théorème 2, $\frac{1}{2} > 0$ et $\frac{1}{2} \leq 1$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_4 est **divergente**.

⑤ **Déterminons la nature de l'intégrale I_5 :**

Nous savons que : $I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 3x^2 + x}.$

1^{ère} façon : appliquons le théorème 3.

Soient f et g deux fonctions continues et positives pour tout $x \geq 1$.

Nous savons que si $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ est convergente et $f(x) \leq g(x)$,

$\forall x \geq 1$, alors $I_5 = \int_1^{+\infty} f(x) dx$ est convergente.

Or si nous prenons $g(x) = \frac{1}{x^3}$, $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions continues et positives pour tout $x \geq 1$.

De plus, $\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ est convergente d'après le théorème 2 (car $3 > 0$ et $3 > 1$) et $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \geq 1$.

En effet : $\frac{1}{x^3 + 3x^2 + x} \leq \frac{1}{x^3}$.

Dans ces conditions : $I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 3x^2 + x}$ est convergente.

Au total, nous pouvons affirmer que l'intégrale **I_5 est convergente.**

2^e façon : appliquons le théorème 4.

Posons $f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 + x}$.

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3}$ (a)

(a) $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Or 0 est une limite finie, $\alpha = 2 > 1$ et $0 \geq 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale **I_5 est convergente.**

Déterminons la nature de l'intégrale I_6 :

Nous savons que : $I_6 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{(x^4 + 3x^2)} + 5}$.

Posons $f(x) = \frac{1}{e^{(x^4 + 3x^2)} + 5}$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times f(x) = 0$, d'après le théorème des croissances comparées.

Or 0 est une limite finie, $\alpha = 2 > 1$ et $0 \geq 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_6 est **convergente**.

⑦ **Déterminons la nature de l'intégrale I_7 :**

Nous savons que : $I_7 = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$.

Posons $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)^2}$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \times f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^4}$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^4} = 1$.

Or 1 est une limite finie, $\alpha = 4 > 1$ et $1 \geq 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_7 est **convergente**.

⑧ **Déterminons la nature de l'intégrale I_8 :**

Nous savons que : $I_8 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x + (x^2 + x + 5)^{1/3}}$.

Posons $f(x) = \frac{1}{2x + (x^2 + x + 5)^{1/3}}$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \times f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x}$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$.

Or $\frac{1}{2}$ est une limite finie, $\alpha = 1 \leq 1$ et $\frac{1}{2} > 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_8 est **divergente**.

⑨ **Déterminons la nature de l'intégrale I_9 :**

Nous savons que : $I_9 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}}{x^2 + x + 1} dx.$

Posons $f(x) = \frac{x^{1/2}}{x^2 + x + 1}$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \times f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2}$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$

Or 1 est une limite finie, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ et $1 \geq 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_9 est **convergente**.

⑩ **Déterminons la nature de l'intégrale I_{10} :**

Nous savons que : $I_{10} = \int_1^{+\infty} \frac{\text{Log}(x+1)}{(x+2)^2} dx.$

Posons $f(x) = \frac{\text{Log}(x+1)}{(x+2)^2}$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \times f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}}{x^2}$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}}{x^2} = 0.$

Or 0 est une limite finie, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ et $0 \geq 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{10} est **convergente**.

⑪ **Déterminons la nature de l'intégrale I_{11} :**

Nous savons que : $I_{11} = \int_0^{+\infty} \text{Log}(x^2 + 1) \times \left(\frac{5(2x+5)}{(x^2 + 5x + 6)^2} \right) dx.$

Posons $f(x) = \text{Log}(x^2 + 1) \times \left(\frac{5(2x + 5)}{(x^2 + 5x + 6)^2} \right)$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^3}{x^4}$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^3}{x^4} = 0$.

Or 0 est une limite finie, $\alpha = 2 > 1$ et $0 \geq 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{11} est **convergente**.

⑫ **Déterminons la nature de l'intégrale I_{12} :**

Nous savons que : $I_{12} = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx \Leftrightarrow I_{12} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x} dx$.

Posons $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times f(x) = 0$, d'après le théorème des croissances comparées.

Or 0 est une limite finie, $\alpha = 2 > 1$ et $0 \geq 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{12} est **convergente**.

⑬ **Déterminons la nature de l'intégrale I_{13} :**

Nous savons que : $I_{13} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}} dx$.

Posons $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}}$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3}$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$.

Or 1 est une limite finie, $\alpha = 2 > 1$ et $1 \geq 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{13} est convergente.

⑭ Déterminons la nature de l'intégrale I_{14} :

Nous savons que : $I_{14} = \int_1^{+\infty} \frac{\text{Log} x}{x^2} dx$.

Posons $f(x) = \frac{\text{Log} x}{x^2}$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \times f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}}{x^2}$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}}{x^2} = 0$.

Or 0 est une limite finie, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ et $0 \geq 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{14} est convergente.

⑮ Déterminons la nature de l'intégrale I_{15} :

Nous savons que : $I_{15} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^{1/2}}$.

Posons $f(x) = \frac{1}{(1+x^4)^{1/2}}$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2}$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$.

Or 1 est une limite finie, $\alpha = 2 > 1$ et $1 \geq 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{15} est convergente.

⑯ Déterminons la nature de l'intégrale I_{16} :

Nous savons que : $I_{16} = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \Leftrightarrow I_{16} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{xe^x} dx$.

Posons $f(x) = \frac{1}{xe^x}$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times f(x) = 0$, d'après le théorème des croissances comparées.

Or 0 est une limite finie, $\alpha = 2 > 1$ et $0 \geq 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{16} est **convergente**.

⑪ **Déterminons la nature de l'intégrale I_{17} :**

Nous savons que : $I_{17} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + x}}$.

Posons $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{4x^2 + x}}$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2}$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$.

Or $\frac{1}{2}$ est une limite finie, $\alpha = 2 > 1$ et $\frac{1}{2} \geq 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{17} est **convergente**.

⑫ **Déterminons la nature de l'intégrale I_{18} :**

Nous savons que : $I_{18} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^5 + 1}}$.

Posons $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^5 + 1}}$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/2} \times f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{5/2}}{x^{5/2}}$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{5/2}}{x^{5/2}} = 1$.

Or 1 est une limite finie, $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ et $1 > 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{18} est **divergente**.

⑪ Déterminons la nature de l'intégrale I_{19} :

Nous savons que : $I_{19} = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \operatorname{Log} x}$.

Préalablement, procédons à un changement de variable.

Posons : • $u = \operatorname{Log} x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$,

• de plus, $u(e) = 1$ et $u(+\infty) = +\infty$.

D'où : $I_{19} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u} du$.

Or, d'après le théorème 2, $1 > 0$ et $1 \leq 1$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{19} est **divergente**.

⑫ Déterminons la nature de l'intégrale I_{20} :

Nous savons que : $I_{20} = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\operatorname{Log} x)^2}$.

Préalablement, procédons à un changement de variable.

Posons : • $u = \operatorname{Log} x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$,

• de plus, $u(e) = 1$ et $u(+\infty) = +\infty$.

D'où : $I_{20} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$.

Or, d'après le théorème 2, $2 > 0$ et $2 > 1$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{20} est **convergente**.

⑬ Déterminons la nature de l'intégrale I_{21} :

Nous savons que : $I_{21} = \int_0^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$.

Posons $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \times f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2}$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$.

Or 1 est une limite finie, $\alpha = 1 \leq 1$ et $1 > 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{21} est **divergente**.

②② Déterminons la nature de l'intégrale I_{22} :

Nous savons que : $I_{22} = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Posons $f(x) = e^{-x^2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{e^{x^2}}$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times f(x) = 0$, d'après le théorème des croissances comparées.

Or 0 est une limite finie, $\alpha = 2 > 1$ et $0 \geq 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{22} est **convergente**.

②③ Déterminons la nature de l'intégrale I_{23} :

Nous savons que : $I_{23} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$.

Posons $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times f(x) = 0$, d'après le théorème des croissances comparées.

Or 0 est une limite finie, $\alpha = 2 > 1$ et $0 \geq 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{23} est convergente.

(24) Déterminons la nature de l'intégrale I_{24} :

Nous savons que : $I_{24} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$.

Posons $f(x) = \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

Or $f(x)$ est une fonction paire ;

d'où : $I_{24} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$.

Préalablement, procédons à un changement de variable.

Posons : ● $u = 1 + e^x \Rightarrow du = e^x dx$,

● de plus, $u(0) = 2$ et $u(+\infty) = +\infty$.

D'où : $I_{24} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$.

Posons $g(u) = \frac{1}{u^2}$ (application du théorème 4).

Dans ces conditions : $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 \times g(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^2}{u^2}$

et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^2}{u^2} = 1$.

Or 1 est une limite finie, $2 > 1$ et $1 \geq 0$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{24} est convergente.

(25) Déterminons la nature de l'intégrale I_{25} :

Nous savons que : $I_{25} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Posons $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Or $f(x)$ est une fonction paire ;

$$\text{d'où : } I_{25} = 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx.$$

Or, d'après le théorème 5, $\alpha = 2 \geq 1$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{25} est **divergente**.

(26) **Déterminons la nature de l'intégrale I_{26} :**

$$\text{Nous savons que : } I_{26} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \Leftrightarrow I_{26} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}.$$

Or, d'après le théorème 6, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$;

par conséquent, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{26} est **convergente**.

(27) **Déterminons la nature de l'intégrale I_{27} :**

$$\text{Nous savons que : } I_{27} = \int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}.$$

Appliquons le théorème 7.

Soient f et g deux fonctions continues et positives pour $0 < x \leq 1$.

Nous savons que si $\int_0^1 g(x) dx$ est divergente et $f(x) \geq g(x)$,

pour $0 < x \leq 1$, alors $I_{27} = \int_0^1 f(x) dx$ est divergente.

Or si nous prenons $g(x) = \frac{1}{x^3}$, $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions continues et positives pour $0 < x \leq 1$.

De plus, $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$ est divergente d'après le théorème 5

(car $\alpha = 3 \geq 1$) et $f(x) \geq g(x)$, pour $0 < x \leq 1$.

En effet : $\frac{1}{x^3 - 5x^2} \geq \frac{1}{x^3}$, pour $0 < x \leq 1$.

Dans ces conditions : $I_{27} = \int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$ est divergente.

Au total, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{27} est divergente.

(28) Déterminons la nature de l'intégrale I_{28} :

Nous savons que : $I_{28} = \int_0^1 \frac{\text{Log}(1+x)}{x} dx$.

Appliquons le théorème 7.

Soient f et g deux fonctions continues et positives pour $0 < x \leq 1$.

Nous savons que si $\int_0^1 g(x) dx$ est convergente et $f(x) \leq g(x)$,

pour $0 < x \leq 1$, alors $I_{28} = \int_0^1 f(x) dx$ est convergente.

Or si nous prenons $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$, $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions continues et positives pour $0 < x \leq 1$.

De plus, $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ est convergente d'après le théorème 5 (car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$) et $f(x) \leq g(x)$, pour $0 < x \leq 1$.

En effet : $\frac{\text{Log}(1+x)}{x} \leq \frac{1}{x^{1/2}}$, pour $0 < x \leq 1$.

Dans ces conditions : $I_{28} = \int_0^1 \frac{\text{Log}(1+x)}{x} dx$ est convergente.

Au total, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{28} est convergente.

(29) Déterminons la nature de l'intégrale I_{29} :

Nous savons que : $I_{29} = \int_0^1 \frac{dx}{x}$.

Or, d'après le théorème 5, comme $\alpha = 1 \geq 1$, nous pouvons affirmer que l'intégrale I_{29} est divergente.

③⑩ **Déterminons la nature de l'intégrale I_{30} :**

$$\text{Nous savons que : } I_{30} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}} \Leftrightarrow I_{30} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/4}}.$$

Or, d'après le théorème 6, comme $\alpha = \frac{1}{4} < 1$, nous pouvons affirmer que l'intégrale **I_{30} est convergente.**

V

**THÉORÈME DE ROLLE – THÉORÈME DES
ACCROISSEMENTS FINIS –
APPROXIMATION POLYNOMIALE DES
FONCTIONS D'UNE VARIABLE –
FORMULE DE TAYLOR
AVEC RESTE DE LAGRANGE –
FORMULE DE TAYLOR
AVEC RESTE DE YOUNG –
FORMULE DE MAC LAURIN –
DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS –
PROPRIÉTÉS DES
DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS.**

☞ EXERCICE n° 54

ÉNONCÉ :

- ① **Rappeler le théorème de Rolle.**
- ② **Peut-on appliquer le théorème de Rolle aux fonction suivantes ?**

Ⓐ $f(x) = x^2 - 1$ définie sur $[-1, 1]$.

Ⓑ $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ définie sur $[-1, 1]$.

Ⓒ $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ définie sur $[0, 1]$.

CORRIGÉ :

① Rappelons le théorème de Rolle :

Si une fonction $y = f(x)$ est définie et continue sur le segment $[a, b]$, dérivable dans l'intervalle $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$, alors il existe au moins une valeur c de l'intervalle ouvert $]a, b[$ qui vérifie $f'(c) = 0$.

② Pouvons nous appliquer le théorème de Rolle aux fonctions suivantes ?

