M. Becheanu V. Căzănescu C. Năstăsescu S. Rudeanu

Logică matematică și teoria mulțimilor

pentru anul II liceu, clase speciale de matematică

(experimental)

Editura didactică și pedagogică — București

Coordonator: Acad. N. Teodorescu

Redactor: Pantelimon Eugenia
Tehnoredactor: Rusu Vergilia

Capitolul I

Elemente de logică matematică

Logica matematică studiază procesele de raționament cu mijloace matematice. Cum matematica însăși (ca de altfel orice altă știință, dar în măsură mult mai mare decît celelalte științe) se bazează pe logică, pentru a putea face matematică trebuie să cunoaștem foarte bine unele procedee și forme fundamentale de raționament. Este ceea ce își propune capitolul de față.

§ 1. Elemente de calculul propozițiilor

1.1. Propoziții, valori de adevăr, tabele de adevăr

Vom considera niște propoziții de o natură absolut oarecare, despre care nu presupunem altceva decît că fiecare din ele este sau *adevărată*, sau *falsă*.

De exemplu, asemenea propoziții pot fi: „plouă", „scriu pe tablă", „suma unghiurilor este de 180°", „Napoleon a murit pe insula Sfînta Elena", „balena este un mamifer", „balena este un pește", „apa îngheață la 0° și fierbe la 100°", „bisectoarele unui triunghi sînt concurente", „bisectoarele unui triunghi nu sînt concurente" etc.

Vom nota propozițiile la care ne referim cu literele p, q, r, ... eventual afectate de indici sau accente. De asemenea, vom nota cu semnul 1 atributul „adevărat", iar cu semnul 0 atributul „fals" și vom nota faptul că propoziția p este adevărată, respectiv că este falsă, prin $v(p) = 1$, respectiv prin $v(p) = 0$. Dacă folosim terminologia ce va fi introdusă în capitolul următor, putem spune că v este o funcție definită pe mulțimea tuturor propozițiilor de care ne ocupăm, cu valori în mulțimea $\{0,1\}$:

$$v: \{p, q, r, ...\} \rightarrow \{0,1\};$$

funcţia v atribuie fiecărei propoziţii p *valoarea de adevăr* a acestei propoziţii, care este sau valoarea „adevărată", sau valoarea „falsă", notate de noi cu 1, respectiv 0, peutru prescurtare.

Trebuie să reţinem că putem — dacă dorim — dar nu este obligatoriu să interpretăm pe 1 şi 0 ca numere; ele nu reprezintă aici decît nişte semne convenţionale. De altfel, în diverse cărţi şi articole se întîlnesc şi alte notaţii pentru cele două valori de adevăr, de exemplu a şi f („adevărat" şi „fals"), t şi f („true" şi „false"), w şi f („wahr" şi „falsch"), $\vee$ şi $\wedge$, $*$ şi $\triangle$ etc. Noi am ales notaţia 1 şi 0 care este mult folosită, de exemplu în disciplinele care studiază aplicaţiile practice ale logicii matematice.

Propoziţiile cu care lucrăm se pot compune cu ajutorul aşa-numiţilor *functori logici* „şi", „sau", „non" şi alţii, dînd propoziţii din ce în ce mai complexe: p, q, p şi q, p sau q, non p etc. Să examinăm mai de aproape semnificaţiile acestor propoziţii compuse. Vom adopta trei definiţii fundamentale, care reflectă ideile noastre intuitive despre propoziţii de forma „p şi q", „p sau q", „non p", aşa după cum vom ilustra prin cîteva exemple care urmează definiţiile.

1.1.1. *Definiţie.* **Fie p şi q două propoziţii oarecare.** *Conjuncţia* **propoziţiilor p, q este propoziţia „p şi q", care se notează de asemenea cu p & q. Această propoziţie este adevărată cînd ambele propoziţii p, q sînt adevărate, şi este falsă în cazurile contrare.**

1.1.2. *Definiţie.* **Fie p şi q două propoziţii oarecare.** *Disjuncţia* **propoziţiilor p, q este propoziţia „*p sau q*", care se notează de asemenea cu $p \vee q$. Această propoziţie este falsă, cînd ambele propoziţii p, q sînt false, şi este adevărată în cazurile contrare.**

1.1.3. *Definiţie.* **Fie p o propoziţie oarecare.** *Negaţia* **propoziţiei p este propoziţia „*non p*", care se notează de asemenea cu $\urcorner p$. Această propoziţie este falsă cînd p este adevărată şi este adevărată cînd p este falsă.**

Definiţiile 1.1.1 — 1.1.3 sînt reprezentate în tabela 1, care dă valorile de adevăr ale propoziţiilor compuse $\urcorner p$, p & q, $p \vee q$, în funcţie de valorile de adevăr ale propoziţiilor p, q. Cu alte cuvinte, putem spune că propoziţiile p & q afirmă că este adevărată atît propoziţia p, cît şi q; propoziţia $p \vee q$ afirmă că este adevărată cel puţin una din propoziţiile p, q (eventual amîndouă); propoziţia $\urcorner p$ neagă valabilitatea propoziţiei p. Tabela 1 traduce tocmai faptul că pro-

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \& q)$	$v(p \vee q)$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

$v(p)$	$v(\neg p)$
0	1
1	0

Tabela 1

pozițiile $p \& q$, $p \vee q$, $\neg p$ iau valoarea de adevăr 1 atunci și numai atunci cînd afirmațiile respective sînt adevărate.

Astfel, propoziția „Napoleon a murit la Sfînta Elena *și* balena este un pește", care este de forma $p \& q$, este falsă, pentru că nu sînt adevărate ambele afirmații p, q (q este falsă); în schimb propoziția $p \vee q$ „Napoleon a murit la Sfînta Elena *sau* balena este un pește" este adevărată, pentru că măcar una din cele două afirmații (și anume p) este adevărată. Propoziția „balena *nu* este un pește", fiind negația unei propoziții false, este adevărată.

Calculul propozițiilor își propune în esență să studieze proprietățile legate de valorile de adevăr ale propozițiilor compuse, cum ar fi $(p \vee q) \& r$, $\neg(p \vee q)$, $((p \vee q) \& r) \vee (\neg(p \vee q))$ etc. Se pornește de la ipoteza că pentru propozițiile elementare, care nu mai pot fi descompuse ca mai sus, valorile de adevăr sînt date dinainte, rezultînd din diverse situații concrete în care ne aflăm, fie din tezaurul de cunoștințe ale celorlalte științe etc. Astfel, valoarea v („plouă") depinde de locul unde și de momentul în care afirmăm propoziția „plouă"; istoria ne învață că

v(„Napoleon a murit pe insula Sfînta Elena") $= 1$;

știm din zoologie că

v(„balena este un mamifer") $= 1$,

deci

v(„balena este un pește") $= 0$.

etc.

Pentru a nu complica prea mult scrierea, vom adopta anumite convenții de suprimare a unor paranteze, asemănătoare cu acelea din algebră. Astfel, în loc de $a + (bc)$ scriem $a + bc$; se spune că înmulțirea „leagă mai tare" decît adunarea. De asemenea, în loc de $a(b^2)$ scriem ab^2; se spune că exponențierea „leagă mai tare" decît înmulțirea. În calculul propozițiilor vom adopta

1.1.4. *Convenție de suprimare a parantezelor.* Negația leagă mai tare decît conjuncția și decît disjuncția, iar conjuncția leagă mai tare decît disjuncţia. Parantezele care pot fi subînţelese ca urmare a acestei convenţii, vor fi suprimate.

De exemplu, în loc de $(\neg p) \vee (\neg q)$ vom scrie $\neg p \vee \neg q$, în loc de $((\neg p) \& q) \vee r$ vom scrie $\neg p \& q \vee r$ etc.

Invers, dacă se dă o expresie fără paranteze, atunci parantezele pot fi reconstituite după regula următoare: se efectuează întîi negaţiile, apoi conjuncţiile şi la urmă disjuncţiile.

De exemplu $p \vee \neg q \& r = p \vee (\neg q) \& r = p \vee ((\neg q) \& r)$.

1.2. Proprietăţile disjuncţiei, conjuncţiei şi negaţiei

Plecînd de la aceleaşi propoziţii date, se pot forma diverse propoziţii compuse care pot avea valori de adevăr diferite pentru valori de adevăr date ale propoziţiilor de la care am plecat. Astfel, cu propoziţiile p, q, putem forma propoziţiile $p \& q$ şi $p \vee q$; cînd $v(p) = v(q) = 0$, tabela 1 arată că avem $v(p \& q) = v(p \vee q) = 0$, dar cînd $v(p) = 1$ şi $v(q) = 0$ avem $v(p \& q) = 0 \neq 1 = v(p \vee q)$. Se poate însă întîmpla ca două propoziţii compuse din aceleaşi propoziţii date să aibă întotdeauna valorile de adevăr egale. Să considerăm, de exemplu, propoziţiile $p \vee q$ şi $q \vee p$. Dacă $v(p) = v(q) = 0$, atunci $v(p \vee q) = 0$ conform tabelei 1, dar avem şi $v(q) = v(p) = 0$, deci $v(q \vee p) = 0$ conform aceleiaşi tabele. Dacă $v(p) = 0$ şi $v(q) = 1$, atunci $v(p \vee q) = 1$; dar $v(q) = 1$ şi $v(p) = 0$, deci $v(q \vee p) = 1$. La fel se vede că pentru $v(p) = 1$ şi $v(q) = 0$ avem $v(p \vee q) = v(q \vee p) = 1$ şi la fel pentru $v(p) = v(q) = 1$. Rezumînd, $v(p \vee q) = v(q \vee p)$ oricare ar fi $v(p)$, $v(q)$. Acest exemplu sugerează o definiţie generală.

1.2.1. *Definiţie.* **Fie** α **şi** β **două propoziţii obţinute din aceleaşi propoziţii** $p, q, r, \ldots$ **prin aplicarea functorilor** $\neg$, $\&$, $\vee$ (de un număr finit de ori). **Spunem că** α **este** *echivalentă* **cu** β **şi scriem** $\alpha \equiv \beta$ **sau** $\alpha \Leftrightarrow \beta$, **dacă** $v(\alpha) = v(\beta)$ **oricare ar fi valorile** $v(p)$, $v(q)$, $v(r), \ldots$, **ale propoziţiilor componente.**

Pentru a înţelege semnificaţia definiţiei 1.2.1, să ne amintim noţiunea de *condiţie necesară* şi *suficientă*, pe care am întîlnit-o de multe ori pînă acum în matematică. Spunem că o proprietate α este condiţie *suficientă* pentru o proprietate β, dacă din faptul că α este adevărată rezultă că şi β este adevărată. Spunem că α este o condiţie *necesară* pentru β, dacă din faptul că β este adevărată, rezultă că şi α este adevărată. Evident, dacă α este condiţie suficientă pentru β, atunci β este condiţie necesară pentru α, iar dacă α este condiţie necesară pentru β, atunci β este condiţie suficientă pentru α. În sfîrşit, spunem că α este *condiţie necesară şi suficientă* pentru β, dacă α este condiţie necesară pentru β şi totodată α este condiţie suficientă pentru β. Evident, aceasta este acelaşi lucru cu a spune că β este condiţie necesară şi suficientă pentru α.

De exemplu, o condiţie suficientă pentru ca un patrulater să fie dreptunghi este ca el să aibă toate laturile egale şi toate unghiurile drepte. O condiţie necesară pentru ca un patrulater să fie dreptunghi este ca el să aibă două laturi opuse paralele. O condiţie necesară şi suficientă pentru ca un patrulater să fie dreptunghi este ca el să fie un paralelogram cu diagonalele egale.

1.2.2. *Propoziţie*. **$\alpha \Leftrightarrow \beta$ dacă şi numai dacă α este o condiţie necesară şi suficientă pentru β.**

Demonstraţie. Fie $\alpha \Leftrightarrow \beta$. Condiţia β este necesară pentru α, căci dacă α este adevărată, atunci $v(\alpha) = 1$ deci, $v(\beta) = 1$, deci β este adevărată. Condiţia β este suficientă pentru α, căci dacă β este adevărată, atunci $v(\beta) = 1$ deci $v(\alpha) = 1$ deci α este adevărată.

Reciproc, să presupunem că α este o condiţie necesară şi suficientă pentru β. Dacă $v(\alpha) = 1$, atunci α este adevărată, deci β este în mod necesar adevărată, deci $v(\beta) = 1 = v(\alpha)$. Dacă $v(\alpha) = 0$, atunci $v(\beta) = 0$ pentru că altfel am avea $v(\beta) = 1$, deci β ar fi adevărată şi aceasta ar fi suficient pentru ca α să fie adevărată, adică $v(\alpha) = 1$, o contradicţie. Urmează că $\alpha \Leftrightarrow \beta$.

Datorită propoziţiei 1.2.2, $\alpha \Leftrightarrow \beta$ se mai citeşte „*α dacă şi numai dacă β*" sau încă „*α atunci şi numai atunci cînd β*".

În legătură cu aceste exprimări vom mai face următoarea observaţie importantă. Definiţiile sînt date de obicei (inclusiv în acest manual) folosind cuvîntul „*dacă*"; de fapt se subînţelege „*dacă şi numai dacă*". De exemplu, definiţia „un triunghi se numeşte isoscel dacă are două laturi egale" este o prescurtare pentru „un triunghi se numeşte isoscel dacă şi numai dacă are două laturi egale".

1.2.3. *Teoremă*. **Relaţia de echivalenţă a propoziţiilor are următoarele proprietăţi: oricare ar fi propoziţiile α, β, γ, avem**

$\alpha \Leftrightarrow \alpha$	*(reflexivitate)*
dacă $\alpha \Leftrightarrow \beta$, **atunci** $\beta \Leftrightarrow \alpha$	*(simetrie)*
dacă $\alpha \Leftrightarrow \beta$ **şi** $\beta \Leftrightarrow \gamma$, **atunci** $\alpha \Leftrightarrow \gamma$	*(tranzitivitate)*.

Demonstraţia foloseşte proprietăţile analoage ale egalităţii. Este banal că $v(\alpha) = v(\alpha)$ oricare ar fi valorile propoziţiilor care alcătuiesc α; dar aceasta înseamnă că $\alpha \Leftrightarrow \alpha$. Mai departe, dacă $\alpha \Leftrightarrow \beta$, atunci oricare ar fi valorile propoziţiilor componente ale lui α şi β avem

$v(\alpha) = v(\beta)$, deci $v(\beta) = v(\alpha)$; urmează că $\beta \Leftrightarrow \alpha$. În sfîrşit dacă $\alpha \Leftrightarrow \beta$ şi $\beta \Leftrightarrow \gamma$, atunci înseamnă că pentru orice valori de adevăr ale propoziţiilor componente avem $v(\alpha) = v(\beta)$ şi $v(\beta) = v(\gamma)$, deci $v(\alpha) = v(\gamma)$; aceasta arată că $\alpha \Leftrightarrow \gamma$.

1.2.4. *T e o r e m ă.* **Oricare ar fi propoziţiile** p, q, r, **avem:**

(1) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$, $\qquad p \,\&\, q \Leftrightarrow q \,\&\, p$,

(2) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$, $\qquad (p \,\&\, q) \,\&\, r \Leftrightarrow p \,\&\, (q \,\&\, r)$,

(3) $p \vee p \,\&\, r \Leftrightarrow p$, $\qquad p \,\&\, (p \vee r) \Leftrightarrow p$,

(4) $p \vee p \Leftrightarrow p$, $\qquad p \,\&\, p \Leftrightarrow p$,

(5) $p \vee q \,\&\, r \Leftrightarrow (p \vee q) \,\&\, (p \vee r)$, $\qquad p \,\&\, (q \vee r) \Leftrightarrow p \,\&\, q \vee p \,\&\, r$,

(6) $p \vee \neg p \,\&\, q \Leftrightarrow p \vee q$, $\qquad p \,\&\, (\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \,\&\, q$,

(7) $\qquad \neg(\neg p) \Leftrightarrow p$,

(8) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \,\&\, \neg q$, $\qquad \neg(p \,\&\, q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$,

(9) $v(p \vee \neg p) = 1$, $\qquad v(p \,\&\, \neg p) = 0$.

Comentariu. Cele două proprietăţi numerotate (1) se numesc *comutativitatea* disjuncţiei, respectiv conjuncţiei. Relaţiile (2) exprimă *asociativitatea* disjuncţiei şi conjuncţiei, iar (3) poartă numele de legile de *absorbţie*. Proprietăţile (4) sînt *idempotenţa* disjuncţiei şi conjuncţiei, iar relaţiile (5) stabilesc *distributivitatea* disjuncţiei faţă de conjuncţie şi a conjuncţiei faţă de disjuncţie. Echivalenţa (7) este cunoscută sub numele de *principiul dublei negaţii*, în timp ce echivalenţele (8) sînt *legile lui De Morgan*. Egalitatea $v(p \vee \neg p) = 1$ arată că una din propoziţiile p, $\neg p$ este cu necesitate adevărată şi de aceea se numeşte *principiul terţiului exclus*. În sfîrşit egalitatea $v(p \,\&\, \neg p) = 0$, care ne arată că o propoziţie şi negaţia ei nu pot fi simultan adevărate, poartă numele de *principiul contradicţiei*.

Demonstraţia teoremei 1.2.4 se face dînd propoziţiilor componente toate valorile de adevăr posibile şi verificînd de fiecare dată că propoziţiile care ne interesează iau întotdeauna valori de adevăr egale; în acest mod am demonstrat mai înainte, cu titlul de exemplu precedînd definiţia 1.2.1, echivalenţa $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$. La fel se demonstrează şi celelalte proprietăţi. Calculele se pot organiza în tabele, aşa cum exemplificăm mai jos pentru demonstraţia asociativităţii disjuncţiei (tabela 2). Este de remarcat că o organizare judicioasă a calculelor uşurează mult demonstraţiile. De exemplu să observăm în prealabil că dacă $v(p) = 1$, atunci $v(p \vee q) = 1$ oricare ar fi $v(q)$, iar dacă $v(p) = 0$, atunci $v(p \vee q) = v(q)$; atunci demonstraţia asociativităţii disjuncţiei nu mai comportă 8 verificări ca în tabela 2, ci numai 3 verificări, după

$v(p)$	$v(q)$	$v(r)$	$v(p \vee q)$	$v((p \vee q) \vee r)$	$v(q \vee r)$	$v(p \vee (q \vee r))$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Tabela 2

cum urmează. Dacă $v(p) = 1$, atunci $v(p \vee (q \vee r)) = 1$ și $v(p \vee q) = 1$, deci $v((p \vee q) \vee r) = 1$. Dacă $v(p) = 0$, atunci $v(p \vee (q \vee r)) = v(q \vee r)$ și vom distinge două subcazuri. Dacă $v(q) = 0$, atunci $v(p \vee (q \vee r)) = v(q \vee r) = v(r)$ și $v(p \vee q) = v(p) = 0$, deci $v((p \vee q) \vee r) = v(r)$. Dacă $v(q) = 1$, atunci $v(p \vee (q \vee r)) = v(q \vee r) = 1$ și $v(p \vee q) = 1$, deci $v((p \vee q) \vee r) = 1$.

Demonstrarea celorlalte proprietăți este lăsată pe seama cititorului.

1.2.5. *Teoremă.* **Fie** $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ **patru propoziții astfel încît** $\alpha \Leftrightarrow \beta$ **și** $\gamma \Leftrightarrow \delta$. **Atunci** $\alpha \vee \gamma \Leftrightarrow \beta \vee \delta$, $\alpha \,\&\, \gamma \Leftrightarrow \beta \,\&\, \delta$, **iar** $\neg\alpha \Leftrightarrow \neg\beta$.

Demonstrație. Oricare ar fi valorile de adevăr ale propozițiilor din care sînt alcătuite $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, avem $v(\alpha) = v(\beta)$ și $v(\gamma) = v(\delta)$, deci $v(\alpha \vee \gamma) = v(\beta \vee \delta)$, pentru că $v(\alpha \vee \gamma)$ se calculează numai în funcție de $v(\alpha)$ și $v(\gamma)$, iar $v(\beta \vee \delta)$ se calculează numai în funcție de $v(\beta)$ și $v(\delta)$, care sînt aceleași ca $v(\alpha)$ și respectiv $v(\gamma)$. La fel se vede că $v(\alpha \,\&\, \gamma) = v(\beta \,\&\, \delta)$, iar $v(\neg\alpha) = v(\neg\beta)$.

1.2.6. *Corolar.* **Dacă** $\alpha \Leftrightarrow \beta$, **atunci** $\alpha \vee \gamma \Leftrightarrow \beta \vee \gamma$ **iar** $\alpha \,\&\, \gamma \Leftrightarrow \beta \,\&\, \gamma$, **oricare ar fi** γ.

Demonstrație. Se aplică teorema 1.2.5 echivalențelor $\alpha \Leftrightarrow \beta$ și $\gamma \Leftrightarrow \gamma$ (vezi teorema 1.2.3).

1.3. Implicația

În viața de toate zilele, în știință, în diverse domenii de activitate, apare în mod normal ideea de implicație, faptul că un fenomen implică alt fenomen. În matematică implicaţia este, în fond, ideea centrală întrucît orice teoremă din matematică afirmă că anumite premise implică anumite concluzii. Este de aceea indispensabil să ştim cu exactitate ce înseamnă ideea de implicaţie în matematică, să o putem mînui corect.

În diverse contexte ideea de implicaţie poate însemna lucruri diferite. Oricare ar fi însă înţelesul pe care îl atribuim ideii de implicaţie, este clar că dacă este posibil ca simultan un fenomen α să aibă loc iar alt fenomen β să nu aibă loc, atunci nu putem spune că α implică β. Acest substrat comun al diverselor concepte de implicaţie este luat ca *definiţie* a ideii de implicaţie cu care vom lucra în matematică. Mai precis:

1.3.1. *Definiţie.* **Spunem că propoziţia** α ***implică*** **propoziţia** β, **sau că** α **este** ***mai tare*** **decît** β, **sau că** α **este** ***o condiţie suficientă*** **pentru** β, **sau că** β **este** ***mai slabă*** **decît** α, **sau că** β **este o** ***condiţie necesară*** **pentru** α, **şi scriem**

$$\alpha \Rightarrow \beta$$

ceea ce se mai citeşte şi sub forma *„dacă* α *atunci* β" — **dacă, oricare ar fi valorile de adevăr ale propoziţiilor din care se compun** α **şi** β, **nu avem nici o dată** $v(\alpha) = 1$ **şi** $v(\beta) = 0$.

Cu alte cuvinte, spunem că $\alpha \Rightarrow \beta$ dacă oricare ar fi valorile propoziţiilor care alcătuiesc α şi β are loc una şi numai una din următoarele trei situaţii:

(i) $v(\alpha) = 1$ şi $v(\beta) = 1$;

(ii) $v(\alpha) = 0$ şi $v(\beta) = 1$;

(iii) $v(\alpha) = 0$ şi $v(\beta) = 0$.

Ne-am referit mai înainte la noţiunile de „condiţie necesară" şi „condiţie suficientă", aşa cum au apărut ele în practica matematică de pînă acum. Să facem acum observaţia importantă că *dacă* α *este o condiţie suficientă pentru* β (în înţelesul amintit mai înainte), *atunci* $\alpha \Rightarrow \beta$. Într-adevăr, există două posibilităţi: $v(\alpha) = 1$ sau $v(\alpha) = 0$. În primul caz, deoarece α este o condiţie suficientă pentru β, rezultă că β este adevărată, adică $v(\beta) = 1$ şi ne aflăm în situaţia (i) de mai sus. În cazul cînd $v(\alpha) = 0$, ne aflăm într-una din situaţiile (ii) sau (iii) de mai sus. Deci în orice caz ne aflăm într-una din situaţiile (i) — (iii), deci $\alpha \Rightarrow \beta$. În mod analog se vede că *dacă* α *este o condiţie necesară pentru* β, *atunci* $\beta \Rightarrow \alpha$.

Cu alte cuvinte, noul înțeles pe care definiția 1.3.1 îl dă termenilor „condiție necesară" și „condiție suficientă" înglobează vechiul înțeles amintit mai înainte. Definiția 1.3.1, cu care vom lucra mai departe tot timpul, este efectiv mai largă decît vechiul înțeles, așa după cum se poate vedea din exemplele care urmează.

Exemple

a) temperatura este sub $0^0 \Rightarrow$ apa îngheață;

b) diagonalele unui romb sînt perpendiculare $\Rightarrow$ diagonalele unui pătrat sînt perpendiculare;

c) $2 + 2 = 4 \Rightarrow$ balena este un mamifer;

d) $2 + 2 = 5 \Rightarrow 3 + 1 = 4$;

e) $2 + 2 = 5 \Rightarrow$ balena este un mamifer;

f) $2 + 2 = 5 \Rightarrow 3 + 1 = 7$;

g) $2 + 2 = 5 \Rightarrow$ balena este un pește;

h) $p \,\&\, q \Rightarrow p \vee q$.

Implicațiile $\alpha \Rightarrow \beta$ din exemplele *b*) și *c*) sînt situația în $v(\alpha) = v(\beta) = 1$. În exemplele *a*) și *b*) fenomenul α este chiar *cauza* fenomenului β, pe cînd în exemplul *c*), deși $v(\alpha) = 1$ și $v(\beta) = 1$, α nu este cauza lui β; acest exemplu, ca și exemplele *d*) — *g*), ne arată că ideea de implicație din matematică nu se confundă cu ideea de cauzalitate. În implicațiile $\alpha \Rightarrow \beta$ din exemplele *d*) și *e*) avem $v(\alpha) = 0$ și $v(\beta) = 1$, iar exemplele *f*) și *g*) avem $v(\alpha) = v(\beta) = 0$. În implicația din exemplul *h*) sînt posibile cele trei situații menționate mai înainte și anume: (i) dacă $v(p) = v(q) = 1$, atunci $v(p \,\&\, q) = v(p \vee q) = 1$; (ii) dacă $v(p) = 1$ și $v(q) = 0$, sau dacă $v(p) = 0$ și $v(q) = 1$, atunci $v(p \,\&\, q) = 0$, iar $v(p \vee q) = 1$; (iii) dacă $v(p) = v(q) = 0$, atunci $v(p \,\&\, q) = v(p \vee q) = 0$.

Cele de mai sus par să conducă la un paradox. Anume, să considerăm o propoziție f care este *întotdeauna* falsă, adică independent de valorile propozițiilor care compun eventual pe f (exemple: $2 + 2 = 5$, $p \,\&\, \neg p$ etc.). Conform definiției 1.3.1, înseamnă că implicația $f \Rightarrow \beta$ este adevărată oricare ar fi propoziția β; se mai spune că „*falsul implică orice*". În particular $f \Rightarrow \beta$ chiar dacă β este falsă și s-ar părea că în felul acesta putem demonstra orice neadevăr, ca de pildă „$3 + 1 = 7$" sau „balena este un pește" din exemplele de mai sus. Contradicția este numai aparentă și se va lămuri puțin mai departe, după ce vom fi făcut unele observații.

Date fiind două propoziții oarecare α, β, să calculăm valoarea de adevăr a propoziției $\rceil\alpha \vee \beta$; constatăm ușor că dacă $v(\alpha) = 1$ și $v(\beta) = 0$, atunci $v(\rceil\alpha \vee \beta) = 0$, iar în celelalte trei cazuri avem $v(\rceil\alpha \vee \beta) = 1$ (verificarea pe seama cititorului). Prin urmare, $\alpha \Rightarrow \beta$ dacă și numai dacă $v(\rceil\alpha \vee \beta) = 1$ oricare ar fi valorile propozițiilor din care sînt alcătuite α, β.

1.3.2. *Definiție.* **Date fiind propozițiile p, q, propoziția $\rceil p \vee q$ se va nota cu**

$$p \to q$$

și se va citi „*p implică q*". Negația, conjuncția și disjuncția leagă mai tare decît implicația.

Astfel, în loc de $(p \vee q) \to r$, $(p \& q) \to r$, $(\rceil p) \to q$, vom scrie $p \vee q \to r$, $p \& q \to r$, respectiv $\rceil p \to q$ etc.

Este important că nu confundăm cele două înțelesuri ale cuvîntului „implicație" în logica matematică. Atunci cînd spunem că $(\alpha \Rightarrow \beta$, înțelegem că are loc fenomenul descris în definiția 1.3.1, pe cînd implicația $\alpha \to \beta$ este o propoziție care poate fi adevărată sau falsă (de exemplu, propoziția „$2 + 2 = 4 \to$ orice triunghi este echilateral" este falsă).

1.3.3. *Observație.* $\alpha \Rightarrow \beta$ dacă și numai dacă propoziția $\alpha \to \beta$ este adevărată oricare ar fi valorile de adevăr ale propozițiilor care alcătuiesc pe α și β.

1.3.4. *Observație.* Avem $\rceil(\alpha \to \beta) \Leftrightarrow \alpha \& \rceil\beta$.

Echivalența de mai sus se poate demonstra dînd valori de adevăr în toate modurile posibile. Ea exprimă, în fond, punctul nostru de plecare conform căruia *a infirma o implicație înseamnă a presupune premisa adevărată și concluzia falsă.* Vom reveni la sfîrșitul § 2.

Întorcîndu-ne la enunțul „falsul implică orice", el exprimă faptul că propoziția $f \to \beta$ este totdeauna adevărată, ceea ce — după cum se vede și din ultimele exemple de mai sus — nu înseamnă neapărat că și β ar fi adevărată.

Rezultatul următor stabilește legătura între definițiile 1.2.1 și 1.3.1.

1.3.5. *Propoziție.* **Fie α, β două propoziții. Atunci $\alpha \Leftrightarrow \beta$ dacă și numai dacă atît $\alpha \Rightarrow \beta$, cît și $\beta \Rightarrow \alpha$.**

Demonstrație. Să presupunem $\alpha \Leftrightarrow \beta$ și să demonstrăm pe rînd că $\alpha \Rightarrow \beta$ și că $\beta \Rightarrow \alpha$. Într-adevăr, nu poate exista un sistem de valori date propozițiilor din care sînt alcătuite α și β astfel încît să avem $v(\alpha) = 1$ și $v(\beta) = 0$, căci atunci am contrazice $\alpha \Leftrightarrow \beta$; rezultă deci că $\alpha \Rightarrow \beta$. În mod analog se arată că $\beta \Rightarrow \alpha$.

Reciproc, să presupunem că $\alpha \Rightarrow \beta$ și că $\beta \Rightarrow \alpha$; vom arăta că $\alpha \Leftrightarrow \beta$. Într-adevăr, să considerăm un sistem arbitrar, dar fixat de valori date propozițiilor care alcătuiesc α, β. Dacă $v(\alpha) = 0$, atunci $v(\beta) = 0$, deoarece în cazul contrar am avea $v(\beta) = 1$, ceea ce ar contrazice $\beta \Rightarrow \alpha$. Dacă $v(\alpha) = 1$, atunci $v(\beta) = 1$, deoarece în cazul contrar am avea $v(\beta) = 0$, ceea ce ar contrazice $\alpha \Rightarrow \beta$. Deci $v(\alpha) = v(\beta)$ în orice situație, adică $\alpha \Leftrightarrow \beta$.

1.3.6. *Teoremă.* **Oricare ar fi propozițiile p, q, r, avem:**

(10) $p \Rightarrow p$

(11) $p \to \neg p \Rightarrow \neg p$, $\qquad \neg p \to p \Rightarrow p$,

(12) $p \vee p \Rightarrow p$, $\qquad p \Rightarrow p \,\&\, p$,

(13) $p \Rightarrow p \vee q$, $\qquad p \,\&\, q \Rightarrow p$,

(14) $q \Rightarrow p \vee q$, $\qquad p \,\&\, q \Rightarrow q$,

(15) $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$, $\qquad q \to p \Leftrightarrow \neg p \to \neg q$,

(16) $p \,\&\, (p \to q) \Rightarrow q$,

(17) $p \Rightarrow q \to p \,\&\, q$,

(18) $p \to (q \to r) \Leftrightarrow p \,\&\, q \to r$,

(19) $(p \to q) \,\&\, (p \to r) \Leftrightarrow p \to q \,\&\, r$,

(20) $p \to q \Rightarrow (q \to r) \to (p \to r)$,

(21) $p \to q \Rightarrow (r \to p) \to (r \to q)$.

Demonstrația fiecărei implicații $\alpha \Rightarrow \beta$ se face dînd propozițiilor p, q, r toate valorile de adevăr pentru care rezultă $v(\alpha) = 1$ și arătînd că în fiecare caz rezultă $v(\beta) = 1$ (pentru $v(\alpha) = 0$ nu avem nimic de demonstrat).

Să demonstrăm, de pildă, echivalența (19), adică, în virtutea propoziției 1.3.5, să arătăm că $(p \to q) \,\&\, (p \to r) \Rightarrow p \to q \,\&\, r$ și că $p \to q \,\&\, r \Rightarrow (p \to q) \,\&\, (p \to r)$.

Pentru a arăta prima implicație, vom presupune că $v(p)$, $v(q)$, $v(r)$ sînt în așa fel încît $v((p \to q) \,\&\, (p \to r)) = 1$. Atunci $v(p \to q) = 1$ și

$v(p \to r) = 1$. Dacă $v(p) = 1$, din ultimele două egalități rezultă $v(q) = 1$ și respectiv $v(r) = 1$, deci $v(q \& r) = 1$, deci $v(p \to q \& r) = 1$. Dacă $v(p) = 0$, atunci deducem direct $v(p \to q \& r) = 1$. Deci $(p \to q) \& \& (p \to r) \Rightarrow p \to q \& r$.

Pentru a demonstra implicația contrară, vom presupune că $v(p)$, $v(q)$, $v(r)$ sînt în așa fel încît $v(p \to q \& r) = 1$. Dacă $v(p) = 1$, atunci rezultă $v(q \& r) = 1$, deci $v(q) = 1$ și $v(r) = 1$, deci $v(p \to q) = 1$ și $v(p \to r) = 1$, deci $v((p \to q) \& ((p \to r)) = 1$. Dacă $v(p) = 0$, atunci rezultă direct $v(p \to q) = 1$ și $v(p \to r) = 1$, deci $v((p \to q) \& (p \to r)) = = 1$. Deci $p \to q \& r \Rightarrow (p \to q) \& (p \to r)$.

Demonstrarea celorlalte proprietăți (10)—(21) este lăsată pe seama cititorului.

Comentarii. Proprietatea (10) se mai numește *principiul identității.* Propretățile (11) poartă numele de *principiul reducerii la absurd*, des folosite în demonstrațiile matematice: pentru a demonstra o anumită proprietate p, presupunem „prin absurd“ că ar fi adevărată negația ei $\neg p$ și demonstrăm că de aici rezultă p; atunci înseamnă că am demonstrat că $\neg p \to p$ este adevărată, de unde rezultă p. Proprietățile (12) se numesc *principiul tautologiei.*

Proprietățile (15) sînt mult folosite în matematică; ele arată că $v(p \to q) = 1$ întotdeauna dacă și numai dacă $v(\neg q \to \neg p) = 1$ întotdeauna. Cu alte cuvinte, a demonstra $p \Rightarrow q$ este tot una cu a demonstra $\neg q \Rightarrow \neg p$. De asemenea, a demonstra *reciproca* teoremei $p \Rightarrow q$, adică a demonstra $q \Rightarrow p$, este totuna cu a demonstra $\neg p \Rightarrow \neg q$.

Proprietatea (16) se mai numește *modus ponens*. Ea ne arată că dacă proprietatea p este adevărată și $p \Rightarrow q$, atunci proprietatea q este adevărată (căci atunci avem $v(p) = 1$, $v(p \to q) = 1$, deci $v(p \& (p \to \to q)) = 1$, deci $v(q) = 1$). Așa cum am observat mai înainte însă, numai $p \Rightarrow q$ nu este suficient pentru a deduce q.

Proprietatea (18) ne indică o schemă de raționament mult folosită în matematică. Anume, să presupunem că dintr-o premisă p trebuie să demonstrăm o concluzie care este și ea sub forma unei implicații $q \to r$. Atunci, pentru a arăta că $v(p \to (q \to r)) = 1$ întotdeauna, va trebuie să arătăm că $p \& q \Rightarrow r$, adică să presupunem satisfăcute premisele p, q și să demonstrăm r.

Proprietățile (20) și (21) sînt cunoscute și sub numele de *regula silogismului*. Într-adevăr, din (20) rezultă următoarea schemă clasică de raționament numită *silogismul în Barbara*: Dacă $p \Rightarrow q$ și $q \Rightarrow r$, atunci $p \Rightarrow r$ (căci atunci avem întotdeauna $v(p \to q) = 1$ și $v((p \to q) \to \to ((q \to r) \to (p \to r))) = 1$, deci $v((q \to r) \to (p \to r)) = 1$ și cum $v(q \to r) = 1$ rezultă $v(p \to r) = 1$).

1.4. Exerciţii

1. Completaţi demonstraţiile lăsate pe seama cititorului.

2. Demonstraţi că:

$p \Rightarrow (q \rightarrow p)$,

$(\neg p \rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \rightarrow p)$,

$\neg p \Rightarrow (p \rightarrow q)$, $p \Rightarrow (\neg p \rightarrow q)$,

$(p \rightarrow q) \Rightarrow (r \vee p \rightarrow r \vee q)$,

$p \,\&\, (q \vee r) \Rightarrow q \vee p \,\&\, r$,

$(p \rightarrow r) \,\&\, (q \rightarrow r) \Rightarrow p \vee q \rightarrow r$.

3. Sînt propoziţiile $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ şi $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ echivalente?

4. Arătaţi că $\alpha \Leftrightarrow \beta$ dacă şi numai dacă propoziţia $(\alpha \rightarrow \beta) \,\&\, (\beta \rightarrow \alpha)$ este adevărată oricare ar fi valorile de adevăr ale propoziţiilor care alcătuiesc α, β. Pentru acest motiv propoziţia de mai sus se mai notează cu $\alpha \leftrightarrow \beta$ şi se citeşte „α *echivalent* cu β". Ca şi $\alpha \rightarrow \beta$, propoziţia $\alpha \leftrightarrow \beta$ poate fi adevărată sau falsă.

§ 2. Elemente de calculul predicatelor

2.1. Funcţii propoziţionale

În § 1 fiecare din propoziţiile cu care lucram era bine determinată, spre deosebire de propoziţiile cu care vom lucra acum şi care depind de anumite variabile: $p(x, y)$, $q(z)$, $v(x)$ etc.

Cîteva exemple concrete: „x este om", „x este tatăl lui y", „$x^2 + y^2 = z^2$" etc. Cînd înlocuim variabilele din aceste propoziţii cu indivizi concreţi, bine precizaţi, propoziţia respectivă se transformă într-o propoziţie bine determinată, de felul celor de care ne-am ocupat în calculul propoziţiilor, şi care poate fi adevărată sau falsă. De exemplu: „Socrate este om", „Mickey Mouse este om", „$3^2 + 4^2 = 5^2$", „$2^2 + 6^2 = 9^2$" etc. De aceea propoziţiile mai generale de care ne vom ocupa acum se numesc *funcţii propoziţionale*, pentru că fiecărei „valori" fixate a variabilelor de care depind ele îi corespunde o propoziţie în sensul § 1. Funcţiile propoziţionale mai sînt numite şi *predicate* unare, binare, ternare etc., după cum depind respectiv de 1, 2, 3,... variabile.

Exemplele de mai sus ar fi putut deveni ilariante dacă am fi dat variabilelor valori cu totul arbitrare obţinînd, de pildă, propoziţii cum ar fi „culoarea verde este om", „$\text{Ion}^2 + \text{Vasile}^2 = \text{Mihai}^2$" etc. De fapt însă, atunci cînd aplicăm calculul predicatelor într-un domeniu al matematicii, nu ne interesează orice fel de predicate, ci numai acelea care se referă la obiectul studiului respectiv, iar domeniul în care iau valori variabilele din predicate, este fixat. De exemplu, în teoria mulţimilor lucrăm cu predicate ca $x \in z$, $y \subset z$ etc., iar „valorile" pe care le iau variabilele sînt elemente şi mulţimi; dacă facem geometrie, variabilele semnifică puncte, drepte, curbe, plane şi suprafeţe; dacă studiem cele 4 operaţii aritmetice, domeniul în care iau valori variabilele este mulţimea numerelor reale. Domeniul de variaţie al variabilelor din predicate se numeşte *universul discursului*. El poate fi o mulţime sau poate fi o totalitate care nu este mulţime (de exemplu „clasa" tuturor mulţimilor); de altfel, cînd studiem *calculul predicatelor* la modul general, universul discursului nu este precizat (tocmai de aceea rezultatele calculului predicatelor sînt aplicabile în orice domeniu al matematicii); singurul lucru pe care îl presupunem este că universul discursului conţine elemente. În paragraful de faţă nu prezentăm decît unele rudimente ale calculului predicatelor, strict necesare raţionamentului corect în matematică.

2.2. Cuantificatori

Fără exagerare putem afirma că procesul de cuantificare este tipul de cărămidă din care este construit edificiul calculului predicatelor şi deci întreaga matematică; prin urmare este absolut indispensabil să ştim să mînuim fără greş cuantificatorii.

Procesul de cuantificare este trecerea de la o funcţie propoziţională $p(x)$ la propoziţia $(\forall x)\, p(x)$ (citit: „oricare ar fi x, $p(x)$"), sau de la $p(x)$ la propoziţia $(\exists x)\, p(x)$ (citit: „există un x astfel încît $p(x)$"), sau de la funcţia propoziţională $q(x, y)$ la predicatul $(\forall x)\, q(x, y)$ sau la predicatul $(\forall y)\, q(x, y)$ sau la funcţia propoziţională $(\exists x)\, q(x, y)$ sau la predicatul $(\exists y)\, q(x, y)$, sau de la predicatul $r(x, y, z)$ la ... etc. Să vedem ce înseamnă aceasta.

$(\forall x)\, p(x)$ este o propoziţie adevărată atunci cînd orice element x din universul discursului satisface proprietatea $p(x)$ şi falsă în cazul contrar (adică atunci cînd există un x_0 în universul discursului astfel încît $p(x_0)$ este falsă). $(\exists x)\, p(x)$ este o propoziţie adevărată atunci cînd există cel puţin un element x_0 în universul discursului astfel încît $p(x_0)$ să fie adevărată, iar în cazul contrar (adică atunci cînd nici un element x din universul discursului nu satisface proprietatea $p(x)$) $(\exists x)\, p(x)$ este falsă. Observăm că $(\forall x)\, p(x)$ şi $(\exists x)\, p(x)$ sînt propoziţii „constante", din familia celor studiate în §1.

De exemplu, fie mulţimea numerelor reale ca univers al discursului şi să considerăm în rolul lui $p(x)$ funcţia propoziţională „$x + 2 = 0$". Prin cuantificare obţinem două propoziţii de tipul celor studiate în §1, şi anume: „$(\forall x)\; x + 2 = 0$", care este falsă şi „$(\exists x)\; x + 2 = 0$". care este adevărată (universul discursului a fost subînţeles în cele două propoziţii).

Fie acum $q(x,y)$ un predicat binar. Atunci $(\forall x) q(x,y)$ este un predicat unar depinzînd de variabile y şi definit în modul următor. Fie y_0 o valoare oarecare din universul discursului dată variabilei y; atunci predicatul unar $(\forall x)\, q(x,y)$ asociază valorii y_0 propoziţia $(\forall x)\, q(x, y_0)$ (care este o propoziţie „constantă"). De exemplu, cu acelaşi univers al discursului ca mai sus, fie $q(x, y)$ predicatul binar „$x + y = 5$". Atunci $(\forall x)\, q(x,y)$ este funcţia propoziţională următoare de variabila y: „$(\forall x)\;\; x + y = 5$". Acest predicat unar asociază lui $y = 7{,}5$ propoziţia „$(\forall x)\;\; x + 7{,}5 = 0$", asociază lui $y = -3$, propoziţia „$(\forall x)$ $x - 3 = 0$" etc.; toate aceste propoziţii sînt false. Tot aşa, „$(\exists x)\;\; x + y = 5$" este un predicat unar în variabila y; el asociază lui $y = 7{,}5$ propoziţia adevărată „$(\exists x)\;\; x + 7{,}5 = 5$" etc. Să mai luăm un exemplu: plecînd de la predicatul binar „$x + y^2 = 0$" se obţine funcţia propoziţională „$(\exists y)\;\; x + y^2 = 0$" care depinde de variabila x; pentru o valoare fixată x_0 a variabilei x se obţine propoziţia „$(\exists y)\;\; x_0 + y^2 = 0$", care este adevărată dacă $x \leqslant 0$ şi este falsă dacă $x_0 > 0$.

În cele ce urmează vom folosi următoarele denumiri. În fiecare din propoziţiile $(\forall x)\, p(x)$, $(\exists x)\, p(x)$ şi în fiecare din predicatele $(\forall x)\, q(x, y)$, $(\exists x)\, q(x, y)$ etc., se spune că variabila x este *cuantificată*, sau *legată*, sau *aparentă*; la fel pentru variabila y din predicatele $(\forall y)\, q(x, y)$, $(\exists y)\, q(x, y)$ etc. În predicatele $(\forall x)\, q(x, y)$ şi $(\exists x)\, q(x, y)$ se spune că variabila y este *liberă* sau *reală*; la fel pentru variabila x din predicatele $(\forall y)\, q(x, y)$, $(\exists y)\, q(x, y)$ etc. Aceste denumiri sînt justificate prin faptul că o expresie de tipul celor de mai sus este o funcţie de variabilele libere; cînd dăm variabilelor libere valori din universul discursului, obţinem o propoziţie care depinde de modul cum am ales valorile variabilelor libere, aşa cum s-a văzut în exemplele de mai sus. Pe de altă parte, aceste propoziţii „constante" obţinute prin fixarea variabilelor libere, nu mai depind de nici o variabilă, deşi sînt exprimate cu ajutorul unor simboluri pe care le numim variabile cuantificate: „$(\forall x)\;\; x - 3 = 0$" etc.

Formulele pe care le scriem în calculul predicatelor sînt fie predicate, fie obținute din predicate cu ajutorul functorilor logici $\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$ și cu ajutorul cuantificatorilor $\forall$, $\exists$. În scrierea funcțiilor propoziționale trebuie respectată o regulă fundamentală și anume că *într-o formulă orice variabilă liberă trebuie notată diferit de orice variabilă legată.* Atunci cînd din predicate mai simple, care respectă regula de mai sus, alcătuim noi predicate prin compunere cu ajutorul *functorilor logici*, trebuie să avem grijă ca noile predicate să respecte și ele regula fundamentală. Deci aici rezultă regula că *dacă P și Q sînt predicate astfel încît nici o variabilă liberă din P nu apare legată în Q și nici o variabilă legată din P nu apare liberă în Q, atunci $P \& Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$ sînt de asemenea predicate.* Trecerea de la P la $\neg P$ nu este legată de nici o restricție. Mai adoptăm de asemenea convenția conform căreia cuantificatorii $\forall$, $\exists$ *leagă mai tare* decît functorii &, $\vee$, $\rightarrow$, ceea ce conduce la suprimarea de paranteze.

De exemplu, să considerăm predicatele $p(x,y)$, $q(x,y)$, $r(y,z)$ în care variabilele sînt libere. Atunci $(\forall x)p(x,y)$, $(\exists x)q(x,y)$, $(\exists y)q(x,y)$ sînt noi predicate din care putem forma mai departe predicatele $(\forall x)p(x,y) \& (\exists x)q(x,y)$, $(\forall x)p(x,y) \vee (\exists x)q(x,y)$, $(\forall x)p(x,y) \rightarrow (\exists x)q(x,y)$, $(\forall x)p(x,y) \& r(y,z)$, $(\forall x)p(x,y) \vee r(y,z)$, $(\forall x)p(x,y) \rightarrow r(y,z)$, $(\forall x)p(x,y) \& (\exists z)r(y,x)$, $(\forall x)p(x,y) \vee (\exists z)r(y,z)$, $(\forall x)p(x,y) \rightarrow (\exists z)r(y,z)$; schimbînd cuantificatorii $\forall$, $\exists$ în toate felurile, obținem noi exemple. Regula enunțată mai sus a fost respectată, deoarece variabila x legată în prima funcție propozițională nu apare liberă în a doua, iar variabila y liberă din primul predicat nu apare legată în a doua. Mai observăm că în exemplele de mai sus a fost aplicată și convenția de suprimare a parantezelor, astfel încît nu a fost nevoie să scriem $((\forall x)p(x,y)) \& ((\exists x)q(x,y))$, $((\forall x)p(x,y)) \vee ((\exists x)q(x,y))$ etc. Pe de altă parte, $(\forall x)p(x,y) \& (\exists y)q(x,y)$ nu este un predicat, deoarece variabila y apare liberă în primul predicat și legată în a doua; cititorul poate alcătui singur alte exemple asemănătoare de ne-predicate.

Cititorul își va putea fixa pe deplin aceste reguli pe parcurs, pe măsura aplicării lor în mod curent în matematică. Este adevărat însă că de multe ori nu scriem toate formulele matematice în limbajul calculului predicatelor, ci folosim și cuvinte din limba obișnuită: *„și"*, *„sau"*, *„implică"*, *„oricare ar fi ..."*, *„există... astfel încît..."* etc. Mai mult, adeseori cuantificatorul universal este omis din text, el fiind subînțeles. De exemplu, atunci cînd scriem diverse identități (fie ele axiome sau teoreme), notăm doar $x + y = y + x$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ etc., și *subînțelegem*, „oricare ar fi x, y, z". Asemenea derogări de la formalismul calculului predicatelor vor apărea și în capitolele următoare ale acestei cărți.

2.3. Proprietăți

Am vorbit pînă acum despre notații. Trecînd la fondul teoriei, primul lucru pe care este natural să-l facem este să adoptăm o definiție a echivalenței predicatelor. În mod cu totul firesc, două predicate $p(x, y, z, \ldots)$ și $q(x, y, z, \ldots)$ se vor zice *echivalente*, dacă oricum am alege valorile variabilelor în universul discursului, cele două propoziții astfel obținute sînt echivalente. Pentru echivalența predicatelor vom folosi tot semnul $\Leftrightarrow$.

Rezultă imediat din această definiție că toate proprietățile stabilite în 1.2 relativ la echivalența propozițiilor se extind imediat la cazul funcțiilor propoziționale. Astfel, avem

$$p(x, y, z, \ldots) \vee q(x, y, z, \ldots) \Leftrightarrow q(x, y, z, \ldots) \vee p(x, y, z, \ldots)$$

etc. Vom stabili mai jos unele proprietăți de un tip nou, specifice calculului predicatelor.