Ⓐ $f(x) = x^2 - 1$ définie sur $[-1, 1]$:

$f(x) = x^2 - 1$ est définie et continue sur le segment $[-1, 1]$, dérivable dans l'intervalle $] -1, 1[$ et telle que $f(-1) = f(1) = 0$.

Dans ces conditions, nous pouvons appliquer le théorème de Rolle, et il existe au moins une valeur c de l'intervalle ouvert $] -1, 1[$ qui vérifie $f'(c) = 0$.

En effet, $f'(x) = 2x$ et

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow 2c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0 \text{ et } c \in] -1, 1[}.$$

Ⓑ $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ définie sur $[-1, 1]$:

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est définie et continue sur le segment $[-1, 1]$, dérivable dans l'intervalle $] -1, 1[$ et telle que $f(-1) = f(1) = 0$.

Dans ces conditions, nous pouvons appliquer le théorème de Rolle, et il existe au moins une valeur c de l'intervalle ouvert $] -1, 1[$ qui vérifie $f'(c) = 0$.

En effet,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-1/2} \times 2x \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^{1/2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\text{D'où : } f'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{c^2 - 1}} = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0 \text{ et } c \in] -1, 1[}.$$

③ $f(x) = (x - 1)/(x + 1)$ définie sur $[0, 1]$:

$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$ est définie et continue sur le segment $[0, 1]$, dérivable dans l'intervalle $]0, 1[$.

Or $f(0) = -1$ et $f(1) = 0$ et donc $f(0) \neq f(1)$.

Dans ces conditions, nous ne pouvons pas appliquer le théorème de Rolle.

 EXERCICE n° 55

ÉNONCÉ :

- ① **Rappeler le théorème des accroissements finis.**
- ② **Appliquer le théorème des accroissements finis aux fonctions suivantes :**
 - a) $f(x) = x^3 - 3x + 3$ définie sur $[-2, 2]$.
 - b) $f(x) = -x^3 + x$ définie sur $[-2, 1]$.
 - c) $f(x) = x^2 + 3$ définie sur $[a, b]$.

CORRIGÉ :

① Rappelons le théorème des accroissements finis :

Si une fonction $y = f(x)$ est définie et continue sur le segment $[a, b]$, dérivable dans l'intervalle $]a, b[$, il existe alors au moins une valeur $c \in]a, b[$ qui vérifie :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Il est bon de noter que $f'(c)$ est égale à la tangente de l'angle α c'est-à-dire la pente au point $A(c, f(c))$.

② Appliquons le théorème des accroissements finis aux fonctions suivantes :

① $f(x) = x^3 - 3x + 3$ définie sur $[-2, 2]$:

$f(x) = x^3 - 3x + 3$ est définie et continue sur le segment $[-2, 2]$, dérivable dans l'intervalle $] -2, 2[$.

Dans ces conditions, il existe au moins une valeur $c \in] -2, 2[$ qui vérifie :

$$f(2) - f(-2) = (2 - (-2))f'(c) \Rightarrow \boxed{f'(c) = 1}.$$

$$\text{Or } f'(x) = 3x^2 - 3 \text{ et } f'(c) = 1 \Leftrightarrow 3c^2 - 3 = 1 \Rightarrow \boxed{c = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}}.$$

Au total, il existe au moins une valeur $c \in] -2, 2[$; en fait il y en a

$$\text{deux : } \boxed{c_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} \in] -2, 2[\text{ et } c_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}} \in] -2, 2[}.$$

En définitive, le théorème des accroissements finis est bien vérifié.

② $f(x) = -x^3 + x$ définie sur $[-2, 1]$:

$f(x) = -x^3 + x$ est définie et continue sur le segment $[-2, 1]$, dérivable dans l'intervalle $] -2, 1[$.

Dans ces conditions, il existe au moins une valeur de $c \in] -2, 1[$ qui vérifie :

$$f(1) - f(-2) = (1 - (-2))f'(c) \Rightarrow \boxed{f'(c) = -2}.$$

Or $f'(x) = -3x^2 + 1$

et $f'(c) = -2 \Leftrightarrow -3c^2 + 1 = -2 \Rightarrow \boxed{c = \pm 1}.$

Cela étant, il existe qu'une seule valeur de c car $c \in]-2, 1[$; il

s'agit de : $\boxed{c = -1}.$

En définitive, le théorème des accroissements finis est bien vérifié.

Ⓒ $f(x) = x^2 + 3$ définie sur $[a, b]$:

$f(x) = x^2 + 3$ est définie et continue sur le segment $[a, b]$, dérivable dans l'intervalle $]a, b[$.

Dans ces conditions, il existe au moins une valeur de $c \in]a, b[$ qui vérifie :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \Rightarrow \boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}.$$

Or $f'(x) = 2x$ et $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f'(c) = \frac{b^2 - a^2}{b - a}$ (1)

(1) $\Leftrightarrow f'(c) = b + a$ (2)

(2) $\Leftrightarrow 2c = b + a$ (3)

(3) $\Rightarrow \boxed{c = \frac{b + a}{2}}.$

Au total, il existe au moins une valeur $c \in]a, b[$:

$$\boxed{c = \frac{a + b}{2} \in]a, b[}.$$

En définitive, le théorème des accroissements finis est bien vérifié.

ÉNONCÉ :

- ① Écrire la formule de Taylor avec le reste de Lagrange.
- ② Même question mais avec le reste de Young.

CORRIGÉ :

- ① Écrivons la formule de Taylor avec le reste de Lagrange :

Si une fonction $f(x)$ est définie et continue sur $[a, b]$, ainsi que ses n premières dérivées, et si elle admet dans l'intervalle $]a, b[$ une dérivée d'ordre $(n + 1)$, il existe une valeur $c \in]a, b[$ pour laquelle :

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Il est bon de noter que le dernier terme $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ s'appelle le reste de Lagrange.

- ② Écrivons la formule de Taylor avec le reste de Young :

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^n sur I . Alors $\forall a \in I$, il existe un intervalle J contenant 0 et une fonction $\varepsilon : J \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I, \\ f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \\ + (x-a)^n \varepsilon(x-a), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x-a) = 0$$

Il est bon de noter que le terme $(x-a)^n \varepsilon(x-a)$ s'appelle le reste de Young.

EXERCICE n° 57

ÉNONCÉ :

À l'aide de la formule de Taylor avec le reste de Lagrange, déterminer les développements limités suivants :

- ① Développer à l'ordre 3 la fonction $f(x) = \frac{1}{x-1}$ au voisinage du point $x_0 = 2$.
- ② Développer à l'ordre 4 la fonction $f(x) = \text{Log}(1+x)$ au voisinage du point $x_0 = 1$.
- ③ Développer à l'ordre 3 la fonction $f(x) = \cos x$ au voisinage du point $x_0 = \pi$.

CORRIGÉ :

- ① Déterminons le développement limité à l'ordre 3 de la fonction $f(x) = 1/(x-1)$ au voisinage de $x_0 = 2$, et cela à l'aide de la formule de Taylor avec le reste de Lagrange :
D'après le cours, nous savons que :

$$f(x) = f(2) + \frac{(x-2)}{1!}f'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!}f''(2) + \frac{(x-2)^3}{3!}f'''(2) + \frac{(x-2)^4}{4!}f''''(c), \quad c \in]2, 2+b[.$$

Calculons les dérivées successives de $f(x)$:

- $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2},$
- $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3},$
- $f'''(x) = \frac{-6}{(x-1)^4},$
- $f''''(x) = \frac{24}{(x-1)^5}.$

Dans ces conditions :

- $f(2) = 1,$
- $f'(2) = -1,$
- $f''(2) = 2,$
- $f'''(2) = -6,$
- $f''''(c) = \frac{24}{(c-1)^5}.$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } f(x) &= 1 + (x-2)(-1) + \frac{(x-2)^2}{2}(2) + \frac{(x-2)^3}{6}(-6) \\ &\quad + \frac{(x-2)^4}{24} \left(\frac{24}{(c-1)^5} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

(1) $\Leftrightarrow$

$$f(x) = 1 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + \frac{(x-2)^4}{(c-1)^5}, \quad c \in]2, 2+b[.$$

Déterminons le développement limité à l'ordre 4 de la fonction $f(x) = \text{Log}(1+x)$ au voisinage de $x_0 = 1$, et cela à l'aide de la formule de Taylor avec le reste de Lagrange :

D'après le cours, nous savons que :

$$f(x) = f(1) + \frac{(x-1)}{1!}f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!}f'''(1) \\ + \frac{(x-1)^4}{4!}f^{(4)}(1) + \frac{(x-1)^5}{5!}f^{(5)}(c), \quad c \in]1, 1+b$$

Calculons les dérivées successives de $f(x)$:

- $f'(x) = \frac{1}{1+x},$
- $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2},$
- $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$
- $f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4},$
- $f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}.$

Dans ces conditions :

- $f(1) = \text{Log}2,$
- $f'(1) = \frac{1}{2},$
- $f''(1) = -\frac{1}{4},$
- $f'''(1) = \frac{1}{4},$
- $f^{(4)}(1) = \frac{-3}{8},$
- $f^{(5)}(c) = \frac{24}{(1+c)^5}.$

D'où :

$$f(x) = \log 2 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{24} - \frac{(x-1)^4}{64} + \frac{(x-1)^5}{5(1+c)^5},$$
$$c \in]1, 1+b[$$

Déterminons le développement limité à l'ordre 3 de la fonction $f(x) = \cos x$ au voisinage de $x_0 = \pi$, et cela à l'aide de la formule de Taylor avec le reste de Lagrange :

D'après le cours, nous savons que :

$$f(x) = f(\pi) + \frac{(x-\pi)}{1!}f'(\pi) + \frac{(x-\pi)^2}{2!}f''(\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!}f'''(\pi) + \frac{(x-\pi)^4}{4!}f''''(c), \quad c \in]\pi, \pi+b[.$$

Calculons les dérivées successives de $f(x)$:

- $f'(x) = -\sin x,$
- $f''(x) = -\cos x,$
- $f'''(x) = \sin x,$
- $f''''(x) = \cos x.$

Dans ces conditions :

- $f(\pi) = -1,$
- $f'(\pi) = 0,$
- $f''(\pi) = 1,$
- $f'''(\pi) = 0,$
- $f''''(c) = \cos c.$

D'où :

$$f(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} + \frac{(x-\pi)^4}{24} \cos c, \quad c \in]\pi, \pi+b[.$$

ÉNONCÉ :

À l'aide de la formule de Taylor avec le reste de Young, déterminer les développements limités suivants :

- ① Développer à l'ordre 2 la fonction $f(x) = x\text{Log}x + x$ au voisinage du point $x_0 = 1$.
- ② Développer à l'ordre 3 la fonction $f(x) = (1 - x)e^x - \text{Log}(1 + x^2)$ au voisinage du point $x_0 = 0$.
- ③ Développer à l'ordre 2 la fonction $f(x) = \frac{\text{Log}x}{x^2}$ au voisinage du point $x_0 = 1$.

CORRIGÉ :

- ① Déterminons le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = x\text{Log}x + x$ au voisinage du point $x_0 = 1$, et cela à l'aide de la formule de Taylor avec le reste de Young :

D'après le cours, nous savons que :

$$f(x) = f(1) + \frac{(x-1)}{1!}f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}f''(1) + (x-1)^2\varepsilon(x-1),$$

avec $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x-1) = 0$.

Calculons les dérivées successives de $f(x)$:

- $f'(x) = (\text{Log}x) + 2,$

- $f''(x) = \frac{1}{x}.$

Dans ces conditions :

- $f(1) = 1,$
- $f'(1) = 2,$
- $f''(1) = 1.$

D'où :
$$f(x) = 1 + 2(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)\varepsilon(x-1),$$
 avec $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x-1) = 0$

Déterminons le développement limité à l'ordre 3 de la fonction $f(x) = (1-x)e^x - \text{Log}(1+x^2)$ au voisinage du point $x_0 = 0$, et cela à l'aide de la formule de Taylor avec le reste de Young :

D'après le cours, nous savons que :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + x^3\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$

Calculons les dérivées successives de $f(x)$:

- $f'(x) = -e^x + (1-x)e^x - \frac{2x}{1+x^2},$
- $f''(x) = -e^x - e^x + (1-x)e^x + \frac{2x^2-2}{(1+x^2)^2},$
- $f'''(x) = -e^x - e^x - e^x + (1-x)e^x + \frac{(-4x^5+8x^3+12x)}{(1+x^2)^4}.$

Dans ces conditions :

- $f(0) = 1,$
- $f'(0) = 0,$
- $f''(0) = -3,$

- $f'''(0) = -2.$

D'où :
$$f(x) = 1 - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

③ **Déterminons le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = (\text{Log } x)/x^2$ au voisinage du point $x_0 = 1$, et cela à l'aide de la formule de Taylor avec le reste de Young :**

D'après le cours, nous savons que :

$$f(x) = f(1) + \frac{(x-1)}{1!}f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}f''(1) + (x-1)^2\varepsilon(x-1),$$

avec $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x-1) = 0.$

Calculons les dérivées successives de $f(x)$:

- $f'(x) = \frac{x - 2x \text{Log } x}{x^4},$

- $f''(x) = \frac{-x^4 + 6x^4 \text{Log } x}{x^8} \Rightarrow f''(x) = \frac{-1 + 6 \text{Log } x}{x^4}.$

Dans ces conditions :

- $f(1) = 0,$

- $f'(1) = 1,$

- $f''(1) = -1.$

D'où :
$$f(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2\varepsilon(x-1),$$

avec $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x-1) = 0$

ÉNONCÉ :

- ① **Rappeler la formule de Mac Laurin.**
- ② **À l'aide de la formule de Mac Laurin, déterminer les développements limités suivants :**
 - ⓐ $f(x) = x + 5x^2 + x^3 \sin x$ à l'ordre 3.
 - ⓑ $f(x) = \text{Log}(1 + e^x)$ à l'ordre 3.
 - ⓒ $f(x) = x + (1 - x)^{1/2}$ à l'ordre 2.

CORRIGÉ :

- ① **Rappelons la formule de Mac Laurin :**

Préalablement, il est bon de noter que la formule de Mac Laurin se développe toujours au voisinage du point $x_0 = 0$.

Deux formulations sont possibles :

- Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle I contenant 0 et x un élément quelconque de I . En appliquant la formule de Mac Laurin à l'ordre n , nous avons :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x), \quad \text{avec } 0 < \theta < 1$$

- Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et f une fonction de classe C^n sur I . Alors il existe une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in I,$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x),$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

② À l'aide de la formule de Mac Laurin, déterminons les développements limités suivants :

① $f(x) = x + 5x^2 + x^3 \sin x$ à l'ordre 3 :

Nous allons utiliser la seconde formulation.

D'après le cours, nous savons que :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + x^3\varepsilon(x).$$

Calculons les dérivées successives de $f(x)$:

- $f'(x) = 1 + 10x + 3x^2 \sin x + x^3 \cos x,$
- $f''(x) = 10 + 6x \sin x + 3x^2 \cos x + 3x^2 \cos x - x^3 \sin x,$
- $f'''(x) = 6 \sin x + 6x \cos x + 6x \cos x - 3x^2 \sin x + 6x \cos x$
 $- 3x^2 \sin x - 3x^2 \sin x - x^3 \cos x$

Dans ces conditions :

- $f(0) = 0,$
- $f'(0) = 1,$
- $f''(0) = 10,$
- $f'''(0) = 0.$

D'où : $f(x) = x + 5x^2 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$

ⓑ $f(x) = \text{Log}(1 + e^x)$ à l'ordre 3 :

Nous allons utiliser la seconde formulation.

D'après le cours, nous savons que :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + x^3\varepsilon(x).$$

Calculons les dérivées successives de $f(x)$:

- $f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x},$
- $f''(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2},$
- $f'''(x) = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}.$

Dans ces conditions :

- $f(0) = \text{Log}2,$
- $f'(0) = \frac{1}{2},$
- $f''(0) = \frac{1}{4},$
- $f'''(0) = 0.$

D'où :
$$f(x) = \text{Log}2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

ⓒ $f(x) = x + (1 - x)^{1/2}$ à l'ordre 2 :

Nous allons utiliser la seconde formulation.

D'après le cours, nous savons que :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + x^2\varepsilon(x).$$

Calculons les dérivées successives de $f(x)$:

- $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}(1 - x)^{-1/2},$

- $f''(x) = -\frac{1}{4}(1-x)^{-3/2}.$

Dans ces conditions :

- $f(0) = 1,$

- $f'(0) = \frac{1}{2},$

- $f''(0) = -\frac{1}{4}.$

D'où :
$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 .$$

EXERCICE n° 60

ÉNONCÉ :

Écrire les développements limités usuels au voisinage de 0.

CORRIGÉ :

Écrivons les développements limités usuels au voisinage de 0

Ⓐ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n\varepsilon(x),$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$

Ⓑ $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x),$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$

$$\textcircled{\text{c}} \quad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \dots$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

$$\textcircled{\text{d}} \quad \text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + x^n \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

$$\textcircled{\text{e}} \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

$$\textcircled{\text{f}} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

$$\textcircled{\text{g}} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

$$\textcircled{\text{h}} \quad \text{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + x^{2n+2} \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

En définitive, il est bon de remarquer que l'ordre d'un développement limité se voit sur le reste !

ÉNONCÉ :

Quelles sont les propriétés des développements limités ?

CORRIGÉ :

Déterminons les propriétés des développements limités :

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre n au voisinage de 0.

Nous avons donc : $f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$,

et : $g(x) = Q_n(x) + x^n \varepsilon_2(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

① La somme $f + g$:

$f + g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$(f + g)(x) = P_n(x) + Q_n(x) + x^n \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Il est bon de noter que la partie régulière du développement limité de $f + g$ s'obtient en ajoutant les parties régulières des développements limités de f et g c'est-à-dire $P_n(x)$ et $Q_n(x)$.

② λf , $\lambda \in \mathbb{R}$:

λf admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$\lambda f(x) = \lambda P_n(x) + x^n \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

③ Le produit $f \cdot g$:

$f \cdot g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$(f \cdot g)(x) = R_n(x) + x^n \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Il est bon de remarquer que la partie régulière du développement limité de $f \cdot g$ soit $R_n(x)$ désigne le polynôme de degré n obtenu en ne conservant que les termes de degré $\leq n$ dans le produit $P_n(x) \cdot Q_n(x)$.

La composition $g \circ f$:

Si $P_n(0) = 0$ (ou $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$) alors $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$g[f(x)] = T_n(x) + x^n \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Il est bon de souligner que T_n désigne le polynôme de degré n obtenu en ne conservant que les termes de degré $\leq n$ dans le polynôme $Q_n[P_n(x)]$.

Le quotient f/g :

Pour mieux comprendre comment on écrit le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 d'un quotient, il est préférable d'avoir recours à des exercices pratiques (cf exercice n° 63).

Comment écrire un développement limité ?

D'une manière générale, pour écrire un développement limité au voisinage de 0, on a recours aux formules des développements limités usuels au voisinage de 0.

Cela étant, si on doit déterminer le développement limité à l'ordre n au voisinage du point x_0 , $x_0 \in \mathbb{R}^*$, on effectue le changement de

variable $\boxed{u = x - x_0}$ (cf exercice n° 62).

De même, si on doit donner le développement limité à l'ordre n au voisinage du point $x_0 = \pm\infty$, on effectue le changement de varia-

ble $\boxed{u = \frac{1}{x}}$ (cf exercice n° 62).

ÉNONCÉ :

Donner les développements limités à l'ordre 3 au voisinage du point indiqué des fonctions suivantes : (utiliser les formules des développements limités usuels) :

① $f(x) = (1 - x)^{-1}$ au voisinage de 0.

② $f(x) = (1 + x)^{-1}$ au voisinage de 0.

③ $f(x) = (1 + x)^{1/2}$ au voisinage de 0.

④ $f(x) = \frac{1}{(1 + x)^2}$ au voisinage de 0.

⑤ $f(x) = \text{Log}(1 + x)$ au voisinage de 0.

⑥ $f(x) = \text{Log}(2 + x)$ au voisinage de 0.

⑦ $f(x) = e^x$ au voisinage de 0.

⑧ $f(x) = e^{-x^2}$ au voisinage de 0.

⑨ $f(x) = \text{Log}(a + b)$ avec b tend vers 0.

⑩ $f(x) = \sin x$ au voisinage de 0.

⑪ $f(x) = \cos x$ au voisinage de 0.

⑫ $f(x) = \text{Log}(x + e^x)$ au voisinage de 0.

⑬ $f(x) = \text{Log } x$ au voisinage de a , $a \in \mathbb{R}_+^*$.

⑭ $f(x) = (1 + x)^\alpha$ au voisinage de 1, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\textcircled{15} \quad f(x) = \frac{(x^2 - 1)^{1/2}}{x} \quad \text{au voisinage de } +\infty.$$

$$\textcircled{16} \quad f(x) = e^{x/a} \quad \text{au voisinage de } a, \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

$$\textcircled{17} \quad f(x) = e^x \quad \text{au voisinage de } 1.$$

$$\textcircled{18} \quad f(x) = (x^3 + 2x + 1)^{1/3} \quad \text{au voisinage de } +\infty.$$

$$\textcircled{19} \quad f(x) = (x^2 + 1)e^{(x + x^2)} \quad \text{au voisinage de } 0.$$

$$\textcircled{20} \quad f(x) = e^{\sin x} \quad \text{au voisinage de } 0.$$

$$\textcircled{21} \quad f(x) = e^{\cos x} \quad \text{au voisinage de } 0.$$

$$\textcircled{22} \quad f(x) = \text{Log}[(2 + x)^2] \quad \text{au voisinage de } 0.$$

$$\textcircled{23} \quad f(x) = (1 + x)^{1/x} \quad \text{au voisinage de } 0.$$

$$\textcircled{24} \quad f(x) = xe^{1/x} \quad \text{au voisinage de } +\infty.$$

$$\textcircled{25} \quad f(x) = e^{4x} \sin(3x) \quad \text{au voisinage de } 0.$$

CORRIGÉ :

- ① Écrivons le développement limité de $f(x) = (1 - x)^{-1}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :**

$$\text{Nous avons : } (1 - x)^{-1} = \frac{1}{1 - x}.$$

$$\text{D'où : } \boxed{f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3 \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0}.$$

- ② Écrivons le développement limité de $f(x) = (1 + x)^{-1}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :**

$$\text{Nous avons : } (1 + x)^{-1} = \frac{1}{1 + x}.$$

D'où :
$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

- ③ **Écrivons le développement limité de $f(x) = (1+x)^{1/2}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :**

Nous avons : $f(x) = (1+x)^{1/2}.$

D'où :
$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

- ④ **Écrivons le développement limité de $f(x) = 1/(1+x)^2$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :**

Nous avons : $\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}.$

D'où :

$$f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

- ⑤ **Écrivons le développement limité de $f(x) = \text{Log}(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :**

Nous avons : $f(x) = \text{Log}(1+x).$

D'où :
$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

- ⑥ **Écrivons le développement limité de $f(x) = \text{Log}(2+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :**

Nous avons :

$$\text{Log}(2+x) = \text{Log}\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) \Rightarrow \text{Log}(2+x) = \text{Log}2 + \text{Log}\left(1+\frac{x}{2}\right).$$

Or $\frac{x}{2} \rightarrow 0$ car $x \rightarrow 0$.

D'où :

$$f(x) = \text{Log}2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

- ⑦ **Écrivons le développement limité de $f(x) = e^x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :**

Nous avons : $f(x) = e^x$.

D'où :
$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

- ⑧ **Écrivons le développement limité de $f(x) = e^{-x^2}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :**

Nous avons : $f(x) = e^{-x^2}$.

Or $-x^2 \rightarrow 0$ car $x \rightarrow 0$.

D'où :
$$f(x) = 1 - x^2 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Il est bon de noter qu'on ne garde que les termes de degré ≤ 3 .

- ⑨ **Écrivons le développement limité de $\text{Log}(a+b)$ à l'ordre 3 quand b tend vers 0 :**

Nous avons :

$$\text{Log}(a+b) = \text{Log}\left(a\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right) \Rightarrow \text{Log}(a+b) = \text{Log}a + \text{Log}\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Or $\frac{b}{a} \rightarrow 0$ car $b \rightarrow 0$.

D'où :

$$f(x) = \text{Log}a + (b/a) - \frac{(b/a)^2}{2} + \frac{(b/a)^3}{3} + (b/a)^3\varepsilon(b/a),$$

avec $\lim_{b \rightarrow 0} \varepsilon(b/a) = 0$

- ⑩ **Écrivons le développement limité de $f(x) = \sin x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :**

Nous avons : $f(x) = \sin x$.

D'où :
$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Il est bon de noter qu'on ne garde que les termes de degré ≤ 3 .

- ⑪ **Écrivons le développement limité de $f(x) = \cos x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :**

Nous avons : $f(x) = \cos x$.

$$\text{D'où : } \boxed{f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0}.$$

Il est bon de noter qu'on ne garde que les termes de degré ≤ 3 .

⑫ Écrivons le développement limité de $f(x) = \text{Log}(x + e^x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$\text{Nous avons : } \text{Log}(x + e^x) = \text{Log}\left(e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)\right) \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \text{Log}(x + e^x) = \text{Log} e^x + \text{Log}\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \text{Log}(x + e^x) = x + \text{Log}\left(1 + \frac{x}{e^x}\right).$$

$$\text{Or } \frac{x}{e^x} \rightarrow 0 \text{ car } x \rightarrow 0 ;$$

d'où :

$$\boxed{f(x) = x + (x/e^x) - \frac{(x/e^x)^2}{2} + \frac{(x/e^x)^3}{3} + (x/e^x)^3 \varepsilon(x/e^x), \\ \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x/e^x) = 0}.$$

⑬ Écrivons le développement limité de $f(x) = \text{Log} x$ à l'ordre 3 au voisinage de a , $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\text{Nous avons : } f(x) = \text{Log} x.$$

$$\text{Posons : } x = a + u, \text{ avec } u \text{ tend vers } 0.$$

Dans ces conditions :

$$f(x) = \text{Log}(a + u) \Leftrightarrow f(x) = \text{Log}\left(a \left(1 + \frac{u}{a}\right)\right) \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow f(x) = \text{Log} a + \text{Log}\left(1 + \frac{u}{a}\right).$$

$$\text{Or } \frac{u}{a} \rightarrow 0 \text{ car } u \rightarrow 0 ;$$

d'où :

$$\boxed{f(x) = \text{Log} a + (u/a) - \frac{(u/a)^2}{2} + \frac{(u/a)^3}{3} + (u/a)^3 \varepsilon(u/a),}$$

avec $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u/a) = 0$ et $u = x - a$

Écrivons le développement limité de $f(x) = (1+x)^\alpha$ à l'ordre 3 au voisinage de 1, $\alpha \in \mathbb{R}$:

Nous avons : $f(x) = (1+x)^\alpha$.