În primul rînd vom semnala proprietățile fundamentale

(22) $$\neg(\forall x)\, p(x) \Leftrightarrow (\exists x) \neg p(x),$$

(23) $$\neg(\exists x)\, p(x) \Leftrightarrow (\forall x) \neg p(x).$$

Exprimată în cuvinte, echivalența (22) afirmă adevărul evident că: faptul că nu orice individ x (din universul discursului) satisface proprietatea $p(x)$ este adevărat dacă și numai dacă există un individ x (în universul discursului) care satisface proprietatea $\neg p(x)$. În mod analog se citește și echivalența (23). De altfel, proprietatea (23) se poate deduce din (22) folosind și metodele din § 1. Într-adevăr, (22) este adevărată pentru orice predicat $p(x)$; ea va fi adevărată și pentru predicatul $\neg p(x)$, adică

(22.1) $$\neg(\forall x) \neg p(x) \Leftrightarrow (\exists x) \neg\neg p(x).$$

Pe de altă parte, cum $\neg\neg p(x) \Leftrightarrow p(x)$, este clar că

(22.2) $$(\exists x) \neg\neg p(x) \Leftrightarrow (\exists x)\, p(x),$$

iar din (22.1) și (22.2) rezultă prin tranzitivitate

(22.3) $$\neg\, (\forall x) \neg p(x) \Leftrightarrow (\exists x)\, p(x).$$

Mai departe, cum $\alpha \Leftrightarrow \beta$ implică $\neg\alpha \Leftrightarrow \neg\beta$, din (22.3) deducem

(22.4) $$\neg\neg(\forall x) \neg p(x) \Leftrightarrow \neg(\exists x)\, p(x).$$

Pe de altă parte, folosind din nou $\alpha \Leftrightarrow \neg\neg\alpha$, avem

(22.5) $$(\forall x) \neg p(x) \Leftrightarrow \neg\neg(\forall x) \neg p(x),$$

iar din (22.5) și (22.4) rezultă prin tranzitivitate

$$(22.6) \qquad (\forall x)\, \neg p(x) \Leftrightarrow \neg(\exists x)\, p(x),$$

de unde, prin simetrie obținem (23).

Dăm în continuare alte proprietăți

$$(24) \qquad (\forall x) p\,(x) = (\exists x)\, p(x).$$

$$(25) \qquad (\forall x)\,(p(x) \to q(x)) \Rightarrow (\forall x)\, p(x) \to (\forall x)\, q(x),$$

$$(26) \qquad (\forall x)\,(p(x) \to q(x)) \Rightarrow (\exists x)\, p(x) \to (\exists x)\, q(x),$$

$$(27) \qquad (\forall x)\, p(x) \vee (\forall x)\, q(x) \Rightarrow (\forall x)\,(p(x) \vee q(x)),$$

$$(28) \qquad (\forall x)\,(p(x) \vee q(x)) \Rightarrow (\forall x)\, p(x) \vee (\exists x)\, q(x),$$

$$(29) \qquad (\exists x)\, p(x) \to (\exists x)\, q(x) \Rightarrow (\exists x)\,(p(x) \to q(x)),$$

$$(30)) \qquad (\exists x)\, p(x) \vee (\forall x)\, q(x) \Rightarrow (\exists x)\,(p(x) \vee q(x)),$$

$$(31) \qquad (\forall x)\,(p(x)\ \&\ q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\, p(x)\ \&\ (\forall x)\, q(x),$$

$$(32) \qquad (\exists x)\,(p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\, p(x) \vee (\exists x)\, q(x).$$

Să demonstrăm, de exemplu, proprietatea (29). Fiind vorba despre o implicație $\alpha \Rightarrow \beta$, vom presupune propoziția $(\exists x)\, p(x) \to (\exists x)\, q(x)$ adevărată și va trebui să demonstrăm că propoziția $(\exists x)\,(p(x) \to q(x))$ este adevărată. Pentru aceasta distingem două cazuri, după cum este adevărată propoziția $(\exists x)\, p(x)$ sau propoziția $\neg(\exists x)\, p(x)$. Dacă $(\exists x) p(x)$, cum am presupus că $(\exists x)\, p(x) \to (\exists x)\, q(x)$, rezultă că $(\exists x)\, q(x)$. Fie atunci x_0 un individ din universul discursului pentru care $q(x_0)$ este adevărată. Rezultă că și propoziția $p(x_0) \to q(x_0)$ este adevărată, indiferent de valoarea lui $p(x_0)$. Prin urmare $(\exists x)\,(p(x) \to q(x))$. Al doilea caz posibil este $\neg(\exists x)\, p(x)$. Rezultă atunci din (23) că $(\forall x)\ \neg p(x)$. Altfel spus, pentru orice x din universul discursului este adevărat $\neg p(x)$; dar atunci este adevărat și $p(x) \to q(x)$. Așadar $(\forall x)\,(p(x) \to q(x))$. Aplicînd (24), rezultă $(\exists x)\,(p(x) \to q(x))$.

Demonstrarea celorlalte propoziții este lăsată pe seama cititorului.

Se poate arăta, prin *contraexemple*, că pentru nici una din implicațiile (24) — (30) nu este adevărată implicația contrară. De exemplu, pentru (29) să arătăm că $(\exists x)\,(p(x) \to q(x))$ nu implică $(\exists x)\, p(x) \to (\exists x)\, q(x)$. Dacă, de pildă, universul discursului este mulțimea numerelor întregi, $p(x)$ este „$x < 0$" iar $q(x)$ este „$x \neq x$", atunci $p(1)$ este falsă, deci $p(1) \to q(1)$ este adevărată, deci $(\exists x)\,(p(x) \to q(x))$ este adevărată.

În schimb $(\exists x)\, p(x) \to (\exists x)\, q(x)$ este falsă (deoarece $(\exists x) p(x)$ este adevărată iar $(\exists x)\, q(x)$ este falsă). Mai general, obținem o întreagă clasă de contraexemple la reciproca lui (29), luînd drept $p(x)$ un predicat astfel încît $(\exists x)\, p(x)$ și $(\exists x)\, \neg p(x)$, iar $q(x)$ un predicat totdeauna fals.

Cititorul este îndemnat să găsească diverse contraexemple și pentru reciprocele celorlalte implicații (24) — (30).

Semnalăm în continuare proprietățile importante de *comutativitate a cuantificatorilor de același fel*, adică

(33) $$(\forall x)\, (\forall y)\, p(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)\, (\forall x)\, p(x, y),$$

(34) $$(\exists x)\, (\exists y)\, p(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)\, (\exists x)\, p(x, y).$$

a căror justificare este imediată și care se generalizează ușor la n cuantificatori de același fel. În ceea ce privește cuantificatorii diferiți, avem

(35) $$(\exists x)\, (\forall y)\, p(x, y) \Rightarrow (\forall y)\, (\exists x)\, p(x, y).$$

Într-adevăr să presupunem că $(\exists x)\, (\forall y)\, p(x, y)$. Fie atunci x_0 un element din universul discursului astfel încît $(\forall y)\, p(x_0, y)$. Înseamnă că $(\forall y)\, (\exists x) p(x, y)$ și anume pentru orice y există cu siguranță elementul x_0 pentru care avem $p(x_0, y)$. Reciproca implicației (35) nu este adevărată. De exemplu, să ne referim din nou la numerele întregi și să luăm drept $p(x, y)$ predicatul „$x + y = 0$". Atunci propoziția $(\forall y)$ $(\exists x)$ $x + y = 0$ este adevărată (ne spune că orice număr y are un opus la adunare), pe rînd propoziția $(\exists x)\, (\forall y)$ $x + y = 0$ este falsă (nu există nici un număr x care, adunat cu orice număr y, să dea 0).

Implicațiile cu care am lucrat mai sus erau implicații între propoziții constante, în sensul § 1. În matematică avem însă nevoie și de conceptul de implicație între funcții propoziționale. Va fi suficient să îl definim pentru predicate unare, extinderea definiției la predicate de oricîte variabile fiind imediată.

Fie $p(x)$ și $q(x)$ două predicate unare. Vom spune că $p(x)$ *implică* $q(x)$ și vom scrie

(36) $$p(x) \Rightarrow q(x)$$

dacă este adevărată propoziția

(37) $$(\forall x)\, (p(x) \to q(x)).$$

Nu exagerăm prea mult dacă spunem că întreaga matematică revine la a demonstra implicații de tipul (37), sau $(\forall x)$ $(p(x, y) \to q(x, y))$ sau altele asemănătoare. De exemplu, teorema „bisectoarele unui triunghi sînt concurente" este de forma $(\forall x)$ $(\forall y)$ $(\forall z)$ $(p(x, y, z) \to q(x, y, z))$, unde am notat cu $p(x, y, z)$ predicatul „x, y, z sînt bisectoarele unui triunghi", iar cu $q(x, y, z)$ predicatul „x, y, z sînt concurente". Asemenea exemple se pot da cu multă ușurință.

De multe ori o demonstrație se face prin *reducere la absurd* (vezi și comentariul la teorema 1.3.6). Este prin urmare absolut necesar să știm să negăm (36), adică să negăm (37). Dar, folosind (22), vedem că negația propoziției (37) este

$$(\exists x) \neg (p(x) \rightarrow q(x)),$$

ceea ce, în virtutea observației 1.3.4, este echivalent cu

$$(\exists x)\, p(x) \,\&\, \neg q(x). \tag{38}$$

În legătură cu aceasta cititorul este făcut atent să evite o greșeală destul de frecventă: pentru a nega (36) nu este suficient să scriem premisa adevărată și concluzia falsă, $p(x) \,\&\, \neg q(x)$, ci trebuie să ținem seama că se schimbă și cuantificatorul: din $\forall$, subînțeles în (36), devine $\exists$, explicit în (38). Pentru a nega implicația (36), trebuie să arătăm că *există* un individ x care „neagă săgeată", adică pentru care avem $p(x)$ și totuși $\neg q(x)$. Existența unui asemenea x se probează pur și simplu dînd un exemplu concret de element x_0 cu proprietățile $p(x_0)$ & & $\neg q(x_0)$. În acest caz zicem că am dat un *contraexemplu* la implicația (36).

În concluzia acestui capitol al cărții, cititorul este îndemnat să confrunte tot timpul raționamentele pe care le va întîlni pe parcursul studiilor sale matematice cu principiile generale schițate aici, însușindu-și astfel deprinderea de a raționa corect.

2.4. Exerciții

Completați demonstrațiile lăsate în seama cititorului.

Capitolul II

Teoria naivă a mulțimilor

§ 1. Noțiuni elementare

1.1. Mulțimi. Apartenență. Egalitatea mulțimilor. Mulțimea vidă

În teoria naivă a mulțimilor, ca și în unele teorii axiomatice ale mulțimilor, ideea de *mulțime* este considerată ca o noțiune primară, fapt pentru care nu se dă o definiție. Vom înțelege mulțimea ca pe o colecție de obiecte, fără a avea însă pretenția că prin aceasta am dat o definiție. Nu vom face nici o precizare în privința naturii obiectelor din care sînt formate mulțimile. Menționăm următoarele exemple: mulțimea numerelor naturale (notată $\mathbf{N}$), mulțimea numerelor întregi ($\mathbf{Z}$), mulțimea numerelor raționale ($\mathbf{Q}$), mulțimea numerelor reale ($\mathbf{R}$) și mulțimea numerelor complexe ($\mathbf{C}$).

Dacă a se găsește printre obiectele care formează mulțimea A vom spune că a este un *element* al mulțimii A, sau că a *aparține* mulțimii A, sau că mulțimea A *conține* elementul a și vom nota acest fapt prin:

$$a \in A$$

unde „$\in$" este semnul *relației de apartenență*. Relația de apartenență este un exemplu de predicat binar.

Negația propoziției $a \in A$ o vom scrie

$$a \notin A$$

și vom citi: a nu este un element al mulțimii A sau a nu aparține mulțimii A. Folosind simbolurile logice putem scrie $a \notin A \Leftrightarrow \neg (a \in A)$, sau folosind principiul dublei negații $a \in A \Leftrightarrow \neg (a \notin A)$.

Menţionăm următoarele exemple de propoziţii adevărate:

$$1 \in \mathbf{N},\ -1 \notin \mathbf{N},\ -1 \in \mathbf{Z},\ 0{,}5 \notin \mathbf{Z},\ 0{,}3 \in \mathbf{Q},\ \sqrt{2} \notin \mathbf{Q},$$

$$\sqrt{2} \in \mathbf{R},\ 2 + \mathrm{i} \notin \mathbf{R},\ 1 - \mathrm{i} \in \mathbf{C}.$$

1.1.1. *Definiţie*. **Vom spune că mulţimile A şi B sînt *egale* şi vom scrie $A = B$ dacă ele sînt formate din aceleaşi elemente.**

În simboluri:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall z)(z \in A \leftrightarrow z \in B).$$

Din definiţia egalităţii mulţimilor rezultă că din egalitatea a două mulţimi ($A = B$) şi din faptul că a aparţine uneia din mulţimi (de exemplu $a \in A$) putem deduce că a aparţine şi celeilalte mulţimi ($a \in B$).

Egalitatea este un exemplu de predicat binar.

Observăm că pentru a demonstra egalitatea mulţimilor A şi B este suficient să arătăm că sînt adevărate propoziţiile

$$(\forall z)\ (z \in A \to z \in B) \qquad \text{şi} \qquad (\forall z)\ (z \in B \to z \in A),$$

adică

$$z \in A \Rightarrow z \in B \qquad \text{şi} \qquad z \in B \Rightarrow z \in A.$$

Negaţia propoziţiei $A = B$ o vom nota $A \neq B$, adică

$$A \neq B \Leftrightarrow \neg(A = B)$$

sau

$$A = B \Leftrightarrow \neg(A \neq B).$$

În cele ce urmează, vom demonstra diverse proprietăţi ale mulţimilor, multe din aceste proprietăţi purtînd cîte un nume. Pentru a nu lungi textul, aceste denumiri nu sînt introduse prin definiţii separate, ci sînt încorporate în enunţurile propoziţiilor. Astfel:

1.1.2. *Propoziţie*. **Egalitatea mulţimilor are proprietăţile:**

a) Reflexivitate: $A = A$ **pentru orice mulţime** A.
b) Simetrie: $A = B \Rightarrow B = A$ **oricare ar fi mulţimile** A **şi** B.
c) Tranzitivitate: $A = B\ \&\ B = C \Rightarrow A = C$ **oricare ar fi mulţimile** A, B **şi** C.

Demonstraţie. *a)* Pentru orice z din universul discursului, propoziţia $z \in A \to z \in A$ este adevărată conform proprietăţii (10) din teorema 1.3.6 din capitolul I. Am demonstrat astfel adevărul propoziţiei $(\forall z)(z \in A \rightarrow z \in A)$. Conform cele de-a doua proprietăţi (12) din teorema 1.3.6 din capitolul I, rezultă că este adevărată şi propoziţia

$$(\forall z)(z \in A) \rightarrow z \in A) \& (\forall z)(z \in A \rightarrow z \in A),$$

ceea ce, conform observaţiei făcute după definiţia 1.1.1, înseamnă tocmai că $A = A$.

b) Presupunem că $A = B$ şi trebuie să demonstrăm $B = A$. Dar ipoteza făcută înseamnă că $z \in A \Rightarrow z \in B$ şi $z \in B \Rightarrow z \in A$; aplicînd a doua proprietate (1) din teorema 1.2.4 din capitolul I, deducem că $z \in B \Rightarrow z \in A$ şi $z \in A \Rightarrow z \in B$, ceea ce înseamnă că $B = A$.

c) Dacă $A = B$ şi $B = C$, atunci $z \in A \Rightarrow z \in B$ şi $z \in B \Rightarrow z \in A$ şi $z \in B \Rightarrow z \in C$ şi $z \in C \Rightarrow z \in B$. Din $z \in A \Rightarrow z \in B$ şi $z \in B \Rightarrow z \in C$ deducem, aşa cum am văzut în comentariul privind proprietatea (20) din teorema 1.3.6 din capitolul I, că $z \in A \Rightarrow z \in C$; în mod analog se demonstrează că $z \in C \Rightarrow z \in A$, deci $A = C$.

Am condus demonstraţia de mai sus în aşa fel încît să punem în evidenţă structura ei logică, mai mult decît se face de obicei într-un text matematic. În demonstraţiile care urmează vom omite şi noi să detaliem în stilul de mai sus, conformîndu-ne standardelor matematice obişnuite pentru a nu lungi textul.

1.1.3. *Definiţie.* **Se numeşte** *mulţime vidă* **şi se notează cu $\emptyset$ mulţimea care nu conţine nici un element.**

Mulţimea vidă este caracterizată prin faptul că propoziţia

$$(\forall x)(x \notin \emptyset)$$

este adevărată.

Mulţimea vidă este acceptată ca mulţime din motive asemănătoare cu cele ale acceptării lui 0 printre numere.

1.2. Incluziune. Incluziune strictă

1.2.1. *Definiţie.* **Spunem că mulţimea A este** *inclusă* **în mulţimea B şi scriem $A \subset B$ cînd orice element al mulţimii A este un element al mulţimii B.**

În simboluri:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall z)(z \in A \rightarrow z \in B)$$

unde „$\subset$" este semnul *relaţiei de incluziune.*

Propoziţia $A \subset B$ se mai exprimă şi astfel: A este *o submulţime* a lui B sau A este o *parte* a lui B.

De multe ori în loc de $A \subset B$ scriem $B \supset A$ şi citim B *include* A. Incluziunea este un exemplu de predicat binar.

În unele cazuri pentru a da o imagine intuitivă a noţiunilor introduse vom utiliza nişte desene în care reprezentăm mulţimile prin regiuni din plan înconjurate de o linie închisă. De exemplu, faptul că mulţimea A este inclusă în mulţimea B poate fi reprezentat prin figura 1.2.1.

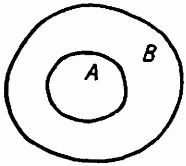


Fig. 1.2.1.

Observăm că

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \,\&\, B \subset A.$$

Negaţia propoziţiei $A \subset B$ o vom scrie $A \not\subset B$. În simboluri:

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \neg (A \subset B).$$

Ţinînd cont de proprietatea (22) şi observaţia 1.3.4 din primul capitol rezultă că

$$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists z)\,(z \in A \,\&\, z \notin B).$$

Această echivalenţă ne arată că pentru a demonstra că mulţimea A nu este inclusă în mulţimea B este suficient să arătăm existenţa unui element al mulţimii A care nu este element al mulţimii B.

Pentru exemplificare menţionăm următoarele afirmaţii adevărate:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z},\ \mathbf{Z} \not\subset \mathbf{N},\ \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q},\ \mathbf{Q} \not\subset \mathbf{Z}, \mathbf{Q} \subset \mathbf{R},\ \mathbf{R} \not\subset \mathbf{Q},\ \mathbf{R} \subset \mathbf{C},\ \mathbf{C} \not\subset \mathbf{R}.$$

1.2.2. *Propoziţie.* **Incluziunea are propritǎţile:**

a) *Reflexivitate*: $A \subset A$ **pentru orice mulţime A.**

b) *Antisimetrie*: $A \subset B \,\&\, B \subset A \Rightarrow A = B$ **oricare ar fi mulţimile** A **şi** B.

c) *Tranzitivitate*: $A \subset B \,\&\, B \subset C \Rightarrow A \subset C$ **oricare ar fi mulţimile** A, B **şi** C.

Demonstraţie. Asemănătoare cu demonstraţia teoremei 1.1.2.

Comparînd enunţurile propoziţiilor 1.1.2 şi 1.2.2 observăm că punctele *a)* şi *c)* diferă numai prin faptul că în propoziţia 1.1.2 apare semnul egalităţii, în timp ce în propoziţia 1.2.2 în locul semnului egalităţii apare semnul incluziunii. Acesta este motivul pentru care proprietăţile respective au un nume comun. Menţionăm că în propoziţia 1.1.2 punctul *c)* este vorba despre tranzitivitatea egalităţii mulţimilor în timp ce în propoziţia 1.2.2 punctul *c)* este vorba despre tranzitivitatea incluziunii mulţimilor.

Evident, putem să ne întrebăm dacă egalitatea mulţimilor este antisimetrică, respectiv dacă incluziunea mulţimilor este simetrică. În primul caz răspunsul este afirmativ, în cel de-al doilea negativ.

Într-adevăr, antisimetria egalității mulțimilor ($A = B \& B = A \Rightarrow A = B$ oricare ar fi mulțimile A și B) are loc conform regulei (13) din teorema 1.3.6 din capitolul I. Mai mult, observăm că această proprietate a egalității nu este interesantă, fapt pentru care nu am menționat-o în propoziția 1.1.2.

Simetria incluziunii ar însemna

$$A \subset B \Rightarrow B \subset A.$$

Ținînd cont de observațiile făcute la sfîrșitul subparagrafului 2.3 din capitolul I, pentru a demonstra că incluziunea nu este simetrică este suficient să dăm un contraexemplu. Într-adevăr dacă luăm $A = \mathbf{N}$ și $B = \mathbf{Z}$ observăm că $v(\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}) = 1$ și $v(\mathbf{Z} \subset \mathbf{N}) = 0$.

1.2.3. *Propoziție.* **Mulțimea vidă este inclusă în orice mulțime.**
În simboluri: $(\forall A)(\emptyset \subset A)$.

Demonstrație. Fie A o mulțime. Observăm că incluziunea $\emptyset \subset A$ este echivalentă prin definiție cu:

$$(\forall x)(x \in \emptyset \rightarrow x \in A).$$

Propoziția $x \in \emptyset$ fiind falsă, lucru ce rezultă din definiția lui $\emptyset$, rezultă că implicația

$$x \in \emptyset \rightarrow x \in A$$

este adevărată, și aceasta pentru orice x.

1.2.4. *Definiție.* **Spunem că mulțimea** A **este** *strict inclusă* **în mulțimea** B **și scriem** $A \subsetneq B$ dacă $A \subset B$ **și** $A \neq B$.
În simboluri:

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subset B \& A \neq B.$$

Exemple:

$$\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z},\ \mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Q},\ \mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R},\ \mathbf{R} \subsetneq \mathbf{C}.$$

1.2.5. *Propoziție.* **Incluziunea strictă are proprietățile:**
a) Ireflexivitate: $\urcorner(A \subsetneq A)$.
b) Asimetrie: $A \subsetneq B \Rightarrow \urcorner(B \subsetneq A)$.
c) Tranzitivitate: $A \subsetneq B \ \& \ B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C$.

Observăm că ireflexivitatea nu este negarea reflexivității. Vom demonstra implicația

$$(\forall x) \urcorner p(x, x) \Rightarrow \urcorner(\forall x)\, p(x, x)$$

care ne arată că ireflexivitatea este mai tare decît negarea reflexivității. Într adevăr, plecînd de la $(\forall x)\neg p(x,x) \Rightarrow (\exists x)\neg p(x,x)$ și folosind (22) din capitolul I, rezultă implicația de mai sus. Implicația reciprocă este falsă. Cititorul este îndemnat să construiască un contra-exemplu.

Observăm că asimetria nu este negarea simetriei.

Observăm că antisimetria nu este negația simetriei.

1.3. Definirea mulțimilor cu ajutorul funțiilor propoziționale

Dată o funcție propozițională $p(x)$ notăm prin $\{x|p(x)\}$ sau prin $\{x/p(x)\}$ mulțimea formată din toate obiectele a pentru care $p(a)$ este adevărată.

Dată o funcție propozițională $p(x)$ și o mulțime A putem forma o nouă funcție propozițională $q(x) = x \in A \,\&\, p(x)$. Fie $B = \{x | q(x)\}$. În acest caz particular vom folosi și notația $B = \{x \in A | p(x)\}$. Evident, B este formată din acele elemente a ale lui A pentru care $p(x)$ este adevărată, deci $B \subset A$.

Exemple. 1. Dacă $p(x)$ este $(\exists y)\ (y \in \mathbf{N} \,\&\, 14 \cdot y = x)$ atunci $\{x \in \mathbf{N} | p(x)\}$ este mulțimea numerelor naturale divizibile cu 14.

2. Date un număr finit de obiecte $a_1,a_2,\ldots,a_n$ vom nota cu $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ mulțimea care are ca elemente aceste obiecte și nu are alte elemente.

Observăm că $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\} = \{a_n,a_{n-1},\ldots,a_1\}$ deoarece ordinea în care apar elementele $a_1,\ldots,a_n$ nu are nici o importanță.

În cazul particular în care unele dintre obiectele $a_1,\ldots, a_n$ coincid între ele, mulțimea $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ are mai puțin de n elemente deoarece apariția de mai multe ori a unui element este echivalentă cu apariția lui o singură dată, de exemplu $\{1, 5, 7, 5, 1, 3, 1\}$ este egală cu mulțimea $\{1,5,7,3\}$.

Definirea unei mulțimi prin enumerarea elementelor sale este un caz particular de definire a unei mulțimi cu ajutorul unei funcții propoziționale deoarece $\{a_1,\ldots,a_n\} = \{x \,/\, x = a_1 \vee x = a_2 \vee \ldots \vee x = a_n\}$.

Observăm că pentru orice $i \in \{1,\ldots,n\}$, $a_i \in \{a_1,\ldots,a_n\}$ și reciproc $a \in \{a_1,\ldots,a_n\}$ implică există $i \in \{1,\ldots,n\}$ așa încît $a = a_i$.

3. Fie $a \in \mathbf{R}$. Mulțimile $\{x \in \mathbf{R}/x < a\}$ respectiv $\{x \in \mathbf{R}/x > a\}$ se numesc semidrepte deschise și se notează cu $(-\infty, a)$ respectiv $(a, +\infty)$.

Mulțimile $\{x \in \mathbf{R}/x \leqslant a\}$, respectiv $\{x \in \mathbf{R}|x \geqslant a\}$ se numesc semidrepte închise și se notează cu $(-\infty, a]$, respectiv $[a,+\infty)$.

4. Fie $a \in \mathbf{R}$ și $b \in \mathbf{R}$ așa încît $a < b$.

Mulțimea $(a,b) = \{x \in \mathbf{R}/a < x \,\&\, x < b\}$ se numește interval deschis.

Mulţimea $[a, b] = \{x \in \mathbf{R}/a \leqslant x \,\&\, x \leqslant b\}$ se numeşte interval închis.

Mulţimea $[a, b) = \{x \in \mathbf{R}/a \leqslant x \,\&\, x < b\}$ se numeşte interval închis la stînga şi deschis la dreapta.

Mulţimea $(a, b] = \{x \in \mathbf{R}/a < x \,\&\, x \leqslant b\}$ se numeşte interval deschis la stînga şi închis la dreapta.

1.4. Mulţimea părţilor unei mulţimi. Mulţimi de mulţimi

Reamintim că prin parte (submulţime) a unei mulţimi înţelegem orice mulţime B cu proprietatea $B \subset A$.

1.4.1. *Definiţie.* **Fie A o mulţime. Mulţimea tuturor mulţimilor X incluse în A se numeşte** ***mulţimea părţilor*** **lui A şi se notează cu $\mathcal{P}(A)$.** Deci

$$\mathcal{P}(A) = \{X/X \subset A\}.$$

În simboluri: $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow X \subset A)$.

Vom da cîteva exemple:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\},$$

$$P(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\},$$

$$\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Observăm că elementele lui $\mathcal{P}(A)$ sînt mulţimi.

1.4.2. *Definiţie.* **Mulţimile ale căror elemente sînt tot mulţimi se numesc** ***mulţimi de mulţimi.***

Considerarea mulţimilor de mulţimi este un fapt foarte frecvent, iar în unele teorii axiomatice mulţimile de mulţimi sînt singurele mulţimi cu care se lucrează.

Vom da cîteva exemple de mulţimi de mulţimi care nu sînt de forma $\mathcal{P}(A)$:

$$\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{a\}, \{b,c\}\}$$

$$\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{[-1, \sqrt{2}], [\pi, 75], (-4, +2)\},$$

$$\{\{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \emptyset\}.$$

1.4.3. **Exerciții**

a) Să se arate că $\mathcal{P}(\emptyset) \neq \emptyset$.

Deoarece $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ rezultă că trebuie probat că $\{\emptyset\} \neq \emptyset$. Aceste mulțimi nu pot să fie egale deoarece propoziția $\emptyset \in \{\emptyset\}$ este adevărată în timp ce propoziția $\emptyset \in \emptyset$ este falsă.

b) Să se arate că $\{a\} = \{b\}$, implică $a = b$.

Într-adevăr, deoarece $a \in \{a\}$, din egalitatea $\{a\} = \{b\}$ rezultă că $a \in \{b\}$, deci $a = b$.

c) Să se arate că $\{a\} = \{b, c\}$ implică $a = b$, $b = c$ și $a = c$. Deoarece $b \in \{b, c\}$ din egalitatea $\{a\} = \{b, c\}$ rezultă că $b \in \{a\}$, deci $b = a$. La fel se arată că $c = a$. Egalitatea $b = c$ este o consecință a celor două egalități deja probate.

1.5. Critica teoriei naive a mulțimilor*

Apariția teoriei naive a mulțimilor, datorită lui G. Cantor, la sfîrșitul secolului trecut, a făcut pe mulți matematicieni să creadă că matematica astfel prezentată a căpătat un fundament solid. Însă, la începutul secolului nostru s-a observat că această presupunere a fost falsă, deoarece a apărut *paradoxul lui B. Russell* care ne arată că teoria naivă a mulțimilor este contradictorie. Vom discuta în cele ce urmează această antinomie.

Să considerăm mulțimea $M = \{X/X$ este o mulțime$\}$ adică mulțimea tuturor mulțimilor. Deoarece M este o mulțime rezultă că M este un element al mulțimii tuturor mulțimilor adică $M \in M$. Deci în teoria naivă a mulțimilor apar mulțimi care se conțin pe ele însele ca element. Mulțimile cu care lucrăm obișnuit nu au această proprietate, de exemplu $\emptyset \notin \emptyset$, $\mathbf{N} \notin \mathbf{N}$ etc.

Să considerăm mulțimea acelor mulțimi care nu se conțin pe ele însele ca element, adică:

$$A = \{X/X \text{ este mulțime și } X \notin X\}.$$

Ne putem întreba dacă propoziția $A \in A$ este falsă sau adevărată?

Să presupunem că propoziția $A \in A$ este adevărată. Mulțimea A fiind un element al lui A, înseamnă că ea are proprietatea care caracterizează toate elementele lui A, adică $A \notin A$. Contradicția la care am ajuns ne face să credem că propoziția $A \in A$ este falsă, adică propoziția $A \notin A$ este adevărată. Dar presupunînd că $A \notin A$, deoarece A este o mulțime, rezultă că A are proprietatea care caracterizează ele-

* Facultativ.

mentele lui A, adică $A \in A$ este adevărată. Deci şi în acest caz am ajuns la o contradicţie.

Caracterul contradictoriu al teoriei naive a mulţimilor a dus la contestarea ei de către matematicieni, care au creat diferite teorii axiomatice ale mulţimilor.

Dintre teoriile axiomatice existente menţionăm teoria lui Zermelo-Fraenkel şi teoria lui Gödel-Bernays. În aceste teorii, noţiunea de mulţime are un înţeles mai restrîns decît cel considerat în acest manual, fapt ce are drept consecinţă necontradicţia teoriilor. Colecţii ca cele de mai sus (M, A) nu sînt mulţimi în înţelesul pe care aceste teorii îl dau noţiunii de mulţime.

Teoriile axiomatice ne arată că construcţiile curente ale matematicii, inclusiv cele din acest manual (cu excepţia celei din subparagraful 1.3, pe care chiar Cantor o admitea, cel puţin la începutul muncii sale) sînt necontradictorii.

Teoriile axiomatice sînt singurele teorii ale mulţimilor care pot forma un fundament solid pentru matematică.

Caracterul naiv al expunerii, abordat în acest manual, este o consecinţă a scopului pe care-l urmărim; familiarizarea elevilor cu noţiunile utilizate în teoria mulţimilor. În plus, o tratare axiomatică ar avea drept consecinţă demonstraţii mai complicate, lucru cerut de rigoarea pe care o impune o astfel de expunere.

1.6. Exerciţii

1) Să se arate că:

a) $a \in A \Leftrightarrow \{a\} \subset A$

b) $A \subset \{a\} \Leftrightarrow A = \{a\} \vee A = \emptyset$

c) $A \subset B \Leftrightarrow (\forall C)\ (C \subset A \rightarrow C \subset B)$

d) $A \subset B \Leftrightarrow (\forall C)\ (B \subset C \rightarrow A \subset C)$

e) $A \subset B \Leftrightarrow A \subsetneq B \vee A = B$

f) $\{a, b\} = \{c, d\} \Rightarrow a = c \,\&\, b = d \vee a = d \,\&\, b = c.$

În legătură cu ultima implicaţie atragem atenţia că în concordanţă cu regulile explicate în primul capitol ea trebuie să fie înţeleasă astfel:

$$(\{a, b\} = \{c, d\}) \Rightarrow (((a = c) \,\&\, (b = d)) \vee ((a = d) \,\&\, (b = c)))$$

În paragrafele următoare astfel de omiteri de paranteze vor fi utilizate în mod curent.

2) Să se scrie funcția propozițională care caracterizează mulțimea numerelor:

a) întregi care se divid prin 7,

b) naturale ca submulțime a mulțimii numerelor întregi,

c) raționale ca submulțime a mulțimii numerelor reale.

3) Să se arate că:

a) $\{a\} \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow a \in A$.

b) $\{a,b\} \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow a \in A \,\&\, b \in A$.

c) $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

4) Să se arate că:

a) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}$

c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a, b\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a, b\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a, b\}\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{a, b\}\}, \{\{b\}, \{a, b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}, \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\} \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}\}$.

5) Presupunînd că mulțimea A are n elemente, să se arate că mulțimea $\mathcal{P}(A)$ are 2^n elemente.

§ 2. Operații cu mulțimi

2.1. Reuniunea

2.1.1. *Definiție.* **Date două mulțimi A și B, numim *reuniunea* lor și o notăm prin $A \cup B$, mulțimea care conține acele elemente și numai acelea care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A sau B.**

În simboluri:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

Mulțimea hașurată din figura 2.1.1 reprezintă pe $A \cup B$.

Exemple:

$\{1, 3, 5\} \cup \{1, 7, 9\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\mathbf{N} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$.

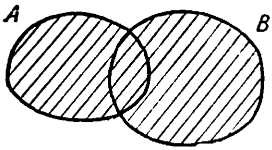


Fig. 2.1.1.

2.1.2. *Propoziție*. **Reuniunea a două mulțimi include fiecare dintre termenii reuniunii.** În simboluri:

$$A \subset A \cup B, \qquad B \subset A \cup B.$$

Demonstrație. Fie $x \in A$. Deoarece $x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B$ rezultă că $x \in A \cup B$.

2.1.3. *Propoziție*. **Dacă o mulțime include ambii termeni ai reuniunii, atunci ea include reuniunea.**
În simboluri:

$$C \supset A \;\&\; C \supset B \Rightarrow C \supset A \cup B.$$

Demonstrație. Dacă $x \in A \cup B$ atunci $x \in A$ sau $x \in B$. Dacă $x \in A$, deoarece $A \subset C$ rezultă că $x \in C$. Dacă $x \in B$, deoarece $B \subset C$, rezultă că $x \in C$. Deci în ambele cazuri $x \in C$, adică $A \cup B \subset C$.

2.1.4. *Propoziție*. **Reuniunea este** *comutativă*.
În simboluri:

$$A \cup B = B \cup A.$$

Demonstrație. Să probăm că $A \cup B \subset B \cup A$. Fie $x \in A \cup B$, adică $x \in A \vee x \in B$. Deoarece

$$x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in A \qquad \text{(vezi (1) din cap. I)}$$

rezultă că $x \in B \vee x \in A$, deci $x \in B \cup A$. Schimbînd rolurile lui A și B, rezultă și $B \cup A \subset A \cup B$.

2.1.5. *Propoziție*. **Reuniunea este** *asociativă*.
În simboluri:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Demonstrație. Să probăm incluziunea $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$. Din propoziția 2.1.2 rezultă că $A \subset A \cup (B \cup C)$ și $B \cup C \subset A \cup (B \cup C)$. Utilizînd din nou propoziția 2.1.2 rezultă $B \subset B \cup C$ și $C \subset B \cup C$. Folosind tranzitivitatea incluziunii, din $B \subset B \cup C$ și $B \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ deducem $B \subset A \cup (B \cup C)$. Asemănător obținem $C \subset A \cup (B \cup C)$. Cu propoziția 2.1.3 din $A \subset A \cup (B \cup C)$ și $B \subset A \cup (B \cup C)$ deducem $A \cup B \subset A \cup (B \cup C)$. Utilizînd și incluziunea $C \subset A \cup (B \cup C)$ și refolosind propoziția 2.1.3, deducem $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$. Schimbînd rolurile lui A și C și folosind comutativitatea, rezultă și $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$.

Cititorul este îndemnat să dea o nouă demonstrație lucrînd cu elemente și folosind (2) din cap. I.

2.1.6. *Propoziție.* **Reuniunea este** *idempotentă.*
În simboluri:

$$A \cup A = A.$$

2.1.7. *Propoziție.* **Mulțimea vidă are rol de** *element neutru* **față de reuniune.**
În simboluri:

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A.$$

Demonstrație. Vom proba numai egalitatea $A \cup \emptyset = A$, întrucît pentru a deduce cealaltă egalitate va fi suficient să aplicăm comutativitatea reuniunii (2.1.4). Deoarece incluziunea $A \subset A \cup \emptyset$ este o consecință a propoziției 2.1.2, rezultă că este suficient să probăm că $A \cup \emptyset \subset A$. Fie $x \in A \cup \emptyset$ adică $x \in A \vee x \in \emptyset$. Deoarece $x \in \emptyset$ este falsă rezultă că $x \in A$.

2.1.8. *Propoziție.*

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

Demonstrație. Vom începe cu $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$. Din 2.1.2 rezultă că $A \subset A \cup B$. Deci presupunînd $A \cup B = B$, deducem $A \subset B$.

Reciproc, să presupunem $A \subset B$. Deoarece $B \subset B$, utilizînd propoziția 2.1.3 rezultă că $A \cup B \subset B$. Incluziunea contrară, $B \subset A \cup B$ rezultă din 2.1.2, deci $A \cup B = B$.

2.1.9. *Propoziție.* **Reuniunea este** *izotonă* (*crescătoare*) **în ambele argumente.**
În simboluri:

$$A \subset B \,\&\, C \subset D \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D.$$

Demonstrație. Deoarece $B \subset B \cup D$ (2.1.2) și deoarece $A \subset B$ din ipoteză, din tranzitivitatea incluziunii rezultă că $A \subset B \cup D$. Analog se arată că $C \subset B \cup D$. Utilizînd propoziția 2.1.3, rezultă că $A \cup C \subset B \cup D$.

2.2. Intersecția

2.2.1. *Definiție.* **Fiind date două mulțimi.** A **și** B, **numim** *intersecția* **lor și o notăm prin** $A \cap B$, **mulțimea care conține acele elemente și numai acelea care aparțin atît lui** A, **cît și lui** B.

În simboluri:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \,\&\, x \in B.$$

Mulţimea haşurată din figura 2.2.1 reprezintă pe $A \cap B$.

Exemple:

$$\{1, 3, 5\} \cap \{1, 3, 7\} = \{1, 3\}, \mathbf{R} \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Q}, (0, +\infty) \cap \mathbf{Z} = \mathbf{N}.$$

2.2.2. *Propoziţie*. **Intersecţia a două mulţimi este inclusă în fiecare dintre termenii intersecţiei.**

În simboluri:

$$A \cap B \subset A, \qquad A \cap B \subset B.$$

Demonstraţie. Fie $x \in A \cap B$, adică $x \in A \,\&\, x \in B$. Deoarece $x \in A \,\&\, x \in B \Rightarrow x \in A$ rezultă că $x \in A$, deci $A \cap B \subset A$.

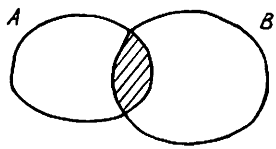


Fig. 2.2.1.

2.2.3. *Propoziţie*. **Dacă o mulţime este inclusă în fiecare termen al intersecţiei, atunci ea este inclusă în intersecţie.**

În simboluri:

$$C \subset A \,\&\, C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B.$$

Demonstraţie. Fie $a \in C$. Deoarece $C \subset A$ rezultă că $a \in A$. Deoarece $C \subset B$ rezultă că $a \in B$. Din $a \in A$ şi $a \in B$ rezultă că $a \in A \cap B$, deci $C \subset A \cap B$.

Este uşor de văzut că demonstraţiile nu diferă mult de cele de la reuniune, fapt pentru care vom enunţa o serie de proprietăţi, a căror demonstraţie este cerută ca exerciţiu.

2.2.4. *Propoziţie*. **Intersecţia este** *comutativă*.

În simboluri:

$$A \cap B = B \cap A$$

2.2.5. *Propoziţie*. **Intersecţia este** *asociativă*.

În simboluri:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

2.2.6. *Propoziţie*. **Intersecţia este** *idempotentă*.

În simboluri:

$$A \cap A = A.$$

2.2.7. *Propoziție.* **Mulțimea vidă are rol de *anulator* față de intersecție.** În simboluri:

$$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset.$$

2.2.8. *Propoziție.*

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

2.2.9. *Propoziție.* **Intersecția este *izotonă* în ambele argumente.** În simboluri:

$$A \subset B \,\&\, C \subset D \Rightarrow A \cap C \subset B \cap D.$$

2.2.10. *Propoziție.* (**Proprietățile de *absorție***).

a) $A \cap (A \cup B) = A$

b) $A \cup (A \cap B) = A.$

Demonstrație. Vom proba numai a doua egalitate. Deoarece $A \cap B \subset A$ (propoziția 2.2.2), aplicînd propoziția 2.1.8 rezultă că $(A \cap B) \cup A = A$, din care obținem egalitatea cerută folosind comutativitatea.

Cititorul este îndemnat să dea o nouă demonstrație lucrînd cu elemente și folosind (3) din cap. I.

Tot sub numele de *absorție* ne vom referi și la egalitățile:

$$(A \cup B) \cap A = A, \qquad (A \cap B) \cup A = A,$$
$$A \cap (B \cup A) = A, \qquad A \cup (B \cap A) = A,$$
$$(B \cup A) \cap A = A, \qquad (B \cap A) \cup A = A$$

care se obțin din cele de mai sus prin comutativitate.

2.2.11. *Propoziție.* **Intersecția este *distributivă* față de reuniune.** În simboluri:

$$a)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$b)\ (B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A).$$

Demonstrație. Vom demonstra numai prima egalitate, deoarece a doua se obține din prima prin comutativitate.

Vom începe cu demonstrarea incluziunii:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C).$$

Deoarece $A \subset A$ (reflexivitatea incluziunii) și $B \subset B \cup C$ (propoziția 2.1.2) din proprietatea de izotonie a intersecției (2.2.9) rezultă că $A \cap B \subset A \cap (B \cup C)$. Analog se arată că $A \cap C \subset A \cap (B \cup C)$. Pentru a obține incluziunea cerută este suficient să aplicăm propoziția 2.1.3 ultimilor două incluziuni.

Să arătăm că avem și:

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Fie $x \in A \cap (B \cup C)$, adică $x \in A$ și $x \in B \cup C$. Dar $x \in B \cup C$ este echivalentă cu $x \in B$ sau $x \in C$. Dacă $x \in B$, deoarece avem și $x \in A$ rezultă că $x \in A \cap B$, deci $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dacă $x \in C$, deoarece avem și $x \in A$ rezultă că $x \in A \cap C$, deci $x \in$ $\in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2.2.12. *Propoziție.* **Reuniunea este *distributivă* față de intersecție.** În simboluri:

$a)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$b)$ $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$.

Demonstrație. Vom demonstra numai prima egalitate. Aplicînd propoziția 2.2.11 în membrul drept obținem $(A \cup B) \cap (A \cup C) =$ $= ((A \cup B) \cap A) \cup ((A \cup B) \cap C)$. Folosind în prima paranteză absorbția și în a doua distributivitatea intersecției față de reuniune obținem

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup ((A \cap C) \cup (B \cap C)).$$

Folosind asociativitatea reuniunii și apoi absorbția, obținem

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = (A \cup (A \cap C)) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C).$$

În legătură cu propozițiile 2.2.11 și 2.2.12 vom face cîteva observații. Ambele propoziții pot fi demonstrate lucrînd cu elemente și folosind (5) din cap. I. Propoziția 2.2.12 poate fi probată folosind o demonstrație care seamănă cu cea dată propoziției 2.2.11. Considerînd propoziția 2.2.12 demonstrată, putem da propoziției 2.2.11 o demonstrație asemănătoare cu cea folosită pentru a demonstra 2.2.12. Cititorul este rugat să facă aceste variante de demonstrație.

2.2.13. *Definiție.* **Mulțimile A și B se numesc *disjuncte* dacă** $A \cap B = \emptyset$ (fig. 2.2.2).

Cu alte cuvinte două mulțimi sînt disjuncte atunci și numai atunci cînd ele nu au nici un element comun.

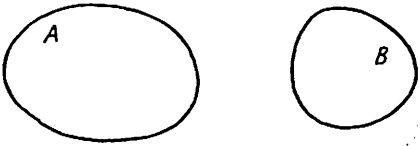


Fig. 2.2.2

2.3. Diferența

2.3.1. *Definiție.* **Date două mulțimi A și B, numim *diferența* lor și o notăm prin $A \setminus B$ sau $A - B$, mulțimea care conține acele elemente ale lui A care nu se găsesc în B și numai acestea.**

În simboluri:

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \;\&\; x \notin B$$

Mulțimea hașurată (fig. 2.3.1) reprezintă pe $A \setminus B$.

2.3.2. *Lemă.* **Diferența a două mulțimi este inclusă în prima mulțime.** În simboluri:

$$A \setminus B \subset A.$$

2.3.3. *Propoziție.* $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

Demonstrație. Deoarece $B \setminus A \subset B$, din proprietatea de izotonie a reuniunii rezultă că $A \cup (B \setminus A) \subset A \cup B$.

Reciproc, fie $x \in A \cup B$, adică $x \in A$ sau $x \in B$. Dacă $x \in A$ atunci $x \in A \cup (B \setminus A)$. Dacă $x \notin A$ atunci $x \in B$, deci $x \in B \setminus A$, deci $x \in A \cup (B \setminus A)$. Deoarece în ambele cazuri am obținut $x \in A \cup (B \setminus A)$ rezultă că $A \cup B \subset A \cup (B \setminus A)$.

Ultima propoziție ne arată că diferența mulțimilor nu este operația inversă reuniunii mulțimilor. Acest exemplu, ca și proprietatea de idempotență a reuniunii și intersecției ne arată că proprietățile operațiilor cu mulțimi sînt diferite de proprietățile operațiilor cu numere. Deși cele două feluri de operații au multe proprietăți comune, nu avem nici un motiv de a admite fără demonstrație o anumită proprietate pentru mulțimi numai pentru motivul că ea a fost demonstrată pentru numere.

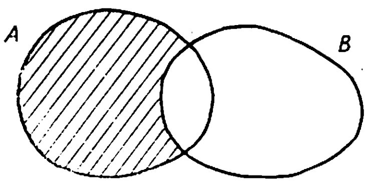


Fig. 2.3.1

2.3.4. *Propoziție.*

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B = A \setminus (B \cup C).$$

Demonstrație. Din șirul de echivalențe $x \in (A \setminus B) \setminus C \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in A \setminus B \,\&\, x \notin C \Leftrightarrow (x \in A \,\&\, x \notin B) \,\&\, x \notin C \Leftrightarrow x \in A \,\&\, (x \notin$ $\notin B \,\&\, x \notin C) \Leftrightarrow x \in A \,\&\, (\neg (x \in B) \,\&\, \neg (x \in C)) \Leftrightarrow x \in A \,\&\, \neg (x \in$ $\in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \,\&\, \neg (x \in B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C)$ rezultă că $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

Din această egalitate și comutativitatea reuniunii rezultă că $(A \setminus C) \setminus B = A \setminus (C \cup B) = A \setminus (B \cup C)$.

2.3.5. *Propoziție*

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Demonstrație. Vom demonstra numai prima egalitate, formînd ca și în demonstrația precedentă un șir de echivalente:
$x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \,\&\, \neg (x \in B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \,\&\, \neg (x \in$ $\in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \,\&\, x \in A) \,\&\, (\neg (x \in B) \,\&\, \neg (x \in C)) \Leftrightarrow (x \in$ $\in A \,\&\, x \notin B) \,\&\, (x \in A \,\&\, x \notin C) \Leftrightarrow x \in A \setminus B \,\&\, x \in A \setminus C \Leftrightarrow x \in$ $\in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

2.3.6. *Propoziție*

(a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

Demonstrație. Vom proba numai prima egalitate:
$x \in (A \cup B) \setminus C \Leftrightarrow x \in A \cup B \,\&\, x \notin C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \,\&\, x \notin$ $\notin C \Leftrightarrow (x \in A \,\&\, x \notin C) \vee (x \in B \,\&\, x \notin C) \Leftrightarrow x \in A \setminus C \vee x \in B \setminus C \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

2.3.7. *Observație*

$$A \setminus \emptyset = A, \qquad \emptyset \setminus A = \emptyset, \qquad A \setminus A = \emptyset.$$

2.4. Diferența simetrică

2.4.1. *Definiție.* **Mulțimea** $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ **se numește** *diferența simetrică* **a mulțimilor** A **și** B.
Mulțimea hașurată reprezintă $A \Delta B$ (fig. 2.4.1).

2.4.2. *Lemă*

$$x \in A \,\Delta\, B \Leftrightarrow x \in A \,\&\, x \notin B \vee x \in B \,\&\, x \notin A.$$

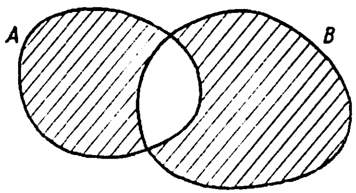


Fig. 2.4.1

Demonstrație. Echivalența

$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

rezultă din definiție. Din definiția reuniunii, obținem

$$x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \Leftrightarrow x \in A \setminus B \vee \vee x \in B \setminus A.$$

Folosind definiția diferenței obținem:

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \;\&\; x \notin B,$$

$$x \in B \setminus A \Leftrightarrow x \in B \;\&\; x \notin A.$$

Aplicînd teoremele 1.2.5 și 1.2.3 din primul capitol deducem echivalența din lemă.

Lema ne arată că un element aparține diferenței simetrice a două mulțimi dacă și numai dacă acest element aparține uneia dintre cele două mul,imi fără să aparțină și celeilalte.

2.4.3. *Propoziție.* **Diferența simetrică este** *comutativă.* În simboluri:

$$A \Delta B = B \Delta A.$$

Demonstrație.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A.$$

2.4.4. *Propoziție.* **Diferența simetrică este** *asociativă.* În simboluri:

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

Demonstrație. Deoarece $(A \Delta B) \Delta C = ((A \Delta B) \setminus C) \cup (C \setminus (A \Delta B))$ rezultă că $x \in (A \Delta B) \Delta C$ dacă și numai dacă $x \in (A \Delta B) \setminus C$ sau $x \in C \setminus (A \Delta B)$. Să analizăm pe rînd cele două cazuri:

Observăm că $x \in (A \Delta B) \setminus C$, dacă și numai dacă $x \in A \Delta B$ și $x \notin C$. Ținînd cont de lema 2.4.2, rezultă că $x \in (A \Delta B) \setminus C$ dacă și numai dacă

a) $x \in A$ și $x \notin B$ și $x \notin C$

sau

b) $x \in B$ și $x \notin A$ și $x \notin C$.

Observăm că $x \in C \setminus (A \Delta B)$ dacă și numai dacă $x \in C$ și $x \notin A \Delta B$. Folosind lema rezultă că $x \in C \setminus (A \Delta B)$ dacă și numai dacă

c) $x \in C$ şi $x \in A$ şi $x \in B$

sau

d) $x \in C$ şi $x \notin A$ şi $x \notin B$.

Deci $x \in (A \Delta B) \Delta C$ dacă și numai dacă x aparține tuturor celor trei mulțimi sau x aparține uneia dintre cele trei mulțimi fără însă să aparțină și celorlalte două.