Posons : $x = 1 + u$, avec u tend vers 0.

Dans ces conditions : $f(x) = (2+u)^\alpha \Leftrightarrow f(x) = 2^\alpha \left(1 + \frac{u}{2}\right)^\alpha$.

Or $\frac{u}{2} \rightarrow 0$ car $u \rightarrow 0$;

d'où :

$$\boxed{f(x) = 2^\alpha \left[1 + \alpha \left(\frac{u}{2}\right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} \left(\frac{u}{2}\right)^3 + \left(\frac{u}{2}\right)^3 \varepsilon\left(\frac{u}{2}\right) \right], \text{ avec } \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon\left(\frac{u}{2}\right) = 0 \text{ et } u = x - 1}$$

Écrivons le développement limité de $f(x) = \frac{(x^2-1)^{1/2}}{x}$ à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$:

Nous avons : $f(x) = \frac{(x^2-1)^{1/2}}{x} \Leftrightarrow f(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{1/2} \quad (1)$

$(1) \Rightarrow f(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{1/2}$.

Or $\frac{-1}{x^2} \rightarrow 0$ car $x \rightarrow +\infty$;

d'où : $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{x^2}\right) + \left(\frac{-1}{x^2}\right)^2 \varepsilon\left(\frac{-1}{x^2}\right) \quad (2)$

$$(2) \Rightarrow \boxed{f(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{-1}{x^2}\right)^3 \varepsilon\left(\frac{-1}{x^2}\right), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 0}.$$

Il est bon de noter qu'on ne garde que les termes de degré ≤ 3 .

- (16) Écrivons le développement limité de $f(x) = e^{x/a}$ à l'ordre 3 au voisinage de a , $a \in \mathbb{R}^*$:**

Nous avons : $f(x) = e^{x/a}$.

Posons : $x = a + u$, avec u tend vers 0.

Dans ces conditions :

$$f(x) = e^{(a+u)/a} \Leftrightarrow f(x) = e^{1 + \frac{u}{a}} \Rightarrow f(x) = e \times e^{u/a}.$$

Or $\frac{u}{a} \rightarrow 0$ car $u \rightarrow 0$;

d'où :

$$\boxed{f(x) = e \left[1 + (u/a) + \frac{(u/a)^2}{2} + \frac{(u/a)^3}{6} + (u/a)^3 \varepsilon(u/a) \right],}$$

avec $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u/a) = 0$ et $u = x - a$

- (17) Écrivons le développement limité de $f(x) = e^x$ à l'ordre 3 au voisinage de 1 :**

Nous avons : $f(x) = e^x$.

Posons : $x = 1 + u$, avec u tend vers 0.

Dans ces conditions : $f(x) = e^{1+u} \Rightarrow f(x) = e \times e^u$.

Or $u \rightarrow 0$;

d'où :

$$\boxed{f(x) = e \left[1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3 \varepsilon(u) \right], \text{ avec } \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0 \text{ et } u = x - 1}.$$

Il est bon de remarquer que nous pouvons aussi écrire :

$$\boxed{f(x) = e \left[1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3 \varepsilon(x-1) \right],}$$

avec $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x-1) = 0$

Écrivons le développement limité de $f(x) = (x^3 + 2x + 1)^{1/3}$ à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$:

Nous avons :

$$f(x) = (x^3 + 2x + 1)^{1/3} \Leftrightarrow f(x) = \left(x^3 \left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right)^{1/3} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = x \left(1 + \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right)^{1/3} \Rightarrow f(x) = x(1 + u)^{1/3},$$

$$\text{avec } u = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

Or $u \rightarrow 0$ car $x \rightarrow +\infty$;

d'où :

$$f(x) = x \left[1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + \frac{5u^3}{81} + u^3 \varepsilon(u) \right], \quad \text{avec } \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0.$$

Écrivons le développement limité de $f(x) = (x^2 + 1)e^{(x+x^2)}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

Nous avons : $f(x) = (x^2 + 1)e^{(x+x^2)}$.

Or $(x + x^2) \rightarrow 0$ car $x \rightarrow 0$;

$$\text{d'où : } e^{(x+x^2)} = 1 + (x+x^2) + \frac{(x+x^2)^2}{2} + \frac{(x+x^2)^3}{6} + x^3 \varepsilon(x),$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 ;$$

c'est-à-dire :

$$e^{(x+x^2)} = 1 + x + x^2 + \frac{x^2 + 2x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Il est bon de noter qu'on ne garde que les termes de degré ≤ 3 .

$$\text{par conséquent : } e^{(x+x^2)} = 1 + x + x^2 + \frac{x^2 + 2x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x),$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

On fait maintenant le produit de ce développement par $(1 + x^2)$ et

$$\text{on obtient : } (x^2 + 1)e^{(x+x^2)} = 1 + x + \frac{5x^2}{2} + \frac{13x^3}{6} + x^3\varepsilon(x),$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0,$$

car on ne garde que les termes de degré ≤ 3 .

Au total :

$$f(x) = 1 + x + \frac{5x^2}{2} + \frac{13x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

(20) Écrivons le développement limité de $f(x) = e^{\sin x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$\text{Nous avons : } f(x) = e^{\sin x}.$$

$$\text{Or : } x \rightarrow 0 ;$$

$$\text{d'où : } \sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$$\text{De plus, quand } x \rightarrow 0, \sin x \rightarrow 0 ;$$

$$\text{d'où : } e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + x^3\varepsilon(x),$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

En gardant les termes de degré ≤ 3 , nous obtenons (après développement) :

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

(21) Écrivons le développement limité de $f(x) = e^{\cos x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$\text{Nous avons : } f(x) = e^{\cos x}.$$

$$\text{Or : } x \rightarrow 0 ;$$

$$\text{d'où : } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$$\text{De plus, quand } x \rightarrow 0, \cos x \rightarrow 1 \neq 0.$$

Dans ces conditions, posons : $e^{\cos x} = e^{(-1 + \cos x)}$ (1)

$$(1) \Rightarrow e^{\cos x} = e[e^{(-1 + \cos x)}],$$

et $(-1 + \cos x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

Or quand :

$$x \rightarrow 0, (-1 + \cos x) = \frac{-x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Posons : $u = \frac{-x^2}{2}$, avec u tend vers 0.

Dans ces conditions :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3 \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

En gardant les termes de degré ≤ 3 , nous obtenons (après développement) :

$$f(x) = e \left[1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x) \right], \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

(22) Écrivons le développement limité de $f(x) = \text{Log}[(2+x)^2]$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$\text{Nous avons : } f(x) = \text{Log}[(2+x)^2] \Leftrightarrow f(x) = 2\text{Log}(2+x) \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = 2 \left(\text{Log} \left(2 \left(1 + \frac{x}{2} \right) \right) \right) \Rightarrow f(x) = 2\text{Log}2 + 2\text{Log} \left(1 + \frac{x}{2} \right).$$

$$\text{Or } \frac{x}{2} \rightarrow 0 \text{ car } x \rightarrow 0 ;$$

d'où :

$$f(x) = 2 \left[\text{Log}2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + x^3 \varepsilon(x) \right], \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

(23) Écrivons le développement limité de $f(x) = (1+x)^{1/x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$\text{Nous avons : } f(x) = (1+x)^{1/x} \Leftrightarrow f(x) = e^{\text{Log}(1+x)^{1/x}} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow f(x) = e^{\frac{\text{Log}(1+x)}{x}}.$$

Or $x \rightarrow 0$;

d'où :

$$\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Par conséquent :

$$\frac{\text{Log}(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + x^3 \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$$\text{De plus, quand } x \rightarrow 0, \quad \frac{\text{Log}(1+x)}{x} \rightarrow 1 \neq 0.$$

$$\text{Dans ces conditions, posons : } e^{\frac{\text{Log}(1+x)}{x}} = e^{\left(1 - 1 + \frac{\text{Log}(1+x)}{x}\right)} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow e^{\frac{\text{Log}(1+x)}{x}} = e^{\left[e^{\left(-1 + \frac{\text{Log}(1+x)}{x}\right)} \right]},$$

$$\text{et : } \left(-1 + \frac{\text{Log}(1+x)}{x}\right) \rightarrow 0 \quad \text{quand } x \rightarrow 0.$$

$$\text{Or quand } x \rightarrow 0, \quad \left(-1 + \frac{\text{Log}(1+x)}{x}\right) = \frac{-x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + x^3 \varepsilon(x),$$

$$\text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$$\text{Posons : } u = \frac{-x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}, \quad \text{avec } u \text{ tend vers } 0.$$

Dans ces conditions :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3 \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

En gardant les termes de degré ≤ 3 , nous obtenons (après développement) :

$$f(x) = e^{\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7x^3}{16} + x^3 \varepsilon(x)\right]}, \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

(24) Écrivons le développement limité de $f(x) = xe^{1/x}$ à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$:

$$\text{Nous avons : } f(x) = xe^{1/x}.$$

Or $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ car $x \rightarrow +\infty$;

$$\text{d'où : } f(x) = x \left[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{24x^4} + \frac{1}{x^4} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \right],$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Au total, nous avons donc :

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{24x^3} + \frac{1}{x^3} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

(25) Écrivons le développement limité de $f(x) = e^{4x} \sin(3x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$\text{Nous avons : } f(x) = e^{4x} \sin(3x).$$

$$\text{Or } x \rightarrow 0 ;$$

d'où :

$$e^{4x} = 1 + (4x) + \frac{(4x)^2}{2} + \frac{(4x)^3}{6} + x^3 \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow$$

$$e^{4x} = 1 + 4x + 8x^2 + \frac{32x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 ;$$

de plus :

$$\sin(3x) = (3x) - \frac{(3x)^3}{6} + x^3 \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \sin(3x) = 3x - \frac{9x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Dans ces conditions :

$$e^{4x} \sin(3x) = \left(1 + 4x + 8x^2 + \frac{32x^3}{3} \right) \left(3x - \frac{9x^3}{2} \right) + x^3 \varepsilon(x),$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

En gardant les termes de degré ≤ 3 , nous obtenons (après développement) :

$$f(x) = 3x + 12x^2 + \frac{39x^3}{2} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

EXERCICE n° 63

ÉNONCÉ :

Déterminer les développements limités des quotients suivants :
(utiliser les formules des développements limités usuels)

① $f(x) = \frac{\text{Log}(1+x)}{1+x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

② $f(x) = \frac{\text{Log}(1+x)}{\cos x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

③ $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

CORRIGÉ :

① Déterminons le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $f(x) = (\text{Log}(1+x))/(1+x)$:

Nous savons que le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $\text{Log}(1+x)$ est : $\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon(x)$,
avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

D'où pour déterminer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $f(x) = \frac{\text{Log}(1+x)}{1+x}$, nous devons avoir recours à une division des parties régulières :

$x \quad -\frac{x^2}{2} \quad + \quad \frac{x^3}{3} \quad - \quad \frac{x^4}{4}$	$1 + x$
$-x \quad -x^2$	$x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} - \frac{25x^4}{12}$
$\frac{-3x^2}{2} \quad + \quad \frac{x^3}{3} \quad - \quad \frac{x^4}{4}$	
$\frac{3x^2}{2} \quad + \quad \frac{3x^3}{2}$	
$\frac{11x^3}{6} \quad - \quad \frac{x^4}{4}$	
$\frac{-11x^3}{6} \quad - \quad \frac{11x^4}{6}$	
$\frac{-25x^4}{12}$	
$\frac{+25x^4}{12} \text{ (STOP)}$	

Il est bon de noter que nous stoppons la division à ce niveau car l'ordre du développement est 4 !

Au total :

$$f(x) = x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} - \frac{25x^4}{12} + x^4\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Déterminons le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x) = (\text{Log}(1+x))/\cos x$:

Nous savons que le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de

0 de $\text{Log}(1+x)$ est : $\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x),$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$

De plus, le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$\cos x \text{ est : } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

D'où pour déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x) = \frac{\text{Log}(1+x)}{\cos x}$, nous devons avoir recours à une division des parties régulières :

$x \quad -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$	$1 - \frac{x^2}{2}$
$-x \quad + \frac{x^3}{2}$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6}$
$-----$ $\frac{-x^2}{2} + \frac{5x^3}{6}$ $\frac{x^2}{2} + \dots$	
$-----$ $\frac{5x^3}{6}$ $\frac{-5x^3}{6} \quad (\text{STOP})$	

Il est bon de noter que nous stoppons la division à ce niveau car l'ordre du développement limité est 3 !

Au total :
 $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$
.

③ **Déterminons le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x) = (xe^x)/(e^x - 1)$:**

Nous avons : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} \Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{\frac{e^x - 1}{x}}$.