Un raționament similar ne arată că $x \in A \Delta (B \Delta C)$ dacă și numai dacă x aparține tuturor celor trei mulțimi sau x aparține uneia dintre cele trei mulțimi fără însă să aparțină și celorlalte două.

Deci
$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C.$$

2.4.5. *Propoziție.* **Mulțimea vidă este** *element neutru* **față de diferența simetrică.**

În simboluri:

$$A \Delta \emptyset = \emptyset \Delta A = A.$$

Demonstrație. $A \Delta \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$.

2.4.6. *Propoziție.* $A \Delta A = \emptyset$.

Demonstrație. $A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

2.4.7. *Propoziție.* **Intersecția este** *distributivă* **față de diferența simetrică.**

În simboluri:

a) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$,

b) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

Demonstrație. Vom demonstra numai prima egalitate deoarece a doua rezultă din prima folosind comutativitatea. Din definiție rezultă că

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B)).$$

Folosind propoziția 2.3.5 obținem

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = (((A \cap B) \setminus A) \cup ((A \cap B) \setminus C)) \cup$$
$$\cup (((A \cap C) \setminus A) \cup ((A \cap C) \setminus B)).$$

Deoarece $A \cap B \subset A$ şi $A \cap C \subset A$ rezultă ca $(A \cap B)\setminus A = \emptyset$ şi $(A \cap C)\setminus A = \emptyset$ deci

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = ((A \cap B)\setminus C) \cup ((A \cap C)\setminus B).$$

Observînd că $(A \cap B)\setminus C = A \cap (B\setminus C)$ rezultă

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = (A \cap (B\setminus C)) \cup (A \cap (C\setminus B)).$$

Folosind distributivitatea intersecţiei faţă de reuniune, obţinem:

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap ((B\setminus C) \cup (C\setminus B)) = A \cap (B \Delta C).$$

2.5. Complementara

2.5.1. *Definiţie.* **Dacă** $B \subset T$, **mulţimea** $T\setminus B$ **se numeşte** *complementara* **lui** B **faţă de** T **şi se notează** $\complement_T B$.

Mulţimea haşurată reprezintă complementara lui B în raport cu T (fig. 2.5.1).

În cazul particular în care mulţimea T se subînţelege vom nota prescurtat $\complement B$ în loc de $\complement_T B$. În continuare deoarece vom lucra în $\mathcal{P}(T)$, adică vom lucra numai cu părţi ale lui T, şi deoarece toate complementarele vor fi făcute în raport cu T, vom adopta această convenţie.

2.5.2. *Lemă.* **Dacă** $B \in \mathcal{P}(T)$ **şi** $x \in T$ **atunci:**

$$x \in \complement B \Leftrightarrow x \notin B.$$

Demonstraţie. $x \in \complement B \Leftrightarrow x \in T\setminus B \Leftrightarrow x \in T \,\&\, x \notin B \Leftrightarrow x \notin B.$

2.5.3. *Propoziţie.* **Formulele lui De Morgan:**

a) $\complement (A \cup B) = \complement A \cap \complement B,$

b) $\complement (A \cap B) = \complement A \cup \complement B.$

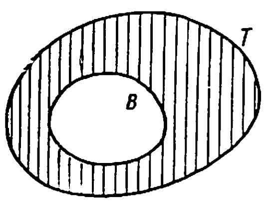


Fig. 2.5.1

Demonstraţie. Vom utiliza propoziţia 2.3.5.

$$\complement (A \cup B) = T\setminus(A \cup B) = (T\setminus A) \cap (T\setminus B) = \\ = \complement A \cap \complement B$$

$$\complement (A \cap B) = T\setminus(A \cap B) = \\ = (T\setminus A) \cup (T\setminus B) = \complement A \cup \complement B.$$

2.5.4. *Propoziție.* **Complementara este** *antitonă* (descrescătoare). În simboluri:

$$A \subset B \Rightarrow \complement A \supset \complement B.$$

Demonstrație. $A \subset B \Rightarrow A = A \cap B \Rightarrow \complement A = \complement(A \cap B) =$

$$= \complement A \cup \complement B \Rightarrow \complement A \supset \complement B.$$

2.5.5. *Propoziție.* **Complementara este** *involutivă.* În simboluri:

$$\complement\complement A = A.$$

Demonstrație. Presupunînd $x \in T$ și utilizînd lema 2.5.2 obținem:

$$x \in \complement\complement A \Leftrightarrow x \notin \complement A \Leftrightarrow x \in A.$$

2.5.6. *Propoziție.*

a) $A \cap \complement A = \emptyset$ și $A \cup \complement A = T$,

b) $A \cap B = \emptyset \,\&\, A \cup B = T \Rightarrow B = \complement A.$

Demonstrație. Vom proba numai a doua afirmație. Fie $x \in T$. Dacă $x \in B$, din $A \cap B = \emptyset$ deducem $x \notin A$. Dacă $x \notin B$, din $A \cup B = T$ deducem $x \in A$. Deci $x \in B \Leftrightarrow x \notin A$, adică $B = \complement A$.

2.6. Produsul cartezian

2.6.1. *Definiție.* **Se numește** *produsul cartezian* **al mulțimilor** A **și** B **și se notează cu** $A \times B$, **mulțimea tuturor perechilor ordonate** (a, b) **unde** $a \in A$ **și** $b \in B$.
În simboluri:

$$A \times B = \{(a, b)/a \in A, b \in B\}.$$

Noțiunea de *pereche ordonată* o acceptăm în sensul ei naiv ca un cuplu de două obiecte împreună cu o ordine dată între aceste obiecte. Deci vom admite că

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \;\&\; b = b'.$$

Observăm că $(a, b) \neq \{a, b\}$ deoarece presupunînd $a \neq b$ propoziția $(a, b) = (b, a)$ este falsă în timp ce $\{a, b\} = \{b, a\}$ este adevărată.
Definiția perechii ordonate se găsește în paragraful următor.

Elementul a va fi numit *prima componentă* a perechii ordonate (a, b), iar elementul b va fi numit *a doua componentă* a perechii ordonate (a, b).

Revenind la produsul cartezian, observăm că produsul cartezian a două mulţimi este vid dacă şi numai dacă una dintre cele două mulţimi este vidă.

Produsul cartezian nu este comutativ. Pentru a arăta aceasta vom da un contraexemplu:

$$\{\emptyset\} \times \{\{\emptyset\}\} = \{(\emptyset, \{\emptyset\})\} \neq \{(\{\emptyset\}, \emptyset)\} = \{\{\emptyset\}\} \times \{\emptyset\}.$$

Inegalitatea de mai sus o demonstrăm prin absurd. Dacă $\{(\emptyset, \{\emptyset\})\} = \{(\{\emptyset\}, \emptyset)\}$ atunci $(\emptyset, \{\emptyset\}) = (\{\emptyset\}, \emptyset)$, deci $\emptyset = \{\emptyset\}$ ceea ce constituie o contradicţie.

Produsul cartezian nu este asociativ. Un contraexemplu va fi dat în paragraful următor.

Ţinînd cont de faptul că punctele unei drepte pot fi puse în „corespondenţă biunivocă" cu mulţimea $\mathbf{R}$ iar punctele planului pot fi puse în „corespondenţă biunivocă" cu mulţimea $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ putem afirma că planul este produsul cartezian al unei drepte cu ea însăşi (fig. 2.6.1).

Putem de asemenea observa că un cilindru poate fi gîndit ca fiind produsul cartezian al bazei cu generatoarea (fig. 2.6.2)

2.6.2. *Propoziţie.* **Produsul cartezian este** *izoton.*

În simboluri:

$$A \subset B \;\&\; C \subset D \Rightarrow A \times C \subset B \times D.$$

Demonstraţie. Fie $x \in A \times C$, adică $x = (a, c)$ cu $a \in A$ şi $c \in C$. Deoarece $A \subset B$ rezultă că $a \in B$; deoarece $C \subset D$ rezultă că $c \in D$, deci $x \in B \times D$.

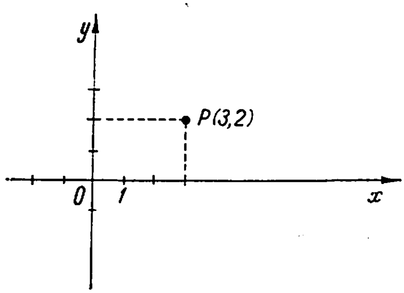


Fig. 2.6.1.

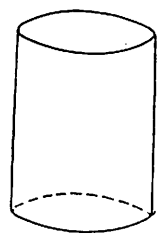


Fig. 2.6.2.

2.6.3. *Propoziție.* **Produsul cartezian este** ***distributiv*** **față de reuniune.**
În simboluri:

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

b) $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$.

Demonstrație. Vom proba numai prima egalitate. Deoarece $A \subset A \cup B$ și $B \subset A \cup B$, din propoziția anterioară deducem că

$$A \times C \subset (A \cup B) \times C \text{ și } B \times C \subset (A \cup B) \times C.$$

Aplicînd propoziția 2.1.3 obținem

$$(A \times C) \cup (B \times C) \subset (A \cup B) \times C.$$

Reciproc, fie $x \in (A \cup B) \times C$, adică $x = (a, c)$ cu $a \in A \cup B$ și $c \in C$. Dar $a \in A \cup B$ este echivalent cu $a \in A$ sau $a \in B$. Dacă $a \in A$ atunci $x \in A \times C$, deci $x \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Dacă $a \in B$ atunci $x \in B \times C$, deci $x \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

2.6.4. *Propoziție.* **Produsul cartezian este** ***distributiv*** **față de intersecție.**
În simboluri:

a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,

b) $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$.

Demonstrație. Vom proba numai prima egalitate. Deoarece intersecția este inclusă în ambii săi termeni, raționînd ca în propoziția anterioară deducem că

$$(A \cap B) \times C \subset (A \times C) \cap (B \times C).$$

Reciproc, fie $x \in (A \times C) \cap (B \times C)$, adică $x \in A \times C$ și $x \in B \times C$. Deoarece $x \in A \times C$ rezultă că $x = (a, c)$ cu $a \in A$ și $c \in C$. Deoarece $x \in B \times C$ rezultă că $x = (b, c')$ cu $b \in B$ și $c' \in C$. Dar $x = (a, c) = (b, c')$ implică $a = b$ și $c = c'$, deci $a \in B$, deci $a \in A \cap B$, deci $x = (a, c) \in (A \cap B) \times C$.

2.6.5. *Propoziție.* **Produsul cartezian este distributiv față de diferență.**
În simboluri:

a) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$,

b) $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$.

Demonstrație. Vom proba prima egalitate. Deoarece $A \setminus B \subset A$ rezultă că

$$(A \setminus B) \times C \subset A \times C.$$

Să arătăm că dacă $x \in (A \setminus B) \times C$ atunci, $x \notin B \times C$. Să presupunem prin absurd că $x \in B \times C$, deci $x = (b, c)$ cu $b \in B$ și $c \in C$.

Deoarece $x \in (A \setminus B) \times C$, rezultă că $x = (a, c')$ cu $a \in A \setminus B$ și $c' \in C$. Dar egalitatea $(b, c) = (a, c')$ implică $b = a$ și $c = c'$, deci $b \in A \setminus B$ ceea ce contrazice $b \in B$. Deci dacă $x \in (A \setminus B) \times C$ atunci $x \notin B \times C$ și ținînd cont și de incluziunea de mai sus rezultă că

$$(A \setminus B) \times C \subset (A \times C) \setminus (B \times C).$$

Reciproc, fie $x \in (A \times C) \setminus (B \times C)$, adică $x \in A \times C$ și $x \notin B \times C$. Deoarece $x \in A \times C$ rezultă că $x = (a, c)$ cu $a \in A$ și $c \in C$. Vom dovedi că $a \notin B$. Presupunînd prin absurd că $a \in B$, rezultă că $x = (a, c) \in B \times C$ ceea ce contrazice $x \notin B \times C$. Deoarece $a \in A$ și $a \notin B$ rezultă că $a \in A \setminus B$, deci $x = (a, c) \in (A \setminus B) \times C$.

2.6.6. *Propoziție.* **Produsul cartezian este *distributiv* față de diferența simetrică.**

În simboluri:

a) $(A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$,

b) $C \times (A \Delta B) = (C \times A) \Delta (C \times B)$.

Demonstrație. Vom proba numai prima egalitate

$$(A \Delta B) \times C = ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \times C = ((A \setminus B) \times C) \cup ((B \setminus A) \times C) = ((A \times C) \setminus (B \times C)) \cup ((B \times C) \setminus (A \times C)) = (A \times C) \Delta (B \times C).$$

2.7. Pereche ordonată*

Cititorul mai exigent este poate nemulțumit că spre deosebire de celelalte noțiuni introduse în acest capitol, noțiunea de pereche ordonată nu a fost definită exact. În acest paragraf, acest cititor găsește amănuntele necesare pentru a înlătura orice nedumerire provocată de subparagraful anterior.

* Facultativ.

2.7.1. *Definiție.* **Mulțimea** $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ **se numește** *pereche ordonată* **a obiectelor** a **și** b **și se notează prin** (a, b).

În simboluri:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

2.7.2. *Propoziție.*

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \;\&\; b = d.$$

Demonstrație. Deoarece implicația de la dreapta la stînga este ușor de probat, vom demonstra numai implicația de la stînga la dreapta. Deci vom presupune $(a, b) = (c, d)$, adică

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

Deoarece $\{a\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$, din egalitatea de mai sus rezultă că $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$, adică $\{a\} = \{c\}$ sau $\{a\} = \{c, d\}$. Indiferent de situația în care ne aflăm rezultă $c \in \{a\}$, deci $a = c$, deci egalitatea de mai sus devine:

$$(*) \qquad \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}.$$

Vom analiza cele două cazuri $a = b$ și $a \neq b$.

Dacă $a = b$, ultima egalitate devine $\{\{a\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$, deci $\{a\} = \{a, d\}$, deci $d \in \{a\}$ și prin urmare $a = d$, deci $b = d$.

Să presupunem că $a \neq b$. Deoarece $\{a, b\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$ din egalitatea (*) rezultă că $\{a, b\} \in \{\{a\}, \{a, d\}\}$. Deoarece nu putem avea $\{a, b\} = \{a\}$ pentru că $a \neq b$ rezultă că $\{a, b\} = \{a, d\}$. Această egalitate ne arată că $b \in \{a, d\}$ și din $b \neq a$ deducem $b = d$.

Vom da un contraexemplu care arată că produsul cartezian nu este asociativ și anume vom arăta că

$$(\{\emptyset\} \times \{\emptyset\}) \times \{\emptyset\} \neq \{\emptyset\} \times (\{\emptyset\} \times \{\emptyset\}).$$

Presupunînd prin absurd că ar avea loc egalitatea și observînd că $\{\emptyset\} \times \{\emptyset\} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$, ar rezulta $\{(\emptyset, \emptyset)\} \times \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \times \{(\emptyset, \emptyset)\}$, adică $((\emptyset, \emptyset), \emptyset) = (\emptyset, (\emptyset, \emptyset))$, deci $(\emptyset, \emptyset) = \emptyset$, ceea ce conform definiției 2.7.1 revine la $\{\{\emptyset\}\} = \emptyset$, o contradicție.

Observăm că acest exemplu ne arată și faptul că produsul cartezian nu este comutativ.

2.7.3. *Definiție.* **Vom numi** *triplet* (**sau** *triplet ordonat*) **format din obiectele** a, b **și** c **mulțimea** $((a, b), c)$. **Tripletul format din obiectele** a, b **și** c **se notează cu** (a, b, c).

În simboluri:

$$(a,\ b,\ c) = ((a,\ b),\ c).$$

2.7.4. *Propoziție.*

$$(a,\ b,\ c) = (d,\ e,\ f) \Leftrightarrow a = d\ \&\ b = e\ \&\ c = f.$$

Demonstrație. $(a, b, c) = (d, e, f) \Leftrightarrow ((a, b), c) = ((d, e), f) \Leftrightarrow (a, b) = (d, e)\ \&\ c = f \Leftrightarrow a = d\ \&\ b = e\ \&\ c = f$.

2.7.5. *Definiție.* **Prin inducție definim noțiunea de** *n-uplu* **format din obiectele** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **ca fiind mulțimea** $((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$ **pe care o vom nota prin** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Prin inducție se poate demonstra:

2.7.6. *Propoziție.* **Egalitatea**

$$(a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n) = (b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n)$$

este echivalentă cu egalitățile $a_i = b_i$ **pentru orice** i **cuprins între 1 și** n.

2.8. Exerciții

1) Să se arate că:

a) $X \in \{A\} \cup \{B\} \Leftrightarrow X = A \vee X = B$,

*b)** $A \cup B \cup C \cup D \cup E = (A \cup (B \cup C)) \cup (D \cup E)$,

c) $a \notin A \Leftrightarrow \{a\} \cap A = \emptyset$,

d) $\{A\} \cap \{B\} = \emptyset \Leftrightarrow A \neq B$.

2) Notînd cu $N(X)$ numărul elementelor mulțimii X (cu presupunerea că X este finită) să se arate că:

a) $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$,

b) $N(A \cup B) = N(A) + N(B) \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$,

* Într-o reuniune (intersecție, diferență, diferență simetrică) de mai multe mulțimi vom presupune că reuniunile (. . .) se execută de la stînga la dreapta.

c) $N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) -$
$- N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$,

d) $N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} N(A_i) - \sum_{i<j} N(A_i \cap A_j) +$

$+ \sum_{i<j<k} N(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} N(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n)$,

unde indicii iau valori de la 1 la n.

3) Folosind exercițiul anterior să se arate că numărul numerelor naturale mai mici decît n și prime cu n este dat de formula

$$n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sînt toți divizorii primi, distincți ai lui n.

4) Să se arate că

a) $A \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup \ldots \cup (A \cap A_n)$,

b) $A \cup (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = (A \cup A_1) \cap (A \cup A_2) \cap \ldots \cap (A \cup A_n)$.

c) $A \cap B = \emptyset \,\&\, C \subset A \Rightarrow C \cap B = \emptyset$.

5) Să se arate că:

a) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$,

b) $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$,

c) $A \cup (B \setminus A) = B \Leftrightarrow A \subset B$,

d) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$,

e) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,

f) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,

g) $A \subset B \,\&\, C \subset D \Rightarrow A \setminus D \subset B \setminus C$,

h) $A \subset B \cup C \Rightarrow A \setminus B \subset C$,

i) $A \supset B \setminus C \Rightarrow B \setminus A \subset C \setminus A$,

j) mulțimile $A \setminus B$ și $B \setminus A$ sînt disjuncte,

k) diferența mulțimilor nu este asociativă.

6) Să se arate că:

a) $A \Delta (A \Delta C) = C$,

b) $A \Delta B = C \Rightarrow B = A \Delta C$.

c) $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$,

d) $A \Delta B = C \Delta B \Rightarrow A = C$,

e) $A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$,

f) $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$,

g) $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \Delta (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup$
$\cup (A_2 \Delta B_2) \cup \ldots \cup (A_n \Delta B_n)$,

h) $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \Delta (B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup$
$\cup (A_2 \Delta B_2) \cup \ldots \cup (A_n \Delta B_n)$.

7) Să se arate că mulţimea $A_1 \Delta A_2 \Delta \ldots \Delta A_n$ conţine acele elemente şi numai acelea care aparţin unui număr impar de mulţimi A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

8) Lucrînd în $\mathcal{P}(T)$ să se arate că:

a) $\complement \emptyset = T$ şi $\complement T = \emptyset$,

b) $A \setminus B = A \cap \complement B$ şi $A \Delta B = (A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A)$,

c) $A \cap T = A$ şi $A \cup T = T$,

d) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \complement B = \emptyset \Leftrightarrow \complement A \cup B = T$,

e) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \complement B \Leftrightarrow \complement A \supset B \Leftrightarrow A \setminus \complement B = \emptyset$,

f) $A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \not\subset \complement B \Leftrightarrow A \setminus \complement B \neq \emptyset$,

8) $A \cap \complement B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \not\subset B \Leftrightarrow A \setminus B \neq \emptyset$.

9) Să se arate că:

a) dacă $C \neq \emptyset$ atunci $A \times C \subset B \times C \Rightarrow A \subset B$,

b) dacă $C \neq \emptyset$ atunci $C \times A \subset C \times B \Rightarrow A \subset B$,

c) $(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$,

d) dacă A are a elemente şi B are b elemente atunci $A \times B$ are ab elemente.

§ 3. Corespondențe

3.1. Noțiunea de corespondență

3.1.1. *Definiție.* **Fie A și B două mulțimi. Se numește** *corespondență* **de la A la (în) B un triplet $g = (A, G, B)$ în care G este o parte a produsului cartezian $A \times B$. Se spune că G este** *graficul* **corespondenței g.**

3.1.2. *Exemple*

a) Fie $g = (A, G, B)$ unde $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ și $G = \{(a, 2), (a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$. Folosind un desen, corespondența g o putem reprezenta ca în figura 3.1.1. Mulțimea hașurată reprezintă graficul corespondenței

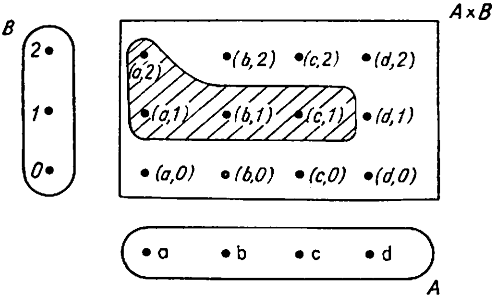


Fig 3.1.1.

b) Dacă $A = \emptyset$ sau $B = \emptyset$ atunci $A \times B = \emptyset$ și ținînd cont că singura parte a mulțimii vide este chiar mulțimea vidă, rezultă că de la A la B există o singură corespondență și anume $(A, \emptyset, B)$.

c) Dată o mulțime A, mulțimea $\{(a, a) / a \in A\}$ este numită *diagonala* lui $A \times A$ și este notată cu Δ_A.

Dacă $A \subset B$ corespondența (A, Δ_A, B) notată prin $\mathbf{I}_{AB}$ se numește *corespondența incluziune* a lui A în B.

În cazul particular $A = B$, corespondență incluziune a lui A în A se numește *corespondență identitate* a lui A și se notează cu $\mathbf{1}_A$. Deci

$$\mathbf{1}_A = (A, \Delta_A, A).$$

Pentru orice mulțime B putem vorbi corespondență de incluziune a lui $\emptyset$ în B. Observăm că $\mathbf{I}_{\emptyset B} = (\emptyset, \emptyset, B)$ și așa cum am văzut în exemplul *b)* $\mathbf{I}_{\emptyset B}$ este singura corespondență de la $\emptyset$ în B.

3.1.3. *Definiție.* **Fie $g = (A, G, B)$ o corespondență. Dacă $(a, b) \in G$ vom spune că** *b corespunde lui a* **prin corespondența g și vom scrie $a\, g\, b$.** În simboluri:

$$a\, g\, b \Leftrightarrow (a, b) \in G.$$

În exemplul desenat mai sus, se observă că elementului $a \in A$ îi corespund două elemente 1 și 2 din B, iar elementului $d \in A$ nu îi corespunde nici un element din B. Pentru a scoate în relief aceste legături între elemente, putem folosi și figura 3.1.2 în care faptul că elementul b corespunde lui a a fost marcat printr-o săgeată de la a la b.

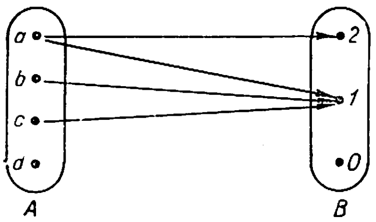


Fig. 3.1.2.

3.2. Compunerea corespondențelor

3.2.1. *Notație.* Dacă $F \subset A \times B$ și $G \subset B \times C$ vom nota prin $G \circ F$ mulțimea

$$\{(a, c)/(\exists b)\ ((a, b) \in F \ \&\ (b, c) \in G)\}.$$

3.2.2. *Definiție.* **Fie** $f = (A, F, B)$ **și** $g = (B, G, C)$ **două corespondențe. Se numește** *compunerea* **lui** f **cu** g **și se notează prin** $g \circ f$ **corespondența** $(A, G \circ F, C)$.

Se observă că operația de compunere a corespondențelor nu a fost definită pentru orice pereche ordonată de corespondențe, ci numai pentru acelea pentru care componenta a treia a primei corespondențe coincide cu prima componentă a celei de-a doua corespondențe.

De exemplu, fie f apartenența punctelor spațiului la dreptele spațiului, iar g incluziunea dreptelor spațiului în planele spațiului. Cu alte cuvinte, A este mulțimea punctelor din spațiu, B este mulțimea dreptelor din spațiu, C este mulțimea planelor din spațiu, F este mulțimea tuturor perechilor de forma (x, d) în care x este un punct, iar d o dreaptă care trece prin x, G este mulțimea tuturor perechilor de forma (d, p), în care d este o dreaptă, iar p un plan care conține dreapta d. Atunci corespondența compusă $g \circ f$ este apartenența punctelor spațiului la planele spațiului, deoarece $G \circ F$ este mulțimea tuturor perechilor de forma (x, p) în care x este un punct din planul p (deoarece x aparține lui p dacă și numai dacă există o dreaptă d a planului p astfel încît d trece prin punctul x).

Vom da un nou exemplu în figura 3.2.1 și figura 3.2.2.

$$f = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 0), (1, 5), (2, 5), (4, 0), (4, 7)\}, \{0, 5, 7\})$$

$$g = (\{0, 5, 7\}, \{(0, b), (5, a), (7, c), (7, b)\}, \{a, b, c\}).$$

Observăm că

$$g \circ f = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, b), (1, a), (2, a), (4, b), (4, c)\}, \{a, b, c\}).$$

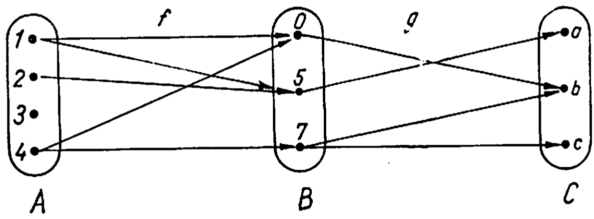
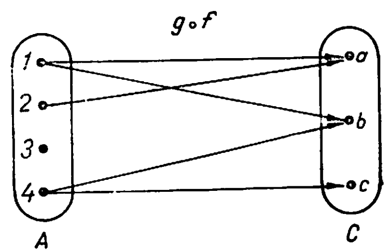


Fig. 3.2.1.

3.2.3. *Lemă.* **Dacă** $F \subset A \times B$, $G \subset B \times C$ **şi** $H \subset C \times D$, **atunci**

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F.$$

Demonstrație. Vom demonstra numai incluziunea $H \circ (G \circ F) \subset (H \circ G) \circ F$. Fie $x \in H \circ (G \circ F)$, deci $x = (a, d)$ şi există c aşa încît $(a, c) \in G \circ F$ şi $(c, d) \in H$. Dar $(a, c) \in G \circ F$ implică existenţa lui b aşa încît $(a, b) \in F$ şi $(b, c) \in G$. Deoarece există c aşa încît $(b, c) \in G$ şi $(c, d) \in H$ rezultă că $(b, d) \in H \circ G$. Deoarece există b aşa încît $(a, b) \in F$ şi $(b, d) \in H \circ G$ rezultă că $x \in (H \circ G) \circ F$.



Eig. 3.2.2.

3.2.4. *Teoremă.* **Compunerea corespondenţelor este** *asociativă*. **În simboluri, date** $f = (A, F, B)$, $g = (B, G, C)$ **şi** $h = (C, H, D)$ **atunci**

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Observăm că operaţia de compunere a corespondenţelor nu este comutativă. Vom da un contraexemplu. Fie $A = \{0, 1\}$, $F = \{(0, 0), (1, 0)\}$ şi $G = \{(0, 0), (0, 1)\}$ ($F \subset A \times A$ şi $G \subset A \times A$). Observăm că $G \circ F = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ şi că $F \circ G = \{(0, 0)\}$, deci $F \circ G \neq G \circ F$. Notînd $f = (A, F, A)$ şi $g = (A, G, A)$ rezultă că $f \circ g \neq g \circ f$.

3.2.5. *Notaţie.* Dacă $F \subset A \times B$ şi $A' \subset A$ vom nota $F|_{A'} = F \cap (A' \times B) = \{(a, b) \in F \mid a \in A'\}$.

3.2.6. *Definiţie.* **Dacă** $f = (A, F, B)$ **este o corespondenţă şi** $A' \subset A$, **corespondenţa** $f \mid_{A'} = (A', F \mid_{A'}, B)$ **se numeşte** *restricţia* **corespondenţei** f **la mulţimea** A'.

Vom da exemple la 4.2.10.

3.3. Inversarea corespondențelor

3.3.1. *Notație*. **Dacă** $F \subset A \times B$, **mulțimea** $\{(b, a) \mid (a, b) \in F\}$ **se numește** *inversa* **lui** F **și se notează cu** F^{-1}.

Observăm că $(b, a) \in F^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in F$.

3.3.2. *Definiție*. **Se numește** *inversa corespondenței* $f = (A, F, B)$ **și se notează cu** f^{-1}, **corespondența** (B, F^{-1}, A).

Observăm că $bf^{-1}a \Leftrightarrow afb$.

Se observă că dacă f este o corespondență de la A la B, atunci f^{-1} este o corespondență de la B la A.

Vom da un exemplu. Fie

$$f = (\{1, 3, 5, 7\}, \{(1, a), (3, x), (7, x), (3, b), (7, c)\}, \{a, b, c, x\}) \text{ (fig. 3.3.1).}$$

Observăm că

$$f^{-1} = (\{a, b, c, x\}, \{(a, 1), (x, 3), (x, 7), (b, 3), (c, 7)\}, \{1, 3, 5, 7\}) \text{ (fig. 3.3.2).}$$

Observăm că pentru a desena pe f^{-1} am inversat sensul săgeților în desenul reprezentînd pe f.

3.3.3. *Lemă*. **Dacă** $F \subset A \times B$ **și** $G \subset B \times C$ **atunci**

$$(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}.$$

Demonstrație. $(G \circ F)^{-1} = \{(c, a) \mid (a, c) \in G \circ F\} =$

$= \{(c, a) \mid (\exists b) \ ((a, b) \in F \ \& \ (b, c) \in G)\} =$

$= \{(c, a) \mid (\exists b) \ ((b, a) \in F^{-1} \ \& \ (c, b) \in G^{-1})\} =$

$= \{(c, a) \mid (\exists b) \ ((c, b) \in G^{-1} \ \& \ (b, a) \in F^{-1})\} = F^{-1} \circ G^{-1}$.

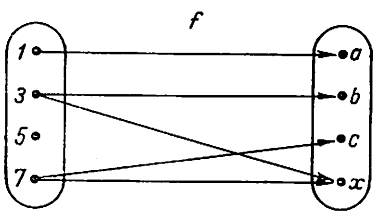


Fig. 3.3.1.

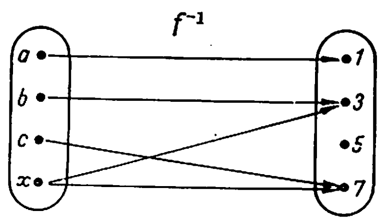


Fig. 3.3.2.

3.3.4. *Teoremă.* **Date fiind corespondențele** $f = (A, F, B)$ **și** $g = (B, G, C)$, **avem** $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

3.4. Exerciții

3.4.1. Dată corespondența $f = (A, F, B)$ și presupunînd că $A' \subset A$ și $B \subset C$, să se arate că:

a) $f \circ \mathbf{I}_{A',A} = f / _{A'}$

b) $\mathbf{I}_{B,C} \circ f = (A, F, C)$.

3.4.2. Dacă f este o corespondență de la A la B, atunci

a) $\mathbf{1}_B \circ f = f$

b) $f \circ \mathbf{1}_A = f$.

3.4.3. Să se arate că $(\mathbf{1}_A)^{-1} = \mathbf{1}_A$.

3.4.4. Să se arate că:

a) dacă $F \subset A \times B$, $G \subset B \times C$ și $H \subset B \times C$, atunci

$$(G \cup H) \circ F = (G \circ F) \cup (H \circ F),$$

b) dacă $F \subset A \times B$, $G \subset A \times B$ și $H \subset B \times C$ atunci

$$H \circ (F \cup G) = (H \circ F) \cup (H \circ G),$$

c) dacă $F \subset A \times B$ și $G \subset A \times B$ atunci

$$(F \cup G)^{-1} = F^{-1} \cup G^{-1},$$

$$(F \cap G)^{-1} = F^{-1} \cap G^{-1}.$$

§ 4. Funcții sau corespondențe funcționale

4.1. Noțiunea de funcție

4.1.1. *Definiție.* **O corespondență** $f = (A, F, B)$ **se va numi** *funcție* **(sau** *corespondență funcțională*) **de la mulțimea** A **la mulțimea** B, **dacă** F **îndeplinește condițiile:**

(P_1) **Pentru orice** $a \in A$, **există un element** $b \in B$ **astfel încît** $(a, b) \in F$ **(condiția de** *existență***)**;

(P_2) **Dacă** $(a, b) \in F$ **și** $(a, b') \in F$ **atunci** $b = b'$ **(condiție de** *unicitate***)**.

Mulțimea A se va numi *domeniul de definiție* al funcției f, iar mulțimea B se va numi *domeniu în care f ia valori* sau *codomeniul* funcției f. Mulțimea F se va numi *graficul* funcției f.

4.1.2. *Notații.* 1) O funcție $f = (A, F, B)$ se mai notează de cele mai multe ori sau f: $A \longrightarrow B$ sau $A \xrightarrow{f} B$. Folosind aceste notații se subînțelege că mulțimea (graficul) F este dat.

2) Dacă f: $A \longrightarrow B$ este o funcție și $a \in A$ atunci elementul $b \in B$ avînd proprietatea că $(a, b) \in F$ se va nota $b = f(a)$ și se va numi *imaginea* elementului a prin funcția f; sau se spune că elementului a îi *corespunde* elementul b prin funcția f.

Dacă $b = f(a)$, se mai spune că a este o *preimagine* a lui b prin funcția f.

4.1.3. *Exemple de funcții.* 1) Fie $A = B = \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ — mulțimea numerelor reale) și F mulțimea definită astfel

$$F = \{(a, b) \mid a \in \mathbf{R} \,\&\, b \in \mathbf{R} \,\&\, b = a^2\}.$$

Se observă imediat că $F \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ și în plus proprietățile (P_1) și (P_2) sînt verificate și prin urmare corespondența $f = (\mathbf{R}, F, \mathbf{R})$ este o funcție.

2) Fie $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{R}_+$, unde $\mathbf{R}_+ = \{a \mid a \in \mathbf{R} \,\&\, a \geqslant 0\}$. Considerăm mulțimea

$$G = \{(a, b) \mid a \in \mathbf{R} \,\&\, b \in \mathbf{R}_+ \,\&\, b = a^2\}$$

Din definiția lui G rezultă că $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ și verifică proprietățile (P_1) și (P_2). Prin urmare, corespondența $g = (\mathbf{R}, G, \mathbf{R}_+)$ este o funcție.

Se constată imediat că funcțiile f și g definite mai sus au același domeniu de definiție; de asemenea $F = G$, adică au același grafic. Cu toate acestea, funcțiile f și g nu sînt egale, avînd codomeniile diferite.

3) Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 7\}$ și $H_1 = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 7)\}$.

Se constată că $H_1 \subset A \times B$ și verifică proprietățile (P_1) și (P_2); prin urmare, tripletul $h_1 = (A, H_1, B)$ este o funcție.

Această funcție se poate reprezenta prin următorul desen (fig. 4.1.1). În acest desen, săgețile indică cine sînt imaginile elementelor din mulțimea A în mulțimea B, prin funcția h_1. Mai precis: imaginea lui 1 este 2, imaginea lui 2 este 2, imaginea lui 3 este 2, imaginea lui 4 este 7.

4) Considerăm tot mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 7\}$. Definim mulțimea H_2

$$H_2 = \{(1, 3), (2, 7), (3, 2), (4, 3)\}.$$

Mulţimea H_2 este o submulţime a lui $A \times B$ şi verifică condiţiile (P_1) şi (P_2), deci $h_2 = (A, H_2, B)$ este o funcţie. Desenul care reprezintă această funcţie este figura 4.1.2, unde săgeţile indică imaginile elementelor lui A în mulţimea B prin funcţia h_2.

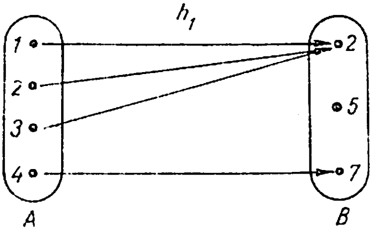


Fig. 4.1.1.

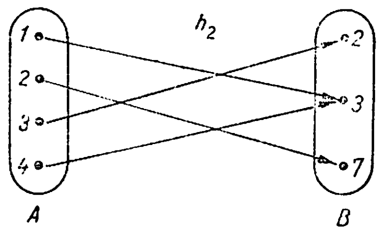


Fig. 4.1.2.

În exemplele 1) şi 2), pentru a defini pe F şi G a fost suficient să precizăm regula (legea) după care construim perechile de elemente (a, b). Mai precis, în ambele cazuri legea era $b = a^2$.

În exemplele 3) şi 4) pentru a defini pe H_1 şi H_2 a fost necesar să enumerăm efectiv elementele acestor două mulţimi. În aceste două exemple nu avem o regulă evidentă de a defini mulţimile H_1 şi H_2.

5) Fie $A = \mathbf{R}_+$ şi $B = \mathbf{R}$. Considerăm mulţimea $L = \{(a, b) / a \in \mathbf{R}_+ \;\&\; b \in \mathbf{R} \;\&\; b^2 = a\}$. Cum $L \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ tripletul $l = (A, L, B)$ este o corespondenţă. În schimb L nu verifică condiţia (P_2) deoarece pentru un element $a \in \mathbf{R}_+$ cu $a \neq 0$ există două elemente $b_1 = \sqrt{a}$ şi $b_2 = -\sqrt{a}$ astfel încît $(a, b_1) \in L$ şi $(a, b_2) \in L$.

În consecinţă $l = (\mathbf{R}_+, L, \mathbf{R})$ nu este o funcţie.

6) Fie $A = \mathbf{R}$ şi $B = \mathbf{R}$. Considerăm mulţimea

$$M = \{(a, b) \mid a \in \mathbf{R} \;\&\; b \in \mathbf{R} \;\&\; b^2 = a\}.$$

Cum $M \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, tripletul $m = (\mathbf{R}, M, \mathbf{R})$ este o corespondenţă.

Dar se observă că pentru $a \in \mathbf{R}$, $a < 0$, nu există nici un număr real $b \in \mathbf{R}$ astfel încît $b^2 = a$. Deci M nu verifică condiţia (P_1) şi prin urmare corespondenţa m nu este o funcţie.

4.2. Proprietăţi generale ale funcţiilor

4.2.1. *Propoziţie.* **Dacă $f = (A, F, B)$ este o funcţie, atunci**

$$F = \{(a, b) \mid a \in A \;\&\; b \in B \;\&\; b = f(a)\}.$$

Demonstrație. Notăm cu $F' = \{(a, b) \mid a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ b = f(a)\}$. Dacă $(a, b) \in F'$ atunci $b = f(a)$ și deci $(a, b) \in F$. Prin urmare $F' \subseteq F$.

Fie $(a, b) \in F$, atunci conform notației 4.1.2 rezultă că $b = f(a)$ și deci $(a, b) \in F'$. Deci are loc și incluziunea $F \subseteq F'$ prin urmare egalitatea $F = F'$. Din această propoziție tragem concluzia că pentru a defini funcția f este suficient a da domeniu și codomeniul și de a defini „egalitatea“ $b = f(a)$, adică regula după care fiecărui element $a \in A$ i se asociază elementul $b \in B$.

4.2.2. *Propoziție*. **Fie A o mulțime.** *Corespondența identică* 1_A *(vezi* 3.1.2. c) **este o funcție. În plus $1_A(a) = a$ oricare ar fi $a \in A$.**

Demonstrație. Graficul acestei corespondențe este diagonala Δ_A a mulțimii $A \times A$ (vezi 3.1.2. c).

Trebuie să dovedim că Δ_A verifică condițiile (P_1) și (P_2). Dacă $a \in A$ atunci există $b \in A$ astfel încît $(a, b) \in \Delta_A$ și anume $b = a$. Deci Δ_A verifică (P_1).

Fie $(a, b) \in \Delta_A$ și $(a, b') \in \Delta_A$. Atunci $b = a$ și $b' = a$ deci $b = b'$ și prin urmare Δ_A verifică și (P_2).

Este evident că $1_A(a) = a$ oricare ar fi $a \in A$.

4.2.3. *Definiție*. **Corespondența identică 1_A a mulțimii A o vom numi** *funcția identică* **a mulțimii A.**

4.2.4. *Propoziție*. **Fie A și B două mulțimi astfel încît $A \subset B$.** Corespondența incluziune I_{AB} (vezi 3.1.2. c) este o funcție.

În plus, dacă $a \in A$, atunci, $I_{AB}(a) = a$.

Demonstrație. Din definiția lui I_{AB} (vezi 3.1.2. c) graficul acestei corespondențe este Δ_A. Dar Δ_A verifică (P_1) și (P_2) (vezi 4.2.2) atunci I_{AB} este o funcție.

Este evident că dacă $a \in A$, are loc egalitatea $I_{AB}(a) = a$.

4.2.5. *Definiție*. **Corespondența I_{AB} o vom numi** *funcția incluziune* **a mulțimii A în mulțimea B.**

4.2.6. *Observații*. 1) Dacă $A = B$ atunci funcția incluziune I_{AB} coincide cu funcția identică 1_A a mulțimii A.

2) Atragem atenția că propoziția 4.2.4 se menține și în cazul particular $A = \emptyset$.

Cînd $A = B = \emptyset$, atunci funcția $I_{\emptyset,\emptyset} = 1_\emptyset$ se numește *funcția vidă*.

4.2.7. *Propoziție*. **Fie A și B două mulțimi și $A \times B$ produsul cartezian al lor. Corespondența de la $A \times B$ la A (la B) care asociază fie-**

cărei perechi (a, b) prima sa componentă a (respectiv a doua sa componentă b) este o funcţie $p_A: A \times B \to A$ (respectiv este o funcţie p_B: $: A \times B \to B$).

Demonstraţie. Vom arăta că p_A este o funcţie, deoarece în mod cu totul analog se arată şi pentru p_B.

Dacă notăm cu F graficul corespondenţei p_A, atunci din modul cum este definită p_A rezultă

$$F = \{((a, b), a) \mid a \in A\}.$$

Este evident că F satisface (P_1). Fie $(x, y) \in F$ şi $(x, y') \in F$. Atunci $x = (a, b)$ unde $a \in A$ şi $b \in B$ şi deci $y = b$ şi $y' = b$ de unde obţinem $y = y'$. Prin urmare F verifică şi (P_2).

4.2.8. *Definiţie.* **Funcţiile p_A şi p_B se numesc *proiecţiile* produsului cartezian $A \times B$ pe mulţimea A, respectiv B.**

Se va scrie $p_A(a, b)$ respectiv $p_B(a, b)$ în loc de $p_A((a, b))$ respectiv $p_B((a, b))$.

Din definiţia funcţiilor p_A, p_B rezultă că $p_A(a, b) = a, p_B(a, b) = b$.

4.2.9. *Propoziţie.* **Fie o funcţie $f : A \to B$ şi $A' \subset A$ o submulţime a lui A. Corespondenţa $f|_{A'}$ de la A' la B care asociază fiecărui element $a \in A'$, elementul $f(a)$, este o funcţie.**

Demonstraţie. Dacă notăm cu F graficul funcţiei f şi $F|_{A'}$ graficul corespondenţei $f|_{A'}$ atunci din definiţia lui $f|_{A'}$ rezultă:

$$F|_{A'} = \{(a, b) \mid a \in A' \,\&\, b \in B \,\&\, b = f(a)\}.$$

Este clar că $F|_{A'} \subset F$.

Cum F verifică (P_2) rezultă că $F|_{A'}$ verifică (P_2). Din definiţia lui $F|_{A'}$ rezultă că verifică şi (P_1).

4.2.10. *Definiţie.* **Funcţia $f|_{A'}$ se numeşte *restricţia* funcţiei f la mulţimea A'.**

Este clar că $f|_{A'}(a) = f(a)$ oricare ar fi $a \in A'$.

Exemple. a) Funcţiile trigonometrice sînt funcţii periodice; pentru cunoaşterea unei funcţii trigonometrice este suficient să cunoaştem restricţia ei la o perioadă. De exemplu, $\sin: \mathbf{R} \to [-1, 1]$ este o funcţie determinată de restricţia ei $\sin|_{[0,2\pi]} : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$, datorită formulei $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$.

b) Dacă X este o mulţime iar A o submulţime a lui X, atunci restricţia identităţii $\mathbf{1}_X : X \to X$ la submulţimea A este funcţia incluziune $\mathbf{I}_{AX} : A \to X$.

4.2.11. *Propoziție.* **Fie A și B două mulțimi unde $B \neq \emptyset$ și b_0 un element din B. Corespondența f_{b_0} de la A la B care asociază fiecărui element $a \in A$ elementul b_0 este o funcție.**

Demonstrație. Dacă notăm cu F graficul corespondenței f_{b_0} atunci

$$F = \{(a, b_0) \mid a \in A\}.$$

Este clar din definiție că F verifică (P_1) și (P_2).

4.2.12. *Definiție* f_{b_0} **se numește** *funcția constantă* **asociată elementului b_0.**

Este clar că $f_{b_0}(a) = b_0$ oricare ar fi $a \in A$.

4.3. Compunerea funcțiilor. Funcția inversă

4.3.1. *Teoremă.* **Dacă $f = (A, F, B)$ și $g = (B, G, C)$ sînt două funcții, atunci corespondența $g \circ f = (A, G \circ F, C)$ este o funcție.**

În plus $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ oricare ar fi $a \in A$.

Demonstrație. Trebuie dovedit că mulțimea $G \circ F$ verifică condițiile (P_1) și (P_2) din definiția 4.1.1.

Fie $a \in A$. Deoarece F verifică (P_1) atunci există un $b \in B$ astfel încît $(a, b) \in F$.

Pentru elementul $b \in B$, deoarece G verifică (P_1), rezultă că există $c \in C$ astfel încît $(b, c) \in G$.

Din definiția 3.2.1 și din relațiile $(a, b) \in F$ și $(b, c) \in G$ se obține că $(a, c) \in G \circ F$ și prin urmare $G \circ F$ verifică (P_1).

Fie acum $(a, c) \in G \circ F$ și $(a, c') \in G \circ F$.

Din relația $(a, c) \in G \circ F$ rezultă că există $b \in B$ astfel încît $(a, b) \in F$ și $(b, c) \in G$.

Din relația $(a, c') \in G \circ F$ rezultă că există $b' \in B$ astfel încît $(a, b') \in F$ și $(b', c') \in G$.

Din relațiile $(a, b) \in F$, $(a, b') \in F$ și din faptul că F verifică (P_2) obținem $b = b'$.

Atunci relațiile $(b, c) \in G$ și $(b', c') \in G$ se înlocuiesc prin relațiile $(b, c) \in G$ și $(b, c') \in G$.

Deoarece G verifică (P_2) avem $c = c'$ și deci $G \circ F$ verifică (P_2).

Este clar că $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ oricare ar fi $a \in A$.

Teorema 4.3.1 justifică următoarea:

Notație. Compunerea $g \circ f$ a funcțiilor f și g se mai poate nota, mai simplu, cu gf.

Ca o consecință a acestei teoreme și a teoremei 3.2.4 rezultă:

4.3.2. *Corolar.* **Dacă $f = (A, F, B)$, $g = (B, G, C)$ și $h = (C, H, D)$ sînt trei funcții, atunci**

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, **cu alte cuvinte compunerea funcţiilor este** *asociativă.*

4.3.3. *Teoremă.* **Dacă** $f = (A, F, B)$ **este o funcţie, atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:**

1) **Corespondenţa** $f^{-1} = (B, F^{-1}, A)$ **este o funcţie:**
2) $f \circ f^{-1} = 1_B$ și $f^{-1} \circ f = 1_A$.

Demonstraţie. Vom dovedi mai întîi că 1) $\Rightarrow$ 2).

Este clar că $f \circ f^{-1} = (B, F \circ F^{-1}, B)$ şi $f^{-1} \circ f = (A, F^{-1} \circ F, A)$. Pentru a arăta că $f \circ f^{-1} = 1_B$ respectiv $f^{-1} \circ f = 1_A$ este suficient a arăta $F \circ F^{-1} = \Delta_B$ respectiv $F^{-1} \circ F = \Delta_A$.

Să dovedim egalitatea $F^{-1} \circ F = \Delta_A$.

Fie $(a, c) \in F^{-1} \circ F$; atunci există $b \in B$ astfel încît $(a, b) \in F$ şi $(b, c) \in F^{-1}$. De aici se deduce $(b, a) \in F^{-1}$ şi $(b, c) \in F^{-1}$ şi cum F^{-1} verifică (P_2) (f^{-1} este funcţie) avem $a = c$ şi deci $(a, c) \in \Delta_A$. Deci $F^{-1} \circ F \subset \Delta_A$.

Invers fie $(a, a) \in \Delta_A$. Cum F verifică (P_1) atunci există $b \in B$ astfel încît $(a, b) \in F$ şi deci $(b, a) \in F^{-1}$. Din relaţiile $(a, b) \in F$ şi $(b, a) \in F^{-1}$ obţinem că $(a, a) \in F^{-1} \circ F$ şi prin urmare $\Delta_A \subset F^{-1} \circ F$.

Să dovedim şi egalitatea $F \circ F^{-1} = \Delta_B$.

Fie $(b, c) \in F \circ F^{-1}$, atunci există $a \in A$ astfel încît $(b, a) \in F^{-1}$ şi $(a, c) \in F$. Dei aici se deduce că $(a, c) \in F$ şi $(a, b) \in F$. Cum F verifică (P_2) atunci $b = c$ şi deci $(b, c) \in \Delta_B$, adică $F \circ F^{-1} \subset \Delta_B$.

Invers, fie $(b, b) \in \Delta_B$. Cum f^{-1} este funcţie, F^{-1} verifică (P_1) şi deci există $a \in A$ astfel încît $(b, a) \in F^{-1}$.

Din relaţiile $(b, a) \in F^{-1}$ şi $(a, b) \in F$ se deduce că $(b, b) \in F \circ F^{-1}$ de unde $\Delta_B \subset F \circ F^{-1}$.

Să arătăm că 2) $\Rightarrow$ 1).

Trebuie dovedit că F^{-1} verifică (P_1) şi (P_2).

Fie $b \in B$, atunci din egalitatea $1_B = f \circ f^{-1}$ se deduce că $(b, b) \in F \circ F^{-1}$. De aici se deduce că există $a \in A$ astfel încît $(b, a) \in F^{-1}$ şi $(a, b) \in F$. Relaţia $(b, a) \in F^{-1}$ ne arată că F^{-1} verifică (P_1).

Fie acum $(b, a) \in F^{-1}$ şi $(b, a') \in F^{-1}$. De aici obţinem relaţiile $(a, b) \in F$ şi $(b, a') \in F^{-1}$, de unde $(a, a') \in F^{-1} \circ F$.

Din egalitatea $F^{-1} \circ F = \Delta_A$ obţinem $(a, a') \in \Delta_A$ şi deci $a = a'$. Deci F^{-1} verifică şi (P_2).

4.3.4. *Exemple.* 1) Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie definită prin egalitatea $f(x) = x^2$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ şi $g: \mathbf{R} \to [-1, 1]$ o funcţie definită prin egalitatea $g(x) = \sin x$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

Graficele celor două funcţii sînt $F = \{(x, x^2) / x \in \mathbf{R}\}$ şi respectiv $G = \{(x, \sin x) / x \in \mathbf{R}\}$.

Compunerea celor două funcţii este tot o funcţie (cf. teoremei 4.3.1 şi anume: $g \circ f: \mathbf{R} \to [-1, 1]$ unde $(g \circ f)(x) = \sin (x^2)$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

2) Fie $\mathbf{R}_+$ mulţimea numerelor reale nenegative şi f: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ definită de egalitatea $f(x) = x^4$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}_+$. Graficul acestei funcţii este $F = \{(x,x^4)/x \in \mathbf{R}_+\}$ şi deci putem scrie $f = (\mathbf{R}_+, F, \mathbf{R}_+)$.

Corespondenţa inversă $f^{-1} = (\mathbf{R}_+, F^{-1}, \mathbf{R}_+)$ unde $F^{-1} = \{(x^4, x)/x \in \in \mathbf{R}_+\}$ verifică condiţiile (P_1) şi (P_2) şi deci f^{-1} este o funcţie.

3) Fie g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ funcţia definită de egalitatea: $g(x) = x^4$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

Graficul acestei funcţii este $G = \{(x, x^4)/x \in \mathbf{R}\}$; deci putem scrie că $g = (\mathbf{R}, G, \mathbf{R}_+)$.

Corespondenţa inversă $g^{-1} = (\mathbf{R}_+, G^{-1}, \mathbf{R})$, unde $G^{-1} = \{(x^4, x)/x \in \in \mathbf{R}\}$, nu verifică ($P_2$).

4.4. Imaginea directă a unei mulţimi. Imaginea inversă a unei mulţimi

Începînd de aici încolo vom folosi pentru funcţii, notaţiile $f: X \to \to Y$ sau $X \xrightarrow{f} Y$, notînd cu A, A' etc. respectiv B, B',... submulţimile mulţimii X, respectiv submulţimile mulţimii Y.

4.4.1. *Definiţie.* **Fie f: $X \to Y$ o funcţie şi $A \subset X$. Mulţimea $f(A) = = \{y/(\exists x)\ (x \in A\ \&\ y = f(x))\}$ se numeşte** *imaginea directă* **a submulţimii A prin funcţia f, sau pur şi simplu imaginea lui A prin f. De multe ori notăm mai simplu $f(A) = \{f(x)/x \in A\}$.**

4.4.2. *Exemple.* 1) Fie funcţia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin egalitatea $f(x) = x + 3$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ şi fie $A = [-1,1]$. Atunci $f(A) = = [2,4]$.

2) Fie f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcţia definită prin egalitatea $f(x) = |x|$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

Dacă $A = (-2,2)$ atunci $f(A) = [0,2)$.

4.4.3. *Propoziţie.* **Fie f:$X \to Y$ o funcţie; atunci următoarele afirmaţii sînt adevărate:**

1) $f(\emptyset) = \emptyset$.

2) **Dacă A şi A' sînt două submulţimi ale lui X atunci**

a) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$

b) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$

c) $A \subset A'$ **implică** $f(A) \subset f(A')$.

3) $f(X) = \{y \mid (\exists x)(x \in X$ şi $y = f(x))\}$.

Demonstrație. 1) Dacă $f(\emptyset) \neq \emptyset$ atunci există $y \in Y$ astfel încît $y \in \in f(\emptyset)$, de unde rezultă că există $x \in \emptyset$ astfel încît $y = f(x)$. Dar relația $x \in \emptyset$ este o contradicție și deci $f(\emptyset) = \emptyset$.

2) a) fie $y \in f(A \cup A')$, atunci există $x \in A \cup A'$ astfel încît $y = = f(x)$. Dar relația $x \in A \cup A'$ înseamnă că $x \in A$ sau $x \in A'$. Dacă $x \in A$ atunci $y \in f(A)$; dacă $x \in A'$ atunci $y \in f(A')$ și deci $y \in f(A) \cup \cup f(A')$. Aceasta înseamnă că $f(A \cup A') \subset f(A) \cup f(A')$.

Invers, fie $y \in f(A) \cup f(A')$. Deci aici obținem $y \in f(A)$ sau $y \in f(A')$. Relația $y \in f(A)$ înseamnă că există $x \in A$ pentru care $y = f(x)$. Dar cum din $x \in A$ rezultă $x \in A \cup A'$; atunci $y \in f(A \cup A')$.

În mod analog din $y \in f(A')$ se obține că $y \in f(A \cup A')$. Deci $f(A) \cup \cup f(A') \subset f(A \cup A')$ și în concluzie $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

b) Fie $y \in f(A \cap A')$; atunci există $x \in A \cap A'$ astfel încît $y = = f(x)$. Din relația $x \in A \cap A'$ obținem că $x \in A$ și $x \in A'$ și deci $y \in \in f(A)$ și $y \in f(A')$, de unde rezultă $y \in f(A) \cap f(A')$ adică incluziunea $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

c) Dacă $y \in f(A)$ atunci există $x \in A$ pentru care $y = f(x)$. Din incluziunea $A \subset A'$ rezultă $x \in A'$ și deci $y \in f(A')$, de une $f(A) \subset \subset f(A')$.

3) Rezultă din definiția 4.3.1.

4.4.4. *Definiție.* **Mulțimea $f(X)$ se numește *imaginea* funcției f sau *mulțimea valorilor* funcției f și se mai notează cu** Im f.

4.4.5. *Exemplu*: Considerăm funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de egalitatea $f(x) = x^2 - 2x + 3$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Fie $A = [0, 3]$. Să determinăm $f(A)$.

Rezolvare. Funcția f este descrescătoare pe semidreapta $(-\infty, 1]$ și crescătoare pe $[1, +\infty)$.

Notăm

$$A_1 = A \cap (-\infty, 1] = [0, 1] \text{ și}$$

$$A_2 = A \cap [1, \infty) = [1, 3].$$

Atunci, conform propoziției 4.3.3, avem $f(A) = f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup \cup f(A_2)$.

Dar

$$f(A_1) = [f(1), f(0)] = [2, 3] \text{ și}$$

$$f(A_2) = [f(1), f(3)] = [2, 6].$$

Deci

$$f(A) = [2, 3] \cup [2, 6] = [2, 6].$$

4.4.6. *Definiție*. **Fie** $f: X \to Y$ **o funcție și** $B \subset Y$.

Mulțimea $f^{-1}(B) = \{x \mid x \in X \,\&\, f(x) \in B\}$ **se numește** *imaginea inversă* **a submulțimii** B **a lui** Y **prin funcția** f **sau** *preimaginea* **lui** B **prin** f.

4.4.7. *Exemple*. 1) Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin egalitatea $f(x) = x^2 + 4x - 1$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

Dacă $B = [-1, 1]$, să se determine $f^{-1}(B)$.

Rezolvare. $f^{-1}(B) = \{x \mid x \in \mathbf{R} \,\&\, f(x) \in [-1, 1]\} = \{x \mid x \in \mathbf{R} \,\&\, -1 \leqslant x^2 + 4x - 1 \leqslant 1\}$.

Rezolvînd dubla inegalitate, obținem că $f^{-1}(B) = [-2 - \sqrt{6}, -4] \cup [0, -2 + \sqrt{6}]$.

2) Fie funcția $f: \mathbf{R} \to [-1, 1]$ definită prin egalitatea $f(x) = \sin x$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

Dacă $B = [0,1]$ să se determine $f^{-1}(B)$.

Rezolvare. $f^{-1}(B) = \{x \mid x \in \mathbf{R} \,\&\, f(x) \in B\} = \{x \mid x \in \mathbf{R} \,\&\, 0 \leqslant \sin x \leqslant 1\}$.

Rezolvînd dubla inegalitate, obținem:

$$f^{-1}(B) = \{x \mid (\exists k)(k \in \mathbf{Z} \,\&\, 2k\pi \leqslant x \leqslant (2k + 1)\pi)\}.$$

4.4.8. *Propoziție*. **Fie** $f: X \to Y$ **o funcție. Atunci următoarele afirmații sînt adevărate:**

1) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

2) **Dacă** B, B' **sînt două submulțimi a lui** Y, **atunci**

a) **Dacă** $B \subset B'$ **rezultă** $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$

b) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

c) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

3) $f^{-1}(Y) = X$.

Demonstrație. 1) Dacă $f^{-1}(\emptyset) \neq \emptyset$ atunci există $x \in X$ și $x \in f^{-1}(\emptyset)$; de unde rezultă $f(x) \in \emptyset$, contradicție. Prin urmare $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

2) *a)* fie $x \in f^{-1}(B)$, atunci $f(x) \in B$. Cum $B \subset B'$, rezultă $f(x) \in B'$, de unde $x \in f^{-1}(B')$ și deci $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

b) Cum $B \subset B \cup B'$ și $B' \subset B \cup B'$, din 2) *a)* rezultă $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B \cup B')$și $f(B') \subset f(B \cup B')$ de unde $f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \subset f^{-1}(B \cup B')$.

Invers, fie $x \in f^{-1}(B \cup B')$, atunci $f(x) \in B \cup B'$ de unde obținem $f(x) \in B$ sau $f(x) \in B'$, ceea ce implică $x \in f^{-1}(B)$ sau $x \in f^{-1}(B')$ și prin urmare $x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$, prin urmare $f^{-1}(B \cup B') \subset f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

c) Cum $B \cap B' \subset B$ şi $B \cap B' \subset B'$, aplicînd 2) a) rezultă $f^{-1}(B \cap B') \subset f^{-1}(B)$ şi $f^{-1}(B \cap B') \subset f^{-1}(B')$, de unde obţinem că $f^{-1}(B \cap B') \subset f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

Fie acum $x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$. Obţinem relaţiile $x \in f^{-1}(B)$ şi $x \in f^{-1}(B')$ de unde $f(x) \in B$ şi $f(x) \in B'$, deci $f(x) \in B \cap B'$, în consecinţă $x \in f^{-1}(B \cap B')$. Deci rezultă şi incluziunea $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B') \subset f^{-1}(B \cap B')$.

3) Cum $f^{-1}(Y) \subset X$, trebuie arătat că $X \subset f^{-1}(Y)$, relaţie ce rezultă direct din definiţia 4.4.6.

4.4.9. *Propoziţie*. **Fie** $f\colon X \to Y$ **şi** $g\colon Y \to Z$ **două funcţii şi** $A \subset X$; **atunci are loc egalitatea**

$$(gf)(A) = g(f(A)).$$

Demonstraţie. Trebuie să probăm incluziunile $(gf)(A) \subset g(f(A))$ şi $g(f(A)) \subset (gf)(A)$.

Pentru prima incluziune fie $z \in (gf)(A)$; atunci există $x \in A$ astfel încît $z = (f(gf)(x)$, egalitate ce se mai scrie $z = g(f(x))$. Cum $f(x) \in f(A)$, rezultă $z \in g(A))$, deci are loc incluziunea $(gf)(A) \subset g(f(A))$.

Pentru cealaltă incluziune fie $z \in g(f(A))$. Atunci există $y \in f(A)$ astfel încît $z = g(y)$. Dar pentru $y \in f(A)$ există $x \in A$ astfel încît $y = f(x)$. Deci $z = g(f(x)) = (gf)(x)$ şi prin urmare $z \in (gf)(A)$.

4.4.10. *Exemplu*. Fie funcţia $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin egalitatea $h(x) = x^4 - 2x^2 + 7$. Considerăm mulţimea $A = [0,2]$. Să se determine $h(A)$.

Rezolvare. Considerăm funcţiile $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin egalităţile $f(x) = x^2$ respectiv $g(x) = x^2 - 2x + 7$. Atunci se observă imediat că $h = gf$. Deci din propoziţia 4.4.9 rezultă că $h(A) = g(f(A))$. Dar $f(A) = [0,4]$ şi $g([0,4]) = g([0,1] \cup [1,4]) = g([0,1]) \cup g([1,4]) = [6,7] \cup [6,15] = [6,15]$. Deci $h(A) = [6,15]$.

4.4. 11. *Propoziţie*. **Fie** $f\colon X \to Y$ **şi** $g\colon Y \to Z$ **două funcţii şi** $C \subset Z$; **atunci are loc egalitatea**

$$(gf)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)).$$

Demonstraţie. Trebuie arătat că au loc incluziunile $(gf)^{-1}(C) \subset \subset f^{-1}(g^{-1}(C))$ şi $f^{-1}(g^{-1}(C)) \subset (gf)^{-1}(C)$. Pentru prima incluziune, fie $x \in (gf)^{-1}(C)$. Atunci $(gf)(x) \in C$, de unde $g(f(x)) \in C$; din această relaţie se deduce că $f(x) \in g^{-1}(C)$ şi deci $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$. Pentru cea de-a doua incluziune considerăm $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$. Obţinem relaţia $f(x) \in g^{-1}(C)$, de unde $g(f(x)) \in C$, deci $(gf)(x) \in C$ şi prin urmare $x \in (gf)^{-1}(C)$ şi deci incluziunea $f^{-1}(g^{-1}(C)) \subset (gf)^{-1}(C)$ este verificată.

4.4.12. *Observaţii.* Fie $f: X \to Y$ o funcţie, al cărei grafic este mulţimea F. Dacă $B \subset Y$ este o submulţime a lui Y noi am introdus în 4.4.6 noţiunea de imagine inversă a mulţimii B prin funcţia f, imagine pe care am notat-o cu $f^{-1}(B)$. Trebuie făcută distincţia între $f^{-1}(B)$ şi f^{-1}: prima înseamnă o mulţime a cărei definiţie este dată în 4.4.6, iar cea de-a doua, f^{-1}, înseamnă corespondenţa inversă $f^{-1} = (Y,F^{-1},X)$.

De asemenea nu trebuie făcută greşeala că $f^{-1}(B)$ înseamnă imaginea directă a lui B prin corespondenţa f^{-1}, deoarece noţiunea de imagine directă a unei mulţimi printr-o corespondenţă oarecare, nu s-a definit. S-a definit numai imaginea directă printr-o funcţie, care este un caz particular de corespondenţă.

Este în schimb adevărată următoarea afirmaţie.

Dacă $f: X \to Y$ este o funcţie astfel încît corespondenţa inversă f^{-1} să fie funcţie, atunci f^{-1} (B) dată prin definiţia 4.4.6 este egală cu imaginea directă a mulţimii B prin funcţia f^{-1}

Într-adevăr, fie x un element care aparţine imaginii directe a mulţimii B prin funcţia f^{-1}; atunci există $y \in B$ astfel încît $x = f^{-1}(y)$. Din 4.3.3 rezultă că $f(x) = y$ şi deci $x \in f^{-1}(B)$ (imaginea inversă a mulţimii B prin funcţia f).

Invers, fie $x \in f^{-1}(B)$; atunci $f(x) \in B$. Din 4.3.3 rezultă că $x = f^{-1}(f(x))$ aparţine imaginii directe a mulţimii B prin funcţia f^{-1} (Vezi şi 4.5).

4.5. Funcţii injective, surjective, bijective

4.5.1. *Definiţie.* **Spunem că o funcţie $f: X \to Y$ este *funcţie injectivă* sau *injecţie* dacă pentru orice două elemente $x \in X$ $x' \in X$ astfel încît $x \neq x'$ rezultă $f(x) \neq f(x')$** (altfel spus, f este injectivă dacă duce elemente distincte din X în elemente distincte din Y).

4.5.2. *Observaţie.* Fie $f: X \to Y$ o funcţie. Atunci f este injectivă dacă şi numai dacă oricare ar fi $x, x' \in X$ egalitatea $f(x) = f(x')$ implică $x = x'$.

4.5.3. *Exemple.* a) Fie funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin egalitatea $f(x) = ax + b$ unde a şi b sînt două numere reale date şi $a \neq 0$. Această funcţie este injectivă. Într-adevăr, dacă $f(x) = f(x')$ atunci $ax + b = ax' + b$ de unde $ax = ax'$, deci $x = x'$.

b) Fie funcţia $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, definită prin egalitatea $f(x) = x^{2k}$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}_+$ şi $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Această funcţie este injectivă. Într-adevăr egalitatea $f(x) = f(x')$ implică $x^{2k} = x'^{2k}$, de unde $x = x'$ deoarece x şi x' sînt numere reale nenegative.

c) Considerăm funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin egalitatea $f(x) = x^{2k+1}$ $(k \in \mathbf{N})$.

Această funcţie este injectivă deoarece din egalitatea $f(x) = f(x')$ rezultă $x^{2k+1} = x'^{2k+1}$ care implică $x = x'$.

d) Fie funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ definită prin egalitatea $f(x) = x^2$.

Deoarece $(-x)^2 = x^2$, această funcţie nu este injectivă.

e) Funcţia $f: [0,2\pi] \to [-1,1]$ dată prin egalitatea $f(x) = \sin x$ nu este injectivă, deoarece $f(0) = f(2\pi) = 0$.

4.5.4. *Propoziţie.* **Fie $f: X \to Y$ şi $g: Y \to Z$ două funcţii, atunci următoarele afirmaţii sînt adevărate:**

1) **dacă f şi g sînt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă;**

2) **dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă.**

Demonstraţie. 1) Fie $x, x' \in X$ două elemente oarecare, astfel încît $x \neq x'$. Cum f este injectivă, rezultă $f(x) \neq f(x')$, cum g este injectivă, rezultă că $g(f(x)) \neq g(f(x'))$, sau altfel scris $(gf)(x) \neq (gf)(x')$ ceea ce înseamnă că gf este injectivă.

2) Considerăm două elemente oarecare $x, x' \in X$, cu proprietatea $x \neq x'$. Cum gf este injectivă, obţinem relaţia $(gf)(x) \neq (gf)(x')$. Dacă $f(x) = f(x')$ atunci am obţine $g(f(x)) = g(f(x'))$ sau altfel scris $(gf)(x) = (gf)(x')$, care este o contradicţie. Prin urmare trebuie ca $f(x) \neq f(x')$, ceea ce arată că f este injectivă.

4.5.5. *Definiţie.* **Spunem că o funcţie $f: X \to Y$ este** *funcţie surjectivă* **sau** *surjecţie* **dacă pentru orice element $y \in Y$, există un element $x \in X$, astfel încît** $y = f(x)$. (Altfel spus f este surjectivă, dacă orice element din mulţimea Y este imaginea unui element din mulţimea X; sau încă se mai spune că orice element din mulţimea Y are o *preimagine* în mulţimea X.)

4.5.6. *Observaţie.* O funcţie $f: X \to Y$ este surjectivă dacă şi numai dacă $f(X) = Y$.

Într-adevăr, dacă f este surjectivă, atunci din definiţia 4.5.5. rezultă $Y \subset f(X)$. Cum incluziunea $f(X) \subset Y$ are loc pentru orice funcţie atunci are loc egalitatea $f(X) = Y$.

Invers, dacă are loc egalitatea $f(X) = Y$, atunci după definiția 4.5.5 și propoziția 4.4.3 rezultă că f este surjectivă.

4.5.7. *Exemple.* *a)* Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin egalitatea $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, este surjectivă.

Într-adevăr dacă $y \in \mathbf{R}$, atunci ecuația $ax + b = y$ are soluția $x = \frac{y-b}{a}$. Atunci $f\left(\frac{y-b}{a}\right) = y$.

b) Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită de egalitatea $f(x) = x^{2k+1}$ $(k \in \mathbf{N})$ este surjectivă.

Într-adevăr, dacă $y \in \mathbf{R}$ este oarecare, atunci $f(\sqrt[2k+1]{y}) = y$ și deci f este surjectivă.

c) Să considerăm funcția $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ definită prin egalitatea $f(x) = x^{2k}(k \in \mathbf{N} \setminus \{0\})$; aceasta nu este surjectivă. Într-adevăr, dacă $y \in \mathbf{R}$, $y < 0$, atunci nu există nici un număr $x \in \mathbf{R}_+$ astfel încît $f(x) = y$. Pe de altă parte (4.5.3. b), această funcție este injectivă.

d) Fie funcția $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, definită prin egalitatea $f(x) = x + 3$. Această funcție nu este surjectivă deoarece, pentru $y = 2$ nu există nici un $x \in \mathbf{N}$ astfel încît $f(x) = x + 3 = 2$.

4.5.8. *Propoziție.* **Fie $f: X \to Y$ și $g: Y \to Z$ două funcții; atunci următoarele afirmații sînt adevărate.**

1. **Dacă g și f sînt surjective, atunci gf este surjectivă.**
2. **Dacă gf este surjectivă, atunci g este surjectivă.**

Demonstrație. 1. Cum f este surjectivă, deducem $f(X) = Y$, (observația 4.5.6); cum g este surjectivă, rezultă $g(Y) = Z$; de unde rezultă $g(Y) = g(f(X)) = Z$, din propoziția 4.4.9 deducem că $(gf)(X) = Z$, și folosind din nou observația 4.5.6 deducem că gf este surjectivă.

2. Fie z un element oricare din Z. Cum gf este surjectivă, există $x \in X$ astfel încît $z = (gf)(x)$; notînd $y = f(x)$ atunci obținem că $z = g(y)$ ceea ce ne arată că g este surjectivă.

4.5.9. *Definiție.* **O funcție $f: X \to Y$ care este în același timp și injectivă și surjectivă se numește *funcție bijectivă* sau *bijecție*.**

4.5.10. *Exemple.* *a)* Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită de egalitatea $f(x) = x^{2k+1}$ $(k \in \mathbf{N})$ este o funcție bijectivă. Aceasta rezultă din 4.5.3. c) și 4.5.7. b).

b) Considerăm funcția $f: \mathbf{R}_+ \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, dată de egalitatea $f(x) = \log_a x (a > 0 \ \& \ a \neq 1)$. Folosind proprietățile logaritmilor se deduce imediat că f este injectivă și surjectivă, deci bijectivă.

c) Funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$ definită de egalitatea $f(x) = a^x (a > 0 \ \& \ a \neq 1)$ este de asemenea bijectivă.

d) Funcţia $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ definită prin egalitatea $f(x) = \sqrt{x}$ este injectivă, dar nu este surjectivă, deci nu este bijectivă.

e) Funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ definită prin egalitatea $f(x) = x^4$ nu este injectivă, deoarece $f(x) = f(-x)$.

Este surjectivă, deoarece pentru orice $y \in \mathbf{R}_+$, există $x = \sqrt[4]{y}$ astfel încît $f(\sqrt[4]{y}) = y$. Această funcţie nu este bijectivă.

f) Funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin egalitatea $f(x) = x^4$ nu este nici injectivă şi nici surjectivă, deci f nu este bijectivă.

4.5.11. *Propoziţie.* **Dacă $f: X \to Y$ şi $g: Y \to Z$ sînt două funcţii, atunci au loc proprietăţile:**

1. **Dacă f şi g sînt bijective, atunci gf este bijectivă.**
2. **Dacă gf este bijectivă, atunci f este injectivă şi g surjectivă.**

Demonstraţie.

1) rezultă din 4.5.4.1) 4.5.8.1)

2) rezultă din 4.5.4.2) şi 4.5.8.2).

4.5.12. *Propoziţie.* **Dacă X o mulţime oarecare, atunci funcţia identică $1_X : X \to Y$ este bijectivă.**

Demonstraţie. Dacă $x \neq x'$ atunci $1_X(x) \neq 1_X(x')$, deci 1_X este injectivă.

Pe de altă parte, cum $x = 1_X(x)$ rezultă că 1_X este şi surjectivă.

4.5.13. *Definiţie.* **O funcţie $f: X \to Y$ se numeşte *inversabilă* dacă există o funcţie $g: Y \to X$ astfel încît $gf = 1_X$ şi $fg = 1_Y$.**

4.5.14. *Teoremă.* **Fie $f: X \to Y$ o funcţie. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:**

1) **f este inversabilă**

2) **f este bijectivă**

3) **corespondenţa f^{-1} este o funcţie**

4) $f^{-1} \circ f = 1_X$ şi $f \circ f^{-1} = 1_Y$.

Demonstraţie. Vom face demonstraţia arătînd că 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2). Presupunem că f este inversabilă. Cum 1_X este bijectivă, din egalitatea $gf = 1_X$ şi din 4.5.11. 2 deducem că f este injectivă. Din egalitatea $fg = 1_Y$ şi din 4.5.11. 2 rezultă că f este şi surjectivă. Deci f este bijectivă.

Să arătăm că 2) $\Rightarrow$ 3). Presupunem că graficul funcţiei f este F, atunci $f = (X, F, Y)$ şi deci corespondenţa inversă este $f^{-1} = (Y, F^{-1}, X)$.

Trebuie să arătăm că dacă f este bijectivă, atunci F^{-1} verifică (P_1) şi (P_2) din 4.1.1.

Fie $y \in Y$, un element oarecare. Deoarece f este surjectivă, există $x \in X$, astfel încît $y = f(x)$. Dar cum $(x,y) \in F$, obţinem $(y,x) \in F^{-1}$ şi deci F^{-1} verifică (P_1).

Presupunem că avem $(y,x) \in F^{-1}$ şi $(y,x') \in F^{-1}$. Atunci $(x,y) \in F$ şi $(x',y) \in F$ sau altfel scris $f(x) = y$ şi $f(x') = y$, de unde obţinem egalitatea $f(x) = f(x')$. Funcţia f fiind injectivă, rezultă $x = x'$ şi deci F^{-1} verifică şi (P_2). Implicaţia 3) $\Rightarrow$ 4) este dată în 4.3.3.

Din 4.3.3 rezultă că dacă 4) este verificată, atunci f^{-1} este o funcţie şi deci f este inversabilă de unde rezultă implicaţia 4) $\Rightarrow$ 1).

4.5.15. *Propoziţie.* **Dacă $f: X \to Y$ este o funcţie inversabilă, atunci există o singură funcţie $g: Y \to X$ astfel încît $g \circ f = 1_X$ şi $f \circ g = 1_Y$**

Demonstraţie. Presupunem că există două funcţii $g: Y \to X$, $g': Y \to$ $\to X$ astfel încît să aibă loc egalităţile $gf = 1_X$, $gf = 1_Y$ şi $g'f =$ $= 1_Y$ şi $fg' = 1_Y$.

Fie un element oarecare, $y \in Y$. Deoarece f este inversabilă, conform 4.5.14, f este bijectivă şi deci există $x \in X$ astfel încît $y = f(x)$. Din egalităţile $g \circ f = 1_X$ şi $g' \circ f = 1_X$ deducem că $(g \circ f)(x) = x$ şi $(g' \circ f)(x) =$ $= x$ sau altfel scris, $g(f(x)) = x$ şi $g'(f(x)) = x$, de unde $g(y) = x$ şi $g'(y) = x$. Prin urmare $g(y) = g'(y)$ şi $g = g'$.

4.5.16. *Definiţie.* **Dacă $f: X \to Y$ este o funcţie inversibilă. atunci funcţia $g: Y \to X$ pentru care $g \circ f = 1_X$ şi $f \circ g = 1_Y$ se numeşte inversa funcţiei f.**

4.5.17. *Observaţie.* Din teorema 4.5.14 şi din propoziţia 4.5.15 rezultă că dacă $f: X \to Y$ este o funcţie inversabilă, atunci inversa ei nu este altcineva decît corespondenţa inversă f^{-1} (care este şi ea funcţie inversabilă, deci bijectivă). Deci vom folosi pentru inversa unei funcţii inversabile $f: X \to Y$, notaţia $f^{-1}: Y \to X$.

4.5.18. *Exemple.* În o serie întreagă de probleme se cere ca dîndu-se o funcţie $f: X \to Y$ bijectivă să se determine inversa ei.

a) Considerăm funcţia $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ definită prin egalitatea $f(x) = x^2$. Această funcţie este bijectivă, deci inversabilă.

Fie $f^{-1}: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ inversa ei; atunci $f^{-1} \circ f = 1_{R+}$ şi $f \circ f^{-1} = 1_{R+}$. Dacă $x \in \mathbf{R}_+$ este un element oarecare, atunci $f(f^{-1}(x)) = x$, de unde obţinem $(f^{-1}(x))^2 = x$. Rezolvînd această ecuaţie şi ţinînd cont că $f^{-1}(x) \in \mathbf{R}_+$, deducem $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. În concluzie inversa funcţiei f este funcţia $f^{-1}: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ definită prin egalitatea: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

b) Fie funcţia $f: [3, +\infty) \to [-8, +\infty)$ definită de egalitatea $f(x) = x^2 - 6x + 1$.

Să se arate că f este bijectivă şi apoi să se determine inversa ei.

Rezolvarea. Este evident că pentru orice x avem: $x^2 - 6x + 1 \geqslant -8 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \geqslant 0$.

Rezultă că dacă $x \in [3, +\infty)$, $f(x) \in [-8, +\infty)$. Să arătăm că f este injectivă. Presupunem că $f(x) = f(x')$, unde $x, x' \in [3, +\infty)$.

Atunci egalitatea $x^2 - 6x + 1 = x'^2 - 6x' + 1$ ne dă succesiv: $x^2 - 6x = x'^2 - 6x'$. Sau altfel scris $x^2 - x'^2 - 6(x - x') = 0$, de unde $(x - x')(x + x' - 6) = 0$.

Deoarece $x \geqslant 3$ şi $x' \geqslant 3$, avem $x + x' - 6 \geqslant 0$, egalitatea avînd loc numai cînd $x = x' = 3$. În cazul cînd $x + x' - 6 > 0$ rezultă că $x - x' = 0$ de unde $x = x'$ şi deci f este injectivă. Să arătăm că f este surjectivă. Fie $y \in [-8, +\infty)$. Rezolvînd ecuaţia $x^2 - 6x + 1 = y$, obţinem $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 + y - 1} = 3 \pm \sqrt{y + 8}$.

Cum $y + 8 \geqslant 0$, avem $3 + \sqrt{y + 8} \in [3, +\infty)$ şi în plus $f(3 + \sqrt{y + 8}) = y$ şi deci f este surjectivă. Deci f este bijectivă. Inversa $f^{-1}: [-8, +\infty) \to [3, +\infty)$ a funcţiei f se deduce din egalitatea $f \circ f^{-1} = 1_{[-8, +\infty)}$

Într-adevăr, dacă $x \in [-8, +\infty)$ atunci $f(f^{-1}(x)) = x$ de unde $(f^{-1}(x))^2 - 6f^{-1}(x) + 1 = x$. Această ecuaţie ne dă soluţiile $f^{-1}(x) = 3 \pm \sqrt{8 + x}$.

Cum $f^{-1}(x) \in [3, +\infty)$ atunci soluţia convenabilă este $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x + 8}$.

Prin urmare inversa funcţiei f este funcţia $f^{-1}: [-8, +\infty) \to [3, +\infty)$ definită de egalitatea $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x + 8}$.

c) Funcţia $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ definită prin egalitatea $f(x) = \sin x$ este o funcţie bijectivă, deci inversabilă. Inversa acestei funcţii $f^{-1}: [-1, 1] \to \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ nu este altcineva decît funcţia dată de egalitatea $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

d) Funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$ definită prin egalitatea $f(x) = a^x (a > 0 \ \& \ a \neq 1)$ este o funcţie bijectivă, deci inversabilă. Inversa acestei funcţii $f^{-1}: \mathbf{R}_+ \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ nu este altcineva decît funcţia, bine cunoscută, definită prin egalitatea $f^{-1}(x) = \log_a x$.

4.5.19. *Rezumat.* Notăm cu $f: X \to Y$ o funcţie oarecare. În tabelul următor sînt rezumate noţiunile de funcţie injectivă, surjectivă şi bijectivă.

$$\left.\begin{array}{l} x = x' \Rightarrow f(x) = f(x') \\ f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x' \end{array}\right\} \text{ orice funcție}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \end{array}\right\} \text{ funcție injectivă}$$

$$\left.\begin{array}{l} y \in Y \Rightarrow (\exists x)(x \in X \,\&\, f(x) = y) \\ f(X) = Y \end{array}\right\} \text{ funcție surjectivă}$$

funcție injectivă & funcție surjectivă $\Leftrightarrow$ funcție bijectivă
funcție inversabilă $\Leftrightarrow$ funcție bijectivă.

4.6. Secțiune și retractă a unei funcții*

Fie $f: X \to Y$ o funcție. Am definit în 4.5.13 noțiunea de funcție inversabilă și anume: f este inversabilă dacă există o funcție $g: Y \to X$ astfel încît $g \circ f = 1_X$ și $f \circ g = 1_Y$. Ne propunem să studiem separat funcțiile pentru care este îndeplinită numai una din egalitățile $g \circ f = 1_X$ sau $f \circ g = 1_Y$.

4.6.1 *Definiție.* **Fie $f: X \to Y$ o funcție. O funcție $s: Y \to X$ astfel încît $f \circ s = 1_Y$ se numește o *secțiune* a lui f.**

4.6.2. *Definiție* **Fie $f: X \to Y$ o funcție. O funcție $r: Y \to X$ avînd proprietatea $r \circ f = 1_X$ se numește o *retractă* a lui f.**

4.6.3 *Teoremă.* **O funcție $f: X \to Y$ admite o secțiune dacă și numai dacă f este surjectivă.**

Demonstrație. Dacă f admite o secțiune $s: Y \to X$, atunci $f \circ s = 1_Y$. Deoarece 1_Y este evident surjectivă, din 4.5.8 rezultă că f este surjecție.

Invers, presupunem că f este surjectivă. Dacă $y \in Y$ este un element oarecare, există $x \in X$ astfel încît $f(x) = y$. Înseamnă că $f^{-1}(\{y\}) \neq$ $\neq \emptyset$.

În fiecare din mulțimile $f^{-1}(\{y\})$ alegem un element notat cu x_y. Definim corespondența $s: Y \to X$ prin egalitatea $s(y) = x_y$. Această corespondență verifică (P_1), deoarece $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ și verifică (P_2) deoarece am ales un singur element în fiecare din mulțimile $f^{-1}(\{y\})$; deci s este o funcție. Din alegerea lui x_y rezultă că $f(x_y) = y$ și deci

* Facultativ.

$f(s(y)) = y$ sau altfel scris $(f \circ s)(y) = y$. De aici rezultă că $f \circ s = 1_Y$, adică s este o secțiune pentru f.

4.6.4. *Teoremă.* **Fie $X \neq \emptyset$. O funcție $f: X \to Y$ admite o retractă dacă și numai dacă f este injectivă.**

Demonstrație. Presupunem că f admite o retractă $r: Y \to X$; deci $r \circ f = 1_X$. Cum 1_X este o funcție bijectivă (propoziția 4.5.12), din propoziția 4.5.11 rezultă că f este injectivă. Invers, presupunem că f este injectivă. Cum $X \neq \emptyset$, există un element $x_0 \in X$.

Definim corespondența r de la Y la X prin egalitatea

$$r(y) = \begin{cases} x & \text{dacă } f(x) = y \\ x_0 & \text{dacă } y \notin f(X). \end{cases}$$

Deoarece f este injectivă, pentru fiecare $y \in f(X)$ există un singur $x \in X$ cu $f(x) = y$, deci corespondența r este o funcție.

Dacă $x \in X$ este un element oarecare atunci din definiția lui r rezultă că $r(f(x)) = x$ sau altfel scris $(r \circ f)(x) = x$, de unde egalitatea $r \circ f = 1_X$. Prin urmare, r este o retractă a lui f.

4.6.5. *Exemple.* *a)* Fie mulțimile $X = \{1,2,3,4\}$ și $Y = \{7,8,13\}$; considerăm funcția $f: X \to Y$, definită prin egalitățile: $f(1) = 7$, $f(2) = 7$, $f(3) = 8$, $f(4) = 13$.

Din modul cum este definită această funcție se constată imediat că este surjectivă.

Funcția $s_1: Y \to X$ definită prin egalitățile: $s_1(7) = 1$, $s_1(8) = 3$, $s_1(13) = 4$, s este o secțiune a funcției f.

De asemenea funcția $s_2: Y \to X$ definită prin egalitățile: $s_2(7) = 2$, $s_2(8) = 3$, $s_2(13) = 4$ este de asemenea o secțiune a funcției f.

Din aceste exemple se constată că o funcție f poate avea mai multe funcții distincte care sînt secțiuni pentru f.

b) Fie mulțimile $X = \{a, b, c\}$ și $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Considerăm funcția $f: X \to Y$, definită prin egalitățile $f(a) = 1$, $f(b) = 3$, $f(c) = 5$.

Este clar că f este injectivă și conform teoremei 4.6.4 admite o retractă.

Funcția $r_1: Y \to X$ definită prin egalitățile: $r_1(1) = a$, $r_1(2) = a$, $r_1(3) = b$, $r_1(4) = a$, $r_1(5) = c$ verifică relația $r_1 \circ f = 1_X$, deci r_1 este o retractă a lui f.

De asemenea funcția $r_2: Y \to X$ definită prin egalitățile: $r_2(1) = a$, $r_2(2) = b$, $r_2(3) = b$, $r_2(4) = b$, $r_2(5) = c$ este de asemenea o retractă a lui f.

În concluzie o funcție f poate admite mai multe funcții distincte care sînt retracte pentru f.

4.7. Mulţimea Y^X şi proprietăţile ei

Dacă X şi Y sînt două mulţimi, vom nota cu Y^X mulţimea funcţiilor definite pe X şi cu valori în Y, adică

$$Y^X = \{f \mid f : X \to Y\}.$$

De multe ori pentru mulţimea Y^X se foloseşte şi notaţia $F(X, Y)$. În continuare, vom da cîteva proprietăţi ale acestei mulţimi.

4.7.1. *Propoziţie.* **Fie X, Y, Z trei mulţimi astfel încît $X \cap Y = \emptyset$.** Definim funcţia α: $Z^{X \cup Y} \to Z^X \times Z^Y$ prin egalitatea

$$\alpha(f) = (f/_X, f/_Y), \text{ unde } f: X \cup Y \to Z.$$

Cu aceste notaţii α este o funcţie bijectivă.

Demonstraţie. Să arătăm că α este injectivă.

Fie f: $X \cup Y \to Z$ şi f': $X \cup Y \to Z$ două funcţii oarecare astfel încît $\alpha(f) = \alpha(f')$. Atunci $(f/_X, f/_Y) = (f'|_X, f'/_Y)$, de unde $f/_X = f'/_X$ şi $f/_Y = f'/_Y$.

Dacă $x \in X \cup Y$ este un element oarecare, atunci $f(x) = f/_X(x)$ şi $f'(x) = f'|_X(x)$ dacă $x \in X$ şi $f(x) = f/_Y(x)$, $f'(x) = f'/_Y(x)$, dacă $x \in Y$. În concluzie $f(x) = f'(x)$ pentru orice $x \in X \cup Y$. Deci $f = f'$ şi α este o funcţie injectivă.

Să dovedim că α este surjectivă.

Fie $h \in Z^X \times Z^Y$ un element oarecare. Atunci $h = (u, v)$ unde $u \in Z^X$ şi $v \in Z^Y$.

Definim corespondenţa f: $X \cup Y \to Z$ prin egalitatea:

$$f(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dacă } x \in X \\ v(x) & \text{dacă } x \in Y. \end{cases}$$

Cum $X \cap Y = \emptyset$, f este o funcţie (verificarea o va face cititorul). În plus $f/_X = u$ şi $f_Y /= v$, deci $\alpha(f) = h$.

Prin urmare, α este şi surjectivă.

4.7.2. *Propoziţie.* **Fie X, Y, Z trei mulţimi. Definim funcţia β: $(Z^Y)^X \to Z^{X \times Y}$ prin egalitatea: $\beta(f)((x,y)) = f(x)(y)$ oricare ar fi $f \in (Z^Y)^X$ şi $(x, y) \in X \times Y$. Cu aceste notaţii funcţia β este bijectivă.**

Demonstraţie. Să arătăm mai întîi că β este injectivă.

Fie $f, f' \in (Z^Y)^X$ astfel încît $\beta(f) = \beta(f')$. Dacă $(x, y) \in X \times Y$ este un element oarecare al mulţimii $X \times Y$, atunci obţinem egalitatea $\beta(f)((x, y)) = \beta(f')(x, y))$, de unde $f(x)(y) = f'(x)(y)$. Cum y este un element oarecare din Y, obţinem că $f(x) = f'(x)$. Cum x este de asemenea un element oarecare din X, rezultă în final că $f = f'$, ceea ce arată că β este injectivă.

Fie $g \in Z^{X \times Y}$, un element oarecare. Definim funcţia f: $X \to Z^Y$ prin egalitatea: $f(x)(y) = g((x, y))$. Este clar că $\beta(f) = g$ şi deci β este şi surjectivă.

4.7.3. *Propoziţie.* **Fie X, Y, Z trei mulţimi. Dacă p_Y şi p_Z sînt funcţiile proiecţii ale mulţimii $Y \times Z$, definim funcţia:**

$$\gamma: (Y \times Z)^X \to Y^X \times Z^X \text{ prin egalitatea}$$

$$\gamma(f) = (p_Y \circ f, p_Z \circ f) \text{ oricare ar fi } f: X \to Y \times Z.$$

Cu aceste notaţii funcţia γ este bijectivă.

Demonstraţie. Să dovedim că γ este injectivă.

Fie pentru aceste două funcţii $f: X \to Y \times Z$ şi $f': X \to Y \times Z$ astfel încît $\gamma(f) = \gamma(f')$. Din această egalitate obţinem că $(p_Y f, p_Z f) = (p_Y f', p_Z f')$, de unde $p_Y f = p_Y f'$ şi $p_Z f = p_Z f'$.

Fie x un element oarecare din X şi presupunem că $f(x) = (y_1, z_1)$ şi $f'(x) = (y_2, z_2)$ unde $y_1, y_2 \in Y$ şi $z_1, z_2 \in Z$.

Din egalitatea $p_Y f = p_Y f'$ obţinem că $(p_Y f)(x) = (p_Y f')(x)$, de unde rezultă că $p_Y(f(x)) = p_Y(f'(x))$ şi deci $y_1 = y_2$.

În mod analog din egalitatea $p_Z f = p_Z f'$ se deduce că $z_1 = z_2$. Deci $(y_1, z_1) = (y_2, z_2)$, de unde rezultă $f = f'$, adică funcţia γ este injectivă.

Fie $h \in Y^X \times Z^X$ un element oarecare. Deci h este de forma $h = (u, v)$ unde u: $X \to Y$ şi v: $X \to Z$.

Definim funcţia f: $X \to Y \times Z$ prin egalitatea

$$f(x) = (u(x), v(x)) \text{ oricare ar fi } x \in X.$$

Din definiţia funcţiei f se deduce imediat că $p_Y f = u$ şi $p_Z f = v$, de unde rezultă că $\gamma(f) = (u, v)$. Prin urmare γ este surjectivă.

4.8. Cîteva proprietăţi ale produsului cartezian

4.8.1. *Propoziţie.* **Fie X şi Y două mulţimi. Definim funcţia α: $X \times Y \to Y \times X$ prin egalitatea $\alpha((x, y)) = (y, x)$ ori care ar fi elementul (x, y) din mulţimea $X \times Y$. Atunci α este o funcţie bijectivă.**

Demonstraţie. Trebuie dovedit că α este injectivă şi surjectivă.

Fie (x, y), $(x'y') \in X \times Y$ astfel încît $\alpha((x, y)) = \alpha((x', y'))$. Rezultă că $(y, x) = (y', x')$ de unde $y = y'$ şi $x = x'$. Prin urmare $(x, y) = (x', y')$ şi deci α este injectivă.

Dacă $(y, x) \in Y \times X$, atunci este evident că $\alpha((x, y)) = (x, y)$ şi deci α este şi surjectivă.

4.8.2. *Propoziţie*. **Fie X, Y, Z trei mulţimi. Definim funcţia**

$$\beta\colon (X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z)$$

prin egalitatea $\beta(((x, y), z)) = (x, (y, z))$ oricare ar fi elementele $x \in X$, $y \in Y$ şi $z \in Z$. Atunci β este o bijecţie.

Demonstraţie. Fie elementele $((x, y), z) \in (X \times Y) \times Z$ şi $((x', y'), z') \in (X \times Y) \times Z$ astfel încît $\beta(((x, y), z)) = \beta(((x', y'), z'))$. De aici rezultă că $(x, (y, z)) = (x', (y', z'))$, de unde $x = x'$ şi $(y, z) = (y', z')$, ceea ce implică egalităţile $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. Din ultimele trei egalităţi obţinem că $(x, y) = (x', y')$ şi în final $((x, y), z) = ((x', y'), z')$, ceea ce ne arată că β este injectivă.

Dacă $(x, (y, z)) \in X \times (Y \times Z)$ este un element oarecare atunci este evident că $\beta(((x, y), z)) = (x, (y, z))$ şi prin urmare β este şi surjectivă.

4.9. Exerciţii

1) Fie $f\colon X \to Y$ o funcţie şi $\mathcal{P}(X)$ mulţimea părţilor mulţimii X. Definim funcţia $\varphi\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ prin egalitatea $\varphi(A) = f^{-1}(f(A))$ oricare ar fi $A \in \mathcal{P}(X)$.

Să se arate că $\varphi^2 = \varphi$. $(\varphi^2 = \varphi \circ \varphi)$.

2) Fie $f\colon X \to Y$ o funcţie şi $\mathcal{P}(Y)$ mulţimea părţilor mulţimii Y. Definim funcţia $\psi\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(Y)$ prin egalitatea

$$\psi(B) = f(f^{-1}(B)) \text{ oricare ar fi } B \in \mathcal{P}(Y).$$

Să se arate că $\psi^2 = \psi$. $(\psi^2 = \psi \circ \psi)$.

3) Fie $f\colon X \to Y$ o funcţie şi $B \subset Y$ o submulţime a lui Y. Să se arate că

$$f^{-1}(\complement_Y B) = \complement_X f^{-1}(B).$$

4) Fie $f\colon X \to Y$ o funcţie. Să se arate că f este injectivă $\Leftrightarrow f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ oricare ar fi A şi A' din $\mathcal{P}(X)$.

5) Fie funcţia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin egalitatea

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ unde } a, b, c \in \mathbf{R}.$$

Să se determine $f(\mathbf{R})$. Discuţie.

6) Fiind date mulţimile $X = \{1, 2, 3\}$ şi $Y = \{a, b, c, d\}$ se cere să se descrie toate funcţiile injective de la mulţimea X la mulţimea Y. Există funcţii surjective de la mulţimea X la Y?

7) Fie mulţimile $X = \{a, b, c, d\}$ şi $Y = \{1, 2\}$. Să se descrie toate funcţiile surjective de la mulţimea X la mulţimea Y. Există funcţii injective de la mulţimea X la Y?

8) Fie mulţimile $X = \{a, b, c\}$ şi $Y = \{1, 2, 3\}$. Să se descrie toate funcţiile bijective de la X la Y.

9) Fie X şi Y două mulţimi finite. Prima are m elemente, iar a doua, n elemente. Să se arate că este necesar şi suficient să existe o funcţie injectivă de la X la Y ca $m \leqslant n$. În acest caz, să se arate că numărul de funcţii injective de la X la Y este egal cu A_n^m .

10) Aceleaşi notaţii ca în problema 9). Să se arate că este necesar şi suficient ca să existe o funcţie surjectivă de la X la Y este ca $n \leqslant m$. În acest caz să se arate că numărul de funcţii surjective de la mulţimea X la mulţimea Y este egal cu numărul $S_{m,n} = n^m - C_n^1(n - 1)^m + C_n^2(n - 2)^m - C_n^3(n - 3)^m + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 1^m$.

11) Fie X şi Y două mulţimi finite. Prima are m elemente, iar cea de-a doua, n elemente. Să se arate că este necesar şi suficient ca să existe o funcţie bijectivă de la X la Y este ca $m = n$. În acest caz să se arate că numărul funcţiilor bijective de la X la Y este egal cu $n!$

12) Fie f: $X \to Y$ o funcţie. Să se arate că f este injectivă $\Leftrightarrow$

$$f(\complement_X A) \subset \complement_Y f(A) \text{ oricare ar fi } A \subset X.$$

13) Fie f: $X \to Y$ o funcţie. Să se arate că f este surjectivă $\Leftrightarrow$

$$\complement_Y f(A) \subset f(\complement_X A) \text{ oricare ar fi } A \subset X.$$

14) Fie f: $X \to Y$ o funcţie. Să se arate că f este bijectivă $\Leftrightarrow$

$$f(\complement_X A) = \complement_Y f(A) \text{ oricare ar fi } A \subset X.$$

15) Să dă expresia $E = x^2 - 2x + 10$ şi mulţimea $X = [2, 5]$. Să se determine Y astfel încît funcţia f: $[2, 5] \to Y$, $Y \subset \mathbf{R}$ definită prin egalitatea $f(x) = x^2 - 2x + 10$ să fie bijectivă. Să se determine apoi inversa ei.

16) Se să expresia $E = x^2 - 4x + 1$ şi mulţimea $Y = [1, 2]$. Să se determine o mulţime X astfel încît f: $X \to [1, 2]$, $X \subset \mathbf{R}$ definită prin egalitatea $f(x) = x^2 - 4x + 1$ să fie bijectivă. În acest caz să se determine inversa ei.

17) Fie funcţia f: $[1, 2] \to [6, 7]$ definită prin egalitatea

$$f(x) = x^2 - 2x + 7 \text{ oricare ar fi } x \in [1, 2].$$

Să se arate că f este bijectivă şi să se găsească inversa ei.

18) Se dă funcţia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ definită prin egalitatea $f(x) = x^2$. Să se arate că f este surjectivă şi apoi să se determine două funcţii care sînt secţiuni pentru f.

19) Se dă funcția $f\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ definită prin egalitatea $f(x) = x^4$. Să se arate că f este injectivă și apoi să se determine cel puțin două retracte pentru această funcție.

20) Fie funcția $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ definită prin egalitatea $f(x) = x^2 - 5x + 1$. Să se arate că f este injectivă și apoi să se determine cel puțin două retracte pentru această funcție.

21) Fie o funcție $f\colon X \to Y$. Definim funcția $f_*\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ prin egalitatea $f_*(A) = f(A)$ oricare ar fi $A \in \mathcal{P}(X)$. Definim de asemenea funcția $f^* = \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ prin egalitatea $f^*(B) = f^{-1}(B)$ oricare ar fi $B \in \mathcal{P}(Y)$. Să se arate că următoarele afirmații sînt echivalente:

a) f este injectivă
b) f_* este injectivă
c) f^* este surjectivă
d) $f^* f_* = 1_{\mathcal{P}(X)}$.

22) Aceleași notații ca în problema precedentă. Să se arate că următoarele afirmații sînt echivalente:

a) f este surjectivă
b) f_* este surjectivă
c) f^* este injectivă
d) $f_* f^* = 1_{\mathcal{P}(Y)}$.

23) Să se arate că $1_{\emptyset A}$ este unica funcție definită pe $\emptyset$ cu valori în A.

24) Dacă mulțimea A este nevidă să se arate că nu există nici o funcție definită pe A cu valori în $\emptyset$.