Nous savons que le développement limité à l'ordre 3 (et non 2 car nous allons diviser par x) au voisinage de 0 de e^x est :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Par conséquent, le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\frac{e^x - 1}{x}$ est :

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

De plus, rappelons que le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de e^x est :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

D'où pour déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$, nous devons avoir recours à une division des parties régulières :

$1 + x + \frac{x^2}{2}$	$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}$
$-1 \quad -\frac{x}{2} \quad -\frac{x^2}{6}$	$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}$
$-----$	
$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}$	
$-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \dots$	
$-----$	
$\frac{x^2}{12}$	
$\frac{-x^2}{12} \quad (\text{STOP})$	

Il est bon de noter que nous stoppons la division à ce niveau car l'ordre du développement limité est 2 !

Au total :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + x^2\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

VI

**NOMBRES COMPLEXES : DÉFINITION –
FORME ALGÈBRIQUE D'UN NOMBRE
COMPLEXE – PROPRIÉTÉS –
REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE
D'UN NOMBRE COMPLEXE –
NOMBRES COMPLEXES CONJUGUÉS –
PROPRIÉTÉS –
MODULE ET ARGUMENT
D'UN NOMBRE COMPLEXE –
FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN
NOMBRE COMPLEXE – PROPRIÉTÉS –
FORMULE DE MOIVRE –
RACINES $n^{\text{ièmes}}$ D'UN NOMBRE COMPLEXE –
RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DU
SECOND DEGRÉ.**

ÉNONCÉ :

- ① Définir l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
- ② Donner trois exemples de nombres complexes.

CORRIGÉ :

- ① Définissons l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes :

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un corps.

Nous avons $\mathbb{C} = \{z = a + ib / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Il est bon de noter que : ● $a = \operatorname{Re}(z)$ est la partie réelle de z ;

● $b = \operatorname{Im}(z)$ est la partie imaginaire de z .

- ② Donnons trois exemples de nombres complexes :

Nous pouvons prendre, par exemple, $z_1 = 2 + 3i$,

$$z_2 = -1 + i,$$

$$z_3 = -6i.$$

z_1, z_2 et z_3 sont trois nombres complexes.

ÉNONCÉ :

- ① Définir la forme algébrique d'un nombre complexe.
- ② Déterminer les propriétés des nombres complexes écrits sous forme algébrique.

CORRIGÉ :

- ① Définissons la forme algébrique d'un nombre complexe :

Si z appartient à $\mathbb{C}$, la forme $z = a + ib$ s'appelle la forme algébrique de z .

- ② Déterminons les propriétés des nombres complexes écrits sous forme algébrique :

① Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, avec $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

Dans ces conditions, $z_1 = z_2$ si et seulement si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

② Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, avec $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

Dans ces conditions, $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.

③ Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, avec $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

Dans ces conditions, $z_1 \times z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$ car $i^2 = -1$.

④ Soit $z = i$, un nombre complexe, nous avons :

$$z^2 = i^2 = -1, \quad z^3 = -i \quad \text{et} \quad z^4 = 1.$$

 EXERCICE n° 66

ÉNONCÉ :

Mettre sous la forme algébrique les nombres complexes suivants :

① $z = (1 + i)(1 - i).$

② $z = \frac{1 - i}{1 + i}.$

③ $z = (1 - i)(\sqrt{3} + 3i).$

④ $z = \frac{3 + 2i}{2 + i}.$

⑤ $z = (1 + 2i)(2 - 3i)(2 + i)(3 - 2i).$

⑥ $z = \frac{5 - 3i}{3 + 4i} + \frac{1 + 2i}{2 - i}.$

⑦ $z = \left(\frac{1 - i}{1 + i} \right)^2.$

⑧ $z = \left(\frac{2 + i^5}{1 + i^{15}} \right)^2.$

⑨ $z = (1 + 2i)^2 - 2 + 3i.$

CORRIGÉ :

- ① Écrivons $z = (1 + i)(1 - i)$ sous forme algébrique :

$$z = (1 + i)(1 - i) \Leftrightarrow z = 1 - i + i - i^2 \Rightarrow z = 2.$$

Au total : $\boxed{z = 2}$.

- ② Écrivons $z = (1 - i)/(1 + i)$ sous forme algébrique :

$$z = \frac{1 - i}{1 + i} \Leftrightarrow z = \frac{(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \Leftrightarrow z = \frac{1 - i - i + i^2}{2} \Rightarrow z = -i.$$

Au total : $\boxed{z = -i}$.

- ③ Écrivons $z = (1 - i)(\sqrt{3} + 3i)$ sous forme algébrique :

$$z = (1 - i)(\sqrt{3} + 3i) \Leftrightarrow z = (\sqrt{3} + 3) + i(3 - \sqrt{3}).$$

Au total : $\boxed{z = (\sqrt{3} + 3) + i(3 - \sqrt{3})}$.

- ④ Écrivons $z = (3 + 2i)/(2 + i)$ sous forme algébrique :

$$z = \frac{3 + 2i}{2 + i} \Leftrightarrow z = \frac{(3 + 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} \Leftrightarrow z = \frac{6 - 3i + 4i + 2}{5} \Rightarrow z = \frac{8 + i}{5}.$$

Au total : $\boxed{z = \left(\frac{8}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)i}$.

- ⑤ Écrivons $z = (1 + 2i)(2 - 3i)(2 + i)(3 - 2i)$ sous forme algébrique :

$$z = (1 + 2i)(2 - 3i)(2 + i)(3 - 2i) \Leftrightarrow$$

$$z = (2 - 3i + 4i + 6)(6 - 4i + 3i + 2) \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow z = (8 + i)(8 - i) \Rightarrow z = 65.$$

Au total : $\boxed{z = 65}$.

- ⑥ Écrivons $z = [(5 - 3i)/(3 + 4i)] + [(1 + 2i)/(2 - i)]$ sous forme algébrique :

$$z = \frac{5 - 3i}{3 + 4i} + \frac{1 + 2i}{2 - i} \Leftrightarrow z = \frac{(5 - 3i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} + \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow z = \frac{(15 - 20i - 9i - 12)}{25} + \frac{(2 + i + 4i - 2)}{5} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow z = \frac{3 - 29i}{25} + i \Rightarrow z = \frac{3 - 4i}{25}.$$

Au total : $\boxed{z = \left(\frac{3}{25}\right) + i\left(\frac{-4}{25}\right)}.$

⑦ Écrivons $z = \left[(1 - i)/(1 + i)\right]^2$ sous forme algébrique :

$$z = \left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^2 \Leftrightarrow z = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)^2} \Leftrightarrow z = \frac{1 - 1 - 2i}{1 - 1 + 2i} \Rightarrow z = -1.$$

Au total : $\boxed{z = -1}.$

⑧ Écrivons $z = \left[(2 + i^5)/(1 + i^{15})\right]^2$ sous forme algébrique :

$$z = \left(\frac{2 + i^5}{1 + i^{15}}\right)^2 \Leftrightarrow z = \left(\frac{2 + i}{1 - i}\right)^2 \Leftrightarrow z = \frac{(2 + i)^2}{(1 - i)^2} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow z = \frac{4 - 1 + 4i}{1 - 1 - 2i} \Leftrightarrow z = \frac{3 + 4i}{-2i} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow z = \frac{(3 + 4i)(2i)}{(-2i)(2i)} \Leftrightarrow z = \frac{6i - 8}{4} \Rightarrow z = -2 + \frac{3}{2}i.$$

Au total : $\boxed{z = (-2) + \left(\frac{3}{2}\right)i}.$

⑨ Écrivons $z = (1 + 2i)^2 - 2 + 3i$ sous forme algébrique :

$$z = (1 + 2i)^2 - 2 + 3i \Leftrightarrow z = 1 - 4 + 4i - 2 + 3i \Leftrightarrow z = -5 + 7i.$$

Au total : $\boxed{z = (-5) + (7)i}.$

ÉNONCÉ :

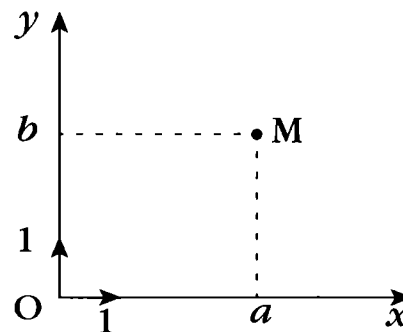
- ① **Comment représente-t-on géométriquement un nombre complexe?**
- ② **Soit $z = 2 + 3i$, faire une représentation géométrique de ce nombre complexe.**

CORRIGÉ :

- ① **Comment représente-t-on géométriquement un nombre complexe?**

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, si M est le point de coordonnées a et b respectivement sur $(1, 0)$ et $(0, 1)$ alors :

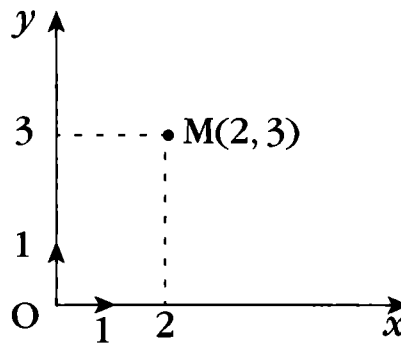
- le point $M(a, b)$ est l'image du nombre complexe $z = a + ib$;
- le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé l'afixe du point M;
- graphiquement, nous avons :



- ② **Soit $z = 2 + 3i$, faisons une représentation géométrique de ce nombre complexe :**

Pour cela, il suffit de placer le point M c'est-à-dire l'image du nombre complexe $z = 2 + 3i$ sachant que M a pour coordonnées 2 et 3 sur (1, 0) et (0, 1) : M(2, 3).

Représentation géométrique :



EXERCICE n° 68

ÉNONCÉ :

- ① Définir la notion de nombre complexe conjugué.
- ② Déterminer les propriétés des nombres complexes conjugués.
- ③ Quels sont les nombres complexes conjugués de :
 - a) $z_1 = 2 + 3i$,
 - b) $z_2 = 2 - 4i$,
 - c) $z_3 = 3$?

CORRIGÉ :

- ① Définissons la notion de nombre complexe conjugué :

Si $z = a + ib$, z étant un nombre complexe, on appelle conjugué de z le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

② Déterminons les propriétés des nombres complexes conjugués :

(a) Soit z un nombre complexe, $\overline{\bar{z}} = z$.

(b) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, avec $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

Dans ces conditions : $\bar{z}_1 = \bar{z}_2$ si et seulement si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

(c) Soit z un nombre complexe, $z + \bar{z} = 2a$ (avec $z = a + ib$).

(d) Soit z un nombre complexe, $z - \bar{z} = 2ib$ (avec $z = a + ib$).

(e) Soit z un nombre complexe, $z\bar{z} = a^2 + b^2$ (avec $z = a + ib$).

(f) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

(g) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

(h) Soit z un nombre complexe imaginaire pur c'est-à-dire $z = ib$, alors $z + \bar{z} = 0$.

(i) Soit $z \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire $z = a$, alors : $z = \bar{z} \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0$.

③ Donnons les nombres complexes conjugués de z_1 , z_2 et z_3 :

(a) $z_1 = 2 + 3i \Rightarrow \boxed{\bar{z}_1 = 2 - 3i}$.

(b) $z_2 = 2 - 4i \Rightarrow \boxed{\bar{z}_2 = 2 + 4i}$.

(c) $z_3 = 3 \Rightarrow \boxed{\bar{z}_3 = 3}$.

ÉNONCÉ :

- ① Définir le module d'un nombre complexe.
- ② Calculer le module des nombres complexes suivants :
 - a) $z = 1 + i$.
 - b) $z = 1 - i$.
 - c) $z = -1 + i$.
 - d) $z = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$.
 - e) $z = 1 - \sqrt{3}i$.
 - f) $z = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$.
 - g) $z = \sqrt{3} + 3i$.
 - h) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.
 - i) $z = \sqrt{3} - i$.

CORRIGÉ :

- ① Définissons le module d'un nombre complexe :

On appelle module de z , et on note $|z|$, le réel positif ou nul :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ avec } z = a + ib.$$

Il est bon de noter, qu'en général, on note le module d'un nombre complexe ρ ;

d'où : $\boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}.$

② Calculons le module des nombres complexes suivants :

① $z = 1 + i \Rightarrow \boxed{|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \rho = \sqrt{2}}.$

② $z = 1 - i \Rightarrow \boxed{|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \rho = \sqrt{2}}.$

③ $z = -1 + i \Rightarrow \boxed{|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \rho = \sqrt{2}}.$

④ $z = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i \Rightarrow \boxed{|z| = \frac{\sqrt{65}}{5} \Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{65}}{5}}.$

⑤ $z = 1 - \sqrt{3}i \Rightarrow \boxed{|z| = 2 \Leftrightarrow \rho = 2}}.$

⑥ $z = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i \Rightarrow \boxed{|z| = \frac{\sqrt{12}}{4} \Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{12}}{4}}.$

⑦ $z = \sqrt{3} + 3i. \Rightarrow \boxed{|z| = \sqrt{12} \Leftrightarrow \rho = \sqrt{12}}.$

⑧ $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Rightarrow \boxed{|z| = 1 \Leftrightarrow \rho = 1}}.$

⑨ $z_1 = \sqrt{3} - i. \Rightarrow \boxed{|z| = 2 \Leftrightarrow \rho = 2}}.$

 EXERCICE n° 70

ÉNONCÉ :

① Définir l'argument d'un nombre complexe.