§ 5. Relații

5.1. Relații binare pe o mulțime

În § 3, am studiat noțiunea de corespondență de la o mulțime X la o mulțime Y. Acum ne ocupăm de cazul particular $X = Y$. În acest caz vom nota graficul corespondențelor cît și corespondențele cu litere mici grecești.

5.1.1. *Definiție*. **Se numește** *relație binară* **pe mulțimea** X, **orice corespondență** (X, ρ, X). **Prin abuz de limbaj se identifică uneori relația binară cu graficul ei** $\rho \subset X \times X$.

5.1.2. *Notații.* 1) Cînd pe o mulțime X s-a dat o relație binară, notăm aceasta prin (X, ρ). Vom mai spune că mulțimea X este *înzestrată* cu relația binară ρ.

2) Cînd elementul (x,y) din $X \times X$ aparține mulțimii ρ, $(x,y) \in \rho$ vom nota foarte des acest fapt prin $x \rho y$ și vom spune că *x este în relația ρ cu y.*

Pentru cele ce urmează vom reaminti cîteva definiții date în § 3. Dacă ρ este o relație binară pe mulțimea X, $\rho \subset X \times X$, atunci ρ^{-1} reprezintă mulțimea: $\rho^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in \rho\}$. Este clar că ρ^{-1} este de asemenea o relație binară pe X. Vom nota prin ρ^2 mulțimea $\rho \circ \rho$, definită în felul următor:

$$\rho^2 = \{(x,z) \mid (\exists y) \ (y \in X \ \& \ (x,y) \in \rho \ \& \ (y,z) \in \rho\}.$$

De asemenea ρ^2 este o relație binară pe mulțimea X. Reamintim că prin Δ_X am notat mulțimea:

$\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$, care se numește diagonala mulțimii $X \times X$. Δ_X este de asemenea o relație binară pe mulțimea X.

5.1.3. *Definiție.* **Fie X o mulțime și ρ o relație binară definită pe X. Vom spune că ρ este o relație *reflexivă* dacă $\Delta_X \subset \rho$.** Astfel spus, ρ este o relație reflexivă pe X dacă verifică proprietatea: oricare ar fi $x \in X$ are loc relația $(x,x) \in \rho$, sau altfel scris, oricare ar fi $x \in X$ avem $x \rho x$.

5.1.4. *Definiție.* **Fie X o mulțime și ρ o relație binară pe X. Vom spune că ρ este o relație *simetrică* dacă are loc incluziunea.**

$$\rho \subset \rho^{-1}$$

Altfel spus, ρ este o relație simetrică pe X dacă verifică următoarea proprietate: oricare ar fi $x,y \in X$, condiția $(x,y) \in \rho$ implică $(y,x) \subset \rho$, sau altfel scris $x \rho y \Rightarrow y \rho x$.

5.1.5. *Definiție.* **Fie X o mulțime și ρ o relație binară pe X. Vom spune că ρ este o relație *tranzitivă* dacă are loc incluziunea $\rho^2 \subset \rho$.**

Altfel spus, ρ este o relație tranzitivă pe X, dacă verifică următoarea proprietate: oricare ar fi elementele $x, y, z \in X$, condiția $(x, y) \in \rho$ și $(y, z) \in \rho$ implică $(x, z) \in \rho$ sau altfel scris: $x \rho y \ \& y \rho z \Rightarrow x \rho z$ oricare ar fi $x, y, z \in X$.

5.1.6. *Exemple.* a) Dacă X o mulțime oarecare, atunci $\rho = \Delta_X$ este o relație binară care este și reflexivă și simetrică și tranzitivă.

Într-adevăr, din definiția 5.1.4 rezultă că Δ_X este reflexivă.

Fie acum două elemente oarecare $x, y \in X$ astfel încît $(x, y) \in \Delta_X$. Atunci $x = y$ şi deci şi $(y, x) \in \Delta_X$ şi prin urmare Δ_X este simetrică.

Dacă x, y, z sînt trei elemente oarecare din X astfel încît să aibă loc proprietatea $(x,y) \in \Delta_X$ & $(y,z) \in \Delta_X$, atunci $x = y$ şi $y = z$, de unde rezultă $x = z$. Deci $(x, z) \in \Delta_X$ şi prin urmare Δ_X este şi tranzitivă.

b) Fie X o mulţime şi $\rho = X \times X$. Este clar că ρ este o relaţie binară care este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

c) Fie $\mathbf{R}$ mulţimea numerelor reale, ρ relaţia binară definită astfel: $\rho = \{(x,y) \mid x \in \mathbf{R}$ & $y \in \mathbf{R}$ & $x - y$ este număr întreg$\}$. Dacă $x \in \mathbf{R}$ atunci $x - x = 0$, deci $(x, x) \in \rho$ şi prin urmare ρ este o relaţie reflexivă. Fie $x, y \in \mathbf{R}$ avînd proprietatea $(x, y) \in \rho$. Atunci $x - y$ este un număr întreg şi deci $y - x$ este de asemenea un număr întreg. Prin urmare $(y, x) \in \rho$ şi deci ρ este simetrică.

Considerăm trei elemente $x, y, z \in \mathbf{R}$ cu proprietăţile $(x, y) \in \rho$ şi $(y, z) \in \rho$. Cum $x - z = (x - y) + (y - z)$ şi $x - y$ şi $y - z$ sînt numere întregi, rezultă că $x - z$ este număr întreg şi deci $(x, z) \in \rho$. Deci ρ este şi tranzitivă.

d) Fie $\mathbf{Z}$ mulţimea numerelor întregi. Definim relaţia binară: $\{(x,y) \mid x \in \mathbf{Z}$ & $y \in \mathbf{Z}$ & $(3 / x - y)\}$ unde / înseamnă „divide". Această relaţie este reflexivă, deoarece $3 / x - x$ oricare ar fi $x \in \mathbf{Z}$. Dacă $x \rho y$ atunci $x - y = 3k$ $(k \in \mathbf{Z})$, şi deci $y - x = 3(-k)$ ceea ce ne arată că ρ este simetrică.

Să dovedim că este şi tranzitivă. Presupunem că au loc $x \rho y$ şi $y \rho z$, deci $x - y = 3k$ şi $y - z = 3k'$ unde $k, k' \in \mathbf{Z}$. Cum $x - z = (x - y) + (y - z) = 3(k + k')$ rezultă că $x \rho z$, adică ρ este şi tranzitivă.

e) Fie $X = \{1, 2, 3\}$. Pe această mulţime definim următoarea relaţie binară:

$$\rho_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2)\}$$

Este clar că $\rho_1 \subset X \times X$. De asemenea se vede imediat că ρ_1 este reflexivă şi tranzitivă, dar nu este simetrică.

f) Fie aceeaşi mulţime $X = \{1, 2, 3\}$.

Definim mulţimea $\rho_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 2)\}$. Cum $\rho_2 \subset X \times X$, rezultă că ρ_2 este o relaţie binară pe X. În plus se observă imediat că ρ_2 este reflexivă, dar nu este simetrică, nici tranzitivă.

g) Pe aceeaşi mulţime $X = \{1, 2, 3\}$ definim relaţia binară

$$\rho_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}.$$

Această relaţie binară care este reflexivă, tranzitivă, dar nu este simetrică.

5.2. Relaţii de echivalenţă

5.2.1. *Definiţie.* **Fie X o mulţime. O relaţie binară ρ pe mulţimea X se numeşte** *relaţie de echivalenţă* **dacă este în acelaşi timp reflexivă, simetrică şi tranzitivă. Dacă $x, y \in X$ şi $x \rho y$, vom spune că x este** *echivalent* **cu y.**

Altfel spus, o relaţie binară ρ pe mulţimea X, $\rho \subset X \times X$ este relaţie de echivalenţă dacă are proprietăţile:

a) oricare ar fi $x \in X$, $x \rho x$ (reflexivitatea),

b) oricare ar fi $x, y \in X$ cu proprietatea $x\rho y$, atunci $y\rho x$ (simetria),

c) oricare ar fi $x, y, z \in X$ cu proprietăţile: $x\rho y$ şi $y\rho z$, atunci $x\rho z$ (tranzitivitatea).

5.2.2. *Exemple.* 1°) a), b), c), d) din 5.1.6 sînt exemple de relaţii de echivalenţă.

2°) Dacă notăm cu D mulţimea dreptelor din plan, atunci mulţimea $\rho = \{(d, d') \mid d \parallel d'\}$ este o relaţie binară pe mulţimea D. Această relaţie este reflexivă, simetrică şi tranzitivă, deci relaţie de echivalenţă.

3°) Fie T mulţimea triunghiurilor din plan. Definim mulţimea $\rho = \{(\Delta, \Delta') \mid \Delta, \Delta'$ triunghiuri şi $\Delta = \Delta'\}$. Mulţimea ρ este o relaţie binară pe T care este reflexivă, simetrică şi tranzitivă, deci este o relaţie de echivalenţă.

4°) Aceeaşi mulţime T ca în exemplul precedent. Definim mulţimea $\rho' = \{(\Delta, \Delta') \mid \Delta, \Delta'$, triunghiuri şi Δ asemenea cu $\Delta'\}$.

Este clar că $\rho' \subset T \times T$, deci este o relaţie binară pe T. Se verifică extrem de simplu că ρ' este o relaţie de echivalenţă.

5.2.3. *Definiţie.* **Fie X o mulţime oarecare. Relaţia de echivalenţă Δ_X (diagonala mulţimii $X \times X$) (a se vedea 5.1.6) se numeşte** *egalitatea* **pe X şi se notează cu simbolul „ = ".**

Această relaţie traduce pur şi simplu ideea intuitivă de *identitate*: $x = y$ înseamnă „x este acelaşi individ ca y".

5.3. Clase de echivalenţă. Mulţime factor

5.3.1. *Definiţie.* **Fie X o mulţime şi ρ o relaţie de echivalenţă pe ea. Dacă $x \in X$, atunci vom numi** *clasă de echivalenţă* **a elementului x, şi vom nota cu $[x]_\rho$ mulţimea elementelor echivalente cu x:**

$$[x]_\rho = \{x' \mid x' \in X \,\&\, x' \rho x\}.$$

5.3.2. *Observaţie.* Cînd nu este nici un pericol de confuzie în loc de notaţia $[x]_\rho$ se scrie $[x]$, sau foarte des se întrebuinţează şi notaţiile: $\hat{x}$ sau $\dot{x}$ sau $\hat{\hat{x}}$ etc.

5.3.3. *Definiţie.* **Fie X o mulţime şi ρ o relaţie de echivalenţă pe ea. Se numeşte** *mulţime factor* **sau** *mulţime cît* **a lui X prin relaţia ρ, mulţimea notată cu X / ρ şi definită în modul următor:**

$$X/\rho = \{[x]_\rho \mid x \in X\}$$

adică este mulţimea ale cărei elemente sînt clasele de echivalenţă ale elementelor din X.

5.3.4. *Definiţie.* **Fie $\mathcal{F}$ o mulţime ale cărei elemente sînt mulţimi** (se mai zice că $\mathcal{F}$ este o mulţime de mulţimi). **Se numeşte reuniunea (respectiv intersecţia) mulţimilor din $\mathcal{F}$ mulţimea notată cu $\bigcup\limits_{X\in\mathcal{F}} X$** (respectiv $\bigcap\limits_{X\in\mathcal{F}} X$) **şi definită în modul următor:**

$$\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X = \{x \mid (\exists X)\ (X\in\mathcal{F}\ \&\ x\in X)\}$$

respectiv

$$\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X = \{x \mid (\forall X)\ (X\in\mathcal{F} \rightarrow x\in X)\}.$$

Cu alte cuvinte, $\bigcup\limits_{X\in\mathcal{F}} X$ este mulţimea elementelor x care aparţin cel puţin unei mulţimi $X \in \mathcal{F}$, iar $\bigcap\limits_{X\in\mathcal{F}} X$ este mulţimea elementelor x care aparţin tuturor mulţimilor $X \in \mathcal{F}$.

5.3.5. *Observaţie.* Dacă A şi B sînt două mulţimi, atunci putem ıorma mulţimea $\mathcal{F} = \{A, B\}$.

În acest caz $\bigcup\limits_{X\in\mathcal{F}} X$ şi $\bigcap\limits_{X\in\mathcal{F}} X$ nu sînt altcineva decît $A \cup B$ şi $A \cap B$.

5.3.6. *Teoremă.* **Fie X o mulţime şi ρ o relaţie de echivalenţă pe ea. Atunci următoarele afirmaţii sînt adevărate:**

1) $x \in [x]_\rho$ oricare ar fi $x \in X$,
2) $[x]_\rho = [x']_\rho \Leftrightarrow x\rho x'$,
3) $[x]_\rho \cap [x']_\rho = \emptyset \Leftrightarrow \neg\ (x\rho x')$,
4) $X = \bigcup\limits_{A\in x/\rho} A$.

Comentarii. α) Într-o formulare echivalentă, teorema 5.3.6 afirmă că orice element $x \in X$ aparține unei clase de echivalență și numai uneia. β) $\neg\,(x\rho y)$ înseamnă că x nu este echivalent cu y.

Demonstrație. 1) Cum ρ este reflexivă, avem $x\rho x$ și deci $x \in [x]_\rho$.

2) Presupunem mai întîi că $[x]_\rho = [x']_\rho$. Cum $x \in [x]_\rho$ rezultă $x \in [x']_\rho$, de unde $x\rho x'$.

Invers, presupunem că $x\rho x'$. Dacă $y \in [x]_\rho$, atunci $y\rho x$, de unde din tranzitivitatea lui ρ, rezultă că $y\rho x'$, deci $y \in [x']_\rho$. Prin urmare are loc incluziunea $[x]_\rho \subset [x']_\rho$. Cum are loc și $x'\rho x$, atunci în mod cu totul analog rezultă și incluziunea $[x']_\rho \subset [x]_\rho$, de unde egalitatea $[x]_\rho = [x']_\rho$.

3) Dacă presupunem că $[x]_\rho \cap [x']_\rho = \emptyset$, cum $[x]_\rho \neq \emptyset$, avem $[x]_\rho \neq [x']_\rho$, deci din 2) obținem că $\neg\,(x\rho x')$.

Invers, să presupunem că $\neg\,(x\rho x')$. Dacă $[x]_\rho \cap [x']_\rho \neq \emptyset$, atunci există $y \in [x]_\rho \cap [x']_\rho$. Din relațiile $y \in [x]_\rho$ și $y \in [x']_\rho$ rezultă că $y\rho x$ și $y\rho x'$, și cum ρ este simetrică obținem că $x\rho y$ și $y\rho x'$, de unde, prin tranzitivitatea lui ρ, deducem că $x\rho x'$, o contradicție. Prin urmare trebuie ca $[x]_\rho \cap [x']_\rho = \emptyset$.

4) Pentru orice $A \in X/\rho$, $A \subset X$. Deci $\bigcup\limits_{A \in X/\rho} A \subset X$.

Fie $x \in X$ un element oarecare. Din 1) rezultă $x \in [x]_\rho \in X/\rho$, deci conform 5.3.4, rezultă că $x \in \bigcup\limits_{A \in X/\rho} A$. Prin urmare are loc și incluziunea $X \subset \bigcup\limits_{A \in X/\rho} A$, deci egalitatea $X = \bigcup\limits_{A \in X/\rho} A$.

5.3.7. *Exemple.* a) Fie **R** mulțimea numerelor reale și ρ relația definită prin proprietatea: $x\rho x' \Leftrightarrow x - x' \in \mathbf{Z}$.

Am văzut (exemplu 5.1.6. c)) că ρ este o relație de echivalență. Să determinăm mulțimea factor $\mathbf{R}/\rho$. Aceasta revine a determina clasele de echivalență. Fie $x \in \mathbf{R}$, atunci $[x]_\rho = \{x' \mid x' \in \mathbf{R} \,\&\, x'\rho x\}. = \{x' \mid x' \in \mathbf{R} \,\&\, x - x' \in \mathbf{Z}\}$.

Deci $[x]_\rho = \{x + k \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

b) Fie **Z** mulțimea numerelor întregi și ρ relația definită prin proprietatea: $x\rho x' \Leftrightarrow 7/x - x'$. (Această relație se mai scrie și astfel: $x \equiv x' \pmod 7$ și se citește x *congruent* cu x' modulo 7).

În mod analog exemplului 5.1.6. d) se dovedește că ρ este o relație de echivalență.

Să calculăm clasele de echivalență.

$$[x]_\rho = \{x' \mid x'\rho x\} = \{x' \mid 7/x' - x\} = \{x + 7k \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

În particular obținem

$$[0]_\rho = \{7\,k \mid k \in \mathbf{Z}\}$$
$$[1]_\rho = \{1 + 7\,k \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

$$[2]_\rho = \{2 + 7k \mid k \in \mathbf{Z}\}$$
$$[3]_\rho = \{3 + 7k \mid k \in \mathbf{Z}\}$$
$$[4]_\rho = \{4 + 7k \mid k \in \mathbf{Z}\}$$
$$[5]_\rho = \{5 + 7k \mid k \in \mathbf{Z}\}$$
$$[6]_\rho = \{6 + 7k \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

Să arătăm că acestea sînt toate elementele lui $\mathbf{Z}/\rho$. Fie $x \in \mathbf{Z}$ și $[x]_\rho$ clasa sa. Atunci $x = 7q + r$, unde $0 \leqslant r < 7$, de unde $x - r = 7q$. Deci $x\rho r$, de unde după 5.3.6. 2) obținem că $[x]_\rho = [r]_\rho$.

Cum $0 \leqslant r < 7$, atunci $[r]_\rho$ este una din clasele de echivalență scrise mai sus.

5.4. Partițiile unei mulțimi

5. 4. 1. *Definiție.* **Fie X o mulțime. O mulțime $\mathcal{F}$ ale cărei elemente sînt submulțimi ale lui X (deci $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$) se numește** *partiție* **a lui X dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:**

1) oricare ar fi $A \in \mathcal{F}$, $A \neq \emptyset$,

2) oricare ar fi $A, B \in \mathcal{F}$, astfel încît $A \neq B$, atunci $A \cap B = \emptyset$,

3) $X = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{F}} A$.

5. 4. 2. *Exemple.* a) Fie $\mathbf{Q}$ mulțimea numerelor raționale și $\mathcal{F} = \{[n, n + 1) \mid n \in \mathbf{Z}\}$ unde $[n, n + 1) = \{x \in \mathbf{Q} \mid n \leqslant x < n + 1\}$. Fie $A = [n, n + 1)$; atunci este clar că $n \in A$ și deci $A \neq \emptyset$. Deci $\mathcal{F}$ verifică 1).

Dacă $A, B \in \mathcal{F}$ și $A \neq B$, atunci $A = [n, n + 1)$ și $B = [m, m + 1)$, unde $m \neq n$.

Putem presupune că $m < n$. Atunci $m + 1 \leqslant n$ și deci $A \cap B = \emptyset$. Prin urmare $\mathcal{F}$ verifică și 2).

Acum dacă x este un număr rațional, există întotdeauna un număr întreg k astfel încît $k \leqslant x < k + 1$. Deci $x \in \bigcup\limits_{A \in \mathcal{F}} A$, de unde $\mathbf{Q} = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{F}} A$. În concluzie mulțimea $\mathcal{F}$ constituie o partiție pentru mulțimea $\mathbf{Q}$.

b) Fie mulțimea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Considerăm mulțimile $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$, $C = \{4, 5\}$. Putem forma mulțimea $\mathcal{F} = \{A, B, C\}$.

Din modul cum a fost definită $\mathcal{F}$ rezultă imediat că ea constituie o partiție pentru mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

c) Dacă $X = \emptyset$ atunci $\mathcal{F} = \emptyset$ este o partiție a lui X.

Fie acum o mulţime X, oarecare şi ρ o relaţie de echivalenţă pe ea. În 5.3.3 am construit mulţimea X/ρ, care, conform teoremei 5.3.6 este o partiţie pentru mulţimea X. Reciproc, dată fiind o partiţie $\mathcal{F}$ pe X, vom defini o relaţie binară ρ pe X în modul următor: două elemente x şi y din X sînt în relaţia ρ dacă y şi x aparţin unei aceleiaşi mulţimi A a partiţiei $\mathcal{F}$. Vom demonstra că ρ este o relaţie de echivalenţă pe X; mai mult, vom arăta că în felul acesta se stabileşte o bijecţie între mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe X şi mulţimea partiţiilor lui X.

Vom nota cu $R(X)$ mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe mulţimea X şi cu Part (X) mulţimea partiţiilor pe mulţimea X. Definim funcţia $\varphi: R(X) \to \text{Part}\,(X)$ prin egalitatea: $\varphi(\rho) = X/\rho$ oricare ar fi $\rho \in R(X)$.

Acum dacă $\mathcal{F}$ este o partiţie pe X, $\mathcal{F} \in \text{Part}\,(X)$, definim mulţimea ρ în modul următor:

$$\rho = \{(x, y) \mid (\exists A)\,(A \in \mathcal{F}\ \&\ x \in A\ \&\ y \in A)\}.$$

Este clar că $\rho \subset X \times X$, deci ρ este o relaţie binară pe X.

5.4.3. *Propoziţie.* **ρ este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea X.**
Demonstraţie. Fie $x \in X$. Cum $X = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{F}} A$, există $A \in \mathcal{F}$ astfel încît $x \in A$. Deci $(x, x) \in \rho$ şi prin urmare ρ este reflexivă.

Să arătăm că ρ este simetrică. Fie $(x, y) \in \rho$; după definiţia relaţiei ρ, există $A \in \mathcal{F}$ astfel încît $x \in A$ şi $y \in A$. Rezultă că $y \in A$ şi $x \in A$, deci $(y, x) \in \rho$.

În sfîrşit, să arătăm că ρ este şi tranzitiv. Vom presupune că $(x, y) \in \rho$ şi $(y, z) \in \rho$. Din relaţia $(x, y) \in \rho$ se obţine că există $A \in \mathcal{F}$ astfel încît $x \in A$ şi $y \in A$. Din relaţia $(y, z) \in \rho$ rezultă că există $B \in \mathcal{F}$ astfel încît $y \in B$ şi $z \in B$. Cum $y \in A \cap B$, se deduce că $A = B$, deoarece $\mathcal{F}$ verifică 2) din 5.4.1. Deci $x \in A$ şi $z \in A$, de unde $(x, z) \in A$ şi deci $(x, z) \in \rho$.

Din această propoziţie rezultă că putem defini funcţia: $\psi: \text{Part}\,(X) \to R(X)$ prin egalitatea:

$$\psi(\mathcal{F}) = \rho.$$

5.4.4. *Teoremă.* **Cu notaţiile de mai sus, funcţiile φ şi ψ sînt una inversa celeilalte, adică $\varphi \circ \psi = 1_{Part(X)}$ şi $\psi \circ \varphi = 1_{R(X)}$.**

Demonstraţie. Fie $\rho \in R(X)$ şi să arătăm că $(\psi \circ \varphi)\ (\rho) = \rho$. Dar

$$(\psi \circ \varphi)\ (\rho) = \psi(\varphi(\rho)) = \psi(X/\rho).$$

Să notăm cu $\rho' = \psi(X/\rho)$. Dacă $(x, y) \in \rho$, atunci din 5.3.6 $[x]_\rho = [y]_\rho$. Din definiţia funcţiei ψ rezultă că $(x, y) \in \rho'$. Deci are loc incluziunea $\rho \subset \rho'$.

Invers, fie $(x, y) \in \rho'$. Conform definiției funcției ψ rezultă că există $A \in X/\rho$ astfel încît $x \in A$ și $y \in A$. Dar, atunci există $z \in X$ astfel încît $A = [z]_\rho$. Din relațiile $x \in [z]_\rho$ și $y \in [z]_\rho$ deducem după 5.3.1 că $x \rho z$ și $y \rho z$. Cum ρ este o relație de echivalență, obținem că $x \rho y$ sau altfel scris $(x, y) \in \rho$. Deci are loc și incluziunea $\rho' \subset \rho$, prin urmare are loc egalitatea $\rho = \rho'$.

Să arătăm acum egalitatea $\varphi \circ \psi = 1_{Part(X)}$. Fie $\mathcal{F} \in$ Part (X), atunci $(\varphi \circ \psi)(\mathcal{F}) = \varphi(\psi(\mathcal{F}))$. Dacă notăm cu $\rho = \psi(\mathcal{F})$ trebuie arătată egalitatea $\varphi(\rho) = \mathcal{F}$.

Fie $A \in \mathcal{F}$; cum $A \neq \emptyset$, există $x \in A$. Din definiția funcției ψ rezultă că $[x]_\rho = A$ și deci $A \in X/\rho$. Prin urmare are loc incluziunea $\mathcal{F} \subset \varphi(\rho)$.

Invers, fie $A \in \varphi(\rho)$. Dar $\varphi(\rho) = X/\rho$ atunci există $x \in X$ astfel încît $A = [x]_\rho$.

Cum $\mathcal{F}$ este o partiție, pentru x există $B \in \mathcal{F}$ astfel încît $x \in B$. Din definiția funcției ψ obținem că $[x]_\rho = B$, de unde decurge că $A = B$. Deci are loc și incluziunea $\varphi(\rho) \subset \mathcal{F}$. Prin urmare are loc egalitatea $\varphi(\rho) = \mathcal{F}$, adică egalitatea $\varphi \circ \psi = 1_{Part(X)}$.

5.5. Relație de ordine

În 5.1 am introdus noțiunea de relație binară. O clasă specială de relații binare o constituie relațiile de ordine. În 5.1 am definit noțiunile de relație binară reflexivă și relație binară tranzitivă. Pentru ca să definim noțiunea de relație de ordine, vom introduce mai întîi noțiunea de relație binară antisimetrică.

Notațiile rămîn cele din subparagrafele precedente.

5.5.1. *Definiție.* **Fie X o mulțime și ρ o relație binară pe această mulțime. Vom spune că relația ρ este *antisimetrică* dacă are loc incluziunea:**

$$\rho \cap \rho^{-1} \subset \Delta_X,$$

unde ρ^{-1} este inversa relației ρ.

Altfel spus, ρ este o relație antisimetrică dacă este verificată proprietatea următoare: dacă $x, y \in X$ sînt două elemente oarecare cu proprietatea $(x, y) \in \rho$ și $(y, x) \in \rho$, atunci rezultă $x = y$.

Aceasta se scrie mai simplu astfel:

$$x \rho y \,\&\, y \rho x \Rightarrow x = y.$$

5.5.2. *Exemple.* 1) Fie mulțimea $X = \{1,2,3\}$ și relația binară:

$$\rho = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3)\}$$

Este clar că $\rho^{-1} = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,2)\}$ şi $\rho \cap \rho^{-1} = \{(1,1), (2,2)\}$. Deci $\rho \cap \rho^{-1} \subset \Delta_X$ şi prin urmare ρ este o relaţie antisimetrică.

2) Fie $\mathbf{R}$ mulţimea numerelor reale. Pe această mulţime considerăm relaţia binară:

$$\rho = \{(x,x^2) \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

Inversa acestei relaţii este $\rho^{-1} = \{(x^2,x) \mid x \in \mathbf{R}\}$. Dacă (a,b) este un element ce aparţine intersecţiei $\rho \cap \rho^{-1}$ atunci au loc egalităţile: $a = b^2$ şi $b = a^2$. Din aceste două egalităţi obţinem $a = a^4$ şi deci $a = 0$ sau $a = 1$. Prin urmare $\rho \cap \rho^{-1} = \{(0,0), (1,1)\}$ şi deci ρ este o relaţie antisimetrică.

5.5.3. *Definiţie.* **Fie X o mulţime. O relaţie binară notată cu simbolul „$\leqslant$" pe această mulţime se numeşte** *relaţie de ordine (parţială)* **dacă este în acelaşi timp o relaţie reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.**

Altfel spus, o relaţie binară „$\leqslant$" pe mulţimea X este o relaţie de ordine dacă are proprietăţile:

a) oricare ar fi $x \in X$, $x \leqslant x$ (reflexivitatea);

b) oricare ar fi $x,y \in X$ cu proprietatea $x \leqslant y$ şi $y \leqslant x$, atunci $x = y$ (antisimetria);

c) oricare ar fi $x,y,z \in X$ cu proprietăţile: $x \leqslant y$ şi $y \leqslant z$, atunci $x \leqslant z$ (tranzitivitatea).

O mulţime X pe care s-a definit o relaţie de ordine „$\leqslant$" se numeşte mulţime *(parţial) ordonată* şi vom nota aceasta prin $(X, \leqslant)$.

Dacă x şi y sînt două elemente din X, cînd $x \leqslant y$, acesta se citeşte astfel: „x este ***mai mic sau egal*** cu y".

5.5.4. *Observaţii.* În afară de notaţia curentă „$\leqslant$" se mai folosesc pentru a desemna o relaţie de ordine şi simbolurile „$\subseteq$" (se citeşte „inclus") etc.

De asemenea ne vom găsi în situaţia următoare: fiind date două mulţimi X şi Y în general distincte şi ambele ordonate să notăm relaţiile de ordine, care sînt diferite, cu acelaşi simbol „$\leqslant$".

5.5.5. *Exemple.* 1) Fie mulţimea $X = \{1,2,3,4\}$. Considerăm pe această mulţime relaţia binară „$\leqslant$" definită astfel:

$$\leqslant = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (3,4)\}.$$

Se constată imediat că „$\leqslant$" verifică proprietăţile a), b), c), din 5.5.3 ; deci este o relaţie de ordine.

Trebuie observat că pentru a defini relaţia „$\leqslant$" am enumerat efectiv toate elementele mulţimii „$\leqslant$".

Legătura dintre elementele mulţimii X prin relaţia „$\leqslant$" este următoarea:

$$1 \leqslant 1,\ 2 \leqslant 2,\ 3 \leqslant 3,\ 4 \leqslant 4,\ 1 \leqslant 2,\ 3 \leqslant 4.$$

2) Fie mulţimea $X = \{1,2,3\}$. Considerăm pe această mulţime relaţia binară „$\leqslant$" definită în modul următor:

$$\leqslant\ = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (1,2),\ (2,3),\ (1,3)\}.$$

Se constată imediat că această relaţie binară este o relaţie de ordine pe mulţimea X. Legătura dintre elementele mulţimii X se scrie în modul următor:

$$1 \leqslant 1,\ 2 \leqslant 2,\ 3 \leqslant 3,\ 1 \leqslant 2,\ 2 \leqslant 3,\ 1 \leqslant 3.$$

3) Fie $\mathbf{N}$ mulţimea numerelor naturale. Definim pe această mulţime relaţia binară „$\leqslant$" astfel:
Dacă $x,y \in \mathbf{N}$, atunci $x \leqslant y \Leftrightarrow$ există un număr natural a astfel încît $y = ax$.

Să dovedim că relaţia „$\leqslant$" este o relaţie de ordine. Dacă $x \in \mathbf{N}$ atunci $x = x \cdot 1$ şi deci $x \leqslant x$. Deci „$\leqslant$" este reflexivă.

Fie x şi y două numere naturale astfel încît $x \leqslant y$ şi $y \leqslant x$. Atunci există numerele naturale $a,\ b \in \mathbf{N}$ pentru care $y = ax$ şi $x = by$. Rezultă egalităţile $y = y\ (ab)$ şi $x = x\ (ab)$. Dacă $x = 0$ şi $y = 0$ atunci $x = y$; dacă cel puţin unul dintre numerele x şi y este diferit de zero, obţinem $ab = 1$, de unde $a = b = 1$. Deci $x = y$ şi prin urmare relaţia „$\leqslant$" este antisimetrică.

Dacă $x,\ y,\ z$ sînt trei numere naturale astfel încît $x \leqslant y$ şi $y \leqslant z$, atunci există numerele naturale $a,\ b$ astfel încît $y = ax$ şi $z = by$, de unde se obţine egalitatea $z = (ab)\ x$. Prin urmare $x \leqslant z$ şi relaţia „$\leqslant$" este şi tranzitivă.

4) Fie X o mulţime oarecare şi $\mathcal{P}(X)$ mulţimea părţilor ei. Definim pe $\mathcal{P}(X)$ relaţia „$\leqslant$" în felul următor: dacă A şi B sînt două elemente din $\mathcal{P}\ (X)$ atunci

$$A \leqslant B \Leftrightarrow A \subset B.$$

Ţinînd cont de proprietăţile incluziunii (a se vedea § 1), relaţia „$\subset$" pe mulţimea $\mathcal{P}(X)$ este o relaţie de ordine.

5) Fie $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ mulţimea numerelor naturale, respectiv întregi, raţionale şi reale. Între aceste patru mulţimi există şirul de incluziuni

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Fiecare dintre aceste mulţimi, împreună cu relaţia de ordine obişnuită (pe care o numim relaţia de ordine naturală), formează o mulţime ordonată.

Printre relaţiile de ordine vom distinge o clasă importantă şi anume relaţiile de ordine în care oricare două elemente sînt comparabile. Mai precis dăm definiţia:

5.5.6. *Definiţie.* **Fie X o mulţime şi „$\leqslant$" o relaţie de ordine pe această mulţime. Se spune că relaţia „$\leqslant$" este *totală* dacă oricare ar fi două elemente x, y din X are loc cel puţin una din următoarele două situaţii: $x \leqslant y$ sau $y \leqslant x$.**

O mulţime X pe care s-a definit o relaţie de ordine totală se numeşte *total ordonată*.

5.5.7. *Exemple.* 2) şi 5) din 5.5.5 sînt exemple de relaţii de ordine totală. 1) şi 3) sînt exemple de relaţii de ordine care nu sînt totale.

Să analizăm acum exemplul 4 din 5.5.5. Vom distinge trei cazuri. *Primul caz*: $X = \emptyset$; atunci $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$. Este evident că elementele acestei mulţimi sînt comparabile.

Cazul al doilea: $X = \{a\}$, adică este formată dintr-un singur element. În acest caz $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}\}$. Se observă că prin relaţia „$\leqslant$" definită în exemplul 4, oricare două elemente sînt comparabile.

Cazul al treilea: X are cel puţin două elemente distincte a şi b. Atunci nu are loc nici una din incluziunile $\{a\} \subset \{b\}$ sau $\{b\} \subset \{a\}$, deci în acest caz există două elemente care nu sînt comparabile.

În concluzie, în primele două cazuri $(\mathcal{P}(X), \leqslant)$ este o mulţime total ordonată. În situaţia cînd X are cel puţin două elemente $(\mathcal{P}(X), \leqslant)$ nu mai este o mulţime total ordonată.

5.5.8. *Propoziţie.* **Fie $(X, \leqslant)$ o mulţime ordonată şi $A \subset X$ o submulţime a lui X. Definim pe A relaţia binară „$\leqslant_A$" în felul următor:**

Dacă $x, y \in A$ atunci $x \leqslant_A y \Leftrightarrow x \leqslant y$.

Relaţia „$\leqslant_A$" este o relaţie de ordine. Dacă „$\leqslant$" este o relaţie de ordine totală, atunci şi relaţia „$\leqslant_A$" este de ordine totală. Demonstraţia acestei propoziţii este evidentă.

5.5.9. *Definiţie.* **Cu notaţiile din 5.5.8, relaţia „$\leqslant_A$" se numeşte *relaţia de ordine indusă* pe mulţimea A, de relaţia de ordine „$\leqslant$".**

5.5.10. *Propoziție.* **Fie $(X, \leqslant)$ o mulțime ordonată. Definim pe X relația binară, notată cu „$<$", în felul următor**

$$x < y \Leftrightarrow x \leqslant y \text{ și } x \neq y.$$

Relația „$<$" are proprietățile:

1) $x \nless x$ (adică $\neg\, x(< x)$) (ireflexivitate),
2) $x < y$ și $y < x$ nu pot avea loc simultan (asimetrice),
3) $x < y$ și $y < z \Rightarrow x < z$ (tranzitivitatea).

Demonstrație. 1) rezultă din definiția relației „$<$".

2) Dacă ar avea loc $x < y$ și $y < x$ atunci ar avea loc și relațiile $x \leqslant y$ și $y \leqslant x$, deci $x = y$ care este contradicție. Prin urmare, relațiile $x < y$ și $y < x$ nu pot avea loc simultan.

3) Cum $x < y$ și $y < z$, avem $x \leqslant y$ și $y \leqslant z$, deci $x \leqslant z$ (relația „$\leqslant$" fiind tranzitivă). Presupunem că $x = z$, atunci avem relațiile $x < y$ și $y < x$, ceea ce este o contradicție. Prin urmare trebuie neapărat ca $x \neq z$ și deci $x < z$.

5.5.11. *Definiție.* **Cu notațiile din 5.5.10, relația „$<$" se numește** ***relația de ordine strictă*** **asociată relației „$\leqslant$". Cînd $x < y$, atunci se citește „x este strict mai mic ca y".**

5.5.12. *Propoziție.* **Fie X o mulțime și „$\leqslant$" o relație de ordine pe această mulțime.**

Definim pe mulțimea X relația „$\geqslant$" în modul următor:

$$x \geqslant y \Leftrightarrow y \leqslant x.$$

Relația „$\geqslant$" este o relație de ordine. Dacă „$\leqslant$" este o relație de ordine totală, atunci și „$\geqslant$" are această proprietate.

Demonstrație. Să dovedim că relația „$\geqslant$" este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Fie $x \in X$ un element oarecare. Cum $x \leqslant x$, avem $x \geqslant x$ și dec relația „$\geqslant$" este reflexivă.

Dacă x și y sînt două elemente din X cu proprietățile $x \geqslant y$ și $y \geqslant x$, atunci au loc și relațiile $y \leqslant x$ și $x \leqslant y$, de unde obținem că $x = y$. Deci relația „$\geqslant$" este antisimetrică.

Fie x, y, z trei elemente cu proprietățile $x \geqslant y$ și $y \geqslant z$. Atunci au loc relațiile $y \leqslant x$ și $z \leqslant y$. Dar relația „$\leqslant$" este tranzitivă; atunci $z \leqslant x$. Din definiția relației „$\geqslant$" obținem $x \geqslant z$ și deci „$\geqslant$" este tranzitivă.

Presupunem acum că „$\leqslant$" este totală. Dacă $x, y \in X$ sînt două elemente oarecare, atunci $x \leqslant y$ sau $y \leqslant x$. Din definiția relației „$\geqslant$" obținem $y \geqslant x$ sau $x \geqslant y$ și deci „$\geqslant$" este o relație de ordine totală.

5.5.13. *Definiție.* **Cu notațiile din 5.5.12, relația de ordine „$\geqslant$" se numește** *opusa (duala)* **relației de ordine „$\leqslant$".**

5.5.14. *Definiție.* **Fie $(X, \leqslant)$ și (Y, α) două mulțimi ordonate. O funcție $f: X \to Y$ se numește** *izotonă (crescătoare)* **dacă pentru orice două elemente $x, x' \in X$ cu proprietatea $x \leqslant x'$, rezultă $f(x)\ \alpha\ f(x')$.**

5.5.15. *Exemple.* 1) Fie $X = \{1,2,3,4\}$ și relația binară „$\leqslant$" definită astfel:

$$1 \leqslant 1,\ 2 \leqslant 2,\ 3 \leqslant 3,\ 4 \leqslant 4,\ 1 \leqslant 2,\ 1 \leqslant 4$$

care este evident o relație de ordine (nu totală).

Considerăm și mulțimea $Y = \{1,2,3,4,5\}$ și relația binară „α" definită pe această mulțime în modul următor:

$$1\,\alpha\,1,\ 2\,\alpha\,2,\ 3\,\alpha\,3,\ 4\,\alpha\,4,\ 5\,\alpha\,5,\ 1\,\alpha\,3,\ 1\,\alpha\,5,\ 2\,\alpha\,5.$$

Această relație este o relație de ordine.

Fie funcția $f: X \to Y$ definită prin egalitățile:

$$f(1) = 1,\ f(2) = 3,\ f(3) = 3,\ f(4) = 5.$$

Se constată imediat că această funcție este izotonă.

2) Fie $\mathbf{R}_+$ mulțimea numerelor reale pozitive, adică $\mathbf{R}_+ = \{x/\ x \in \mathbf{R}$ și $x \geqslant 0\}$. Pe această mulțime considerăm relația de ordine „$\leqslant$" indusă de relația de ordine *naturală* „$\leqslant$" de pe mulțimea numerelor reale. Considerăm $(\mathbf{R}, \leqslant)$ cu relația de ordine naturală. Funcția $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ definită prin egalitatea $f(x) = x^2$ este o funcție izotonă.

3) Fie $(\mathbf{N}, \leqslant)$ mulțimea numerelor naturale cu relația de ordine *naturală*. Funcția $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definită prin egalitatea $f(x) = x^3$ este o funcție izotonă.

Într-adevăr dacă x și x' sînt două numere naturale astfel încît $x \leqslant x'$ atunci are loc și inegalitatea $x^3 \leqslant x'^3$, adică $f(x) \leqslant f(x')$.

5.6. Exerciții

1) Fie $\mathbf{Z}$ mulțimea numerelor întregi. Definim relația binară notată cu „/" (divizibilitatea) în felul următor:

$$x/y \Leftrightarrow (\exists z)\ (z \in \mathbf{Z}\ \&\ y = zx)$$

să se arate că „/" este o relaţie reflexivă şi tranzitivă dar nu este simetrică.

2) Fie **Z** mulţimea numerelor întregi. Definim pe **Z** relaţia binară ρ în felul următor:
$x\rho y \Leftrightarrow x / y \,\&\, y/x$ („/" este relaţia de la exerciţiul 1).
Să se arate că ρ este o relaţie de echivalenţă.

3) Fie **Z** mulţimea numerelor întregi şi definim relaţia binară ρ în felul următor:

$$x\rho y \Leftrightarrow x^2 = y^2.$$

Să se arate că ρ este o relaţie de echivalenţă.

4) Fie **R** mulţimea numerelor reale pe care definim relaţia binară:

$$x\rho y \Leftrightarrow |x| = |y|$$

unde $|x|$ reprezintă modulul numărului real x, definit astfel

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Să se arate că ρ este o relaţie de echivalenţă.

5) Fie $f\colon X \to Y$ o funcţie. Pe mulţimea X definim relaţia binară notată cu ρ_f în modul următor:

$$x\rho_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

Să se arate că ρ_f este o relaţie de echivalenţă.

Să se dovedească că exerciţiile 3) şi 4) sînt cazuri particulare ale lui 5).

6) Fie mulţimea $X = \{1, 2, 3\}$. Să se scrie toate relaţiile de echivalenţă ce se pot introduce pe această mulţime.

7) Să se calculeze mulţimea factor în exerciţiile 2), 3), 4).

8) Fie mulţimea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ şi relaţia ρ pe această mulţime, definită de egalitatea:

$$\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1)\}.$$

Să se arate că este o relaţie de echivalenţă şi apoi să se determine X/ρ.

9) Fie $f: X \to Y$ o funcţie şi ρ_f relaţia de echivalenţă definită în 5).

Să se arate că asocierea

$$\bar{f}: X/\rho_f \to f(X)$$

definită prin egalitatea $\bar{f}([x]_{\rho_f}) = f(x)$ este o funcţie. Apoi să se dovedească că $\bar{f}$ este o bijecţie.

10) Fie X o mulţime şi ρ, ρ' două relaţii de echivalenţă pe X. Să se arate că $\rho \cap \rho'$ este o relaţie de echivalenţă.

11) Fie X o mulţime şi ρ, ρ' două relaţii de echivalenţă pe X. Să se arate că necesar şi suficient ca $\rho \circ \rho'$ să fie o relaţie de echivalenţă este ca $\rho \circ \rho' = \rho' \circ \rho$.

12) Fie X o mulţime finită avînd n elemente. Să se arate că numărul de relaţii de echivalenţă pe X, pentru care X/ρ are două elemente este egal cu $2^{n-1} - 1$.

13) Fie $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Definim mulţimea $\mathcal{F}$ astfel $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$. Să se arate că $\mathcal{F}$ este o partiţie şi apoi să se scrie relaţia de echivalenţă definită de această partiţie.

14) Fie $X = \{1, 2, 3\}$. Să se scrie toate partiţiile pe mulţimea X.

15) Fie $X = \{1, 2, 3\}$. Să se scrie toate relaţiile de ordine pe mulţimea X.

16) Fie $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Să se scrie toate relaţiile de ordine totală pe mulţimea X.

17) Fie X o mulţime. Să se arate că singura relaţie binară care este şi de echivalenţă şi de ordine în acelaşi timp este egalitatea.

18) Fie X o mulţime şi ρ, ρ' două relaţii de ordine pe mulţimea X. Să se arate că $\rho \cap \rho'$ este o relaţie de ordine.

19) Fie $F = \{f \mid f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$, adică mulţimea funcţiilor definite pe mulţimea numerelor reale cu valori în mulţimea numerelor reale.

Definim pe F relaţia binară „$\leqslant$" în felul următor:

$$f \leqslant g \Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x) \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că $\leqslant$ este o relaţie de ordine care nu este totală pe mulţimea F.

§ 6. Mulțimi finite și mulțimi infinite

6.1 Cum comparăm mulțimile?

O problemă practică extrem de veche, care a dat naștere unei teorii matematice dintre cele mai profunde și mai interesante este următoarea: *„fiind date mulțimile A și B, să se stabilească un criteriu prin care să se decidă care din cele două mulțimi are mai multe elemente"*. Spunem că această problemă este veche și își are originea în practica veche, pentru că ea s-a pus cu siguranță în fața omului din cele mai vechi timpuri. Trebuie să ne imaginăm că la începuturile istoriei omenirii, un vînător care schimba cu un alt vînător piei de animale pe arme de vînătoare avea criterii precise prin care se asigura că dacă schimbă o piele pe un topor, atunci va primi pe cele 5 piei pe care le are, exact 5 topoare. Antropologii zilelor noastre au stabilit că unele triburi procedează și astăzi în felul următor: primul vînător întinde pe pămînt blănurile pe care le are iar cel de-al doilea pune lîngă fiecare piele cîte un topor. În acest mod, se formează perechi de obiecte, fiecare pereche conținînd cîte o blană și un topor, adică numărul blănurilor aflate în procesul de schimb este egal cu numărul topoarelor. Apoi primul vînător ridică de la pămînt topoarele iar cel de-al doilea ia blănurile. Schimbul a fost echitabil. Vom vedea mai tîrziu că procedînd astfel, cei doi vînători au făcut matematică la cel mai abstract nivel, stabilind un criteriu de comparare a celor două mulțimi de obiecte pe care le schimbă, cu ajutorul unei funcții bijective.

6.1.1. Să revenim acum la problema pe care am enunțat-o la începutul paragrafului. Pentru noi, răspunsul la această întrebare este în anumite cazuri (chiar mai complicate decît cazul schimbului de mai sus) simplu. Dacă presupunem de exemplu că A este mulțimea boabelor de grîu dintr-un sac, iar B este mulțimea merelor dintr-un sac identic cu primul, vom fi cu toții de acord că mulțimea A are mai multe elemente decît B. Dar cîți dintre noi pot explica amănuntele raționamentului care a condus la această concluzie?

Un alt exemplu, puțin diferit de precedentul, ne oferă șansa de a da și o explicație rezonabilă răspunsului pe care-l formulăm. Dacă A este mulțimea elevilor din școală care au media 10 la matematică iar B mulțimea elevilor din anul al doilea care au media 10 la matematică, oricine va putea răspunde la întrebare cu afirmația: mulțimea A are mai multe elemente decît B. La întrebarea:

— De ce?
răspunsul este — universal — următorul:

— Mulţimea B este inclusă în A, deci A posedă eventual şi alte elemente decît cele ale lui B. Aşadar A are mai multe elemente decît B. În orice caz, chiar dacă în anii I, III, IV nu există nici un elev cu media 10 la matematică, nu vom avea în B mai multe elemente decît în A.

Raţionamentul de mai sus este corect. Vom da însă exemple în care el nu poate fi aplicat, căci ne va conduce la concluzii greşite. Va trebui însă, să enunţăm o teoremă profundă de matematică pentru a vedea care sînt cazurile în care acest raţionament este corect şi care sînt cele în care raţionamentul este fals.

Dacă în cele două exemple de mai sus, răspunsul la întrebarea noastră era relativ simplu, există însă cazuri în care a răspunde la această întrebare nu este chiar atît de uşor. Mai mult, s-ar putea ca uneori, atunci cînd cineva ne arată care este răspunsul corect, intuiţia noastră să fie contrariată. Iată cîteva din aceste exemple.

6.1.2. Fie A mulţimea punctelor unui segment MN şi B mulţimea punctelor dintr-un cub cu latura de 1 cm. Dacă vom încerca să procedăm aşa cum am procedat în vreunul din cazurile de mai sus sau cum au procedat cei doi vînători, ne vom lovi de dificultăţi serioase. În primul rînd, nu vom putea număra nici punctele segmentului MN, nici punctele cubului, deci nu vom putea compara, numărul elementelor mulţimii A" cu numărul elementelor mulţimii B". În al doilea rînd, s-ar putea ca mulţimea B să nu fie o submulţime a lui A, deci nu vom putea aplica raţionamentul din exemplul cu elevii care au media 10 la matematică.

În cel mai fericit caz, s-ar putea ca printr-un procedeu oarecare, segmentul MN să poată fi inclus în cubul nostru, fie suprapunîndu-se pe una din laturi (figura 6.1.2.1), dacă MN are lungimea mai mică de 1 cm, fie incluzînd segmentul în interiorul cubului (figura 6.1.2.2),

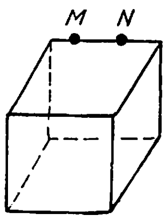


Fig. 6.1.2.1.

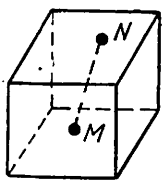


Fig. 6.1.2.2.

dacă lungimea sa este mai mică decît $\sqrt{3}$. (Să se explice necesitatea acestei condiţii, aplicînd în cubul nostru teorema lui Pitagora.)

În ambele cazuri, sîntem tentaţi să tragem concluzia că există mai multe puncte în cub decît pe segmentul MN. Această concluzie ar fi însă greşită. Utilizînd rezultatele din § 7 cititorul va putea demonstra (vezi exerciţiul 7.5.1.f) că ***segmentul şi cubul au acelaşi număr de puncte.*** Această afirmaţie, atît de puţin acceptabilă, pentru moment, intuiţiei noastre, va căpăta o demonstraţie matematică. Ea va deveni clară numai după ce vom da un sens riguros matematic faptului că două mulţimi au acelaşi număr de elemente.

6.1.3. Să considerăm un nou exemplu. Fie A mulţimea punctelor unui segment MN şi B mulţimea punctelor segmentului $M'N'$ (fig. 6.1.3.1). Nemaiavînd de comparat segmente cu cuburi, s-ar părea că, în acest caz, putem da un răspuns exact la întrebarea: care dintre cele două segmente are mai multe puncte?

Putem proceda ca în exemplul cu elevii care au 10 la matematică. Să luăm unul din segmente şi să-l suprapunem peste celălalt, astfel încît punctele M şi M' să coincidă. Observăm că în cazul nostru punctele din MN se suprapun peste cele ale lui $M'N'$ iar în $M'N'$ rămîn punctele segmentului NN' care nu sînt acoperite de punctele lui MN (fig. 6.1.3.1).