- ② Comment écrit-on un nombre complexe sous forme trigonométrique?
- ③ Quelles sont les propriétés des nombres complexes écrits sous forme trigonométrique?

CORRIGÉ :

- ① Définissons l'argument d'un nombre complexe :

On appelle argument de z , et on note $\text{Arg}(z)$ ou θ , l'angle des demi-droites orientées $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$, exprimé en radians et défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).

- ② Comment écrit-on un nombre complexe sous forme trigonométrique?

Soient $z = a + ib$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique, ρ son module et θ son argument.

Sous forme trigonométrique z s'écrit :

$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$
ou : $z = \rho e^{i\theta}$
ou : $z = [\rho, \theta]$

- ③ Déterminons les propriétés des nombres complexes écrits sous forme trigonométrique?

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique : avec $z_1 = [\rho_1, \theta_1]$ et $z_2 = [\rho_2, \theta_2]$.

- ① $z_1 = z_2$ si et seulement si $\rho_1 = \rho_2$ et $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- ② $z_1 \times z_2 = [\rho_1 \times \rho_2, \theta_1 + \theta_2]$.
- ③ $\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}, \theta_1 - \theta_2 \right]$.

$$\textcircled{d} \quad \frac{1}{z_1} = \left[\frac{1}{\rho_1}, -\theta_1 \right].$$

$$\textcircled{e} \quad z_1^n = [\rho_1^n, n\theta_1].$$

Il est bon de remarquer que cette dernière propriété porte le nom de la *formule de Moivre* que nous pouvons aussi écrire de la manière suivante :

$$z_1^n = [\rho_1^n, n\theta_1] \Leftrightarrow z_1^n = \rho_1^n (\cos n\theta_1 + i \sin n\theta_1) \Leftrightarrow z_1^n = \rho_1^n e^{in\theta_1}.$$

EXERCICE n° 71

ÉNONCÉ :

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$\textcircled{1} \quad z = 1 + i.$$

$$\textcircled{2} \quad z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\textcircled{3} \quad z = \frac{1-i}{1+i}.$$

$$\textcircled{4} \quad z = 1 - \sqrt{3}i.$$

$$\textcircled{5} \quad z = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i.$$

$$\textcircled{6} \quad z = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i}{1 - \sqrt{3}i}.$$

$$\textcircled{7} \quad z = \sqrt{3} + 3i.$$

$$\textcircled{8} \quad z = (1 - i)(\sqrt{3} + 3i).$$

$$\textcircled{9} \quad z = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3.$$

$$\textcircled{10} \quad z = \frac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3}.$$

$$\textcircled{11} \quad z = (1 + i)^8(1 - \sqrt{3}i)^{-6}.$$

$$\textcircled{12} \quad z = -1 + \sqrt{3}i.$$

CORRIGÉ :

① Écrivons sous forme trigonométrique $z = 1 + i$:

Le module de z est : $\rho = \sqrt{2}$.

Dans ces conditions : $z = \sqrt{2}(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Or $z = 1 + i$.

$$\text{D'où : } \begin{cases} 1 = \sqrt{2} \cos \theta \\ 1 = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Au total : } \boxed{z = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.}$$

② Écrivons sous forme trigonométrique $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$:

Le module de z est : $\rho = 1$.

Dans ces conditions : $z = 1(\cos \theta + i \sin \theta)$.

$$\text{Or } z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} \frac{1}{2} = \cos \theta \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Au total : } \boxed{z = \left[1, -\frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow z = 1 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \Leftrightarrow z = 1 e^{-i}}$$

③ **Écrivons sous forme trigonométrique $z = (1 - i)/(1 + i)$:**

Le module de $1 - i$ est : $\rho_1 = \sqrt{2}$.

Dans ces conditions : $(1 - i) = \sqrt{2}(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$.

D'où :

$$\begin{cases} 1 = \sqrt{2} \cos \theta_1 \\ -1 = \sqrt{2} \sin \theta_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{D'où : } (1 - i) = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right].$$

De plus, le module de $(1 + i)$ est : $\rho_2 = \sqrt{2}$.

Dans ces conditions : $(1 + i) = \sqrt{2}(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$.

$$\text{D'où : } \begin{cases} 1 = \sqrt{2} \cos \theta_2 \\ 1 = \sqrt{2} \sin \theta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{D'où : } (1 + i) = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right].$$

Par conséquent : $z = \frac{\left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]}{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]} \Rightarrow z = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right]$.

Au total : $z = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow z = 1 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \Leftrightarrow z = 1 e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Écrivons sous forme trigonométrique $z = 1 - \sqrt{3}i$:

Le module de z est : $\rho = 2$.

Dans ces conditions : $z = 2(\cos\theta + i \sin\theta)$.

Or $z = 1 - \sqrt{3}i$.

D'où : $\begin{cases} 1 = 2\cos\theta \\ -\sqrt{3} = 2\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Au total : $z = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow z = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \Leftrightarrow z = 2 e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Écrivons sous forme trigonométrique $z = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i$:

Le module de z est : $\rho = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Dans ces conditions : $z = \frac{2}{\sqrt{3}}(\cos\theta + i \sin\theta)$.

Or $z = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i$.

D'où : $\begin{cases} 1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta \\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Au total :
$$z = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6} \right] \Leftrightarrow z = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow z = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

⑥ **Écrivons sous forme trigonométrique**

$$z = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i \right) / (1 - \sqrt{3}i) :$$

Nous avons déjà que : • $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6} \right],$

• $(1 - \sqrt{3}i) = \left[2, -\frac{\pi}{3} \right].$

Dans ces conditions :
$$z = \frac{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6} \right]}{\left[2, -\frac{\pi}{3} \right]} \Rightarrow z = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Au total :
$$z = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{2} \right] \Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

⑦ **Écrivons sous forme trigonométrique $z = \sqrt{3} + 3i$:**

Le module de z est : $\rho = \sqrt{12} \Rightarrow \rho = 2\sqrt{3}.$

Dans ces conditions : $z = 2\sqrt{3}(\cos \theta + i \sin \theta).$

Or $z = \sqrt{3} + 3i.$

D'où :
$$\begin{cases} \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cos \theta \\ 3 = 2\sqrt{3} \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Au total :
$$z = \left[2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3} \right] \Leftrightarrow z = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow z = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

⑧ **Écrivons sous forme trigonométrique $z = (1 - i)(\sqrt{3} + 3i)$:**

Nous savons déjà que : • $1 - i = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right],$

$$\bullet \sqrt{3} + 3i = \left[2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3} \right].$$

Dans ces conditions : $z = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \left[2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3} \right] \Rightarrow z = \left[2\sqrt{6}, \frac{\pi}{12} \right].$

Au total :

$$z = \left[2\sqrt{6}, \frac{\pi}{12} \right] \Leftrightarrow z = 2\sqrt{6} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \Leftrightarrow z = 2\sqrt{6} e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

⑨ **Écrivons sous forme trigonométrique** $z = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^3 :$

Nous savons déjà que : $\bullet \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left[1, -\frac{\pi}{3} \right].$

D'où, en appliquant la formule de Moivre, nous obtenons :

$$z = \left[1, -\frac{\pi}{3} \right]^3 \Rightarrow z = [1, -\pi].$$

Au total : $z = [1, -\pi] \Leftrightarrow z = 1(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) \Leftrightarrow z = 1e^{-i\pi}.$

⑩ **Écrivons sous forme trigonométrique** $z = (1+i)^5 / (1-i)^3 :$

Nous savons déjà que : $\bullet 1+i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right],$

$$\bullet 1-i = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right].$$

Dans ces conditions :

$$z = \frac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]^5}{\left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right]^3} \Rightarrow z = \frac{\left[4\sqrt{2}, 5\frac{\pi}{4} \right]}{\left[2\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4} \right]} \Rightarrow z = [2, 2\pi].$$

Au total : $z = [2, 2\pi] \Leftrightarrow z = 2(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) \Leftrightarrow z = 2e^{i2\pi}.$

⑪ **Écrivons sous forme trigonométrique**

$$z = (1+i)^8 (1-\sqrt{3}i)^{-6} :$$

Nous savons déjà que : • $1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]$,

$$\bullet 1 - \sqrt{3}i = \left[2, -\frac{\pi}{3} \right].$$

Dans ces conditions :

$$z = \frac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]^8}{\left[2, -\frac{\pi}{3} \right]^6} \Rightarrow z = \frac{[16, 2\pi]}{[64, -2\pi]} \Rightarrow z = \left[\frac{1}{4}, 4\pi \right].$$

$$\text{Au total : } \boxed{z = \left[\frac{1}{4}, 4\pi \right] \Leftrightarrow z = \frac{1}{4}(\cos 4\pi + i \sin 4\pi) \Leftrightarrow z = \frac{1}{4}e^{i4\pi}}$$

⑫ **Écrivons sous forme trigonométrique $z = -1 + \sqrt{3}i$:**

Le module de z est : $\rho = 2$.

Dans ces conditions : $z = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Or $z = -1 + \sqrt{3}i$.

$$\text{D'où : } \begin{cases} -1 = 2 \cos \theta \\ \sqrt{3} = 2 \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{-1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

car $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.

$$\text{Au total : } \boxed{z = \left[2, \frac{2\pi}{3} \right] \Leftrightarrow z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \Leftrightarrow z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

ÉNONCÉ :

① Comment détermine-t-on les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe?

② Calculer les racines carrés des nombres complexes suivants :

① $u = i.$

② $u = 5.$

③ $u = 1 - \sqrt{3}i.$

④ $u = \frac{1-i}{1+i}.$

⑤ $u = (1-i)(\sqrt{3} + 3i).$

⑥ $u = \frac{1+i}{1-i}.$

③ Calculer les racines cubiques des nombres complexes suivants :

① $u = 1.$

② $u = i.$

③ $u = -1.$

④ $u = 16i.$

$$\textcircled{e} \quad u = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}.$$

$$\textcircled{f} \quad u = \sqrt{2} + \sqrt{2}i.$$

CORRIGÉ :

- ① **Déterminons comment nous devons procéder pour calculer les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe :**

Soit z un nombre complexe, avec $z = a + ib$.

Sous forme trigonométrique, $z = [\rho, \theta]$, ρ étant le module de z et θ son argument.

Soit u un nombre complexe dont l'écriture sous forme trigonométrique est : $u = [\alpha, \beta]$, α étant le module de u et β son argument.

Dans ces conditions : $z^n = u \Leftrightarrow [\rho, \theta]^n = [\alpha, \beta]$,

$$z^n = u \Leftrightarrow [\rho^n, n\theta] = [\alpha, \beta],$$

$$z^n = u \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = \alpha \\ n\theta = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$z^n = u \Rightarrow \begin{cases} \rho = \alpha^{1/n} \\ \theta = \frac{\beta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Il est bon de noter que pour déterminer les différentes valeurs de z , nous devons prendre respectivement : $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3, \dots, k = (n-1)$.

- ② **Calculons les racines carrées des nombres complexes suivants :**

$$\textcircled{a} \quad u = i :$$

Il s'agit de déterminer z tel que $z^2 = i$.

Sous forme trigonométrique $z = [\rho, \theta]$, ρ étant le module de z et θ son argument.

Or le module de u est : $\alpha = 1$.

Dans ces conditions : $u = 1(\cos\beta + i\sin\beta)$.

D'où nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} 0 = \cos\beta \\ 1 = \sin\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\beta = 0 \\ \sin\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent : $u = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$.

Au total : $z^2 = i \Leftrightarrow [\rho, \theta]^2 = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$z^2 = i \Leftrightarrow [\rho^2, 2\theta] = \left[1, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$z^2 = i \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 1 \\ 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$z^2 = i \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

En définitive, les deux solutions sont :

$$\begin{aligned} \bullet (k=0) : z_1 &= \left[1, \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow z_1 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \Leftrightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \\ \bullet (k=1) : z_2 &= \left[1, \frac{5\pi}{4}\right] \Leftrightarrow z_2 = 1\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}. \end{aligned}$$

(b) $u = 5$:

Il s'agit de déterminer z tel que $z^2 = 5$.

Sous forme trigonométrique $z = [\rho, \theta]$, ρ étant le module de z et θ son argument.

Or le module de u est : $\alpha = 5$.

Dans ces conditions : $u = 5(\cos\beta + i\sin\beta)$.

D'où nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} 5 = 5\cos\beta \\ 0 = 5\sin\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\beta = 1 \\ \sin\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent : $u = [5, 0]$.

Au total : $z^2 = 5 \Leftrightarrow [\rho, \theta]^2 = [5, 0]$,

$$z^2 = 5 \Leftrightarrow [\rho^2, 2\theta] = [5, 0],$$

$$z^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 5 \\ 2\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$z^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{5} \\ \theta = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

En définitive, les deux solutions sont :

- ($k = 0$) : $z_1 = [\sqrt{5}, 0] \Leftrightarrow z_1 = \sqrt{5}(\cos 0 + i\sin 0) \Leftrightarrow z_1 = \sqrt{5}$,
- ($k = 1$) : $z_2 = [\sqrt{5}, \pi] \Leftrightarrow z_2 = \sqrt{5}(\cos \pi + i\sin \pi) \Leftrightarrow z_2 = \sqrt{5}e^{i\pi}$.

③ $u = 1 - \sqrt{3}i$:

Il s'agit de déterminer z tel que $z^2 = 1 - \sqrt{3}i$.

Sous forme trigonométrique $z = [\rho, \theta]$, ρ étant le module de z et θ son argument.

Or le module de u est : $\alpha = 2$.

Dans ces conditions : $u = 2(\cos\beta + i\sin\beta)$.

D'où nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = 2 \cos \beta \\ -\sqrt{3} = 2 \sin \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \beta = \frac{1}{2} \\ \sin \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent : $u = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]$.

Au total : $z^2 = 1 - \sqrt{3}i \Leftrightarrow [\rho, \theta]^2 = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right],$

$$z^2 = 1 - \sqrt{3}i \Leftrightarrow [\rho^2, 2\theta] = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right],$$

$$z^2 = 1 - \sqrt{3}i \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 2 \\ 2\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$z^2 = 1 - \sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

En définitive, les deux solutions sont :

• ($k = 0$) : $z_1 = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right] \Leftrightarrow z_1 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$

$$\Leftrightarrow z_1 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}},$$

• ($k = 1$) : $z_2 = \left[\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6}\right] \Leftrightarrow z_2 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right)$

$$\Leftrightarrow z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

(d) $u = (1 - i)/(1 + i)$:

Il s'agit de déterminer z tel que $z^2 = \frac{1-i}{1+i}$.

Sous forme trigonométrique $z = [\rho, \theta]$, ρ étant le module de z et θ son argument.

Or le module de u est : $\alpha = 1$ (cf exercice n° 71).

De plus, l'argument de u est : $\beta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (cf exercice n° 71).

Par conséquent : $\frac{1-i}{1+i} = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right]$.

Au total : $z^2 = \frac{1-i}{1+i} \Leftrightarrow [\rho, \theta]^2 = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right]$,

$$z^2 = \frac{1-i}{1+i} \Leftrightarrow [\rho^2, 2\theta] = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right],$$

$$z^2 = \frac{1-i}{1+i} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 1 \\ 2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$z^2 = \frac{1-i}{1+i} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

En définitive, les deux solutions sont :

$$\begin{aligned} \bullet (k=0) : z_1 &= \left[1, -\frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow z_1 = 1 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \Leftrightarrow z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}, \\ \bullet (k=1) : z_2 &= \left[1, \frac{3\pi}{4}\right] \Leftrightarrow z_2 = 1 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Ⓢ $u = (1-i)(\sqrt{3}+3i) :$

Il s'agit de déterminer z tel que $z^2 = (1-i)(\sqrt{3}+3i)$.

Sous forme trigonométrique $z = [\rho, \theta]$, ρ étant le module de z et θ son argument.

Or le module de u est : $\alpha = 2\sqrt{6}$ (cf exercice n° 71).

De plus, l'argument de u est : $\beta = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (cf exercice n° 71).

$$\text{Par conséquent : } (1-i)(\sqrt{3}+3i) = \left[2\sqrt{6}, \frac{\pi}{12}\right].$$

$$\text{Au total : } z^2 = (1-i)(\sqrt{3}+3i) \Leftrightarrow [\rho, \theta]^2 = \left[2\sqrt{6}, \frac{\pi}{12}\right],$$

$$z^2 = (1-i)(\sqrt{3}+3i) \Leftrightarrow [\rho^2, 2\theta] = \left[2\sqrt{6}, \frac{\pi}{12}\right],$$

$$z^2 = (1-i)(\sqrt{3}+3i) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 2\sqrt{6} \\ 2\theta = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$z^2 = (1-i)(\sqrt{3}+3i) \Rightarrow \begin{cases} \rho = (2\sqrt{6})^{1/2} \\ \theta = \frac{\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

En définitive, les deux solutions sont :

$$\bullet (k=0) : z_1 = \left[(2\sqrt{6})^{1/2}, \frac{\pi}{24}\right] \Leftrightarrow$$

$$z_1 = (2\sqrt{6})^{1/2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{24}\right) \right) \Leftrightarrow z_1 = (2\sqrt{6})^{1/2} e^{i\frac{\pi}{24}},$$

$$\bullet (k=1) : z_2 = \left[(2\sqrt{6})^{1/2}, \frac{25\pi}{24}\right] \Leftrightarrow$$

$$z_2 = (2\sqrt{6})^{1/2} \left(\cos\left(\frac{25\pi}{24}\right) + i \sin\left(\frac{25\pi}{24}\right) \right) \Leftrightarrow z_2 = (2\sqrt{6})^{1/2} e^{i\frac{25\pi}{24}}$$

$$\textcircled{f} \quad u = (1+i)/(1-i) :$$

Il s'agit de déterminer z tel que $z^2 = \frac{1+i}{1-i}$.

Sous forme trigonométrique $z = [\rho, \theta]$, ρ étant le module de z et θ son argument.

Or le module de u est : $\alpha = 1$ (cf exercice n° 71).

De plus, l'argument de u est : $\beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (cf exercice n° 71).

Par conséquent : $\frac{1+i}{1-i} = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$.

Au total : $z^2 = \frac{1+i}{1-i} \Leftrightarrow [\rho, \theta]^2 = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$z^2 = \frac{1+i}{1-i} \Leftrightarrow [\rho^2, 2\theta] = \left[1, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$z^2 = \frac{1+i}{1-i} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 1 \\ 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$z^2 = \frac{1+i}{1-i} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

En définitive, les deux solutions sont :

$$\begin{aligned} \bullet (k=0) : z_1 &= \left[1, \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow z_1 = 1 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \Leftrightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \\ \bullet (k=1) : z_2 &= \left[1, \frac{5\pi}{4}\right] \Leftrightarrow z_2 = 1 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right) \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}. \end{aligned}$$

③ Calculons les racines cubiques des nombres complexes suivants :

Ⓐ $u = 1$:

Il s'agit de déterminer z tel que $z^3 = 1$.

Sous forme trigonométrique $z = [\rho, \theta]$, ρ étant le module de z et θ son argument.

Or le module de u est : $\alpha = 1$.

Dans ces conditions : $u = 1(\cos\beta + i\sin\beta)$.

D'où nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = \cos\beta \\ 0 = \sin\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\beta = 1 \\ \sin\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent : $u = [1, 0]$.

Au total : $z^3 = 1 \Leftrightarrow [\rho, \theta]^3 = [1, 0]$,

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow [\rho^3, 3\theta] = [1, 0],$$

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$z^3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

En définitive, les trois solutions sont :

$$\begin{aligned} \bullet (k=0) : z_1 &= [1, 0] \Leftrightarrow z_1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) \Leftrightarrow z_1 = 1, \\ \bullet (k=1) : z_2 &= \left[1, \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow z_2 = 1\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \\ \bullet (k=2) : z_3 &= \left[1, \frac{4\pi}{3}\right] \Leftrightarrow z_3 = 1\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \Leftrightarrow z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}}. \end{aligned}$$

(b) $u = i$:

Il s'agit de déterminer z tel que $z^3 = i$.

Sous forme trigonométrique $z = [\rho, \theta]$, ρ étant le module de z et θ son argument.

Or le module de u est : $\alpha = 1$.

Dans ces conditions : $u = 1(\cos\beta + i\sin\beta)$.

D'où nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} 0 = \cos\beta \\ 1 = \sin\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\beta = 0 \\ \sin\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent : $u = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$.

Au total : $z^3 = i \Leftrightarrow [\rho, \theta]^3 = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$z^3 = i \Leftrightarrow [\rho^3, 3\theta] = \left[1, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$z^3 = i \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$z^3 = i \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

En définitive, les trois solutions sont :

$$(k = 0) : z_1 = \left[1, \frac{\pi}{6}\right] \Leftrightarrow z_1 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \Leftrightarrow z_1 = e^{\frac{i\pi}{6}},$$

$$(k = 1) : z_2 = \left[1, \frac{5\pi}{6}\right] \Leftrightarrow z_2 = 1\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \Leftrightarrow z_2 = e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

$$(k = 2) : z_3 = \left[1, \frac{9\pi}{6}\right] \Leftrightarrow z_3 = 1\left(\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right) \Leftrightarrow z_3 = e^{\frac{3i\pi}{2}}$$

Ⓒ $u = -1$:

Il s'agit de déterminer z tel que $z^3 = -1$.

Sous forme trigonométrique $z = [\rho, \theta]$, ρ étant le module de z et θ son argument.

Or le module de u est : $\alpha = 1$.

Dans ces conditions : $u = 1(\cos\beta + i\sin\beta)$.

D'où nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} -1 = \cos\beta \\ 0 = \sin\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\beta = -1 \\ \sin\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent : $u = [1, \pi]$.

Au total : $z^3 = -1 \Leftrightarrow [\rho, \theta]^3 = [1, \pi]$,

$$z^3 = -1 \Leftrightarrow [\rho^3, 3\theta] = [1, \pi],$$

$$z^3 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$z^3 = -1 \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

En définitive, les trois solutions sont :

$$\begin{aligned} \bullet (k=0) : z_1 &= \left[1, \frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow z_1 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \Leftrightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}, \\ \bullet (k=1) : z_2 &= [1, \pi] \Leftrightarrow z_2 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) \Leftrightarrow z_2 = e^{i\pi}, \\ \bullet (k=2) : z_3 &= \left[1, \frac{5\pi}{3}\right] \Leftrightarrow z_3 = 1\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) \Leftrightarrow z_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}}. \end{aligned}$$

(d) $u = 16i$:

Il s'agit de déterminer z tel que $z^3 = 16i$.

Sous forme trigonométrique $z = [\rho, \theta]$, ρ étant le module de z et θ son argument.

Or le module de u est : $\alpha = 16$.

Dans ces conditions : $u = 16(\cos \beta + i \sin \beta)$.

D'où nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} 0 = 16 \cos \beta \\ 16 = 16 \sin \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \beta = 0 \\ \sin \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent : $u = \left[16, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{Au total : } z^3 = 16i \Leftrightarrow [\rho, \theta]^3 = \left[16, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$z^3 = 16i \Leftrightarrow [\rho^3, 3\theta] = \left[16, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$z^3 = 16i \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 16 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$z^3 = 16i \Rightarrow \begin{cases} \rho = 2\sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

En définitive, les trois solutions sont :

$$\begin{aligned} \bullet (k=0) : z_1 &= \left[2\sqrt{2}, \frac{\pi}{6}\right] \Leftrightarrow z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \\ &\Leftrightarrow z_1 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}}, \\ \bullet (k=1) : z_2 &= \left[2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6}\right] \Leftrightarrow z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) \\ &\Leftrightarrow z_2 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}}, \\ \bullet (k=2) : z_3 &= \left[2\sqrt{2}, \frac{9\pi}{6}\right] \Leftrightarrow z_3 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{6}\right) \right) \\ &\Leftrightarrow z_3 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{9\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Ⓒ $u = (1 + i)/(\sqrt{3} - i) :$

Il s'agit de déterminer z tel que $z^3 = \frac{1 + i}{(\sqrt{3} - i)}$.

Sous forme trigonométrique $z = [\rho, \theta]$, ρ étant le module de z et θ son argument.

Or le module de $1 + i$ est : $\alpha_1 = \sqrt{2}$.

Dans ces conditions : $1 + i = \sqrt{2}(\cos \beta_1 + i \sin \beta_1)$.

D'où nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = \sqrt{2} \cos \beta_1 \\ 1 = \sqrt{2} \sin \beta_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent : $1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]$.

De même, le module de $\sqrt{3} - i$ est : $\alpha_2 = 2$.

Dans ces conditions : $\sqrt{3} - i = 2(\cos \beta_2 + i \sin \beta_2)$.

D'où nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{3} = 2 \cos \beta_2 \\ -1 = 2 \sin \beta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \beta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \beta_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent : $\sqrt{3} - i = \left[2, -\frac{\pi}{6} \right]$.

$$\text{Ainsi : } u = \frac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]}{\left[2, -\frac{\pi}{6} \right]} \Rightarrow u = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{12} \right].$$

Au total : $z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \Leftrightarrow [\rho, \theta]^3 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{12} \right],$

$$z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \Leftrightarrow [\rho^3, 3\theta] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{12} \right],$$

$$z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3\theta = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/3} \\ \theta = \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

En définitive, les trois solutions sont :

$$\begin{aligned} \bullet (k=0) : z_1 &= \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/3}, \frac{5\pi}{36} \right] \\ &\Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/3} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{36}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{36}\right) \right) \Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/3} e^{i\frac{5\pi}{36}}, \\ \bullet (k=1) : z_2 &= \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/3}, \frac{29\pi}{36} \right] \\ &\Leftrightarrow z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/3} \left(\cos\left(\frac{29\pi}{36}\right) + i \sin\left(\frac{29\pi}{36}\right) \right) \Leftrightarrow z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/3} e^{i\frac{29\pi}{36}}, \\ \bullet (k=2) : z_3 &= \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/3}, \frac{53\pi}{36} \right] \\ &\Leftrightarrow z_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/3} \left(\cos\left(\frac{53\pi}{36}\right) + i \sin\left(\frac{53\pi}{36}\right) \right) \Leftrightarrow z_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/3} e^{i\frac{53\pi}{36}} \end{aligned}$$

(f) $u = \sqrt{2} + \sqrt{2}i :$

Il s'agit de déterminer z tel que $z^3 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

Sous forme trigonométrique $z = [\rho, \theta]$, ρ étant le module de z et θ son argument.