Sîntem tentaţi să spunem că mulţimea B (adică segmentul $M'N'$) are mai multe elemente (adică puncte) decît mulţimea A (segmentul MN). Vom încerca acum să răspundem problemei utilizînd o metodă asemănătoare celei pe care o foloseau vînătorii de care am vorbit mai înainte. Aşezăm segmentele MN şi $M'N'$ paralel şi notăm cu P intersecţia dreptelor MM' şi NN'. Dacă Q este un punct oarecare al segmentului MN, din figura 6.1.3.2, dreapta PQ intersectează segmentul $M'N'$ într-un punct Q'. Formăm în acest mod perechi de forma (Q, Q') unde $Q \in A$, $Q' \in B$, iar perechea este astfel construită încît punctele P, Q, Q' sînt coliniare. Fiind dat un punct $Q \in A$ el figurează în pereche cu un singur punct Q'; oricum am lua un punct $Q' \in B$, există un punct $Q \in A$ astfel încît (Q, Q') să se afle într-o pereche de acest fel, căci putem lua Q la intersecţia lui MN cu PQ'. Am stabilit astfel că orice punct $Q \in A$ formează

Fig. 6.1.3.1.

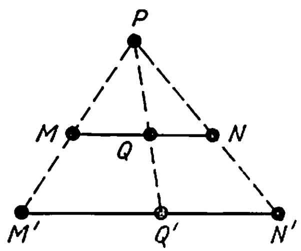


Fig. 6.1.3.2.

pereche cu un singur punct Q' din B și că epuizăm în acest mod toate punctele lui A și B. Cu alte cuvinte, segmentele MN și $M'N'$ conțin un număr egal de puncte, chiar dacă ele au lungimi diferite. Această concluzie, care vine în contradicție cu concluzia obținută prin raționamentul precedent, este obținută nu prin enumerarea punctelor din cele două segmente, ci printr-un raționament geometric. Și totuși acesta este răspunsul adevărat în cazul exemplului nostru. Pentru a înțelege mai bine, de ce al doilea raționament și nu cel dintîi ne-a condus la răspunsul real, vom căuta să arătăm cum se transpune în termeni matematici problema enunțată la începutul prezentului paragraf. Vom vedea că punctul de vedere al matematicii într-o asemenea problemă este mult mai profund decît punctul de vedere al practicii de toate zilele. Această profunzime vine din două direcții: este vorba în primul rînd de a defini în mod riguros matematic modul în care se compară mulțimile din punctul de vedere al numărului elementelor, criteriu care pînă acum nu a fost stabilit. În al doilea rînd, definițiile noastre vor fi aplicabile tuturor mulțimilor, nu numai celor folosite în cazuri particulare și ale căror elemente pot fi caracterizate printr-un număr finit.

Pentru a justifica mai bine punctul de vedere al matematicii în această problemă, vom începe cu un nou exemplu.

6.1.4. Să presupunem că într-o sală de dans, în care se află fete și băieți, cineva — dintre organizatori — își pune întrebarea:

— Sînt mai multe fete sau mai mulți băieți în această sală? O persoană propune atunci să fie numărate fetele și băieții și apoi să se compare cele două numere. Aglomerația existentă precum și mișcarea continuă existentă în sală face acest proiect nerealizabil. Atunci unul dintre organizatori, o persoană cu spirit matematic, are o propunere simplă și realizabilă.

— Pentru că toți participanții sînt doritori să danseze și știu să danseze, e suficient ca orchestra să înceapă a cînta. După formarea perechilor de dansatori, vom vedea dacă rămîn în afara dansului băieti sau fete.

Să analizăm puțin această soluție. Să notăm cu B mulțimea băieților și cu F mulțimea fetelor din sala de dans. Pentru precizare, să presupunem că în urma aplicării soluției de mai sus s-a constatat că au rămas fără partenere de dans cîțiva băieți. Experiența organizatorilor dansului se traduce matematic astfel: există o funcție f de la mulțimea F a fetelor din sală la mulțimea B a băieților, astfel încît dacă $x \in F$ atunci „$f(x)$ este acel băiat care dansează cu x". Funcția f este injectivă dacă presupunem că, printr-o alegere convenabilă a dansului, un băiat nu poate dansa cu două fete. Dacă numărul fetelor ar fi fost egal cu numărul băieților, funcția f de mai sus ar fi fost surjectivă, deci bijectivă. Reciproc, dacă f este bijectivă atunci fiecare băiat este partenerul la dans al unei fete deci nu rămîne în afara dansului nici o fată şi nici un băiat, adică numărul fetelor este egal cu numărul băieţilor. Consideraţii analoage se pot face dacă în afara dansului au rămas cîteva fete.

Concluzia care se desprinde în ambele cazuri este următoarea: cele două mulţimi de fete şi băieţi au acelaşi număr de elemente dacă există o funcţie bijectivă definită pe una din mulţimi cu valori în cealaltă. Această observaţie privind mulţimile care au acelaşi număr de elemente ne va servi pentru a da o definiţie riguroasă din punct de vedere matematic a situaţiei.

6.1.5. *Definiţie.* **Vom spune că mulţimile** A **şi** B **sînt** *echivalente* **dacă există o funcţie bijectivă** $f\colon A \to B$. **Uneori vom spune că** A **şi** B **sînt** *cardinal echivalente.*

În exemplul de mai sus cu perechile de dansatori, funcţia $f\colon F \to B$ este bijectivă, deci mulţimea fetelor şi a băieţilor, sînt echivalente, dacă şi numai dacă în sala de dans sînt tot atîtea fete cît şi băieţi. Mulţimea punctelor dintr-un segment MN este cardinal echivalentă cu mulţimea punctelor din orice alt segment $M'N'$, căci exemplul 6.1.3. ne arată că există o funcţie bijectivă între cele două mulţimi prin care se asociază punctului $Q \in MN$ punctul $Q' \in M'N'$ astfel încît P, Q, Q' sînt coliniare (vezi figura 6.1.3.2). Un alt exemplu de mulţimi echivalente ni-l furnizează cei doi vînători care, schimbînd o blană pe un topor, au grijă ca în final fiecare din ei să dea şi să obţină în schimb acelaşi număr de obiecte. Punînd obiectele pe care le schimbă în perechi, ei stabilesc o funcţie bijectivă între cele două mulţimi.

6.2. Mulţimi finite şi operaţii cu ele

În procesul de comparare a mulţimilor din punctul de vedere al numărului lor de elemente, ne întîlnim foarte des cu o clasă de mulţimi ale căror proprietăţi au influenţat cel mai mult modul nostru de a raţiona în acest gen de probleme, şi anume cu mulţimile finite. Aceste mulţimi ne sînt familiare şi din practica de toate zilele. Noi le vom studia acum riguros, demonstrînd proprietăţile lor care ne păreau ca fiind evidente, dar pentru care nu aveam argumente matematice.

6.2.1. *Definiţie.* **Vom spune că o mulţime** A **este** *finită* **dacă există un număr natural** $n \in \mathbf{N}$ **şi o funcţie bijectivă**

$$f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to A.$$

Cu alte cuvinte, o mulţime finită este echivalentă cu o mulţime de forma $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Dacă mulţimea A este finită, atunci elementele sale se pot aranja într-un şir finit. Într-adevăr, să presupunem că A este echivalentă cu $\{1, 2, \ldots, n\}$ şi că funcţia care realizează această corespondenţă este

$$f: \{1, 2, \ldots, n\} \to A.$$

Pentru că f este surjectivă, $A = \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$, adică orice element $a \in A$ este egal cu un element de forma $f(i)$ unde $1 \leqslant i \leqslant n$. Pentru că f este injectivă, două elemente $f(i)$ şi $f(j)$ din A sînt egale dacă şi numai dacă $i = j$. Deci pentru fiecare element a al lui A, există un singur i, $1 \leqslant i \leqslant n$ astfel încît $a = f(i)$. Pentru a pune în evidenţă că elementul $a \in A$ este imaginea lui i prin funcţia f, vom nota pe $a = f(i)$ cu a_i. Atunci elementele lui A apar toate în şirul

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

şi două elemente ale lui A sînt egale dacă şi numai dacă ocupă acelaşi loc în şir ($a_i = a_j$ dacă şi numai dacă $i = j$). Vom scrie pe scurt

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Această posibilitate de a scrie elementele unei mulţimi finite sub forma unui şir finit în care fiecare element ocupă un loc bine determinat este echivalentă cu faptul că mulţimea este finită. Ea corespunde procedeului practic de numărare a elementelor lui A. Trebuie să ne gîndim că elevul din clasa întîi, care învaţă să numere beţişoarele pe care le are în mînă, procedează în felul următor: ia un beţişor şi spune „unu“, apoi pune alături alt beţişor şi spune „doi“ ... etc. În acest mod el defineşte o funcţie de la mulţimea beţişoarelor la mulţimea numerelor naturale, oprindu-se la acel număr natural care a corespuns ultimului beţişor. Fiecare beţişor ocupă în această succesiune locul acordat prin cifra enunţată în momentul cînd el a fost numărat.

Faptul că această operaţie de numărare a elementelor unei mulţimi finite cu ajutorul funcţiilor bijective este o operaţie corectă se vede din următoarea propoziţie.

6.2.2. *Propoziţie*. **Dacă A este o mulţime finită şi există două funcţii bijective $f: \{1, 2, \ldots, m\} \to A$, $g: \{1, 2, \ldots, n\} \to A$ atunci $m = n$.**

Demonstraţie. Fie g^{-1} inversa funcţiei g. Funcţia $h = g^{-1} \circ f$ este bijecţie; avem

$$h: \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Vom demonstra acum prin inducţie după n că dacă există o funcţie bijectivă $h: \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ atunci $m = n$.

Dacă $n = 1$, funcţia $h: \{1\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ nu este surjectivă decît în cazul cînd mulţimea $\{1, 2, \ldots, m\}$ coincide cu mulţimea $\{h(1)\}$, deci dacă $m = 1$.

Presupunem că afirmația noastră este adevărată pentru $n-1$. Considerăm bijecția $h:\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$. Notăm $h(n) = i$ unde $1 \leqslant i \leqslant m$. Funcția

$$h':\{1, 2, \ldots, n-1\} \to \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m\}$$

definită prin $h'(j) = h(j)$, unde $1 \leqslant j \leqslant n-1$ este bijectivă. Dar mulțimea $\{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m\}$ este echivalentă cu mulțimea $\{1, 2, \ldots, m-1\}$, căci funcția $h'':\{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, m-1\}$ definită prin

$$h''(j) = \begin{cases} j & \text{dacă } 1 \leqslant j \leqslant i-1 \\ j-1 & \text{dacă } i+1 \leqslant j \leqslant m, \end{cases}$$

este bijectivă. Iată cum arată intuitiv corespondența stabilită de h''.

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 \ldots i-1 & i+1 & i+2 \ldots & m \\ h'' & \downarrow & \downarrow \quad \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 2 \ldots i-1 & i & i+1 \ldots & m-1. \end{array}$$

Atunci $h'' \circ h'$ este o bijecție între $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ și $\{1, 2, \ldots, m-1\}$.
$\{1, 2, \ldots, n-1\} \xrightarrow{h'} \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m\} \xrightarrow{h''} \{1, 2, \ldots, m-1\}$.
Aplicînd funcției $h'' \circ h'$ ipoteza de inducție, rezultă că $m-1 = n-1$, deci $m = n$.

Din această propoziție rezultă că fiind dată o mulțime finită A există un *singur* număr natural n astfel încît A să fie echivalentă cu mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$. În acest caz vom spune că *mulțimea* A *are* n *elemente*. Prin definiție, mulțimea vidă $\emptyset$ are zero elemente.

6.2.3. *Corolar*. **Dacă A și B sînt două mulțimi finite, atunci ele sînt echivalente dacă și numai dacă au același număr de elemente.**

Demonstrație. Să presupunem că A are n elemente și B are m elemente. Dacă A și B sînt echivalente și $f: A \to B$ este o funcție bijectivă atunci funcția compusă

$$\{1, 2, \ldots, n\} \to A \xrightarrow{f} B \to \{1, 2, \ldots, m\}$$

este bijectivă. Conform 6.2.2 rezultă că $m = n$.

Reciproc, dacă A și B au același număr n de elemente, există bijecțiile $g: \{1, 2, \ldots, n\} \to A$, $h: \{1, 2, \ldots, n\} \to B$. Atunci $h g^{-1}: A \to B$ este o bijecție, deci A și B sînt echivalente.

Acest corolar arată că pentru mulțimile finite, noțiunea de echivalență între mulțimi pe care am introdus-o coincide cu proprietatea mulțimilor de a avea același număr de elemente. Numai că în acest moment noi avem o definiție matematică a faptului că o mulțime are n elemente, ceea ce pînă acum era doar o exprimare a unui fapt intuitiv. În același timp, corolarul ne dă posibilitatea să asociem tuturor mulţimilor finite echivalente un număr natural n, care reprezintă numărul elementelor fiecărei mulţimi.

În continuare vom demonstra cîteva proprietăţi ale mulţimilor finite care să oglindească felul în care se comportă mulţimile finite după ce efectuăm asupra lor anumite operaţii impuse de practică. Să presupunem că se dau două mulţimi finite A şi B unde

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \text{iar} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Ce se poate spune despre mulţimile $A \cup B$, $A \times B$, B^A? În acest exemplu simplu putem spune direct că $A \cup B = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4, 5\}$ are $4 + 5 = 9$ elemente, $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), \ldots, (d, 4), (d, 5)\}$ are $4 \times 5 = 20$ elemente. Este mai dificil de scris toate funcţiile $f: A \to B$, dar se poate arăta ca exerciţiu că avem $5^4 = 625$ funcţii.

6.2.4. *Propoziţie.* **Dacă A este o mulţime finită cu n elemente şi B o mulţime finită cu m elemente iar $A \cap B = \emptyset$, atunci $A \cup B$ este finită şi are $m + n$ elemente.**

Demonstraţie. Fie $f: \{1, 2, \ldots, n\} \to A$ şi $g: \{1, 2, \ldots, m\} \to B$, funcţiile bijective date de ipotezele problemei. Construim o funcţie

$$h: \{1, 2, \ldots, n, n + 1, \ldots, n + m\} \to A \cup B$$

în felul următor

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & \text{dacă } 1 \leqslant i \leqslant n \\ g(i - n) & \text{dacă } n + 1 \leqslant i \leqslant n + m. \end{cases}$$

Funcţia h este bijectivă. Într-adevăr, fie i, j două numere naturale distincte, cuprinse între 1 şi $n + m$. Dacă $1 \leqslant i, j \leqslant n$ atunci $h(i) \neq h(j)$ pentru că $h(i) = f(i)$, $h(j) = f(j)$ şi $f(i) \neq f(j)$. Analog se demonstrează că $h(i) \neq h(j)$ dacă $n + 1 \leqslant i, j \leqslant n + m$. Dacă unul din cele două numere, de exemplu i, este cuprins între 1 şi n, $1 \leqslant i \leqslant n$ şi $n + 1 \leqslant j \leqslant n + m$, atunci $h(i) = f(i) \in A$ iar $h(j) = g(j - n) \in B$, deci $h(i) \neq h(j)$ căci $A \cap B = \emptyset$. Surjectivitatea funcţiei h rezultă din surjectivitatea lui f şi g.

Facem observaţia că în această propoziţie ipoteza $A \cap B = \emptyset$ este esenţială. De exemplu, dacă $A = \{a, b, c\}$ şi $B = \{a, x\}$ atunci $A \cup B = \{a, b, c, x\}$ are patru elemente şi nu cinci.

6.2.5. *Propoziţie.* **Fie A o mulţime finită cu n elemente şi B o mulţime finită cu m elemente. Mulţimea $A \times B$ este finită şi are nm elemente.**

Demonstraţie. Procedăm prin inducţie după m. Dacă $m = 1$ atunci B se reduce la un singur element $B = \{b\}$. Funcţia $f: A \to A \times B$ definită prin $f(a) = (a, b)$, oricare ar fi $a \in A$, este bijectivă, deci $A \times B$ este finită și are același număr de elemente ca și A, $n = n.1$.

În continuare, presupunem propoziția demonstrată pentru toate mulțimile B' avînd cel mult $m - 1$ elemente și să considerăm o mulțime B cu m elemente. Există atunci o bijecție

$$g: \{1, 2, \ldots, m - 1, m\} \to B.$$

Fie $b = g(m)$ și $B' = B \setminus \{b\}$. Mulțimea B' are $m - 1$ elemente, fiind echivalentă cu $\{1, 2, \ldots, m - 1\}$. În plus avem egalitatea de mulțimi:

$$A \times B = (A \times B') \cup (A \times \{b\})$$

unde

$$(A \times B') \cap (A \times \{b\}) = \emptyset.$$

Conform ipotezei de inducție $A \times B'$ are $n(m - 1)$ elemente iar $A \times \{b\}$ are $n = n.1$ elemente. Conform propoziției 6.2.4, $A \times B$ are $n(m - 1) + n = nm$ elemente.

6.2.6. *Propoziție.* **Dacă A și B sînt mulțimi finite avînd n, respectiv m, elemente, atunci B^A este finită și are m^n elemente.**

Demonstrație. Vom face inducție după n. Dacă $n = 1$, atunci $A = \{a\}$. Mulțimea B^A a tuturor funcțiilor de la $\{a\}$ la B este în corespondență bijectivă cu B, căci fiecare funcție

$$f: \{a\} \to B$$

este perfect definită de elementul $b = f(a) \in B$. Așadar, dacă $n = 1$, B^A este finită și are m elemente.

Presupunem că am demonstrat propoziția pentru mulțimi A' avînd cel mult $n - 1$ elemente. Dacă A are n elemente, ca și în propoziția precedentă vom scrie $A = A' \cup \{a\}$ unde $a \in A$ și A' are $n - 1$ elemente. Atunci există o corespondență bijectivă h între mulțimile B^A și $B^{A'} \times B^{\{a\}}$, definită astfel:

$$h: B^A \to B^{A'} \times B^{\{a\}},$$

$$h(u) = (u/_{A'}\, u/_{\{a\}}) \text{ pentru orice } u \in B^A.$$

Este evident că h este injectivă, căci $h(u) = h(v)$ implică atît $u/_A = v/_A$, cît și $u(a) = v(a)$, deci implică $u = v$. Surjectivitatea lui h este o consecință a modului în care se definește o funcție de la A la B, dîndu-se valoarea sa în $a \in A$ și apoi o funcție de la A' la B unde $A' = A \setminus \{a\}$. Întrucît h este bijecție rezultă că B^A are $m^{n-1}. m = m^n$ elemente.

O proprietate caracteristică mulțimilor finite este expusă în teorema care urmează:

6.2.7. *Teoremă*. **Dacă A este o mulțime finită cu n elemente și $B \subset A$, $B \neq A$ o submulțime a sa, atunci B este finită și are m elemente unde $m < n$.**

Demonstrație. Facem inducție după n. Dacă $n = 1$, rezultă că A are un singur element a, adică $A = \{a\}$. Pentru că $B \subset A$ și $B \neq A$ rezultă că $B = \emptyset$, pentru că în caz contrar ar conține singurul element a al lui A. Deci B are 0 elemente și $0 < 1$.

Presupunem că am demonstrat propoziția pentru mulțimi cu $n - 1$ elemente. Fie $B \subseteq A$ unde A are n elemente. Pentru că $B \neq A$, există $a \in A$ care nu aparține lui B. Atunci $A \setminus \{a\}$ are $n - 1$ elemente și $B \subset A \setminus \{a\}$. Dacă $B = A \setminus \{a\}$, atunci B este finită și are $m = n - 1$ elemente $(n - 1 < n)$. Dacă $B \subset A \setminus \{a\}$ și $B \neq A \setminus \{a\}$, conform ipotezei de inducție B este finită și are m elemente cu $m < n - 1$. Atunci cu atît mai mult avem $m < n$.

6.2.8. *Corolar*. **Dacă A este o mulțime finită, A nu este echivalentă cu nici o submulțime proprie a sa.**

Demonstrație. Dacă $B \subset A$ și $B \neq A$ atunci A și B nu pot avea același număr de elemente, deci conform 6.2.3 ele nu pot fi echivalente.

Acest corolar exprimă o proprietate caracteristică mulțimilor finite, în sensul că numai mulțimile finite nu admit submulțimi proprii echivalente cu ele însile. Vom demonstra mai tîrziu acest lucru la punctul 7.3.6.

6.3. Mulțimi infinite

6.3.1. *Definiție*. **O mulțime A care nu este finită se numește mulțime** ***infinită***.

Există în lumea înconjurătoare suficiente exemple de mulțimi finite, dar există și mulțimi care nu sînt finite. Astfel, obișnuim să spunem că mulțimea aștrilor din Universul Astral este infinită. Dar nu este atît de simplu să demonstrăm acest lucru, folosind doar noțiunile pe care le cunoaștem pînă acum și fără a recurge la teorii profunde și complicate de Astronomie, Cosmogonie, Fizică și alte științe. Matematica însă ne pune la dispoziție exemple numeroase de mulțimi infinite și trebuie să recunoaștem că deși aceste mulțimi sînt creații abstracte ale minții omenești, ele intervin în foarte multe probleme practice. În plus este destul de ușor să dovedim în mod riguros că ele sînt într-adevăr mulțimi infinite. Vom începe prin a da două exemple: primul va fi însoțit de o „demonstrație intuitivă" în timp ce al doilea va fi obiectul unei teoreme fundamentale pentru teoria mulţimilor (teorema 6.3.3).

6.3.2. *Exemplu.* Mulţimea punctelor unui segment MN este infinită.

Noi vom da în § 7 o demonstraţie riguroasă a acestei afirmaţii, dar pentru moment ne vom mulţumi cu o demonstraţie intuitivă. Presupunem prin absurd că mulţimea punctelor care compun segmentul MN este finită. Admitem că un punct al segmentului este o entitate indivizibilă. (În antichitate, grecii considerau că segmentul este o succesiune de atomi, dar noi ştim astăzi că atomii nu sînt părţi indivizibile ale materiei.) Prin adăugarea eventuală a încă unui punct la unul din capetele segmentului putem presupune că mulţimea finită a punctelor segmentului este reprezentată de un număr impar. O teoremă de geometrie ne spune că folosind rigla şi compasul, segmentul MN poate fi împărţit în două părţi egale. Orice împărţire atrage după sine faptul că una din jumătăţile segmentului are un număr impar de puncte iar cealaltă un număr par, deci jumătăţile nu sînt egale. Ajungem în acest mod la o contradicţie, contradicţie care se datoreşte presupunerii că segmentul MN este constituit dintr-o mulţime finită de puncte.

Spuneam că o nouă demonstraţie a afirmaţiei că segmentul conţine o mulţime infinită de puncte vom da în § 7, 7.4. Abia demonstraţia de acolo va fi într-adevăr corectă din punct de vedere matematic. În „demonstraţia" de mai sus am folosit unele fapte extramatematice, cum ar fi:

a) am presupus că punctele care compun segmentul sînt nişte obiecte materiale indivizibile, în timp ce noţiunea de punct este de fapt o noţiune abstractă mult mai subtilă;

b) am presupus că dacă scoatem sau adăugăm un punct la unul din capetele segmentului se obţine tot un segment;

c) am afirmat că rezultatul contradictoriu pe care-l obţinem se datoreşte presupunerii iniţiale, pe cînd el ar putea să fie o consecinţă a faptului că am introdus în problemă ipoteze şi metode extramatematice.

Cu toate obiecţiile ridicate, exemplul de mai sus este sugestiv şi satisfăcător pentru nivelul nostru actual de cunoştinţe asupra mulţimilor infinite. Iată acum un nou exemplu!

6.3.3. *Teoremă.* **Mulţimea $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ a numerelor naturale este infinită.**

Demonstraţie. Vom demonstra prin inducţie că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ nu există nici o funcţie bijectivă $f: \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbf{N}$.

Dacă $n = 1$, o funcţie $f: \{1\} \to \mathbf{N}$ nu este bijectivă căci nu poate fi surjectivă. Presupunem apoi că pentru numărul natural $n - 1$ nu există nici o funcţie bijectivă $f: \{1, 2, \ldots, n-1\} \to \mathbf{N}$. Să considerăm prin absurd că pentru numărul n ar exista o funcţie bijectivă $f: \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbf{N}$. Imaginea lui n prin f este $f(n) = k \in \mathbf{N}$. Considerăm funcţia $g: \mathbf{N} \setminus \{k\}, \to \mathbf{N}$, definită astfel:

$$g(i) = \begin{cases} i & \text{dacă } i < k \\ i - 1 & \text{dacă } i > k. \end{cases}$$

Intuitiv funcţia g stabileşte corespondenţa care rezultă din desenul următor

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 0, & 1, & 2, \ldots, & k-1, & k+1, & k+2, \ldots, & n, & n+1, & n+2 & \ldots \\ g & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 0 & 1 & 2 \ldots & k-1, & k, & k+1, \ldots, & n-1, & n, & n+1 & \ldots \end{array}$$

Funcţia g este bijectivă. Dacă notăm cu f' funcţia $f': \{1, 2, \ldots, \ldots, n-1\} \to \mathbf{N} \setminus \{k\}$ unde $f'(i) = f(i)$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, atunci f' este bijectivă, deci funcţia compusă $g \circ f': \{1, 2, \ldots, n - 1\} \to \mathbf{N}$ este bijectivă. Am construit aşadar o bijecţie de la mulţimea $\{1, 2, \ldots \ldots, n - 1\}$ la $\mathbf{N}$, fapt care contrazice ipoteza de inducţie asupra lui $n-1$. În concluzie, mulţimea $\mathbf{N}$ nu este finită, pentru că atunci ar exista un număr natural n şi o bijecţie $f: \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbf{N}$.

Teorema 6.3.3 deschide calea spre construcţia unei mari varietăţi de mulţimi infinite, precum şi spre demonstrarea faptului că anumite mulţimi, des întîlnite în matematică, sînt infinite.

6.4. Mulţimi numărabile

6.4.1. *Definiţie.* **Se numeşte mulţime** ***numărabilă,*** **o mulţime echivalentă cu mulţimea N a numerelor naturale.**

Aceasta înseamnă că o mulţime A este numărabilă dacă şi numai dacă există o funcţie bijectivă $f: \mathbf{N} \to A$.

Mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ este numărabilă. Într-adevăr, există o funcţie bijectivă.

$$s: \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

definită prin $s(n) = n + 1$. Această funcţie se numeşte *funcţia succesor.* Pentru că funcţia succesor este bijectivă, atunci funcţia $s^n = s \circ s \circ \ldots \circ s$, obţinută prin compunerea succesivă de n ori a lui s, este o bijecţie între mulţimile $\mathbf{N}$ şi $\{n, n + 1, \ldots\}$

$$s^n: \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\} \to \{n, n + 1, \ldots, n + k, \ldots\}$$

În concluzie orice mulţime de forma

$$\{n, n + 1, n + 2, \ldots, n + k, \ldots\}$$

formată din numerele naturale mai mari decît n este numărabilă.

Dacă A este numărabilă, există o funcţie bijectivă

$$f: \{1, 2, \ldots, n, \ldots\} \to A.$$

Aceasta înseamnă că pentru orice element $a \in A$ există un unic număr natural i, $i \geqslant 1$, astfel încît $f(i) = a$. Dacă $a \in A$ este de forma $a = f(i)$ vom nota pe a cu a_i marcînd în acest fel prin indicele i proprietatea lui a de a fi egal cu valoarea funcţiei f în i. Pentru că f este surjectivă, toate elementele lui A sînt de forma a_i unde $i \in \{1, 2, \ldots\}$ astfel încît elementele lui A se pot aranja sub forma unui şir infinit

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

iar mulţimea A se poate scrie

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Pe locul n în şir se află elementul $a_n = f(n)$ iar elementele care sînt pe locuri distincte sînt diferite pentru că $a_i = a_j$ implică $f(i) = f(j)$, deci $i = j$.

Proprietatea mulţimilor numărabile, conform căreia elementele lor pot fi aranjate într-un şir infinit în care două elemente sînt egale dacă şi numai dacă ocupă acelaşi loc în şir, aminteşte oarecum de continuarea la infinit a procesului de numărare pe care-l făceam în cazul mulţimilor finite (6.2.1). Spre deosebire de mulţimile finite, unde procesul de numărare se sfîrşea după un număr n de paşi, numărarea elementelor unei mulţimi numărabile continuă la infinit într-un asemenea mod, încît după un număr suficient de mare de paşi efectuaţi în procesul de numărare, putem atinge un element dat a, $a \in A$. Dar niciodată nu vom putea număra efectiv toate elementele lui A. Este vorba aici doar de o capacitate *potenţială* de a asocia un număr natural fiecărui element al lui A, număr care să decidă locul ocupat de acel element într-un şir format cu elementul lui A. De aici înainte vom folosi de multe ori această caracterizare a mulţimilor numărabile.

6.4.2. *Propoziţie.* **Mulţimea N' a tuturor numerelor naturale pare este numărabilă.**

Demonstraţie. Avem

$$N' = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$$

Funcţia $f: \mathbf{N} \to N'$ care stabileşte asocierea $n \to f(n) = 2n$ este bijectivă, deci N' este numărabilă.

Mulţimea N' este deci strict inclusă în $\mathbf{N}$ şi echivalentă cu $\mathbf{N}$. Am văzut la 6.2.8 că acest lucru nu se întîmplă cu mulţimile finite. Exemplul de mai sus al mulţimii numerelor naturale pare, care este echivalentă cu mulţimea tuturor numerelor naturale reprezintă una din curiozităţile mulţimilor infinite, curiozitate care vine în oarecare măsură în contradicţie cu experienţa practică în materie de numărare. El este enunţat în cărţile de curiozităţi matematice astfel: „există tot atîtea numere pare cîte numere naturale". Dacă nu se specifică ce înseamnă „tot atîtea numere pare cîte numere naturale" — această afirmaţie constituie într-adevăr o curiozitate. Dar pentru noi este acum clar că aceasta înseamnă că între cele două mulţimi se poate stabili o corespondenţă bijectivă.

Ne putem chiar imagina o experienţă pentru a ilustra în ce constă curiozitatea de care vorbeam. Să presupunem că avem un hotel, ale cărui camere formează o mulţime numărabilă. Atunci ele pot fi numerotate cu cifre în ordinea

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$$

unhe C_i înseamnă camera situată pe locul i în numerotarea aleasă. Presupunem că fiecare cameră are un singur loc şi că toate camerele sînt ocupate. Vom nota cu L_i pe locatarul din camera C_i. Să presupunem acum că un turist T vine la acest hotel infinit şi doreşte să fie cazat. Poate fi el cazat fără a da afară pe nici unul din vechii locatari ai hotelului? Evident că dacă hotelul ar avea un număr finit de camere acest lucru nu este posibil. Dar direcţia acestui hotel infinit găseşte următoarea soluţie: noului venit T i se repartizează camera C_1, locatarul L_1 al camerei C_1 trece în camera C_2, locatarul L_2 al camerei C_2 trece în camera C_3 ş.a.m.d. Obţinem în final următoarea repartiţie pe camere, care asigură fiecărui locatar un loc bine stabilit

$$\begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & C_3 & & C_n & C_{n+1} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots\cdots & \updownarrow & \updownarrow \;\cdots\cdots \\ T & L_1 & L_2 & & L_{n-1} & L_n \end{array}$$

Să presupunem acum că la hotel nu vine un singur turist ci o mulţime numărabilă de turişti $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$. Cum pot fi ei cazaţi astfel încît şi vechii locatari să rămînă în hotel? Acest lucru se poate face după schema următoare:

$$\begin{array}{ccccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & & C_{2n-1} & C_{2n} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots\cdots & \updownarrow & \updownarrow \;\cdots\cdots \\ T_1 & L_1 & T_2 & L_2 & & T_n & L_n \end{array}$$

Adică, locatarul L_n al camerei C_n trece acum în camera cu numărul dublu C_{2n} în timp ce turistul T_n va ocupa camera C_{2n-1}. Problema a fost deci rezolvată astfel: locatarii vechi ai hotelului vor ocupa numai camere cu număr par, în timp ce turiştii nou veniţi vor ocupa camerele cu număr impar.

6.4.3. *Propoziţie.* **Mulţimea $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi este numărabilă.**

Demonstraţie. Considerăm funcţia $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ care asociază fiecărui număr întreg $z \in \mathbf{Z}$ numărul natural $f(z)$ unde

$$f(z) = \begin{cases} 2z \text{ dacă } z \geqslant 0 \\ 2|z| - 1 = -1 - 2z \text{ dacă } z < 0. \end{cases}$$

Această funcţie este bijectivă. Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$ două numere întregi diferite. Dacă $z_1 \geqslant 0$ şi $z_2 < 0$ atunci $f(z_1)$ este par iar $f(z_2)$ este impar, deci $f(z_1) \neq f(z_2)$. Dacă $z_1 \geqslant 0$, $z_2 \geqslant 0$ atunci $f(z_1) \neq f(z_2)$ pentru că $2z_1 \neq 2z_2$. Dacă $z_1 < 0$, $z_2 < 0$ atunci $-1-2z_1 \neq -1-2z_2$, deci $f(z_1) \neq f(z_2)$. Să probăm că f este surjectivă. Dacă $n \in \mathbf{N}$ şi $n = 2m$ atunci $n = f(m)$, iar dacă $n = 2m - 1$ atunci $n = f(-m)$ unde $-m < 0$ pentru că $m > 0$.

Imaginea intuitivă a corespondenţei stabilită de f este cea din figura 6.4.3.1.

6.4.4. *Teoremă.* **Mulţimea $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ a perechilor ordonate de numere naturale este numărabilă.**

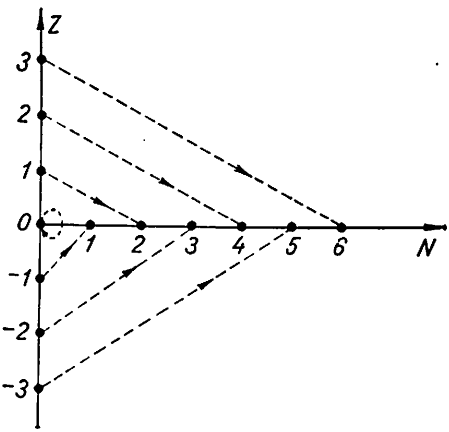


Fig. 6.4.3.1.

Demonstraţie. Definim funcţia $f: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ punînd, pentru orice pereche ordonată $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$,

$$f(m, n) = \binom{m+n+1}{2} + m.$$

Atragem atenţia asupra notaţiei de mai sus: pentru orice pereche r, s de numere naturale, notăm

$$\binom{r}{s} = \begin{cases} \dfrac{r!}{s!\,(r-s)!} & \text{dacă } r \geqslant s \\ 0 & \text{dacă } r < s. \end{cases}$$

Numărul $\binom{r}{s}$ se numeşte coeficientul binomial al combinărilor de r elemente luate cîte s. Presupunem cunoscute proprietăţile elementare ale combinărilor (vezi exerciţiul 6.5.5).

Vom arăta acum că funcţia f definită mai sus este bijectivă. Să presupunem că $f(m, n) = f(a, b)$ şi că perechea ordonată (m, n) este diferită de perechea ordonată (a, b). Să presupunem că, dacă $m \neq a$ atunci $m > a$, deci $m = a + r$ unde $r > 0$. Atunci din $f(m, n) = f(a, b)$ rezultă

$$\binom{m+n+1}{2} + m = \binom{a+r+n+1}{2} + a + r = \binom{a+b+1}{2} + a$$

$$\text{adică } \binom{a+r+n+1}{2} + r = \binom{a+b+1}{2}.$$

Pentru că $r > 0$, avem inegalitatea de combinări

$$\binom{a+r+n+1}{2} < \binom{a+b+1}{2}$$

care atrage după sine inegalitatea

$$a + r + n + 1 < a + b + 1$$

$$\text{adică } r + n < b.$$

Aceasta înseamnă că există $s > 0$ astfel încît $r + n + s = b$. Înlocuind pe b avem

$$\binom{a+r+n+1}{2} + r = \binom{a+r+n+s+1}{2}.$$

Să notăm $a + r + n + 1 = c > 0$. Atunci ultima egalitate se scrie

$$\binom{c}{2} + r = \binom{c+s}{2}.$$

Dar $r < c$ implică

$$\binom{c}{2} + r < \binom{c}{2} + c = \binom{c+1}{2} \leqslant \binom{c+s}{2},$$

ceea ce contrazice egalitatea de mai sus. Absurditatea la care am ajuns ne arată că nu putem avea $m > a$ sau $a > m$, deci $a = m$. Cum perechile (m, n) şi (a, b) sînt distincte iar $m = a$, rezultă că $n > b$ sau $n < b$. Dar oricare din aceste situaţii este în contradicţie cu faptul că

$$\binom{m+n+1}{2} = \binom{m+b+1}{2}.$$

În concluzie, funcţia f este injectivă.

Pentru a arăta că f este surjectivă, vom demonstra prin inducţie după n că pentru orice număr natural $n \in \mathbf{N}$, există o pereche $(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ astfel încît $f(a, b) = n$.

Dacă $n = 0$ atunci $f(0, 0) = \binom{0+0+1}{2} + 0 = 0$,

Presupunem că am demonstrat că $f(a, b) = n$. Să demonstrăm că din această presupunere rezultă că $n + 1$ este imaginea unui element din $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Calculăm:

$$n + 1 = f(a, b) + 1 = \binom{a+b+1}{2} + a + 1 = \binom{(a+1)+(b-1)+1}{2} +$$
$$+ a + 1 = f(a+1, b-1) \text{ dacă } b - 1 \geqslant 0.$$

În caz că $n = f(a, b)$ unde $b = 0$ atunci

$$n + 1 = f(a, 0) + 1 = \binom{a+1}{2} + a + 1 = \binom{a+2}{2} = f(0, a+1).$$

6.4.5. Ne putem imagina intuitiv corespondenţa pe care o stabileşte funcţia f de mai sus cu ajutorul următorului desen, în care am identificat mulţimea $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ cu mulţimea punctelor din plan care au coordonatele numere naturale deci sînt nodurile unei reţele de pătrate:

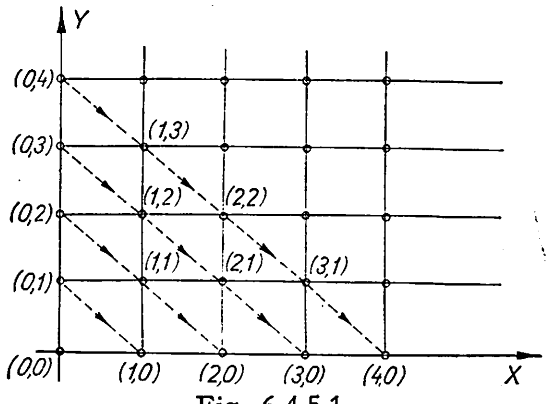


Fig. 6.4.5.1.

Funcţia f aranjează nodurile acestei reţele plane într-un şir după cum indică săgeţile, începînd cu perechea (0, 0) şi pornind pe direcţiile diagonale în sensul săgeţilor de la axa OY spre axa OX.

6.5. Exerciții

1) Fie A, B două mulțimi finite avînd același număr de elemente. Fie $f: A \to B$ o funcție. Să se demonstreze că următoarele condiții sînt echivalente:

a) f este injectivă,

b) f este surjectivă,

c) f este bijectivă.

2) Să se arate că reuniunea a două mulțimi numărabile disjuncte este o mulțime numărabilă. Dacă mulțimile nu mai sînt disjuncte, rezultatul rămîne adevărat?

3) Fie A o mulțime numărabilă și B o submulțime finită a sa. Să se arate că A/B este numărabilă.

4) Fie A o mulțime finită cu n elemente, B o mulțime finită cu m elemente. Să se arate că:

a) există o funcție surjectivă $f: A \to B$ dacă și numai dacă $m \leqslant n$,

b) există o funcție injectivă $g: A \to B$ dacă și numai dacă $n \leqslant m$.

5) Fie n, p două numere naturale, $n \geqslant p$. Să se arate că dacă A este o mulțime cu n elemente, atunci numărul submulțimilor lui A care conțin p elemente este egal cu

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

(indicație: se utilizează inducția după numărul elementelor lui A. În ipoteza că afirmația este adevărată pentru n, presupunem că A are $n+1$ elemente. Fixăm elementul $a \in A$. Submulțimile lui A, conținînd p elemente sînt de două tipuri. Există submulțimi care nu conțin pe a, și acestea sînt în număr de $\binom{n}{p}$ și submulțimi care conțin pe a, în număr de $\binom{n}{p-1}$. În total avem:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} = \binom{n+1}{p} \text{ submulțimi.)}$$

6) Fie $A = \{1, 2, 3, \dots n\}$ și $p \leqslant n$ un număr natural $p > 0$. Considerăm în mulțimea $A^p = A \times A \times \dots \times A$ submulțimea

$$B = \{(i_1, i_2, \ldots, i_p) \in A^p \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n\}.$$

Să se arate că B conţine $\binom{n}{p}$ elemente.

7) Fie $p_1, p_2, \ldots, p_k$ primele k numere naturale prime (adică $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5 \ldots$ etc.). Să se arate că funcţia

$$f\colon \mathbf{N}^k = \mathbf{N} \times \ldots \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

definită prin $f(r_1, r_2, \ldots, r_k) = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$ este injectivă.

8) Să se demonstreze că mulţimea punctelor de pe laturile unui triunghi este echivalentă cu mulţimea punctelor de pe circumferinţa unui cerc. (Generalizare la poligoane convexe oarecare.)

§ 7. Numere cardinale

7.1. Echivalenţa mulţimilor şi definiţia numerelor cardinale

Am văzut în § 6 că pentru a compara mulţimile din punctul de vedere al numărului lor de elemente, criteriul fundamental prin care se identifică mulţimile cu „acelaşi număr de elemente" constă în existenţa unei funcţii bijective între cele două mulţimi. Reamintim în acest sens definiţia 6.1.5.: mulţimile A şi B sînt echivalente (sau cardinal echivalente) dacă există o funcţie bijectivă $f\colon A \to B$. Vom scrie pe scurt că A este cardinal echivalentă cu B astfel: $A \sim B$.

Echivalenţa cardinală este o relaţie de echivalenţă între mulţimi, în sensul definiţiei 5.2.1. Acest lucru se verifică, cu uşurinţă, axiomele relaţiei de echivalenţă fiind îndeplinite ca urmare a proprietăţilor funcţiilor bijective.

Relaţia $A \sim A$ rezultă din faptul că $1_A : A \to A$ este o funcţie bijectivă. Echivalenţa cardinală a mulţimilor este o relaţie reflexivă.

Dacă $A \sim B$, există o bijecţie $f\colon A \to B$. Conform observaţiei 4.5.14, funcţia inversă $f^{-1}\colon B \to A$ este şi ea bijectivă, deci $B \sim A$. În consecinţă echivalenţa cardinală este simetrică.

Echivalenţa cardinală este şi tranzitivă: dacă $A \sim B$ şi $B \sim C$ există două funcţii bijective $f\colon A \to B$ şi $g\colon B \to C$. Conform 4.5.11, funcţia $g \circ f\colon A \to C$ este bijectivă, deci $A \sim C$.

7.1.1. *Definiție.* **Se numește** ***număr cardinal*** **o clasă de echivalență de mulțimi cardinal echivalente.**

Din definiția claselor de echivalență, rezultă că un număr cardinal **a*** constă din punerea împreună, într-o aceeași clasă, a tuturor mulțimilor echivalente cu o mulțime dată A. Uneori, pentru a pune în evidență că **a** este cardinalul definit de A vom nota pe **a** cu $\overline{\overline{A}}$. Elementele lui $\mathbf{a} = \overline{\overline{A}}$ sînt deci mulțimile echivalente cu A. Toate aceste mulțimi se bucură de proprietatea că ele se pot pune în corespondență bijectivă cu A, și în particular unele cu altele. De exemplu, dacă A este mulțimea $\{1,2,...,n\}$ toate mulțimile echivalente cu A au n elemente, deci sînt caracterizate de numărul n al elementelor lor. Din acest motiv, spunem că noțiunea de număr cardinal generalizează noțiunea de număr din aritmetică prin trecerea de la cazul mulțimilor finite la mulțimi oarecare. Numerele naturale pot fi considerate numere cardinale în sensul că numărul natural n reprezintă conceptul abstract obținut prin așezarea într-o clasă de echivalență a tuturor mulțimilor finite avînd n elemente.

7.1.2. *Definiție.* **Clasa de echivalență a tuturor mulțimilor numărabile se numește cardinal $\aleph_0$. ($\aleph$ se citește *alef*).**

7.1.3. *Definiție.* **Numărul cardinal a se numește infinit dacă reprezintă clasa de echivalență a unei mulțimi infinite.**

Din proprietățile relației de echivalență și pentru că o mulțime finită nu este echivalentă cu o mulțime infinită, rezultă că toate mulțimile care definesc pe **a** sînt infinite.

7.2. Aritmetica numerelor cardinale

Numerele cardinale, ca o generalizare a numerelor naturale din aritmetică, pot da naștere unei aritmetici a numerelor cardinale care să generalizeze aritmetica obișnuită a numerelor naturale. În același timp, ne vom întîlni în această nouă aritmetică cu cîteva din curiozitățile de comportament ale numerelor cardinale infinite. Începem deci prin a defini operațiile aritmetice între numerele cardinale.

7.2.1. *Definiție.* **Fie a și b două numere cardinale și A, B două mulțimi care aparțin lui a, respectiv b, astfel încît $A \cap B = \emptyset$. Se**

---

* Printr-o tradiție generală acceptată, numerele cardinale se notează cu litere mici ale alfabetului gotic, sub influența creatorului teoriei cardinalelor, matematicianul german G. Cantor (1845—1918). În manual ele sînt notate cu litere aldine.

numeşte *suma* **cardinalelor a şi b numărul cardinal $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ care reprezintă clasa mulţimilor echivalente $A \cup B$.**

Să observăm ipoteza $A \cap B = \emptyset$ se poate realiza întotdeauna: dacă $A \cap B \neq \emptyset$ atunci mulţimile $A' = A \times \{0\}$ şi $B' = B \times \{1\}$ sînt disjuncte; în plus $A \sim A'$ şi $B \sim B'$, deci vom lua pe $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ca fiind clasa lui $A' \cup B'$. Această ipoteză este necesară pentru a ne asigura că, cel puţin în cazul cînd **a** şi **b** sînt cardinale finite, suma lor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ coincide cu suma numerelor naturale care reprezintă numărul de elemente din A şi B, după cum rezultă din propoziţia 6.2.4.

7.2.2. *Definiţie.* **Fie a şi b două numere cardinale, astfel încît $\mathbf{a} = \overline{\overline{A}}$ şi $\mathbf{b} = \overline{\overline{B}}$. Se numeşte** ***produsul*** **numerelor cardinale a şi b, numărul cardinal ab care reprezintă clasa de echivalenţă a mulţimilor echivalente cu mulţimea $A \times B$, adică $\mathbf{ab} = \overline{\overline{A \times B}}$.**

7.2.3. *Definiţie.* **Se numeşte** ***puterea*** **b a cardinalului a, cardinalul $\mathbf{a}^{\mathbf{b}}$ care este format din clasa de echivalenţă a mulţimilor echivalente cu** A^B (unde A^B este mulţimea funcţiilor definite pe B cu valori în A).

Vom trece acum la studiul proprietăţilor acestor trei operaţii cu numere cardinale: suma, produsul, exponenţierea. Prima problemă care se pune în legătură cu definiţiile 7.2.1, 7.2.2 şi 7.2.3 este dacă aceste definiţii sînt corecte. Trebuie să ne asigurăm de această corectitudine în următorul sens. Fiind date numerele cardinale **a** şi **b**, noi am ales $A \in \mathbf{a}$ şi $B \in \mathbf{b}$ şi am definit: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overline{\overline{A \cup B}}$, $\mathbf{a}\ \mathbf{b} = \overline{\overline{A \times B}}$ şi $\mathbf{a} = \overline{\overline{A^B}}$. Dar putem alege în **a**, respectiv **b**, alte două mulţimi A' respectiv B', astfel încît $\overline{\overline{A'}} \in \mathbf{a}$, $\overline{\overline{B'}} \in \mathbf{b}$. Atunci definiţiile lui $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{ab}$ şi $\mathbf{a}^{\mathbf{b}}$ se schimbă din punct de vedere formal, căci $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \overline{\overline{A' \subset B'}}$, $\mathbf{ab} = \overline{\overline{A' \times B'}}$, $\mathbf{a}^{\mathbf{b}} = \overline{\overline{A'^{B'}}}$. Vom demonstra că definiţiile sumei, produsului şi exponenţierii nu depind de alegerea lui A (sau B) în **a** (sau **b**), cu alte cuvinte putem defini operaţiile cu numere cardinale folosind orice mulţime din clasa de echivalenţă care reprezintă numărul cardinal dat. De exemplu $3 + 4 = 7$, indiferent de mulţimile cu 3, respectiv 4, elemente pe care le folosim cînd demonstrăm că 3 plus 4 este egal cu 7. Din acest motiv, elevii de clasa întîi obţin acelaşi rezultat indiferent dacă adună beţişoare sau bile, cînd învaţă adunarea numerelor naturale (bineînţeles, fără ca ei să ştie că această înlesnire se datoreşte propoziţiei de mai jos).

7.2.4. *Propoziţie.* **Fie a, b două numere cardinale, A şi A' două mulţimi care aparţin lui a, B şi B' două mulţimi care aparţin lui b.**

(i) **Dacă $A \cap B = \emptyset$ şi $A' \cap B' = \emptyset$ atunci $A \cup B \sim A' \cup B'$.**

(ii) $A \times B \sim A' \times B'$.

(iii) $A^B \sim A'^{B'}$.

Demonstrație. (i) Fie $f: A \to A'$ și $g: B \to B'$ două funcții bijective. Definim o funcție $h: A \cup B \to A' \cup B'$ punînd

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in A, \\ g(x), & \text{dacă } x \in B; \end{cases}$$

definiția este corectă deoarece din $A \cap B = \emptyset$ rezultă că nu putem avea simultan $x \in A$ și $x \in B$. Să arătăm că h este injectivă. Fie x, $x' \in A \cup B$ astfel încît $h(x) = h(x')$. Nu putem avea $x \in A$ și $x' \in B$ deoarece ar rezulta $h(x) = f(x) \in A'$ și $h(x) = h(x') = g(x') \in B'$, în contradicție cu ipoteza $A' \cap B' = \emptyset$; la fel se vede că nu putem avea $x \in B$ și $x' \in A$. Dacă x, $x' \in A$, atunci $f(x) = h(x) = h(x') = f(x')$ și cum f este injectivă rezultă $x = x'$; la fel se vede că dacă $x, x' \in B$ atunci $x = x'$. Să arătăm acum că h este surjectivă. Fie $y \in A' \cup B'$ adică $y \in A'$ sau $y \in B'$. În primul caz surjectivitatea lui f implică existența unui $x \in A$ astfel încît $y = f(x) = h(x)$; în al doilea caz există $x \in B$ astfel încît $y = g(x) = h(x)$. (ii). Fie $f: A \to A'$ și $g: B \to B'$ două funcții bijective. Funcția $f \times g: A \times B \to A' \times B'$ definită prin $(f \times g)(x,y) = (f(x), g(y))$, $(x \in A, y \in B)$ este bijectivă. Într-adevăr, fie $(x_1, y_1) \in A \times B$, $(x_2, y_2) \in A \times B$ două perechi astfel încît $(f \times g)(x_1, y_1) = (f \times g)(x_2, y_2)$. Atunci $(f(x_1), g(y_1)) = (f(x_2), g(y_2))$ implică $f(x_1) = f(x_2)$ și $g(y_1) = g(y_2)$. Din injectivitatea lui f și g avem $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$.