Or le module de u est : $\alpha = 2$.

Dans ces conditions : $u = 2(\cos\beta + i\sin\beta)$.

D'où nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{2} = 2\cos\beta \\ \sqrt{2} = 2\sin\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent : $u = \left[2, \frac{\pi}{4}\right]$.

Au total : $z^3 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \Leftrightarrow [\rho, \theta]^3 = \left[2, \frac{\pi}{4}\right]$,

$$z^3 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \Leftrightarrow [\rho^3, 3\theta] = \left[2, \frac{\pi}{4}\right],$$

$$z^3 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 2 \\ 3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$z^3 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \Rightarrow \begin{cases} \rho = 2^{1/3} \\ \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

En définitive, les trois solutions sont :

$$\begin{aligned} \bullet (k=0) : z_1 &= \left[2^{1/3}, \frac{\pi}{12}\right] \Leftrightarrow z_1 = 2^{1/3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right), \\ &\Leftrightarrow z_1 = 2^{1/3} e^{i\frac{\pi}{12}}, \\ \bullet (k=1) : z_2 &= \left[2^{1/3}, \frac{9\pi}{12}\right] \Leftrightarrow z_2 = 2^{1/3} \left(\cos\left(\frac{9\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{12}\right) \right), \\ &\Leftrightarrow z_2 = 2^{1/3} e^{i\frac{9\pi}{12}}, \\ \bullet (k=2) : z_3 &= \left[2^{1/3}, \frac{17\pi}{12}\right] \Leftrightarrow z_3 = 2^{1/3} \left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right) \right), \\ &\Leftrightarrow z_3 = 2^{1/3} e^{i\frac{17\pi}{12}}. \end{aligned}$$

ÉNONCÉ :

Déterminer z dans les cas suivants :

① $z^4 = -1$.

② $z^5 = \frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}$.

CORRIGÉ :

① Déterminons z dans le cas où z est tel que $z^4 = -1$:

Il s'agit de déterminer z tel que $z^4 = -1$.

Sous forme trigonométrique $z = [\rho, \theta]$, ρ étant le module de z et θ son argument.

Or nous savons que $u = -1 \Rightarrow u = [1, \pi]$ (cf exercice n° 72).

Au total : $z^4 = -1 \Leftrightarrow [\rho, \theta]^4 = [1, \pi]$,

$$z^4 = -1 \Leftrightarrow [\rho^4, 4\theta] = [1, \pi],$$

$$z^4 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^4 = 1 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$z^4 = -1 \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

En définitive, les quatre solutions sont :

- $(k = 0) : z_1 = \left[1, \frac{\pi}{4} \right] \Leftrightarrow z_1 = 1 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \Leftrightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}},$
- $(k = 1) : z_2 = \left[1, \frac{3\pi}{4} \right] \Leftrightarrow z_2 = 1 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}},$
- $(k = 2) : z_3 = \left[1, \frac{5\pi}{4} \right] \Leftrightarrow z_3 = 1 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right) \Leftrightarrow z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}},$
- $(k = 3) : z_4 = \left[1, \frac{7\pi}{4} \right] \Leftrightarrow z_4 = 1 \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right) \Leftrightarrow z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$

② **Déterminons z dans le cas où z est tel que**

$$z^5 = (1 - i)/(1 + \sqrt{3}i) :$$

Il s'agit de déterminer z tel que $z^5 = \frac{1 - i}{1 + \sqrt{3}i}.$

Sous forme trigonométrique $z = [\rho, \theta]$, ρ étant le module de z et θ son argument.

Or le module de $1 - i$ est : $\alpha_1 = \sqrt{2}.$

Dans ces conditions : $1 - i = \sqrt{2}(\cos\beta_1 + i \sin\beta_1).$

D'où nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = \sqrt{2} \cos\beta_1 \\ -1 = \sqrt{2} \sin\beta_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\beta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent : $1 - i = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right].$

De même, le module de $1 + \sqrt{3}i$ est : $\alpha_2 = 2.$

Dans ces conditions $1 + \sqrt{3}i = 2(\cos\beta_2 + i \sin\beta_2).$

D'où nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = 2 \cos \beta_2 \\ \sqrt{3} = 2 \sin \beta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \beta_2 = \frac{1}{2} \\ \sin \beta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent : $1 + \sqrt{3}i = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$.

Ainsi : $\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{\left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]}{\left[2, \frac{\pi}{3}\right]} \Rightarrow \frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\pi}{12}\right]$.

Au total : $z^5 = \frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} \Leftrightarrow [\rho, \theta]^5 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\pi}{12}\right],$

$$z^5 = \frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} \Leftrightarrow [\rho^5, 5\theta] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\pi}{12}\right],$$

$$z^5 = \frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 5\theta = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$z^5 = \frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1/5} \\ \theta = -\frac{7\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

En définitive, les cinq solutions sont :

- $(k = 0) : z_1 = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/5}, -\frac{7\pi}{60} \right]$

$$\Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/5} \left(\cos\left(-\frac{7\pi}{60}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{60}\right) \right) \Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/5} e^{-i\frac{7\pi}{60}},$$
- $(k = 1) : z_2 = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/5}, \frac{17\pi}{60} \right]$

$$\Leftrightarrow z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/5} \left(\cos\left(\frac{17\pi}{60}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{60}\right) \right) \Leftrightarrow z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/5} e^{i\frac{17\pi}{60}},$$
- $(k = 2) : z_3 = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/5}, \frac{41\pi}{60} \right]$

$$\Leftrightarrow z_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/5} \left(\cos\left(\frac{41\pi}{60}\right) + i \sin\left(\frac{41\pi}{60}\right) \right) \Leftrightarrow z_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/5} e^{i\frac{41\pi}{60}},$$
- $(k = 3) : z_4 = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/5}, \frac{65\pi}{60} \right]$

$$\Leftrightarrow z_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/5} \left(\cos\left(\frac{65\pi}{60}\right) + i \sin\left(\frac{65\pi}{60}\right) \right) \Leftrightarrow z_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/5} e^{i\frac{65\pi}{60}},$$
- $(k = 4) : z_5 = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/5}, \frac{89\pi}{60} \right]$

$$\Leftrightarrow z_5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/5} \left(\cos\left(\frac{89\pi}{60}\right) + i \sin\left(\frac{89\pi}{60}\right) \right) \Leftrightarrow z_5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{1/5} e^{i\frac{89\pi}{60}}.$$

👉 EXERCICE n° 74

ÉNONCÉ :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- ① $3z^2 - 6z + 4 = 0.$
- ② $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0.$
- ③ $z^2 - 2(2 - i)z + 3(1 - 2i) = 0.$
- ④ $z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0.$

CORRIGÉ :

- ① **Réolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $3z^2 - 6z + 4 = 0$:**

Calculons Δ : $\Delta = -12 \Leftrightarrow \Delta = (\sqrt{12}i)^2.$

D'où deux solutions :

$$\begin{array}{l} \bullet \quad z_1 = \frac{6 - \sqrt{12}i}{6}, \\ \bullet \quad z_2 = \frac{6 + \sqrt{12}i}{6} \end{array}.$$

- ② **Réolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$:**

Calculons Δ : $\Delta = -1 \Leftrightarrow \Delta = i^2.$

D'où deux solutions :

$$\begin{array}{l} \bullet \quad z_1 = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}, \\ \bullet \quad z_2 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} \end{array}.$$

- ③ **Réolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(2 - i)z + 3(1 - 2i) = 0$**

Calculons Δ : $\Delta = 8i.$

Il nous faut déterminer un nombre complexe $\alpha = a + ib$ tel q
 $\alpha^2 = \Delta.$

$$\alpha^2 = (a + ib)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = a^2 - b^2 + i(2ab).$$

Or $\Delta = 8i.$

$$\text{D'où : } \alpha^2 = \Delta \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 8. \end{cases}$$

$$\text{De plus, } \alpha^2 = \Delta \Rightarrow |\alpha|^2 = |\Delta| \Rightarrow a^2 + b^2 = 8.$$

Par conséquent, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 8 \\ 2ab = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 8 \\ ab = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 8 \\ ab > 0 \end{cases} \quad \text{(I).} \quad \text{(i)}$$

$$\text{Du système (I), nous déduisons } 2a^2 = 8 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2.$$

$$\text{Dans ces conditions : } b^2 = a^2 \Rightarrow b = \pm 2.$$

Or l'inégalité (i) nous permet d'affirmer que a et b sont de même signe.

$$\text{Au total : } \alpha' = -2 - 2i \text{ et } \alpha'' = 2 + 2i.$$

Il est bon de noter que dans la solution finale, nous retiendrons soit α' soit α'' .

Prenons α' .

$$\text{En définitive, nous avons : } \bullet z_1 = \frac{2(2 - i) + 2 + 2i}{2},$$

$$\bullet z_2 = \frac{2(2 - i) - 2 - 2i}{2},$$

$$\text{c'est-à-dire : } \begin{cases} \bullet z_1 = 3, \\ \bullet z_2 = 1 - 2i \end{cases}.$$

Réolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0$:

$$\text{Calculons } \Delta : \Delta = 2 - 2i\sqrt{3}.$$

Il nous faut déterminer un nombre complexe $\alpha = a + ib$ tel que : $\alpha^2 = \Delta$.

$$\alpha^2 = (a + ib)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = a^2 - b^2 + i(2ab).$$

$$\text{Or } \Delta = 2 - 2i\sqrt{3}.$$

$$\text{D'où : } \alpha^2 = \Delta \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ 2ab = -2\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\text{De plus, } \alpha^2 = \Delta \Rightarrow |\alpha|^2 = |\Delta| \Rightarrow a^2 + b^2 = 4.$$

Par conséquent, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ a^2 + b^2 = 4 \\ 2ab = 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ a^2 + b^2 = 4 \\ ab = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ a^2 + b^2 = 4 \\ ab < 0 \end{cases} \quad (\text{I}). \quad (\text{i})$$

$$\text{Du système (I), nous déduisons } 2a^2 = 6 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}.$$

$$\text{Dans ces conditions : } b^2 = 4 - a^2 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1.$$

Or l'inégalité (i) nous permet d'affirmer que a et b sont de signes opposés.

$$\text{Au total : } \alpha' = \sqrt{3} - i \text{ et } \alpha'' = -\sqrt{3} + i.$$

Il est bon de noter que dans la solution finale, nous retiendrons soit α' soit α'' .

Prenons α' .

$$\text{En définitive, nous avons : } \bullet z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + i}{2},$$

$$\bullet z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3} + \sqrt{3} - i}{2},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \bullet z_1 &= \frac{(1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} + 1)i}{2}, \\ \bullet z_2 &= \frac{(1 + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)i}{2}. \end{aligned}$$

ÉNONCÉ :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$.

CORRIGÉ :

Réolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$:

Préalablement, nous devons trouver une racine évidente.

Or 1 est une racine évidente : $1 - 3 + 4 - 2 = 0$.

D'où $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(az^2 + bz + c) = 0$ (1);

(1) $\Leftrightarrow az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c = 0$ (2)

(2) $\Leftrightarrow az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c = 0$.

Par identification avec l'équation $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$, nous obtenons :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -3 \\ c - b = 4 \\ -c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Dans ces conditions : $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 - 2z + 2) = 0$.

Réolvons l'équation du second degré : $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Calculons Δ : $\Delta = -4 \Leftrightarrow \Delta = (2i)^2$.

D'où deux solutions : $\bullet z_1 = \frac{2 - 2i}{2},$

$\bullet z_2 = \frac{2 + 2i}{2},$

c'est-à-dire :

- $z_1 = 1 - i,$
- $z_2 = 1 + i$

Au total, l'équation $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$ admet

- $z_1 = 1 - i,$
- $z_2 = 1 + i,$
- $z_3 = 1$

Le cours par les exercices

Enfin une véritable bible d'exercices corrigés qui permet aux étudiants sortant de terminale d'être au meilleur niveau dès la première année de leurs études supérieures !

Chacun des six thèmes qui composent *Analyse I pour Économistes* a été traité dans le même esprit et avec le même objectif : bien comprendre les exercices pour mieux assimiler le cours et faire de ce manuel l'instrument le plus efficace de réussite aux examens.

Destiné à tous ceux qui suivent un cursus dominé par les matières économiques : Écoles de commerce (prépa. HEC, ...), Deug de Sciences Économiques, de MASS et d'AES, cet ouvrage permet d'armer solidement les étudiants face aux exigences des correcteurs le jour de l'examen.

Dans la même collection, du même auteur

- ♦ *Microéconomie, manuel d'exercices corrigés (4^e éd.)*
- ♦ *Algèbre linéaire pour économistes, manuel d'exercices corrigés (2^e éd.)*
- ♦ *Analyse II pour économistes, manuel d'exercices corrigés*
- ♦ *Statistique descriptive, manuel d'exercices corrigés (2^e éd.)*
- ♦ *Macroéconomie, le modèle ISLM en économie fermée, manuel d'exercices corrigés*
- ♦ *Macroéconomie, le modèle ISLM en économie ouverte, manuel d'exercices corrigés*
- ♦ *Probabilités pour économistes, manuel d'exercices corrigés (3^e éd.)*

25,76 € (169 F.) TTC France

ISBN : 2.84001.285.5



9 782840 012856

infos/nouveautés/catalogue :
www.maxima.fr