Surjectivitatea lui $f \times g$ rezultă din surjectivitatea lui f și g: oricare ar fi $(x', y') \in A' \times B'$ există $x \in A$, $y \in B$ astfel încît $f(x) = x'$ și $g(y) = y'$, adică $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y)) = (x', y')$. (iii) Fie: $A \to A'$ și $g: B \to B'$ funcțiile bijective care realizează echivalența acestor mulțimi. Funcția $\varphi: A^B \to A'^{B'}$ care fiecărei funcții $u: B \to A$ îi asociază funcția $f \circ u \circ g^{-1}: B' \to A'$ este bijectivă.

Să presupunem că $\varphi(u) = \varphi(v)$ unde u, $v \in A^B$. Aceasta înseamnă că $f \circ u \circ g^{-1} = f \circ v \circ g^{-1}$. Din această egalitate, compunînd cu f^{-1} la stînga și cu g la dreapta obținem $(f^{-1} \circ f)\, u\, (g^{-1} \circ g) = (f^{-1} \circ f) \circ v \circ (g^{-1} \circ g)$, adică $u = v$. Deci φ este injectivă. Fie $v \in A'^{B'}$ o funcție de la B' la A'. Funcția $w' = f^{-1} \circ w \circ g \in A^B$ și $\varphi(w') = f(f^{-1} \circ w \circ g) \circ g^{-1} = w$. Deci φ este surjectivă astfel încît tragem concluzia că în ipotezele noastre, mulțimile A^B și $A'^{B'}$ sînt echivalente. Cu aceasta propoziția este demonstrată.

7.2.5. Fie $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$ trei numere cardinale și M, N, P trei mulțimi care aparțin claselor de mulțimi echivalente $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$, respectiv. Operațiile care s-au definit au următoarele proprietăți:

7.2.5.1. Adunarea este comutativă:

$$\mathbf{m} + \mathbf{n} = \mathbf{n} + \mathbf{m}.$$

Într-adevăr, mulţimile M, N pot fi luate disjuncte, şi atunci $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ e definit de mulţimile echivalente cu $M \cup N$, $\mathbf{n} + \mathbf{m}$ de mulţimile echivalente cu $N \cup M$. Dar $M \cup N = N \cup M$, deci sînt echivalente şi definesc numere cardinale egale: $\mathbf{m} + \mathbf{n} = \mathbf{n} + \mathbf{m}$.

7.2.5.2. Adunarea este asociativă:

$$(\mathbf{m} + \mathbf{n}) + \mathbf{p} = \mathbf{m} + (\mathbf{n} + \mathbf{p}).$$

Putem presupune că $M \cap N = \emptyset$, $N \cap P = \emptyset$, $M \cap P = \emptyset$ şi proprietatea rezultă din faptul că $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$.

7.2.5.3. Înmulţirea este comutativă:

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m}.$$

Această proprietate rezultă din faptul că $M \times N$ este echivalentă cu $N \times M$, după cum s-a demonstrat la 4.8.1.

7.2.5.4. Înmulţirea este asociativă:

$$\mathbf{m}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})\mathbf{p}.$$

Rezultă din faptul că $M \times (N \times P)$ este echivalentă cu $(M \times N) \times P$ după cum am demonstrat la 4.8.2.

7.2.5.5. Înmulţirea este distributivă faţă de adunare, adică

$$\mathbf{m}(\mathbf{n} + \mathbf{p}) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{p}.$$

Pentru a demonstra această proprietate vom presupune că $N \cap P = \emptyset$. Atunci $\mathbf{n} + \mathbf{p}$ este cardinalul definit de mulţimile echivalente cu $N \cup P$ iar $\mathbf{m}(\mathbf{n} + \mathbf{p})$ este definit de $M \times (N \cup P)$. Dar mulţimea $M \times (N \cup P) = (M \times N) \cup (M \times P)$ şi în plus $(M \times N) \cap \cap (M \times P) = \emptyset$. Atunci cardinalul lui $(M \times N) \cup (M \times P)$ este egal cu cardinalul lui $M \times N$ adunat cu cardinalul lui $M \times P$, adică $\mathbf{mn} + + \mathbf{mp}$.

7.2.5.6. Exponenţierea unei puteri de cardinale se face prin înmulţirea puterilor şi păstrarea bazei,

$$(\mathbf{m}^{\mathbf{n}})^{\mathbf{p}} = \mathbf{m}^{\mathbf{np}};$$

$(\mathbf{m}^{\mathbf{n}})^{\mathbf{p}}$ este numărul cardinal definit ca fiind clasa de echivalenţă a mulţimii $(M^N)^P$ iar $\mathbf{m}^{\mathbf{np}}$ este definit de mulţimea $M^{N \times P}$.

Ca la 4.7.2, arătăm că aceste două mulţimi sînt echivalente cu ajutorul funcţiei

$$\varphi: (M^N)^P \to M^{N \times P}$$

care asociază fiecărei funcţii $f: P \to M^N$ funcţia $\varphi_f \in M^{N \times P}$ definită, la rîndul său, astfel: dacă $(x,y) \in N \times P$ atunci $\varphi_f(x,y) = (f(y)(x))$.

7.2.5.7. Înmulţirea puterilor unui număr cardinal se face prin adunarea exponenţilor şi păstrarea bazei, adică

$$\mathbf{m}^{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{m}^{\mathbf{p}} = \mathbf{m}^{\mathbf{n}+\mathbf{p}}.$$

Pentru demonstraţie alegem ca în toate demonstraţiile precedente mulţimile M,N,P astfel încît $\mathbf{m} = \overline{\overline{M}}$, $\mathbf{n} = \overline{\overline{N}}$, $\mathbf{p} = \overline{\overline{P}}$ avînd în plus satisfăcută condiţia $N \cap P = \emptyset$. Atunci $\mathbf{m}^{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{m}^{\mathbf{p}}$ este clasa de echivalenţă a mulţimii $M^N \times M^P$ iar $\mathbf{m}^{\mathbf{n}+\mathbf{p}}$ este clasa mulţimii $M^{N \cup P}$. Conform 4.7.1., aceste două mulţimi sînt echivalente.

7.2.5.8. Exponenţierea unui produs coincide cu produsul puterilor factorilor, adică

$$(\mathbf{m}\,\mathbf{n})^{\mathbf{p}} = \mathbf{m}^{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n}^{\mathbf{p}}.$$

Fie M,N,P trei mulţimi aparţinînd numerelor cardinale $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$, respectiv. Am văzut la 4.7.3. că există o funcţie

$$\varphi: (M \times N)^P \to M^P \times N^P,$$

definită prin $\varphi(f) = (p_M \circ f, p_N \circ f)$ şi care este o bijecţie. Deci cardinalul $(\mathbf{m}\,\mathbf{n})^{\mathbf{p}}$ al mulţimii $(M \times N)^P$ coincide cu cardinalul $\mathbf{m}^{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n}^{\mathbf{p}}$, al mulţimii $M^P \times N^P$.

7.3 Compararea numerelor cardinale. Alte mulţimi numărabile

Am văzut că problema principală care ne-a condus la construirea numerelor cardinale pornea de la necesitatea de a compara două mulţimi din punctul de vedere al numărului lor de elemente. Pentru mulţimile finite, această problemă este oarecum rezolvată, deoarece am văzut că două mulţimi finite sînt cardinal echivalente dacă şi numai dacă au acelaşi număr de elemente. În plus, petru mulţimile finite echivalente, numărul cardinal corespunzător lor este un număr natural şi noi putem să comparăm numerele naturale după mărimea lor. Vom introduce acum o ordonare după mărime între numere cardinale oarecare, ordine care în cazul numerelor cardinale finite coincide cu ordonarea după mărime a numerelor naturale.

7.3.1. *Definiţie.* **Fie a şi b două numere cardinale. Vom spune că a este** *mai mic* **decît b dacă există mulţimile $A \in$ a şi $B \in$ b astfel încît A este cardinal echivalentă cu o submulţime $B' \subset B$.** Pentru a arăta că **a** este mai mic decît **b** vom utiliza notaţia **a** $\leqslant$ **b.**

În această definiţie, după cum arată şi notaţia, prin expresia „mai mic" se înţelege că cele două numere cardinale pot fi eventual egale. De altfel vom vedea că această relaţie este o relaţie de ordine între numerele cardinale. Ea este într-adevăr reflexivă adică **a** $\leqslant$ **a** pentru că $A \sim A$ şi $A \subset A$. Este tranzitivă, adică **a** $\leqslant$ **b** şi **b** $\leqslant$ **c** $\Rightarrow$ **a** $\leqslant$ **c**, după cum se observă aplicînd doar definiţia 7.3.1. Proprietatea de antisimetrie a relaţiei de inegalitate între numerele cardinale, constituie însă un rezultat foarte profund de teoria mulţimilor, a cărui demonstraţie nu mai este atît de simplă. Acest rezultat face obiectul unei teoreme celebre numite „teorema lui Cantor şi Bernstein". Enunţul acestei teoreme este următorul:

7.3.2. *Teoremă.* **Dacă a şi b sînt două numere cardinale astfel încît a $\leqslant$ b şi b $\leqslant$ a atunci a = b.**

Nu vom da demonstraţia teoremei din cauza caracterului său ceva mai dificil, dar vom aplica teorema în cele ce urmează, căci ea ne va permite să obţinem multe rezultate importante din teoria mulţimilor.

7.3.3. *Propoziţie.* **$\aleph_0$ este cel mai mic număr cardinal infinit. Cu alte cuvinte, dacă a este un număr cardinal infinit oarecare, atunci $\aleph_0 \leqslant$ a.**

Demonstraţie. Fie A o mulţime infinită de cardinal **a**. Vom demonstra că există o funcţie injectivă

$$\varphi : N \rightarrow A$$

şi atunci vom avea $\mathbf{N} \sim \varphi(\mathbf{N}) = \mathbf{A}'$, iar A' este o submulţime a lui A. Construcţia funcţiei φ se face prin inducţie după $n \in \mathbf{N}$. Pentru că $A \neq \emptyset$, există $a_0 \in A$. Vom pune $\varphi(0) = a_0$. Mulţimea $A_1 = A \setminus \{a_0\}$ este şi ea nevidă, deci conţine un element a_1. Punem prin definiţie $\varphi(1) = a_1$.

Considerăm mulţimea $A_2 = A \setminus \{a_0, a_1\} \neq \emptyset$. Ea conţine un element a_2 şi definim $\varphi(2) = a_2$. Presupunem acum că am construit imaginea $\varphi(k) = a_k$ pentru toate numerele $k \leqslant n$. Atunci mulţimea

$\{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ este finită, inclusă în A. Mulţimea $A\setminus\{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ este nevidă căci în caz contrar am avea $A=\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}$ ceea ce contrazice faptul că A este infinită. Există un element $a_{n+1}\in A\setminus\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}$ şi punem $\varphi(n+1)=a_{n+1}$. În acest mod construim pe $\varphi(m)$ pentru orice $m\in \mathbf{N}$.

Funcţia φ este injectivă. Într-adevăr, să presupunem că există două numere $m,n\in\mathbf{N}$ astfel încît $\varphi(m)=\varphi(n)$ şi să presupunem prin absurd că $m\neq n$. Putem admite că $m<n$. Atunci ştim din construcţia lui φ că $\varphi(n)=a_n\in A\setminus\{a_0,a_1,\ldots,a_m,\ldots,a_{n-1}\}$ deci nu e posibil să avem $a_n=a_m=\varphi(m)$. Rezultă că nu se poate să avem $m\neq n$ şi $\varphi(m)=\varphi(n)$, deci φ e injectivă. Cu aceasta, propoziţia este demonstrată.

Propoziţia 7.3.3. este cunoscută în teoria mulţimilor sub denumirea de *teorema lui Dedekind*. Ea are foarte numeroase consecinţe care vin să întregească comportarea ,,paradoxală" a numerelor cardinale infinite. Iată cîteva dintre ele:

7.3.4. *Consecinţă.* Dacă $\mathbf{a}$ este un cardinal infinit, atunci

$$\mathbf{a}+\aleph_0=\mathbf{a}.$$

Demonstraţie. Există o submulţime numărabilă A', $A'\subset A$. Atunci $A=A'\cup(A\setminus A')$ implică $A\cup\mathbf{N}=A'\cup\mathbf{N}\cup(A\setminus A')$. Fie $\mathbf{a}'$ cardinalul mulţimii $A\setminus A'$. Presupunem că $A\cap\mathbf{N}=\emptyset$. Prima egalitate de mulţimi $A=A'\cup(A\setminus A')$ ne arată că $\mathbf{a}=\aleph_0+\mathbf{a}'$ iar egalitatea $A\cup\mathbf{N}=A'\cup\mathbf{N}\cup(A\setminus A')$ ne arată că $\mathbf{a}+\aleph_0=\aleph_0+\aleph_0+\mathbf{a}'$. Dar $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$, conform exerciţiului 6.5.2. Atunci $\mathbf{a}+\aleph_0=\aleph_0+\mathbf{a}'=\mathbf{a}$.

7.3.5. *Corolar.* **Dacă la o mulţime infinită adăugăm un număr finit de elemente, cardinalul său nu se schimbă.**

Demonstraţie. Fie $\mathbf{a}$ cardinalul mulţimii A, unde A este infinită. Fie M o mulţime finită cu m elemente astfel încît $M\cap A=\emptyset$. Atunci $M\cup A$ are cardinalul $m+\mathbf{a}$. Dar $\mathbf{a}=\mathbf{a}+\aleph_0$, deci $\mathbf{a}+m=(\mathbf{a}+\aleph_0)+m=\mathbf{a}+(\aleph_0+m)=\mathbf{a}+\aleph_0=\mathbf{a}$. Am presupus aici că $\aleph_0+m=\aleph_0$. Aceasta rezultă din faptul că există o bijecţie între mulţimile $\mathbf{N}\cup M$ şi $\mathbf{N}$ $(\mathbf{N}\cap M=\emptyset)$ definită astfel: dacă $M=\{x_1,\ldots,x_m\}$

$$\varphi:\{x_1,x_2,\ldots,x_m,0,1,2,\ldots,n,\ldots\}\to\{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$$

$$\varphi(x_i)=i-1 \text{ pentru } 1\leqslant i\leqslant m, \text{ şi}$$

$$\varphi(0)=m,\varphi(1)=m+1,\ldots,\varphi(k)=m+k,\ldots$$

Cînd am studiat proprietățile mulțimilor finite, am demonstrat că o mulțime A nu este echivalentă cu nici o submulțime proprie a sa (vezi Corolarul 6.2.8). Vom vedea acum că dacă o mulțime este infinită, ea nu are această proprietate.

7.3.6. *Corolar*. **O mulțime A este infinită dacă și numai dacă ea este echivalentă cu o submulțime proprie a sa.**

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm doar implicația: „dacă A este infinită, A este echivalentă cu o submulțime proprie a sa". Conform teoremei lui Dedekind, putem scrie pe A sub forma unei reuniuni disjuncte $A = A' \cup A''$ unde A' este numărabilă. Atunci $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}} + \overline{\overline{A''}} = \aleph_0 + \overline{\overline{A''}}$. Pentru că A' este numărabilă, ea se poate scrie sub forma $A' = A'_1 \cup A'_2$ unde A'_1 și A'_2 sînt numărabile și disjuncte, deci $\overline{\overline{A'_1}} = \overline{\overline{A'_2}} = \aleph_0$. Atunci $A'' \cup A'_1$ este o submulțime proprie a lui A și echivalentă cu A pentru că $\overline{\overline{A'' \cup A'_1}} = \overline{\overline{A''}} + \aleph_0 = \overline{\overline{A}}$.

Implicația reciprocă rezultă din 6.2.8.

7.3.7. *Corolar*. **Mulțimea numerelor prime este numărabilă.**

Demonstrație. Fie P mulțimea numerelor prime și $\mathbf{a}$ cardinalul său. Pentru că $P \subset \mathbf{N}$ avem $\mathbf{a} \leqslant \aleph_0$. Vom arăta că P este o mulțime infinită și atunci conform 7.3.3 vom avea și relația $\aleph_0 \leqslant \mathbf{a}$. Aplicînd apoi teorema lui Cantor-Bernstein va rezulta $\mathbf{a} = \aleph_0$. Arătăm că P este infinită prin reducere la absurd. Presupunem că P este finită și conține n elemente:

$$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}.$$

Numărul natural $q = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ nu aparține lui P și este prim, căci nu este divizibil cu nici unul din numerele prime aparținînd lui P. Aceasta contrazice faptul că P conține toate numerele prime; deci ipoteza asupra lui P este contradictorie. Rezultă că P este infinită. Această demonstrație a infinității numerelor prime a fost dată de însuși Euclid.

7.3.8. În general propoziția 7.3.3 combinată cu teorema 7.3.2, ne arată că pentru a demonstra că o mulțime A de cardinal $\mathbf{a}$ este numărabilă, este suficient să arătăm că A este infinită și că există o funcție injectivă $\varphi: A \to \mathbf{N}$, căci atunci rezultă că $\mathbf{a}$ este mai mic decît cardinalul lui $\mathbf{N}$, $\mathbf{a} \leqslant \aleph_0$. Pentru că avem și $\aleph_0 \leqslant \mathbf{a}$ rezultă $\mathbf{a} = \aleph_0$. O aplicație a acestui principiu a constituit-o chiar corolarul precedent. Alte aplicații ale acestui principiu se găsesc la exerciții.

7.3.9. *Teoremă*. **Dacă $\{A_n\}_{n \geqslant 0}$ este o familie numărabilă de mulțimi numărabile disjuncte, atunci $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ este numărabilă.**

Demonstrație. Presupunem că elementele mulțimilor A_i sînt scrise într-un șir

$$A_1 = \{a_0^0, a_1^0, \ldots, a_n^0, \ldots\}$$
$$A_2 = \{a_0^2, a_1^2, \ldots, a_n^2, \ldots\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = \{a_0^n, a_1^n, \ldots, a_n^n, \ldots\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Există atunci o funcție bijectivă $\varphi: \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \to \mathbf{N}\times\mathbf{N}$, definită astfel: $\varphi(a_j^i) = (i,j)$. Bijectivitatea aceasta rezultă din faptul că am presupus că $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$, deci nu se poate ca două elemente a_j^i și a_l^k să fie egale fără ca să avem $i = k$ și $j = l$. Atunci cardinalul mulțimii $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ este egal cu cardinalul lui $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, care este $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ (conform (6.4.4.)).

7.3.10. *Teoremă.* **Mulțimea $\mathbf{Q}$ a numerelor raționale este numărabilă.**

Demonstrație. Fie $\mathbf{Q}_+$ mulțimea numerelor raționale, strict pozitive. Definim o funcție $f: \mathbf{Q}_+ \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ în modul următor: fie $x \in \mathbf{Q}_+$; atunci x se scrie în mod unic sub forma $x = \frac{a}{b}$, unde a și b sînt numere naturale pozitive prime între ele (avînd cel mai mare divizor comun egal cu 1). Vom pune prin definiție $f(x) = f\left(\frac{a}{b}\right) = (a,b)$. Cum funcția f este evident injectivă, rezultă din 7.3.1 că $\overline{\overline{\mathbf{Q}_+}} \leqslant \aleph_0$. Pe de altă parte, $\mathbf{Q}_+$ este infinită, deoarece $\mathbf{Q}_+ \supset \mathbf{N}\setminus\{0\}$, deci $\overline{\overline{\mathbf{Q}_+}} \geqslant \aleph_0$. Rezultă atunci din teorema Cantor-Bernstein 7.3.2 că $\overline{\overline{\mathbf{Q}_+}} = \aleph_0$. În mod analog se vede că mulțimea $\mathbf{Q}_-$ a numerelor raționale negative este numărabilă. Conform exercițiului 7.5.2, mulțimea $\mathbf{Q}_+ \cup \mathbf{Q}_-$ este de asemenea numărabilă, iar din corolarul 6.3.5 rezultă că mulțimea

$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_+ \cup \mathbf{Q}_-) \cup \{0\}$ are de asemenea cardinalul $\aleph_0$.

7.3.11. *Teoremă.* **Dacă A este o mulțime de cardinal a, atunci mulțimea părților lui A are cardinalul** (2^{a})

Demonstrație. Să considerăm mulțimea $\{0,1\}$ care conține două elemente. Construim o funcție

$$\varphi: \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$$

astfel: dacă $A' \subset A$, îi asociem prin φ funcţia $\varphi_{A'}: A \to \{0,1\}$ care stabileşte corespondenţa

$$\varphi_{A'}(a) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } a \in A' \\ 0 \text{ dacă } a \notin A'. \end{cases}$$

Funcţia $\varphi_{A'}$ se numeşte *funcţia caracteristică* a mulţimii A'. Dacă $\varphi_{A'} = \varphi_{A''}$ rezultă că $\varphi_{A'}$ şi $\varphi_{A''}$ iau valoarea 1 pentru aceleaşi elemente ale lui A, deci $A' = A''$. Aşadar φ este injectivă. Ea este şi surjectivă căci oricărei funcţii f: $A \to \{0,1\}$ îi găsim o preimagine A' astfel încît $\varphi_{A'} = f$ şi anume $A' = f^{-1}(\{1\}) = \{a \in A / f(a) = 1\}$

7.3.12. *Teoremă* (Cantor). **Pentru orice număr cardinal a, avem a $<$ 2^{a} (adică a $\leqslant 2^{\mathrm{a}}$ şi a $\neq 2^{\mathrm{a}}$).**

Demonstraţie. Inegalitatea **a** $\leqslant 2^{\mathrm{a}}$ rezultă din construcţia unei funcţii injective $\varphi : A \to \mathcal{P}(A)$ definind $\varphi(a) = \{a\}$.

Să presupunem prin reducere la absurd că avem **a** $= 2^{\mathrm{a}}$. Aceasta înseamnă că există o bijecţie $\psi : A \to \mathcal{P}(A)$. Pentru un element $a \in A$, $\psi(a)$ este o submulţime a lui A, deci e posibil să avem $a \in \psi(a)$ sau $a \notin \psi(a)$. Să considerăm mulţimea $B = \{a \in A / a \notin \psi(a)\}$. Pentru că $B \in \mathcal{P}(A)$ şi ψ este surjectivă există un element $b \in A$ astfel încît să avem $\psi(b) = B$. Să vedem dacă acest element b aparţine sau nu lui B. Dacă $b \in B$, atunci din construcţia lui B avem că $b \notin \psi(b)$. Dar $\psi(b) = B$, deci $b \notin B$. Aceasta contrazice faptul că $b \in B$. Să presupunem acum că $b \notin B$. Tot din construcţia lui B rezultă că $b \in \psi(b) = B$, ceea ce contrazice faptul că $b \notin B$. Aşadar am construit o mulţime B şi un element $b \in A$ astfel încît nu avem nici $b \in B$ nici $b \notin B$, căci ambele situaţii ne conduc la contradicţii. Această contradicţie a lui B se datoreşte presupunerii că există bijecţia $\psi : A \to \mathcal{P}(A)$. Aşadar rămîne că **a** $\neq 2^{\mathrm{a}}$.

7.4. Puterea continuului

Toate exemplele de mulţimi infinite, pe care le-am considerat pînă acum, erau mulţimi numărabile. Am văzut însă în teoremele 7.3.11 şi 7.3.12 că mulţimea $\mathcal{P}(\mathrm{N})$ nu mai poate fi numărabilă căci cardinalul său este $2^{\aleph_0}$ şi $\aleph_0 \neq 2^{\aleph_0}$. Vom da acum şi alte exemple de mulţimi infinite care nu sînt numărabile.

7.4.1. *Teoremă.* **Mulţimea $I = [0,1]$ a numerelor reale cuprinse între zero şi unu nu este numărabilă.**

Demonstrație. Presupunem prin absurd că I este numărabilă, deci că există o funcție bijectivă $\theta : \mathbf{N} \to [0,1]$ care ne dă posibilitatea să aranjăm într-un șir toate numerele reale pozitive subunitare

$$I = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Orice număr real subunitar pozitiv se poate scrie însă sub forma unei fracții zecimale $0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$ unde α_i sînt cifre cuprinse între 0 și 9 $(0 \leqslant \alpha_i \leqslant 9)$.

De exemplu $1 = 0{,}999\ldots$ Atunci elementele lui I se scriu astfel:

$$a_1 = 0,\ a_1^1\ a_1^2\ a_1^3 \ldots a_1^n \ldots$$
$$a_2 = 0,\ a_2^1\ a_2^2\ a_2^3 \ldots a_2^n \ldots$$
$$a_3 = 0,\ a_3^1\ a_3^2\ a_3^3 \ldots a_3^n \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = 0,\ a_n^1\ a_n^2\ a_n^3 \ldots a_n^n \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Construim numărul real

$$b = 0,\ b_1\ b_2 \ldots b_n \ldots$$

$$\text{unde } b_i = \begin{cases} 2 \text{ dacă } a_i^i \neq 2 \\ 1 \text{ dacă } a_i^i = 2. \end{cases}$$

Numărul $b \in I = [0,1]$, deci există un indice k astfel încît $b = a_k$. Pentru că scrierea zecimală a lui b este unică, din $b = a_k$ rezultă că cifra zecimală de pe locul k în b și a_k este aceeași, adică $b_k = a_k^k$, ceea ce contrazice construcția lui b.

7.4.1.1. *Observație*. Mulțimea I conține mulțimea numărabilă

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Deci cardinalul lui I este mai mare decît $\aleph_0$.

Vom nota cu $\mathbf{c}$ cardinalul lui I. Acest cardinal se numește ***puterea continuului***. Între puterea continuului și alef zero există deci relația

$$\aleph_0 < \mathbf{c}$$

Un rezultat important cu privire la legătura dintre aceste două numere cardinale îl constituie faptul că $\mathbf{c} = 2^{\aleph_0}$. Nu vom demonstra acest rezultat pentru că necesită anumite considerații suplimentare de reprezentare zecimală a numerelor reale.

Teorema de mai sus aparţine lui Cantor şi ea poartă denumirea de *„procedeul diagonal al lui Cantor"*. Ea a fost punctul de plecare al lui Cantor în construcţia teoriei numerelor cardinale, căci i-a furnizat pentru prima dată un exemplu de mulţime infinită care nu este numărabilă, inspirîndu-i ideea unei ierarhizări după numărul de elemente chiar între mulţimile infinite.

7.4.1.2. Mulţimile $(0,1]$ şi $[0,1)$ au puterea continuului.

Într-adevăr, putem scrie că $I = \left(I \setminus \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n} \ldots\right\}\right) \cup$ $\cup \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ Dacă a este cardinalul lui $I \setminus \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots \right.$ $\left. \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ avem

$$\mathbf{c} = a + \aleph_0.$$

$$I - \{1\} = [0,1] = \left(I - \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n} \ldots\right\}$$

Deci cardinalul lui $[0,1]$ este $a + \aleph_0 = \mathbf{c}$. Analog pentru $(0,1]$.

7.4.2. *Teoremă.* **Orice interval $[a, b]$ are puterea continuului c.**

Demonstraţie. Funcţia $f: [0,1] \to [a, b]$ definită prin $f(x) = (b - a)x + a$ este bijectivă. Într-adevăr, cum $a < b$, avem $b - a \neq 0$. deci f este injectivă conform cu 4.5.3, a. În plus f este surjecţie deoarece orice număr $\theta \in [a, b]$ se scrie sub forma

$$\theta = (b - a)\frac{\theta - a}{b - a} + a = f\left(\frac{\theta - a}{b - a}\right) \text{ iar } 0 \leqslant \frac{\theta - a}{b - a} \leqslant 1.$$

7.4.2.1. Orice interval de forma $[a, b)$, $(a, b]$ sau (a, b) are puterea continuului.

7.4.3. *Teoremă.* **Mulţimea R a numerelor reale are puterea continuului.**

Demonstraţie. Funcţia

$$\mathrm{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$$

este bijectivă, deci **R** este echivalentă cu intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

7.5 Exerciţii

1) Folosind faptul că $2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$ să se arate că următoarele mulţimi au puterea continuului

a) Mulţimea $\mathbf{C}$ a numerelor complexe.
b) Mulţimea punctelor unui cerc.
c) Mulţimea punctelor de pe laturile unui pătrat.
d) Mulţimea punctelor din interiorul unui pătrat.
e) Mulţimea punctelor din interiorul unui cerc.
f) Mulţimea punctelor din interiorul unui cub.
g) Mulţimea punctelor din interiorul unei sfere.
h) Mulţimea punctelor de pe o sferă.

2) Să se arate că $\mathbf{c}^{\aleph_0} = \mathbf{c}$.

3) Considerăm mulţimea $A = \bigcup_{k \geqslant 0} \mathbf{N}^k$ unde $\mathbf{N}^k$ este produsul cartezian a k-mulţimi egale cu $\mathbf{N}$. Să se arate că A este numărabilă, construind o funcţie bijectivă $f : A \to \mathbf{N}$ (vezi exerciţiul 6.5.6).

4) Să se arate că mulţimea polinoamelor cu coeficienţi întregi este numărabilă. Analog pentru mulţimea polinoamelor cu coeficienţi raţionali.

5) Mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali are puterea continuului.

6) Mulţimea dreptelor din plan (spaţiu) care trec printr-un punct fix are puterea continuului.

7) Mulţimea dreptelor din plan care nu trec printr-un punct fix O are puterea continuului. Combinînd cu exerciţiul 7.5.6, să se arate că mulţimea dreptelor din plan are puterea continuului.

(*Indicaţie*: se asociază fiecărei drepte d, care nu trece prin O punctul M din plan, care este piciorul perpendicularei din O pe d. Această funcţie este o bijecţie. Generalizare la spaţiu.

8) Să se arate că mulţimea planelor din spaţiu are puterea continuului.

9) Intervalul (a, b) este echivalent cu mulţimea $(-\infty, a) \cup \cup (b, +\infty)$. Să se construiască o funcţie bijectivă între cele două mulţimi.

Capitolul III

Elemente de algebră

§ 1. Operații binare

1.1. Noțiunea de operație binară

1.1.1. *Definiție*. **Fie** M **o mulțime. O funcție** $\varphi : M \times M \to M$ **se numește** *operație binară* **sau** *lege de compoziție internă* **pe mulțimea** M.

1.1.2. *Exemple:*

a) Funcția $\varphi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, definită prin $\alpha(m, n) = m + n$* este o operație binară pe mulțimea numerelor naturale și este cunoscută sub numele de adunare a numerelor naturale. Alte exemple de aceeași natură sînt: adunarea numerelor întregi (raționale, reale, complexe), scăderea numerelor întregi (raționale, reale, complexe), înmulțirea numerelor naturale (întregi, raționale, reale, complexe).

Observăm că scăderea nu este operație binară pe mulțimea $\mathbf{N}$ deoarece rezultatul scăderii a două numere naturale nu este întotdeauna un număr natural. Asemănător, împărțirea nu este operație binară pe mulțimea $\mathbf{R}$ deoarece nu putem împărți un număr real la 0.

b) Fie T o mulțime. Funcția $\varphi : \mathcal{P}(T) \times \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, definită prin $\varphi(A, B) = A \cup B$, este o operație binară pe mulțimea $\mathcal{P}(T)$. Spunem că reuniunea este o operație binară pe mulțimea părților lui T. Asemănător putem observa că intersecția, diferența și diferența simetrică sînt operații binare în $\mathcal{P}(T)$.

c) Fie T o mulțime și $\mathcal{F}(T)$ mulțimea funcțiilor definite pe T cu valori în T. Funcția $\varphi: \mathcal{F}(T) \times \mathcal{F}(T) \to \mathcal{F}(T)$, definită prin $\varphi(f, g) = g \circ f$, este o operație binară pe mulțimea $\mathcal{F}(T)$.

d) Fie T o mulțime și $\mathcal{B}(T)$ mulțimea funcțiilor bijective definite pe T cu valori în T. Funcția $\varphi: \mathcal{B}(T) \times \mathcal{B}(T) \to \mathcal{B}(T)$, definită

---

* Pentru a simplifica notația în loc de $\varphi((m, n))$ am scris pe scurt $\varphi(m, n)$. Această simplificare a notației o vom utiliza curent în cele ce urmează.

prin $\varphi(f, g) = g \circ f$, este o operaţie binară pe mulţimea $\mathcal{B}(T)$ deoarece compunerea a două aplicaţii bijective este tot o aplicaţie bijectivă.

1.1.3. *Notaţie.* Dacă φ este o operaţie binară pe mulţimea M în loc de $\varphi(a, b)$ vom scrie $a \varphi b$ şi vom citi a „înmulţit" cu b sau a „adunat" cu b, sau a „compus" cu b.

Această notaţie este introdusă pentru a obţine scrierea uzuală. Într-adevăr obişnuim să scriem $a + b$, $a * b$ în loc de $+(a, b)$, $*(a, b)$.

Observăm că dăm un nou înţeles cuvintelor „înmulţit" respectiv „adunat". Dacă pînă în prezent aceste cuvinte erau folosite pentru anumite operaţii, în cele ce urmează ele vor fi folosite pentru o operaţie arbitrară.

În cele ce urmează, în loc de *operaţie binară* vom spune pur şi simplu operaţie, deoarece nu vom lucra cu alte tipuri de operaţii.

1.2. Operaţii asociative

1.2.1. *Definiţie.* **Fie $*: M \times M \to M$ o operaţie pe mulţimea M. Spunem că operaţia $*$ este *asociativă*, dacă oricare ar fi elementele a, b, c din M are loc egalitatea:**

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

Observăm că fără notaţia introdusă prin 1.1.3, egalitatea de mai sus eram obligaţi s-o scriem astfel:

$$*(a, *(b, c)) = *(*(a, b), c).$$

1.2.2. *Exemple*

a) Adunarea ca şi înmulţirea numerelor naturale (întregi, raţionale, reale, complexe) sînt operatii asociative.

Scăderea numerelor întregi (raţionale, reale, complexe) nu este operaţie asociativă (De ce?).

b) În $\mathcal{P}(T)$ reuniunea, intersecţia şi deferenţa simetrică sînt operaţii asociative, iar diferenţa nu este operaţie asociativă. (De ce?).

c) În $\mathcal{F}(T)$ şi $\mathcal{B}(T)$ operaţiile de compunere a funcţiilor (respectiv a funcţiilor bijective) sînt operaţii asociative.

1.2.3. *Definiţie.* **Fie $*$ o operaţie pe mulţimea M. Folosind inducţia vom defini înmulţirea unui şir finit de elemente din M prin egalitatea:**

$$a_1 * a_2 * \ldots * a_n = (a_1 * a_2 * \ldots * a_{n-1}) * a_n.$$

De exemplu,

$$a_1 * a_2 * a_3 * a_4 * a_5 = (a_1 * a_2 * a_3 * a_4) * a_5 =$$
$$= ((a_1 * a_2 * a_3) * a_4) * a_5 = (((a_1 * a_2) * a_3) * a_4) * a_5.$$

Cu alte cuvinte, cînd parantezele nu indică o altă ordine de efectuare a înmulţirilor, înmulţirile se efectuează de la stînga la dreapta.

1.2.4. *Lemă.* **Dacă $*$ este o operaţie asociativă pe mulţimea M, atunci**

$$a_1 * a_2 * \ldots * a_n = a_1 * (a_2 * \ldots * a_n).$$

Demonstraţie. Pentru $n = 3$ egalitatea rezultă imediat din cele două definiţii de mai sus. Raţionînd prin inducţie, vom proba egalitatea din enunţ presupunînd adevărată egalitatea:

$$a_1 * a_2 * \ldots * a_{n-1} = a_1 * (a_2 * \ldots * a_{n-1}).$$

Într-adevăr din definiţia 1.2.3 şi din egalitatea precedentă obţinem

$$a_1 * a_2 * \ldots * a_n = (a_1 * (a_2 * \ldots * a_{n-1}))) * a_n.$$

Folosind asociativitatea obţinem

$$a_1 * a_2 * \ldots * a_n = a_1 * ((a_2 * \ldots * a_{n-1}) * a_n)$$

de unde refolosind definiţia 1.2.3, obţinem egalitatea din enunţ.

1.2.5. *Teoremă.* **Dacă $*$ este o operaţie asociativă şi dacă $1 \leqslant k < n$, atunci**

$$a_1 * a_2 * \ldots * a_n = (a_1 * a_2 * \ldots * a_k) * (a_{k+1} * \ldots * a_n).$$

Demonstraţie. Observăm că pentru $k = 1$ egalitatea de mai sus este adevărată datorită lemei 1.2.4. Raţionînd prin inducţie, vom demonstra egalitatea din enunţ presupunînd că:

$$a_1 * a_2 * \ldots * a_n = (a_1 * a_2 * \ldots * a_{k-1}) * (a_k * \ldots * a_n).$$

Aplicînd lema în al doilea factor al membrului drept, obţinem:

$$a_1 * a_2 * \ldots * a_n = (a_1 * a_2 * \ldots * a_{k-1}) * (a_k * (a_{k+1} * \ldots * a_n)).$$

Folosind în membrul drept asociativitatea operaţiei $*$, rezultă că

$$a_1 * a_2 * \ldots * a_n = ((a_1 * a_2 * \ldots * a_{k-1}) * a_k) * (a_{k+1} * \ldots * a_n)$$

de unde folosind definiţia 1.2.3 în primul factor al membrului al doilea obţinem egalitatea din enunţ.

Teorema anterioară ne arată că dacă operaţia $*$ este asociativă, rezultatul produsului $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ nu se schimbă dacă efectuăm înmulţirile în orice ordine dorim fără însă a schimba ordinea factorilor.

1.3. Operaţii comutative

1.3.1. *Definiţie.* **O operaţie $*$ pe mulţimea M se numeşte** ***comutativă*** **dacă, oricare ar şi elementele a şi b din M, are loc egalitatea**

$$a * b = b * a.$$

1.3.2. *Exemple*

a) Adunarea ca şi înmulţirea numerelor naturale (întregi, raţionale, reale, complexe) sînt operaţii comutative.

b) În $\mathcal{P}(T)$ reuniunea, intersecţia şi diferenţa simetrică sînt operaţii comutative, dar diferenţa nu este comutativă.

c) În $\mathcal{F}(T)$ şi $\mathcal{B}(T)$ operaţiile de compunere a funcţiilor (respectiv a funcţiilor bijective) nu sînt comutative.

1.4. Element neutru

1.4.1. *Definiţie.* **Fie $*$ o operaţie pe mulţimea M. Un element $e \in M$ se numeşte** ***element neutru*** **faţă de operaţia $*$ dacă pentru orice element $a \in M$ au loc egalităţile**

$$a * e = e * a = a.$$

Observăm că dacă operaţia $*$ este comutativă, pentru a arăta că e este element neutru este suficient să probăm că $a * e = a$ sau $e * a = a$ pentru orice $a \in M$.

1.4.2. *Exemple*

a) Numărul 0 este element neutru faţă de operaţia de adunare a numerelor naturale (întregi, raţionale, reale, complexe).

Numărul 1 este element neutru faţă de operaţia de înmulţire a numerelor naturale (întregi, raţionale, reale, complexe).

b) În $\mathcal{P}(T)$ mulţimea vidă este element neutru pentru reuniune şi diferenţă simetrică, iar T este element neutru pentru intersecţie.

c) În $\mathcal{F}(T)$ și $\mathcal{B}(T)$ funcția $\mathbf{1}_T$ este element neutru pentru compunerea funcțiilor (respectiv a funcțiilor bijective).

1.4.3. *Teoremă.* **O operație $*$ pe mulțimea M nu poate avea decît cel mult un element neutru.**

Demonstrație. Vom presupune că operația $*$ are două elemente neutre e și e' și vom arăta că $e = e'$. Deoarece e este element neutru rezultă că $e * e' = e'$. Deoarece e' este element neutru rezultă că $e * e' = e$. Deci $e = e'$.

1.5. Omomorfisme și izomorfisme

1.5.1. *Definiție.* **Fie $*$ o operație pe mulțimea M și $\perp$ o operație pe mulțimea R. O aplicație h: $M \to R$ se numește *omomorfism* față de operațiile $*$ și $\perp$ dacă, oricare ar fi elementele a, b din M,**

$$h(a * b) = h(a) \perp h(b).$$

Așa cum, pentru a nota că h este o aplicație de la M în R, scriem h: $M \to R$, pentru a nota că h este un omomorfism față de operațiile $*$ și $\perp$ scriem h: $(M, *) \to (R, \perp)$.

1.5.2. *Exemple*

a) Toate aplicațiile de incluziune existente între mulțimile $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ sînt omomorfisme față de operațiile de adunare respectiv înmulțire.

b) Aplicația incluziune a lui $\mathcal{B}(T)$ în $\mathcal{F}(T)$ este omomorfism față de operațiile de compunere.

c) Dacă $*$ este operatie pe M atunci $\mathbf{1}_M$: $(M, *) \to (M, *)$ este un omomorfism.

d) Fie $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} | x > 0\}$. Aplicația log: $(\mathbf{R}^+, \cdot) \to (\mathbf{R}, +)$ este un omomorfism.

1.5.3. *Teoremă.* **Dacă f: $(M, *) \to (R, \perp)$ și g: $(R, \perp) \to (P, +)$ sînt omomorfisme atunci gf: $(M, *) \to (P, +)$ este un omomorfism.**

Demonstrație. Trebuie să arătăm că pentru orice $a \in M$ și $b \in M$, are loc egalitatea $gf(a * b) = gf(a) + gf(b)$.

Dar $gf(a * b) = g(f(a * b))$ din definiția compunerii funcțiilor. Deoarece f este omomorfism, rezultă că : $f(a * b) = f(a) \perp f(b)$, deci $g(f(a *$

$* b)) = g(f(a) \perp f(b))$. Deoarece g este omomorfism rezultă că: $g(f(a) \perp \perp f(b)) = g(f(a)) + g(f(b))$. Deci $gf(a * b) = gf(a) + gf(b)$.

1.5.4. *Definiție*. **Un omomorfism f: $(M, *) \to (R, \perp)$ se numește izomorfism dacă există un omomorfism g: $(R, \perp) \to (M, *)$ așa încît $g \circ f = 1_M$ și $f \circ g = 1_R$.**

1.5.5. *Teoremă*. **Un omomorfism f: $(M, *) \to (R, \perp)$ este izomorfism dacă și numai dacă f este bijecție.**

Demonstrație. Dacă f este izomorfism, rezultă că f este inversabilă deci este bijecție. Reciproc, dacă f este un omomorfism bijectiv, funcția f este inversabilă și deoarece $f^{-1} \circ f = 1_M$ și $f \circ f^{-1} = 1_R$ rezultă că este suficient să arătăm că f^{-1}: $R \to M$ este omomorfism. Fie $a \in \in R$ și $b \in R$. Deoarece $f^{-1}(a) \in M$, $f^{-1}(b) \in M$ și f este omomorfism rezultă că $f(f^{-1}(a) * f^{-1}(b)) = f(f^{-1}(a)) \perp f(f^{-1}(b)) = a \perp b$. Aplicînd pe f^{-1} obținem:

$$f^{-1}(a \perp b) = f^{-1}(f(f^{-1}(a) * f^{-1}(b))) = f^{-1}(a) * f^{-1}(b)$$

deci f^{-1} este un omomorfism.

1.5.6. *Exemple*.

a) 1_M : $(M, *) \to (M, *)$ esre un izomorfism.

b) Omomorfismul din exemplul 1.5.2. *d*) este un izomorfism (cf. 2.2.3.1).

1.6. Congruențe

1.6.1. *Definiție*. **Fie $*$ o operație pe M. O relație de echivalență ρ pe M se numește *congruență* față de operația $*$, dacă oricare ar fi a, b, c și d elemente din M**

$$(a \,\rho\, b) \,\&\, (c \,\rho\, d) \Rightarrow (a * c) \,\rho\, (b * d).$$

Uneori în loc de a spune că ρ este congruență pe M față de $*$ se spune că relația de echivalență ρ este *compatibilă* cu operația $*$.

1.6.2. *Exemplu*. Fie $n \in \mathbf{N}$ și $\rho = \{(a, b) \mid a \in \mathbf{Z} \,\&\, b \in \mathbf{Z} \,\&\, (\exists x)(x \in \mathbf{Z} \,\&\, a - b = xn)\}$. Altfel spus ρ este relația de echivalență pe $\mathbf{Z}$ formată din toate perechile ordonate (a, b) pentru care diferența $a - b$ este un multiplu al lui n. Vom arăta că ρ este o congruență față de adunarea din $\mathbf{Z}$ și față de înmulțirea din $\mathbf{Z}$. Fie a, b, c și d patru numere întregi așa încît $a\rho b$ și $c\rho d$, adică există $x \in \mathbf{Z}$ și $y \in \mathbf{Z}$ așa încît $a - b = xn$ și $c - d = yn$. Deoarece $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) = xn + yn = (x + y)n$ rezultă că $(a + c)\ \rho\ (b + d)$ adică ρ este o congruență față de adunarea din $\mathbf{Z}$. Deoarece $ac = (b + xn) \cdot (d + yn) = bd + byn + dxn + xyn^2$ rezultă că $ac - bd = (by + dx + xyn)n$, deci $ac\ \rho\ bd$, adică ρ este o congruență față de înmulțirea din $\mathbf{Z}$.

Această congruență se numește *congruența* modulo n a numerelor întregi și se notează $a \equiv b$ (mod. n) (citim a este congruent cu b modulo n).

1.6.3. *Teoremă*. **Dacă $*$ este o operație pe M și ρ o congruență pe M față de $*$, atunci în mulțimea cît M/ρ putem defini o operație așa încît surjecția canonică p: $M \to M/\rho$ să fie un omomorfism.**

Demonstrație. Vom defini o operație $\perp$ pe M/ρ prin:

$$[x]_\rho \perp [y]_\rho = [x * y]_\rho$$

adică alegem un element, de exemplu x, din clasa $[x]_\rho$ și un element, de exemplu y, din clasa $[y]_\rho$, înmulțim aceste elemente în M și apoi luăm clasa $[x * y]_\rho$ a rezultatului înmulțirii din M. Ori de cîte ori dăm o astfel de definiție trebuie să verificăm corectitudinea ei, mai exact trebuie să arătăm că dacă luăm alt element x' din clasa $[x]_\rho$ și un alt element y' al clasei $[y]_\rho$ și formăm produsul lor în M, $x' * y'$, atunci $[x' * y']_\rho = [x * y]_\rho$. Într-adevăr, x' fiind un element al clasei $[x]_\rho$ rezultă că $x'\rho x$, y' fiind un element al clasei $[y]_\rho$ rezultă că $y'\rho y$ și ținînd cont de faptul că ρ este o congruență (vezi definiția 1.6.1) rezultă că $(x' * y')\ \rho (x * y)$ adică $[x' * y']_\rho = [x * y]_\rho$. Surjecția canonică p: $M \to M/\rho$ definită prin $p(x) = [x]_\rho$ este un omomorfism deoarece chiar din definiția operației $\perp$ rezultă că $p(x * y) = p(x) \perp p(y)$.

Vom spune că $\perp$ este operația pe M/ρ *indusă* de operația $*$.

1.6.4. *Teoremă*. **Dacă $*$ este o operație comutativă pe M și ρ o congruență pe M față de $*$, atunci operația indusă $\perp$ pe M/ρ este comutativă.**

Demonstrație

$$[x]_\rho \perp [y]_\rho = [x * y]_\rho = [y * x]_\rho = [y]_\rho \perp [x]_\rho.$$

1.6.5. *Teoremă*. **Dacă $*$ este o operație asociativă pe M și ρ o congruență pe M față de $*$, atunci operația indusă $\perp$ pe M/ρ este asociativă.**

Demonstrație

$$([x]_\rho \perp [y]_\rho) \perp [z]_\rho = [x * y]_\rho \perp [z]_\rho = [(x * y) * z]_\rho =$$
$$= [x * (y * z)]_\rho = [x]_\rho \perp [y * z]_\rho = [x]_\rho \perp ([y]_\rho \perp [z]_\rho).$$

1.6.6. *T e o r e m ă.* **Dacă $*$ este o operație pe M, $e \in M$ element neutru pentru $*$ și ρ o congruență pe M față de $*$ atunci $[e]_\rho$ este element neutru pentru operația indusă $\perp$.**

Demonstrație. Într-adevăr $[x]_\rho \perp [e]_\rho = [x * e]_\rho = [x]_\rho$ și

$$[e]_\rho \perp [x]_\rho = [e * x]_\rho = [x]_\rho.$$

1.7. Exerciții

1) Fie φ o operație pe $\mathbf{R}$ definită prin $\varphi(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Să se arate că φ este comutativă, asociativă și are un element neutru.
Să se arate că h: $(\mathbf{R}, +) \to (\mathbf{R}, \varphi)$ definit prin $h(x) = \sqrt[3]{x}$ este un izomorfism.

2) Fie $M = \{a, b, c, d\}$ și $*$ o operație pe M definită prin tabela

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c.

Să se arate că $*$ este comutativă, asociativă și are element neutru.

3) Fie $M = \{a, b, c, d\}$ și $*$ o operație pe M definită prin tabela

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a.

Să se arate că $*$ este comutativă, asociativă și are element neutru.

4) Fie $*$ o operație pe M și $\perp$ o operație pe N. În $M \times N$ introducem operația $\top$ definită prin $(a, b) \top (c, d) = (a * c, b \perp d)$. Să se arate că:

a) dacă $*$ și $\perp$ sînt asociative, atunci $\top$ este asociativă;

b) dacă $*$ și $\perp$ sînt comutative, atunci $\top$ este comutativă;

c) dacă $*$ și $\perp$ au elemente neutre, atunci $\top$ are element neutru.

1.7.5. În $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ introducem operația $*$ definită prin

$$(a, b) * (c, d) = (a + c\pi^b, b + d)$$

Să se arate că $*$ este asociativă și are element neutru dar nu este comutativă.

§ 2. Grupuri

2.1. Noțiunea de grup

2.1.1. *Definiție.* **Fie M o mulțime pe care s-a definit o operație binară, asociativă, notată $*$ și care are elementul neutru e. Elementul $x \in M$ se numește** ***inversabil*** **dacă există un element $x' \in M$ astfel încît**

$$x * x' = x' * x = e.$$

Elementul x' se numește ***inversul*** **(*opusul*) lui x.**

2.1.2. *Propoziție.* **Dacă x este inversabil, atunci inversul său x' este unic.**

Demonstrație. Fie x', x'' două elemente ale lui M astfel încît $x * x' = x' * x = e$ și $x * x'' = x'' * x = e$. Avem $x'' * (x * x') = x'' * e = x''$. Pe de altă parte $x'' * (x * x') = (x'' * x) * x' = e * x' = x'$. Deci $x' = x''$.

2.1.3. *Definiție.* **Se numește** ***grup*** **o mulțime G înzestrată cu o operație binară $*$, asociativă care posedă un element neutru e și în raport cu care orice element $x \in G$ este inversabil.**

Uneori se spune despre o mulțime G care este grup în raport cu o operație binară că este înzestrată cu o structură (algebrică) de grup.

În general, într-un grup oarecare G, elementul $x * y$ se notează xy și se numește *produsul* lui x cu y. Această notație generică, îmbracă diverse forme particulare în cazuri concrete. De exemplu, mulțimile $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ sînt grupuri în raport cu operația de adunare a numerelor întregi, raţionale, reale sau complexe. Atunci vom nota elementul $x * y$ cu $x + y$. Tot ca problemă de notaţie, într-un grup oarecare vom nota de obicei cu x^{-1} inversul lui x. În grupuri concrete, notaţia aceasta se poate schimba. De exemplu în $\mathbf{Z}$, opusul lui 2 este -2.

2.1.4. *Exemple de grupuri.* În afară de exemplele de mai sus, propunem cititorului să verifice că următoarele mulţimi împreună cu operaţiile menţionate au structură de grup.

2.1.4.1. Mulţimea $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}\setminus\{0\}$ în care operaţia binară este înmulţirea numerelor raţionale. Analog pentru $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{C}^*$.

2.1.4.2. Mulţimea $\mathbf{Q}^+ = \{x \in \mathbf{Q}/x > 0\}$ a numerelor raţionale pozitive împreună cu operaţia de înmulţire. Analog pentru $\mathbf{R}^+$.

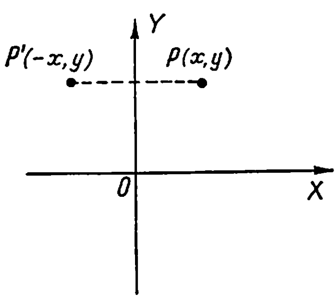
2.1.4.3. Mulţimea $S^1 = \{z \in \mathbf{C}/|z| = 1\}$ a numerelor complexe de modul, 1, împreună cu înmulţirea numerelor complexe.

2.1.4.4. Mulţimea $U_n = \{z \in \mathbf{C}/z^n = 1\}$ a rădăcinilor complexe de ordin n ale unităţii împreună cu înmulţirea numerelor complexe.

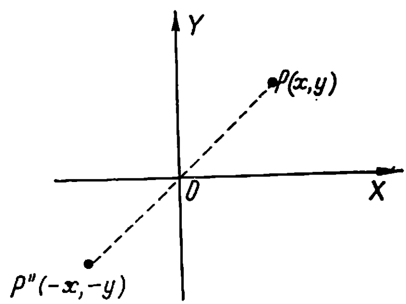
2.1.4.5. Mulţimea $U = \{z \in \mathbf{C} / (\exists n) (n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \ \&\ z^n = 1)\}$ împreună cu înmulţirea numerelor complexe.

2.1.4.6. Mulţimea $\mathbf{Z}[i] = \{z \in \mathbf{C} / z = a + bi, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}\}$ este un grup în care operaţia binară este adunarea numerelor complexe.

2.1.4.7. Considerăm mulţimea $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ a tuturor perechilor de numere reale şi funcţiile $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definite astfel $\alpha = 1_{\mathbf{R}^2}$, β, γ, δ unde $\beta(x, y) = (-x, y)$, $\gamma(x, y) = (-x, -y)$, $\delta(x, y) = (x, -y)$. Ţinînd cont de faptul că mulţimea $\mathbf{R}^2$ are ca imagine geometrică mulţimea punctelor din plan, fiecărei perechi $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ corespunzîndu-i în plan punctul P de abscisa x şi ordonată y, funcţiile α, β, γ, δ au şi ele interpretări. Astfel α este funcţia identică, β este simetria faţă de axa OY, γ este simetria faţă de origină, iar δ este simetria faţă de



β



γ

axa OX. Față de compunerea funcțiilor cele patru funcții formează un grup (grupul lui Klein)*.

2.1.4.8. Fie M o mulțime oarecare. Mulțimea $\mathcal{B}(M)$ a tuturor funcțiilor bijective definite pe M cu valori în M este un grup, în care operația binară este compunerea funcțiilor.

2.1.5. *Proprietăți ale elementelor unui grup.*

2.1.5.1. *Propoziție.* **Dacă G este grup și $x \in G$, atunci inversul lui x^{-1} este x, adică $(x^{-1})^{-1} = x$.**

Demonstrație. Din definiția inversului știm că inversul lui x^{-1} este unicul element z din G care satisface relațiile $x^{-1}z = z\ x^{-1} = e$. Dacă luăm $z = x$, avem $x^{-1}x = x\ x^{-1} = e$, deci $(x^{-1})^{-1} = x$.

2.1.5.2. *Propoziție.* **Inversul elementului xy este $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.**

Demonstrație. $(xy)\,(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})\,x^{-1} = xex^{-1} = xx^{-1} = e$ și analog $(y^{-1}x^{-1})\,(xy) = e$. Deci $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

2.1.5.3. *Propoziție.* **Dacă notăm cu x^n produsul a n elemente egale cu x, adică $x^n = xx\ldots x$ și $x^{-n} = (x^{-1})^n$, atunci $(x^n)^{-1} = x^{-n}$.**

Demonstrație. $x^n x^{-n} = \underbrace{(x\ldots x)}_{n\text{-ori}}\underbrace{(x^{-1}\ldots x^{-1})}_{n\text{-ori}} = \underbrace{(x\ldots x)}_{n-1\text{ ori}}(xx^{-1})\cdot$ $\underbrace{(x^{-1}\ldots x^{-1})}_{n-1\text{ ori}} = (x\ldots x)\,e\,(x^{-1}\ldots x^{-1}) = x^{n-1}x^{-(n-1)}$. În continuare procedăm prin inducție și în final obținem $x^n x^{-n} = x^{n-1}x^{-(n-1)} = \ldots = xx^{-1} = e$.

2.1.5.4. *Propoziție.* **Pentru $m, n \in \mathbf{Z}$, și $x \in G$ avem**

$$x^m x^n = x^{m+n}.$$

Demonstrație. Dacă m, n sînt pozitive, egalitatea rezultă din definiția lui x^n. Dacă unul din numerele m, n este negativ se folosește (2.1.5.3) utilizînd inducția.

2.1.6. *Definiție.* **Dacă în grupul G operația binară este comutativă, adică**

$$xy = yx \quad \forall\ x, y \in G,$$

atunci G se numește *grup comutativ* **sau** *grup abelian.*

---

* Felix Klein (1849–1925), ilustru matematician german.

Grupul din exemplul 2.1.4.8. nu este comutativ. Toate celelalte grupuri menționate mai înainte sînt abeliene.

2.1.7. *Grupul claselor de resturi modulo n*. Fie $n \in \mathbf{N}^*$. În exemplul 1.6.2 am definit congruența modulo n a numerelor întregi. Mulțimea cît $\mathbf{Z} / \equiv$ a lui $\mathbf{Z}$ prin această congruență o vom nota cu $\mathbf{Z}_n$. Conform teoremei 1.6.3, operația de adunare din $\mathbf{Z}$ induce o operație pe $\mathbf{Z}_n$ numită suma modulo n pe care o vom nota cu $\oplus$ așa încît surjecția canonică p: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$ este un omomorfism față de operațiile $+$ și $\oplus$. Teorema 1.6.5 ne arată că suma modulo n este o operație asociativă. Teorema 1.6.4 ne arată că suma modulo n este o operație comutativă. Teorema 1.6.6. ne arată că $[0]$ este element neutru pentru suma modulo n. Deoarece se verifică ușor că $[-x]$ este opus pentru $[x]$ față de suma modulo n, conchidem că $\mathbf{Z}_n$ împreună cu suma modulo n este un grup abelian, pe care-l vom numi *grupul claselor de resturi modulo n*.

Grupul $\mathbf{Z}_n$ conține n elemente:

$$
\begin{aligned}
&[0] = 0 + n\mathbf{Z} = n\mathbf{Z} = \{nk \mid k \in \mathbf{Z}\},\\
&[1] = 1 + n\mathbf{Z} = \{nk + 1 \mid k \in \mathbf{Z}\} = \{nk \mid k \in \mathbf{Z}\},\\
&[2] = 2 + n\mathbf{Z} = \{nk + 2 \mid k \in \mathbf{Z}\},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&[n-1] = (n-1) + n\mathbf{Z} = \{nk + (n-1) \mid k \in \mathbf{Z}\}.
\end{aligned}
$$

Din teorema 1.6.3 rezultă că

$$[j] \oplus [k] = [j + k].$$

De exemplu, pentru $n = 2$ avem $[0] = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots \pm 2k, \dots\}$, $[1] = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2k + 1), \dots\}$, $\mathbf{Z}_2 = \{[0], [1]\}$, $[0] \oplus [0] = [0]$, $[0] \oplus [1] = [1]$, $[1] \oplus [0] = [1]$ și $[1] \oplus [1] = [0]$.

2.2. Omomorfisme și izomorfisme de grupuri

2.2.1. *Definiție*. **Fie G și G' două grupuri față de operațiile binare $*$ respectiv $\perp$. Se numește** *omomorfism* **(respectiv,** *izomorfism*) **de grupuri de la G la G', orice omomorfism (respectiv, izomorfism) față de operațiile $*$ și $\perp$, în sensul definiției** 1.5.1. **(în sensul definiției 1.5.4).**

Cu alte cuvinte, un omomorfism de grupuri h: $(G, *) \to (G', \perp)$ este o aplicație h: $G \to G'$ astfel încît pentru orice $x, y \in G$ avem $h(x * y) = h(x) \perp h(y)$. Conform teoremei 1.5.5, omomorfismul h este izomorfism dacă și numai dacă h este bijecție.

De multe ori atît operația grupului G, cît și operația grupului G' se notează la fel, de exemplu ca un produs, astfel încît condiția de omomorfism se scrie pur şi simplu $f(xy) = f(x) f(y)$. În cele ce urmează vom adopta uneori această simplificare a notaţiei.

2.2.2. *Propoziţie.* **Dacă $h: G \to G'$ este omomorfism de grupuri, $e \in G$ elementul neutru în G şi $e' \in G'$ elementul neutru în G', atunci $h(e) = e'$ şi pentru orice $x \in G$, $h(x^{-1}) = (h(x))^{-1}$.**

Demonstraţie. În G avem relaţia $e \cdot e = e$. Aplicînd funcţia h, avem $h(e \cdot e) = h(e) \cdot h(e)$. Înmulţind cu $(h(e))^{-1}$ avem $h(e) = h(e)^{-1} \cdot h(e) = e'$. Pentru a arăta că $h(x^{-1}) = (h(x))^{-1}$, vom arăta că $h(x^{-1})$ este inversul lui $h(x)$ în G'. Într-adevăr, $h(x) \cdot h(x^{-1}) = h(xx^{-1}) = h(e) = e'$ şi analog $h(x^{-1}) \cdot h(x) = e'$. Propoziţia este astfel demonstrată.

2.2.3. *Exemple de omomorfisme şi izomorfisme*

2.2.3.1. Considerăm grupurile $(\mathbf{R}, +)$ şi $(\mathbf{R}^+, \cdot)$. În primul grup operaţia binară este adunarea iar în al doilea — înmulţirea. Fie a un număr real pozitiv, $a \neq 1$. Funcţia logaritmică $\log_a: (\mathbf{R}^+, \cdot) \to (\mathbf{R}, +)$ este un omomorfism de grupuri pentru că $\log_a (xy) = \log_a (x) + \log_a (y)$. Funcţia exponenţială $\exp: (\mathbf{R}, +) \to (\mathbf{R}^+, \cdot)$ definită prin $\exp (x) = a^x$ este un omomorfism de grupuri pentru că $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. În plus avem $\log_a (a^x) = x$ şi $a^{\log_a x} = x$, deci cele două omomorfisme sînt inverse unul altuia. Ele sînt deci izomorfisme.

2.2.3.2. Funcţia $f: G \to G'$ definită prin $f(x) = e'$ oricare ar fi $x \in G$ este omomorfism de grupuri. Acest omomorfism se numeşte *omomorfismul nul.*

2.2.3.3. Funcţia identică $1_G: G \to G$ este un izomorfism de grupuri.

2.2.3.4. Funcţia $p_n: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ dată de $p_n(x) = nx$ este omomorfism căci pentru orice pereche de numere întregi x, y avem

$$n(x + y) = nx + ny$$

adică

$$p_n(x + y) = p_n(x) + p_n(y).$$

2.3. Subgrupuri

2.3.1. *Definiţie.* **Fie G un grup şi $H \subset G$ o submulţime nevidă. Vom spune că H este *subgrup* al lui G, dacă pentru orice $x, y \in H$ avem $xy^{-1} \in H$.**

Dacă H este subgrup al lui G atunci pentru $x \in H$ avem $x \cdot x^{-1} = e \in H$. Deci H conţine elementul neutru al lui G. Dacă $x \in H$ atunci elementul $e \cdot x^{-1} = x^{-1} \in H$. Deci H conţine inversul oricărui element din H. Fie acum x, y două elemente din H; conform afirmației precedente, dacă $y \in H$ atunci $y^{-1} \in H$. Din definiția lui H, dacă $x \in H$ și $y^{-1} \in H$ rezultă că $xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$. Deci produsul a două elemente aparținînd lui H este un element care aparține lui H.

Să considerăm funcția $\varphi: G \times G \to G$ — operația binară care definește pe mulțimea G structura de grup. Deci $\varphi(x, y) = xy$. Dacă perechea $(x, y) \in H \times H$, atunci conform afirmației de mai sus avem $\varphi(x, y) = xy \in H$. Deci $\varphi/_{H\times H}$ restricția lui φ la $H \times H$ ia valori chiar în mulțimea H. În concluzie, această nouă funcție $\psi: H \times H \to H$, definită prin $\psi(x, y) = \varphi(x, y) = xy$ definește pe H o operație binară. Această operație se numește *restricția la H a operației binare din G*. În raport cu operația astfel obținută, H este un grup. Este evident că operația e asociativă. Ea are element neutru căci am văzut că $e \in H$ și orice element $x \in H$ este inversabil în H pentru că inversul său în G, x^{-1}, este chiar element al lui H deci și în H avem $x \cdot x^{-1} = x^{-1} x = e$.

În consecință am demonstrat aici următoarea teoremă.

2.3.2. *Teoremă*. **Dacă G este un grup și $H \subset G$ un subgrup al său, atunci H este grup în raport cu operația obținută prin restricția la H a operației din G.**

Această teoremă justifică și denumirea de subgrup, în sensul că H nu este doar o submulțime a lui G; H este chiar un grup iar operația binară a lui H este exact operația din G în sensul că efectuăm produsul a două elemente din H considerîndu-le ca elemente din G, iar rezultatul obținut este chiar un element din H.

2.3.3. *Exemple de subgrupuri*

2.3.3.1. În orice grup G, mulțimea $\{e\}$ este un subgrup. De asemenea G este subgrup al lui G.

2.3.3.2. Am văzut că fiecare din mulțimile $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ formează grup față de adunare; $\mathbf{Z}$ este subgrup al lui $\mathbf{Q}$, acesta este subgrup al lui $\mathbf{R}$, iar $\mathbf{R}$ este subgrup al lui $\mathbf{C}$. O observație analoagă este valabilă pentru grupurile $\mathbf{Q}^*$, $\mathbf{R}^*$ și $\mathbf{C}^*$ din exemplul 2.1.4.1.

2.3.3.3. Dacă $n \in \mathbf{Z}$ este un număr întreg atunci $n\mathbf{Z} = \{nk/k \in \mathbf{Z}\}$ este subgrup al lui $\mathbf{Z}$.

Este adevărată și proprietatea reciprocă: pentru orice subgrup H al lui $\mathbf{Z}$ există un număr întreg $n \in H$ astfel încît $H = n\mathbf{Z}$. Să demonstrăm acest lucru. Dacă $H = \{0\}$, luăm $n = 0$ și $H = n\mathbf{Z}$. În caz contrar există în H un număr întreg $m \neq 0$, deci un număr pozitiv (dacă $m < 0$ atunci $-m \in H$ pentru că H este subgrup). Fie n cel mai mic număr întreg pozitiv nenul care aparține lui H. Orice multiplu al lui n este de forma $kn = n + \ldots + n$ sau $kn = -(n + \ldots + n)$ deci aparţine lui H. Aşadar $n\mathbf{Z} \subset H$. Dacă $x \in H$, conform teoremei de împărţire cu rest pentru numere întregi, există un cît q şi un rest r în $\mathbf{Z}$ astfel încît $x = nq + r$ şi $0 \leqslant r < n$. Dacă $r \neq 0$ avem $r = x - nq \in H$, ceea ce contrazice faptul că n este cel mai mic element pozitiv nenul din H. Deci $r = 0$, adică $x = nq \in n\mathbf{Z}$. În consecinţă $H = n\mathbf{Z}$.

2.3.4. *Observaţie.* Dacă H este subgrup al grupului G, incluziunea $\mathrm{I}_{HG}: H \to G$, definită prin $\mathrm{I}_{HG}(x) = x$ pentru orice $x \in H$, este un omomorfism de grupuri.

2.4. Exerciţii

1) Să se arate că grupul U_n este izomorf cu grupul $\mathbf{Z}_n$ (cf. 2.1.4.4, 2.1.7). $\left(\text{Indicaţie: } h\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}\right) = [k].\right)$

2) Să se arate că mulţimea $M = \{a, b, c, d\}$ împreună cu operaţia binară de la exerciţiul 1.7.3 este grup şi că acest grup este izomorf cu grupul simetriilor definit la exemplul 2.1.4.7 (Grupul lui Klein.)

3) Să se arate că operaţia de grup din $\mathbf{Z}_3$ este dată de tabela alăturată unde pentru simplificare am notat x în loc de $[x]$.

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

4) Să se arate că orice grup cu 3 elemente este izomorf cu $\mathbf{Z}_3$.

5) Orice grup cu 4 elemente este izomorf cu grupul lui Klein sau cu grupul $\mathbf{Z}_4$. Grupul lui Klein şi grupul $\mathbf{Z}_4$ nu sînt izomorfe.

6) Orice grup cu 5 elemente este izomorf cu grupul $\mathbf{Z}_5$.

7) Să se arate că dacă $M = \{a_1, a_2, a_3\}$ este o mulţime cu 3 elemente atunci grupul $\mathcal{B}(M)$ este necomutativ şi are şase elemente. Să considerăm în $\mathcal{B}(M)$ funcţiile: π_1, π_2, π_3 unde $\pi_1 = \mathbf{1}_M$, $\pi_2(a_1) = a_2$, $\pi_2(a_2) = a_3$, $\pi_2(a_3) = a_1$, $\pi_3(a_1) = a_3$, $\pi_3(a_2) = a_1$, $\pi_3(a_3) = a_2$. Să se arate că $H = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ este subgrup în $\mathcal{B}(M)$.

§ 3. Inele

3.1. Noțiunea de inel

3.1.1. *Definiție*. **Fie I o mulțime înzestrată cu două operații binare, notate de obicei cu $+$ și respectiv cu $\cdot$ sau prin juxtapunere. Spunem că I are o structură de *inel* față de operațiile de adunare ($+$) și înmulțire ($\cdot$), dacă sînt satisfăcute următoarele proprietăți:**

(i) I este grup abelian față de adunare (cf. definiției 2.1.6);

(ii) înmulțirea este asociativă (cf. definiției 1.2.1);

(iii) înmulțirea este distributivă față de adunare (cf. (iii.1) și (iii.2) de mai jos).

În cazul unui inel I, grupul abelian $(I, +)$ se numește *grupul aditiv* al inelului, elementul neutru al acestui grup se notează de obicei cu 0 și se numește *elementul zero* al inelului, iar inversul față de adunare al unui element oarecare $x \in I$ se notează de obicei cu $-x$ și se mai numește elementul *opus* lui x. De asemenea, vom conveni că înmulțirea *leagă mai tare* decît adunarea, adică vom scrie $xy + z$ în loc de $(xy) + z$ etc. Cu aceste convenții, condițiile (i) — (iii) de mai sus se enunță explicit astfel:

(i.1) $x + y = y + x \qquad (\forall x, y \in \mathrm{I})$;

(i.2) $(x + y) + z = x + (y + z) \qquad (\forall x, y, z \in \mathrm{I})$;

(i.3) există un element $0 \in I$ (elementul zero) astfel încît

$$x + 0 = 0 + x = x \qquad (\forall\, x \in I);$$

(i.4) pentru orice $x \in I$, există elementul opus lui x, notat $-x \in I$, astfel încît

$$x + (-x) = (-x) + x = 0;$$

(ii) $(xy)z = x(yz) \qquad (\forall\, x, y, z \in I)$;
(iii.1) $x(y + z) = xy + xz \qquad (\forall\, x, y, z \in I)$;
(iii.2) $(y + z)x = yx + zx \qquad (\forall\, x, y, z \in I)$.

3.1.2. *Exemple*

3.1.2.1. Fiecare din mulțimile $\mathbf{Z}$, $\mathbf{O}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, formează inel față de operațiile de adunare și înmulțire obișnuite, elementul zero fiind chiar numărul 0.

3.1.2.2. Dacă $n \in \mathbf{Z}$ este un număr întreg, atunci $n\mathbf{Z} = \{nk \mid k \in \mathbf{Z}\}$ este inel față de adunarea și înmulțirea obișnuită, elementul zero fiind chiar numărul 0. Pentru $n = 1$ acest inel este chiar $\mathbf{Z}$; pentru $n = 2$, avem $2\,\mathbf{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\}$; etc.

3.1.2.3. Mulţimea $\mathbf{Z}_n$ a claselor de resturi modulo n este inel faţă de operaţiile de adunare $[j] \oplus [k] = [j + k]$ şi înmulţire $[j]\odot[k] = [jk]$, elementul zero fiind clasa $[0] = n\mathbf{Z}$. Condiţia (i) este probată la 2.1.7, iar verificarea proprietăţilor (ii) şi (iii) din definiţia 3.1.1 este imediată şi rămîne pe seama cititorului. Nu trebuie să confundăm inelele $n\mathbf{Z}$ şi $\mathbf{Z}_n$; astfel, am văzut mai sus că $2\mathbf{Z}$ are ca elemente toate numerele pare, pe cînd $\mathbf{Z}_2 = \{[0], [1]\}$. Inelul $\mathbf{Z}_n$ se numeşte *inelul claselor de resturi modulo n.*

3.1.2.4. Anticipînd asupra cunoştinţelor ce vor fi predate în anul III, semnalăm cu mulţimea $M_n(\mathbf{Z})$ a matricilor de un ordin dat n cu coeficienţi întregi, formează un inel faţă de operaţiile de adunare şi înmulţire a matricilor, elementul zero fiind matricea care are toate elementele nule. De asemenea mulţimile $M_n(\mathbf{Q})$, $M_n(\mathbf{R})$ şi $M_n(\mathbf{C})$ ale matricilor de ordinul n cu coeficienţi raţionali, respectiv reali, respectiv complexi, faţă de aceleaşi operaţii şi cu acelaşi element zero.

3.1.3. *Definiţie.* **Se numeşte** *inel comutativ,* **orice inel** I **în care înmulţirea este comutativă, adică**

$$xy = yx$$

pentru orice $x, y \in I$. **Se numeşte** *inel cu element unitate,* **orice inel** I **în care există un element** $1 \in I$ **neutru faţă de înmulţire, adică astfel încît**

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

pentru orice $x \in I$; **elementul** 1 **poartă în acest caz numele de** *element unitate.*

Astfel, inelele din exemplele 3.1.2.1 şi 3.1.2.3 sînt comutative şi cu element unitate (acesta este chiar numărul 1 pentru inelele 3.1.2.1 şi respectiv clasa [1] în cazul 3.1.2.3). Inelul $n\mathbf{Z}$ din exemplul 3.1.2.2 este comutativ dar fără element unitate pentru $n \neq 1$, iar inelele din exemplul 3.1.2.4 sînt necomutative dar cu element unitate (matricea $\|\delta_{i,j}\|_{i,j,=1,\dots,n}$ unde $\delta_{ii} = 1$ iar $\delta_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$).

3.1.3.1. *Observaţie.* Orice mulţime $\{a\}$ formată dintr-un singur element este inel comutativ cu element unitate faţă de operaţiile $+$ şi $\cdot$ definite prin $a + a = a \cdot a = a$.

3.1.4. *Proprietăţi ale elementelor unui inel*

În paragrafele precedente am stabilit cîteva proprietăţi ale elementelor unui grup; evident, ele sînt în particular valabile pentru grupul aditiv al unui inel I. Astfel, aplicînd rezultatele din 2.1., putem introduce adunarea şi înmulţirea repetată, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ şi respectiv $x_1 x_2 \ldots x_n$. Elementul zero al inelului este unic, conform teoremei 1.4.3. Ştim din propoziţia 2.1.2 că opusul $-x$ al unui element oarecare $x \in I$ este unic determinat de x. Propoziţia 2.1.5.1. ne arată că $-(-x) = x$, iar din propoziţia 2.1.5.2 rezultă că $-(x + y) = (-x) + (-y)$. Dacă notăm cu nx suma a n elemente egale cu x, adică $nx = x + x + \ldots + x$, şi $(-n)\,x = n\,(-x)$, atunci $-(nx) = (-n)\,x$ conform propoziţiei 2.1.5.3. În plus, propoziţia 2.1.5.4 arată că $(mx) + (nx) = (m + n)x$ pentru orice $x \in I$ şi $m, n \in \mathbf{Z}$. Avem de asemenea cîteva proprietăţi noi.

3.1.4.1. *Propoziţie*. **Oricare ar fi elementele x, y ale unui inel I, avem:**

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = x,$$

$$(-x)\,y = x\,(-y) = -(xy),$$

$$(-x)\,(-y) = xy.$$

Demonstraţie. Din $x = x + 0$ rezultă $x \cdot x = x \cdot (x + 0) = x \cdot x + x \cdot 0$, deci $(-(x \cdot x)) + x \cdot x = (-(x \cdot x)) + (x \cdot x + x \cdot 0)$, prin urmare $0 = [(-(x \cdot x)) + x \cdot x] + x \cdot 0 = 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0$. La fel se arată că $0 \cdot x = 0$.

Mai departe vom observa că $(-x)\,y + xy = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0$ şi la fel $xy + (-x)\,y = 0$, ceea ce înseamnă că $(-x)\,y$ este opusul elementului xy (unic determinat de xy), adică $(-x)\,y = -(xy)$. Analog se arată că $x(-y) = -(xy)$. Urmează că $(-x)\cdot(-y) = -(x(-y)) = -(-xy) = xy$.

Propoziţia 3.1.4.1 ne permite să notăm fără echivoc elementul $(-x)y = x(-y) = -(xy)$ cu $-xy$. De asemenea, vom scrie simplu $x - y$ în loc de $x + (-y)$ şi $-x + y$ în loc de $(-x) + y$. De exemplu, proprietatea (i.4) o vom scrie $x - x = -x + x = 0$, iar în loc de $(-x) + (-y)$ vom scrie $-x - y$, astfel încît $-(x + y) = -x - y$. Mai mult:

3.1.4.2. *Corolar*. **Înmulţirea este *distributivă* faţă de scădere, adică pentru orice $x, y, z \in I$ avem**

$$x(y - z) = xy - xz \text{ şi } (y - z)\,x = yx - zx.$$

Demonstraţie. Aplicînd distributivitatea şi propoziţia 3.1.4.1 avem $x(y - z) = xy + x(-z) = xy - xz$ şi la fel $(y - z)\,x = yx - zx$.

3.1.4.3. *Corolar*. **Dacă inelul I nu se reduce la un singur element, atunci** $0 \neq 1$.

Demonstrație. Dacă $0 = 1$, atunci pentru orice $x \in I$ avem $x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$.

3.2. Omomorfisme și izomorfisme de inele

3.2.1. *Definiție*. **Fie I un inel față de adunarea $+$ și înmulțirea $\cdot$, iar I' un inel față de adunarea $\oplus$ și înmulțirea $\odot$. Se numește** *omomorfism* **(respectiv,** *izomorfism*) **de inele de la I la I', orice aplicație $h: I \to I'$ care este omomorfism (respectiv, izomorfism), atît pentru operațiile de adunare cît și pentru operațiile de înmulțire;** cf. 1.5.1 (respectiv, 1.5.4.)

Cu alte cuvinte, un omomorfism de inele $h:(I, +, \cdot) \to (I \oplus, \odot)$ este o aplicație $h: I \to I'$ astfel încît

$$h(x + y) = h(x) \oplus h(y),$$

$$h(x \cdot y) = h(x) \odot h(y),$$

pentru orice $x, y \in I$. Din teorema 1.5.5 rezultă că omomofismul de inele h este izomorfism de inele, dacă și numai dacă h este bijecție.

Din propoziția 2.2.2 rezultă că orice omomorfism de inele h satisface $h(0) = 0'$ și $h(-x) = \ominus h(x)$.

3.2.2. *Exemple de omomorfisme și izomorfisme*

3.2.2.1. Funcția $h: I \to I'$ definită prin $f(x) = 0'$ (elementul zero din I') oricare ar fi $x \in I$, este omomorfism de inele. Acest omomorfism se numește *omomorfismul nul* (cf. 2.2.3.2).

3.2.2.2. Funcția identică $\mathbf{1}_I : I \to I$ este izomorfism de inele (cf. 2.2.3.3).

Funcția $p_n: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ din exemplul 2.2.3.4 nu este omomorfism de inele (De ce?).

3.3. Subinele

3.3.1. *Definiție*. **Fie I un inel și $H \subset I$ o submulțime nevidă. Vom spune că H este** *subinel* **al lui I, dacă H este subgrup al grupului aditiv** $(I, +)$ (cf. 2.3.1) **și în plus, pentru orice $x, y \in H$ avem $xy \in H$.**

3.3.2. *Teoremă.* **Dacă I este un inel și $H \subset I$ un subinel al său atunci H este inel în raport cu operațiile obținute prin restricțiile la H ale operațiilor din I.**

Demonstrație. Din definiția subinelului este clar că restricțiile la H ale operațiilor din I sînt operații binare definite pe H; ele vor fi notate tot cu $+$ și $\cdot$. Rămîne acum să arătăm că față de aceste operații H verifică proprietățile (i) — (iii) din definiția 3.1.1. Într-adevăr (i) rezultă din teorema 2.3.2 din a cărei demonstrație se mai vede că elementul 0 din H coincide cu elementul 0 din I, iar opusul $-x$ al unui element $x \in H$ coincide cu opusul $-x$ considerat în I. Pentru a demonstra proprietățile (ii) și (iii), să considerăm elementele x, y, $z \in H$; atunci cu atît mai mult $x, y, z \in I$ care este inel, deci $x(yz) = (xy)z$, $x(y+z) = xy + xz$ și $(y+z)x = yx + zx$.

3.3.3. *Exemple de subinele*

3.3.3.1. În orice inel I, mulțimea $\{0\}$ este un subinel; de asemenea I este un subinel al lui I (cf. 2.3.3.1).

3.3.3.2. Am văzut în exemplul 3.1.2.1 că fiecare din mulțimile $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ formează inel față de operațiile de adunare și înmulțire. $\mathbf{Z}$ este subinel al lui $\mathbf{Q}$, acesta este subinel al lui $\mathbf{R}$, iar $\mathbf{R}$ este subinel al lui $\mathbf{C}$.

3.3.3.3. Pentru orice număr întreg n, inelul $n\mathbf{Z}$ din exemplul 2.3.3.3 este subinel al lui $\mathbf{Z}$. În particular, $0\mathbf{Z} = \{0\}$, iar $1 \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$.

3.3.4. *Observație.* Dacă H este un subinel al inelului I, incluziunea $\cdot\, \mathbf{I}_{HG}: H \to G$, definită prin $\mathbf{I}_{HG}(x) = x$ pentru orice $x \in H$, este un omomorfism de inele.

3.4. Exerciții

1) Să se arate că operațiile inelului claselor de resturi modulo 3 sînt date de tabelele alăturate, unde pentru simplificare am notat x în loc de $\lfloor x \rfloor$ (conform 2.4.3). Să se construiască tabelele operațiilor inelelor claselor de resturi modulo 4 și modulo 5.

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\odot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

2) Fie M o mulțime nevidă. Atunci mulțimea $\mathcal{P}(M)$ a tuturor părților lui M formează un inel comutativ cu element unitate față de operațiile Δ (diferența simetrică) în rolul adunării și $\cap$ (intersecția) în rolul înmulțirii. Elementul zero este $\emptyset$, opusul unui element $X \subset M$ este chiar X, elementul unitate este M. Vezi subparagraful 2.4 din cap. II.

3) Dacă mulțimea M conține un singur element, inelul $\mathcal{P}(M)$ din exercițiul precedent este izomorf cu $\mathbf{Z}_2$.

4) (facultativ). Dacă I este un inel cu element unitate, atunci mulțimea $M_n(I)$ a tuturor matricilor de ordinul n cu elemente din I este inel cu element unitate. Acest inel este necomutativ (cf. 3.1.2.4).

5) Mulțimea $\mathbf{Z}$ (sau $\mathbf{Q}$, sau $\mathbf{R}$, sau $\mathbf{C}$) formează inel față de adunarea obișnuită $+$ și înmulțirea $*$ definită prin $x * y = 0$ pentru orice x, y. Generalizare.

§ 4. Corpuri

4.1. Noțiunea de corp

4.1.1. *Definiție*. **Fie K o mulțime înzestrată cu două aplicații binare, notate de obicei cu $+$ și respectiv $\cdot$. Spunem că mulțimea K are o structură de *corp* față de operațiile de adunare $(+)$ și $(\cdot)$ dacă sînt satisfăcute următoarele condiții:**

(i) K are cel puțin două elemente distincte.

(ii) K este inel cu element unitate față de adunare și înmulțire.

(iii) Dacă $x \in K$ și $x \neq 0$ (0 elementul zero al inelului K) atunci există un element $x^{-1} \in K$ astfel încît $x x^{-1} = x^{-1} x = 1$ (1 elementul unitate al inelului K). Elementul x^{-1} se numește *inversul* elementului x.

În definiția 4.1.1 n-am presupus nimic asupra comutativității inelului. Dacă inelul K este comutativ, atunci vom spune că avem de a face cu un *corp comutativ*; în caz contrar vom spune: K este un *corp necomutativ*.

Condițiile (i) — (iii) se enunță explicit în modul următor:

(i) K are cel puțin două elemente;

(ii.1) $x + y = y + x \quad (\forall x, y \in K)$;

(ii.2) $(x + y) + z = x + (y + z) \quad (\forall x, y, z \in K)$;

(ii.3) există un element $0 \in K$ (elementul zero) astfel încît

$$x + 0 = 0 + x = x \qquad (\forall x \in K);$$

(ii.4) pentru orice $x \in K$ există elementul opus lui x, notat $-x \in K$, astfel încît

$$x + (-x) = (-x) + x = 0;$$

(ii.5) $(xy)z = x(yz)$ $\qquad (\forall x, y, z \in K)$;
(ii.6) $x(y+z) = xy + xz$ $\qquad \forall (x, y, z \in K)$;
(ii.7) $(y+z)x = yx + zx$ $\qquad (\forall x, y, z \in K)$;
(ii.8) există elementul $1 \in K$ (elementul unitate) astfel încît

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \qquad (\forall x \in K);$$

(iii) Pentru orice $x \neq 0$, există elementul invers x^{-1} astfel încît

$$x x^{-1} = x^{-1} x = 1.$$

4.1.2. *Exemple*

4.1.2.1. Fiecare din mulţimile $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ formează corpuri faţă de operaţiile de adunare şi înmulţire obişnuite, elementul zero şi elementul unitate fiind numerele 0 şi respectiv 1.

4.1.2.2. În cap. III, exemplul 3.1.2.3, s-a arătat că mulţimea $\mathbf{Z}_n$ a claselor de resturi modulo n este un inel comutativ şi are element unitate faţă de operaţiile de adunare $[j] \oplus [k] = [j+k]$ şi înmulţire $[j] \odot [k] = [jk]$. Să arătăm că dacă p este un număr prim, atunci $\mathbf{Z}_p$ este un corp.

Fie $[k]$ $(k > 0)$ un element nenul din $\mathbf{Z}_p$, deci k nu este un multiplu de p. Cum p este un număr prim, cel mai mare divizor comun dintre k şi p este egal cu 1.

Fie mulţimea $A = \{ak + bp \mid a, b$ numere întregi$\}$. Fie d cel mai mic număr întreg cu $d > 0$ care aparţine mulţimii A. Deci există două numere întregi a_0 şi b_0 astfel încît $d = a_0 k + b_0 p$. Aplicînd formula împărţirii dintre numerele p şi d obţinem: există două numere întregi q şi r pentru care $p = dq + r$ unde $0 \leqslant r < d$. Dar $r = p - dq = p - q(a_0 k + b_0 p) = (-a_0 q)k + (1 - qb_0)p$. Deci se observă că $r \in A$.

Sînt două cazuri: $r = 0$ şi $r > 0$.

Dacă $r > 0$, atunci cum $r < d$, obţinem o contradicţie, deoarece d era cel mai mic număr strict pozitiv ce aparţine mulţimii A.

Prin urmare rămîne numai cazul $r = 0$. În acest caz $p = dq$.

Acum aplicăm formula împărţirii dintre numerele k şi d. Deci există numerele întregi q_1 şi r_1 astfel încît $k = dq_1 + r_1$ unde $0 \leqslant r_1 < d$. Deci $r_1 = k - dq_1 = k - q_1(a_0 k + b_0 p) = (1 - q_1 a_0)k + (-q_1 b_0)p$.

Rezultă că $r_1 \in A$. Dacă $r_1 > 0$ obţinem o contradicţie, deoarece $r_1 < d$. Deci trebuie ca $0 = r_1$ şi prin urmare $k = dq_1$.

Din relaţiile $p = dq$ şi $k = dq_1$ obţinem că d divide pe p şi pe k. Însă p este prim; atunci $d = 1$ sau $d = p$. Dar $d = p$ nu poate să aibă loc, deoarece atunci p divide pe k ceea ce contrazice faptul că p şi k sînt prime între ele. Deci rămîne singura posibilitate $d = 1$. Prin urmare $1 = a_0k + b_0p$. Acum sîntem în măsură să arătăm că $\mathbf{Z}_p$ este corp.

Într-adevăr, din relaţia $1 = a_0k + b_0p$ obţinem că:
$[1] = [a_0k \oplus b_0p] = [a_0k] \oplus [b_0p] = [a_0] \odot [k] \oplus [b_0] \odot [p]$. Cum $[p] = [0]$ avem $[a_0] \odot [k] = [1]$ şi deci $[k]$ este un element inversabil în $\mathbf{Z}_p$. Prin urmare $\mathbf{Z}_p$ este un corp.

4.1.2.3. Fie $\mathbf{R}$ mulţimea numerelor reale. Notăm cu K mulţimea sistemelor ordonate de patru elemente din K, adică

$$K = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}\}.$$

Pe mulţimea K definim două operaţii, o adunare notată cu $\oplus$ şi o înmulţire notată cu $\odot$. Ele se definesc prin egalităţile:

$$(a, b, c, d) \oplus (a', a', c', d') = (a + a', b + b', c + c', d + d')$$

şi

$$(a, b, c, d) \odot (a', b', c', d') = (aa' - bb' - cc' - dd', ab' + ba' +$$
$$+ cd' - dc', ac' - bd' + ca' + db', ad' + bc' - cb' + da').$$

Se constată imediat că operaţia de adunare $\oplus$ defineşte pe K o structură de grup comutativ, unde elementul neutru este $(0,0,0,0)$ notat cu 0.

Se arată de asemenea foarte simplu că $\odot$ este asociativă, distributivă faţă de adunare şi are ca element unitate pe $(1, 0, 0, 0)$, notat cu 1. Deci K împreună cu operaţiile $\oplus$, $\odot$ formează un inel cu element unitate.

Funcţia $\varphi: \mathbf{R} \to K$ definită prin

$$\varphi(a) = (a, 0, 0, 0), \ a \in \mathbf{R},$$

este evident un omomorfism de inele, injectiv. În plus dacă x este un element oarecare din K atunci $\varphi(a) \odot x = x \odot \varphi(a)$.

Notăm cu

$$i = (0, 1, 0, 0), \ j = (0, 0, 1, 0), \ k = (0, 0, 0, 1),$$

elemente ce aparţin lui K.

Atunci dacă $x = (a, b, c, d)$ este un element oarecare din K, el se poate scrie mai simplu astfel:

$$x = \varphi(a) \oplus \varphi(b) \odot i \oplus \varphi(c) \odot j \oplus \varphi(d) \odot k.$$

Sau dacă facem convenţia ca elementele de forma $\varphi(a)$ să le scriem mai simplu a, atunci

$$x = a \oplus b \odot i \oplus c \odot j \oplus d \odot k.$$

Elementele i,j,k verifică formulele:

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$ (1 elementul unitate din K, adică $(1, 0, 0, 0)$)

$$i \odot j = -(j \odot i) = k;\ j \odot k = -(k \odot j) = i,\ k \odot i = -(i \odot k) = j.$$

Deci inelul K este necomutativ. Să dovedim că inelul K este un corp.

Fie $x \in K$ un element oarecare astfel încît $x \neq 0$ (0 elementul zero din K). Evident că dacă $x = (a, b, c, d) = a \oplus b \odot i \oplus c \odot j \oplus d \odot k$, atunci cel puţin unul dintre numerele a, b, c, d este nenul. Deci $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$.

Dacă notăm cu x' elementul din K definit prin egalitatea

$$x' = \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \oplus \frac{-b}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \odot i \oplus$$

$$\oplus \frac{-c}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \odot j \oplus \frac{-d}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \odot k$$

se verifică simplu că

$$x \odot x' = x' \odot x = 1.$$

Deci K este un corp necomutativ faţă de operaţiile $\oplus$ şi $\odot$.

Corpul K se numeşte *corpul cuaternionilor*; elementele lui se vor numi *cuaternioni*.

Elementele i,j,k se vor numi *unităţi cuaternionice*.

4.1.3. *Proprietăţi ale elementelor unui corp*

Cum un corp K este în particular un inel cu unitate, atunci evident că toate proprietăţile adevărate pentru unele sînt adevărate şi pentru corpuri. Vom mai semnala în plus cîteva proprietăţi.

4.1.3.1. *Propoziţie*. **Fie K un corp şi $x \in K$, $x \neq 0$. Atunci inversul x^{-1} este unic.**

Demonstraţie. Presupunem că mai există un invers $x' \in K$ al lui x. Deci $xx' = x'x = 1$. Dar atunci $x^{-1}(xx') = x^{-1}$, de unde obţinem $(x^{-1}x)\,x' = x^{-1}$ şi deci $1 \cdot x' = x^{-1}$, adică $x' = x^{-1}$. Prin urmare x^{-1} este unic (comparaţi cu 2.1.2.).

4.1.3.2. *Propoziţie*. **Fie K un corp şi x şi y două elemente din K. Dacă $xy = 0$, atunci $x = 0$ sau $y = 0$.**

Demonstrație. Dacă $x \neq 0$ atunci există inversul său x^{-1}. Atunci $x^{-1}(xy) = x^{-1} \cdot 0 = 0$. Sau, aplicînd asociativitatea înmulțirii, obținem $(x^{-1}x)\, y = 0$, de unde $y = 0$.

4.1.3.3. *Observație.* Notăm cu K^* mulțimea elementelor nenule din K, $K^* = K \setminus \{0\}$. Ținînd cont de condițiile (ii.5), (ii8.) și (iii) din definiția corpului se observă că K^* formează un grup (în general neabelian) față de operația de înmulțire. K^* se va numi *grupul multiplicativ* asociat corpului K.

4.1.3.4. *Exemplu.* Fie $\mathbf{Z}_p$ inelul de clase modulo p. Dacă $\mathbf{Z}_p$ este corp atunci p este un număr prim (reciproca proprietății 4.1.2.2).

Într-adevăr, presupunem că p nu este un număr prim deci $p = kj$ unde numerele k și j sînt distincte de ± 1, $\pm p$.

Atunci

$$[p] = [kj] = [k] \odot [j].$$

Cum $[p] = 0$, $[k] \odot [j] = 0$ și conform 4.1.3.2 rezultă $[k] = 0$ sau $[j] = 0$. Prin urmare k este multiplu de p sau j este multiplu de p; ceea ce este o contradicție. Prin urmare p este un număr prim.

4.2. Omomorfisme și izomorfisme de corpuri

4.2.1. *Propoziție.* **Fie K, un corp față de adunarea $+$ și înmulțirea $\cdot$, iar K' un corp față de adunarea $\oplus$ și înmulțirea $\odot$. Dacă $f\colon K \to K'$ este un omomorfism de inele, atunci sau f este omomorfismul nul sau** $f(1) = 1'$ (1 elementul unitate din K'). **Mai mult, în al doilea caz f este o funcție injectivă.**

Demonstrație. Presupunem că f nu este omomorfismul nul; deci există un element $x \in K$ astfel încît $f(x) \neq 0'$ ($0'$ elementul zero din K'). Deoarece f este omomorfism de inele, rezultă $x \neq 0$ (a se vedea 2.2.2.).

Dacă $f(1) = 0'$ atunci din egalitatea $x = x \cdot 1$ am obține că $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x) \odot f(1) = f(x) \odot 0' = 0'$, contradicție. Prin urmare $f(1) \neq 0'$. Cum $1 = 1 \cdot 1$ atunci $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \odot f(1)$, de unde $f(1) \odot (1' \ominus f(1)) = 0'$. Ținînd cont de 4.1.3.2 și de faptul că $f(1) \neq 0'$, rezultă că $1' \ominus f(1) = 0'$ și deci $f(1) = 1'$, ceea ce trebuia arătat.

Să dovedim în final că dacă $f(1) = 1'$, atunci f este injectivă.

Fie x_1, x_2 două elemente din K astfel încît $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci $f(x_1) \ominus f(x_2) = 0'$ sau, cum f este omomorfism, rezultă că $f(x_1 - x_2) = 0'$.

Dacă $x_1 \neq x_2$ atunci $x = x_1 - x_2 \neq 0$.

Fie x^{-1} inversul lui x, deci $1 = xx^{-1} = x^{-1} \cdot x$. Din această relație obținem:

$1' = f(1) = f(xx^{-1}) = f(x) \odot f(x^{-1}) = 0' \odot f(x^{-1}) = 0'$, ceea ce este o contradicție (f. 4.2.3.3). Prin urmare $x = 0$ și deci $x_1 = x_2$, adică f este o funcție injectivă.

4.2.2. *Definiție.* **Fie K un corp față de adunarea $+$ și înmulțirea $\cdot$, iar K' un corp față de adunarea $\oplus$ și înmulțirea $\odot$. Un** *omomorfism de corpuri* **de la K la K' este un omomorfism $f\colon K \to K'$ de inele care este diferit de omomorfismul nul, adică $f(1) = 1'$.**

f **se numește** *izomorfism de corpuri* **dacă este în plus și bijecție.**

4.2.3. *Observație.* 1 (Dacă $f\colon K \to K'$ este un omomorfism de corpuri, atunci din 4.2.1, f este o injecție. Deci pentru a arăta că f este izomorfism este suficient să arătăm că f este surjecție.

2) Dacă $x \in K$ este un element nenul, atunci $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$. ($(f(x))^{-1}$ inversul lui $f(x)$ în corpul K'), vezi 2.2.2.

3) Într-un corp avem $0 \neq 1$: rezultă aplicînd corolarul 3.1.4.3 și condiția (i) din definiția 4.1.1.

4.2.4. *Exemple.* 1) Fie K un corp; atunci funcția identică $1_K : K \to K$ este evident un izomorfism de corpuri.

2) Fie $\mathbf{C}$ corpul numerelor complexe și considerăm funcția $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definită prin egalitatea $f(z) = \bar{z}$ ($\bar{z}$ conjugatul lui z). Dacă z_1 z_2 sînt două numere complexe, este bine cunoscut că au loc egalitățile:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

Din aceste egalități se trage concluzia că f este omomorfism de corpuri. Cum f este o bijecție, rezultă în plus că f este un izomorfism de corpuri.

4.3. Subcorpuri

4.3.1. *Definiție.* **Fie K un corp. Un subinel $L \subset K$ care este corp se numește** *subcorp* **al lui K.**

Trebuie să observăm că elementul unitate al corpului K aparține lui L. Într-adevăr dacă 1_L este unitatea corpului L, atunci din egalitatea $1_L \cdot 1_L = 1_L \cdot 1$ obținem $1_L \cdot (1_L - 1) = 0$ și deci din 4.1.3.2 și 4.2.3.3 obținem că $1_L - 1 = 0$ adică $1_L = 1$.

De asemenea dacă $L \subset K$ este un subcorp al lui K și x un element din L, $x \neq 0$, atunci x^{-1} (inversul din x în K) este de asemenea un element din L. Într-adevăr dacă x' este inversul lui x în L atunci au loc egalitățile: $xx' = x'x = 1$ care ne arată că $x' = x^{-1}$.

Practic, pentru a dovedi că o submulțime nevidă $L \subset K$, a corpului K este un subcorp trebuie verificat că L este un subinel al lui K, că elementul unitate al corpului K aparține lui L și că pentru orice $x \in L$, $x \neq 0$, elementul $x^{-1} \in L$.

4.3.2. *Observație*. Dacă $L \subset K$ este un subcorp al lui K, atunci incluziunea $\mathbf{I}_{LK}: L \to K$ definită prin $\mathbf{I}_{LK}(x) = x$ pentru orice $x \in L$, este un omomorfism de corpuri.

4.3.3. *Exemple de subcorpuri*

Corpul $\mathbf{Q}$ al numerelor raționale este un subcorp al corpului numerelor reale. Corpul numerelor reale este un subcorp al numerelor complexe. De asemenea corpul numerelor raționale este un subcorp al corpului numerelor complexe. Operațiile în aceste corpuri sînt adunarea și înmulțirea obișnuite.

4.4. Exerciții

1) Fie A un inel comutativ cu element unitate, avînd un număr finit de elemente. Dacă A are proprietatea: $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $y = 0$, atunci A este corp.

2) Fie mulțimea $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$. Să se arate că față de operațiile obișnuite de adunare și înmulțire, $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ formează un corp.

3) Dacă $c \in \mathbf{Q}$ este astfel încît $\sqrt{c} \notin \mathbf{Q}$, atunci mulțimea $\mathbf{Q}(\sqrt{c}) = \{a + b\sqrt{c} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ formează un corp față de operațiile obișnuite de adunare și înmulțire a numerelor reale. Caz particular: exercițiul 2).

4) Dacă L este un subcorp al corpului K și K este un subcorp al corpului M, atunci să se arate că L este un subcorp al corpului M.

5) Dacă L, L' sînt două subcorpuri ale corpului K, atunci să se arate că $L \cap L'$ este un subcorp al corpului K.

6) Să se arate că singurul izomorfism al corpului $\mathbf{Q}$ în el însuşi este omomorfismul identic.

7) (facultativ) Să se arate că singurul izomorfism al corpului $\mathbf{R}$ în el însuşi este omomorfismul identic.

8) Să se arate că singurul omomorfism al corpului $\mathbf{Z}_p$ în el însuşi (p număr prim) este omomorfismul identic.

9) Fie $\mathbf{C}$ corpul numerelor complexe şi K corpul cuaternionilor. Definim funcţia

$$\psi: \mathbf{C} \to K$$

prin egalitatea: $\psi(a + ib) = a \oplus i \odot b \oplus j \odot 0 \oplus k \odot 0$ (notaţiile sînt cele din exemplul 4.1.2.3). Să se arate că ψ este un omomorfism de corpuri (injectiv).

Cuprins

Capitolul I

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

Capitolul II

TEORIA NAIVĂ A MULŢIMILOR

Coli tipo 9,75. Tiraj 4.200

Tiparul executat sub comanda
nr. 1042 la
Intreprinderea Poligrafică
„13 Decembrie 1918“
Str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97.
Bucureşti
Republica Socialistă România